Méthodes du type Runge-Kutta pour des systèmes différentiels de forme particulière

Pierre-Jean Laurent

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

Le titre de Docteur de spécialité
Mathématiques Appliquées

par

Pierre-Jean L A U R E N T

Ingénieur Arts et Métiers
Licencié ès sciences

METHODES DU TYPE RUNGE-KUTTA POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS DE FORME PARTICULIERE

Thèse soutenue le: 4 juin 60 devant la commission d'examen:
MM. C.Chabauty, Président,
J.Kuntzmann,
B.Vauquois.

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

Le titre de Docteur de spécialité
Mathématiques Appliquées

par

Pierre-Jean L A U R E N T

Ingénieur Arts et Métiers
Licencié ès sciences

METHODES DU TYPE RUNGE-KUTTA POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS DE FORME PARTICULIERE

Thèse soutenue le: 4 juin 60 devant la commission d'examen:
MM. C.Chabauty, Président,
J.Kuntzmann,
B.Vauquois.

Le présent travail a été préparé au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de ce laboratoire. Sa compétence dans le domaine des problèmes différentiels et les conseils inestimables qu'il m'a donnés constamment, ont été pour moi un guide sûr et ont permis un aboutissement rapide de mes recherches.

Je remercie vivement la Direction de la Société d'Electrochimie, d'Electrométallurgie et des Aciéries Electriques d'Ugine, Monsieur LONG, Directeur aux services centraux de recherches, Messieurs DE FROMONT et MICHEL, Ingénieurs, pour leur appui matériel efficace et pour l'intérêt constant qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance aux professeurs de mathématiques de la Faculté des Sciences, et de l'Institut Polytechnique de Grenoble auxquels je dois toute ma formation, dans le domaine des mathématiques appliquées et de la technique des calculateurs électroniques, au personnel du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, et en particulier à Madame FAURE qui s'est chargée de la présentation de ce fascicule.

J'adresse également tous mes remerciements à Messieurs les Professeurs CHABAUTY et VAUQUOIS, qui ont bien voulu faire partie du Jury.

PLAN

INTRODUCTION

Nous nous proposons dans ce travail, d'écrire des formules du type de Runge-Kutta pour le cas spécial des équations ou systèmes d'équations différentielles du second ordre, dont le second membre ne contient pas la dérivée première.

Exemple:

$$y'' = Y(y, z, t) \qquad y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y'_0$$
$$z'' = Z(y, z, t) \qquad z(0) = z_0 \qquad z'(0) = z'_0$$

Les méthodes de Runge-Kutta permettent de calculer des valeurs approchées des fonctions et de leurs dérivées : y_i, z_i, y'_i, z'_i relatives à l'abscisse t_i.

Les formules de passage de l'abscisse t_i à l'abscisse $t_{i+1} = t_i + h$ pour le type particulier d'équations différentielles ci-dessus, sont les suivantes :

Formule de rang q :

$$y_{i0} = y_i$$
$$z_{i0} = z_i$$

$$Y_{i\beta} = Y(y_{i\beta}, z_{i\beta}, t_i + \theta_\beta h)$$
$$Z_{i\beta} = Z(y_{i\beta}, z_{i\beta}, t_i + \theta_\beta h)$$
$$y_{i\alpha} = y_{i0} + h\theta_\alpha y'_i + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} Y_{i\beta}$$
$$z_{i\alpha} = z_{i0} + h\theta_\alpha z'_i + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} Z_{i\beta}$$

$$y_{iq} = y_{i+1}$$
$$z_{iq} = z_{i+1}$$

et pour les dérivées :

$$y'_{i+1} = y'_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} Y_{i\beta}$$
$$z'_{i+1} = z'_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} Z_{i\beta}$$

On choisit les coefficients Θ_α, $B_{\alpha\beta}$ et $A_{q\alpha}$ de façon à faire coïncider les développements de Taylor de la solution **exacte** et du premier pas de la solution approchée jusqu'à un ordre aussi élevé que possible en h.
Les conditions à imposer à ces coefficients pour assurer cette coïncidence jusqu'au terme
$h^{k+4} y^{(p+4)}/k!$ pour $y^{(p-k)}$ ont été déjà écrites pour un système mis sous forme résolue équilibrée tel que :

$$y^{(p)} = Y\left(y^{p-1}, y^{p-2}, \dots, y, z^{p-1}, z^{p-2}, \dots, z, t\right)$$
$$z^{(p)} = Z\left(y^{p-1}, y^{p-2}, \dots, y, z^{p-1}, z^{p-2}, \dots, z, t\right) \qquad [16]$$

Ces conditions se simplifient quand on considère le type spécial d'équations qui nous intéresse et permettent donc d'exprimer la coïncidence jusqu'au terme

$h^6 y^{(6)}/2!$ pour y et $h^5 y^{(6)}$ pour y'.

Dans ce travail nous avons refait les calculs aboutissant aux conditions auxquelles doivent satisfaire les Θ_α, $B_{\alpha\beta}$ $A_{q\alpha}$ en considérant dès le départ le type particulier d'équation, ce qui nous a permis de les pousser plus loin

(juqu'au terme $h^8 y^{(8)}/2!$ pour y et $h^7 y^{(8)}$ pour y').

Huta [11] a écrit les équations jusqu'en h^{k+5} mais seulement pour des systèmes différentiels sous forme canonique. Il ne nous a donc pas été possible de comparer, même partiellement avec les résultats qu'il obtient.

En résolvant ces équations, nous avons obtenu des formules d'intégration approchée d'ordre 3,4 et 5, qui, s'adressant à une classe plus restreinte de systèmes différentiels que les méthodes classiques, donnent une meilleure précision.

Le chapitre III est consacré à l'étude de méthodes utilisant des dérivées d'ordre plus élevé pour résoudre notre type particulier d'équation différentielle. (Pour l'exposé général de ces méthodes voir [16] et [2]).

Enfin nous proposons dans le chapitre IV quelques **méthodes basées sur l'étude du début**, plus économiques que les méthodes classiques, pour résoudre des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, lorsque l'évaluation des dérivées secondes des fonctions n'est pas trop compliquée.

Ch. I : ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DE RUNGE-KUTTA.

(A) Evaluation des dérivées successives.

On peut toujours se ramener au cas où la variable indépendante ne figure pas explicitement, en ajoutant une équation au système. Supposons le système écrit sous forme résolue équilibrée :

$$y^{(p)} = Y(y, y', \ldots\ldots, y^{(p-1)}, z, z', \ldots\ldots, z^{(p-1)})$$
$$z^{(p)} = Z(y, y', \ldots\ldots, y^{(p-1)}, z, z', \ldots\ldots, z^{(p-1)})$$

OPERATEUR D : Cet opérateur agit sur une fonction f de $y^{(\ell)}$, $z^{(k)}$ ... etc... ($k = 0, \ldots p-1$; $\ell = 0, \ldots p-1$).

$$Df = \sum_{y,\, r=0}^{r=p-1} y^{(r+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r)}}$$

Pour condenser encore l'écriture, $y^{(k)}$ désignera la colonne des dérivées d'ordre k des fonctions inconnues. DY représentera la colonne obtenue en appliquant l'opérateur D à chacun des éléments de la colonne Y des seconds membres.

OPERATEUR D^k :

Cet opérateur, appliqué sur la même fonction f que précédemment s'écrit :

$$D^k f = \left[\sum_{y,\, r=0}^{p-1} y^{(r+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(r)}} \right]^{(k)} f$$

k est une puissance symbolique et un terme tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}}\right)^{\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{\alpha'}}\right)^{\beta'}$ doit s'écrire:

$$\frac{\partial^{\beta+\beta'} f}{\partial y^{\alpha\,\beta}\, \partial y^{\alpha'\,\beta'}}$$

FORMULE FONDAMENTALE. Calcul de $D(D^k)$

(Voir [16] page 38 ou [5] page 17)

$$D(D^k) = D^{k+1} + k\left[\sum_{y,\,r=0}^{p-1} y^{(r+1)} D^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(r-1)}}\right) + \sum_{y} (DY) D^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(p-1)}}\right)\right]$$

Naturellement l'opérateur D^k pourra être appliqué à des colonnes de fonctions de $y^{(k)}, z^{(\ell)}$ etc.... .Nous utiliserons encore les notations suivantes: (selon [16] page 42)

J_1, J_2, J_3 etc....représenteront les matrices jacobiennes des $Y'_{z^{(p-1)}}, Y'_{z^{(p-2)}}, Y'_{z^{p-3}}$ etc.... .

De même K_i la matrice jacobienne des $DY'_{z^{(p-i)}}$,

L_i la matrice jacobienne des $D^2Y'_{z^{(p-i)}}$,

et ainsi de suite avec M_i, N_i etc...La dimension de ces matrices est égale au nombre de fonctions inconnues dans le système.

DERIVEES SUCCESSIVES

Revenons au système spécial d'équations différentielles qui nous intéresse:

$$y^{(2)} = Y(y, z, u, \dots)$$

$y^{(2)}$ désignant la colonne des dérivées secondes des fonctions inconnues et Y la colonne des seconds membres qui ne dépendent explicitement que des fonctions inconnues.

$$y^{(3)} = DY$$

$$y^{(4)} = D(DY) = D^2Y + \sum_{z} Y'_z Z$$

L'opérateur D possède visiblement les propriétés suivantes ([16] page 38)

$$D(f+g) = Df + Dg$$

$$D(fg) = f\,Dg + g\,Df$$

Donc:

$$y^{(5)} = D(D^2Y) + \sum_{z} Y'_z DZ + \sum_{z} DY'_z Z$$

et enfin en tenant compte de la formule fondamentale :

$$y^{(5)} = D^{(3)}Y + \sum_{z} Y'_z DZ + 3\sum_{z} DY'_z Z .$$

Ainsi, si $y^{(p+k)}$ est déjà exprimé en fonction des dérivées d'ordre inférieur à p , on peut écrire :

$$y^{p+k+1} = D\left(y^{(p+k)}\right)$$

et en transformant les expressions à l'aide de la formule fondamentale, obtenir les résultats suivants :

$$y^{(2)} = Y(y, z, u \dots) .$$

$$y^{(3)} = DY .$$

$$y^{(4)} = D^2 Y + \sum_{z} Y'_z Z .$$

$$y^{(5)} = D^{(3)}Y + 3\sum_{z}(DY'_z)Z + \sum_{z} Y'_z z^{(3)} .$$

$$y^{(6)} = D^4 Y + 6\sum_{z}(D^2 Y'_z)Z + 4\sum_{z}(DY'_z)z^{(3)} + \sum_{z}(Y'_z)z^{(4)} + $$
$$+ 3\sum_{z,u} Y''_{zu} UZ .$$

$$y^{(7)} = D^5 Y + 10\sum_{z}(D^3 Y'_z)Z + 10\sum_{z}(D^2 Y'_z)z^{(3)} + 5\sum_{z}(DY'_z)z^{(4)} +$$
$$+ \sum_{z}(Y'_z)z^{(5)} + 10\sum_{zu} Y''_{zu} z^{(3)} U + 15\sum_{zu}(DY''_{zu})ZU .$$

$$y^{(8)} = D^6 Y + 15\sum_{z}(D^4 Y'_z)Z + 20\sum_{z}(D^3 Y'_z)z^{(3)} +$$
$$+ 15\sum_{z}(D^2 Y'_z)z^{(4)} + 6\sum_{z}(DY'_z)z^{(5)} + \sum_{z}(Y'_z)z^{(6)} +$$
$$+ 45\sum_{zu}(D^2 Y''_{zu})ZU + 60\sum_{zu}(DY''_{zu})Uz^{(3)} + 15\sum_{z,u}(Y''_{zu})Uz^{(4)} +$$
$$+ 10\sum_{z,u}(Y''_{zu})z^{(3)}u^{(3)} + 15\sum_{zuv}(Y'''_{zuv})ZUV .$$

A partir de $y^{(5)}$, ces dérivées sont encore exprimées explicitement en fonction de dérivées d'ordre supérieur à $p=2$.

Mais on peut remplacer ces dérivées par leur expression, et progresser ainsi dans les ordres de dérivation. Ex:

$$y^{(5)} = D^{(3)}Y + 3\sum_{z}(DY'_z)Z + \sum_{z}(Y'_z)DZ \ .$$

$$y^{(6)} = D^{(4)}Y + 6\sum_{z}(D^2Y'_z)Z + 4\sum_{z}(DY'_z)DZ +$$

$$+\sum_{z}(Y'_z)D^2Z + \sum_{u,z}(Y'_z)(Z'_u)U + 3\sum_{zu} Y''_{zu}\ UZ \ .$$

et ainsi de suite; les expression se compliquent mais le principe reste le même. En utilisant enfin les notations matricielles indiquées précédemment, on obtient le développement en série de Taylor suivant, où k peut prendre les valeurs 1 et 2

$$
\begin{aligned}
y^{(2-k)} = \ & y_0^{(2-k)} \\
& + \frac{h}{1!}\, y'_0 \qquad \text{(ce terme existe si } k = 2 \text{ seulement)} \\
& + \frac{h^k}{k!}\, [Y_0] \\
& + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\, [C_1] \\
& + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\, [C_2] \\
& + \frac{h^{k+3}}{(k+3)!}\, [C_3 + J_2 C_1] \\
& + \frac{h^{k+4}}{(k+4)!}\, [C_4 + 4 K_2 C_1 + J_2 C_2] \\
& + \frac{h^{k+5}}{(k+5)!}\, [C_5 + 10\, W + 5 K_2 C_2 + J_2 C_3 + J_2^2 C_1] \\
& + \frac{h^{k+6}}{(k+6)!}\, [C_6 + 20\, P + 15\, Q + 6 K_2 C_3 + 6 K_2 J_2 C_1 + J_2 C_4 \\
& \qquad + 4 J_2 K_2 C_1 + J_2^2 C_2 + 10\, T]
\end{aligned}
$$

On a posé pour simplifier :

$$W = \sum_{zu} (Y''_{uz}) Z D U + L_2 C_1 \ .$$

$$P = M_2 C_1 + 3\sum_{zu} (D Y''_{zu})\, U D Z \ .$$

$$Q = L_2 C_2 + \sum_{u,z} (Y''_{zu})\, U (D^2 Z) + \sum_{z,u,v} Y''_{zu}\, U Z'_v V \ .$$

$$T = \sum_{z,u} (Y''_{zu})(DZ)(DU) \ .$$

$$C_1 = DY$$
$$C_2 = D^2Y + J_2Y$$
$$C_3 = D^3Y + 3K_2Y$$
$$C_4 = D^4Y + 6L_2Y + 3\sum_{u,z} Y''_{uz}\, UZ$$
$$C_5 = D^5Y + 10M_2Y + 15\sum_{u,z} \left(DY''_{uz}\right) ZU$$
$$C_6 = D^6Y + 45\sum_{z,u} \left(D^2Y''_{zu}\right) ZU + 15\sum_{zuv} \left(Y'''_{zuv}\right) ZUV + 15N_2Y$$

La façon de grouper certaines fonctions sous un même nom, C_i par exemple, peut paraître arbitraire. Elle sera justifiée par la suite. Les fonctions intervenant dans C_i sont celles qui fournissent la même condition sur les coefficients de Runge-Kutta $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ que D^iY.

(B) Développement de la solution approchée :

Si les lettres désignent des colonnes de fonctions, la formule de Runge Kutta pour notre système spécial s'écrit :

$$y_\alpha = y_0 + h\theta_\alpha y'_0 + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} Y_\beta$$

A cause de l'absence de dérivées premières dans le second membre du système, il est inutile de calculer ces dérivées premières à l'intérieur du pas.

Pour que le deuxième ordre du développement coïncide avec la série de Taylor, il faut poser :

$$\sum_{\beta=0}^{q-1} B_{q\beta} = 1 \quad \text{et de même} \quad \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} = 1$$

Mais dans le but de simplifier les calculs on pose également :

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} = \theta_\alpha^2$$

De sorte que la formule de Runge-Kutta peut s'écrire :

$$y_\alpha = y_0 + h\theta_\alpha y'_0 + \frac{h^2}{2!} Y_0 + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta}(Y_\beta - Y_0)$$

Evaluation de $Y_\alpha - Y_0$:

Il est commode pour mener ce calcul de passer par la valeur intermédiaire :

$$Y^+ = Y\left(y_0 + h\theta_\alpha y'_0 ,\ z_0 + h\theta_\alpha z'_0, \dots\right)$$

([16] page 59).

$$Y_\alpha - Y_0 = (Y^+ - Y_0) + (Y_\alpha - Y^+)$$

La première parenthèse peut être exprimée à l'aide du développement de Taylor à plusieurs variables.

Du fait que les accroissements des fonctions sont proportionnels à leurs dérivées, on peut écrire ce développement à l'aide de l'opérateur $D^{(k)}$:

$$Y^+ - Y_0 = \frac{h\,\theta_\alpha}{1!} DY + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2!} D^2Y + \frac{h^3\theta_\alpha^3}{3!} D^3Y + \frac{h^4\theta_\alpha^4}{4!} D^4Y$$
$$+ \frac{h^5\theta_\alpha^5}{5!} D^5Y + \frac{h^6\theta_\alpha^6}{6!} D^6Y + \ldots\ldots$$

Dans ce qui suit, nous pousserons les calculs juste assez loin pour obtenir les termes du développement ne dépassant pas l'ordre 6. De même que pour Y^+, nous utiliserons la notation :

$$Y_z'^{\,+} = Y_z'\left(y_0 + h\theta_\alpha y_0',\ z_0 + h\theta_\alpha z_0', \ldots\ldots\right)$$

et de même pour Y''_{zu}, Y'''_{zuv}, ...

Le développement de Taylor à plusieurs variables donne :

$$Y_\alpha - Y^+ = \sum_z \left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 Z_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(Z_\beta - Z_0)\right] Y_z'^{\,+}$$
$$+ \frac{1}{2!}\sum_{zu}\left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 Z_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(Z_\beta - Z_0)\right]\left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 U_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(U_\beta - U_0)\right] Y_{zu}''^{\,+}$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{zuv}\left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 Z_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(Z_\beta - Z_0)\right]\left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 U_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(U_\beta - U_0)\right]\left[\frac{h^2}{2!}\theta_\alpha^2 V_0 + \frac{h^2}{2!}\sum_\beta B_{\alpha\beta}(V_\beta - V_0)\right] Y_{zuv}'''^{\,+}$$

On peut exprimer, comme on l'a fait pour Y^+, les $Y_z'^{\,+}$, $Y_{zu}''^{\,+}$ et $Y_{zuv}'''^{\,+}$ à l'aide de l'opérateur $D^{(k)}$.

$$Y_z'^{\,+} = Y_z' + h\theta_\alpha DY_z' + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2!} D^2Y_z' + \frac{h^3\theta_\alpha^3}{3!} D^3Y_z' + \frac{h^4\theta_\alpha^4}{4!} D^4Y_z' + \ldots.$$

$$Y_{zu}''^{\,+} = Y_{zu}'' + h\theta_\alpha DY_{zu}'' + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2!} D^2Y_{zu}'' + \ldots.$$

$$Y_{zuv}'''^{\,+} = Y_{zuv}''' + h\theta_\alpha DY_{zuv}''' + \ldots..$$

En reportant ces expressions dans $Y_\alpha - Y^+$ on obtient alors :

$$Y_\alpha - Y_0 = h\theta_\alpha DY + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2!} D^{(2)}Y + \frac{h^3\theta_\alpha^3}{3!} D^{(3)}Y + \frac{h^4\theta_\alpha^4}{4!} D^{(4)}Y$$

$$+ \frac{h^5\theta_\alpha^5}{5!} D^{(5)}Y + \frac{h^6\theta_\alpha^6}{6!} D^{(6)}Y + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2}\sum_{z} Y'_z Z + \frac{h^3\theta_\alpha^3}{2}\sum_{z}(DY'_z)Z$$

$$+ \frac{h^4\theta_\alpha^4}{2\times 2}\sum_{z}(D^{(2)}Y'_z)Z + \frac{h^5\theta_\alpha^5}{12}\sum_{z}(D^{(3)}Y'_z)Z + \frac{h^6\theta_\alpha^6}{2\times 4!}\sum_{z}(D^{(4)}Y'_z)Z$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{z\beta} B_{\alpha\beta}\, Y'_z(Z_\beta - Z_0) + \frac{h^3\theta_\alpha}{2}\sum_{z\beta} B_{\alpha\beta}\, DY'_z(Z_\beta - Z_0)$$

$$+ \frac{h^4\theta_\alpha^2}{2\times 2!}\sum_{z,\beta} B_{\alpha\beta}\, D^{(2)}Y'_z(Z_\beta - Z_0) + \frac{h^5\theta_\alpha^3}{2\times 3!}\sum_{z\beta} B_{\alpha\beta}\, D^{(3)}Y'_z(Z_\beta - Z_0)$$

$$+ \frac{h^4\theta_\alpha^4}{8}\sum_{z,u}(Y''_{zu})ZU + \frac{h^5\theta_\alpha^5}{8}\sum_{zu}(DY''_{zu})ZU + \frac{h^6\theta_\alpha^6}{16}\sum_{z,u}(D^{(2)}Y''_{zu})ZU$$

$$+ \frac{h^4\theta_\alpha^2}{4}\sum_{zu\beta} B_{\alpha\beta}(Y''_{zu})Z(U_\beta - U_0) + \frac{h^5\theta_\alpha^3}{4}\sum_{z,u,\beta} B_{\alpha\beta}(DY''_{zu})Z(U_\beta - U_0)$$

$$+ \frac{h^4}{8}\sum_{z,u,\beta,\gamma} B_{\alpha\beta}B_{\alpha\gamma}(Y''_{zu})(Z_\beta - Z_0)(U_\gamma - U_0) + \frac{h^6\theta_\alpha^6}{48}\sum_{z,u,v}(Y'''_{zuv})ZUV$$

Nous explicitons maintenant ce développement en remplaçant $(Z_\beta - Z_0)$, $(U_\gamma - U_0)$ par leur expression; en rangeant suivant les puissances de h. Nous utilisons la notation matricielle pour simplifier l'écriture.

$$Y_\alpha - Y_0 = h\theta_\alpha DY$$

$$+ \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2!} D^{(2)}Y + \frac{h^2\theta_\alpha^2}{2} J_2 Y$$

$$+ \frac{h^3\theta_\alpha^3}{3!} D^{(3)}Y + \frac{h^3\theta_\alpha^3}{2} K_2 Y + \frac{h^3}{2}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta\, J_2 DY$$

$$+ \frac{h^4\theta_\alpha^4}{4!} D^{(4)}Y + \frac{h^4\theta_\alpha^4}{4} L_2 Y + \frac{h^4}{4}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta^2\, J_2 D^{(2)}Y$$

$$+ \frac{h^4}{4}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta^2\, J_2^2 Y + \frac{h^4\theta_\alpha^4}{8}\sum_{zu} Y''_{zu} ZU + \frac{h^4\theta_\alpha}{2}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta\, K_2 DY$$

$$+ \frac{h^5\theta_\alpha^5}{5!} D^{(5)}Y + \frac{h^5\theta_\alpha^5}{12} M_2 Y + \frac{h^5}{12}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta^3\, J_2 D^{(3)}Y + \frac{h^5}{4}\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}\theta_\beta^3 J_2 K_2 Y$$

$$+ \frac{h^5}{4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\gamma J_2^2 DY + \frac{h^5 \theta_\alpha}{4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 K_2 D^{(2)} Y$$

$$+ \frac{h^5 \theta_\alpha}{4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 K_2 J_2 Y + \frac{h^5 \theta_\alpha^2}{4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta L_2 DY$$

$$+ \frac{h^5 \theta_\alpha^5}{8} \sum_{\jmath u} (DY''_{\jmath u}) ZU + \frac{h^5 \theta_\alpha^2}{4} \sum_{\jmath, u, \beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta (Y''_{\jmath u}) Z\, DU$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^6 D^{(6)} Y}{6!} + \frac{h^6 \theta_\alpha^6}{2 \times 4!} N_2 Y + \frac{h^6}{2 \times 4!} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^4 J_2 D^{(4)} Y$$

$$+ \frac{h^6}{2 \times 4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^4 J_2 L_2 Y + \frac{h^6}{4} \sum_{\beta\gamma} B_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\beta \theta_\gamma J_2 K_2 DY$$

$$+ \frac{h^6}{8} \sum_{\beta\gamma} B_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\gamma^2 J_2^2 D^{(2)} Y + \frac{h^6}{8} \sum_{\beta\gamma} B_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\gamma^2 J_2^3 Y$$

$$+ \frac{h^6}{16} \sum_{\jmath u v \beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^4 Y'_\jmath Z''_{uv} UV + \frac{h^6 \theta_\alpha}{12} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^3 K_2 D^{(3)} Y$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha}{4} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^3 K_2^2 Y + \frac{h^6 \theta_\alpha}{4} \sum_{\beta\gamma} B_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\gamma K_2 J_2 DY$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^2}{8} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 L_2 D^{(2)} Y + \frac{h^6 \theta_\alpha^2}{8} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 L_2 J_2 Y$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^3}{12} \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta M_2 DZ + \frac{h^6 \theta_\alpha^6}{16} \sum_{\jmath, u} (D^{(2)} Y''_{\jmath u}) ZU$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^2}{8} \sum_{\jmath u \beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 (Y''_{\jmath u}) Z\, D^{(2)} U + \frac{h^6 \theta_\alpha^2}{8} \sum_{\jmath u v \beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 (Y''_{\jmath u}) Z\, U'_v V$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^3}{4} \sum_{\jmath u \beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta (DY''_{\jmath u}) Z\, DU + \frac{h^6}{8} \sum_{\jmath, u \beta\gamma} B_{\alpha\beta} B_{\alpha\gamma} \theta_\beta \theta_\gamma (Y''_{\jmath u}) DZ\, DU$$

$$+ \frac{h^6 \theta_\alpha^6}{48} \sum_{\jmath u v} (Y'''_{\jmath u v}) ZUV$$

On retrouve les groupements qui interviennent dans le développement en série de Taylor de la solution exacte page I.4.
On connaît donc le développement de y à la fin du pas.

$$y_1^{(2-k)} = y_0^{(2-k)} + h y'_0 \;(\text{évent}^t : \text{si } k=2) + \frac{h^k}{k!} Y_0 + \sum_{\alpha=0}^{q-1} H_{q\alpha} (Y_\alpha - Y_0) \qquad \begin{array}{l} k=1 : H_{q\alpha} = A_{q\alpha} \\ k=2 : H_{q\alpha} = B_{q\alpha} \end{array}$$

En mettant en correspondance les deux développements, on obtient les conditions sur les $B_{\alpha\beta}$, $A_{q\alpha}$, θ_α .

C/ TABLEAU des CONDITIONS à SATISFAIRE

$\frac{h^{k+1}}{k!} C_1$	$\frac{1}{k+1}$	$\sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha$
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha^2$
$\frac{h^{k+3}}{k!} C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{6} \sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha^3$
$\frac{h^{k+3}}{k!} J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\beta$
$\frac{h^{k+4}}{k!} C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{4!} \sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha^4$
$\frac{h^{k+4}}{k!} J_2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\beta^2$
$\frac{h^{k+4}}{k!} K_2 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha \theta_\beta$
$\frac{h^{k+5}}{k!} C_5$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$	$\frac{1}{5!} \sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha^5$
$\frac{h^{k+5}}{k!} K_2 C_2$	$\frac{5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha \theta_\beta^2$
$\frac{h^{k+5}}{k!} J_2 C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$	$\frac{1}{12} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\beta^3$
$\frac{h^{k+5}}{k!} J_2^2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, B_{\beta\gamma}\, \theta_\gamma$
$\frac{h^{k+5}}{k!} W$	$\frac{10}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha^2 \theta_\beta$

$K_{q\alpha} = B_{q\alpha}$ pour $k = 2$ développement de y

$K_{q\alpha} = A_{q\alpha}$ pour $k = 1$ développement de y'

$\frac{h^{k+6}}{k!}\ C_6$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{6!} \sum_{\alpha} K_{q\alpha}\, \theta_\alpha^{6}$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ P$	$\frac{20}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{12} \sum_{\alpha\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha^{3}\, \theta_\beta$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ Q$	$\frac{15}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha^{2}\, \theta_\beta^{2}$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ K_2 C_3$	$\frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{12} \sum_{\alpha\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\alpha\, \theta_\beta^{3}$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ K_2 J_2 C_1$	$\frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, B_{\beta\gamma}\, \theta_\alpha\, \theta_\gamma$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ J_2 C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{48} \sum_{\alpha\beta} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, \theta_\beta^{4}$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ J_2 K_2 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, B_{\beta\gamma}\, \theta_\beta\, \theta_\gamma$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ J_2^2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, B_{\beta\gamma}\, \theta_\gamma^{2}$
$\frac{h^{k+6}}{k!}\ T$	$\frac{10}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}$	$\frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma} K_{q\alpha}\, B_{\alpha\beta}\, B_{\alpha\gamma}\, \theta_\beta\, \theta_\gamma$

Indépendance des groupements

Il importe de vérifier que les groupements de fonctions avec lesquels nous avons exprimé la série de Taylor sont linéairement indépendants. Si cela n'est pas réalisé, nous risquons d'imposer trop de conditions aux coefficients de Runge-Kutta, et donc de ne pas utiliser au mieux la méthode.

Par exemple: Si l'ordre ℓ du développement en série de la solution exacte s'écrit $h^\ell(aA+bB+cC)$, (A, B, C étant des groupements de fonctions et a b c des constantes) et l'ordre du développement de la solution approchée: $h^\ell(uA+vB+wC)$, (u, v, w étant des expressions contenant les coefficients de Runge-Kutta), les conditions à vérifier s'écriront :

$$u = a$$
$$v = b$$
$$w = c$$

Par contre, s'il est possible d'exprimer identiquement C à l'aide d'une combinaison linéaire de A et B : $C = \mu A + \nu B$, alors il n'y a que deux conditions à vérifier :

$$u + \mu w = a + \mu c$$
$$v + \nu w = b + \nu c$$

Nous vérifierons l'indépendance dans le cas simple d'une seule équation différentielle $y'' = Y(y)$; celle-ci sera a fortiori réalisée pour le cas d'un système d'équations différentielles.

Décomposons en éléments simples, les groupements de fonctions :

$$\times \quad C_1 = \underline{(Y'_y)\, y'}$$
$$\times \quad C_2 = \underline{(Y''_{y^2})\, y'^2} + Y'_y\, Y$$
$$\times \quad C_3 = \underline{(Y'''_{y^3})\, y'^3} + 3\, Y''_{y^2}\, y'\, Y$$

$$\times \quad J_2C_1 = \underline{\left(Y'_{y}\right)^2 y'}$$

$$\times \quad C_4 = \underline{\left(Y^{(4)}_{y^4}\right) y'^4} + 6\left(Y'''_{y^3}\right) y'^2 Y + 3\left(Y''_{y^2}\right) Y^2$$

$$K_2C_1 = \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'_{y}\right) y'^2$$

$$\times \quad J_2C_2 = \left(Y'_{y}\right)\left(Y''_{y^2}\right) y'^2 + \underline{\left(Y'_{y}\right)^2 Y}$$

$$\times \quad C_5 = \underline{\left(Y^{(5)}_{y^5}\right) y'^5} + 10\left(Y^{(4)}_{y^4}\right) y'^3 Y + 15\left(Y'''_{y^3}\right) Y^2 y'$$

$$W = \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'_{y}\right) Y y' + \left(Y'''_{y^3}\right)\left(Y'_{y}\right) y'^3$$

$$\times \quad K_2C_2 = \underline{\left(Y''_{y^2}\right)^2 y'^3} + \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'_{y}\right) Y y'$$

$$J_2C_3 = \left(Y'_{y}\right)\left(Y'''_{y^3}\right) y'^3 + 3\left(Y'_{y}\right)\left(Y''_{y^2}\right) Y y'$$

$$\times \quad J_2^2 C_1 = \underline{\left(Y'_{y}\right)^3} y'$$

$$\times \quad C_6 = \underline{\left(Y^{(6)}_{y^6}\right) y'^6} + 45\left(Y^{(4)}_{y^4}\right) Y^2 y'^2 + 15\left(Y'''_{y^3}\right) Y^3 + 15\left(Y^{(5)}_{y^5}\right) Y y'^4$$

$$P = \left(Y^{(4)}_{y^4}\right)\left(Y'_{y}\right) y'^4 + 3\left(Y'''_{y^3}\right)\left(Y'_{y}\right) Y y'^2$$

$$Q = \left(Y'''_{y^3}\right)\left(Y''_{y^2}\right) y'^4 + \left(Y'''_{y^3}\right)\left(Y'_{y}\right) Y y'^2 + \left(Y''_{y^2}\right)^2 Y y'^2 + Y''_{y^2} Y'_{y} Y^2$$

$$K_2C_3 = \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'''_{y^3}\right) y'^4 + 3\left(Y''_{y^2}\right)^2 Y y'^2$$

$$K_2J_2C_1 = \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'_{y}\right)^2 y'^2$$

$$J_2C_4 = \left(Y'_{y}\right)\left(Y^{(4)}_{y^4}\right) y'^4 + 6\left(Y'_{y}\right)\left(Y'''_{y^3}\right) Y y'^2 + 3\left(Y'_{y}\right)\left(Y''_{y^2}\right) Y^2$$

$$J_2K_2C_1 = \left(Y'_{y}\right)^2\left(Y''_{y^2}\right) y'^2$$

$$\times \quad J_2^2 C_2 = \left(Y'_{y}\right)^2\left(Y''_{y^2}\right) y'^2 + \underline{\left(Y'_{y}\right)^3 Y}$$

$$T = \left(Y''_{y^2}\right)\left(Y'_{y}\right)^2 y'^2$$

Remarquons tout d'abord, que si une combinaison linéaire de groupements est identiquement nulle, les groupements qui contiennent au moins un terme n'apparaissant dans aucun des autres groupements, sont nécessairement affectés d'un coefficient nul. Dans le tableau ci-dessus nous les avons marqués d'une croix, et nous avons souligné un de leurs termes originaux. Nous savons déjà qu'ils ne peuvent participer réellement à une éventuelle combinaison linéaire.

Nous pouvons maintenant éliminer les groupements dont les termes ne se retrouvent que dans des groupements marqués d'une croix, tel K_2C_1. W et J_2C_3 font intervenir les seuls termes $(Y''_{y^2})(Y'_y)(Y)y'$ et $(Y'''_{y^3})(Y'_y)y'^3$ qui n'apparaissent nulle part ailleurs. Si l'on avait $\lambda W + \mu J_2C_3 \equiv 0$, λ et μ devraient vérifier

$$\lambda + 3\mu = 0$$
$$\lambda + \mu = 0$$

ce qui entrainerait $\lambda = \mu = 0$

Il reste 4 groupements : P , Q , K_2C_3 et J_2C_4 qui s'expriment en fonction de 5 termes élémentaires. Une relation telle que

$$\lambda P + \mu Q + \eta K_2C_3 + \theta J_2C_4 \equiv 0$$

supposerait le système suivant vérifié :

$$\begin{array}{ll} (1) & \lambda + \theta = 0 \\ (2) & 3\lambda + \mu + 6\theta = 0 \\ (3) & \mu + 3\theta = 0 \\ (4) & \mu + 3\eta = 0 \\ (5) & \mu + \eta = 0 \end{array}$$

(4)et(5) entrainent $\mu = \eta = 0$; (3) entraine alors $\theta = 0$; (1)ou(2) donne enfin $\lambda = 0$ .Il n'existe donc pas de véritable combinaison linéaire de groupements qui soit identiquement nulle.

Nous devons envisager enfin le cas spécial des groupements $K_2J_2C_1$, $J_2K_2C_1$ et T qui pour le cas simple d'une seule équation différentielle sont identiques. Dès que l'on considère plusieurs équations ces trois groupements représentent des colonnes de fonctions et les éléments des colonnes correspondant à la fonction y, s'écrivent :

$$T \quad : \sum_{suvw} \left(Y''_{su}\right)\left(S'_v\right)\left(U'_w\right) v'w'$$

$$K_2J_2C_1 : \sum_{suvw} \left(Y''_{su}\right)\left(S'_v\right)\left(V'_w\right) u'w'$$

$$J_2K_2C_1 : \sum_{suvw} \left(Y'_s\right)\left(S''_{vu}\right)\left(V'_w\right) u'w'$$

Si l'on suppose qu'il existe au moins deux fonctions y et z, les groupements T et $J_2K_2C_1$ contiennent alors chacun des termes originaux. Par exemple :

$$T: \quad \left(Y''_{z^2}\right)\left(Z'_y\right)^2 y'^2 \quad \left(\text{on a fait } s=u=z \; ; \; v=w=y\right)$$

$$J_2K_2C_1: \left(Y'_z\right)\left(Z''_{z^2}\right)\left(Z'_z\right) z'^2 \quad \left(s=u=v=w=z\right)$$

Cela suffit pour montrer l'indépendance de ces trois groupements.

CHAPITRE II- RESOLUTION DES CONDITIONS DE RUNGE-KUTTA.

(A) Etablissement d'une formule de rang 3 : $q = 3$

Essayons de satisfaire les équations du tableau Ic jusqu'à l'ordre h^{k+2},
et de minimiser la somme des valeurs absolues des erreurs sur l'ordre h^{k+3}.

$$\begin{cases} B_{32}\,\theta_2 + B_{31}\,\theta_1 = \frac{1}{3} \\ B_{32}\,\theta_2^2 + B_{31}\,\theta_1^2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{32}\,\theta_2 + A_{31}\,\theta_1 = \frac{1}{2} \\ A_{32}\,\theta_2^2 + A_{31}\,\theta_1^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{30} = 1 - B_{31} - B_{32} \\ B_{20} = \theta_2^2 - B_{21} \\ A_{30} = 1 - A_{31} - A_{32} \end{cases}$$

En résolvant les deux premiers systèmes, on trouve :

$$B_{31} = \frac{\frac{\theta_2}{3} - \frac{1}{6}}{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)} \qquad B_{32} = \frac{\frac{\theta_1}{3} - \frac{1}{6}}{\theta_2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$A_{31} = \frac{\frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{3}}{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)} \qquad A_{32} = \frac{\frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{3}}{\theta_2(\theta_1 - \theta_2)}$$

Si l'on écrit les erreurs sous la forme :

$\Delta_1\, h^5 C_3$ et $\Delta_3\, h^5 J_2 C_1$ pour y

$\Delta_2\, h^4 C_3$ et $\Delta_4\, h^4 J_2 C_1$ pour y'

Il semble raisonnable d'attribuer la même importance aux Δ_i et d'essayer de minimiser la somme de leurs valeurs absolues :

$$S = |\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_3| + |\Delta_4|$$

On a les expressions suivantes pour les Δ_i :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12}\left(B_{32}\theta_2^3 + B_{31}\theta_1^3 - \frac{1}{10}\right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{6}\left(A_{32}\theta_2^3 + A_{31}\theta_1^3 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{4}\left(B_{32}B_{21}\theta_1 - \frac{1}{30}\right)$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2}\left(A_{32}B_{21}\theta_1 - \frac{1}{12}\right)$$

On peut écrire les Δ_i en fonction des 3 coefficients libres :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12}\left(-\frac{\theta_1\theta_2}{3} + \frac{\theta_1+\theta_2}{6} - \frac{1}{10}\right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{6}\left(-\frac{\theta_1\theta_2}{2} + \frac{\theta_1+\theta_2}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{\theta_1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\theta_2(\theta_1-\theta_2)}\theta_1 B_{21} - \frac{1}{30}\right)$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{1}{3}\right)}{\theta_2(\theta_1-\theta_2)}\theta_1 B_{21} - \frac{1}{12}\right)$$

On peut seulement annuler 3 des Δ_i. Il est difficile de résoudre rigoureusement le problème de la minimisation de S, mais il faut remarquer que pour une telle somme de valeurs absolues, le minimum est souvent atteint, lorsque un certain nombre de ces valeurs sont nulles. Nous envisagerons donc toutes les manières possibles d'annuler 3 des 4 Δ_i ,et pour chaque cas, nous calculerons S.

1°/ $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ $\theta_1 = \frac{1}{4}$ $\theta_2 = \frac{4}{5}$ $B_{21} = \frac{88}{125}$	$S = \lvert\Delta_1\rvert = \frac{1}{1440}$ # 0,0007
2°/ $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ $\theta_1 = \frac{1}{4}$ $\theta_2 = \frac{7}{10}$ $B_{21} = \frac{252}{500}$	$S = \lvert\Delta_2\rvert = \frac{1}{288}$ # 0,003 5
3°/ $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 = 0$ $\theta_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$ $\theta_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$ $B_{21} = 0,623\ 555\ 102$	$S = \lvert\Delta_3\rvert$ # 0,002
4°/ $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ $\theta_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$ $\theta_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$ $B_{21} = 0,804\ 322\ 477$	$S = \lvert\Delta_4\rvert$ # 0,012

La première solution semble la meilleure, elle conduit au jeu de coefficients suivant : (FORMULE 1)

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{4} & \theta_2 = \frac{4}{5} & \\ B_{30} = \frac{1}{12} & B_{31} = \frac{8}{11} & B_{32} = \frac{25}{132} \\ A_{30} = \frac{1}{24} & A_{31} = \frac{16}{33} & A_{32} = \frac{125}{264} \\ B_{20} = -\frac{8}{125} & B_{21} = \frac{88}{125} & \end{cases}$$

<u>Exemples</u> - Nous comparerons sur différents exemples les résultats donnés par la formule 1, à ceux fournis par la formule 4 ($\theta_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$, $\theta_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$, $B_{21} = 0,804\ 322\ 477$) et la formule de Runge-Kutta classique, [16] pages 86 et 112 ; [1] page 102, formule (1,11). Ces formules coûtent 3 Hörner par pas.

1°) $y'' = -ty$; $y(o) = 1$ $y'(o) = 0$ $h = 1$

t	Sol. exacte	Runge Kutta classique	F1	F4	erreur RK class. x 10^5	erreur par F1 x 10^5	erreur par F4 x 10^5
1	0,838 812	0,833 333	0,840 000	0,840 374	548	119	156

2°/ $y'' = y \quad y'(0) = 1 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$

t	Solution exacte	Runge Kutta classique	F1	F4	erreur R.K.class. $\times 10^8$	erreur par F1 $\times 10^8$	erreur par F4 $\times 10^8$
0,1	1,105 170 91	1,105 170 83	1,105 170 91	1,105 170 91	− 8	0	0
0,2	1,221 402 75	1,221 402 57	1,221 402 73	1,221 402 86	− 18	−2	+11
0,3	1,349 858 80	1,349 858 51	1,349 858 76	1,349 859 16	−29	−4	+36
0,4	1,491 824 69	1,491 824 28	1,491 824 62	1,491 825 45	−41	−7	+76
0,5	1,648 721 27	1,648 720 72	1,648 721 17	1,648 722 59	−55	−10	+132

3°/ $y'' = -y \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad h = 0,1$

t	Solution exacte	Runge Kutta classique	F1	F4	erreur R.K.class. $\times 10^9$	erreur par F1 $\times 10^9$	erreur par F4 $\times 10^9$
0,1	0,099 833 416 6	0,099 833 334 6	0,099 833 417 2	0,099 833 417 0	−82	0,6	0,4
0,2	0,198 669 330	0,198 669 167	0,198 669 332	0,198 669 453	−163	2	123
0,3	0,295 520 206	0,295 519 963	0,295 520 210	0,295 520 570	−243	4	364
0,4	0,389 418 342	0,389 418 023	0,389 418 347	0,389 419 061	−319	5	719
0,5	0,479 425 538	0,479 425 149	0,479 425 547	0,479 426 721	−389	9	1183

4°/ $y'' = -y^3 \quad y(0) = 0,2 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Runge Kutta classique	F1	F4	erreur R.K.class. $\times 10^9$	erreur par F1 $\times 10^9$	erreur par F4 $\times 10^9$
1	0,196 039 531	0,196 039 801	0,196 039 499	0,196 039 501	270	−32	−30
2	0,184 610 659	0,184 611 911	0,184 610 845	0,184 610 489	1252	+186	−170

5/ Albrecht [1] pages 104 traite l'équation

$$y'' = (1+x^2)y, \qquad y(o)=1 \qquad y'(o)=0$$

(Solution exacte : $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$) par la formule de Runge-Kutta classique.

Nous comparons encore avec les résultats obtenus par les formules 1 et 4 précédentes.

t	Solution exacte	formule RK. classique	formule 1 F1	formule 4 F4	erreur RK. class. ×10[8]	erreur avec F1 ×10[8]	erreur avec F4 ×10[8]
0,2	1,020 201 34	1,020 201 29	1,020 201 33	1,020 201 33	−5	−1	−1
0,4	1,083 287 06	1,083 286 81	1,083 287 03	1,083 287 22	−26	−3	+16
0,6	1,197 217 36	1,197 216 69	1,197 217 27	1,197 218 26	−67	−7	+90
0,8	1,377 127 76	1,377 126 28	1,377 127 57	1,377 130 75	−148	−19	+299
1	1,648 721 27	1,648 718 24	1,648 720 89	1,648 729 19	−303	−38	+792
1,2	2,054 433 21	2,054 427 16	2,054 432 43	2,054 452 02	−605	−78	+1881
1,4	2,664 456 24	2,664 444 12	2,664 454 52	2,664 498 54	−1212	−172	+4230
1,6	3,596 639 72	3,596 615 09	3,596 635 83	3,596 732 50	−2464	−389	+9278
1,8	5,053 090 31	5,053 039 21	5,053 081 20	5,053 292 25	−5111	−911	+20 194
2	7,389 056 09	7,388 947 54	7,389 034 34	7,389 496 96	−10 856	−2175	+44 087

Par ces exemples, on voit que la formule 1 est nettement meilleure que la formule 4.

Elle est supérieure à la formule de Runge-Kutta classique comme l'examen des ordres infinitésimaux atteints le laissait prévoir (voir tableau récapitulatif page III 12).

(B) FORMULE DE RANG 4

On se propose maintenant de résoudre toutes les équations du tableau I C, jusqu'à l'ordre h^{k+4} compris, avec q = 4.
Explicitons ces équations:

$$\text{I}\left\{\begin{array}{llll} B_{43}\theta_3 + B_{42}\theta_2 + B_{41}\theta_1 & = \frac{1}{3} & h^3 \\ B_{43}\theta_3^2 + B_{42}\theta_2^2 + B_{41}\theta_1^2 & = \frac{1}{6} & h^4 \\ B_{43}\theta_3^3 + B_{42}\theta_2^3 + B_{41}\theta_1^3 & = \frac{1}{10} & h^5 \\ B_{43}\theta_3^4 + B_{42}\theta_2^4 + B_{41}\theta_1^4 & = \frac{1}{15} & h^6 \end{array}\right.$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{llll} A_{43}\theta_3 + A_{42}\theta_2 + A_{41}\theta_1 & = \frac{1}{2} & h^2 \\ A_{43}\theta_3^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{41}\theta_1^2 & = \frac{1}{3} & h^3 \\ A_{43}\theta_3^3 + A_{42}\theta_2^3 + A_{41}\theta_1^3 & = \frac{1}{4} & h^4 \\ A_{43}\theta_3^4 + A_{42}\theta_2^4 + A_{41}\theta_1^4 & = \frac{1}{5} & h^5 \end{array}\right.$$

$$\text{III}\begin{array}{l} a) \\ b) \\ c) \end{array}\left\{\begin{array}{lll} B_{42}B_{21}\theta_1 + B_{43}B_{31}\theta_1 + B_{43}B_{32}\theta_2 & = \frac{1}{30} & h^5 \\ B_{42}B_{21}\theta_1^2 + B_{43}B_{31}\theta_1^2 + B_{43}B_{32}\theta_2^2 & = \frac{1}{90} & h^6 \\ B_{42}B_{21}\theta_2\theta_1 + B_{43}B_{31}\theta_3\theta_1 + B_{43}B_{32}\theta_3\theta_2 & = \frac{1}{45} & h^6 \end{array}\right.$$

$$\text{IV}\begin{array}{l} a) \\ b) \\ c) \end{array}\left\{\begin{array}{lll} A_{42}B_{21}\theta_1 + A_{43}B_{31}\theta_1 + A_{43}B_{32}\theta_2 & = \frac{1}{12} & h^4 \\ A_{42}B_{21}\theta_1^2 + A_{43}B_{31}\theta_1^2 + A_{43}B_{32}\theta_2^2 & = \frac{1}{30} & h^5 \\ A_{42}B_{21}\theta_2\theta_1 + A_{43}B_{31}\theta_3\theta_1 + A_{43}B_{32}\theta_3\theta_2 & = \frac{1}{15} & h^5 \end{array}\right.$$

Pour que les systèmes I et II soient compatibles, les $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{3} - \frac{\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1}{6} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{10} - \frac{1}{15} = 0$$

$$\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{2} - \frac{\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1}{3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{4} - \frac{1}{5} = 0$$

Si l'on pose :

$$a = 50\,\theta_1^2 - 60\,\theta_1 + 15$$

$$b = -60\theta_1^2 + 75\,\theta_1 - 20 \qquad \text{et} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$c = 15\,\theta_1^2 - 20\,\theta_1 + 6$$

On a :

$$\theta_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\theta_3 = \frac{2 - 3(\theta_1 + \theta_2) + 5(\theta_1\theta_2)}{3 - 5(\theta_1 + \theta_2) + 10(\theta_1\theta_2)}$$

Le seul coefficient arbitraire est donc θ_1.

Remarquons que la suite des seconds membres du système I est proportionnelle aux différences simples de la suite des seconds membres du système II. A_{43}, A_{42}, A_{41} vérifiant les quatre équations du système II,

$$B_{43} = 2(1-\theta_3)A_{43} \quad , \quad B_{42} = 2(1-\theta_2)A_{42} \quad , \quad B_{41} = 2(1-\theta_1)A_{41}$$

vérifieront donc les trois premières équations du système I. Comme la 4ème a été rendue compatible avec les trois premières, le système I admet cette solution.

Les équations IIIa et IIIb doivent être vérifiées en premier lieu puisqu'elles correspondent à l'ordre h^{k+3}. En remplaçant les $A_{4\alpha}$ par leur valeur en fonction des $B_{4\alpha}$, on voit facilement que l'équation IIIa est conséquence du système IV. En effet ce dernier peut s'écrire :

$$\mathrm{IV}\quad\begin{cases} a \quad B_{42}B_{21}\dfrac{\theta_1}{2(1-\theta_2)} + B_{43}B_{31}\dfrac{\theta_1}{2(1-\theta_3)} + B_{43}B_{32}\dfrac{\theta_2}{2(1-\theta_3)} = \dfrac{1}{12} \\[2ex] b \quad B_{42}B_{21}\dfrac{\theta_1^2}{2(1-\theta_2)} + B_{43}B_{31}\dfrac{\theta_1^2}{2(1-\theta_3)} + B_{43}B_{32}\dfrac{\theta_2^2}{2(1-\theta_3)} = \dfrac{1}{30} \\[2ex] c \quad B_{42}B_{21}\dfrac{\theta_2\theta_1}{2(1-\theta_2)} + B_{43}B_{31}\dfrac{\theta_3\theta_1}{2(1-\theta_3)} + B_{43}B_{32}\dfrac{\theta_3\theta_2}{2(1-\theta_3)} = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

En soustrayant l'équation IV c de l'équation IVa, on obtient bien l'équation IIIa.

Le système I admet la solution :

$$B_{41} = \frac{\frac{\theta_2\theta_3}{3} - \frac{\theta_2+\theta_3}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\,\theta_1}$$

$$B_{42} = \frac{\frac{\theta_1\theta_3}{3} - \frac{\theta_1+\theta_3}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_2-\theta_1)\,\theta_2}$$

$$B_{43} = \frac{\frac{\theta_1\theta_2}{3} - \frac{\theta_1+\theta_2}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)\,\theta_3}$$

Et si l'on pose $X = A_{42}B_{21}$, $Y = A_{43}B_{31}$, $Z = A_{43}B_{32}$, la solution du système IV s'écrit :

$$X = \frac{1}{180}\left(\frac{12-15\theta_3}{\theta_1(\theta_2-\theta_3)}\right)$$

$$Y = \frac{1}{180\times\theta_1}\left(15 - \frac{12-15\theta_3}{\theta_2-\theta_3} - \frac{6-15\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)$$

$$Z = \frac{1}{180}\left(\frac{6-15\,\theta_1}{\theta_2(\theta_2-\theta_1)}\right)$$

d'où B_{21}, B_{31}, B_{32}

$$B_{40} = 1 - B_{41} - B_{42} - B_{43}$$

$$B_{30} = \theta_3^2 - B_{31} - B_{32}$$

$$B_{20} = \theta_2^2 - B_{21}$$

$$A_{40} = 1 - A_{41} - A_{42} - A_{43}$$

Il reste donc deux équations non vérifiées: IIIb et IIIc, et un seul coefficient libre: θ_1. Une formule de Runge-Kutta donne en général des résultats plus satisfaisants lorsque tous ses coefficients sont positifs. (Ils sont alors obligatoirement petits, étant donnée l'expression des $B_{\alpha 0}$ et A_{q0}).

Il est donc intéressant de choisir un θ_1 qui conduit à un tel jeu de coefficients. Une étude analytique étant inextricable, nous avons procédé à un sondage systématique, en faisant varier θ_1 de 0 à 1 avec un pas de 0,01. Les zones en θ_1, pour lesquelles les 13 coefficients de Runge-Kutta sont positifs et telles que $0 \leq \theta_2 \leq 1$ et $0 \leq \theta_3 \leq 1$, sont ainsi mises en évidence.

Si l'on écrit les erreurs dûes au fait que les équations IIIb et IIIc ne sont pas rigoureusement vérifiées, sous la forme :

$$\Delta_1 h^6 J_2 C_2 \quad \text{et} \quad \Delta_2 h^6 K_2 C_1 ,$$

Δ_1 et Δ_2 ont les expressions suivantes :

$$\Delta_1 = \frac{1}{720}\left(15\theta_1\theta_3 - 12\theta_1 - 6\theta_3 + 5\right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{360}\left(15\theta_2\theta_3 - 12\theta_2 - 12\theta_3 + 10\right)$$

En faisant varier θ_1 dans les zones admissibles définies plus haut, nous avons minimisé la somme des valeurs absolues $|\Delta_1| + |\Delta_2|$. La meilleure valeur semble être alors $\theta_1 = 0{,}26$; elle conduit au jeu de coefficients suivants :

$\theta_1 = 0{,}26$ $\qquad$ $\theta_2 = 0{,}681\ 807\ 380$ $\qquad$ $\theta_3 = 0{,}957\ 041\ 595$

$B_{40} = 0{,}156\ 729\ 713$ $\qquad$ $B_{41} = 0{,}580\ 349\ 338$

$B_{42} = 0{,}251\ 363\ 322$ $\qquad$ $B_{43} = 0{,}011\ 557\ 635$

$B_{30} = 0{,}382\ 009\ 290$ $\qquad$ $B_{31} = 0{,}232\ 354\ 585$

$B_{32} = 0{,}301\ 564\ 739$ $\qquad$ $B_{20} = 0{,}001\ 866\ 906$

$B_{21} = 0{,}462\ 994\ 397$

$A_{40} = 0{,}078\ 364\ 863$ $\qquad$ $A_{41} = 0{,}392\ 127\ 923$

$A_{42} = 0{,}394\ 986\ 133$ $\qquad$ $A_{43} = 0{,}134\ 521\ 084$

Les erreurs sur y valent alors :

$$0{,}000\ 18 \quad h^6 \quad J_2 C_2$$

et

$$0{,}000\ 34 \quad h^6 \quad K_2 C_1$$

Exemples:

Nous avons comparé la formule précédente avec la formule classique de Runge-Kutta ([16] pages 86 et 112, [1] page 102 formule (1.11)) qui coûte 3 Hörner par pas.
Notons que pour cette formule les erreurs sur y' et y sont en h^5 alors que pour notre formule, elles sont en h^6 (en plus l'erreur en h^6 pour y est considérablement diminuée).

1°) $y'' = y \qquad y'(o) = 1 \qquad y(o) = 1$

t	Solution exacte	Solution par R.K. classique	Solution par RK. spéciale	Erreur RK classique $\times 10^8$	Erreur RK spéciale $\times 10^8$
0,1	1,105 170 91	1,105 170 83	1,105 170 91	-8	0
0,2	1,221 402 75	1,221 402 57	1,221 402 74	-18	-1
0,3	1,349 858 80	1,349 858 51	1,349 858 78	-29	-2
0,4	1,491 824 69	1,491 824 28	1,491 824 66	-41	-3
0,5	1,648 721 27	1,648 720 72	1,648 721 22	-55	-5
1	2,718 281 82	2,718 280 32	2,718 281 72	-150	-10
2	7,389 056 09	7,389 049 49	7,389 055 72	-660	-35
4	54,598 150 0	54,598 066 2	54,598 144 3	-8380	-570

2/ $y'' = -y \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

t	Solution exacte	Solution par RK classique	Solution par R.K. spéciale	Erreur RK classique $\times 10^9$	Erreur RK spéciale $\times 10^9$
0,1	0,099 833 416 6	0,099 833 334 6	0,099 833 417 8	– 82	+ 1,2
0,2	0,198 669 330	0,198 669 167	0,198 669 333	– 163	+ 3
0,3	0,295 520 206	0,295 519 963	0,295 520 210	– 243	+ 4
0,4	0,389 418 342	0,389 418 023	0,389 418 347	– 319	+ 5
0,5	0,479 425 538	0,479 425 149	0,479 425 544	– 389	+ 6

3/ $y'' = -y^3 \quad y(0) = 0,2 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Solution par RK classique	Solution par R.K. spéciale	Erreur RK clas. $\times 10^9$	Erreur RK spéciale $\times 10^9$
1	0,196 039 531	0,196 039 801	0,196 039 546	270	15
2	0,184 610 659	0,184 611 911	0,184 610 686	1252	27

4/ $y'' = -ty \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Solution par RK classique	Solution par RK spéciale	Erreur RK clas. $\times 10^5$	Erreur RK spéc. $\times 10^5$
1	0,838 812	0,833 333	0,839 192	548	38

(C) Formule de rang 5

On se propose de satisfaire les conditions du tableau I C, jusqu'en h^6 pour y comme pour y'. L'erreur sera donc en h^7.

Explicitons ces conditions :

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned}
&B_{54}\theta_4 + B_{53}\theta_3 + B_{52}\theta_2 + B_{51}\theta_1 = \frac{1}{3}\\
&B_{54}\theta_4^2 + B_{53}\theta_3^2 + B_{52}\theta_2^2 + B_{51}\theta_1^2 = \frac{1}{6}\\
&B_{54}\theta_4^3 + B_{53}\theta_3^3 + B_{52}\theta_2^3 + B_{51}\theta_1^3 = \frac{1}{10}\\
&B_{54}\theta_4^4 + B_{53}\theta_3^4 + B_{52}\theta_2^4 + B_{51}\theta_1^4 = \frac{1}{15}
\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{II}\left\{\begin{aligned}
&B_{54}B_{41}\theta_1 + B_{54}B_{42}\theta_2 + B_{54}B_{43}\theta_3 + B_{53}B_{31}\theta_1 + B_{53}B_{32}\theta_2 + B_{52}B_{21}\theta_1 = \frac{1}{30}\\
&B_{54}B_{41}\theta_1^2 + B_{54}B_{42}\theta_2^2 + B_{54}B_{43}\theta_3^2 + B_{53}B_{31}\theta_1^2 + B_{53}B_{32}\theta_2^2 + B_{52}B_{21}\theta_1^2 = \frac{1}{90}\\
&B_{54}B_{41}\theta_1\theta_4 + B_{54}B_{42}\theta_2\theta_4 + B_{54}B_{43}\theta_3\theta_4 + B_{53}B_{31}\theta_1\theta_3 + B_{53}B_{32}\theta_2\theta_3 + B_{52}B_{21}\theta_1\theta_2 = \frac{1}{45}
\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{III}\left\{\begin{aligned}
&A_{54}\theta_4 + A_{53}\theta_3 + A_{52}\theta_2 + A_{51}\theta_1 = \frac{1}{2}\\
&A_{54}\theta_4^2 + A_{53}\theta_3^2 + A_{52}\theta_2^2 + A_{51}\theta_1^2 = \frac{1}{3}\\
&A_{54}\theta_4^3 + A_{53}\theta_3^3 + A_{52}\theta_2^3 + A_{51}\theta_1^3 = \frac{1}{4}\\
&A_{54}\theta_4^4 + A_{53}\theta_3^4 + A_{52}\theta_2^4 + A_{51}\theta_1^4 = \frac{1}{5}\\
&A_{54}\theta_4^5 + A_{53}\theta_3^5 + A_{52}\theta_2^5 + A_{51}\theta_1^5 = \frac{1}{6}
\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{IV}\left\{\begin{aligned}
&A_{54}B_{41}\theta_1 + A_{54}B_{42}\theta_2 + A_{54}B_{43}\theta_3 + A_{53}B_{31}\theta_1 + A_{53}B_{32}\theta_2 + A_{52}B_{21}\theta_1 = \frac{1}{12}\\
&A_{54}B_{41}\theta_1^2 + A_{54}B_{42}\theta_2^2 + A_{54}B_{43}\theta_3^2 + A_{53}B_{31}\theta_1^2 + A_{53}B_{32}\theta_2^2 + A_{52}B_{21}\theta_1^2 = \frac{1}{30}\\
&A_{54}B_{41}\theta_1^3 + A_{54}B_{42}\theta_2^3 + A_{54}B_{43}\theta_3^3 + A_{53}B_{31}\theta_1^3 + A_{53}B_{32}\theta_2^3 + A_{52}B_{21}\theta_1^3 = \frac{1}{60}\\
&A_{54}B_{41}\theta_1\theta_4 + A_{54}B_{42}\theta_2\theta_4 + A_{54}B_{43}\theta_3\theta_4 + A_{53}B_{31}\theta_1\theta_3 + A_{53}B_{32}\theta_2\theta_3 + A_{52}B_{21}\theta_1\theta_2 = \frac{1}{15}\\
&A_{54}B_{41}\theta_1^2\theta_4 + A_{54}B_{42}\theta_2^2\theta_4 + A_{54}B_{43}\theta_3^2\theta_4 + A_{53}B_{31}\theta_1^2\theta_3 + A_{53}B_{32}\theta_2^2\theta_3 + A_{52}B_{21}\theta_1^2\theta_2 = \frac{1}{36}\\
&A_{54}B_{41}\theta_1\theta_4^2 + A_{54}B_{42}\theta_2\theta_4^2 + A_{54}B_{43}\theta_3\theta_4^2 + A_{53}B_{31}\theta_1\theta_3^2 + A_{53}B_{32}\theta_2\theta_3^2 + A_{52}B_{21}\theta_1\theta_2^2 = \frac{1}{18}
\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{V}\left\{\ A_{54}B_{43}B_{32}\theta_2 + A_{54}B_{42}B_{21}\theta_1 + A_{53}B_{32}B_{21}\theta_1 + A_{54}B_{43}B_{31}\theta_1 = \frac{1}{180}\right.$$

Pour que le système III admette une solution, les θ_i doivent vérifier la condition de compatibilité :

$$G(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = \frac{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}{2} - \frac{\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_2\theta_4+\theta_2\theta_3\theta_4+\theta_1\theta_3\theta_4}{3} + \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_4+\theta_1\theta_3+\theta_1\theta_4+\theta_2\theta_4}{4}$$

$$-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{5} + \frac{1}{6} = 0$$

G est une fonction symétrique de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$,linéaire par rapport à chacun d'eux. Formons de même, en gardant la même suite de dénominateurs, les signes alternant et le terme constant étant positif :

$$G(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = -\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{2} + \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_3}{3} - \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{4} + \frac{1}{5}$$

$$G(\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_1\theta_2}{2} - \frac{\theta_1+\theta_2}{3} + \frac{1}{4}$$

Propriété :

$$\frac{\partial G(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_4} = -G(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$$

$$\frac{\partial G(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{\partial\theta_2} = -G(\theta_1,\theta_3)$$

Introduisons encore les fonctions F, analogues de G pour le système I : Seule la suite des dénominateurs change.

$$F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = -\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{3} + \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_3}{6} - \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{10} + \frac{1}{15}$$

Relations entre F et G :

La suite des dénominateurs des fonctions F, est proportionnelle aux différences simples de la suite des dénominateurs des fonctions G. Ceci est une propriété générale qui entraîne des relations du type suivant :

$$G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 1) = -\frac{1}{2} F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

$$G(\theta_2, \theta_3, 1) = -\frac{1}{2} F(\theta_2, \theta_3)$$

A l'aide de ces fonctions, la solution du système I peut s'écrire :

$$B_{54} = \frac{F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{(\theta_4 - \theta_3)(\theta_4 - \theta_2)(\theta_4 - \theta_1)\theta_4}$$

$$B_{53} = \frac{F(\theta_1, \theta_2, \theta_4)}{(\theta_3 - \theta_4)(\theta_3 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)\theta_3}$$

$$B_{52} = \frac{F(\theta_1, \theta_3, \theta_4)}{(\theta_2 - \theta_4)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_1)\theta_2}$$

$$B_{51} = \frac{F(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{(\theta_1 - \theta_4)(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)\theta_1}$$

Les $A_{5\alpha}$ solutions du système III s'écrivent de même en remplaçant F par G.

D'après les relations ci-dessus entre F et G, si l'on prend $\theta_4 = 1$, la condition de compatibilité $G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 1) = 0$ entrainera $B_{54} = 0$, ce qui simplifie beaucoup le système II. Choisissons donc $\theta_4 = 1$. On aura alors $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$.

Les expressions des $B_{5\alpha}$ deviennent :

$$B_{54} = 0$$

$$B_{53} = \frac{F(\theta_1, \theta_2, 1)}{(\theta_3 - 1)(\theta_3 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)\theta_3} = \frac{F(\theta_1, \theta_2)}{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)\theta_3}$$

$$B_{52} = \frac{F(\theta_1, \theta_3, 1)}{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_2 - 1)\theta_2} = \frac{F(\theta_3, \theta_1)}{(\theta_2 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_1)\theta_2}$$

$$B_{51} \quad \frac{F(\theta_2, \theta_3, 1)}{(\theta_1 - 1)(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)\theta_1} = \frac{F(\theta_2, \theta_3)}{(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)\theta_1}$$

Les coefficients $A_{5\alpha}$ deviennent :

$$A_{54} = \frac{G(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{(1-\theta_3)(1-\theta_2)(1-\theta_1)}$$

$$A_{53} = \frac{-1/2\, F(\theta_1, \theta_2)}{(\theta_3-\theta_2)(\theta_3-1)(\theta_3-\theta_1)\theta_3} = \frac{B_{53}}{2(1-\theta_3)}$$

$$A_{52} = \frac{-1/2\, F(\theta_1, \theta_3)}{(\theta_2-1)(\theta_2-\theta_3)(\theta_2-\theta_1)\theta_2} = \frac{B_{52}}{2(1-\theta_2)}$$

$$A_{51} = \frac{-1/2\, F(\theta_2, \theta_3)}{(\theta_1-1)(\theta_1-\theta_3)(\theta_1-\theta_2)\theta_1} = \frac{B_{51}}{2(1-\theta_1)}$$

Avec $B_{54} = 0$, le système II est un système de 3 équations à trois inconnues. Il admet une solution unique si :

$$B_{53}^2\, B_{52}\, \theta_1^2 \theta_2 (\theta_2-\theta_1)(\theta_2-\theta_3) \neq 0$$

$$B_{31} = \frac{1}{90 \times \theta_1 \times B_{53}} \left[3 - \frac{2-3\theta_3}{\theta_2-\theta_3} - \frac{1-3\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \right]$$

$$B_{32} = \frac{1}{90 \times \theta_2 \times B_{53}} \left[\frac{1-3\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \right]$$

$$B_{21} = \frac{1}{90 \times \theta_1 \times B_{52}} \left[\frac{2-3\theta_3}{\theta_2-\theta_3} \right]$$

Les trois derniers termes du premier membre de chaque équation du système IV sont alors connus, et en les remplaçant par leur valeur en fonction de θ_1, θ_2, θ_3, $\theta_4 = 1$, ce système devient : IV' et IV"

$$\text{IV}' \begin{cases} ① \; A_{54}B_{41}\,\theta_1 + A_{54}B_{42}\,\theta_2 + A_{54}B_{43}\,\theta_3 = \dfrac{1}{12} - \dfrac{5-3\theta_2-3\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)} \\[2ex] ② \; A_{54}B_{41}\,\theta_1^2 + A_{54}B_{42}\,\theta_2^2 + A_{54}B_{43}\,\theta_3^2 = \dfrac{1}{30} - \dfrac{1-\theta_2+2\theta_1-3\theta_1\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)} \\[2ex] ③ \; A_{54}B_{41}\,\theta_1^3 + A_{54}B_{42}\,\theta_2^3 + A_{54}B_{43}\,\theta_3^3 = \dfrac{1}{60} - \dfrac{(1-\theta_2)(\theta_2+\theta_1-3\theta_1\theta_2)+(2-3\theta_3)\theta_1^2}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)} \end{cases}$$

$$
\text{IV}''\left\{
\begin{array}{llllll}
④ & A_{54}B_{41}\theta_1 & + A_{54}B_{42}\theta_2 & + A_{54}B_{43}\theta_3 & = & \dfrac{1}{15} - \dfrac{2-3\theta_2\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)} \\
⑤ & A_{54}B_{41}\theta_1^2 & + A_{54}B_{42}\theta_2^2 & + A_{54}B_{43}\theta_3^2 & = & \dfrac{1}{36} - \dfrac{\theta_3+2\theta_1-3\theta_1\theta_3-\theta_2\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)} \\
⑥ & A_{54}B_{41}\theta_1 & + A_{54}B_{42}\theta_2 & + A_{54}B_{43}\theta_3 & = & \dfrac{1}{18} - \dfrac{2\theta_2+2\theta_3-5\theta_2\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)}
\end{array}
\right.
$$

Nous avons six équations pour les trois inconnues B_{41}, B_{42}, B_{43}. Mais un calcul montre que les seconds membres de (1), (4), (6) sont identiquement égaux, de même pour les seconds membres de (2) et (5); donc le système IV se réduit à IV'.

Posons pour simplifier :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{A_{54}}\left(\frac{1}{12} - \frac{5-3\theta_2-3\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)}\right)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{A_{54}}\left(\frac{1}{30} - \frac{1-\theta_2+2\theta_1-3\theta_1\theta_3}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)}\right)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{A_{54}}\left(\frac{1}{60} - \frac{(1-\theta_2)(\theta_2+\theta_1-3\theta_1\theta_2)+(2-3\theta_3)\theta_1^2}{180(1-\theta_2)(1-\theta_3)}\right)$$

Si l'on désigne par H la fonction de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, analogue à F et G mais avec les dénominateurs a, b, c, la solution de IV' s'écrit

$$B_{41} = \frac{H(\theta_2,\theta_3)}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\theta_1}$$

$$B_{42} = \frac{H(\theta_1,\theta_3)}{(\theta_2-\theta_1)(\theta_2-\theta_3)\theta_2}$$

$$B_{43} = \frac{H(\theta_1,\theta_2)}{(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)\theta_3}$$

En reportant les différentes expressions des coefficients dans l'équation V, et en tenant compte du fait que $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)=0$, on montre, après un calcul assez long que celle-ci est identiquement vérifiée.

Les coefficients $B_{\alpha o}$ et $A_{q o}$ sont donnés par :

$B_{50} = 1 - B_{51} - B_{52} - B_{53}$ $\quad A_{50} = 1 - A_{51} - A_{52} - A_{53} - A_{54}$

$B_{40} = 1 - B_{41} - B_{42} - B_{43}$

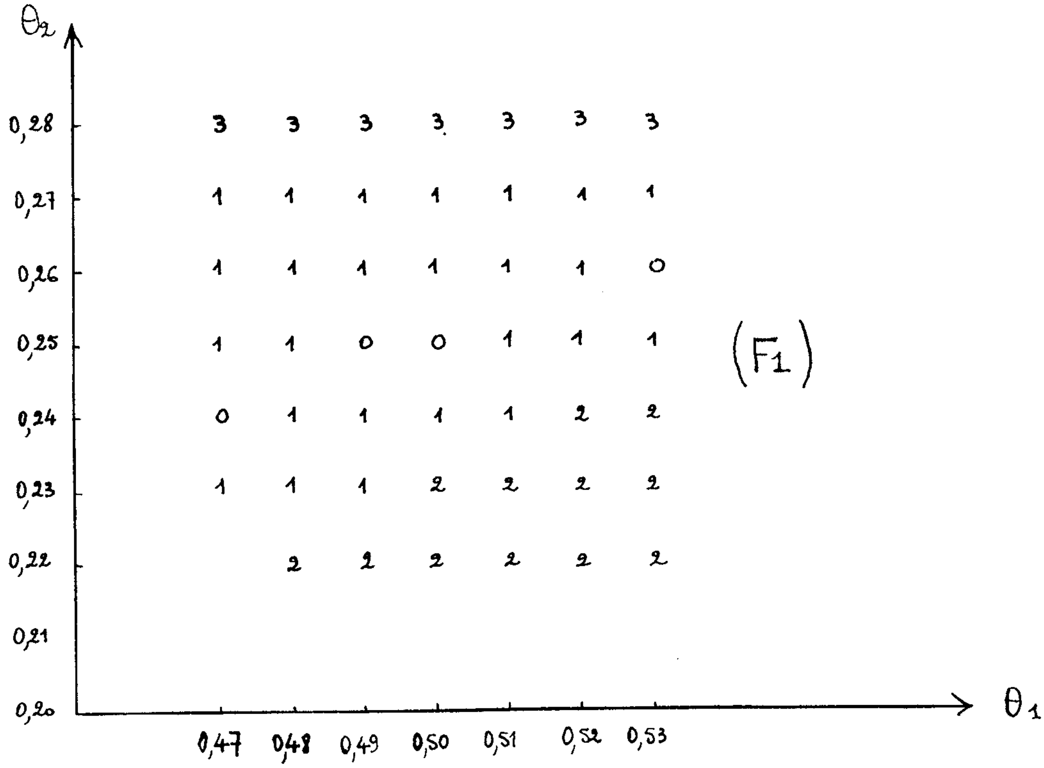
$B_{30} = \theta_3^2 - B_{31} - B_{32}$

$B_{20} = \theta_2^2 - B_{21}$

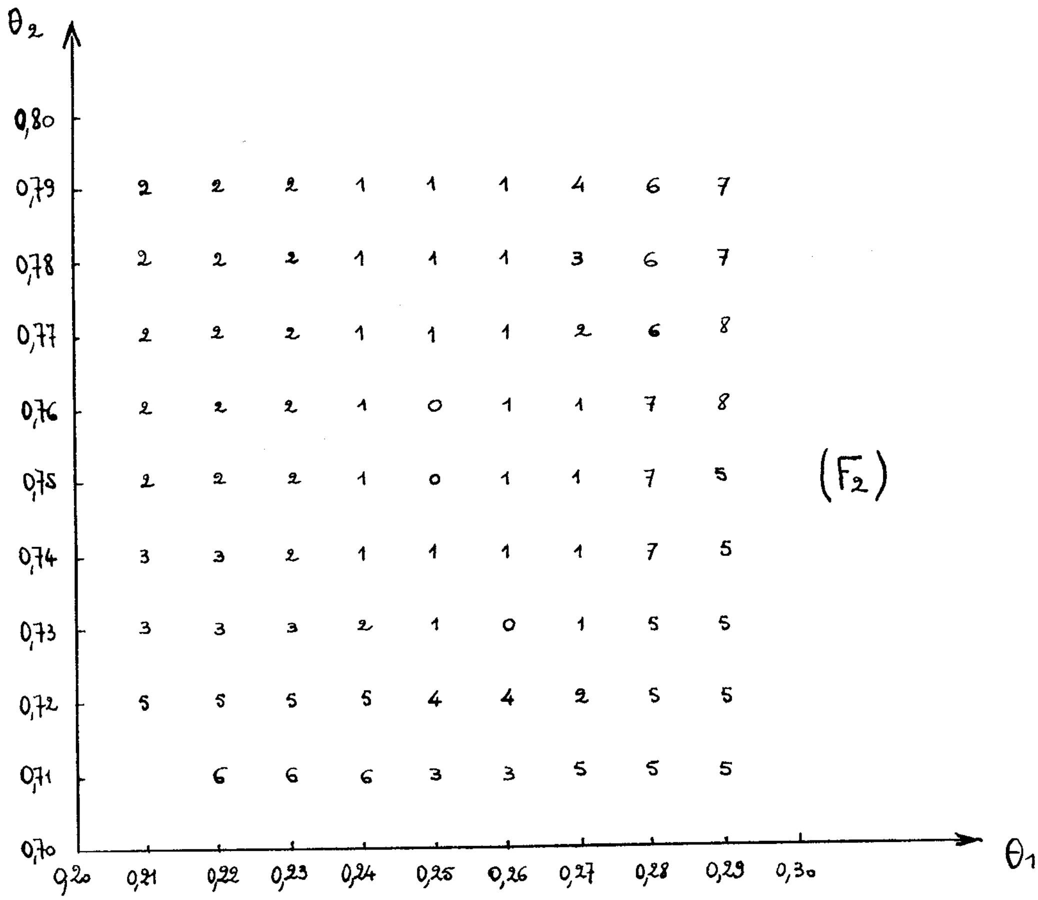
La condition $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ permet d'évaluer θ_3 en fonction de θ_1 et θ_2. Nous disposons donc de deux paramètres arbitraires θ_1 et θ_2 qui peuvent parcourir le carré $0 \leq \theta_1 \leq 1$; $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Nous avons effectué, à l'aide d'un calculateur électronique, un sondage systématique de ce carré afin de trouver un jeu de coefficients tous positifs.

Le nombre de ces coefficients (18) et la complexité de leurs expressions en fonction de θ_1 et θ_2 font que les régions où aucun coefficient ne change de signe, sont petites.
En adoptant un pas de 0,05 pour θ_1 et θ_2, ce qui correspond à 400 points dans le carré unitaire, nous avons trouvé 2 points admissibles. Il y a donc lieu de prendre de plus petits pas, et surtout d'effectuer des études locales autour des points déjà mis en évidence.

Nous donnons à la page suivante le résultat de deux études locales, faites avec un pas de 0,01 pour θ_1 et θ_2. . Les chiffres indiquent le nombre de coefficients négatifs. Notons que ce nombre peut être identique pour deux points, sans que l'on ait les mêmes coefficients négatifs en ces points.


θ2
0,28 3 3 3 3 3 3 3
0,27 1 1 1 1 1 1 1
0,26 1 1 1 1 1 1 0
0,25 1 1 0 0 1 1 1
0,24 0 1 1 1 1 2 2
0,23 1 1 1 2 2 2 2
0,22 2 2 2 2 2 2
0,21
0,20
0,47 0,48 0,49 0,50 0,51 0,52 0,53
θ1

(F_1)


θ2
0,80
0,79 2 2 2 1 1 1 4 6 7
0,78 2 2 2 1 1 1 3 6 7
0,77 2 2 2 1 1 1 2 6 8
0,76 2 2 2 1 0 1 1 7 8
0,75 2 2 2 1 0 1 1 7 5
0,74 3 3 2 1 1 1 1 7 5
0,73 3 3 3 2 1 0 1 5 5
0,72 5 5 5 5 4 4 2 5 5
0,71 6 6 6 3 3 5 5 5
0,70
0,20 0,21 0,22 0,23 0,24 0,25 0,26 0,27 0,28 0,29 0,30
θ1

(F_2)

Nous proposons le jeu de coefficients suivant :

$\theta_1 = 0{,}25$ $\theta_2 = 0{,}75$ $\theta_3 = 0{,}5$ $\theta_4 = 1$

$A_{54} = \frac{7}{90}$ $A_{53} = \frac{12}{90}$ $A_{52} = \frac{32}{90}$ $A_{51} = \frac{32}{90}$ $A_{50} = \frac{7}{90}$

$B_{54} = 0$ $B_{53} = \frac{-12}{90}$ $B_{52} = \frac{-16}{90}$ $B_{51} = \frac{48}{90}$ $B_{50} = \frac{14}{90}$

$B_{43} = \frac{9}{21}$ $B_{42} = \frac{4}{21}$ $B_{41} = 0$ $B_{40} = \frac{8}{21}$

$B_{32} = \frac{2}{36}$ $B_{31} = \frac{6}{36}$ $B_{30} = \frac{1}{36}$

$B_{21} = \frac{8}{16}$ $B_{20} = \frac{-1}{16}$

ALbrecht [1] donne également un jeu de coefficients pour la formule de Runge-Kutta de rang 5, mais ceux-ci ne sont pas tous positifs.

Exemples :

Pour les méthodes de rang 4, il n'avait pas été possible d'identifier avec la série de Taylor jusqu'en h^6 exactement; cela est réalisé avec la méthode de rang 5. En plus l'identification a été poussée jusqu'en h^6 également pour la dérivée. Il est intéressant de comparer ces deux méthodes sur des exemples.

1°) $y'' = -ty$ $y(o) = 1$ $y'(o) = o$ $h = 1$

t	Solution exacte	Solution par R.K. spéciale rang 4	Solution par R.K. spéciale rang 5	Erreur R.K. rang 4 $\times 10^5$	Erreur R.K. rang 5 $\times 10^5$
1	0,838 812	0,839 192	0,838 845	38	3

2°/ $y'' = -y \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad h = 0{,}2$

t	Solution exacte	Solution par RK spéciale rang 4	Solution par R.K. spéciale rang 5	Erreur RK rang 4 $\times 10^9$	Erreur RK rang 5 $\times 10^9$
0,2	0,198 669 330	0,198 669 333	0,198 669 331	+ 3	+ 1
0,4	0,389 418 342	0,389 418 352	0,389 418 343	+10	+ 1
1	0,841 470 985	0,841 471 036	0,841 470 987	+ 51	+ 2
2	0,909 297 427	0,909 297 541	0,909 297 436	+114	+ 9

3°/ $y'' = -y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad h = 0{,}2$

t	Solution exacte	Solution par RK spéciale de rang 4	Solution par RK. spéciale rang 5	Erreur RK rang 4 $\times 10^9$	Erreur RK rang 5 $\times 10^9$
0,2	0,980 066 577	0,980 066 591	0,980 066 580	+14	+ 3
0,4	0,921 060 994	0,921 061 008	0,921 060 997	+14	+ 3

4°/ $y'' = -y^3 \quad y(0) = 0{,}2 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Solution par RK spéciale rang 4	Solution par RK spéciale rang 5	Erreur RK rang 4 $\times 10^9$	Erreur RK rang 5 $\times 10^9$
1	0,196 039 531	0,196 039 546	0,196 039 525	15	− 6
2	0,184 610 659	0,184 610 686	0,184 610 649	27	− 10

Ch.III - METHODE DU TYPE RUNGE-KUTTA UTILISANT DES DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR.

(A) Conditions à vérifier :

Soit un système d'équations différentielles d'ordre p :

$$y^{(p)} = Y\left(y^{(p-1)}, y^{(p-2)} \dots\dots y\,,\, z^{(p-1)} \dots z \dots\dots\right)$$

Au lieu d'utiliser des formules de passage du type classique (Ch.I) on peut faire appel à la formule plus générale suivante [16] :

$$y_\alpha^{(p-k)} = y^{(p-k)} + \frac{h\theta_\alpha}{1!} y^{(p-k-1)} + \dots + \frac{h^{k-1}\theta_\alpha^{k-1}}{(k-1)!} y^{(p-1)} + \frac{h^k}{k!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} Y_\beta + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K'_{\alpha\beta} DY_\beta$$

qui fait intervenir des combinaisons linéaires des $DY_\beta = y_\beta^{(p+1)}$

Explicitons l'algorithme pour des systèmes d'ordre 2, dont le second membre ne contient pas la dérivée première, et dans le cas d'une méthode de rang 2 :

$$y'' = Y(y, t)$$

soit $$y''' = DY = Z(y, y', t) = Y'_y \times y' + Y'_t$$

y_{oi}, y'_{oi} désignent les valeurs à l'intérieur d'un pas et l'on posera :

$$Y_{oi} = Y(y_{oi}\,,\, t_{oi} = t_o + \theta_i h) \qquad Z_{oi} = Z(y_{oi}, y'_{oi}, t_{oi})$$

Les formules de passage sont alors :

$$y_{o1} = y_{oo} + h\theta_1 y'_{oo} + \frac{h^2}{2!}\theta_1^2 Y_{oo} + \frac{h^3}{3!}\theta_1^3 Z_{oo}$$

$$y'_{o1} = y'_{oo} + h\theta_1 Y_{oo} + \frac{h^2}{2!}\theta_1^2 Z_{oo}$$

$$y_{02} = y_{10} = y_{00} + \frac{h}{1!} y'_{00} + \frac{h^2}{2!}\left(B_{21} Y_{01} + B_{20} Y_{00}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(B'_{21} Z_{01} + B'_{20} Z_{00}\right)$$

$$y'_{02} = y'_{10} = y'_{00} + \frac{h}{1!}\left(A_{21} Y_{01} + A_{20} Y_{00}\right) + \frac{h^2}{2!}\left(A'_{21} Z_{01} + A'_{20} Z_{00}\right)$$

L'identification du développement de la solution approchée avec le développement de Taylor de la solution exacte, conduit à des conditions sur les $K_{\alpha\beta}$ et les $K'_{\alpha\beta}$. Ces conditions ont déjà été écrites dans le cas général du système d'équations différentielles d'ordre p ([2] : thèse en préparation). Nous reproduisons à la page suivante, celles de ces conditions qui interviennent pour notre type spécial d'équations différentielles, c.à.d. celles qui concernent les opérateurs du développement de Taylor de la page I.4.- Nous écrirons ensuite les formules de rang 2 et 3 correspondant à cette méthode, et nous les nommerons : formules de "Runge-Kutta double".

$\frac{h^{k+1}}{k!}\,C_1$	$\frac{1}{(k+1)}$	$\sum \frac{K'_{q\alpha}}{k+1} + \sum K_{q\alpha}\,\theta_\alpha$
$\frac{h^{k+2}}{k!}\,C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{2}\sum K_{q\alpha}\,\theta_\alpha^2 + \frac{1}{k+1}\sum K'_{q\alpha}\,\theta_\alpha$
$\frac{h^{k+3}}{k!}\,C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{6}\sum K_{q\alpha}\,\theta_\alpha^3 + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,\theta_\alpha^2$
$\frac{h^{k+3}}{k!}\,J_2C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{6}\sum K_{q\alpha}\,B'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum K_{q\alpha}\,B_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,A'_{\alpha\beta} + \frac{1}{k+1}\sum K'_{q\alpha}\,A_{\alpha\beta}\,\theta_\beta$
$\frac{h^{k+4}}{k!}\,C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{24}\sum K_{q\alpha}\,\theta_\alpha^4 + \frac{1}{6(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,\theta_\alpha^3$
$\frac{h^{k+4}}{k!}\,K_2C_1$	$\frac{\cancel{1}\;4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6}\sum K_{q\alpha}\,B'_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha + \frac{1}{2}\sum K_{q\alpha}\,B_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha\theta_\beta + \frac{1}{6(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,B'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,B_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,A'_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha + \frac{1}{k+1}\sum K'_{q\alpha}\,A_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha\,\theta_\beta$
$\frac{h^{k+4}}{k!}\,J_2C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6}\sum K_{q\alpha}\,B'_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + \frac{1}{4}\sum K_{q\alpha}\,B_{\alpha\beta}\,\theta_\beta^2 + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,A'_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)}\sum K'_{q\alpha}\,A_{\alpha\beta}\,\theta_\beta^2$

(B) FORMULE RUNGE-KUTTA DOUBLE DE RANG 2

Nous nous proposons de satisfaire les conditions sur les $K'_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ jusqu'en h^{k+3} compris, avec $q = 2$. Ces conditions s'écrivent explicitement :

$$\begin{cases} B'_{21}\,\dfrac{\theta_1}{3} + B_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{2} = \dfrac{1}{3\times 4} \\ B'_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{6} + B_{21}\,\dfrac{\theta_1^3}{6} = \dfrac{1}{3\times 4\times 5} \\ B'_{21}\times\dfrac{1}{3} + B_{21}\,\theta_1 + B'_{20}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_{21}\,\dfrac{\theta_1}{2} + A_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{2} = \dfrac{1}{2\times 3} \\ A'_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{4} + A_{21}\,\dfrac{\theta_1^3}{6} = \dfrac{1}{2\times 3\times 4} \\ A'_{21}\times\dfrac{1}{2} + A_{21}\,\theta_1 + A'_{20}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}\,B_{21}\,B'_{10} + \dfrac{1}{6}\,B'_{21}\,A'_{10} = \dfrac{1}{3\times 4\times 5} \\ \dfrac{1}{6}\,A_{21}\,B'_{10} + \dfrac{1}{4}\,A'_{21}\,A'_{10} = \dfrac{1}{2\times 3\times 4} \end{cases}$$

La solution peut s'écrire en fonction de θ_1 :

$$B'_{21} = \frac{3}{\theta_1^2}\left(\frac{1}{10} - \frac{\theta_1}{6}\right) \qquad B_{21} = \frac{3}{\theta_1^3}\left(\frac{\theta_1}{6} - \frac{1}{15}\right)$$

$$A'_{21} = \frac{4}{\theta_1^2}\left(\frac{1}{8} - \frac{\theta_1}{6}\right) \qquad A_{21} = \frac{4}{\theta_1^3}\left(\frac{\theta_1}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$B'_{20} = 1 - \frac{3}{\theta_1^2}\left(\frac{\theta_1}{3} - \frac{1}{10}\right) \qquad A'_{20} = 1 - \frac{4}{\theta_1^2}\left(\frac{\theta_1}{3} - \frac{1}{8}\right)$$

$$B_{20} = 1 - \frac{3}{\theta_1^3}\left(\frac{\theta_1}{6} - \frac{1}{15}\right) \qquad A_{20} = 1 - \frac{4}{\theta_1^3}\left(\frac{\theta_1}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$A'_{10} = \theta_1^2 \qquad B'_{10} = \theta_1^3$$

Pour que tous ces coefficients soient **positifs** avec $0 \leq \theta_1 \leq 1$, il faut imposer la condition : $\dfrac{1}{2} \leq \theta_1 \leq \dfrac{3}{5}$

Avec $\theta_1 = \frac{1}{2}$,nous obtenons le jeu de coefficients suivant :

FORMULE 1 :

$\theta_1 = \frac{1}{2}$	$B'_{21} = \frac{1}{5}$	$B'_{20} = \frac{1}{5}$	$B'_{10} = \frac{1}{8}$
	$A'_{21} = \frac{2}{3}$	$A'_{20} = \frac{1}{3}$	$A'_{10} = \frac{1}{4}$
	$B_{21} = \frac{2}{5}$	$B_{20} = \frac{3}{5}$	$B_{10} = \frac{1}{4}$
	$A_{21} = 0$	$A_{20} = 1$	$A_{10} = \frac{1}{2}$

FORMULE optimale:

On peut se proposer de minimiser l'erreur en $\frac{h^6}{2!}$ C4 sur y, en faisant varier θ_1 entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{5}$.

L'équation correspondante s'écrit:

$$B'_{21}\,\frac{\theta_1^{\,3}}{18} + B_{21}\,\frac{\theta_1^{\,4}}{24} = \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}$$

En remplaçant B'_{21} et B_{21} par leur valeur, on voit que l'écart minimum entre le premier et second membre, est atteint pour $\theta_1 = \frac{3}{5}$. L'erreur est alors réduite à $\frac{1}{7200}\,h^6$ C4.
Le jeu de coefficients correspondant a l'avantage de n'exiger que 5 Mémoires pour le rangement.

FORMULE 2 :

$\theta_1 = \frac{3}{5}$	$B'_{21} = 0$	$B'_{20} = \frac{1}{6}$	$B'_{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$
	$A'_{21} = \frac{5}{18}$	$A'_{20} = \frac{1}{6}$	$A'_{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$
	$B_{21} = \frac{25}{54}$	$B_{20} = \frac{29}{54}$	$B_{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$
	$A_{21} = \frac{25}{54}$	$A_{20} = \frac{29}{54}$	$A_{10} = \frac{3}{5}$

Ces formules coûtent 4 Hörner par pas. Il est intéressant de les comparer entre elles, et aussi avec la formule de Runge-Kutta spéciale décrite en II B .

1°/ $y'' = y \qquad y(0) = y'(0) = 1$

t	Solution exacte	Solution par Formule I R.K. double 2	Solution par Formule II R.K. double 2	Erreur RK classique $\times 10^8$	Erreur RK spéciale $\times 10^8$	Erreur avec formule I $\times 10^8$	Erreur avec formule II $\times 10^8$
0,1	1,105 170 91	1,105 170 91	1,105 170 90	− 8	0	0	− 1
0,2	1,221 402 75	1,221 402 73	1,221 402 71	−18	−1	−2	−4
0,3	1,349 858 80	1,349 858 74	1,349 858 72	−29	−2	−6	−8
0,4	1,491 824 69	1,491 824 59	1,491 824 56	−41	−3	−10	−13
0,5	1,648 721 27	1,648 721 10	1,648 721 07	−55	−5	−17	−20

2°/ $y'' = -y \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

t	Solution exacte	Solution par formule I R.K. double 2	Solution par formule II R.K. double 2	Erreur RK classique $\times 10^9$	Erreur RK Spéciale $\times 10^9$	Erreur avec formule I $\times 10^9$	Erreur avec formule II $\times 10^9$
0,1	0,099 833 416 6	0,099 833 417 3	0,099 833 417 8	− 82	+ 1,2	+ 0,7	+ 1,2
0,2	0,198 669 330	0,198 669 333	0,198 669 332	−163	+ 3	+ 3	+ 2
0,3	0,295 520 206	0,295 520 212	0,295 520 210	−243	+ 4	+ 6	+ 4
0,4	0,389 418 342	0,389 418 352	0,389 418 350	− 319	+ 5	+ 10	+ 8
0,5	0,479 425 538	0,479 425 556	0,479 425 553	− 389	+ 6	+ 18	+ 15

3°/ $y'' = -y^3 \qquad y(0) = 0,2 \qquad y'(0) = 0 \qquad h = 1$

t	Solution exacte	Solution par formule I R.K. double 2	Solution par formule II R.K. double 2	Erreur RK classique $\times 10^9$	Erreur RK spéciale $\times 10^9$	Erreur avec Formule I $\times 10^9$	Erreur avec formule II $\times 10^9$
1	0,196 039 531	0,196 039 721	0,196 039 713	270	15	190	182
2	0,184 610 659	0,184 612 181	0,184 612 047	1252	27	1522	1388

4°) $y'' = -ty$ $y(o) = 1$ $y'(o) = 0$ $h = 1$

t	Solution exacte	Solution par formule I R.K. double 2	Solution par formule II R.K. double 2	Erreur R.K. classique x 10^5	Erreur R.K. spéciale x 10^5	Erreur par formule I x 10^5	Erreur par formule II x 10^5
1	0,838 812	0,838 194	0,838 333	548	38	61,8	48

La supériorité de la formule II sur la formule I n'est pas nette sur ces exemples, mais ces deux formules se situent entre les formules de Runge Kutta classique et de Runge Kutta spéciale, ce qui pouvait être prévu par l'examen de l'ordre infinitésimal atteint en h. (Voir tableau récapitulatif page III.12)

5°) Comparons sur un exemple la formule II précédente, à la formule du type Runge Kutta de rang 3, établie au ch.II A. Les ordres infinitésimaux atteints dans le développement de y et y' sont presque identiques pour les deux formules, et la deuxième demande un Hörner en moins. (Voir tableau récapitulatif page III.14)

$y'' = y$ $h = 0,5$; $y(o) = y'(o) = 1$

t	Solution exacte	Runge-Kutta rang 3	Runge-Kutta double rang 2. F II	Erreur R.K.3 x 10^6	Erreur RKD2 x 10^6
0,5	1,648 721 27	1,648 714 19	1,648 697 91	-7	-23
1	2,718 281 82	2,718 199 10	2,718 069 09	-82	-212
2	7,389 056 09	7,388 304 41	7,387 209 45	-751	-1 846
4	54,598 150 0	54,584 166 0	54,564 291 1	-13.984	-33.859

(C) FORMULE RUNGE-KUTTA DOUBLE DE RANG 3.

Nous essayons maintenant de satisfaire les conditions sur les $B_{\alpha\beta}, B'_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, A'_{\alpha\beta}, \theta_\alpha$ jusqu'en h^{k+4} compris, avec $q = 3$. Ces conditions sont :

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{ll}
(d) & B_{32}\theta_2 + B_{31}\theta_1 + B'_{32}\times\frac{1}{3} + B'_{31}\times\frac{1}{3} + B'_{30}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
(a) & B_{32}\frac{\theta_2^2}{2} + B_{31}\frac{\theta_1^2}{2} + B'_{32}\times\frac{\theta_2}{3} + B'_{31}\times\frac{\theta_1}{3} = \frac{1}{3\times 4} \\
(b) & B_{32}\frac{\theta_2^3}{6} + B_{31}\frac{\theta_1^3}{6} + B'_{32}\times\frac{\theta_2^2}{6} + B'_{31}\times\frac{\theta_1^2}{6} = \frac{1}{3\times 4\times 5} \\
(c) & B_{32}\frac{\theta_2^4}{24} + B_{31}\frac{\theta_1^4}{24} + B'_{32}\times\frac{\theta_2^3}{18} + B'_{31}\times\frac{\theta_1^3}{18} = \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}
\end{array}\right.$$

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{ll}
(d) & A_{32}\theta_2 + A_{31}\theta_1 + A'_{32}\times\frac{1}{2} + A'_{31}\times\frac{1}{2} + A'_{30}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
(a) & A_{32}\frac{\theta_2^2}{2} + A_{31}\frac{\theta_1^2}{2} + A'_{32}\frac{\theta_2}{2} + A'_{31}\times\frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2\times 3} \\
(b) & A_{32}\frac{\theta_2^3}{6} + A_{31}\frac{\theta_1^3}{6} + A'_{32}\frac{\theta_2^2}{4} + A'_{31}\times\frac{\theta_1^2}{4} = \frac{1}{2\times 3\times 4} \\
(c) & A_{32}\frac{\theta_2^4}{24} + A_{31}\frac{\theta_1^4}{24} + A'_{32}\frac{\theta_2^3}{12} + A'_{31}\frac{\theta_1^3}{12} = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}
\end{array}\right.$$

$$\mathrm{III}\quad\left\{\begin{array}{ll}
(a) & \frac{1}{6}\left[B_{32}B'_{21} + B_{32}B'_{20} + B_{31}B'_{10}\right] + \frac{1}{2}\left[B_{32}B_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{6}\left[B'_{32}A'_{21} + B'_{32}A'_{20} + B'_{31}A'_{10}\right] \\
 & \qquad + \frac{1}{3}\left[B'_{32}A_{21}\theta_1\right] = \frac{1}{3\times 4\times 5} \\
(b) & \frac{1}{6}\left[B_{32}B'_{21}\theta_2 + B_{32}B'_{20}\theta_2 + B_{31}B'_{10}\theta_1\right] + \frac{1}{2}\left[B_{32}B_{21}\theta_2\theta_1\right] + \frac{1}{18}\left[B'_{32}B'_{21} + B'_{32}B'_{20} + B'_{31}B'_{10}\right] + \frac{1}{6}\left[B'_{32}B_{21}\theta_1\right] \\
 & \qquad + \frac{1}{6}\left[B'_{32}A'_{21}\theta_2 + B'_{32}A'_{20}\theta_2 + B'_{31}A'_{10}\theta_1\right] + \frac{1}{3}\left[B'_{32}A_{21}\theta_2\theta_1\right] = \frac{4}{3\times 4\times 5\times 6} \\
(c) & \frac{1}{6}\left[B_{32}B'_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{4}\left[B_{32}B_{21}\theta_1^2\right] + \frac{1}{6}\left[B'_{32}A'_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{6}\left[B'_{32}A_{21}\theta_1^2\right] = \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}
\end{array}\right.$$

$$\mathrm{IV}\quad\left\{\begin{array}{ll}
(a) & \frac{1}{6}\left[A_{32}B'_{21} + A_{32}B'_{20} + A_{31}B'_{10}\right] + \frac{1}{2}\left[A_{32}B_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{4}\left[A'_{32}A'_{21} + A'_{32}A'_{20} + A'_{31}A'_{10}\right] \\
 & \qquad + \frac{1}{2}\left[A'_{32}A_{21}\theta_1\right] = \frac{1}{2\times 3\times 4} \\
(b) & \frac{1}{6}\left[A_{32}B'_{21}\theta_2 + A_{32}B'_{20}\theta_2 + A_{31}B'_{10}\theta_1\right] + \frac{1}{2}\left[A_{32}B_{21}\theta_2\theta_1\right] + \frac{1}{12}\left[A'_{32}B'_{21} + A'_{32}B'_{20} + A'_{31}B'_{10}\right] + \frac{1}{4}\left[A'_{32}B_{21}\theta_1\right] \\
 & \qquad + \frac{1}{4}\left[A'_{32}A'_{21}\theta_2 + A'_{32}A'_{20}\theta_2 + A'_{31}A'_{10}\theta_1\right] + \frac{1}{2}\left[A'_{32}A_{21}\theta_2\theta_1\right] = \frac{4}{2\times 3\times 4\times 5} \\
(c) & \frac{1}{6}\left[A_{32}B'_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{4}\left[A_{32}B_{21}\theta_1^2\right] + \frac{1}{4}\left[A'_{32}A'_{21}\theta_1\right] + \frac{1}{4}\left[A'_{32}A_{21}\theta_1^2\right] = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}
\end{array}\right.$$

Si l'on suppose que les systèmes I et II permettent de trouver tous les $A_{3\alpha}, A'_{3\alpha}, B_{3\alpha}, B'_{3\alpha}$, on obtient un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues pour trouver $A_{21}, B_{21}, A'_{20}, A'_{21}$, B'_{20} , B'_{21} . (On suppose $A'_{10} = \theta_1^2$ et $B'_{10} = \theta_1^3$). Mais le déterminant de ce système est nul.

En choisissant $A'_{32} = B'_{32} = 0$, on fait disparaître dans ce système les inconnues A'_{21}, A'_{20}, A_{21}. Il reste donc 6 équations à 3 inconnues, mais en même temps, certaines de ces équations deviennent équivalentes. Remarquons que cette simplification économise le calcul de Z_{02}, donc également celui de y'_{02} .

Le système III devient alors, en tenant compte de I :

$$\text{III}\quad\begin{cases} \text{a}\quad B'_{21}\times\left(\frac{1}{6}\right) + B'_{20}\times\left(\frac{1}{6}\right) + B_{21}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{1}{B_{32}}\left(\frac{1}{3\times4\times5} - \frac{B_{31}\theta_1^3}{6} - \frac{B'_{31}\theta_1^2}{6}\right) = \frac{\theta_2^3}{6} \\ \text{b}\quad B'_{21}\times\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + B'_{20}\times\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + B_{21}\left(\frac{\theta_2\theta_1}{2}\right) = \frac{1}{B_{32}}\left(\frac{4}{3\times4\times5\times6} - \frac{B_{31}\theta_1^4}{6} - \frac{B'_{31}\theta_1^3}{18} - \frac{B'_{31}\theta_1^3}{6}\right) = \frac{\theta_2^4}{6} \\ \text{c}\quad B'_{21}\left(\frac{\theta_1}{6}\right) + B'_{20}\times(0) + B_{21}\left(\frac{\theta_1^2}{4}\right) = \frac{1}{B_{32}}\left(\frac{1}{3\times4\times5\times6}\right) \end{cases}$$

Le déterminant principal est encore nul, mais le système n'est pas impossible. On peut prendre $B_{21} = 0$ arbitrairement.

IIIb et IIIc fournissent alors B'_{21} et B'_{20} :

$$\begin{cases} B'_{21} = \dfrac{1}{3\times4\times5\times B_{32}\times\theta_1} \\ B'_{20} = \theta_2^3 - \dfrac{1}{3\times4\times5\times B_{32}\times\theta_1} \end{cases}$$

De même le système IV s'écrit, en tenant compte de II:

$$\mathrm{IV}\quad\begin{cases} (a)\quad B'_{21}\times\left(\frac{1}{6}\right) + B'_{20}\left(\frac{1}{6}\right) + B_{21}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{1}{A_{32}}\left(\frac{1}{2\times3\times4} - \frac{A_{31}\theta_1^3}{6} - \frac{A'_{31}\theta_1^2}{4}\right) = \frac{\theta_2^3}{6} \\ (b)\quad B'_{21}\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + B'_{20}\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + B_{21}\left(\frac{\theta_2\theta_1}{2}\right) = \frac{1}{A_{32}}\left(\frac{4}{2\times3\times4\times5} - \frac{A_{31}\theta_1^4}{6} - \frac{A'_{31}\theta_1^3}{3}\right) = \frac{\theta_2^4}{6} \\ (c)\quad B'_{21}\left(\frac{\theta_1}{6}\right) + B'_{20}(0) + B_{21}\left(\frac{\theta_1^2}{4}\right) = \frac{1}{A_{32}\times 2\times3\times4\times5} \end{cases}$$

On voit immédiatement que IVa et IVb sont respectivement équivalentes à IIIa et IIIb.

Pour que IIIc et IVc soient équivalentes il faut $A_{32} = 3B_{32}$

Résolvons les systèmes I et II:

$$B_{32} = \frac{5\theta_1^2 - 6\theta_1 + 2}{30\,\theta_2^2\,(\theta_1-\theta_2)^2}$$

$$B'_{31} = \frac{3(\theta_1+\theta_2) - 5\theta_1\theta_2 - 2}{10\,\theta_1^2\,(\theta_2-\theta_1)}$$

$$B_{31} = \frac{1}{\theta_1^3(\theta_1-\theta_2)^2\times 30}\times\left(12\,\theta_1^2 - 6\theta_1 + 15\,\theta_1\theta_2^2 - 20\,\theta_2\theta_1^2 + 4\theta_2 - 6\,\theta_2^2\right)$$

$$A_{32} = \frac{10\,\theta_1^2 - 15\,\theta_1 + 6}{30\,\theta_2^2\,(\theta_1-\theta_2)^2}$$

$$A_{31} = \frac{\left(180\,\theta_1^2 - 108\,\theta_1 + 180\,\theta_1\theta_2^2 - 240\,\theta_1^2\theta_2 + 72\,\theta_2 - 90\,\theta_2^2\right)}{180\,\theta_1^3\,(\theta_1-\theta_2)^2}$$

$$A'_{31} = \frac{15(\theta_1+\theta_2) - 20\,\theta_2\theta_1 - 12}{30\,\theta_1^2\,(\theta_2-\theta_1)}$$

La condition $A_{32} = 3B_{32}$ s'écrit alors :

$$\theta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_1 = \frac{3}{5}}$$

Id et IId fournissent alors les coefficients B'_{30} et A'_{30}.

Nous disposons encore d'un coefficient arbitraire: θ_2.

Exemple de formule:

$\theta_1 = \frac{3}{5}$ $\qquad \theta_2 = 1$

$B_{32} = \frac{1}{24}$ $\qquad B_{31} = \frac{13}{18} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$ $\qquad B_{30} = \frac{37}{81}$

$B'_{32} = 0$ $\qquad B'_{31} = \frac{-5}{6^2}$ $\qquad B'_{30} = \frac{1}{9}$

$A_{32} = \frac{1}{8}$ $\qquad A_{31} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$ $\qquad A_{30} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$A'_{32} = 0$ $\qquad A'_{31} = 0$ $\qquad A'_{30} = \frac{1}{18}$

$B_{21} = 0$ $\qquad B_{20} = 1$

$B'_{21} = \frac{2}{3}$ $\qquad B'_{20} = \frac{1}{3}$

$A_{21} = 0$ $\qquad A_{20} = 1$

$A'_{21} = 0$ $\qquad A'_{20} = 0$

$A'_{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\qquad B'_{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

Pour cette méthode qui coûte 5 Hörner par pas, l'erreur est en h^7 pour y et en h^6 pour y'. Pour la méthode Runge-Kutta spéciale de rang 5, l'erreur était en h^7 pour la fonction comme pour la dérivée. Cette dernière méthode devrait donc être légèrement meilleure.

Nous donnons page (III.14) un tableau récapitulatif des ordres infinitésimaux atteints pour les différentes formules étudiées.

Exemples-

Nous comparons, pour différentes équations, la méthode précédente (Runge-Kutta double de rang 3) à la méthode de Runge-Kutta de rang 5 du chapitre IIC (qui coûte le même nombre de Hörner par pas) et à la méthode utilisant aussi des dérivées d'ordre supérieur, mais de rang 2, qui coûte 1 Hörner de moins par pas (voir Ch.IIIB); Runge-Kutta double rang 2)

1° $y'' = -ty \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Runge Kutta rang 5	Runge Kutta double rang 2	Runge Kutta double rang 3	Erreur RK 5 $\times 10^5$	Erreur RKD2 $\times 10^5$	Erreur RKD3 $\times 10^5$
1	0,838 812	0,838 845	0,838 333	0,838 555	3	-48	-26

2° $y'' = -y^3 \quad y(0) = 0,2 \quad y'(0) = 0 \quad h = 1$

t	Solution exacte	Runge Kutta rang 5	Runge Kutta double rang 2	Runge Kutta double rang 3	Erreur RK 5 $\times 10^9$	Erreur RKD2 $\times 10^9$	Erreur RKD3 $\times 10^9$
1	0,196 039 531	0,196 039 525	0,196 039 713	0,196 039 530	-6	+182	-1
2	0,184 610 659	0,184 610 649	0,184 612 047	0,184 610 684	-10	+1388	25

3° $y'' = -y \quad y = \sin x \quad h = 0,2$

t	Solution exacte	Runge Kutta rang 5	Runge Kutta double rang 2	Runge Kutta double rang 3	Erreur RK5 $\times 10^9$	Erreur RKD2 $\times 10^9$	Erreur RKD3 $\times 10^9$
0,2	0,198 669 330	0,198669 331	0,198 669 334	0,198 669 328	+1	+4	-2
0,4	0,389 418 342	0,389418 343	0,389 418 385	0,389 418 324	+1	+43	-18
1	0,841 470 985	0,841 470 987	0,841 472 320	0,841 470 851	+2	1335	-134
2	0,909 297 427	0,909 297 436	0,909 307 428	0,909 297 079	+9	10.001	-348

4°/ $y'' = (1+t^2)\,y \quad h = 0{,}2 \quad , y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

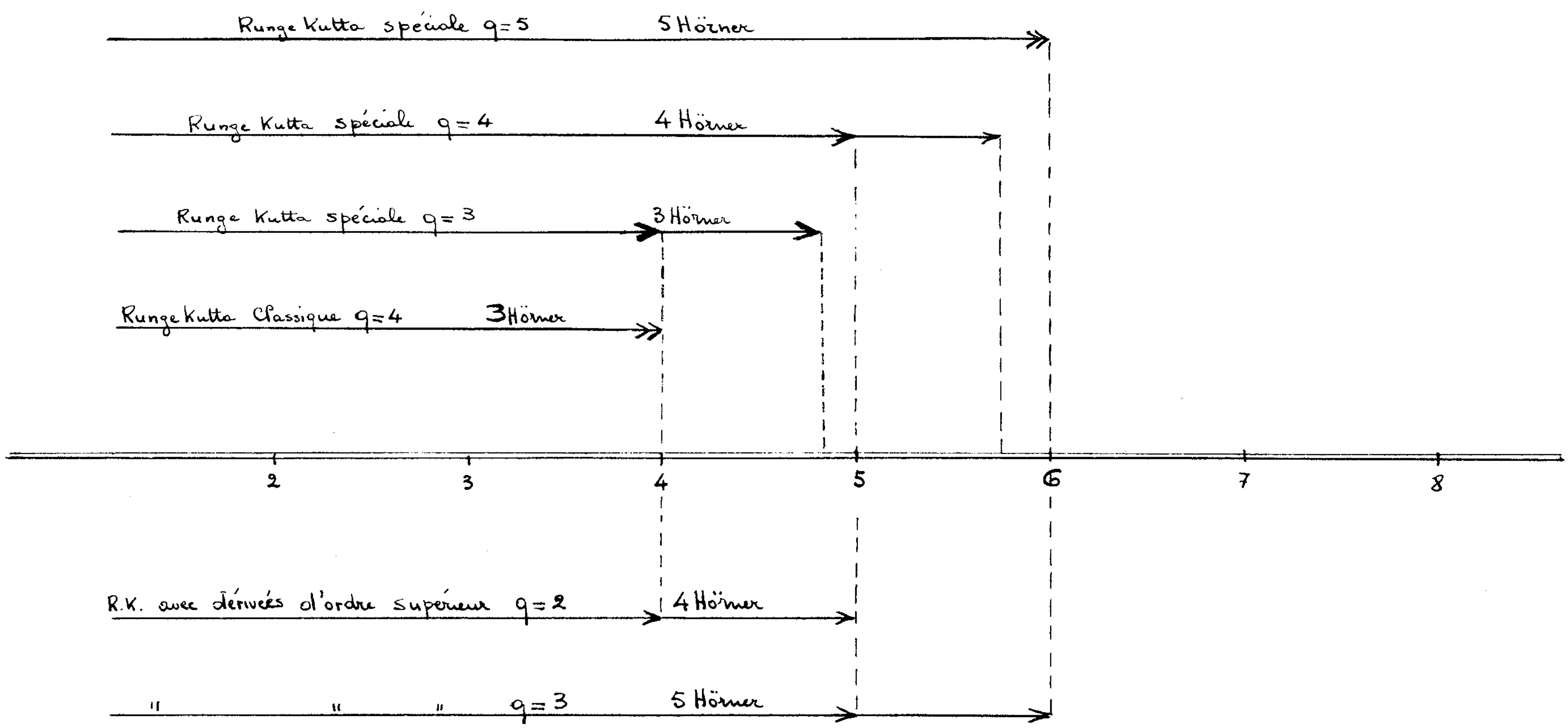
t	Solution exacte	Runge Kutta rang 5	Runge Kutta double rang 2	Runge Kutta double rang 3	Erreur RK5 x10^8	Erreur RKD2 x10^8	Erreur RKD3 x10^8
0,2	1,020 201 34	1,020 201 33	1,020 200 95	1,020 201 34	-1	+39	0
0,4	1,083 287 07	1,083 287 05	1,083 283 87	1,083 287 12	-2	320	5
0,6	1,197 217 36	1,197 217 33	1,197 208 08	1,197 217 61	-3	928	25
0,8	1,377 127 76	1,377 127 70	1,377 106 95	1,377 128 55	-6	2081	79
1	1,648 721 27	1,648 721 15	1,648 678 74	1,648 723 33	-12	4253	206

5°/ $y'' = y \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad h = 0{,}5$

t	Solution exacte	Runge Kutta rang 5	Runge Kutta double rang 2	Runge Kutta double rang 3	Erreur RK5 x10^7	Erreur RKD2 x10^7	Erreur RKD3 x10^7
0,5	1,648 721 27	1,648 720 57	1,648 697 91	1,648 722 87	7	-233	+16
1	2,718 281 82	2,718 280 15	2,718 069 09	2,718 294 45	16,7	-2127	126
2	7,389 056 09	7,389 050 14	7,387 209 45	7,389 162 09	59,5	-18466	1060
4	54,598 150 0	54,598 091 9	54,564 291 1	54,600 072 3	581	-338,589	19223

Dans tous les cas, la formule du type Runge Kutta double de rang 3 donne de bien meilleurs résultats que la formule analogue de rang 2 du chapitre IIIB; Cependant elle reste inférieure à la formule du type Runge Kutta de rang 5 du Ch.IIC comme on pouvait le prévoir.

TABLEAU RÉCAPITULATIF



La flèche de droite indique l'ordre atteint pour y

La flèche de gauche indique l'ordre atteint pour y'

Ch.IV PROCEDE DE DERIVATION PREALABLE

(A) PRINCIPE

Zurmühl ([28] page 153) fait remarquer que pour la résolution des équations différentielles ordinaires, on peut parfois augmenter la précision en utilisant des dérivées d'ordre supérieur qui ne sont pas données directement par l'équation.

Soit l'équation différentielle :

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)})$$

Nous supposons que f est différentiable par rapport aux variables indépendantes autant de fois qu'on le désire.

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} y^{(n+p)} &= f^{(p)}(x, y \ldots\ldots y^{(n-1)}) \\ &= g(x, y \ldots\ldots y^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Le procédé de Runge Kutta pour cette équation d'ordre n+p se simplifie puisque le second membre ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à n-1. ([5] page 34). En particulier pour la méthode de Runge Kutta classique, il suffit de diviser le pas en 3 parties au lieu de 4. Par ailleurs, les dérivées $y^n \ldots\ldots\ldots\ldots y^{n+p-1}$ ne doivent être calculées qu'à la fin du pas, et à l'aide de leur expression connue :

$$y^{(n)} = f \qquad y^{(n+1)} = f^{(1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad y^{(n+p-1)} = f^{(p-1)}$$

Si l'on peut estimer à 1 Hörner le coût du calcul d'une fonction $f^{(i)}$, il faut p+3 Hörner pour avoir une erreur en h^{n+p+4} sur y alors qu'avec le procédé classique, il fallait 4 Hörner pour une erreur en h^{n+4} .

Le gain est surtout appréciable pour p faible (1 ou 2) et la complexité de la méthode croît très vite avec p (voir évaluation des $f^{(i)}$, ch IA).

Nous nous proposons dans ce chapitre de traiter de cette manière les systèmes du 1er ordre (n=1) en dérivant une fois (p=1). On aboutit ainsi à un système du second ordre dont le second membre ne contient pas la dérivée première (du type envisagé dans la première partie). Les conditions générales à imposer aux coefficients de Runge Kutta sont donc très simplifiées. Mais de plus, dans le cas présent, la dérivée y' est connue comme fonction de y et t. C'est donc ainsi qu'elle sera évaluée à la fin du pas et les conditions relatives au développement de y' ne sont plus à satisfaire. Cela permet de reporter tous les efforts sur les conditions relatives à y.

(B) FORMULE DE RANG 2

Avec q=2, nous pouvons vérifier les conditions sur les $B_{\alpha\beta}, \theta_\beta$ jusqu'en h^4 compris. Ces conditions sont :

$$B_{21}\,\theta_1 = \frac{1}{3}$$

$$B_{21}\,\theta_1^2 = \frac{1}{6}$$

$$B_{21} + B_{20} = 1$$

Ce qui donne: $\theta_1 = \frac{1}{2}$ $\quad B_{21} = \frac{2}{3}$ $\quad B_{20} = \frac{1}{3}$

Cette formule simple est déjà proposée par Zurmühl [28] et Albrecht [1]. Notons que l'erreur est en h^5 pour y comme pour la méthode de Runge Kutta classique. A égalité de précision, le coût est donc de 3 Hörner (Deux calculs de la fonction Z et un de la fonction Y) au lieu de 4.

(C) FORMULE DE RANG 3

Nous nous proposons maintenant de vérifier les conditions sur les $B_{\alpha\beta}$ jusqu'en h^5 compris, avec q=3. De plus, nous essayerons de satisfaire à une condition de l'ordre suivant.

Nous avons donc les équations:

$$\mathrm{I}\begin{cases} B_{32}\,\theta_2 + B_{31}\,\theta_1 = \frac{1}{3} & h^3 \\ B_{32}\,\theta_2^2 + B_{31}\,\theta_1^2 = \frac{1}{6} & h^4 \\ B_{32}\,\theta_2^3 + B_{31}\,\theta_1^3 = \frac{1}{10} & h^5 \\ B_{32}\,\theta_2^4 + B_{31}\,\theta_1^4 = \frac{1}{15} & h^6 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} B_{32}\,B_{21}\,\theta_1 = \frac{1}{30} & h^5 \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\begin{cases} B_{32} + B_{21} + B_{20} = 1 \\ B_{21} + B_{20} = \theta_2^2 \end{cases}$$

Pour que le système I admette une solution, il faut :

$$\frac{\theta_2\theta_1}{3} - \frac{\theta_1+\theta_2}{6} + \frac{1}{10} = 0$$
$$\frac{\theta_2\theta_1}{6} - \frac{\theta_1+\theta_2}{10} + \frac{1}{15} = 0$$

D'où les valeurs de θ_1 et θ_2 :

$$\theta_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0,276\ 393\ 202$$
$$\theta_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0,723\ 606\ 798$$

On en déduit alors facilement la valeur des autres coefficients

$$B_{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{12} = 0,230\ 327\ 668 \qquad B_{21} = \frac{3+\sqrt{5}}{10} = 0,523\ 606\ 798$$
$$B_{31} = \frac{5+\sqrt{5}}{12} = 0,603\ 005\ 665 \qquad B_{20} = 0$$
$$B_{30} = \frac{1}{6} = 0,166\ 666\ 667$$

Remarquons que pour cette méthode qui coûte 4 Hörner par pas comme la méthode de Runge Kutta classique, l'erreur sur y est en h^6, et a été en plus minimisée. Nous avons gagné, à égalité de travail, un ordre infinitésimal.

Exemples.

Détaillons l'algorithme correspondant à la formule de rang 2, qui nécessite 3 Hörner, sur l'équation $y' = Y(y,t)$. On généralise facilement à un système quelconque.

$$Y_i = Y(y_{i0}, t_i)$$

$$Z_{i0} = Z(y_{i0}, t_i) \quad \text{avec } Z(y,t) = Y'_y(y,t) \times Y(y,t) + Y'_t(y,t)$$

$$y_{i1} = y_{i0} + h\theta_1 Y_i + \frac{h^2}{2}\theta_1^2 Z_{i0}$$

$$Z_{i1} = Z(y_{i1}, t_i + \theta_1 h)$$

$$y_{i2} = y_{i0} + hY_i + \frac{h^2}{2}(B_{21}Z_{i1} + B_{20}Z_{i0})$$

On itère le processus en posant: $\begin{array}{l} y_{i+1,0} = y_{i,2} \\ t_{i+1} = t_i + h \end{array}$

Dans les exemples suivants, nous appellerons cette formule D.P.2 (dérivation préalable de rang 2). La formule de rang 3 (D.P.3) correspond à l'algorithme suivant :

$$Y_i = Y(y_{i0}, t_i)$$

$$Z_{i0} = Z(y_{i0}, t_i)$$

$$y_{i1} = y_{i0} + h\theta_1 Y_i + \frac{h^2}{2}\theta_1^2 Z_{i0}$$

$$Z_{i1} = Z(y_{i1}, t_i + \theta_1 h)$$

$$y_{i2} = y_{i0} + h\theta_2 Y_i + \frac{h^2}{2}(B_{21}Z_{i1} + B_{20}Z_{i0})$$

$$Z_{i2} = Z(y_{i2}, t_i + \theta_2 h)$$

$$y_{i3} = y_{i0} + hY_i + \frac{h^2}{2}(B_{32}Z_{i2} + B_{31}Z_{i1} + B_{30}Z_{i0})$$

On itère le processus en posant: $\begin{array}{l} y_{i+1,0} = y_{i,3} \\ t_{i+1} = t_i + h \end{array}$

Il est facile d'écrire de même l'algorithme de la formule de rang 4.(D.P.4.)

1°/ $y' = y - 1{,}5e^{-0{,}5t}$; $y(0) = 1$ $\qquad h = 0{,}4$

t	Solution exacte	R.K. classique ZURMÜHL	D.P. 2	D.P. 3	Erreur RK. class. ×10⁶	Erreur D.P. 2 ×10⁶	Erreur D.P. 3 ×10⁶
0,4	0,818 731	0,818 700	0,818 739	0,818 731	-31	+8	0
0,8	0,670 320	0,670 248	0,670 341	0,670 320	-72	+21	0
1,2	0,548 812	0,548 683	0,548 849	0,548 812	-129	+37	0
1,6	0,449 329	0,449 121	0,449 389	0,449 329	-208	+60	0
2	0,367 879	0,367 555	0,367 974	0,367 879	-324	+95	0
2,4	0,301 194	0,300 698	0,301 338	0,301 194	-496	+144	0
2,8	0,246 597	0,245 847	0,246 815	0,246 596	-750	+218	-1
3,2	0,201 897	0,200 771	0,202 224	0,201 895	-1126	+327	-2
3,6	0,165 299	0,163 513	0,165 790	0,165 297	-1786	+491	-2
4	0,135 335	0,132 816	0,136 070	0,135 333	-2519	+735	-2
4,4	0,110 803	0,107 040	0,111 900	0,110 799	-3763	+1097	-4
4,8	0,090 718	0,085 101	0,092 356	0,090 712	-5617	+1638	-6

2°/ $y' = -2ty^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,2$

t	Solution exacte	R.K classique Zurmühl	D.P. 2	D.P. 3	Erreur RK class. $\times 10^6$	Erreur D.P. 2 $\times 10^6$	Erreur D.P. 3 $\times 10^6$
0,2	0,961 538 461	0,961 533	0,961 565	0,961 539 520	−5	+27	1,06
0,4	0,862 068 965	0,862 053	0,862 150	0,862 071 240	−16	+82	2,3
0,6	0,735 294 117	0,735 279	0,735 360	0,735 297 534	−15	+66	3,4
0,8	0,609 756 097	0,609 752	0,609 780	0,609 759 492	−4	+24	3,5
1	0,500 000 000	0,500 007	0,500 001	0,500 002 679	+7	+1	2,6
1,2	0,409 836 065	0,409 850	0,409 832	0,409 837 988	+14	−4	1,9
1,4	0,337 837 837	0,337 854	0,337 836	0,337 839 182	+17	−2	1,3
1,6	0,280 898 876	0,280 914	0,280 901	0,280 899 819	+16	+2	0,9
1,8	0,235 849 056	0,235 858	0,235 853	0,235 849 727	+9	+4	0,7
2	0,200 000 000	0,200 008	0,200 005	0,200 000 485	+8	+5	0,5

3°/ $y' = y - \frac{2t}{y}$ $\quad y(0) = 1 \quad h = 0,2$

t	Solution exacte	R.K. classique Zurmühl 4	D.P. 2 3	D.P. 3 4	Erreur R.K. class. $\times 10^6$	Erreur D.P. 2 $\times 10^6$	Erreur D.P. 3 $\times 10^6$
0,2	1,183 215 96	1,183 229 28	1,183 173 99	1,183 215 97	13	−42	+0,01
0,4	1,341 640 79	1,341 666 91	1,341 571 91	1,341 640 90	26	−69	+0,11
0,6	1,483 239 70	1,483 281 43	1,483 140 47	1,483 239 90	42	−99	+0,20
0,8	1,612 451 55	1,612 514 00	1,612 311 87	1,612 451 86	63	−139	+0,31
1,0	1,732 050 81	1,732 141 82	1,731 854 60	1,732 051 26	91	−196	+0,45
1,2	1,843 908 89	1,844 040 05	1,843 632 43	1,843 909 54	131	−276	+0,65
1,4	1,949 358 87	1,949 547 06	1,948 967 65	1,949 359 79	188	−391	+0,92
1,6	2,049 390 15	2,049 659 90	2,048 834 18	2,049 391 46	270	−556	+1,31
1,8	2,144 761 06	2,145 147 95	2,143 967 87	2,144 762 92	387	−793	+1,86
2,0	2,236 067 98	2,236 623 68	2,234 932 45	2,236 070 64	556	−1136	+2,66

Ces exemples confirment les prévisions de l'étude théorique. Les méthodes de Zurmühl et de dérivation préalable de rang 2, sont de précision sensiblement équivalente, et la méthode de dérivation préalable de rang 3, est de précision nettement supérieure à ces deux premières. Donc, si pour une équation $y' = Y(y,t)$ le calcul de $Z(y,t) = DY(y,t)$ exige un temps comparable à celui de $Y(y,t)$, au lieu de la méthode de Zurmühl, on a intérêt à utiliser: soit D.P.2, si à précision égale, on désire économiser du travail, soit D.P.3, si à travail égal, on désire augmenter la précision.

(D) FORMULE DE RANG 4

Nous essayons de vérifier les conditions sur les $B_{\alpha\beta}$ jusqu'en h^6 compris, avec q=4. Il sera certainement encore possible de satisfaire à une condition de l'ordre suivant; Ces conditions s'écrivent :

$$\mathrm{I}\begin{cases} B_{43}\,\theta_3 + B_{42}\,\theta_2 + B_{41}\,\theta_1 = \frac{1}{3} & h^3 \\ B_{43}\,\theta_3^2 + B_{42}\,\theta_2^2 + B_{41}\,\theta_1^2 = \frac{1}{6} & h^4 \\ B_{43}\,\theta_3^3 + B_{42}\,\theta_2^3 + B_{41}\,\theta_1^3 = \frac{1}{10} & h^5 \\ B_{43}\,\theta_3^4 + B_{42}\,\theta_2^4 + B_{41}\,\theta_1^4 = \frac{1}{15} & h^6 \\ B_{43}\,\theta_3^5 + B_{42}\,\theta_2^5 + B_{41}\,\theta_1^5 = \frac{1}{21} & h^7 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} B_{42}B_{21}\theta_1 + B_{43}B_{31}\,\theta_1 + B_{43}B_{32}\,\theta_2 = \frac{1}{30} & h^5 \\ B_{42}B_{21}\theta_1^2 + B_{43}B_{31}\,\theta_1^2 + B_{43}B_{32}\,\theta_2^2 = \frac{1}{90} & h^6 \\ B_{42}B_{21}\,\theta_2\theta_1 + B_{43}B_{31}\,\theta_3\theta_1 + B_{43}B_{32}\,\theta_3\theta_2 = \frac{1}{45} & h^6 \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\begin{cases} B_{43} + B_{42} + B_{41} + B_{40} = 1 & h^2 \\ B_{32} + B_{31} + B_{30} = \theta_3^2 \\ B_{21} + B_{20} = \theta_2^2 \end{cases}$$

Pour que I admette une solution, il faut que l'on ait:

$$-\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{3} + \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_3}{6} - \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{10} + \frac{1}{15} = 0$$

$$-\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{6} + \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_3}{10} - \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{15} + \frac{1}{21} = 0$$

Le système I admet alors la solution:

$$B_{41} = \frac{\frac{\theta_2\theta_3}{3} - \frac{\theta_2+\theta_3}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\,\theta_1}$$

$$B_{42} = \frac{\frac{\theta_1\theta_3}{3} - \frac{\theta_1+\theta_3}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_2-\theta_1)\,\theta_2}$$

$$B_{43} = \frac{\frac{\theta_1\theta_2}{3} - \frac{\theta_1+\theta_2}{6} + \frac{1}{10}}{(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)\theta_3}$$

Le système II fournit les valeurs de B_{21}, B_{31}, B_{32} :

$$B_{21} = \frac{1}{90\,B_{42}}\left(\frac{2-3\theta_3}{\theta_1(\theta_2-\theta_3)}\right)$$

$$B_{31} = \frac{1}{90\,B_{43}\times\theta_1}\left(3 - \frac{2-3\theta_3}{\theta_2-\theta_3} - \frac{1-3\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)$$

$$B_{32} = \frac{1}{90\,B_{43}}\left(\frac{1-3\theta_1}{\theta_2(\theta_2-\theta_1)}\right)$$

$$B_{40} = 1 - B_{41} - B_{42} - B_{43}$$

$$B_{30} = \theta_3^2 - B_{31} - B_{32}$$

$$B_{20} = \theta_2^2 - B_{21}$$

Nous disposons encore d'un coefficient arbitraire; Par exemple, si l'on choisit θ_3 , les autres coefficients $\theta_1, \theta_2, B_{\alpha\beta}$ sont alors bien déterminés. Nous essayerons donc de trouver θ_3 , compris entre 0 et 1, de façon à ce qu'on ait: $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$, $B_{\alpha\beta} \geq 0$. L'étude analytique étant trop inextricable, nous avons effectué à l'aide du calculateur électronique, un sondage systématique de l'intervalle (0,1) avec un pas de 0,01. La seule zone qui rende toutes les conditions ci-dessus satisfaites est: $0{,}62 \leq \theta_3 \leq 0{,}66$.
D'où le jeu de coefficients suivant:

$\theta_1 = \frac{1}{7}(3-\sqrt{2}) \# 0{,}226\ 540\ 919$; $\theta_2 = 1$; $\theta_3 = \frac{1}{7}(3+\sqrt{2}) \# 0{,}630\ 601\ 937$

$B_{43} = \frac{51-10\sqrt{2}}{120} \# 0{,}307\ 148\ 870$; $B_{42} = \frac{1}{60} \# 0{,}016\ 666\ 667$

$B_{41} = \frac{51+10\sqrt{2}}{120} \# 0{,}542\ 851\ 130$; $B_{40} = \frac{2}{15} \# 0{,}133\ 333\ 333$

$B_{32} = \frac{164\sqrt{2}-124}{7203} \# 0{,}014\ 984\ 176\ 6$; $B_{31} = \frac{626\sqrt{2}+1752}{7203} \# 0{,}366\ 138\ 788$

$B_{30} = \frac{92\sqrt{2}-11}{7203} \# 0{,}016\ 535\ 838\ 9$

$B_{21} = \frac{4-\sqrt{2}}{3} \# 0{,}861\ 928\ 812$; $B_{20} = \frac{\sqrt{2}-1}{3} = 0{,}138\ 071\ 187$

Nous nommerons cette formule D.P.4.F1 (Dérivation préalable de rang 4, formule 1) Une deuxième zone: $0,80 \leqslant \theta_3 \leqslant 0,84$ conduit à des jeux de coefficients tous positifs, sauf un, celui-ci ayant une valeur absolue faible, et tels que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ soient dans un ordre croissant et assez régulièrement répartis sur l'intervalle (0,1).

D'où la deuxième formule possible suivante: D.P.4 F2 -

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# 0,172\ 673\ 165 \ ; \quad \theta_2 = 0,5 \quad ; \theta_3 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# 0,827\ 326\ 835$$

$$B_{43} = \frac{49}{180}\left(1-\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# 0,094\ 010\ 945\ 2 \ ; \quad B_{42} = \frac{32}{90} \# 0,355\ 555\ 556$$

$$B_{41} = \frac{49}{180}\left(1+\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# 0,450\ 433\ 499 \ ; \quad B_{40} = 0,1$$

$$B_{32} = \frac{2}{21}\left(3+\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# 0,348\ 062\ 254 \ ; \quad B_{31} = \frac{1}{42}\left(7\sqrt{\tfrac{3}{7}}-3\right) \# 0,037\ 680\ 373\ 6$$

$$B_{30} = \frac{3+5\sqrt{\tfrac{3}{7}}}{21} \# 0,298\ 727\ 064$$

$$B_{21} = \frac{7}{96}\left(\sqrt{\tfrac{3}{7}}+3\right) \# 0,266\ 485\ 463 \ ; \quad B_{20} = \frac{1}{96}\left(3-7\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right) \# -0,016\ 485\ 463\ 4$$

Avec cette méthode, l'erreur est donc en h^7, et elle est minimisée. A coût égal, (5Hörner par pas si l'on suppose que le calcul des $Z_{i\beta}$ n'est pas plus long que celui des $Y_{i\beta}$), cette méthode est certainement meilleure qu'une méthode de Runge Kutta ordinaire de rang 5. Remarquons que pour la méthode de rang 6 (coûtant 6 Hörner par pas), proposée par Huta [11] , l'erreur est également en h^7 .

Exemples:

1° $y' = -2ty^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,2$

t	Solution exacte	Solution D.P. 3	Solution DP4 F1	Solution D.P.4 F2	Erreur D.P. 3 $\times 10^9$	Erreur DP4F1 $\times 10^9$	Erreur DP4F2 $\times 10^9$
0,2	0,961 538 461	0,961 539 520	0,961 538 400	0,961 538 530	1060	−61	+69
0,4	0,862 068 965	0,862 071 240	0,862 068 856	0,862 069 045	2275	−109	+80
0,6	0,735 294 117	0,735 297 534	0,735 294 185	0,735 294 154	3417	+68	+37
0,8	0,609 756 097	0,609 759 492	0,609 756 277	0,609 756 100	3395	+180	+3
1	0,500 000 000	0,500 002 679	0,500 000 189	0,499 999 991	2679	+189	−9
1,2	0,409 836 065	0,409 837 988	0,409 836 228	0,409 836 055	1923	+163	−10
1,4	0,337 837 837	0,337 839 182	0,337 837 971	0,337 837 830	1345	+134	−7
1,6	0,280 898 876	0,280 899 819	0,280 898 983	0,280 898 871	943	+107	−5
1,8	0,235 849 056	0,235 849 727	0,235 849 141	0,235 849 053	671	+85	−3
2	0,200 000 000	0,200 000 485	0,200 000 067	0,199 999 998	485	+67	−2

2/ $y' = y - \frac{2t}{y}$; $y(0) = 1$ $h = 0,2$.

t	Solution exacte	Solution D.P.3	Solution D.P.4 F1	Solution D.P.4 F2	Erreur D.P.3 $\times 10^8$	Erreur D.P.4 F1 $\times 10^8$	Erreur D.P.4 F2 $\times 10^8$
0,2	1,183 215 96	1,183 215 97	1,183 215 94	1,183 215 93	1	-2	-3
0,4	1,341 640 79	1,341 640 90	1,341 640 77	1,341 640 74	11	-2	-5
0,6	1,483 239 70	1,483 239 90	1,483 239 67	1,483 239 63	20	-3	-7
0,8	1,612 451 55	1,612 451 86	1,612 451 51	1,612 451 45	31	-4	-10
1	1,732 050 81	1,732 051 26	1,732 050 75	1,732 050 67	45	-6	-14
1,2	1,843 908 89	1,843 909 54	1,843 908 81	1,843 908 69	65	-8	-20
1,4	1,949 358 87	1,949 359 79	1,949 358 75	1,949 358 58	92	-12	-29
1,6	2,049 390 15	2,049 391 46	2,049 389 98	2,049 389 74	131	-17	-41
1,8	2,144 761 06	2,144 762 92	2,144 760 81	2,144 760 46	186	-25	-60
2	2,236 067 98	2,236 070 64	2,236 067 62	2,236 067 12	266	-36	-86

Ces exemples ne permettent pas de comparer avec assurance, les formules D.P.4 F1 et D.P.4 F2. Il est assez vraisemblable qu'elles se valent en moyenne; mais toutes deux donnent de meilleurs résultats que la méthode de dérivation préalable de rang 3.

Remarques.

Si l'on applique le processus plus général décrit au ch.III (Runge Kutta double) à une équation du premier ordre $y' = Y(y,t)$ on obtient l'algorithme suivant:

$$y_{i\alpha} = y_{i0} + h \sum_{\beta<\alpha} A_{\alpha\beta} Y_{i\beta} + \frac{h^2}{2} \sum_{\beta<\alpha} A'_{\alpha\beta} Z_{i\beta}$$

$$Z(y,t) = DY(y,t) = Y'_y Y + Y'_t$$

$$Y_{i\beta} = Y(y_{i\beta}, t_i + \theta_\beta h)$$

$$Z_{i\beta} = Z(y_{i\beta}, t_i + \theta_\beta h)$$

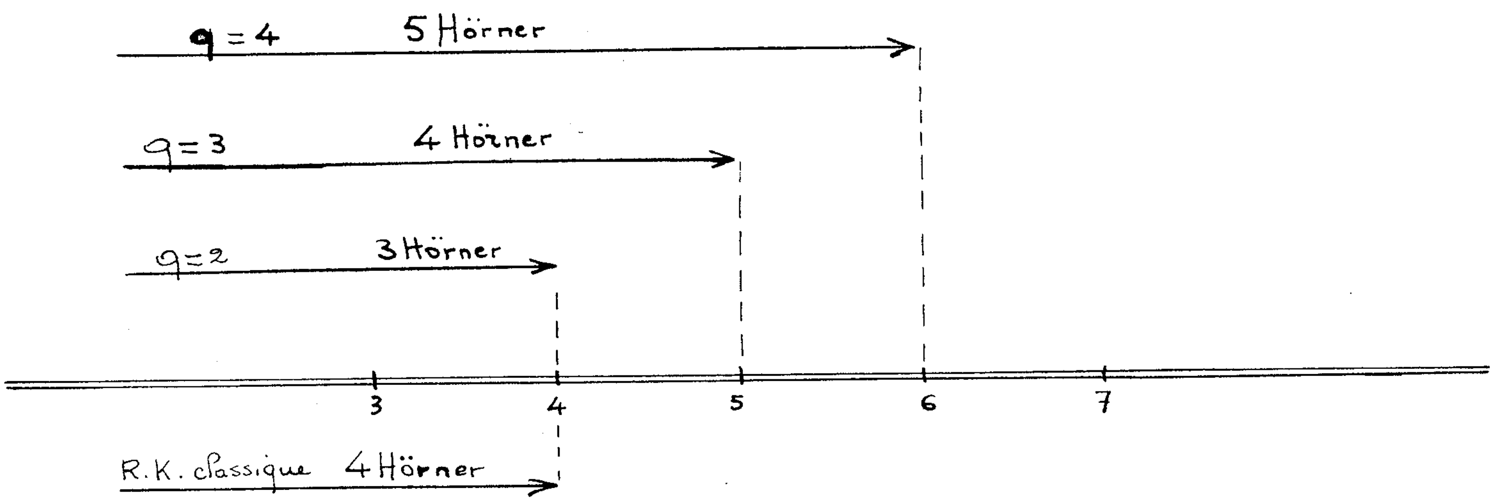
L'identification avec la série de Taylor aboutit à un certain nombre de conditions sur les $A_{\alpha\beta}$, $A'_{\alpha\beta}$, θ_α du type décrit en IIIA (voir [2]). Si l'on décide de choisir a priori $A_{\alpha\beta} = 0$ si $\beta \neq 0$; $A_{\alpha 0} = \theta_\alpha$, on obtient l'algorithme général du procédé de dérivation préalable. (Les coefficients $A'_{\alpha\beta}$ jouent alors le rôle des coefficients $B_{\alpha\beta}$). L'ensemble des conditions sur les $A_{\alpha\beta}, A'_{\alpha\beta}, \theta_\alpha$ se simplifie et l'on aboutit à des conditions sur les $A'_{\alpha\beta}, \theta_\alpha$ identiques à celles sur les $B_{\alpha\beta}, \theta_\beta$ pour l'équation du second ordre ne contenant pas de dérivée première dans le second membre (Ch.IC).

Le procédé de dérivation préalable appliqué à des équations du premier ordre, étant donc un aspect particulier du procédé de Runge Kutta double, ce dernier est au moins capable de conduire à d'aussi bons résultats (voir [2]).

TABLEAU RÉCAPITULATIF

$$y' = Y(y,t)$$

Méthodes du ch. IV



La flèche indique l'ordre atteint.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBRECHT Julius

Beiträge zum Runge-Kutta Verfahren- Z.A.M.M.35 (1955) pp 100-110.

[2] BARD Antoine

Méthodes du type Runge-Kutta utilisant des dérivées d'ordre supérieur. thèse en préparation.

[3] BIEBERBACH L.

On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations. Z.A.M.P.2 (1951) pp 233-248.

[3bis] BUKOVICS E.

Beiträge zur numerischen Integration III. Mh.Math.58 (1954) pp 258-265.

[4] CARR John W.

Error bounds for the Runge-Kutta single step integration process. J.Assoc.Comput.Mach.5 (1958) pp 39-44.

[5] COLLATZ

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer Verlag Berlin, Göttingen und Heidelberg (1951)

[6] CONTE S.D.

A Kutta third order procedure for solving differential equations requiring minimum storage.J.assoc.comput.Mach.3 (1956) pp 22-25.

[7] ELTERMANN Heinz

Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math.Z.62 (1955) pp 469-501.

[8] FALKNER MV.

A Method of numerical Solution of differential Equations. Philmag.(7)21 (1936) pp 621-640

[8bis] FEHLBERG Erwin

Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta Verfahren. Z.A.M.M. (1958) -38- (pp 421 -426).

[9] GAUTSCHI Walter

Über den Fehler des Runge-Kutta Verfahrens für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Z.A.M.P.6 (1955) pp 456-461.

[10] HUTA A.

Contribution à la formule de 6ème ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström. Acta Fac. Nat.Univ.Comenian. Math.2 (1957) pp 21-24.

[11] HUTA A.

Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre. Acta Fac. Nat.Univ.Comenian.Math.1 (1956) pp 201-224.

[12] IONESCU D.W.

Généralisation d'une propriété qui intervient dans la méthode de Runge-Kutta d'intégration numérique des équations différentielles. Acad.R.P.Romine.Bul.Sti. Sect. Sti Mat.Fiz.8 (1956) pp 67-100.

[13] KUNTZMANN J.

Remarques sur la méthode de Runge-Kutta. C.R.Acad.Sci.Paris 242 (1956) pp 2221-2223.

[14] KUNTZMANN J.

Deux formules optimales du type de Runge-Kutta. Chiffres 2 (1959) pp 21-26.

[15] KUNTZMANN J.

Evaluation de l'erreur sur un pas dans les méthodes à pas séparés. Chiffres 2 (1959) pp 97-102.

[16] KUNTZMANN J.

Cours d'analyse numérique de la Faculté des Sciences de Grenoble.

[17] LEMAITRE

Interpolations dans la méthode de Runge-Kutta. Ann.Soc.Sci. Bruxelles 61 (1947) pp 106-107.

[18] LOTKIN M.

On the Accuracy of Runge-Kutta's Method. M.T.A.C.5 (1951) (pp 128-133).

[19] MARTIN D.W.

Runge-Kutta methods for integrating differential equations on high speed digital computers. Comp.J. 1 (1958) pp 118-123.

[20] MILNE

Note on the Runge-Kutta Method. NBS (1950) Vol 44 (p 549).

[21] MOREL Henri

Evaluation de l'erreur sur un pas dans la méthode de Runge-Kutta. C.R. Acad.Sci.Paris 243 (1956) pp 1999-2002.

[22] NYSTRÖM J.E.

Über die numerische Integration von Differentialgleichungen. Acta Soc.Sci. fennicae 50, Nr 13 (1925) pp 1-55.

[23] QUADE W.

Grundsätzliches zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Z.A.M.M.30 (1950) (pp 276-278)

[24] RUTISHAUSER Heinz

Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Z.A.M.P.6 (1955) (pp 497-498).

[25] VOGELAIRE René de,

A method for the numerical integration of differential equations of second order without explicit first derivatives. J.Res. N.B.S, Vol 54 (1955) (pp 119-124).

[26] ZURMÜHL R.

Runge-Kutta Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Z.A.M.M.28 (1948) (pp 173-182).

[27] ZURMÜHL R.

Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. Z.A.M.M. 1940.

[28] ZURMÜHL R.

Runge-Kutta Verfahren unter Verwendung höherer Ableitungen. Z.A.M.M. 32 (1952) (pp 153-154).

VU:

Grenoble le
Le Président de la Thèse

VU:

Grenoble le
Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer:

Grenoble le
Le Recteur de l'Académie de Grenoble