



HAL
open science

Méthodes de calcul des valeurs propres d'une matrice quelconque par utilisation de transformations unitaires

Jacques Wolf

► **To cite this version:**

Jacques Wolf. Méthodes de calcul des valeurs propres d'une matrice quelconque par utilisation de transformations unitaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00279769

HAL Id: tel-00279769

<https://theses.hal.science/tel-00279769>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

Université de GRENOBLE

Faculté des Sciences

METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES D'UNE

MATRICE QUELCONQUE PAR UTILISATION DE TRANSFORMATIONS UNITAIRES

XXXXXX XXX XXX XXXXXX XXXX XXXXXX
X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X
X XXXXX XX XXXX XX
X X X X X X X X
X X X X X X X X
XXX XXX XXX XXXXXX XXXX XXXXXX

pour obtenir

Le Grade de DOCTEUR DE SPECIALITE

(Mathématiques Appliquées)

Présentée par

Jacques W O L F

Licencié es-Sciences

Thèse soutenue le

26 Novembre 1965

Devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN

Président

GASTINEL

Examineurs

HACQUES

METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES D'UNE

MATRICE QUELCONQUE PAR UTILISATION DE TRANSFORMATIONS UNITAIRES

```

-----
XXXXXX  XXX XXX  XXXXXX  XXXX  XXXXXX
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
XXX  XXX XXX  XXXXXX  XXXX  XXXXXX

```

pour obtenir

Le Grade de DOCTEUR DE SPECIALITE

(Mathématiques Appliquées)

Présentée par

Jacques W O L F

Licencié es-Sciences

Thèse soutenue le

26 Novembre 1965

Devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN

Président

GASTINEL

Examineurs

HACQUES

METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES D'UNE

MATRICE QUELCONQUE PAR UTILISATION DE TRANSFORMATIONS UNITAIRES

```

-----
XXXXXX  XXX XXX  XXXXXX  XXXX  XXXXXX
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X  X
XXX  XXX XXX  XXXXXX  XXXX  XXXXXX

```

pour obtenir

Le Grade de DOCTEUR DE SPECIALITE

(Mathématiques Appliquées)

Présentée par

Jacques W O L F

Licencié es-Sciences

Thèse soutenue le

26 Novembre 1965

Devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN
GASTINEL
HACQUES

Président
Examineurs

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	MAGNETISME
HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
CHABAUTY C.	MATHEMATIQUES PURES
PARDE M.	POTAMOLOGIE
BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
BESSON J.	ELECTROCHIMIE
WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
OZENDA P.	BOTANIQUE
FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
GALVANI O.	MATHEMATIQUES
MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE ET RADIOACTIVITE
TRAYNARD P.	CHIMIE GENERALE
SOUTIF M.	PHYSIQUE GENERALE
CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
GALISSOT F.	MATHEMATIQUES PURES
Mlle LUTZ E.	MATHEMATIQUES GENERALES
MM. BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
BONNIER E.	METALLURGIE
DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
DEBELMAS J.	GEOLOGIE GENERALE
GERBER R.	MATHEMATIQUES PURES
PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
VAUQUOIS B.	CALCUL ELECTRONIQUE
SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
BARBIER J.C.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE

BUYLE-BODIN M.	ELECTRONIQUE
KOSZUL J.L.	MATHEMATIQUES
DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
VAILLANT F.	ZOOLOGIE
KLEIN J.	MATHEMATIQUES PURES
SENGEL P.	ZOOLOGIE
ARNAUD P.	CHIMIE
BARJON R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. WAGNER H.	BOTANIQUE
NAPP-ZINN K.	BOTANIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER L.	BOTANIQUE
DEPASSEL R.	MECANIQUE
PERRET R.	SERVOMECHANISME
Mme BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
COHEN J.	PHYSIQUE
GIDON P.	GEOLOGIE
Mme SOUTIF J.	PHYSIQUE GENERALE
GIRAUD P.	GEOLOGIE
GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
LACAZE A.	THERMODYNAMIQUE
GLENAT R.	CHIMIE ORGANIQUE
BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE GENERALE
DUCROS P.	MINERALOGIE
ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
COUMES A.	ELECTRONIQUE
PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
RASSAT A.	CHIMIE
PERRIAUX J.	GEOLOGIE
BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. FORTIER A.	MECANIQUE DES FLUIDES
BRELOT M.	MATHEMATIQUES
WOLFERS F.	PHYSIQUE
DORIER A.	ZOOLOGIE

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ J.	MECANIQUE DES FLUIDES
DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES

	DOLIQUE J.M.	ELECTRONIQUE
	HACQUES G.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
	POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
	KAHANE A.	PHYSIQUE
Mme	BONNIER J.	CHIMIE
Mme	KAHANE J.	PHYSIQUE
	DEPORTES C.	CHIMIE MINERALE
	DEPCOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
	BONNET G.	PHYSIQUE
Mme	BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
	COLOBERT L.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PAYAN J.J.	MATHEMATIQUES
	CAUBET J.P.	MATHEMATIQUES
	LAURENT P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BERTRANDIAS J.P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BRIERE G.	PHYSIQUE
	LAJZEROWICZ J.	PHYSIQUE
	VALENTIN J.	PHYSIQUE
	DESRE P.	METALLURGIE
	BONNETAIN L.	CHIMIE MINERALE

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

MM.	RADELLI L.	GEOLOGIE
-----	------------	----------

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance :

à

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

à

Monsieur le Professeur GASTINEL qui m'a proposé l'idée de ce travail et qui tant par ses critiques et ses suggestions en a dirigé l'élaboration. Qu'il en soit vivement remercié.

à

Monsieur HACQUES, Maître de Conférences qui a accepté de faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier Mademoiselle Anselmetti chargée de la perforation des programmes, Mesdames Hervet, Vassy, Trévisan, Mesdemoiselles Tournoud et Bicaïs qui ont apporté le plus grand soin à la réalisation pratique de cette thèse, mes camarades de travail pour leurs conseils en programmation et Monsieur Mounet pour l'impression ainsi que tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

P L A N

--

CHAPITRE I - MATRICES - TEST	I -	1
CHAPITRE II - METHODE DE GREENSTADT	II -	4
1-Notations	II -	4
2-Méthode de Greenstadt	II -	4
3-Etude de la méthode	II -	7
Cas particulier - Matrices hermitiques	II -	9
Cas général - Matrices quelconques	II -	11
4-Résultats Expérimentaux	II -	15
Choix d'une stratégie	II -	16
5-Matrices particulières et exceptions	II -	27
6-Conclusions et réflexions sur la méthode de Greenstadt	II -	28
7-Procédure Algol	II -	31
CHAPITRE III - REDUCTION D'UNE MATRICE A LA FORME DE HESSENBERG	III -	36
1-Définitions	III -	36
2-Transformations de Givens	III -	36
3-Applications numériques	III -	41
4-Procédure ALGOL	III -	43
CHAPITRE IV - ALGORITHME QR	IV -	45
1-Factorisation d'une matrice A en QR	IV -	45
2-Unicité de la décomposition	IV -	49
3-Algorithmes QR	IV -	50
4-Convergence de la matrice Q_s	IV -	52
5-Convergence de A_k vers une matrice triangulaire supérieure	IV -	54
6-Conservation de la forme de Hessenberg par QR ...	IV -	55

	7-Valeurs propres multiples	IV - 57
	8-Valeurs propres de même module	IV - 59
	9-Conclusion, ordre de convergence	IV - 60
	10-Procédure ALGOL	IV - 61
CHAPITRE V	- MATRICES ϵ^P - triangulaires	V - 63
	1-Théorème	V - 63
	2-Etude d'un algorithme	V - 65
	3-Matrices ϵ^P - triangulaires	V - 72
	4-Application de la méthode de Greenstadt à une matrice presque triangulaire	V - 75
	5-Application des résultats précédents	V - 87
	6-Exemples numériques	V - 92
	7-Conclusion	V - 100
	8-Procédure ALGOL	V - 101

INTRODUCTION

Le but de cette étude est de rechercher les valeurs propres d'une matrice quelconque à éléments appartenant à \mathbb{C} par triangularisation au moyen de matrices unitaires. Nous savons - théorème de Schur - que, quelque soit la matrice A , il existe une matrice unitaire U telle que

$$A' = U^* A U$$

soit triangulaire supérieure (ou inférieure) et telle que les éléments diagonaux de A' soient les valeurs propres de A .

La méthode de Greenstadt sera tout d'abord étudiée, elle montrera qu'elle est la méthode la plus rapide lorsqu'elle "converge", mais on ne pourra ni définir, ni préciser cette convergence. Une étude de l'algorithme QR de Francis nous permettra de proposer une méthode tirant parti de la méthode de Greenstadt dont l'ordre de convergence est le même que celui de QR, mais que l'expérience montre être plus rapide surtout dans les cas défavorables à QR.

Toute l'étude et toutes les procédures utilisées emploient l'arithmétique complexe. Les exemples numériques ont été traités sur IBM 7044.

MATRICES TESTS

Pour tester une méthode de calcul de valeurs propres nous avons le choix entre deux solutions :

* ou bien prendre une matrice quelconque dont on peut connaître les valeurs propres par un autre moyen, par exemple en cherchant les racines du polynôme caractéristique,

* ou bien construire une matrice dont nous connaissons ~~a~~ priori les valeurs propres. C'est ce que nous ferons le plus souvent aussi nous allons indiquer un moyen de construire de telles matrices :

Soient deux vecteurs X, Y appartenant à \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) et la matrice anti-scalaire [1] :

$$K = X Y^T$$

nous avons alors

$$K^2 = X Y^T X Y^T = (Y^T X) K$$

$$\text{et nous posons } \lambda = Y^T X$$

K est une matrice à polynôme minimal du second degré (c'est-à-dire K vérifie une équation du second degré)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) et

$$M = aI + bK$$

l'inverse M^{-1} de M , si elle existe, est du même type que M

$$M^{-1} = a'I + b'K$$

a' et b' étant déterminés par

$$M^{-1}M = MM^{-1} = aa'I + [(a+b\lambda) b' + ba'] K \equiv I$$

ce qui entraîne si :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a+b\lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = 1/a \\ b' = -b/[a(a+\lambda b)] \end{cases}$$

Soient les n nombres complexes ν_j ($j = 1, 2, \dots, n$) qui seront les valeurs propres de A matrice à construire

Les vecteurs X et Y sont choisis arbitrairement, a et b sont réels choisis de manière que

$$a + \lambda b \neq 0$$

$$a \neq 0$$

Soit $D = (d_{ij})$ la matrice diagonale avec

$$d_{ij} = \nu_i \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker})$$

Dans ce cas, D et $A = M^{-1} D M$ ont les mêmes valeurs propres.

Remarque : Si les ν_i sont de la forme un entier plus i fois un entier et si nous voulons A avec des éléments entiers il suffit de prendre

$$a = 1$$

$$\text{et } Y^T X = 0 \quad (X, Y \text{ orthogonaux})$$

b étant alors un entier quelconque

Voici une procédure Algol permettant de construire une matrice-

test par ce procédé. La matrice $A = A_1 + i A_2$ ainsi créée étant à éléments complexes.

Procédure FØRMAT (A,B,X,Y,VP,VC,N,A1,A2) ;

entier N ; reel A, B ;

tableau X,Y,VP,VC,A1,A2 ;

commentaire cette procédure forme une matrice, dont la partie réelle est A_1 et la partie imaginaire A_2 , d'ordre N. Cette matrice a pour valeurs propres les N nombres complexes $VP[K] + i.VC[K]$ ($K = 1, 2, \dots, N$). X et Y sont deux vecteurs quelconques de dimension N. A quelconque $\neq 0$, B quelconque de manière que $A + B(X^T Y) \neq 0$;

debut reel procédure D(I,J) ;

entier I, J ;

D := si I = J alors 1.0 sinon 0.0 ;

reel L, AP, BP, S, T, AS ;

entier I, J, K;

L := 0.0 ;

pour I := 1 pas 1 jusqua N faire

L := L + X [I] x Y [I];

AP := 1/A ; BP := (-B)/(A+LxB)/A ;

pour I := 1 pas 1 jusqua N faire

pour J := 1 pas 1 jusqua N faire

début S := T := 0.0 ;

pour K := 1 pas 1 jusqua N faire

début AS := (AP x D(I,K) + BP x X[I] x Y[K])
x (A x D(K,J) + B x X[K] x Y[J]) ;

S := S + AS x VP[K];

T := T + AS x VC[K]

fin ;

A1[I,J] := S ; A2 [I,J] := T

fin

fin FØRMAT ;

CHAPITRE 2

METHODE DE GREENSTADT

1 NOTATIONS

U^* sera utilisée pour U transposée conjuguée

U^T sera utilisée pour U transposée

\bar{C} est le conjugué de C

Nous rappelons qu'une matrice U est unitaire si et seulement si

$$U^* U = U U^* = I \quad (\text{Si } U \text{ est réelle, } U \text{ est orthogonale})$$

Nous noterons la norme Euclidienne de la matrice A par

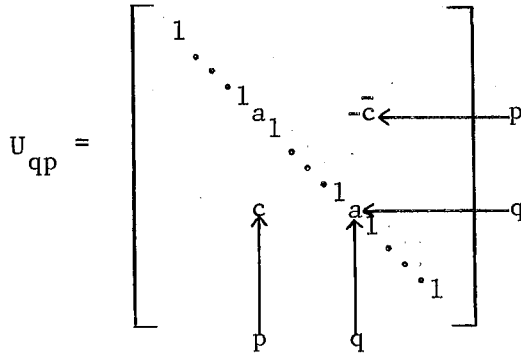
$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{avec } A = (a_{ij}) \text{ d'ordre } n$$

$$\delta_{ij} \text{ (Symbole de Kronecker)} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

2 METHODE DE GREENSTADT

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{C}$
et soit la matrice unitaire U_{qp} définie comme suit

$$u_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{sauf} \quad \begin{aligned} u_{pp} &= a \\ u_{qq} &= a \\ u_{pq} &= -\bar{c} \\ u_{qp} &= c \end{aligned}$$



avec $a^2 + |c|^2 = 1$

Formons la transmuée de la matrice A dont on cherche les valeurs propres par la matrice U_{qp} , soit $A^{(1)}$

$$A^{(1)} = U_{qp}^* A^{(0)} U_{qp} \quad \text{en posant} \quad A^{(0)} = A$$

Le but de la méthode est de déterminer une suite de matrices $U_{q_1 p_1}, U_{q_2 p_2}, \dots, U_{q_k p_k}, \dots$

de telle manière que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = \dots U_{q_k p_k}^* \dots U_{q_1 p_1}^* A^{(0)} U_{q_1 p_1} \dots U_{q_k p_k} \dots = T$$

(le choix de (q,p) sera fixé ultérieurement)

soit une matrice triangulaire supérieure.

Soit $A^{(k)}$ la matrice obtenue à la k^{ième} itération et étudions la transmuée

$$A^{(k+1)} = U_{q_{k+1} p_{k+1}}^* A^{(k)} U_{q_{k+1} p_{k+1}}$$

Pour faciliter les écritures, les éléments de $A^{(k)}$ seront

notés (a_{ij}) , ceux de $A^{(k+1)}$ (c_{ij}) et ceux de $U_{q_{k+1} p_{k+1}}$ (u_{ij}) lorsqu'il n'y a pas ambiguïté

$$\text{donc } C = U^* A U$$

Les éléments de C sont les mêmes que ceux de A sauf dans

les lignes p et q
les colonnes p et q

Nous aurons alors les éléments transformés

$$(II-1) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} c_{pj} = a_{pj} a + a_{qj} \bar{c} \\ c_{qj} = -a_{pj} c + a_{qj} a \end{array} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq p, q \\ \left. \begin{array}{l} c_{ip} = a_{ip} a + a_{iq} c \\ c_{iq} = -a_{ip} \bar{c} + a_{iq} a \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq p, q \\ c_{qp} = a^2 a_{qp} + (a_{qq} - a_{pp}) ac - a_{pq} c^2 \\ c_{pq} = a^2 a_{pq} + (a_{qq} - a_{pp}) a\bar{c} - a_{qp} \bar{c}^2 \\ c_{pp} = a^2 a_{pp} + a_{pq} ac + a_{qp} a\bar{c} + a_{qq} |c|^2 \\ c_{qq} = a^2 a_{qq} - a_{pq} ac - a_{qp} a\bar{c} + a_{pp} |c|^2 \end{array} \right.$$

De plus, a et c sont reliés par

$$a^2 + |c|^2 = 1 \quad (II-2)$$

Nous allons annuler [2] l'élément c_{qp}

$$c_{qp} = a^2 a_{qp} + (a_{qq} - a_{pp}) ac - a_{pq} c^2 = 0 \quad (II-3)$$

puisque A n'est pas hermitique, il n'est en général pas possible d'annuler

à la fois c_{qp} et c_{pq} .

Supposons $a \neq 0$, sinon il est impossible d'avoir $c_{qp} = 0$
 et $a^2 + |c|^2 = 1$ si $a_{pq} \neq 0$

(II-3) nous donne en posant

$$X = c/a \quad / \quad 2 \Delta_{qp} = a_{qq} - a_{pp}$$

$$a_{pq} X^2 - 2 \Delta_{qp} X - a_{qp} = 0 \quad (II-4)$$

tenant compte de (II-2) nous avons

$$\left. \begin{aligned} a &= (1 + |X|^2)^{-1/2} \\ c &= (1 + |X|^2)^{-1/2} X \end{aligned} \right\} \quad (II-5)$$

avec X une des deux racines ($a_{pq} \neq 0$)

$$X_1 = \frac{\Delta_{qp} + \sqrt{\Delta_{qp}^2 + a_{qp} a_{pq}}}{a_{pq}} \quad X_2 = \frac{\Delta_{qp} - \sqrt{\Delta_{qp}^2 + a_{qp} a_{pq}}}{a_{pq}}$$

De ces deux racines nous choisirons arbitrairement -pour le moment- celle de plus petit module. Si nous avons calculé a/c au lieu de X, nous choisirions évidemment celle de plus grand module et les formules (II-5) seraient légèrement modifiées.

3 ETUDE DE LA METHODE

Dans ce qui va suivre, nous noterons par M(C) le carré de

de la norme Euclidienne de la partie triangulaire inférieure de la matrice C.

Soit
$$M(C) = \sum_{\substack{i \leq j \\ i > j}} |c_{ij}|^2$$

En considérant les propriétés importantes de la transformation unitaire U sur la matrice A ($C = U^* A U$) nous obtenons :

$$|c_{ip}|^2 + |c_{iq}|^2 = |a_{ip}|^2 + |a_{iq}|^2 \quad \forall i \neq p, q \quad (II-6)$$

$$|c_{pj}|^2 + |c_{qj}|^2 = |a_{pj}|^2 + |a_{qj}|^2 \quad \forall j \neq p, q$$

$$|c_{qp}|^2 + |c_{qq}|^2 + |c_{pq}|^2 + |c_{pp}|^2 = |a_{qp}|^2 + |a_{qq}|^2 + |a_{pq}|^2 + |a_{pp}|^2$$

Ce qui fait que, dans M(A), seule la partie

$$m(A) = \sum_{i=p+1}^{q-1} (|a_{ip}|^2 + |a_{qi}|^2) + |a_{qp}|^2$$

a changé.

Le schéma représente les éléments (notés *) intervenant dans la partie m(A) qui ont été changés.

$n = 5$
 $q = 5$
 $p = 2$

		p		q	
	x	x	x	x	x
p	x	x	x	x	x
	x	*	x	x	x
	x	*	x	x	x
q	x	*	*	*	x

Cette partie m(A) devient

$$m(C) = \sum_{i=p+1}^{q-1} (|c_{ip}|^2 + |c_{iq}|^2) + |c_{qp}|^2$$

puisque $c_{qp} = 0$

$$m(C) = \sum_{i=p+1}^{q-1} (|c_{ip}|^2 + |c_{iq}|^2)$$

$$= a^2 \left[\sum_{d=p+1}^{q-1} (|a_{dp}|^2 + |a_{dq}|^2) \right] + |c|^2 \left[\sum_{d=p+1}^{q-1} (|a_{dq}|^2 + |a_{pd}|^2) \right]$$

$$+ a \left[c \sum_{d=p+1}^{q-1} (\bar{a}_{dp} a_{dq} - a_{pd} \bar{a}_{dq}) \right] + \bar{c} \sum_{d=p+1}^{q-1} (a_{dp} \bar{a}_{dq} - \bar{a}_{pd} a_{dq})$$

posons

$$\left\{ \begin{array}{l} S1 = \sum_{d=p+1}^{q-1} (|a_{dp}|^2 + |a_{dq}|^2) = m(A) - |a_{qp}|^2 \\ S2 = \sum_{d=p+1}^{q-1} (|a_{dp}|^2 + |a_{pd}|^2) \\ S3 = s + it = \sum_{d=p+1}^{q-1} (a_{dp} \bar{a}_{dq} - \bar{a}_{pd} a_{dq}) \end{array} \right.$$

d'où

$$m(C) = a^2 S1 + |c|^2 S2 + a\bar{c} S3 + ac \bar{S3}$$

$$m(C) = a^2 m(A) + S2 |c|^2 + S3 a\bar{c} + \bar{S3} ac - |a_{qp}|^2 a^2$$

Cas particulier : Matrices hermitiques et matrices symétriques

A est hermitique si

$$\forall_{i,j} = 1, 2, \dots, n \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

ce qui entraîne $a_{ii} = \bar{a}_{ii} \quad \forall_i = 1, 2, \dots, n$

Donc dans ce cas

$$S3 = \sum_{j=p+1}^{q-1} (a_{jp} \bar{a}_{jq} \bar{a}_{pj} a_{qj}) = \sum_{j=p+1}^{q-1} (a_{jp} a_{qj} - a_{jp} a_{qj}) = 0$$

et $S2 = \sum_{j=p+1}^{q-1} (|a_{jq}|^2 + |a_{pj}|^2) = S1$

d'où

$$\begin{aligned} m(C) &= a^2 S1 + |c|^2 S2 = (a^2 + |c|^2) S1 = S1 \\ &= m(A) - |a_{qp}|^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire

$$M(C) = m(C) + M(A) - m(A) = M(A) - |a_{qp}|^2$$

Choisissons pour (q,p)

$$a_{qp} = \text{Sup}_{\substack{i,j \\ i>j}} (|a_{ij}|) \quad (\text{II-7})$$

dans ce cas $M(A) \leq \frac{n(n-1)}{2} |a_{qp}|^2$

et $M(C) = M(A) \left[1 - \frac{|a_{qp}|^2}{M(A)}\right] \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) M(A)$

Itérant le procédé, nous calculons successivement

$$A^{(0)} = A, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}, A^{(k+1)}, \dots$$

a chaque itération (q,p) étant choisis suivant la règle (II-7).

Nous aurons alors

$$M(A^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) M(A^{(k)}) = \left[1 - \frac{2}{n(n-1)}\right]^{k+1} M(A^{(0)})$$

$$\text{Lorsque } k \rightarrow \infty \quad \lim \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{k+1} = 0$$

Dans ce cas $A^{(\infty)} = T$ matrice triangulaire supérieure. Les matrices de transformations U étant unitaires, nous avons

$$\|A^{(\infty)}\| = \|A^{(0)}\| = \|A\|$$

La paire (q,p) étant choisie, l'élément a_{qp} sera tout naturellement noté "pivot de la transformation".

D'où

Théorème

Si la matrice A est hermitique (ou symétrique), la méthode de Greenstadt est convergente à la condition suffisante que le pivot $a_{qp}^{(k)}$ de la $k^{\text{ième}}$ itération soit choisi de telle manière que

$$a_{qp}^{(k)} = \sup_{\substack{i,j \\ i>j}} (|a_{ij}^{(k)}|)$$

Remarque : Si a est symétrique nous retrouvons la méthode classique de Jacobi.

Cas général : matrices quelconques

Nous allons voir que -ici- nous ne pourrons pas conclure.

En effet, dans le cas où a et c ont été choisis par $c_{qp} = 0$ et $a^2 + |c|^2 = 1$, il ne reste plus un seul paramètre pour minimiser $m(C)$. Le fait de choisir a complexe aurait d'ailleurs abouti au même résultat.

Remarque préliminaire Relation entre S_1, S_2 et S_3

Soient les deux vecteurs

$$C^T = [a_{p+1p}, \dots, a_{q-1p}, a_{qp+1}, \dots, a_{qq-1}]$$

$$L^T = [a_{p+1q}, \dots, a_{q-1q}, -a_{pp+1}, \dots, -a_{pq-1}]$$

D'après l'inégalité de Schwarz.

$$|\langle C, L \rangle|^2 \leq \|C\|^2 \times \|L\|^2$$

mais

$$\langle C, L \rangle = S_3, \quad \|C\|^2 = S_1, \quad \|L\|^2 = S_2$$

donc

$$\underline{|S_3|^2 \leq S_1 \times S_2}$$

Etude de la quantité $m(C)$

Posons $a = \cos \theta$
 $c = \sin \theta e^{i\varphi}$

nous avons pris $a > 0$, il suffira de choisir

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Nous avons alors

$$m(C) = \cos^2 \theta [S_1 + S_2 \operatorname{tg}^2 \theta + 2 \operatorname{tg} \theta (s \cos \varphi + t \sin \varphi)] \geq 0$$

$S_1, S_2 \geq 0$

posons $\operatorname{tg} \theta = X$ et

$$g(X) = S_2 X^2 + 2 (s \cos \varphi + t \sin \varphi) X + S_1 \geq 0$$

$g(X)$ présente un minimum pour

$$S_2 \neq 0 \quad X_m = - \frac{s \cos \varphi + t \sin \varphi}{S_2}$$

$$g(X_m) = S_1 - \frac{(s \cos \varphi + t \sin \varphi)^2}{S_2} \geq 0$$

Il est en général impossible de choisir φ de telle manière que

$$g(X_m) = 0 ,$$

ce qui entraînerait

$$s \cos \varphi + t \sin \varphi = \pm \sqrt{S_1 S_2}$$

Pour que cette équation (φ est réel) ait des racines, il faut et il suffit que

$$s^2 + t^2 \geq S_1 S_2$$

soit

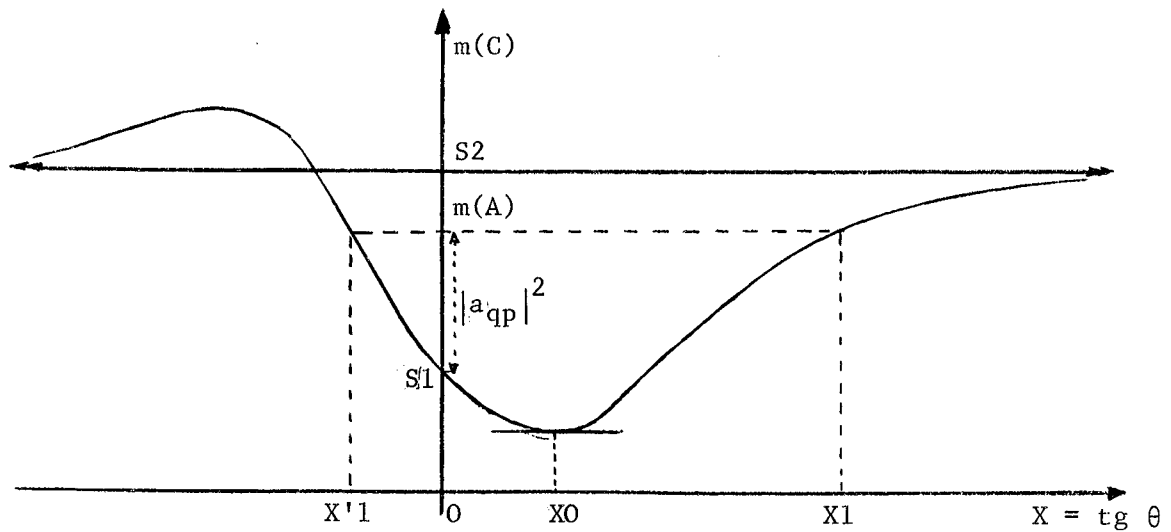
$$|S_3|^2 \geq S_1 S_2$$

D'après la remarque précédente, il faudrait donc

$$|S_3|^2 = S_1 S_2 ,$$

soient les vecteurs C et L colinéaires, ce qui en général n'est pas réalisé.

* Traçons $m(C)$ en fonction de $X = \operatorname{tg} \theta$, φ étant fixé



Ce graphique montre la difficulté de conclure dans cette méthode. En effet φ et θ (ou $\text{tg } \theta$) étant choisis par la relation $c_{qp} = 0$, il est très possible de "tomber" sur un $X = \text{tg } \theta$ tel que $X \notin [X'1, X1]$. Donc dans ce cas $m(A) < m(C)$, il y a croissance de la quantité $M(C)$.

Ce graphique explique aussi le choix de la racine de plus petit module pour c/a ($|c/a| = |\text{tg } \theta|$), pour justement essayer de se trouver dans l'intervalle $[X'1, X1]$

Les résultats expérimentaux montreront d'ailleurs que nous pouvons effectivement trouver $M(A^{(p+1)}) > M(A^{(p)})$

Ces difficultés proviennent du fait que les quantités c_{qp} et $m(C)$ sont indépendantes dans une très large mesure.

Remarque importante

Nous venons de voir que si q et p sont quelconques ($q > p$) nous

ne pouvons conclure. Cependant considérons le cas où

$$q = p+1$$

nous avons alors

$$m(C) = \sum_{i=q+1}^n (|c_{ip}|^2 + |c_{iq}|^2) + \sum_{i=1}^{p-1} (|c_{pi}|^2 + |c_{qi}|^2) + \cancel{|c_{qp}|^2}$$

tenant compte des relations déjà citées (II-6)

$$|c_{ip}|^2 + |c_{iq}|^2 = |a_{ip}|^2 + |a_{iq}|^2 \quad \forall i \neq p, q$$

$$|c_{pj}|^2 + |c_{qj}|^2 = |a_{pj}|^2 + |a_{qj}|^2 \quad \forall j \neq p, q$$

nous trouvons

$$m(C) = m(A) - |a_{qp}|^2$$

d'où

$$\boxed{M(C) = M(A) - |a_{qp}|^2} \quad (II-8)$$

Cette relation (II-8) est la base d'une étude faite au chapitre V.

4 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les matrices traitées sont des matrices à éléments complexes (Si ces éléments sont réels leur partie imaginaire sera inscrite 0). Même si nous traitons une matrice à éléments réels et ayant des valeurs propres réelles nous emploierons l'arithmétique complexe car rien ne permet d'affirmer que, pour de telles matrices, le discriminant $(\Delta_{qp})^2 + a_{qp} a_{pq}$ soit positif ou nul.

Nous calculerons successivement

$$A^{(0)} = A, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$$

k étant tel que

$$\sum_{\substack{i,j \\ i>j}} |a_{ij}^{(k)}|^2 / \|A\|^2 \leq \epsilon$$

Sur les graphiques seront tracées les courbes

$$y = \text{Log} \left(\sum_{i>j} |a_{ij}^{(p)}|^2 \right) = f(N)$$

et $y = \dots = g(T)$

N désignant le numéro de l'itération. Itération signifiant ici l'annulation successive des $n(n-1)/2$ termes sousdiagonaux.

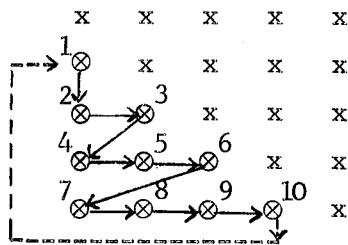
T signifiant le numéro de la transformation, appelée au début du chapitre itération.

En l'absence de critères de convergence, plusieurs stratégies ont été adoptées.

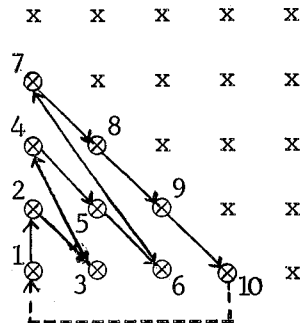
Ordre d'annulation des pivots

Deux sont cycliques. Chaque cycle constituant une itération

* a) stratégie S_a



* b) stratégie S_b



* c) stratégie non cyclique S_c

le couple (q,p) étant déterminé par

$$a_{qp}^{(k)} = \text{Sup}_{i>j} (|a_{ij}^{(k)}|)$$

et l'annulation de $n(n-1)/2$ tels éléments constituant une itération

Exemple (II - Ex - 1)

$$M = \begin{bmatrix} 28 + 16 i & 2 & 5 + 12 i & 0 & i \\ 0 & 36 + 32 i & 1 & 2 & 3 + 4 i \\ - i & 5 & 20 + 32 i & 3 & 3 i \\ 0 & 6 + 8 i & 0 & -12 & 6 \\ 3 & i & 4 & - i & -16 \end{bmatrix}$$

Notant $\|A_1^{(p)}\|^2 = \sum_{i>j} |a_{ij}^{(p)}|^2$ quantité que nous mettrons dans

les colonnes S_a , S_b , S_c , et p le numéro de l'itération, nous avons :

p	S _a	S _b	S _c	λ _i exactes (à 10 ⁻⁴)	λ _i calculées
0	1.53 10 ²	1.53 10 ²	1.53 10 ²	-12,3318 -i 1,3858	-12,3339 -i 1,3822
1	6.446 10 ⁻¹	1.115 10 ⁻¹	8.644 10 ⁻²	-16,1074 +i 1,0125	-16,1052 -i 1,0092
2	2.643 10 ⁻³	4.102 10 ⁻⁸	1.654 10 ⁻⁴	19,2108 +i 31,7147	19,2108 +i 31,7147
3	7.570 10 ⁻⁵	3.024 10 ⁻²⁰	3.381 10 ⁻⁸	28,4302 +i 16,4434	28,4302 +i 16,4434
4	2.961 10 ⁻⁸	————	1.880 10 ⁻¹¹	36,7982 +i 32,2150	36,7981 +i 32,2149
5	5.744 10 ⁻¹⁴	————	7.707 10 ⁻²²		
6	3.214 10 ⁻²³	————	————		
temps secondes	6	4	6		

Le test d'arrêt était

$$\frac{\|A_1^{(k)}\|^2}{\|A^{(0)}\|^2} \leq 10^{-20}$$

Les trois stratégies S_a, S_b, S_c donnant les mêmes résultats dans des temps très voisins se valent (Voir graphique II - fig.1)

Exemple (II - Ex.2) [3]

$$M = \begin{bmatrix} 1+2i & 3+4i & 21+22i & 23+24i & 41+42i \\ 43+44i & 13+14i & 15+16i & 33+34i & 35+36i \\ 5+6i & 7+8i & 25+26i & 27+28i & 45+47i \\ 47+48i & 17+18i & 19+20i & 37+38i & 39+40i \\ 9+10i & 11+12i & 29+30i & 31+32i & 49+50i \end{bmatrix}$$

Nous porterons toujours dans les colonnes S_a, S_b, S_c les

valeurs correspondantes de $\| A_1^{(p)} \|^2 = \sum_{i>j} |a_{ij}^{(p)}|^2$

Les valeurs propres de M seront données au chapitre V, notons déjà que la valeur propre 0 est d'ordre 2

p	S _a	S _b	S _c
0	1.4018 10 ⁴	1.4018 10 ⁴	1.4018 10 ⁴
1	5.7503 10 ²	4.0148 10 ²	7.6942 10 ¹
2	1.0056 10 ³	2.3301 10 ¹	3.1999 10 ¹
3	5.9819 10 ¹	6.5335 10 ⁻²	8.7289 10 ⁻¹
4	1.3477 10 ¹	2.3395 10 ⁻⁴	2.1888 10 ¹
5	1.7914	4.6964 10 ⁻⁹	1.4543 10 ¹
6	2.5657 10 ⁻²	3.3549 10 ⁻¹⁸	1.2914 10 ⁻³
7	7.7218 10 ⁻⁴	—	1.7696 10 ⁻¹
8	8.2864 10 ⁻⁴		9.7124 10 ⁻⁸
⋮	⋮		⋮
⋮	⋮		⋮
50	7.2245 10 ⁻⁴		⋮

Dans cet exemple la stratégie S_a est mauvaise, car d'après les calculs il semble que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| A_1^{(k)} \|^2 \rightarrow 7 \cdot 10^{-4}$$

donc $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)}$ n'est pas triangulaire supérieure.

Au contraire, la stratégie S_b donne de bons résultats.

Quant à la stratégie S_c, il semblerait que pour p > 8 nous

ayons

$$\forall k \geq 1 \quad A^{(3k+p)} = A^{(p)} \quad \text{avec } p = 9, 10, 11$$

$$\text{Nous avons en effet } \|A_1^{(3k+p)}\| = \|A_1^{(p)}\|$$

et l'ordre d'annulation des pivots pour $A^{(3k+p)}$ est exactement le même que pour $A^{(p)}$.

Il semblerait donc que la stratégie S_c soit incapable de donner une matrice triangulaire supérieure comme limite de $A^{(p)}$ ($p \rightarrow \infty$). Pour voir ce cycle apparaître on se reportera à (II - fig.2) page II-24.

Exemple (II-Ex.3)

$$M = \begin{bmatrix} -72+184i & 17-32i & -53-10006i & -140+2888i & -343+832i \\ 55-1038i & -17+197i & 9+34668i & 268-10552i & 596-4121i \\ -530+4024i & 139-745i & -291-154032i & -1544+46016i & -3607+16315i \\ 1773-44330i & -470+2657i & 947+541444i & 5309-162038i & 12388-57955i \\ -7749+58958i & 2033-10916i & -4265-2255830i & -22532+674072i & -52678+239230i \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice non connues à priori, seront indiquées et comparées avec les résultats obtenus avec d'autres méthodes au chapitre V.

p	S _a	S _b	S _c
0	5.8407 10 ¹²	5.8407 10 ¹²	5.8407 10 ¹²
1	4.8532 10 ⁴	1.7225 10 ⁴	4.8437 10 ⁶
2	7.8299 10 ⁸	1.4562 10 ⁴	2.9046 10 ⁶
3	1.2585 10 ⁸	1.3817 10 ⁴	2.3215 10 ⁴
4	5.5408 10 ⁷	1.3693 10 ⁴	3.0613 10 ⁷
5	2.8456 10 ⁷	1.4019 10 ⁴	2.5633 10 ⁶
6	1.2377 10 ⁷	1.4627 10 ⁴	2.9222 10 ⁶
7	5.9248 10 ⁶	1.4208 10 ⁴	1.3399 10 ⁴
8	1.4059 10 ⁶	1.4869 10 ⁴	4.1144 10 ⁷
9	8.2493 10 ⁴	.	2.9294 10 ⁶
10	9.8580 10 ²	.	1.9401 10 ⁴
11	2.9473 10 ¹	.	4.4202 10 ⁷
12	6.7785 10 ⁻⁴	.	2.3398 10 ⁴
13	1.9614 10 ⁻⁶	.	4.9672 10 ⁷
14	3.4020 10 ⁻⁹	.	2.1853 10 ⁶
15	1.0 10 ⁻¹⁸	.	2.2779 10 ⁴
16	5 10 ⁻³⁸	1.5269 10 ⁴	5.4215 10 ⁷
.....			

* Stratégie S_a : elle est bonne car les résultats comme nous le verrons au chapitre V sont bons. Le test d'arrêt était atteint dès l'itération n° 14. Nous avons montré que $\|A_1^{(k)}\|^2$ peut être très petit.

* Stratégie S_b : Si nous avons indiqué le résultat des itérations suivantes, nous aurions vu que

$$10^3 \leq \|A_1^{(k)}\|^2 \leq 10^5 \quad 1 \leq k \leq 49$$

et $\|A_1^{(50)}\|^2 = 1.9591 \cdot 10^{-1}$

$$\| A_{11}^{(51)} \|^2 = 2.1401 \cdot 10^{-4}$$

$$\| A_{11}^{(52)} \|^2 = 3.3777 \cdot 10^{-8}$$

La précision désirée a été atteinte à la 52^{ème} itération mais trois des cinq valeurs propres n'ont plus un seul chiffre significatif. Cela doit provenir du fait que

$$\| A^{(0)} \|^2 = 0.59580911 \cdot 10^{13}$$

et que

$$\| A^{(52)} \|^2 = 0.59580122 \cdot 10^{13}$$

alors que nous devrions avoir $\| A^{(0)} \|^2 = \| A^{(52)} \|^2$

* Stratégie S_c

Nous obtenons aussi de mauvais résultats dans les valeurs propres, les erreurs apparaissant dans S_b apparaissant ici aussi.

Ici, la "précision" a été obtenue à la 47^{ème} itération où

$$\| A_{11}^{(47)} \|^2 = 9.1304 \cdot 10^{-11}$$

après que $\| A_{11}^{(k)} \|^2$ eût fait de nombreux sauts entre 10^2 et 10^9

Nous avons ici

$$\| A_{11}^{(47)} \|^2 = 0.59579675 \cdot 10^{13}$$

On pourra se reporter au graphique (II - fig.3) page(II-25)

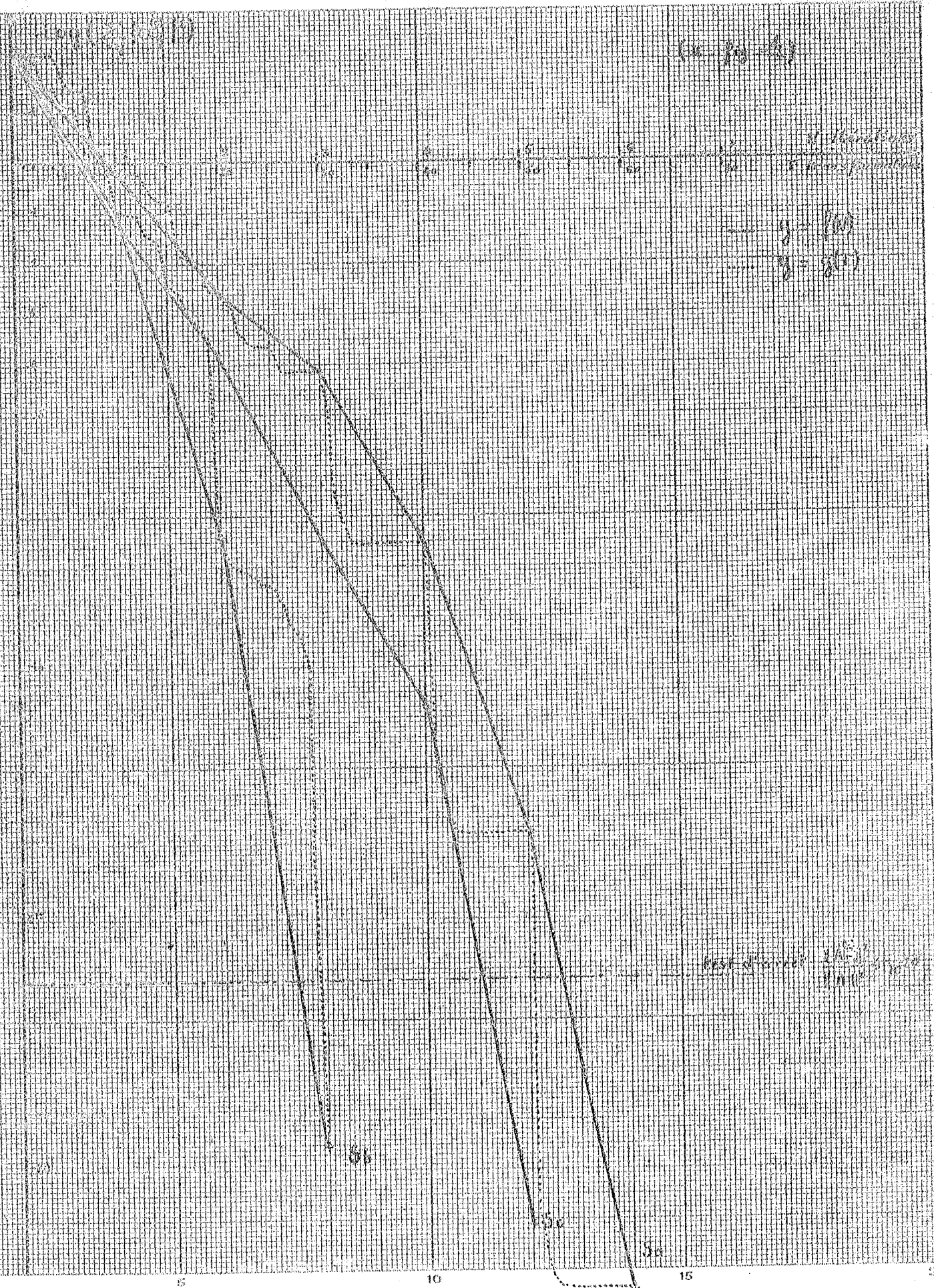
100-100-100

100-100-100

100-100-100

100-100-100

100-100-100



5

10

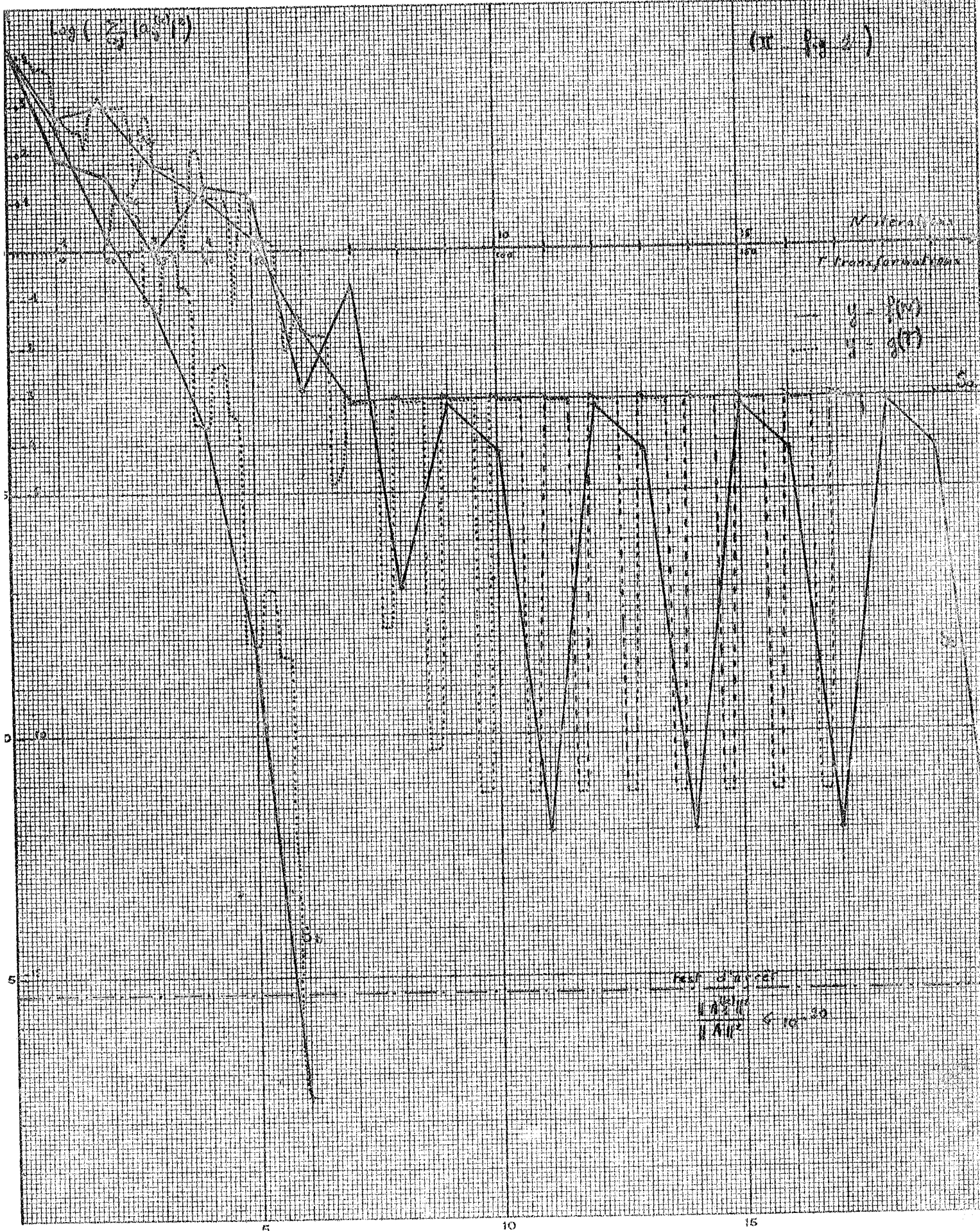
15

20

100-100-100

Log ($\frac{1}{S} | \rho_S^2 |^2)$

(π 3-9-2)



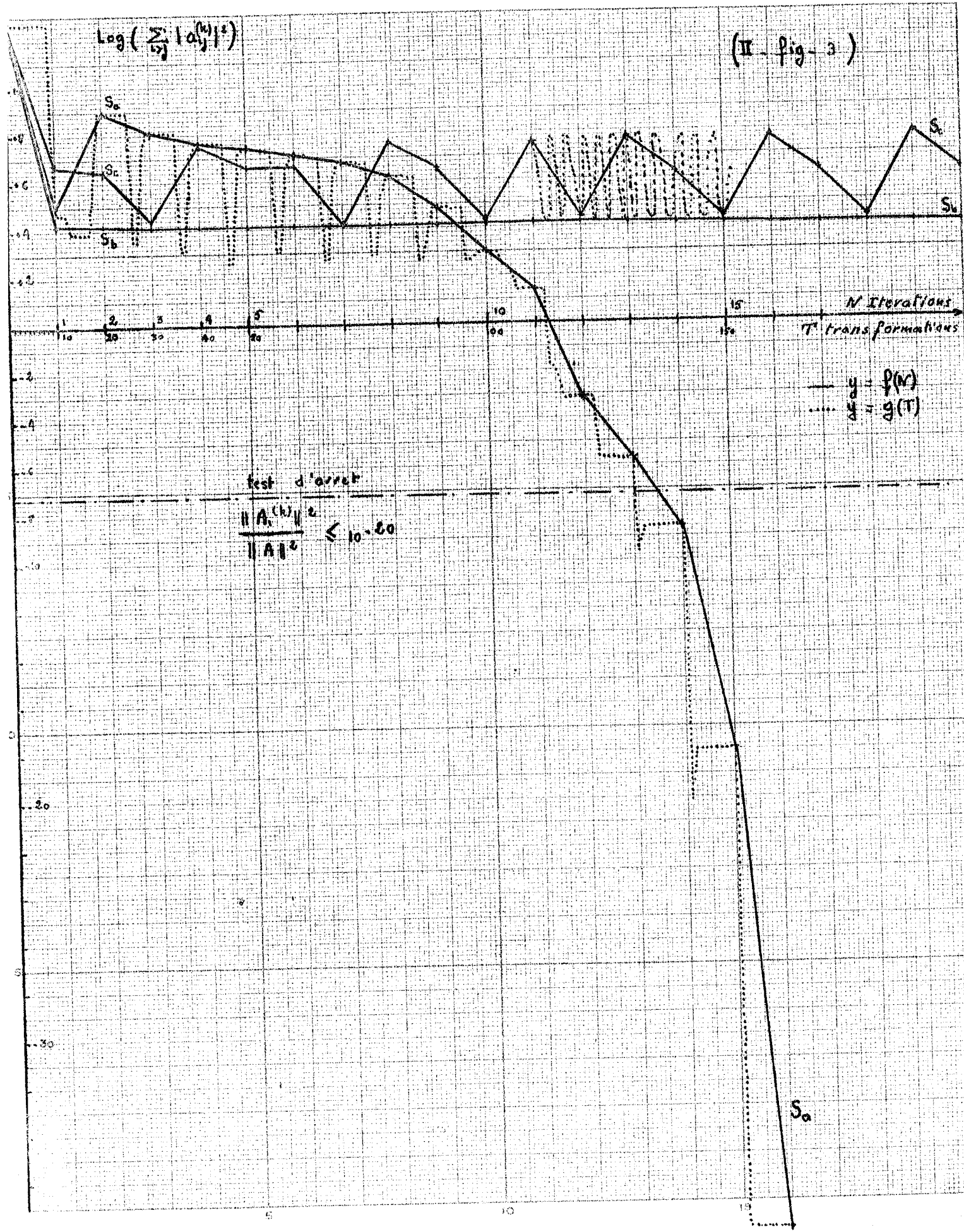
5

10

15

$\text{Log}(\sum_{ij} |a_{ij}|^2)$

(II Fig. 3)



test d'arret
 $\frac{\|A_n^{(k)}\|^2}{\|A\|^2} < 10^{-80}$

$y = p(n)$
 $y = g(T)$

N Iterations
 T Transformations

Nous donnerons un exemple dans le cas d'une matrice hermitique.

Exemple (II - Ex.4)

$$M = \begin{bmatrix} 5.0 & 23.23-1.25i & 5.02+4.2i & 6.23+0.12i & 6.2-12i \\ 23.23+1.25i & 18 & 2.25+0.86i & 3.24-21i & 3.1+2.34i \\ 5.02-4.2i & 2.25-0.86i & 32 & -12+3.25i & -14.3+25i \\ 6.23-0.12i & 3.24+21i & -12-3.25i & -4.2 & 3.24-12i \\ 6.2+12i & 3.1-2.34i & -14.3-25i & 3.24+12i & 6.23 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, il n'y a pas de problème de convergence. En effet, si les valeurs propres sont distinctes, la convergence est alors quadratique [4]

p	S_a	S_b	S_c
0	2.4162384 10^3	2.4162384 10^3	2.4162384 10^3
1	2.7824 10^2	7.1753 10^2	3.1897 10^1
2	2.8891	1.8982 10^1	3.2068 10^{-3}
3	1.2628 10^{-5}	1.1626 10^{-4}	3.1874 10^{-15}
4	3.8661 10^{-22}	7.9047 10^{-21}	1.6016 10^{-34}
λ_i	-27.915648 $-8 \cdot 10^{-9} i$ 57.646974 $-3 \cdot 10^{-8} i$ 40.679598 $+3 \cdot 10^{-8} i$ 7.7163730 $+8 \cdot 10^{-8} i$ -21.097316 $-7 \cdot 10^{-8} i$	-21.097315 $-1.2 \cdot 10^{-7} i$ 7.7163733 $+1.4 \cdot 10^{-8} i$ 57.646971 $-7.5 \cdot 10^{-8} i$ -27.915646 $+2.9 \cdot 10^{-8} i$ 40.679597 $+2.6 \cdot 10^{-8} i$	7.7163739 $-4.5 \cdot 10^{-8} i$ 40.679600 $-7.9 \cdot 10^{-9} i$ 57.646977 $+1.6 \cdot 10^{-9} i$ -27.915649 $-6 \cdot 10^{-8} i$ -21.097317 $+1.1 \cdot 10^{-7} i$

Les valeurs propres seront comparées à celles trouvées au cha-

pitre V. Pour chaque stratégie, le temps a été le même soit 4 secondes, temps que l'on comparera à celui trouvé au chapitre V.

5 MATRICES PARTICULIERES ET EXCEPTIONS

Montrons un exemple [2] où la méthode de Greenstadt ne peut s'appliquer

Soit
$$A^{(0)} = A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x \neq 0 \quad (II-9)$$

Après un nombre fini de transformations (ici 8), nous obtenons

$$A^{(8)} = U_7^* A^{(7)} U_7 = A^{(0)}$$

On montre que la méthode de Greenstadt ne peut s'appliquer à la classe \mathcal{E} de matrices définies par :

$$* a_{ii} = a_{jj} \quad \forall i, j$$

$$* a_{ij} a_{ij} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \text{ou bien } a_{ij} = 0 \text{ et } a_{ji} \neq 0 \\ \text{ou bien } a_{ij} \neq 0 \text{ et } a_{ji} = 0 \end{array}$$

* chaque ligne ou chaque colonne a au moins deux éléments non nuls .

Au bout d'un nombre fini ou infini de transformations sur $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, ... on retrouve $A^{(0)}$, pour $A^{(0)} \in \mathcal{E}$

Pour l'exemple (II-9), écrivons les transformées successives de $A = A^{(0)}$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(8)} = A^{(0)}$$

6 CONCLUSIONS ET REFLEXIONS SUR LA METHODE DE GREENSTADT

Nous venons de voir combien le choix de la stratégie est hasardeux. En effet, d'un exemple à l'autre une stratégie passe de très bonne à très mauvaise ou inversement. Pour un cas particulier, une seule de ces stratégies est efficace. Cependant, les nombreux exemples traités semblent montrer que la stratégie S_a donne de bons résultats dans la plupart des cas, elle est tombée en défaut dans le seul exemple (II- Ex.2). Mais comme le montrent les exemples, il n'y a aucune raison pour que ce soit S_a la meilleure. On aurait d'ailleurs pu imaginer un choix aléatoire des pivots (q,p) de telle manière qu'en $n(n-1)/2$ transformations, nous soyons passés une fois seulement par chaque pivot. Nous noterons que l'exemple du chapitre V (V-Ex.10) ne montre aucune convergence quelque soit la stratégie employée.

Cependant, il est à noter que lorsque la méthode de Greenstadt

"converge" elle le fait très vite. Il faut aussi remarquer que le "coût" d'une transformation est peu élevé ($c = 24 n$ pour une matrice à éléments complexes).

On remarque aussi que la présence de valeurs propres multiples n'a guère d'influence quant à la "convergence", seule la précision sur ces valeurs propres est différente de la précision sur une racine simple. Comme dans la méthode de Jacobi, pour les matrices symétriques, on constate que la précision est meilleure pour les valeurs propres de grand module, elle paraît décroître en même temps que le module des valeurs propres.

Il semble que pour une matrice quelconque on puisse avoir au maximum, v/p chiffres exacts si on travaille avec v chiffres en virgule flottante et si p est la multiplicité de la valeur propre.

Exemple (II - Ex.5)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

M a pour polynôme caractéristique $(1 - \lambda)^5 = 0$

On trouve après 28 itérations

$$\| A_{11}^{(28)} \|^2 = 0.73 \cdot 10^{-23}$$

et

λ_i calculées
1.0598 -4.7 $10^{-3}i$
1.0125 -5.8 $10^{-2}i$
0.9561 +3.7 $10^{-2}i$
0.9501 -2.9 $10^{-2}i$
1.0215 +5.5 $10^{-2}i$

nous avons travaillé avec 8 chiffres en virgule flottante, on trouve alors $v/p = 1.6$

Nous donnerons un dernier exemple sur une matrice d'ordre $n=12$, la matrice M est à coefficients réels, nous désignons ses valeurs propres par λ_i nous avons alors : [1] :

$$m_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j + \frac{\lambda_j}{\beta-1} - \frac{\lambda_j}{\beta-1+n} - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{(\beta-1)(\beta-1+n)}$$

nous avons pris $\beta = 2$ d'où

Exemple (II - Ex.6)

La précision $\|A_1^{(k)}\|^2 \leq 0.8 \cdot 10^{-23}$ a été atteinte en 10 itérations (qui comporte chacune 66 transformations).

Le temps d'exécution a été de 68 secondes.

C'est la stratégie S_a qui a été employée

λ_i exactes	λ_i calculées
27.5	27.499 966
29	28.999 959
28.75	28.749 961
28.5	28.499 965
28	27.999 966
25.75	25.749 971
26	25.999 971
25	24.999 971
24	23.999 975
23	22.999 983
20.05	20.049 987
20	19.999 987

Ce qui montre que les résultats sont très bons.

7 PROCEDURE ALGOL DE LA METHODE DE GREENSTADT

La procédure indiquée ici correspond à la stratégie S_a , pour S_b et S_c seules quelques petites modifications seraient nécessaires.

procedure GSTADT (B1,B2,VR,VC,N,EPS,NT0,B00L) ;

valeur N, EPS, NT0 ; tableau B1, B2, VR, VC ;

booleen B00L ; reel EPS ; entier N , NT0 ;

commentaire cette procédure calcule les valeurs propres (partie réelle dans VR et partie imaginaire dans VC) de la matrice à éléments complexes B d'ordre N de partie réelle B1 et de partie imaginaire B2, par la méthode de Greenstadt. On fera au plus NT0 itérations. Si la précision EPS est atteinte (Soit la somme des carrés des modules de $A(I,J) - I > J$ - sur le carré de la norme de

$A \leq \text{EPS}$) alors B00L porte la valeur VRAI et la valeur FAUX sinon) ;

```

debut  procedure TRIN0DEG2 (A1, A2, X1, X2, TRUC) ;
  tableau A1, A2, X1, X2 ; booleen TRUC ;
  commentaire calcul des racines d'un trinôme du second degre. Le booleen
  TRUC porte la valeur VRAI si le module d'une racine depasse  $0.25 \cdot 10^{38}$ ,
  pour éviter des dépassements de capacité ;
  debut reel A, B, S, RH0, THETA, R, Z, C0, SI ;
    A := A1[2]x A1[2] - (A2[2]xA2[2] + 4 x A1[1]x A1[3])+4xA2[1]x A2[3] ;
    B := 2 x A1[2]x A2[2] - 4x(A1[1]x A2[3]+A2[1] x A1[3]) ;
    S := 0.785 398 16 ; TRUC := faux ;
    RH0 := RAC2 (A x A + B x B) ;
    si ABS (B) > ABS (A) alors
      debut si ABS(A)/ABS(B)  $\leq 10^{-35}$  alors
        debut THETA := 2 x SxSIGNE (B) ;
        allera ZIN0K
      fin
    fin ;
    THETA := si A > 0 alors ARCTAN (B/A) sinon
    si ABS(A) = 0  $\wedge$  ABS (B) = 0 alors 0.0 sinon ARCTAN(B/A)+4xS ;
    ZIN0K : R := RAC2 (RH0) ; C0 := C0S (THETA/2) ;
    SI := SIN(THETA/2) ; Z := 2 x(A1[1]x A1[1] + A2[1] x A2[1]) ;
    X1[1] := (A1[1] x (-A1[2] + R x C0) + A2[1] x (-A2[2] + R x SI) ) ;
    si ABS (X1[1]) > Z alors
      debut si Z/ABS(X1[1])  $\leq 2 \times 10^{-19}$  alors
        debut TRUC := vrai ; allera ETIQ fin
      fin ;
    X1[1] := X1[1]/Z ;
    X2[1] := A2[1] x (A1[2] - R x C0) + A1[1] x (-A2[2]+ R x SI) ;
    si ABS (X2[1]) > Z alors
      debut si Z/ABS (X2[1])  $\leq 2 \times 10^{-19}$  alors
        debut TRUC := vrai ; allera ETIQ fin
      fin ;
  fin ;

```

```

X1[2] := X1[2]/Z ;
X2[2] := A2[1] x (A1[2] + R x C0) + A1[1] x (-A2[2] - R x SI) ;
si ABS (X2[2]) > Z alors
    début si Z/ABS(X2[2]) ≤ 2 x 10-19 alors
        debut TRUC := vrai ; allera ETIQ fin
    fin ;
X2[2] := X2[2] / Z ; ETIQ ;
fin TRIN0DEG2 ;
reel BA1, BA2, B11, B12, B21, B22, D1, D2, E1, E2, PIC, A, B, Z, RH0, RAR1,
    RAR2, MADR1, MADR2, S, MADR, AC, C1, C2, N0RM, N0RMI ;
entier ANT0, I, J, Q, P, K ;
ANT0 := 0 ; N0RM := 0.0 ;
pour I := 1 pas 1 jusqua N faire
pour J := 1 pas 1 jusqua N faire
    N0RM := N0RM + B1[I,J] x B1[I,J] + B2[I,J] x B2[I,J] ;
DEBS : N0RMI := 0.0 ;
pour I := 1 pas 1 jusqua N-1 faire
pour J := I+1 pas 1 jusqua N faire
    N0RMI := N0RMI + B1[J,I] x B1[J,I] + B2[J,I] x B2[J,I] ;
PIC := N0RMI/N0RM ; ANT0 := ANT0 + 1 ;
si PIC ≤ EPS ∨ ANT0 > NTO alors
    debut
        BOOL := PIC ≤ EPS , allera FINISH
    fin ;
pour Q := 2 pas 1 jusqua N faire
pour P := 1 pas 1 jusqua Q-1 faire
    debut tableau W1, W2[1:3] , X1, X2[1:2] ; booleen TRUC ;
        W1[1] := B1[Q,P] ; W2[1] := B2[Q,P] ;
        W1[2] := B1[Q,Q] - B1[P,P] ; W2[2] := B2[Q,Q] - B2[P,P] ;
        W[3] := B1[P,Q] ; W2[3] := -B2[P,Q] ;

```

```

  si ABS(W1[1] x W1[1] + W2[1] x W2[1])= 0 alors allera TERM ;
TRINODEG2 (W1, W2, X1, X2, TRUC );
  si TRUC alors allera TERM ;
MADR1 := X1[1] x X1[1] + X2[1] x X2[1] ;
MADR2 := X1[2] x X1[2] + X2[2] x X2[2] ;
  si MADR1 > MADR2 alors
    debut MADR := MADR1 ;
      RAR1 := X1[1] ; RAR2 := X2[1]
    fin
  sinon debut MADR := MADR2 ;
      RAR1 := X1[2] ; RAR2 := X2[2]
    fin ;
BELLE : AC := RAC2(MADR/(1+MADR)) ;
  si ABS(AC) = 0.0 alors debut C1 := 1.0 ; C2 := 0.0 fin
  sinon debut C1 := AC x RAR1/MADR ;
      C2 := -AC x RAR2/MADR
    fin ;
  pour I := 1 pas 1 jusqua P-1 , P+1 pas 1 jusqua Q-1 ,
      Q+1 pas 1 jusqua N faire
debut D1 := AC x B1 [P,I] + B1[Q,I] x C1 + B2[Q,I] x C2 ;
      D2 := AC x B2 [P,I] - B1[Q,I] x C2 + B2[Q,I] x C1 ;
      E1 := -B1[P,I] x C1 + B2[P,I] x C2 + AC x B1[Q,I] ;
      E2 := AC x B2[Q,I] - B1[P,I] x C2 - B2[P,I] x C1 ;
      B1[P,I] := D1 ; B2[P,I] := D2 ;
      B1[Q,I] := E1 ; B2[Q,I] := E2 ;
      D1 := AC x B1[I,P] + B1[I,Q] x C1 - B2[I,Q] x C2 ;
      D2 := AC x B2[I,P] - B1[I,Q] x C2 + B2[I,Q] x C1 ;
      E1 := AC x B1[I,Q] + B1[I,P] x C1 - B2[I,P] x C2 ;
      E2 := AC x B2[I,Q] + B1[I,P] x C2 - B2[I,P] x C1 ;
      B1[I,P] := D1 ; B2[I,P] := D2 ;
      B1[I,Q] := E1 ; B2[I,Q] := E2 ;

```

```

fin ;
D1 := AC x AC ; E1 := C1 x C1 - C2 x C2 ; E2 := C1 x C1 + C2 x C2 ;
BA1 := -D1 x W1[3] + AC x (C1 x W1[2] + C2 x W2[2] )
      -W1[1] x E1 - 2 x W2[1] x C1 x C2 ;
BA2 := -D1 x W2[3] + AC x (C1 x W2[2] - C2 x W1[2] )
      -W2[1] x E1 + 2 x W1[1] x C1 x C2 ;
RHO := AC x (-W1[3] x C1 + W2[3] x C2 + W1[1] x C1 + W2[1] x C2 ) ;
S := AC x (-W1[3] x C2 - W2[3] x C1 - W1[1] x C2 + W2[1] x C1 ) ;
B11 := D1 x B1[P,P] + RHO + B1[Q,Q] x E2 ;
B12 := D1 x B2[P,P] + S + B2[Q,Q] x E2 ;
B21 := D1 x B1[Q,Q] - RHO + B1[P,P] x E2 ;
B22 := D1 x B2[Q,Q] - S + B2[P,P] x E2 ;
B1[P,Q] := BA1 ; B2[P,P] := B12 ; B1[P,P] := B11 ;
B2[P,Q] := BA2 ; B1[Q,Q] := B21 ; B2[Q,Q] := B22 ;
B1[Q,P] := B2[Q,P] := 0,0 ;
TERM :
fin ;
allera DEBS ;
FINISH :
  pour I := 1 pas 1 jusqua N faire
  debut VR[I] := B1[I,I] ; VC[I] := B2[I,I] fin
fin GSTADT ;

```

Remarque sur la conduite du calcul

Quand nous avons dit que nous annulons c_{qp} (II-3), nous avons cherché la racine $X = \frac{c}{a}$ de l'équation du second degré

$$a_{qp} + 2 \Delta_{qp} X - a_{pq} X^2 = 0 \quad (1)$$

Les premiers programmes écrits résolvaient effectivement cette équation mais l'expérience a vite montré qu'en calculant la plus petite racine en module de (1) il était impossible de faire décroître $\sum_{i>j} |a_{ij}|^2$ au dessous d'une certaine valeur fonction de la matrice donnée, tandis qu'ayant calculé $\frac{a}{c}$ il n'y avait aucune difficulté. Les changements entre les deux programmes (l'un calculant $\frac{c}{a}$, l'autre $\frac{a}{c}$) n'intervenant d'ailleurs que lorsque $\frac{c}{a}$ est "petit".

Ceci se comprend très bien d'ailleurs, quand on connaît l'erreur commise dans une soustraction en virgule flottante.

Supposons a_{qp} "assez petit"

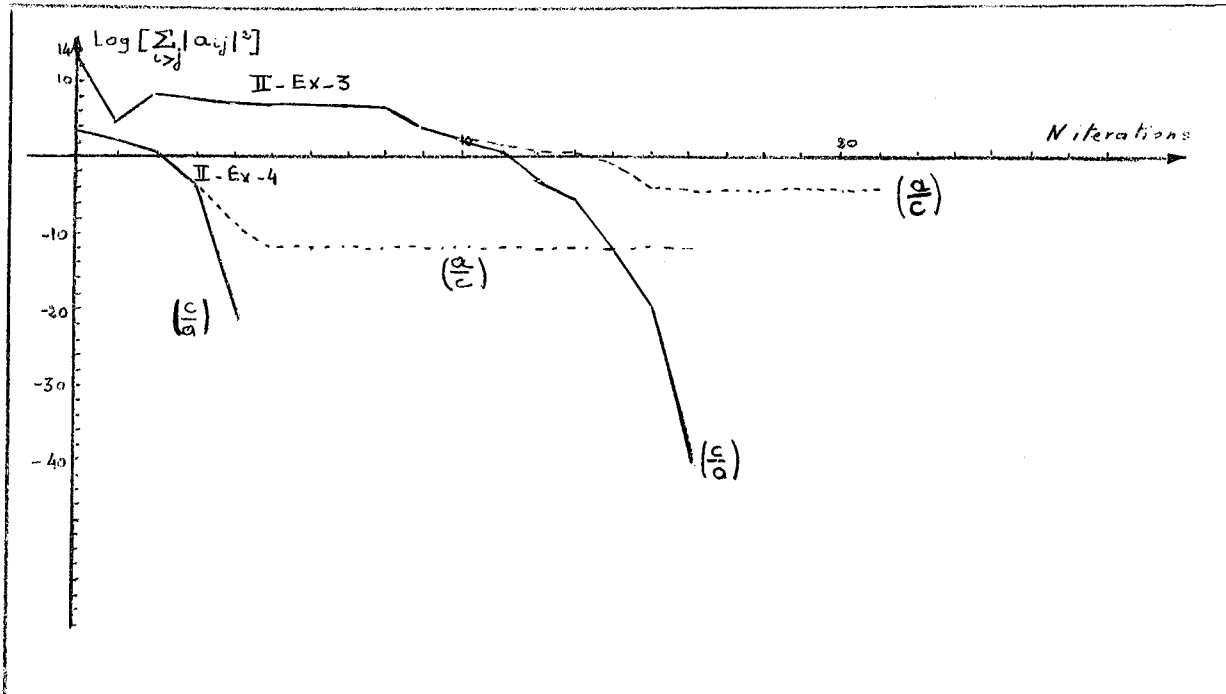
dans ce cas $\frac{c}{a} = \underbrace{(\Delta_{qp} - \sqrt{\Delta_{qp}^2 + a_{qp} a_{pq}})}_{\text{petit}} / a_{pq}$

Ces deux quantités (Δ_{qp} et $\sqrt{\Delta_{qp}^2 + a_{qp} a_{pq}}$) étant du même ordre de grandeur, l'erreur est grande car il y a perte d'un grand nombre de chiffres significatifs, donc finalement lorsque a_{qp} est petit $\frac{c}{a}$ n'est pas donnée avec une grande précision, et $\frac{c}{a}$ n'annule plus le premier membre de (1). Quand on calcule $\frac{a}{c}$ ce phénomène ne se produit pas car :

$$\frac{a}{c} = (\Delta_{qp} + \sqrt{\Delta_{qp}^2 + a_{pq} a_{qp}}) / a_{qp}$$

Nous citerons et construirons le graphe des exemples (II.ex.3 et II.ex.4)

ayant calculé $\frac{a}{c}$ et $\frac{c}{a}$.



La stratégie employée étant S_a

CHAPITRE 3

REDUCTION D'UNE MATRICE A LA FORME DE HESSENBERG

1 DEFINITION

Une matrice H à éléments $h_{ij} \in \mathbb{C}$ sera dite quasitriangulaire ou de la forme de Hessenberg si

$$\forall i, j \quad \text{tels que} \quad i-j \geq 2 \quad h_{ij} = 0 \quad (\text{III} - 1)$$

Exemple $n = 4$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Il résulte qu'une matrice hermitique (ou symétrique) de la forme de Hessenberg est triadiagonale.

Une matrice H de la forme de Hessenberg sera dite complète si $\forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad h_{i+1, i} \neq 0$

2 TRANSMUTATION DE A MATRICE QUELCONQUE EN UNE MATRICE H DE LA FORME DE HESSENBERG

Il existe plusieurs manières de transmuter A en une matrice de

la forme de Hessenberg : méthode de Hessenberg, par des matrices du second degré ... Nous étudierons uniquement ici des transformations unitaires dites de Givens [5] qui permettent de résoudre le problème posé.

Transformations de Givens

Nous donnerons ici une démonstration d'un type semblable à celle qui se trouve au chapitre IV.

Soit $A^{(0)} = A$

et définissons $A^{(k)}$ par

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \leftarrow k$$

↑
k

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & i > j+1 \quad j \leq k \\ a_{ij}^{(k)} & \text{si non} \end{cases}$$

posons la matrice unitaire

$$Q_q = Q_{qk+2} \quad \text{avec} \quad k+2 < q \leq n$$

Q_{qk+2} étant définie de la même manière que U_{qk+2} au chapitre II.

Alors il existe une matrice unitaire U_{k+1} telle que

$$A^{(k+1)} = U_{k+1}^* A^{(k)} U_{k+1} \quad (\text{II-2})$$

et finalement

$$A^{(n-2)} = U_{n-2}^* A^{(n-3)} U_{n-2} = U^* A^{(0)} U$$

est la forme de Hessenberg cherchée.

Le fait de multiplier à gauche et à droite $A^{(k)}$, par U^* et U , a pour effet de modifier les lignes et les colonnes p et q .

Si nous posons

$$B^{(q)} = Q_q^* B^{(q-1)} Q_q \quad \text{avec} \quad B^{(k+2)} = A^{(k)}$$

nous avons d'après les formules (II-1) du chapitre II pour les éléments des lignes $k+2$, et q à gauche de la colonne $k+2$

$$\begin{cases} b_{k+2j}^{(q)} = b_{k+2j}^{(q-1)} a + b_{qj}^{(q-1)} \bar{c} \\ b_{qj}^{(q)} = -b_{k+2j}^{(q-1)} c + b_{qj}^{(q-1)} a \end{cases} \quad j = 1, \dots, k+1$$

Remarquons qu'un élément

$b_{pk+2}^{(q)}$ avec $k+2 < p < q$ qui a été annulé ou qui est nul n'est pas affecté par cette transformation.

$$\text{Mais } b_{k+2j}^{(q-1)} = b_{qj}^{(q-1)} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, k+1$$

$$b_{k+2j}^{(q)} = b_{qj}^{(q)} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, k+1$$

Choisissons a et c de telle manière que

$$\begin{cases} a^2 + |c|^2 = 1 \\ b_{qk+3}^{(q)} = -b_{k+2, k+3}^{(q-1)} c + b_{qk+3}^{(q-1)} a = 0 \end{cases}$$

si $b_{qk+3}^{(q-1)} = 0 \quad Q_q^T = I$

Formant ainsi $B^{(k+3)} \dots B^{(n)}$ nous obtenons $B^{(n)}$ qui est une matrice du type $A^{(k+1)}$

$$B^{(n)} = Q_n^* \dots Q_{k+3}^* B^{(k+2)} A_{k+3} \dots Q_n$$

et posant $U_{k+1} = Q_{k+3} \dots Q_n$

il existe U_{k+1} telle que $A^{(k+1)} = U_{k+1}^* A^{(k)} U_{k+1}$

Posant

$$U = U_1 U_2 \dots U_{n-2}$$

et $H = A^{(n-2)} = U^* A^{(0)} U$

nous obtenons

Théorème

\forall A matrice quelconque, il existe une matrice unitaire U telle que

$$H = U^+ A U$$

soit de la forme de Hessenberg

Remarque Cette démonstration revient à choisir comme pivots successifs

(p : p^{ième} colonne et q q^{ième} ligne)

$$(q,p) \longrightarrow \begin{matrix} (3,2) & (4,2) & \dots & (n,2) \\ & (4,3) & \dots & (n,3) \\ & & & & & (n,n-1) \end{matrix}$$

et d'annuler dans l'ordre

$$\begin{matrix} (3,1) & (4,1) & \dots & (n,1) \\ & (4,2) & \dots & (n,n-2) \end{matrix}$$

On pourrait choisir un autre ordre d'annulation des pivots

Soit

$$(q,p) \longrightarrow \begin{matrix} (n-1, n-2) & \dots & (n-1, 1) \\ (n-2, n-3) & & (n-2, 1) \\ \dots & & \dots \\ & & (2,1) \end{matrix}$$

l'ordre d'annulation des éléments est alors

$$\begin{matrix} (n, n-2) & \dots & (n, 1) \\ (n-1, n-3) & \dots & (n-1, 1) \\ \dots & & \dots \\ & & (3,1) \end{matrix}$$

Remarque Décomposition en sous-matrices

Cas où la matrice H de la forme de Hessenberg ainsi obtenue possède un élément $h_{i+1 i} = 0$

Dans ce cas, écrivons H sous la forme de sous - matrices d'ordre i et n-i

Exemple

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ \hline 0 & 0 & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ 0 & 0 & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ 0 & 0 & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H1 & R \\ \hline 0 & H2 \end{bmatrix}$$

H est triangulaire par blocs et les valeurs propres de H (donc celles de A) sont celles des matrices H1 et H2 qui sont encore de la forme de Hessemberg. Nous sommes ramenés au même problème que précédemment, mais avec deux matrices dont les dimensions sont plus petites.

3. APPLICATIONS NUMERIQUES

Nous ne donnerons que deux exemples sur des petites matrices

(III-Ex-1)

$$A = \begin{bmatrix} 5+4i & 3+2i & 1+2i & 3+4i \\ 4+5i & 4+3i & 2+i & 2+3i \\ 3+4i & 5+4i & 3+2i & 1+2i \\ 2+3i & 4+5i & 4+3i & 2+i \end{bmatrix}$$

qui donne :

$$H = \begin{bmatrix} 5+4i & 3.760+i4.305 & 0.505+i2.604 & 1.621+i0.815 \\ 5.552+i6.941 & 9.177+i7.722 & -1.158-i0.023 & 0.344+i1.574 \\ 0 & 3.303+i2.666 & -0.141-i1.783 & -1.120-i0.738 \\ 0 & 0 & 1.036+i0.081 & -0.036+i0.061 \end{bmatrix}$$

(III-Ex-2)

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 3+4i & 5+4i & 3+2i \\ 2+i & 2+3i & 4+5i & 4+3i \\ 3+2i & 1+2i & 3+4i & 5+4i \\ 4+3i & 2+i & 2+3i & 4+5i \end{bmatrix}$$

qui donne

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 5+456+i5.797 & -2.825-i2.161 & -1.591-i0.697 \\ 5.865+i2.933 & 8.674+i9.953 & 0.144+i0.393 & 0.369-i1.120 \\ 0 & -1.703-i4.622 & 0.390+i2.020 & 0.700+i1.624 \\ 0 & 0 & -1.199+i0.218 & -0.064+i0.026 \end{bmatrix}$$

4. PROCEDURE ALGOL

La matrice de partie réelle B1 et de partie imaginaire B2 est transformée en une matrice de Hessenberg dont les éléments sont à nouveau dans B1+iB2 (N ordre de la matrice).

procédure HESSEN (B1,B2,N) ;

tableau B1,B2; entier N ;

début entier P, Q, I, J ;

réel D1, AC, C1, C2, D2, E1, E2, B01, B02, RH0, S,

B11, B12, B21, B22, Z, X, AD1, AD2, Y1, Y2, C ;

pour P :=2 pas 1 jusqua N-1 faire

pour Q := P+1 pas 1 jusqua N faire

début Z := B1 [Q,P-1] x B1[Q,P-1] + B2 [Q,P-1] x B2 [Q,P-1] ;

Si ABS (Z) = 0 alors allera PIED ;

X := B1 [P,P-1] x B1 [P,P-1] + B2 [P,P-1] x B2 [P,P-1] ;

Si ABS (X) = 0 alors début C2 := AC := 0.0 ;

C1 := 1.0 ; allera TOIR

fin ;

```

AC := RAC2 (X/(X+Z)) ;
C1 := AC/X x (B1[Q,P-1] x B1 [P,P-1] + B2 [Q,P-1] x B2 [P,P-1] ) ;
C2 := AC/X x (B2[Q,P-1] x B1 [P,P-1] - B2 [P,P-1] x B1 [Q,P-1] ) ;
TOIR : AD1 := B1 [Q,Q] - B1 [P,P] ; Y1 := -B1 [P,Q] ;
      AD2 := B2 [Q,Q] - B2 [P,P] ; Y2 := -B2 [P,Q] ;
      pour I := 1 pas 1 jusquà P-1, P+1 pas 1 jusquà Q-1,
          Q+1 pas 1 jusquà N faire
debut D1 := AC x B1 [P,I] + B1 [Q,I] x C1 + B2 [Q,I] x C2 ;
      D2 := AC x B2 [P,I] - B1 [Q,I] x C2 + B2 [Q,I] x C1 ;
      E1 := -B1 [P,I] x C1 + B2 [P,I] x C2 + B1 [Q,I] x AC ;
      E2 := AC x B2 [Q,I] - B1 [P,I] x C2 - B2 [P,I] x C1 ;
      B1 [P,I] := D1 ; B2 [P,I] := D2 ;
      B1 [Q,I] := E1 ; B2 [Q,I] := E2 ;
      D1 := AC x B1 [I,P] + B1 [I,Q] x C1 - B2 [I,Q] x C2 ;
      D2 := AC x B2 [I,P] + B1 [I,Q] x C2 + B2 [I,Q] x C1 ;
      E1 := AC x B1 [I,Q] - B1 [I,P] x C1 - B2 [I,P] x C2 ;
      E2 := AC x B2 [I,Q] + B1 [I,P] x C2 - B2 [I,P] x C1 ;
      B1 [ I,P] := D1 ; B2 [I,P] := D2 ;
      B1 [I,Q] := E1 ; B2 [I,Q] := E2
fin ;
C:= C1 x C1 - C2 x C2 ; X := C1 x C1 + C2 x C2 ;
BØ1 := -AC x AC x Y1 + AC x (C1 x AD1 + C2 x AD2) - B1 [Q,P]xC-2xC1xC2xB2[Q,P] ;
BØ2 := -AC x AC x Y2 + AC x (C1xAD2-C2xAD1)-B2 [Q,P]xC+2xC1xC2xB1 [Q,P] ;
RHØ := AC x (-Y1 x C1 + Y2 x C2 + B1 [Q,P] x C1 + B2 [Q,P] x C2) ;
S := AC x (-Y1 x C2 - Y2 x C1 - B1 [Q,P] x C2 + B2 [Q,P] x C1) ;
B11 := AC x AC x B1 [P,P] + RHØ + B1 [Q,Q] x X ;
B12 := AC x AC x B2 [P,P] + S + B2 [Q,Q] x X ;
B21 := AC x AC x B1 [Q,Q] - RHØ + B1 [P,P] x X ;
B22 := AC x AC x B2 [Q,Q] - S + B2 [P,P] x X ;
B1 [P,Q] := BØ1 ; B2 [P,Q] := BØ2 ; B1 [P,P] := B11 ;
B2 [Q,Q] := B22 ; B1 [Q,Q] := B21 ; B2 [P,P] := B12 ;
B1 [Q,P-1] := B2 [Q,P-1] := 0.0 ;

```

$$B1 [Q,P] := AC \times AC \times B1 [Q,P] + AC \times (AD1 \times C1 - AD2 \times C2) + C \times Y1 - 2 \times C1 \times C2 \times Y2 ;$$

$$B2 [Q,P] := AC \times AC \times B2 [Q,P] + AC \times (AD2 \times C1 + AD1 \times C2) + C \times Y2 + 2 \times C1 \times C2 \times Y1 ;$$

PIED :

fin ;

fin HESSEN ;

ALGORITHME QR

1. FACTORISATION D'UNE MATRICE A EN QR

La matrice A quelconque est décomposée en le produit d'une matrice unitaire Q par une matrice triangulaire supérieure R.

Ceci est toujours possible et sous certaines conditions, cette décomposition est unique.

Nous montrerons l'existence de cette décomposition^{en} construisant la matrice Q telle que

$$Q^* A = R$$

$$\text{Soit } A^{(0)} = A$$

définissons $A^{(k)}$ par

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \leftarrow k$$

↑
k

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & i > j \text{ et } j \leq k \\ a_{ij}^{(k)} & \text{si non} \end{cases}$$

mais

$$b_{k+1 j}^{(q-1)} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, k$$

$$b_{qj}^{(q-1)} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, k$$

donc nous avons encore

$$b_{k+1 j}^{(q)} = b_{qj}^{(q)} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Choisissons a et c de telle manière que

$$\begin{cases} a^2 + |c|^2 = 1 \\ b_{q k+1}^{(q)} = -c b_{k+1 k+1}^{(q-1)} + (a b_{qk+1}^{(q-1)}) = 0 \end{cases}$$

si $b_{qk+1}^{(q-1)} = 0$ alors $Q_q^T \equiv I$

formant ainsi $B^{(k+1)} \dots B^{(n)}$ et remarquant qu'une fois un élément de la colonne $k+1$ et d'une ligne i ($i > k$) annulé cet élément n'est plus affecté par les Q_q^T ($q > i$) suivantes et posant

$$U_{k+1}^* = Q_n^* \dots Q_{k+2}^*$$

nous pouvons écrire que

$$A^{(k+1)} = U_{k+1}^* A^{(k)}$$

Donc finalement

$$R = A^{(n-1)} = U_{n-1}^* \dots U_1^* A = Q^* A$$

est du type cherché soit triangulaire inférieure

d'où $A = QR$

Théorème

Pour toute matrice A quelconque il existe une décomposition de A en le produit d'une matrice unitaire Q par une matrice triangulaire supérieure R

$$\forall A \exists Q, R \text{ tels que } A = QR$$

Remarque : les éléments diagonaux r_{ii} de R peuvent être pris réels positifs ou nuls. Ce qui revient à dire que les $a_{kk}^{(k)}$ peuvent être pris de la sorte.

Pour le faire, il suffit de prémultiplier $A^{(k)}$ par la matrice diagonale unitaire $D = (d_{ij})$ avec

$$d_{ij} = \delta_{ij} \text{ sauf } d_{kk} = e^{i\varphi}$$

nous avons alors

$$\text{les nouveaux } a_{kj}^{(k)} = e^{i\varphi} a_{kj}^{(k)}$$

$$\text{soit si } a_{kk}^{(k)} = \rho e^{i\theta} \text{ il suffit de prendre}$$

$$\varphi = -\theta \quad (\text{module } 2\pi)$$

Exemple (IV - Ex.1)

Exemple de décomposition de A en QR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 12/\sqrt{5} & 9/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{6}/\sqrt{5} & 7/\sqrt{30} \\ 0 & 0 & 5/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Q R

$$A' = \begin{bmatrix} 29/5 & 47/\sqrt{6} & 7/\sqrt{30} \\ 2\sqrt{6}/5 & 41/30 & 1/6\sqrt{5} \\ 0 & 5\sqrt{5}/6 & 5/6 \end{bmatrix} = RQ = Q^T A Q$$

2. UNICITE DE LA DECOMPOSITION A = QR

Supposons maintenant A non-singulière et les r_{ii} strictement positifs.

A étant non singulière, R l'est aussi.

Supposons que A puisse se décomposer de deux manières [6]

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$

Si A est non singulière, R_1 et R_2 le sont

donc

$$(R_1 R_2^{-1}) = Q_1^* Q_2$$

Q_1 et Q_2 unitaires entraînent que $Q_1^* Q_2$ donc $(R_1 R_2^{-1})$ l'est aussi

donc

$$(R_1 R_2^{-1})^{-1} = (R_1 R_2^{-1})$$

$(R_1 R_2^{-1})^{-1}$ est triangulaire supérieure

$(R_1 R_2^{-1})$ est triangulaire inférieure

Ces deux matrices sont donc diagonales. Notant $r_{ij}^{(1)}$ et $r_{ij}^{(2)}$ les éléments de R_1 et R_2 , les éléments diagonaux de $(R_1 R_2^{-1})^{-1}$ et de $(R_1 R_2^{-1})^+$ sont égaux, donc

$$\frac{r_{ii}^{(2)}}{r_{ii}^{(1)}} = \frac{\bar{r}_{ii}^{(1)}}{\bar{r}_{ii}^{(2)}}$$

soit $|r_{ii}^{(1)}|^2 = |r_{ii}^{(2)}|^2$ comme ces éléments sont réels et positifs

$$r_{ii}^{(1)} = r_{ii}^{(2)}$$

et $R_1 R_2^{-1} = I$

soit $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$

La décomposition $A = QR$ est unique

3. ALGORITHME QR

Posons $A_1 = A$

définition de l'algorithme

$$A_s = Q_s R_s$$

$$A_{s+1} = R_s Q_s = Q_s^* A_s Q_s$$

ce qui montre qu'à chaque pas A_s est transmuée par une matrice unitaire.

La décomposition de A_s est unique si les conditions du paragraphe 2 sont réalisées.

Nous supposons maintenant A non-singulière et les $r_{ii}^{(s)}$ ($i = 1, \dots, n$) choisis réels et positifs

Les itérés successifs

$$A_2 = Q_1^* A_1 Q_1$$

⋮

$$A_{s+1} = Q_s^* A_s Q_s$$

entraînent que

$$A_{s+1} = (Q_1^* \dots Q_s^*) A_1 (Q_1 Q_2 \dots Q_s) \quad (\text{IV} - 1)$$

Toutes les A_s sont semblables à $A = A_1$

Posons $Q_s = Q_1 Q_2 \dots Q_s$

$$R_s = R_s \dots R_1$$

et formons

$$\begin{aligned} Q_s R_s &= Q_1 \dots Q_{s-1} (Q_s R_s) R_{s-1} \dots R_1 \\ &= Q_1 \dots Q_{s-1} A_s R_{s-1} \dots R_1 \end{aligned}$$

D'après (IV-1)

$$Q_1 \dots Q_s A_{s+1} = A_1 Q_1 \dots Q_s$$

donc

$$Q_s R_s = A_1 Q_1 \dots Q_{s-1} R_{s-1} \dots R_1 = A_1 Q_{s-1} R_{s-1}$$

puisque

$$Q_0 = R_0 = I$$

$$Q_s R_s = A_1^s$$

Pour montrer la convergence de l'algorithme QR, nous montrerons la convergence de la matrice Q_s quand $s \rightarrow \infty$ en effet

$$A_{s+1} = Q_s^* A_1 Q_s$$

La convergence de Q_s est bien une condition suffisante de convergence de A_{s+1}

4. CONVERGENCE DE Q_s

Supposons que les valeurs propres de A soient séparées

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

Dans ce cas, A et donc $A^s = A_1^s$ sont diagonalisables et il existe une matrice X telle qu'elle soit indépendante de s et que

$$A_1^s = X \operatorname{diag} (\lambda_i^s) X^{-1} = X D^s Y$$

avec $D = (d_{ij})$ diagonale

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

Posons

$$X = QR \quad Y = LU$$

avec R et U triangulaire supérieure, Q unitaire et L triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux égaux à 1. Cette décomposition de Y n'est pas toujours possible [7], mais peut être faite avec quelques modifications que nous n'étudierons pas ici. R est choisie de telle manière que $r_{ii} > 0$.

Dans ce cas

$$A_1^s = QR D^s LU = QR (D^s L D^{-s}) D^s U \quad (\text{IV} - 2)$$

La matrice $D^s L D^{-s}$ est du même type que L . Mais ses éléments non diagonaux sont, désignant ceux de L par l_{ij} ,

$$l_{ij} (\lambda_i / \lambda_j)^s \quad i > j$$

c'est à dire si

$$s \rightarrow \infty \quad l_{ij} (\lambda_i / \lambda_j)^s \rightarrow 0 \quad i > j$$

on peut alors écrire

$$D^s L D^{-s} = I + E_s \quad E_s \rightarrow 0 \text{ quand } s \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} A_1^s &= QR (I + E_s) D^s U \\ &= Q(I + R E_s R^{-1}) R D^s U \\ &= Q(I + F_s) R D^s U \quad \text{avec } F_s \rightarrow 0 \text{ quand } s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

La matrice $I + F_s$ peut être décomposée d'une manière unique en $\tilde{Q}_s \tilde{R}_s$ (\tilde{Q}_s matrice unitaire, \tilde{R}_s triangulaire supérieure) donc

$$I + F_s = \tilde{Q}_s \tilde{R}_s$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (I + F_s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{Q}_s \tilde{R}_s = I$$

Donc $\tilde{Q}_\infty \tilde{R}_\infty = I$ ce qui entraîne $\tilde{Q}_\infty = I$
 $\tilde{R}_\infty = I$

en effet

$$\tilde{Q}_\infty \tilde{R}_\infty = I \implies \tilde{Q}_\infty = \tilde{R}_\infty^{-1}$$

donc \tilde{Q}_∞ triangulaire supérieure, ce qui est impossible pour une matrice unitaire donc \tilde{Q}_∞ est diagonale

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\infty &= \tilde{Q}_\infty^* \text{ entraîne} \\ \tilde{R}_\infty &= \tilde{Q}_\infty = I \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire encore

$$A_1^s = (Q \tilde{Q}_s) (\tilde{R}_s R D^s U)$$

$Q \tilde{Q}_s$ est unitaire

$\tilde{R}_s R D^s U$ est triangulaire mais rien ne permet d'affirmer que les éléments

diagonaux de cette matrice sont positifs. Hormis la possibilité d'une post-multiplication de $\widetilde{Q}Q_s$ par une matrice diagonale unitaire, P_s est égal à $\widetilde{Q}Q_s$ et donc converge vers Q .

Ecrivons :

$$D = |D|D_1$$

$$|D| = |d_{ij}| = |\lambda_i| |\delta_{ij}|$$

$$D_1 = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \delta_{ij}$$

et $U = D_2 (D_2^{-1} U)$

D_1 et D_2 sont des matrices diagonales unitaires et $D_2^{-1} U$ a des éléments diagonaux réels et positifs.

Nous pouvons encore écrire :

$$A_1^s = \underbrace{(\widetilde{Q}Q_s D_2 D_1^s)}_{P_s} \underbrace{[(D_2 D_1^s)^{-1} \widetilde{R}_s R_s (D_2 D_1^s) |D|^s (D_2^{-1} U)]}_{U_s} \quad (IV-3)$$

Cette fois-ci U_s a bien des termes diagonaux réels > 0 donc puisque la décomposition est unique :

$$\begin{cases} Q_s = P_s \\ R_s = U_s \end{cases}$$

Donc $Q_s \sim Q D_2 D_1^s \quad s \rightarrow \infty$

mais $Q_s = Q_1 \dots \dots \dots Q_s \sim Q D_2 D_1^s$

$Q_{s+1} = Q_1 \dots \dots \dots Q_{s+1} \sim Q D_2 D_1^s D_1$

donc $Q_{s+1} \rightarrow D_1$

La matrice Q_s tend vers une matrice diagonale dont les éléments sont de module unité :

$$Q_\infty = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \delta_{ij}$$

5 - CONVERGENCE DE A_k VERS UNE MATRICE TRIANGULAIRE SUPERIEURE.

Nous avons :

$$A_k = Q_k^* A_1 Q_k$$

Q_k converge, donc A_k converge

puisque $A_k = Q_k R_k$

R_k converge aussi

R_k converge donc vers une matrice triangulaire supérieure.

Notant $a_{ij}^{(k)}$ les éléments de A_k

$$a_{ij}^{(k)} = e_i^* Q_k R_k e_j$$

$$\text{et } a_{ij}^{(k)} \rightarrow \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} r_{ij}^{(k)}$$

Donc pour $i > j$ $r_{ij}^{(k)} = 0 \quad \forall k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = 0$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow \infty} |r_{ij}^{(k)}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{ij}^{(k)}|$$

d'où le

Théorème

Si A est quelconque non singulière et telle que ses valeurs propres soient de module distinct, alors la matrice A_s définie par l'algorithme QR converge vers une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A .

6 - CONSERVATION DE LA FORME DE HESSENBERG, par QR .

Considérons la formation de Q^t telle que :

$$Q^t A = R$$

Nous avons vu au paragraphe 1 que

$$Q^t = Q_p^t \dots \dots \dots Q_1^t$$

mais Q_1^t est de la forme :

$$Q_1^t \begin{bmatrix} a & +c & & & & \\ -c & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

La prémultiplication de Q_1^t par Q_2^t a pour effet de changer les lignes 2 et 3

$$\text{avec } q_{2j}^{(2)} = a q_{2j}^{(1)} + c q_{3j}^{(1)}$$

$$q_{3j}^{(2)} = -c q_{2j}^{(1)} + a q_{3j}^{(1)}$$

$$\text{donc pour } j > 3 \quad q_{2j}^{(2)} = q_{3j}^{(2)} = 0$$

Après cette transformation les lignes 1 et 2 ne sont plus changées. Par cette construction Q^t est la transposée d'une matrice de la forme de Hessenberg.

Donc Q est de la forme de Hessenberg.

Or nous savons que le produit d'une matrice Q telle que

$$Q_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & i \leq j \quad i - j \leq p \\ 0 & i - j > p \end{cases}$$

par une matrice triangulaire supérieure est une matrice du même type que Q donc

$$A_{s+1} = R_s Q_s \text{ est de la forme de Hessenberg.}$$

La forme de Hessenberg est conservée par l'algorithme QR.

7 - VALEURS PROPRES MULTIPLES.

Nous supposons que les diviseurs élémentaires de $A_1 = A$ sont tous linéaires. Nous avons encore [7] d'après (IV-2)

$$A_1^s = X D^s L U$$

et nous supposons

$$\lambda_p = \lambda_{p+1} \dots \dots \dots \lambda_q$$

et que toutes les autres valeurs propres ont des modules distincts.

Les éléments de $D^s L D^{-s}$ sont égaux à

$$l_{ij} (\lambda_i / \lambda_j)^s \quad i > j$$

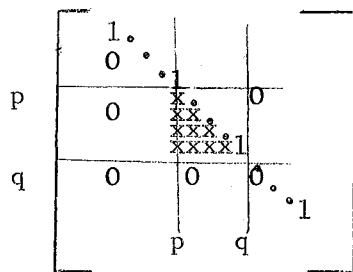
qui tendent vers 0 à moins que

$$q \geq i > j \geq p$$

où ils restent égaux à l_{ij} puisque $\lambda_i = \lambda_j$

$$D^s L D^{-s} = \tilde{L} + E_s \quad (E_s \rightarrow 0)$$

où \tilde{L} est du type



Ecrivons $\tilde{X}\tilde{L} = QR$ nous avons alors

$$\begin{aligned} A_1^s &= QR (I + \tilde{L}^{-1} E_s) D^s U \\ &= Q (I + \tilde{R}\tilde{L}^{-1} E_s \tilde{R}^{-1}) R D^s U \\ &= Q (I + E_s) R D^s U \quad (E_s \rightarrow 0) \\ &= (Q \tilde{Q}_s) (\tilde{R}_s R D^s U) \end{aligned}$$

Où $\tilde{Q}_s \tilde{R}_s$ est la décomposition de $I + E_s$ en "QR".

Introduisant les mêmes matrices que dans (IV-3) pour avoir des nombres positifs dans $(R_s R D^S U)$ à la place des éléments diagonaux, nous pouvons conclure que $Q_s \rightarrow Q$ a une matrice diagonale unitaire près.

Nous pouvons donc conclure que l'algorithme "QR", soit la matrice A_s , converge vers une matrice triangulaire supérieure, même s'il existe un seul groupe de valeurs propres multiples et si A est diagonalisable.

Exemple (IV - Ex - 2)

Posons $X^t = [2, 4, 4, 4, 5, 5, 6]$

$Y^t = [4, 2, 2, 2, 2, 2, 0]$

et $P = I + X^t Y$

et soit $M = P^{-1} D P$

D ayant λ_i pour valeurs propres

d_{ii}	λ_i exactes	$ \lambda_{i+1} / \lambda_{i+1} $	λ_i caractères
d_{77}	$1000(1+i)$	0.1	$9999.9986(1+i)$
d_{66}	$100(1+i)$	0.1	$100.00005(1+i)$
d_{33}	$10(1+i)$	1	$99.998825(1+i)$
d_{22}	$10(1+i)$	0.1	$9.9999942(1+i)$
d_{11}	$(1+i)$	0.1	$0.99999892(1+i)$
d_{44}	$0.1(1+i)$	0.1	$0.10001221(1+i)$
d_{55}	$0.01(1+i)$		$0.01003342(1+i)$

Le test d'arrêt est $\frac{\|A^{(s)}\|^2}{\|A\|^2} \leq 10^{-20}$, il a été atteint

au bout de 15 itérations, la matrice M ayant été mise au préalable sous la forme de Hessenberg.

Remarquons que la convergence est très rapide car les $|\lambda_{i+1}|/|\lambda_i|$ sont égaux à 1/10 sauf $\lambda_4/\lambda_3 = 1$ qui comme nous venons de voir n'altère pas la convergence.

8 - VALEURS PROPRES DE MEME MODULE.

Soient λ_p et λ_{p+1} les valeurs propres de même module

$$\begin{cases} \lambda_p = e^{i\theta_p} |\lambda| \\ \lambda_{p+1} = e^{i\theta_{p+1}} |\lambda| \end{cases}$$

d'après le paragraphe précédent les éléments de $D^s L D^{-s}$ sont ici égaux à

$$l_{ij} (\lambda_i / \lambda_j)^s \quad i > j$$

lorsque $s \rightarrow \infty$ $l_{ij} (\lambda_i / \lambda_j)^s \rightarrow 0 \quad i > j$

sauf $l_{p+1,p} (\lambda_{p+1} / \lambda_p)^s = l_{p+1,p} e^{i(\theta_{p+1} - \theta_p)s}$

qui n'a pas de limite.

Dans ce cas on montre que la limite de A_s est une matrice triangulaire par blocs.

Exemple $p = 3$

$$\lim A_s = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x & x & x \\ & \lambda_2 & x & x & x \\ & & a_{33}(s) & a_{34}(s) & x \\ & & & a_{43}(s) & a_{44}(s) & x \\ & & & & & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Le bloc de dimension 2 (deux valeurs propres ont même module)

$$\begin{bmatrix} a_{33}(s) & a_{34}(s) \\ a_{43}(s) & a_{44}(s) \end{bmatrix} \quad \text{n'a pas de limite mais a pour valeurs}$$

propres λ_3 et λ_4 . On remarque dans un calcul effectif que

$$a_{11}(s) + a_{33}(s) \rightarrow \lambda_3 + \lambda_4$$

On montrerait aussi que s'il existe p groupes de k_p valeurs propres ayant même module alors la limite de A_s est une matrice triangulaire supérieure par blocs, possédant d'ailleurs p blocs de dimensions k_p .

Si la taille de ces blocs n'est pas connue a priori, il est très difficile de les détecter sur une calculatrice.

9 - CONCLUSION - ORDRE DE CONVERGENCE -

Dans le cas où la matrice A a toutes ses valeurs propres de modules distincts on peut montrer que les éléments de A_s soient $a_{ij}^{(s)}$ ($i > j$) converge vers 0 comme $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}^s$

$$\text{donc } a_{ij}^{(s)} = \mathcal{O}(\lambda_i / \lambda_j)^s \quad i > j$$

Si la matrice est de la forme de Hessenberg

$$a_{i+1, i}^{(s)} = \mathcal{O}(\lambda_{i+1} / \lambda_i)^s \quad i = 1 \dots n-1$$

$$a_{ij} = 0 \quad i-j > 2$$

Donc la méthode convergera d'autant plus vite que les valeurs propres sont mieux séparées. Lorsque les modules sont voisins. La convergence est très lente comme nous le verrons au chapitre V.

```

procedure QR (B1, B2, VR, VC, N, EPS, NTØ, BØØL);
  valeur N, EPS, NTØ; tableau B1, B2, VR, VC; reel EPS;
  entier N, NTØ; booleen BØØL;
  début procedure NØR (B1, B2, N, NI);
    valeur N; tableau B1, B2; reel NI; entier N;
    début entier I; NI := 0.0;
      pour I := 1 pas 1 jusqua N-1 faire
        NI := NI + B1 [I+1,I] x B1 [I+1,I] + B2 [I+1,I] x B2 [I+1,I]
    fin NØR;
  procedure ALGØQR (B1, B2, N);
    valeur N; tableau B1, B2; entier N;
    debut reel Z, A, C1, C2, X, T, S; entier I, P, J;
      tableau AL, L1, L2 [1:N-1];
      pour P:= 1 pas 1 jusqua N-1 faire
        debut Z := B1 [P, P] x B1 [P,P] + B2 [P,P] x B2 [P,P];
          si ABS (Z) = 0.0 alors
            debut A := C2 := 0.0; C1 := 1.0;
              allera PIC
            fin;
          X := B1 [P+1,P] x B1 [P+1,P] + B2 [P+1,P] x B2 [P+1,P];
          A := RAC2 (Z/(X+Z));
          C1 := (B1 [P+1,P] x B1 [P,P] + B2 [P+1,P] x B2 [P,P]) / Z x A ;
          C2 := (-B1 [P+1,P] x B2 [P,P] + B2 [P+1,P] x B1 [P,P]) / Z x A;
          PIC: AL[P]:=A; L1[P]:= C1; L2[P]:= C2 ;
          pour J := P pas 1 jusqua N faire
            debut T := A x B1 [P, J] + C1 x B1 [P+1,J] + C2 x B2 [P+1,J];
              S := A x B2 [P,J] - C2 x B1 [P+1,J] + C1 x B2 [P+1,J];
              X := A x B1 [P+1,J] - C1 x B1 [P,J] + C2 x B2 [P,J];
              Z := A x B2 [P+1,J] - C1 x B2 [P,J] - C2 x B1 [P,J];
              B1 [P,J] := T; B2 [P,J] := S; B2 [P+1,J] := Z;
              B1 [P+1,J] := X; B1 [P+1,P] := B2 [P+1,P] := 0.0
            fin
          fin;
    fin;

```

```

    pour P:=1 pas 1 jusqu'a N-1 faire
    pour J:= 1 pas 1 jusqu'a P+1 faire
debut A := AL[P]; C1 := L1[P]; C2 := L2[P];
    T := AXB1[J,P]+ C1XB1[J,P+1]-C2XB2[J,P+1];
    S := AXB2[J,P] +C1XB2[J,P+1]+C2XB1[J,P+1];
    X := AXB1[J,P+1]- C1XB1 [J,P]-C2XB2[J,P];
    Z := AXB2[J,P+1]+C2XB1[J,P]-C1XB2[J,P];
    B1[J,P]:= T; B2[J,P]:=S;
    B1[J,P+1]:=X; B2[J,P+1]:=Z

    fin
fin ALGOR;
procedure HESSEN (B1, B2, N) ;
.....
fin HESSEN;
entier I, J, K; reel NI, H1;
    K:=0; H1:=0.0;
    HESSEN (B1, B2, N) ;
    pour I:=1 pas 1 jusqu'a N faire
    pour J:= 1 pas 1 jusqu'a N faire
        H1 := H1 + B1 [I,J]XB1[I, J]+ B2 [I, J] XB2[I, J];
    ITER : K:= K+1; NOR (B1, B2, N, NI);
    si NI/H1 <EPS alors
        debut B00L := vrai ; allera FINISH fin;
    si K >NT0 alors
        debut B00L := faux ; allera FINISH fin;
    ALGOR (B1, B2, N);
    allera ITER;
FINISH : pour I:=1 pas 1 jusqu'a N faire
    debut VR [I]:= B1 [I, I];
    VC [I]:= B2 [I, I]
    fin
fin QR;

```

MATRICES \mathcal{E}^P -TRIANGULAIRES

Soit une matrice quelconque Z , nous la décomposerons en la somme de deux matrices triangulaires

$$Z = (z_{ij}) = \left[\begin{array}{c|c} & Z2 \\ \hline Z1 & \end{array} \right] = Z1 + Z2$$

avec $Z1 = (z_{1ij})$
$$z_{1ij} = \begin{cases} z_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$

$$Z2 = (z_{2ij}) \quad z_{2ij} = \begin{cases} z_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

1) Théorème

Lorsque la méthode de Greenstadt est appliquée à un pivot appartenant à la première sous diagonale ($q = p+1$), le carré de la norme euclidienne de la partie triangulaire inférieure de la transmuée de A diminue du carré du module de ce pivot.

En effet si U est définie par

$$u_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{sauf} \quad \begin{cases} u_{pp} = u_{qq} = a \\ \vdots \\ u_{pq} = c \\ \vdots \\ u_{qp} = c \end{cases}$$

avec $a^2 + |c|^2 = 1$ et $q = p+1$

et $A^{(1)}$ par

$$A^{(1)} = U^* AU$$

nous écrivons

$$\begin{aligned} \|A_i^{(1)}\|^2 &= \sum_{i>j} |a_{ij}^{(1)}|^2 \\ &= \sum_{\substack{i>j \\ i,j \neq p,q}} |a_{ij}^{(1)}|^2 + \sum_{i=q+1}^n (|a_{iq}^{(1)}|^2 + |a_{ip}^{(1)}|^2) + \sum_{i=1}^{p-1} (|a_{pi}^{(1)}|^2 + |a_{qi}^{(1)}|^2) \\ &\quad + |a_{qp}^{(1)}|^2 \end{aligned}$$

a et c étant choisis tels que

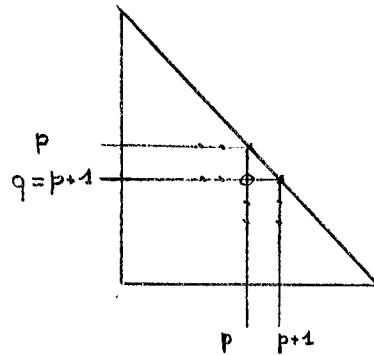
$$\begin{cases} a^2 + |c|^2 = 1 \\ a_{qp}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Nous savons aussi que

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \quad \forall i,j \quad i,j \neq p,q$$

et d'après (II-6) que

$$\forall i \neq q,p \quad \begin{cases} |a_{ip}|^2 + |a_{iq}|^2 = |a_{ip}^{(1)}|^2 + |a_{iq}^{(1)}|^2 \\ |a_{pi}|^2 + |a_{qi}|^2 = |a_{pi}^{(1)}|^2 + |a_{qi}^{(1)}|^2 \end{cases}$$



relations résultant du fait que U est unitaire donc

$$\|A_1^{(1)}\|^2 = \sum_{\substack{i>j \\ i,j \neq p,q}} |a_{ij}|^2 + \sum_{i=q+1}^n (|a_{iq}|^2 + |a_{ip}|^2) + \sum_{i=1}^{p-1} (|a_{pi}|^2 + |a_{qi}|^2)$$

soit

$$\boxed{\|A_1^{(1)}\|^2 = \|A_1\|^2 - |a_{qp}|^2} \quad (V-1)$$

donc le théorème est établi

2) Etude d'un algorithme

Soit M une matrice dont on cherche les valeurs propres, et A une matrice de la forme de Hessenberg semblable à M.

$$\text{Posons } \mathcal{A}^{(0)} = A$$

Appliquons la méthode de Greenstadt au pivot a_{p+1p} de $\mathcal{A}^{(0)}$, p étant déterminé de telle manière que

$$|a_{p+1p}| = \sup_{i=1 \dots n-1} (|a_{i+1i}|)$$

Nous obtenons une matrice $A^{(1)}$ telle que

$$\|A_1^{(1)}\|^2 = \|\mathcal{A}_1^{(0)}\|^2 - |a_{p+1p}|^2$$

$$\text{ou } \|A_1^{(1)}\|^2 = \|\mathcal{A}_1^{(0)}\|^2 \left(1 - \frac{|a_{p+1p}|^2}{\|\mathcal{A}_1^{(0)}\|^2}\right) \ll \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \|\mathcal{A}_1^{(0)}\|^2$$

$$\text{puisque } \|\mathcal{A}_1^{(0)}\|^2 \ll (n-1) |a_{p+1p}|^2$$

Maintenant la matrice $A^{(1)}$ n'est plus de la forme de Hessenberg, $A^{(1)}$ est de la forme :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} p \\ \downarrow \\ \begin{array}{cccccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \textcircled{x} & 0 & x & x & x & x \\ & \textcircled{x} & x & x & x & x \\ & & & x & x & x \\ & & & & x & x \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left[\right. \\ \left. \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} p+1 \rightarrow \end{array}
 \end{array} = A^{(1)}$$

Il y a deux éléments "perturbateurs" $a_{p+1, p-1}^{(1)}$ et $a_{p+2p}^{(1)}$, il serait donc tentant de repasser de $A^{(1)}$ à une matrice de la forme de Hessenberg.

Nous allons montrer que

Soit une matrice A du type définie comme suit :

$$(i=1 \dots n-1) \quad a_{i+1, i} \neq 0 \quad \text{sauf} \quad a_{p+1, p} = 0$$

$$a_{i+p, i} = 0 \quad p \geq 2 \quad \text{sauf} \quad a_{p+1, p-1} \cdot a_{p+2p} \neq 0 \quad (p \neq 1, n-1)$$

$$\text{si} \begin{cases} p = 1, a_{p+2p} \neq 0, \\ p = n-1, a_{p+1, p-1} \neq 0 \end{cases}$$

dans ce cas la transmutation de A en une forme de Hessenberg H au moyen de transformations unitaires, du type Givens ou Householder, est unique à un coefficient de module 1 près.

Nous savons que $A = A^{(1)}$ est issue d'une forme de Hessenberg $A_0 (= \mathcal{A}^{(0)})$

$$A = U^* A_0 U$$

Donc la matrice de passage U^{-1} convient

$A' = (U^{-1})^* A U^{-1}$ est de la forme de Hessenberg mais dans ce cas

$$\sum_{i > j} |a'_{ij}|^2 = \sum_{i > j} |a_{ij}^{(0)}|^2$$

il n'y a donc eu aucun intérêt à passer à la forme $A^{(1)}$.

Soit Y une matrice formée par des produits de matrices de type Givens ou Householder qui rendent A de la forme de Hessenberg H

$$Y^* A Y = H$$

$$H = (h_{ij})$$

$$(h_{p+kp} = 0 \quad k \geq 2 \\ p=1 \dots n-2)$$

Soit encore $A Y = Y H$

Y est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & y_{n2} & & y_{nn} \end{bmatrix}$$

En supposant pour fixer les idées que $p = 3$, exprimons les éléments de la

lère colonne de

$$\begin{array}{rcl} A Y & & Y H \\ a_{11} & = & h_{11} \\ a_{21} & = & h_{21} y_{22} \quad (*) \\ 0 & = & h_{21} y_{p2} \quad (p > 2) \end{array}$$

(*) entraîne que $h_{21} \neq 0$ si $a_{21} \neq 0$

donc $\forall p > 2 \quad y_{p2} = 0$

par conséquent puisque Y est unitaire

$$\sum_{p=2}^n |y_{p2}|^2 = 1 \quad \text{et}$$

$$\sum_{p=2}^n |y_{2p}|^2 = 1$$

nous obtenons $y_{22} = e^{i\psi}$

et nous avons aussi $y_{p2} = y_{2p} = 0 \quad (p > 2)$

donc $h_{11} = a_{11}$

$h_{21} = e^{-i\psi} a_{21}$ (on prendra désormais $\psi = 0$)

2ème colonne

$$\left. \begin{aligned} a_{21} y_{22} &= h_{12} \\ a_{22} y_{22} &= h_{22} y_{22} \\ a_{32} y_{22} &= h_{32} y_{33} \\ a_{42} y_{22} &= h_{32} y_{43} \\ 0 &= h_{32} y_{p3} \quad (p > 4) \end{aligned} \right\} \quad (V-2)$$

(V-3)

$a_{42} \neq 0$ sinon $A^{(0)}$ aurait pu se décomposer en deux matrices de la forme de Hessenberg
donc $h_{32} \neq 0$

$$h_{32} \neq 0 \implies y_{p3} = 0 \quad p > 4$$

Nous avons Y unitaire donc

$$\sum_{p=3}^n |y_{p3}|^2 = 1 = |y_{33}|^2 + |y_{43}|^2$$

donc

$$|h_{32}|^2 = |a_{32}|^2 + |a_{42}|^2$$

d'après (V-2) et (V-3)

donc h_{32} est unique au facteur $e^{i\theta}$ près il en est de même pour y_{33} et y_{43} dès
que θ et φ sont fixés.

3ème colonne

$$\begin{aligned} a_{13} y_{33} + a_{14} y_{43} &= h_{13} \\ a_{23} y_{33} + a_{24} y_{43} &= h_{23} y_{22} \\ a_{33} y_{33} + a_{34} y_{43} &= h_{33} y_{33} + h_{43} y_{34} \\ & \quad a_{44} y_{43} = h_{33} y_{43} + h_{43} y_{44} \\ a_{53} y_{33} + a_{54} y_{43} &= h_{43} y_{54} \\ & \quad 0 = h_{43} y_{64} \end{aligned} \quad (V-4)$$

mais sachant que

$$\begin{cases} a_{53} = a_{54}^{(0)} c_0 \\ a_{54} = a_{54}^{(0)} a_0 \end{cases}$$

d'après (II-1)

(V-4) devient

$$a_{54}^{(0)} \left(y_{33} c_0 + y_{43} a_0 \right) = h_{43} y_{54}$$

tenant compte de (V-2) nous avons

$$\frac{y_{22}}{h_{32}} \times a_{54}^{(0)} \left(c_0 a_{32} + a_{42} a_0 \right) = h_{43} y_{54}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_{32} = a_{32}^{(0)} a_0 \\ a_{42} = -a_{32}^{(0)} c_0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad h_{43} y_{54} = 0$$

$$\text{soit} \quad y_{54} = 0$$

Donc Y est de la forme

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & y_{33} & y_{34} & y_{35} & \cdots & y_{3n} \\ & & y_{43} & y_{44} & \cdot & & \\ & & 0 & 0 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & 0 & 0 & y_{n5} & & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Nous avons donc (Y unitaire)

$$\left| y_{33} \right|^2 + \left| y_{43} \right|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{de plus } \overline{y}_{33} y_{34} + \overline{y}_{43} y_{44} &= 0 \\ y_{34} &= -\frac{y_{44}}{\overline{y}_{33}} \overline{y}_{43} \end{aligned}$$

pourtant dans (V-5) nous obtenons

$$|y_{44}|^2 = |y_{33}|^2$$

donc

$$|y_{34}|^2 = |y_{43}|^2$$

donc

$$|y_{33}|^2 + |y_{34}|^2 = 1$$

$$|y_{43}|^2 + |y_{44}|^2 = 1$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} y_{3p} = 0 \\ y_{4p} = 0 \end{cases} \quad (p > 4)$$

mais nous remarquons que la matrice H obtenue avant que la sous-matrice

$$\begin{bmatrix} y_{55} & \dots & y_{5n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_{n5} & & y_{nn} \end{bmatrix} = U_{n-4}$$

ne soit fixée est de la forme de Hessenberg il suffit donc de prendre

$$U_{n-4} \equiv I_{n-4}$$

(Nous supposons ϵ assez petit pour négliger dans $\|A_1\|$ les termes $\alpha_i \epsilon^i$ pour $i > p$)

Il est intuitif que plus p est grand plus les éléments diagonaux de A doivent être "voisins" des valeurs propres de A . Pour confirmer ce résultat nous ferons appel au théorème de Ostrowski [10] (voir de plus [11]).

Théorème de M. OSTROWSKI

Soit $A = (a_{ij})$ carré d'ordre n dont les éléments satisfont aux inégalités

$$|a_{ij}| \leq m \quad (j < i)$$

$$|a_{ij}| \leq M \quad (j > i)$$

avec $0 \leq m < M$

Alors les valeurs propres de A se trouvent dans les cercles de centres a_{ii} et de rayons:

$$\delta_{(m,M)} = \frac{M m \frac{1}{n} - m M \frac{1}{n}}{M \frac{1}{n} - m \frac{1}{n}}$$

La relation s'écrit, en posant ,

$$(m = \epsilon)$$

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{1/n} = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{1/n} = \eta$$

$$\delta(\epsilon, M) = M \eta \frac{1 - \eta^{n-1}}{1 - \eta} \quad (V-6)$$

On voit donc que plus n ↑ moins la majoration est bonne. Cependant (V-6) nous donne quand même une idée de la proximité des valeurs propres par rapport aux éléments diagonaux pour une matrice \mathcal{E}^p - triangulaire.

Exemple (de Forsythe)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \varepsilon & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

par exemple
 $n = 10$

$$\begin{array}{l} \text{si } \varepsilon = 0 \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \text{si } \varepsilon = 10^{-10} \quad \lambda_i^n + \varepsilon = 0 \end{array}$$

$$\text{d'où } |\lambda_i| = 0,1 \quad \forall i$$

d'après (V-6) nous avons

$$\delta(\varepsilon, M) = 10^{-1} \frac{1 - 10^{-9}}{0.9} \ll 0.112$$

On retrouve sensiblement les λ_i avec $|\lambda_i| = 0.1$

Remarque Si $M=m$ nous avons

$$\begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow M} \delta(m, M) = (n-1) M \\ m \rightarrow M \end{array}$$

donc pour une matrice hermitique ε^p -triangulaire nous avons

$$|a_{ij}| = |a_{ji}| = m = M \ll \varepsilon^p$$

$$\text{donc } |a_{ii} - \lambda| \ll (n-1) \varepsilon^p$$

qui est donc un très bon résultat. Donc dans ce cas si les éléments non diagonaux sont petits, les éléments diagonaux sont voisins des valeurs propres.

4) Application de la méthode de Greenstadt à une matrice presque-triangulaire

a) Première stratégie

Nous avons la matrice A "presque triangulaire"

$$\text{soit } \|A_1\| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1i}|^2 \right)^{1/2} = \varepsilon$$

Dans un calcul effectif A sera dite triangulaire avec la précision ε' si

$$\|A_1\| \leq \varepsilon'$$

La matrice presque-triangulaire est obtenue par un procédé tel que l'on calcule (sur la forme d'Hessenberg)

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(s)} = A, A^{(s+1)}, \dots$$

et tel que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|A_1^{(s)}\| = 0$$

Cependant s est fixé de telle manière que

$$\|A_1^{(s)}\| \leq \varepsilon'$$

Dans ce cas il est inutile d'aller en général jusqu'au rang s si l'on tient compte du théorème (V-1)

$A^{(k)}$ sera calculée jusqu'au rang p tel que

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1i}^{(p)}|^2 - \sup_{i=1 \dots n-1} |a_{i+1i}^{(p)}|^2 \right) \ll \varepsilon'^2 \quad (V-7)$$

En effet la méthode de Greenstadt appliquée au pivot $a_{q+1q}^{(p)}$ de $A^{(p)}$ nous donne une matrice $A^{(p+1)}$ telle que, si q est choisie de manière que

$$a_{q+1q}^{(p)} = \sup |a_{i+1i}^{(p)}| ,$$

$$\|A_{11}^{(p+1)}\|^2 = \|A_{11}^{(p)}\|^2 - |a_{q+1q}^{(p)}|^2$$

d'après le théorème (V-1)

Soit donc

$$\|A_{11}^{(p+1)}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1i}^{(p)}|^2 - \sup_{i=1 \dots n-1} |a_{i+1i}^{(p)}|^2$$

donc d'après (V-7)

$$\|A_{11}^{(p+1)}\| \ll \varepsilon'$$

et $A^{(p+1)}$ est triangulaire avec la précision ε' .

Cette stratégie est d'un coût très peu élevé (le coût d'une application de la méthode de Greenstadt étant proportionnel à n), tandis que le passage de $A^{(p)}$ à $A^{(s)}$ pouvant être fort long comme nous le verrons dans (V-Ex.-1)

b) 2ème stratégie: passage a une matrice ε^P -triangulaire (p>2)

Soit A presque triangulaire, et soit a_{p+1p} le pivot de la méthode de Greenstadt qui transforme A en $A^{(1)}$, nous avons d'après (II-3)

$$\text{en posant } 2 \Delta_{p+1p} = a_{p+1p+1} - a_{pp}$$

$$a_{p+1p}^{(1)} = a_{p+1p}^2 + 2 \Delta_{p+1p} a_{pp} - a_{pp+1} c^2 = 0$$

pour c/a nous choisissons la racine :

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \left(\Delta_{p+1p} - \sqrt{\Delta_{p+1p}^2 + a_{p+1p} a_{pp+1}} \right) / a_{pp+1} \\ &= \frac{\Delta_{p+1p}}{a_{pp+1}} \left[1 - \left(1 + \frac{a_{p+1p} a_{pp+1}}{\Delta_{p+1p}^2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\Delta_{p+1p}}{a_{pp+1}} \left[1 - 1 - \frac{a_{p+1p} a_{pp+1}}{2 \Delta_{p+1p}^2} + \frac{a_{p+1p}^2 a_{pp+1}^2}{8 \Delta_{p+1p}^4} + \dots \right]$$

puisque a_{p+1p} est petit ($= \varepsilon_p$) nous ne conservons que les termes du 1er ordre en ε

$$\text{soit } \frac{c}{a} \approx - \frac{\varepsilon_p}{2 \Delta_{p+1p}} \quad (V-8)$$

(si $\Delta_{p+1p} = 0$ nous aurions immédiatement

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a_{p+1p}}}{\sqrt{a_{pp+1}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_p}}{\sqrt{a_{pp+1}}}$$

et au lieu d'obtenir une matrice ε^2 -triangulaire nous obtiendrons une matrice $\varepsilon^{3/2}$ -triangulaire)

puisque $a^2 + |c|^2 = 1$ nous pouvons écrire d'après (V-8)

$$a \neq 1 - \frac{|\varepsilon_p|^2}{2|\Delta_{p+1p}|^2}$$

$$|c| \neq \frac{|\varepsilon_p|}{2|\Delta_{p+1p}|}$$

Posons $E_\alpha = \{a_{p+1p} : p \text{ impair}\}$

$E_\beta = \{a_{p+1p} : p \text{ pair}\}$

et

$$|\alpha|^2 = \sum_{p \in E_\alpha} |a_{p+1p}|^2$$

$$|\beta|^2 = \sum_{p \in E_\beta} |a_{p+1p}|^2$$

Nous avons

$$\|A_1\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Appliquons la méthode de Greenstadt à l'ensemble des pivots appartenant à E_α (l'ordre des pivots étant déterminé par l'ordre des indices de colonnes ^{croissant})

La transmuée de $A^{(0)} = A$ quand a_{21} est choisi pour pivot est $A^{(1)}$ telle que

$$\|A_1^{(1)}\|^2 = \|A_1^{(0)}\|^2 - |a_{21}|^2$$

Les termes sous-diagonaux affectés sont

$$a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, a_{32}^{(1)}$$

D'après (II-1) nous pouvons écrire $(a_{31} = 0)$

$$a_{21}^{(1)} = a^2 a_{21} + 2 \Delta_{21} ac - a_{12} c^2 = 0$$

$$a_{31}^{(1)} = a_{32} c + a_{31} a$$

$$a_{32}^{(1)} = + a_{32} a - a_{31} c$$

$$\text{soit } \left| a_{31}^{(1)} \right| = \left| a_{32} \right| \frac{|a_{21}|}{2|\Delta_{21}|} = \frac{|\varepsilon_1 \varepsilon_2|}{2|\Delta_{21}|}$$

$$\left| a_{32}^{(1)} \right| = \left| a_{32} \right| \left(1 - \frac{|a_{21}|^2}{8|\Delta_{21}|^2} \right) \neq |\varepsilon_2|$$

si maintenant $A^{(3)}$ est la transmuée de $A^{(1)}$, a_{43} étant choisi pour pivot nous avons

$$\|A^{(3)}\|^2 = \|A^{(1)}\|^2 - |a_{43}|^2 = \|A^{(0)}\|^2 - |a_{21}|^2 - |a_{43}|^2$$

Les éléments sous-diagonaux affectés sont

$$a_{31}^{(1)}, a_{41}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}, a_{43}^{(1)}, a_{53}^{(1)}, a_{54}^{(1)}$$

Nous obtenons comme précédemment

$$\left| a_{31}^{(3)} \right| = \left| a_{31}^{(1)} \right| a \neq \frac{|\varepsilon_1 \varepsilon_2|}{2|\Delta_{21}|}$$

$$\left| a_{41}^{(3)} \right| = \left| a_{31}^{(1)} \right| |c| \neq \frac{|\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3|}{2|\Delta_{21}| |\Delta_{43}|}$$

$$|a_{32}^{(3)}| = a_{32}^{(1)} \# |a_{32}| \left(1 - \frac{|a_{21}|^2}{8|\Delta_{21}|^2}\right) \left(1 - \frac{|a_{43}|^2}{8|\Delta_{43}|^2}\right)$$

$$|a_{42}^{(3)}| = |a_{32}^{(1)}| |c| \# |\varepsilon_2| \frac{|\varepsilon_3|}{2|\Delta_{43}|}$$

$$|a_{43}^{(3)}| = 0$$

$$|a_{53}^{(3)}| = |a_{54}^{(1)}| |c| \# |\varepsilon_4| \frac{|\varepsilon_3|}{2|\Delta_{43}|}$$

$$|a_{54}^{(3)}| = |a_{54}^{(1)}| a \# |\varepsilon_4| \left(1 - \frac{|a_{43}|^2}{8|\Delta_{43}|^2}\right)$$

Notons ε^p un terme d'ordre ε^p nous obtiendrons en itérant le procédé aux pivots appartenant à E_α , une matrice qui a la forme :

$$B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x & x & x & x \\ & \varepsilon^2 & \varepsilon & x & x & x & x & x & x & x \\ & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ & & \varepsilon^2 & \varepsilon & x & x & x & x & x & x \\ & & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x & x \\ & & & \varepsilon^2 & \varepsilon & x & x & x & x & x \\ & & & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x \\ & & & & \varepsilon^2 & \varepsilon & x & x & x & x \\ & & & & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \quad (V - \text{fig. -1})$$

La matrice $B = (b_{ij})$ est telle que :

$$\|B_1\|^2 = \|A_1^{(0)}\|^2 - \sum_{p \in E_\alpha} |a_{p+1p}|^2$$

Nous avons de plus, se limitant aux termes en ε^2

$$|b_{32}| = |a_{32}^{(3)}| \neq |a_{32}| \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{|a_{21}|^2}{|\Delta_{21}|^2} + \frac{|a_{43}|^2}{|\Delta_{43}|^2} \right) \right]$$

$$|b_{54}| = |a_{54}^{(5)}| \neq |a_{54}| \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{|a_{43}|^2}{|\Delta_{43}|^2} + \frac{|a_{65}|^2}{|\Delta_{65}|^2} \right) \right]$$

$$\text{si } n \text{ pair } |b_{n-1 \ n-2}| = |a_{n-1 \ n-2}^{(n-1)}| \neq |a_{n-1 \ n-2}| \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{|a_{n-2 \ n-3}|^2}{|\Delta_{n-2 \ n-3}|^2} + \frac{|a_{n \ n-1}|^2}{|\Delta_{n \ n-1}|^2} \right) \right]$$

$$\text{si } n \text{ impair } |b_{n \ n-1}| = |a_{n \ n-1}^{(n)}| \neq |a_{n \ n-1}| \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{|a_{n-1 \ n-2}|^2}{|\Delta_{n-1 \ n-2}|^2} \right) \right]$$

donc

$$\sum_{p \in E_\beta} |b_{p+1p}|^2 \neq \sum_{p \in E_\beta} |a_{p+1p}|^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{|a_{pp-1}|^2}{|\Delta_{pp-1}|^2} + \frac{|a_{p+2 \ p+1}|^2}{|\Delta_{p+2 \ p+1}|^2} \right) \right]$$

la partie entre parenthèses ayant un terme en moins si n est impair

Appliquons maintenant la méthode de Greenstadt à l'ensemble des pivots appartenant à E_β , nous obtenons une matrice C telle que

$$\|C_1\|^2 = \|B_1\|^2 - \sum_{i \in E_\beta} |b_{i+1 \ i}|^2$$

soit

$$\|C_1\|^2 \neq \|A^{(0)}\|^2 - \sum_{i \in E_\alpha} |a_{i+1 \ i}|^2 - \sum_{i \in E_\beta} |a_{i+1 \ i}|^2 + \sum_{i \in E_\beta} \frac{|a_{i+1 \ i}|^2}{4} \left(\frac{|a_{ii-1}|^2}{|\Delta_{ii-1}|^2} + \frac{|a_{i+2 \ i+1}|^2}{|\Delta_{i+2 \ i+1}|^2} \right)$$

$$\text{mais } \|A^{(0)}\|^2 = \sum_{i \in E_\alpha \cup E_\beta} |a_{i+1, i}|^2$$

$$\text{donc } \|C_1\| \neq \left[\sum_{i \in E_\beta} \frac{|a_{i+1, i}|^2}{4} \left(\left| \frac{a_{ii-1}}{\Delta_{ii-1}} \right|^2 + \left| \frac{a_{i+2, i+1}}{\Delta_{i+2, i+1}} \right|^2 \right) \right]^{1/2} \equiv \sum_{i=p}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i$$

$$\left[\sum_{i \in E_\beta} \frac{|a_{i+1, i}|^2}{4} \left(\left| \frac{a_{ii-1}}{\Delta_{ii-1}} \right|^2 + \left| \frac{a_{i+2, i+1}}{\Delta_{i+2, i+1}} \right|^2 \right) \right]^{1/2} \leq \frac{\text{Sup}_{i=1 \dots n-1} |a_{i+1, i}|}{2 \text{Inf}_{i \in E_\alpha} |\Delta_{i+1, i}|} \text{Inf} [|\alpha|, |\beta|]$$

Mais puisque $A^{(0)}$ est ε -triangulaire

$$\text{Inf} [|\alpha|, |\beta|] \leq \varepsilon$$

$$\text{Sup} |a_{i+1, i}| \leq \varepsilon$$

donc nous pouvons écrire

$$\|C_1\| \neq \alpha_2 \varepsilon^2 \text{ avec } |\alpha_2| \leq \frac{1}{2 \text{Inf}_{i \in E_\alpha} |\Delta_{i+1, i}|}$$

Les termes en ε^p ($p > 2$) ayant été négligés car ε est suffisamment petit.

La matrice C est donc ε^2 -triangulaire

On montrerait aisément que la matrice C est maintenant telle que

$$C = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^3 & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & x & x & x & x & x & x & x \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & x & x & x & x & x \\ & & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x & x & x \\ & & & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & x & x & x \\ & & & & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 0 & x \\ & & & & & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & x \end{bmatrix} \quad (\text{V- fig.- 2})$$

Remarque : Nous avons montré qu'en choisissant dans A les pivots appartenant successivement à E_α puis à E_β (L'ordre inverse eut donné un résultat semblable), nous obtenons une matrice ε^2 -triangulaire. On peut montrer aussi qu'en choisissant les pivots dans l'ordre $(a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n, n-1})$ on arrive à une matrice ε^2 -triangulaire, dans ce cas l'expression de $\|C_1\|$ est alors bien plus compliquée, ce qui explique notre choix. Dans ce cas C serait une matrice pleine telle que les éléments soient ε^p sur la $p^{\text{ième}}$ sous-diagonale ($p \geq 2$) et ε^3 ou 0 sur la première.

Nous allons maintenant montrer que C peut être transformée en une matrice D ε^3 -triangulaire.

Il est possible de "transférer les ε^2 " de la deuxième sous-diagonale sur la première sous-diagonale par la méthode de Greenstadt en prenant pour pivots successifs

$$c_{31}, c_{42}, \dots, c_{i, i-2}, \dots$$

L'élément c_{31} étant pivot nous avons

$$c_{21}^{(1)} = c_{21} a + c_{23} c$$

$$c_{32}^{(1)} = -c_{12} c + c_{32} a$$

nous avons alors ($c_{31}^{(1)} = 0$)

$$\left| \frac{c}{a} \right| \neq \left| \frac{c_{31}}{2 \Delta_{31}} \right| = \left| \frac{\varepsilon^2}{2 \Delta_{31}} \right|$$

soit $a \neq 1$

$$\left| c \right| \neq \left| \frac{\varepsilon^2}{2 \Delta_{31}} \right|$$

$$\text{donc } \left| c_{21}^{(1)} \right| \leq \left| \varepsilon^3 a \right| + \left| \varepsilon^2 \frac{c_{23}}{2 \Delta_{31}} \right| = \left| \varepsilon^3 \right| + \left| \varepsilon^2 \frac{c_{23}}{2 \Delta_{31}} \right|$$

$$\left| c_{32}^{(1)} \right| = \left| \varepsilon^2 \frac{c_{12}}{2 \Delta_{31}} \right|$$

dont les parties principales sont en ε^2 quand ε est suffisamment petit ; les termes des colonnes 1 et 3 sont tels que

$$\left| c_{i1}^{(1)} \right| = \left| c_{i1} a + c_{i3} c \right| \quad i \neq 3, 1$$

$$\left| c_{i3}^{(1)} \right| = \left| -c_{i1} \bar{c} + c_{i3} a \right|$$

d'après la figure (V-fig.-2)

$$c_{i1} = \varepsilon^{i-1} \quad i \gg 3$$

$$c_{i3} = \varepsilon^{i-3} \quad i \gg 5$$

Donc nous avons pour les termes sous diagonaux

$$|c_{41}^{(1)}| = \left| \varepsilon^{4-1} \quad 1 + \varepsilon^{4-3} c_{43} \right| = \left| \varepsilon^3 + \varepsilon x \varepsilon^3 \right|$$

$$|c_{43}^{(1)}| = \left| -\frac{\varepsilon^3 \varepsilon^2}{2 \Delta_{qp}} + 1 x \quad 3 \right|$$

de partie principale en ε^3

et pour les termes des lignes suivantes

$$|c_{i1}^{(1)}| = \left| \varepsilon^{i-1} \quad 1 + \frac{\varepsilon^{i-3} \varepsilon^2}{2 \Delta_{31}} \right|$$

$$|c_{i3}^{(1)}| = \left| -\frac{\varepsilon^{i-1} \varepsilon^2}{2 \Delta_{31}} + 1 x \varepsilon^{i-3} \right|$$

dont les parties principales sont en

$$\varepsilon^{i-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{i-3}$$

elles sont donc inchangées par

rapport à C

Itérant le procédé à tous les pivots $a_{i+2 \ i}$ avec ($i=1 \dots n-2$), nous obtenons finalement une matrice dont les termes sont en ε^2 sur la première sous-diagonale et en ε^p ($p > 2$) sur les autres sous-diagonales. Soit finalement :

$$\begin{bmatrix}
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^2 & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x & x & x \\
 \varepsilon^6 & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x & x \\
 \varepsilon^7 & \varepsilon^6 & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x & x \\
 \varepsilon^8 & \varepsilon^7 & \varepsilon^6 & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 & x & x \\
 \varepsilon^9 & \varepsilon^8 & \varepsilon^7 & \varepsilon^6 & \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & 0 & \varepsilon^2 & x
 \end{bmatrix}$$

(V. Fig.-3)

Appliquant le procédé que nous avons utilisé pour rendre A ε^2 -triangulaire, nous obtiendrons une nouvelle matrice n'ayant plus de terme en ε^2 , donc cette matrice est ε^3 -triangulaire.

D'où

Théorème

Soit A une matrice presque triangulaire. Il est possible de rendre la transformée A' de A ε^3 -triangulaire, en appliquant la méthode de Greenstadt aux sous-diagonales 1, 2 et 1 (dans cet ordre), lorsque les pivots sont choisis dans l'ordre des indices de colonnes croissant.

5) Application des résultats précédents

Nous appliquerons les résultats précédents à l'accélération de l'algorithme QR étudié au chapitre IV.

* Nous remarquerons surtout l'intérêt de la première stratégie que nous noterons "stratégie du Sup" (S.S). En effet, supposons une matrice telle que :

$$\text{les } \gamma_i = \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right| \quad i = 1 \dots n \text{ soient petits sauf un seul } \gamma_i = \gamma_p$$

qui est voisin de 1 (Cas de deux racines de même module). Dans ce cas la "stratégie du Sup" associée à QR est convergente en effet, d'après le paragraphe (IV-8), si A_s est la $s^{\text{ième}}$ matrice formée par QR, $\exists N(\epsilon)$ tel que $s > N$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1 i}^{(s)}|^2 \leq \epsilon^2 \\ |a_{p+1 p}^{(s)}| = \alpha_p > \epsilon \text{ (en général)} \end{cases} \quad (V - 9)$$

Si $\alpha_p \leq \epsilon$ la relation (V-9) serait aussi vérifiée, et A_s serait triangulaire au sens de la précision fixée.

Nous avons donc :

$$\alpha_p = \text{Sup} |a_{i+1 i}^{(s)}|$$

Appliquant la méthode de Greestadt au pivot $a_{p+1 p}^{(s)}$ nous obtenons une matrice $A^{(s+1)}$ qui d'après (V-1) est telle que :

$$\|A_1^{(s+1)}\|^2 = \|A_1^{(s)}\|^2 - \alpha_p^2$$

soit d'après (V-9)

$$\|A^{(s+1)}\|^2 \leq \epsilon^2$$

$A^{(s+1)}$ est triangulaire. La stratégie du Sup fait converger QR.

Reprenons et donnons les valeurs propres de l'exemple (II - EX - 2)

Nous avons :

$$\begin{aligned} |\lambda_2|^2 &= 142, 488 \\ |\lambda_3|^2 &= 141, 391 \end{aligned} \quad |\lambda_3| / |\lambda_2| \neq 0.9961$$

Nous avons posé le test d'arrêt :

$$\frac{\|A_1^{(s)}\|}{\|A\|} \leq 10^{-10}$$

Au bout de 1000 tours "QR" la précision n'était pas atteinte tandis qu'avec la "stratégie du Sup" il a suffi d'appliquer "QR" 6 fois. D'où les valeurs propres qui sont en accord avec celles données dans [9] .

127. 38666 + i	132. 278 18
-9. 460002+ i	7. 280 189
7. 07331 - i	9. 558 408
- 10 ⁻⁶ + i	2 10 ⁻⁶
2.710 ⁻⁷ - i	1.1 10 ⁻⁸

N'ayant pu rendre A ϵ - triangulaire par QR il n'a donc pas été possible de la rendre ϵ^2 - triangulaire.

** Nous appliquerons maintenant le procédé (ϵ^2) sur la matrice ϵ -triangulaire: A, obtenue par QR, dès que le test :

$$\|A_1^{(s)}\|_1^2 \leq \epsilon \text{ est satisfait.}$$

L'accélération de QR sera alors d'autant plus appréciable que la décroissance de $\|A_1^{(s)}\|_1$ en fonction de s sera lente nous citerons un exemple de matrice emprunté à Wilkinson dont les valeurs propres se trouvent aussi dans [9]

(V - Ex - 1)

Pour obtenir $\frac{\|A_1^{(s)}\|_1}{\|A\|} \leq 10^{-10}$ il a fallu avec QR 1431 tours, avec la

"stratégie du Sup" 289 et avec le procédé (ϵ^2) 418.

Nous avons $\|A_1^{(418)}\|_1^2 = 1.7 \cdot 10^{-6}$ après avoir appliqué la méthode de Greenstadt à l'ensemble des pivots E_α nous avons la matrice $A^{(419)}$ telle que :

$$\|A_1^{(419)}\|_1^2 = 1.7 \cdot 10^{-17}$$

puis à l'ensemble des pivots E_β nous avons la matrice $A^{(420)}$ telle que :

$$\|A_1^{(420)}\|_1^2 = 8.5 \cdot 10^{-24}$$

En appliquant QR seul, nous obtenons seulement :

$$\|A_1^{(550)}\|^2 = 2.3 \cdot 10^{-8}$$

Donc le gain est très appréciable.

D'où les valeurs propres données par $A^{(420)}$ ou $A^{(289)}$ si la stratégie du Sup a été appliquée :

10. 797 649 + i 8. 623 366
-4. 966 803 - i 8. 087 016
1. 032 0396+ i 9. 294 003
8. 811 235 + i 1. 549 364
2. 389 871 + i 7. 268 014
5. 436 390 - i 3. 971 395
-5. 279 442 - i 2. 275 944
4. 161 7175+ i 3. 137 482
-1. 935 193 - i 3. 975 078
-2. 447 548 + i 0. 437 12554

Dans ce cas encore la "stratégie du Sup" a été la plus efficace.

Nous donnerons un exemple où il a été nécessaire de rendre ϵ^3 -triangulaire la matrice étudiée.

(II-Ex-3)

A est la matrice hermitique du chapitre II

Au bout de 35 tours QR nous obtenons

$$\|A_1^{(35)}\|^2 = 5.4 \cdot 10^{-7}$$

Appliquant le procédé (ϵ^2)

$$\|A_1^{(36)}\|^2 = 9.5 \cdot 10^{-8}$$

et le procédé (ϵ^3)

$$\|A_1^{(37)}\|^2 = 7.7 \cdot 10^{-14}$$

Pour obtenir le résultat avec QR seul il faut 73 tours avec la stratégie du Sup il en faut 66.

(II-Ex-1)

Valeurs propres données par les procédés (S.S) et (ϵ^2)

S.S	ϵ^2	QR seul
36.798067 + i 32.214896	36.797854 + i 32.214721	
19.210791 + i 31.714606	19.219233 + i 31.712912	
28.430135 + i 16.443380	28.427808 + i 16.445153	
-16.105210 + i 1.009192	- 16.105201 + i 1 .009194	
-12.333893 - i 1.382233	-12.333883 - i 1. 382235	
51	105	201
Nombre de tours QR		

Avec le procédé (ϵ^2) on passe de :

$$\| A_1^{(105)} \|^2 = 5.45 \cdot 10^{-7} \quad \text{à} \quad \| A_1^{(107)} \|^2 = 2. \cdot 10^{-22}$$

(II-Ex-3)

Les résultats sont obtenus très rapidement car :

$$\text{Sup} \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right| \leq 0.1$$

Valeurs propres données par le procédé (ϵ^2),

-48242.705	- i 72477.574
495.7778	- i 3977.2756
- 3.059898	- 6.115902
1.004743	+ i 1.987229
- 0.005767	+ i 0.012880

Pour les nombres de tours respectifs on se reportera au tableau de résultats. Ici le procédé (ϵ^2) a été le plus rapide.

Première conclusion

Nous venons de voir que tantôt la stratégie du Sup, tantôt le procédé (ϵ^2) est meilleur. Donc il était logique d'associer ces deux avantages. C'est ce que nous ferons avec cette nouvelle accélération (méthode de synthèse M-S).

Soit : dès que l'un des tests suivants sera obtenu, le procédé QR ne sera plus appliqué :

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1i}|^2 - \sup_{i=1..n-1} |a_{i+1i}|^2 \right) \leq \epsilon^2 \quad (V-7)$$

ou

$$\|A_1\|^2 \leq \epsilon \quad (V-10)$$

Si (V-7) est satisfaite et si $\sup_{i=1..n-1} |a_{i+1i}| \leq \epsilon E_\alpha$ alors le procédé (ϵ^2) sera

appliqué à E_α puis à E_β (dans l'ordre inverse soit E_β puis E_α si $\sup |a_{i+1i}| \leq \epsilon E_\beta$).

En effet dans ce cas nous obtenons une matrice intermédiaire (V-fig 7) telle que

$$\|B_1\|^2 = \|A_1\|^2 - \sum_{p \in E_\alpha} |a_{p+1p}|^2$$

donc à fortiori (V-7) est vérifiée, appliquer la suite du procédé (ϵ^2) à B pour obtenir C (V-fig 2) ne peut que faire décroître $\|B_1\|$ donc C est triangulaire.

Si (V-10) est vérifiée avant (V-7) le procédé (ϵ^2) et au besoin, le procédé (ϵ^3) est appliqué.

6°) Exemples Numériques

Pour noter dans un tableau la méthode employée, nous marquerons :

- * QR pour l'algorithme QR
- * (\mathcal{E}^P) pour le procédé rendant \mathcal{E}^P -triangulaire une matrice presque triangulaire
- * S.S pour l'application de la stratégie du Sup.
- * M.S pour la méthode de synthèse
- * S avec un indice a,b,c pour indiquer l'emploi de la méthode de Greenstadt avec la stratégie Sa, Sb ou Sc .
Seuls les résultats donnés par la meilleure des stratégies seront inscrits.

(V- Ex - 2)

Cet exemple est la réduction de IV - Ex - 2 à l'ordre 6 en supprimant x_2 et y_2 et la valeur propre $\lambda_2 = 10(1+i)$.

Les valeurs propres sont alors $\lambda_i = 10^{i-3}$ ($i = 1, \dots, 6$) et la convergence est très rapide.

(V - Ex - 3)

Nous avons choisi dans cet exemple des valeurs propres de modules voisins. Nous remarquons que trois des valeurs propres sont exactes: c'est parce que, dans la matrice M, ces trois valeurs propres λ_4 , λ_5 et λ_6 se trouvent être les seuls éléments $\neq 0$ dans les lignes 3, 4 et 5 respectivement.

$$X^T = [1, 1, 0, 2, 0, 0]$$

$$Y^T = [1, -1, 4, 0, 0, 4]$$

$$P = I + XY^T$$

et $M = P^{-1} DP$

$d_{ii} =$	λ_i exactes	$ \lambda_i ^2$	λ_i QR	λ_i M.S
d_{44}	$1.5 + i 4.009$	18.322 1	$1.499 95 + i 4.008 8$	$1.199 92 + i 3.999 96$
d_{22}	$1.258 + i 4.05$	17.985 1	$1.257 94 + i 4.049 8$	$1.257 97 + i 4.049 87$
d_{11}	$1.2 + i 4$	17.44	$1.199 96 + i 3.99995$	$1.500 04 + i 4.008 9$
d_{33}	$1.35 + i 4.1$	18.632 5	$1.35 + i 4.1$	$1.35 + i 4.1$
d_{55}	$1.2437 + i 3.987$	17.443	$1.2437 + i 3.987$	$1.2437 + i 3.987$
d_{66}	$1.198 + i 4.201$	19.083 6	$1.198 + i 4.201$	$1.198 + i 4.201$

(V - Ex - 4)

Voici un autre exemple où des valeurs propres sont encore voisines en module.

$$X^T = [1, 4, 8, 8, 5, 5]$$

$$Y^T = [2, 2, 6, 1, 4, 4]$$

$$P = I + XY^T \quad M = P^{-1} DP$$

d_{ii}	λ_i exactes	$ \lambda_{i+1} / \lambda_i $	λ_i (M S)
d_{11}	14.56 + i 7	0.605	14.559 981 + i 6.999 9841
d_{55}	6.423 + i 7.358	0.9	6.422 996 + i 7.357 9668
d_{66}	5 + i 7.2345	0.975	4.999 9563 + i 7.234 4788
d_{44}	6.02 + i 6.123	0.642	6.020 0371 + i 6.123 0388
d_{22}	4.219 - i 3.56	0.106	4.218 9724 - i 3.560 0619
d_{33}	1.5678 + i 0.9835		1.567 7689 + i 0.983 53105

Les chiffres soulignés sont ceux qui diffèrent des résultats donnés par QR.

(V - Ex - 5) Soit $P = I + XY^T$ (N = 12)

les valeurs propres sont classées par ordre décroissant. Les 1ère et 6ème colonnes indiquant le numéro des composantes de X et Y,

i	X_i	Y_i	λ_i exactes	$ \lambda_{y+1} / \lambda_j $	i	X_i	Y_i	λ_i exactes	$ \lambda_{j+1} / \lambda_j $
7	45.32	61.3	321.123 + i 369.147	0.6	9	7.24	56.2	37.25 - i 31.65	0.56
3	6	23.1	153.24 + i 247.23	0.74	8	8.95	34.56	25.689 -i 15.768	0.53
5	8.24	3	53.24 + i 209.134	0.46	10	71.56	31.0	7.321 -i 12.35	0.56
4	5	34.23	92.147 + i 34.023	0.95	11	0.012	4.23	1.23 -i 4.012	0.09
1	4.5	2.3	78.942 + i 51.23	0.93	12	5.423	-6.73	-0.15 + i 1.687	0.42
2	52.3	4.0	71.23 + i 50.245		6	-24.12	-51.34	-0.025 - i 0.0003584	0.015

ainsi que le numéro des $d_{ii} = \lambda_i$ éléments diagonaux de D (matrice diagonale) avec $M = P^{-1} DP$

(V - Ex - 6)

Matrice d'ordre $n = 15$ avec $P = I + X^T Y$

i	X_i	Y_i	λ_i exactes	$ \lambda_{j+1}/\lambda_j $	i	X_i	Y_i	λ_i exactes	$ \lambda_{j+1}/\lambda_j $
5	-12.3	1	1004.2-i 253.4	0.46	10	43.2	-12.3	-42.5 - i26.14	0.87 0.805
2	12.45	-12.56	189.23+i 429.23	0.6	8	5.2	3.14	25.24 + i 31.23	0.7
7	4.25	-12.3	198.02+i 197.4	0.55	11	5.23	4.12	-12.3 - i 25.23	0.4
1	1.45	-25.8	102 -i 115.89	0.82	13	12.3	-1.34	7.77 - i 7.89	0.41
9	7.12	- 5.32	92.45+i 86.24	0.79	6	4.25	31.	4.15 + i 0.2	0.1
14	4.23	-12.5	9.56-i 99.475	0.875	15	1.45	6.12	1.02 - i 0.8	0.0003
4	1.25	-45.1	32.14+i 81.5	0.645	3	-1.34	-1.34	0.023 - 0.00456	
12	5.12	3.24	51.23-i 25.47						

et $M = P^{-1} DP$ avec D diagonale ($d_{ii} = \lambda_i$)

(V - Ex - 7)

Soit M la matrice d'ordre $n = 20$ $M = P^{-1} DP$ avec D diagonale ($d_{ii} = \lambda_i$) $P = I + X^T Y$

i	X _i	Y _i	λ _i exactes	λ _{j+1} /λ _j	i	X _i	Y _i	λ _i exactes	λ _{j+1} /λ _j
3	12.4	-1.02	-809963.12 - i 7631254	0.02	10	1.23	4.12	-23.45 +i 30.78	0.37
8	1.57	-2.35	-150234.5 + i 20.43	0.64	13	1.24	5.24	-17.24 +i 15.98	0.61
1	1.23	-1.45	-12345.67 - i 95012.3	0.05	7	3.12	-14.5	-10.56 +i 11.89	0.68
11	-12.12	-1.47	-2345.78 - i 4501.23	0.35	17	1.57	6.24	- 6.45 +i 8.23	0.65
14	0.02	-4.05	-304.56 + i 1798.98	0.52	6	1.23	0.12	6.24 -i 1.57	0.62
18	12.03	1.25	-35.99 - i 953.45	0.48	2	3.57	1.5	-3.12 +i 2.48	0.62
20	21.45	-14.25	-456.12 - i 14.56	0.53	4	-1.45	1.23	-2.04 -i 0.31	0.52
19	1.58	-1.23	-237.6 - i 38.38	0.64	5	1.23	5.12	1.56 -i 0.25	0.77
12	5.23	-14.2	-154.58 - i 1.23	0.68	15	-1.23	5.42	0.24 -i 0.53	0.37
9	1.54	-4.67	69.12 - i 80.28		16	0.12	4.32	-3410 ⁻⁴ -i 5.710 ⁻⁶	0.001

Le test d'arrêt était $\frac{\|A(s)\|^2}{\|A\|^2} = 10^{-20}$ pour QR et 10^{-35} pour MS ce qui fait que les résultats sur les valeurs propres seront moyens vu que $\|A\|^2 \neq 7 \cdot 10^{18}$

(V - Ex - 8)

9 + 10i	2 + 34i	61 + 5i	24 + 7i	57 + 6i	4 + 24i	5 + 2i
3 + 5i	41 + 62i	5 + 81i	58 + 67i	24 + 51i	5 + 2i	8 + 6i
24 + 31i	31 + 5i	4 + 61i	24 + 14i	3 + 21i	1 + i	2 + 4i
3 + 41i	12 + 3i	5 + 42i	10 + 2i	10 + 8i	2 + 41i	5 + 6i
9 + 7i	5 + 8i	5 + 4i	2 + 5i	21 + i	8 + 9i	2 + 3i
41 + 5i	21 + 43i	2 + 71i	51 + 24i	34 + 2i	5 + 7i	6 + 21i
31 + 51i	52 + 41i	21 + 32i	5 + 7i	6 + 8i	24 + 5i	31 + 42i

Nous donnerons les valeurs propres dans l'ordre des modules décroissants et uniquement les chiffres significatifs qui ont été trouvés communs aux quatre méthodes (de Greenstadt, QR, "MS", (ϵ^2)).

La précision demandée était $\frac{\|A^{(0)}\|^2}{\|A\|^2} = 10^{-20}$

106.473	96	+	i	151.41760
-48.631	2	-	i	26.106 8
49.671	5	+	i	14.513 98
-44.345	46	+	i	5.324 11
18.443	41	+	i	31.886 96
26.919	538	+	i	18.045 25
12.468	540	+	i	6.159 281 3

(V - Ex - 9)

Nous donnerons un autre exemple pour une matrice à éléments réels et à valeurs propres réelles. Cet exemple est proposé par Francis [8] . Cependant pour avoir $\|A\|$ relativement faible nous avons considéré non pas la matrice A mais la matrice $B = 10^{-7} A$, et nous avons pris pour test d'arrêt

$$\sum_r^2 = 10^{-20} \quad (N = 10)$$

λ_i données par Francis	λ_i données par la méthode M.S x 10^7	$ \lambda_{i+1}/\lambda_i $
26,312 963.12	26 312 938.	0.69
18 107 433.58	18 107 392.	0.86
15 637 089.47	15 637 064.	0.45
7 013 550.23	7 013 535.3	0.79
-5 512 964.66	-5 512 952.2	0.45
2 461 373.71	2 461 370.6	0.75
-1 777,648.52	-1 777 644.5	0.76
1 357 863.87	1 357 860.4	0.74
-1,067 060.23	-1 067 058.2	0.38
407 361.43	407 360.94	

Les chiffres soulignés étant donnés incertains par Francis. Les résultats donnés par la méthode de synthèse sont donc excellents.

(V - Ex - 10)

$$\text{Soit } P = I + X^T Y$$

avec

$$X^T = [1 , 2 , -4 , 1 , -2 , 1]$$

$$Y^T = [-1 , 2 , 1 , 1 , 1 , 2]$$

et soit D la matrice diagonale de valeurs propres λ_i

$$\text{et } M = P^{-1} DP$$

λ_i exactes	$ \lambda_{i+1}/\lambda_i $	λ_i calculées (M.S)
12.4 + i 14.5	0.74	12.4001 + i 14.4994
9.9 + i 10.2	0.588	9.8997 + i 10.201
5.5 + i 6.3	0.565	5.50005 + i 6.2993
4.2 + i 2.2	0.51	4.2005 + i 2.2002
1.2 + i 2.1	0.413	1.1995 + i 2.0997
0.8 + i 0.6		0.799 997 + i 0.59999

La précision demandée était telle que

$$\frac{\|A^{(\epsilon)}\|^2}{\|A\|^2} \ll 10^{-15}$$

les résultats sont bons.

TABLEAU DES RESULTATS DES DIFFERENTS EXEMPLES UTILISES

Exemple n°		temps de calcul en secondes			N emplois QR		ordre de la matrice
		S	QR	M.S	QR	M.S	
II - Ex - 1	b	4	34.8	9.2	201	51	5
II - Ex - 2	b	6	>150	1.6	>1000	6	5
II - Ex - 3	a	12	2.1	1.6	11	5	5
IV - Ex - 2	a	21	5.6	3.1	15	5	7
V - Ex - 1	b	35.2	502.3	180.1	807	289	10
V - Ex - 2	a	9	2.9	2.4	10	6	6
V - Ex - 3	a	2	346.9	125.9	1462	531	6
V - Ex - 4	a	7	117.4	26.4	486	106	6
V - Ex - 5	a	62	305.9	62.5	334	64	12
V - Ex - 6	b	293.8	177.4	63.3	125	37	15
V - Ex - 7	c	>20'	918.4	159.9	390	55	20
II - Ex - 4		4	12.9	7	73	35	5
V - Ex - 8	a	17	109.6	32.6	339	98	7
V - Ex - 9	b	199	75	39.6	118	57	10
V - Ex - 10	b	10	22.2	4.8	90	17	6

7) Conclusion

Les exemples exposés, et d'autres, montrent que le gain de temps obtenu en appliquant l'accélération de la méthode de synthèse est non négligeable, si ces temps sont comparés à ceux donnés par QR. L'exemple le plus remarquable étant d'ailleurs II - Ex - 2 où QR ne converge pas mais où l'application de la méthode de Greenstadt fait que les valeurs propres sont obtenues très rapidement.

La précision sur les valeurs propres est dans la plupart des cas la même lorsque QR est employé seul ou lorsque QR est accéléré ce que l'on peut voir dans V - Ex - 3 lorsque le test d'arrêt $\|A_1^{(s)}\|^2 / \|A\|^2$ est le même pour les deux méthodes.

Le procédé (ξ^2) s'est montré excellent dès qu'il est employé, et il n'est d'ailleurs pas rare de passer de ξ à ξ^p avec $p > 2$ lorsque cette accélération est appliquée. Cependant, le procédé (ξ^3) n'a pas donné en général de bons résultats. Quelquefois, d'ailleurs la quantité $\|A_1^{(s)}\|$ a augmenté au lieu de décroître. Devant ce fait la procédure de la fin du chapitre ne tiendra pas compte du procédé (ξ^3).

Nous concluerons donc en préconisant l'accélération de QR par l'emploi de la méthode de synthèse, car elle conserve tous les avantages de la méthode QR en y ajoutant plusieurs non négligeables (gain de temps, et convergence dans le cas où il existe un couple de valeurs propres de même module).

(V ~ Prog. 4)

```

procedure VALPROP (B1, B2, VR, VC, N, EPS, NTØ, BOOL) ;
valeur N, EPS, NTØ ;
tableau B1, B2, VR, VC ; reel EPS ;
entier N, NTØ ; booleen BOOL ;
commentaire les valeurs propres VR [K] + i VC [K] (K = 1,2, ... N) de la
matrice B1 + i B2 à éléments complexes sont calculées par cette procé-
dure. Si au bout de NTØ tours la précision EPS n'est pas atteinte
BOOL = faux , vrai sinon ;

debut
  procedure HESSEN (B1, B2, N) ;
    voir au chapitre III
fin HESSEN ;

  procedure TRINODEG2 (A1, A2, X1, X2, TRUC) ;
    tableau A1, A2 ; reel X1, X2 ; booleen TRUC ;
    commentaire cette procédure calcule une racine X1 + i X2 de l'équa-
tion du second degré.
      
$$(A1[1]+iA2[1])X^2+(A1[2]+iA2[2])X+A1[3] + iA2[3] = 0 ;$$

    debut reel A, B, S, RHØ , THETA, R, Z, CØ, SI ;
      A := A1[2] * A1[2] - (A2[2] * A2[2] + 4 * A1[1] * A1[3])
        + 4 * A2[1] * A2[3] ;
      B := 2 * A1[2] * A2[2] - 4 * ( A1[1] * A2[3] + A2[1] * A1[3] ) ;
      S := 0.785 398 16 ; TRUC := faux ;
      RHØ := RAC2 (A * A + B * B) ;
      si ABS (B) > ABS(A) alors
        debut si ABS(A)/ABS(B) ≤ 10-35 alors
          debut THETA := SIGNE (B) * 2 * S ;
            allera ZINOK
          fin
        fin ;
      THETA := si A > 0 alors ARCTAN (B/A) sinon
        si ABS(A) = 0 alors 0.0 sinon ARCTAN(B/A) + 4 * S ;
      ZINOK : R := RAC2(RHØ) ; Z := 2 * (A1[1] * A1[1] + A2[1] * A2[1]) ;
      CØ := COS (THETA/2) ; SI := SIN (THETA/2) ;
      X1 := A1[1] * (-A1[2] + R * CØ) + A2[1] * (-A2[2] + R * SI) ;

```

```

si ABS (X1) > Z alors
  debut si Z / ABS (X1)  $\leq$  2.0  $10^{-19}$  alors
    debut TRUC := vrai ; allera ETIQ fin
  fin ;
  X1 := X1 / Z ;
  X2 := A2[1] * (A1[2] + R * CO) + A1[1] * (-A2[2] - R * SI) ;
  si ABS (X2) > Z alors
    debut si Z / ABS (X2)  $\leq$  2.0  $10^{-19}$  alors
      debut TRUC := vrai ; allera ETIQ fin
    fin ;
  X2 := X2 / Z ;
ETIQ :
fin TRINODEG2 ;
procedure GSTADT (B1, B2, N, Q, P) ;
  valeur N ; entier N, Q, P ; tableau B1, B2 ;
  debut
    reel BA1 , BA2 , B11, B12, B21, B22, D1, D2 ,
    E1, E2, A, B, Z, RHO, S, MADR, AC, C1, C2, X1, X2 ;
    entier I ; tableau W1, W2 [1:3] ; booleen TRUC ;
    W1[1] := B1 [Q,P] ; W2 [1] := B2 [Q,P] ;
    W1[2] := B1 [Q,Q] - B1 [P,P] ;
    W2[2] := B2 [Q,Q] - B2 [P,P] ;
    W1[3] := - B1 [P,Q] ; W2[3] := - B2[P,Q] ;
    si ABS (W1[1] * W1[1] + W2[1] * W2[1]) = 0 alors
      allera TERM ;
    TRINODEG2 (W1, W2, X1, X2, TRUC) ;
    si TRUC alors allera TERM ;
    MADR := X1 * X1 + X2 * X2 ;

```

```

      BELLE : AC := RAC2 (MADR/(1 + MADR)) ;
si ABS(AC) = 0.0 alors debut C1 := 1.0 ; C2 := 0.0 fin
  sinon debut C1 := AC X X1 / MADR ; C2 := -AC X X2 / MADR fin ;
  pour I := 1 pas 1 jusqua P-1 , P+1 pas 1 jusqua Q-1 ,
    Q + 1 pas 1 jusqua N faire
  debut
    D1 := AC X B1[P,I] + B1 [Q,I] X C1 + B2 [Q,I] X C2 ;
    D2 := AC X B2[P,I] - B1 [Q,I] X C2 + B2 [Q,I] X C1 ;
    E1 := AC X B1[Q,I] - B1 [P,I] X C1 + B2 [P,I] X C2 ;
    E2 := AC X B2[Q,I] - B1 [P,I] X C2 - B2 [P,I] X C1 ;
    B1 [P,I] := D1 ; B2 [P,I] := D2 ;
    B1 [Q,I] := E1 ; B2 [Q,I] := E2 ;
    D1 := AC X B1 [I,P] + B1 [I,Q] X C1 - B2 [I,Q] X C2 ;
    D2 := AC X B2 [I,P] + B1 [I,Q] X C2 + B2 [I,Q] X C1 ;
    E1 := AC X B1 [I,Q] - B1 [I,P] X C1 - B2 [I,P] X C2 ;
    E2 := AC X B2 [I,Q] + B1 [I,P] X C2 - B2 [I,P] X C1 ;
    B1 [I,P] := D1 ; B2 [I,P] := D2 ;
    B1 [I,Q] := E1 ; B2 [I,Q] := E2 ;
  fin ;
    D1 := AC X AC ; E1 := C1 X C1 - C2 X C2 ; E2 := C1 X C1 + C2 X C2 ;
    BA1 := - D1 X W1 [3] + AC X (C1 X W1 [2] + C2 X W2 [2]) - W1 [1] X E1
      - 2 X W2 [1] X C1 X C2 ;
    BA2 := - D1 X W2 [3] + AC X (C1 X W2 [2] - C2 X W1 [2]) - W2 [1] X E1
      + 2 X W1 [1] X C1 X C2 ;
    RHO := AC X (-W1 [3] X C1 + W2 [3] X C2 + W1 [1] X C1 + W2 [1] X C2) ;
    S := AC X (- W1 [3] X C2 - W2 [3] X C1 - W1 [1] X C2 + W2 [1] X C1) ;
    B11 := D1 X B1 [P,P] + RHO + B1 [Q,Q] X E2 ;
    B12 := D1 X B2 [P,P] + S + B2 [Q,Q] X E2 ;

```

$B_{21} := D_1 \times B_1 [Q,Q] - RHO + B_1 [P,P] \times E_2 ;$
 $B_{22} := D_1 \times B_2 [Q,Q] - S + B_2 [P,P] \times E_2 ;$
 $B_1 [P,Q] := BA_1 ; B_2 [P,Q] := BA_2 ; B_1 [P,P] := B_{11} ;$
 $B_2 [Q,Q] := B_{22} ; B_1 [Q,Q] := B_{21} ; B_2 [P,P] := B_{12} ;$
 $B_1 [Q,P] := B_2 [Q,P] := 0.0 ;$

TERM :

fin GSTADT ;

procédure NORSUP (B1, B2, N, N1, N2, P)

tableau B1, B2 ; réel N1, N2 ; entier N, P ;

début réel S,T,Z ; entier I, K, L ;

N1 := N2 := S := T := 0 ;

pour I := 1 pas 1 jusqua N ÷ 2 faire

début Z := B1 [2xI, 2xI-1] x B1 [2xI, 2xI-1]

+ B2 [2xI, 2xI-1] x B2 [2xI, 2xI-1] ;

Si Z ≥ S alors début S := Z ; K := 2 x I-1 fin ;

N1 := N1 + Z

fin ;

pour I := 1 pas 1 jusqua (N-1) ÷ 2 faire

début Z := B1 [2xI+1, 2xI] x B1 [2xI+1, 2xI]

+ B2 [2xI+1, 2xI] x B2 [2xI+1, 2xI] ;

Si Z ≥ T alors début T := Z ; L := 2 x I fin ;

N2 := N2 + Z

fin ;

P := Si T > S alors L sinon K

fin NORSUP ;

procédure ALGO QR (B1, B2, N)

----- (se reporter au chapitre IV)

fin ALGO QR ;

```

entier K, I, J, L, P, V, W ;
réel N1, N2, H1, NI ;
  HESSEN (B1, B2, N) ; H1 := 0.0 ;
  pour I := 1 pas 1 jusqua N faire
  pour J := 1 pas 1 jusqua N faire
    H1 := H1 + B1 [I,J] x B1 [I,J] + B2 [I,J] x B2 [I,J] ;
  L := 0 ;
  ITER : L := L+1 ;
  Si L > NTØ alors début BØØL := faux ; allera FINISH fin ;
  ALGØ QR (B1, B2, N) ;
  NØRSUP (B1, B2, N, N1, N2, P) ;
  Si (N1 + N2 - B1 [P+1,P] x B1 [P+1,P] - B2 [P+1,P] x B2 [P+1,P])/H1 ≤ EPS
  alors début
    si (P ÷ 2) x 2 ≠ P alors début V := 2 ;
      W := ENTIER (W/2)x2
    fin
    Sinon début V := 3 ;
      W := ENTIER ((W-1)/2)x2+1
    fin ;
    pour K := V pas 2 jusqua W faire
      GSTADT (B1, B2, M, K, K - 1) ;
    BØØL := vrai ; allera FINISH
  fin ;
  Si (N1 + N2)/ H1 > RAC2 (EPS) alors allera ITER ;
  Si N1 > N2 alors début V := 2 ; W := ENTIER (N/2) x 2 ;
    I := 3 ; J := ENTIER ((N-1)/2) x 2 + 1
  fin
  Sinon début V := 3 ; W := ENTIER ((N-1)/2) x 2+1 ;
    I := 2 ; J := ENTIER (N/2)x2
  fin ;

```

```
pour K := V pas 2 jusqua W faire  
    GSTADT (B1, B2, N, K, K-1) ;  
pour K := I pas 2 jusqua J faire  
    GSTADT (B1, B2, N, K, K-1) ;  
BØØL :=vrai ;  
  
FINISH : pour I := 1 pas 1 jusqua N faire  
    début VR [I] := B1 [I,I] ;  
        VC [I] := B2 [I,I]  
    fin ;  
  
fin VALPROP ;
```

.....
.....

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gastinel N. - Matrices du second degré et normes générales en analyse numérique linéaire. Public. Scientifique du Ministère de l'air S.D.I.T. - Paris (1962)
- [2] Greenstadt J. - A method for finding roots of arbitrary matrices. Math. Tables. Aids Comp. 9,47-52 (1955)
- [3] Greenstadt J. - Some numerical experiments in triangularizing matrices. Numerische Mathematik 4, 187 - 195 (1962)
- [4] Henrici P. - On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods.
J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 6 n°2 June 1958
- [5] Givens W. - Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form.
J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 6 n°1 /March 1958
- [6] Francis J.G.F. - The QR Transformation - A unitary analogue to the LR Transformation - Part. 1
Computer Journal 4. pp. 265 - 271 (1961-/62)
- [7] Wilkinson J.H. - The LR and QR algorithms
Ecole d'été d'analyse numérique 1964 (C.E.A.-E.D.F.)
- [8] Francis J.G.F. - The QR Transformation - A unitary analogue to the LR Transformation - Part. 2
Computer Journal 4 - pp. 332 - 345 (1961-/62)
- [9] Eberlein P.J. - A Jacobi- Like method for the automatic computation of eigenvalues and eigenvectors of an arbitrary matrix.
J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 10 n°1 -March 1962.

[10] Ostrowski - C.R. Académie des Sciences
(1951) 233 p 1559 - 1560

[11] Parodi M. - La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications. Gauthier-Villars (1959)

VU,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble

