



**HAL**  
open science

# Sur le calcul à la flexion des coques de révolution soumises à des champs de forces et de températures axisymétriques

Séverin Casacci

► **To cite this version:**

Séverin Casacci. Sur le calcul à la flexion des coques de révolution soumises à des champs de forces et de températures axisymétriques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1960. Français. NNT: . tel-00277667

**HAL Id: tel-00277667**

**<https://theses.hal.science/tel-00277667>**

Submitted on 7 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ordre :

# THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE D'INGENIEUR-DOCTEUR

par

S. CASACCI

Ingénieur A. et M.

---

— 1<sup>ère</sup> THESE —

SUR LE CALCUL A LA FLEXION DES COQUES DE REVOLUTION SOUMISES A DES  
CHAMPS DE FORCES ET DE TEMPERATURES AXISYMETRIQUES

— 2<sup>e</sup> THESE —

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le                      devant la Commission d'Examen

MM. KRAVTCHENKO, Président

KUNTZMANN

CRAYA

ANGLES D'AURIAC

Examineurs



N° D'ordre :

# THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE D'INGENIEUR-DOCTEUR

par

S. CASACCI

Ingénieur A. et M.

---

— 1<sup>ère</sup> THESE —

SUR LE CALCUL A LA FLEXION DES COQUES DE REVOLUTION SOUMISES A DES  
CHAMPS DE FORCES ET DE TEMPERATURES AXISYMETRIQUES

— 2<sup>e</sup> THESE —

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le                      devant la Commission d'Examen

MM. KRAVTCHENKO, Président

KUNTZMANN

CRAYA

ANGLES D'AURIAC

Examineurs



Doyen

M. MORET, Membre de l'Institut

Professeurs

- |                                                              |                                                                    |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| MM. MORET, Géologie et Minéralogie,<br>Membre de l'Institut, | MM. BARBIER, Géologie appliquée,<br>SANTON, Mécanique des Fluides, |
| NEEL, Physique Expérimentale,<br>Membre de l'Institut,       | OZENDA, Botanique,                                                 |
| PARDE, Hydrologie fluviale,                                  | CHABAUTY, Calcul Différentiel et<br>Intégral,                      |
| DORIER, Zoologie,                                            | FALLOT, Physique Industrielle,                                     |
| HELLMANN, Chimie,                                            | GALVANI, Mathématiques,                                            |
| KRAVTCHENKO, Mécanique Ration-<br>nelle,                     | TRAYNARD, Chimie,                                                  |
| BENOIT, Radioélectricité,                                    | SOUTIF, Physique,                                                  |
| CHENE, Chimie Papetière,                                     | REULOS, Physique,                                                  |
| NOBECOURT, Micrographie Pape-<br>tière,                      | CRAYA, Hydrodynamique,                                             |
| WEIL, Physique,                                              | REEB, Mathématiques,                                               |
| FELICI, Electrostatique,                                     | BESSON, Electrochimie,                                             |
| KUNTZMANN, Mathématiques<br>appliquées,                      | WOLFERS, Physique générale,                                        |
|                                                              | Mme POTIER, Botanique,                                             |
|                                                              | LYNTON, Professeur associé,                                        |
|                                                              | SOKOLOWSKY, Professeur associé.                                    |

Professeurs sans chaire

- |                                                                |                                                              |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| MM. SILBER, Mécanique des Fluides,<br>MOUSSIEGT, Electronique, | MM. GALISSOT, Mécanique,<br>MICHEL, Géologie et Minéralogie, |
| Mle LUTZ, Mathématiques,                                       | DESSAUX, Zoologie, (Phys. Animale)                           |

Maîtres de Conférences

- |                                                           |                                                        |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| MM. AYANT, Physique théorique,<br>BONNIER, Chimie,        | MM. PERRET, Servomécanismes,<br>DEPASSEL, Mécanique,   |
| BOUCHEZ, Physique Nucléaire,<br>PILLET, Electrotechnique, | Mme SOUTIF, Physique,<br>DEBELMAS, Géologie,           |
| LLIBOUTRY, Physique,                                      | Mme KOFLER, Botanique,<br>COHEN, Electrotechnique,     |
| BARBIER J. C., Physique,                                  | Mme BARBIER, Electrochimie,<br>BRISSONNEAU, Physique,  |
| BLAMBERT, Calcul Numérique,<br>VAILLANT, Zoologie,        | ARNAUD, Chimie,<br>VAUQUOIS, Mathématiques,            |
| PAUTENET, Electrotechnique<br>DREYFUS, Thermodynamique,   | ROBERT A., Chimie Papetière,<br>GERBER, Mathématiques, |
| Mle NAIM, Mathématiques,<br>BUYLE-BODIN, Electronique,    |                                                        |

Secrétariat Principal : M. BURNET

Secrétaire : M. BICHET



PREMIERE THESE

CALCUL A LA FLEXION  
DES  
COQUES DE REVOLUTION  
SOUMISES A DES CHAMPS DE  
FORCES ET DE TEMPERATURES  
AXISYMETRIQUES

RESOLUTION ANALYTIQUE A L'AIDE  
DES FONCTIONS ORTHOGONALES

RESOLUTION NUMERIQUE A L'AIDE  
DES EQUATIONS INTEGRALES





AVANT - P R O P O S

La détermination des contraintes et des déformations d'un corps élastique soumis à des champs de forces et de températures, objet de nombreuses études de mathématique appliquée, présente un intérêt pratique considérable.

Dès l'origine de cette étude, les chercheurs se sont heurtés à de grandes difficultés, bien supérieures en général à celles rencontrées dans d'autres problèmes aux limites pour lesquels l'existence d'un potentiel simplifie beaucoup l'analyse mathématique, surtout si les solutions des équations différentielles et les conditions aux limites s'expriment de façon relativement simple à l'aide du potentiel.

Dans la théorie de l'élasticité il n'existe en général pas de tels théorèmes généraux et seuls quelques problèmes à trois dimensions peuvent être traités. Les problèmes d'élasticité à deux dimensions, bien que complexes, permettent cependant d'obtenir des solutions utilisables pratiquement. L'étude des corps de forme cylindrique, des plaques et des coques, etc... se ramène, moyennant certaines hypothèses que l'expérience justifie, à des problèmes d'élasticité à deux dimensions.

La théorie des coques, domaine de l'élasticité à deux dimensions, revient à l'étude de la déformation de leur surface moyenne. Cette théorie, d'une grande complexité, n'aboutit à des résultats pratiquement utilisables que dans des cas très particuliers. L'étude de la flexion des coques de révolution chargées axisymétriquement, beaucoup plus simple puisqu'elle ne comporte qu'une seule variable, demeure un problème ardu même si l'on suppose les charges indépendantes du temps. Le grand nombre de recherches, motivées par l'étendue des applications tant en génie civil, en constructions aéronautique et navale qu'en construction mécanique, fournit déjà des résultats très utiles. Il n'existe cependant pas une méthode générale analytique ou numérique permettant de résoudre le problème de la flexion des coques de révolution chargées axisymétriquement. La miraculeuse apparition dans les entreprises de quelque importance des machines à calculer électroniques, incite les ingénieurs d'études à repenser des problèmes réputés jusqu'ici inaccessibles par le calcul.

Notre étude se divise en deux parties, dans la première nous traitons de la résolution analytique, dans la seconde nous exposons une méthode de résolution numérique applicable à toutes les coques de révolution d'épaisseur variable.

La résolution analytique est obtenue par des développements en série de fonctions propres. Les équations de base des coques de révolution chargées axisymétriquement se ramènent à un système de deux équations différentielles du second ordre. Ce système se met sous la forme :

$$L u = A u + B v + C$$

$$L v = D u + E v + F$$

où  $u$  et  $v$  représentent respectivement les deux fonctions inconnues. On peut

choisir par exemple le cisaillement et la déformation angulaire.  $L$  est un opérateur du second ordre,  $A, B, C, D, E$  et  $F$  des fonctions connues. Les conditions aux limites sont de la forme  $u' + a u = 0$  et  $v' + b v = 0$  sur les deux parallèles qui limitent la coque. Par des changements de variables simples, ces conditions se réduisent à :  $u = v = 0$  sur les parallèles limites. Connaissant les fonctions et les valeurs propres de l'équation  $L u + \lambda f u = 0$  (où  $f$  est une "fonction poids") on peut dans de nombreux cas résoudre les équations de base en développant les inconnues  $u$  et  $v$  en séries de fonctions propres de cette équation différentielle. Nous avons traité ici analytiquement le cas des coques coniques et sphériques d'épaisseur constante et le cas des coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable.

La résolution numérique exposée dans la deuxième partie de notre étude consiste à transformer les équations de base en une équation ou en un système d'équations intégrales de FREDHOLM. Cette méthode simplifie et diminue beaucoup les calculs par rapport aux méthodes classiques. Elle rend en outre possible l'estimation des erreurs. Les calculs numériques effectués notamment sur les coques sphériques et les coques toriques montrent que la précision est très bonne à partir d'un nombre d'équations linéaires assez faible. La résolution numérique s'applique aussi aux coques d'épaisseur variable dont l'étude analytique devient rapidement inextricable, ainsi qu'aux coques de révolution dont la méridienne n'est définie que graphiquement.

Ces dix dernières années, l'utilisation des coques minces en construction soudée s'est développée très rapidement dans le domaine des turbo-machines puissantes, en particulier dans les ensembles qui supportent des charges importantes et dans ceux qui doivent assurer le guidage du fluide moteur. Leur utilisation judicieuse conduit à des réductions importantes de poids et de prix. L'économie résultant de l'emploi des coques soudées est d'autant plus sensible que les formes adoptées sont simples et les qualités des matériaux utilisées au mieux. L'emploi de coques minces nécessite en particulier la connaissance parfaite des efforts qui prennent naissance aux liaisons et qui peuvent varier dans de grandes proportions suivant la disposition et la rigidité relatives des voiles et des anneaux de renfort. L'étude précise et détaillée des liaisons permet en général de supprimer pratiquement les contraintes de flexion au droit de ces liaisons.

Depuis quelques années, nous avons été chargé en tant que chef des études turbines des Etablissements NEYRPIIC, de l'étude de ces problèmes. Les contacts fréquents que nous avons eus avec M. le Professeur KUNTZMANN pour différents problèmes de calcul analogique nous ont permis de lui demander son avis sur les travaux que nous entreprenons. Il a bien voulu y voir le sujet d'une thèse et assumer la direction de nos recherches.

Nous remercions vivement M. le Professeur KRAVTCHEKOV de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté la présidence de la Commission d'examen.

Nous avons plaisir à retrouver dans le Jury MM. CRAYA et ANGLES D'AURIAC avec qui nous avons eu des relations d'ingénieurs amicales et fructueuses et qui, nous nous en réjouissons, n'ont pas cessé depuis que M. CRAYA est Professeur à l'Université de GRENOBLE.

Nous nous devons ici d'évoquer la mémoire de M. GARIEL qui avait encouragé et suivi nos recherches avec tant de bienveillance et, de remercier la Direction des Etablissements NEYRPIC d'avoir bien voulu nous permettre de publier ces résultats.



NOTATIONS GENERALES ET CONVENTIONS DE SIGNES (Voir Fig. 1)

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  vecteurs unitaires des lignes de coordonnées

$\vec{a}_1$  même sens que les arcs croissants ayant le sommet pour origine

$\vec{a}_2$  même sens que  $\theta$  croissants, rotation dextorsum autour de l'axe de révolution de vecteur unitaire  $\vec{a}_1$  identique au vecteur  $\vec{a}_3$  au sommet de la coque.

$\vec{a}_3$  même sens que la normale extérieure

$r_1$  premier rayon principal de courbure en P ; rayon de courbure de la méridienne en P.

$r_2$  deuxième rayon principal de courbure en P, rayon de courbure de la section normale ayant  $\vec{a}_2$  pour tangente en P

$r_0$  rayon d'un parallèle

$\varphi$  angle de la normale en P avec l'axe de révolution

s arc de méridien ayant pour origine le sommet de la coque

$\theta$  longitude de P par rapport au méridien origine

z distance d'un point de la coque à sa surface moyenne

e épaisseur de la coque, fonction de  $\varphi$ ,  $e_0$  épaisseur de référence

$h = \frac{e}{e_0}$  épaisseur relative

$\nu$  coefficient de Poisson

E module d'élasticité

$$D = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{rigidité de flexion}$$

$$D_0 = \frac{E e_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{rigidité de flexion de référence}$$

$$D_N = \frac{E e}{1-\nu} \quad \text{rigidité de traction}$$

$$D_{0N} = \frac{E e_0}{1-\nu} \quad \text{rigidité de traction de référence}$$

## VIII

- $\sigma_\varphi$  contrainte normale agissant sur un élément de parallèle défini par  $\varphi$  et en un point de la coque distant de  $z$  de la surface moyenne
- $N$  effort normal agissant sur un élément unité de parallèle
- $\sigma_\theta$  contrainte normale agissant sur un élément de méridien défini par  $\theta$  et en un point de la coque distant de  $z$  de la surface moyenne
- $n$  effort normal agissant sur un élément unité de méridien
- $Q$  effort de cisaillement agissant sur un élément unité de parallèle
- $M$  moment de flexion agissant sur un élément unité de parallèle
- $m$  moment de flexion agissant sur un élément unité de méridien
- $x = r_2 Q$  effort de cisaillement par radian
- $F_t$  effort unitaire tangentiel, positif s'il a même sens que  $\vec{a}_1$  au point d'application
- $F_n$  effort unitaire normal, pression positive si elle a même sens que  $\vec{a}_3$  au point d'application
- $T_m$  température sur la surface moyenne de la coque
- $\tau$  gradient de température suivant l'épaisseur de la coque  $\tau = \frac{T_e - T_i}{2}$
- $T_e$  température sur la paroi extérieure de la coque
- $T_i$  température sur la paroi intérieure de la coque
- $T = T_m + \tau z$  température en un point quelconque de la coque
- $\alpha$  coefficient de dilatation du matériau constituant la coque
- $\epsilon_\varphi$  allongement relatif en un point du méridien de la surface moyenne
- $(\epsilon_\varphi)_z$  allongement méridien relatif en un point de la coque défini par  $\varphi$  et  $z$
- $\epsilon_\theta$  allongement relatif d'un parallèle de la surface moyenne
- $(\epsilon_\theta)_z$  allongement relatif le long d'un parallèle en un point de la coque défini par  $\theta$  et  $z$
- $\rho_\varphi$  variation de courbure du méridien de la surface moyenne
- $\rho_\theta$  variation de courbure du parallèle de la surface moyenne
- $\rho_\tau = \alpha \tau$  variation de courbure due au gradient de température  $\tau$
- $v$  déplacement tangentiel, positif s'il a même sens que  $\vec{a}_1$
- $w$  déplacement normal, positif s'il a même sens que  $\vec{a}_3$
- $y$  déformation angulaire, angle des tangentes au méridien avant et après déformation

Les variables efforts et déformations affectés des indices 1 ou 2 se rapportent au parallèle défini par  $\varphi = \varphi_1$  ou  $\varphi = \varphi_2$

### CONVENTIONS DE SIGNES

Pour les sections normales  $\varphi = \text{cte}$  et lorsque l'on considère la matière située du côté des  $\varphi$  négatifs,

- les efforts normaux sont positifs s'ils ont même sens que  $\vec{a}_1$ , ce sont en ce cas des tractions
- les efforts de cisaillement sont positifs s'ils ont même sens que  $\vec{a}_3$
- le sens positif des moments est celui de  $\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1 = \vec{a}_2$

Pour les sections normales  $\theta = \text{cte}$  et lorsque l'on considère la matière située du côté des  $\theta$  négatifs :

- les efforts normaux ont le sens de  $\vec{a}_2$
- les moments ont le sens de  $\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_2 = -\vec{a}_1$

Sur les sections normales  $\varphi = \text{cte}$  ou  $\theta = \text{cte}$  il convient de prendre les sens opposés si l'on considère la matière située du côté des  $\varphi$  ou  $\theta$  positifs.

Les conventions de signes adoptées supposent que la méridienne ne présente pas de point d'inflexion.

### FIGURES, COURBES, TABLEAUX et REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Les figures, courbes et tableaux sont placés à la fin du chapitre auquel ils se rapportent. Ils sont repérés par des nombres dont le premier chiffre désigne le chapitre, le nombre formé par les autres chiffres donne le numéro d'ordre.

Le nombre repère est précédé de Fig, Cb ou Tb suivant qu'il se rapporte à une Figure, une Courbe ou un Tableau :

Ex : Fig. 2.6 signifie 6<sup>ème</sup> figure du chapitre 2.

Les références bibliographiques sont notées par des nombres entre parenthèses. Se reportant en fin d'ouvrage, on trouve en face du nombre la référence exacte.



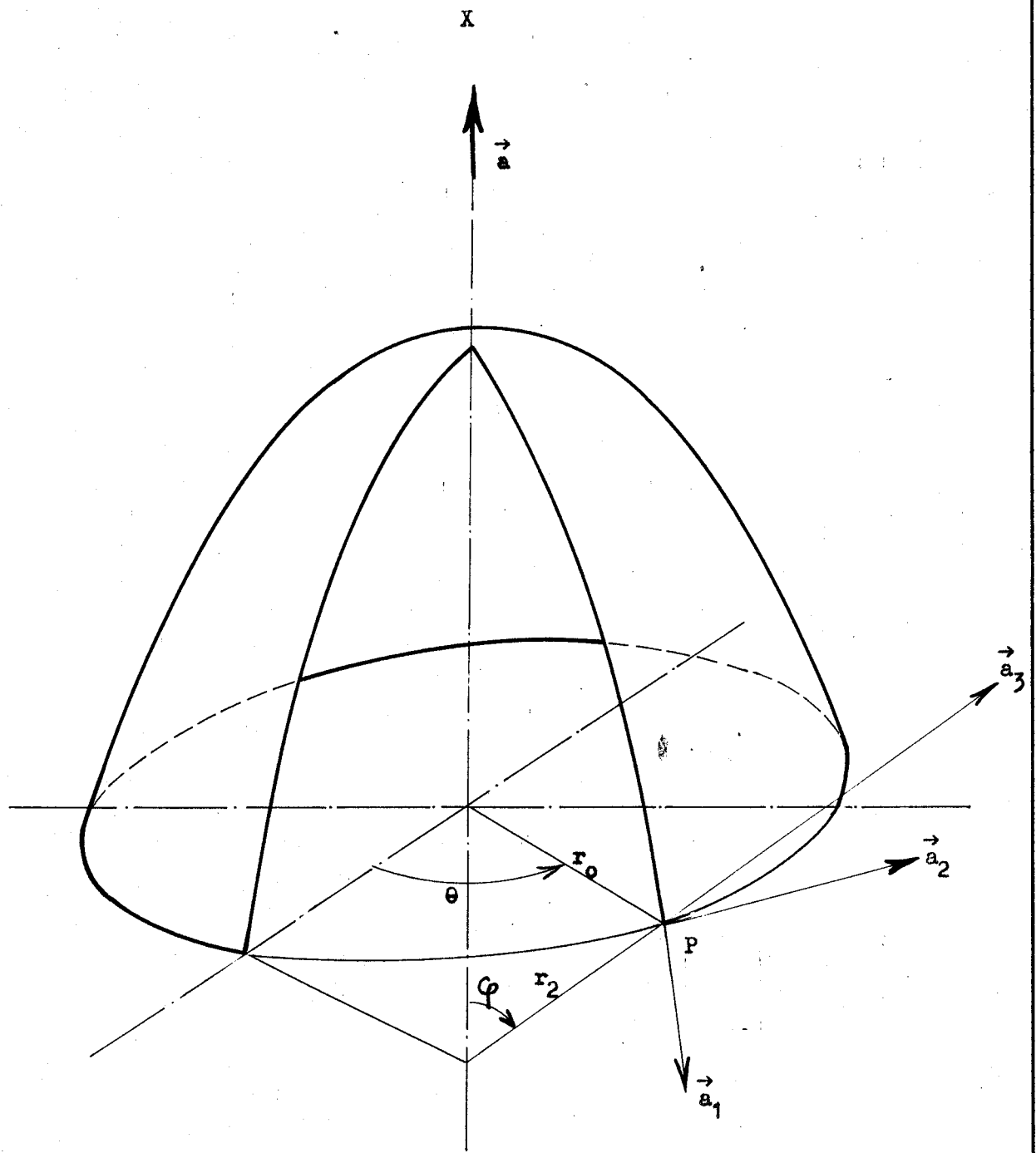


Fig. 1

# PREMIERE PARTIE

## RESOLUTION ANALYTIQUE A L'AIDE DES FONCTIONS ORTHOGONALES



## CHAPITRE PREMIER

1. ETABLISSEMENT ET TRANSFORMATION DES EQUATIONS DE BASE

Nous nous proposons d'examiner le problème de la flexion des coques de révolution chargées axismétriquement. Nous étudierons les coques d'épaisseur constante et plus généralement les coques dont la rigidité varie le long de la méridienne.

Nous analyserons principalement les cas de forces (volumiques ou surfaciques) réparties sur la coque ou sur les deux parallèles qui la limitent ; nous envisagerons aussi le problème des contraintes et des déformations provoquées par des champs de température axisymétriques.

Les calculs seront basés sur la théorie classique de la flexion des enveloppes minces qui reposent sur les hypothèses suivantes :

- l'épaisseur de la coque est faible par rapport aux autres dimensions, les rayons de courbure par exemple,
- les sections normales à la surface moyenne non déformée restent normales à la surface moyenne de la coque après déformation,
- les contraintes normales à la coque sont négligeables par rapport aux autres contraintes,
- les déformations thermiques varient linéairement suivant l'épaisseur de la coque.

Ces hypothèses ramènent l'étude de la déformation de l'enveloppe à celle de sa surface moyenne.

1.1 Equations d'équilibre

## 1.1.1 Equation d'équilibre des efforts

Examinons l'équilibre d'un anneau élémentaire limité par deux parallèles infiniment voisins  $\varphi$  et  $\varphi + d\varphi$  (Voir Fig. 1.1)

La relation vectorielle :

$$d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_0^{2\pi} (\vec{a}_1 N + \vec{a}_3 Q) r_0 d\theta + r_0 r_1 d\varphi \int_0^{2\pi} (\vec{a}_1 F_t + \vec{a}_3 F_n) d\theta = 0$$

exprime que la résultante des efforts appliqués à l'anneau est nulle. Si nous remarquons que  $\vec{a} \cdot \vec{a}_1 = -\sin \varphi$  et que  $\vec{a} \cdot \vec{a}_3 = \cos \varphi$ , la projection sur le vecteur unitaire  $\vec{a}$  de l'axe de révolution de la coque de la relation vectorielle

ci-dessus donne la relation scalaire :

$$\frac{d}{d\varphi} r_0 (N \sin \varphi - Q \cos \varphi) + r_0 r_1 (F_t \sin \varphi - F_n \cos \varphi) = 0 \quad 1.1$$

Considérons à présent l'équilibre d'un demi-anneau (Voir Fig. 1.2). La résultante des efforts appliqués aux parallèles et à la surface latérale s'exprime par :

$$d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_0^\pi (\vec{a}_1 N + \vec{a}_3 Q) r_0 d\theta + r_0 r_1 d\varphi \int_0^\pi (\vec{a}_1 F_t + \vec{a}_3 F_n) d\theta$$

Désignons par  $-\vec{a}_2(0)$  et  $\vec{a}_2(\pi)$  les vecteurs unitaires normaux aux sections méridiennes définies respectivement par  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  l'équilibre du demi-anneau exige que :

$$d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_0^\pi (\vec{a}_1 N + \vec{a}_3 Q) r_0 d\theta + r_0 r_1 d\varphi \int_0^\pi (\vec{a}_1 F_t + \vec{a}_3 F_n) d\theta + \left[ -\vec{a}_2(0) + \vec{a}_2(\pi) \right] n r_1 d\varphi = 0$$

Sachant que  $-\vec{a}_2(0) \cdot \vec{a}_2(\pi) = 1$ ,  $\vec{a}_2(\pi) \cdot \vec{a}_1 = -\cos \varphi \sin \theta$ ,  $\vec{a}_2(\pi) \cdot \vec{a}_3 = -\sin \varphi \sin \theta$  et que  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$ , la projection sur  $\vec{a}_2(\pi)$  de la relation vectorielle ci-dessus donne la relation scalaire :

$$\frac{d}{d\varphi} r_0 (N \cos \varphi + Q \sin \varphi) + r_0 r_1 (F_t \cos \varphi + F_n \sin \varphi) - n r_1 = 0 \quad 1.2$$

### 1.1.2 Equation d'équilibre des moments (Fig. 1.3)

Désignons par  $\vec{a}_1(0)$  et  $\vec{a}_1(\pi)$  les vecteurs unitaires tangents aux deux arcs de méridien qui limitent le demi-anneau en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . L'équilibre du demi-anneau exige que la résultante des moments soit nulle. Tenant compte des conventions de signes relatives aux moments  $m$  agissant sur les coupes méridiennes, nous obtenons donc la relation vectorielle :

$$d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_0^\pi \vec{a}_2 m r_0 d\theta - r_1 r_0 d\varphi \int_0^\pi \vec{a}_2 Q d\theta + \left[ \vec{a}_1(0) - \vec{a}_1(\pi) \right] m r_1 d\varphi = 0$$

Appelons  $\vec{b}$  le vecteur unitaire de la ligne joignant les centres des deux sections méridiennes (Voir Fig. 1.3). Sachant que :

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{b} = \sin \theta$$

$$\vec{a}_1(0) \cdot \vec{b} = -\cos \varphi \quad \vec{a}_1(\pi) \cdot \vec{b} = \cos \varphi$$

et que  $\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2$

par projection sur  $\vec{b}$  la relation vectorielle ci-dessus donne la relation scalaire :

$$\frac{d}{d\varphi} (r_0 \theta) - m r_1 \cos \varphi - Q r_1 r_0 = 0 \quad 1.3$$

## 1.2 Détermination des allongements unitaires et des variations de courbure

### 1.2.1 Allongements unitaires de la surface moyenne (Voir Fig. 1.4)

Le point P de la coque non chargée vient en P' après déformation :

$$O \vec{P}' = O \vec{P} + a_1 \vec{v} + a_3 \vec{w} \quad 1.4$$

Le point P<sub>1</sub> voisin de P et tel que  $\vec{P} \vec{P}_1 = a_1 r_1 d\varphi$  vient en P'<sub>1</sub> après déformation.

$$O \vec{P}'_1 = O \vec{P}' + a_1 (v + dv) - v a_3 d\varphi + a_3 (w + dw) + w a_1 d\varphi \quad 1.5$$

On a donc :

$$P \vec{P}'_1 = P \vec{P}_1 + a_1 (dv + w d\varphi) + a_3 (dw - v d\varphi) \quad 1.6$$

Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, l'allongement unitaire du méridien en P s'exprime par :

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \left( \frac{dv}{d\varphi} + w \right) \quad 1.7$$

L'allongement unitaire d'un parallèle s'écrit d'autre part :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r_0} (w \sin \varphi + v \cos \varphi)$$

où encore :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (u + v \cotg \varphi) \quad 1.8$$

### 1.2.2 Variations de courbure

La rotation de la tangente à la méridienne en P s'écrit d'après 1.6 :

$$y = \frac{dw}{r_1 d\varphi} - \frac{v}{r_1} \quad 1.9$$

Le changement de courbure le long du méridien s'exprime donc par :

$$\rho_\varphi = -\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dw}{r_1 d\varphi} - \frac{v}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1} \frac{dy}{d\varphi} \quad 1.10$$

Considérons Fig. 1.5 la déformation d'un anneau élémentaire de centre P. Cette déformation se décompose en une dilatation qui amène le centre P en P' et une rotation autour de P. La translation le long de l'axe de révolution de la coque est un déplacement pur.

Seule la rotation provoquée par des couples de torsion uniformément répartis le long de l'anneau entraîne une flexion pure dans la section méridienne de l'anneau.

Dans la variation totale de courbure définie par :

$$\frac{\sin(\varphi - \gamma)}{r_0 + \Delta r_0} - \frac{\sin \varphi}{r_0}$$

égale à des infiniment petits près à :

$$-\frac{\Delta r_0}{r_0^2} - \frac{\gamma \cotg \varphi}{r_2}$$

le deuxième terme seul correspond à une flexion uniforme des sections méridiennes de l'anneau.

La variation de courbure d'un parallèle due à la flexion s'exprime donc par :

$$\rho_\theta = -\frac{\gamma \cotg \varphi}{r_2} \quad 1.11$$

### 1.3 Relation entre les contraintes et les déformations

Les allongements unitaires en un point z de la coque se définissent par :

$$(\varepsilon_\varphi)_z = \varepsilon_\varphi + z \rho_\varphi \quad 1.12$$

$$(\varepsilon_\theta)_z = \varepsilon_\theta + z \rho_\theta \quad 1.13$$

Les relations exprimant la loi de Hooke s'écrivent :

$$(\varepsilon_{\varphi})_z = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \nu \sigma_{\theta}) + \alpha T \quad 1.14$$

$$(\varepsilon_{\theta})_z = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_{\varphi}) + \alpha T \quad 1.15$$

qui par intégration de  $-\frac{e}{2}$  à  $\frac{e}{2}$  le long de l'épaisseur se transforment en :

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E e} (N - \nu n) + \alpha T_m \quad 1.16$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E e} (n - \nu N) + \alpha T_m \quad 1.17$$

inversement :

$$N = D_N \left[ \varepsilon_{\varphi} + \nu \varepsilon_{\theta} - \alpha(1 + \nu) T_m \right] \quad 1.18$$

$$n = D_N \left[ \varepsilon_{\theta} + \nu \varepsilon_{\varphi} - \alpha(1 + \nu) T_m \right] \quad 1.19$$

Par intégration de  $z(\varepsilon_{\varphi})_z$  et  $z(\varepsilon_{\theta})_z$  le long de l'épaisseur de  $-\frac{e}{2}$  à  $\frac{e}{2}$  nous obtenons :

$$\rho_{\varphi} - \rho_{\tau} = \frac{1}{D} (M - \nu m) \quad 1.20$$

$$\rho_{\theta} - \rho_{\tau} = \frac{1}{D} (m - \nu M) \quad 1.21$$

et inversement :

$$M = D \left[ \rho_{\varphi} + \nu \rho_{\theta} - (1 + \nu) \rho_{\tau} \right] \quad 1.22$$

$$m = D \left[ \rho_{\theta} + \nu \rho_{\varphi} - (1 + \nu) \rho_{\tau} \right] \quad 1.23$$

portant dans 1.22 et 1.23 les valeurs des variations de courbure données par 1.10 et 1.11, il vient :

$$M = -D \left[ \frac{1}{r_1} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{\nu}{r_2} y \cotg \varphi + \alpha(1 + \nu) \tau \right] \quad 1.24$$

$$m = -D \left[ \frac{1}{r_2} y \cotg \varphi + \frac{\nu}{r_1} \frac{dy}{d\varphi} + \alpha(1 + \nu) \tau \right] \quad 1.25$$



#### 1.4 Transformation des équations de base

L'équation d'équilibre des moments 1.3 s'écrit aussi :

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 M) + (M r_2 - m r_1) \cotg \varphi = Q r_2 r_1 = x r_1$$

Après introduction des valeurs de  $M$  et  $m$  données par 1.24 et 1.25, on obtient la première équation de base :

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi + \frac{3 r_2}{e r_1} \frac{de}{d\varphi} \right] \frac{dy}{d\varphi} \\ - \left[ \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi + v - \frac{3 v}{e} \cotg \varphi \frac{de}{d\varphi} \right] y \\ = - \frac{x r_1}{D} - \alpha r_2 (1 + v) \left( \frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{3\tau}{e} \frac{de}{d\varphi} \right) \end{aligned} \quad 1.26$$

Les formules 1.7 et 1.8 s'écrivent encore :

$$r_1 \varepsilon_\varphi = \frac{dv}{d\varphi} + w = \frac{r_1}{Ee} (N - v n) + \alpha r_1 T_m \quad 1.27$$

$$r_2 \varepsilon_\theta = w + v \cotg \varphi = \frac{r_2}{Ee} (n - v N) + \alpha r_2 T_m \quad 1.28$$

d'où :

$$\begin{aligned} (r_1 \varepsilon_\varphi - r_2 \varepsilon_\theta) \cotg \varphi = \frac{dv}{d\varphi} \cotg \varphi - v \cotg^2 \varphi = \frac{1}{Ee} \left[ r_1 (N - v n) - r_2 (n - v N) \right. \\ \left. + Ee \alpha (r_1 - r_2) T_m \right] \cotg \varphi \end{aligned} \quad 1.29$$

En retranchant à la dérivée de 1.28 l'expression 1.29, on obtient :

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 \varepsilon_\theta) - (\varepsilon_\varphi r_1 - \varepsilon_\theta r_2) \cotg \varphi = \frac{dw}{d\varphi} - v = r_1 y \quad 1.30$$

Si l'on tient compte de la relation :

$$(r_1 - r_2) \cotg \varphi = \frac{dr_2}{d\varphi} \quad 1.31$$

l'équation 1.30 se transforme en :

$$\frac{d}{d\varphi} r_2 (n - v N) - \frac{e'}{e} r_2 (n - v N) - \left[ r_1 (N - v n) - r_2 (n - v N) \right] \cotg \varphi$$

$$= Ee \left[ r_1 y - \alpha r_2 \frac{dT_m}{d\varphi} \right] \quad 1.32$$

En intégrant l'équation d'équilibre 1.1, on a :

$$N = Q \cotg \varphi - \frac{S + A}{r_0 \sin \varphi} \quad 1.33$$

où  $S = \int r_0 r_1 (F_t \sin \varphi - F_n \cos \varphi) d\varphi \quad 1.34$

et A une constante d'intégration dépendant des conditions aux limites.  
L'expression 1.33 s'écrit encore :

$$N = \frac{x}{r_2} \cotg \varphi - \frac{S + A}{r_2 \sin^2 \varphi} \quad 1.35$$

Remplaçant dans la deuxième équation d'équilibre 1.2 N par sa valeur donnée par 1.35, il vient :

$$n = \frac{1}{r_1} \frac{dx}{d\varphi} + r_2 F_n + \frac{S + A}{r_1 \sin^2 \varphi} \quad 1.36$$

Portant dans 1.32 les expressions de N et n, on obtient la deuxième équation de base :

$$\frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi - \frac{r_2}{e r_1} \frac{de}{d\varphi} \right] \frac{dx}{d\varphi}$$

$$+ \left[ v \left( 1 + \frac{1}{e} \frac{de}{d\varphi} \cotg \varphi \right) - \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi \right] x$$

$$= - \frac{S + A}{\sin^2 \varphi} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{1}{e} \left( \frac{r_2}{r_1} + v \right) \frac{de}{d\varphi} + \left( \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) \cotg \varphi \right]$$

$$- \frac{d}{d\varphi} (r_2^2 F_n) + \frac{r_2^2 F_n}{e} \frac{de}{d\varphi} - r_1 r_2 F_t \left( \frac{r_2}{r_1} + v \right)$$

$$+ Ee \left( r_1 y - \alpha r_2 \frac{dT_m}{d\varphi} \right) \quad 1.37$$

Dans le cas où l'on n'étudie que les flexions provoquées par des gradients de température, la première équation de base reste inchangée, tandis que la deuxième équation de base devient :

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi - \frac{r_2}{e r_1} \frac{de}{d\varphi} \right] \frac{dx}{d\varphi} \\ + \left[ \nu \left( 1 + \frac{1}{e} \frac{de}{d\varphi} \cotg \varphi \right) - \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi \right] x \\ = Ee \left( r_1 y - \alpha r_2 \frac{dT_m}{d\varphi} \right) \end{aligned} \quad 1.37'$$

Posons  $h = \frac{e}{e_0}$  où  $e_0$  désigne l'épaisseur au droit du parallèle  $\varphi = \varphi_0$  et effectuons les changements de variables :

$$x = X f \quad \text{et} \quad y = Y g \quad 1.38$$

avec :

$$f = \exp - \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} - \frac{h'}{h} d\varphi = h^{1/2}$$

$$g = \exp - \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} 3 \frac{h'}{h} d\varphi = h^{-3/2} \quad 1.39$$

ce qui entraîne :

$$f'/f = \frac{1}{2} h'/h \quad \text{et} \quad g'/g = -\frac{3}{2} h'/h \quad 1.40$$

Les équations 1.26 et 1.37 deviennent en considérant la température de la coque constante.

$$L Y + (1 - \nu) Y \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} - \frac{3}{2} \left[ \frac{r_2}{r_1} (h'/h)' + \frac{3}{2} \frac{r_2}{r_1} (h'/h)^2 + \left[ (r_2/r_1)' + (r_2/r_1 - 2\nu) \cotg \varphi \right] \cdot \frac{h'}{h} \right] Y \sin \varphi \\ = - \frac{r_1 \sin \varphi}{D_0 h} X \end{aligned} \quad 1.41$$

$$\begin{aligned}
& L X + (1 + \nu) X \sin \varphi \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{r_2}{r_1} (h'/h)' - \frac{1}{2} \frac{r_2}{r_1} (h'/h)^2 + \left[ (r_2/r_1)' + (r_2/r_1 + 2\nu) \cotg \varphi \right] \frac{h'}{h} \right] X \sin \varphi \\
& = - \frac{S + A}{h^{1/2} \sin \varphi} \left[ (r_2/r_1)' + (r_1/r_2 - r_2/r_1) \cotg \varphi - (r_2/r_1 + \nu) \frac{h'}{h} \right] \\
& - \frac{\sin \varphi}{h^{1/2}} \left[ (r_2^2 F_n)' - r_2^2 F_n \frac{h'}{h} + r_1 r_2 (r_2/r_1 + \nu) F_t \right] \\
& + \frac{E e_0 r_1}{h} Y \sin \varphi \tag{1.42}
\end{aligned}$$

Dans ces deux équations, l'opérateur L se définit par :

$$L(\cdot) = \frac{d}{d\varphi} \left( r_2/r_1 \frac{d(\cdot)}{d\varphi} \sin \varphi \right) - (r_1/r_2 \cotg^2 \varphi + 1) \sin \varphi (\cdot) \tag{1.43}$$

Pour un champ de température sans force extérieure, 1.41 et 1.42 deviennent :

$$\begin{aligned}
& L Y + (1 - \nu) Y \sin \varphi \\
& - \frac{3}{2} \left[ \frac{r_2}{r_1} (h'/h)' + \frac{3}{2} \frac{r_2}{r_1} (h'/h)^2 + \left[ (r_2/r_1)' + (r_2/r_1 - 2\nu) \cotg \varphi \right] \frac{h'}{h} \right] Y \sin \varphi \\
& = - \frac{r_1 \sin \varphi}{D_0 h} X - \alpha r_2 (1 + \nu) h^{3/2} \left( \frac{dr}{d\varphi} + \frac{3r}{e} \frac{de}{d\varphi} \right) \sin \varphi \tag{1.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L X + (1 + \nu) X \sin \varphi \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{r_2}{r_1} (h'/h)' - \frac{1}{2} \frac{r_2}{r_1} (h'/h)^2 + \left[ (r_2/r_1)' + (r_2/r_1 + 2\nu) \cotg \varphi \right] \frac{h'}{h} \right] X \sin \varphi \\
& = E e_0 \sin \varphi \left[ \frac{r_1 Y}{h} - \alpha r_2 h^{1/2} \frac{dT_m}{d\varphi} \right] \tag{1.45}
\end{aligned}$$

$L(\cdot)$  est toujours défini par 1.43

### 1.5 Examen des conditions aux limites

Dans le cas général d'une coque de révolution soumise à des champs de forces et de températures axisymétriques, il existe un effort et un couple unitaires agissant sur chacun des parallèles constituant les deux bases de l'enveloppe. La détermination des contraintes et des déformations de la coque nécessite donc la connaissance des efforts de liaison ; respectivement les deux composantes de l'effort et le couple appliqués à chacune des bases, soit six inconnues.

Les conditions d'équilibre en projection sur l'axe de révolution de la coque donnent au moins une relation entre les efforts axiaux, le problème général de la flexion des enveloppes de révolution comporte donc cinq inconnues. La rotation et la dilatation radiale imposées à chacune des deux bases et le déplacement axial relatif des deux bases permettent d'obtenir les relations nécessaires entre les cinq inconnues.

Si la coque est libre de se dilater ou de se contracter axialement, c'est-à-dire si l'on n'impose pas de déplacement relatif aux deux bases, les conditions d'équilibre le long de l'axe permettent de calculer les efforts axiaux ce qui réduit à quatre le nombre des inconnues. Les relations entre ces dernières sont alors données par les déformations imposées aux deux bases.

Dans le cas particulier des coques de révolution comportant un sommet et une seule base, le nombre des inconnues se réduit à deux, l'effort et le couple unitaires appliqués à la base.

Un autre cas de simplification est celui des coques "longues" pour lesquelles les efforts agissant sur l'une des bases ne provoquent que des déformations négligeables sur l'autre base. En ce cas, les quatre équations à quatre inconnues se ramènent à deux systèmes indépendants de deux équations à deux inconnues.

L'étude de la flexion des coques revient donc à la détermination des déformations aux liaisons et du déplacement relatif des bases provoqués par des champs de forces et de températures. Pour la commodité des calculs, il est préférable de décomposer en cas types qui, par superposition, permettent de représenter les cas de charges réels à étudier.

Les cas de charges types à envisager sont :

- efforts radiaux appliqués à l'une ou l'autre base,
- moments agissant sur l'une ou l'autre base,
- efforts axiaux équilibrés appliqués aux deux bases,
- efforts répartis sur la surface moyenne de la coque et équilibrés si nécessaire par des efforts axiaux sur les bases,
- champs de températures axisymétriques en l'absence de toute force extérieure.

Fig 1.1

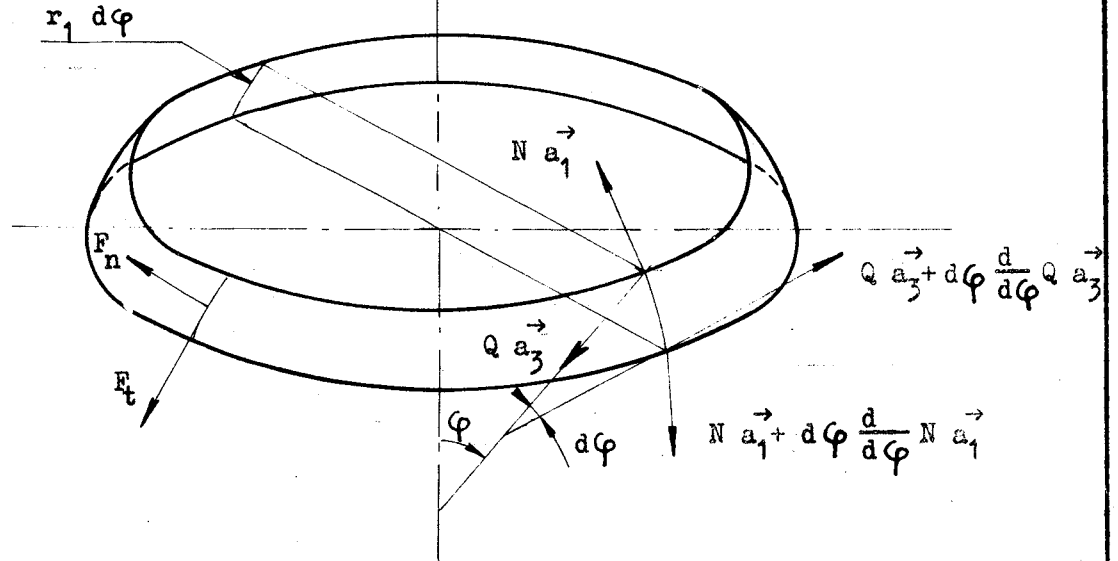


Fig 1.2

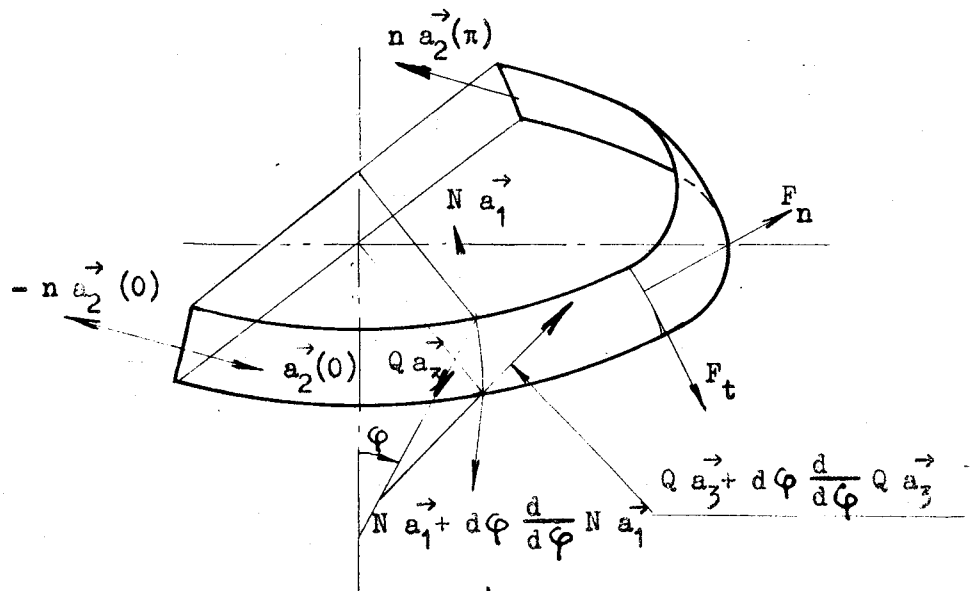


Fig 1.3

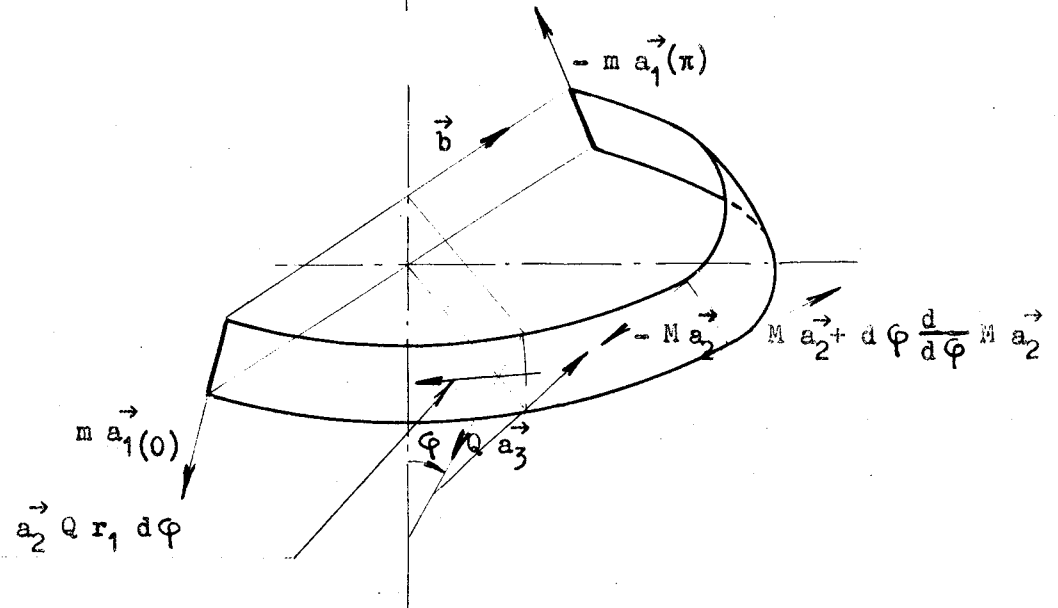
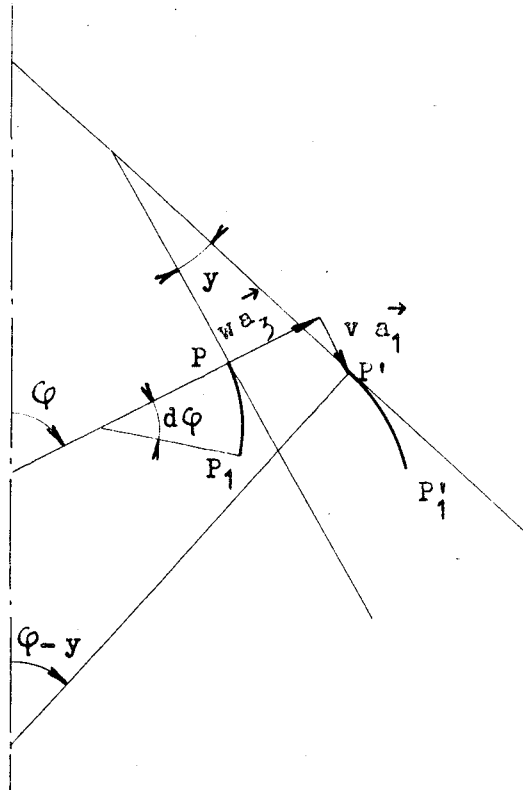
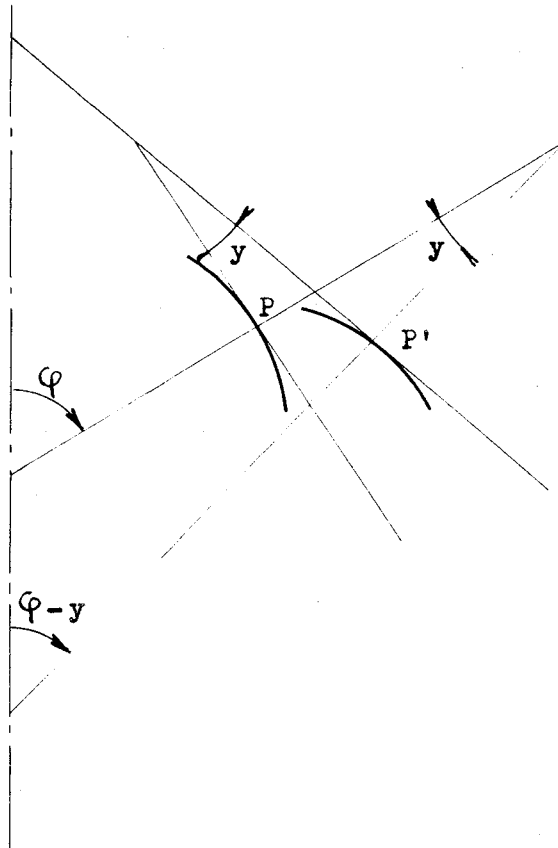


Fig 1.4Fig 1.5

## CHAPITRE DEUXIEME

2. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES CONIQUES

Dans ce chapitre nous étudions analytiquement la flexion des coques coniques d'épaisseur constante. Les fonctions propres que nous utilisons s'expriment par  $A_n J_2(\alpha_n s) + B_n N_2(\alpha_n s)$  où  $J_2$  et  $N_2$  représentent des fonctions de Bessel de 1ère et 2ème espèce et d'ordre 2.

Ces fonctions propres se réduisent aux  $J_2(\alpha_n s)$  pour les coques coniques fermées. Les valeurs propres  $\alpha_n$  correspondent aux zéros de  $J_2(\alpha_n) = 0$ . En ce cas les coefficients d'influence relatifs aux différents cas de charge s'expriment à l'aide de combinaisons des deux séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}$$

Pour les coques tronconiques, les fonctions sont de la forme :  $J_2(\beta_n) N_2(\beta_n s) - J_2(\beta_n s) N_2(\beta_n)$  et les valeurs propres  $\beta_n$  sont les solutions de l'équation :

$$J_2(\beta_n) N_2(\beta_n \rho) - J_2(\beta_n \rho) N_2(\beta_n) = 0$$

Dans le cas des coques tronconiques longues  $\rho \rightarrow \infty$  le spectre des valeurs propres devient continu et les développements en série de fonctions propres sont remplacés par des intégrales du type Fourier-Bessel.

La connaissance des zéros  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  et des normes des fonctions propres, tablés par de nombreux auteurs, permet de résoudre complètement les problèmes posés par l'étude de la flexion axisymétrique des coques coniques. Pour de nombreux cas pratiques on arrive à des formules asymptotiques valables avec une bonne précision pour un large domaine d'application. On démontre par exemple que les coefficients d'influence des coques coniques longues s'obtiennent simplement à partir des coefficients d'influence des coques cylindriques.

Pour les coques coniques d'épaisseur variable, nous renvoyons le lecteur à la deuxième partie de l'ouvrage où nous traitons des méthodes numériques de révolution.



2.1 Equations de base (Voir Fig. 2.1)

Nous adopterons comme variable l'arc de méridien  $s$ , distance d'un point de la coque au sommet, et poserons  $ds = r_1 d\varphi$ .

Si  $\beta$  désigne le demi-angle au sommet du cône, le deuxième rayon de courbure  $r_2$  s'exprime par :  $r_2 = s \operatorname{tg} \beta$ . La première équation de base 1.26 se transforme en :

$$\begin{aligned} s y'' + y' \left(1 + 3 s \frac{e'}{e}\right) + \left(3 v \frac{e'}{e} - \frac{1}{s}\right) y \\ = -\frac{x}{D} \cotg \beta - \alpha s (1 + v) \left(\tau' + 3 \tau \frac{e'}{e}\right) \end{aligned} \quad 2.1$$

La deuxième équation de base 1.37 devient :

$$\begin{aligned} s x'' + x' \left(1 - s \frac{e'}{e}\right) + \left(v \frac{e'}{e} - \frac{1}{s}\right) x \\ = E e (y \cotg \beta - \alpha s T_m') \\ - \frac{S + A}{\sin \beta \cos \beta} \left(-v \frac{e'}{e} + \frac{1}{s}\right) \\ - \operatorname{tg} \beta (s^2 F_n') + \operatorname{tg} \beta s^2 F_n \frac{e'}{e} - v s F_t \end{aligned} \quad 2.2$$

D'après 1.35 et 1.36, nous avons d'autre part :

$$N = Q \operatorname{tg} \beta - \frac{S + A}{r_0 \sin \beta} = \frac{x}{s} - 2 \frac{S + A}{s \sin^2 \beta}$$

$$n = \frac{dx}{ds} + r_2 F_n$$

Nous allons transformer les équations 2.1 et 2.2 de façon à faire apparaître l'opérateur qui intervient dans le cas des coques coniques d'épaisseur constante. Cette transformation facilite, comme nous le verrons, la résolution numérique.

Les dérivées se rapportent exclusivement à la variable  $s$ . Dans la deuxième équation  $S$  se définit par :

$$S = \int r_0 (F_t \cos \beta - F_n \sin \beta) ds = \frac{1}{2} \sin 2\beta \int s (F_t - F_n \operatorname{tg} \beta) ds \quad 2.3$$

Si nous posons  $h = \frac{e}{e_0}$  et effectuons les changements de variables :

$$x = X f \quad \text{et} \quad y = Y g \quad 2.4$$

avec :

$$f = \exp - \frac{1}{2} \int_{s_0}^s - \frac{h'}{h} ds = h^{1/2} \quad 2.5$$

$$g = \exp - \frac{1}{2} \int_{s_0}^s 3 \frac{h'}{h} ds = h^{-3/2} \quad 2.6$$

ce qui entraîne :

$$f'/f = \frac{1}{2} h'/h \quad g'/g = -\frac{3}{2} h'/h \quad 2.7$$

Les équations de base deviennent :

$$L Y - \frac{3}{2} \left\{ s(h'/h)' + \frac{3}{2} s (h'/h)^2 + (1 - 2\nu) \frac{h'}{h} \right\} Y \quad 2.8$$

$$= -\frac{X}{D_0 h} \operatorname{cotg} \beta - \alpha s(1 + \nu) h^{3/2} \left( \tau' + 3 \tau \frac{h'}{h} \right)$$

$$L X + \frac{1}{2} \left\{ s(h'/h)' - \frac{1}{2} s (h'/h)^2 + (1 + 2\nu) \frac{h'}{h} \right\} X$$

$$= E e_0 \left\{ \frac{Y}{h} \operatorname{cotg} \beta - \alpha s h^{1/2} T_m' \right\}$$

$$- \frac{S + A}{\sin \beta \cos \beta} h^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{s} - \nu \frac{h'}{h} \right) - h^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta \left\{ (s^2 F_n)' - s^2 F_n \frac{h'}{h} + \nu s F_t \operatorname{cotg} \beta \right\} \quad 2.9$$

.....

L'opérateur L se définit par :

$$L = \frac{d}{ds} s \frac{d(\cdot)}{ds} - \frac{(\cdot)}{s} \quad 2.10$$

Rappelons que :

$$x = r_2 Q = s Q \operatorname{tg} \beta \quad 2.11$$

et que :

$$M = -D \left\{ y' + \frac{\nu}{s} y + \alpha(1 + \nu) \tau \right\} \quad 2.12$$

$$m = -D \left\{ y/s + \nu y' + \alpha(1 + \nu) \tau \right\} \quad 2.13$$

## 2.2 Coques coniques d'épaisseur constante

Les équations de base deviennent en ce cas :

$$L y = -\frac{x}{D} \operatorname{cotg} \beta - \alpha s(1 + \nu) \tau' \quad 2.14$$

$$L x = E e (y \operatorname{cotg} \beta - \alpha s T_m') - \frac{1}{s} \frac{S + A}{\sin \beta \cos \beta} - \operatorname{tg} \beta (s^2 F_n)' - \nu s F_t \quad 2.15$$

Nous poserons :

$s_2$  distance d'un point de la base au sommet du cône

$$k^4 = \frac{12(1 - \nu^2)}{e^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \quad b = k^2 s_2 \quad 2.16$$

$$t = \left( \frac{s}{s_2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{variable sans dimension :} \quad 2.17$$

### 2.2.1 Cas d'un moment $M_2$ appliqué à la base :

Nous adopterons les variables réduites :

$$V = y \cdot \frac{k^2 D}{M_2} \quad 2.18$$

.....

et  $U = \frac{x}{M_2 t g \beta}$  qui dans la cas de charge examiné s'écrit encore :  $U = \frac{s Q}{M_2}$  2.19

Opérant le changement de variable  $t = \left(\frac{s}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}$  2.14 et 2.15 se transforment en :

$$L/t V = -4 b t U \quad 2.20$$

$$L/t U = 4 b t V \quad 2.21$$

où  $L/t = \frac{d}{dt} t \frac{d(\cdot)}{dt} - \frac{4(\cdot)}{t}$  2.22

Les conditions aux limites s'expriment par :

$$U = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad \text{et } t = 1$$

$$V = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad \text{et } M = M_2 \quad \text{pour } t = 1$$

Désignons par  $V_2$  la rotation au droit de la base provoquée par le moment  $M_2$  si nous posons :

$$V = V_0 + V_2 t^2 \quad 2.23$$

et remarquons que  $L/t(t^2) = 0$ , les équations 2.20 et 2.21 se transforment en :

$$L/t V_0 = -4 b t U$$

$$L/t U = 4 b t V_0 + 4 b V_2 t^3 \quad 2.24$$

Les conditions aux limites se réduisent à :

$$U = V_0 = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad \text{et } t = 1 \quad 2.25$$

Le système d'équations 2.24 peut, compte tenu des conditions aux limites, se résoudre en développant  $U$  et  $V_0$  en série de fonctions de Bessel  $J_2(\alpha_n t)$  où  $\alpha_n$  sont les zéros de  $J_2(t)$ . Nous poserons :

$$U = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} U_n \quad 2.26$$

où :

$$U_n = \frac{1}{J_2'(\alpha_n)} \int_0^1 t J_2(\alpha_n t) U dt$$

et

$$V_o = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} V_{on} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} 2.27$$

où :

$$V_{on} = \frac{1}{J_2'(\alpha_n)} \int_0^1 t J_2(\alpha_n t) V_o dt$$

Sachant que :

$$L/t J_2(\alpha_n t) = -\alpha_n^2 t J_2(\alpha_n t) \quad 2.28$$

et notant que :

$$\frac{1}{J_2'(\alpha_n)} \int_0^1 t^3 J_2(\alpha_n t) = -\frac{1}{\alpha_n} \quad 2.29$$

Le système 2.24 se transforme en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = +4 b U_n$$

$$\alpha_n^2 U_n = -4 b V_{on} + 4 b V_2 \frac{1}{\alpha_n} \quad 2.30$$

d'où l'on tire :

$$V_{on} = \frac{16 b^2 V_2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} \quad 2.31$$

$$U_n = + \frac{4 b V_2 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.32$$

U et V s'expriment donc par :

$$U = + 8 b V_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.33$$

$$V = V_2 t^2 + 32 b^2 V_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} \frac{1}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} \quad 2.34$$

### 2.2.1.1 Rotation au droit de la base provoquée par un couple $M_2$

Pour le cas de charge examiné, 2.12 s'écrit :

$$M = -D\left(y' + \frac{v}{s} y\right) \quad \text{d'où la relation :}$$

$$b = -s_2(V'_s) - v V_2$$

Remplaçons dans cette expression  $(V'_s)_2$  par sa valeur tirée de 2.34, tenant compte de la définition donnée par 2.18, il vient :

$$y_2 = -\frac{M_2}{k^2 D} \frac{b}{1 + v + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \quad 2.35$$

qui donne la rotation au droit de la base provoquée par un moment  $M_2$  appliqué à cette même base.

### 2.2.1.2 Dilatation radiale au droit de la base provoquée par un couple $M_2$

La dilatation radiale donnée par 1.17 s'écrit :

$$\delta = \epsilon_{\theta} r_0 = \frac{s \sin \beta}{E e} (n - v N) \quad 2.36$$

ou encore :

$$\delta = \frac{M_2 \sin \beta}{E e} (s U' - v U) \operatorname{tg} \beta$$

D'après 2.33 :

$$U'_s = \frac{4 b V_2}{(s s_2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J'_2 \left[ \alpha_n \left( \frac{s}{s_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{J'_2(\alpha_n)} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.37$$

La dilatation radiale au droit de la base provoquée par un moment appliqué à cette même base s'exprime donc par :

$$\delta_2 = \frac{4 b V_2 \sin \beta}{E e} M_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \operatorname{tg} \beta$$

.....

$$\delta_2 = \frac{-r_{o2} M_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{4b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16b^2}}{1 + \nu + 16b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16b^2}} \quad 2.38$$

### 2.2.2 Cas d'un effort radial $F_2$ appliqué à la base (Fig. 2.2)

Nous adopterons les variables réduites :

$$V = y \frac{k^2 D}{r_{o2} F_2} \operatorname{tg} \beta \quad 2.39$$

$$\text{et } U = \frac{x}{r_{o2} F_2} = \frac{s Q}{s_2 Q_2} \quad 2.40$$

Avec le changement de variable  $t = (s/s_2)^2$  les équations de base deviennent :

$$L/t V = -4 b t U$$

$$L/t U = 4 b t V$$

Si nous posons :

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + t^2 \\ V &= V_0 + V_2 t^2 \end{aligned} \right\} 2.41$$

où  $V_2$  est la rotation au droit de la base provoquée par l'effort radial  $F_2$ , nous obtenons :

$$L/t V_0 = -4 b t U_0 - 4 b t^3 \quad 2.42$$

$$L/t U_0 = 4 b t V_0 + 4 b t^3 V_2$$

Les coefficients des développements de  $U_0$  et  $V_0$  sont donnés par :

$$\alpha_n^2 V_{on} = 4 b U_{on} - 4 b / \alpha_n \quad 2.43$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b V_{on} + 4 b V_2 / \alpha_n$$

.....

d'où l'on tire :

$$V_{on} = 16 b^2 V_2 \frac{1}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} - 4 b \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.44$$

$$U_{on} = \frac{16 b^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} + 4 b V_2 \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.45$$

### 2.2.2.1 Rotation $y_2$ provoquée par un effort radial $F_2$

Ecrivaint que le moment  $M$  au droit de la base est nul, nous obtenons :

$$y_2 = \frac{r_0^2 F_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{4 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2}}{1 + \nu + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \quad 2.46$$

Le théorème de Maxwell-Betti entraîne la relation :

$$F_2 \cdot \delta_2(M_2) + M_2 \cdot y_2(F_2) = 0$$

que vérifient bien les formules 2.38 et 2.46.

### 2.2.2.2 Dilatation $\delta_2$ provoquée par un effort radial $F_2$

Pour le cas de charge que nous étudions, la dilatation radiale s'exprime par :

$$\delta = \epsilon_{\theta} r_0 = \frac{s \sin \beta}{E e} \left( \frac{dx}{ds} - \nu \frac{x}{s} \right) = \frac{r_0^2 F_2}{E e} \sin \beta (s U' - \nu U)$$

d'après 2.45,  $U$  s'exprime par :

$$U = t^2 + 32 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} \frac{1}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} + 8 b V_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n t)}{J_2'(\alpha_n)} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2}$$

.....



d'où :

$$s_2(U'_s)_2 = 1 + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2} + 4 b v_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2}$$

Si nous posons :  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}$  et  $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2}$

Il vient :

$$\delta_2 = \frac{r_{o2} F_2}{E e} \sin \beta \left[ 1 - \nu + 16 b^2 S_1 + \frac{16 b^2 (S_2)^2}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} \right] \quad 2.47$$

### 2.2.3 Cas d'une pression p constante appliquée à la paroi intérieure et équilibrée par des efforts axiaux

$$H_2 = \frac{1}{2} p r_{o2} \quad (\text{Voir fig. 2.2})$$

Pour ce cas de charge la constante A dans l'équation 1.33 est nulle et S s'exprime par :

$$S = -\frac{1}{2} p s^2 \sin^2 \beta$$

Les équations de base s'écrivent :

$$L y = -\frac{x}{D} \cotg \beta$$

$$L x = E e y \cotg \beta - \frac{3}{2} p s \operatorname{tg} \beta$$

Avec les changements de variables :

$$V = y \frac{k^2 D}{r_{o2} H_2} \quad U = \frac{x \cotg \beta}{r_{o2} H_2} = -\frac{s Q}{s_2 Q_2} \quad \text{et} \quad t = (s/s_2)^{\frac{1}{2}} \quad 2.48$$

les équations de base deviennent :

$$L/t V = -4 b t U$$

$$L/t U = 4 b t V - \frac{12 t^3}{\sin^2 \beta} \quad 2.49$$

.....

Posons :

$$V = V_0 + t^2 V_2 \quad 2.50$$

$$U = U_0 - t^2$$

Le système 2.49 se transforme en :

$$L/t V_0 = -4 b t U_0 + 4 b t^3 \quad 2.51$$

$$L/t U_0 = 4 b t V_0 + 4 b t^3 V_2 - \frac{12 t^3}{\sin^2 \beta}$$

d'où :

$$\alpha_n^2 V_{on} = 4 b U_{on} + 4 b / \alpha_n$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b V_{on} + 4 b V_2 / \alpha_n - \frac{12}{\alpha_n \sin^2 \beta}$$

qui, après résolution, donne :

$$V_{on} = \frac{16 b^2 V_2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} - \frac{48 b}{\sin^2 \beta} \frac{1}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)} + \frac{4 b \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \quad 2.52$$

$$U_{on} = \frac{4 b V_2 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} - \frac{12}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} - \frac{16 b^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)}$$

### 2.2.3.1 Rotation provoquée par une pression intérieure constante équilibrée par des efforts axiaux

De la condition de moment nul exprimée par :

$$s_2 (V'_s)_2 + v V_2 = 0 \quad , \quad \text{on déduit :}$$

.....

$$y_2 = -\frac{r_{o2} H_2}{k^2 D \sin^2 \beta} \left[ \frac{4 b S_2 \sin^2 \beta}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} - \frac{3}{b} + \frac{3(1 + \nu)/b}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} \right] \quad 2.53$$

qui donne la rotation  $y_2$  sur la base provoquée par une pression intérieure équilibrée par des efforts axiaux.

2.2.3.2 Dilatation provoquée par une pression intérieure constante équilibrée par des efforts axiaux

$$\delta = \epsilon_{\theta} r_o = \frac{s \sin \beta}{E e} (n - \nu N)$$

1.35 et 1.36 compte tenu du fait que  $A = 0$  et  $S = -\frac{1}{2} p s \sin^2 \beta$  s'écrivent :

$$N = \frac{x}{s} + \frac{1}{2} p s \operatorname{tg} \beta$$

$$n = \frac{dx}{ds} + p s \operatorname{tg} \beta$$

d'où :

$$\delta = \frac{\sin \beta}{E e} \left( s \frac{dx}{ds} - \nu x \right) + \frac{p r_o^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

ou encore :

$$\delta = \frac{\sin \beta^2}{E e \cos \beta} \frac{p r_o^2}{2} (s u' - \nu u) + \frac{p r_o^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

Portant dans la deuxième équation 2.52 la valeur de  $V_2$  donnée par 2.53, il vient :

$$U_{on} = \frac{-4 b \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \left[ \frac{4 b S_2}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} + \frac{3(1 + \nu)}{b \sin^2 \beta (1 + \nu + 16 b^2 S_1)} \right] - \frac{16 b^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b^2)}$$

et enfin :

$$(s U' - \nu U) = \frac{-(1 - \nu) - 16 b^2 S_1}{2} - \frac{16 b^2 S_2^2}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} - \frac{12(1 + \nu) S_2}{(1 + \nu + 16 b^2 S_1) \sin^2 \beta}$$

.....

La dilatation  $\delta_2$  au droit de la base s'exprime par :

$$\delta_2 = - \frac{p r_{o2}^2}{E e \cos \beta} \left[ \left\{ (1-\nu) + 16 b^2 S_1 + \frac{16 b^2 S_2^2}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} \right\} \frac{\sin^2 \beta}{2} - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{6 (1 + \nu) S_2}{1 + \nu + 16 b^2 S_1} \right] \quad 2.54$$

#### 2.2.4 Cas d'une température moyenne $T_m$ constante et d'un gradient $\tau$ constant

Ce cas se ramène facilement à celui d'un moment  $M_2$  appliqué à la base.

##### 2.2.4.1 Rotation $y_2$ au droit de la base :

Il suffit de remplacer dans la formule 2.35  $M_2$  par  $\alpha(1 + \nu) \tau D$ , il vient :

$$y_2 = - \frac{\alpha(1 + \nu) \tau}{k^2} \frac{b}{1 + \nu + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \quad 2.55$$

##### 2.2.4.2 Dilatation $y_2$ au droit de la base :

2.38 devient en substituant  $\alpha(1 + \nu) \tau D$  à  $M_2$  :

$$\delta_2 = - \frac{\alpha(1 + \nu) \tau r_{o2}}{k^2 \operatorname{tg} \beta} \frac{4 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2}}{1 + \nu + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \quad 2.56$$

.....

### 2.2.5 Valeurs limites des coefficients d'influence

La résolution des différents cas précédemment étudiés ne fait apparaître que les deux séries  $S_1$  et  $S_2$ . De nombreux problèmes pratiques correspondent à des valeurs élevées du paramètre  $b = k^2 s_2$  et nécessitent la connaissance des limites de  $S_1$  et  $S_2$  pour de grandes valeurs de  $b$ .

D'après G. PETIAU (1) p. 178, les grandes racines de  $J_2(t)$  s'obtiennent par le développement asymptotique suivant :

$$\alpha_n \approx (n + 3/4) \pi - \frac{15}{8(n + 3/4) \pi} - \frac{15.81}{384(n + 3/4)^3 \pi^3} - \dots$$

d'où :

$$(n + 3/4) \pi \left( 1 - \frac{15(1 + \delta)}{8(n + 3/4)^2 \pi^2} \right) < \alpha_n < (n + 3/4) \pi \quad \text{avec } 0 < \delta < 1$$

Pour  $J_2(t)$  on peut d'ailleurs écrire à partir de  $n = 1$

$$(n + \frac{1}{2}) \pi < \alpha_n < (n + 3/4) \pi$$

et par suite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 3/4)^4 \pi^4 + 16 b^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^4 \pi^4 + 16 b^2}$$

La fonction  $f(x) = \frac{1/\pi^4}{x^4 + 16 b^2/\pi^4}$  est toujours décroissante, nous pouvons donc comparer la première et la dernière des séries de l'inégalité à l'intégrale de  $f(x)$  de 0 à  $\infty$ . On vérifie facilement que :

$$\int_{7/4}^{n + 7/4} f(x) dx < \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n + 3/4)^4 \pi^4 + 16 b^2} < \int_{3/4}^{n + 3/4} f(x) dx$$

et par suite :

$$\int_{7/4}^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 3/4)^4 \pi^4 + 16 b^2} < \int_{3/4}^{\infty} f(x) dx$$

.....

et puisque :

$$\int_0^{3/4} f(x) dx < \int_0^{7/4} f(x) dx < \frac{7}{64 b^2}$$

Nous pouvons donc poser :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 3/4)^4 \pi^4 + 16 b^2} \approx \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16 b^2/\pi^4} + o(1/b^2)$$

On vérifie de même que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^{3/4} + 16 b^2} \approx \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16 b^2/\pi^4} + o(1/b^2)$$

d'où l'on conclut que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \approx \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16 b^2/\pi^4} + o(1/b^2)$$

Considérons l'intégrale  $\int_C \frac{dz}{z^4 + 16 b^2/\pi^4}$  prise le long du contour C situé du côté des y positifs, défini par le demi-cercle de rayon  $R \rightarrow \infty$  limité par l'axe des x. Les pôles de la fonction sous le signe intégral sont dans le domaine limité par le contour C.

$$z_1 = \frac{2}{\pi} b^{1/2} \exp i \pi/4 \quad z_2 = \frac{2}{\pi} b^{1/2} \exp i 3 \pi/4$$

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont les résidus relatifs à ces pôles, nous savons que :

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 16 b^2/\pi^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 16 b^2/\pi^4} = 2 i \pi (A_1 + A_2)$$

Or, on a :

$$A_1 = 1/4 z_1^3 \quad \text{et} \quad A_2 = 1/4 z_2^3$$

.....

$$\text{d'où : } 2 i \pi (A_1 + A_2) = \frac{\pi^4 \sqrt{2}}{16 b^{3/2}}$$

$$\text{et } \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16 b^2/\pi^4} = \sqrt{2}/32 b^{3/2}$$

$S_1$  est donc un infiniment petit équivalent à  $\sqrt{2}/32 b^{3/2}$

$$S_1 \approx \frac{\sqrt{2}}{32 b^{3/2}} + o(1/b^2) \quad 2.57$$

La comparaison de la série  $S_2$  avec l'intégrale de  $g(x) = \frac{x^2/\pi^2}{x^4 + 16 b^2/\pi^4}$  prise de zéro à l'infini est plus délicate car  $g(x)$  croît d'abord jusqu'à son maximum  $1/8 b$  qu'elle atteint au point  $x = 2 b^{1/2}/\pi$  puis décroît ensuite constamment pour s'annuler à l'infini.

Choisissons d'abord  $N$  tel que :

$$\pi(N + 3/4) < 2 b^{1/2} < \pi(N + 7/4)$$

$$\text{L'inégalité } \frac{\pi^2(n + 1/2)^2}{\pi^4(n + 3/4)^4 + 16 b^2} < \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} < \frac{\pi^2(n + 3/4)^2}{\pi^4(n + 1/2)^4 + 16 b^2}$$

entraîne :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi^2(n + 1/2)^2}{\pi^4(n + 3/4)^4 + 16 b^2} < \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} < \sum_{n=1}^N \frac{\pi^2(n + 3/4)^2}{\pi^4(n + 1/2)^4 + 16 b^2}$$

On montre facilement que la première et la troisième série sont des infiniment petits équivalant à :

$$\int_0^{2 b^{1/2}/\pi} g(x) dx + o(1/b)$$

Pour le domaine  $(2 b^{1/2}/\pi, \infty)$   $g(x)$  est toujours décroissante et l'on a :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \approx \int_{2 b^{1/2}/\pi}^{\infty} g(x) dx + o(1/b)$$

.....

et par suite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \approx \int_0^{\infty} g(x) dx + o(1/b)$$

Après calcul de l'intégrale du second membre par la méthode des résidus, on obtient :

$$S_2 \approx \sqrt{2/8} b^{1/2} + o(1/b)$$

2.58

Notons que lorsque  $b \rightarrow 0$  :

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4}$$

Les sommes vers lesquelles tendent les séries  $S_2$  et  $S_1$  lorsque  $b \rightarrow 0$  sont les sommes de Rayleigh qui correspondent aux zéros de  $J_2(t)$ . Elles valent respectivement d'après G. PETIAU (1) p. 182 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\alpha_n^2 = 1/2^2 \cdot 3 = 1/12 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} 1/\alpha_n^4 = 1/2^6 \cdot 3^2 = 1/576$$

### 2.2.6 Variation des coefficients d'influence en fonction du paramètre $b$ caractéristique des coques coniques

Les déformations au droit de la base pour les cas de charge que nous venons d'étudier s'expriment toutes à l'aide de combinaisons simples des deux fonctions :

$$k_{y_2}^{M_2} = \frac{1}{1 + \nu + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \cdot \frac{\sqrt{2 b}}{2} \quad 2.59$$

$$k_{y_2}^{F_2} = \frac{4 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b^2}}{1 + \nu + 16 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b^2}} \quad 2.60$$



D'après 2.57 et 2.58 ces deux expressions tendent toutes deux vers 1 lorsque  $b$  devient grand.

Les courbes 2.1 et 2.2 placées en fin de ce chapitre donnent la variation de 2.59 et 2.60 en fonction de  $b$ .

### 2.2.6.1 Rotation et dilatation provoquées par un moment $M_2$

$$y_2 = - \frac{M_2}{k^2 D} \sqrt{2b} \cdot k_{y_2}^{M_2} \quad 2.61$$

$$\delta_2 = - \frac{r_{o2} M_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} k_{y_2}^{F_2} \quad 2.62$$

### 2.2.6.2 Rotation et dilatation provoquées par un effort radial $F_2$

$$y_2 = \frac{r_{o2} F_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} k_{y_2}^{F_2} \quad 2.63$$

$$\delta_2 = \frac{r_{o2} F_2 \sin \beta}{E e} \cdot \left[ 1 - \frac{4\nu}{\sqrt{2b}} k_{y_2}^{M_2} + (k_{y_2}^{F_2})^2 \right] \cdot \frac{\sqrt{2b}}{2 k_{y_2}^{M_2}} \quad 2.64$$

### 2.2.6.3 Rotation et dilatation provoquées par une pression constante $p$ appliquée à la paroi intérieure et équilibrée par des efforts axiaux

$$y_2 = - \frac{r_{o2} H_2}{k^2 D \sin^2 \beta} \left[ \sin^2 \beta k_{y_2}^{F_2} - \frac{3}{b} + \frac{3(1+\nu)}{b(1+\nu+16b^2 S_1)} \right]$$

qui s'écrit encore :

$$y_2 = - \frac{p r_{o2} \operatorname{tg} \beta}{E e \cos \beta} \left[ \frac{b}{2} k_{y_2}^{F_2} \times \sin^2 \beta - \frac{3}{2} + \frac{3(1+\nu)}{\sqrt{2b}} k_{y_2}^{M_2} \right] \quad 2.65$$

$$\delta_2 = - \frac{p r_{o2}^2}{E e \cos \beta} \left[ \left\{ 1 - \frac{4\nu}{\sqrt{2b}} k_{y_2}^{M_2} + (k_{y_2}^{F_2})^2 \right\} \frac{\sqrt{2b} \cdot \sin^2 \beta}{4 k_{y_2}^{M_2}} - \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) + \frac{3(1+\nu)}{2b} k_{y_2}^{M_2} \right] \quad 2.66$$

2.2.6.4 Rotation et dilatation provoquées par un champ de température défini par une température moyenne  $T_m$  constante et un gradient  $\tau$  constant

$$y_2 = - \frac{\alpha(1+\nu)\tau}{k^2} \sqrt{2b} \cdot k \frac{M_2}{y_2} \quad 2.67$$

$$\delta_2 = - \frac{\alpha(1+\nu)\tau r_0^2}{k^2 \operatorname{tg} \beta} \cdot k \frac{F_2}{y_2} \quad 2.68$$

### 2.3 Coques tronconiques "courtes" d'épaisseur constante

2.3.1 Cas d'un moment  $M_1$  appliqué à la petite base (Voir Fig. 2.4)

Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} V &= y k^2 D/M_1 & U &= x \operatorname{cotg} \beta / M_1 = s Q/M_1 \\ t &= (s/s_1)^{1/2} (b_2/b_1)^{1/2} = \rho \end{aligned} \right\} \quad 2.69$$

les valeurs de  $t$  aux limites seront donc  $t = 1$  sur la petite base  $t = \rho$  sur la grande. Avec ces variables, les équations de base 2.14 et 2.15 deviennent :

$$L/t V = -4 b_1 t U$$

$$L/t U = 4 b_1 t V$$

Si  $V_1$  et  $V_2$  désignent les rotations provoquées par  $M_1$  sur les bases, nous pouvons écrire :

$$V = V_0 + \frac{1}{\rho^2 - \rho^{-2}} \left[ (V_2 - V_1 \rho^{-2}) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) t^{-2} \right] \quad 2.70$$

$t^2$  et  $t^{-2}$  étant solution de  $L/t = 0$ , les équations de base se transforment en :

$$L/t V_0 = -4 b_1 t U$$

$$L/t U = 4 b_1 t V_0 + \frac{4 b_1 t}{\rho^2 - \rho^{-2}} \left[ (V_2 - V_1 \rho^{-2}) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) t^{-2} \right] \quad 2.71$$

.....

Les conditions aux limites sont :

$$V_0 = U = 0 \text{ pour } t = 1 \text{ et } t = \rho \quad 2.72$$

Examinons les solutions de :

$$L/t f + \lambda t f = 0$$

qui s'annulent pour  $t = 1$  et  $t = \rho$

Les fonctions de Bessel :

$$Z_2(\alpha_n t) = J_2(\alpha_n t) N_2(\alpha_n t) - J_2(\alpha_n t) N_2(\alpha_n t) \quad 2.73$$

satisfont à cette équation si  $\lambda = \alpha_n^2$  elles s'annulent de plus en  $t = 1$  et  $t = \rho$  si les  $\alpha_n$  sont les racines de :

$$Z_2(\alpha_n) = J_2(\alpha_n) N_2(\rho \alpha_n) - J_2(\rho \alpha_n) N_2(\alpha_n) = 0 \quad 2.74$$

Les fonctions 2.73 sont donc fonctions propres de  $L/t$  tandis que  $\alpha_n^2$  en sont les valeurs propres.

La norme de ces fonctions propres s'exprime par :

$$N_n^2 = \int_1^\rho t Z_2(\alpha_n t)^2 dt = \left[ \frac{t^2}{2} Z_2(\alpha_n t)^2 \right]_1^\rho$$

La relation de récurrence :

$$\frac{d}{dz} \left( z^\lambda Z_\lambda(z) \right) = z^\lambda Z_{\lambda-1}(z)$$

compte tenu des conditions  $Z_2(z) = 0$  pour  $z = \alpha_n$  et  $z = \alpha_n \rho$  permet d'écrire successivement :

$$\frac{d}{dz} Z_2(z) = Z_1(z) \text{ en } z = \alpha_n \text{ et } z = \alpha_n \rho$$

$$\left[ \frac{d}{dz} Z_2(z) \right]_{z = \alpha_n} = J_2'(\alpha_n) N_2(\alpha_n) - J_2(\alpha_n) N_2'(\alpha_n)$$

$$\left[ \frac{d}{dz} Z_2(z) \right]_{z = \alpha_n} = W \left[ J_2(\alpha_n), N_2(\alpha_n) \right] = \frac{2}{\pi \alpha_n}$$

.....

où  $W(J_2, N_2)$  est le Wronskien relatif à  $J_2$  et  $N_2$

$$\left[ \frac{d}{dz} Z_2(z) \right]_{z = \alpha_n \rho} = J_2(\alpha_n) N_2'(\alpha_n \rho) - J_2'(\alpha_n \rho) N_2(\alpha_n)$$

et compte tenu de  $Z_2(\alpha_n \rho) = 0$

$$\left[ \frac{d}{dz} Z_2(z) \right]_{z = \alpha_n \rho} = \frac{J_2(\alpha_n)}{J_2(\alpha_n \rho)} W \left[ J_2(\alpha_n \rho), N_2(\alpha_n \rho) \right]$$

$$\left[ \frac{d}{dz} Z_2(z) \right]_{z = \alpha_n \rho} = \frac{J_2(\alpha_n)}{J_2(\alpha_n \rho)} \frac{2}{\pi \alpha_n \rho}$$

d'où l'expression du carré de la norme :

$$N_n^2 = \frac{2}{\pi^2 \alpha_n^2} \left\{ \left[ \frac{J_2(\alpha_n)}{J_2(\alpha_n \rho)} \right]^2 - 1 \right\} \quad 2.75$$

Pour résoudre le système 2.71, nous développerons  $U$  et  $V_0$  en série de fonctions propres normées. Nous posons :

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} Z_2(\alpha_n t) V_{0n} \quad 2.76$$

$$V_{0n} = \int_1^{\rho} t Z_2(\alpha_n t) V_0 dt \quad 2.77$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} Z_2(\alpha_n t) U_n \quad 2.78$$

avec :

$$U_n = \int_1^{\rho} t Z_2(\alpha_n t) U dt \quad 2.79$$

.....

Si nous remarquons que :

$$L/t Z_2(\alpha_n t) = -\alpha_n^2 t Z_2(\alpha_n t) \quad 2.80$$

et si nous notons que :

$$\int_1^\rho t^3 Z_2(\alpha_n t) dt = \left[ \frac{t^3}{\alpha_n} Z_3(\alpha_n t) \right]_1^\rho = \frac{1}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho^3 Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.81$$

et que :

$$\int_1^\rho t^{-1} Z_2(\alpha_n t) dt = \left[ -\frac{t^{-1}}{\alpha_n} Z_1(\alpha_n t) \right]_1^\rho = \frac{1}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.82$$

Le système 2.71 se transforme en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = 4 b_1 U_n \quad 2.83$$

$$\alpha_n^2 U_n = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

d'où l'on tire :

$$V_{on} = - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.84$$

et

$$U_n = - \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.85$$

### 2.3.1.1 Calcul des rotations sur les bases provoquées par un moment $M_1$

$V_1$  et  $V_2$  sont déterminés par les conditions :

$$M = M_1 \text{ pour } t = 1 \quad M = 0 \text{ pour } t = \rho$$

.....

Or,  $M = -D \left[ y' + v y/s \right]$  d'où les équations :

$$-b_1 = s_1 \cdot \left[ V'_s \right]_1 + v V_1 \quad \text{et} \quad s_2 \cdot \left[ V'_s \right]_2 + v V_2 = 0 \quad 2.86$$

or :

$$V'_s = \frac{1}{2}(s s_1)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n N_n^{-2} Z'_2(\alpha_n t) V_{on} + \frac{1}{\rho^2 - \rho^{-2}} \left[ \frac{1}{s_1} (v_2 - v_1 \rho^{-2}) - s_1 s^{-2} (v_1 \rho^2 - v_2) \right] \quad 2.87$$

on en tire :

$$s_1 \left[ V'_s \right]_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n N_n^{-2} Z_1(\alpha_n) V_{on} - v_1 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + \frac{2 \rho^2 v_2}{\rho^4 - 1} \quad 2.88$$

$$s_2 \left[ V'_s \right]_2 = \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n N_n^{-2} Z_1(\alpha_n \rho) V_{on} - \frac{2 \rho^2 v_1}{\rho^4 - 1} + v_2 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} \quad 2.89$$

2.88 s'écrit encore :

$$s_1 \left[ V'_s \right]_1 = - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 b_1^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \frac{v_1 Z_1^2(\alpha_n) - \rho v_2 Z_1(\alpha_n) Z_1(\alpha_n \rho)}{N_n^2} - v_1 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + \frac{2 \rho^2 v_2}{\rho^4 - 1} \quad 2.90$$

A l'aide des relations de récurrence, des valeurs du WRONSKIEN et des valeurs des solutions aux limites, on prouve facilement que :

$$Z_1(\alpha_n) = 2/\alpha_n \pi \quad 2.91$$

$$Z_1(\alpha_n \rho) = \frac{J_2(\alpha_n)}{J_2(\alpha_n \rho)} \frac{2}{\alpha_n \rho \pi}$$

.....

si l'on pose de plus :

$$\beta_n = J_2(\alpha_n) / J_2(\alpha_n \rho) \quad 2.92$$

on obtient :

$$\frac{z_1^2(\alpha_n)}{N_n^2} = 2 / (\beta_n^2 - 1) \quad 2.93$$

$$\frac{z_1^2(\alpha_n \rho)}{N_n^2} = 2 \beta_n^2 / \rho^2 (\beta_n^2 - 1) \quad 2.94$$

$$\frac{z_1(\alpha_n) z_1(\alpha_n \rho)}{N_n^2} = 2 \beta_n / \rho (\beta_n^2 - 1) \quad 2.95$$

2.90 s'écrit alors :

$$s_1 \begin{bmatrix} v' \\ v_s \end{bmatrix}_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 b_1^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n v_2}{\beta_n^2 - 1} \right] - v_1 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + \frac{2 \rho^2 v_2}{\rho^4 - 1} \quad 2.96$$

Après transformation, on obtient de même :

$$s_2 \begin{bmatrix} v' \\ v_s \end{bmatrix}_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 b_1^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{\beta_n v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n^2 v_2}{\beta_n^2 - 1} \right] - \frac{2 \rho^2 v_1}{\rho^4 - 1} + v_2 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} \quad 2.97$$

$$\text{Après avoir posé } \frac{1}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \frac{1}{\beta_n^2 - 1} = \frac{1}{\gamma_n} \quad 2.98$$

et porté 2.96 et 2.97 dans le système 2.86, nous obtenons :

$$v_1 M_1 = \frac{b_1 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right]}{\Delta} \quad 2.99$$

$\Delta$

.....

$$V_2^{M_1} = \frac{b_1 \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n}}{\Delta} \quad 2.100$$

où :

$$\Delta = \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] - \left[ 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} \right]^2 \quad 2.101$$

Rappelons que :

$$y_1^{M_1} = \frac{M_1}{k^2 D} V_1^{M_1} \quad \text{et} \quad y_2^{M_1} = \frac{M_1}{k^2 D} V_2^{M_1}$$

2.3.1.2 Dilatations sur les bases provoquées par un couple  $M_1$

La dilatation radiale toujours donnée par 2.36 devient :

$$\delta = \frac{M_1 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} (s U' - v U) \quad 2.102$$

$$U'_s = -\frac{1}{2} (s_1 s)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 b_1 \alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \frac{z_2'(\alpha_n t)}{N_n^2} \left[ v_1 z_1(\alpha_n) - \rho v_2 z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.103$$

d'où :

$$s_1(U'_s)_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 b_1 \alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n v_2}{\beta_n^2 - 1} \right]$$

ou encore :

$$s_1(U'_s)_1 = - 4 b_1 v_1^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \quad 2.104$$

de même :

$$s_2(U'_s)_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 b_1 \alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{\beta_n v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n^2 v_2}{\beta_n^2 - 1} \right]$$



et :

$$s_2(U'_s)_2 = -4 b_1 v_1 M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2 M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \quad 2.105$$

d'où l'on obtient :

$$\delta_1 = \frac{4 b_1^2 M_1 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} \times \quad 2.106$$

$$\left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n}$$

△

$$\delta_2 = \frac{4 b_1^2 M_1 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} \times \quad 2.107$$

$$\left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}$$

△

### 2.3.2 Cas d'un moment $M_2$ appliqué à la grande base (fig. 2.4)

#### 2.3.2.1 Rotations au droit des bases provoquées par $M_2$

Les conditions aux limites 2.86 deviennent :

$$s_1 [V'_s]_1 + v V_1 = 0 \quad \text{et} \quad -b_2 = s_2 [V'_s]_2 + v V_2$$

$$v_2 M_2 = \frac{-b_2 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right]}{\Delta} \quad 2.108$$

$$v_1 M_2 = \frac{-b_2 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right]}{\Delta} \quad 2.109$$

.....

Rappelons que :

$$y_2^{M_2} = \frac{M_2}{k^2 D} v_2^{M_2} \quad \text{et} \quad y_1^{M_2} = \frac{M_2}{k^2 D} v_1^{M_2}$$

### 2.3.2.2 Dilatation au droit des bases provoquée par $M_2$

$$\delta_2^{M_2} = - \frac{4 b_1 b_2 M_2 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} \times \quad 2.110$$

$$\left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - \nu + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}$$

△

$$\delta_1^{M_2} = - \frac{4 b_1 b_2 M_2 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} \times \quad 2.111$$

$$\left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - \nu + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n}$$

△

### 2.3.3 Cas d'un effort radial $F_1$ agissant sur la petite base (Voir Fig 2.5)

Nous le considèrerons positif lorsqu'il est dirigé vers l'intérieur puisqu'il produit alors sur la petite base un cisaillement positif :

Nous poserons :

$$V = \frac{y k^2 D \operatorname{tg} \beta}{r_{o1} F_1} \quad \text{et} \quad U = \frac{x}{r_{o1} F_1} = \frac{S Q}{S_1 Q_1} \quad 2.112$$

$$V = V_0 + \frac{1}{\rho^2 - \rho^{-2}} \left[ (v_2 - v_1 \rho^{-2}) t^2 + (v_1 \rho^2 - v_2) t^{-2} \right]$$

et

$$U = U_0 + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ \rho^4 t^{-2} - t^2 \right] \quad 2.113$$

.....

Les équations de base deviennent alors :

$$L/t V_o = -4 b_1 t U_o - \frac{4 b_1 [\rho^4 t^{-1} - t^3]}{\rho^4 - 1} \quad 2.114$$

$$L/t U_o = 4 b_1 t V_o + \frac{4 b_1 [(v_2 \rho^2 - v_1) t^3 + (v_1 \rho^4 - v_2 \rho^2) t^{-1}]}{\rho^4 - 1}$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$U_o = V_o = 0 \quad \text{pour } t = 1 \text{ et } t = \rho \quad 2.115$$

Le système 2.114 se transforme en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = +4 b_1 U_{on} + \frac{4 b_1}{\alpha_n} Z_1(\alpha_n) \quad 2.116$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} [v_1 Z_1(\alpha_n) - \rho v_2 Z_1(\alpha_n \rho)]$$

d'où l'on tire :

$$V_{on} = - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} [v_1 Z_1(\alpha_n) - \rho v_2 Z_1(\alpha_n \rho)] + \frac{4 b_1 \alpha_n Z_1(\alpha_n)}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \quad 2.117$$

$$U_{on} = - \frac{4 b_1 \alpha_n}{(\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} [v_1 Z_1(\alpha_n) - \rho v_2 Z_1(\alpha_n \rho)] - \frac{16 b_1^2 Z_1(\alpha_n)}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \quad 2.118$$

### 2.3.3.1 Rotations au droit des bases provoquées par un effort radial $F_1$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} Z_2(\alpha_n t) V_{on} + \frac{(v_2 \rho^2 - v_1) s/s_1 + (v_1 \rho^4 - v_2 \rho^2) s_1 s^{-1}}{\rho^4 - 1}$$

d'où l'on tire :

.....

$$s_1(v'_s)_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 b_1^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n v_2}{\beta_n^2 - 1} \right] + 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \frac{1}{\beta_n^2 - 1}$$

$$- v_1 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + \frac{2 \rho^2 v_2}{\rho^4 - 1}$$

$$s_2(v'_s)_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 b_1^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ \frac{\beta_n v_1}{\beta_n^2 - 1} - \frac{\beta_n^2 v_2}{\beta_n^2 - 1} \right] + 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \frac{\beta_n}{\beta_n^2 - 1}$$

$$- \frac{2 \rho^2 v_1}{\rho^4 - 1} + v_2 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1}$$

en écrivant que le moment est nul sur les deux bases, on obtient le système d'équations suivant :

$$- v_1 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] + \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] v_2$$

$$+ 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} = 0$$

$$- v_1 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] + v_2 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right]$$

$$+ 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} = 0 \quad 2.119$$

d'où l'on tire :

.....

$$V_1^{F_1} = 4 b_1 \frac{\left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}}{\Delta}$$

2.120

$$V_2^{F_1} = 4 b_1 \frac{\left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}}{\Delta}$$

2.121

rappelons que :

$$y_1^{F_1} = \frac{r_{o1} F_1}{k^2 D t_g \beta} V_1^{F_1} \quad \text{et} \quad y_2^{F_1} = \frac{r_{o1} F_1}{k^2 D t_g \beta} V_2^{F_1}$$

### 2.3.3.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un effort radial $F_1$

La dilatation radiale est toujours donnée par 2.36

$$\delta = \frac{r_{o1} F_1}{E e} \sin \beta (s U' - v U) \quad 2.122$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} Z_2(\alpha_n t) U_{on} + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left( \rho^4 \cdot \frac{s_1}{s} - \frac{s}{s_1} \right)$$

$$s U'_s = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{s_1} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n N_n^{-2} Z_1(\alpha_n t) U_{on} - \frac{1}{\rho^4 - 1} \left( \rho^4 \cdot \frac{s_1}{s} + \frac{s}{s_1} \right)$$

$$\delta_1^{F_1} = - \frac{r_{o1} F_1}{E e} \sin \beta X \quad 2.123$$

$$\left[ 4 b_1 V_1^{F_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - 4 b_1 V_2^{F_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v \right]$$

.....

$$\delta_2^{F_1} = - \frac{r_{o1} F_1}{E e} \sin \beta \quad 2.124$$

$$\left[ 4 b_1 V_1^{F_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - 4 b_1 V_2^{F_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} \right]$$

Dans les expressions 2.123 et 2.124 les coefficients  $V_1^{F_1}$  et  $V_2^{F_1}$  sont donnés par les formules 2.120 et 2.121.

#### 2.3.4 Cas d'un effort radial $F_2$ agissant sur la grande base (Voir Fig. 2.5)

$$V = \frac{k^2 D \operatorname{tg} \beta}{r_{o2} F_2} y \quad \text{et} \quad U = \frac{x}{r_{o2} F_2} = \frac{s Q}{s_2 Q_2}$$

$$V = V_0 + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ (V_2 \rho^2 - V_1) t^2 + (\rho^2 V_1 - V_2) \rho^2 t^{-2} \right]$$

2.125

et

$$U = U_0 + \frac{\rho^2}{\rho^4 - 1} (t^2 - t^{-2})$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$U_0 = V_0 = 0 \quad \text{pour} \quad t = 1 \quad \text{et} \quad t = \rho$$

Les équations de base deviennent :

$$L/t V_0 = -4 b_1 t U_0 - \frac{4 b_1 \rho^2 (t^3 - t^{-1})}{\rho^4 - 1}$$

$$L/t U_0 = 4 b_1 t V_0 + \frac{4 b_1 \left[ (V_2 \rho^2 - V_1) t^3 + (V_1 \rho^4 - V_2 \rho^2) t^{-1} \right]}{\rho^4 - 1}$$

et se transforment en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = 4 b_1 U_{on} - \frac{4 b_1 \rho Z_1(\alpha_n \rho)}{\alpha_n} \quad 2.126$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

.....

d'où l'on tire :

$$V_{on} = - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ V_1 z_1(\alpha_n) - \rho V_2 z_1(\alpha_n \rho) \right] - \frac{4 b_1 \rho \alpha_n z_1(\alpha_n \rho)}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \quad 2.127$$

$$U_{on} = - \frac{4 b_1 \alpha_n}{(\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ V_1 z_1(\alpha_n) - \rho V_2 z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{16 b_1^2 \rho z_1(\alpha_n \rho)}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \quad 2.128$$

### 2.3.4.1 Rotations au droit des bases provoquées par un effort $F_2$

Les moments étant nuls en  $t = 1$  et  $t = \rho$ , nous obtenons les deux relations :

$$\left[ s V'_s \right]_1 + v V_1 = 0 \quad \text{et} \quad \left[ s V'_s \right]_2 + v V_2 = 0$$

Portant dans ces équations  $\left[ s V'_s \right]_1$  et  $\left[ s V'_s \right]_2$  toujours donnés par 2.88 et 2.89 avec  $U_{on}$  et  $V_{on}$  tirés de 2.127 et 2.128, nous obtenons le système :

$$- V_1 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] + \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] V_2 - 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} = 0$$

$$- V_1 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] + \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] V_2 - 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} = 0$$

La résolution de ce système donne :

$$V_1 = -4 b_1 \frac{F_2 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n}}{\Delta}$$

2.129

.....

$$V_2^{F_2} = 4 b_1 \frac{\left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}}{\Delta}$$

2.130

Rappelons que :

$$y_2^{F_2} = \frac{r_{o2} F_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} V_2^{F_2} \quad y_1^{F_2} = \frac{r_{o2} F_2}{k^2 D \operatorname{tg} \beta} V_1^{F_2}$$

2.3.4.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un effort  $F_2$ 

$$\delta = \frac{r_{o2} F_2}{E e} \sin \beta (s U' - v U)$$

$$s U' = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{s_1} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n N_n^{-2} Z_1(\alpha_n t) U_{on} + \frac{\rho^2}{\rho^4 - 1} \left( \frac{s}{s_1} + \frac{s_1}{s} \right)$$

$$\delta_1^{F_2} = \frac{r_{o2} F_2}{E e} \sin \beta \quad 2.131$$

$$\left[ -4 b_1 V_1^{F_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{F_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} \right]$$

$$\delta_2^{F_2} = \frac{r_{o2} F_2}{E e} \sin \beta \quad 2.132$$

$$\left[ -4 b_1 V_1^{F_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{F_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} + \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v \right]$$

.....



### 2.3.5 Cas d'efforts axiaux équilibrés (Voir Fig. 2.6)

$$\text{On a évidemment : } r_{o2} H_2 = r_{o1} H_1 \quad 2.133$$

Nous poserons :

$$V = \frac{k^2 D}{r_{o1} H_1} \quad \text{et} \quad U = \frac{x \cotg \beta}{r_{o1} H_1} = \frac{s Q}{s_1 Q_1} \quad 2.134$$

H sera considéré comme positif lorsqu'il provoque un effort de cisaillement Q positif. (Voir Fig. 2.6)

D'après 1.34, nous pouvons écrire :

$$N = Q \operatorname{tg} \beta \quad 2.135$$

Les équations de base se réduisent à :

$$L/t V = -4 b_1 t U$$

$$L/t U = 4 b_1 t V$$

Les conditions aux limites sont :

$$U = 1 \quad \text{d'après 2.133 pour } t = 1 \quad \text{et } t = \rho$$

$$V = V_1 \quad \text{pour } t = 1 \quad \text{et } V = V_2 \quad \text{pour } t = \rho$$

Si nous effectuons les changements de variables :

$$U = U_0 + 1$$

$$V = V_0 + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ (V_2 \rho^2 - V_1) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) \rho^2 t^{-2} \right] \quad 2.136$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$U_0 = V_0 = 0 \quad \text{pour } t = 1 \quad \text{et } t = \rho$$

Les équations de base s'écrivent alors :

$$L V_0 = -4 b_1 t U_0 - 4 b_1 t$$

$$L U_0 = 4 b_1 t V_0 + \frac{4 b_1 t}{\rho^4 - 1} \left[ (V_2 \rho^2 - V_1) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) \rho^2 t^{-2} \right] + 4 t^{-1} \quad 2.137$$

.....

Avant de transformer ces équations, calculons les coefficients du développement en série de fonctions de Bessel  $Z_2(\alpha_n t)$  d'une constante.

D'après G. FETIAU (1) page 186, formule 6, on a :

$$\int z Z_2(z) dz = z Z_3(z) - 2 Z_2(z) + 4 \int z^{-1} Z_2(z) dz$$

d'où :

$$\int_1^\rho t Z_2(\alpha_n t) dt = -\frac{1}{\alpha_n} \left[ t Z_2(\alpha_n t) \right]_1^\rho + \frac{4}{\alpha_n^2} \int_1^\rho t^{-1} Z_2(\alpha_n t) dt$$

compte tenu de 2.82 on obtient :

$$\int_1^\rho t Z_2(\alpha_n t) dt = -\frac{1}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho Z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{4}{\alpha_n^3} \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.138$$

Le système 2.137 se transforme en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = +4 b_1 U_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho Z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{4 b_1}{\alpha_n^3} \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.139$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] - \frac{4}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.140$$

Résolvant on obtient :

$$V_{on} = -\frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] - \frac{12 b_1}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] - \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.141$$

$$U_{on} = \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] - \left[ \frac{1}{\alpha_n^3} + \frac{3 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \right] \left[ Z_1(\alpha_n) - \frac{1}{\rho} Z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 2.142$$

.....

2.3.5.1 Rotations provoquées par des efforts axiaux équilibrés

Les conditions de moment nul sur les deux bases s'expriment toujours par :

$$s V'_g + v V = 0 \quad \text{en } t = 1 \text{ et } t = \rho$$

Compte tenu de 2.96, 2.97 et de 2.141, 2.142, ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} V_1 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] - V_2 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \\ = 4 b_1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad 2.143$$

$$\begin{aligned} V_1 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] + V_2 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \\ = -4 b_1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad 2.144$$

Résolvant on obtient :

$$\begin{aligned} V_1^H = \frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \right\} \quad 2.145 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2^H = -\frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} (\beta_n - 1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{\beta_n}{\rho^2} - 1 \right) \right] \right\} \quad 2.146 \end{aligned}$$

$\Delta$  est toujours donné par 3.34 .

.....

### 2.3.5.2 Dilatations provoquées par des efforts axiaux équilibrés

La dilatation radiale toujours donnée par 2.36 se transforme pour ce cas de charge en :

$$\delta = \frac{r_{o1} H_1}{E e} \sin \beta \operatorname{tg} \beta \left[ s U'_s - v U \right]$$

$$\text{or : } U = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} Z_2(\alpha_n t) U_{on} \quad \text{et :}$$

$$\begin{aligned} s_1 \left[ U'_s \right]_1 &= -4 b_1 v_1^H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)} + \frac{3}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \end{aligned} \quad 2.147$$

$$\begin{aligned} s_2 \left[ U'_s \right]_2 &= -4 b_1 v_1^H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)} + \frac{3}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \end{aligned} \quad 2.148$$

$$\text{Remarquons que : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)} = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 (\beta_n^2 - 1)}$$

d'où :

$$\delta_1^H = \frac{r_{o1} H_1}{E e} \sin \beta \operatorname{tg} \beta \left\{ s_1 \left[ U'_s \right]_1 - v \right\} \quad 2.149$$

$$\delta_2^H = \frac{r_{o1} H_1}{E e} \sin \beta \operatorname{tg} \beta \left\{ s_2 \left[ U'_s \right]_2 - v \right\} \quad 2.150$$

$s U'_s$  pour  $t = 1$  et  $t = \rho$  se calcule à l'aide des formules 2.147 et 2.148.

.....

2.3.6 Cas d'une pression constante p équilibrée par des efforts axiaux  
(Voir Fig. 2.7)

Nous choisirons les efforts axiaux tels que :  $H_2 = \frac{1}{2} p r_{o2}$  et  
 $H_1 = \frac{1}{2} p r_{o1}$ . Nous avons alors (Voir paragraphe 2.2.3)

$$S = -\frac{1}{2} p s^2 \sin^2 \beta$$

$$N = \frac{x}{s} + \frac{1}{2} p s \operatorname{tg} \beta$$

$$n = \frac{dx}{ds} + p s \operatorname{tg} \beta$$

Si nous posons :

$$V = y \frac{k^2 D}{r_{o1} H_1} \quad U = \frac{x \operatorname{cotg} \beta}{r_{o1} H_1} = -\frac{s Q}{s_1 Q_1} \quad \text{et} \quad t = (s/s_1)^{1/2} \quad 2.151$$

les équations de base s'écrivent :

$$L/t V = -4 b_1 t U$$

$$L/t U = 4 b_1 t V - \frac{12 t^3}{\sin^2 \beta}$$

Les valeurs de U sur les bases seront :

$$U = -1 \quad \text{pour} \quad t = 1 \quad \text{et} \quad U = -\rho^4 \quad \text{pour} \quad t = \rho \quad 2.152$$

Avec le changement de variables :

$$V = V_o + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ (v_2 \rho^2 - v_1) t^2 + (v_1 \rho^2 - v_2) \rho^2 t^{-2} \right] \quad 2.153$$

$$U = U_o - \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ (\rho^6 - 1) t^2 - \rho^4 (\rho^2 - 1) t^{-2} \right]$$

Les équations de base deviennent :

$$L/t V_o = -4 b_1 t U_o + \frac{4 b_1}{\rho^4 - 1} \left[ (\rho^6 - 1) t^3 - \rho^4 (\rho^2 - 1) t^{-1} \right] \quad 2.154$$

$$L/t U_o = 4 b_1 t V_o + \frac{4 b_1}{\rho^4 - 1} \left[ (v_2 \rho^2 - v_1) t^3 + (v_1 \rho^2 - v_2) \rho^2 t^{-1} \right] - \frac{12 t^3}{\sin^2 \beta}$$

.....

et se transforment en :

$$\alpha_n^2 V_{on} = 4 b_1 U_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} z_1(\alpha_n) + \frac{4 b_1}{\alpha_n} \rho^5 z_1(\alpha_n \rho) \quad 2.155$$

$$\alpha_n^2 U_{on} = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ v_1 z_1(\alpha_n) - \rho v_2 z_2(\alpha_n \rho) \right] + \frac{12 \sin^2 \beta}{\alpha_n} \left[ z_1(\alpha_n) - \rho^3 z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

d'où en résolvant :

2.156

$$V_{on} = - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ v_1 z_1(\alpha_n) - \rho v_2 z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{48 b_1 \sin^2 \beta}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ z_1(\alpha_n) - \rho^3 z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

$$- \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} z_1(\alpha_n) + \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \rho^5 z_1(\alpha_n \rho) \quad 2.157$$

$$U_{on} = - \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ v_1 z_1(\alpha_n) - \rho v_2 z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{12 \alpha_n \sin^2 \beta}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ z_1(\alpha_n) - \rho^3 z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

$$+ \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} z_1(\alpha_n) - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \rho^5 z_1(\alpha_n \rho) \quad 2.158$$

### 2.3.6.1 Rotations provoquées au droit des bases par une pression constante équilibrée par des efforts axiaux

Les conditions de moment nul sur les deux bases sont toujours données par :

$$s V_s' + v V = 0 \quad \text{pour } t = 1 \text{ et } t = \rho$$

d'où les équations :

$$V_1 \left[ \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} - v + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] - V_2 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right]$$

$$= 4 b_1 \left[ 12 \sin^2 \beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right] \quad 2.159$$

.....

$$\begin{aligned}
 & -v_1 \left[ \frac{2\rho^2}{\rho^4-1} + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] + v_2 \left[ \frac{\rho^4+1}{\rho^4-1} + v + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \\
 & = -4b_1 \left[ 12 \sin^{-2}\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right] \quad 2.160
 \end{aligned}$$

d'où en résolvant :

$$\begin{aligned}
 v_1^p &= \frac{4b_1}{\Delta} \left[ \frac{\rho^4+1}{\rho^4-1} + v + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \left[ 12 \sin^{-2}\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right] \\
 & - \left[ \frac{2\rho^2}{\rho^4-1} + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ 12 \sin^{-2}\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right] \quad 2.161
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2^p &= -\frac{4b_1}{\Delta} \left[ \frac{\rho^4+1}{\rho^4-1} - v + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \left[ 12 \sin^{-2}\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right] \\
 & - \left[ \frac{2\rho^2}{\rho^4-1} + 16b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ 12 \sin^{-2}\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right] \quad 2.162
 \end{aligned}$$

Notons que :

$$y_1^p = \frac{r_0 H_1}{k^2 D} v_1^p \quad \text{et} \quad y_2^p = \frac{r_0 H_1}{k^2 D} v_2^p$$

et que  $\Delta$  est toujours donné par 3.34.

### 2.3.6.2 Dilatations au droit des bases provoquées par une pression constante équilibrée par des efforts axiaux

La dilatation radiale s'écrit :

$$\delta = \epsilon_{\theta} r_0 = \frac{s \sin \beta}{E e} [n - vN]$$

Remplaçant les valeurs de  $n$  et  $N$  données au début de 2.3.6, nous obtenons :

.....

$$\delta = \frac{\sin \beta}{E e} \left( s \frac{dx}{ds} - v x \right) + \frac{p r_o^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{v}{2} \right)$$

ou encore :

$$\delta = \frac{\sin^2 \beta}{E e \cos \beta} \frac{p r_{o1}^2}{2} (s U' - v U) + \frac{p r_o^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{v}{2} \right) \quad 2.163$$

et

$$\delta_1^p = \frac{\sin^2 \beta}{E e \cos \beta} \frac{p r_{o1}^2}{2} \left[ s_1 \left[ U'_s \right]_1 - v \right] + \frac{p r_{o1}^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{v}{2} \right) \quad 2.164$$

$$\delta_2^p = \frac{\sin^2 \beta}{E e \cos \beta} \frac{p r_{o1}^2}{2} \left[ s_2 \left[ U'_s \right]_2 - v \rho^4 \right] + \frac{p r_{o2}^2}{E e \cos \beta} \left( 1 - \frac{v}{2} \right) \quad 2.165$$

avec :

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = -4 b_1 v_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 12 \sin^{-2} \beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right] \\ + 16 b_1^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} - \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \quad 2.166$$

$$s_2 \left[ U'_s \right]_2 = -4 b_1 v_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} + 12 \sin^{-2} \beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right] \\ + 16 b_1^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \quad 2.167$$



#### 2.4 Coques tronconiques "longues"

Dans les paragraphes 2.2 et 2.3, nous avons traité les cas des coques coniques et tronconiques "courtes". Les domaines de définition des fonctions inconnues  $U$  et  $V$  sont respectivement  $(0,1)$  et  $(1, \rho > 1)$ . Les solutions des équations de base s'obtiennent par des développements en série de fonctions propres relatives à l'équation différentielle  $L f + \lambda t f = \frac{d}{dt} + \frac{df}{dt} - \frac{4f}{t} + \lambda t f = 0$  et s'annulant aux bornes du domaine de définition.

Les valeurs propres correspondent pour les coques coniques  $(0,1)$  aux zéros  $\alpha_n$  solutions de  $J_2(\alpha_n) = 0$ , pour les coques tronconiques courtes aux zéros  $\beta_n$  solutions de l'équation transcendante :

$$J_2(\beta_n) N_2(\beta_n \rho) - J_2(\beta_n \rho) N_2(\beta_n) = 0$$

Le spectre des valeurs propres est discret pour les deux cas ci-dessus envisagés et les solutions des équations de base s'obtiennent par des développements en série de fonctions propres.

Pour les coques tronconiques "longues"  $\rho \rightarrow \infty$  les zéros  $\beta_n$  de l'équation transcendante s'expriment par :  $\beta_n = \frac{\alpha_n}{\rho - 1}$  où  $\alpha_n$  sont les zéros de  $J_2(\alpha_n)$  - Voir les études de S. KLINE (2), H.B. DWIGHT (3) et l'ouvrage de G. PETIAU (1), pages 171 à 182.

Le spectre des valeurs propres devient alors continu et les développements en série doivent être remplacés par des intégrales de FOURIER - BESSEL - Voir G. PETIAU (1) p. 272 à 279 - S. C. TITCHMARSH (4) p. 74, 75 et I.N. SNEDDON (5) p. 48 à 91.

Nous utiliserons dans notre étude le théorème de WEBER.

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2(t, \beta) - J_2(t, \beta) N_2(\beta)}{J_2^2(\beta) + N_2^2(\beta)} \beta d\beta$$

$$\cdot \int_1^{\infty} \alpha f(\alpha) \left\{ J_2(\beta) N_2(\alpha\beta) - J_2(\alpha\beta) N_2(\beta) \right\} d\alpha \quad 2.168$$

Notons que :

$$J_2^2(\beta) + N_2^2(\beta) = H_2^1(\beta) \cdot H_2^2(\beta)$$

.....

### 2.4.1 Cas d'un moment $M_1$ appliqué à la petite base

Nous poserons comme dans le chapitre 2.3.1 :

$$\begin{aligned} V &= y k^2 D/M_1 & U &= x \cotg \beta / M_1 = s Q/M_1 \\ t &= (s/s_1)^{1/2} \end{aligned} \quad 2.169$$

Les équations de base sont :

$$\begin{aligned} L/t \ V &= -4 b_1 t U \\ L/t \ U &= 4 b_1 t V \end{aligned}$$

$V_1$  désignant la rotation sur la base provoquée par  $M_1$ , nous écrivons :

$$V = V_0 + V_1 t^{-2} \quad 2.170$$

Les équations de base se transforment en :

$$\begin{aligned} L/t \ V_0 &= -4 b_1 t U \\ L/t \ U &= 4 b_1 t V_0 + 4 b_1 V_1 t^{-1} \end{aligned} \quad 2.171$$

Développons  $U$  et  $V$  à l'aide du théorème de WEBER et notons :

$$\begin{aligned} V_{0\beta} &= \int_1^\infty \alpha V_0(\alpha) Z_2(\alpha\beta) d\alpha \\ U_\beta &= \int_1^\infty \alpha U(\alpha) Z_2(\beta\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad 2.172$$

$$\text{où } Z_2(\beta\alpha) = J_2(\alpha) N_2(\beta\alpha) - J_2(\beta\alpha) N_2(\alpha)$$

Si nous remarquons que :

$$\int_1^\infty L_\alpha(f) Z_2(\alpha\beta) d\alpha = -\beta^2 f_\beta = -\beta^2 \int_1^\infty \alpha f(\alpha) Z_2(\beta,\alpha) d\alpha \quad 2.173$$

et de plus que :

$$\int_1^\infty \alpha^{-1} Z_2(\alpha\beta) d\alpha = \frac{1}{\beta} Z_1(\beta) = \frac{1}{\beta} \left\{ J_2(\beta) N_1(\beta) - J_1(\beta) N_2(\beta) \right\} \dots\dots$$

Utilisant les formules de récurrence :

$$J_1(\beta) = \frac{2}{\beta} J_2(\beta) + J_2'(\beta) \quad \text{et} \quad N_1(\beta) = \frac{2}{\beta} N_2(\beta) + N_2'(\beta)$$

et la valeur du Wronskien :  $W \left\{ J_2(\beta) N_2(\beta) \right\} = \frac{2}{\pi \beta}$

on obtient :

$$\int_1^{\infty} \alpha^{-1} Z_2(\alpha\beta) d\alpha = \frac{2}{\pi \beta^2} \quad 2.174$$

Le système 2.171 se transforme en :

$$\beta^2 V_{0\beta} = 4 b_1 U_{\beta}$$

$$\beta^2 U_{\beta} = -4 b_1 V_{0\beta} - \frac{8 b_1 V_1}{\pi \beta^2}$$

résolvant on obtient :

$$V_{0\beta} = -\frac{32}{\pi \beta^2} \cdot \frac{b_1^2 V_1}{\beta^4 + 16 b_1^2} \quad \text{et} \quad U_{\beta} = -\frac{8}{\pi} \cdot \frac{b_1 V_1}{\beta^4 + 16 b_1^2} \quad 2.175$$

#### 2.4.1.1 Rotation provoquée par un moment $M_1$

Le moment nul en  $t = 1$  entraîne la condition :

$$-b_1 = s_1 \left[ V'_s \right]_1 + v V_1 \quad 2.176$$

$$\text{or : } V = \frac{V_1 s_1}{s} - \frac{32 b_1^2 V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2(t\beta) - J_2(t\beta) N_2(\beta)}{\beta H_2^1(\beta) H_2^2(\beta) (\beta^4 + 16 b_1^2)} d\beta$$

$$V'_s = -\frac{V_1 s_1}{s^2} - \frac{16 b_1^2 V_1}{\pi (s s_1)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2'(t\beta) - J_2'(t\beta) N_2(\beta)}{H_2^1(\beta) H_2^2(\beta) (\beta^4 + 16 b_1^2)} d\beta$$

$$s_1 \left[ V'_s \right]_1 = -V_1 - \frac{16 b_1^2 V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2'(\beta) - J_2'(\beta) N_2(\beta)}{H_2^1(\beta) H_2^2(\beta) (\beta^4 + 16 b_1^2)} d\beta$$

.....

Compte tenu de  $W(J_2(\rho), N_2\beta) = \frac{2}{\pi\beta}$ , nous obtenons :

$$s_1 \left[ v'_s \right]_1 = -v_1 - \frac{32 b_1^2 v_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

d'où portant cette valeur dans l'équation 2.176 il vient :

$$v_1 = \frac{b_1}{1 - v + \frac{32 b_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}} \quad 2.177$$

#### 2.4.1.2 Dilatation au droit de la base provoquée par un moment $M_1$

La dilatation radiale est toujours donnée par la formule 2.102

$$\delta = \frac{M_1 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} (\varepsilon U' - v U)$$

or :

$$U = - \frac{8 b_1 v_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J(\beta) N_2(\beta t) - J_2(\beta t) N_2(\beta)}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)} \beta \, d\beta$$

$$\varepsilon U'_s = - \frac{4 b_1 v_1}{\pi (\varepsilon s_1)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{J(\beta) N'_2(\beta t) - J'_2(\beta t) N_2(\beta)}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)} \beta^2 \, d\beta$$

et :

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = - \frac{8 b_1 v_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

d'où :

$$\delta_1 = - \frac{M_1 \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{E e} \cdot \frac{\frac{8 b_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}}{1 - v + \frac{32 b_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}} \quad 2.178$$

### 2.4.2 Cas d'un effort radial $F_1$ appliqué à la base

Nous le considérons positif lorsqu'il est dirigé vers l'intérieur puisqu'il produit alors un cisaillement  $Q_1$  positif sur la petite base. Nous écrirons de plus :

$$V = \frac{y k^2 D \operatorname{tg} \beta}{r_{o1} F_1} \quad \text{et} \quad U = \frac{X}{r_{o1} F_1} = \frac{s Q}{s_1 Q_1}$$

$$V = V_0 + V_1 t^{-2} \quad \text{et} \quad U = U_0 + t^{-2} \quad 2.179$$

Les équations de base deviennent :

$$L V_0 = -4 b_1 t U_0 - 4 b_1 t^{-1}$$

$$L U_0 = 4 b_1 t V_0 + 4 b_1 V_1 t^{-1}$$

qui se transforment en :

$$\beta^2 V_{o\beta} = 4 b_1 U_{o\beta} + \frac{8 b_1}{\pi \beta^2}$$

$$\beta^2 U_{o\beta} = -4 b_1 V_{o\beta} - \frac{8 b_1 V_1}{\pi \beta^2}$$

d'où résolvant l'on obtient :

$$V_{o\beta} = -\frac{32 b_1^2 V_1}{\pi \beta^2} \cdot \frac{1}{\beta^4 + 16 b_1^2} + \frac{8 b_1}{\pi} \frac{1}{\beta^4 + 16 b_1^2}$$

2.180

$$U_{o\beta} = -\frac{8 b_1 V_1}{\pi} \frac{1}{\beta^4 + 16 b_1^2} - \frac{32 b_1^2 V_1}{\pi \beta^2} \frac{1}{\beta^4 + 16 b_1^2}$$

#### 2.4.2.1 Rotation provoquée sur la petite base par un effort radial $F_1$

La condition de moment nul est donnée par  $s_1 \left[ \begin{matrix} V' \\ S \end{matrix} \right]_1 + v V_1 = 0$

.....

$$v = \frac{v_1 s_1}{s} - \frac{32 b_1^2 v_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2(\beta, t) - J_2(\beta, t) N_2(\beta)}{\beta H_2^1(\beta) H_2^2(\beta) (\beta^4 + 16 b_1^2)} d\beta$$

$$+ \frac{8 b_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_2(\beta) N_2(\beta, t) - J_2(\beta, t) N_2(\beta)}{H_2^1(\beta) H_2^2(\beta) (\beta^4 + 16 b_1^2)} \beta d\beta$$

et :

$$s_1 \left[ v'_s \right]_1 = -v_1 - \frac{32 b_1^2 v_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

$$+ \frac{8 b_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

portant dans 2.176 , on obtient :

$$F_1 = \frac{\frac{8 b_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}}{1 - v + \frac{32 b_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}}$$

2.181

#### 2.4.2.2 Dilatation sur la petite base provoquée par un effort radial $F_1$

La dilatation est toujours donnée par 2.122 .

On a d'autre part :

$$s_1 \left[ u'_s \right]_1 = -v_1 - \frac{8 b_1 v_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

$$- \frac{32 b_1^2 v_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)}$$

.....

d'où l'on tire :

$$\delta_1^{\frac{F_1}{e}} = - \frac{r_{01} F_1}{E e} \frac{F_1}{V_1} \left\{ 1 + \nu + \frac{32 b_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta (\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)} \right. \\ \left. + \frac{8 b_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\beta^4 + 16 b_1^2) H_2^1(\beta) H_2^2(\beta)} \right\} \quad 2.182$$

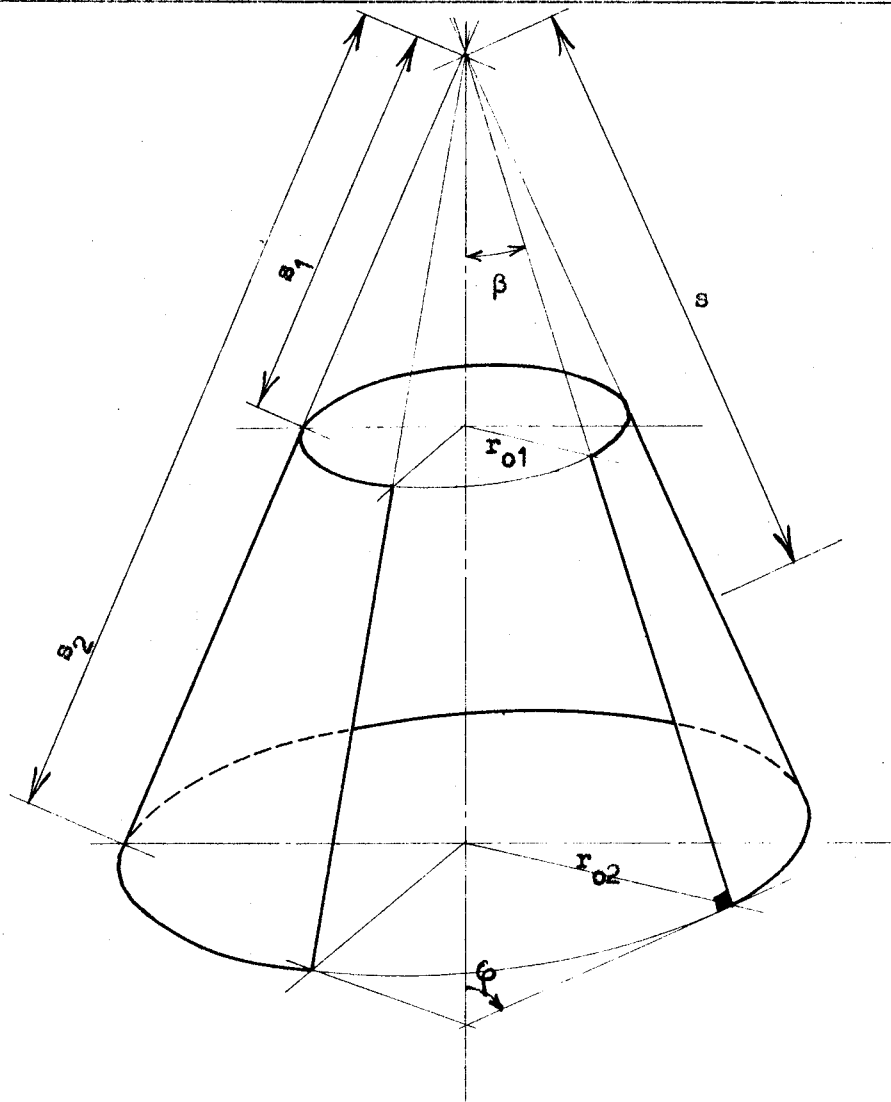


Fig. 2.1

Fig. 2.2

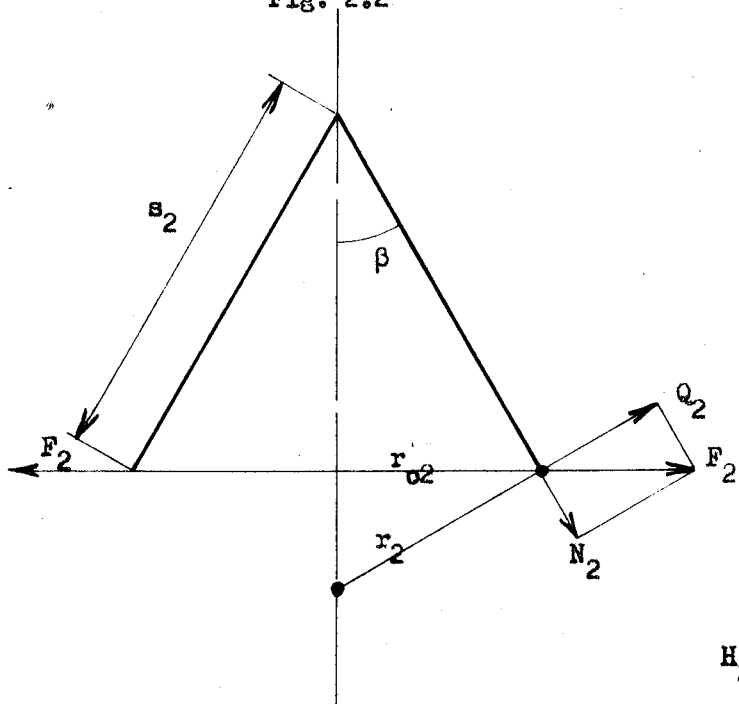


Fig. 2.3

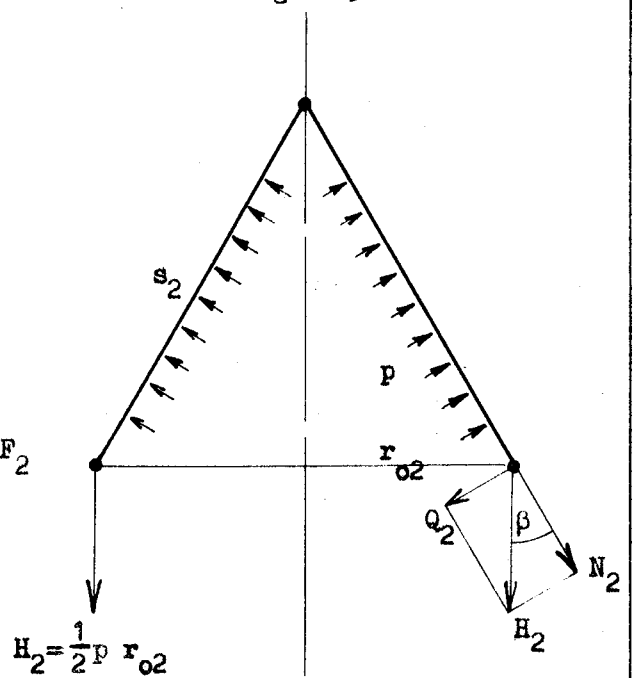




Fig. 2.4

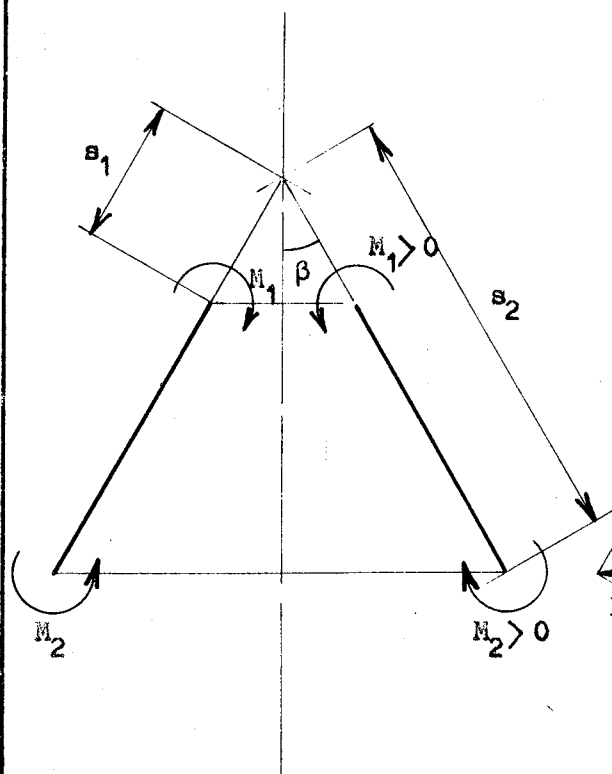


Fig. 2.5

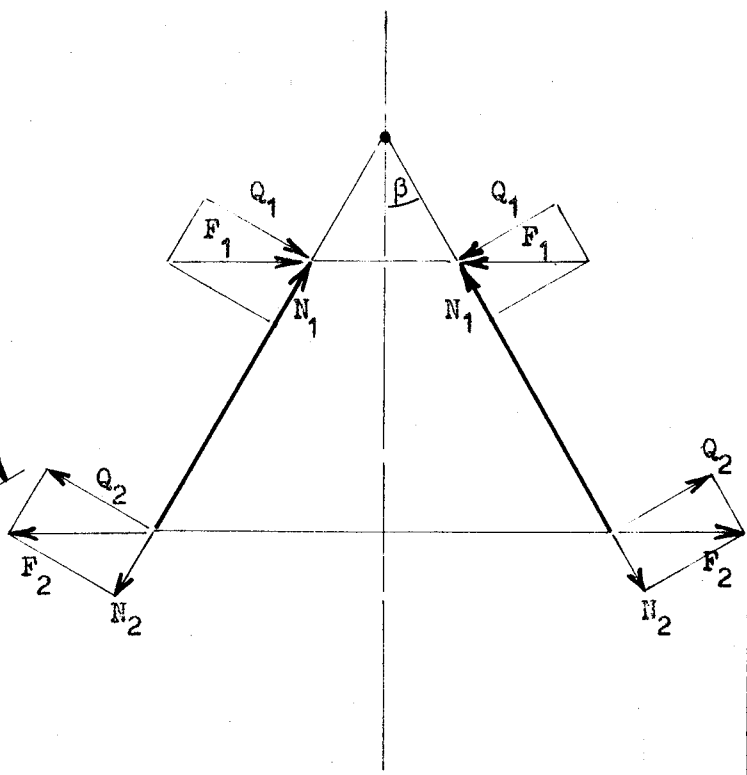


Fig. 2.6

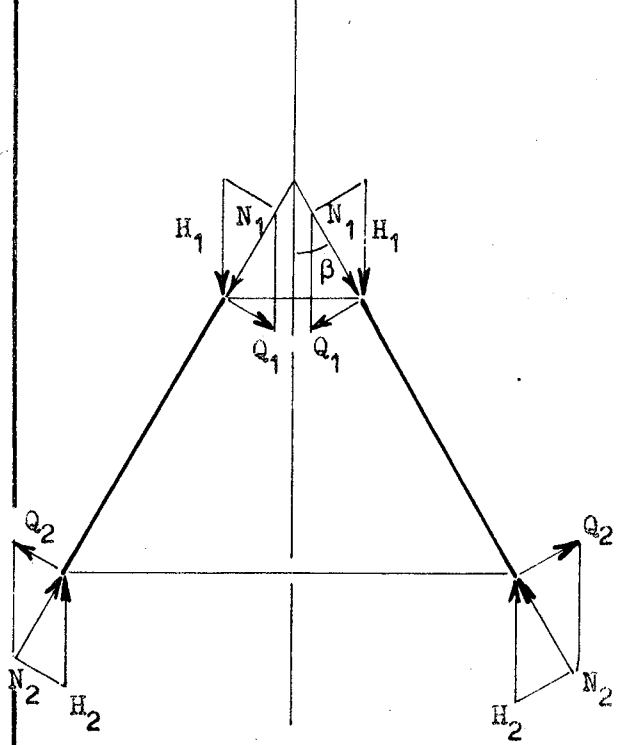
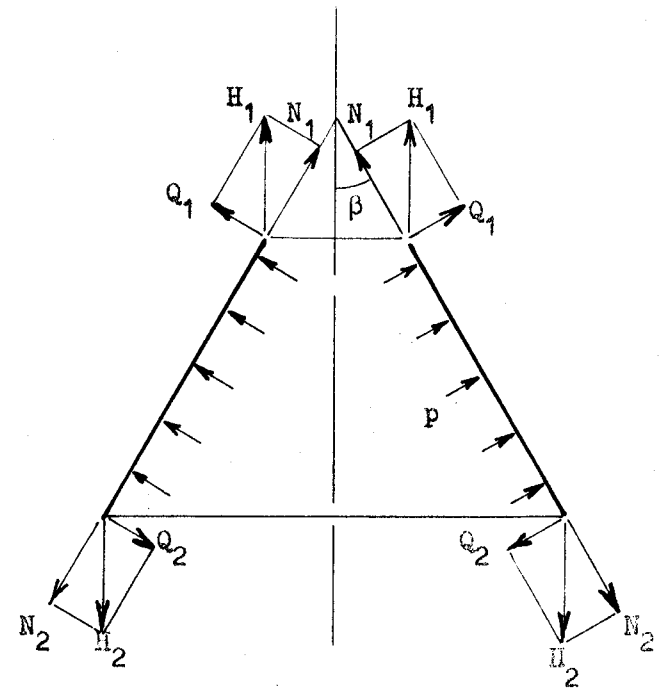


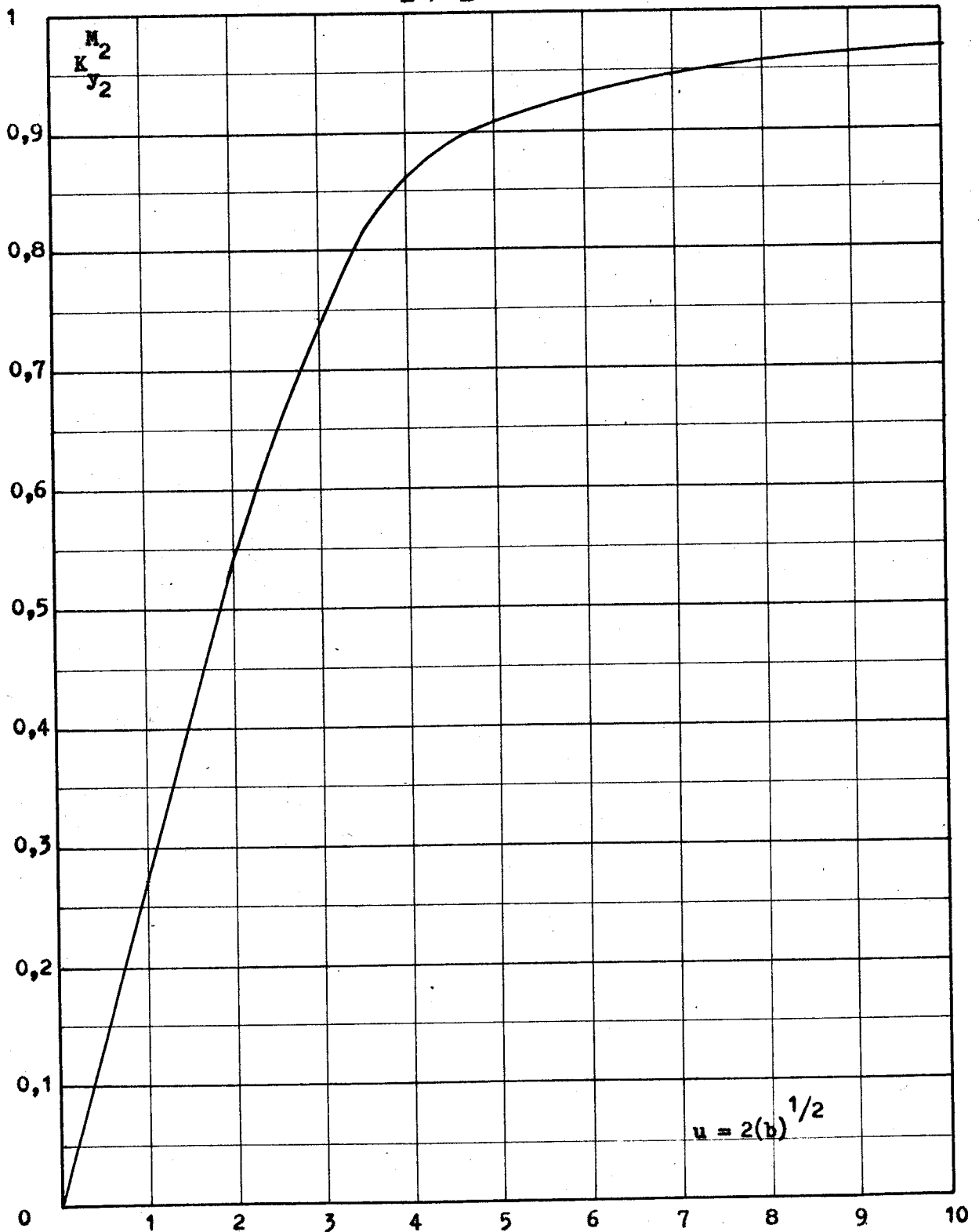
Fig. 2.7



Courbe 2.1

Posant  $u = 2(b)^{1/2}$  la formule 2.59 devient :

$$\frac{M_2}{K_{y_2}} = \frac{1}{1 + v + u^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + u^4}} \cdot \frac{u}{2\sqrt{2}}$$

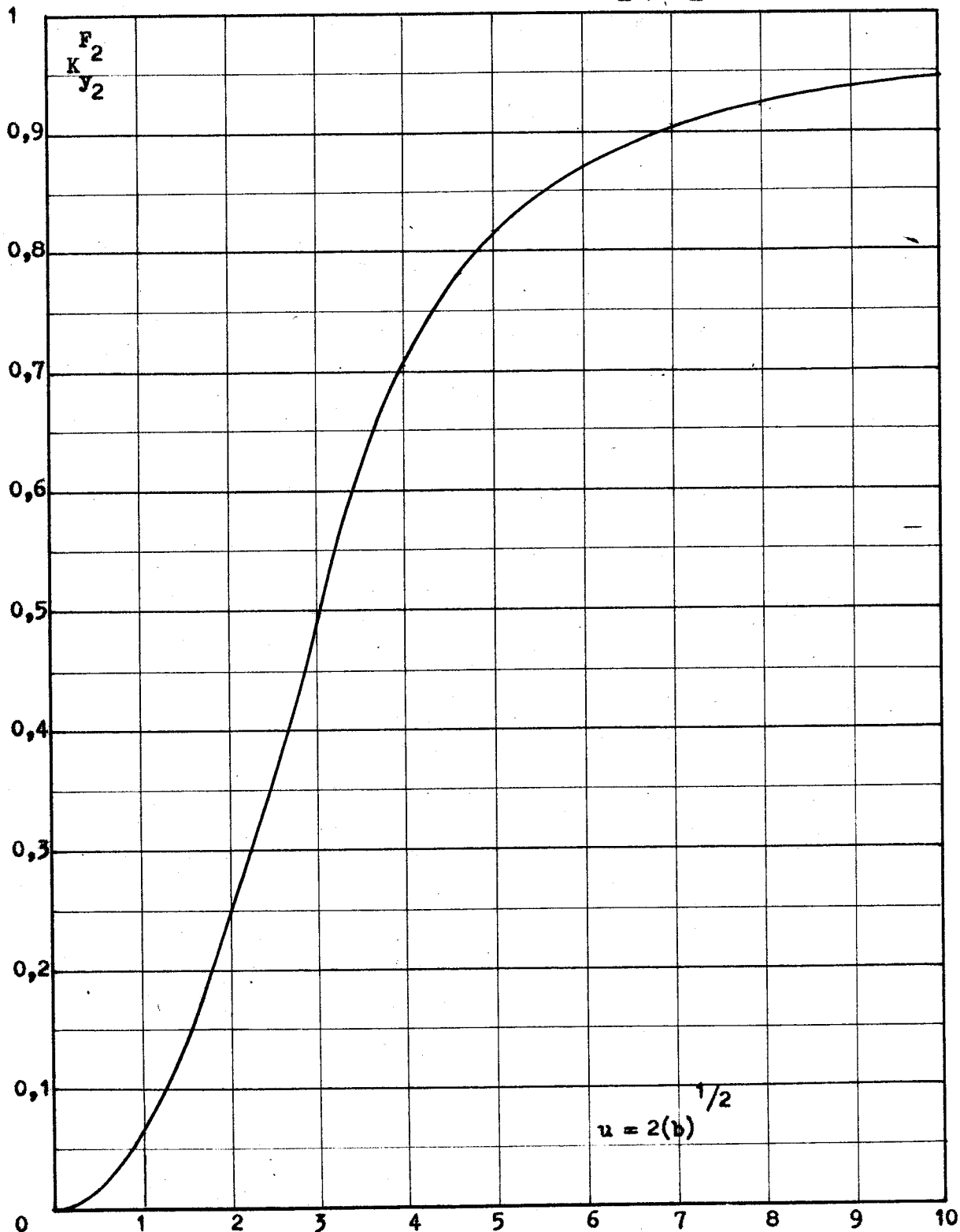


## Courbe 2.2

Posant  $u = 2(b)^{1/2}$

la formule 2.60 devient :

$$\frac{F_2}{K y_2} = \frac{u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^4 + u^4}}{1 + v + u^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 + u^4}}$$



## CHAPITRE TROISIEME

3. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES CYLINDRIQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

L'étude de la flexion des coques cylindriques d'épaisseur variable présente un grand intérêt car ce type d'enveloppe a de nombreuses applications pratiques tant en génie civil (réservoirs, silos, etc...) qu'en construction mécanique.

Nous examinerons ici le problème de la flexion des coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable qui peut être traité analytiquement. Pour le cas d'une variation quelconque d'épaisseur, nous renvoyons le lecteur à la deuxième partie de notre étude qui traite des méthodes de résolutions numériques.

3.1 Equations de base (Voir Fig. 3.1)3.1.1 Equations d'équilibre :

$$\frac{dN}{ds} = 0 \quad 3.1$$

$$\frac{dQ}{ds} + p = \frac{n}{a} \quad 3.2$$

$$\frac{dM}{ds} - Q = 0 \quad 3.3$$

3.1.2 Expressions des contraintes en fonction des déformations :

$$N = \frac{E e}{1 - \nu^2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta) = D_N \left( \frac{dv}{ds} + \nu \frac{w}{a} \right) \quad 3.4$$

$$n = \frac{E e}{1 - \nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s) = D_N \left( \frac{w}{a} + \nu \frac{dv}{ds} \right) \quad 3.5$$

$$M = -D \frac{d^2 w}{ds^2} = -D \frac{dv}{ds}, \quad m = \nu M \quad 3.6$$

L'intégration de 3.1 donne  $N = N_0$  d'où :

$$\frac{dv}{ds} + \nu \frac{w}{a} = \frac{N_0}{D_N} = \frac{N_0 (1 - \nu^2)}{E e}$$

$$\text{et} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{N_0}{D_N} - \nu \frac{w}{a} \quad 3.7$$

3.5 s'écrit alors :

$$n = \frac{E e}{a} w + \nu N_o \quad 3.8$$

### 3.1.3 Equations de base

#### 3.1.3.1 Cas d'une épaisseur linéairement variable :

Nous poserons (Voir Fig. 3.1)

$$e = \beta s \quad \text{d'où} \quad e_1 = \beta s_1 \quad \text{et} \quad e_2 = \beta s_2 \quad 3.9$$

Dérivons 3.2 tenant compte de 3.8 nous obtenons :

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{s} \frac{dQ}{ds} = \frac{E \beta}{a^2} y - \frac{d}{ds} (p/s) + \frac{\nu}{a} \frac{d}{ds} (N_o/s) \quad 3.10$$

En dérivant 3.6, il vient :

$$\frac{d}{ds} s^3 \frac{dy}{ds} = - \frac{12(1-\nu^2)}{E \beta^3} Q$$

qui peut encore s'écrire :

$$s^2 \frac{d}{ds} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} s^2 y = - \frac{12(1-\nu^2)}{E \beta^3} Q \quad 3.11$$

Par les changements de variables

$$y = Y/s \quad \text{et} \quad Q = x s \quad 3.12$$

3.10 et 3.11 deviennent :

$$\frac{d}{ds} s \frac{dx}{ds} - \frac{x}{s} = \frac{E \beta}{a^2} Y - s \frac{d}{ds} (p/s) + \frac{\nu s}{a} \frac{d}{ds} (N_o/s) \quad 3.13$$

$$\frac{d}{ds} s \frac{dY}{ds} - \frac{Y}{s} = - \frac{12(1-\nu^2)}{E \beta^3} x \quad 3.14$$

#### 3.1.3.2 Variation quelconque d'épaisseur :

Dérivant 3.2, il vient tenant compte de 3.8 :

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{dQ}{ds} = \frac{E}{a^2} y - \frac{d}{ds} (p/h) + \frac{\nu}{a} \frac{d}{ds} (N_o/h) \quad 3.15$$

.....

Par dérivation 3.6 se transforme de même en :

$$\frac{d}{ds} h^3 \frac{dv}{ds} = \frac{12(1-\nu^2)}{E} Q \quad 3.16$$

### 3.2 Cocques cylindriques d'épaisseur linéairement variable

#### 3.2.1 Transformation des équations de base

Nous poserons :

$$V = \frac{E \beta}{a^2 k^2} \frac{Y}{F} \quad U = \frac{x}{F} \quad 3.17$$

$$b_1 = k^2 s_1, \quad b_2 = k^2 s_2 \quad \text{où} \quad k^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 \beta^2}$$

F est un effort de référence ayant les dimensions d'une pression.

Avec le changement de variable

$$t = (s/s_1)^{1/2}, \quad \rho = (s_2/s_1)^{1/2} \quad 3.18$$

les équations de base deviennent :

$$L V = 4 b_1 t U - \frac{2 t^2}{F} \frac{d}{dt} (p t^{-2}) + \frac{2 \nu t^2}{a F} \frac{d}{dt} (N_0 t^{-2}) \quad 3.19$$

$$L U = -4 b_1 t V \quad 3.20$$

$$\text{où} \quad L = \frac{d}{dt} t \frac{d(\cdot)}{dt} - \frac{4(\cdot)}{t} \quad 3.21$$

#### 3.2.2 Cas d'une pression $p = -p_0$ ou telle que $p = p_0 \left(\frac{s}{s_1} - 1\right) = p_0 (t^2 - 1)$

En posant  $F = p_0$  les équations de base identiques pour les deux répartitions de pression ici étudiées s'écrivent :

$$L V = 4 b_1 t U - 4 t^{-1} \quad 3.22$$

$$L U = -4 b_1 t V$$

.....

Si  $V_1$  et  $V_2$  désignent les rotations aux droits des bases, nous pouvons écrire :

$$V = V_0 + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left\{ (V_2 \rho^2 - V_1) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) \rho^2 t^{-2} \right\} \quad 3.23$$

Tenant compte des résultats des différents paragraphes du chapitre 2, nous écrirons :

$$\alpha_n^2 V_{on} = -4 b_1 U_n - \frac{4}{\alpha_n} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho^{-1} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 3.24$$

$$\alpha_n^2 U_n = -4 b_1 V_{on} - \frac{4 b_1}{\alpha_n} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

Résolvant le système 3.24, on obtient :

$$V_{on} = - \frac{16 b_1^2}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] - \frac{4}{\alpha_n (\alpha_n^4 + 16 b_1^2)} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho^{-1} Z_1(\alpha_n \rho) \right] \quad 3.25$$

$$U_n = - \frac{4 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ V_1 Z_1(\alpha_n) - \rho V_2 Z_1(\alpha_n \rho) \right] + \frac{16 b_1 \alpha_n}{\alpha_n^4 + 16 b_1^2} \left[ Z_1(\alpha_n) - \rho^{-1} Z_1(\alpha_n \rho) \right]$$

d'où :

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} Z_2(\alpha_n t) N_n^{-2} V_{on} + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ (V_2 \rho^2 - V_1) t^2 + (V_1 \rho^2 - V_2) \rho^2 t^{-2} \right] \quad 3.26$$

### 3.2.2.1 Rotations au droit des bases :

Le moment nul sur les deux bases s'exprime par :

$$M = -D \frac{dy}{ds} = -D s^{-2} \left[ s \frac{dY}{ds} - Y \right] \quad 3.27$$

d'où les conditions :

$$s_1 \left[ V'_s \right]_1 - V_1 = s_2 \left[ V'_s \right]_2 - V_2 = 0 \quad 3.28$$

.....

Or :

$$s_1 \left[ v'_s \right]_1 = -16 b_1^2 v_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + 16 b_1^2 v_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - v_1 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} + \frac{2 \rho^2 v_2}{\rho^4 - 1}$$

$$- 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \quad 3.29$$

$$s_2 \left[ v'_s \right]_2 = -16 b_1^2 v_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + 16 b_1^2 v_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} - \frac{2 \rho^2}{\rho^4 + 1} v_1 + v_2 \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1}$$

$$- 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \quad 3.30$$

d'où le système d'équations :

$$v_1 \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] - v_2 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n}$$

$$- v_1 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] + v_2 \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n}$$

3.31

qui donne :

$$v_2^p = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[ -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \right\} \quad 3.32$$

.....



$$V_1^{p_0} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[ -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \left[ -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{4}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \right\} \quad 3.33$$

où :

$$\Delta = \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right]^2 \quad 3.34$$

Remarquons que les rotations au droit des bases sont identiques pour les deux répartitions de pression  $p = p_0 \left( \frac{s}{s_1} - 1 \right)$  et  $p = -p_0$  (Voir Fig. 3.2)

Rappelons que :

$$y_1^{p_0} = + \frac{a^2 k^2 p_0}{E e_1} V_1^{p_0} \quad \text{et} \quad y_2^{p_0} = + \frac{a^2 k^2 p_0}{E e_2} V_2^{p_0}$$

### 3.2.2.2 Dilatations radiales au droit des bases :

Compte tenu de 3.2 la dilatation radiale donnée par 3.8 s'écrit :

$$w = \frac{n a}{E e} = \frac{a^2}{E e} \left( \frac{dQ}{ds} + p \right) = + \frac{a^2 p_0}{E e} \left( s \frac{dU}{ds} + U + p/p_0 \right) \quad 3.35$$

Or, d'après 3.25 :

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} Z_2(\alpha_n t) N_n^{-2} U_n$$

d'où :

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = -4 b_1 V_1^{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \\ + 16 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \frac{16 b_1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \quad 3.36$$

.....

$$s_2 \left[ U'_s \right]_2 = -4 b_1 v_1^{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \\ + 16 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \frac{16 b_1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \quad 3.37$$

Les dilatations radiales au droit des bases s'écrivent donc :

pour une pression constante  $p = -p_0$

$$w_1 = + \frac{a^2 p_0}{E e_1} \left\{ s_1 \left[ U'_s \right]_1 - 1 \right\} \quad 3.38$$

$$w_2 = + \frac{a^2 p_0}{E e_2} \left\{ s_2 \left[ U'_s \right]_2 - 1 \right\} \quad 3.39$$

pour une pression linéairement variable  $p = p_0 \left( \frac{s}{s_1} - 1 \right)$

$$w_1 = + \frac{a^2 p_0}{E e_1} \cdot s_1 \left[ U'_s \right]_1 \quad 3.40$$

$$w_2 = + \frac{a^2 p_0}{E e_2} \left\{ s_2 \left[ U'_s \right]_2 + \frac{s_2 - s_1}{s_1} \right\} \quad 3.41$$

Dans les expressions 3.38 et 3.40  $s_1 \left[ U'_s \right]_1$  est donné par 3.36 ;  
dans les formules 3.39 et 3.41,  $s_2 \left[ U'_s \right]_2$  se calcule à l'aide de 3.37.

### 3.2.3 Cas d'un effort de cisaillement $Q_1$

Les équations de base s'écrivent :

$$L V = 4 b_1 t U \quad 3.42$$

$$L U = -4 b_1 t V$$

Nous poserons :

$$U = U_0 + \frac{1}{\rho^4 - 1} \left[ \rho^4 t^{-2} - t^2 \right] \quad 3.43$$

V étant toujours donné par 3.23.

.....

### 3.2.3.1 Rotations au droit des bases provoquées par un effort $Q_1$

Les équations de base et les conditions aux limites des fonctions  $U$  et  $V$  sont identiques à celles du paragraphe 3.3 du chapitre 2 (§ 2.3.3) si l'on pose

$$F = \frac{Q_1}{s_1}.$$

Compte tenu des valeurs de  $s_1 \left[ V'_s \right]_1$  et  $s_2 \left[ V'_s \right]_2$  calculées en 2.33

et des conditions 3.28 qui expriment que le moment s'annule sur les deux bases, nous obtenons le système d'équations :

$$V_1 \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] - V_2 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] = 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} \quad 3.44$$

$$- V_1 \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] + V_2 \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] = - 4 b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n}$$

d'où l'on tire :

$$V_1 = \frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right\} \quad 3.45$$

$$V_2 = - \frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} \right\} \quad 3.46$$

Rappelons que :

$$y_1 = \frac{a^2 k^2 Q_1}{E e_1 s_1} V_1 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{a^2 k^2 Q_1}{E e_2 s_1} V_2$$

et que  $\Delta$  est toujours donné par 3.34.

### 3.2.3.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un effort $Q_1$

La dilatation radiale est en ce cas :

$$w = \frac{a^2 Q_1}{E e s_1} \left\{ s \frac{dU}{ds} + U \right\} \quad 3.47$$

.....

Or, (Voir 2.3.3)

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = -4 b_1 v_1^{Q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^{Q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} - \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} \quad 3.48$$

$$s_2 \left[ U'_s \right]_2 = -4 b_1 v_1^{Q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 v_2^{Q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} - \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} \quad 3.49$$

d'où :

$$v_1^{Q_1} = \frac{a^2 Q_1}{E e_1 s_1} \left\{ s_1 \left[ U'_s \right]_1 + 1 \right\} \quad 3.50$$

$$v_2^{Q_1} = \frac{a^2 Q_1}{E e_2 s_1} s_2 \left[ U'_s \right]_2 \quad 3.51$$

### 3.2.4 Cas d'un effort de cisaillement $Q_2$

3.42 est toujours le système d'équations de base. Nous poserons :

$$F = Q_2 / s_2 \quad \text{et} \quad U = U_0 + \frac{\rho^2}{\rho^4 - 1} (t^2 - t^{-2}) \quad 3.52$$

V identique à 3.23

#### 3.2.4.1 Rotations au droit des bases provoquées par $Q_2$ (Voir 2.3.4.1)

$$v_1^{Q_2} = -\frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right\} \quad 3.53$$

$$v_2^{Q_2} = \frac{4 b_1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right\} \quad 3.54$$

Rappelons que :

$$y_1^{Q_2} = \frac{a^2 k^2 Q_2}{E e_1 s_2} v_1^{Q_2} \quad \text{et} \quad y_2^{Q_2} = \frac{a^2 k^2 Q_2}{E e_2 s_2} v_2^{Q_2}$$

est toujours donné par 3.34.

.....

### 3.2.4.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un effort $Q_2$

La dilatation radiale s'exprime par :

$$w = \frac{a^2 Q_2}{E e s_2} \left[ s U'_s + U \right] \quad 3.55$$

Utilisant les résultats du paragraphe 2.34, on obtient :

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = -4 b_1 V_1^{Q_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{Q_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} \quad 3.56$$

$$s_2 U'_{s_2} = -4 b_1 V_1^{Q_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{Q_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} + \frac{\rho^4 + 1}{\rho^4 - 1} \quad 3.57$$

d'où :

$$w_1 = \frac{a^2 Q_2}{E e_1 s_2} s_1 \left[ U'_s \right]_1 \quad 3.58$$

$$w_2 = \frac{a^2 Q_2}{E e_2 s_2} \left[ s_2 \left[ U'_s \right]_2 + 1 \right] \quad 3.59$$

### 3.2.5 Cas d'un moment $M_1$

Les équations de base sont toujours données par 3.42.

Nous poserons  $F = \frac{M_1 \beta^2}{2a}$  et effectuerons sur  $V$  le même changement de variable défini par 3.23.

#### 3.2.5.1 Rotations au droit des bases

Les équations de base et les conditions aux limites de  $U$  et  $V$  sont identiques à celles du paragraphe 2.3.1, les expressions 2.96 et 2.97 donnent donc les valeurs de  $s V'_s$  sur les bases.

D'après 3.27 on a :

$$M = -D s^{-2} \left[ s Y'_s - Y \right]$$

.....

d'où :

$$-k^2 s \frac{M_1}{M_1} = [s V'_s - V] \quad 3.60$$

car posant  $F = \frac{\beta^2 M_1}{a^2}$

on a :

$$V = \frac{E}{k^2 M_1 \beta} Y \quad \text{et} \quad U = \frac{a^2}{\beta^2 M_1} x \quad 3.61$$

Les conditions de moment nul s'expriment alors par :

$$-b_1 = s_1 [V'_s]_1 - V_1 \quad \text{et} \quad s_2 [V'_s]_2 - V_2 = 0 \quad 3.62$$

On obtient donc les rotations au droit des bases en remplaçant dans les formules 2.99 et 2.100  $v$  par  $-1$  d'où :

$$V_1^{M_1} = \frac{b_1}{\Delta} \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \quad 3.63$$

$$V_2^{M_1} = \frac{b_1}{\Delta} \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \quad 3.64$$

$\Delta$  est toujours donné par 3.34

Rappelons que :

$$y_1^{M_1} = \frac{k^2 \beta^2 M_1}{E e_1} V_1^{M_1} \quad \text{et} \quad y_2^{M_1} = \frac{k^2 \beta^2 M_1}{E e_2} V_2^{M_1}$$

### 3.2.5.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un moment $M_1$

$$\text{On a : } w = \frac{\beta^2 M_1}{E e} [s U'_s + U] \quad 3.65$$

Compte tenu des résultats du paragraphe 2.3.1.2 nous pouvons écrire :

.....

$$s_1 \left[ U'_s \right]_1 = -4 b_1 V_1^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \quad 3.66$$

$$s_2 \left[ U'_s \right]_2 = -4 b_1 V_1^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} + 4 b_1 V_2^{M_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \quad 3.67$$

Portant dans 3.65 nous obtenons :

$$w_1 = - \frac{4 b_1^2 \beta^2 M_1}{E e_1} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

$$\left\{ \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right\} \quad 3.68$$

$$w_2 = - \frac{4 b_1^2 \beta^2 M_1}{E e_2} \frac{1}{\Delta}$$

$$\left\{ \left[ \frac{2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right\} \quad 3.69$$

est toujours donné par 3.34

### 3.2.6 Cas d'un moment $M_2$

Les équations de base sont toujours exprimées par le système 3.42.

Nous poserons  $F = \frac{\beta^2 M_2}{a^2}$

d'où :

$$V = \frac{E}{k^2 M_2 \beta} Y \quad \text{et} \quad U = \frac{a^2}{\beta^2 M_2} x \quad 3.70$$

Nous effectuerons sur  $V$  le même changement défini par 3.23

...

### 3.2.6.1 Rotations au droit des bases provoquées par un moment $M_2$

Les équations de base et les conditions aux limites de U et V sont identiques à celles du paragraphe 2.32.

On a :

$$s_1 \left[ \begin{matrix} V' \\ s \end{matrix} \right]_1 - V_1 = 0 \quad \text{et} \quad -b_2 = s_2 \left[ \begin{matrix} V' \\ s \end{matrix} \right]_2 - V_2 \quad 3.71$$

Les rotations s'expriment par :

$$V_2^{M_2} = \frac{-b_2}{\Delta} \left[ \frac{2\rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \quad 3.72$$

$$V_1^{M_2} = \frac{-b_2}{\Delta} \left[ \frac{2\rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \quad 3.73$$

$\Delta$  est toujours donné par 3.34.

Rappelons que :

$$y_1^{M_2} = \frac{k^2 \beta^2 M_2}{E e_1} V_1^{M_2} \quad \text{et} \quad y_2^{M_2} = \frac{k^2 \beta^2 M_2}{E e_2} V_2^{M_2}$$

### 3.2.6.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un moment $M_2$

La dilatation est donnée par :

$$w = \frac{\beta^2 M_2}{E e} (s U'_s + U)$$

Compte tenu des résultats du paragraphe 2.3.2.2 les dilatations au droit des bases s'expriment par :

$$w_2^{M_2} = - \frac{4 b_1 b_2 \beta^2 M_2}{E e_2} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

$$\left\{ \left[ \frac{2\rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{\gamma_n} - \left[ \frac{2\rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} \right\} \quad 3.74$$

.....



$$w_1^{M_2} = - \frac{4 b_1 b_2 \beta^2 M_2}{E e_1} \frac{1}{\Delta}$$

$$\left\{ \left[ \frac{2 \rho^4}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\gamma_n} - \left[ \frac{2 \rho^2}{\rho^4 - 1} + 16 b_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} \right\} \quad 3.75$$

$\Delta$  est toujours donné par 3.34.

### 3.2.7 Cas d'un effort normal $N_0$

Ce cas se déduit facilement de celui traité en 3.22. Il est en effet facile de vérifier qu'une première constante  $p = -v \frac{N_0}{a}$  provoque les mêmes rotations sur les bases qu'un effort de traction.

Posons  $F = N_0 / a$  et par conséquent :

$$V = \frac{E \beta}{a k^2 N_0} Y = \frac{E \beta}{a k^2 N_0} y s \quad \text{et} \quad U = \frac{a x}{N_0} = \frac{a Q}{s N_0}$$

#### 3.2.7.1 Rotations au droit des bases provoquées par un effort normal $N_0$

Nous avons :

$$V_1^{N_0} = v V_1^{p_0} \quad V_2^{N_0} = v V_2^{p_0}$$

Remarquons que le  $V_1^{p_0}$  calculé en 3.2.2.1 correspond à une pression constante  $p = -p_0$

#### 3.2.7.2 Dilatations au droit des bases provoquées par un effort normal $N_0$

On montre que :

$$w_1^{N_0} = v w_1^{p_0} \quad \text{et} \quad w_2^{N_0} = v w_2^{p_0}$$

$w_1^{p_0}$  et  $w_2^{p_0}$  se calculent à l'aide des expressions 3.38 et 3.39.

Fig. 3.1

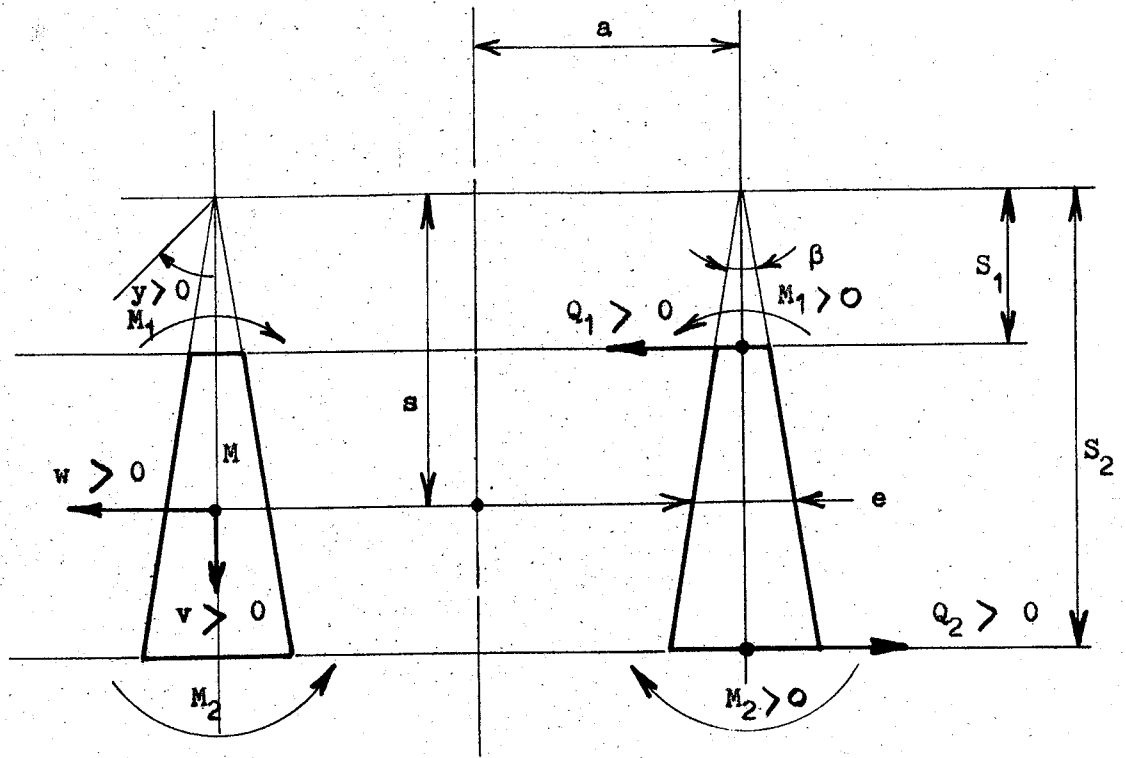
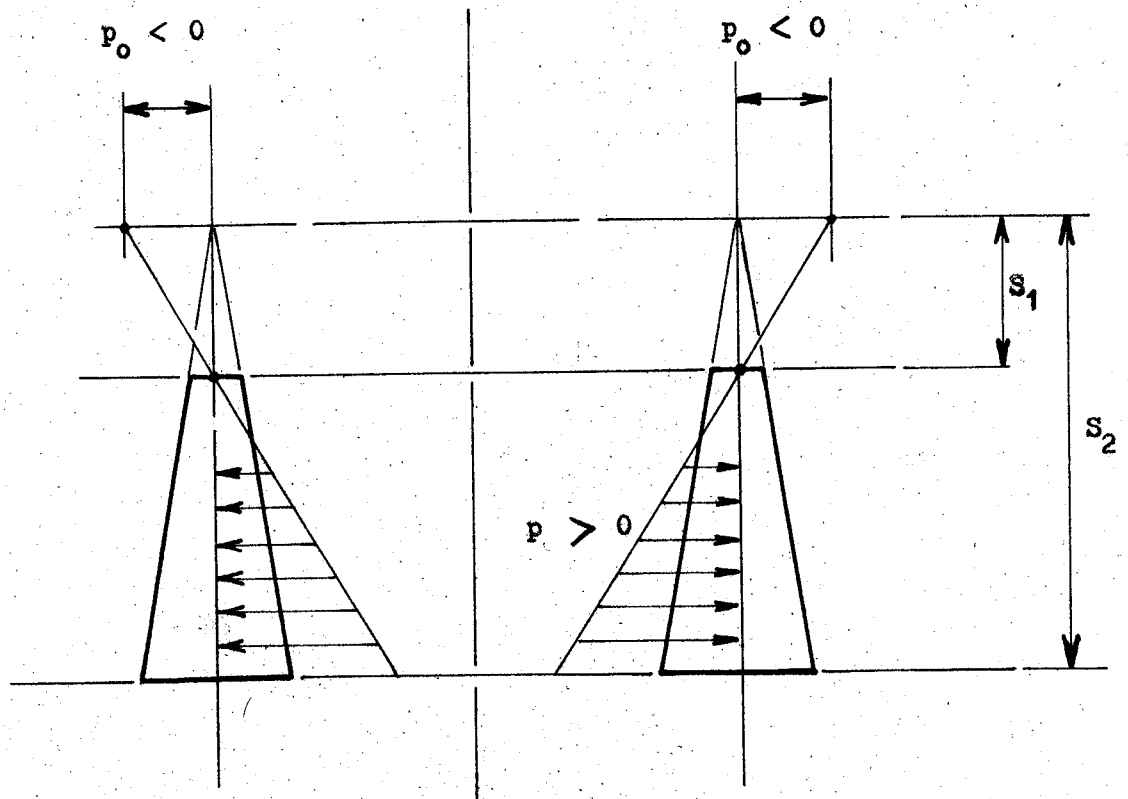


Fig. 3.2





## CHAPITRE QUATRIEME

## 4. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES SPHERIQUES

Dans ce chapitre, nous étudierons analytiquement la flexion des coques sphériques d'épaisseur constante. Les fonctions propres des opérateurs sont les fonctions de Legendre de 1ère et 2ème espèce  $P_{\mu}^1(\cos \varphi)$  et  $Q_{\mu}^1(\cos \varphi)$ .

Dans le cas d'une calotte sphérique d'angle solide quelconque, les fonctions orthogonales à considérer sont les  $P_{\mu}^1(\cos \varphi)$ . Les valeurs propres sont solution de l'équation :

$$P_{\mu}^1(\cos \theta) = 0$$

où  $\theta$  colatitude du cercle de base est une constante et  $\mu$  degré de la fonction de Legendre est l'inconnue. Ces valeurs propres sont bien connues - cfs L. ROBIN (6).

Les normes  $\int_{\cos \theta}^1 \frac{P_{\mu}^1(\cos \varphi)^2}{\cos \theta} d\varphi$  connues et tablées permettent de résoudre complètement le problème de la flexion des calottes sphériques d'épaisseur constante.

Plusieurs auteurs, citons E. REISSNER (7), W. Z. WLASSOV (8) ont étudié la flexion des calottes sphériques peu profondes correspondant à de faibles valeurs de  $\theta$ . La méthode analytique que nous utilisons permet de déterminer pour quelles valeurs de  $\theta$  les hypothèses simplificatrices utilisées par ces auteurs sont légitimes et quelle est la précision de leurs résultats. On montre en effet, voir L. ROBIN (6) Pages 67-68 que les fonctions  $P_{\mu}^1(\cos \theta)$  admettent comme première approximation  $x(2 \sin \theta)^{-1} J_{\mu}(x)$  où  $x = \mu (2 \mu + 1) \sin(\theta/2)$

Nous étudierons d'ailleurs complètement le cas d'une calotte hémisphérique et montrerons que les coefficients d'influence sont très voisins de ceux du cylindre tangent.

Dans le cas d'une coque sphérique trouée, définie par les parallèles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les fonctions propres prennent la forme :

$$A_{\mu} P_{\mu}^1(\cos \varphi) + B_{\mu} Q_{\mu}^1(\cos \varphi)$$

Les valeurs propres correspondent aux zéros de l'équation :

$$P_{\mu}^1(\cos \theta_1) Q_{\mu}^1(\cos \theta_2) - P_{\mu}^1(\cos \theta_2) Q_{\mu}^1(\cos \theta_1) = 0$$

Les zéros de cette équation et les fonctions de Legendre de deuxième espèce ne sont malheureusement pas tablés.

Nous donnons dans la deuxième partie de notre étude une méthode numérique permettant de résoudre le problème de la flexion des coques sphériques trouées pour tous les cas de charges pratiques.

4.1 Equations de base (Voir Fig 4.1)

Les deux rayons principaux de courbure sont égaux au rayon de la sphère  
 $r_1 = r_2 = a$

Les équations de base 1.26 et 1.37 deviennent :

$$y'' + (\cotg \varphi + 3 e'/e) y' - (\cotg^2 \varphi + v - \frac{3 v e'}{e} \cotg \varphi) y = -\frac{a^2 Q}{D} - a \alpha (1 + v) (\tau' + 3 \tau e'/e) \quad 4.1$$

$$Q'' + (\cotg \varphi - e'/e) Q' - (\cotg^2 \varphi - v - \frac{v e'}{e} \cotg \varphi) Q = \frac{S + A}{a \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1 + v}{e} e' - a F'_n + a F_n e'/e - a(1 + v) F_t + E e (y - \alpha T'_m) \quad 4.2$$

Les équations 1.34, 1.35 et 1.36 se transforment en :

$$S = \int r_0 r_1 (F_t \sin \varphi - F_n \cos \varphi) d\varphi = a^2 \sin^2 \varphi \int (F_t - F_n \cotg \varphi) d\varphi \quad 4.3$$

$$N = Q \cotg \varphi - \frac{S + A}{a \sin^2 \varphi} \quad 4.4$$

$$n = Q' + a F_n + \frac{S + A}{a \sin^2 \varphi} \quad 4.5$$

Avec les changements de variables :

$$y = Y h^{-3/2} \quad \text{et} \quad Q = X h^{1/2} \quad 4.6$$

les équations 4.1 et 4.2 se transforment en :

$$L Y + \left\{ 1 - v - \frac{3}{2}(1 - 2v) \frac{h'}{h} \cotg \varphi - \frac{9}{4} (h'/h)^2 - \frac{3}{2} (h'/h)' \right\} Y \sin \varphi = -\frac{a^2 X}{D_0 h} \sin \varphi - a \alpha (1 + v) (\tau' + 3 \tau h'/h) h^{3/2} \sin \varphi \quad 4.7$$

.....

$$\begin{aligned}
L X + \left\{ 1 + \nu + \frac{1}{2} \left( \frac{h'}{h} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{1+2\nu}{2} \frac{h'}{h} \cotg \varphi \right\} X \sin \varphi \\
= \frac{S+A}{a \sin \varphi} (1+\nu) h' h^{-3/2} - a F_n' h^{-1/2} \sin \varphi + a F_n h' h^{-3/2} \sin \varphi - a(1+\nu) F_t h^{-1/2} \sin \varphi \\
+ \frac{E e_0}{h} Y \sin \varphi - E e_0 \alpha h^{1/2} T_m' \sin \varphi
\end{aligned} \quad 4.8$$

où :

$$L = \frac{d}{d \varphi} \sin \varphi \frac{d(\cdot)}{d \varphi} - \frac{(\cdot)}{\sin \varphi} \quad 4.9$$

Dans les expressions 4.1 à 4.8 les dérivées sont relatives à la variable  $\varphi$  colatitude d'un point de la sphère.

#### 4.1.1 Coques sphériques d'épaisseur constante

Les équations de base se réduisent à :

$$\begin{aligned}
y'' + \cotg \varphi y' - (\cotg^2 \varphi + \nu) y = -a^2 Q/D - a \alpha (1+\nu) \tau' \\
Q'' + \cotg \varphi Q' - (\cotg^2 \varphi - \nu) Q = E e (y - \alpha T_m') - a F_n' - a(1+\nu) F_t
\end{aligned} \quad 4.10$$

Ces équations peuvent encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
L y + (1-\nu) y \sin \varphi = -\frac{a^2 Q \sin \varphi}{D} - a \alpha (1+\nu) \tau' \sin \varphi \\
L Q + (1+\nu) Q \sin \varphi = E e (y - \alpha T_m') \sin \varphi - a F_n' \sin \varphi - a(1+\nu) F_t \sin \varphi
\end{aligned} \quad 4.11$$

où L est toujours donné par 4.9

Si nous effectuons le changement de variable  $s = \cos \varphi$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
L/s y = -(1-\nu) y - \frac{a^2 Q}{D} + a \alpha (1+\nu) \tau' (1-s^2)^{1/2} \\
L/s Q = -(1+\nu) Q + E e y + E e \alpha T_m' (1-s^2)^{1/2} \\
+ a F_n' (1-s^2)^{1/2} - a(1+\nu) F_t
\end{aligned} \quad 4.12$$

.....

$$L/s = \frac{d}{ds} (1-s^2) \frac{d(\cdot)}{ds} - \frac{(\cdot)}{1-s^2} \quad 4.13$$

Dans les équations 4.12 et 4.13, toutes les dérivées sont relatives à la variable  $s$ .

Les relations entre  $N$ ,  $n$  et  $Q$  sont toujours données par 4.3, 4.4 et 4.5.

Les moments définis par 1.24 et 1.25 deviennent :

$$M = -\frac{D}{a} (y' + v y \cotg \varphi + \alpha(1+v) \tau) \quad 4.14$$

$$m = -\frac{D}{a} (y \cotg \varphi + v y' + \alpha(1+v) \tau)$$

Les dérivées sont effectuées par rapport à  $\varphi$

Avec la variable  $s$  les équations 4.14 se transforment en :

$$M = \frac{D}{a} (1-s^2)^{-1/2} \left( (1-s^2) y'_s - v s y - \alpha(1+v) \tau (1-s^2)^{1/2} \right) \quad 4.15$$

$$m = D (1-s^2)^{-1/2} \left( (1-s^2) v y'_s - s y - \alpha(1+v) \tau (1-s^2)^{1/2} \right)$$

.....

#### 4.2 Calottes sphériques d'épaisseur constante et d'angle solide quelconque

(Voir Fig. 4.1)

Nous examinerons les deux cas de charge :

- efforts radiaux appliqués au cercle de base
- moments appliqués au cercle de base.

Les contraintes et les déformations provoquées par un gradient de température  $\tau$  constant se déterminent aisément (voir coques coniques) à partir du deuxième cas.

Un champ de pression constant équilibré par des efforts normaux ne provoque pas de flexion. L'étude des deux cas sus-mentionnés permet donc de résoudre complètement le problème d'une calotte sphérique soumise à une pression constante et astreinte à certaines conditions de déformations sur son cercle de base.

Les équations de base se réduisent à :

$$L_{\varphi} y + (1 - \nu) y \sin \varphi = - \frac{a^2 Q}{D} \sin \varphi$$

$$L_{\varphi} Q + (1 + \nu) Q \sin \varphi = E e y \sin \varphi$$

Le moment s'exprime par :

$$M = - \frac{D}{a} \left( \frac{dy}{d\varphi} + \nu y \cotg \varphi \right)$$

Nous poserons :

$$k^2 = 12(1 - \nu^2) (a/e)^2$$

4.16

$$Z = Q / F_0 \quad \text{et} \quad Y = Dy/a^2 F_0$$

$F_0$  est un effort unitaire de référence :

$F_0 = Q_0$  dans le cas d'efforts radiaux appliqués au cercle de base.

$F_0 = M_0 / a$  dans le cas de moments agissant sur le cercle de base.

Le changement de variable  $s = \cos \varphi$  transforme les équations de base en :

$$L_s Y = -(1 - \nu) Y - Z$$

$$L_s Z = -(1 + \nu) Z + k^2 Y$$

4.17

.....



L'opérateur  $L_s$  défini par 4.13 est lié aux fonctions de Legendre associées et admet les deux solutions particulières :

$$x(1-x^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad (1-x^2)^{-1/2} \quad 4.18$$

#### 4.2.1 Cas d'efforts radiaux agissant sur le cercle de base :

Les conditions aux limites sont pour ce cas :

$$Z = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1 \quad \quad Z = 1 \quad \text{pour} \quad s = s_\theta = \cos \theta$$

$$Y = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1 \quad \quad M = 0 \quad \text{pour} \quad s = s_\theta = \cos \theta$$

Si nous posons :

$$Z = U + \left\{ \frac{1 + s_\theta}{1 - s_\theta} \cdot \frac{1 - s}{1 + s} \right\}^{1/2} = U + f(s)$$

$$Y = V + Y_\theta \left\{ \frac{1 + s_\theta}{1 - s_\theta} \cdot \frac{1 - s}{1 + s} \right\}^{1/2} = V + Y_\theta \cdot f(s)$$

Les équations de base deviennent alors :

$$L V = -(1 - \nu) V - U - \left[ (1 - \nu) Y_\theta + 1 \right] f(s)$$

$$L U = -(1 + \nu) U + k^2 V - \left[ 1 + \nu - k^2 Y_\theta \right] f(s)$$

Les conditions aux limites se réduisent à :

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1 \quad \text{et} \quad s = s_\theta$$

$$U = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1 \quad \text{et} \quad s = s_\theta$$

L'équation :

$$L_s V + \lambda V = 0$$

admet les fonctions de Legendre associées de première espèce  $P_\mu^1(s)$  comme fonctions propres si le degré  $\mu$  satisfait à l'équation :

$$P_\mu^1(\cos \theta) = 0 \quad 4.21$$

.....

Les valeurs propres correspondantes sont alors :

$$\lambda = \mu (\mu + 1) \quad 4.22$$

Pour l'étude de l'équation 4.21, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Mr. L. ROBIN (6), Tome III, Pages 61 à 72.

Remarquons que  $P_n^m(s) = P_{-n-1}^m(s)$  quels que soient  $m$  et  $n$  (cfs L. ROBIN (6), T. II p. 15)

La fonction  $P_n^1(s)$  est donc symétrique par rapport à  $n = -\frac{1}{2}$ . Les zéros  $\mu$  à considérer sont donc ceux supérieurs à  $-\frac{1}{2}$ .

Les fonctions  $P_n^1(s)$  trouvent de nombreuses applications dans la physique mathématique cf. L. ROBIN (6) Voir aussi MM. CARSLAW et JAEGER (9) p. 248 à 254.

Les normes :

$$N_\mu^2 = \int_{\cos \theta}^1 \frac{P_\mu^1(s)^2}{ds} ds \quad 4.23$$

$$= -\frac{1 - \cos^2 \theta}{2\mu + 1} \left\{ \frac{d}{d\mu} P_\mu^1(\cos \theta) \right\} \left\{ \frac{d}{ds} P_\mu^1(s) \right\}_{s = \cos \theta}$$

sont tabléées. La résolution complète du problème de la flexion des calottes sphériques d'angle solide quelconque est donc possible.

Nous poserons :

$$\pi_\mu^1(s) = \frac{P_\mu^1(s)}{N_\mu}$$

$$U_\mu = \int_{s_\theta}^1 \pi_\mu^1(s) U(s) ds \quad 4.24$$

$$V_\mu = \int_{s_\theta}^1 \pi_\mu^1(s) V(s) ds$$

Pour résoudre le système 4.20 calculons d'abord l'intégrale :

$$\int_{s_\theta}^1 \left( \frac{1-s}{1+s} \right)^{1/2} P_\mu^1(s) ds$$

.....

Remarquons tout d'abord que  $P_\mu^1(s)$  est solution de  $L P_\mu^1(s) + \mu(\mu + 1) P_\mu^1(s) = 0$  tandis que  $(\frac{1-s}{1+s})^{1/2}$  satisfait à  $L (\frac{1-s}{1+s})^{1/2} = 0$ .  
On déduit alors que :

$$\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \left\{ L P_\mu^1(s) + \mu(\mu + 1) P_\mu^1(s) \right\} - P_\mu^1(s) L \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} = 0$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d}{ds} \left\{ (1-s^2) \left[ \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \frac{d}{ds} P_\mu^1(s) - P_\mu^1(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \right] \right\} = -\mu(\mu + 1) \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} P_\mu^1(s)$$

l'on obtient enfin :

$$\int_{s_\theta}^1 \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} P_\mu^1(s) ds = \left[ -\frac{1-s^2}{\mu(\mu + 1)} \left[ \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \frac{d}{ds} P_\mu^1(s) - P_\mu^1(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \right] \right]_{s_\theta}^1$$

4.25

Sachant que pour  $m$  entier :

$$P_\mu^m(s) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_\mu(s)$$

on a :

$$\frac{d}{ds} P_\mu^1(s) = -\frac{s}{1-s^2} P_\mu^1(s) + (1-s^2)^{-1/2} P_\mu^2(s)$$

4.26

Compte tenu de 4.26 et du fait que  $P_\mu^1(s) = 0$  pour  $s = \cos \theta$  et  $s = 1$ , 4.25 se réduit à :

$$\int_{s_\theta}^1 \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} P_\mu^1(s) ds = \frac{1-s_\theta}{\mu(\mu + 1)} P_\mu^2(s_\theta)$$

d'où :

$$f_\mu = \int_{s_\theta}^1 \pi_\mu^1(s) f(s) ds = \frac{1}{N_\mu} \frac{(1-s_\theta^2)^{1/2}}{\mu(\mu + 1)} P_\mu^2(s_\theta)$$

4.27

.....

Le système 4.20 se transforme en :

$$\mu(\mu + 1) V_{\mu} = (1 - v) V_{\mu} + U_{\mu} + \left[ (1 - v) Y_{\theta} + 1 \right] f_{\mu} \quad 4.28$$

$$\mu(\mu + 1) U_{\mu} = (1 + v) U_{\mu} - k^2 V_{\mu} + \left[ 1 + v - k^2 Y_{\theta} \right] f_{\mu}$$

résolvant on obtient :

$$V_{\mu} = Y_{\theta} f_{\mu} \frac{(1 - v) \mu (\mu + 1) - (k^2 + 1 - v^2)}{(\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2} + \frac{\mu(\mu + 1) f_{\mu}}{(\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2}$$

remplaçant  $f_{\mu}$  par sa valeur 4.27 et posant de plus :

$$T_{\mu} = (\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2 \quad 4.29$$

nous obtenons :

$$V_{\mu} = \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{1/2} P_{\mu}^2(\cos \theta)}{N_{\mu} T_{\mu}} \left\{ \left[ 1 - v - \frac{k^2 + 1 - v^2}{\mu(\mu + 1)} \right] Y_{\theta} + 1 \right\} \quad 4.30$$

On a de même :

$$U_{\mu} = - \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{1/2} P_{\mu}^2(\cos \theta)}{N_{\mu} T_{\mu}} \left\{ \left[ k^2 + 2(1 - v) \right] Y_{\theta} + \frac{k^2 + 1 - v^2}{\mu(\mu + 1)} - (1 + v) \right\} \quad 4.31$$

.....

#### 4.2.1.1 Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_\theta$

La condition de moment nul entraîne :

$$\frac{dY}{ds} - v \frac{s}{1-s^2} Y = 0 \quad \text{pour } s = s_\theta$$

qui s'écrit encore puisque :  $f'_s(\cos \theta) = -(1 - \cos^2 \theta)^{-1}$

$$V'_s(s_\theta) = Y_\theta \frac{1 + v s_\theta}{1 - s_\theta^2} \quad 4.32$$

or :

$$V = Y_\theta (1 - s_\theta^2)^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-v) \mu(\mu+1) - (k^2 + 1 - v^2)}{\mu(\mu+1) N_\mu^2 T_\mu} P_\mu^2(s_\theta) P_\mu^1(s) \\ + (1 - s_\theta^2)^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{N_\mu^2 T_\mu} P_\mu^2(s_\theta) P_\mu^1(s) \quad 4.33$$

et d'après 4.26

$$V'_s(s_\theta) = Y_\theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-v) \mu(\mu+1) - (k^2 + 1 - v^2)}{\mu(\mu+1) N_\mu^2 T_\mu} \frac{P_\mu^2(s_\theta)}{P_\mu^2(s_\theta)} \\ + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{N_\mu^2 T_\mu} \frac{P_\mu^2(s_\theta)}{P_\mu^2(s_\theta)} \quad 4.34$$

Remplaçant dans 4.32 on obtient :  $Y_\theta \frac{R_\theta}{\sin^2 \theta} =$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(s_\theta)}{N_\mu^2 T_\mu} \frac{R_\theta}{\sin^2 \theta} \\ \frac{1 + v \cos \theta}{\sin^2 \theta} - (1-v) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(s_\theta)}{N_\mu^2 T_\mu} + (k^2 + 1 - v^2) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(s_\theta)}{\mu(\mu+1)} \quad 4.35$$

Rappelons que :

$$\frac{R_\theta}{Y_\theta} = \frac{a^2 Q_\theta}{D} Y_\theta = \frac{a^2 \sin \theta R_\theta}{D} Y_\theta$$

.....

4.2.1.2 Dilatation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux  $R_\theta$

D'après 1.17 (première partie), on a :

$$\delta = \varepsilon_\theta r_{o\theta} = \frac{a \sin \theta}{E e} (n - v N)$$

$$\text{avec : } N = Q \cotg \varphi \quad \text{et} \quad n = \frac{dQ}{d\varphi}$$

$$\delta = \frac{a \sin^2 \theta R_\theta}{E e} (Z'_\varphi - v \cotg \varphi Z)$$

ou encore :

$$\delta = - \frac{a \sin^2 \theta \sin \varphi R_\theta}{E e} \left( Z'_s + \frac{v s}{1-s^2} Z \right) \quad 4.36$$

Or :

$$Z = - Y_\theta \sin \theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{k^2 + 2(1-v)}{N_\mu^2 T_\mu} P_\mu^2(\cos \theta) P_\mu^1(s) + (1+v) \sin \theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta) P_\mu^1(s)}{N_\mu^2 T_\mu}$$

$$- \sin \theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{k^2 + 1 - v^2}{\mu(\mu+1) N_\mu^2 T_\mu} P_\mu^2(\cos \theta) P_\mu^1(s) + \left[ \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \frac{1-s}{1+s} \right]^{1/2}$$

et :

$$Z'_s = \cos \theta = - Y_\theta R_\theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{k^2 + 2(1-v)}{N_\mu^2 T_\mu} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{P_\mu^2(\cos \theta)} + (1+v) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{N_\mu^2 T_\mu}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{k^2 + 1 - v^2}{\mu(\mu+1) N_\mu^2 T_\mu} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{P_\mu^2(\cos \theta)} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 4.37$$

Remplaçant dans 4.36 on obtient :

$$\delta_\theta = - \frac{a \sin^3 \theta R_\theta}{E e} \left[ v'_s = \cos \theta - \frac{1-v \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \quad 4.38$$

.....

#### 4.2.2 Cas d'un moment agissant sur le cercle de base

Les conditions aux limites sont :

$$Z = 0 \text{ pour } s = 1 \qquad Z = 1 \text{ pour } s = \cos \theta$$

$$Y = 0 \text{ pour } s = 1 \qquad M = M_{\theta} \text{ pour } s = \cos \theta$$

$$\text{avec : } Z = \frac{sQ}{M_{\theta}} \qquad Y = \frac{Dy}{a M_{\theta}} \qquad 4.39$$

Nous poserons de plus :

$$Y = V + Y_{\theta} f(s) \qquad 4.40$$

$$\text{avec : } f(s) = \left( \frac{1 + s_{\theta}}{1 - s_{\theta}} \cdot \frac{1 - s}{1 + s} \right)^{1/2} \qquad 4.41$$

Les équations de base deviennent alors :

$$L V = - (1 - \nu) V - Z - (1 - \nu) Y_{\theta} f(s) \qquad 4.42$$

$$L Z = - (1 + \nu) Z + k^2 V + k^2 Y_{\theta} f(s)$$

qui se transforment en :

$$\begin{aligned} + \mu(\mu + 1) V_{\mu} &= + (1 - \nu) V_{\mu} + Z_{\mu} + (1 - \nu) Y_{\theta} f_{\mu} \\ + \mu(\mu + 1) Z_{\mu} &= + (1 + \nu) Z_{\mu} - k^2 V_{\mu} - k^2 Y_{\theta} f_{\mu} \end{aligned} \qquad 4.43$$

d'où l'on tire successivement :

$$V_{\mu} = Y_{\theta} f_{\mu} \frac{(1 - \nu) \mu(\mu + 1) - (k^2 + 1 - \nu^2)}{(\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - \nu^2}$$

ou encore :

$$V_{\mu} = \frac{Y_{\theta} (1 - s_{\theta}^2)^{1/2} P_{\mu}^2(\cos \theta)}{T_{\mu} N_{\mu}} \left( 1 - \nu - \frac{k^2 + 1 - \nu^2}{\mu(\mu + 1)} \right) \qquad 4.44$$

.....

d'autre part :

$$Z_{\mu} = -k^2 \frac{V_{\mu} + Y_{\theta} f_{\mu}}{\mu(\mu+1) - (1+v)}$$

$$= -k^2 \frac{Y_{\theta} (1-s_{\theta}^2)^{1/2} P_{\mu}^2(\cos \theta)}{T_{\mu} N_{\mu}} \quad 4.45$$

4.2.2.1 Rotation au droit de la base provoquée par un moment appliqué à cette même base

D'après 4.15 le moment s'exprime par :

$$M = \frac{D}{a} (1-s^2)^{-1/2} \left[ (1-s^2) y'_s - v s y \right]$$

ce qui entraîne pour  $s = \cos \theta$  :

$$\sin \theta = \left[ \sin^2 \theta Y'_{s=\theta} - v \cos \theta Y_{\theta} \right] \quad 4.46$$

or :

$$Y = Y_{\theta} (1-s_{\theta}^2)^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_{\mu}^1(s) P_{\mu}^2(s_{\theta})}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} \left( 1-v - \frac{k^2 + 1-v^2}{\mu(\mu+1)} \right) + f(s) \quad 4.47$$

$$Y'_{s=\theta} = Y_{\theta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(s_{\theta})}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} \left( 1-v - \frac{k^2 + 1-v^2}{\mu(\mu+1)} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 4.48$$

Remplaçant dans 4.46 , on obtient :

$$M_{\theta} = \frac{-\sin^{-1} \theta}{Y_{\theta} \left[ \frac{1+v \cos \theta}{\sin^2 \theta} - (1-v) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(s_{\theta})}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} + (k^2 + 1-v^2) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(s_{\theta})}{\mu(\mu+1) N_{\mu}^2 T_{\mu}} \right]} \quad 4.49$$

.....



4.2.2.2 Dilatation au droit de la base provoquée par un moment  $M_\theta$ 

D'après 1.17 (1ère partie), on a :

$$\delta = \frac{a \sin \theta}{E e} \left( \frac{d\theta}{d\varphi} - \nu \cotg \varphi \right) = - \frac{M_\theta \sin \theta}{E e \sin \varphi} \left[ (1-s^2) \frac{dz}{ds} + \nu s z \right] \quad 4.50$$

d'où :

$$\delta_\theta = - \frac{M_\theta \sin^2 \theta}{E e} z'_{s=\cos \theta}$$

or :

$$z = k^2 Y_\theta M_\theta (1-s^2)^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta) P_\mu^1(s)}{T_\mu N_\mu^2} \quad 4.51$$

et :

$$z'_{s=\cos \theta} = k^2 Y_\theta M_\theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{T_\mu N_\mu^2} \quad 4.52$$

on obtient ainsi :

$$\delta_\theta = - \frac{k^2 M_\theta}{E e} \frac{\sin \theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{T_\mu N_\mu^2}}{\frac{1 + \nu \cos \theta}{\sin^2 \theta} - (1-\nu) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{N_\mu^2 T_\mu} + (k^2 + 1 - \nu^2) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_\mu^2(\cos \theta)}{\mu(\mu+1) N_\mu^2 T_\mu}} \quad 4.53$$

On vérifie bien le théorème de Maxwell-Betti :

$$\delta_\theta \cdot R_\theta = y_\theta \cdot M_\theta$$

4.3 Variation des coefficients d'influence en fonction des paramètres  $\theta$  et  $k$

On a :

$$\sin \theta Y_{\theta}^{M_{\theta}} = - \frac{1 + v \cos \theta}{\sin^2 \theta} - (1-v) \sum_0^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} + (k^2 + 1 - v^2) \sum_0^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{\mu(\mu+1) N_{\mu}^2 T_{\mu}}$$

4.54

$$Y_{\theta}^{R_{\theta}} = \frac{\sum_0^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{N_{\mu}^2 T_{\mu}}}{\frac{1 + v \cos \theta}{\sin^2 \theta} - (1-v) \sum_0^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} + (k^2 + 1 - v^2) \sum_0^{\infty} \frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{\mu(\mu+1) N_{\mu}^2 T_{\mu}}}$$

4.55

$$\sigma_{\theta}^{R_{\theta}} = - \frac{a \sin^2 \theta R_{\theta}}{E_{\theta}} \cdot \frac{1}{Y_{\theta}^{M_{\theta}}} \cdot \left[ 1 - 2 v Y_{\theta}^{R_{\theta}} + k^2 + 2(1-v) Y_{\theta}^{R_{\theta}} + 2 v \cotg \theta Y_{\theta}^{M_{\theta}} \right]$$

4.56

Remarquons que d'après 4.23 et 4.26 on peut écrire :

$$N_{\mu}^2 = - \frac{\sin \theta}{2\mu+1} \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta) P_{\mu}^2(\cos \theta)$$

4.57

On sait d'autre part que : cfs L. ROBIN T. II P. 168, formule 3.19

$$P_n^{m+1}(\cos \theta) - 2 m \cotg \theta P_n^m(\cos \theta) - (m+n)(m-n-1) P_n(\cos \theta) = 0$$

d'où :

$$P_{\mu}^2(\cos \theta) = - \mu(\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)$$

4.58

Remplaçant dans 4.54 et 4.55, il vient :

$$Y_{\theta}^{M_{\theta}} = \frac{1 + v \cos \theta}{\sin \theta} + (1-v) \sum_0^{\infty} \frac{(2\mu+1) \mu(\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)}{[(\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2] \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)} - (k^2 + 1 - v^2) \sum_0^{\infty} \frac{(2\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)}{[(\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2] \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)}$$

4.59

.....

$$\begin{aligned}
 \text{et :} & \sum_0^{\infty} \frac{(2\mu+1) \mu(\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)}{\left[ (\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2 \right] \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)} \\
 \frac{R_{\theta}}{Y_{\theta}} = & \frac{1+v \cos \theta}{\sin \theta} + (1-v) \sum_0^{\infty} \frac{(2\mu+1) \mu(\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)}{\left[ (\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2 \right] \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)} - (k^2 + 1 - v^2) \sum_0^{\infty} \frac{(2\mu+1) P_{\mu}(\cos \theta)}{\left[ (\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2 \right] \frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)}
 \end{aligned}$$

4.60

Pour l'expression de  $\frac{d}{d\mu} P_{\mu}^1(\cos \theta)$ , voir L. ROBIN T. II P. 170 .

On sait que :  $P_n^m(\cos \theta) = -\frac{1}{(-m)!} \cotg \frac{\theta}{2} F(-n, n+1; 1-m; \sin^2 \frac{\theta}{2})$   
 (formule 91 T. II L. ROBIN p. 52)

en dérivant, il vient :

$$\frac{\partial P_n^m(s)}{\partial n} = \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^{m/2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \frac{\left( \frac{1-s}{2} \right)^p}{p!(p-m)!} \left[ \Psi(n+p) - \Psi(n-p) \right]$$

4.61

$$\text{où : } \Psi(s) = \frac{d}{ds} \log(s!)$$

#### 4.4 Coques hémisphériques

En ce cas :  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $s_{\theta} = \cos \theta = 0$ . Les fonctions propres deviennent des fonctions de Legendre  $P_n^1(s)$  d'indice pair. Les normes s'expriment par :

$$N_n^2 = \int_0^1 P_n^1(s) ds = \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

4.62

sachant que :  $P_n^2(\cos \theta) = -n(n+1) P_n(\cos \theta)$

on en tire :

$$P_n^2(0) = -n(n+1) P_n(0)$$

4.63

où :

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n [(n/2)!]^2}$$

4.64

Nous ne calculerons que  $Y_{\theta}^M$  et  $Y_{\theta}^R$  puisque les autres coefficients sont des combinaisons de ces deux coefficients.

.....

#### 4.4.1 Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_\theta$

La formule 5.55 devient :  $Y_\theta^{R_\theta} =$

$$\sum_2^\infty \frac{1}{2^{2n}} \frac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{2}!\right)^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n^2+n-1)^2 + k^2 - v^2}$$

$$1-(1-v) \sum_2^\infty \frac{1}{2^{2n}} \frac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{2}!\right)^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n^2+n-1)^2 + k^2 - v^2} + (k^2+1-v^2) \sum_2^\infty \frac{1}{2^{2n}} \frac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{2}!\right)^4} \frac{2n+1}{(n^2+n-1)^2 + k^2 - v^2}$$

4.65

Le terme général  $u_n$  de la série du numérateur tend vers :

$$u_n \rightarrow \frac{\overline{P_n(0)}^2}{n} = \frac{1}{n} \left[ \frac{n!}{2^n \left[\left(\frac{n}{2}!\right)^2\right]} \right]^2$$

La formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[ 1 + \frac{1}{12n} + \frac{O(1)}{n^2} \right]$$

montre que la série du numérateur converge comme la série de terme général  $2/\pi n^2$

##### 4.4.1.1 Valeur limite de $Y_\theta^{R_\theta}$ pour $k^2$ grand

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2.2.5, on montre que pour  $k$  grand :

$$Y_\theta^{R_\theta} \rightarrow (k^2 + 1 - v^2)^{-1/2} \rightarrow 1/k$$

La rotation s'exprime alors par :

$$Y_\theta^{R_\theta} = \frac{a^2}{D} Y_\theta^{R_\theta} = \frac{a^2}{D} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2\sqrt{3(1-v^2)}}{Ee} \left[ \frac{a}{e} \right]_\theta \quad 4.66$$

qui correspond à la formule 5.74, page 171 donnée par AROSHENKO (10) où il pose

$$\lambda^2 = \sqrt{3(1-v^2)} \cdot \frac{a}{e}$$

.....

4.4.1.2 Comparaison de  $Y_{\theta}^R$  avec le coefficient d'influence correspondant au cylindre tangent de longueur infinie

Le tableau Tb 4.1 (voir en fin de chapitre) donne les valeurs du coefficient  $Y_{\theta}^R$  pour différents  $a/e$  ainsi que les valeurs correspondantes au coefficient d'influence du cylindre tangent de longueur infinie.

4.4.2 Rotation sur la base provoquée par des moments  $M_{\theta}$

La formule 4.54 s'écrit :

$$Y_{\theta}^M = \frac{-1}{1-(1-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n!)^2}{2^{2n} (\frac{n}{2}!)^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n^2+n-1)^2 + k^2 - \nu^2} + (k^2+1-\nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n!)^2}{2^{2n} (\frac{n}{2}!)^4} \frac{2n+1}{(n^2+n-1)^2 + k^2 - \nu^2}}$$

4.67

4.4.2.1 Valeur limite de  $Y_{\theta}^M$  pour  $k^2$  grand

On montre que pour  $k^2$  grand :

$$Y_{\theta}^M \rightarrow -\sqrt{2} k^{-1/2}$$

d'où :

$$y_{\theta}^M = -\frac{a M_{\theta}}{D} Y_{\theta}^M = -\frac{4 \lambda^3 M_{\theta}}{E a e}$$

4.68

qui correspond bien à la première des formules 2.73 P. 171 de TIMOSHENKO (10).

4.4.2.2 Comparaison de  $Y_{\theta}^M$  avec le coefficient d'influence correspondant au cylindre tangent de longueur infinie

Le tableau Tb 4.2 (Voir fin de chapitre) donne les valeurs de  $Y_{\theta}^M$  pour la demi-sphère et pour le cylindre tangent de longueur infinie.

#### 4.5 Coques sphériques peu profondes

L'angle  $\theta$  est faible et les fonctions  $P_{\mu}^m(\cos \varphi)$  peuvent en ce cas se définir par :

$$P_{\mu}^m(\cos \varphi) = \left( \frac{x}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^m \left\{ J_{-m}(x) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{x}{6} J_{3-m}(x) - J_{2-m}(x) + \frac{1}{2x} J_{1-m}(x) - \frac{m}{2} J_{-m}(x) \right] + O(\sin^4 \frac{\varphi}{2}) \right\} \quad 4.69$$

avec  $x = (2\mu + 1) \sin \frac{\varphi}{2}$

Cfs L. ROBIN (6) T III p. 67

En première approximation on peut donc poser :

$$P_{\mu}^m(\cos \varphi) = \frac{2\mu + 1}{4} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} J_m \left[ (2\mu + 1) \sin \frac{\varphi}{2} \right]$$

Les fonctions propres s'expriment alors par :

$$P_{\mu}^1(\cos \varphi) = \frac{2\mu + 1}{4} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} J_1 \left[ (2\mu + 1) \sin \frac{\varphi}{2} \right]$$

Les valeurs propres, qui correspondent aux zéros de  $P_{\mu}^1(\cos \theta)$  sont données par :

$$2\mu + 1 = \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

ou encore :

$$\mu = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \approx \frac{\alpha_n}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad 4.70$$

où  $\alpha_n$  sont les zéros de  $J_1(x)$

Les fonctions propres s'écrivent encore :

$$P_{\mu}^1(\cos \varphi) = \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} J_1 \left( \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad 4.71$$

Les normes  $N_{\mu}^2$  se définissent par :

.....

$$N_{\mu}^2 = \int_{\theta}^1 \frac{1}{P_{\mu}^1(\cos \varphi)^2} d \cos \varphi = \int_0^{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} J_1 \left( \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) d \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$= \int_0^{\alpha_n} \frac{t}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} J_1(t)^2 dt$$

à 1, Pour  $\theta$  faible et puisque  $\varphi < \theta$ , nous supposons :  $\cos^2 \frac{\varphi}{2}$  égal

d'où :

$$N_{\mu}^2 = \int_0^{\alpha_n} t J_1(t)^2 dt = \left[ \frac{t^2}{2} J_2(t)^2 \right]_0^{\alpha_n} = \frac{\alpha_n^2}{2} J_2(\alpha_n)^2 \quad 4.72$$

Nous calculerons  $P_{\mu}^2(\cos \varphi)$  par la formule approchée :

$$P_{\mu}^2(\cos \varphi) = \left[ \frac{\alpha_n}{4 \sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right]^2 J_2 \left( \frac{\alpha_n}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où :

$$P_{\mu}^2(\cos \theta) = \frac{\alpha_n^2}{4 \sin^2 \theta} J_2(\alpha_n)^2 \quad 4.73$$

Remarquons de plus que :

$$T_{\mu} = (\mu^2 + \mu - 1)^2 + k^2 - v^2 \sim \left[ \frac{\alpha_n}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right]^4 + k^2 + 1 - v^2$$

$$= \frac{1}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \left[ \alpha_n^4 + 16 \sin^4 \frac{\theta}{2} (k^2 + 1 - v^2) \right]$$

#### 4.5.1 Rotation au droit de la base provoquée par un moment $M_{\theta}$

$$\frac{P_{\mu}^2(\cos \theta)^2}{N_{\mu}^2 T_{\mu}} = \frac{2 \alpha_n^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \sin^{-4} \theta}{\alpha_n^4 + 16 \sin^4 \frac{\theta}{2} (k^2 + 1 - v^2)}$$

.....

$$\frac{P^2(\cos \theta)^2}{\mu} = \frac{8 \sin^6 \frac{\theta}{2} \sin^{-4} \theta}{\alpha_n^4 + 16 \sin^4 \frac{\theta}{2} (k^2 + 1 - \nu^2)}$$

d'où l'expression de  $Y_{\theta}^M =$

$$- \sin \theta$$

$$1 + \nu \cos \theta - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 (1-\nu) \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{\alpha_n^4 + 16 (k^2 + 1 - \nu^2) \sin^4(\theta/2)} + (k^2 + 1 - \nu^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\theta/2) \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{\alpha_n^4 + 16 (k^2 + 1 - \nu^2) \sin^4(\theta/2)}$$

4.74

#### 4.5.2 Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_{\theta}$

$$Y_{\theta}^R =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \operatorname{tg}(\theta/2)}{\alpha_n^4 + 16 (k^2 + 1 - \nu^2) \sin^4(\theta/2)}$$

$$1 + \nu \cos \theta - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 (1-\nu) \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{\alpha_n^4 + 16 (k^2 + 1 - \nu^2) \sin^4(\theta/2)} + (k^2 + 1 - \nu^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\theta/2) \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{\alpha_n^4 + 16 (k^2 + 1 - \nu^2) \sin^4(\theta/2)}$$

4.75



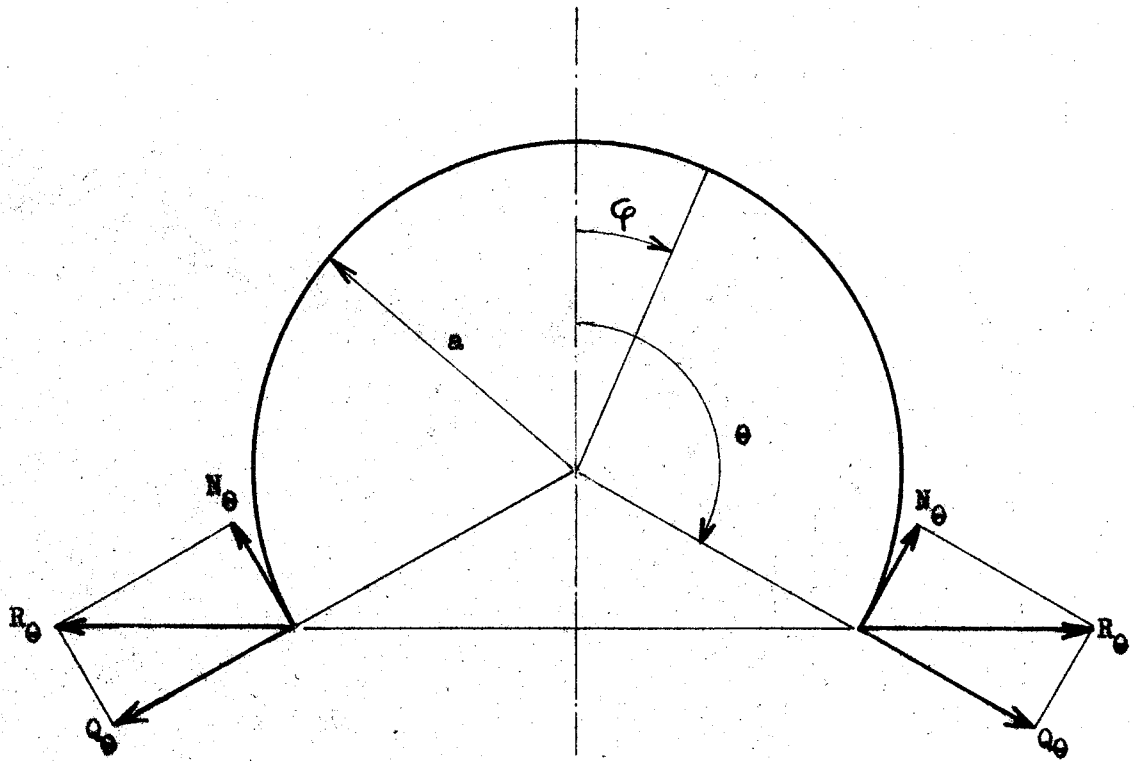


Fig. 4.1

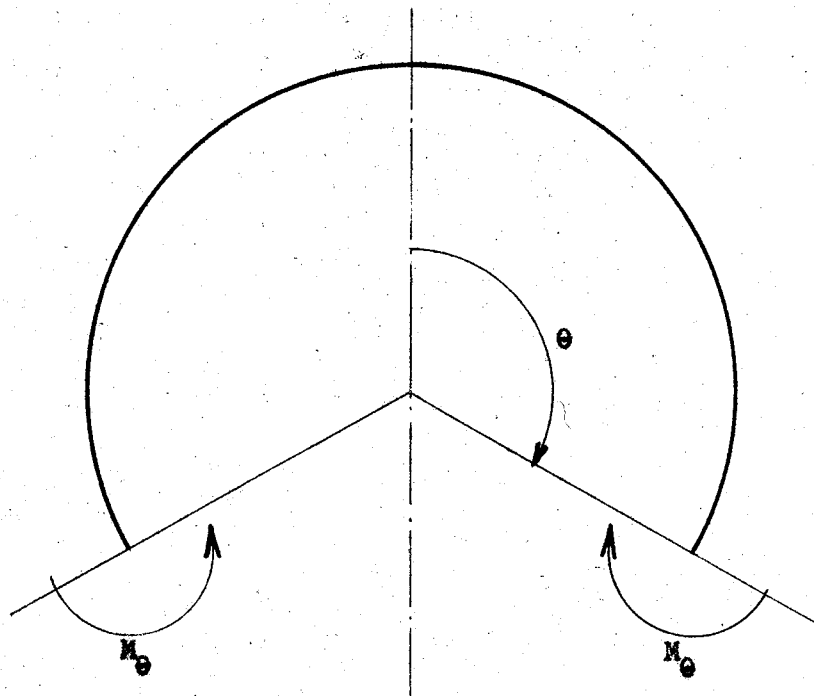


Fig. 4.2





# DEUXIEME PARTIE

RESOLUTION NUMERIQUE  
A L'AIDE DES EQUATIONS  
INTEGRALES



## CHAPITRE PREMIER

1. COQUES SPHERIQUES D'ÉPAISSEUR CONSTANTE1.1 Transformation des équations de base

Avec les notations du paragraphe 4.2 de la première partie, les équations de base s'écrivent :

$$\begin{aligned} L_{\varphi} Y + (1 - \nu) Y \sin \varphi &= -Z \sin \varphi \\ L_{\varphi} Z + (1 + \nu) Z \sin \varphi &= k^2 Y \sin \varphi \end{aligned} \quad 1.1$$

où :  $Z = Q/F$  et  $Y = Dy/a^2 F$

$$\text{et } L = \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \frac{d(\cdot)}{d\varphi} - \frac{(\cdot)}{\sin \varphi} \quad 1.2$$

Les moments s'expriment par :

$$M = -F \left( \frac{dY}{d\varphi} + \nu Y \cotg \varphi \right) \quad 1.3$$

$$m = -F \left( \nu \frac{dY}{d\varphi} + Y \cotg \varphi \right) \quad 1.4$$

F est un effort de comparaison.

Par des changements de variables sur Y et Z de la forme :

$$\begin{aligned} Z &= q + f(\varphi) \\ Y &= u + g(\varphi) \end{aligned} \quad 1.5$$

les conditions aux limites peuvent se ramener à :

$$\begin{aligned} q &= 0 \quad \text{en } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \\ u' + \nu u \cotg \varphi &= 0 \quad \text{en } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \end{aligned} \quad 1.6$$

Le choix de deux fonctions  $f(\varphi)$  et  $g(\varphi)$  solutions de  $L(\cdot) = 0$  rend les calculs plus aisés.

Avec ces changements de variables, les équations de base 1.1 deviennent :

$$\begin{aligned} L(u) &= -(1 - \nu) u \sin \varphi - q \sin \varphi - (1 - \nu) g \sin \varphi - f \sin \varphi \\ L(q) &= -(1 + \nu) q \sin \varphi + k^2 u \sin \varphi - (1 + \nu) f \sin \varphi + k^2 g \sin \varphi \end{aligned} \quad 1.7$$

.....

compte tenu des conditions aux limites du type 1.6, le système d'équations différentielles 1.7 se transforme en un système d'équations intégrales.

$$u(\varphi) = (1 - \nu) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_2(\varphi, \alpha) u(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_2(\varphi, \alpha) q(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + F(\varphi) \quad 1.8$$

$$q(\varphi) = (1 + \nu) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) q(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha - k^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) u(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + J(\varphi) \quad 1.9$$

$$\text{où } F(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_2(\varphi, \alpha) \left[ (1 - \nu) g(\alpha) + f(\alpha) \right] \sin \alpha \, d\alpha$$

$$\text{et } J(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) \left[ (1 + \nu) f(\alpha) - k^2 g(\alpha) \right] \sin \alpha \, d\alpha$$

représentent des fonctions de  $\varphi$  connues,  $K_1(\varphi, \alpha)$  et  $K_2(\varphi, \alpha)$  des noyaux symétriques.

### 1.1.1 Définition des noyaux

Les équations différentielles du système 1.7 sont de la forme :

$$L(u) = \frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} + q(x) u = f(x)$$

D'une façon générale, si  $u_1(x)$  et  $u_2(x)$  sont deux solutions particulières de  $L(u) = 0$ , l'une satisfaisant à la condition limite en  $x_1 = a$  et l'autre à celle en  $x_2 = b$ , la fonction d'influence correspondante se note :

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{u_1(x) u_2(s)}{c} & a \leq x \leq s \\ \frac{u_2(x) u_1(s)}{c} & s \leq x \leq b \end{cases}$$

c désigne une constante définie par :

$$c = - p(x) \left[ u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x) \right]$$

G, comme fonction de  $x$ , satisfait aux conditions limites. Pour l'opérateur  $L(u) = \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \frac{d(u)}{d\varphi} - \frac{(u)}{\sin \varphi}$ , les solutions particulières prennent la forme :

$$u = \frac{A}{\sin \varphi} + B \cotg \varphi.$$

#### 1.1.1.1 Noyau relatif à u

Compte tenu des conditions aux limites de la forme  $u' + v u \cotg \varphi = 0$  qui expriment que le moment est nul, ce noyau s'écrit :

$$K_2(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \frac{(\cos \varphi - \mu_1)(\cos \alpha - \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1) \sin \varphi \sin \alpha} & \varphi_1 \leq \varphi \leq \alpha \\ \frac{(\cos \alpha - \mu_1)(\cos \varphi - \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1) \sin \varphi \sin \alpha} & \alpha \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{cases} \quad 1.10$$

où les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont définies par :

$$\mu_1 = \frac{1 - v \cos^2 \varphi_1}{(1-v) \cos \varphi_1} \quad \mu_2 = \frac{1 - v \cos^2 \varphi_2}{(1-v) \cos \varphi_2} \quad 1.11$$

#### 1.1.1.2 Noyau relatif à q

Les conditions aux limites pour  $z$  sont :  $z = 0$  en  $\varphi_1$  et en  $\varphi_2$   
Le noyau s'exprime par :

$$K_1(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \frac{(\cos \varphi - \rho_1)(\cos \alpha - \rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1) \sin \varphi \sin \alpha} & \varphi_1 \leq \varphi \leq \alpha \\ \frac{(\cos \alpha - \rho_1)(\cos \varphi - \rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1) \sin \varphi \sin \alpha} & \alpha \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{cases} \quad 1.12$$

avec :

$$\rho_1 = \cos \varphi_1 \quad \rho_2 = \cos \varphi_2 \quad 1.13$$

.....



## 1.2 Résolution numérique du système d'équations intégrales

Nous examinerons le cas d'une calotte sphérique de demi-angle au sommet  $\theta$  soumise à une pression constante sur sa surface extérieure et à des efforts axiaux uniformément répartis sur sa base.

### 1.2.1 Transformation des équations de base

Pour le cas de charge que nous considérons, on a :

$$N \sin \varphi + Q \cos \varphi = \frac{p a}{2} \sin \varphi \quad 1.14$$

ce qui entraîne :

$$Q_2 = \frac{p a}{2} \sin \theta \cos \theta$$

Nous poserons :

$$F = Q_2 = \frac{p a}{4} \sin 2 \theta$$

Nous effectuerons les changements de variables :

$$Z = \frac{Q}{F} = q + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{et} \quad Y = \frac{D}{a^2 F} y \quad 1.15$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$q_1 = Y_1 = 0 \quad \text{en} \quad \varphi = 0 \quad ; \quad q_2 = 0 \quad \text{et} \quad M_2 = 0 \quad \text{en} \quad \varphi = \theta \quad 1.16$$

#### 1.2.1.1 Première méthode de transformation

Posons :

$$U(\alpha) = - (1 + \nu) q(\alpha) + k^2 Y(\alpha)$$

$$V(\alpha) = q(\alpha) + (1 - \nu) Y(\alpha) \quad 1.17$$

et inversement :

$$Y = \frac{U + (1 + \nu) V}{k^2 + 1 - \nu^2}$$

$$q = \frac{k^2 V - (1 - \nu) U}{k^2 + 1 - \nu^2} \quad 1.18$$

.....

Les équations 1.8 et 1.9 s'écrivent alors :

$$\frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} \left[ k^2 V - (1 - v) U \right] \sin \varphi = \int_0^\theta G(\varphi, \alpha) U(\alpha) d\alpha + F(\varphi) \quad 1.19$$

$$\frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \left[ (1 + v) V + U \right] \sin \varphi = \int_0^\theta H(\varphi, \alpha) V(\alpha) d\alpha + J(\varphi)$$

$$\text{où : } F(\varphi) = - \frac{(1 + v) \sin \theta}{1 - \cos \theta} \int_0^\theta G(\varphi, \alpha) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

$$F(\varphi) = \frac{(1 + v) \sin \theta}{1 - \cos \theta} \left[ (1 + \cos \varphi) (1 - \cos \theta) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \theta} - (1 - \cos \varphi) (1 + \cos \theta) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \theta} \right] \quad 1.20$$

$$J(\varphi) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \int_0^\theta H(\varphi, \alpha) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

$$J(\varphi) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \left[ (1 + \cos \varphi) (1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \varphi} - (1 - \cos \varphi) \left( (1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \theta} + \cos \theta - \mu_2 \right) \right] \quad 1.21$$

Les noyaux se définissent par :

$$G(\varphi, \alpha) = \begin{cases} (1 - \cos \varphi) (\cos \theta - \cos \alpha) & 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ (1 - \cos \alpha) (\cos \theta - \cos \varphi) & \alpha \leq \varphi \leq \theta \end{cases} \quad 1.22$$

$$H(\varphi, \alpha) = \begin{cases} (1 - \cos \varphi) (\cos \alpha - \mu_2) & 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ (1 - \cos \alpha) (\cos \varphi - \mu_2) & \alpha \leq \varphi \leq \theta \end{cases}$$

Pour résoudre numériquement le système 1.19, nous remplacerons les intégrales par des sommes. Si  $\varphi_k$  représentent les colatitudes des points 1, 2,

.....

.. k .. n, et  $\Delta \varphi_k$  l'écart angulaire entre deux points consécutifs k et k + 1, le système devient :

$$\frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} \left[ k^2 V - (1 - v) U \right] \sin \varphi = \sum_{k=1}^n G(\varphi, \varphi_k) U(\varphi_k) \Delta \varphi_k + F(\varphi)$$

1.23

$$\frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \left[ (1 + v) V + U \right] \sin \varphi = \sum_{k=1}^n H(\varphi, \varphi_k) V(\varphi_k) \Delta \varphi_k + J(\varphi)$$

D'où le système suivant de 2 n équations linéaires :

$$\frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} \left[ k^2 V_i - (1 - v) U_i \right] \sin \varphi_i - \sum_{k=1}^n G_{ik} U_k \Delta_k = F_i$$

1.24

$$\frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \left[ (1 + v) V_i + U_i \right] \sin \varphi_i - \sum_{k=1}^n H_{ik} V_k \Delta_k = J_i$$

$$\text{où } G_{ik} = G(\varphi_i, \varphi_k) \quad U_i = U(\varphi_i) \quad \text{etc ...}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

### 1.2.1.2 Deuxième méthode de transformation

Posons :

$$U(\alpha) = - (1 + v) Z(\alpha) + k^2 Y(\alpha)$$

$$V(\alpha) = Z(\alpha) + (1 - v) Y(\alpha)$$

1.25

ou encore :

$$Y = \frac{U + (1 + v) V}{k^2 + 1 - v^2}$$

$$Z = \frac{k^2 V - (1 - v) U}{k^2 + 1 - v^2}$$

1.26

.....

Les équations 1.8 et 1.9 s'écrivent alors :

$$\frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} \left[ k^2 V - (1 - v) U \right] \sin \varphi = \int_0^\theta G(\varphi, \alpha) U(\alpha) d\alpha + \sin \theta (1 - \cos \varphi) \quad 1.27$$

$$\frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \left[ U + (1 + v) V \right] \sin \varphi = \int_0^\theta H(\varphi, \alpha) V(\alpha) d\alpha \quad 1.28$$

équations dans lesquelles les noyaux G et H se définissent comme au paragraphe précédent. On obtient de même le système suivant de 2 n équations linéaires :

$$\frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} \left[ k^2 V_i - (1 - v) U_i \right] \sin \varphi_i - \sum_{k=1}^n G_{ik} U_k \Delta_k = \sin \theta (1 - \cos \varphi_i) \quad 1.29$$

$$\frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \left[ (1 + v) V_i + U_i \right] \sin \varphi_i - \sum_{k=1}^n H_{ik} V_k \Delta_k = 0 \quad 1.30$$

### 1.2.1.3 Troisième méthode de transformation

A partir des équations 1.27 et 1.28, il est possible d'obtenir deux systèmes linéaires à n équations au lieu d'un seul système à 2 n équations. 1.27 et 1.28 s'écrivent :

$$A V + B U = \frac{1}{\sin \varphi} G(U) + \sin \theta \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad 1.31$$

$$C V + D U = \frac{1}{\sin \varphi} H(V) \quad 1.32$$

avec :

$$A = \frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} k^2 \quad B = - \frac{1 - \cos \theta}{k^2 + 1 - v^2} (1 - v)$$

$$C = \frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} (1 + v) \quad D = \frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2}$$

G et H étant définis par 1.22 .

De 1.31 on tire :

$$V = \frac{1}{A \sin \varphi} G(U) - \frac{B}{A} U + \frac{\sin \theta}{A} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad 1.33$$

En appliquant l'opérateur H à V, il vient :

$$H(V) = \frac{1}{A} H \left[ \frac{1}{\sin \varphi} G(U) \right] - \frac{B}{A} H(U) + \frac{\sin \theta}{A} H \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \quad 1.34$$

et en reportant V et H(V) dans 1.32

$$\begin{aligned} \frac{C}{A} \frac{1}{\sin \varphi} G(U) - \frac{C B}{A} U + \frac{C}{A} \sin \theta \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} + D U \\ = \frac{1}{A \sin \varphi} M(U) - \frac{B}{A} \frac{1}{\sin \varphi} H(U) + \frac{\sin \theta}{A \sin \varphi} H \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \end{aligned} \quad 1.35$$

avec :

$$M = \frac{(H)(G)}{\sin} = M(\varphi, \alpha) = \int_0^\theta \frac{H(\varphi, t) G(t, \alpha)}{\sin t} dt$$

1.35 peut encore s'écrire :

$$(D A - C B) U = \frac{1}{\sin \varphi} (M - B H - C G) (U) + \sin \theta \left[ \frac{1}{\sin \varphi} H \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) - C \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]$$

Posant  $M - B H - C G = \mathcal{M}_0$  il vient :

$$\frac{(1 - \mu_2)(1 - \cos \theta)}{k^2 + 1 - v^2} U \sin \varphi = \mathcal{M}_0(U) + \sin \theta \left[ H \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) - \frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} (1+v)(1 - \cos \varphi) \right] \quad 1.36$$

De même on tire de 1.32

$$U = \frac{1}{D \sin \varphi} H(V) - \frac{C}{D} V \quad 1.37$$

$$\text{et } G(U) = \frac{1}{D} N(V) - \frac{C}{D} G(V) \quad 1.38$$

$$\text{avec } N = \frac{(G)(H)}{\sin \varphi} = N(\varphi, \alpha) = \int_0^\theta \frac{G(\varphi, t) H(t, \alpha)}{\sin t} dt$$

1.31 devient :

.....

$$A V + \frac{B}{D} \frac{1}{\sin \varphi} H(V) - \frac{B C}{D} V = \frac{1}{D \sin \varphi} N(V) - \frac{C}{D} \frac{1}{\sin \varphi} G(V) + \sin \theta \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Soit en posant  $N - B H - C G = \mathcal{N}$

$$\frac{(1 - \mu_2)(1 - \cos \theta)}{k^2 + 1 - v^2} V \sin \varphi = \mathcal{N}(V) + \frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} \sin \theta (1 - \cos \varphi) \quad 1.39$$

Détermination des noyaux itérés M et N

$$M(\varphi, \alpha) = \int_0^\theta \frac{H(\varphi, t) G(t, \alpha)}{\sin t} dt$$

$$H(\varphi, t) = \begin{cases} (1 - \cos \varphi)(\cos t - \mu_2) & 0 \leq \varphi \leq t \\ (1 - \cos t)(\cos \varphi - \mu_2) & t \leq \varphi \leq \theta \end{cases}$$

$$G(t, \alpha) = \begin{cases} (1 - \cos t)(\cos \theta - \cos \alpha) & 0 \leq t \leq \alpha \\ (1 - \cos \alpha)(\cos \theta - \cos t) & \alpha \leq t \leq \theta \end{cases}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$M(\varphi, \alpha) = - (1 - \mu_2)(1 - \cos \alpha)(\cos \theta - \cos \varphi)$$

$$\alpha \leq \varphi$$

$$+ 2 (\cos \varphi - \mu_2)(\cos \theta - \cos \alpha) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \alpha}$$

$$- (1 + \cos \theta)(1 - \cos \alpha)(\cos \varphi - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)(1 - \cos \alpha) \left[ \begin{array}{l} (1 + \cos \theta)(1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \varphi} \\ - (1 - \cos \theta)(1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \varphi} \end{array} \right]$$

1.40

.....

$$N(\varphi, \alpha) = - (1 - \mu_2) (1 - \cos \varphi) (\cos \theta - \cos \alpha)$$

$$\alpha \geq \varphi$$

$$+ 2(\cos \varphi - \mu_2) (\cos \theta - \cos \alpha) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \varphi}$$

$$- (1 + \mu_2) (1 - \cos \varphi) (\cos \theta - \cos \alpha) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) (1 - \cos \alpha) \left[ \begin{array}{l} (1 + \cos \theta) (1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \alpha} \\ - (1 - \cos \theta) (1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \alpha} \end{array} \right]$$

1.41

On a de même :

$$N(\varphi, \alpha) = \int_0^\theta \frac{G(\varphi, t) H(t, \alpha)}{\sin t} dt$$

$$G(\varphi, t) = \begin{cases} (1 - \cos \varphi) (\cos \theta - \cos t) & 0 \leq \varphi \leq t \\ (1 - \cos t) (\cos \theta - \cos \varphi) & t \leq \varphi \leq \theta \end{cases}$$

$$H(t, \alpha) = \begin{cases} (1 - \cos t) (\cos \alpha - \mu_2) & 0 \leq t \leq \alpha \\ (1 - \cos \alpha) (\cos t - \mu_2) & \alpha \leq t \leq \theta \end{cases}$$

$$N(\varphi, \alpha) = - (1 - \mu_2) (1 - \cos \alpha) (\cos \theta - \cos \varphi)$$

$$\alpha \leq \varphi$$

$$+ 2 (\cos \alpha - \mu_2) (\cos \theta - \cos \varphi) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \alpha}$$

$$+ (1 + \mu_2) (1 - \cos \alpha) (\cos \theta - \cos \varphi) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) (1 - \cos \alpha) \left[ \begin{array}{l} (1 + \cos \theta) (1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \varphi} \\ - (1 - \cos \theta) (1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \varphi} \end{array} \right]$$

1.42

.....

$$N(\varphi, \alpha) = - (1 - \mu_2) (1 - \cos \varphi) (\cos \theta - \cos \alpha)$$

 $\alpha \gg$ 

$$\begin{aligned} &+ 2 (\cos \alpha - \mu_2) (\cos \theta - \cos \varphi) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \varphi} \\ &+ (1 + \cos \theta) (1 - \cos \varphi) (\cos \alpha - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \alpha} \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) (1 - \cos \alpha) \left[ \begin{aligned} &(1 + \cos \theta) (1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \alpha} \\ &- (1 - \cos \theta) (1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \alpha} \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad 1.43$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} H \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) &= (1 + \cos \varphi) (1 - \mu_2) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \varphi} \\ &- (1 - \cos \varphi) \cdot \left[ (1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \theta} + \cos \theta - \mu_2 \right] \end{aligned} \quad 1.44$$

Les équations 1.36 et 1.39 s'écrivent finalement :

$$\frac{(1 - \mu_2) (1 - \cos \theta)}{k^2 + 1 - v^2} U \sin \varphi = \mathcal{M}(U) + R(\varphi) \quad 1.45$$

$$\frac{(1 - \mu_2) (1 - \cos \theta)}{k^2 + 1 - v^2} V \sin \varphi = \mathcal{N}(V) + S(\varphi) \quad 1.46$$

avec :

$$R(\varphi) = \sin \theta \left\{ (1 - \mu_2) (1 + \cos \varphi) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \varphi} - (1 - \cos \varphi) \left[ \begin{aligned} &(1 + \mu_2) \operatorname{Log} \frac{2}{1 + \cos \theta} + \cos \theta - \mu_2 \\ &+ \frac{(1 - \mu_2) (1 + v)}{k^2 + 1 - v^2} \end{aligned} \right] \right.$$

$$S(\varphi) = \sin \theta \frac{1 - \mu_2}{k^2 + 1 - v^2} (1 - \cos \varphi)$$

Les deux systèmes de n équations correspondant à 1.45 et 1.46 s'écrivent :

.....



$$\frac{(1-\mu_2)(1-\cos\theta)}{k^2+1-\nu^2} U_i \sin\varphi_i - \sum_{k=1}^n \mathcal{M}_{ik} U_k \Delta_k = R_i \quad 1.47$$

$$\frac{(1-\mu_2)(1-\cos\theta)}{k^2+1-\nu^2} V_i \sin\varphi_i - \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_{ik} V_k \Delta_k = S_i \quad 1.48$$

### 1.2.2 Calcul des contraintes

Nous calculerons les efforts normaux et les moments de flexion à partir de la deuxième méthode de transformation des équations intégrales.

La connaissance de  $Y, Z, V$  et  $U$  permet de définir  $Y'$  et  $Z'$ . En effet, les relations 1.27 et 1.28 peuvent s'écrire :

$$(1-\cos\theta) Z \sin\varphi = (\cos\theta - \cos\varphi) \int_0^\varphi (1-\cos\alpha) U(\alpha) d\alpha + (1-\cos\varphi) \int_\varphi^\theta (\cos\theta - \cos\alpha) U(\alpha) d\alpha + \sin\theta (1-\cos\varphi) \quad 1.49$$

$$(1-\mu_2) Y \sin\varphi = (\cos\varphi - \mu_2) \int_0^\varphi (1-\cos\alpha) V(\alpha) d\alpha + (1-\cos\varphi) \int_\varphi^\theta (\cos\alpha - \mu_2) V(\alpha) d\alpha \quad 1.50$$

Dérivant par rapport à  $\varphi$  et divisant par  $\sin\varphi$  puisque  $\varphi \neq 0$ , il vient :

$$(1-\cos\theta) (Z' + Z \cotg\varphi) = \int_0^\varphi (1-\cos\alpha) U(\alpha) d\alpha + \int_\varphi^\theta (\cos\theta - \cos\alpha) U(\alpha) d\alpha + \sin\theta \quad 1.51$$

$$(1-\mu_2) (Y' + Y \cotg\varphi) = - \int_0^\varphi (1-\cos\alpha) V(\alpha) d\alpha + \int_\varphi^\theta (\cos\alpha - \mu_2) V(\alpha) d\alpha \quad 1.52$$

Les intégrales entre 0 et  $\theta$  des seconds membres de 1.51 et 1.52 peuvent, pour la commodité des calculs, être remplacées par leurs valeurs tirées de 1.49 et 1.50.

.....

On obtient alors :

$$Z' = \frac{Z}{\sin \varphi} + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \int_0^{\varphi} (1 - \cos \alpha) U(\alpha) d\alpha \quad 1.53$$

$$Y' = \frac{Y}{\sin \varphi} - \frac{1}{1 - \cos \varphi} \int_0^{\varphi} (1 - \cos \alpha) V(\alpha) d\alpha \quad 1.54$$

Les intégrales figurant dans ces expressions peuvent se calculer numériquement à l'aide de la méthode des trapèzes par exemple. Nous poserons :

$$\int_0^{\varphi} (1 - \cos \alpha) U(\alpha) d\alpha = T_1$$

$$T_i = T_{i-1} + \left[ (1 - \cos \varphi_{i-1}) V_{i-1} + (1 - \cos \varphi_i) V_i \right] \frac{\Delta \varphi_i}{2}$$

$$T_1 = (1 - \cos \varphi_1) U_1 \frac{\Delta \varphi_1}{2}$$

$$\int_0^{\varphi} (1 - \cos \alpha) V(\alpha) d\alpha = S_1$$

$$S_i = S_{i-1} + \left[ (1 - \cos \varphi_{i-1}) V_{i-1} + (1 - \cos \varphi_i) V_i \right] \frac{\Delta \varphi_i}{2}$$

$$S_1 = (1 - \cos \varphi_1) V_1 \frac{\Delta \varphi_1}{2}$$

Des valeurs de Y, Z et de leurs dérivées, on tire celles des efforts, moments et contraintes.

La relation d'équilibre 1.14 donne :

$$\sigma_N = \frac{N}{h} = \frac{p a}{2 h} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sin 2 \theta \cdot Z \cotg \varphi \right] \quad 1.55$$

On a de plus :

$$n = \frac{p a}{2} - \frac{dQ}{d\varphi}$$

$$\text{D'où : } \sigma_n = \frac{n}{h} = \frac{p}{2} \frac{a}{h} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sin 2 \theta \cdot Z' \right] \quad 1.56$$

.....

Les moments de flexions s'expriment par :

$$M = - \frac{p a^2}{4} \sin 2 \theta \left[ Y' + v Y \cotg \varphi \right]$$

$$m = - \frac{p a^2}{4} \sin 2 \theta \left[ v Y' + Y \cotg \varphi \right]$$

d'où les contraintes correspondantes :

$$\sigma_M = \frac{6 M}{h^2} = - \frac{3 p}{2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \sin 2 \theta \left[ Y' + v Y \cotg \varphi \right] \quad 1.57$$

$$\sigma_m = \frac{6 m}{h^2} = - \frac{3 p}{2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \sin 2 \theta \left[ v Y' + Y \cotg \varphi \right] \quad 1.58$$

### 1.3 Applications et comparaison avec des résultats obtenus analytiquement (Voir Fig. 1.1)

Nous étudierons un cas de charge déjà traité par L. BOLLE (11). La comparaison de nos résultats et de ceux obtenus analytiquement par cet auteur nous permettra de vérifier la précision de notre méthode de calcul numérique beaucoup plus générale que la résolution analytique. Signalons d'ailleurs que les fonctions hypergéométriques utilisées dans le calcul analytique doivent être définies par des séries d'au moins vingt termes car ces séries convergent lentement.

Le cas envisagé se caractérise par :

$$a = 143 \text{ cm} \quad e = 6 \text{ cm} \quad \theta = 39^\circ \quad p = - 19,88 \text{ kg/cm}^2 \quad v = 0,2$$

Nous avons effectué deux calculs numériques avec la première méthode correspondant respectivement à un choix de 6 et 12 points équidistants répartis sur une génératrice de la calotte sphérique. Le point  $\varphi = \theta$  fait toujours partie de la série des points choisis. Les intégrales sont calculées par la méthode des rectangles.

Nous avons ensuite utilisé la deuxième méthode avec 12 points équidistants. Les intégrales en ce cas ont été calculées par la méthode des trapèzes.

Le tableau Tb. 1.1 donne les valeurs de Y et Z obtenues à l'aide de la première méthode et correspondant aux choix de 6 et 12 points.

La deuxième méthode utilisée avec l'approximation des trapèzes pour les intégrales nous conduit simplement à remplacer  $H_{i 12}$  par  $\frac{1}{2} H_{i 12}$ , les  $G_{i 12}$  étant tous nuls.

.....

Les résultats sont consignés dans les tableaux Tb. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 .

Les tableaux Tb. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 et 1.11 représentent les équations 1.29 et 1.30 dont les deux membres ont été divisés par  $\Delta\varphi_k = \text{cte.}$

La Fig. 1.2 compare nos résultats (points) avec ceux de L. BOLLE (11) (courbes en traits fins).

COQUES SPHERIQUES (2ème partie) Tb. 1.1

$\varphi^\circ$	$10^3 Y$ (6 points)	$10^3 Y$ (12 points)	Z (6 points)	Z (12 points)
3,25		- 0,279799		- 0,020646
6,5	- 0,488884	- 0,512065	- 0,045418	- 0,044885
9,75		- 0,632232		- 0,077625
13	- 0,549274	- 0,561308	- 0,121681	- 0,119719
16,25		- 0,190175		- 0,169609
19,5	0,607625	0,608011	- 0,229196	- 0,220015
22,75		1,961965		- 0,256089
26	4,092100	3,952826	- 0,281169	- 0,252924
29,25		6,549858		- 0,174315
32,5	10,328372	9,497992	- 0,022188	0,026823
35,75		12,188810		0,382210
39	16,122098	13,569590	1	1

.....

COQUES SPHERIQUES (2<sup>ème</sup> partie) Tb. 1.2

$\varphi^\circ$	$10^3 Y$	Z
3,25	- 0,28805673	- 0,025177855
6,5	- 0,52546414	- 0,044991569
9,75	- 0,65362201	- 0,078047412
13	- 0,58810860	- 0,12080162
16,25	- 0,21958104	- 0,17177065
19,5	0,58259883	- 0,22270302
22,75	1,9492600	- 0,26166589
26	3,9684375	- 0,26048965
29,25	6,6126851	- 0,18343047
32,5	9,6330160	0,017488823
35,75	12,419895	0,39601183
39	14,126043	1

.....

COQUES SPHERIQUES (2<sup>ème</sup> partie) Tb. 1.3

Valeurs intermédiaires :

$\varphi^{\circ}$	$T_i$	$S_i$	$Z'$
3,25	$- 8,4601631 \cdot 10^{-5}$	$- 1,1589692 \cdot 10^{-6}$	- 0,49671357
6,5	$- 7,8623919 \cdot 10^{-4}$	$- 1,0597144 \cdot 10^{-5}$	- 0,51975169
9,75	$- 3,1170226 \cdot 10^{-3}$	$- 5,1062728 \cdot 10^{-5}$	- 0,67666790
13	$- 7,5228041 \cdot 10^{-3}$	$- 1,7140210 \cdot 10^{-4}$	- 0,83052961
16,25	$- 1,1609326 \cdot 10^{-2}$	$- 4,5437797 \cdot 10^{-4}$	- 0,90443713
19,5	$- 6,3653090 \cdot 10^{-3}$	$- 1,0123529 \cdot 10^{-3}$	- 0,78112410
22,75	$2,9110631 \cdot 10^{-2}$	$- 1,9494289 \cdot 10^{-3}$	- 0,30246715
26	0,13338319	$- 3,2619378 \cdot 10^{-3}$	0,72371790
29,25	0,36609216	$- 4,6447146 \cdot 10^{-3}$	2,4958168
32,5	0,80325417	$- 5,1769980 \cdot 10^{-3}$	5,1615048
35,75	1,5149230	$- 2,8956867 \cdot 10^{-3}$	8,7176957
39	2,5233607	$5,6655089 \cdot 10^{-3}$	12,911915

.....

## COQUES SPHERIQUES (2ème partie) Tb. 1.4

Contraintes en  $\text{kg/cm}^2$ 

$\varphi^\circ$	$\sigma_N$	$\sigma_n$	$\sigma_H$	$\sigma_m$
3,25	- 288,27662	- 294,45416	- 89,054748	- 98,498043
6,5	- 282,65609	- 297,12342	- 64,875815	- 86,331298
9,75	- 289,52946	- 315,30426	- 17,978905	- 64,098781
13	- 297,52867	- 333,13116	59,045332	- 28,708772
16,25	- 305,18366	- 341,69432	172,94586	22,606636
19,5	- 310,0954	- 327,40687	326,79473	91,527137
22,75	- 309,20225	- 271,94816	514,07812	176,75260
26	- 298,78390	- 153,05128	710,96274	271,60932
29,25	- 274,85302	52,270019	866,90888	361,19310
32,5	- 233,72267	361,13679	894,85569	419,47813
35,75	- 173,16755	773,15693	663,99817	407,20991
39	- 93,826677	1259,1127	8,4970080	279,16179

La précision des calculs donne  $\sigma_M \theta \neq 0$  au lieu de 0 soit environ 1/100 de  $\sigma_M$  maximum. En écrivant que  $\sigma_M \theta = 0$ , on obtient le tableau suivant des contraintes résultantes en  $\text{kg/cm}^2$ .

.....

## COQUES SPHERIQUES (2ème partie) Tb. 1.5

$\varphi^\circ$	$\sigma_N + \sigma_M$	$\sigma_N - \sigma_M$	$\sigma_n + \sigma_m$	$\sigma_n - \sigma_m$
3,25	- 377,82095	- 199,22187	- 392,95220	- 195,95612
6,5	- 347,53190	- 217,78027	- 383,45472	- 210,79212
9,75	- 307,50836	- 271,55055	- 379,40304	- 251,20548
13	- 238,48333	- 356,57400	- 361,83993	- 304,42239
16,25	- 132,23780	- 478,12952	- 319,02796	- 364,30096
19,5	16,69931	- 636,89015	- 235,87973	- 418,93401
22,75	204,87587	- 823,28037	- 95,19556	- 448,7008
26	412,17884	-1009,7466	118,55804	- 424,66060
29,25	592,05586	-1141,7619	413,46329	- 308,92308
32,5	661,13302	- 1128,5783	780,61492	- 58,34134
35,75	490,83062	- 837,16672	1180,3668	365,94702
39	- 93,82667	- 93,82667	1538,2745	979,95090



## COQUES SPHERIQUES (2ème partie) Tb. 1.6

$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$2,2270233 \cdot 10^{-1}$	0	0	0
0	$4,4468835 \cdot 10^{-1}$	0	0
0	0	$6,6524398 \cdot 10^{-1}$	0
0	0	0	$8,8365970 \cdot 10^{-1}$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
$5,9278641 \cdot 10^{-4}$	$6,7643651 \cdot 10^{-4}$	$6,8932832 \cdot 10^{-4}$	$7,0731876 \cdot 10^{-4}$
$6,7643651 \cdot 10^{-4}$	$2,5520483 \cdot 10^{-3}$	$2,7551274 \cdot 10^{-3}$	$2,8270321 \cdot 10^{-3}$
$6,8932832 \cdot 10^{-4}$	$2,7551274 \cdot 10^{-3}$	$5,9640343 \cdot 10^{-3}$	$6,3523232 \cdot 10^{-3}$
$7,0731876 \cdot 10^{-4}$	$2,8270321 \cdot 10^{-3}$	$6,3523232 \cdot 10^{-3}$	$1,0970688 \cdot 10^{-2}$
$7,3034994 \cdot 10^{-4}$	$2,9190838 \cdot 10^{-3}$	$6,5591628 \cdot 10^{-3}$	$1,1638871 \cdot 10^{-2}$
$7,5834787 \cdot 10^{-4}$	$3,0309867 \cdot 10^{-3}$	$6,8106079 \cdot 10^{-3}$	$1,2085048 \cdot 10^{-2}$
$7,9122232 \cdot 10^{-4}$	$3,1623803 \cdot 10^{-3}$	$7,1058485 \cdot 10^{-3}$	$1,2608934 \cdot 10^{-2}$
$8,2886780 \cdot 10^{-4}$	$3,3128428 \cdot 10^{-3}$	$7,4439369 \cdot 10^{-3}$	$1,3208853 \cdot 10^{-2}$
$8,7116288 \cdot 10^{-4}$	$3,4818890 \cdot 10^{-3}$	$7,8237825 \cdot 10^{-3}$	$1,3882868 \cdot 10^{-2}$
$9,1797180 \cdot 10^{-4}$	$3,6689763 \cdot 10^{-3}$	$8,2441665 \cdot 10^{-3}$	$1,4628816 \cdot 10^{-2}$
$9,6914373 \cdot 10^{-4}$	$3,8735017 \cdot 10^{-3}$	$8,7037338 \cdot 10^{-3}$	$1,5444293 \cdot 10^{-2}$
$1,0245143 \cdot 10^{-3}$	$4,0948083 \cdot 10^{-3}$	$9,2010084 \cdot 10^{-3}$	$1,6326679 \cdot 10^{-2}$

## CORDES SPHERIQUES (2ème partie) Tab. 1.7

$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
1,0992330	0	0	0
0	1,3112704	0	0
0	0	1,5190900	0
0	0	0	1,7220231
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
$7,3034994 \cdot 10^{-4}$	$7,5834787 \cdot 10^{-4}$	$7,9122232 \cdot 10^{-4}$	$8,2886780 \cdot 10^{-4}$
$2,9190838 \cdot 10^{-3}$	$3,0309867 \cdot 10^{-3}$	$3,1623803 \cdot 10^{-3}$	$3,3128428 \cdot 10^{-3}$
$6,5591628 \cdot 10^{-3}$	$6,8106079 \cdot 10^{-3}$	$7,1058485 \cdot 10^{-3}$	$7,4439369 \cdot 10^{-3}$
$1,1638871 \cdot 10^{-2}$	$1,2085046 \cdot 10^{-2}$	$1,2608934 \cdot 10^{-2}$	$1,3208853 \cdot 10^{-2}$
$1,7767234 \cdot 10^{-2}$	$1,8837327 \cdot 10^{-2}$	$1,9653927 \cdot 10^{-2}$	$2,0589039 \cdot 10^{-2}$
$1,8837327 \cdot 10^{-2}$	$2,6598870 \cdot 10^{-2}$	$2,8218197 \cdot 10^{-2}$	$2,9560787 \cdot 10^{-2}$
$1,9653927 \cdot 10^{-2}$	$2,8218197 \cdot 10^{-2}$	$3,7756428 \cdot 10^{-2}$	$4,0095185 \cdot 10^{-2}$
$2,0589039 \cdot 10^{-2}$	$2,9560787 \cdot 10^{-2}$	$4,0095185 \cdot 10^{-2}$	$5,1571548 \cdot 10^{-2}$
$2,1639647 \cdot 10^{-2}$	$3,1069201 \cdot 10^{-2}$	$4,2141143 \cdot 10^{-2}$	$5,4819940 \cdot 10^{-2}$
$2,2802379 \cdot 10^{-2}$	$3,2738597 \cdot 10^{-2}$	$4,4405452 \cdot 10^{-2}$	$5,7765500 \cdot 10^{-2}$
$2,4073487 \cdot 10^{-2}$	$3,4563595 \cdot 10^{-2}$	$4,6880814 \cdot 10^{-2}$	$6,0985612 \cdot 10^{-2}$
$2,5448889 \cdot 10^{-2}$	$3,6538334 \cdot 10^{-2}$	$4,9559278 \cdot 10^{-2}$	$6,4469932 \cdot 10^{-2}$

## COULDES SPÉRIEUSES (2ème partie) Tab. 1.8

$V_9$	$V_{10}$	$V_{11}$	$V_{12}$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
1,9194171	0	0	0
0	2,1106370	0	0
0	0	2,2950676	0
0	0	0	2,4721159
$8,7116288 \cdot 10^{-4}$	$9,1797180 \cdot 10^{-4}$	$9,6914373 \cdot 10^{-4}$	$5,1225715 \cdot 10^{-4}$
$3,4818890 \cdot 10^{-3}$	$3,6689763 \cdot 10^{-3}$	$3,8735017 \cdot 10^{-3}$	$2,0474041 \cdot 10^{-3}$
$7,8237825 \cdot 10^{-3}$	$8,2441665 \cdot 10^{-3}$	$8,7037338 \cdot 10^{-3}$	$4,6005042 \cdot 10^{-3}$
$1,3882868 \cdot 10^{-2}$	$1,4628816 \cdot 10^{-2}$	$1,5444293 \cdot 10^{-2}$	$8,1633395 \cdot 10^{-3}$
$2,1639647 \cdot 10^{-2}$	$2,2802379 \cdot 10^{-2}$	$2,4073487 \cdot 10^{-2}$	$1,2724444 \cdot 10^{-2}$
$3,1069201 \cdot 10^{-2}$	$3,2738597 \cdot 10^{-2}$	$3,4563595 \cdot 10^{-2}$	$1,8269167 \cdot 10^{-2}$
$4,2141143 \cdot 10^{-2}$	$4,4405452 \cdot 10^{-2}$	$4,6880814 \cdot 10^{-2}$	$2,4779639 \cdot 10^{-2}$
$5,4819940 \cdot 10^{-2}$	$5,7765500 \cdot 10^{-2}$	$6,0985612 \cdot 10^{-2}$	$3,2234966 \cdot 10^{-2}$
$6,8410546 \cdot 10^{-2}$	$7,2775649 \cdot 10^{-2}$	$7,6832495 \cdot 10^{-2}$	$4,0611101 \cdot 10^{-2}$
$7,2775649 \cdot 10^{-2}$	$8,8668407 \cdot 10^{-2}$	$9,4370604 \cdot 10^{-2}$	$4,9881162 \cdot 10^{-2}$
$7,6832495 \cdot 10^{-2}$	$9,4370604 \cdot 10^{-2}$	$1,1276125 \cdot 10^{-1}$	$6,0015275 \cdot 10^{-2}$
$8,1222203 \cdot 10^{-2}$	$9,9762325 \cdot 10^{-2}$	$1,2003055 \cdot 10^{-1}$	$7,1402135 \cdot 10^{-2}$



## COULIS SPHERIQUES (2ème partie) Tab. 1.10

$U_6$	$U_7$	$U_8$	$U_9$
$2,6616648 \cdot 10^{-4}$	$2,3329199 \cdot 10^{-4}$	$1,9564662 \cdot 10^{-4}$	$1,5335149 \cdot 10^{-4}$
$1,0638219 \cdot 10^{-3}$	$9,3242817 \cdot 10^{-4}$	$7,8196609 \cdot 10^{-4}$	$6,1291966 \cdot 10^{-4}$
$2,3904010 \cdot 10^{-3}$	$2,0951602 \cdot 10^{-3}$	$1,7570728 \cdot 10^{-3}$	$1,3772266 \cdot 10^{-3}$
$4,2416341 \cdot 10^{-3}$	$3,7177457 \cdot 10^{-3}$	$3,1178284 \cdot 10^{-3}$	$2,4438122 \cdot 10^{-3}$
$6,6115634 \cdot 10^{-3}$	$5,7949626 \cdot 10^{-3}$	$4,8598534 \cdot 10^{-3}$	$3,8092440 \cdot 10^{-3}$
$9,3322661 \cdot 10^{-3}$	$8,3201384 \cdot 10^{-3}$	$6,9775520 \cdot 10^{-3}$	$5,4691358 \cdot 10^{-3}$
$8,3201384 \cdot 10^{-3}$	$1,1099419 \cdot 10^{-2}$	$9,4640998 \cdot 10^{-3}$	$7,4181385 \cdot 10^{-3}$
$6,9775520 \cdot 10^{-3}$	$9,4640998 \cdot 10^{-3}$	$1,2100990 \cdot 10^{-2}$	$9,6499972 \cdot 10^{-3}$
$5,4691358 \cdot 10^{-3}$	$7,4181385 \cdot 10^{-3}$	$9,6499972 \cdot 10^{-3}$	$1,1922854 \cdot 10^{-2}$
$3,7997419 \cdot 10^{-3}$	$5,1538329 \cdot 10^{-3}$	$6,7044411 \cdot 10^{-3}$	$8,4465650 \cdot 10^{-3}$
$1,9747396 \cdot 10^{-3}$	$2,6784655 \cdot 10^{-3}$	$3,4843222 \cdot 10^{-3}$	$4,3897103 \cdot 10^{-3}$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
$-3,7240792 \cdot 10^{-4}$	0	0	0
0	$-4,3142980 \cdot 10^{-4}$	0	0
0	0	$-4,8906392 \cdot 10^{-4}$	0
0	0	0	$-5,4512489 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

## COQUES SPHERIQUES (2ème partie) Tb. 1.11

$U_{10}$	$U_{11}$	$U_{12}$	
$1,0654262 \cdot 10^{-4}$	$5,5370585 \cdot 10^{-5}$	0	$= 1,7862335 \cdot 10^{-2}$
$4,2583263 \cdot 10^{-4}$	$2,2130676 \cdot 10^{-4}$	0	$= 7,1338394 \cdot 10^{-2}$
$9,5684323 \cdot 10^{-4}$	$4,9727488 \cdot 10^{-4}$	0	$= 1,6020628 \cdot 10^{-1}$
$1,6978653 \cdot 10^{-3}$	$8,8238671 \cdot 10^{-4}$	0	$= 2,8435506 \cdot 10^{-1}$
$2,6465140 \cdot 10^{-3}$	$1,3754208 \cdot 10^{-3}$	0	$= 4,4322999 \cdot 10^{-1}$
$3,7997419 \cdot 10^{-3}$	$1,9747396 \cdot 10^{-3}$	0	$= 6,3638729 \cdot 10^{-1}$
$5,1538329 \cdot 10^{-3}$	$2,6784655 \cdot 10^{-3}$	0	$= 8,6316128 \cdot 10^{-1}$
$6,7044411 \cdot 10^{-3}$	$3,4843222 \cdot 10^{-3}$	0	$= 1,1220863$
$8,4465650 \cdot 10^{-3}$	$4,3897103 \cdot 10^{-3}$	0	$= 1,4145638$
$1,0116576 \cdot 10^{-2}$	$5,3917240 \cdot 10^{-3}$	0	$= 1,7375281$
$5,3917240 \cdot 10^{-3}$	$6,2065498 \cdot 10^{-3}$	0	$= 2,0905589$
0	0	$- 3,0222943 \cdot 10^{-4}$	$= 2,4724356$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
0	0	0	$= 0$
$- 5,9943236 \cdot 10^{-4}$	0	0	$= 0$
0	$- 6,5181167 \cdot 10^{-4}$	0	$= 0$
0	0	$- 7,0209433 \cdot 10^{-4}$	$= 0$

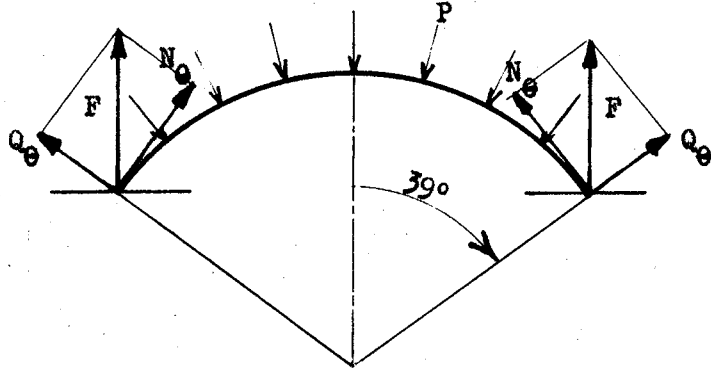


Fig. 1.1 (2e partie)

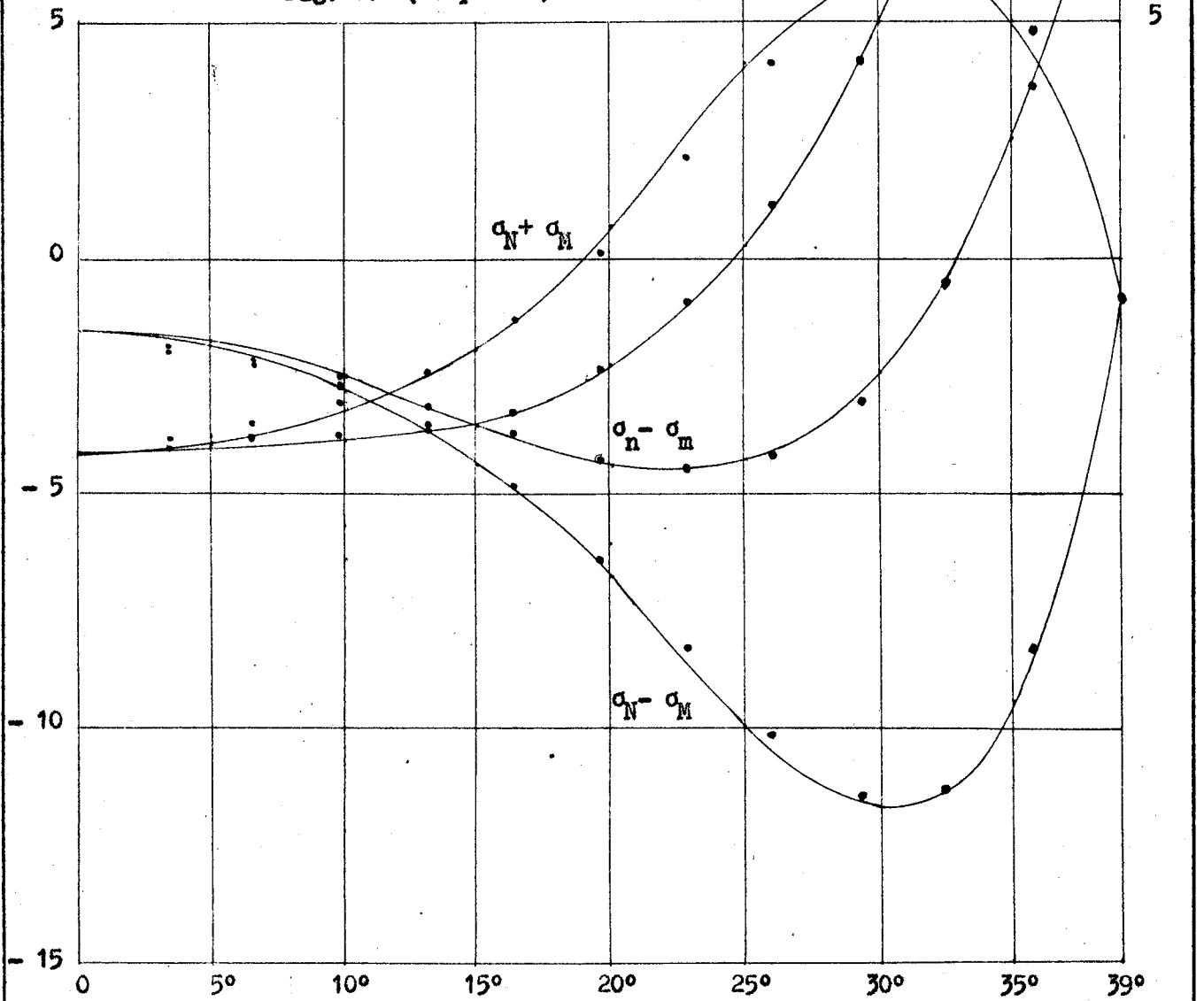


Fig. 1.2 (2e partie)

## CHAPITRE DEUXIEME

2. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES TORIQUES

Les coques toriques sont très utilisées dans la construction mécanique et la grosse chaudronnerie. Citons par exemple :

- volutes de pompes et de turbo-compresseurs,
- bâches de turbines hydrauliques, à vapeur ou à gaz,
- raccords des coques de révolution entre elles,
- soufflets métalliques,
- joints de conduites type Omega, etc ...

L'étude théorique de la flexion des coques toriques est d'une grande complexité. Les premiers travaux de H. WISSLER (13) se rapportent à des cas de charge particuliers. La méthode de résolution de cet auteur basée sur des développements en série nécessite de très longs calculs. R. A. CLARK (14) traite les mêmes cas de charge que H. WISSLER pour vérifier la précision de sa méthode d'intégration asymptotique. Il applique ensuite ce procédé de résolution au calcul des soufflets métalliques et des joints Omega. Cette méthode ne s'applique qu'aux coques toriques dont le rayon d'enroulement (rayon moyen) est grand par rapport au rayon de la section méridienne. ( $\lambda = b/a$  petit).

Contrairement aux coques coniques et sphériques, il n'existe pas de fonctions propres relativement simples permettant de résoudre analytiquement le problème par des développements en série de fonctions orthogonales. Tout dernièrement L. N. TAO (15) a montré que les équations différentielles du second ordre qui interviennent dans ce problème peuvent se ramener à des équations à quatre singularités (trois finies, une à l'infini). Les solutions de ces équations sont des fonctions de HEUN malheureusement très mal connues. L'introduction de ces fonctions présente certainement des avantages sur les développements en série utilisés par H. WISSLER (13) et W. CHANG (16), mais les calculs demeurent longs et complexes.

G. D. GALLETLY (17) a étudié tout dernièrement le problème de la flexion des coques toriques par des intégrations numériques pas à pas. G. SALET (18) et J. BARTHELEMY (18) ont mis au point une méthode semi-analytique (numérique et développements en série) pour résoudre le problème des contraintes de flexion dans les réservoirs sous pression.

La méthode que nous exposons dans ce chapitre consiste à transformer les équations de base en un système d'équations intégrales de FREDHOLM et à résoudre numériquement ce système. Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus analytiquement par H. WISSLER (13), la concordance est excellente. Nous calculons ensuite différents cas de charge pour de larges domaines de variation de  $\lambda = b/a$  et de  $a/e$  (Voir Fig. 2.1). Les comparaisons avec les cas limites du cylindre et de l'anneau sont très instructives.

.....



2.1 Equations de base

Ces équations s'écrivent :

$$L(Y) + (1 - \nu) Y \sin \varphi = -\frac{a}{D} X \sin \varphi \quad 2.1$$

$$L(X) + (1 + \nu) X \sin \varphi = E a h Y \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} A \lambda \left( 2 + \frac{\sin \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \right) - \frac{p a^2}{2} \lambda \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.2$$

L'opérateur différentiel L se définit par :

$$L(\cdot) = \frac{d}{d\varphi} (\lambda + \sin \varphi) \frac{d(\cdot)}{d\varphi} - \frac{\sin \varphi + 1}{\lambda + \sin \varphi} (\cdot) \quad 2.3$$

Les moments s'expriment par :

$$M = -\frac{D}{a} \left( \frac{dY}{d\varphi} + \nu \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} Y \right) \quad 2.4$$

$$m = -\frac{D}{a} \left( \nu \frac{dY}{d\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} Y \right) \quad 2.5$$

Avec les variables adimensionnelles

$$z = \frac{X}{F} \quad y = \frac{D}{a F} Y \quad 2.6$$

où F est un effort de comparaison, les équations deviennent :

$$L(y) + (1 - \nu) y \sin \varphi = -z \sin \varphi \quad 2.7$$

$$L(z) + (1 + \nu) z \sin \varphi = k^2 y \sin \varphi + \frac{A}{F} \lambda \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left( 2 + \frac{\sin \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \right) - \frac{p a^2}{2 F} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.8$$

et les moments s'expriment par :

$$M = -F \left( \frac{dy}{d\varphi} + \nu \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right) \quad 2.9$$

.....

$$m = -F \left( v \frac{dy}{d\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right) \quad 2.10$$

Les conditions aux limites s'expriment par :

$$z = a_1 \quad \text{en } \varphi_1 \quad \quad z = a_2 \quad \text{en } \varphi_2 \quad 2.11$$

$$M = M_1 \quad \text{en } \varphi_1 \quad \quad M = M_2 \quad \text{en } \varphi_2$$

Des changements de variables sur  $z$  ou  $y$  de la forme :

$$\begin{aligned} z &= q + f(\varphi) \\ y &= u + g(\varphi) \end{aligned} \quad 2.12$$

permettent de ramener les conditions 2.11 à :

$$q = 0 \quad \text{en } \varphi_1 \quad \text{et } \varphi_2 \quad 2.13$$

$$u' + v \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} u = 0 \quad \text{en } \varphi_1 \quad \text{et } \varphi_2$$

Les choix de deux fonctions  $f(\varphi)$  et  $g(\varphi)$  solutions de  $L(\cdot) = 0$  rendent les calculs plus aisés. Les équations de base s'écrivent alors :

$$L(u) = - (1 - v) (u + g) \sin \varphi - (q + f) \sin \varphi \quad 2.14$$

$$L(q) = - (1 + v) (q + f) \sin \varphi + k^2 (u + g) \sin \varphi + F(\varphi, p) \quad 2.15$$

$$\text{avec } F(\varphi, p) = \frac{A}{F} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left( 2 + \frac{\sin \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \right) - \frac{p a^2}{2 F} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi}$$

$f$  et  $g$  deux fonctions de  $\varphi$  connues.

## 2.2 Transformation des équations de base :

Les équations 2.14 et 2.15 peuvent s'écrire sous forme d'équations intégrales :

$$y(\varphi) - g(\varphi) = (1 - v) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_2(\varphi, \alpha) y(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_2(\varphi, \alpha) z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad 2.16$$

.....

$$z(\varphi) - f(\varphi) = (1 + \nu) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha - k^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) y(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) F(\alpha, p) \, d\alpha \quad 2.17$$

où  $K_1(\varphi, \alpha)$  et  $K_2(\varphi, \alpha)$  sont des noyaux symétriques

et  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_1(\varphi, \alpha) F(\alpha, p) \, d\alpha = \phi(\varphi, p)$  une fonction de  $\varphi$  et de  $p$  connue.

### 2.3 Définition des noyaux

#### 2.3.1 Noyau relatif à $\nu$

Compte tenu des conditions aux limites de la forme  $u' + \nu \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} u = 0$  qui expriment que le moment est nul, ce noyau s'écrit :

$$K_2(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \frac{[\mu_1 + (\lambda \varphi - \cos \varphi)] \cdot [\mu_2 + (\lambda \alpha - \cos \alpha)]}{(\mu_2 - \mu_1) (\lambda + \sin \varphi) (\lambda + \sin \alpha)} & \varphi_1 \leq \varphi \leq \alpha \\ \frac{[\mu_1 + (\lambda \alpha - \cos \alpha)] \cdot [\mu_2 + (\lambda \varphi - \cos \varphi)]}{(\mu_2 - \mu_1) (\lambda + \sin \varphi) (\lambda + \sin \alpha)} & \alpha \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{cases} \quad 2.18$$

où les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont définies par :

$$\mu_1 = \frac{(\lambda + \sin \varphi_1)^2}{(1 - \nu) \cos \varphi_1} - (\lambda \varphi_1 - \cos \varphi_1)$$

2.19

$$\mu_2 = \frac{(\lambda + \sin \varphi_2)^2}{(1 - \nu) \cos \varphi_2} - (\lambda \varphi_2 - \cos \varphi_2)$$

.....

### 2.3.2 Noyau relatif à $z$

Les conditions aux limites pour  $z$  sont :  $z = 0$  en  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Le noyau s'exprime par :

$$K_1(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \frac{[\rho_1 + (\lambda \varphi - \cos \varphi)] \cdot [\rho_2 + (\lambda \alpha - \cos \alpha)]}{(\rho_2 - \rho_1) (\lambda + \sin \varphi) (\lambda + \sin \alpha)} & \varphi_1 \leq \varphi \leq \alpha \\ \frac{[\rho_1 + (\lambda \alpha - \cos \alpha)] \cdot [\rho_2 + (\lambda \varphi - \cos \varphi)]}{(\rho_2 - \rho_1) (\lambda + \sin \varphi) (\lambda + \sin \alpha)} & \alpha \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{cases} \quad 2.20$$

avec :

$$\rho_1 = -(\lambda \varphi_1 - \cos \varphi_1) \quad 2.21$$

$$\rho_2 = -(\lambda \varphi_2 - \cos \varphi_2)$$

### 2.4 Résolution numérique du système d'équations intégrales

Nous considérerons le quart de tore défini par  $\varphi_1 = 0$  et  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  soumis au moment unitaire  $M_1$  en  $\varphi_1$  (Fig. 2.2)

#### 2.4.1 Transformation des équations de base

La première relation d'équilibre s'écrit :

$$r N \sin \varphi + r Q \cos \varphi = a \int p r \cos \varphi d\varphi + A$$

et se réduit à :

$$r N \sin \varphi + r Q \cos \varphi = 0$$

Les changements de variables :

$$z = \frac{X}{M_1}, \quad y = \frac{D}{a M_1} Y$$

et :

2.22

$$y = u + \frac{\lambda^2}{1-v} \frac{1}{\lambda + \sin \varphi}$$

transforment les conditions aux limites en :

$$z = 0 \quad M = 0 \quad \text{en } \varphi_1 = 0 \quad \text{et } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

.....

Pour faciliter la résolution numérique du système d'équations intégrales, nous poserons :

$$Z = (1 + \nu) z - k^2 y \quad 2.23$$

$$Y = z + (1 - \nu) y$$

qui entraîne inversement :

$$z = \frac{1}{\delta} \left[ (1 - \nu) Z + k^2 Y \right] \quad 2.24$$

$$y = \frac{1}{\delta} \left[ (1 + \nu) Y - Z \right]$$

$$\text{où } \delta = k^2 + 1 - \nu^2$$

Les équations 2.14 et 2.15 deviennent :

$$y - \frac{\lambda^2}{1 - \nu} \frac{1}{\lambda + \sin \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_2(\varphi, \alpha) Y(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad 2.25$$

$$z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1(\varphi, \alpha) Z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad 2.26$$

soit :

$$\frac{1}{\delta} \left[ (1 + \nu) Y - Z \right] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_2(\varphi, \alpha) Y(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda^2}{1 - \nu} \frac{1}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.27$$

$$\frac{1}{\delta} \left[ (1 - \nu) Z + k^2 Y \right] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1(\varphi, \alpha) Z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 0 \quad 2.28$$

Les expressions données par 2.18 et 2.19 définissent les noyaux  $K_2$  et  $K_1$

$$\mu_1 = \frac{\lambda^2}{1 - \nu} + 1 \quad \mu_2 = \infty$$

$$\rho_1 = 1 \quad \rho_2 = -\lambda \frac{\pi}{2}$$

.....

pour  $\mu_2$  infini, le noyau  $K_2$  prend la forme :

$$K_2(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \frac{\mu_1 + (\lambda \varphi - \cos \varphi)}{(\lambda + \sin \varphi)(\lambda + \sin \alpha)} & 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ \frac{\mu_1 + (\lambda \alpha - \cos \alpha)}{(\lambda + \sin \varphi)(\lambda + \sin \alpha)} & \alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2.27 et 2.28 s'écrivent encore :

$$A_1 Y + A_2 Z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\varphi, \alpha) Z(\alpha) d\alpha \quad 2.29$$

$$A_3 Y + A_4 Z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(\varphi, \alpha) Y(\alpha) d\alpha = \beta \frac{1}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.30$$

avec :

$$A_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\delta} k^2 = - \left( -\frac{\lambda \pi}{2} + 1 \right) \frac{k^2}{\delta}$$

$$A_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\delta} (1 - \nu) = - \left( -\frac{\lambda \pi}{2} + 1 \right) \frac{1 - \nu}{\delta}$$

$$A_3 = \frac{1 + \nu}{\delta}$$

$$A_4 = -\frac{1}{\delta}$$

$$\beta = \frac{2}{1 - \nu}$$

$$K(\varphi, \alpha) = (\rho_2 - \rho_1) K_1(\varphi, \alpha) \sin \alpha \quad 2.31$$

$$H(\varphi, \alpha) = K_2(\varphi, \alpha) \sin \alpha \quad 2.32$$

Les intégrales de 2.29 et 2.30 peuvent s'exprimer par des sommes finies :

.....

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\varphi, \alpha) Z(\alpha) d\alpha \approx \sum_{k=1}^n K(\varphi, \varphi_k) Z(\varphi_k) \Delta \varphi_k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} H(\varphi, \alpha) Y(\alpha) d\alpha \approx \sum_{k=1}^n H(\varphi, \varphi_k) Y(\varphi_k) \Delta \varphi_k$$

avec une approximation d'autant meilleure que  $n$  est grand.

Les  $\varphi_k$  correspondent aux points  $1, 2 \dots n$  et  $\Delta \varphi_k$  à l'écart angulaire entre deux points consécutifs.

Le système d'équations 2.29 et 2.30 devient ainsi :

$$A_1 Y + A_2 Z - \sum_{k=1}^n K(\varphi, \varphi_k) Z(\varphi_k) \Delta \varphi_k = 0 \quad 2.33$$

$$A_3 Y + A_4 Z - \sum_{k=1}^n H(\varphi, \varphi_k) Y(\varphi_k) \Delta \varphi_k = \frac{\beta}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.34$$

D'où l'on tire le système de  $2n$  équations linéaires à  $2n$  inconnues suivant :

$$A_1 Y(\varphi_i) + A_2 Z(\varphi_i) - \sum_{k=1}^n K(\varphi_i, \varphi_k) Z(\varphi_k) \Delta \varphi_k = 0$$

$$A_3 Y(\varphi_i) + A_4 Z(\varphi_i) - \sum_{k=1}^n H(\varphi_i, \varphi_k) Y(\varphi_k) \Delta \varphi_k = \frac{\beta}{\lambda + \sin \varphi_i}$$

avec  $i$  et  $k$   $1, 2, 3 \dots n$  et sous forme plus condensées :

$$A_1 Y_i + A_2 Z_i - \sum_{k=1}^n K_{ik} Z_k \Delta_k = 0 \quad 2.35$$

$$A_3 Y_i + A_4 Z_i - \sum_{k=1}^n H_{ik} Y_k \Delta_k = \frac{\beta}{\lambda + \sin \varphi_i} \quad 2.36$$

.....

## 2.5 Détermination des efforts normaux et moments de flexion

Ils nécessitent la connaissance des dérivées premières de  $y$  et  $z$ .

### 2.5.1 Calcul de $y'$ et $z'$

Les relations 2.25, 2.26, 2.31 et 2.32 permettent d'écrire :

$$(p_2 - p_1) z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\varphi, \alpha) Z(\alpha) d\alpha \quad 2.37$$

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(\varphi, \alpha) Y(\alpha) d\alpha + \frac{\beta}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.38$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1) z (\lambda + \sin \varphi) &= \left[ p_2 + (\lambda \varphi - \cos \varphi) \right] \int_0^{\varphi} \frac{p_1 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \\ &+ \left[ p_1 + (\lambda \varphi - \cos \varphi) \right] \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad 2.39$$

$$y (\lambda + \sin \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{p_1 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Y(\alpha) d\alpha$$

$$+ \left[ p_1 + (\lambda \varphi - \cos \varphi) \right] \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha + \beta \quad 2.40$$

En dérivant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1) \left[ z (\lambda + \sin \varphi) \right]' &= (\lambda + \sin \varphi) \int_0^{\varphi} \frac{p_1 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \\ &+ (\lambda + \sin \varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad 2.41$$

$$\left[ y (\lambda + \sin \varphi) \right]' = (\lambda + \sin \varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \quad 2.42$$

.....



La connaissance de Y et Z permet de calculer numériquement les intégrales figurant dans 2.41 et 2.42. Le calcul numérique se simplifie si l'on remplace l'un des deux intégrales du second membre de ces expressions par sa valeur tirée de 2.39 ou 2.40.

Ainsi remplaçant dans 2.41 la première intégrale du second membre par sa valeur donnée par 2.39, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\rho_2 - \rho_1) \frac{[z(\lambda + \sin \varphi)]'}{\lambda + \sin \varphi} &= (\rho_2 - \rho_1) z \frac{\lambda + \sin \varphi}{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi} \\
 &+ \left[ 1 - \frac{\rho_1 + \lambda \varphi - \cos \varphi}{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi} \right] \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha
 \end{aligned}$$

d'où la valeur de  $z'$  :

$$z' = z \left[ \frac{\lambda + \sin \varphi}{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \right] + \frac{1}{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad 2.43$$

2.41 pourrait aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
 (\rho_2 - \rho_1) \frac{[z(\lambda + \sin \varphi)]'}{\lambda + \sin \varphi} &= (\rho_2 - \rho_1) \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) \, d\alpha \\
 &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) \, d\alpha
 \end{aligned}$$

d'où l'on tirerait :

$$\begin{aligned}
 z' &= - \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) \, d\alpha \\
 &- \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) \, d\alpha \quad 2.44
 \end{aligned}$$

Quant à 2.42, elle se transforme en :

.....

$$y' = - \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha - \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha$$

Or pour  $\varphi = 0$ , 2.40 donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha = \left( \frac{1-v}{\lambda} \right) y_0 - 1$$

d'où :

$$y' = - \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y + \left( \frac{1-v}{\lambda} \right) y_0 - 1 - \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \quad 2.45$$

### 2.5.2 Efforts normaux

Les conditions aux limites et les équations d'équilibre permettent d'écrire :

$$N = - \frac{X}{a} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} = - \frac{M_1}{a} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z \quad 2.46$$

$$n = - \frac{1}{a} = - \frac{M_1}{a} \frac{dz}{d\varphi} \quad 2.47$$

De 2.44, on tire :

$$n = - N - \frac{M_1}{a} \cdot \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha + \frac{M_1}{a} \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) d\alpha$$

que nous noterons :

$$n = - N - \frac{M_1}{a} \cdot \frac{T}{\rho_2 - \rho_1} + \frac{M_1}{a} T_1 \quad 2.48$$

### 2.5.3 Moments

Par combinaison 2.9 et 2.10 deviennent :

$$m - v M = - F \cdot (1 - v^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \quad 2.49$$

.....

$$\text{où } M = -M_1 \left( y' + v \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right)$$

qui d'après 2.45 s'écrit encore :

$$M = -M_1 \left[ \frac{1-v}{\lambda} y_0 - 1 - S_i - (1-v) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right] \quad 2.50$$

$$\text{avec : } S_i = \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha$$

m s'exprime alors par :

$$m = v M - M_1 (1-v^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \quad 2.51$$

## 2.6 Calcul numérique des intégrales $T$ $T_i$ $S_i$

Nous calculerons les intégrales figurant dans 2.48, 2.50 et 2.51 par :

$$T = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{p_2 + \lambda \varphi_k - \cos \varphi_k}{\lambda + \sin \varphi_k} \sin \varphi_k z_k + \frac{p_2 + \lambda \varphi_{k+1} - \cos \varphi_{k+1}}{\lambda + \sin \varphi_{k+1}} \sin \varphi_{k+1} z_{k+1} \right\} \frac{\Delta \varphi_k}{2} \\ + \frac{p_2 + \lambda \varphi_n - \cos \varphi_n}{\lambda + \sin \varphi_n} \sin \varphi_n z_n \frac{\Delta \varphi_n}{2}$$

$$T_i = \left\{ \frac{\sin \varphi_{i-1}}{\lambda + \sin \varphi_{i-1}} z_{i-1} + \frac{\sin \varphi_i}{\lambda + \sin \varphi_i} z_i \right\} \frac{\Delta \varphi_{i-1}}{2} + T_{i-1}$$

$$T_1 = 0$$

$$S_i = \left\{ \frac{\sin \varphi_{i-1}}{\lambda + \sin \varphi_{i-1}} Y_{i-1} + \frac{\sin \varphi_i}{\lambda + \sin \varphi_i} Y_i \right\} \frac{\Delta \varphi_{i-1}}{2} + S_{i-1}$$

$$S_1 = 0$$

## 2.7 Définition des contraintes

$$\sigma_{M_1} = \frac{6 M_1}{h^2}$$

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{h}$$

$$\sigma_{\varphi F} = \frac{N}{h}$$

.....

$$\sigma_{\theta F} = \frac{n}{h} \quad \sigma_{\varphi M} = \frac{6 M}{h^2} \quad \sigma_{\varphi m} = \frac{6 m}{h^2}$$

et en valeurs relatives par rapport à  $\sigma_{M_1}$

$$\tau_z = \frac{\tau}{\sigma_{M_1}} = \frac{z}{4} \frac{h}{a} \frac{\sin \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \quad \sigma_N = \frac{\sigma_{\theta F}}{\sigma_{M_1}} = -\frac{z}{6} \frac{h}{a} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\theta F}}{\sigma_{M_1}} = -\sigma_N - \frac{T}{6(\rho_2 - \rho_1)} \cdot \frac{h}{a} + \frac{h}{6a} T_1 \quad 2.52$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{\varphi M}}{\sigma_{M_1}} = 1 - \frac{1-\nu}{\lambda + \sin \varphi} y_0 + S_i + (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y$$

$$\sigma_m = \nu \sigma_M - (1-\nu^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y$$

2.8 Application : Tore  $\varphi_1 = 0$   $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  soumis à un moment  $M_1$  agissant sur le parallèle  $\varphi_1$ . (Voir Fig. 2.2)

Le cas de charge que nous allons étudier a déjà été traité par H. WISSLER (13) et R.A. CLARK (14). Nous pourrions ainsi comparer nos résultats avec ceux obtenus par ces deux auteurs.

Les caractéristiques du tore sont :

$$\lambda = 10, \quad \frac{a}{h} = 20, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 0,3$$

Le tableau ci-après donne la répartition des points choisis.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_i$ rad	0	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{36}$
$\Delta\varphi_i$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{36}$

.....

La résolution du système d'équations 2.35 et 2.36 donne les valeurs de Y et Z qui permettent de déterminer y, z et les contraintes dont les valeurs figurent dans les tableaux suivants :

$\varphi_0$	Y	Z	y	z
0	0,60807962	- 3794,4156	0,86868611	0
3	- 1,8648065	- 3562,0754	0,81476951	- 2,4351445
6	- 4,2742279	- 3331,1336	0,76119270	- 4,8070619
9	- 6,5771648	- 3101,9729	0,70805547	- 7,0727993
15	- 10,627718	- 2651,9073	0,60383341	- 11,050400
30	- 16,062281	- 1623,3551	0,36679057	- 16,319034
45	- 16,156254	- 842,43212	0,18801694	- 16,287865
60	- 12,487897	- 391,05013	0,08579166	- 12,547951
75	- 6,7409382	- 240,74055	0,05309740	- 6,7781063
85	- 2,3281629	- 220,40910	0,04975668	- 2,3629925

$\varphi_0$	$s_1$	$T_1$	$\tau_z$
0	0	0	0
3	- 0,00025419	- 0,48555598	- 0,00015849
6	- 0,00166597	- 1,8732781	- 0,00062160
9	- 0,00547564	- 4,0262405	- 0,00136170
15	- 0,02481893	- 10,030981	- 0,00348488
30	- 0,16003831	- 28,907762	- 0,00971371
45	- 0,039982725	- 46,309323	- 0,01344587
60	- 0,66977862	- 57,671726	- 0,01250100
75	- 0,87778749	- 64,527287	- 0,00746309
85	- 0,94801019	- 68,120345	- 0,00267584

.....

$\varphi^\circ$	$\sigma_N$	$\sigma_n$	$\sigma_M$	$\sigma_m$
0	0	0,34404273	1	0,22094956
3	0,00201595	0,33798047	0,99559695	0,22502216
6	0,00394271	0,32448936	0,98996930	0,22881449
9	0,00573178	0,30475894	0,98191609	0,23191514
15	0,00867051	0,25178071	0,95417123	0,23451371
30	0,01121648	0,09192822	0,80033044	0,21256932
45	0,00896391	- 0,05083221	0,54805652	0,15311762
60	0,00481161	- 0,14136660	0,27217674	0,07806061
75	0,00133315	- 0,19501781	0,06228173	0,01754409
85	0,00015608	- 0,22378289	- 0,00854215	- 0,00292154

Notons que  $T = 689,79190$

Sur la figure 2.3 sont représentés :

- en traits pleins les contraintes calculées par intégration asymptotique, par R.A. CLARK (14)
- (13)
- en pointillés celles trouvées par H. WISSLER à l'aide de développements en séries
- les résultats de nos calculs figurés par les points  $\odot$

On constate que la précision de la méthode numérique est bonne.

Les tableaux Tb.2.1 à Tb.2.5 placés en fin de chapitre représentent le système des  $2n$  équations à  $2n$  inconnues. Sur ces tableaux figurent toutes les valeurs des coefficients.

2.9 Application : Tore défini par  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  et soumis en  $\varphi_1$  à un effort normal unitaire  $N_1$ . (Voir Fig. 2.4)

Ce cas de charge a également été traité par H. WISSLER (13) et R. A. CLARK (14).

### 2.9.1 Transformation des équations de base

La relation d'équilibre

$$r N \sin \varphi + r Q \cos \varphi = a \int p r \cos \varphi d \varphi + A$$

se réduit à  $r N \sin \varphi + r Q \cos \varphi = 0$

$$\text{pour } \varphi_1 \rightarrow 0 \quad X_1 = \frac{r_1 Q_1}{\sin \varphi_1} \rightarrow -r_1 N_1$$

$$\text{d'où : } X_1 = -a \lambda N_1 \quad 2.53$$

Les changements de variables :

$$y = \frac{D}{a X_1} Y$$

et :

$$z = \frac{X}{X_1} = q + \frac{\lambda}{\lambda + \sin \varphi} \frac{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi}{\rho_2 - \rho_1} \quad 2.54$$

transforment les conditions aux limites en :

$$q = 0 \quad M = 0 \quad \text{en } \varphi_1 = 0 \quad \text{et } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Les transformations 2.23 conduisent aux équations :

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_2(\varphi, \alpha) Y(\alpha) \sin \alpha d \alpha \quad 2.55$$

$$z - \frac{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi}{\rho_2 - \rho_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1(\varphi, \alpha) Z(\alpha) \sin \alpha d \alpha \quad 2.56$$

où :  $K_2(\varphi, \alpha)$  et  $K_1(\varphi, \alpha)$  sont des noyaux identiques à ceux du paragraphe 2.4

$$\text{et } \frac{\lambda}{\rho_2 - \rho_1} = - \frac{\lambda}{\frac{\lambda \pi}{2} + 1}$$

.....

En conservant la même répartition de points et les mêmes notations que dans le cas du moment, les équations 2.55 et 2.56 donnent un système qui ne diffère de 2.35 et 2.36 que par le second membre.

On obtient :

$$A_1 Y_i + A_2 Z_i - \sum_{k=1}^n K_{ik} Z_k \Delta_k = \lambda \cdot \frac{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.57$$

$$A_3 Y_i + A_4 Z_i - \sum_{k=1}^n H_{ik} Y_k \Delta_k = 0 \quad 2.58$$

Nous calculerons ici les intégrales par la méthode des trapèzes. 2.57 et 2.58 s'écriront alors :

$$A_1 Y_i + A_2 Z_i - \sum_{k=1}^n K_{ik} Z_k \frac{\Delta_{k-1} + \Delta_k}{2} = \lambda \cdot \frac{\rho_2 + \lambda \varphi - \cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} \quad 2.59$$

$$A_3 Y_i + A_4 Z_i - \sum_{k=1}^n H_{ik} Y_k \frac{\Delta_{k-1} + \Delta_k}{2} = 0 \quad 2.60$$

avec  $\Delta_0 = 0$

La répartition des points et des intervalles est la suivante :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_k$	0	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{36}$
$\Delta\varphi_k^*$	$\frac{\pi}{120}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{7\pi}{120}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{72}$	$\frac{\pi}{24}$

$$\text{où : } \Delta\varphi_k^* = \frac{\Delta\varphi_{k-1} + \Delta\varphi_k}{2}$$

Dans un deuxième calcul, nous considérerons 18 points équidistants sur le méridien défini par  $\varphi_1 = 0$  et  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , les intégrales étant toujours calculées par la méthode des trapèzes. Les intervalles égaux auront pour valeur

.....



$\Delta\varphi_k = \frac{\pi}{36}$  ce qui entraîne  $\Delta\varphi_k^* = \frac{\pi}{36}$  sauf pour  $k = 1$  où l'on a

$$\Delta\varphi_1^* = \frac{\pi}{72}$$

## 2.9.2 Détermination des efforts normaux et moments de flexion

### 2.9.2.1 Calcul de $y'$ et $z'$

Comme au paragraphe 2.5.1, on obtient à partir des équations 2.55 et 2.56 :

$$(p_2 - p_1) z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\varphi, \alpha) Z(\alpha) d\alpha + \lambda \cdot \frac{p_2 + \lambda\varphi - \cos\varphi}{\lambda + \sin\varphi} \quad 2.61$$

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(\varphi, \alpha) Y(\alpha) d\alpha \quad 2.62$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1) z(\lambda + \sin\varphi) &= (p_2 + \lambda\varphi - \cos\varphi) \int_0^{\varphi} \frac{p_1 + \lambda\alpha - \cos\alpha}{\lambda + \sin\alpha} \sin\alpha Z(\alpha) d\alpha \\ &+ (p_1 + \lambda\varphi - \cos\varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p_2 + \lambda\alpha - \cos\alpha}{\lambda + \sin\alpha} \sin\alpha Z(\alpha) d\alpha \\ &+ \lambda (p_2 + \lambda\varphi - \cos\varphi) \end{aligned} \quad 2.63$$

$$y(\lambda + \sin\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{p_1 + \lambda\alpha - \cos\alpha}{\lambda + \sin\alpha} \sin\alpha Y(\alpha) d\alpha$$

$$+ (p_1 + \lambda\varphi - \cos\varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha}{\lambda + \sin\alpha} Y(\alpha) d\alpha \quad 2.64$$

et en dérivant :

.....

$$\begin{aligned}
 (\rho_2 - \rho_1) \left[ z(\lambda + \sin \varphi) \right]' &= (\lambda + \sin \varphi) \int_0^{\varphi} \frac{\rho_1 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \\
 &+ (\lambda + \sin \varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \\
 &+ \lambda (\lambda + \sin \varphi)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\left[ y(\lambda + \sin \varphi) \right]' = (\lambda + \sin \varphi) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \tag{2.66}$$

De 2.65 on tire :

$$\begin{aligned}
 z' &= -\frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \\
 &- \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) d\alpha + \frac{\lambda}{\rho_2 - \rho_1}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

et de 2.66 :

$$y' = -\frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha - \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \tag{2.68}$$

Or pour  $\varphi = 0$  2.64 donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha = \frac{1 - \nu}{\lambda} y_1 \tag{2.69}$$

d'où :

$$y' = -\frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y + \frac{1 - \nu}{\lambda} y_1 - \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \tag{2.70}$$

.....

### 2.9.2.2 Efforts normaux

Les conditions aux limites et les conditions d'équilibre permettent d'écrire :

$$N = -\frac{X}{a} \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} = \lambda N_1 \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z \quad 2.71$$

$$n = -\frac{1}{a} \frac{dX}{d\varphi} = \lambda N_1 z' \quad 2.72$$

soit :

$$n = N + \lambda N_1 \left( \frac{T + \lambda}{\rho_2 - \rho_1} \right) - \lambda N_1 T_1 \quad 2.73$$

avec :

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_2 + \lambda \alpha - \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} \sin \alpha Z(\alpha) d\alpha \quad 2.74$$

$$T_1 = \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Z(\alpha) d\alpha \quad 2.75$$

### 2.9.2.3 Moments de flexion

$$M = -X_1 (y' + v \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y)$$

Soit en vertu de 2.70

$$M = a \lambda N_1 \left[ \frac{1-v}{\lambda} y_1 - S_1 - (1-v) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right] \quad 2.76$$

avec :

$$S_1 = \int_0^{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \sin \alpha} Y(\alpha) d\alpha \quad 2.77$$

D'autre part :  $m = v M - X_1 (1 - v^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y$

$$m = -v M + a \lambda N_1 (1 - v^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \quad 2.78$$

Les intégrales  $T$ ,  $T_1$ ,  $S_1$  sont calculées comme au paragraphe 2.6

.....

### 2.9.3 Définition des contraintes

$$\sigma_{N_1} = \frac{N_1}{h} \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} \quad \sigma_{\varphi F} = \frac{N}{h}$$

$$\sigma_{\varphi F} = \frac{n}{h} \quad \sigma_{\varphi M} = \frac{6 M}{h^2} \quad \sigma_{\varphi m} = \frac{6 m}{h^2}$$

et en valeurs relatives par rapport à  $\sigma_{N_1}$

$$\tau_z = \frac{\tau}{\sigma_{N_1}} = -\frac{3}{2} \lambda \frac{\sin \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z$$

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{\varphi F}}{\sigma_{N_1}} = \lambda \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} z$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\varphi F}}{\sigma_{N_1}} = \sigma_N + \lambda \left( \frac{T + \lambda}{\rho_2 - \rho_1} \right) - \lambda T_i \quad 2.79$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{\varphi M}}{\sigma_{N_1}} = 6 \lambda \frac{a}{h} \left[ \frac{1-\nu}{\lambda} y_1 - S_1 - (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y \right]$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\varphi m}}{\sigma_{N_1}} = -\nu \sigma_M + 6 \lambda \frac{a}{h} (1-\nu^2) \frac{\cos \varphi}{\lambda + \sin \varphi} y$$

### 2.9.4 Résultats

#### 2.9.4.1 Premier calcul avec 10 points

La résolution du système d'équations 2.59, 2.60 donne :

.....

$\varphi^\circ$	Y	Z	$10^3 \cdot y$	z
0	1,0069650	- 42,161134	9,9498931	1
3	0,9144719	- 42,215198	9,9347460	0,90751759
6	0,8232497	- 42,212775	9,9070476	0,81631470
9	0,7338794	- 42,109198	9,8567470	0,72697971
15	0,5622857	- 41,501062	9,6664918	0,55551919
30	0,1932581	- 37,073861	8,5433428	0,18727782
45	- 0,0447398	- 29,986749	6,8503555	- 0,04953514
60	- 0,1414855	- 23,862327	5,4197490	- 0,14527933
75	- 0,1057295	- 21,126936	4,8042846	- 0,10909250
85	- 0,0112192	- 20,845348	4,7679541	- 0,01455685

$\varphi^\circ$	$10^3 \cdot S_i$	$T_i$	$\tau_z$
0	0	0	0
3	0,1246541	- 0,00575446	- 0,07087823
6	0,4722677	- 0,02294135	- 0,12666998
9	0,9911466	- 0,05135331	- 0,16795484
15	2,3257600	- 0,14013492	- 0,21022809
30	5,3873397	- 0,50828504	- 0,13376987
45	6,2052154	- 0,99860788	0,04907037
60	4,3423556	- 1,5067883	0,17368293
75	1,6471720	- 1,9993391	0,14414060
85	0,7457469	- 2,3265389	0,01978147

$$T = 17,948400$$

.....

$\varphi^\circ$	$\sigma_N$	$\sigma_n$	$\sigma_M$	$\sigma_m$
0	1	- 17,727556	0	1,0865283
3	0,9015555	- 17,571567	- 0,1428301	1,0348981
6	0,8034429	- 17,301585	- 0,5500001	0,8997908
9	0,7069714	- 16,920994	- 1,1587640	0,6991036
15	0,5230549	- 15,849262	- 2,7196543	0,1779970
30	0,1544649	- 11,799171	- 6,2209200	- 1,0968017
45	- 0,0327135	- 6,708763	- 6,9904880	- 1,6031197
60	- 0,0668502	- 1,592822	- 4,5845230	- 1,1030235
75	- 0,0257482	3,291583	- 1,2360644	- 0,2469956
85	- 0,0011538	6,538986	- 0,0908510	0,0140142

.....

2.9.4.2 Deuxième calcul avec 18 points

$\varphi^\circ$	$10^3 y$	$z$	$\tau_z$
0	9,8413502	1	0
5	9,8165985	0,84533235	- 0,10955848
10	9,7375966	0,69528902	- 0,17801237
15	9,5703290	0,55246523	- 0,20907162
20	9,2998681	0,41922953	- 0,20796461
25	8,9276618	0,29762886	- 0,18102467
30	8,4680332	0,18931189	- 0,13522278
35	7,9446253	0,09548366	- 0,07769441
40	7,3867788	0,01690162	- 0,01531199
45	6,8259604	- 0,04608715	0,04565454
50	6,2927151	- 0,09347389	0,09976527
55	5,8139433	- 0,12549168	0,14252055
60	5,4107499	- 0,14250833	0,17036934
65	5,0965341	- 0,14492143	0,18064328
70	4,8760271	- 0,13307158	0,17145782
75	4,7440121	- 0,10718223	0,14161607
80	4,6851047	- 0,06733790	0,09055446
85	4,6732081	- 0,01350367	0,01838037

.....

$\varphi^\circ$	$a_N$	$\sigma_n$	$a_M$	$\sigma_m$
0	1	- 17,832001	0	1,0746754
5	0,83483942	- 17,509328	- 0,3732262	0,9466985
10	0,67303883	- 16,879976	- 1,3636644	0,6202178
15	0,52017730	- 15,964801	- 2,6949293	0,1755231
20	0,38091870	- 14,794964	- 4,1236621	- 0,3143575
25	0,25880575	- 13,411452	- 5,4483364	- 0,7867676
30	0,15614182	- 11,862272	- 6,5148784	- 1,1917762
35	0,07397273	- 10,198239	- 7,2189997	- 1,4935926
40	0,01216542	- 8,468277	- 7,5054107	- 1,6710242
45	- 0,03043636	- 6,715068	- 7,3644202	- 1,7170608
50	- 0,05580866	- 4,971661	- 6,8266697	- 1,6377288
55	- 0,06652930	- 3,259445	- 5,9567911	- 1,4504548
60	- 0,06557519	- 1,587704	- 4,8467664	- 1,1821486
65	- 0,05615690	0,045236	- 3,6095791	- 0,8672145
70	- 0,04160369	1,649450	- 2,3735476	- 0,5455945
75	- 0,02529727	3,239675	- 1,2713780	- 0,2609435
80	- 0,01064479	4,830761	- 0,4658174	- 0,0588692
85	- 0,00107029	6,432735	- 0,0854801	0,0148034

Les résultats précédents sont reportés sur la figure 2.5 ainsi que les valeurs données par H. WISSLER (13) et R. A. CLARK (14).



## COQUES TORIQUES (2ème partie) Tb. 2.1

$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
- 16,704519	- 0	0	0
0	- 16,704519	0	0
0	0	- 16,704519	0
0	0	0	- 16,704519
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
- 2,9755705.10 <sup>-4</sup>	- 3,8673811.10 <sup>-3</sup>	- 7,6837857.10 <sup>-3</sup>	- 2,2880177.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,5639251.10 <sup>-3</sup>	- 7,6720655.10 <sup>-3</sup>	- 2,2845277.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,8415374.10 <sup>-3</sup>	- 7,3631702.10 <sup>-3</sup>	- 2,2811516.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,8219068.10 <sup>-3</sup>	- 7,6215807.10 <sup>-3</sup>	- 2,2481626.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,7837614.10 <sup>-3</sup>	- 7,5455121.10 <sup>-3</sup>	- 2,2551831.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,6968504.10 <sup>-3</sup>	- 7,3721948.10 <sup>-3</sup>	- 2,2033825.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,6253414.10 <sup>-3</sup>	- 7,2295936.10 <sup>-3</sup>	- 2,1607622.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,5723195.10 <sup>-3</sup>	- 7,1238570.10 <sup>-3</sup>	- 2,1291602.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,5397755.10 <sup>-3</sup>	- 7,0589586.10 <sup>-3</sup>	- 2,1097634.10 <sup>-2</sup>
0	- 3,5300346.10 <sup>-3</sup>	- 7,0395337.10 <sup>-3</sup>	- 2,1039577.10 <sup>-2</sup>

## COQUES TORIQUES (2ème partie) Tb. 2.2

$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$Y_8$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
- 16,704519	0	0	0
0	- 16,704519	0	0
0	0	- 16,704519	0
0	0	0	- 16,704519
0	0	0	0
0	0	0	0
- 9,3695956.10 <sup>-2</sup>	- 1,7684839.10 <sup>-1</sup>	- 2,4526475.10 <sup>-1</sup>	- 2,9599368.10 <sup>-1</sup>
- 9,3553032.10 <sup>-2</sup>	- 1,7657864.10 <sup>-1</sup>	- 2,4489064.10 <sup>-1</sup>	- 2,9554220.10 <sup>-1</sup>
- 9,3414783.10 <sup>-2</sup>	- 1,7631768.10 <sup>-1</sup>	- 2,4452875.10 <sup>-1</sup>	- 2,9510541.10 <sup>-1</sup>
- 9,3282375.10 <sup>-2</sup>	- 1,7606776.10 <sup>-1</sup>	- 2,4418214.10 <sup>-1</sup>	- 2,9468717.10 <sup>-1</sup>
- 9,2742024.10 <sup>-2</sup>	- 1,7560951.10 <sup>-1</sup>	- 2,4354660.10 <sup>-1</sup>	- 2,9392015.10 <sup>-1</sup>
- 9,0902507.10 <sup>-2</sup>	- 1,7450525.10 <sup>-1</sup>	- 2,4242780.10 <sup>-1</sup>	- 2,9256995.10 <sup>-1</sup>
- 8,9144166.10 <sup>-2</sup>	- 1,7142156.10 <sup>-1</sup>	- 2,4192502.10 <sup>-1</sup>	- 2,9232227.10 <sup>-1</sup>
- 8,7840393.10 <sup>-2</sup>	- 1,6891445.10 <sup>-1</sup>	- 2,3867996.10 <sup>-1</sup>	- 2,9317435.10 <sup>-1</sup>
- 8,7040165.10 <sup>-2</sup>	- 1,6737564.10 <sup>-1</sup>	- 2,3650558.10 <sup>-1</sup>	- 2,9079838.10 <sup>-1</sup>
- 8,6800643.10 <sup>-2</sup>	- 1,6691504.10 <sup>-1</sup>	- 2,3585475.10 <sup>-1</sup>	- 2,8999815.10 <sup>-1</sup>

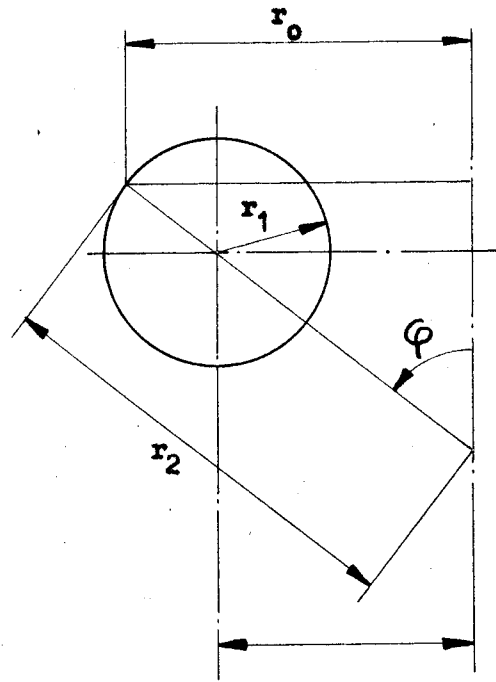
## COQUES TORIQUES (2ème partie) Tb. 2.3

$Y_9$	$Y_{10}$	$Z_1$	$Z_2$
0	0	$- 2,6770063 \cdot 10^{-3}$	0
0	0	0	$- 2,4466005 \cdot 10^{-3}$
0	0	0	$2,2174126 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	$2,1313355 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	$1,9609334 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	$1,5454287 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	$1,1443490 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	$7,5550771 \cdot 10^{-5}$
$- 16,704519$	0	0	$3,7437605 \cdot 10^{-5}$
0	$- 16,704519$	0	$1,2492559 \cdot 10^{-5}$
$- 2,1808678 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1214995 \cdot 10^{-1}$	$- 2,2889004 \cdot 10^{-4}$	0
$- 2,1775413 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1197889 \cdot 10^{-1}$	0	$- 2,2889004 \cdot 10^{-4}$
$- 2,1743231 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1181340 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1712413 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1165492 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1655901 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1136431 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1556420 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1085273 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1538170 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1075888 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1622875 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1119448 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1798144 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1224880 \cdot 10^{-1}$	0	0
$- 2,1767833 \cdot 10^{-1}$	$- 1,1301461 \cdot 10^{-1}$	0	0



## COQUES TORIQUES (2ème partie) Tb. 2.5

$Z_8$	$Z_9$	$Z_{10}$	
0	0	0	= 0
$6,2504044 \cdot 10^{-3}$	$2,3030254 \cdot 10^{-3}$	$3,9628589 \cdot 10^{-4}$	= 0
$1,2468697 \cdot 10^{-2}$	$4,5942191 \cdot 10^{-3}$	$7,9053583 \cdot 10^{-4}$	= 0
$1,8655670 \cdot 10^{-2}$	$6,8738725 \cdot 10^{-3}$	$1,1828000 \cdot 10^{-3}$	= 0
$3,0940574 \cdot 10^{-2}$	$1,1400372 \cdot 10^{-2}$	$1,9616832 \cdot 10^{-3}$	= 0
$6,1210137 \cdot 10^{-2}$	$2,2553502 \cdot 10^{-2}$	$3,8808230 \cdot 10^{-3}$	= 0
$9,1066868 \cdot 10^{-2}$	$3,3554521 \cdot 10^{-2}$	$5,7737884 \cdot 10^{-3}$	= 0
$1,1817551 \cdot 10^{-1}$	$4,4529349 \cdot 10^{-2}$	$7,6622479 \cdot 10^{-3}$	= 0
$5,9885943 \cdot 10^{-2}$	$5,2978327 \cdot 10^{-2}$	$9,5767162 \cdot 10^{-3}$	= 0
$1,9983346 \cdot 10^{-2}$	$1,8571633 \cdot 10^{-2}$	$8,1904850 \cdot 10^{-3}$	= 0
0	0	0	= 14,285700
0	0	0	= 14,211318
0	0	0	= 14,137916
0	0	0	= 14,065671
0	0	0	= 13,925286
0	0	0	= 13,605429
0	0	0	= 13,342256
$-2,2889004 \cdot 10^{-4}$	0	0	= 13,147120
0	$-2,2889004 \cdot 10^{-4}$	0	= 13,027349
0	0	$-2,2889004 \cdot 10^{-4}$	= 12,991500



(2ème partie)

Fig. 2.1

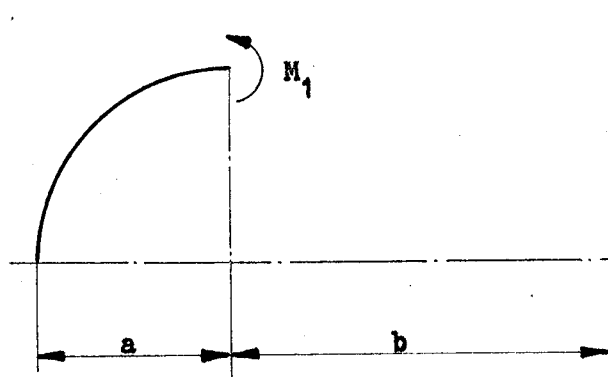


Fig. 2.2

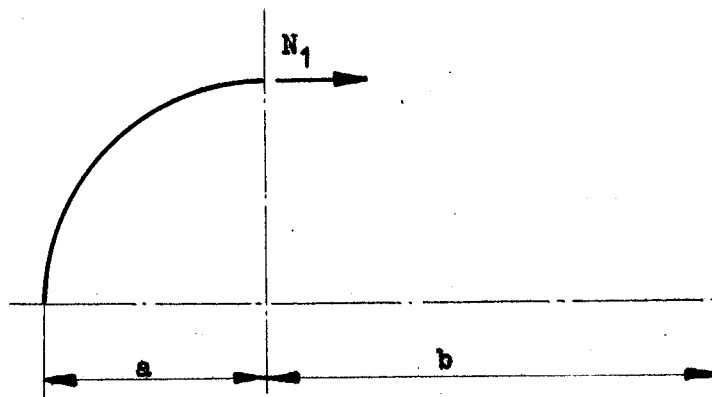


Fig. 2.4

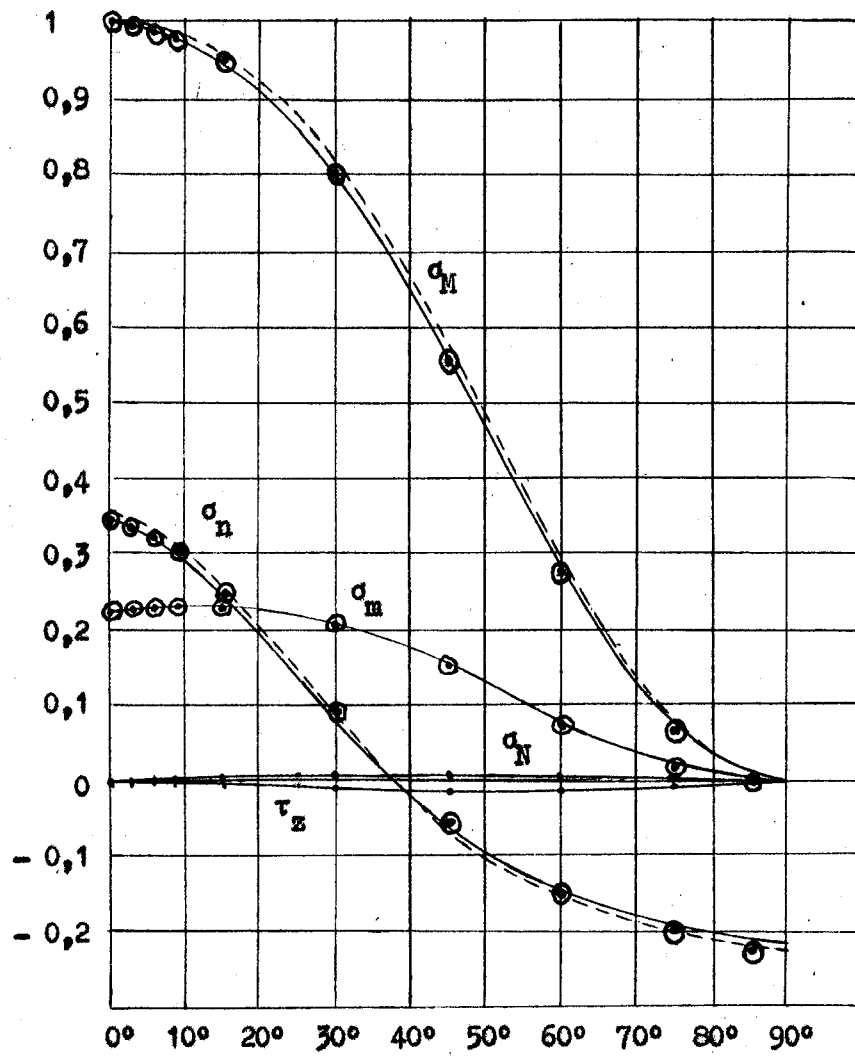
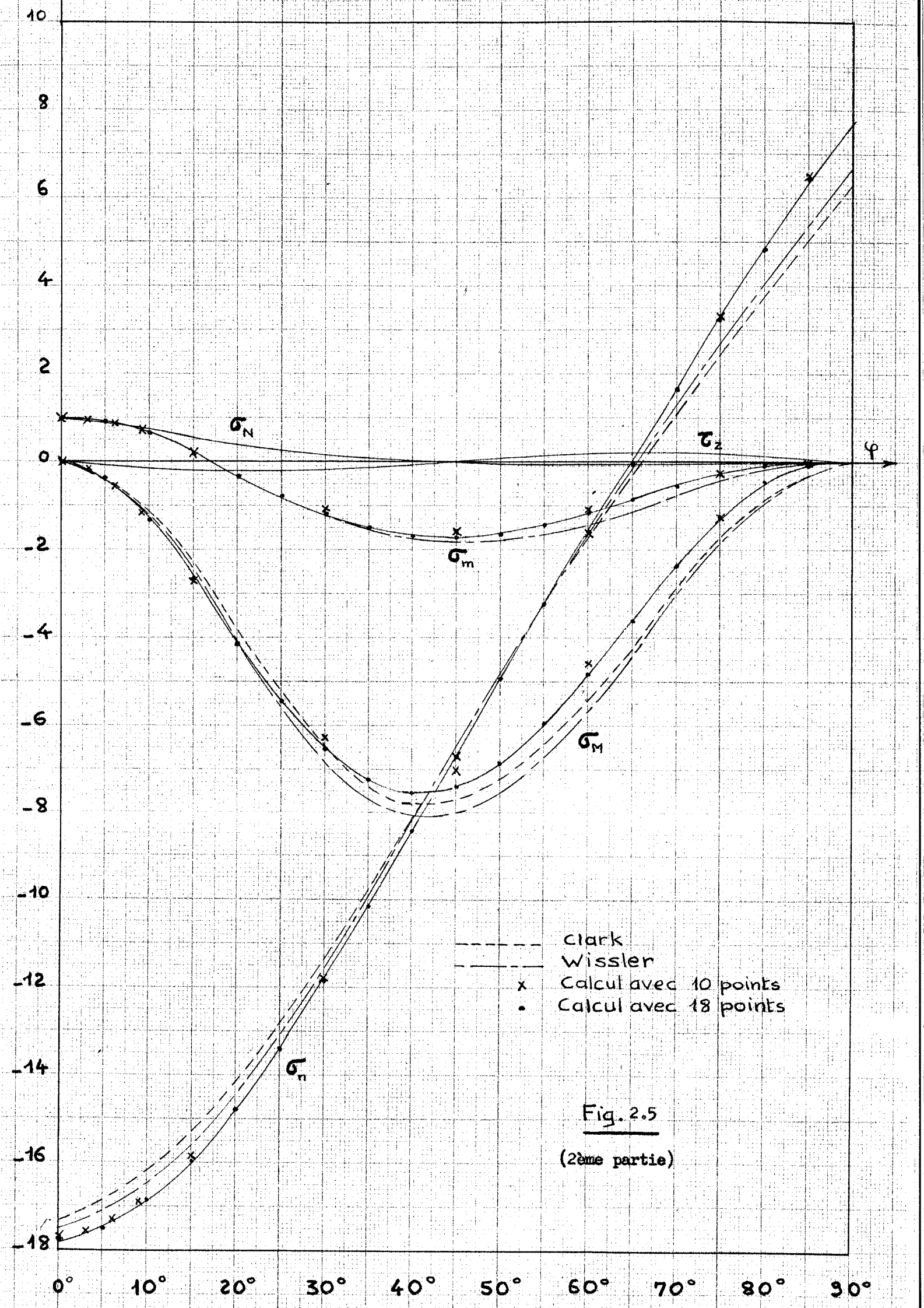


Fig. 2.3

(2ème partie)







### 3. COQUE DE REVOLUTION A MERIDIENNE QUELCONQUE ET D'EPAISSEUR CONSTANTE

#### 3.1 Equations de base (Voir Fig. 3.1)

Les équations 1.26 et 1.37 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi \right] \frac{dy}{d\varphi} - \left[ \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi + \nu \right] y \\ = - \frac{x r_1}{D} - \alpha r_2 (1 + \nu) \frac{dr}{d\varphi} \end{aligned} \quad 3.1$$

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi \right] \frac{dx}{d\varphi} - \left[ \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi - \nu \right] x \\ = - \frac{S + A}{\sin^2 \varphi} \left[ \frac{d}{d\varphi} \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) \cotg \varphi \right] \\ - \frac{d}{d\varphi} r_2^2 F_n - r_1 r_2 F_t \left( \frac{r_2}{r_1} + \nu \right) \\ + E e \left( r_1 y - \alpha r_2 \frac{dT_m}{d\varphi} \right) \end{aligned} \quad 3.2$$

Elles peuvent se transformer en :

$$L y = - (1 - \nu) y \sin \varphi - \frac{x r_1}{D} \sin \varphi - \alpha r_2 (1 + \nu) \frac{dr}{d\varphi} \quad 3.3$$

et :

.....

$$L x = - (1 + \nu) x \sin \varphi + E e (r_1 y - \alpha r_2 \frac{dT_m}{d\varphi}) \sin \varphi$$

$$- \frac{S + A}{\sin \varphi} \left[ \frac{d}{d\varphi} \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) \cotg \varphi \right]$$

$$- \left[ \frac{d}{d\varphi} r_2^2 F_n + r_1 r_2 F_t (r_2/r_1 + \nu) \right] \sin \varphi \quad 3.4$$

L'opérateur L se définit par :

$$L f = \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \varphi \frac{r_2}{r_1} \frac{df}{d\varphi} \right) - \left( \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \varphi + 1 \right) f \sin \varphi \quad 3.5$$

### 3.2 Etude de l'opérateur L

Si l'on tient compte du théorème de Meusnier  $r_2 = \frac{r_0}{\sin \varphi}$  et de la relation  $r_1 = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dr_0}{d\varphi}$  (Voir Fig. 3.1) l'opérateur se transforme en :

$$L f = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_0 \cos \varphi}{r_0'} \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{r_0' \cos \varphi + r_0 \sin \varphi}{r_0} f$$

où :

$$L f = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_0 \cos \varphi}{r_0'} \frac{df}{d\varphi} \right) - r_0 \left( \frac{\cos \varphi}{r_0} \right)' f \quad 3.6$$

On vérifie facilement que  $f = \frac{1}{r_0}$  est solution de :  $L f = 0$

Ecrivons  $L f = 0$  sous la forme :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_0}{r_1} \frac{df}{d\varphi} \right) - \frac{r_1 \cos^2 \varphi + r_0 \sin \varphi}{r_0} f = 0$$

soit en effectuant et divisant par  $\frac{r_0}{r_1}$

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_0}{r_1} \right) \frac{df}{d\varphi} - \frac{r_1 \cos^2 \varphi}{r_0} + \sin \varphi = 0 \quad 3.7$$

.....

Une deuxième solution de  $L f = 0$  indépendante de  $f_1 = 1/r_0$  est donnée par :

$$f_2 = f_1 \int \frac{\exp -\int p(\varphi) d\varphi}{u^2} d\varphi$$

où :

$$p(\varphi) = \frac{\frac{d}{d\varphi} (r_0 / r_1)}{(r_0 / r_1)}$$

effectuant on obtient :

$$f_2 = \frac{1}{r_0} \int r_0 r_1 d\varphi = \frac{1}{r_0} \int r_0 ds = \frac{S(\varphi)}{2\pi r_0} \quad 3.8$$

où  $S(\varphi)$  représente la surface engendrée par la rotation autour de l'axe de la coque d'un segment de méridienne :

$ds = r_1 d\varphi$  est l'élément d'arc de la méridienne.

### 3.3 Définition des noyaux

Connaissant les deux solutions particulières  $f_1$  et  $f_2$  on peut déterminer deux solutions :

$$x_1 = f_1 + \rho_1 f_2 \quad \text{et} \quad x_2 = f_1 + \rho_2 f_2$$

qui satisfassent respectivement aux conditions aux limites sur les parallèles  $\varphi = \varphi_1$  et  $\varphi = \varphi_2$ . La définition des noyaux s'effectue alors comme pour les cas étudiés dans les chapitres 1 et 2 de la deuxième partie de notre étude.

On peut donc numériquement calculer une coque de révolution de méridienne quelconque même si elle n'est pas définie analytiquement.

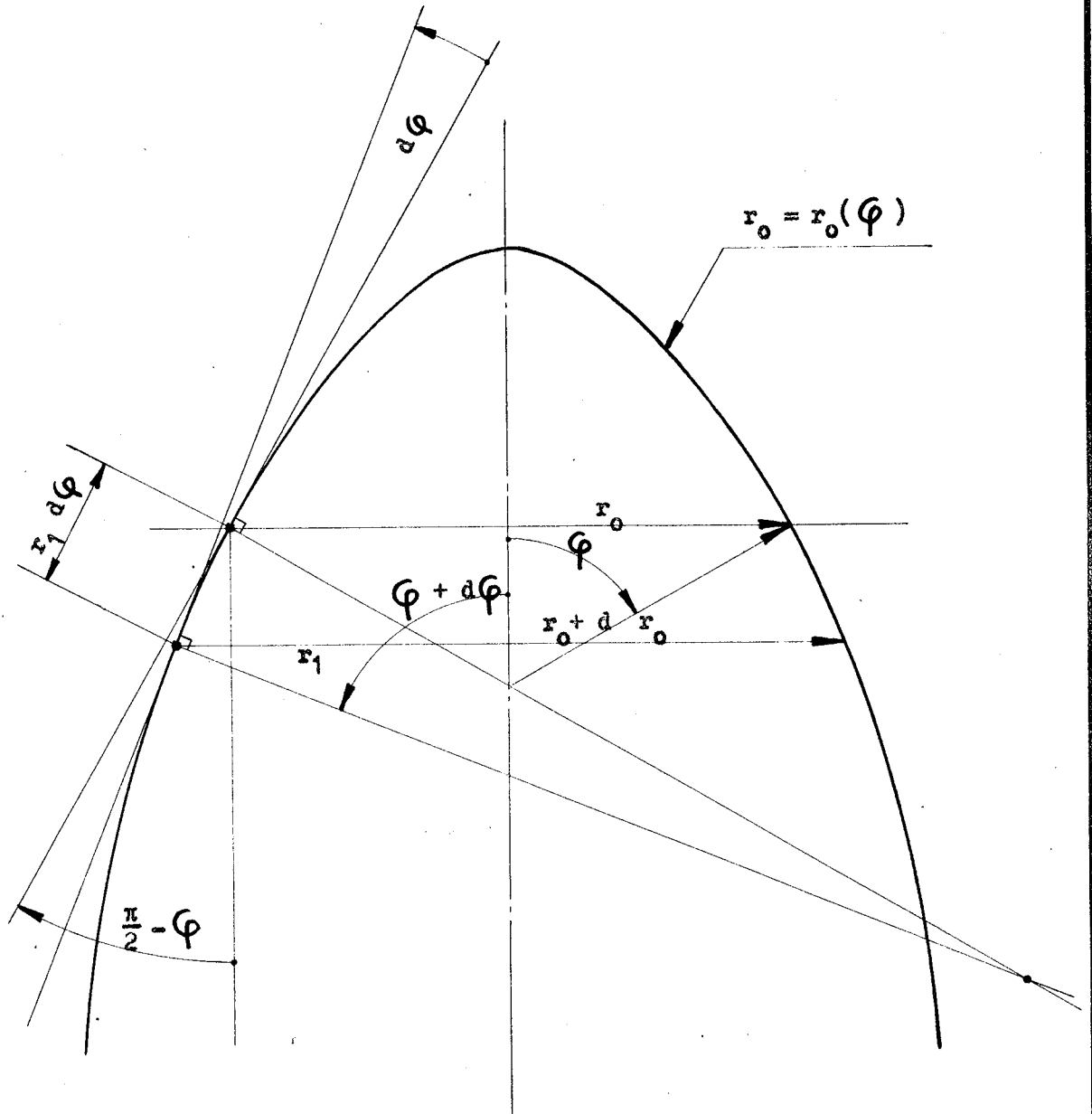


Fig. 3.1 (2ème partie)

BIBLIOGRAPHIE CITEE DANS NOTRE ETUDE

- (1) G. PETIAU - La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique Mathématique.  
Centre National de la recherche scientifique - PARIS 1955 -
- (2) M. KLINE - Some Bessel equations and their application to guide and cavity theory.  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXVII P. 37 à 48 - 1948 -
- (3) H. B. DWIGHT - Table of roots for natural frequencies in coaxial type cavities  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXVII P. 84 à 89 - 1948 -
- (4) E. C. TITCHMARSH - Eigenfunctions expansions associated with second-order differential equations.  
OXFORD Clarendon Press - 1950 - 2ème édition.
- (5) I. N. SNEDDON - Fourier Transforms.  
Mc Graw Hill - 1951 -
- (6) L. ROBIN - Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales  
T. I, II et III Gauthier Villars 1957 - 1958 - 1959 -  
  
Tables numériques des fonctions associées de Legendre  $P_n^m(\cos \theta)$   
1er et 2ème fascicules - Editions de la Revue d'Optique  
1952 - 1959 -
- (7) E. REISSNER - Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXV - N° 1 -  
Février 1946 - P. 80-85 -
- (8) W. S. WLASSOW - Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik -  
BERLIN - 1958 -
- (9) H. S. CARSLAW and J.C. JAEGER - Conduction of heat in solids -  
OXFORD - 1959 -
- (10) S. TIMOSHENKO - Theory of Plates and Shells -  
Mc GRAW-HILL - First Edition Third Impression - 1940 -
- (11) L. BOLLE - Festigkeitsberechnung Von Kugelschalen  
Schweizerische Bauzeitung  
Bd. 66 - n° 9 Juillet Pages 105-108  
n° 10 Décembre Pages 111-113 - 1915 -

- (12) F. G. TRICOMI - Integral Equations  
Interscience Publishers - NEW-YORK - 1957
- (13) H. WISSLER - Festigkeitsberechnung Von Ringflaechenschalen  
Dissertation ZURICH - 1916
- (14) R. A. CLARK - On the theory on thin elastic toroidal Shells  
Journal of Mathematics and Physics - P. 146 à 178 - Vol 29  
- 1950
- (15) L. N. TAO - On Toroidal Shells  
Journal of Mathematics and Physics - P. 130 à 134 -  
Vol. 38 - n° 2 - 1959
- (16) W. CHANG - Der Spannungszustand in Kreisringschale und ahnlichen  
Schalen mit Scheitelkreisringen unter drehsymmetrischer  
Belastung,  
Sci. Rep. Natl. Tsing Hua Univ. , 5A, 289-349 - 1949 -
- (17) G. D. GALLETLY - Shell Development Company, Emeryville Research Center -  
EMERYVILLE, CALIF.  
Journal of Applied Mechanics - Sept 1958 - Vol. 25 - n° 3 -  
P. 412 -
- G. D. GALLETLY - A Comparison of Methods for Analyzing bending effects in  
toroidal Shells  
Journal of Applied Mechanics - Sept 1958 - Vol. 25 - n° 3 -  
P. 413 -
- (18) G. SALET et J. BARTHELEMY - Les contraintes dans les fonds de récipients  
sous pression  
Société Française des Mécaniciens - P. 17 à 35 - n° 1 -  
Juin 1951 -
- (19) V. S. CERNINA - Etat de contrainte d'une enveloppe torique d'épaisseur  
non négligeable  
Izvestija Akademii Nauk S S S R - Mekhanika i Masinstroenie  
P. 96 à 104 - N° 3 - 1959 -

OUVRAGES SUR LE CALCUL DES COQUES CONIQUES

- BALTRUKONIS J. H. - Influence Coefficients for edge-loaded short, thin, conical frustums -  
Transactions of the ASME Series E - Journal of Applied Mechanics - June 1959 - Vol. 26 - n° 2 - P. 241/245 -
- DUBOIS F. - Uber die Festigkeit der Kegelschale -  
Eidgenossische Technische Hochschule - Zurich Switzerland 1917-
- GRUBER Ernst - Les membranes coniques circulaires d'épaisseur variable, renforcées par des membrures élastiques en nombre arbitraire -  
Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires - Vol. XIII - 1953 - P. 143-174.
- HOFF N. J. - Thin Circular Conical Shells under Arbitrary Loads -  
Journal of Applied Mechanics (Contributions of the ASME Applied Mechanics Division) - March 1955 - Vol. 22 - n° 1 - P. 557-562.
- IVAKHININ I. J. - Stabilité d'une enveloppe conique de section circulaire soumise simultanément à une compression axiale et à la pression extérieure -  
Compte rendu de l'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine n° 4 - Kiev - 1958 -
- IVAKHININ I. J. - Stabilité d'une enveloppe conique de section circulaire soumise à une compression uniforme le long des génératrices -  
Dopovidi Akademii Nauk Ukrainskoj R.S.S. - Comptes rendus de l'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine N° 3 - 1958 - P. 267-271.
- KOROLEVICH Y. S. and GRIGORENKO Y. K. - On the Asymptotic Solution of the Problem of Axisymmetrical Deformation of a Conical Shell with Linearly Varying Thickness.  
Dopovidi de l'Académie des Sciences de la R S S d'Ukraine N° 8 - 1958 - P. 821-825 -
- MA MIN YUAN - Calcul des Pièces Coniques travaillant à la Flexion -  
Annales des Ponts et Chaussées N° 1 Janvier-Février et N° 2 Mars-Avril 1958 -
- MATTHEW F. BORG - Observations of Stresses and Strain near Intersection of Conical and Cylindrical Shells -  
Navy Department - Report 911 - March 1956 -



- MEISSNER E. - The Elasticity Problem for Thin Shells of Toroidal, Spherical or Conical Shape -  
Navy Department - The David W. Taylor Model Basin - Translation 238 - July 1951 -
- ORAVAS G. - Analysis of Continuous Conical Shells of Rotational Symmetry by the Method of Successive Approximations -  
Association Internationale des Ponts et Charpentes - Mémoires publiés par le Secrétariat Général à Zurich - 14e Volume - 1954 -
- SEIDE Paul - Axisymmetrical Buckling of Circular Cones under Axial Compression -  
Journal of Applied Mechanics (Contributions of the ASME Applied Mechanics Division) - March 1956 - Vol. 23 n° 1 - P. 625-628.
- SMITH L. W. and COOPER G. K. - Photoelastic Investigation of Stresses in Conical Head Pressure Vessels -  
Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis - Volume XIII, Number 2 - 1956 -
- TAYLOR C. E. and WENK E. - Analysis of Stresses in the Conical Elements of Shells Structures -  
Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics Published by A.S.M.E. - Ann Arbor Michigan - June 14-18 - 1954 -
- WAHL R. - Zur Festigkeitsberechnung von Kegelboden -  
Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens - Band 21, n° 3 - Dusseldorf - 1955 -
- WATTS G. W. and LANG H. A. - Stresses in a Pressure Vessel with a Conical Head -  
Trans A.S.M.E. Volume 74 - N° 3 - June 1952 -
- WEMPNER G. A. - The Conical Disk Spring -  
Proceeding of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics 1958 - P. 473-478.
- WENK E. and TAYLOR C. E. - Analysis of Stresses at the Reinforced Intersection of Conical and Cylindrical Shells -  
Navy Department - The David W. Taylor Model Basin - Report 826 - March 1953 -
- GOLDBERG J. E. - Axisymmetric oscillations of conical shells -  
IXe Congrès International de Mécanique appliquée - Tome VII - 1957 P. 333-343 -
- CASACCI S. et BOSCH J. - Calcul à la Flexion des Coques Coniques d'épaisseur constante soumises à des charges axisymétriques - 1959 -
- KOVALENKO A. D. - Plaques et enveloppes dans les rotors de turbomachines -  
Edition de l'Académie des Sciences de la R.S.S. de l'Ukraine - KIEV - 1955 -  
Coques coniques d'épaisseur linéairement variable - P. 222-257 -

OUVRAGES SUR LE CALCUL DES COQUES CYLINDRIQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

- CONWAY H. D. - On an Axially Symmetrically Loaded Circular Shell of Variable Thickness. Kl. M.  
Zeitschrift für Angewandte Mathematik Und Mechanik - Vol. 38 -  
1958 - P. 69-70 -
- FAVRE Henry - Sur une Méthode de Calcul des Coques Cylindriques d'Épaisseur Linéairement Variable  
IXe Congrès International de Mécanique Appliquée - 1957 -  
Tome VI - P. 297-308
- FEDERHOFER K. - Berechnung des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehalters mit quadratisch veränderlicher Wandstärke. (Mit 8 Textabbildungen)  
Osterreichisches Ingenieur-Archiv - 1952 - Vol VI - P. 43-64
- FLUGGE W. - Statik und Dynamik der Schalen, P. 132-137 - Berlin, 1934 -
- REISSNER H. - Beton und Eisen - Vol. 7 - P. 150 - 1908 -
- TIMOSHENKO S. - Theory of Plates and Shells - 1940 -  
Cylindrical Tanks with Non-uniform Wall Thickness - P. 413-422 -

OUVRAGES SUR LE CALCUL DES COQUES SPHERIQUES

- Otto BLUMENTHAL - Uber asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen.  
Zeitschrift fur Mathematik und Physik - Vol. 62 - 1914 -  
P. 343-358 -
- Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians - Vol 2 - Cambridge 1912 - P. 319-327 -
- E. FANKHAUSER - Exp. und theoret. Untersuchungen uber die Festigkeit von Kegel und Kugelboden -  
BERLIN 1913 -
- G. D. GALLETLY - Influence Coefficients for Open-Crown Hemispheres -  
ASME Paper N° 59-SA-4
- " " - Influence Coefficients for Hemispherical Shells with Small Openings at the Vertex  
Journal of Applied Mechanics (Contributions of the ASME Applied Mechanics Division) - Vol. 22 - N° 1 - March 1955 - P. 20-24 -
- A. L. GOLDENVEIZER - A method of calculation for the momentless theory of spherical shells.  
Plastinki i Obolochki - MOSCOU : Gosstroyizdat 1939 -
- A. HAVERS - Déformation dissymétrique des coques sphériques.  
Ingenieur Archiv - Vol. 6 - P. 282 - 1935 -
- A. JAKOBSEN - Déformation dissymétrique des coques sphériques. Etude des contraintes dans un dôme sphérique portant sur des colonnes.  
Ingénieur Archiv - Vol. 8 - 1937 - P. 275 -
- H. KELLER - Berechnung gewolbter Boden. BERLIN 1912 -  
Bauzeitung Vol. 61 - Mars 1913 - P. 111 -
- F. J. MAINZER - Die Spannungsverteilung In Der Haut Eines Kugelformigen Behalters Bei Tangentialer Krafteinleitung Durch Aquidistante Stutzen In Einem Beliebigen Breitenkreis Nach Der Membrantheorie.  
Ingenieur Archiv - Vol XXVI - 1958 - P. 81-95 -
- G. A. ORAVAS - Sur la théorie des enveloppes minces presque sphériques.  
Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik -  
Vol. 38 - N° 9/10 - Sept-Oct 1958 - P. 379-386 -

- E. PRELOG - Intégration des équations élastostatiques de lame pour une charge quelconque sur la sphère et le cylindre ayant une épaisseur quelconque.  
IX<sup>e</sup> Congrès International de Mécanique Appliquée - Tome V - 1957 - P. 143-154 -
- E. L. REISS - Flambage à symétrie axiale des enveloppes sphériques peu profondes soumises à une pression extérieure.  
Transactions of the A.S.M.E. Paper N° 58-A-14 - 1958 - P. 1-5 -
- E. REISSNER - Stresses and small displacements of shallow spherical shells. I  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXV, Number 1 - February 1946 - P. 80/85 -
- " " - Stresses and small displacements of shallow spherical shells. II  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXV, Number 4 - January 1947 - P. 279/300 -
- " " - On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells.  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXXVIII, Number 1 - April 1959 - P. 16/35 -
- " " - Spannungen in Kugelschalen in der Muller -  
Breslau Festschrift - LEIPZIG Kroner - 1912 -
- Roger M. SIMONS - A power series solution of the nonlinear equations for axisymmetrical bending of shallow spherical shells -  
Journal of Mathematics and Physics - 1956 - Volume XXXV - P. 164-176 -
- M. F. SPOTTS - Cas particulier de coque sphérique d'épaisseur variable -  
Journal of Applied Mechanics - Trans. A.S.M.E. - Vol 61 - 1939 -
- Eli STERNBERG, R. A. EUBANKS, M.A. SADOWSKY -  
On the Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for a Region Bounded by two Concentric Spheres.  
Proceeding of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics - 1951 - P. 209-215 -
- A. WALDNER - Festigkeitsberechnung von Kugelschalen Schweizerische Bauzeitung -  
Vol. 66 - 28 Août 1915 - P. 105-113 -

OUVRAGES SUR LE CALCUL DES COQUES TORIQUES

- V. S. CERNINA - Etat de contrainte d'une enveloppe en forme de tore d'épaisseur non négligeable.  
Izvestija Akademii Nauk SSSR - Mekhanika i Masinstroenie -  
N° 3 - 1959 - P. 96-104 -
- R. A. CLARK - On the theory of thin elastic toroidal shells -  
Journal of Mathematics and Physics - Vol. 29 - 1950 - P. 146-177
- R. A. CLARK and E. REISSNER - A problem of finite bending of toroidal shells.  
Quarterly of Applied Mathematics - Vol. X - 1952 - P. 321-334
- R. A. CLARK, GILROY and E. REISSNER -  
Stresses and deformations of toroidal shells of elliptical  
cross section  
Journal of Applied Mechanics - 1952 - Vol. 19 - P. 37 -
- G. D. GALLETLY - Torispherical shells - A caution to designers -  
ASME Paper N° 58 - PET. 3 -
- " " - On particular integrals for toroidal shells subjected to uniform  
internal pressure.  
Journal of Applied Mechanics - Sept. 1958 - Vol. 25 - N° 3 -  
P. 412
- " " - A comparison of methods for analyzing bending effects in  
toroidal shells.  
Journal of Applied Mechanics - Sept. 1958 - Vol. 25 - N° 3 -  
P. 413
- R. T. SHIELDS, D.C. DRUCKER - Limit Strength of thin walled pressure vessels with  
an ASME standard torispherical head  
Proceeding of the third U. S. National Congress of Applied  
Mechanics - 1958 - P. 665-672.
- K. STANGE - Der Spannungszustand einer Kreisringschale.  
Ingenieur Archiv, 2 - 1932 - P. 47-91.
- L. N. TAO - On toroidal shells -  
Journal of Mathematics and Physics - Volume XXXVIII, Number 2,  
July 1959 - P. 130-134.
- H. WISSLER - Festigkeitsberechnung Von Ringflächenschalen -  
Thèse de Doctorat - ZURICH 1916 -

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

AVANT-PROPOS .....	IV
NOTATIONS GENERALES ET CONVENTIONS DE SIGNES .....	VII

P R E M I E R E   P A R T I E

R E S O L U T I O N   A N A L Y T I Q U E   A   L ' A I D E   D E S   F O N C T I O N S   O R T H O G O N A L E S

CHAPITRE PREMIER

1. ETABLISSEMENT ET TRANSFORMATION DES EQUATIONS DE BASE .....	2
1.1 Equations d'équilibre .....	2
1.1.1 Equation d'équilibre des efforts .....	2
1.1.2 Equation d'équilibre des moments .....	3
1.2 Détermination des allongements unitaires et des variations de courbure .....	4
1.2.1 Allongements unitaires de la surface moyenne .....	4
1.2.2 Variations de courbure .....	5
1.3 Relation entre les contraintes et les déformations .....	5
1.4 Transformation des équations de base .....	7
1.5 Examen des conditions aux limites .....	11

CHAPITRE DEUXIEME

2. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES CONIQUES .....	14
2.1 Equations de base .....	15
2.2 Coques coniques d'épaisseur constante .....	17
2.2.1 Cas d'un moment $M_2$ appliqué à la base .....	17
2.2.1.1 Rotation au droit de la base provoquée par un couple $M_2$ .....	20
2.2.1.2 Dilatation radiale au droit de la base provoquée par un couple $M_2$ .....	20
2.2.2 Cas d'un effort radial $F_2$ appliqué à la base .....	21
2.2.2.1 Rotation $y_2$ provoquée par un effort radial $F_2$ .....	22
2.2.2.2 Dilatation $\delta_2$ provoquée par un effort radial $F_2$ .....	22

2.2.3	Cas d'une pression $p$ constante appliquée à la paroi intérieure et équilibrée par des efforts axiaux .....	23
2.2.3.1	Rotation provoquée par une pression intérieure constante équilibrée par des efforts axiaux ..	24
2.2.3.2	Dilatation provoquée par une pression intérieure constante équilibrée par des efforts axiaux .....	25
2.2.4	Cas d'une température moyenne $T_m$ constante et d'un gradient $\tau$ constant .....	26
2.2.4.1	Rotation $y_2$ au droit de la base .....	26
2.2.4.2	Dilatation $y_2$ au droit de la base .....	26
2.2.5	Valeurs limites des coefficients d'influence .....	27
2.2.6	Variation des coefficients d'influence en fonction du paramètre $b$ caractéristique des coques coniques ....	30
2.2.6.1	Rotation et dilatation provoquées par un moment $M_2$ .....	31
2.2.6.2	Rotation et dilatation provoquées par un effort radial $M_2$ .....	31
2.2.6.3	Rotation et dilatation provoquées par une pression constante $p$ appliquée à la paroi intérieure et équilibrée par des efforts axiaux ..	31
2.2.6.4	Rotation et dilatation provoquées par un champ de température défini par une température moyenne $T_m$ constante et un gradient $\tau$ constant .....	32
2.3	Coques tronconiques " courtes " d'épaisseur constante .....	32
2.3.1	Cas d'un moment $M_1$ appliqué à la petite base .....	32
2.3.1.1	Calcul des rotations sur les bases provoquées par un moment $M_1$ .....	35
2.3.1.2	Dilatations sur les bases provoquées par un couple $M_1$ .....	38
2.3.2	Cas d'un moment $M_2$ appliqué à la grande base .....	39
2.3.2.1	Rotations au droit des bases provoquées par $M_2$	39
2.3.2.2	Dilatation au droit des bases provoquée par $M_2$	40
2.3.3	Cas d'un effort radial $F_1$ agissant sur la petite base	40
2.3.3.1	Rotations au droit des bases provoquées par un effort radial $F_1$ .....	41
2.3.3.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un effort radial $F_1$ .....	43

2.3.4	Cas d'un effort radial $F_2$ agissant sur la grande base	44
2.3.4.1	Rotations au droit des bases provoquées par un effort $F_2$ .....	45
2.3.4.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un effort $F_2$ .....	46
2.3.5	Cas d'efforts axiaux équilibrés .....	47
2.3.5.1	Rotations provoquées par des efforts axiaux équilibrés .....	49
2.3.5.2	Dilatations provoquées par des efforts axiaux équilibrés .....	50
2.3.6	Cas d'une pression constante $p$ équilibrée par des efforts axiaux .....	51
2.3.6.1	Rotations provoquées au droit des bases par une pression constante équilibrée par des efforts axiaux .....	52
2.3.6.2	Dilatations au droit des bases provoquées par une pression constante équilibrée par des efforts axiaux .....	53
2.4	Coques tronconiques "longues" .....	55
2.4.1	Cas d'un moment $M_1$ appliqué à la petite base .....	56
2.4.1.1	Rotation provoquée par un moment $M_1$ .....	57
2.4.1.2	Dilatation au droit de la base provoquée par un moment $M_1$ .....	58
2.4.2	Cas d'un effort radial $F_1$ appliqué à la base .....	59
2.4.2.1	Rotation provoquée sur la petite base par un effort radial $F_1$ .....	59
2.4.2.2	Dilatation sur la petite base provoquée par un effort radial $F_1$ .....	60

### CHAPITRE TROISIEME

3.	ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES CYLINDRIQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE ..	66
3.1	Equations de base .....	66
3.1.1	Equations d'équilibre .....	66
3.1.2	Expressions des contraintes en fonction des déformations	66
3.1.3	Equations de base .....	67
3.1.3.1	Cas d'une épaisseur linéairement variable ...	67
3.1.3.2	Variation quelconque d'épaisseur .....	67



3.2	Coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable .....	68
3.2.1	Transformation des équations de base .....	68
3.2.2	Cas d'une pression $p = -p_0$ ou telle que $p = p_0 \left( \frac{s}{s_1} - 1 \right) = p_0 (t^2 - 1)$ .....	68
3.2.2.1	Rotations au droit des bases .....	69
3.2.2.2	Dilatations radiales au droit des bases ....	71
3.2.3	Cas d'un effort de cisaillement $Q_1$ .....	72
3.2.3.1	Rotations au droit des bases provoquées par un effort $Q_1$ .....	73
3.2.3.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un effort $Q_1$ .....	73
3.2.4	Cas d'un effort de cisaillement $Q_2$ .....	74
3.2.4.1	Rotations au droit des bases provoquées par $Q_2$	74
3.2.4.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un effort $Q_2$ .....	75
3.2.5	Cas d'un moment $M_1$ .....	75
3.2.5.1	Rotations au droit des bases .....	75
3.2.5.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un moment $M_1$ .....	76
3.2.6	Cas d'un moment $M_2$ .....	77
3.2.6.1	Rotations au droit des bases provoquées par un moment $M_2$ .....	78
3.2.6.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un moment $M_2$ .....	78
3.2.7	Cas d'un effort normal $N_0$ .....	79
3.2.7.1	Rotations au droit des bases provoquées par un effort normal $N_0$ .....	79
3.2.7.2	Dilatations au droit des bases provoquées par un effort normal $N_0$ .....	79

#### CHAPITRE QUATRIEME

4.	ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES SPHERIQUES .....	81
4.1	Equations de base .....	82
4.1.1	Coques sphériques d'épaisseur constante .....	83

4.2	Calottes sphériques d'épaisseur constante et d'angle solide quelconque .....	85
4.2.1	Cas d'efforts radiaux agissant sur le cercle de base	86
4.2.1.1	Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_{\theta}$ .....	90
4.2.1.2	Dilatation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_{\theta}$ .....	91
4.2.2	Cas d'un moment agissant sur le cercle de base .....	92
4.2.2.1	Rotation au droit de la base provoquée par un moment appliqué à cette même base .....	93
4.2.2.2	Dilatation au droit de la base provoquée par un moment $M_{\theta}$ .....	94
4.3	Variation des coefficients d'influence en fonction des paramètres $\theta$ et $k$ .....	95
4.4	Coques hémisphériques .....	96
4.4.1	Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_{\theta}$ .....	97
4.4.1.1	Valeur limite de $Y_{\theta}^{R_{\theta}}$ pour $k^2$ grand .....	97
4.4.1.2	Comparaison de $Y_{\theta}^{R_{\theta}}$ avec le coefficient d'influence correspondant au cylindre tangent de longueur infinie .....	98
4.4.2	Rotation sur la base provoquée par des moments $M_{\theta}$ ...	98
4.4.2.1	Valeur limite de $Y_{\theta}^{M_{\theta}}$ pour $k^2$ grand .....	98
4.4.2.2	Comparaison de $Y_{\theta}^{M_{\theta}}$ avec le coefficient d'influence correspondant au cylindre tangent de longueur infinie .....	98
4.5	Coques sphériques peu profondes .....	99
4.5.1	Rotation au droit de la base provoquée par un moment $M_{\theta}$	100
4.5.2	Rotation au droit de la base provoquée par des efforts radiaux $R_{\theta}$ .....	101

## DEUXIEME PARTIE

## RESOLUTION NUMERIQUE A L'AIDE DES EQUATIONS INTEGRALES

## CHAPITRE PREMIER

1. COQUES SPHERIQUES D'EPAISSEUR CONSTANTE .....	105
1.1 Transformation des équations de base .....	105
1.1.1 Définition des noyaux .....	106
1.1.1.1 Noyau relatif à $u$ .....	107
1.1.1.2 Noyau relatif à $q$ .....	107
1.2 Résolution numérique du système d'équations intégrales .....	108
1.2.1 Transformation des équations de base .....	108
1.2.1.1 Première méthode de transformation .....	108
1.2.1.2 Deuxième méthode de transformation .....	110
1.2.1.3 Troisième méthode de transformation .....	111
1.2.2 Calcul des contraintes .....	116
1.3 Application et comparaison avec des résultats obtenus analyti- quement .....	118

## CHAPITRE DEUXIEME

2. ETUDE DE LA FLEXION DES COQUES TORIQUES .....	131
2.1 Equations de base .....	132
2.2 Transformation des équations de base .....	133
2.3 Définition des noyaux .....	134
2.3.1 Noyau relatif à $y$ .....	134
2.3.2 Noyau relatif à $z$ .....	135
2.4 Résolution numérique du système d'équations intégrales .....	135
2.4.1 Transformation des équations de base .....	135
2.5 Détermination des efforts normaux et moments de flexion .....	139
2.5.1 Calcul de $y'$ et $z'$ .....	139
2.5.2 Efforts normaux .....	141
2.5.3 Moments .....	141
2.6 Calcul numérique des intégrales $T$ $T_i$ $S_i$ .....	142

2.7	Définition des contraintes .....	142
2.8	Application : Tore $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ soumis à un moment $N_1$ agissant sur le parallèle $\varphi_1$ .....	143
2.9	Application : Tore défini par $\varphi_1 = 0$ , $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ et soumis en $\varphi_1$ à un effort normal unitaire $N_1$ .....	146
2.9.1	Transformation des équations de base .....	146
2.9.2	Détermination des efforts normaux et moments de flexion .....	148
2.9.2.1	Calcul de $y'$ et $z'$ .....	148
2.9.2.2	Efforts normaux .....	150
2.9.2.3	Moments de flexion .....	150
2.9.3	Définition des contraintes .....	151
2.9.4	Résultats .....	151
2.9.4.1	Premier calcul avec 10 points .....	151
2.9.4.2	Deuxième calcul avec 18 points .....	154
 CHAPITRE TROISIEME		
3.	COQUE DE REVOLUTION A MERIDIENNE QUELCONQUE ET D'EPAISSEUR CONSTANTE .....	164
3.1	Equations de base .....	164
3.2	Etude de l'opérateur $L$ .....	165
3.3	Définition des noyaux .....	166
 BIBLIOGRAPHIE .....		
TABLE DES MATIERES .....		176



2<sup>e</sup> THESE

Propositions données par la Faculté :

ETUDE THEORIQUE DU GRAISSAGE HYDRODYNAMIQUE

CALCUL des CARACTERISTIQUES de FONCTIONNEMENT  
des PIVOTERIES EQUIPANT les TURBOMACHINES de GRANDE PUISSANCE