



HAL
open science

Sur la solution d'un système linéaire aux différences associé au problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace

Claire Di Crescenzo

► **To cite this version:**

Claire Di Crescenzo. Sur la solution d'un système linéaire aux différences associé au problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00279812

HAL Id: tel-00279812

<https://theses.hal.science/tel-00279812>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences

de l'Université de GRENOBLE

pour obtenir

le titre de Docteur de troisième Cycle

"MATHEMATIQUES APPLIQUEES "

par

Claire DI CRESCENZO

"SUR LA SOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE AUX DIFFERENCES

ASSOCIE AU PROBLEME DE DIRICHLET POUR L'EQUATION DE LAPLACE "

Thèse soutenue le 19 mars 1966 devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN

Président

GASTINEL

)

Examineurs

HACQUES

)

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

DOYENS HONORAIRES

M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	MAGNETISME ET PHYSIQUE DU SOLIDE
DORIER A.	ZOOLOGIE
HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
CHABAUTY C.	CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL
PARDE M.	POTAMOLOGIE
BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
BESSON J.	ELECTROCHIMIE
WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
OZENDA P.	BOTANIQUE
FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
GALVANI O.	MATHEMATIQUES
MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE
TRAYNARD P.	CHIMIE
SOUTIF M.	PHYSIQUE
CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
GALLISSOT F.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Melle LUTZ E.	MATHEMATIQUES
MM. BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
ILLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
BONNIER E.	ELECTROCHIMIE
DESSAUX G.	PHYSIQUE ANIMALE
PILLET E.	ELECTROCHIMIE
DEBELMAS J.	GEOLOGIE
GERBER R.	MATHEMATIQUES
PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
VAUQUOIS B.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
BARBIER J. C.	PHYSIQUE
KPSZIII. J. I.	MATHEMATIQUES

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	LACASE A.	THERMODYNAMIQUE
Mme	KOFLER L.	BOTANIQUE
MM.	DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
	VAILLANT F.	ZOOLOGIE ET HYDROBIOLOGIE
	GIRAUD P.	GEOLOGIE
	GIDON P.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	ARNAUD P.	CHIMIE
	PERRET R.	SERVOMECHANISMES
Mme	LUMER L.	MATHEMATIQUES
Mme	BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
Mme	SOUTIF J.	PHYSIQUE
MM.	BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE
	COHEN J.	ELECTROCHIMIE
	DEPASSEL R.	MECANIQUE
	GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	LUMER G.	MATHEMATIQUES
	HIGUCHI	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE
	WAGNER	BOTANIQUE

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
	ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
	BIAREZ J. P.	MECANIQUE PHYSIQUE
	COUMES A.	ELECTRONIQUE
	DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES
	DUCROS P.	MINERALOGIE ET CRISTALLOGRAPHIE
	CLENAT P.	CHIMIE
	HACQUES G.	CALCUL NUMERIQUE
	LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
	PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
	KAHANE	PHYSIQUE GENERALE
	DOLIQUE	ELECTRONIQUE
Mme	KAHANE J.	PHYSIQUE
MM.	DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
	GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
	RASSAT A.	CHIMIE SYSTEMATIQUE
	KLEIN J.	MATHEMATIQUES
	BETHOUX P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
	DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	DEPORTES C.	CHIMIE
	BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Mme	BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
MM.	PERRIAUX J.	GEOLOGIE
	SARROT-REYNAULD	GEOLOGIE
	CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
	LABBE A.	BOTANIQUE
	BONNET G.	PHYSIQUE GENERALE
	BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE
Mme	BONNIER M. J.	CHIMIE

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	ISHIKAWA Y.	MAGNETISME
	QUATTROPANI	THERMODYNAMIQUE

SUR LA SOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE
AUX DIFFERENCES, ASSOCIE AU PROBLEME DE DIRICHLET
POUR $\Delta V = 0$

CHAPITRE I. Etude de la solution exacte du systeme linéaire aux différences pour un rectangle.

I. Le système relatif à un rectangle et sa solution exacte V_{ij}

II. Etude de l'expression V_{ij}

1. Simplification de l'expression.

2. Etude d'une approximation possible de

$$f_1(p) + f_2(q) \quad \text{par} \quad \psi_1(p) \cdot \psi_2(q)$$

III. Méthode directe de calcul des V_{ij}

1. Description de la méthode

2. Comparaison avec la solution exacte de l'équation différentielle.

3. Comparaison de la méthode directe et de la méthode de surrelaxation.

CHAPITRE II. Méthode de superposition appliquée à une réunion quelconque de rectangles.

I. Méthode de superposition pour la réunion de deux rectangles.

1. Position du problème
2. Détermination de Φ
3. Calcul de la solution dans G.
4. Utilisation de la méthode directe

II. Méthode de superposition appliquée à une réunion quelconque de rectangles.

1. Rectangles groupés autour d'un rectangle central R_0
2. Réunion quelconque de rectangles.
3. Programme ALGOL général et résultats numériques.

CHAPITRE III. Etude de l'erreur d'approximation dans un rectangle

- I. Position du problème
- II. Transformation de l'expression V_{ij}
- III. Erreur d'approximation

CHAPITRE IV. Simplification de la méthode directe : méthode directe sh

- I. Expression simplifiée de V_{ij}
- II. Etude numérique
- III. Comparaison avec la méthode de surrelaxation optimisée

Je remercie Monsieur le Professeur KUNTZMANN,
Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées
de GRENOBLE, de me faire l'honneur de présider le
Jury de cette thèse.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur
le Professeur GASTINEL qui a dirigé ce travail : a-
près en avoir suggéré l'idée, il en a suivi pas à
pas l'élaboration et en a permis l'achèvement par
ses conseils et ses encouragements variés.

Je remercie Monsieur HACQUES, Maître de Confé-
rences, de bien vouloir faire partie du Jury de cet-
te thèse.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de
Calcul de l'Université de GRENOBLE qui m'ont aidé
dans ce travail.

Nous nous proposons de résoudre numériquement l'équation différentielle $\Delta V = 0$ pour le problème de Dirichlet dans un domaine formé par une réunion quelconque de rectangles (à la condition toutefois, que ces rectangles aient tous leurs côtés parallèles à un système d'axes rectangulaires).

Nous résoudrons d'abord le problème pour un rectangle unique en calculant la solution exacte du système linéaire aux différences relatif à ce problème.

Nous étudierons les calculs numériques exigés par cette méthode directe et la comparerons à la méthode de surrelaxation. Puis nous l'appliquerons à la méthode de superposition résolvant le problème dans le cas d'une réunion finie de rectangles.

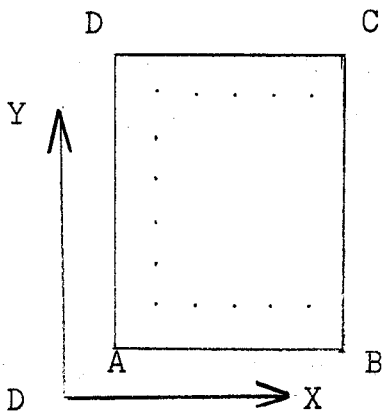
Nous ferons ensuite une étude de l'erreur d'approximation dans le cas d'un domaine rectangulaire.

ETUDE DE LA SOLUTION
EXACTE DU SYSTEME LINEAIRE AUX
DIFFERENCES POUR UN RECTANGLE

I. - LE SYSTEME RELATIF A UN RECTANGLE ET SA SOLUTION EXACTE

Soit un rectangle dont les bords sont parallèles au système d'axes rectangulaires \vec{O}_x, \vec{O}_y .

Soit h un "pas" contenu m+1 fois dans AB, CD et n+1 fois dans AD, BC.



Nous plaçons une grille à mailles carrées de côté h utilisant des parallèles aux axes. Nous disposons ainsi de mn noeuds intérieurs au rectangle.

Si A a pour coordonnées $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ il est clair que ces

noeuds sont les points

$$M_{ij} \begin{cases} x_0 + ih & 1 \leq i \leq m \\ y_0 + jh & 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

les points correspondants à

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 0, m + 1 \\ 0 \leq j \leq m + 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq m + 1 \\ j = 0, n + 1 \end{array} \right.$$

sont situés sur les côtés du rectangle, respectivement AD et BC et d'autre part AB et DC.

Supposons données en ces points des valeurs $f(x, y)$.

Nous voulons déterminer $V(x_0 + ih, y_0 + jh) = V_{ij}$ en les points intérieurs ou plus exactement une approximation en approchant la solution de $\Delta V = 0$ en ces points.

Pour approcher $\Delta V = 0$, nous prenons en tout point (i, j) , $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ la relation :

$$(1.1.1) \quad V_{i-1, j} + V_{i+1, j} - 4 V_{ij} + V_{i, j+1} + V_{i, j-1} = 0$$

Toutes les fois que dans (1.1) apparaît une valeur de V_{kl} sur un bord, nous la remplacerons par $f(x_k, y_l)$. Le système (1.1) se met alors sous la forme d'un système linéaire de mn équations à mn inconnues, les V_{ij} .

Choisissons un ordre pour numéroter ces inconnues : un des plus naturels est de poser $X_{i+m(j-1)} = V_{ij}$ et de prendre les X dans l'ordre croissant : X_1, X_2, \dots, X_{mn} . C'est-à-dire que nous numéroterons les inconnues par ligne, puis par colonne.

Il est alors immédiat de voir que le système (1.1.1) s'écrit sous la forme matricielle $AX = b$ où A est une matrice carrée d'ordre mn , X le vecteur colonne de composantes les X_1, \dots, X_{mn} , b un vecteur colonne de termes connus fonctions très simples des $f(x, y)$ sur les bords.

Cette égalité étant valable quel que soit i , $1 \leq i \leq m$ et quel que soit j , $1 \leq j \leq n$, ces deux quantités sont égales à une constante C .

f doit donc satisfaire à une équation de la forme

$$(1.1.3) \quad f(i+1) + f(i-1) - \left(2 + \frac{\lambda}{2} + C\right) f(i) = 0$$

et de même g doit satisfaire à une condition de la forme

$$(1.1.4) \quad g(j+1) + g(j-1) - \left(2 + \frac{\lambda}{2} - C\right) g(j) = 0$$

L'équation (1.1.3) est une équation aux différences d'ordre 2.

$f(i)$ est donc de la forme $a \alpha^i + b \beta^i$ où α et β sont les deux solutions de l'équation caractéristique

$$(1.1.5) \quad r^2 - \left(2 + \frac{\lambda}{2} + C\right) r + 1 = 0$$

D'autre part, il faut que $f(0) = f(m+1) = 0$ pour que v soit un vecteur propre de A

$$f(0) = 0 \text{ entraîne } f(i) = a (\alpha^i - \beta^i)$$

mais le produit des racines de l'équation caractéristique

$$(1.1.5) \text{ est } 1, \text{ c'est-à-dire que } \beta = 1/\alpha$$

$$\Rightarrow f(i) = a \left(\alpha^i - \frac{1}{\alpha^i} \right)$$

$$f(m+1) = a \left(\alpha^{m+1} - \frac{1}{\alpha^{m+1}} \right) = 0$$

Soit :

$$\alpha^{2(m+1)} - 1 = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha = e^{i \frac{P\pi}{m+1}} \\ \beta = e^{-i \frac{P\pi}{m+1}} \end{cases} \quad \begin{matrix} (I^2 = -1) \\ 1 \leq P \leq m \end{matrix}$$

Nous obtenons donc

$$f(i) = a \left[e^{i \frac{IP\pi}{m+1}} - e^{-i \frac{IP\pi}{m+1}} \right] = a' \sin \left(\frac{\pi P i}{m+1} \right)$$

Mais nous pouvons prendre comme vecteur propre n'importe quel vecteur proportionnel au vecteur de composantes $f(i) g(j)$. Nous prendrons donc pour $f(i)$, l'expression la plus simple :

$$f(i) = \sin \left(\frac{\pi P}{m+1} i \right) \quad 1 \leq P \leq m$$

$$\alpha + \beta = 2 + \frac{\lambda}{2} + C \Rightarrow 2 + \frac{\lambda}{2} + C = 2 \cos \left(\frac{\pi P}{m+1} \right)$$

Une résolution identique de l'équation (1.4) nous permet d'obtenir :

$$g(j) = \sin \left(\frac{\pi q}{n+1} j \right) \quad 1 \leq q \leq n$$

et

$$2 + \frac{\lambda}{2} - C = 2 \cos \left(\frac{\pi q}{n+1} \right)$$

Nous déterminons la valeur propre λ en résolvant le système linéaire très simple

$$\begin{cases} 2 + \frac{\lambda}{2} + C = 2 \cos \left(\frac{\pi P}{m+1} \right) \\ 2 + \frac{\lambda}{2} - C = 2 \cos \left(\frac{\pi q}{n+1} \right) \end{cases}$$

$$\lambda = 2 \cos \left(\frac{\pi P}{m+1} \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi q}{n+1} \right) - 4$$

Donc

Pour tout couple (p, q) $\begin{cases} 1 \leq p \leq m \\ 1 \leq q \leq n \end{cases}$ nous avons

un vecteur propre v^{pq} de composantes

$$v^{pq}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi p}{m+1}i\right) \sin\left(\frac{\pi q}{n+1}j\right)$$

La valeur propre associée étant

$$\lambda^{pq} = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2 \right]$$

Nous avons obtenu ainsi les mn vecteurs propres de la matrice A .

Nous remarquons que λ^{pq} peut s'écrire

$$\lambda^{pq} = -4 \left[\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right) \right]$$

Toutes les valeurs propres de la matrice A sont donc négatives.

Calculons la norme (euclidienne) L_{pq} du vecteur propre v^{pq} , qui nous sera utile par la suite pour résoudre le système $A X = b$

$$\begin{aligned} L_{pq} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v^{pq}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sin^2\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \sin^2\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sin^2\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \cdot \sum_{j=1}^n \sin^2\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right) \end{aligned}$$

La formule classique

$$\sum_{k=1}^N \sin^2 (xk) = \frac{N}{2} - \frac{\cos ((N+1) x) \sin (Nx)}{2 \sin x}$$

nous permet d'exprimer L_{pq} de façon simple :

$$L_{pq} = \frac{1}{4} \left[m - (-1)^P \frac{\sin \left(\frac{\pi pm}{m+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi p}{m+1} \right)} \right] \times \left[n - (-1)^Q \frac{\sin \left(\frac{\pi qn}{n+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi q}{n+1} \right)} \right]$$

or $\sin \left(\frac{\pi pm}{m+1} \right) = (-1)^{P+1} \sin \left(\frac{\pi p}{m+1} \right)$

Donc $L_{pq} = \frac{1}{4} (m+1) (n+1)$

Nous voyons que tous les vecteurs propres de A ont la même norme que nous noterons L

$$L = \frac{1}{4} (m+1) (n+1)$$

2°) Résolution du système

Il est maintenant aisé de résoudre notre système $AX = b$

Posons $X = \sum_{p,q} \xi_{pq} v^{pq}$

A étant symétrique, les vecteurs propres sont orthogonaux entre eux et l'on peut écrire

$$b = \sum_{p,q} \overline{\beta}_{pq} v^{pq}$$

avec

$$(1.1.6) \quad \overline{\beta}_{pq} = \frac{b^T \cdot v^{pq}}{L} = \frac{1}{L} \sum_{ij} \beta_{ij} \sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right)$$

D'où l'on déduit

$$\xi_{pq} = \frac{\overline{\beta}_{pq}}{\lambda_{pq}}$$

Soit

$$x = \frac{1}{L} \sum_{pq} \left[\frac{1}{\lambda_{pq}} \sum_{ij} \beta_{ij} \sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right) \right] v^{pq}$$

La solution au point (i,j) s'écrit donc

$$(1.1.7) \quad V_{ij} = \frac{2}{(m+1)(n+1)} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{\sum_{k,l} \beta_{kl} \sin\left(\frac{\pi k p}{m+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q l}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2} \cdot \sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right)$$

Cette somme comprend un grand nombre de termes, plus précisément $m^2 n^2$ termes.

Il est possible de réduire cette expression en particulier en diminuant le nombre des termes.

II. - ETUDE DE L'EXPRESSION V_{ij}

1. Simplification de l'expression

Considérons d'abord le système $AX = b$ lui-même.

Le vecteur b a de nombreuses composantes nulles : seules sont différentes de zéro les composantes

$$\left| \begin{array}{ll} \beta_{i1}, \beta_{in} & i = 1, \dots, m \\ \beta_{1j}, \beta_{mj} & j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Ces composantes dépendent uniquement des valeurs connues sur les bords du rectangle.

$$\begin{aligned}
 \beta_{i1} &= -f(x_0 + ih, y_0) \\
 \beta_{in} &= -f(x_0 + ih, y_0 + (n+1)h) \\
 \beta_{1j} &= -f(x_0, y_0 + jh) \\
 \beta_{mj} &= -f(x_0 + (m+1)h, y_0 + jh) \\
 \beta_{11} &= -f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) \\
 \beta_{m1} &= -f(x_0 + mh, y_0) - f(x_0 + (m+1)h, y_0 + h) \\
 \beta_{1n} &= -f(x_0 + h, y_0 + (n+1)h) - f(x_0, y_0 + nh) \\
 \beta_{mn} &= -f(x_0 + mh, y_0 + (n+1)h) - f(x_0 + (m+1)h, y_0 + nh)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 2, \dots, m-1 \\ \\ j = 2, \dots, n-1 \end{array}$$

Reportons-nous à l'expression (1.1.6) de $\overline{\beta_{pq}}$.

Nous pouvons maintenant l'écrire :

$$\begin{aligned}
 \overline{\beta_{pq}} &= \frac{1}{L} \sum_{L=1}^m \sin\left(\frac{\pi p_i}{m+1}\right) \left[\beta_{i1} \sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) + \beta_{in} \sin\left(\frac{\pi q_n}{n+1}\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi q_j}{n+1}\right) \left[\beta_{1j} \sin\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \beta_{mj} \sin\left(\frac{\pi p_m}{m+1}\right) \right]
 \end{aligned}$$

nous avons donc deux sommes au lieu d'une somme double, c'est-à-dire $m + n - 2$ termes au lieu de mn .

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi p_m}{m+1}\right) &= (-1)^{p+1} \sin\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) \\
 \Rightarrow \beta_{pq} &= \frac{1}{L} \sum_{L=1}^m \sin\left(\frac{\pi p_i}{m+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \left[\beta_{i1} + (-1)^{q+1} \beta_{in} \right] \\
 &+ \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi q_j}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) \left[\beta_{1j} + (-1)^{p+1} \beta_{mj} \right]
 \end{aligned}$$

Il suffira donc de calculer une seule fois les vecteurs de composantes $(\beta_{i1} + \beta_{in})$, $(\beta_{i1} - \beta_{in})$, $(\beta_{1j} + \beta_{mj})$, $(\beta_{1j} - \beta_{mj})$ et de conserver ces valeurs, ceci nous permet de simplifier la somme double en p et q de l'expression V_{ij} (1.1.7) en considérant la parité de p et de q

$$\begin{aligned}
 (1.2.2) \quad V_{ij} = & \frac{2}{(m+1)(n+1)} \sum_{\substack{p \text{ impair} \\ q \text{ impair}}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \sum_{k=1}^m \sin \frac{\pi p k}{m+1} (\beta_{k1} + \beta_{kn})}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2} \right. \\
 & + \left. \frac{\sin \frac{\pi p}{m+1} \sum_{l=2}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi q l}{n+1}\right) (\beta_{1l} + \beta_{ml})}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2} \right] \sin \frac{\pi p i}{m+1} \sin \frac{\pi q j}{n+1} \\
 & + \frac{2}{(m+1)(n+1)} \left[\sum_{\substack{p \text{ imp} \\ q \text{ pair}}} \dots + \sum_{\substack{p \text{ pair} \\ q \text{ imp.}}} \dots + \sum_{\substack{p \text{ pair} \\ q \text{ pair}}} \dots \right]
 \end{aligned}$$

Examinons dans l'expression (1.2.2) de V_{ij} l'une des quatre sommes.

Le numérateur peut se mettre sous la forme

$f_1(p) \cdot f_2(q) + f'_1(p) \cdot f'_2(q)$ c'est-à-dire pour la première somme

$$\begin{aligned}
 & \left[\sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{\pi p k}{m+1}\right) (\beta_{k1} + \beta_{kn}) \right] \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right) \right] \\
 + & \left[\sin\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \right] \left[\sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right) \sum_{l=2}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi q l}{n+1}\right) (\beta_{1l} + \beta_{ml}) \right]
 \end{aligned}$$

Si nous pouvons mettre également le dénominateur

$$1/2 \lambda_{pq} = \cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2 \quad \text{sous la forme } g_1(p) \cdot g_2(q),$$

le nombre d'opérations serait diminué de façon assez appréciable car nous aurions alors dans l'expression V_{ij} un produit de deux sommes au lieu d'une somme double en p et q.

Le tableau suivant donne le nombre d'opérations (addition ou soustraction, multiplication, division) exécutées dans le calcul de tous les V_{ij} en tenant compte du fait que certaines expressions ne sont pas recalculées à chaque utilisation.

Ce calcul est fait dans les deux cas :

$$1) \lambda_{pq} = 2 \cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 4$$

$$2) \lambda_{pq} = g_1(p) \cdot g_2(q)$$

λ_{pq}	Add ou Sous	Multiplication	Division
$2 \left[\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2 \right]$	$2 m^2 n^2 + m^2 +$ $n^2 + m + n$ \downarrow de l'ordre de $2 m^2 n^2$	$4 m^2 n^2 + m^2$ $+ n^2$ \downarrow de l'ordre de $4 m^2 n^2$	$m^2 n^2$
$g_1(p) \cdot g_2(q)$	$4 m n(m+n)$	$4 m n(m+n)$	$8 mn$

Les fonctions des deux variables entières p et q ne peuvent généralement pas se mettre sous la forme $g_1(p) \cdot g_2(q)$.

Il parait donc intéressant d'étudier l'approximation de $f_1(p) + f_2(q)$ par une fonction de la forme $g_1(p) \cdot g_2(q)$, p et q étant des variables entières variant dans des intervalles finis (cas qui nous intéresse).

2°. Etude d'une approximation possible de $f_1(p) + f_2(q)$ par $\psi_1(p) \cdot \psi_2(q)$.

Soient p, q deux variables entières variant respectivement de 1 à m et de 1 à n.

Notons D le domaine de variation du couple (p,q).
Soient données f_1 fonction de p et f_2 fonction de q

a) Nous allons déterminer ψ_1 fonction de p et ψ_2 fonction de q telles que le produit $\psi_1(p) \cdot \psi_2(q)$, soit le plus près possible de $f_1(p) + f_2(q)$ pour tout couple (p,q)

$$\begin{aligned} \text{Posons } \psi_1(p) &= e^{\varphi_1(p)} \\ \psi_2(q) &= e^{\varphi_2(q)} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Nous voulons que

$$e^{\varphi_1(p) + \varphi_2(q)} \neq f_1(p) + f_2(q)$$

soit

$$\varphi_1(p) + \varphi_2(q) \neq \log [f_1(p) + f_2(q)]$$

$$\text{Posons } \log \left[f_1(p) + f_2(q) \right] = H(p, q) \quad (1.2.4)$$

p, q variant de façon discrète, nous pouvons considérer que les nombres $H(p, q)$, lorsque p et q varient dans D , sont les composantes d'un vecteur H de \mathbb{R}^{mn} , que les $\varphi_1(p)$ sont les composantes d'un vecteur φ_1 de \mathbb{R}^m et les $\varphi_2(q)$ celles d'un vecteur φ_2 de \mathbb{R}^n .

Convenons de classer dans \mathbb{R}^{nn} les composantes de la manière suivante :

en faisant varier q puis p .

Le vecteur H est alors le suivant :

$$H = \begin{bmatrix} H(1,1) \\ H(1,2) \\ \vdots \\ H(1,n) \\ H(2,1) \\ H(2,2) \\ \vdots \\ H(m,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ h_{n+1} \\ h_{n+2} \\ \vdots \\ h_{mn} \end{bmatrix}$$

Nous allons étudier le sous-espace A dans lequel se trouvent les vecteurs dont les composantes sont $\varphi_1(p) + \varphi_2(q)$, p et q variant toujours de la même manière, et chercher quel est le point P de A qui se trouve le plus près de H dans \mathbb{R}^{mn} .

Pour cela, considérons l'application f :

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

$$f : (\varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (\varphi_1(1)+\varphi_2(1), \varphi_1(1)+\varphi_2(2), \dots, \varphi_1(p)+\varphi_2(q), \dots)$$

cette application f est linéaire. En effet :

$$\begin{aligned} \cdot f(\varphi_1 + \varphi'_1, \varphi_2 + \varphi'_2) &= ((\varphi_1 + \varphi'_1)(1) + (\varphi_2 + \varphi'_2)(1), \dots) \\ &= (\varphi_1(1) + \varphi_2(1), \dots) + (\varphi'_1(1) + \varphi'_2(1), \dots) \\ &= f(\varphi_1, \varphi_2) + f(\varphi'_1, \varphi'_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f(k(\varphi_1, \varphi_2)) &= ((k\varphi_1)(1) + (k\varphi_2)(1), \dots) \\ &= k(\varphi_1(1) + \varphi_2(1), \dots) \\ &= k f(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Nous avons donc la relation

$$(1.2.5) \quad \dim(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) = \dim(f^{-1}(0)) + \dim(\underbrace{f(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)}_A)$$

qui nous permet de déterminer la dimension de A et par la suite une base de ce sous-espace.

Etudions pour cela le noyau de f

Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in f^{-1}(0)$. Par définition

$$\varphi_1(p) + \varphi_2(q) = 0 \quad \forall (p, q) \in D$$

prenons, par exemple, $\varphi_1(1) = 1$

$$\varphi_1(1) + \varphi_2(q) = 0 \Rightarrow \varphi_2(q) = -1 \quad \forall q = 1, \dots, n$$

et par conséquent $\varphi_1(p) = 1 \quad \forall p = 1, \dots, m$

Donc

$$\dim(f^{-1}(0)) = 1$$

Il suit d'après (1.2.5) que nous avons

$$\boxed{\dim(A) = m + n - 1}$$

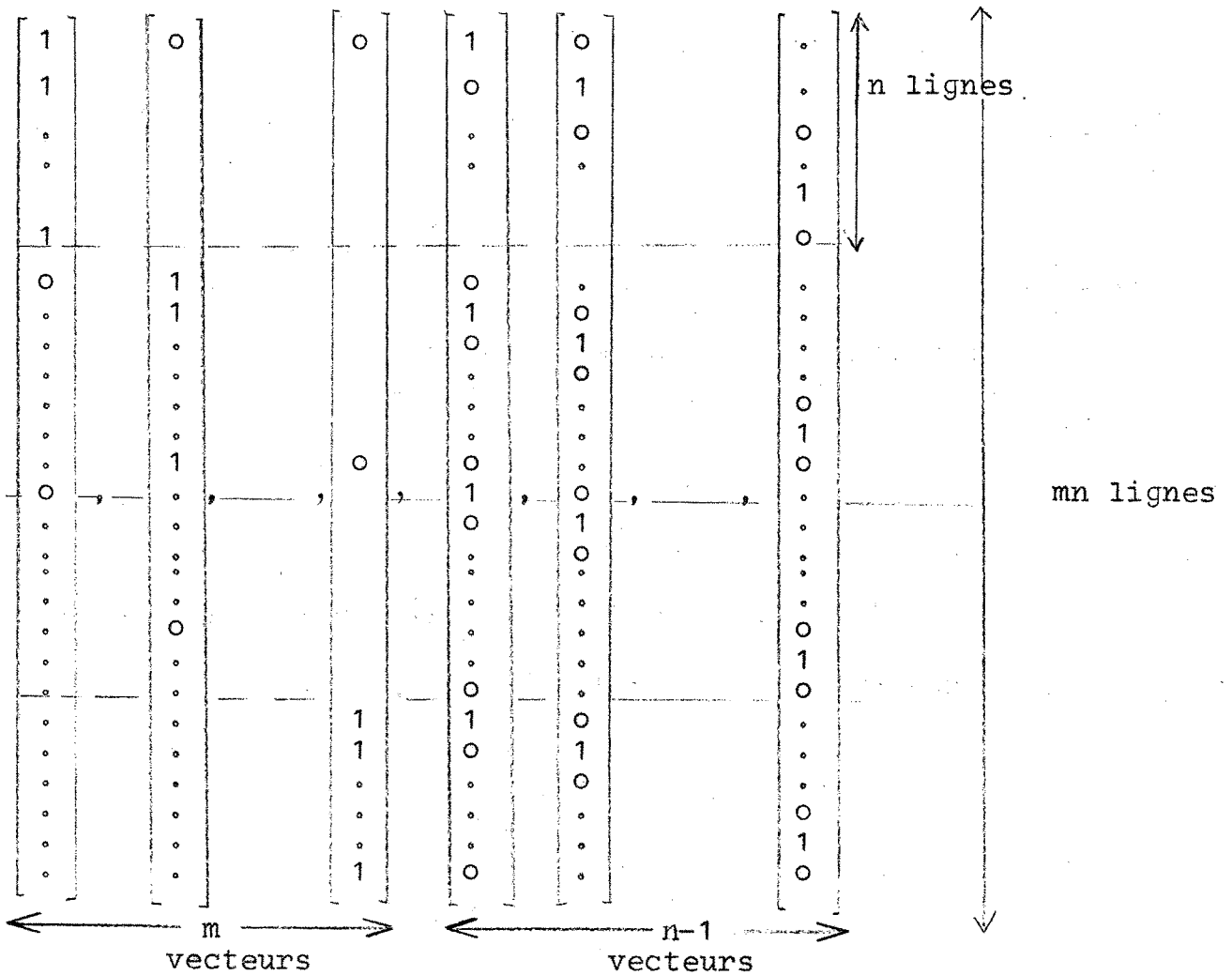
Notons N le noyau de f

$$N = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_n)$$

et prenons comme base de départ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ la base canonique

$$e_1, e_2, \dots, e_{m+n}$$

$e_1, e_2, \dots, e_{m+n-1}, N$ est une nouvelle base de \mathbb{R}^{m+n} son image par f nous donnera une base B dans $A \Rightarrow$ la base B est formée par les vecteurs suivants



Notons $a_1, a_2, \dots, a_{m+n-1}$ ces vecteurs.

Le point de A le plus près (au sens de la norme euclidienne de \mathbb{R}^{mn})

du point H est la projection orthogonale de H sur A. Soit P cette projection.

Nous allons chercher les composantes dans A de P ce qui nous permettra par la suite de déterminer les vecteurs φ_1 et φ_2 .

(1.2.6) Posons $P = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{m+n-1} a_{m+n-1}$

Dans la base canonique de R^{mn} P s'écrit donc

$$P = (\lambda_1 + \lambda_{m+1}) e_1 + \dots + (\lambda_1 + \lambda_{m+n-1}) e_{n-1} + \lambda_1 e_n$$

$$+ \dots + (\lambda_{k+1} + \lambda_{m+1}) e_{kn+1} + \dots + (\lambda_{k+1} + \lambda_{m+n-1}) e_{kn+n-1}$$

$$+ \lambda_k e_{kn} + \dots + \lambda_m e_{mn}.$$

(1.2.7) Soit $P = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} + \lambda_{m+j}) e_{kn+j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k e_{kn}$

P étant la projection orthogonale de H, nous avons le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{l}
 \uparrow \\
 \left| \begin{array}{l}
 \lambda_1 + \lambda_{m+1} - h_1 + \lambda_1 + \lambda_{m+2} - h_2 + \dots + \lambda_1 + \lambda_{m+n-1} - h_{n-1} + \lambda_1 - h_n = 0 \\
 \lambda_2 + \lambda_{m+1} - h_{n+1} + \lambda_2 + \lambda_{m+2} - h_{n+2} + \dots + \lambda_2 - h_{2n} = 0 \\
 \vdots \\
 \lambda_m + \lambda_{m+1} - h_{(m-1)n+1} + \dots + \lambda_m - h_{mn} = 0 \\
 \lambda_1 + \lambda_{m+1} - h_1 + \lambda_2 + \lambda_{m+1} - h_{n+1} + \dots + \lambda_m + \lambda_{m+1} - h_{(m-1)n+1} = 0 \\
 \vdots \\
 \lambda_1 + \lambda_{m+n-1} - h_{n-1} + \dots + \lambda_m + \lambda_{m+n-1} - h_{mn-1} = 0
 \end{array} \right. \\
 \downarrow
 \end{array}$$

m équations

n-1 équations

Soit en ordonnant dans chaque équation :

$$\begin{array}{l}
 1.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 n \lambda_1 + \lambda_{m+1} + \lambda_{m+2} + \dots + \lambda_{m+n-1} = h_1 + h_2 + \dots + h_n \\
 n \lambda_2 + \lambda_{m+1} + \lambda_{m+2} + \dots + \lambda_{m+n-1} = h_{n+1} + h_{n+2} + \dots + h_{2n} \\
 \vdots \\
 n \lambda_m + \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_{m+n-1} = h_{(m-1)n+1} + \dots + h_{mn} \\
 m \lambda_{m+1} + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = h_1 + h_{n+1} + \dots + h_{(m-1)n+1} \\
 m \lambda_{m+2} + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = h_2 + h_{n+2} + \dots + h_{(m-1)n+2} \\
 \vdots \\
 m \lambda_{m+n-1} + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = h_{n-1} + \dots + h_{mn-1}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Posons $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$

$$\Lambda = \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_{m+n-1}$$

Le système (1.2.8) peut alors s'écrire

$$1.2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 n \lambda + m \Lambda = \sum_{j=1}^{mn} h_j \\
 (n-1) \lambda + m \Lambda = \sum_{j=1}^{mn} h_j - \sum_{j=1}^m h_{jn}
 \end{array} \right.$$

Ce système nous donne immédiatement

$$\begin{array}{l}
 (1.2.10) \quad \boxed{\begin{array}{l}
 \lambda = \sum_{j=1}^m h_{jn} \\
 \Lambda = \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^{mn} h_j - n \sum_{j=1}^n h_{jn} \right]
 \end{array}}
 \end{array}$$

et des équations du système (1.2.8) nous tirons

$$\lambda_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

$$\lambda_{m+l} \quad (l = 1, \dots, n-1) \quad :$$

1.2.11)

$$\lambda_k = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n h_{(k-1)n+j} - \Lambda \right] \quad k=1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+l} = \frac{1}{m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} h_{jn+l} - \lambda \right] \quad l=1, \dots, n-1$$

Pour déterminer les vecteurs φ_1 et φ_2 , il suffit maintenant de résoudre le système

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(1) + \varphi_2(1) &= \lambda_1 + \lambda_{m+1} \\ \varphi_1(1) + \varphi_2(2) &= \lambda_1 + \lambda_{m+2} \\ &\vdots \\ \varphi_1(1) + \varphi_2(n-1) &= \lambda_1 + \lambda_{m+n-1} \\ \varphi_1(1) + \varphi_2(n) &= \lambda_1 \\ \varphi_1(2) + \varphi_2(1) &= \lambda_2 + \lambda_{m+1} \\ &\vdots \\ \varphi_1(m) + \varphi_2(n) &= \lambda_m \end{aligned} \right\}$$

C'est un système de mn équations à $m+n$ inconnues. Le vecteur de composantes $\varphi_1(p) + \varphi_2(q)$ étant un vecteur de A , il n'y a que $m+n-1$ équations linéairement indépendantes.

Les équations suivantes, par exemple, le sont :

$$.2.12) \quad \begin{cases} \varphi_1(1) + \varphi_2(q) = \lambda_1 + \lambda_{m+q} & q = 1, \dots, n-1 \\ \varphi_1(1) + \varphi_2(n) = \lambda_1 \\ \varphi_1(p) + \varphi_2(1) = \lambda_p + \lambda_{m+1} & p = 2, \dots, m \end{cases}$$

Nous allons exprimer $m + n - 1$ inconnues en fonction de la $m + n^{\text{ème}}$ à savoir $\varphi_1(1)$:

$$\varphi_2(q) = \lambda_1 + \lambda_{m+q} - \varphi_1(1) \quad q = 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_2(n) = \lambda_1 - \varphi_1(1)$$

$$\varphi_1(p) = \lambda_{m+1} + \lambda_p - \lambda_1 - \lambda_{m+1} + \varphi_1(1) \quad p = 2, \dots, m$$

$$\text{soit } \varphi_1(p) = \lambda_p - \lambda_1 + \varphi_1(1) \quad p = 2, \dots, m$$

Les vecteurs φ_1 et φ_2 ont donc pour composantes

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_1(1) - \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \varphi_1(1) - \lambda_1 + \lambda_m \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_{m+1} - \varphi_1(1) \\ \lambda_1 + \lambda_{m+2} - \varphi_1(1) \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_{m+n-1} - \varphi_1(1) \\ \lambda_1 - \varphi_1(1) \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que dans chaque composante de φ_1 et φ_2 nous retrouvons l'expression $\lambda_1 - \varphi_1(1)$.

mais $\varphi_1(i) + \varphi_2(j) = \varphi_1(i) + \varphi_2(q) + \varphi_1(p) + \varphi_2(j) - \varphi_1(p) - \varphi_2(q)$

$$\forall (p, q) \in D$$

Nous devons donc avoir :

$$h_{(i-1)n+j} = h_{(i-1)n+q} + h_{(p-1)n+j} - h_{(p-1)n+q}$$

$$\forall (p, q), (i, j) \in D$$

Explicitons cette relation

$$\begin{aligned} \log [f_1(i) + f_2(j)] &= \log [(f_1(i) + f_2(q))] + \log [f_1(p) + f_2(j)] \\ &\quad - \log [f_1(p) + f_2(q)] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \log [(f_1(i) + f_2(j))(f_1(p) + f_2(q))] &= \log [(f_1(i) + f_2(q))(f_1(p) + f_2(j))] \\ \Rightarrow [f_1(i) + f_2(j)] [f_1(p) + f_2(q)] &= [f_1(i) + f_2(q)] [f_1(p) + f_2(j)] \end{aligned}$$

ce qui nous conduit en réduisant à

$$[f_1(p) - f_1(i)] [f_2(q) - f_2(j)] = 0 \quad \forall (i, j) \in D$$

$$\forall (p, q) \in D$$

Nous en concluons que H et P coïncident si f_1 ou f_2 est constante.

b.) Etudions maintenant la distance euclidienne du point H au point P que nous venons de définir.

Cette étude nous permettra de savoir si $H(p, q)$ peut être approché par $\varphi_1(p) + \varphi_2(q)$ lorsque (p, q) varie dans D.

Soit d la distance euclidienne du point H au point P

$$d^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n-1} + (\lambda_k - \lambda_{m+1} - h_{(k-1)n+1})^2 + \sum_{k=1}^m (\lambda_k - h_{kn})^2$$

après simplification, nous obtenons :

1.2.14)

$$d^2 = \frac{1}{mn} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n h_{(k-1)n+1} \right)^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (h_{(k-1)n+1})^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^n h_{(k-1)n+1} \right)^2 - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m h_{(k-1)n+1} \right)^2$$

d^2 est une fonction de m et n dans laquelle

$$h_{(k-1)n+1} = \log [f_1(k) + f_2(1)]$$

Elle est symétrique en m et n .

L'étude que nous avons faite de cette expression, nous permet seulement de remarquer que dans le cas général cette distance est grande et croit avec m et n . D'autre part, la recherche du point P, nous permet de faire la remarque suivante :

Soient p, q des entiers tels que $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$, et deux fonctions f_1 et f_2 d'une seule variable. Quelles que soient les deux fonctions ψ_1 et ψ_2 .

On a :

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \left[\psi_1(p) \psi_2(q) - f_1(p) - f_2(q) \right]^2 \geq d^2$$

d^2 étant donnée par (1.2.14).

III. - METHODE DIRECTE DE CALCUL DES V_{ij}

Nous allons maintenant étudier la possibilité d'utiliser numériquement la solution exacte du système linéaire pour calculer sur un maillage la solution de $\Delta V = 0$ et l'intérêt de cette utilisation.

1. Description de la méthode

Nous utilisons directement l'expression

$$V_{ij} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{\bar{\beta}_{pq}}{2\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 4} \sin\left(\frac{\pi p i}{m+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right)$$

Nous calculons en premier lieu les $\sin\left(\frac{\pi p k}{m+1}\right)$ ($p, k=1, \dots, m$)

et $\sin\left(\frac{\pi q l}{n+1}\right)$ ($l, q = 1, \dots, n$) qui forment deux tableaux

SIM et SINN. Nous n'avons d'ailleurs à calculer que $m^2/2 \sin\left(\frac{\pi p k}{m+1}\right)$

et $n^2/2 \sin\left(\frac{\pi q l}{n+1}\right)$ du fait de la symétrie en p, k et q, l .

Nous calculons également une seule fois les expressions

$$\frac{\bar{\beta}_{pq}}{2\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 4}, \text{ forment le tableau BETA, en prenant pour}$$

$\bar{\beta}_{pq}$ l'expression (1.2.1).

L'algorithme se présente donc de façon très simple :

1) Calcul de $\sin \frac{\pi p k}{m+1}$, $\cos \frac{\pi p}{m+1}$

$\sin \frac{\pi q l}{n+1}$, $\cos \frac{\pi q}{n+1}$

2) Calcul de $\frac{\overline{\beta}_{pq}}{2\cos \frac{\pi p}{m+1} + 2\cos \frac{\pi q}{n+1} - 4} = \text{BETA } (p, q)$

3) Calcul pour $i = 1, \dots, m$
 $j = 1, \dots, n$ de

$$V_{ij} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \text{BETA } (p, q) \sin \frac{\pi p i}{m+1} \sin \frac{\pi q j}{n+1}$$

Nous donnons dans les pages suivantes un organigramme détaillé de cet algorithme ainsi que le programme ALGOL

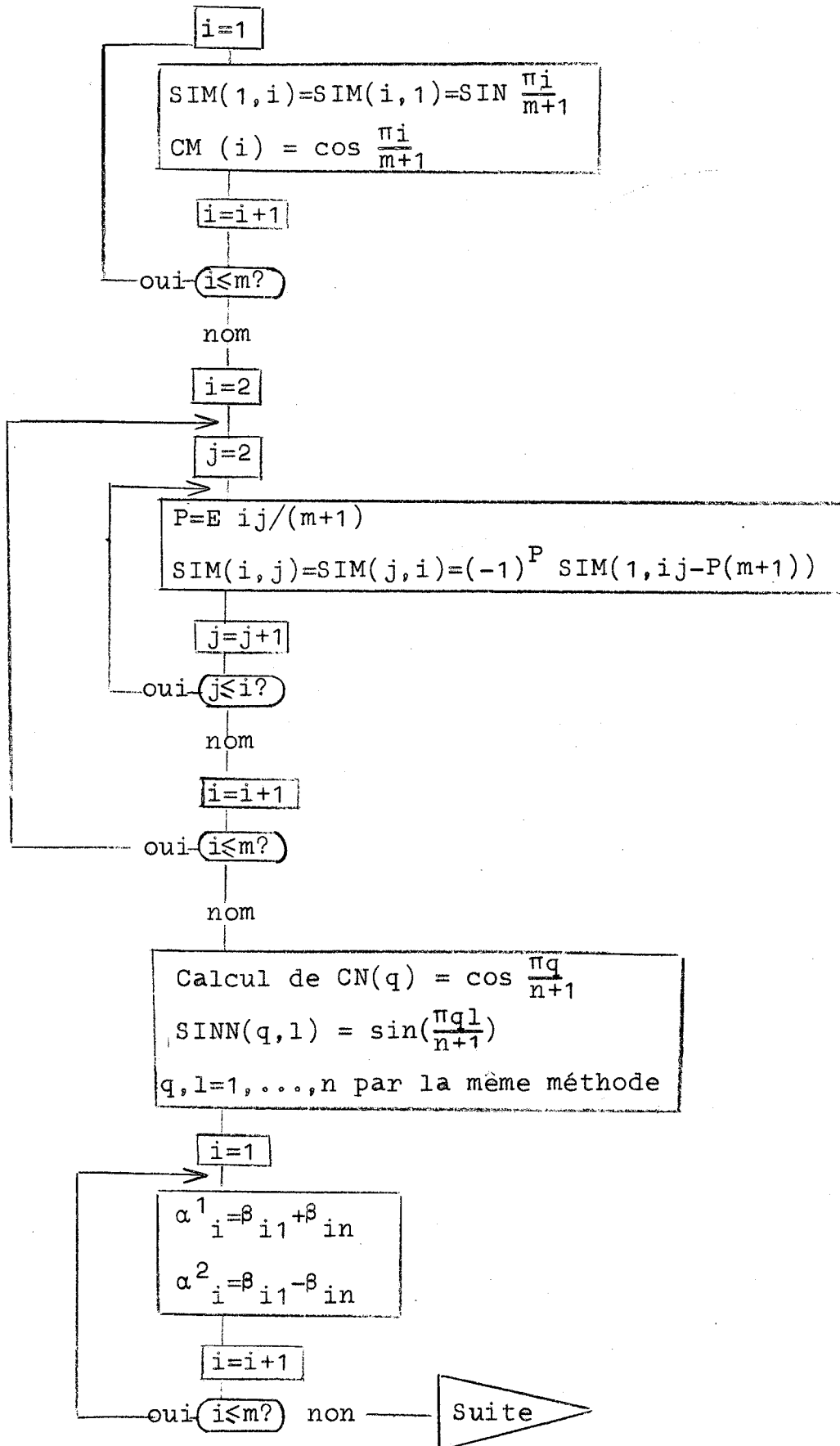
$$\text{SIM } [i, j] = \sin \left(\frac{\pi i j}{m+1} \right) \quad 1 \leq i, j \leq m$$

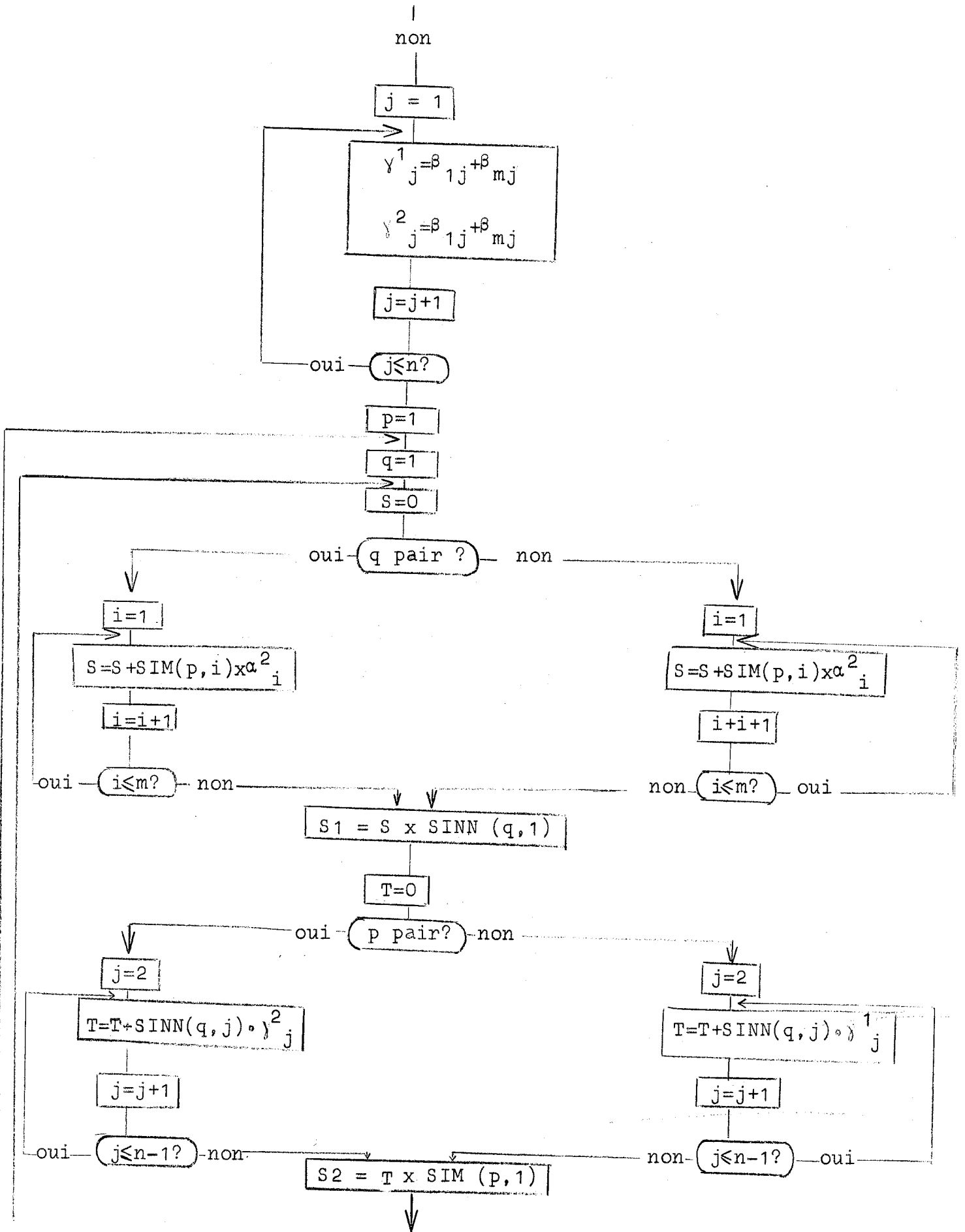
$$\text{SINN } [i, j] = \sin \left(\frac{\pi i j}{n+1} \right) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$F x 0 [j]$, $F x M [j]$ pour $j = 1, \dots, n$ sont les valeurs sur les bords du rectangle respectivement pour $x = x_0$, $x = x_0 + (m+1)h$

$F Y 0 [i]$, $F Y N [i]$ $i = 1, \dots, m$ sont les valeurs sur les bords du rectangle pour $y = Y_0$ et $y = Y_0 + (n+1) h$.

ORGANIGRAMME





$$\text{BETA}(p, q) = \frac{2(S1+S2)}{(m+1)(n+1)(\text{CN}(P)+\text{CN}(q)-2)}$$

q=q+1

oui — q ≤ n?

non

p=p+1

oui — p < m?

non

i=1

j=1

$$V_{ij} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \text{BETA}(p, q) \times \text{SIM}(p, i) \times \text{SINN}(q, j)$$

j=j+1

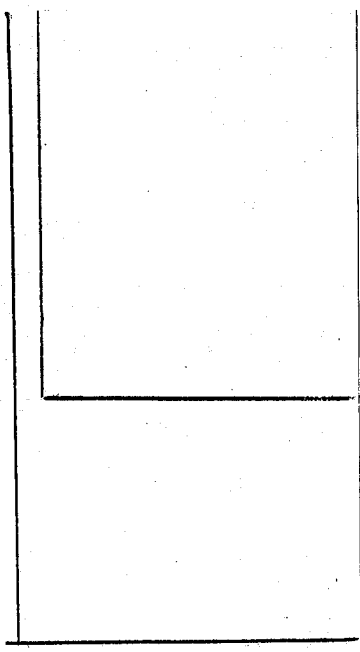
oui — j ≤ n?

non

i=i+1

oui — i ≤ m?

fin



METHODE DIRECTE : PROGRAMME ALGOL

```

DEBUT COMMENTAIRE  METHODE DIRECTE POUR UN RECTANGLE;
ENTIER  M,N,B, I, J, E, EP, P, Q, P1, Q1;
REEL  AA, S, T, S1, S2;
LIRE (M, N);
DEBUT TABLEAU  SIM[1:M, 1:M], SINN[1:N, 1:N],
          CME[1:M], CNE[1:N], ALPHE[1:2, 1:M], GAM[1:2, 1:N],
          BETA[1:M, 1:N], XC[1:N+2, 1:M+2],
          FXO, FXME[1:N+2], FYO, FYN[1:M+2];
CALCUL SIM : AA := 3.14159265 / (M+1);
  POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    DEBUT  CME[I] := COS (AA * I);
          SIM[1, I] := SIM[I, 1] := SIN(AA * I)
    FIN ;
  POUR I := 2 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    POUR J := 2 PAS 1 JUSQUA I FAIRE
      DEBUT  E := ENTIER ( I * J / (M+1) );
            EP := I * J - E * (M+1) ;
            SIM[I, J] := SIM[J, I] := SI EPSUPERO
              ALORS ((SI E=0 ALORS 1
                SINON ((-1)** E) * SIM[1, EP])
              SINON 0 ;
            FIN ;
CALCUL SINN : AA := 3.14159265 / (N+1);
  POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT  CNE[I] := COS (AA * I);
          SINN[1, I] := SINN[I, 1] := SIN(AA * I)
    FIN ;

```

```

POUR i := 2 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  POUR J := 2 PAS 1 JUSQUA i FAIRE
    DEBUT E := ENTIER (i * J / (N + 1)) ;
      EP := i * J - E * (N + 1) ;
      SINN[i, J] := SINN[J, i] := SI EP SUPER 0
        ALORS ((SI E = 0 ALORS 1
          SINON ((-1) ** E)) * SINN[1, EP]
        SINON 0
      FIN ;

```

```

CALCUL COEF : POUR i := 1, 2 FAIRE
  DEBUT POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    ALPH[i, J] := -FYO[J + 1] + ((-1) ** i) * FYN[J + 1] ;
    POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      GAM[i, J] := -FXO[J + 1] + ((-1) ** i) * FXM[J + 1] ;
    ALPH[i, 1] := ALPH[i, 1] - FXO[2] + ((-1) ** i) * FXO[N + 1] ;
    ALPH[i, M] := ALPH[i, M] - FXM[2] + ((-1) ** i) * FXM[N + 1] ;
    GAM[i, 1] := GAM[i, 1] - FYO[2] + ((-1) ** i) * FYO[M + 1] ;
    GAM[i, N] := GAM[i, N] - FYN[2] + ((-1) ** i) * FYN[M + 1]

```

FIN ;

CALCUL BPQ :

```

POUR P := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
  POUR Q := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT P1 := SI (-1) ** Q SUPER 0 ALORS 2 SINON 1 ;
      S := 0 ;
      POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
        S := S + SIM[P, i] * ALPH[P1, i] ;
      S1 := S * SINN[1, Q] ;
      T := 0 ;
      Q1 := SI (-1) ** P SUPER 0 ALORS 2 SINON 1 ;
      POUR J := 2 PAS 1 JUSQUA N - 1 FAIRE
        T := T + SINN[Q, J] * GAM[Q1, J] ;

```

$S2 := T * \text{SIN}[1, P];$

$\text{BETA}[P, Q] := (S1 + S2) * 2 / ((M+1) * (N+1) * (C[M, P] + C[N, Q] - 2));$

FIN;

CALCUL X :

POUR Q := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

DEBUT POUR P := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE

DEBUT S := 0 ;

POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

DEBUT T := 0 ;

POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE

$T := T + \text{BETA}[i, J] * \text{SIN}[i, P];$

$S := S + T * \text{SIN}[J, Q]$

FIN ;

$X[Q+1, P+1] := S$

FIN ;

$X[Q+1, 1] := \text{FXO}[Q+1];$

$X[Q+1, M+2] := \text{FXM}[Q+1]$

FIN ;

POUR P := 1 PAS 1 JUSQUA M+2 FAIRE

DEBUT X[1, P] := FYO[P];

X[N+2, P] := FYN[P]

FIN

FIN

FIN ;

On voit immédiatement le premier intérêt de cette méthode : le calcul d'un V_{ij} est indépendant du calcul de la solution pour les autres points.

2. Comparaison avec la solution exacte

L'erreur d'approximation c'est-à-dire l'erreur entre la solution exacte de l'équation différentielle et la solution exacte de l'équation aux différences finies sera étudiée au chapitre 3. Les estimations de l'erreur d'approximation nécessitent des restrictions sur la fonction donnée sur la frontière : dans l'estimation de WASOW [1] que nous étudierons, la fonction doit être définie et continue sur $\partial\Omega$ bord du rectangle et avoir une dérivée troisième bornée sur chaque coté du rectangle - Bramble et Hubbard [2] demandent eux une dérivée quatrième bornée. Mais ce sont des estimations théoriques.

Nous allons comparer numériquement la solution exacte de l'équation différentielle à celle de l'équation aux différences finies calculées par la méthode directe.

Prenons comme rectangle $\{ x \in [0, 2\pi] , y \in [0, \pi] \}$
et comme fonction sur la frontière de ce rectangle

$$f(x,y) = \operatorname{ch} x \sin y$$

ERMAX désigne l'écart maximum en valeur absolue entre le résultat calculé et la solution exacte de l'équation différentielle

La solution est calculée, quel que soit le pas h sous-multiple du pas $h_1 = \pi/10$, aux seuls points du maillage de pas h_1 , soit en $19 \times 9 = 171$ points.

Nous remarquerons que l'écart maximum se situe quel que soit le pas h (sous multiple de h_1) au même noeud du maillage.

(1.3.1)

h	TEMPS	ERNAX	ERREUR RELATIVE
$\pi/10$ =0,314	23 s	0.8019	0.0055
$\pi/20$ =0,157	96 s	0.2016	0.00149
$\pi/30$ =0,104	248 s	0.0896	0.00063
$\pi/40$ =0,078	494 s	0.0503	0.00035

Nous voyons que l'on peut obtenir des résultats plus précis en divisant le pas par deux et le temps d'exécution n'est que peu supérieur au temps de la méthode de surrelaxation appliquée au même maillage (tableau (1.3.2)).

3. Comparaison de la méthode directe et de la méthode de surrelaxation.

La méthode la plus couramment employée pour résoudre le système linéaire aux différences est la méthode de surrelaxation. Mais cette méthode demande un temps d'exécution assez long.

Nous nous proposons de comparer les résultats numériques de ces deux méthodes ainsi que leur temps d'exécution.

Nous prenons le même rectangle et la même fonction $f(x,y) = \text{ch}x \sin y$ que dans le paragraphe précédent.

Notons ϵ_M l'écart maximum en valeur absolue entre la solution donnée par la méthode de surrelaxation et celle donnée par la méthode directe.

Dans la méthode de surrelaxation, nous prenons le coefficient de surrelaxation $\omega = 1,5$ et comme test d'arrêt $|v_{k-1}(i,j) - v_k(i,j)| \leq \epsilon$ pour tout

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, m \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad \epsilon = 10^{-7}$$

PAS	Nb de points	ϵ_M	Méthode DIRECTE	TEMPS sur RELAXATION	RAPPORT
$\pi/5$	36	0.0000057	2 s	4 s	2
$\pi/10$	171	0.0000247	26 s	71 s	2,73
$\pi/15$	406	0.0000035	134 s	296 s	2,208
$\pi/20$	741	0.0000553	432 s	901 s	2,08

1.3.2)

Ce tableau montre deux faits intéressants :

1°) L'écart ϵ_M est très inférieur à la précision des résultats par rapport à la solution exacte de l'équation différentielle (voir tableau (1.3.1)). Pour les résultats numériques la méthode directe est donc aussi valable que la méthode de surrelaxation.

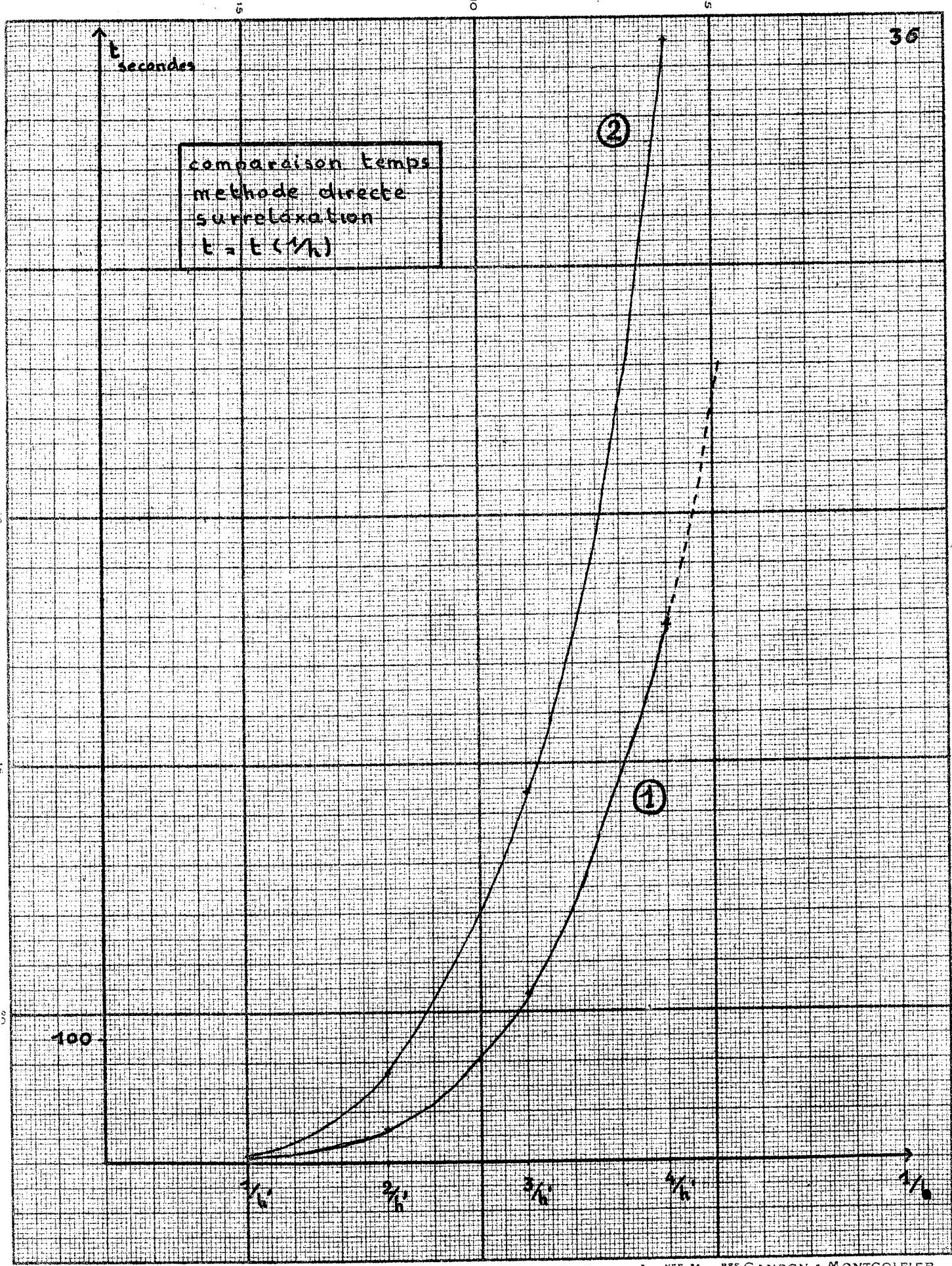
2°) Le temps d'exécution dans la méthode de surrelaxation est au moins le double du temps d'exécution de la méthode directe.

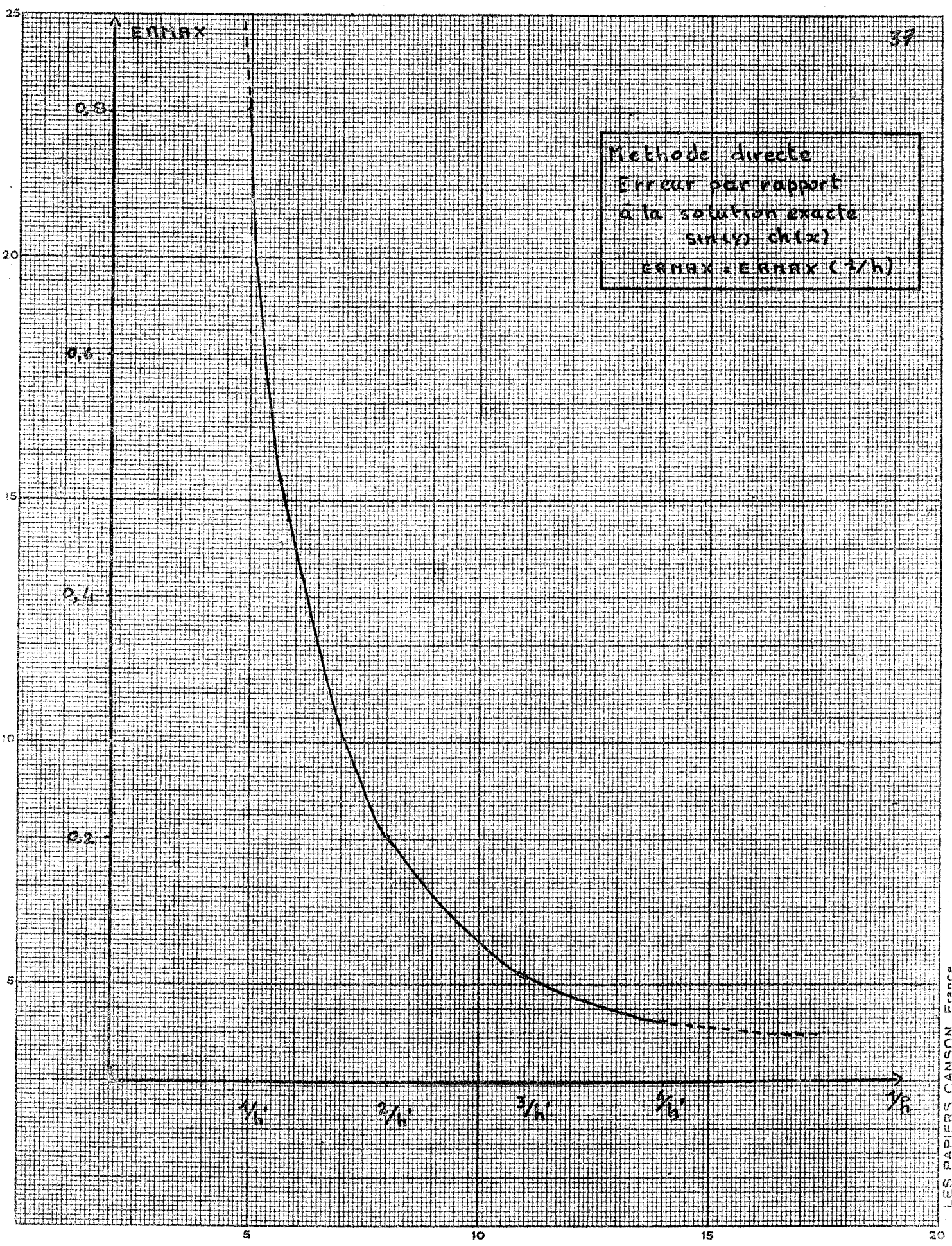
Ce fait est mis en évidence sur le graphique suivant, la courbe ① indiquant le temps de la méthode directe en fonction de l'inverse du pas et la courbe ② le temps de la méthode de surrelaxation toujours en fonction de l'inverse du pas.

Le deuxième graphique nous donne l'erreur d'approximation, calculée en partant de la solution de la méthode directe, pour un rectangle.

Il apparait donc que la méthode directe peut-être intéressante d'une part par son temps d'exécution, d'autre part et principalement parce qu'elle permet de calculer la solution en un point quelconque du maillage sans la calculer pour tous les points.

Cependant, il ne faut pas oublier qu'elle demande un nombre assez important de mémoires pour conserver les sinus et les $\bar{\beta}_{pq}$ ($m^2 + n^2 + mn + 3(m+n)$).





METHODE DE SUPERPOSITION
APPLIQUEE A UNE REUNION
QUELCONQUE DE RECTANGLES

Il est nécessaire pour discrétiser la résolution de l'équation différentielle $\Delta V = 0$ dans une réunion de plusieurs rectangles que ces rectangles aient tous leurs cotés parallèles à un système d'axes rectangulaires et que le maillage soit tel que tous les cotés des rectangles se trouvent sur des lignes du maillage.

Nous noterons ces conditions : condition 1 et condition 2. Nous allons étudier la méthode de superposition pour deux rectangles puis nous l'appliquerons à une réunion quelconque de rectangles satisfaisant aux conditions 1 et 2.

I. - Méthode de superposition pour la réunion de deux rectangles.

1. Position du problème.

Soit G le domaine formé par la réunion des deux rectangles R_1 et R_2 disposés de telle sorte qu'un coté de l'un soit en partie confondu avec un coté de l'autre.

Nous recouvrons le domaine G par un maillage de pas h satisfaisant à la condition 2.

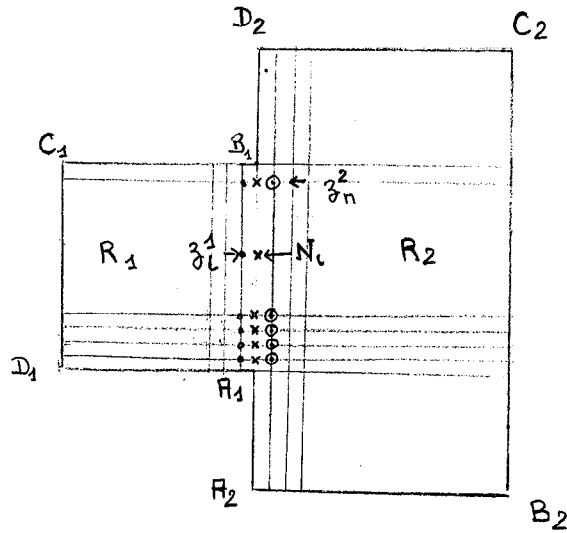


figure 1

Le pas h est contenu m_1+1 fois dans l'un des cotés du rectangle R_1 et n_1+1 fois dans l'autre, m_2+1 et n_2+1 fois dans les cotés du rectangle R_2 .

Soient N_1, N_2, \dots, N_n ($n = \inf(n_1, n_2)$) les points situés sur le contour commun aux rectangles R_1 et R_2 et qui deviennent intérieurs à G .

Désignons par $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ les valeurs solutions du système aux différences (2.1.1) respectivement en N_1, N_2, \dots, N_n . Nous approchons toujours l'équation différentielle $\Delta V = 0$ par le système (2.1.1) formé de la relation

$$(2.1.2) \quad V_{i-1,j} + V_{i+1,j} - 4V_{i,j-1} + V_{i,j+1} = 0$$

écrite pour tous les points (i,j) intérieurs à G avec toujours la même convention pour les points situés sur le contour.

Si nous considérons les valeurs ϕ_1, \dots, ϕ_n comme des quantités connues le système formé par la relation (2.1.2) écrite pour les points intérieurs au rectangle R_1 donne :

(2.1.3)

$$A_1 X =$$

$$\begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ \phi_1 \\ x \\ x \\ \phi_2 \\ x \\ x \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \\ x \\ x \end{array}$$

où A_1 est une matrice du type A défini dans le chapitre précédent et les x des quantités connues qui ne sont fonctions que des valeurs connues de la solution sur les bords B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 du rectangle R_1 .

Pour le rectangle R_2 nous avons de même :

(2.1.4)

$$A_2 X =$$

$$\begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ x \\ \phi_1 \\ x \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \\ x \\ x \\ x \end{array}$$

Nous voyons que pour résoudre le problème, il suffit de déterminer les quantités ϕ_i puis de résoudre le problème séparément dans les rectangles R_1 et R_2 .

2. Détermination de ϕ

Les points N_1, N_2, \dots, N_n sont reliés par des relations (2.1.2)

aux points z^1_i dans R_1

aux points z^2_i dans R_2

Soient $z^1_1, z^1_2, \dots, z^1_n$ les valeurs de la solution du système (2.1.3) dans R_1 aux points . ,

$z^2_1, z^2_2, \dots, z^2_n$ les valeurs de la solution du système (2.1.4) dans R_2 aux points . .

Ces équations de liaison peuvent se mettre sous la forme (2.1.5)

$$A_3 \phi = - (Z^1 + Z^2 + b)$$

avec

$$\phi = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{vmatrix}, \quad Z^1 = \begin{vmatrix} z^1_1 \\ \vdots \\ z^1_n \end{vmatrix}, \quad Z^2 = \begin{vmatrix} z^2_1 \\ \vdots \\ z^2_n \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ b_1 \end{vmatrix}$$

a_1 et b_1 étant les valeurs de la solution (connues) aux points

A_1 et B_1

Les liaisons étant rectilignes A_3 est triple diagonale de la forme :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & -4 & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{d'ordre } n \times n$$

Pour déterminer ϕ , il nous faut connaître les vecteurs Z^1 et Z^2 .

La résolution du système (2.1.3) nous donne Z^1 :

$$Z^1 = M^1 \phi + K^1 \quad (2.1.6)$$

de même celle du système (2.1.4) nous donne Z^2 :

$$Z^2 = M^2 \phi + K^2 \quad (2.1.7)$$

équations matricielles dans lesquelles M^1 et M^2 sont des matrices carrées d'ordre n .

En portant les expressions de Z^1 et Z^2 données par les équations (2.1.6) et (2.1.7) dans l'équation (2.1.5) nous obtenons :

$$A_3 \phi = - (K^1 + K^2 + b) - (M^1 + M^2) \phi$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$\boxed{(A_3 + M^1 + M^2) \phi = - (K^1 + K^2 + b)} \quad (2.1.8)$$

ystème qui permet de déterminer ϕ , K^i et M^i étant facilement calculables, et par suite de résoudre les systèmes (2.1.3) et (2.1.4).

Calcul des K^i

En considérant les systèmes (2.1.6) et (2.1.7) nous remarquons que si nous prenons ϕ identique au vecteur zéro

$$Z^i = K^i$$

Il suffit donc de résoudre le système (2.1.3) (respectivement (2.1.4)) en prenant $\phi_j = 0$ pour $j = 1, \dots, n$ pour obtenir les valeurs Z^1_i (Z^2_i) c'est-à-dire le vecteur K^1 (respectivement K^2).

Calcul de M^i

Si nous remplaçons dans le système (2.1.6) ou (2.1.7) Le vecteur ϕ par le j ème vecteur de la base canonique de R^n nous obtenons la j ème colonne de la matrice M^1 ou M^2 , M^1_j ou M^2_j

$$Z^i = M^i_j + K^i$$

Mais d'après le principe de superposition des solutions dans le rectangle R_i et en considérant les conditions de bords qui nous ont permis d'obtenir le vecteur K^i .

Nous obtiendrons, en prenant pour ϕ le j ème vecteur de la base canonique de R^n et en mettant sur la frontière du rectangle R_i où la solution est connue la valeur 0 en tous les points :

$$Z^i = M^i_j$$

Donc en résolvant le système (2.1.6) ou (2.1.7) avec les conditions de bords précédentes, nous calculons les composantes de la j ème colonne de M^i .

3. Calcul de la solution dans G

Le calcul de la solution du problème se fait donc en quatre étapes :

1°) Calcul de M^1 et M^2

qui se ramène à n résolutions de (2.1.3)

et n résolutions de (2.1.4)

en prenant successivement pour vecteur Φ les vecteurs de la base canonique de R^n et 0 en tous les points de la frontière du domaine G.

2°) Calcul de K^1 et K^2

Soit une résolution de (2.1.3)

une résolution de (2.1.4)

les points sur la frontière de G ayant leur valeur initiale et le vecteur Φ étant identiquement nul.

3°) Résolution du système linéaire

$$(A_3 + M^1 + M^2) \Phi = - (K^1 + K^2 + b)$$

4°) Calcul de la solution

Résolution de (2.1.3) et (2.1.4) avec la valeur calculée en 3°) de Φ , les points sur la frontière de G ayant leur valeur initiale.

Dans les étapes 1°) et 2°) nous avons uniquement besoin des valeurs solutions Z^1_j et Z^2_j ($j = 1, \dots, n$). Cette méthode demande $2(n+2)$ résolutions du problème de Dirichlet sur un rectangle pour $\Delta v = 0$.

4. Utilisation de la méthode directe.

Utiliser la méthode directe pour résoudre les systèmes (2.1.3) et (2.1.4) nous semble intéressant particulièrement dans les étapes 1°) et 2°) car cette méthode, comme nous l'avons vu précédemment, nous permet de calculer la solution aux seuls points z_j^1 et z_j^2 ($j = 1, \dots, n$) respectivement dans les rectangles R_1 et R_2 .

L'utilisation de ma méthode directe dans la méthode de superposition apporte une réduction certaine du temps d'exécution de cette méthode.

Nous utiliserons pour résoudre le système :

$$(A_3 + M^1 + M^2) \Phi = - (k^1 + k^2 + b)$$

La méthode de Gauss avec division.

Dans le programme ALGOL de la méthode de superposition pour la réunion de deux rectangles, nous utilisons les trois procédures suivantes :

PROCEDURE SIMSINN (R,M,N, SIM, CM, SINN, CN)

qui calcule $SIM [R, I, J]$, $CM [R, I]$ pour $1 \leq I, J \leq M$
 $SINN [R, I, J]$, $CN [R, I]$ pour $1 \leq I, J \leq N$

R est l'indice du rectangle pour lequel nous calculons ces quantités.

PROCEDURE SØLUTION (R, I1, IN, J1, JN, M, N, F1, F2, F3, F4, X) ;

C'est la méthode directe pour un rectangle mise sous forme de procédure.

La solution est calculée aux points (I,J) où $I1 \leq I \leq IN$, $J1 \leq J \leq JN$ avec pour conditions sur les bords, les valeurs données par les tableaux F1, F2, F3, F4 dans le rectangle R (=1,2)

PROCEDURE GRESØLSYSLINE (A, B, X, N, IMPOSSIBLE)

qui résoud par la méthode de Gauss le système linéaire de N équations à N inconnues $AX = B$ et nous donne le vecteur X.

NN = nombre de points communs à R1 et R2

MM1 = nombre de points depuis A_1 non compris jusqu'au premier point commun (figure 1)

MM2 = nombre de points depuis A_2 non compris jusqu'au premier point commun (figure 1)

MMA = Max (M1, M2)

NMA = Max (N1, N2)

```

DEBUT COMMENTAIRE SUPERPOSITION DIRECTE POUR 2 RECTANGLES:
ENTIER NN, M1, N1, MM1, M2, N2, MM2, I, J, K, L, M, N, MMR, NMR;
TABLEAU R1[1:NN, 1:NN], K1, PHI[1:NN], X1, X2[1:MMR-2, 1:MMR-2],
F1, F3[1:MMR-2], F2, F4[1:MMR];
DEBUT POUR I := 1, 2 FAIRE
  DEBUT M := SI I = 1 ALORS M1 SINON M2;
    N := SI I = 1 ALORS N1 SINON N2;
    SINSINN (I, M, N, SIM, CM, SINN, CN)
  FIN;
CR1: POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA MMR-2 FAIRE
  F1[I] := F3[I] := 0;
  POUR I := 2 PAS 1 JUSQUA N1+1 FAIRE
    F4[I] := 0;
  POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
    DEBUT
      POUR I := 2 PAS 1 JUSQUA N1+1 FAIRE
        F2[I] := SI I = MM1+K+1 ALORS 1 SINON 0;
        SOLUTION (1, M1, M1, MM1+1, MM1+NN, M1, N1, F1, F2, F3, F4, X1);
      POUR L := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
        R1[L, K] := X[MM1+1+L, M1+1];
      FIN;
    POUR I := 2 PAS 1 JUSQUA N2+1 FAIRE
      F2[I] := 0;
    POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
      DEBUT
        POUR I := 2 PAS 1 JUSQUA N2+1 FAIRE
          F4[I] := SI I = MM2+K+1 ALORS 1 SINON 0;
          SOLUTION (2, 1, 1, MM2+1, MM2+NN, M2, N2, F1, F2, F3, F4, X2);
        POUR L := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
          R1[L, K] := R1[L, K] + X2[MM2+L+1, 2];
        FIN;
      FIN;
  FIN;

```

```

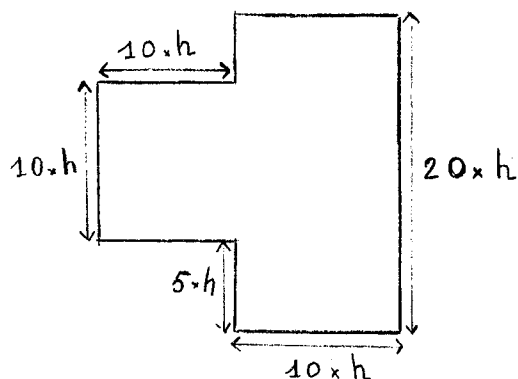
A1[1,1]:= A1[1,1] - 4 ; A1[NN,NN] := A1[NN,NN] - 4 ;
A1[1,2]:= A1[1,2] + 1 ; A1[NN,NN-1] := A1[NN,NN-1] + 1 ;
POUR i := 2 PAS 1 JUSQUA NN-1 FAIRE
  DEBUT A1[i,i-1] := A1[i,i-1] + 1 ;
    A1[i,i+1] := A1[i,i+1] + 1 ; A1[i,i] := A1[i,i] - 4
  FIN ;
CK1 : POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
  PHI[i] := 0 ;
  POUR i := MM1+2 PAS 1 JUSQUA MM1+NN+1 FAIRE
    F1XM[i] := PHI[i-MM1-1] ;
  SOLUTION(1,M1,M1,MM1+1,MM1,NN,M1,N1,F1Y0,F1XM,F1YN,F1X0,X) ;
  POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
    K1[K] := - X[MM1+1+K, M1+1] ;
CK2 : POUR i := MM2+2 PAS 1 JUSQUA MM2+NN+1 FAIRE
  F2X0[i] := PHI[i-MM2-1] ;
  SOLUTION(2,1,1,MM2+1,MM2+NN,M2,N2,F2Y0,F2XM,F2YN,F2X0,X) ;
  POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN FAIRE
    K1[K] := K1[K] - X[MM2+1+K, 2] ;
  K1[1] := K1[1] - F1XM[MM1+1] ;
  K1[NN] := K1[NN] - F1XM[MM1+2+NN] ;
GRESOLSYSLINE (A1,K1,PHI,NN,IMPOSSIBLE) ;
POUR i := MM1+2 PAS 1 JUSQUA MM1+NN+1 FAIRE
  F1XM[i] := PHI[i-MM1-1] ;
POUR i := MM2+2 PAS 1 JUSQUA MM2+NN+1 FAIRE
  F2X0[i] := PHI[i-MM2-1] ;
RESOLUTION :
  SOLUTION(1,1,M1,1,M1,M1,N1,F1Y0,F1XM,F1YN,F1X0,X1) ;
  SOLUTION(2,1,M2,1,N2,M2,N2,F2Y0,F2XM,F2YN,F2X0,X2) ;
IMPOSSIBLE : FIN
FIN ;

```

Ce programme s'applique donc à une réunion quelconque de deux rectangles satisfaisant aux conditions 1 et 2.

Comparons la méthode de superposition "directe" et la méthode de surrelaxation.

Nous appliquerons successivement ces deux méthodes au domaine G suivant :



en faisant varier le pas h_1 du maillage qui recouvre le domaine G :

$$h_1 = 5/3 h, h, 2/3 h$$

E_M désigne l'écart maximum en valeur absolue entre les solutions données par ces deux méthodes

PAS	Nb de points : R1 + R2	E_M	TEMPS	
			: SUPER POSITION	: SURRELAXATION
5/3h	30 + 55	0. 000 000 8	13 s	15 s
h	90 + 171	0. 000 005 5	2 m 13 s	3 m 31 s
2/3h	210 + 406	0. 000 014	9 m 15 s	12 m 1 s

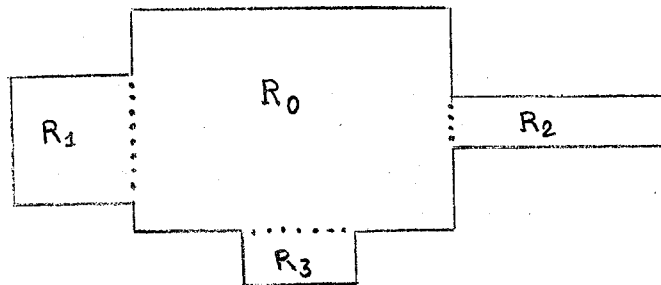
Ce tableau montre qu'au point de vue temps, la méthode de superposition "directe" est intéressante et donne autant de précision que la méthode de surrelaxation.

Mais elle a le même inconvénient que la méthode directe puisque nous utilisons cette méthode pour résoudre tous les problèmes de Dirichlet $\Delta V = 0$ posés par la méthode de superposition $(2n+4)$, à savoir la nécessité de conserver un grand nombre de résultats en mémoire.

II. - Méthode de superposition appliquée à une réunion quelconque de rectangles.

Nous allons étendre à une réunion quelconque de rectangles satisfaisant toutefois à la condition 1, la méthode de superposition pour la réunion de deux rectangles.

1°) Nous allons d'abord étudier le cas de plusieurs rectangles R_1, R_2, \dots, R_k sans points communs adjacents à un rectangle central R_0 et tels que leur réunion satisfasse à la condition 1.



Nous recouvrons ce domaine par un maillage qui satisfait à la condition 2.

Notons φ_i le vecteur colonne formé des valeurs de la fonction, inconnues, sur le bord c_i commun aux rectangles R_i et R_0

Soit Φ le vecteur formé par

$$\begin{array}{|l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{array}$$

Le vecteur Φ est un vecteur dont les composantes ne sont pas connues.

Si nous considérons le vecteur Φ comme étant déterminé, le système formé par la relation (2.1.2) écrite pour tous les points intérieurs au rectangle R_i donne

$$A_i X = \begin{array}{|l} x \\ x \\ \bullet \\ < \\ < \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \text{composantes de } \varphi_i$$

et pour le rectangle R_0 le système s'écrit

$$A_0 X = \begin{array}{|l} x \\ x \\ \bullet \\ x \\ x \\ \vdots \\ \bullet \\ x \\ x \\ \bullet \\ x \\ x \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \text{composantes de } \Phi$$

(n_i étant la dimension du vecteur φ_i).

En résolvant les $k + 1$ systèmes précédents, nous obtenons

$$\begin{cases} Z_0 = K_0 + M_0 \phi \\ Z_i = K_i + M^i \varphi_i \quad i = 1, \dots, k \end{cases}$$

Soit en reportant dans (2.2.1)

$$A \phi = - K_0 - M_0 \phi - K - M \phi$$

avec :

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & M_k \end{pmatrix}$$

qui devient en groupant les termes

$$\boxed{(A + M_0 + M) \phi = - (K_0 + K + b)} \quad (2.2.2)$$

Les matrices M_i sont des matrices carrées d'ordre n_i . Il est clair que, comme pour deux rectangles, les matrices M_0 et M et les vecteurs K_0 et K se déterminent facilement par des résolutions dans chaque rectangle. Les colonnes M_0^j ($j = 1, \dots, \sum_{i=1}^k n_i$) de M_0

s'obtiennent en résolvant le problème dans R_0 avec comme valeurs sur les bords 0 partout sauf au $j^{\text{ième}}$ point commun où la valeur sera 1.

De même pour les colonnes M_i^l ($l = 1, \dots, n_i$) de M_i dans le rectangle R_i .

K_0 s'obtient en résolvant le problème $\Delta v = 0$ dans R_0 avec 0 comme valeur aux points communs et les données ailleurs. De même pour K_i dans R_i .

Nous avons donc à résoudre $2(\sum_{i=1}^k n_i + k + 1)$ problèmes $\Delta v = 0$ dans un rectangle en utilisant la méthode directe.

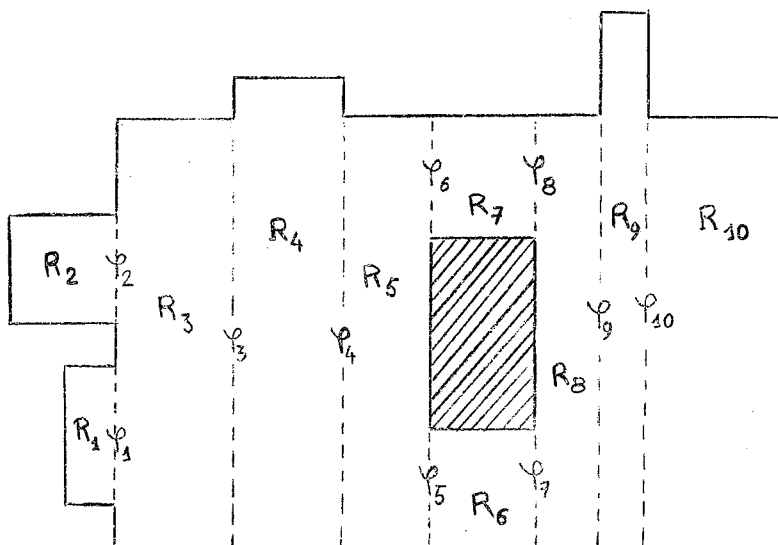
2) Réunion quelconque de rectangles

Le problème se complique légèrement dans la pratique lorsque tous les rectangles ne sont pas groupés autour d'un même rectangle central comme précédemment.

Nous sommes toujours ramenés au problème précédent pour déterminer Φ : $(A + M) \Phi = -K - b$. mais la matrice M ne se décomposera pas toujours en blocs élémentaires correspondant à chaque rectangle et disposés sur la diagonale principale.

Nous avons évidemment une certaine liberté pour choisir les rectangles R_i et par suite les vecteurs φ_j . Ce choix et la numérotation des φ_j sont importants pour la résolution effective du problème.

Nous proposons de faire un découpage du domaine G parallèlement à l'un des axes du maillage de la façon suivante :



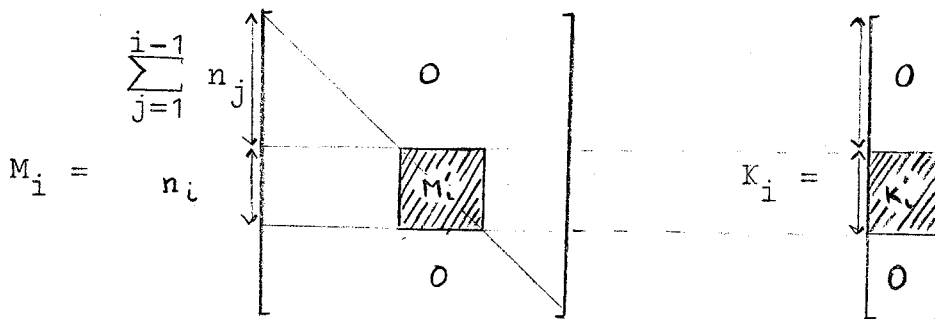
Nous prolongeons suivant l'axe choisi, par exemple l'axe oy, dans le domaine G les cotés des rectangles qui sont sur la frontière de G ; nous numérotons les rectangles de gauche à droite et de bas en haut et les ω_j de sorte que, leur numérotation soit continue sur un même coté du rectangle R_i , c'est-à-dire en ordonnant les ω_j de gauche à droite et de bas en haut.

Nous pouvons écrire :

$$(A + \sum_{i=1}^{10} M_i) \phi = - \left(\sum_{i=1}^{10} K_i \right) - b$$

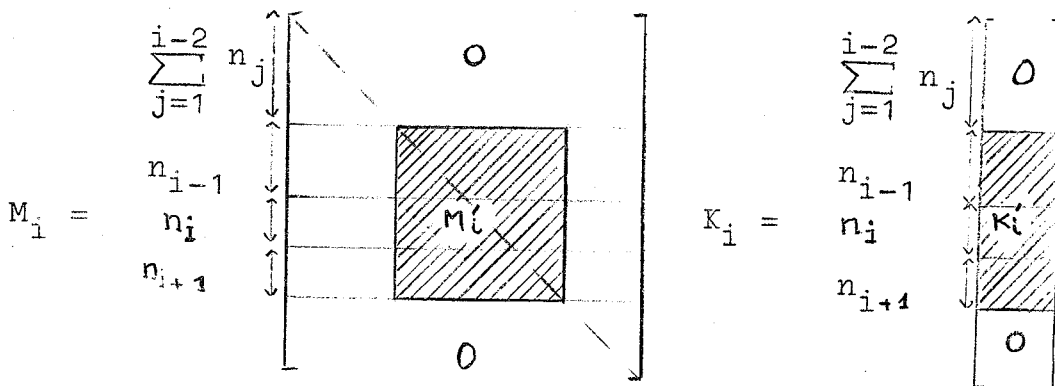
avec :

- Pour les rectangles R_i du type R_1



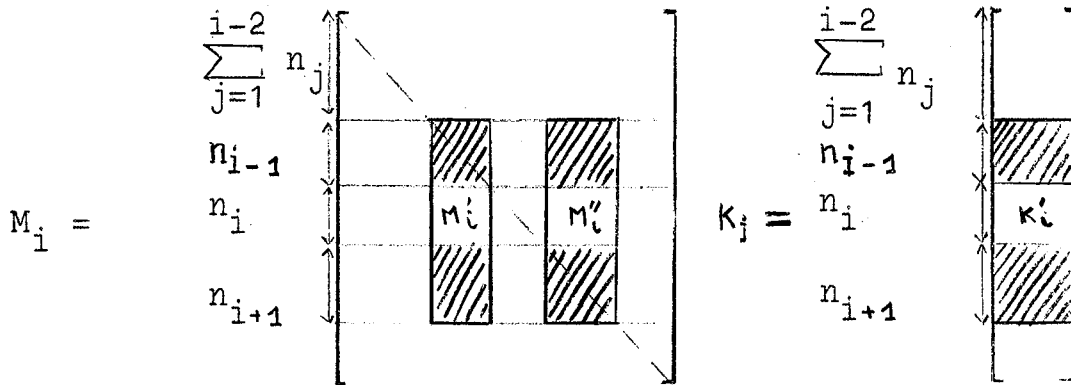
M'_i, K'_i étant calculés comme pour les rectangles adjacents à R_0 dans le cas précédent.

- Pour les rectangles du type R_3



M'_i, K'_i étant alors calculés comme pour le rectangle R_0 du cas précédent.

Pour les rectangles du type R_6



M'_i, M''_i, K'_i se calculant par une méthode analogue à celle que nous avons utilisée pour les rectangles adjacents à R_0 .

Ceci nous montre que A garde la même forme tripe diagonale décrite pour la réunion de rectangles adjacents à un rectangle central.

Nous avons écrit une procédure qui s'applique en faisant varier les paramètres à tous les rectangles qui peuvent se présenter au cours du découpage du domaine G

(type R_1, R_3, R_6) : la procédure MØKØ.

3. Programme ALGOL et résultats numériques

Les quantités suivantes sont introduites en données :

RR = nombre de rectangles du découpage

$M[\bar{I}], N[\bar{I}]$ = nombre de points sur les cotés parallèles respectivement à Ox et Oy de R_I

- KK = nombre de vecteurs φ_J
 NKK = nombre de composantes du vecteur Φ
 $NN [J]$ = nombre de composantes du vecteur φ_J
 ($\sum_{j=1}^{KK} NN [J] = NKK$)
 $MN [I, J] + 1$ = indice dans R_I de la 1ère composante de φ_J considérée comme point d'un côté de R_I
 $RK1 [I]$ = indice du dernier vecteur φ_J du bord gauche de R_I
 $RK2 [I]$ = indice du dernier vecteur φ_J du bord droit de R_I

Il faut noter que si le rectangle R_I n'a pas de vecteur φ_J sur le côté gauche, on prendra :

$$RK1 (I) = RK1 [I-1]$$

et de même s'il n'y a pas de vecteur φ_J sur le bord droit, on prendra :

$$RK2 [I] = RK2 [I-1]$$

Nous avons alors les étapes suivantes pour la méthode de superposition directe.

a) Calcul des sinus

Introduction de $A1 = A$

b) Calcul de $A1, K1$:

pour $i = 1, \dots, RR$

$$\begin{aligned}
 NK &= RK1 (i-1), \quad KK3 = RK2 (i-1) + 1 \\
 KK1 &= RK1 (i) \quad , \quad KK2 = RK2 (i) \\
 NNK1 &= \sum_{j=1}^{NK} NN (j)
 \end{aligned}$$

$$NNK2 = \sum_{j=1}^{KK3-1} NN(j)$$

$$MO = M(i) , NO = N(i)$$

appel de la procédure MOKO pour ces paramètres.

- c) Résolution de $A1 \cdot \phi = K1$
- d) Définition de f sur les frontières communes
- e) Calcul de la solution dans R_i ($i=1, \dots, RR$) par la
procédure SOL

Si R est l'indice du rectangle dans lequel sont fait les calculs, la procédure MOKO est la suivante :

PROCEDURE MOKO (R, MO, NO, NK, NNK1, KK1, KK3, NNK2, KK2, B1, K1);

ENTIER R, MO, NO, NK, NNK1, KK1, KK3, NNK2, KK2 ;

TABLERU A1, K1 ;

DEBUT ENTIER I, J, K, L, NN1, NN2, J1, JN ;

POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA MO+2 FAIRE

F1[i] := F3[i] := 0 ;

POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA NO+2 FAIRE

F2[i] := F4[i] := 0 ;

POUR J := NK+1 PAS 1 JUSQUA KK1 FAIRE

DEBUT SI J = NK+1 ALORS NN2 := NNK1

SINON NN2 := NN2 + NN[J-1] ;

POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN[J] FAIRE

DEBUT POUR i := MM[R, J] + 2 PAS 1 JUSQUA MM[R, J]
+ NN[J] + 1 FAIRE

F4[i] := SI i = MM[R, J] + K + 1 ALORS 1 SINON 0 ;

J1 := 1 + MM[R, NK+1] ; JN := MM[R, KK1] + NN[KK1] ;

SOLUTION (R, 1, 1, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := NK+1 PAS 1 JUSQUA KK1 FAIRE

DEBUT SI L = NK+1 ALORS NN1 := NNK1

SINON NN1 := NN1 + NN[L-1] ;

POUR i := MM[R, L] + 1 PAS 1 JUSQUA MM[R, L] + NN[L]

FAIRE

A1[NN1 - MM[R, L] + i, K + NN2] := A1[NN1 - MM[R, L] + i,
K + NN2] + X[i+1, 2] ;

FIN ;

SI KK3 SUPER RR ALORS ALLER SUITE 2 ;

J1 := 1 + MM[R, KK3] ; JN := MM[R, KK2] + NN[KK2] ;

SOLUTION (R, MO, NO, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := KK3 PAS 1 JUSQUA KK2 FAIRE

DEBUT SI L = KK3 ALORS NN1 := NNK2

SINON NN1 := NN1 + NN[L-1] ;

POUR i := MM[R,L]+1 PAS 1 JUSQUA MM[R,L]+NN[L] FAIRE
A1[NN1 - MM[R,L]+i, k+NN2] := A1[NN1 - MM[R,L]+i,
k+NN2] + X[i+1, MO+1]

FIN ;

SUITE2: FIN ; F4[MM[R,J]+NN[J]+1] := 0

FIN ; F4[JN+1] := 0 ;

POUR J := KK3 PAS 1 JUSQUA KK2 FAIRE

DEBUT SI J = KK3 ALORS NN2 := NNK2

SINON NN2 := NN2 + NN[J-1] ;

POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA NN[J] FAIRE

DEBUT POUR i := MM[R,J]+2 PAS 1 JUSQUA MM[R,J]+
NN[J]+1 FAIRE

F2[i] := SI i = MM[R,J]+K+1 ALORS 1 SINON 0 ;

SI KK1 = 0 ALORS ALLERA SUITE1 ;

J1 := 1 + MM[R,NK+1] ; JN := MM[R,KK1] + NN[KK1] ;

SOLUTION (R, 1, 1, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := NK+1 PAS 1 JUSQUA KK1 FAIRE

DEBUT SI L = NK+1 ALORS NN1 := NNK1

SINON NN1 := NN1 + NN[L-1] ;

POUR i := MM[R,L]+1 PAS 1 JUSQUA MM[R,L]+NN[L]
FAIRE

A1[NN1 - MM[R,L]+i, k+NN2] := A1[NN1 - MM[R,L]+i,
k+NN2] + X[i+1, 2]

FIN ;

SUITE1: J1 := 1 + MM[R,KK3] ; JN := MM[R,KK2] + NN[KK2] ;

SOLUTION (R, MO, MO, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := KK3 PAS 1 JUSQUA KK2 FAIRE

DEBUT SI L = KK3 ALORS NN1 := NNK2

SINON NN1 := NN1 + NN[L-1] ;

POUR i := MM[R,L]+1 PAS 1 JUSQUA MM[R,L]+NN[L]
FAIRE

A1[NN1 - MM[R,L]+i, k+NN2] := A1[NN1 - MM[R,L]+i,
k+NN2] + X[i+1, MO+1] ;

FIN

FIN ; F2 [MM[R,J] + NN[J] + 1] := 0

FIN CALCUL R1 ;

CALCUL K1 :

POUR i := 1 PAS 1 JUSQUA MO + 2 FAIRE

DEBUT F1[i] := FYO[R,i] ; F3[i] := FYN[R,i] FIN ;

POUR j := 1 PAS 1 JUSQUA NO + 2 FAIRE

DEBUT F2[j] := FXM[R,j] ; F4[j] := FXO[R,j] FIN ;

SI KK1 = 0 ALORS ALLERA SUITE 3 ;

J1 := 1 + MM[R, NK + 1] ; JN := MM[R, KK1] + NN[KK1] ;

SOLUTION (R, 1, 1, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := NK + 1 PAS 1 JUSQUA KK1 FAIRE

DEBUT SI L = NK + 1 ALORS NN1 := NNK1

SINON NN1 := NN1 + NN[L - 1] ;

POUR i := MM[R,L] + 1 PAS 1 JUSQUA MM[R,L] + NN[L] FAIRE

K1 [NN1 - MM[R,L] + i] := K1 [NN1 - MM[R,L] + i] - X[i + 1, 2] ;

FIN ;

SUITE 3 : SI KK3 SUPER RR ALORS ALLERA SUITE ;

J1 := 1 + MM[R, KK3] ; JN := MM[R, KK2] + NN[KK2] ;

SOLUTION (R, MO, NO, J1, JN, MO, NO, F1, F2, F3, F4, X) ;

POUR L := KK3 PAS 1 JUSQUA KK2 FAIRE

DEBUT SI L = KK3 ALORS NN1 := NNK2

SINON NN1 := NN1 + NN[L - 1] ;

POUR i := MM[R,L] + 1 PAS 1 JUSQUA MM[R,L] + NN[L] FAIRE

K1 [NN1 - MM[R,L] + i] := K1 [NN1 - MM[R,L] + i] - X[i + 1, MO + 1] ;

K1 [NN1 + 1] := K1 [NN1 + 1] - F2 [MM[R,L] + 1] ;

K1 [NN1 + NN[L]] := K1 [NN1 + NN[L]] - F2 [MM[R,L] + NN[L] + 2]

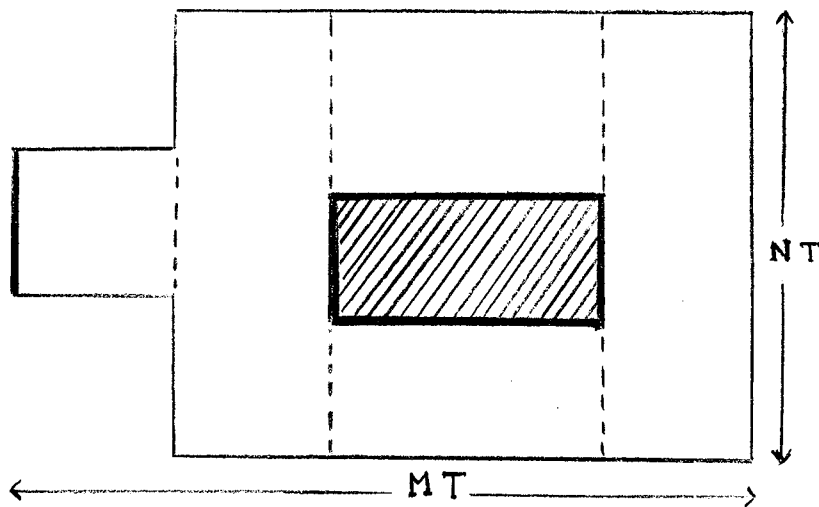
FIN CALCUL K1 ;

SUITE : FIN HOKO ;



Il est évident que cette méthode permet de calculer la solution V_{ij} en un seul point ou en un nombre quelconque de points du maillage. Mais il faut, quel que soit les points pour lesquels on cherche la solution, faire le calcul complet du vecteur Φ ce qui revient à calculer la solution d'un problème de Dirichlet pour $\Delta v = 0$ en $2 \sum_{i=1}^{KK} NN(i) (NN(i) + 1)$ points supplémentaires.

Il semble donc que cette méthode ne soit avantageuse au point de vue temps que si l'on désire la solution en un nombre restreint de points, ou si le nombre $N = 2 \sum_{i=1}^{KK} NN(i) (NN(i) + 1)$ est suffisamment inférieur au nombre total de noeuds contenus dans le domaine G.

C'est ce que nous allons vérifier par une étude numérique de la méthode de superposition, à laquelle, nous associons la méthode directe, dans un domaine G ayant la forme suivante :



et avec les données sur les frontières de ce domaine définies de la manière suivante :

- 1 sur les frontières 
- 2 sur les frontières 

Nous faisons varier les dimensions mais la forme générale et les données resteront identiques dans tous les problèmes.

1er problème :

$$NT = 10, MT = 27$$

Φ a 16 composantes

On cherche la solution en 198 et $N = 136$

2ème problème :

$$NT = 20, MT = 27$$

Φ a 32 composantes

On cherche la solution en 396 points et
 $N = 460$

3ème problème :

$$NT = 10, MT = 51$$

Φ a 16 composantes

On cherche la solution en 380 points et
 $N = 136$

4ème problème :

$$NT = 10, MT = 51$$

Φ a 12 composantes

On cherche la solution en 348 points et
 $N = 44$

Dans le tableau suivant, nous indiquons pour chaque problème :

. Le temps de la méthode de surrelaxation

$$(w = 1,5, \epsilon = 0,000\,000\,1)$$

. Le temps de calcul du vecteur Φ

- . Le temps total de la méthode de superposition
- . ϵ_M = écart maximum en valeur absolue entre la solution de la surrelaxation et la solution de la méthode de superposition.

Problème :	TEMPS			ϵ_M
	Surrelax. :	Calcul ϕ	Superpos. :	
1	1'36"	51 "	1'5"	0, 000 000 26
2	2'52"	5'10 "	5'51"	0, 000 000 43
3	2'40"	2'1"	2'39"	0, 000 000 26
4	2'30"	1'29"	2'4"	0, 000 000 28

La méthode de superposition n'est donc pas systématiquement valable (du point de vue temps) pour une réunion quelconque de rectangles. Dans certains problèmes (2ème problème) le calcul de ϕ seul est plus long que le calcul de la solution, en tous les points du maillage contenus dans le domaine G, par surrelaxation.

ETUDE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION

DANS UN RECTANGLE :

Jonction entre la theorie des précédents
chapitres et celle de WASCW

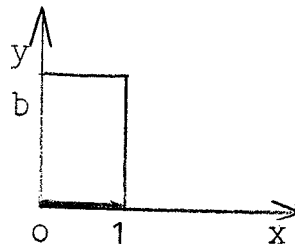
L'erreur d'approximation est la différence entre la solution exacte de l'équation différentielle et la solution exacte de l'équation aux différences finies.

I. - Position du problème.

La solution dans un rectangle de l'équation différentielle ou de l'équation aux différences finies peut toujours s'écrire comme la somme de 4 solutions du type suivant :

Solution dans le rectangle

$$R \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$



pour la fonction $F(x,y)$ sur la frontière définie par :

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } y \neq 0 \end{cases}$$

Nous étudierons donc l'erreur d'approximation dans ce cas. Nous recouvrons R par un maillage carré tel que :

$$1 = (m+1) h, \quad b = (n+1) h.$$

On sait que la solution u de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p g(y, p \pi) \sin(\pi p x) \quad (3.1.1)$$

$$\text{ou } C_p = \int_0^1 f(t) \sin(\pi p t) dt$$

$$g(y, z) = \frac{\text{sh} \left[\frac{(b-y)z}{bz} \right]}{\text{sh}(bz)} \quad (3.1.2)$$

Wason [1] donne comme solution exacte du système linéaire aux différences pour ce problème :

$$u_h(x, y) = \sum_{p=1}^{1/h} \gamma_p g\left(y, \frac{\beta_p}{h}\right) \sin(\pi p x) \quad (3.1.3)$$

où :

$$\gamma_p = 2h \sum_{r=1}^{1/h} f(rh) \sin(\pi p r h)$$

$$\beta_p \text{ est la solution de } \text{sh} \left[\frac{\beta_p}{2} \right] = \sin \left(\frac{\pi p h}{2} \right),$$

expression qui permet d'étudier l'erreur d'approximation $u - u_h$

Nous nous proposons donc de mettre l'expression (1.1.7) de la solution exacte de l'équation aux différences finies sous la forme (3.1.3).

II. - Transformation de l'expression V_{ij}

Pour le problème étudié V_{ij} s'écrit d'après (1.1.7)

$$3.2.4) \quad V_{ij} = \frac{-1}{n+1} \sum_{p=1}^{m+1} \left[2h \sum_{r=1}^{m+1} f(rh) \sin\left(\frac{\pi pr}{m+1}\right) \right] \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2} \sin\left(\frac{\pi pi}{m+1}\right)$$

3.1.3) s'écrit explicitement ($x = ih$, $y = jh$) :

$$u_h(x, y) = \sum_{p=1}^{m+1} \left[2h \sum_{r=1}^{m+1} f(rh) \sin\left(\frac{\pi pr}{m+1}\right) \right] \frac{\text{sh}[(n+1-j) \beta_p]}{\text{sh}[(n+1) \beta_p]} \sin\left(\frac{\pi pi}{m+1}\right)$$

avec β_p solution de $\text{sh} \frac{\beta_p}{2} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$ (3.2.5)

Il faut donc, pour obtenir (3.1.3) en partant de (3.2.4) transformer l'expression :

$$\frac{-1}{n+1} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2}$$

Il est important de noter que les expressions (3.1.3) et (3.2.4) ne sont égales à la solution que si

$$1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Notons $A = \frac{-1}{n+1} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 2}$

$$A = \frac{-1}{n+1} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi p}{m+1}\right) - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)}$$

en utilisant la définition (3.2.5) de β_p

$$A = \frac{-1}{n+1} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - 1 - 2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta_p}{2}\right)} = \frac{-1}{n+1} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi q j}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - \operatorname{ch}(\beta_p)}$$

$$A = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\cos\left[\frac{\pi q}{n+1}(j+1)\right] - \cos\left[\frac{\pi q}{n+1}(j-1)\right]}{\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - \operatorname{ch}(\beta_p)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \mathcal{R} \left[\sum_{q=0}^{n+1} \frac{e^{i \frac{\pi q}{n+1}(j+1)} - e^{i \frac{\pi q}{n+1}(j-1)}}{\cos\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) - \operatorname{ch}(\beta_p)} \right] \quad (i^2 = -1)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \mathcal{R} \left[\sum_{q=0}^{n+1} \frac{e^{i \frac{\pi q}{n+1}(j+1)} - e^{i \frac{\pi q}{n+1}(j-1)}}{e^{i \frac{\pi q}{n+1}} - e^{-i \frac{\pi q}{n+1}} - 2 \operatorname{ch}(\beta_p)} \right]$$

$$A = \frac{1}{(n+1)} \mathcal{R} \left[\sum_{q=0}^{n+1} \frac{e^{i \frac{\pi q}{n+1}(j+2)} - e^{i \frac{\pi q}{n+1} j}}{e^{2i \frac{\pi q}{n+1}} - 2 \operatorname{ch}(\beta_p) e^{i \frac{\pi q}{n+1}} + 1} \right]$$

Soit en posant

$$\alpha = e^{i \frac{\pi q}{n+1}}$$

$$A = \frac{1}{n+1} \mathcal{R} \left[\sum_{q=0}^{n+1} \frac{\alpha^{j+2} - \alpha^j}{\alpha^2 - 2 \operatorname{ch}(\beta_p) \alpha + 1} \right]$$

$$\alpha^2 - 2 \operatorname{ch}(\beta_p) \alpha + 1 = (\alpha - e^{\beta_p}) (\alpha - e^{-\beta_p})$$

par conséquence

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2 \operatorname{ch}(\beta_p) \alpha + 1} = \left[\frac{1}{\alpha - e^{\beta_p}} - \frac{1}{\alpha - e^{-\beta_p}} \right] \cdot \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\beta_p)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2(n+1) \operatorname{sh}(\beta_p)} \left[\sum_{q=0}^{n+1} \left(\frac{\alpha^{j+2}}{\alpha - e^{\beta_p}} - \frac{\alpha^{j+2}}{\alpha - e^{-\beta_p}} - \frac{\alpha^j}{\alpha - e^{\beta_p}} + \frac{\alpha^j}{\alpha - e^{-\beta_p}} \right) \right]$$

Notons

$$C_j(b) = \left[\sum_{q=0}^{n+1} \frac{\alpha^j}{\alpha - b} \right]$$

A s'écrit alors :

$$(3.2.6) \quad A = \frac{1}{2(n+1) \operatorname{sh} \beta_p} \left[C_{j+2}(e^{\beta_p}) - C_{j+2}(e^{-\beta_p}) - C_j(e^{\beta_p}) + C_j(e^{-\beta_p}) \right]$$

Calculons $C_j(b) = \text{partie réelle de } \left\{ \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\alpha^j}{\alpha - b} \right\}$ où $\alpha = e^{i \frac{\pi q}{n+1}}$
 $b > 0$

$$\alpha^j - b^j = (\alpha - b) (\alpha^{j-1} + \alpha^{j-2} b + \dots + \alpha^{j-k} b^{k-1} + \dots + b^{j-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^j}{\alpha - b} = \frac{\alpha^j - b^j + b^j}{\alpha - b} = \sum_{k=0}^{j-1} \alpha^k b^{j-1-k} + \frac{b^j}{\alpha - b}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1} \frac{\alpha^q}{\alpha - b} = \sum_{q=0}^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \alpha^k b^{q-1-k} \right) + \sum_{q=0}^{n+1} \frac{b^q}{\alpha - b}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} b^{j-1-k} \sum_{q=0}^{n+1} \alpha^q + \sum_{q=0}^{n+1} \frac{b^q}{\alpha - b}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1} \alpha^q = \sum_{q=0}^{n+1} \left(e^{i \frac{\pi q}{n+1}} \right)^k = \sum_{q=0}^{n+1} \left(e^{i \frac{\pi k}{n+1}} \right)^q$$

j satisfaisant aux inégalités $1 \leq j \leq n$, k satisfait aux inégalités $0 \leq k \leq n - 1$

Nous avons donc :

$$\sum_{q=0}^{n+1} \left(e^{i \frac{\pi k}{n+1}} \right)^q = \begin{cases} n + 2 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1 + (-1)^k}{2} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$C_j(b) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} b^{j-1-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k b^{j-1-k} + (n+2) b^{j-1} + b^j \left(\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} b^{j-1-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k b^{j-1-k} + (n+1) b^{j-1} + b^j \left(\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{b^j - 1}{b - 1} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^j - b^j}{-1 - b} + (n+1) b^{j-1} + b^j \left(\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b} \right)$$

$$C_j(b) = \frac{1}{2} \frac{b^j - 1}{b - 1} + \frac{1}{2} \frac{b^j + (-1)^{j-1}}{b + 1} + (n+1) b^{j-1} + b^j \left(\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b} \right)$$

Il reste à calculer $\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b}$

Pour cela remarquons que les α pour $q = 0, \dots, n + 1$ sont $n + 2$ racines $(2n + 2)$ ième de l'unité situées sur le demi-cercle supérieur et sur l'axe réel.

Si nous notons α'_1 ($1 = 1, \dots, 2n + 2$) les racines $(2n+2)$ ième de l'unité, b étant sur l'axe réel, nous avons :

$$\sum_{q=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha-b} = \frac{1}{2} \left[\sum_{l=1}^{2n+2} \frac{1}{\alpha'_l - b} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{-1-b} \right]$$

et α'_1 est une racine de $z^{2n+2} - 1 = 0$

Posons $u = z - b \Rightarrow z = u + b$

$\Rightarrow \alpha'_1 - b$ est racine de l'équation $(u+b)^{2n+2} - 1 = 0$ équation qui s'écrit en développant :

$$u^{2n+2} + 2(n+1) b u^{2n+1} + \dots + 2(n+1) b^{2n+1} u + b^{2n+2} - 1 = 0$$

La somme de l'inverse des racines de cette équation est égale à l'opposé du rapport du coefficient du terme en u sur le terme constant, soit :

$$\sum_{l=1}^{2n+2} \frac{1}{a^l 1-b} = - \frac{2(n+1) b^{2n+1}}{b^{2n+2} - 1}$$

Donc :

$$C_j(b) = \frac{1}{2} \frac{b^{j-1}}{b-1} + \frac{1}{2} \frac{b^j + (-1)^{j-1}}{b+1} + (n+1)b^{j-1} + \frac{(n+1)b^{2n+1+j}}{b^{2n+2}-1} - \frac{1}{2} \frac{b^j}{b-1} - \frac{1}{2} \frac{b^j}{b+1}$$

$$C_j(b) = \frac{-1}{2(b-1)} + \frac{(-1)^{j-1}}{2(b+1)} + (n+1)b^{j-1} - \frac{(n+1)b^{2n+1+j}}{b^{2n+2}-1}$$

Reportons nous à l'expression (3.2.6) de A. D'après la forme de $C_j(b)$ nous voyons qu'il est intéressant de grouper A de la façon suivante :

$$A = \frac{1}{2(n+1)\text{Sh}\beta_p} \left[(C_{j+2}(e^{\beta P}) - C_j(e^{\beta P})) - (C_{j+2}(e^{-\beta P}) - C_j(e^{-\beta P})) \right]$$

$$\begin{aligned} C_{j+2}(e^{\beta P}) - C_j(e^{\beta P}) &= \frac{-(n+1) e^{(n+1)\beta P} [e^{(n+j+2)\beta P} - e^{(n+j)\beta P}]}{e^{z(n+1)\beta P} - 1} \\ &\quad + (n+1) [e^{(j+1)\beta P} - e^{(j-1)\beta P}] \\ &= \frac{-(n+1) e^{(n+1+j)\beta P} [e^{\beta P} - e^{-\beta P}] + (n+1) e^{j\beta P} [e^{\beta P} - e^{-\beta P}]}{2 \text{Sh} [(n+1)\beta_p]} \end{aligned}$$

$$C_{j+2}(e^{\beta P}) - C_j(e^{\beta P}) = \frac{-(n+1) \text{Sh}\beta_p}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]} e^{(n+1+j)\beta P} + \frac{(n+1) \text{Sh}\beta_p}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]} e^{j\beta P}$$

A devient donc :

$$A = \frac{1}{2(n+1)\text{Sh } \beta_p} \left[\frac{-(n+1) \text{Sh } \beta_p}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]} (e^{(n+1+j)\beta_p} - e^{-(n+1+j)\beta_p}) + 2(n+1)\text{Sh } \beta_p \dots \dots [e^{j\beta_p} + e^{-j\beta_p}] \right]$$

$$A = - \frac{\text{Sh}[(n+1+j)\beta_p]}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]} + 1 \text{ ch } (j \beta_p)$$

or $2 \text{ ch } [j \beta_p] \text{ Sh}[(n+1)\beta_p] = \text{Sh}[(n+1+j)\beta_p] + \text{Sh}[(n+1-j)\beta_p]$

Donc :

$$A = \frac{\text{Sh}[(n+1-j)\beta_p]}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]}$$

Nous obtenons ainsi la formule très intéressante

si $1 \leq j \leq n$

$$(I) \quad \frac{1}{2(n+1)} \sum_{q=0}^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi q}{n+1} \sin \frac{\pi q j}{n+1}}{\sin^2 \frac{\pi q}{2(n+1)} + \text{Sh}^2\left(\frac{\beta_p}{2}\right)} = \frac{\text{Sh}[(n+1-j)\beta_p]}{\text{Sh}[(n+1)\beta_p]}$$

qui nous permet de passer de V_{ij} à $u_h(x,y)$

III. - Erreur d'approximation dans un rectangle (cf Wason [1])

Nous pouvons maintenant étudier l'erreur d'approximation avec $u_h(x,y)$.

Nous nous plaçons dans les conditions définies au paragraphe I.

Il est intéressant d'utiliser des valeurs sur la frontière qui s'annulent aux quatre coins.

Pour cela, nous introduisons le polynôme harmonique $Q(x,y)$ défini par :

$$b. Q(x,y) = A_{00}(x-1)(y-b) - A_{10} x (y-b) + A_{1b} x y - A_{0b} (x-1) y$$

A_{00}, A_{10}, \dots sont les valeurs de f en ces points. Cette fonction Q est solution des 2 équations différentielles et aux différences.

Si l'on remplace f par $f^* = f - Q$ nous obtenons un nouveau problème dont l'erreur d'approximation est la même que pour le problème initial.

$$f^* = 0 \quad \text{aux quatre coins.}$$

$$f^*(i) = f(i) \quad \text{pour } i \geq 2$$

Nous avons donc pour u et u_h les expressions

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\mathcal{P}} C_n g(y, n\pi) \sin(n\pi x) \quad (3.3.7)$$

$$u_h(x,y) = \sum_{n=1}^{1/h} \gamma_n g(y, \frac{\beta_n}{h}) \sin(n\pi x) \quad (3.3.8)$$

où :

$$C_n = 2 \int_0^1 f^*(t) \sin(n\pi t) dt \quad (3.3.9)$$

$$\gamma_n = 2h \sum_{r=1}^{1/h} f^*(rh) \sin(n\pi rh) \quad (3.3.10)$$

$$g(y,z) = \frac{\text{Sh} \left[\frac{(b-y)z}{b} \right]}{\text{Sh} [bz]} \quad (3.3.11)$$

$$\text{et } \beta_n \text{ est la solution de } \text{Sh} \left[\frac{\beta_n}{2} \right] = \sin \left(\frac{n\pi h}{2} \right) \quad (3.3.12)$$

$$|u - u_h| \leq R_1 + R_2 + R_3$$

avec :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sum_{n=1}^{1/h} |C_n - \gamma_n| g(y, n\pi) \\
 (3.3.13) \quad R_2 &= \sum_{n=1}^{1/h} |\gamma_n| \left| g(y, n\pi) - g\left(y, \frac{\beta_n}{h}\right) \right| \\
 R_3 &= \sum_{n=1+1/h}^{\infty} |C_n| g(y, n\pi)
 \end{aligned}$$

en remarquant que $0 \leq g(y, z) \leq 1$ pour $0 \leq y \leq b$ (3.3.13')

conséquence immédiate de la définition de $g(y, z)$

1°) Relation entre c_n et γ_n

Intégrons le 2ème membre de (3.3.9) par partie 3 fois
(ici intervient le fait que $f^* = 0$ aux coins)

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{(n\pi)^3} \left[(-1)^{n-1} (f''(1) - f''(0)) \right] + \frac{2}{(n\pi)^3} \int_0^1 f'''(t) \cos(n\pi t) dt$$

ceci implique

$$|C_n| \leq K n^{-3} \quad (3.3.14)$$

$$\text{où } K = \frac{2}{\pi^3} \left[|f''(1)| + |f''(0)| \right] + \frac{4}{\pi^4} \max_{x \in [0, 1]} |f'''(x)| \quad (3.3.15)$$

En exprimant dans (3.3.10) $f^*(rh)$ par sa série de Fourier on obtient la relation

$$\gamma_n = C_n + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{2k/h+n} - C_{2k/h-n}) \quad n = 1, 2, \dots, 1/h$$

En combinant avec (3.3.14), nous trouvons pour $n \leq 1/h$

$$\begin{aligned} |C_n - \gamma_n| &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2k}{h+n}\right)^{-3} + \left(\frac{2k}{h-n}\right)^{-3} \right] \\ &\leq K \frac{h^3}{8} \left[\left(1 + \frac{nh}{2}\right)^{-3} + \left(1 - \frac{nh}{2}\right)^{-3} + \int_1^{\infty} \left(\left(x + \frac{nh}{2}\right)^{-3} + \left(x - \frac{nh}{2}\right)^{-3} \right) dx \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$|C_n - \gamma_n| \leq 1,7 K h^3 \quad \text{pour } n \leq \frac{1}{h} \quad (3.3.16)$$

$$\Rightarrow \text{avec (3.3.14)} \quad |\gamma_n| \leq K (n^{-3} + 1,7 h^3) \quad (3.3.17)$$

2°) Estimation de $g(y, n\pi) - g(y, \beta_{n/h})$

Pour cela Wasow exprime $\beta_{n/2}$, donné par (3.3.12), en terme en $\frac{nh\pi}{2}$ au moyen de la formule de Taylor

$$\rightarrow \frac{\beta_n}{2} = \frac{nh\pi}{2} + \left(\frac{nh\pi}{2}\right)^3 R$$

où R est la valeur de $-\frac{1}{3} \cos \sigma (1 - 2 \sin^2 \sigma) (1 + \sin^2 \sigma)^{-5/2}$

pour une certaine valeur moyenne de σ , $\sigma \in]0, \frac{nh\pi}{2}[$

$$\Rightarrow |\beta_n - n h \pi| \leq (n \pi h)^3 / 12 \quad (3.3.18)$$

Dans le but d'exprimer $g(y, n\pi) - g(y, \beta_n/h)$ au moyen du théorème de la moyenne, il faut estimer le membre de droite de la formule :

$$(3.3.19) \quad \frac{d}{dz} g(y, z) = \frac{1}{2} \text{Sh}^{-2}(bz) \left[(2b-y) \text{Sh}(yz) - y \text{Sh}[(2b-y)z] \right]$$

Nous remarquons que $\frac{\text{Sh}t}{t}$ est une fonction croissante de t pour $t > 0$. D'où :

$$0 \leq \frac{d}{dz} g(y, z) \leq \frac{y}{2} \operatorname{Sh}^{-2}(bz) \operatorname{Sh} [(2b-y)z] \quad (3.3.20)$$

pour $z \geq 0, y \geq 0$

A cette expression, nous pouvons appliquer les inégalités

$$\operatorname{Sh}(kt) \leq e^{(k-1)t} \operatorname{Sh} t \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 1 \quad (3.3.21)$$

$$\operatorname{Sh} t \geq \frac{1}{2} (1 - e^{-2t_1}) e^t \quad t \geq t_1 > 0 \quad (3.3.22)$$

(3.3.22) est évidente.

$$(3.3.21) \text{ vient de } \frac{\operatorname{Sh}(kt)}{\operatorname{Sh} t} = e^{(k-1)t} (1 - e^{-2kt})(1 - e^{-2t})$$

$$\text{Les inégalités } \frac{4}{3} n \leq \beta_{n/h} \leq \pi n \text{ pour } 1 \leq n \leq \frac{1}{h} \quad (3.3.23)$$

seront aussi nécessaires

La 2ième est une conséquence de (3.3.12)

La 1ière peut-être démontrée comme suit

$$\operatorname{Sh} \frac{\beta_n}{2} = \frac{nh\pi}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{n\pi h}{2}} \right) \geq \frac{nh\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \quad \text{d'après (3.3.12)}$$

$$\text{et } \operatorname{Sh} \frac{\beta_n}{2} \leq \frac{nh\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Puisque $\operatorname{Sh} x/x$ est une fonction croissante de x pour $x > 0$

$$\frac{\operatorname{Sh} \frac{\beta_n}{2}}{\frac{\beta_n}{2}} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ar} \operatorname{Sh} \frac{\pi}{2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{\beta_n}{2} \geq \frac{2}{3} \operatorname{Sh} \frac{\beta_n}{2} \geq \frac{2}{3} nh$$

ce qui complète la démonstration de (3.3.23)

En appliquant (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23) à

$$\frac{d}{dz} (g(y, z)) \quad (3.3.20)$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dz} g(y, z) \leq (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} y e^{-yz} \quad \text{pour} \begin{cases} 1 \leq n \leq 1/h \\ \frac{\beta}{h} < z < n\pi \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

et donc en utilisant (3.3.18)

$$(3.3.24) \quad \left| g\left(y, \frac{\beta}{h}\right) - g(y, n\pi) \right| \leq (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} \frac{\pi^3}{12} y e^{-\frac{4\pi y}{3}} n^3 h^2$$

pour $1 \leq n \leq \frac{1}{h}$

3°) Estimation de $|u - u_h|$

Nous pouvons maintenant estimer $|u - u_h|$ en utilisant

(3.3.13)

$$R_1 = \sum_{n=1}^{1/h} |C_n - \gamma_n| (g(y, n\pi))$$

$$(3.3.16) \quad \text{et } (3.3.13') \Rightarrow \boxed{R_1 \leq 1,7 K h^2}$$

$$R_3 = \sum_{n=1+1/h}^{\infty} |C_n| g(y, n \pi)$$

$$(3.3.14) \Rightarrow \boxed{R_3 \leq K \sum_{n=1+1/h}^{\infty} n^{-3} = K \frac{h^2}{2}}$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^{1/h} |\gamma_n| |g(y, n \pi) - g(y, \frac{\beta n}{n})|$$

D'après (3.3.17) et avec (3.3.24) nous obtenons par sommation

$$R_2 \leq (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} K (2,7) \frac{\pi^3}{12} y (e^{\frac{4y}{3}} - 1)^{-1} h^2$$

puisque $\frac{y}{e^{\frac{4y}{3}} - 1} \leq \frac{3}{4}$ pour $y \geq 0$

$$\text{Il vient } \boxed{R_2 \leq 5,24 (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} K h^2}$$

Donc

$$|u - u_h| \leq \left[2,3 + 5,24 (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} \right] K h^2$$

Si $M_2 = \text{Max numérique de } f'' \text{ aux coins du rectangle}$

$M_3 = \text{Max numérique de } f''' \text{ partout sur le contour}$

La dernière inégalité devient d'après (3.3.15)

$$\boxed{|u - u_h| \leq \left[0,297 + 0,676 (1 - e^{-\frac{8b}{3}})^{-1} \right] \left[M_2 + 3,19 M_3 \right] h^2}$$

Si nous prenons un rectangle de côtés de longueur respective a et b au lieu de 1 et b une homothétie donne

$$|u - u_h| \leq \left[0,297 + 0,676 \left(1 - e^{-\frac{8b}{3a}}\right)^{-1} \right] \left[M_2 + 3,19a M_3 \right] h^2$$

Pour avoir l'erreur d'approximation complète, dans le cas général, trois expressions analogues doivent être ajoutées aux 2ème membre de l'inégalité.

Il vient alors en arrondissant pour raccourcir l'expression

$$\begin{aligned} |u - u_h| \leq & \left[0,6 + 1,4 \left(1 - e^{-\frac{8b}{3a}}\right)^{-1} \right] \left[M_2 + 0,32 a M_3 \right] h^2 \\ & + \left[0,6 + 1,4 \left(1 - e^{-\frac{8a}{3b}}\right)^{-1} \right] \left[M_2 + 0,32 b M_3 \right] h^2 \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

SIMPLIFICATION DE LA METHODE DIRECTE :

METHODE DIRECTE SH

I. - Expression reduite de V_{ij}

L'étude de l'erreur d'approximation dans un rectangle nous a conduit à démontrer l'identité, valable pour $1 \leq j \leq n$

$$(4.1.1) \frac{1}{2(n+1)} \sum_{q=1}^{q=n} \frac{\sin(\frac{\pi q}{n+1}) \sin(\frac{\pi q j}{n+1})}{\sin^2(\frac{\pi q}{2(n+1)}) + \text{sh}^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{\text{sh} [(n+1-j) \beta_p]}{\text{sh} [(n+1) \beta_p]}$$

Cette identité va nous permettre de simplifier l'expression (1.1.7) de V_{ij}

$$V_{ij} = \frac{2}{2(m+1)(n+1)} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{\sum_{k,l} (-\beta_{kl}) \sin(\frac{\pi k p}{m+1}) \sin(\frac{\pi q l}{n+1})}{\sin^2(\frac{\pi p}{2(m+1)}) + \sin^2(\frac{\pi q}{2(n+1)})} \sin(\frac{\pi p i}{m+1}) \sin(\frac{\pi q j}{n+1})$$

En tenant compte du fait que seuls

$$\beta_{i1}, \beta_{in} \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\beta_{1j}, \beta_{mj} \quad 1 \leq j \leq n \text{ sont différents de zéro.}$$

nous pouvons écrire :

$$V_{ij} = \frac{2}{2(m+1)(n+1)} \left[\sum_{p=1}^m \left(\sum_{k=1}^m -\beta_{k1} \sin\left(\frac{\pi pk}{m+1}\right) \sum_{q=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi q}{2(m+1)}\right)} \sin\left(\frac{\pi pi}{m+1}\right) \right) \right]$$

(4.1.2)

$$+ \sum_{p=1}^m \left(\sum_{k=1}^m -\beta_{kn} \sin\left(\frac{\pi pk}{m+1}\right) \sum_{q=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\pi qn}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi q}{2(m+1)}\right)} \sin\left(\frac{\pi pi}{m+1}\right) \right)$$

+ 2 expressions analogues en q]

expression dans laquelle nous prenons $\beta_{11} = \frac{\beta_{11}}{2}$,

$$\beta_{1m} = \frac{\beta_{1m}}{2}, \quad \beta_{n1} = \frac{\beta_{n1}}{2}, \quad \beta_{nm} = \frac{\beta_{nm}}{2}.$$

Dans la première expression du deuxième membre de (4.1.2) nous pouvons immédiatement appliquer l'identité (4.1.1) en prenant β_p tel que

$$\text{Sh} \frac{\beta_p}{2} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$$

Dans la deuxième expression nous remarquons que

$$\sin\left(\frac{\pi qn}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi q}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi q(n+1-j)}{n+1}\right)$$

C'est-à-dire que l'on a alors en utilisant l'identité (4.1.1)

$$\frac{1}{2(n+1)} \sum_{q=1}^{q=n} \frac{\sin\left(\frac{\pi qn}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right)} = \frac{\text{Sh} [j\beta_p]}{\text{Sh} [(n+1)\beta_p]}$$

avec β_p tel que $\text{Sh} \frac{\beta_p}{2} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 V_{ij} &= \frac{2}{m+1} \sum_{p=1}^m \left[\left(\sum_{k=1}^m \beta_{k1} \sin\left(\frac{\pi pk}{m+1}\right) \right) \text{Sh} \left[(n+1-j)\beta_p \right] + \left(\sum_{k=1}^m \beta_{kn} \sin\frac{\pi pk}{m+1} \right) \text{Sh}(j\beta_p) \right] \\
 (4.1.3) \quad & \times \frac{\sin\left(\frac{\pi pi}{m+1}\right)}{\text{Sh} \left[(n+1)\beta_p \right]} \\
 & + \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^n \left[\left(\sum_{l=1}^n \beta_{l1} \sin\left(\frac{\pi ql}{n+1}\right) \right) \text{Sh} \left[(m+1-i)\beta_q \right] + \left(\sum_{l=1}^n \beta_{ml} \sin\left(\frac{\pi ql}{n+1}\right) \right) \text{Sh}(i\beta_q) \right] \\
 & \times \frac{\sin\left(\frac{\pi qj}{n+1}\right)}{\text{Sh} \left[(m+1)\beta_q \right]}
 \end{aligned}$$

expression dans laquelle

$$\beta_p \text{ est solution de } \text{Sh} \frac{\beta_p}{2} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$$

$$\text{et } \beta_q \text{ est solution de } \text{Sh} \frac{\beta_q}{2} = \sin\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right)$$

Pour utiliser numériquement l'expression (4.1.3) de V_{ij} il est nécessaire de mettre β_p et β_q sous forme explicite.

Calcul de β_p

Nous calculons β_p mais il est évident que nous avons β_q en remplaçant p par q et m par n .

β_p étant solution de $\text{Sh} \frac{\beta_p}{2} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$ nous allons résoudre cette équation.

Pour cela posons $X = e^{\frac{\beta_p}{2}} \Rightarrow X > 0$

Nous sommes alors ramener à l'équation

$$X - \frac{1}{X} = 2 \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right)$$

Soit : $X^2 - 2 \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) X - 1 = 0$

qui admet pour racines $X = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) \pm \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + 1}$

X étant positif, nous avons :

$$e^{\frac{\beta_p}{2}} = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + 1}$$

Soit $\beta_p = 2 \log \left[\sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + 1} \right]$

Donc :

(4.1.5)	$\beta_p = 2 \log \left[\sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right) + 1} \right]$ $\beta_q = 2 \log \left[\sin\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right) + 1} \right]$
---------	---

II. Etude numérique

L'expression (4.1.3) de V_{ij} nous montre que pour le calcul d'un V_{ij} nous n'avons plus qu'une somme en p et une somme en q ce qui diminue considérablement le nombre d'opérations.

Si l'on tient compte du fait que l'on ne calcule qu'une seule fois pour chaque p les

$$\sum_{k=1}^m \beta_{k1} \sin\left(\frac{\pi pk}{m+1}\right)$$

et de même en q, nous avons pour le calcul de tous les V_{ij} d'après l'organigramme de cette méthode directe simplifiée :

$$\begin{array}{ll}
 2 m^2 n + 2 m n^2 + 2(m^2 + n^2) + mn - 2(m+n) & \text{additions et soustractions} \\
 3mn (m+n) + 2(m^2 + n^2) & \text{multiplications} \\
 2 (m+n) & \text{divisions}
 \end{array}$$

Soit en ordre de grandeur

$$\left| \begin{array}{ll}
 2 mn (m+n) & \text{additions et soustractions} \\
 3 mn (m+n) & \text{multiplications} \\
 2 (m+n) & \text{divisions}
 \end{array} \right.$$

D'autre part, la procédure ALGOL de cette méthode (page suivante) montre que le calcul avec l'expression (4.1.3) nécessite un moins grand nombre de mémoires :

il suffit de conserver, en plus des $\sin(\frac{\pi pk}{m+1})$ et $\sin(\frac{\pi ql}{n+1})$ $\sin(\frac{\pi p}{2(m+1)})$, $\sin(\frac{\pi q}{2(n+1)})$, SX, SY, TX, TY (qui correspondent

aux : $\sum_{k=1}^m \beta_{k1} \sin(\frac{\pi pk}{m+1}), \dots$) c'est-à-dire $m^2 + n^2 + 4(m+n)$

mémoires au lieu de $m^2 + n^2 + mn + 3(m+n)$ mémoires.

La procédure SOLUTION SH Calcule $X [J, I]$ pour $I_1 \leq I \leq I_N$, $J_1 \leq J \leq J_N$ pour un rectangle de dimension (M, N) et d'indice R

$$\text{SIM2} [R, P] = \sin\left(\frac{\pi p}{2(m+1)}\right), \quad \text{SINN2} [R, Q] = \sin\left(\frac{\pi q}{2(n+1)}\right)$$

```

PROCEDURE SOLUTION SH (R, I1, IN, J1, JN, M, N, Y0, XM, YN, X0, X);
  ENTIER R, I1, IN, J1, JN, M, N;
  TABLEAU X0, XM, Y0, YN, X;
  DEBUT ENTIER I, J, P, Q; REEL S, T, U, V;
  TABLEAU SY, TY, FY0, FYN [1:M+2], SX, TX, FX0, FXM [1:N+2],
    ALPH [1:M], GAM [1:N];
  POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N+2 FAIRE
    DEBUT FX0 [I] := X0 [I]; FXM [I] := XM [I]
    FIN;
  POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M+2 FAIRE
    DEBUT FY0 [I] := Y0 [I]; FYN [I] := YN [I]
    FIN;
  FX0 [2] := FY0 [2] := (FY0 [2] + FX0 [2]) * 0.5;
  FXM [2] := FY0 [M+1] := (FXM [2] + FY0 [M+1]) * 0.5;
  FX0 [N+1] := FYN [2] := (FX0 [N+1] + FYN [2]) * 0.5;
  FXM [N+1] := FYN [M+1] := (FXM [N+1] + FYN [M+1]) * 0.5;
  POUR P := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    DEBUT ALPH [P] := 2 * LN (SIN2 [R, P] + ARC2 (SIN2 [R, P] ** 2 + 1));
      S := T := 0;
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
        DEBUT S := S + FY0 [I+1] * SIN [R, P, I];
          T := T + FYN [I+1] * SIN [R, P, I]
        FIN;
      SY [P] := S / (EXP ((N+1) * ALPH [P]) - EXP ((N+1) * (-ALPH [P])));
      TY [P] := T / (EXP ((N+1) * ALPH [P]) - EXP ((N+1) * (-ALPH [P])));
    FIN;
  POUR Q := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT GAM [Q] := 2 * LN (SINN2 [R, Q] + ARC2 (SINN2 [R, Q] ** 2 + 1));
      S := T := 0;
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

```

DEBUT S := S + FXO[i+1] * SINN[R, Q, i];
 T := T + FXM[i+1] * SINN[R, Q, i]

FIN ;

SX[Q] := S / (EXP((M+1) * GAM[Q]) - EXP((M+1) * (-GAM[Q]))) ;

TX[Q] := T / (EXP((M+1) * GAM[Q]) - EXP((M+1) * (-GAM[Q])));

FIN ;

CALCUL X :

POUR i := i1 PAS 1 JUSQUA iN FAIRE

POUR j := j1 PAS 1 JUSQUA jN FAIRE

DEBUT u := v := 0 ;

POUR p := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE

v := v + (SY[p] * (EXP((N+1-j) * ALPH[p]) - EXP((N+1-j) * (-ALPH[p]))) + TY[p] * (EXP(j * ALPH[p]) - EXP(-j * ALPH[p]))) * SIN[R, p, i] ;

POUR q := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

u := u + (SX[q] * (EXP((M+1-i) * GAM[q]) - EXP((M+1-i) * (-GAM[q]))) + TX[q] * (EXP(i * GAM[q]) - EXP(-i * GAM[q]))) * SINN[R, q, j] ;

X[j+1, i+1] := (2 * u) / (N+1) + (2 * v) / (M+1)

FIN ;

FIN SOLUTION SH ;

Pour l'étude numérique de cette méthode directe simplifiée, que nous noterons méthode directe Sh, nous reprenons les mêmes exemples que dans les chapitres 1 et 2.

1°) Pour un rectangle seul

On considère le rectangle $\{ x \in [0, 2\pi], y \in [0, \pi] \}$

la fonction sur la frontière de ce rectangle est

$$f(x, y) = \text{ch } x \sin y$$

ϵ_M désigne encore l'écart maximum en valeur absolue entre la solution de la méthode de surrelaxation et celle de la méthode directe Sh

(4.2.1)

PAS	MxN	Méthode directe Sh	TEMPS Surrelax.	rapport des temps	ϵ_M
$\frac{\pi}{10}$	19x9	16 "	58 "	3,6	0, 000 013
$\frac{\pi}{15}$	19x14	56 "	4'14"	4,53	0, 000 034
$\frac{\pi}{20}$	39x19	2'16 "	11'59"	5,28	0, 000 082

2°) Pour une réunion de deux rectangles

Nous nous plaçons dans le cas défini page 49

(4.2.2)

PAS	Nb de points: R1 + R2	TEMPS			ϵ_M
		Superpos. Sh	Surrelax.	rapport des temps	
$\frac{5}{3}$ h	30 + 55	10 "	15 "	1,5	0,000 000 68
h	90 + 171	48 "	2'20 "	2,91	0,000 006 1
$\frac{2}{3}$ h	210 + 406	2'46 "	12'1 "	4,91	0,000 016

3°) Pour une réunion quelconque de rectangles

Nous reprenons les quatre problèmes définis au chapitre 2 ϵ_M étant toujours défini de la même manière, nous avons le tableau suivant :

(4.2.3)

Problème	TEMPS			ϵ_M
	Surrelax.	Calcul Φ	Superpos. Sh	
1	1' 36"	33 "	46 "	0,000 000 32
2	2' 52"	2'45 "	3'18 "	0,000 000 49
3	2' 40"	54 "	1'24 "	0,000 000 77
4	2' 30"	41 "	1' 9 "	0,000 000 75

Nous pouvons constater que quelque soit le domaine G, la méthode directe Sh a un temps d'exécution très inférieur à celui de la méthode directe : le rapport des temps d'exécution se situe aux environs de 2 pour un rectangle seul, mais peut devenir plus important pour une réunion de rectangles. Les résultats numériques sont du même ordre que ceux de la méthode directe.

Ceci est très intéressant, particulièrement dans le cas où nous associons la méthode directe Sh à la méthode de superposition car la possibilité de temps intéressants est augmentée de façon très nette.

III. Comparaison avec la méthode de surrelaxation optimisée

En considérant les valeurs de ϵ_M et E_M obtenues aux chapitres 1 et 2 avec la méthode et celles obtenues avec la méthode directe Sh, nous constatons que le ϵ choisi pour la précision de la méthode de surrelaxation est très inférieur aux valeurs de ϵ_M et E_M .

Nous pouvons prendre un ϵ plus grand ce qui réduira de façon appréciable le temps de surrelaxation.

D'autre part, nous avons pris jusqu'à présent le coefficient de surrelaxation $\omega = 1,5$ qui n'est pas la valeur donnant le meilleur temps d'exécution pour un domaine rectangulaire. Dans le but d'améliorer ce temps, nous avons cherché un coefficient ω se rapprochant de la valeur optimale. Une série d'essais sur un domaine rectangulaire nous montre que $\omega = 1,75$ est la valeur qui nous donne le meilleur temps dans la plus part des cas.

Nous allons refaire les comparaisons de temps entre la méthode directe Sh et la méthode de surrelaxation en prenant $\omega = 1,75$ et $\epsilon = 10^{-5}$ ou 10^{-6} suivant les problèmes :

$\epsilon = 10^{-6}$ pour une réunion quelconque de rectangles

$\epsilon = 10^{-5}$ pour les autres problèmes.

1°) Pour un rectangle seul

(4.3.1)

PAS	DIRECTE Sh	Surrelaxation	ϵ_M
$\frac{\pi}{10}$	16 "	29 "	0, 000 015
$\frac{\pi}{15}$	56 "	1' 4 "	0, 000 036
$\frac{\pi}{20}$	2' 16 "	3' 8 "	0, 000 09

Nous constatons que le temps d'exécution de la méthode de surrelaxation est considérablement diminuée mais le temps de la méthode directe Sh lui est toujours inférieur. Il n'en est pas de même pour la méthode directe (tableau (1.3.2)).

2°) Pour deux rectangles

(4.3.2)

PAS	DIRECTE	Surrelaxation	E_M
h	48 "	1' 27 "	0, 000 004
$\frac{2}{3} h$	2' 46 "	3' 45 "	0, 000 6

3°) Réunion quelconque de rectangles

Problème	SUPERPOSITION	CALCUL	Surrelax.	ϵ_M
	Sh	$\bar{\phi}$		
1	46 "	33"	1' 14"	0,000 000 4
2	3' 18 "	2' 45"	2' 34"	0,000 000 5
3	1' 24"	54"	2' 47"	0,000 000 6
4	1' 9"	41"	2' 37	0,000 000 7

Dans ce dernier cas, le temps de la méthode de surrelaxation n'a pas beaucoup diminué. Cela est dû au fait que nous avons pris $\epsilon = 10^{-6}$ (dans les cas précédents (4.3.1) et (4.3.2) $\epsilon = 10^{-5}$).

REFERENCES

[1] W. WASOW

On the truncation error in the solution
of Laplace's equation by finite differ-
ences

J. Res. Nat. Bur. Stand. Vol 48 p. 345-348
1952.

[2] J.H BRAMBLE and B.E. HUBBARD

On the formulation of finite difference ana-
logues of the Dirichlet Problem for Poisson's
equation.

Numerische Mathematik 4. Band, 4. Heft

[3] FORSY THE WASOW

Finite differnce methods for partial differential
equations

[4] B. EPSTEIN

Partial differential equations an introduction

M C Graw Hill Book compagny, INC 1962

Vu,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse.

Vu,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE