



HAL
open science

Sur le calcul des pièces coniques de révolution travaillant à la flexion

Min-Yuan Ma

► **To cite this version:**

Min-Yuan Ma. Sur le calcul des pièces coniques de révolution travaillant à la flexion. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1956. Français. NNT: . tel-00277384

HAL Id: tel-00277384

<https://theses.hal.science/tel-00277384>

Submitted on 6 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir
le Titre d'Ingénieur-Docteur

par

MA Min-Yuan

Licencié ès-sciences mathématiques

Ingénieur I.E.G.

1ère T H E S E : SUR LE CALCUL DES PIECES CONIQUES DE
REVOLUTION TRAVAILLANT A LA FLEXION

2ème T H E S E : SUR LA DETERMINATION DES VITESSES
CRITIQUES ET DES PULSATIONS PROPRES
D'UN ARBRE TOURNANT A SECTION CIRCULAIRE

Soutenues le Juin 1956 devant la Commission d'Examen

M. FORTRAT

Président

MM. KRAVTCHENKO
GALLISSOT

Examineurs

T H E S E S

PRESENTEES

**A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE**

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGENIEUR-DOCTEUR

PAR

MA min-yuan

Licencié es-sciences mathématiques

Ingénieur I.E.G.

-:-

**1^{re} T H E S E : SUR LE CALCUL DES PIECES CONIQUES DE
REVOLUTION TRAVAILLANT A LA FLEXION**

**2^e T H E S E : SUR LA DETERMINATION DES VITESSES
CRITIQUES ET DES PULSATIONS PROPRES
D'UN ARBRE TOURNANT A SECTION CIRCULAIRE**

-:-

Soutenues le 26 Juin 1956, devant la Commission d'Examen.

MM. FORTRAT	<i>Président</i>
KRAVTCHENKO	<i>Examineurs</i>
GALLISSOT	

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

Doyens Honoraires

MM. GAU : Recteur de l'Académie d'Alger
FORTRAT : Correspondant de l'Institut

Doyen

M. MORET, Correspondant de l'Institut

Professeurs honoraires

MM. FAVARD, Professeur à la Sorbonne
FORTIER, Professeur à la Sorbonne
BRELOT, Professeur à la Sorbonne
DE LITARDIERE, Correspondant de l'Institut
ESCLANGON, Professeur à la Sorbonne

Professeurs

MM. FORTRAT : Physique Générale, Correspondants de l'Institut	MM. BENOIT : Radio-Électricité
✓ MORET : Géologie et Mineralogie, Correspondant de l'Institut	CHENE : Chimie papetière
ANDRIEUX : Chimie, Correspondant de l'Institut	NOBLECOURT : Micrographie papetière
NEEL : Physique expérimentale, Membre de l'Institut	WEIL : Physique
CHABAUTY : Calcul différentiel et intégral	FELICI : Physique
PARDE : Hydrologie fluviale	KUNTZMANN : Analyse appliquée
DORIER : Zoologie	DODERO : Electrochimie et Electrometallurgie
HEILMANN : Chimie	SANTON : Mécanique des fluides
KRAVTCHEKOV : Mécanique rationnelle	BARBIER : Géologie appliquée
	OZENDA : Botanique
	FALLOT : Physique

Professeurs sans chaire

MM. REGLOS : Physique	MM. CALVANI : Mathématiques
TRAYNARD : Chimie	REEB : Mathématiques
SILBER : Mécanique des fluides	

Maîtres de Conférences Honoraires

MM. OFFNER : Botanique
CASTEX : Essais Electriques

Maîtres de Conférences

MM. SOUTIF : Physique	MM. GALLISSOT : Mécanique
CRAYA : Mécanique	MOUSSEGT : Physique
Mlle LUTZ : Mathématiques	BONNIER : Chimie
MM. AYANT : Physique	BOUCHEZ : Physique Nucléaire
MICHEL : Géologie	

Secrétaire Principal : M. GRENIER

Secrétaire : M. EICHET

1^{re} THESE

SUR LE CALCUL DES PIECES CONIQUES DE REVOLUTION

TRAVAILLANT A LA FLEXION

AVANT-PROPOS

Les pièces coniques de révolution se rencontrent dans tellement de réalisations industrielles qu'il est inutile de les énumérer.

Le calcul de ces pièces travaillant à la flexion a donné lieu à de nombreuses études théoriques parmi lesquelles nous citons spécialement celles de MEISSNER, DUBOIS, WENK et TAYLOR, sans parler des Traités d'Elasticité de LOVE, L'HERMITE, et FLÜGGE.

Une lecture superficielle de ces études pourrait faire croire que le calcul des pièces coniques à épaisseur constante travaillant à la flexion est entièrement résolu, c'est-à-dire mis sous une forme utilisable pour les bureaux d'étude industriels.

Il nous a semblé qu'il n'en était pas ainsi et que les processus indiqués par ces auteurs conduisaient le plus souvent à des calculs extrêmement longs et coûteux, même pour ceux qui disposent de machines à calculer et quelquefois même nécessitaient l'élaboration de tables numériques nouvelles, a priori, difficiles à établir.

C'est sans doute la raison pour laquelle des bureaux d'études, même d'un standing mathématique élevé, continuent à calculer ce genre de pièces par des approximations assez grossières vérifiées ou non par des essais.

Nous avons essayé d'élargir l'oeuvre accomplie depuis ces quarante dernières années en conciliant la rigueur mathématique nécessaire en la matière et les facilités d'utilisation exigées par les praticiens.

Bien entendu, nous avons été amenés à exposer à nouveau dans les premiers chapitres de notre étude certains résultats déjà connus.

En poursuivant les calculs littéraux pour éclairer les phénomènes physiques, nous en avons déduit successivement les formules pratiques des coefficients d'influence pour les quasi-plaques circulaires d'une part et pour les quasi-cylindres d'autre part. Nous en avons même indiqué leur domaine d'application. A la fin de notre étude, nous avons montré comment on peut même trouver, à partir des formules pratiques des coefficients d'influence des quasi-cylindres, des formules applicables pour les cônes complets. Et la comparaison de ces dernières avec les résultats obtenus récemment par MM. TAYLOR et WENK montre que nos formules donnent des précisions très grandes.

Commencé en 1953 à des fins purement industrielles, ce travail a débuté dans le cadre de notre activité d'Ingénieur aux Etablissements NEYRPIC à GRENOBLE. M. ESCLANGON, Professeur à la Sorbonne, a bien voulu

y voir le sujet d'une thèse et assumer la direction de nos recherches. Nous lui devons beaucoup, tant pour les directives qu'il nous a données que pour nous avoir introduit auprès des Maîtres de l'Université de GRENOBLE dont les critiques et les conseils judicieux nous ont été si profitables. Nous leur en exprimons ici notre reconnaissance et nos remerciements. Et nous remercions tout spécialement M. FORTRAT, Correspondant de l'Institut de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté la présidence de la Commission d'examen.

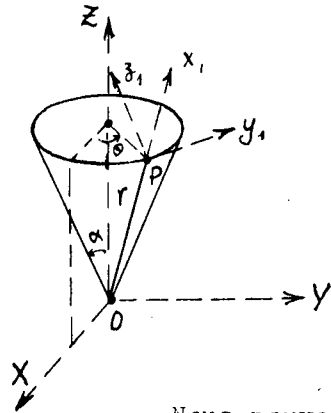
M. ESCLANGON avait eu la bienveillante intention d'assister à la soutenance. Sa tragique disparition nous prive du plaisir et de l'honneur de sa présence. En signe de gratitude, nous nous permettons de dédier ce travail à sa mémoire.

Le développement mathématique nécessité par ce travail - en tant que thèse - a dépassé nos prévisions initiales et nous a parfois imposé des calculs qui peuvent paraître longs et arides, mais dont le résultat - du moins j'ose l'espérer - doit être très souvent d'épargner ces difficultés mêmes à l'Ingénieur. La Direction des Etablissements NEYRPIIC a largement partagé ce point de vue. Elle nous a accordé tout le temps nécessaire pour conduire ce travail à son terme et nous a autorisé à le présenter comme thèse, ce dont nous la remercions profondément.

Nous profitons de cette occasion pour remercier spécialement M. ANGLÈS d'AURIAC, Ingénieur aux Etablissements NEYRPIIC et chargé de Conférences à la Faculté des Sciences des conseils et des encouragements, qu'il nous a constamment donnés.

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DES CONES
ET LEUR INTEGRATION

Considérons une enveloppe mince de révolution, d'épaisseur constante h , dont la surface moyenne est un cône de sommet O , d'ouverture 2α et d'axe vertical OZ dirigé en sens inverse de la pesanteur. En prenant un trièdre trirectangle direct $OXYZ$ comme référence, un point P de la surface moyenne sera réperé par les coordonnées :



$$\begin{cases} r = OP \\ \theta \end{cases}$$

θ étant l'angle trigonométrique que fait le plan ZOP avec le plan XOZ . Au point P , nous prenons un trièdre trirectangle direct local $Px_1y_1z_1$, tel que :

- Px_1 est dirigé vers les r croissants
- Py_1 est dirigé vers les θ croissants.

Nous pouvons alors exprimer les déplacements du point P dans $OXYZ$ par les quantités u, v, w rapportées au trièdre $Px_1y_1z_1$.

Dans le cas où la charge appliquée sur l'enveloppe admet tout plan passant par OZ comme plan de symétrie, c'est-à-dire celui que nous nous proposons d'étudier, on sait qu'il n'y a pas de phénomène de torsion et que

$$v = 0$$

Les déformations caractéristiques en P à savoir :

- ϵ_1 : l'élongation le long de Px_1
- ϵ_2 : l'élongation le long de Py_1

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1(1+\epsilon_1)} : \text{variation de la courbure due à la flexion le long de } Px_1$$

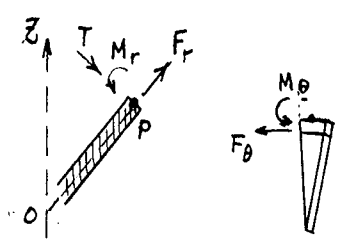
$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2(1+\epsilon_2)} : \text{variation de la courbure due à la flexion le long de } Py_1$$

sont liées aux déplacements u, w par les relations suivantes* :

* Nous supposons dans cette étude qu'il s'agit de petites déformations.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \frac{du}{dr} \\ \epsilon_2 = \frac{u}{r} - \frac{w}{rtg\alpha} \\ \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_1(1+\epsilon_1)} = \frac{d^2w}{dr^2} \\ \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_2(1+\epsilon_2)} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \end{array} \right.$$

En adoptant les notations usuelles des Ingénieurs, désignons par : (Voir figure ci-contre)



- F_r, F_θ : les tractions (par unité de longueur) dans la direction Px_1, Py_1
- $-M_r, M_\theta$: les moments de flexion (par unité de longueur) le long de Py_1, Px_1
- $-T$: l'effort tranchant (par unité de longueur) selon Pz_1 .

Nous avons alors, d'après le principe de la résistance des matériaux,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} F_r = \frac{Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_1 + \eta\epsilon_2) = \frac{Eh}{1-\eta^2} \left[\frac{du}{dr} + \eta \left(\frac{u}{r} - \frac{w}{rtg\alpha} \right) \right] \\ F_\theta = \frac{Eh}{1-\eta^2} (\eta\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{Eh}{1-\eta^2} \left[\eta \frac{du}{dr} + \left(\frac{u}{r} - \frac{w}{rtg\alpha} \right) \right] \\ M_r = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1(1+\epsilon_1)} \right) + \eta \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2(1+\epsilon_2)} \right) \right] = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left(\frac{d\psi}{dr} + \eta \frac{\psi}{r} \right) \\ M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left[\eta \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1(1+\epsilon_1)} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2(1+\epsilon_2)} \right) \right] = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left(\eta \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right) \end{array} \right.$$

où :

$$(3) \quad \psi = \frac{dw}{dr}$$

et

- η : le coefficient de Poisson
- E : le module de Young

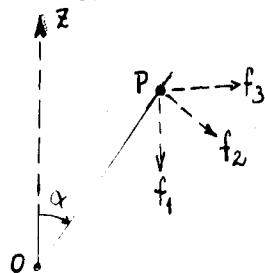
A propos des forces extérieures agissant sur les éléments courants de l'enveloppe conique, les cas à considérer sont très nombreux. Mais ceux qui intéressent particulièrement l'industrie sont les suivants : poids propre de l'enveloppe, charge hydrostatique, et enfin, force centrifuge lorsque l'enveloppe tourne autour de son axe de révolution. Ainsi, en désignant par :

- p : le poids spécifique du matériau constituant l'enveloppe
- ω : la vitesse angulaire de rotation
- q : la pression hydrostatique en P
- q_0 : la pression hydrostatique en O
- δ : le poids spécifique de l'eau.

On a alors :

$$q = q_0 - \delta \cdot \cos \alpha \cdot r$$

Sur l'élément de l'enveloppe contenant le point P et défini par $dr, d\theta$, ces trois catégories de forces extérieures sont situées dans le plan ZOP et ont respectivement pour valeur :



$$f_1 = p h r \sin \alpha \cdot d\theta \cdot dr$$

$$f_2 = (q_0 - \delta \cdot r \cdot \cos \alpha) \cdot r \sin \alpha \cdot d\theta \cdot dr$$

$$f_3 = p h r \cdot \sin \alpha \cdot d\theta \cdot dr \cdot \frac{\omega^2 r \sin \alpha}{g}$$

g : l'accélération de la pesanteur;

les composantes de leur résultante dans le trièdre $Px_1y_1z_1$ sont alors :

$$\left[- p h r \cos \alpha + p h \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{g} \right] \sin \alpha \cdot d\theta \cdot dr$$

0

$$\left[- p h r \sin \alpha - (q_0 - \delta r \cos \alpha) r - p h \frac{\omega^2 r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right] \sin \alpha \cdot d\theta \cdot dr$$

ainsi on trouve finalement, en écrivant les équations d'équilibre en P, les relations suivantes :

$$(4) \begin{cases} \frac{d(rF_r)}{dr} - F_\theta - p h r \cdot \cos \alpha + p h \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{g} = 0 \\ - \frac{d(rT)}{dr} + F_\theta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - p h r \sin \alpha - (q_0 r - \delta r^2 \cos \alpha) - p h \frac{\omega^2 r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 0 \\ - M_\theta + \frac{d(rM_r)}{dr} - rT = 0 \end{cases}$$

Et (2), (3), (4) forment un système de 6 équations à 6 inconnues : $F_r, F_\theta, T, M_r, M_\theta, \varphi, u, w$.

Or, des deux premières équations de (4), on déduit :

$$r F_\theta - \eta r F_r = E h \left(u - \frac{w}{\tan \alpha} \right)$$

puis des deux dernières équations de (2) :

$$M_{\theta} - \eta M_r = \frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\varphi}{r};$$

et enfin, des deux premières équations de (4), on déduit en intégrant :

$$(5) \quad rF_r - rT \cdot \text{tg}\alpha - \frac{ph r^2}{2\cos\alpha} - \left(\frac{q_0 r^2}{2} - \frac{\delta r^3}{3} \cos\alpha \right) \cdot \text{tg}\alpha = K$$

avec K, constante d'intégration. Ces trois relations ainsi trouvées sont des relations intrinsèques du calcul des cônes.

En éliminant $F_r, F_{\theta}, M_{\theta}, M_r$, on voit que le système se réduit à :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Eh}{\text{tg}\alpha} \frac{du}{dr} = -\eta \frac{d(rT)}{dr} + \frac{(rT)}{r} + ph \frac{r}{2\sin\alpha} (1-2\eta\sin^2\alpha) + \frac{q_0 r}{2} (1-2\eta) - \frac{\delta r^2}{3} \cos\alpha (1-3\eta) \\ \quad - \eta ph \frac{r^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} + \frac{K}{r \text{tg}\alpha} \\ \frac{Eh}{\text{tg}\alpha} \left(u - \frac{w}{\text{tg}\alpha} \right) = r \frac{d(rT)}{dr} - \eta (rT) + \frac{ph r^2}{2\sin\alpha} (\cos^2\alpha - \eta) + \frac{q_0 r^2}{2} (2-\eta) - \frac{\delta r^3}{3} \cos\alpha (3-\eta) \\ \quad + ph \frac{r^3 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} - \eta \frac{K}{\text{tg}\alpha} \\ \frac{dw}{dr} = \varphi \\ r \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} (rT) = 0 \end{array} \right.$$

et en éliminant ensuite u, w dans (6), le système considéré se réduit définitivement à :

$$(7) \quad \frac{dw}{dr} = \varphi$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} (rT) = 0 \\ r \frac{d^2(rT)}{dr^2} + \frac{d(rT)}{dr} - \frac{(rT)}{r} + \frac{Eh}{\text{tg}^2\alpha} \varphi - \frac{Phr}{2\sin\alpha} [3-2(2+\eta)\cos^2\alpha] - \frac{3}{2} q_0 r + \frac{8\delta r^2}{3} \cos\alpha \\ \quad - (3+\eta) ph \frac{r^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} + \frac{K}{r \text{tg}\alpha} \end{array} \right.$$

....

Avant d'entreprendre l'intégration de ce système, nous faisons les deux remarques suivantes :

1°) la plupart des livres d'élasticité et de la résistance des matériaux ne donnent à la place de (8) que les équations sans second membre. Et notre étude comble cette lacune.

2°) Vu les difficultés qu'entraîne l'intégration de (8) même sans second membre, beaucoup de chercheurs ont fait des approximations sur (8) pour le simplifier. Ces simplifications consistent à prendre, à la place de (8) sans second membre, le système :

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} (rT) = 0$$

$$r \frac{d^2 (rT)}{dr^2} + \frac{d(rT)}{dr} + \frac{Eh}{tg^2 \alpha} \varphi = 0$$

ou le système

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} (rT) = 0$$

$$r \frac{d^2 (rT)}{dr^2} + \frac{Eh}{tg^2 \alpha} \varphi = 0$$

Or ce genre de simplification de (8) entraîne des modifications importantes dans les systèmes d'équations de départ (2) que les hypothèses de l'élasticité et de la résistance de matériaux ne sauraient admettre. Et de plus il nous a été signalé que ces approximations ne sont même pas justifiables dans des cas concrets au point de vue mathématique, et physiquement ces approximations comportent des erreurs non négligeables aux conditions à la limite, par exemple sur φ .

Pour résoudre ce système, nous posons avec A. Love*

$$2r = x^2$$

$$dr = x dx$$

....

* Voir A. LOVE - The mathematical theory of Elasticity, 4^e édit. 1927, p.592

les deux équations de (8) deviennent alors :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\varphi}{x^2} - \frac{24(1-\eta^2)}{Eh^3} (rT) = 0 \\ \frac{d^2 (rT)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d(rT)}{dx} - \frac{4(rT)}{x^2} + \frac{2Eh}{t\theta^2 \alpha} \varphi = \frac{4K}{x^2 t\theta^2 \alpha} - ph \frac{x^2}{\sin \alpha} \left[\frac{3}{2} - (2+\eta) \cos^2 \alpha \right] - \frac{3q_0}{2} x^2 \\ + \frac{4\theta}{3} x^4 \cos \alpha - \frac{3+\eta}{2} ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} x^4 \end{cases}$$

De même avec **A. Love**, nous cherchons la solution générale du système homogène déduit de (9), en posant :

$$\lambda = \sqrt{\frac{4}{h^2 t\theta^2 \alpha} \frac{12(1-\eta^2)}{24(1-\eta^2)}}$$

$$\theta = k\lambda x$$

$$\varphi = Z_2(\theta)$$

où Z_2 une fonction de **Bessel** d'ordre 2 satisfaisant à :

$$\frac{d^2 Z_2}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{dZ_2}{d\theta} + \left(1 - \frac{4}{\theta^2}\right) Z_2 = 0 ;$$

nous trouvons que :

$$rT = - \frac{Eh^3 k^2 \lambda^2}{24(1-\eta^2)} Z_2(\theta) \quad (10)$$

La constante k doit satisfaire à :

$$\frac{Eh^3 k^4 \lambda^4}{24(1-\eta^2)} + \frac{2Eh}{t\theta^2 \alpha} = 0$$

c'est-à-dire :

$$k^4 = -4$$

$$k = \pm (1+i) , \pm (1-i) ; i = \sqrt{-1}$$

En désignant par $J(\theta)$ les fonctions de **Bessel** de première espèce ; $Y(\theta)$ celles de seconde espèce d'après **Weber**, et

$$k_1 = 1+i , k_2 = 1-i$$

on voit que $J_2(k_1 \lambda x)$, $Y_2(k_1 \lambda x)$, $J_2(k_2 \lambda x)$, $Y_2(k_2 \lambda x)$ sont indépendantes et forment un système complet des équations homogènes déduites de (9). Donc on a les résultats bien connus* :

* voir **A. LOVE** : Mathematical theory of Elasticity

$$\psi = A J_2(k_1 \lambda x) + B Y_2(k_1 \lambda x) + C J_2(k_2 \lambda x) + D Y_2(k_2 \lambda x)$$

$$rT = \frac{12h}{\lambda^2 t g^2 a} [-A J_2(k_1 \lambda x) - B Y_2(k_1 \lambda x) + C J_2(k_2 \lambda x) + D Y_2(k_2 \lambda x)]$$

où A, B, C, D sont des constantes d'intégration.

E. Meissner a indiqué en 1913 quelques unes des solutions particulières du système d'équations (E)*.

Quant à nous, nous nous proposons de chercher les solutions particulières du système (J) avec second nombre par la méthode de variation des constantes qui est, au point de vue théorique, plus systématique.

Ainsi, en posant, pour simplifier les écritures :

$$a = \frac{4\delta}{3} \cos \alpha - \frac{3+\eta}{2} ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$b = -\frac{ph}{\sin \alpha} \left[\frac{3}{2} - (2+\eta) \cos^2 \alpha \right] - \frac{3q_0}{2}$$

$$c = \frac{4k}{t g^2 a}$$

le système (J) s'écrit alors :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} - \frac{4q}{x^2} - \frac{24(1-\eta^2)}{Lh^3} (rT) = 0 \\ \frac{d^2 (rT)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d(rT)}{dx} - \frac{4(rT)}{x^2} + \frac{2Eh}{t g^2 a} \psi = ax^4 + bx^2 + \frac{c}{x^2} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} J_2(k_1 \lambda x) + \frac{dB}{dx} Y_2(k_1 \lambda x) + \frac{dC}{dx} J_2(k_2 \lambda x) + \frac{dD}{dx} Y_2(k_2 \lambda x) &= 0 \\ -\frac{dA}{dx} J_2(k_1 \lambda x) - \frac{dB}{dx} Y_2(k_1 \lambda x) + \frac{dC}{dx} J_2(k_2 \lambda x) + \frac{dD}{dx} Y_2(k_2 \lambda x) &= 0 \end{aligned}$$

le système (10) devient :

$$\begin{aligned} -k_1 \lambda \left[\frac{dA}{dx} J_2'(k_1 \lambda x) + \frac{dB}{dx} Y_2'(k_1 \lambda x) \right] + k_2 \lambda \left[\frac{dC}{dx} J_2'(k_2 \lambda x) + \frac{dD}{dx} Y_2'(k_2 \lambda x) \right] &= \frac{\lambda^2 t g^2 a}{Lh} [ax^4 + bx^2 + \frac{c}{x^2}] \\ k_1 \lambda \left[\frac{dA}{dx} J_2'(k_1 \lambda x) + \frac{dB}{dx} Y_2'(k_1 \lambda x) \right] + k_2 \lambda \left[\frac{dC}{dx} J_2'(k_2 \lambda x) + \frac{dD}{dx} Y_2'(k_2 \lambda x) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Comme on a : **

* voir MEISSNER : Das Elastizitätsproblem. Physik. Zeitschr. Bd 17, 1913
 ** voir WALTON : A treatise on the theory of BESSEL Functions, p. 70, 1944

$$J_2(\theta) \cdot Y_2'(\theta) - J_2'(\theta) \cdot Y_2(\theta) = \frac{2}{\pi\theta}$$

on déduit facilement des 4 dernières équations que :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{\pi\lambda^2 t \xi^2 \alpha}{4 i L h} [ax^5 + bx^3 + \frac{c}{x}] Y_2(k_1\lambda x) \\ \frac{dB}{dx} &= - \frac{\pi\lambda^2 t \xi^2 \alpha}{4 i L h} [ax^5 + bx^3 + \frac{c}{x}] J_2(k_1\lambda x) \\ \frac{dC}{dx} &= - \frac{\pi\lambda^2 t \xi^2 \alpha}{4 i L h} [ax^5 + bx^3 + \frac{c}{x}] Y_2(k_2\lambda x) \\ \frac{dD}{dx} &= \frac{\pi\lambda^2 t \xi^2 \alpha}{4 i L h} [ax^5 + bx^3 + \frac{c}{x}] J_2(k_2\lambda x) \end{aligned}$$

On voit ainsi que la recherche de la solution particulière de (10) consiste à calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{Z_2(\theta)}{\theta} d\theta$$

$$\int \theta^3 \cdot Z_2(\theta) d\theta$$

$$\int \theta^5 \cdot Z_2(\theta) d\theta$$

où Z désigne une fonction de **Bessel**.

Or, il est très facile de trouver que :

$$\frac{d}{d\theta} [\theta^n Z_n(\theta)] = \theta^{n-1} Z_{n-1}(\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} [\theta^{-n} Z_n(\theta)] = -\theta^{-n-1} Z_{n+1}(\theta)$$

$$\int \frac{Z_2(\theta)}{\theta} d\theta = -\frac{Z_1(\theta)}{\theta}$$

$$\int \theta^3 Z_2(\theta) d\theta = \theta^3 \cdot Z_3(\theta)$$

$$\int \theta^5 Z_2(\theta) d\theta = \theta^5 Z_3(\theta) - 2\theta^4 Z_4(\theta)$$

Ce qui montre que la solution particulière du (10) est définie par :

$$A = \frac{\pi\lambda^2 t \xi^2 \alpha}{4 i L h} \left[a \frac{1}{(k_1\lambda)^6} \{ (k_1\lambda x)^5 Y_5(k_1\lambda x) - 2(k_1\lambda x)^4 Y_4(k_1\lambda x) \} + b \frac{1}{(k_1\lambda)^4} \{ (k_1\lambda x)^3 Y_3(k_1\lambda x) \} - c \frac{Y_1(k_1\lambda x)}{k_1\lambda x} \right]$$

....

$$B = -\frac{\pi\lambda^2 t_0^2 \alpha}{4 i E h} \left\{ a \frac{1}{(k_1\lambda)^6} [(k_1\lambda x)^5 J_3(k_1\lambda x) - (k_1\lambda x)^4 J_4(k_1\lambda x)] + b \frac{1}{(k_1\lambda)^4} [(k_1\lambda x)^3 J_3(k_1\lambda x)] - c \frac{J_1(k_1\lambda x)}{k_1\lambda x} \right\}$$

$$C = -\frac{\pi\lambda^2 t_0^2 \alpha}{4 i E h} \left\{ a \frac{1}{(k_2\lambda)^6} [(k_2\lambda x)^5 Y_3(k_2\lambda x) - (k_2\lambda x)^4 Y_4(k_2\lambda x)] + b \frac{1}{(k_2\lambda)^4} [(k_2\lambda x)^3 Y_3(k_2\lambda x)] - c \frac{Y_1(k_2\lambda x)}{k_2\lambda x} \right\}$$

$$D = \frac{\pi\lambda^2 t_0^2 \alpha}{4 i E h} \left\{ a \frac{1}{(k_2\lambda)^6} [(k_2\lambda x)^5 J_3(k_2\lambda x) - (k_2\lambda x)^4 J_4(k_2\lambda x)] + b \frac{1}{(k_2\lambda)^4} [(k_2\lambda x)^3 J_3(k_2\lambda x)] - c \frac{J_1(k_2\lambda x)}{k_2\lambda x} \right\}$$

En formant les expressions $AJ_2(k_1\lambda x) + BY_2(k_1\lambda x)$, $CJ_2(k_2\lambda x) + DY_2(k_2\lambda x)$, on rencontre les expressions suivantes :

$$J_2(\theta) Y_1(\theta) - J_1(\theta) Y_2(\theta)$$

$$J_2(\theta) Y_3(\theta) - J_3(\theta) Y_2(\theta)$$

$$J_2(\theta) Y_4(\theta) - J_4(\theta) Y_2(\theta)$$

on verrait qu'il est très facile de trouver que :

$$J_2(\theta) Y_1(\theta) - J_1(\theta) Y_2(\theta) = \frac{2}{\pi\theta}$$

$$J_2(\theta) Y_3(\theta) - J_3(\theta) Y_2(\theta) = -\frac{2}{\pi\theta}$$

$$J_2(\theta) Y_4(\theta) - J_4(\theta) Y_2(\theta) = -\frac{12}{\pi\theta^2}$$

De là on trouve :

$$AJ_2(k_1\lambda x) + BY_2(k_1\lambda x) = \frac{t_0^2 \alpha}{4 E h} \left\{ a \left[x^4 + \theta i \frac{x^2}{\lambda} \right] + bx^2 + \frac{c}{x^2} \right\}$$

$$CJ_2(k_2\lambda x) + DY_2(k_2\lambda x) = \frac{t_0^2 \alpha}{4 E h} \left\{ a \left[x^4 - \theta i \frac{x^2}{\lambda} \right] + bx^2 + \frac{c}{x^2} \right\}$$

on a alors la solution particulière du (10) :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{t_0^2 \alpha}{2 E h} \left[ax^4 + bx^2 + \frac{c}{x^2} \right] \\ rT = \frac{6}{\lambda^4} \cdot ax^2 \end{cases}$$

Remarquons qu'il est très facile de vérifier directement que ces expressions satisfont au système (10).

* Voir Watson : *A treatise on the theory of Bessel functions*, p. 76

Ainsi la solution générale du système (9) est donnée par* :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{t\epsilon^2 \alpha}{lh} \left[-\frac{3}{4} q_0 x^2 + \frac{1}{3} \delta \cos \alpha \cdot x^4 - \frac{ph}{\sin \alpha} \left(\frac{3}{4} - \frac{2+\eta}{2} \cos^2 \alpha \right) \cdot x^2 - \frac{3+\eta}{4} ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \cdot x^4 + \frac{K}{x^2 t\epsilon \alpha} \right] \\ &+ A J_2(k_1 \lambda x) + B Y_2(k_1 \lambda x) + C J_2(k_2 \lambda x) + D Y_2(k_2 \lambda x) \\ rT &= \frac{\delta \cos \alpha}{\lambda^4} \cdot x^2 - \frac{3(3+\eta)}{2} ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\lambda^4 \epsilon} \cdot x^2 - \frac{lh}{\lambda^2 t\epsilon^2 \alpha} [A J_2(k_1 \lambda x) + B Y_2(k_1 \lambda x) - C J_2(k_2 \lambda x) - D Y_2(k_2 \lambda x)] \end{aligned} \right.$$

Enfin, l'intégration du système formé par (7) et (6) se termine par le calcul de w défini par

$$w = \int \varphi \cdot dr = \int \varphi \cdot x \cdot dx$$

on voit que l'on doit calculer des intégrales de la forme

$$\int \epsilon \cdot Z_2(\theta) d\theta$$

Z₂ désignant une fonction de Bessel d'ordre 2. Or nous savons que

$$\int \epsilon \cdot Z_2(\theta) d\theta = -2Z_0(\theta) - \theta Z_1(\theta) + H_1$$

où H₁ une constante d'intégration ; on trouve finalement :

$$(12) w = \frac{t\epsilon^2 \alpha}{lh} \left\{ -\frac{3}{16} q_0 x^4 + \frac{1}{9} \delta \cos \alpha \cdot x^6 - \frac{ph}{\sin \alpha} \left[\frac{3}{16} - \frac{2+\eta}{2} \cos^2 \alpha \right] \cdot x^4 - \frac{3+\eta}{24} ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \cdot x^6 + \frac{K}{t\epsilon \alpha} \log(x^2) \right\} + H_1 \\ + \frac{1}{2\lambda^2} \{ A [2J_0(k_1 \lambda x) + k_1 \lambda x \cdot J_1(k_1 \lambda x)] + B [2Y_0(k_1 \lambda x) + k_1 \lambda x \cdot Y_1(k_1 \lambda x)] \\ - C [2J_0(k_2 \lambda x) + k_2 \lambda x \cdot J_1(k_2 \lambda x)] - D [2Y_0(k_2 \lambda x) + k_2 \lambda x \cdot Y_1(k_2 \lambda x)] \}$$

Les 5 autres inconnues, u, r_r, rF₀, M_r, M₀, les plus intéressantes au point de vue de la résistance des matériaux, sont données par les formules suivantes où ne figurent que des signes de dérivation :

$$u = \frac{w}{t\epsilon \alpha} + \frac{t\epsilon \alpha}{lh} \left\{ r \frac{d(rT)}{dr} - \eta(rT) + \frac{ph}{2\sin \alpha} (2\sin^2 \alpha - \eta) \cdot r^2 + \frac{2-\eta}{2} q_0 r^2 - \frac{3-\eta}{3} \delta r^3 \cos \alpha \right. \\ \left. + ph \frac{r^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} - \eta \frac{K}{t\epsilon \alpha} \right\}$$

* Le cas particulier où p=0 de la solution générale (11) a fait l'objet d'une note à l'Académie des Sciences (Voir C.R.A.S. t 236 p.990-992 du 9 Mars 1955) dans laquelle, certaines notations diffèrent légèrement de celles que nous employons ici.

$$rF_r = rT \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{ph}{2 \cos \alpha} \cdot r^2 + \left(q_0 \frac{r^2}{2} - \frac{\delta}{3} r^3 \cos \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha + K$$

$$rF_\theta = \eta \cdot rF_r + Eh \left(u - \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

$$M_r = \frac{Eh}{\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \eta \frac{\varphi}{r} \right)$$

$$M_\theta = \eta M_r + \frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\varphi}{r}$$

les calculs effectués nous résumons les expressions de la solution générale de notre problème dans le tableau suivant :

$$T = \epsilon \cdot \frac{\delta}{\lambda^4} \cos \alpha - 3(3+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\lambda^4 \xi} - \frac{iZh}{\lambda^2 r \operatorname{tg}^2 \alpha} [AJ_2(k_1 \lambda x) + BY_2(k_1 \lambda x) - CJ_2(k_2 \lambda x) - DY_2(k_2 \lambda x)]$$

$$F_r = \frac{q_0 r}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\delta r^2}{3} \sin \alpha \left[1 - \frac{24}{\lambda^4 r^2} \right] + \frac{phr}{2 \cos \alpha} - 3(3+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\lambda^4 \xi} + \frac{K}{r} - \frac{iZh}{\lambda^2 r \operatorname{tg} \alpha} [AJ_2(k_1 \lambda x) + BY_2(k_1 \lambda x) - CJ_2(k_2 \lambda x) - DY_2(k_2 \lambda x)]$$

$$F_\theta = q_0 r \operatorname{tg} \alpha - \delta r^2 \sin \alpha \left[1 - \frac{8}{\lambda^4 r^2} \right] + phr \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + ph \frac{r^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}{\xi} \left[1 - \frac{3(3+\eta)}{\lambda^4 r^2} \right] + \frac{iZh}{\lambda^2 r \operatorname{tg} \alpha} \left\{ A \left[J_2(k_1 \lambda x) - \frac{k_1 \lambda x}{2} J_1(k_1 \lambda x) \right] + B \left[Y_2(k_1 \lambda x) - \frac{k_1 \lambda x}{2} Y_1(k_1 \lambda x) \right] - C \left[J_2(k_2 \lambda x) - \frac{k_2 \lambda x}{2} J_1(k_2 \lambda x) \right] - D \left[Y_2(k_2 \lambda x) - \frac{k_2 \lambda x}{2} Y_1(k_2 \lambda x) \right] \right\}$$

$$\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{Eh} \left\{ -\frac{3}{2} q_0 r + \frac{8}{3} \delta r^2 \cos \alpha - \frac{phr}{2 \sin \alpha} [3 - 2(2+\eta) \cos^2 \alpha] - (3+\eta) ph \frac{r^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} + \frac{K}{r \operatorname{tg} \alpha} \right\} + AJ_2(k_1 \lambda x) + BY_2(k_1 \lambda x) + CJ_2(k_2 \lambda x) + DY_2(k_2 \lambda x)$$

$$M_r = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ -\frac{3(1+\eta)}{2} q_0 + \frac{8(2+\eta)}{3} \delta r \cos \alpha - \frac{1+\eta}{2} \frac{ph}{\sin \alpha} [3 - 2(2+\eta) \cos^2 \alpha] - (3+\eta)(2+\eta) ph \frac{r \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} - (1-\eta) \frac{K}{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right\} - \frac{Eh}{\lambda^4 r \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ A \left[(1-\eta) J_2(k_1 \lambda x) - \frac{k_1 \lambda x}{2} J_1(k_1 \lambda x) \right] + B \left[(1-\eta) Y_2(k_1 \lambda x) - \frac{k_1 \lambda x}{2} Y_1(k_1 \lambda x) \right] + C \left[(1-\eta) J_2(k_2 \lambda x) - \frac{k_2 \lambda x}{2} J_1(k_2 \lambda x) \right] + D \left[(1-\eta) Y_2(k_2 \lambda x) - \frac{k_2 \lambda x}{2} Y_1(k_2 \lambda x) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 M_G &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ -\frac{3(1+\eta)}{z} q_0 + \frac{\varepsilon(1+z\eta)}{3} \delta r \cos \alpha - \frac{1+\eta}{z} \frac{\text{ph}}{\sin \alpha} [3-z(z+\eta) \cos^2 \alpha] - (3+\eta)(1+z\eta) \text{ph} \frac{r \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\varepsilon} + (1-\eta) \frac{K}{r^2 \text{tg}^2 \alpha} \right. \\
 &+ \frac{i h}{\lambda^4 r \text{tg}^2 \alpha} \left\{ A \left[(1-\eta) J_2(k_1 \lambda x) + \eta \frac{k_1 \lambda x}{z} J_1(k_1 \lambda x) \right] + B \left[(1-\eta) Y_2(k_1 \lambda x) + \eta \frac{k_1 \lambda x}{z} Y_1(k_1 \lambda x) \right] \right. \\
 &\left. \left. + C \left[(1-\eta) J_2(k_2 \lambda x) + \eta \frac{k_2 \lambda x}{z} J_1(k_2 \lambda x) \right] + D \left[(1-\eta) Y_2(k_2 \lambda x) + \eta \frac{k_2 \lambda x}{z} Y_1(k_2 \lambda x) \right] \right\} \\
 w &= \frac{\text{tg}^2 \alpha}{i h} \left\{ -\frac{3}{4} q_0 r^2 + \frac{\varepsilon}{9} \delta r^3 \cos \alpha - \frac{\text{ph} r^2}{4 \sin \alpha} [3-z(z+\eta) \cos^2 \alpha] - \frac{3+\eta}{z} \text{ph} \frac{r^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\varepsilon} + \frac{r}{\text{tg} \alpha} \log r \right\} + H \\
 &- \frac{i}{\lambda^2} \left\{ A \left[J_2(k_1 \lambda x) - \left(1 - \frac{i}{\lambda^2 r}\right) \frac{k_1 \lambda x}{z} J_1(k_1 \lambda x) \right] + B \left[Y_2(k_1 \lambda x) - \left(1 - \frac{i}{\lambda^2 r}\right) \frac{k_1 \lambda x}{z} Y_1(k_1 \lambda x) \right] \right. \\
 &\left. - C \left[J_2(k_2 \lambda x) - \left(1 + \frac{i}{\lambda^2 r}\right) \frac{k_2 \lambda x}{z} J_1(k_2 \lambda x) \right] - D \left[Y_2(k_2 \lambda x) - \left(1 + \frac{i}{\lambda^2 r}\right) \frac{k_2 \lambda x}{z} Y_1(k_2 \lambda x) \right] \right\} \\
 u &= \frac{\text{tg} \alpha}{i h} \left\{ \frac{1-z\eta}{4} q_0 r^2 - \frac{\delta r^3 \cos \alpha}{9} [1-3\eta - \frac{7z(1-\eta)}{\lambda^2 r^2}] + \frac{\text{ph} r^2}{4 \sin \alpha} [1-z\eta \sin^2 \alpha] - \text{ph} \frac{r^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\varepsilon} + \frac{\eta}{3} \frac{3(1+\eta)(1-\eta)}{\lambda^4 r^2} \right. \\
 &\left. + \frac{K}{\text{tg} \alpha} (\log r - r) \right\} + \frac{H}{\text{tg} \alpha} \\
 &+ \frac{i}{\lambda^2 \text{tg} \alpha} \left\{ A \left[\eta J_2(k_1 \lambda x) - \frac{i}{\lambda^2 r} \cdot \frac{k_1 \lambda x}{z} J_1(k_1 \lambda x) \right] + B \left[\eta Y_2(k_1 \lambda x) - \frac{i}{\lambda^2 r} \cdot \frac{k_1 \lambda x}{z} Y_1(k_1 \lambda x) \right] \right. \\
 &\left. - C \left[\eta J_2(k_2 \lambda x) + \frac{i}{\lambda^2 r} \cdot \frac{k_2 \lambda x}{z} J_1(k_2 \lambda x) \right] - D \left[\eta Y_2(k_2 \lambda x) + \frac{i}{\lambda^2 r} \cdot \frac{k_2 \lambda x}{z} Y_1(k_2 \lambda x) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

où H est une constante qui diffère légèrement de H₁.

Dans ces expressions, figure le symbole $i = \sqrt{-1}$. Or, u, w, M_G, M_r, Φ, F_G, F_r et T sont des grandeurs physiques, donc indépendantes du signe de i. Mais en changeant i en -i dans les expressions ci-dessus, on sait que :

k₁ devient k₂
 k₂ devient k₁

on déduit par conséquent que

A deviendra C
 B deviendra D
 C deviendra A
 D deviendra B

et K, H demeurent inchangées. Ce qui montre que A, B, C, D sont de la forme :

A = a + i b
 B = c + i d
 C = a - i b
 D = c - i d

où a, b, c, d sont réelles.

On voit donc que la solution générale de l'enveloppe conique de révolution travaillant à la flexion symétrique dépend en apparence de six constantes réelles. Or, la constante H qui s'introduit dans les expressions obtenues est due à la translation d'ensemble dans la direction de l'axe OZ. Donc les déformations de l'enveloppe au sens propre du mot ne dépendent que de 5 constantes réelles. La détermination de ces 5 constantes dépend évidemment des conditions aux limites, c'est-à-dire de l'état des sections limites et des efforts qui y sont appliqués ; toutefois signalons que les calculs sont normalement compliqués*.

Une fois les constantes déterminées, on peut calculer à chaque point P les efforts T, F_r, F_θ et les moments de flexion M_r, M_θ, ainsi que les contraintes.

En effet, les contraintes au point P sont données par les formules habituelles : à savoir

1) contraintes moyennes en P

$$\sigma_r = \frac{F_r}{h}$$

$$\sigma_\theta = \frac{F_\theta}{h}$$

2) contrainte maximum due à l'effort tranchant

$$\tau = \frac{3 T}{2 h}$$

3) contraintes maxima dues aux flexions

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{h^2} M_r$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{h^2} M_\theta$$

Avant de terminer ce chapitre, nous faisons les deux remarques suivantes :

(I) Dans l'établissement des équations du cône, nous aurions dû tenir compte du fait que la pression est appliquée sur la surface intérieure

* F. DUBOIS a consacré énormément de temps à faire des calculs numériques sur des exemples choisis mais relativement simples. voir :

MEISSNER: Das Elastizitätsproblem. Physic Zeitschr. B 14 1915

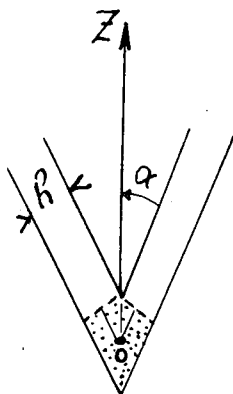
F. DUBOIS : Über die Festigkeit der Kegelschale. Zurich 1917

ou extérieure du cône, mais non sur sa surface moyenne, d'où une petite modification sur l'expression de la pression. De même nous aurions dû ajouter des petites modifications aux expressions du poids et de la force centrifuge. Or pour $\frac{h}{r \sin \alpha}$ petit, c'est-à-dire dans le domaine de l'enveloppe mince, ces modifications sont tellement minimales que nous les avons négligées dès le début de notre étude.

(II) Mathématiquement, la solution générale est valable pour r quelconque, même très petit et tendant vers zéro. Or physiquement ceci n'est pas vrai. En effet, sans tenir compte des objections soulevées dans la remarque précédente, on sait même que, pour $\frac{r}{h}$ assez petit défini par :

$$\frac{r \sin \alpha}{h} \leq \frac{1}{2}$$

(c'est-à-dire au sommet du cône) il n'est plus possible de parler de la surface moyenne ; et en conséquence, les équations ne sont plus valables.



~~~~~

CHAPITRE II

CAS PARTICULIER :  
LES QUASI-PLAQUES CIRCULAIRES

Nous appellerons dans ce chapitre "quasi-plaque circulaire" un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est voisin de  $\frac{\pi}{2}$ . Et cette appellation est, pour le moment, purement intuitive.

Géométriquement, nous savons qu'un cône dont le demi-angle au sommet  $\alpha$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , tend vers une plaque circulaire. Et cette intuition nous conduit à penser que la solution générale du cône obtenue dans le chapitre I doit s'approcher de celle des plaques circulaires pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$  et s'identifier à elle pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Or pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , on sait que :

$\text{tg}\alpha$  devient très grand

$\lambda$  devient très petit

alors les équations de (5), (6) du chapitre I se présentent sous forme d'indéterminations, et la solution générale du cône contient des termes dénués de sens précis. Devant ces indéterminations on est obligé de se demander *ce que deviendront les équations et la solution générale du cône dans ce cas ?*

Nous allons élucider cette question.

D'abord nous savons que les équations de (2), (3), (4) du chapitre I sont toujours valables pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$  et même pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ainsi que les deux premières relations intrinsèques du cône obtenues d'après les équations de (2).

Quant à (5), pour lui donner un sens précis pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , il est logique de remplacer :

$K$  par  $k.tg\alpha$

et on trouve ainsi :

....

$$(8)' \quad rT = \frac{rF_r}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{phr^2}{2\sin\alpha} - q_0 \frac{r^2}{2} + \frac{\delta\sin\alpha}{3} \frac{r^3}{\operatorname{tg}\alpha} - k$$

avec k une constante ordinaire. En effet, pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on en déduit

$$rT = -\frac{ph}{2} r^2 - \frac{q_0}{2} r^2 - k$$

qui n'est autre chose que la solution de la deuxième équation de (4)

pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Or, si dans le chapitre I nous écrivons pour  $\alpha$  quelconque la relation de (8) sous la forme suivante :

$$rT = \frac{rF_r}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{ph r^2}{2\sin\alpha} - q_0 \frac{r^2}{2} + \frac{\delta\sin\alpha}{3} \frac{r^3}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{K}{\operatorname{tg}\alpha}$$

on en déduit que

$$\frac{d(rT)}{dr} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \frac{d(rF_r)}{dr} - ph \frac{r}{\sin\alpha} - q_0 r + \frac{\delta\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} r^2$$

$$r \frac{d^2(rT)}{dr^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} r \frac{d^2(rF_r)}{dr^2} - ph \frac{r}{\sin\alpha} - q_0 r + \frac{2\delta\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} r^2$$

Et en éliminant ainsi (rT) dans (8), on voit que (8) devient :

$$(8)_1 \left\{ \begin{array}{l} r \frac{d^2(rF_r)}{dr^2} + \frac{d(rF_r)}{dr} - \frac{(rF_r)}{r} + \frac{Eh}{\operatorname{tg}\alpha} = - (3+\eta)ph \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{2+\eta}{\operatorname{tg}\alpha} phrs\sin\alpha \\ r \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3 \operatorname{tg}\alpha} rF_r = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \left[ -ph \frac{r^2}{2\sin\alpha} - q_0 \frac{r^2}{2} - \frac{K}{\operatorname{tg}\alpha} \right] + \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \frac{\delta\sin\alpha r^3}{3} \end{array} \right.$$

et les systemes (8), (8)<sub>1</sub> sont deux systemes équivalents.

Ainsi, on voit que le systeme formé par (8)<sub>1</sub> et

$$\frac{dw}{dr} = \varphi$$

sont aussi les équations du cône et admettent comme solution la solution générale obtenue dans le chapitre I.

Or pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , nous venons de voir qu'il est logique de prendre  $K = k\operatorname{tg}\alpha$  pour mieux comprendre le phénomène. Nous écrivons donc (8)<sub>1</sub> sous la forme suivante :

$$(S)' \begin{cases} r \frac{d^2(rF_r)}{dr^2} + \frac{d(rF_r)}{dr} - \frac{rF_r}{r} = - (3+\eta)ph \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{1}{tg \alpha} \{- Eh\varphi + (2+r_1)phr \sin \alpha \} \\ r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = \frac{Lz(1-r_1^2)}{Ph^3} \{- k - (\frac{ph}{\sin \alpha} + q_0) \frac{r^2}{z} \} + \frac{1}{tg \alpha} \frac{Lz(1-r_1^2)}{Eh^3} \{ rF_r + \frac{\delta \sin \alpha}{3} r^3 \} \end{cases}$$

et comme pour  $\alpha$  voisin  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{1}{tg \alpha}$  est très petit, nous pouvons écrire alors la solution de (S)' sous la forme suivante :

$$\begin{cases} rF_r = X_0 + \frac{1}{tg \alpha} X_1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} X_2 + \dots + \frac{1}{tg^n \alpha} X_n + \dots \\ \varphi = Y_0 + \frac{1}{tg \alpha} Y_1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} Y_2 + \dots + \frac{1}{tg^n \alpha} Y_n + \dots \end{cases}$$

En effet, pour résoudre un système d'équations différentielles dépendant d'un paramètre  $\epsilon$  très petit, comme

$$\begin{cases} A_0(t, \epsilon)U'' + A_1(t, \epsilon)U' + A_2(t, \epsilon)U + A_3(t, \epsilon)V = \sum_r \epsilon^r \cdot f_r(\epsilon) \cdot F_r(t) & r > 0 \\ B_0(t, \epsilon)V'' + B_1(t, \epsilon)V' + B_2(t, \epsilon)V + B_3(t, \epsilon)U = \sum_s \epsilon^s \cdot g_s(\epsilon) \cdot G_s(t) & s > 0 \end{cases}$$

où : les dérivations sont prises par rapport à  $t$ ,  
 les  $A(t, \epsilon)$ ,  $B(t, \epsilon)$  sont des polynomes en  $\epsilon$ ,  
 les  $f(\epsilon)$ ,  $g(\epsilon)$  sont des fonctions quelconques en  $\epsilon$ .

on peut toujours employer la méthode de Henri POINCARÉ. Ainsi, pour la recherche de la solution générale du système sans second membre, on pose :

$$\begin{cases} U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots \\ V = V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \dots \end{cases}$$

et l'on fait l'identification par rapport aux puissances de  $\epsilon$ .

Quant à la recherche des solutions particulières du système avec second membre, on peut utiliser la remarque suivante qui facilite les calculs pratiques :

Soyent  $u$ ,  $v$ , les solutions particulières du système suivant :

$$\begin{cases} A_0 U'' + A_1 U' + A_2 U + A_3 V = \epsilon^r \cdot f_r(t) \\ B_0 V'' + B_1 V' + B_2 V + B_3 U = 0 \end{cases}$$

Il est évident que  $f_r(t)u$ ,  $f_r(\epsilon)v$  sont les solutions particulières du système

$$\begin{cases} A_0 U'' + A_1 U' + A_2 U + A_3 V = \epsilon^r \cdot f_r(\epsilon) \cdot F_r(t) \\ B_0 V'' + B_1 V' + B_2 V + B_3 U = 0 \end{cases}$$

Ce qui revient à dire que dans la recherche des solutions particulières on peut considérer les  $f(\epsilon)$ ,  $g(\epsilon)$  comme des constantes sans les développer en série de  $\epsilon$ .

On en déduit que pour la recherche des solutions particulières du système avec second membre, on pose de nouveau :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$$

$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots$$

et l'on fait l'identification par rapport aux puissances de  $\epsilon$  en considérant les  $f(\epsilon)$ ,  $g(\epsilon)$  comme des constantes ordinaires.

On peut même grouper les 2 opérations ensemble et décrire d'emblée la solution générale du système avec second membre sous la forme

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots$$

$$V = V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \dots$$

et on fait l'identification par rapport aux puissances de  $\epsilon$  en considérant les  $f(\epsilon)$ ,  $g(\epsilon)$  comme des constantes ordinaires.\*

Ainsi en remplaçant  $n/r$ ,  $q$  par les développements en série de  $\frac{1}{\text{tg}\alpha}$  dans (6)' et en identifiant les coefficients, on trouve que :

$$r \frac{d^2 X_0}{dr^2} + \frac{dX_0}{dr} - \frac{X_0}{r} = - (3+n) \cdot \text{ph} \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{g} r^2,$$

$$r \frac{d^2 X_1}{dr^2} + \frac{dX_1}{dr} - \frac{X_1}{r} = - E h Y_0 + (2+n) \text{ph} \sin \alpha \cdot r$$

$$r \frac{d^2 X_{n+1}}{dr^2} + \frac{dX_{n+1}}{dr} - \frac{X_{n+1}}{r} = - E h Y_n, \quad (n \geq 1)$$

$$r \frac{d^2 Y_0}{dr^2} + \frac{dY_0}{dr} - \frac{Y_0}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{E h^3} \left[ -k - \left( \frac{\text{ph}}{\sin \alpha} + q_0 \right) \cdot \frac{r^2}{2} \right]$$

$$r \frac{d^2 Y_1}{dr^2} + \frac{dY_1}{dr} - \frac{Y_1}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{E h^3} \left[ X_0 + \frac{\delta \sin \alpha}{3} \cdot r^3 \right],$$

$$r \frac{d^2 Y_{n+1}}{dr^2} + \frac{dY_{n+1}}{dr} - \frac{Y_{n+1}}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{E h^3} X_n, \quad (n \geq 1)$$

Ces équations admettent toutes comme solution générale :

$$X_m = a_m \frac{1}{r} + b_m r + x_m$$

$$Y_m = c_m \frac{1}{r} + d_m r + y_m$$

où  $x_m$ ,  $y_m$  désignent les solutions particulières et l'on voit ainsi qu'en posant :

$$a = a_0 + \frac{a_1}{\text{tg}\alpha} + \dots + \frac{a_n}{\text{tg}^n \alpha} + \dots$$

\* Cette considération reste valable pour les équations et les systèmes d'ordre plus élevé.

$$b = b_0 + \frac{b_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \dots + \frac{b_n}{\operatorname{tg}^n \alpha} + \dots$$

$$c = c_0 + \frac{c_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \dots + \frac{c_n}{\operatorname{tg}^n \alpha} + \dots$$

$$d = d_0 + \frac{d_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \dots + \frac{d_n}{\operatorname{tg}^n \alpha} + \dots$$

$rF_r$ ,  $\varphi$  se mettront sous la forme suivante :

$$\begin{cases} rF_r = a \frac{1}{r} + br + x_0 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} x_1 + \dots + \frac{1}{\operatorname{tg}^n \alpha} x_n + \dots \\ \varphi = c \frac{1}{r} + dr + y_0 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} y_1 + \dots + \frac{1}{\operatorname{tg}^n \alpha} y_n + \dots \end{cases}$$

ou les  $x$ ,  $y$  sont des solutions particulières des équations suivantes :

$$r \frac{d^2 x_0}{dr^2} + \frac{dx_0}{dr} - \frac{x_0}{r} = - (3+\eta) \operatorname{ph} \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\xi} . r^2 ,$$

$$r \frac{d^2 x_1}{dr^2} + \frac{dx_1}{dr} - \frac{x_1}{r} = - Eh \left[ c \frac{1}{r} + dr + y_0 \right] + (2+\eta) . \operatorname{ph} \sin \alpha . r ,$$

$$r \frac{d^2 x_{n+1}}{dr^2} + \frac{dx_{n+1}}{dr} - \frac{x_{n+1}}{r} = - Eh y_n , \quad (n \geq 1)$$

$$r \frac{d^2 y_0}{dr^2} + \frac{dy_0}{dr} - \frac{y_0}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \left[ -k - \left( \frac{\operatorname{ph}}{\sin \alpha} + q_0 \right) \frac{r^2}{2} \right]$$

$$r \frac{d^2 y_1}{dr^2} + \frac{dy_1}{dr} - \frac{y_1}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \left[ a \frac{1}{r} + br + x_0 + \frac{\delta \sin \alpha}{3} r^3 \right]$$

$$r \frac{d^2 y_{n+1}}{dr^2} + \frac{dy_{n+1}}{dr} - \frac{y_{n+1}}{r} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} x_n , \quad (n \geq 1)$$

Delà on trouve immédiatement que

$$x_0 = - \frac{3+\eta}{\xi} \operatorname{ph} \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\xi} . r^3$$

$$y_0 = \frac{3(1-\eta^2)}{Eh^3} k [r - 2r \operatorname{Log} r] - \frac{3(1-\eta^2)}{4 Eh^3} \left( \frac{\operatorname{ph}}{\sin \alpha} + q_0 \right) . r^3$$

et on peut calculer, sans difficulté, de proche en proche les différents  $x$ ,  $y$ .

Pour faciliter les discussions, nous pouvons traiter ces intégrations d'une façon plus systématique. En effet, désignons par :

....

$$I \cdot [\psi]$$

l'opération sur  $\psi$  pour avoir l'intégrale particulière de l'équation suivante,

$$r \frac{d^2z}{dr^2} + \frac{dz}{dr} - \frac{z}{r} = \psi$$

On voit que l'opérateur  $I \cdot [ ]$  est linéaire, c'est-à-dire :

$$I \cdot [\psi_1 + \psi_2] = I \cdot [\psi_1] + I \cdot [\psi_2]$$

$$I \cdot [n\psi] = n \cdot I \cdot [\psi]$$

$n$  : constante ordinaire.

De plus, le symbole  $I^m \cdot [\psi]$ ,  $m$  entier positif, est très bien défini par

$$I^m \cdot [\psi] = I \cdot [I \cdot [I \cdot [\dots I \cdot [\psi]]] \dots]$$

.....  
m fois

Et remarquons encore que si  $n$  est une constante, on a

$$I \cdot [n] = n I \cdot [1]$$

Ceci étant, on voit immédiatement que

$$I \cdot [1] = \frac{1}{4} [-r + 2r \text{Log } r]$$

$$I \cdot [r^m] = \frac{1}{m(m+2)} \cdot r^{m+1} \quad \text{pour } m \neq 0, m \neq -2$$

Ainsi, on a

$$I \cdot \left[\frac{1}{r}\right] = -1$$

$$I \cdot [1] = -I^2 \cdot \left[\frac{1}{r}\right] = \frac{1}{4} [-r + 2r \text{Log } r]$$

et

$$I \cdot [r] = \frac{1}{8} r^2$$

$$I \cdot [r^2] = \frac{1}{8} r^3$$

d'où

$$r^2 = 8 I \cdot [r]$$

$$r^3 = 8 I \cdot [r^2] = 24 I^2 \cdot [r]$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{cases} x_0 = -3(3+\eta)ph \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{g} I^2 [r] \\ y_0 = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} k I^2 \left[ \frac{1}{r} \right] - \frac{18(1-\eta^2)}{Eh^3} \left( \frac{ph}{\sin \alpha} + q_0 \right) \cdot I^2 [r] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -Ehc \cdot I \left[ \frac{1}{r} \right] - Ehd \cdot I [r] - \frac{12(1-\eta^2)}{h^2} k I^3 \left[ \frac{1}{r} \right] + \frac{18(1-\eta^2)}{h^2} \left( \frac{ph}{\sin \alpha} + q_0 \right) I^3 [r] + (3+\eta)ph \sin \alpha \cdot I [r] \\ y_1 = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} a \cdot I \left[ \frac{1}{r} \right] + \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} b I [r] - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \cdot 3(3+\eta)ph \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{g} I^3 [r] + \frac{12(1-\eta^2)}{Eh} c \cdot \sin \alpha \cdot I^3 [r] \end{cases}$$

Comme à partir de  $n > 1$ , on a

$$x_{n+1} = -Eh I [y_n]$$

$$y_{n+1} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} I [x_n],$$

on en déduit alors

$$x_{n+2} = -\frac{12(1-\eta^2)}{h^2} I^2 [x_n]$$

$$y_{n+2} = -\frac{12(1-\eta^2)}{h^2} I^2 [y_n]$$

Et d'une façon générale, on a

$$x_{n+2m} = (-1)^m \left\{ \frac{12(1-\eta^2)}{h^2} \right\}^m I^{2m} [x_n]$$

$$y_{n+2m} = (-1)^m \left\{ \frac{12(1-\eta^2)}{h^2} \right\}^m I^{2m} [y_n]$$

Ainsi, on trouve qu'en utilisant la notation de  $\lambda^4$  défini dans le chapitre I

$$\frac{12(1-\eta^2)}{h^2} = \{ \lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \}$$

qui est un nombre bien défini même pour les valeurs de  $\operatorname{tg} \alpha$  très grandes on a :

$$x_{1+2r} = \{ -\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \}^m I^{2m} [x_1]$$

$$x_{2+2m} = -Eh \{ -\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \}^m I^{2m+1} [y_1]$$

$$y_{1+2m} = \{ -\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \}^m I^{2m} [y_1]$$

$$y_{2+2r} = -\frac{1}{Eh} \{ -\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \}^{m+1} I^{2m+1} [x_1]$$



En remplaçant dans ces expressions  $x_1, y_1$  par les valeurs trouvées, on trouve finalement que pour  $m$  entier positif :

$$x_{1+2m} = -Eh \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\}^m \left[ c \cdot I^{2m+1} \left[ \frac{1}{r} \right] - \frac{k}{Eh} \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\} I^{2m+3} \left[ \frac{1}{r} \right] + \left( d - \frac{2+\eta}{Eh} \text{phsin} \alpha \right) I^{2m+1} [r] \right. \\ \left. + \frac{3}{2Eh} \left( \frac{\text{ph}}{\text{sin} \alpha} + q_0 \right) \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\} I^{2m+3} [r] \right]$$

$$x_{2+2m} = \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\}^{m+1} \left[ a \cdot I^{2m+2} \left[ \frac{1}{r} \right] + b \cdot I^{2m+2} [r] - \left\{ 3(3+\eta) \text{ph} \frac{\omega^2 \text{sin}^2 \alpha}{g} - 8\delta \text{sin} \alpha \right\} I^{2m+4} [r] \right]$$

$$y_{1+2m} = -\frac{1}{Eh} \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\}^{m+1} \left[ a \cdot I^{2m+1} \left[ \frac{1}{r} \right] + b \cdot I^{2m+1} [r] - \left\{ 3(3+\eta) \text{ph} \frac{\omega^2 \text{sin}^2 \alpha}{g} - 8\delta \text{sin} \alpha \right\} I^{2m+3} [r] \right]$$

$$y_{2+2m} = \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\}^{m+1} \left[ c \cdot I^{2m+2} \left[ \frac{1}{r} \right] - \frac{k}{Eh} \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\} I^{2m+4} \left[ \frac{1}{r} \right] + \left( d - \frac{2+\eta}{Eh} \text{phsin} \alpha \right) I^{2m+2} [r] \right. \\ \left. + \frac{3}{2Eh} \left( \frac{\text{ph}}{\text{sin} \alpha} + q_0 \right) \{-\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha\} I^{2m+4} [r] \right]$$

Nous constatons que ces formules sont valables même pour  $m = 0$ . Ainsi la solution de (L)' est définie par :

$$rF_r = a \left\{ \frac{1}{r} - \lambda^4 I^2 \left[ \frac{1}{r} \right] + \lambda^8 I^4 \left[ \frac{1}{r} \right] - \lambda^{12} I^6 \left[ \frac{1}{r} \right] + \dots \right\} \\ + b \{ r - \lambda^4 I^2 [r] + \lambda^8 I^4 [r] - \lambda^{12} I^6 [r] + \dots \} \\ - c \frac{Eh}{\text{tg} \alpha} \left\{ I \left[ \frac{1}{r} \right] - \lambda^4 I^3 \left[ \frac{1}{r} \right] + \lambda^8 I^5 \left[ \frac{1}{r} \right] - \lambda^{12} I^7 \left[ \frac{1}{r} \right] + \dots \right\} \\ - d \frac{Eh}{\text{tg} \alpha} \left\{ I [r] - \lambda^4 I^3 \left[ \frac{1}{r} \right] + \lambda^8 I^5 [r] - \lambda^{12} I^7 [r] + \dots \right\} \\ - k \frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \text{tg} \alpha} \left\{ I^3 \left[ \frac{1}{r} \right] - \lambda^4 I^5 \left[ \frac{1}{r} \right] + \lambda^8 I^7 \left[ \frac{1}{r} \right] - \lambda^{12} I^9 \left[ \frac{1}{r} \right] + \dots \right\} \\ - 3(3+\eta) \text{ph} \frac{\omega^2 \text{sin}^2 \alpha}{g} \left\{ I^2 [r] - \lambda^4 I^4 [r] + \lambda^8 I^6 [r] - \lambda^{12} I^8 [r] + \dots \right\} \\ + 8\delta \text{sin} \alpha \{ -\lambda^4 I^4 [r] + \lambda^8 I^6 [r] - \lambda^{12} I^8 [r] + \lambda^{16} I^{10} [r] \dots \} \\ + (2+\eta) \frac{\text{phsin} \alpha}{\text{tg} \alpha} \left\{ I [r] - \lambda^4 I^3 [r] + \lambda^8 I^5 [r] - \lambda^{12} I^7 [r] + \dots \right\} \\ + \frac{3}{2} \left( \frac{\text{ph}}{\text{sin} \alpha} + q_0 \right) \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \text{tg} \alpha} \left\{ I^3 [r] - \lambda^4 I^5 [r] + \lambda^8 I^7 [r] - \lambda^{12} I^9 [r] + \dots \right\}$$

....

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{a}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \operatorname{tg} \alpha} \left\{ I\left[\frac{1}{r}\right] - \lambda^4 I^3\left[\frac{1}{r}\right] + \lambda^8 I^5\left[\frac{1}{r}\right] - \lambda^{12} I^7\left[\frac{1}{r}\right] + \dots \right\} \\ & + \frac{b}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \operatorname{tg} \alpha} \left\{ I[r] - \lambda^4 I^3[r] + \lambda^8 I^5[r] - \lambda^{12} I^7[r] + \dots \right\} \\ & + c \left\{ \frac{1}{r} - \lambda^4 I^2\left[\frac{1}{r}\right] + \lambda^8 I^4\left[\frac{1}{r}\right] - \lambda^{12} I^6\left[\frac{1}{r}\right] + \dots \right\} \\ & + d \left\{ r - \lambda^4 I^2[r] + \lambda^8 I^4[r] - \lambda^{12} I^6[r] + \dots \right\} \\ & + \frac{k}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2} \left\{ I^2\left[\frac{1}{r}\right] - \lambda^4 I^4\left[\frac{1}{r}\right] + \lambda^8 I^6\left[\frac{1}{r}\right] - \lambda^{12} I^8\left[\frac{1}{r}\right] + \dots \right\} \\ & - 3(3+\eta) \frac{ph \omega^2 \sin^2 \alpha}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{g h^2 \operatorname{tg} \alpha} \left\{ I^3[r] - \lambda^4 I^5[r] + \lambda^8 I^7[r] - \lambda^{12} I^9[r] + \dots \right\} \\ & + \frac{\epsilon \delta \sin \alpha}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \operatorname{tg} \alpha} \left\{ I^3[r] - \lambda^4 I^5[r] + \lambda^8 I^7[r] - \lambda^{12} I^9[r] + \dots \right\} \\ & + \frac{(2+\eta)ph \sin \alpha}{2h} \left\{ \lambda^4 I^2[r] - \lambda^6 I^4[r] + \lambda^{12} I^6[r] - \lambda^{18} I^8[r] + \dots \right\} \\ & - \frac{3}{2} \left( \frac{ph}{\sin \alpha} + q_0 \right) \frac{1}{2h} \cdot \frac{12(1-\eta^2)}{h^2} \left\{ I^2[r] - \lambda^4 I^4[r] + \lambda^8 I^6[r] - \lambda^{12} I^8[r] + \dots \right\} \end{aligned}$$

D'ailleurs, il est assez facile de vérifier que  $rF_r$ ,  $\psi$  ainsi définies satisfont formellement à (8)'. Et il ne reste qu'à calculer

$$I^m[r]$$

$$I^m\left[\frac{1}{r}\right]$$

Il est très facile du reste de montrer que pour  $m$  entier positif,

$$I^m[r] = \frac{1 \cdot 2}{m! (m+2)!} \cdot r^{m+1}$$

Quand à l'expression

$$I^m\left[\frac{1}{r}\right]$$

nous savons d'abord que

$$I\left[\frac{1}{r}\right] = -1$$

$$I^2\left[\frac{1}{r}\right] = \frac{r}{4} - \frac{1}{2} r \operatorname{Log} r$$

Puisque

$$I[r^n \text{Log } r] = \frac{1}{n(n+2)} \{r^{n+1} \text{Log } r - (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}) \cdot r^{n+1}\}$$

on déduit que

$$I[r \text{ Log } r] = \frac{1}{1.3} \{r^2 \text{Log } r - (\frac{1}{1} + \frac{1}{3}) \cdot r^2\}$$

$$I^2[r \text{ Log } r] = \frac{1}{1.3.2.4} \{r^3 \text{Log } r - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}) \cdot r^3\}$$

et d'une façon générale on peut écrire, en posant :

$$\psi(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ avec } \psi(0) = 0$$

$$I^n[r \text{ Log } r] = \frac{1.2}{n!(n+2)!} \{r^{n+1} \text{Log } r - (\psi(n) + \psi(n+2) - 1 - \frac{1}{2}) \cdot r^{n+1}\}$$

il apparaît ainsi :

$$\begin{aligned} I^{2+n} \left[ \frac{1}{r} \right] &= \frac{1}{4} I^n[r] - \frac{1}{2} I^n[r \text{ Log } r] \\ &= \frac{-1}{n!(n+2)!} \{r^{n+1} \text{Log } r - (\psi(n) + \psi(n+2) - 1) \cdot r^{n+1}\} \end{aligned}$$

Et finalement, on obtient en résumé :

$$I^m[r] = \frac{1.2}{m!(m+2)!} r^{m+1} \quad m \text{ entier positif}$$

$$I \left[ \frac{1}{r} \right] = -1$$

$$I^m \left[ \frac{1}{r} \right] = \frac{-1}{(m-2)!m!} \{r^{m-1} \text{Log } r - (\psi(m-2) + \psi(m) - 1) \cdot r^{m-1}\}, m \text{ entier } \geq 2$$

Comme dans les expressions de  $rF_r$ ,  $\varphi$  développées en série en  $\lambda^4 I[\dots]$ , le rapport de d'Alembert est de la forme :

$$\begin{aligned} & - \lambda^4 \frac{I^m[r]}{I^{m-2}[r]} \\ & - \lambda^4 \frac{I^m \left[ \frac{1}{r} \right]}{I^{m-2} \left[ \frac{1}{r} \right]} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

....

$$\begin{aligned}
 & - \frac{12(1-\eta^2) \cdot r^2}{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{(m-1)m(m+1)(m+2)} \\
 & - \frac{12(1-\eta^2) \cdot r^2}{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)m} \cdot \frac{\operatorname{Log} r - \psi(m-2) - \psi(m) + 1}{\operatorname{Log} r - \psi(m-4) - \psi(m-2) + 1}
 \end{aligned}$$

Alors pour  $h$ ,  $r$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  données avec  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  bien défini, on peut toujours trouver un nombre assez grand mais bien défini, tel que pour  $m$  plus grand que ce nombre, les rapports définis ci-dessus sont compris entre  $-1$  et  $0$ , et les séries ainsi définies sont convergentes.

En pratique, on peut dire que la première approximation consiste à prendre  $m$  de façon que :

$$\begin{aligned}
 m^2 & > \frac{\sqrt{12(1-\eta^2)}}{\operatorname{htg} \alpha} r \text{ pour les séries en } I^m[r] \\
 (m-2)^2 & > \frac{\sqrt{12(1-\eta^2)}}{\operatorname{htg} \alpha} r \text{ pour les séries en } I^m\left[\frac{1}{r}\right]
 \end{aligned}$$

Ces inégalités nous montrent que dans les expressions  $rF_r$ ,  $\varphi$  on n'a ni le droit de négliger d'emblée certaines constantes d'intégration, ni le droit de négliger de la même façon les termes de la même puissance en  $\lambda^4 r^2$  partout.

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , (8)' devient donc :

$$\left\{ \begin{aligned}
 r \frac{d^2(rF_r)}{dr^2} + \frac{d(rF_r)}{dr} - \frac{rF_r}{r} &= - (3+\eta) \operatorname{ph} \frac{\omega^2 r^2}{g} \\
 r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} &= \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} [-k - (\operatorname{ph} + q_0) \frac{r^2}{r}]
 \end{aligned} \right.$$

avec les solutions :

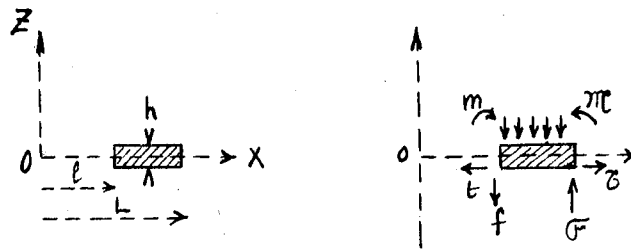
$$\begin{aligned}
 rF_r = X_0 &= a \frac{1}{r} + br - \frac{3+\eta}{g} \operatorname{ph} \frac{r^3 \omega^2}{g} \\
 \varphi = Y_0 &= c \frac{1}{r} + dr - \frac{3(1-\eta^2)k}{Eh^3} [-r + 2r \operatorname{Log} r] - \frac{3}{4} (\operatorname{ph} + q_0) \frac{1-\eta^2}{Eh^3} r^3
 \end{aligned}$$

qui ne sont autres choses que les équations et la solution bien connue des plaques circulaires sous la charge hydrostatique.

Ainsi, nous voyons que les développements en séries de  $\lambda^4 I[.]$  de  $rF_r$ ,  $\varphi$ , valables pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , sont, en réalité, une forme plus parlante de la solution générale du cône obtenue dans le chapitre I pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$  puisque ces développements et la solution

du chapitre I sont tous les deux la solution du système (8)<sub>1</sub>. On peut dire ainsi que la solution générale du cône reste valable pour  $\alpha$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$  et se réduit à la solution des plaques circulaires pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , bien que certaines formes d'indétermination y figurent.

En terminant ce chapitre, nous rappelons les formules suivantes des plaques circulaires avec caractéristiques et charges indiquées dans la figure ci-après.



$$k = lf - \frac{q_0 l^2}{2} = L\sigma - \frac{q_0 L^2}{2}$$

1°)  $r = l$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3(L^2-l^2)} \left[ \frac{kl}{2} \left( \frac{L^2-l^2}{1+\eta} + \frac{L^2}{1-\eta} \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right) + \frac{q_0 l(L^2-l^2)}{8} \left( \frac{2L^2}{1-\eta} + \frac{L^2+l^2}{1+\eta} \right) - \frac{(1+\eta)L^2 + (1-\eta)l^2}{1-\eta^2} \frac{2Ll}{1-\eta} \right]$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{Eh} \frac{1}{L^2-l^2} \left[ - \{ (1-\eta)L^2 + (1-\eta)l^2 \} t + 2L^2 \tau \right]$$

2°)  $r = L$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3(L^2-l^2)} \left[ \frac{kL}{2} \left( \frac{L^2-l^2}{1+\eta} + \frac{l^2}{1-\eta} \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right) + \frac{q_0 L(L^2-l^2)}{8} \left( \frac{2l^2}{1-\eta} + \frac{L^2+l^2}{1+\eta} \right) - \frac{2Ll}{1-\eta^2} \frac{lm}{1-\eta} + \frac{(1+\eta)l^2 + (1-\eta)L^2}{1-\eta^2} \frac{Lm}{1-\eta} \right]$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{Eh} \frac{1}{L^2-l^2} \left[ - 2l^2 t + \{ (1-\eta)L^2 + (1+\eta)l^2 \} \tau \right]$$

3°)

$$w_L - w_l = \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{1+\eta} + \frac{1}{1-\eta} \frac{L^2 l^2}{L^2-l^2} \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right) m - \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{1+\eta} + \frac{1}{1-\eta} \frac{L^2 l^2}{L^2-l^2} \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right) m \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[ \frac{3+\eta}{1+\eta} (L^2-l^2) + \frac{1+\eta}{1-\eta} \frac{L^2 l^2}{L^2-l^2} \left( \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right)^2 \right] \cdot k + \frac{q_0}{32} \left[ \frac{5+\eta}{2(1+\eta)} (L^4-l^4) + \frac{3+\eta}{1-\eta} L^2 l^2 \cdot \text{Log} \frac{L^2}{l^2} \right] \right\}$$

CHAPITRE III

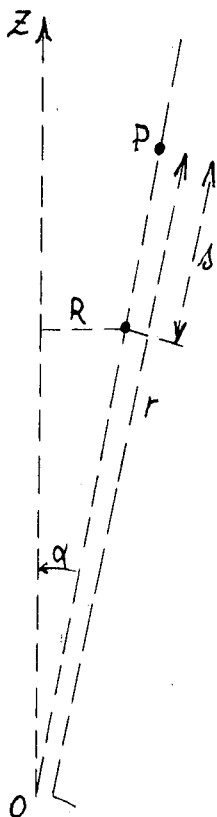
CAS PARTICULIER :  
LES QUASI-CYLINDRES

Nous appellerons dans ce chapitre "quasi-cylindre" un cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha$  très petit. Et cette appellation est pour le moment purement intuitive.

Or ce genre de cônes mérite d'être considéré spécialement, car pour que ces cônes puissent être assimilés à des enveloppes minces, il faut que  $\frac{h}{r \sin \alpha}$  soit assez petit, c'est-à-dire  $r$  très grand. Et de plus, pour le calcul de ce genre de cônes,  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  est très grand ;

les équations des cônes se présentent sous des formes d'indétermination et  $|k_1 \lambda x|$  et  $|k_2 \lambda x|$  deviennent très grands et par conséquent la solution générale du cône obtenue précédemment se présente aussi sous forme d'indéterminations. On est alors obligé de se demander *ce que deviendront les équations et la solution générale du cône dans ce cas.*

Pour répondre à cette question, nous nous proposons d'examiner d'abord les équations fondamentales (2), (3) et (4) du chapitre I de notre étude.



Nous prendrons, comme référence supplémentaire, un plan parallèle à OXY coupant le cône suivant un cercle de rayon  $R$ , et comme paramètre supplémentaire  $s$  défini par :

$$r = \frac{R}{\sin \alpha} + s$$

alors

$$dr = ds$$

D'autre part, il est raisonnable d'utiliser les notations  $F_s$ ,  $M_s$  à la place de  $F_r$ ,  $M_r$ .

D'ailleurs en désignant par  $Q$  la pression hydrostatique sur le cercle de rayon  $R$  on a :

$$q_0 = Q + R \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

...

Avec ces notations, on voit que (2), (4) deviennent

$$(2)'' \left\{ \begin{aligned} F_s &= \frac{Eh}{1-\eta^2} \left[ \frac{du}{ds} + \eta \frac{u \sin \alpha - w \cos \alpha}{R+s \sin \alpha} \right] \\ F_\theta &= \frac{Eh}{1-\eta^2} \left[ \eta \frac{du}{ds} + \frac{u \sin \alpha - w \cos \alpha}{R+s \sin \alpha} \right] \\ M_s &= \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left[ \frac{d\varphi}{ds} + \eta \frac{\varphi \sin \alpha}{R+s \sin \alpha} \right] \\ M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left[ \eta \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\varphi \sin \alpha}{R+s \sin \alpha} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(4)'' \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds} [(R+s \sin \alpha) F_s] - F_\theta \sin \alpha - ph (R+s \sin \alpha) \cos \alpha + ph \frac{(R+s \sin \alpha)^2 \omega^2 \sin \alpha}{\epsilon} &= 0 \\ - \frac{d}{ds} [(R+s \sin \alpha) T] + F_\theta \cos \alpha - ph (R+s \sin \alpha) \sin \alpha - (Q - \delta s \cos \alpha) (R+s \sin \alpha) \\ &\quad - ph \frac{(R+s \sin \alpha)^2 \omega^2 \cos \alpha}{\epsilon} = 0 \\ - M_\theta \sin \alpha + \frac{d}{ds} [(R+s \sin \alpha) M_s] - (R+s \sin \alpha) T &= 0 \end{aligned} \right.$$

Comme dans le chapitre I, on trouve les relations intrinsèques suivantes :

$$F_\theta - \eta F_s = Eh \frac{u \sin \alpha - w \cos \alpha}{R+s \sin \alpha}$$

$$M_\theta - \eta M_s = \frac{Eh^3}{12} \frac{\varphi \sin \alpha}{R+s \sin \alpha}$$

$$(5)'' (R+s \sin \alpha) F_s - (R+s \sin \alpha) T \operatorname{tg} \alpha - ph \frac{2Rs + s^2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} - Q \frac{2R+s \sin \alpha}{2 \cos \alpha} s \sin \alpha + \delta s \sin \alpha \left( \frac{R}{2} + \frac{s}{3} \sin \alpha \right) s^2 = k$$

où k est une constante d'intégration.

Or, il est très facile d'avoir ces relations d'après celles que nous avons obtenues dans le chapitre I. En effet, il suffit, dans ces dernières de remplacer d'une part les notations et d'autre part **K** par

$$\frac{k}{\sin \alpha} - \frac{ph R^2}{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} - \frac{q_0 R^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \delta s^3$$

et d'enlever les formes d'indétermination pour retrouver ces nouvelles formules [(2"), (4"), (5")].

De même, en remplaçant

$$r \text{ par } \frac{R}{\sin \alpha} + s$$

$$q_0 \text{ par } Q + \delta R \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$K \text{ par } \frac{k}{\sin \alpha} - \frac{ph R^2}{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} - \frac{q_0 R^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{3} \frac{\delta R^3}{\sin^2 \alpha}$$

dans le système (6), et en enlevant dans ce système les formes d'indétermination, on trouve avec

$$Z = (R+s \cdot \sin \alpha) \cdot T$$

$$(6)'' \left\{ \begin{aligned} & (R+s \cdot \sin \alpha)^2 \frac{d^2 Z}{ds^2} + (R+s \cdot \sin \alpha) \sin \alpha \frac{dZ}{ds} - \sin^2 \alpha \cdot Z + Eh (1-\sin^2 \alpha) (R+s \cdot \sin \alpha) \cdot \varphi \\ & = k \sin \alpha \cos \alpha + \frac{ph}{z} \{ (R+s \cdot \sin \alpha)^2 [1+z\eta-z(z+\eta)\sin^2 \alpha] R^2 \} - \frac{Q}{z} \sin \alpha [R^2 + 3(R+s \cdot \sin \alpha)^2] \\ & + \frac{\delta \cos \alpha}{\sigma} [-E^3 + (\eta R + 1 \delta s \cdot \sin \alpha) (R+s \cdot \sin \alpha)^2] - (\delta + \eta) ph \frac{(R+s \cdot \sin \alpha)^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \\ & (R+s \cdot \sin \alpha) \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \sin \alpha \frac{d\varphi}{ds} - \frac{\sin^2 \alpha}{R+s \cdot \sin \alpha} \varphi - \frac{1z(1-\eta^2)}{Eh} Z = 0 \end{aligned} \right.$$

Pour le système (6)"', on peut employer la méthode d'intégration que nous avons utilisée dans le chapitre II pour traiter les quasi-plaques circulaires, c'est-à-dire écrire la solution générale sous la forme en série

$$\varphi = \varphi_0 + \sin \alpha \cdot \varphi_1 + \sin^2 \alpha \cdot \varphi_2 + \dots$$

$$T = T_0 + \sin \alpha \cdot T_1 + \sin^2 \alpha \cdot T_2 + \dots$$

en considérant  $\sin \alpha$  comme un paramètre très petit (puisque  $\alpha$  est très petit), et chercher ainsi les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, T_0, T_1, T_2, \dots$  la solution ainsi trouvée est valable pour  $\alpha$  assez petit.

Nous n'entrerons pas en détail dans ces calculs et les discussions des questions qui s'y rattachent (par exemple : la convergence). Mais nous formulons simplement l'importante remarque suivante :

C'est en partant des équations générales (2), (3), (4) du chapitre I et en prenant des notations mieux adaptées, et des constantes



d'intégration mieux choisies que nous sommes arrivés théoriquement à exprimer la solution des quasi-cylindres en séries entières de  $\sin \alpha$ , valable pour  $\alpha$  assez petit. Ceci revient à dire que ces séries sont une forme des développements de la solution générale du cône, valables pour  $\alpha$  petit, en utilisant des paramètres appropriés.

De plus, on voit que pour  $\alpha = 0$ , (8)" se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} - \frac{12(1-\eta^2)}{Eh^3} T = 0 \\ \frac{d^2 T}{ds^2} + \frac{Eh}{R^2} \varphi = \tau_1 \frac{ph}{R} + \delta \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\varphi = \eta \frac{PR}{E} + \frac{\delta R^2}{Eh} + A \cosh \mu s \cdot \cos \mu s + B \cosh \mu s \cdot \sin \mu s + C \sinh \mu s \cdot \cos \mu s + D \sinh \mu s \cdot \sin \mu s$$

$$T = \frac{Eh}{2\mu^2 R^2} [D \cosh \mu s \cdot \cos \mu s - C \cosh \mu s \cdot \sin \mu s + B \sinh \mu s \cdot \cos \mu s - A \sinh \mu s \cdot \sin \mu s]$$

avec

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1-\eta^2)}{R^2 h^2}}$$

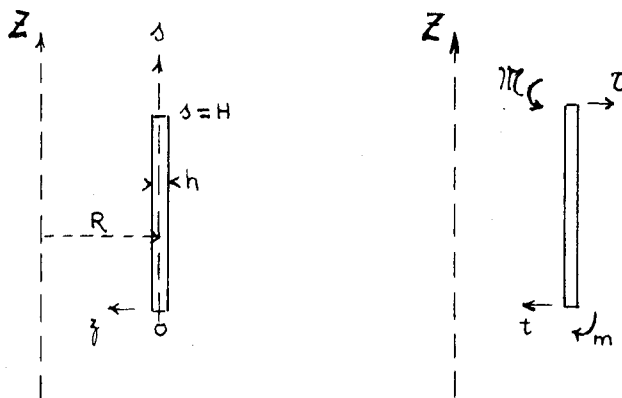
Et ces dernières expressions sont respectivement

$$\varphi_0$$

$$T_0$$

Or ce sont justement les équations et les solutions du cylindre proprement dits soumis au cas de la charge hydrostatique. On peut alors dire que les équations et la solution générale du cône demeurent valables même pour  $\alpha$  petit et tendant vers zéro, ce qui est peu visible directement.

En terminant ce chapitre, nous rappelons les formules suivantes du cylindre dont les caractéristiques et les cas de charge sont mentionnés sur les figures ci-après :



$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1-\eta^2)}{h^2 h^2}}$$

1° s = 0

$$\frac{dw}{ds} = \frac{2R^2 \mu^2}{Eh} t \frac{-sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R^2 \mu^3}{Eh} m \frac{-2sh\mu H \operatorname{ch}\mu H - 2\sin\mu H \cos\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ \frac{2R^2 \mu^2}{Eh} \zeta \frac{-2sh\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R^2 \mu^3}{Eh} \eta \frac{2sh\mu H \cos\mu H + 2\operatorname{ch}\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$-\frac{w}{R} = \frac{2R\mu}{ER} t \frac{-sh\mu H \operatorname{ch}\mu H + \sin\mu H \cos\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R\mu^2}{Eh} m \frac{-sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ \frac{2R\mu}{Eh} \zeta \frac{sh\mu H \cos\mu H - \operatorname{ch}\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R\mu^2}{Eh} \eta \frac{2sh\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

2° s = H

$$\frac{dw}{ds} = \frac{2R^2 \mu^2}{Eh} t \frac{-2sh\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R^2 \mu^3}{Eh} m \frac{-2sh\mu H \cos\mu H - 2\operatorname{ch}\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ \frac{2R^2 \mu^2}{Eh} \zeta \frac{-sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R^2 \mu^3}{Eh} \eta \frac{2sh\mu H \operatorname{ch}\mu H + 2\sin\mu H \cos\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$-\frac{w}{R} = \frac{2R\mu}{Eh} t \frac{-sh\mu H \cos\mu H + \operatorname{ch}\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R\mu^2}{Eh} m \frac{2sh\mu H \sin\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ \frac{2R\mu}{Eh} \zeta \frac{sh\mu H \operatorname{ch}\mu H - \sin\mu H \cos\mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + \frac{2R\mu^2}{Eh} \eta \frac{-sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

~~~~~

CHAPITRE IV

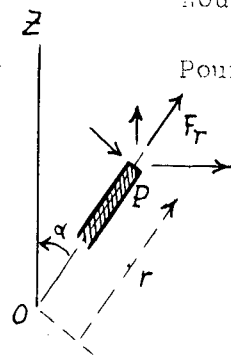
LES CONSTANTES D'INTEGRATIONS ET
LES FORMULES DE COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier systématiquement la détermination des constantes d'intégration A, B, C, D, K, H et des questions qui s'y rattachent.

Nous avons dit que H caractérise surtout la translation d'ensemble du cône dans la direction de son axe de révolution, donc sans grand intérêt au point de vue de la résistance des matériaux ; et que les autres constantes dépendent des conditions aux limites, c'est-à-dire des forces, des moments de flexion, des déplacements, des rotations aux sections extrêmes du cône considéré.

Or, pour les problèmes de la résistance des matériaux, on a l'habitude de les classer en deux catégories : problèmes statiques et problèmes hyperstatiques. On dit en général qu'un problème est statique, si les forces et les moments appliqués aux limites sont connus ; et hyperstatique si certaines déformations aux limites sont imposées.

Nous commençons nos études par des problèmes statiques.



Pour les problèmes relatifs à un cône, on voit très facilement qu'en un point P du cône (voir fig. ci-contre) :

- la force parallèle à OZ = $F_r \cos\alpha - T \sin\alpha$
- la force perpendiculaire à OZ = $F_r \sin\alpha + T \cos\alpha$

et on déduit, d'après les expressions de F_r, T ,

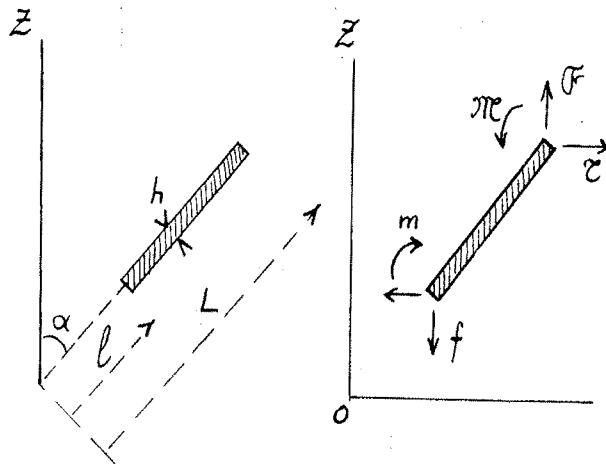
$$F_r \cos\alpha - T \sin\alpha = \frac{q_0 r}{2} \sin\alpha - \frac{\delta r^2}{3} \sin\alpha \cos\alpha + \frac{p h r}{2} + \frac{K \cos\alpha}{r}$$

$$F_r \sin\alpha + T \cos\alpha = \frac{q_0 r}{2} \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha - \frac{\delta r^2}{3} \left(\sin^2\alpha - \frac{2A}{\lambda + r} \right) + \frac{p h r}{2} \operatorname{tg}\alpha - C (C+1) h^2 \frac{\alpha^2 \sin\alpha}{\lambda \cdot \xi} + \frac{K \sin\alpha}{r}$$

$$- \frac{17h}{\lambda^2 r \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha} [A J_2(k_1 \lambda x) + B Y_2(k_1 \lambda x) - C J_2(k_2 \lambda x) - D Y_2(k_2 \lambda x)]$$

Ainsi, pour un tronc de cône donné, défini par $r \leq r \leq L$, on désigne par :

....



f
t) les efforts appliqués à r = l
m

F
Z) les efforts appliqués à r = L
pi_e

(voir la figure ci-contre)

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h \cdot t \cdot g \cdot \alpha}$$

$$\Theta = \lambda \sqrt{d}$$

$$\textcircled{H} = \lambda \sqrt{L}$$

et on a

$$f = \frac{q_0 l}{2} \sin \alpha - \frac{\delta l^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{ph}{2} + \frac{K \cos \alpha}{l}$$

$$F = \frac{q_0 L}{2} \sin \alpha - \frac{\delta L^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{phL}{2} + \frac{K \cos \alpha}{L}$$

$$t = \delta \cdot t \cdot g \cdot \alpha + \frac{\delta \delta}{\lambda^4} - \delta (\nu + \eta) \Gamma h \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot c} - \frac{i h b}{\lambda^4 t \cdot g \cdot \alpha \sin \alpha} [A J_2(k_1 \Theta) + E Y_2(k_1 \Theta) - C J_2(k_2 \Theta) - E Y_2(k_2 \Theta)]$$

$$Z = F \cdot t \cdot g \cdot \alpha + \frac{\delta \delta}{\lambda^4} - \delta (\nu + \eta) \Gamma h \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot c} - \frac{i h b}{\lambda^4 t \cdot g \cdot \alpha \sin \alpha} [A J_2(k_1 \textcircled{H}) + E Y_2(k_1 \textcircled{H}) - C J_2(k_2 \textcircled{H}) - E Y_2(k_2 \textcircled{H})]$$

$$m = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ - \frac{1-\nu}{l \sin \alpha} \left[(1+\nu) q_0 + (5+3\nu) \delta l \cos \alpha - \frac{ph}{\sin \alpha} [1+2\nu - (1+\nu)(\nu+\eta) \cos^2 \alpha] \right] \right.$$

$$\left. - (\nu+\eta)(\nu+\eta) \Gamma h \frac{l \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{c} \right\} - \frac{E h}{\lambda^4 t \cdot g \cdot \alpha^2} \left\{ A [(1-\nu) J_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{2} J_1(k_1 \Theta)] \right.$$

$$\left. + B [(1-\nu) Y_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{2} Y_1(k_1 \Theta)] + C [(1-\nu) J_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{2} J_1(k_2 \Theta)] \right.$$

$$\left. + D [(1-\nu) Y_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{2} Y_1(k_2 \Theta)] \right\}$$

$$\pi_e = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ - \frac{1-\nu}{L \sin \alpha} \left[F - (1+\nu) q_0 + (5+3\nu) \delta L \cos \alpha - \frac{ph}{\sin \alpha} [(1+\nu) - (1+\nu)(\nu+\eta) \cos^2 \alpha] \right] \right.$$

$$\left. - (\nu+\eta)(\nu+\eta) \Gamma h \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{c} \right\} - \frac{E h}{\lambda^4 t \cdot g \cdot \alpha^2} \left\{ A [(1-\nu) J_2(k_1 \textcircled{H}) - \frac{k_1 \textcircled{H}}{2} J_1(k_1 \textcircled{H})] \right.$$

$$+ B \left[(1-\eta) Y_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{z} Y_1(k_1 \Theta) \right] + C \left[(1-\eta) J_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} J_1(k_2 \Theta) \right]$$

$$+ D \left[(1-\eta) Y_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} Y_1(k_2 \Theta) \right]$$

On voit d'abord que les valeurs de f , \mathcal{F} sont liées, et que K est défini par une de ces valeurs.

Mais en pratique, on préfère employer la relation suivante :

$$lf - \frac{q_0 l^2}{z} \sin \alpha + \frac{Sl^3 \sin \alpha \cos \alpha}{3} - \frac{phl^2}{z} = L\mathcal{F} - \frac{q_0 l^2}{z} \sin \alpha + \frac{\delta l^3 \sin \alpha \cos \alpha}{3} - \frac{phL^2}{z} = K \cos \alpha$$

D'autre part on voit qu'en posant :

$$(I) = \frac{i\lambda^2 l t g \alpha \sin \alpha}{lh} \left[t - f t g \alpha - \frac{\xi \delta}{\lambda^4} + \mathcal{J}(\mathcal{J}+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot g} \right]$$

$$(II) = \frac{i\lambda^2 L t g \alpha \sin \alpha}{lh} \left[\mathcal{Z} - \mathcal{F} t g \alpha - \frac{\xi \delta}{\lambda^4} + \mathcal{J}(\mathcal{J}+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot g} \right]$$

$$(III) = - \frac{\lambda^4 l t g^2 \alpha}{lh} \left[\frac{1}{\lambda^4} \left\{ \frac{1-\eta}{L \sin \alpha} f + (1+2\eta) q_0 - (5+3\eta) \delta l \cos \alpha - \frac{ph}{\sin \alpha} [1+2\eta - (1+\eta)(2+\eta) \cos^2 \alpha] \right. \right.$$

$$\left. \left. + (2+\eta)(\mathcal{J}+\eta) ph \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right\} \right]$$

$$(IV) = - \frac{\lambda^4 L t g^2 \alpha}{lh} \left[\frac{1}{\lambda^4} \left\{ \frac{1-\eta}{L \sin \alpha} \mathcal{F} + (1+2\eta) q_0 - (5+3\eta) \delta l \cos \alpha - \frac{ph}{\sin \alpha} [1+2\eta - (1+\eta)(2+\eta) \cos^2 \alpha] \right. \right.$$

$$\left. \left. + (2+\eta)(\mathcal{J}+\eta) ph \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right\} \right]$$

les constantes A, B, C, D sont définies par :

$$A J_2(k_1 \Theta) + B Y_2(k_1 \Theta) - C J_2(k_2 \Theta) - D Y_2(k_2 \Theta) = (I)$$

$$A J_2(k_1 \Theta) + B Y_2(k_1 \Theta) - C J_2(k_2 \Theta) - D Y_2(k_2 \Theta) = (II)$$

$$A \left[(1-\eta) J_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{z} J_1(k_1 \Theta) \right] + B \left[(1-\eta) Y_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{z} Y_1(k_1 \Theta) \right]$$

$$+ C \left[(1-\eta) J_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} J_1(k_2 \Theta) \right] + D \left[(1-\eta) Y_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} Y_1(k_2 \Theta) \right] = (III)$$

$$A \left[(1-\eta) J_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{z} J_1(k_1 \Theta) \right] + B \left[(1-\eta) Y_2(k_1 \Theta) - \frac{k_1 \Theta}{z} Y_1(k_1 \Theta) \right]$$

$$+ C \left[(1-\eta) J_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} J_1(k_2 \Theta) \right] + D \left[(1-\eta) Y_2(k_2 \Theta) - \frac{k_2 \Theta}{z} Y_1(k_2 \Theta) \right] = (IV)$$

Le déterminant formé par les coefficients de A, B, C, D du système ci-dessus arrangé dans l'ordre indiqué sera désigné par Δ . Pour le calculer, on pose symboliquement :

$$\overline{RS}(z) = z(1-\eta)l_2(k_1z)S_2(k_2z) - \left[\frac{k_1z}{z} R_1(k_1z)S_2(k_2z) + \frac{k_2z}{z} R_2(k_1z)S_1(k_2z) \right]$$

Les relations suivantes très faciles à démontrer seront très utiles dans la suite :

$$J_2(k_1z) \overline{YY}(z) - Y_2(k_1z) \overline{JY}(z) = -\frac{1}{\pi} Y_2(k_2z)$$

$$J_2(k_1z) \overline{YJ}(z) - Y_2(k_1z) \overline{JJ}(z) = -\frac{1}{\pi} J_2(k_2z)$$

$$J_2(k_2z) \overline{YY}(z) - Y_2(k_2z) \overline{YJ}(z) = -\frac{1}{\pi} Y_2(k_1z)$$

$$J_2(k_2z) \overline{JY}(z) - Y_2(k_2z) \overline{JJ}(z) = -\frac{1}{\pi} J_2(k_1z)$$

$$J_1(k_1z) \overline{YY}(z) - Y_1(k_1z) \overline{JY}(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4(1-\eta) \frac{Y_2(k_2z)}{k_2z} - Y_1(k_2z) \right\}$$

$$J_1(k_1z) \overline{YJ}(z) - Y_1(k_1z) \overline{JJ}(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4(1-\eta) \frac{J_2(k_2z)}{k_2z} - J_1(k_2z) \right\}$$

$$J_1(k_2z) \overline{YY}(z) - Y_1(k_2z) \overline{YJ}(z) = -\frac{1}{\pi} \left\{ 4(1-\eta) \frac{Y_2(k_1z)}{k_1z} - Y_1(k_1z) \right\}$$

$$J_1(k_2z) \overline{JY}(z) - Y_1(k_2z) \overline{JJ}(z) = -\frac{1}{\pi} \left\{ 4(1-\eta) \frac{J_2(k_1z)}{k_1z} - J_1(k_1z) \right\}$$

Pour mieux exploiter les résultats obtenus et pour faciliter les calculs pratiques nous définissons enfin :

$$\frac{k_1z J_1(k_1z)}{z J_2(k_1z)} = G_1(z)$$

$$\frac{k_2z J_1(k_2z)}{z J_2(k_2z)} = G_2(z)$$

$$\frac{k_1z Y_1(k_1z)}{z Y_2(k_1z)} = H_1(z)$$

$$\frac{k_2z Y_1(k_2z)}{z Y_2(k_2z)} = H_2(z)$$

ou $G_1(z)$, $G_2(z)$; $H_1(z)$, $H_2(z)$ sont respectivement conjuguées.

Avec ces notations, on a :

$$\overline{YI}(z) = Y_2(k_1 z) Y_2(k_2 z) \{ z(1-\tau_1) - [H_1(z) + H_2(z)] \}$$

$$\overline{YJ}(z) = Y_2(k_1 z) J_2(k_2 z) \{ z(1-\tau_1) - [H_1(z) + G_2(z)] \}$$

$$\overline{JY}(z) = J_2(k_1 z) Y_2(k_2 z) \{ z(1-\tau_1) - [G_1(z) + H_2(z)] \}$$

$$\overline{JJ}(z) = J_2(k_1 z) J_2(k_2 z) \{ z(1-\tau_1) - [G_1(z) + G_2(z)] \}$$

puis

$$J_2(k_1 z) Y_2(k_2 z) [H_1(z) - G_1(z)] = \frac{1}{\pi}$$

$$J_2(k_2 z) Y_2(k_1 z) [H_2(z) - G_2(z)] = \frac{1}{\pi}$$

En faisant le calcul, on trouve d'abord que :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{z}{\pi} + \overline{YI}(\Theta) \overline{JJ}(\Theta) + \overline{JJ}(\Theta) \overline{YI}(\Theta) - \overline{JY}(\Theta) \overline{YJ}(\Theta) - \overline{YJ}(\Theta) \overline{JY}(\Theta) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[2 + \frac{1}{H_1(\Theta) - G_1(\Theta)} \frac{1}{H_2(\Theta) - G_2(\Theta)} \left[\frac{J_2(k_1 \Theta)}{J_2(k_1 \Theta)} \frac{J_2(k_2 \Theta)}{J_2(k_2 \Theta)} \{ z(1-\tau_1) - [G_1(\Theta) + G_2(\Theta)] \} \{ z(1-\tau_1) - [H_1(\Theta) + H_2(\Theta)] \} \right. \right. \\ &\quad + \frac{Y_2(k_1 \Theta)}{Y_2(k_1 \Theta)} \frac{Y_2(k_2 \Theta)}{Y_2(k_2 \Theta)} \{ z(1-\tau_1) - [H_1(\Theta) + H_2(\Theta)] \} \{ z(1-\tau_1) - [G_1(\Theta) + G_2(\Theta)] \} \\ &\quad - \frac{J_2(k_1 \Theta)}{J_2(k_1 \Theta)} \frac{Y_2(k_2 \Theta)}{Y_2(k_2 \Theta)} \{ z(1-\tau_1) - [G_1(\Theta) + H_2(\Theta)] \} \{ z(1-\tau_1) - [H_1(\Theta) + G_2(\Theta)] \} \\ &\quad \left. \left. - \frac{Y_2(k_1 \Theta)}{Y_2(k_1 \Theta)} \frac{J_2(k_2 \Theta)}{J_2(k_2 \Theta)} \{ z(1-\tau_1) - [H_1(\Theta) + G_2(\Theta)] \} \{ z(1-\tau_1) - [G_1(\Theta) + H_2(\Theta)] \} \right] \right] \end{aligned}$$

Δ est toujours réel.

A, B, C, D sont définies alors par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(I)}{\Delta} \left\{ -\frac{1}{\pi} Y_2(k_1 \Theta) [1-\tau_1 H_1(\Theta)] + J_2(k_2 \Theta) [1-\tau_1 G_2(\Theta)] \overline{YI}(\Theta) - Y_2(k_2 \Theta) [1-\tau_1 H_2(\Theta)] \overline{YJ}(\Theta) \right\} \\ &\quad + \frac{(II)}{\Delta} \left\{ -\frac{1}{\pi} Y_2(k_1 \Theta) [1-\tau_1 H_1(\Theta)] + J_2(k_2 \Theta) [1-\tau_1 G_2(\Theta)] \overline{YI}(\Theta) - Y_2(k_2 \Theta) [1-\tau_1 H_2(\Theta)] \overline{YJ}(\Theta) \right\} \\ &\quad + \frac{(III)}{\Delta} \left\{ -\frac{1}{\pi} Y_2(k_1 \Theta) + J_2(k_2 \Theta) \overline{YI}(\Theta) - Y_2(k_2 \Theta) \overline{YJ}(\Theta) \right\} \\ &\quad + \frac{(IV)}{\Delta} \left\{ -\frac{1}{\pi} Y_2(k_1 \Theta) + J_2(k_2 \Theta) \overline{YI}(\Theta) - Y_2(k_2 \Theta) \overline{YJ}(\Theta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(I)}{\Delta} \left\{ + \frac{1}{\pi} J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] - J_2(k_2\theta) [1-\tau-G_2(\theta)] \overline{JY}(\theta) + Y_2(k_2\theta) [1-\tau-H_2(\theta)] \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(II)}{\Delta} \left\{ + \frac{1}{\pi} J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] - J_2(k_2\theta) [1-\tau-G_2(\theta)] \overline{JY}(\theta) + Y_2(k_2\theta) [1-\tau-H_2(\theta)] \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(III)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_1\theta) - J_2(k_2\theta) \overline{JY}(\theta) + Y_2(k_2\theta) \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(IV)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_1\theta) - J_2(k_2\theta) \overline{JY}(\theta) + Y_2(k_2\theta) \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 C &= \frac{(I)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} Y_2(k_2\theta) [1-\tau-H_2(\theta)] - J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] \overline{YY}(\theta) + Y_2(k_1\theta) [1-\tau-H_1(\theta)] \overline{JY}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(II)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} Y_2(k_2\theta) [1-\tau-H_2(\theta)] - J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] \overline{YY}(\theta) + Y_2(k_1\theta) [1-\tau-H_1(\theta)] \overline{JY}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(III)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} Y_2(k_2\theta) + J_2(k_1\theta) \overline{YY}(\theta) - Y_2(k_1\theta) \overline{JY}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(IV)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} Y_2(k_2\theta) + J_2(k_1\theta) \overline{YY}(\theta) - Y_2(k_1\theta) \overline{JY}(\theta) \right\} \\
 D &= \frac{(I)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_2\theta) [1-\tau-G_2(\theta)] + J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] \overline{YJ}(\theta) - Y_2(k_1\theta) [1-\tau-H_1(\theta)] \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(II)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_2\theta) [1-\tau-G_2(\theta)] + J_2(k_1\theta) [1-\tau-G_1(\theta)] \overline{YJ}(\theta) - Y_2(k_1\theta) [1-\tau-H_1(\theta)] \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(III)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_2\theta) - J_2(k_1\theta) \overline{YJ}(\theta) + Y_2(k_1\theta) \overline{JJ}(\theta) \right\} \\
 &+ \frac{(IV)}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{\pi} J_2(k_2\theta) - J_2(k_1\theta) \overline{YJ}(\theta) + Y_2(k_1\theta) \overline{JJ}(\theta) \right\}
 \end{aligned}$$

Il est très facile de voir que A,C ; B,D sont respectivement conjuguées. Ces expressions montrent que l'on a besoin de :

- G₁(z)
- J₂(k₁z)
- H₁(z)
- Y₂(k₁z)

pour faire les calculs pratiques.

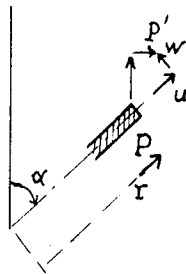
* * *

Quant aux problèmes hyperstatiques, nous avons dit que les conditions aux limites imposent certaines déformations. Pour la détermination des constantes d'intégration A,B,C,D,E,H, on peut très bien exprimer directement les conditions aux limites en fonction de A,B,C,D,E,H. Or pratiquement on préfère procéder d'une autre façon en se donnant les efforts qui agissent aux sections extrêmes, nouvelles inconnues nécessaires pour rendre le problème statique, et en exprimant ensuite que les déformations ainsi obtenues satisfont aux conditions imposées. Ce procédé, semble-t-il, complique les calculs, mais il a l'avantage d'offrir un schéma plus concret du phénomène physique et de rendre les calculs plus systématiques. De plus il n'a pas introduit des calculs super-

plus, puisque on a toujours besoin, dans un problème de la résistance, de connaître les efforts aux sections extrêmes.

Ainsi, on voit qu'il est préférable d'avoir les expressions des diverses déformations aux limites en fonction des divers efforts appliqués pour traiter les problèmes hyperstatiques. Et d'autre part, ces expressions dites formules des coefficients d'influence serviront à faciliter les calculs des diverses déformations aux sections extrêmes pour les problèmes statiques.

Pour les problèmes concernant un cône, on sait qu'en un point P donné, ce sont les déplacements le long de l'axe de révolution d'une part et d'autre part, perpendiculaire à ce même axe, c'est-à-dire :



$$z = u \cos \alpha + w \sin \alpha$$

$$\rho = u \sin \alpha - w \cos \alpha$$

qui présentent le plus d'intérêt pratique dans l'industrie.

Ainsi, on a, d'après les expressions de u et de w, et en employant les notations :

$$G_1, C_2, H_1, H_2$$

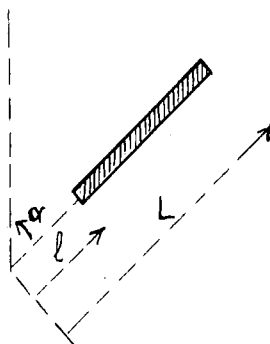
précisées plus haut :

$$z = \frac{\sin \alpha}{Eh} \left\{ \frac{4or^2}{4} (1-2\eta-3t\eta^2\alpha) - \frac{5r^3 \cos \alpha}{3} [1-3\eta-8t\eta^2\alpha - \frac{7z(1-\eta)}{\lambda^4 r^2}] + \frac{ph r^2}{4 \sin \alpha} (1+4 \sin^2 \alpha - 3t\eta^2\alpha) \right. \\ \left. - \frac{ph r^3 \alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3 \cdot g} \left[\frac{\eta}{\cos^2 \alpha} + 3t\eta^2\alpha + \frac{5(1-\eta)(3+\eta)}{\lambda^4 r^2} \right] + \frac{K}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{\log r \cdot \eta}{t\eta} + \frac{H}{\sin \alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda^2 \sin \alpha} \left\{ A \cdot J_2(k_1 \lambda x) [\eta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - \frac{1}{\lambda^2 r}) G_1(\lambda x)] \right. \right. \\ \left. + B \cdot Y_2(k_1 \lambda x) [\eta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - \frac{1}{\lambda^2 r}) H_1(\lambda x)] \right. \\ \left. - C \cdot J_2(k_2 \lambda x) [\eta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha + \frac{1}{\lambda^2 r}) G_2(\lambda x)] \right. \\ \left. - D \cdot Y_2(k_2 \lambda x) [\eta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha + \frac{1}{\lambda^2 r}) H_2(\lambda x)] \right\}$$

et,

$$\frac{\rho}{r \sin \alpha} = \frac{t\eta \alpha}{2} \frac{4or^2}{4} (1-\eta) - \frac{\delta r^2}{3} \cos \alpha [3-4\eta - \frac{24(1-\eta)^2}{\lambda^4 r^2}] + \frac{5hr}{2 \sin \alpha} (2 \sin^2 \alpha - \eta) + ph \frac{r^2 \alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3} \left[1 - \frac{5(1-\eta)(3+\eta)}{\lambda^4 r^2} \right] - \frac{\eta K}{rt\eta} \\ + \frac{1}{\lambda^2 rt\eta} \left\{ A \cdot J_2(k_1 \lambda x) [1+\eta-G_1(\lambda x)] + B \cdot Y_2(k_1 \lambda x) [1+\eta-H_1(\lambda x)] - C \cdot J_2(k_2 \lambda x) [1+\eta-G_2(\lambda x)] - D \cdot Y_2(k_2 \lambda x) [1+\eta-H_2(\lambda x)] \right\}$$

Pour un tronç de cône défini par $l \leq r \leq L$, on désigne par



$$\left. \begin{aligned} z \\ v = \frac{f}{r \sin \alpha} \\ \varphi = \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\} \text{les déformations à } r=l$$

$$\left. \begin{aligned} z \\ v = \frac{f}{r \sin \alpha} \\ \varphi = \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\} \text{les déformations à } r=L$$

et on a d'abord :

$$Q = \frac{t_0^2 \alpha}{2h} \left\{ \frac{f}{\sin \alpha} - 2q_0 l + \delta l^2 \cos \alpha - \frac{phl}{\sin \alpha} [k - (k+1) \cos^2 \alpha] - (k+1) ph \frac{l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \right\}$$

$$+ A \cdot J_2(k_1 C) + B \cdot Y_2(k_1 \Theta) + C \cdot J_2(k_2 \psi) + L \cdot Y_2(k_2 C)$$

$$v = \frac{t_0 \alpha}{2h} \left\{ -\eta \frac{f}{\sin \alpha} + q_0 l - \delta l^2 \cos \alpha \left[1 - \frac{\epsilon(1-\eta)}{\lambda^2 l^2} \right] + \eta h / \sin \alpha + \frac{phl^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon(1-\eta)(k+1)}{\lambda^2 l^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 l t_0 \alpha} \left\{ A \cdot J_2(k_1 C) [1+\eta-C_1(\Theta)] + B \cdot Y_2(k_1 \Theta) [1+\eta-E_1(\Theta)] - C \cdot J_2(k_2 \psi) [1+\eta-C_2(\psi)] - L \cdot Y_2(k_2 C) [1+\eta-E_2(\Theta)] \right\}$$

$$q = \frac{t_0^2 \alpha}{2h} \left\{ \frac{f}{\sin \alpha} - 2q_0 L + \delta L^2 \cos \alpha - \frac{p h L}{\sin \alpha} [k - (k+1) \cos^2 \alpha] - (k+1) ph \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \right\}$$

$$+ A \cdot J_2(k_1 \Theta) + L \cdot Y_2(k_1 \Theta) + C \cdot J_2(k_2 \Theta) + L \cdot Y_2(k_2 \Theta)$$

$$V = \frac{t_0 \alpha}{2h} \left\{ -\eta \frac{f}{\sin \alpha} + q_0 L - \delta L^2 \cos \alpha \left[1 - \frac{\epsilon(1-\eta)}{\lambda^2 L^2} \right] + p h L \sin \alpha + \frac{p h L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon(1-\eta)(k+1)}{\lambda^2 L^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 L t_0 \alpha} \left\{ A \cdot J_2(k_1 \Theta) [1+\eta-C_1(\Theta)] + B \cdot Y_2(k_1 \Theta) [1+\eta-E_1(\Theta)] - C \cdot J_2(k_2 \Theta) [1+\eta-C_2(\Theta)] - L \cdot Y_2(k_2 \Theta) [1+\eta-E_2(\Theta)] \right\}$$

Pour remplacer dans ces formules les constantes A, B, C, L par leurs valeurs trouvées plus haut, nous posons :

$$\textcircled{a} = \sigma_c(\psi_1) J_2(\psi_2) \psi_1(\Theta) - \sigma_c(\Theta) \overline{Y_2}(\Theta) + Y_2(\psi_1) Y_2(\psi_2) [Y_1(\Theta) - Y_2(\Theta)] \overline{J_2}(\Theta)$$

$$- J_2(\psi_1) Y_2(\psi_2) \psi_1(\Theta) - \sigma_c(\Theta) \overline{Y_2}(\Theta) - Y_2(\psi_1) J_2(\psi_2) [Y_1(\Theta) - C_2(\Theta)] \overline{J_2}(\Theta)$$

$$\textcircled{b} = -C_2(\psi_1) Y_2(\psi_1) \Theta [1-\eta-C_1(\Theta)] + C_2(\psi_1) J_2(\psi_1) \Theta [1+\eta-E_1(\Theta)]$$

$$+ C_2(\psi_2) Y_2(\psi_2) \Theta [1-\eta-C_2(\Theta)] + C_2(\psi_2) J_2(\psi_2) \Theta [1+\eta-E_2(\Theta)]$$

$$\textcircled{c} = -C_2(\psi_1) \Theta [1-\eta-C_1(\Theta)] + C_2(\psi_1) Y_2(k_1 \Theta) [1+\eta-E_1(\Theta)]$$

$$- C_2(\psi_2) \Theta [1-\eta-C_2(\Theta)] + C_2(\psi_2) Y_2(k_2 \Theta) [1+\eta-E_2(\Theta)]$$

$$(d) = J_2(k_1 \theta) Y_2(k_1 \mathbb{H}) - Y_2(k_1 \theta) J_2(k_1 \mathbb{H}) + J_2(k_2 \theta) Y_2(k_2 \mathbb{H}) - Y_2(k_2 \theta) J_2(k_2 \mathbb{H})$$

$$(e) = \frac{2\eta}{\pi} J_2(k_1 \theta) J_2(k_2 \theta) \{ (1-\eta)^2 - [G_1(\theta) + G_2(\theta)] + G_1(\theta) G_2(\theta) \} \overline{Y}(\mathbb{H})$$

$$+ Y_2(k_1 \theta) Y_2(k_2 \theta) \{ (1-\eta)^2 - [H_1(\theta) + H_2(\theta)] + H_1(\theta) H_2(\theta) \} \overline{J}(\mathbb{H})$$

$$- J_2(k_1 \theta) Y_2(k_2 \theta) \{ (1-\eta)^2 - [K_1(\theta) + K_2(\theta)] + K_1(\theta) K_2(\theta) \} \overline{Y}(\mathbb{H})$$

$$- Y_2(k_1 \theta) J_2(k_2 \theta) \{ (1-\eta)^2 - [L_1(\theta) + L_2(\theta)] + L_1(\theta) L_2(\theta) \} \overline{J}(\mathbb{H})$$

$$(f) = -J_2(k_1 \theta) Y_2(k_1 \mathbb{H}) \{ (1-\eta) H_1(\theta) \} \{ (1-\eta) H_1(\mathbb{H}) \} + Y_2(k_1 \theta) J_2(k_1 \mathbb{H}) \{ (1-\eta) H_1(\theta) \} \{ (1-\eta) H_1(\mathbb{H}) \}$$

$$- J_2(k_2 \theta) Y_2(k_2 \mathbb{H}) \{ (1-\eta) H_2(\theta) \} \{ (1-\eta) H_2(\mathbb{H}) \} + Y_2(k_2 \theta) J_2(k_2 \mathbb{H}) \{ (1-\eta) H_2(\theta) \} \{ (1-\eta) H_2(\mathbb{H}) \}$$

dans lesquelles, on change a la fois θ en \mathbb{H} , et \mathbb{H} en θ .

(a) deviendra (A)

(b) " (B)

(c) " (C)

(d) " (D) = - (d)

(e) " (E)

(f) " (F) = - (e)

Les expressions ψ , ν , σ , V écrites précédemment deviennent alors :

$$\psi = \frac{t \xi^2 \alpha}{l h} \left\{ \frac{f}{\sin \alpha} [-2q_0 l + 3 \delta l^2 \cos \alpha - \frac{p h l}{\sin \alpha} [k - (\lambda + \eta) \cos^2 \alpha] - (\lambda + \eta) l] + \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{\lambda^2} (I) (a) + \frac{2}{\pi} (II) (b) + \frac{2}{\pi} (III) (c) + \frac{2}{\pi} (IV) (d) \right]$$

$$\nu = \frac{t \xi \alpha}{l h} \left\{ -\eta \frac{f}{\sin \alpha} + q_0 l - \delta l^2 \cos \alpha \left[1 - \frac{\xi (1-\eta)}{\lambda^2 L^2} \right] + p h l \sin \alpha + p h \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \left[1 - \frac{\xi (1-\eta) (\lambda + \eta)}{\lambda^2 L^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\lambda^2 l t \xi \alpha} \left[\frac{2}{\pi} (I) (e) + \frac{2}{\pi} (II) (f) - (III) (a) + \frac{2}{\pi} (IV) (b) \right]$$

$$\sigma = \frac{t \xi^2 \alpha}{l h} \left\{ \frac{f}{\sin \alpha} [-2q_0 L + 3 \delta L^2 \cos \alpha - \frac{p h L}{\sin \alpha} [k - (\lambda + \eta) \cos^2 \alpha] - (\lambda + \eta) L] + \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \left[\frac{2}{\pi} (I) (c) + (II) (A) - \frac{2}{\pi} (III) (d) + \frac{2}{\pi} (IV) (C) \right]$$

$$V = \frac{t \xi \alpha}{l h} \left\{ -\eta \frac{f}{\sin \alpha} + q_0 L - \delta L^2 \cos \alpha \left[1 - \frac{\xi (1-\eta)}{\lambda^2 L^2} \right] + p h L \sin \alpha + p h \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \left[1 - \frac{\xi (1-\eta) (\lambda + \eta)}{\lambda^2 L^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\lambda^2 L t \xi \alpha} \left[-\frac{2}{\pi} (I) (f) + \frac{2}{\pi} (II) (E) + \frac{2}{\pi} (III) (b) - (IV) (A) \right]$$

et de plus, on voit que :

$$2-zz = \frac{\sin \alpha}{l h} \left\{ \frac{1 - 3\eta - 3t \xi^2 \alpha}{\xi} q_0 (L^2 - l^2) - \frac{\delta}{\eta} \cos \alpha \left[(1 - 3\eta - 8t \xi^2 \alpha) L^3 - l^3 \right] - \frac{7L (1-\eta)}{\lambda} (L-l) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ph}{4\sin\alpha} (1 + 4\sin^2\alpha - 3t\epsilon^2\alpha) (L^2 - l^2) - \frac{ph\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{3\epsilon} \left[\left(\frac{\eta_1}{\cos\alpha} + 3t\epsilon^2\alpha \right) (L^3 - l^3) \right. \\
 & \left. + 9 \frac{(1-\eta_1)(3+\eta_1)}{\lambda^4} (L-l) \right] + \frac{K}{\sin\alpha \cos\alpha} \log \frac{L}{l} \} \\
 & + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sin\alpha} \left\{ A \left[J_2(k_1 \frac{r}{L}) \right] \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) G_1 \left(\frac{r}{L} \right) \right] - J_2(k_1 \frac{r}{L}) \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) G_1 \left(\frac{r}{L} \right) \right] \right. \\
 & + B \left[Y_2(k_1 \frac{r}{L}) \right] \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) H_1 \left(\frac{r}{L} \right) \right] - Y_2(k_1 \frac{r}{L}) \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) H_1 \left(\frac{r}{L} \right) \right] \\
 & - C \left[J_2(k_2 \frac{r}{L}) \right] \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) G_2 \left(\frac{r}{L} \right) \right] - J_2(k_2 \frac{r}{L}) \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) G_2 \left(\frac{r}{L} \right) \right] \\
 & \left. - D \left[Y_2(k_2 \frac{r}{L}) \right] \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) H_2 \left(\frac{r}{L} \right) \right] - Y_2(k_2 \frac{r}{L}) \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2 L} \right) H_2 \left(\frac{r}{L} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Cette dernière quantité Z-z n'est autre chose que l'élongation totale du tronc du cône comprise entre $l \leq r \leq L$ dans la direction de son axe de révolution. Nous la désignons dorénavant par "fleche" suivant l'usage de la résistance des matériaux.

Nous pouvons très bien exprimer la fleche en fonction des efforts appliqués aux deux sections extrêmes. Or après avoir calculé ψ, ν, ϕ, V , on peut exprimer les diverses expressions :

$$\begin{aligned}
 & [A J_2(k_1 \lambda x) + B Y_2(k_1 \lambda x)] + [C J_2(k_2 \lambda x) + D Y_2(k_2 \lambda x)] \\
 & \left[A \frac{k_1 \lambda x}{z} J_1(k_1 \lambda x) + B \frac{k_1 \lambda x}{z} Y_1(k_1 \lambda x) \right] + \left[C \frac{k_2 \lambda x}{z} J_1(k_2 \lambda x) + D \frac{k_2 \lambda x}{z} Y_1(k_2 \lambda x) \right]
 \end{aligned}$$

pour $r = l$ et $r = L$ en fonction de $\psi, \phi, \nu, V, r, \mathcal{M}, t, \mathcal{U}, \dots$. D'où on déduit que :

$$\begin{aligned}
 Z - z & = \frac{\sin\alpha}{h\cos^2\alpha} (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2) + \frac{1-\eta_1}{\sin\alpha} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\phi}{L} - \frac{\psi}{l} \right) - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} (L\nu - l\nu) - \frac{\eta_1}{h\cos\alpha} [L(\mathcal{U}\sin\alpha + \mathcal{V}\cos\alpha) - l(t\sin\alpha + f\cos\alpha)] \\
 & + \frac{\sin\alpha}{h\cos^2\alpha} \left[(q_0 + \frac{ph}{\sin\alpha}) \frac{L^2 - l^2}{z} - \frac{3\cos\alpha}{9} (L^3 - l^3) + \frac{\eta_1 ph\cos^2\alpha}{z \sin\alpha} (L^2 - l^2) - \frac{\eta_1 ph\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{3 \epsilon} (L^3 - l^3) \right. \\
 & \left. + \frac{K\cos\alpha}{\sin\alpha} \log \frac{L}{l} \right]
 \end{aligned}$$

* * *

Au sujet des problèmes relatifs au cône complet, défini géométriquement par $l < r < L$, des difficultés théoriques se posent. En effet, nous savons que la solution générale du cône n'est plus valable dans le domaine

$$r.t\epsilon\alpha < \frac{h}{z}$$

puisque les équations de base n'y sont plus valables ; on peut même dire qu'elle ne donne que des expressions approximatives pour les $r.t\epsilon\alpha$ compris entre $h/2$ et 2 à 4 fois h , puisque dans ce domaine, nous n'avons pas le droit de considérer le cône comme une enveloppe

mince. Néanmoins, à l'aide du principe de Saint-Venant, on peut prendre, pour les problèmes du cône complet, l'une des deux hypothèses suivantes, qui sont, à notre avis, toutes deux correctes :

1°) la partie du cône définie par $r \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{h}{2}$ travaille en bloc et sans déformation, c'est-à-dire les conditions aux limites des cônes complets sont :

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \psi &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{pour } l = \frac{h}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

2°) La notion de surface moyenne existe même pour $r < \frac{h}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ et on y admet la validité des principes de la résistance des matériaux jusqu'à $r = 0$. Les conditions aux limites des cônes complets sont alors :

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \psi &= 0 \end{aligned}$$

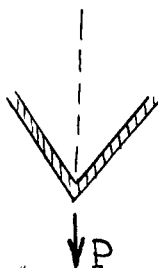
$$\text{pour } l = 0.$$

Nous nous sommes imposés d'adopter la dernière hypothèse dans la suite pour la simplicité des calculs.

Après avoir précisé ces notions, on voit que les problèmes relatifs au cône complet, sont en réalité, un cas particulier des problèmes hyperstatiques des troncs de cône, dans lequel, on a :

$$\alpha \neq 0$$

avec :



$$\lim_{l \rightarrow 0} \operatorname{tg} l \operatorname{sing.} f = P$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \psi = 0$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} l' = \lim_{l \rightarrow 0} l \operatorname{sing.} v = 0$$

On peut faire ainsi tous les calculs d'après les formules générales des troncs de cône.

Or, l'importance de ces problèmes est tellement grande que nous jugeons très désirable de les traiter directement.

L'après les formules de f, \mathcal{F}, ψ, v des troncs de cône, on voit que la première condition aux limites pour $l \rightarrow 0$ se réduit à

$$K = \frac{P}{2\pi \sin \alpha \cos \alpha}$$

Puis à l'aide de développements des fonctions de Bessel en série ascendante :

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \left[\frac{1}{0!1!} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!2!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!3!} - \dots \right]$$

$$J_2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{0!2!} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!3!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!4!} - \dots \right]$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{\pi} J_1(z) \left[\gamma + \log \frac{z}{2} \right] - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right) \left[\psi(0) + \psi(1) \right] - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^3}{1!2!} [\psi(1) + \psi(2)] + \dots$$

$$Y_2(z) = \frac{z}{\pi} J_2(z) \left[\gamma + \log \frac{z}{2} \right] - \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 1 \right] - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^2 [\psi(0) + \psi(2)] - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{1!3!} [\psi(1) + \psi(3)] + \dots$$

ou

$\gamma = 0,577215$ constante d'Euler

$$\psi(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}; \quad \psi(0) = 0$$

On voit que les deux autres conditions deviennent respectivement :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left\{ \frac{Ktg\alpha}{lh} - \frac{B}{\pi} \left[\left(\frac{z}{k_1\alpha}\right)^2 + 1 \right] - \frac{D}{\pi} \left[\left(\frac{z}{k_2\alpha}\right)^2 + 1 \right] \right\} = 0$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1K}{Eh} + \frac{1h}{\sqrt{1-\eta^2}} \left[B \left\{ -(1+\eta) \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{z}{k_1\alpha}\right)^2 + 1 \right] + \frac{1}{\pi} \right\} - D \left\{ -(1+\eta) \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{z}{k_2\alpha}\right)^2 + 1 \right] + \frac{1}{\pi} \right\} \right] \right\} = 0$$

qui montrent que

$$B-D = \frac{1K\pi\sqrt{1-\eta^2}}{lh^2}$$

$$B+D = 0$$

D'où

$$K = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$B = i \frac{\sqrt{3(1-\eta^2)}}{2} \cdot \frac{P}{lh^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$D = -i \frac{\sqrt{3(1-\eta^2)}}{2} \cdot \frac{P}{lh^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Or, pour les cônes complets, nous sommes obligés d'écartier les cas où P, force totale dans la direction de l'axe Oz et appliquée au sommet, est différent de

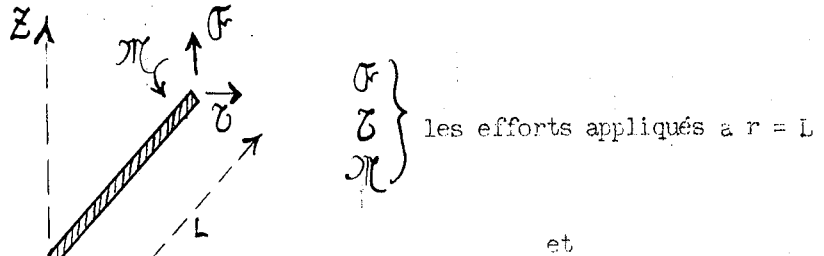
zéro ; sinon, nous trouverons dans les calculs pratiques pour E_P, E_Q , des valeurs infiniment grandes vers le sommet O. Et il est plus raisonnable de traiter les problèmes avec P non nul par les formules des troncs de cône avec l petit et non nul.

Ainsi, pour les cônes complets, on doit avoir

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 \\ E &= D = 0 \end{aligned}$$

et les constantes A, C seront déterminées par les conditions aux limites $r = L$.

Or quelle que soit la nature du problème du cône complet, statique ou hyperstatique, on désigne, comme dans le cas des troncs de cône, par :



$$(II) = \frac{i\lambda^2 L t g \alpha \sin \alpha}{Eh} \left(Z \cdot F t g \alpha - \frac{\delta \delta}{\lambda^4} + \varepsilon (\delta + \eta) p h \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 g} \right)$$

$$(IV) = \frac{-\lambda^4 L t g^2 \alpha}{Eh} \left[\frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{1-\gamma_1}{L \sin \alpha} \left(F + (1+2\eta) q_0 - (5+3\eta) \delta L \cos \alpha + \frac{p h}{\sin \alpha} [(1+2\eta) - (1+\eta) (\lambda+\eta) \cos^2 \alpha] \right) + (\lambda+\eta) (\delta+\eta) p h \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right) \right]$$

on a :

$$A \cdot J_2(k_1(\delta)) - C \cdot J_2(k_2(\delta)) = (II)$$

$$A \left[(1-\eta) J_2(k_1(\delta)) - \frac{k_1(\delta)}{2} J_1(k_1(\delta)) \right] + C \left[(1-\eta) J_2(k_2(\delta)) - \frac{k_2(\delta)}{2} J_1(k_2(\delta)) \right] = (IV)$$

Et finalement :

$$A = \frac{1}{2(1-\eta) - [G_1(\delta) + G_2(\delta)]} \frac{1}{J_2(k_1(\delta))} \left\{ (II) [(1-\eta) G_2(\delta)] + (IV) \right\}$$

$$C = \frac{1}{2(1-\eta) - [G_1(\delta) + G_2(\delta)]} \frac{1}{J_2(k_2(\delta))} \left\{ (II) [(1-\eta) G_1(\delta)] + (IV) \right\}$$

Après avoir déterminé ces constantes, on peut calculer t, m pour $l = 0$.
En effet, on a

....

$$t = \frac{\omega \delta}{\lambda^4} - \frac{\omega(\omega+n)ph}{\lambda^4 \xi} - \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \xi} - \frac{1 \cdot h}{2 \lambda^2 t \xi \sin \alpha} (A \cdot J_2(k_1 \theta) - C \cdot J_2(k_2 \theta))$$

$$m = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ - \frac{\omega}{z} (1+n) q_0 - \frac{1+n}{z} \frac{ph}{\sin \alpha} [3 - 2(2+n) \cos^2 \alpha] - \frac{1 \cdot h}{\lambda^4 t \xi^2 \alpha} (A J_2(k_1 \theta) [1 - \Gamma - G_1(\theta)] + C J_2(k_2 \theta) [1 - \Gamma - G_2(\theta)]) \right\}$$

puisque dans ce cas :

$$P = 0$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{f}{l} = \frac{q_0 \sin \alpha}{z} + \frac{ph}{z}$$

Comme :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{J_2(k_1 \theta)}{\lambda^2 l} = \frac{1}{z}$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{J_2(k_2 \theta)}{\lambda^2 l} = -\frac{1}{z}$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} G_1(\theta) = \lim_{l \rightarrow 0} G_2(\theta) = z$$

on trouve que :

$$t = \frac{\omega \delta}{\lambda^4} - \frac{\omega(\omega+n)ph}{\lambda^4 \xi} + \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \xi} - \frac{1 \cdot h}{2 \lambda^2 t \xi \sin \alpha} \frac{1}{z(1-\Gamma) - [G_1(\theta) + G_2(\theta)]} \left\{ (II) \left[\frac{1-\Gamma-G_2(\theta)}{J_2(k_1 \theta)} - \frac{1-\Gamma-G_1(\theta)}{J_2(k_2 \theta)} \right] + (V) \left[\frac{1}{J_2(k_1 \theta)} + \frac{1}{J_2(k_2 \theta)} \right] \right\}$$

$$m = - \frac{3(1+n) q_0}{z} - \frac{1+n}{z} \frac{ph}{\sin \alpha} - \frac{3-2(2+n) \cos^2 \alpha}{\lambda^4}$$

$$+ \frac{1(1+n) h}{2 \lambda^4 t \xi^2 \alpha} \frac{1}{z(1-\Gamma) - [G_1(\theta) + G_2(\theta)]} \left\{ (II) \left[\frac{1-\Gamma-G_2(\theta)}{J_2(k_1 \theta)} + \frac{1-\Gamma-G_1(\theta)}{J_2(k_2 \theta)} \right] \right.$$

$$\left. + (V) \left[\frac{1}{J_2(k_1 \theta)} - \frac{1}{J_2(k_2 \theta)} \right] \right\}$$

Les déformations du cônes complet sont données d'autre part par les formules suivantes :

....

$\varphi = 0$

$$\sigma = \frac{t_0^2 \alpha}{lh} \left\{ \frac{G}{\sin \alpha} - 2q_0 L + 3\delta L^2 \cos \alpha - \frac{phL}{\sin \alpha} [2 - (\nu + \eta) \cos^2 \alpha] - (\nu + \eta) ph \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(\nu - \eta) + [G_1(\frac{E}{E_0}) + G_2(\frac{E}{E_0})]} \{ (\text{II}) [G_1(\frac{E}{E_0}) - G_2(\frac{E}{E_0})] + 2 (\text{IV}) \}$$

$$V = \frac{t_0 \alpha}{lh} \left\{ \eta \frac{G}{\sin \alpha} + q_0 L - \delta L^2 \cos \alpha \frac{2(\nu - \eta)}{\lambda + L^2} + phL \sin \alpha + \frac{phL^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon} \left[1 - \frac{2(\nu - \eta)(\nu + \eta)}{\lambda + L^2} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda^2 L t_0 \alpha} \frac{1}{2(\nu - \eta) + [G_1(\frac{E}{E_0}) + G_2(\frac{E}{E_0})]} \{ (\text{III}) 2(\nu - \eta)^2 - [G_1(\frac{E}{E_0}) + G_2(\frac{E}{E_0})] + G_1(\frac{E}{E_0}) G_2(\frac{E}{E_0}) \} \right.$$

$$\left. - (\text{IV}) [G_1(\frac{E}{E_0}) - G_2(\frac{E}{E_0})] \right\}$$

Et la Σz est donnée par

$$\Sigma z = \frac{\sin \alpha}{lh \cos^2 \alpha} \left\{ (1 - 2\nu \cos^2 \alpha) \frac{q_0 L^2}{2} - (1 - 3\nu \cos^2 \alpha) \frac{\delta L^3 \cos \alpha}{3} + \frac{phL^2}{2 \sin \alpha} - \eta \frac{phL^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \epsilon} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha}{lh \cos^2 \alpha} \left(\eta - \frac{\nu}{1 + \eta} \right) + \frac{1 - \nu}{\sin \alpha} \frac{1}{\lambda + L^2} \left(\frac{1}{L} - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\phi}{l} \right) - t_0 \alpha \sin \alpha LV - \frac{\eta \sin \alpha}{lh \cos \alpha} L^2 \right\}$$

dans laquelle

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\phi}{l} = \frac{t_0^2 \alpha}{lh} \left\{ -\frac{3}{2} q_0 - \frac{ph}{2 \sin \alpha} [2 - 2(\nu + \eta) \cos^2 \alpha] \right\} + \frac{1}{2} \frac{1}{L} = \frac{\lambda^4 t_0^2 \alpha}{lh} \frac{1}{1 + \eta}$$

Σz devient finalement :

$$\Sigma z = \frac{\sin \alpha}{lh \cos^2 \alpha} \left\{ (1 - 2\eta \cos^2 \alpha) \frac{q_0 L^2}{2} - (1 - 3\eta \cos^2 \alpha) \frac{\delta L^3 \cos \alpha}{3} + \frac{phL^2}{2 \sin \alpha} - \eta \frac{phL^3 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \epsilon} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha}{lh \cos^2 \alpha} \left(\eta - \frac{\nu}{1 + \eta} \right) + \frac{1 - \nu}{\sin \alpha} \frac{1}{\lambda + L^2} \frac{\phi}{L} - t_0 \alpha \sin \alpha LV - \frac{\eta \sin \alpha}{lh \cos \alpha} L^2 \right\}$$

Les formules que nous venons d'obtenir pour les troncs de cône et pour les cônes complets, sont tout à fait générales et valables même pour $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 0$. Ains on voit que les calculs des cônes dans la résistance des matériaux se font toujours suivant les mêmes formules, quel que soit α comprise entre 0 et $\pi/2$, à l'aide des valeurs des fonctions transcendentes :

$$\frac{k\rho}{z} \begin{matrix} J_1(k\rho) \\ J_2(k\rho) \\ \vdots \\ Y_1(k\rho) \\ Y_2(k\rho) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{J}_2(k, \beta) \\ & \tilde{I}_2(k, \beta) \end{aligned}$$

avec $k = i + j$, β réel positif, c'est-à-dire des valeurs prises sur la première bissectrice du plan complexe ; ce résultat général montre que les comportements d'un cône, dépendent essentiellement des positions des points représentatifs de $k\beta$, $k\beta^2$.

Or, théoriquement, on sait que les fonctions de Bessel admettent des développements asymptotiques, valables pour $k\beta$ assez grand ; et des développements en série ascendante, valables pour $k\beta$ assez petit.

Ainsi à ce point de vue, les calculs des pièces coniques dans les cas suivants sont relativement faciles :

1°) $\beta \neq 0$: problème du tronc de cône :

- 1) β infiniment grand : cas du tuyau
- 2) β assez grand
- 3) β , β^2 tous les deux moyens
- 4) β assez petit
- 5) β infiniment petit : cas de la plaque circulaire trouée

2°) $\beta = 0$, $\beta^2 \neq 0$: problème du cône complet :

- 6) β^2 assez grand
- 7) β^2 moyen
- 8) β^2 assez petit
- 9) β^2 infiniment petit : cas de la plaque circulaire sans trou.

En effet, les calculs relatifs aux cas **3)**, **7)** peuvent se faire seulement à l'aide des tables. Et les cas **4)**, **5)**, **8)** et **9)** dont les calculs pourraient être effectués avec des formules appropriées obtenues par des développements en série, peuvent se grouper ensemble (cas des quasi-plaques). Les formules appropriées ne sont pas absolument nécessaires mais elles présenteraient un intérêt appréciable ; car ces formules comprennent comme cas particulier les formules des plaques circulaires. Nous pouvons, en conséquence les appeler "formules des plaques circulaires et des quasi-plaques" ; et leur domaine d'application précise le sens de "quasi-plaques".

Quant aux calculs relatifs aux cas **2)** et **6)** nous avons dit qu'en principe on peut les effectuer à l'aide des développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Les formules asymptotiques afférentes respectivement à ces deux cas, si l'on arrive à les établir, présenteront un intérêt capital à la fois pour la théorie et la pratique.

Et spécialement pour le cas **2)** dont les formules asymptotiques comprennent comme cas particulier, les formules du cylindre. Nous pouvons, en conséquence les appeler formules des cylindres et des quasi-cylindres, et leur domaine d'application précise le sens de quasi-cylindres.

LES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DES QUASI-PLAQUES CIRCULAIRES ET DES QUASI-CYLINDRES

Nous avons vu la complexité des calculs d'un cône seul travaillant à la flexion de révolution.

Or dans l'industrie, pour des pièces constituées avec différentes parties de forme simple, dont une est conique (par exemple, l'assemblage d'un cône avec des plaques circulaires et des tuyaux), les calculs complets au point de vue de la résistance des matériaux sont encore plus complexes. En général, il est très raisonnable et recommandé à la fois de chercher d'abord les efforts de liaison entre les différentes parties et étudier ensuite les états à l'intérieur de chaque partie, c'est-à-dire on commence par ramener le problème entier en des problèmes partiels (à l'aide des formules qui expriment les déformations aux sections extrêmes en fonction des efforts de liaison).

Ainsi on voit l'importance pratique du rôle des formules exprimant les déformations aux bords d'une pièce de forme simple en fonction des efforts appliqués à ses sections extrêmes.

Pour une pièce conique de révolution, travaillant à la flexion, nous avons vu, dans le chapitre IV, les formules des coefficients d'influence qui contiennent des combinaisons de fonctions de Bessel, du reste très difficiles à utiliser dans leur forme générale, et nous avons signalé dans la fin du chapitre dernier qu'il est désirable d'avoir des formules plus maniables à l'usage de l'industrie.

Avant d'établir différentes formules, toutes approchées mais respectivement valables dans des domaines bien définis, nous allons d'abord souligner les remarques suivantes :

Mathématiquement, nous savons que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_1(z), J_2(z)$$

sont des séries entières en $(\frac{z}{2})^2$ et en conséquence, des fonctions paires par rapport à z. Quant aux

$$\frac{z}{z} Y_1(z), Y_2(z)$$

le sens ordinaire de "parité" ne leur est plus applicable à cause de la présence de $\text{Log} \left(\frac{z}{z}\right)$. Or en écrivant, pour n entier positif

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} J_n(z) \left[\text{Log} \left(\frac{z}{z}\right)^2 \right] - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{z}\right)^{2m} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{z}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} [\psi(n) + \psi(n+m)]$$

On voit que Y_n définie d'après Weber est de la forme

$$\left(\frac{z}{z}\right)^{-n} \left(S_1 \left[\left(\frac{z}{z}\right)^2\right] + S_2 \left[\left(\frac{z}{z}\right)^2\right] \cdot \text{Log} \left(\frac{z}{z}\right)^2 \right)$$

où S_1, S_2 désignent deux séries entières. Ceci montre que

$$\frac{z}{z} Y_1(z), Y_2(z)$$

ne contiennent que des opérations faites sur $\left(\frac{z}{z}\right)^2$.

Pour notre étude, nous prenons les déterminations principales de z , c'est-à-dire

$$z = \rho \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$$

Donc

$$\left(\frac{z}{z}\right)^2 = \pm i \lambda^2 r$$

et nous constatons que dans les combinaisons des fonctions de Bessel que nous devons étudier, i est toujours accompagné par λ^2 , ainsi les expressions $\text{A}, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \dots, \text{e}, \text{f}$ définies dans le chapitre IV sont d'une des deux formes suivantes :

$$i \lambda^2 \chi[\lambda^4]$$

$$\chi[\lambda^4]$$

et dans χ i ne figure pas explicitement.

En effet, les quantités $\text{A}, \text{a}, \text{b}, \dots$ sont des fonctions de $\left(\frac{k_1 l}{z}\right)^2, \left(\frac{k_2 l}{z}\right)^2, \left(\frac{k_1 l}{z}\right)^2, \left(\frac{k_2 l}{z}\right)^2$, c'est-à-dire des fonctions de $i \lambda^2 l, -i \lambda^2 l, i \lambda^2 l, -i \lambda^2 l$. Or en y changeant $i \lambda^2$ en $-i \lambda^2$, ces quantités doivent rester imaginaires pures ou réelles.

Cette observation préliminaire joue un rôle très important dans la suite.

Nous allons considérer les cas suivants des calculs des pièces coniques.

1) (H) assez petit -

Comme L est généralement quelconque, ce cas exige que λ^2 soit très petit. D'où on déduit que $\text{tg} \alpha$ est très grand, c'est-à-dire très voisin de $\frac{\pi}{2}$.

Mais dans ce cas, on a toujours :

$$\lambda^2 \text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{h}$$

qui est un nombre bien déterminé.

Or dans le chapitre IV, nous avons posé

$$Lr = \frac{q_0 l}{z} \sin \alpha + \frac{\delta l^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{phl^2}{z} = R \cos \alpha$$

$$= LG - \frac{q_0 L^2}{z} \sin \alpha + \frac{\delta L^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{phL^2}{z}$$

Ainsi $R \cos \alpha$ peut devenir une quantité finie non nulle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Comme nous pouvons écrire les formules de coefficient d'influence du chapitre IV sous la forme suivante :

$$\frac{\lambda^4 \text{tg}^2 \alpha}{2L} \left[\frac{z \sin \alpha \cos \alpha}{\lambda^2 \text{tg} \alpha} \left(\frac{1}{z} \textcircled{1} - \frac{1}{L} \textcircled{2} \right) - \frac{1}{L} \cdot 2 \textcircled{3} - \frac{1}{\pi} \cdot 2 \textcircled{4} \right]$$

$$+ \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{\Delta}{L} \left(\frac{1}{L} \textcircled{5} - \frac{1}{L} \textcircled{6} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \left(\textcircled{7} + \frac{1}{L} \textcircled{8} \right) \right]$$

$$- \left(\frac{ph}{\sin \alpha} \right) \left[\frac{3}{L} \Delta + 2(1+\eta) \left(\frac{1}{L} \textcircled{9} + \frac{1}{L} \textcircled{10} \right) \right] + \frac{1}{L} \left(l^2 \textcircled{11} + 2L^2 \frac{1}{\pi} \textcircled{12} \right)$$

$$+ \cos \alpha \left[\frac{8}{3} \eta^2 \Delta + 2(2+\eta) \left(l^2 \textcircled{13} + L^2 \frac{1}{\pi} \textcircled{14} \right) - 3 \frac{1}{L} \left(\textcircled{15} + 2 \frac{1}{\pi} \textcircled{16} \right) \right] + \frac{1}{L} \left(l^2 \textcircled{17} + 2L^2 \frac{1}{\pi} \textcircled{18} \right)$$

$$+ \frac{2+\eta}{3} \left[\Delta + 2(1+\eta) \left(\frac{1}{L} \textcircled{19} + L \frac{1}{\pi} \textcircled{20} \right) \right]$$

$$- \frac{3+\eta}{L} \left[\frac{1}{L} \sin \alpha \cos \alpha \left\{ \left(\frac{1}{L} \Delta + 2(2+\eta) \right) \left(l^2 \textcircled{21} + L^2 \frac{1}{\pi} \textcircled{22} \right) - 3 \frac{1}{L} \left(\textcircled{23} + 2L \frac{1}{\pi} \textcircled{24} \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 v = \frac{\lambda^2 t g \alpha}{h \Delta L} & \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} l \cdot z \textcircled{e} - \frac{z \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} L \cdot z \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{e} + m l i \textcircled{a} - \pi \left[L \cdot z \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{e} \right. \right. \\
 & - \frac{f \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\lambda^2} \left. \left. \left((1-\eta) z \left(\textcircled{e} + \frac{1}{\pi} \textcircled{f} \right) - (1-\eta) \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\textcircled{a}}{l} - z \frac{1}{\pi} \right) \right) \right] \right. \\
 & + \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{z \lambda^2} \left\{ (2-\eta) l^2 \Delta + z \left(l^2 \textcircled{e} + L \frac{2^1}{\pi} \textcircled{e} \right) + 3(1+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l \textcircled{a} - z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right\} \\
 & + \delta \cos \alpha \frac{1}{\lambda} \left[\frac{b}{\lambda} \left[(1-\eta) L \Delta + z \left(l \textcircled{e} + L \frac{1}{\pi} \textcircled{e} \right) \right] - \frac{1}{3} \left[(3-\eta) l^3 \Delta + z \left(l^3 \textcircled{e} + L \frac{3^1}{\pi} \textcircled{e} \right) + 6(2+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l^2 \textcircled{a} - z l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right] \right] \\
 & - \frac{ph \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} \left(l^2 \Delta + (2+\eta) (1+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l \textcircled{a} - z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right) \\
 & \left. + \frac{ph \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \lambda^2 t g \alpha} \left[- \frac{3(3+\eta)}{\lambda^4} \left[(1-\eta) L \Delta + z \left(l \textcircled{e} + L \frac{1}{\pi} \textcircled{e} \right) \right] + \left[l^3 \Delta + (2+\eta) (3+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l^2 \textcircled{a} - z l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right] \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi = \frac{\lambda^4 t g^2 \alpha}{h \Delta L} & \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} z l \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\pi} \textcircled{e} + \frac{z \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} L \frac{1}{\lambda^2} \textcircled{a} + m z l \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{e} - \pi \left[L \cdot z \cdot \textcircled{e} \right. \right. \\
 & + \frac{f \cos \alpha}{\sin \alpha} \left. \left. \left(\frac{1}{\lambda^4} \left[L^2 - 2(1-\eta) \left(\frac{\textcircled{c}}{L} - \frac{1}{\pi} \frac{\textcircled{d}}{l} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^2} \left(\textcircled{a} + z \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right) \right] \right. \\
 & - \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{z \lambda} \left. \left. \left(\frac{3}{\lambda} \left[l \Delta + z (1+\eta) \left(l \textcircled{c} - l \frac{1}{\pi} \textcircled{d} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^2} \left(l^2 \textcircled{a} + z l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right) \right] \right. \\
 & + \delta \cos \alpha \frac{1}{\lambda} \left. \left. \left(\frac{b}{\lambda} \left[l^2 \Delta + z (2+\eta) \left(l^2 \textcircled{c} - l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{d} \right) \right] - 3 \frac{1}{\lambda^2} \left(l \textcircled{a} + z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right) + \frac{1}{\lambda} \left(l^3 \textcircled{e} + z l \frac{3^1}{\pi} \textcircled{e} \right) \right] \right. \\
 & + (2+\eta) \frac{ph \sin \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} \left. \left. \left(l \Delta + z (1+\eta) \left(l \textcircled{c} - l \frac{1}{\pi} \textcircled{d} \right) \right) \right] \right. \\
 & \left. - (3+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \frac{1}{\lambda^4} \left(l^2 \Delta + z (2+\eta) \left(l^2 \textcircled{c} - l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{d} \right) \right) - 3 \frac{1}{\lambda^2} \left(l \textcircled{a} + z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = \frac{\lambda^2 t g \alpha}{h \Delta L} & \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} l \cdot z \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{e} - \frac{z \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} L \cdot z \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{e} - m l \cdot z \cdot \frac{1}{\pi} \textcircled{b} + \pi \left[L i \textcircled{a} \right. \right. \\
 & - \frac{f \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\lambda^2} \left. \left. \left((1-\eta) z \left(\textcircled{e} - \frac{1}{\pi} \textcircled{f} \right) - (1-\eta) \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\textcircled{a}}{L} - z \frac{1}{\pi} \right) \right) \right] \right. \\
 & + \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{z \lambda^2} \left\{ (2-\eta) L^2 \Delta + z \left(l^2 \textcircled{e} - l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{e} \right) + 3(1+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l \textcircled{a} - z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right\} \\
 & + \delta \cos \alpha \frac{1}{\lambda} \left[\frac{b}{\lambda} \left[(1-\eta) L \Delta + z \left(l \textcircled{e} - l \frac{1}{\pi} \textcircled{f} \right) \right] - \frac{1}{3} \left[(3-\eta) L^3 \Delta + z \left(l^3 \textcircled{e} - l \frac{3^1}{\pi} \textcircled{e} \right) + 6(2+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l^2 \textcircled{a} - z l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right] \right] \\
 & - \frac{ph \cos \alpha}{\lambda^2 t g \alpha} \left(L^2 \Delta + (2+\eta) (1+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l \textcircled{a} - z l \frac{1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right) \\
 & \left. + \frac{ph \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \lambda^2 t g \alpha} \left[- \frac{3(3+\eta)}{\lambda^4} \left[(1-\eta) L \Delta + z \left(l \textcircled{e} - l \frac{1}{\pi} \textcircled{f} \right) \right] + \left[l^3 \Delta + (2+\eta) (3+\eta) \frac{1}{\lambda} \left(l^2 \textcircled{a} - z l \frac{2^1}{\pi} \textcircled{b} \right) \right] \right] \right]
 \end{aligned}$$

et

....

$$\begin{aligned}
 \bar{z}-z = & \frac{\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{Eh \Delta \sin \alpha} \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{\lambda^2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\eta l \Delta}{\lambda^2} - \frac{\tau \sin \alpha + \sqrt{c} \cos \alpha}{\lambda^2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\eta L \Delta}{\lambda^2} - m \frac{\Delta}{\lambda^4} + \pi \frac{\Delta}{\lambda^4} \right. \\
 & + \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\Delta}{\lambda^4} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \\
 & + \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{\Delta(L^2 - l^2)}{4 \lambda^4} \\
 & - \delta \cos \alpha \frac{\Delta(L^3 - l^3)}{9 \lambda^4} \\
 & + \frac{ph \sin \alpha}{\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{\eta \Delta(L^2 - l^2)}{2} \\
 & - \frac{ph \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \lambda^2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \frac{\eta \Delta(L^3 - l^3)}{3} \\
 & + \frac{(1-\eta)}{\lambda^4} \cdot \frac{ph \Delta}{\lambda^4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{L}{l} - \frac{\varphi}{l} \right) \\
 & \left. - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2} \cdot \frac{Eh \Delta}{\lambda^2 \operatorname{tg} \alpha} (LV - lv) \right]
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que dans ces expressions, il y a, en apparence, des termes infiniment grands pour λ très petit jusqu'à l'ordre de $\frac{1}{\lambda^8}$, ce qui fait comprendre que pour des calculs numériques, la détermination des constantes d'intégration A, B, C, L pour un problème donné exige des précisions très poussées pour avoir des résultats acceptables. *

Pour (h) assez petit, c'est-à-dire λ^2 petit, nous faisons les développements en série de λ^2 en prenant pour les fonctions $U_2, Y_2, \frac{z}{2} J_1, \frac{z}{2} Y_1$ leurs séries limitées à six premiers termes (c'est-à-dire jusqu'au terme en λ^{12} pour certains), et nous trouvons après un calcul long mais sans difficulté que les expressions A, (a), (b), ... (e), (f) sont données par :

.....

* Voir les calculs exposés dans la thèse de F. BOUILLON.

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \left[(1-\eta)^2 \left\{ -\frac{L^2}{L^2+2} - \frac{L^2}{L^2} + \lambda^4 \left\{ -\frac{(1-\eta)(2+\eta)}{3:3:3} \frac{L^4}{L^2} + \left[\frac{2+7\eta+7\eta^2}{4} + \eta(1+\eta) \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 - \frac{8(1+2\eta)^2}{9} L + \left[\frac{2+7\eta+7\eta^2}{4} - \eta(1+\eta) \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 - \frac{(1-\eta)(2+\eta)}{3:3:3} \frac{L^4}{L^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ -\frac{(1-\eta)(3+\eta)}{2:3:6:6} \frac{L^6}{L^2} + \frac{1+6\eta+3\eta^2}{3:3:3} \eta(2+\eta) \frac{L^4}{\text{Log} \frac{L}{l}} - \frac{128(1+2\eta)(3+2\eta)}{9:5:5} L + \left[\frac{(3+5\eta)(7+5\eta)}{32} + \left(\frac{1+\eta}{2} \text{Log} \frac{L}{l} \right)^2 \right] L^2 - \frac{128(1+2\eta)(3+2\eta)}{9:5:5} L \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[\frac{1+6\eta+3\eta^2}{3:3:3} - \frac{\eta(2+\eta)}{3:3:3} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 - \frac{(1-\eta)(3+\eta)}{2:3:6:6} \frac{L^6}{L^2} \right\} + \dots \right] \right]$$

$$1 \text{ a) } = \frac{\lambda^2 l}{\pi} \left[\left\{ \frac{1-\eta}{3} \frac{l^2}{L^2+2\eta} - \frac{4(1+2\eta)}{3} \frac{L^2}{L} + (1+\eta) \frac{L^2}{l^2} \right\} + \lambda^4 \left\{ \frac{4(1-\eta)}{3:5:5} \frac{L^4}{L^2} - \frac{6+25\eta}{3:3:3} \frac{\eta}{L^2} + \frac{8(1+2\eta)}{9} L - \left[\frac{1+3\eta}{4} - (1+\eta) \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 - \frac{128(3+2\eta)}{3:5:5} \frac{L^4}{L} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ \frac{1-\eta}{2:3:7:7} \frac{L^6}{L^2} - \left[\frac{8(5+32\eta)}{5:5:5} + \frac{2\eta}{3:5:5} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 + \frac{64(1+2\eta)}{9:5:5} L^3 - \left[\frac{265+241\eta}{3:3:3:4} + \frac{5+2\eta}{3:3:3} \text{Log} \frac{L}{l} + \frac{2}{2:3:3} (\text{Log} \frac{L}{l})^2 \right] L^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{128(3+2\eta)}{9:5:5} L^3 - \left[\frac{7+4\eta}{2:3:3:3} - \frac{2+\eta}{3:3:3} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 - \frac{1024(5+2\eta)}{5:7:7} \frac{L^6}{L} + \frac{3+\eta}{2:3:6:6} \frac{L^6}{L^2} \right\} + \dots \right] \right]$$

$$1 \text{ b) } = \frac{\lambda^2 l}{\pi} \left[\left\{ \frac{1-\eta}{3} \frac{l}{L} + \eta - (1+\eta) \frac{L}{3} \frac{L^2}{L^2} + \lambda^4 \left\{ -\frac{2(1-\eta)}{3:5:5} \frac{L^2}{L} - \frac{\eta}{4} \frac{l^2}{L^2} - \left[\frac{7+4\eta}{3:3:3} + \frac{1+\eta}{3} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L + \left[\frac{5+4\eta}{3:3:3} - \frac{2+\eta}{3} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 + \frac{3+\eta}{4} \frac{L^3}{L} - \frac{4+\eta}{3:5:5} \frac{L^4}{L^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ \frac{2(1-\eta)}{5:7:7} \frac{L^6}{L} + \frac{2\eta}{L^4:6:6} + \left[\frac{217+157\eta}{3:5:5:5:6} + \frac{1+\eta}{6} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^3 + \left[\frac{10+3\eta}{4:4:4} + \frac{2+\eta}{3:4:4} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 - \left[\frac{5+3\eta}{4:4:4} - \frac{3+\eta}{3:4:4} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^3 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left[\frac{568+157\eta}{3:5:5:5} - \frac{4+\eta}{6} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 - \frac{2(5+\eta)}{4:6:6} \frac{L^6}{L} + \frac{2(6+\eta)}{5:7:7} \frac{L^6}{L^2} \right\} + \dots \right] \right]$$

$$\text{c) } = \frac{1}{\pi} \left[\left\{ \frac{1-\eta}{2} \frac{l^2}{L^2} + \eta - \frac{1+\eta}{2} \frac{L^2}{L^2} \right\} + \lambda^4 \left\{ \frac{1-\eta}{3:4:4} \frac{l^4}{L^2} - \left[\frac{2+7\eta}{8} + \frac{\eta}{2} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 + \frac{8(1+2\eta)}{9} L - \left[\frac{5+7\eta}{8} - \frac{1+\eta}{2} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^2 - \frac{2+\eta}{3:4:4} \frac{L^4}{L^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ \frac{1-\eta}{4:6:6} \frac{L^6}{L^2} - \left[\frac{1+6\eta}{3:4:4} + \frac{2\eta}{3:4:4} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 + \frac{128(1+2\eta)}{9:5:5} L^3 - \left[\frac{75(1+\eta)}{8:4:4} + \frac{3}{4} \text{Log} \frac{L}{l} + \frac{3(1+\eta)}{4} (\text{Log} \frac{L}{l})^2 \right] L^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{128(3+2\eta)}{9:5:5} L^3 - \left[\frac{11+6\eta}{3:4:4} - \frac{2(2+\eta)}{3:4:4} \text{Log} \frac{L}{l} \right] L^4 - \frac{3+\eta}{4:6:6} \frac{L^6}{L^2} \right\} + \dots \right] \right]$$

$$\frac{1}{\pi} \textcircled{A} = \frac{1}{\pi} \left[\left\{ -\frac{L}{L} \frac{L}{L} + \lambda^4 \left\{ \frac{1}{4!} \frac{L^3}{L} - \frac{1}{3} \frac{L^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{L}{L} \text{Log} \frac{L}{L} + \frac{1}{3} \frac{L^2}{L} - \frac{1}{4!} \frac{L^3}{L} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ -\frac{2}{4!6!} \frac{L^6}{L} + \frac{2}{L} \frac{L^6}{L} + \left[\frac{25}{4!4!} + \frac{1}{2!4!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^5}{L} + \frac{2}{3!3!} \frac{L^2}{L} \text{Log} \frac{L}{L} - \left[\frac{25}{4!4!} - \frac{1}{2!4!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^3}{L} - \frac{2}{6!} \frac{L^4}{L} + \frac{2}{4!6!} \frac{L^5}{L} \right\} + \dots \right]$$

$$\textcircled{B} = \frac{1}{\pi^2} \left[(1-\eta^2) \left\{ \frac{1-\eta}{2} \frac{L^2}{L} + \frac{1+\eta}{2} \frac{L^2}{L} \right\} \lambda^4 \left\{ (7-\eta^2) \frac{(1-\eta)}{2!3!3!} \frac{L^4}{L} - \left[\frac{2-\eta-2\eta^2-7\eta^3}{2!2!2!} \frac{L^3}{L} + \frac{\eta(1-\eta^2)}{2!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^2}{L} - \frac{4(1+2\eta^2)}{9} \frac{(1+2\eta)}{L} \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\eta^2) \left[\frac{5+7\eta}{2!2!2!} - \frac{1+\eta}{2} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^2}{L} - \frac{(1-\eta^2)(2+\eta)}{2!3!3!} \frac{L^4}{L^2} \right\} \right]$$

$$+ \lambda^6 \left\{ \frac{(17-\eta^2)(1-\eta)}{4!6!} \frac{L^6}{L^2} - \left[\frac{7+34\eta-\eta^2-6\eta^3}{3!4!} + \frac{2\eta(7-\eta^2)}{3!4!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^4}{L} + \frac{64(7-2\eta^2)}{9.5!} \frac{(1+2\eta)}{L} \frac{L^3}{L} \right. \\ \left. + \left[\frac{-17-33\eta+25\eta^2+25\eta^3}{2!2!2!2!2!} + \frac{(3+\eta)(1+\eta)}{2!2!2!} \text{Log} \frac{L}{L} - \frac{(1-\eta^2)(1+\eta)}{2!2!2!} \frac{L}{L} - \frac{(1-\eta^2)^2}{2} \frac{L^2}{L} - \frac{64(1+2\eta^2)}{9.5!} \frac{(3+2\eta)}{L} \frac{L^3}{L} + (1+\eta^2) \left[\frac{11+6\eta}{3!4!} - \frac{2(2+\eta)}{3!4!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^4}{L} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1-\eta^2)(3+\eta)}{4!6!} \frac{L^6}{L^2} + \dots \right] \right]$$

$$\textcircled{C} = \frac{1}{\pi^2} \left[(1-\eta^2) \left\{ -\frac{L}{L} \frac{L}{L} + \lambda^4 \left\{ \frac{(1-\eta)(3+\eta)}{4!} \frac{L^3}{L} + \frac{\eta(2+\eta)^2}{3} \frac{(1+\eta)^2}{2} \frac{L}{L} \text{Log} \frac{L}{L} - \frac{\eta(2+\eta)}{3} \frac{L^3}{L} - \frac{(1-\eta)(3+\eta)}{4!} \frac{L^3}{L} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^6 \left\{ -\frac{2(1-\eta)(5+\eta)}{4!6!} \frac{L^6}{L} - \frac{\eta(4+\eta)}{3!5!} \frac{L^6}{L} + \left[\frac{(9+5\eta)(11+5\eta)}{4!4!} + \frac{(1+\eta)(5+\eta)}{2!4!} \text{Log} \frac{L}{L} \right] \frac{L^5}{L} - \frac{2(2+\eta)^2}{3!3!} \frac{L^2}{L} \text{Log} \frac{L}{L} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{(9+5\eta)(11+5\eta)}{4!4!} - \frac{(1+\eta)(3+\eta)}{2!4!} \text{Log} \frac{L}{L} + \frac{\eta(4+\eta)}{3!5!} \frac{L^3}{L} + \frac{2(1-\eta)(5+\eta)}{4!6!} \frac{L^6}{L} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] \right]$$

On en déduit très facilement les expressions (A), (B), (C), (E), comme nous l'avons signalé dans le chapitre IV, c'est-à-dire en changeant dans (a), (b), (c), (e), l en L et L en l à la fois.

Finalement, en remplaçant les Δ , (a), (b)... dans les formules de coefficients et en s'arrêtant au premier terme qui entre effectivement dans les calculs, on trouve que :

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{Eh} & \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{4l^2}{(L+l)^2} \{ (1-\eta)l^2 + 2(1-\eta)L + 3(1+\eta)L^2 \} - \frac{z \sin \alpha + \sqrt{f} \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{8lL^2}{(L+l)^2} \{ (1-\eta)l + (2+\eta)L \} \right. \\ & - m \frac{12l}{L^2 - l^2} \{ (1-\eta)l^2 + (1+\eta)L^2 \} + \mathcal{M} \frac{24lL^2}{L^2 - l^2} \\ & + \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} 6l \{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \} \frac{L^2}{L^2 - l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \\ & + \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{3l}{2} \{ (1-\eta)l^2 + (3+\eta)L^2 \} \\ & - \delta \cos \alpha \cdot \frac{4l}{15} \{ 3(1-\eta)l^3 + 2(1+\eta)L^2 \frac{L^2 + lL + l^2}{L+l} \} \\ & \left. - \frac{ph\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \frac{3+\eta}{5} \frac{l(L-l)^2}{L+l} \{ (1-\eta)l^2 + 3(1-\eta)lL + 2(3+2\eta)L^2 \} \right] \\ \psi = \frac{1}{Ehl} & \left[-(t \sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{l}{L^2 - l^2} \{ (1-\eta)l^2 + (1+\eta)L^2 \} + (z \sin \alpha + \sqrt{f} \cos \alpha) \frac{2lL^2}{L^2 - l^2} \right. \\ & - m \frac{4l^2}{h^2(L+l)^2 \operatorname{tg} \alpha} \{ (1-\eta)l^2 + 2(1-\eta)lL + 3(1+\eta)L^2 \} + \mathcal{M} \frac{8lL^2}{h^2(L+l)^2 \operatorname{tg} \alpha} \{ (2+\eta)l + (1-\eta)L \} \\ & - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{4l}{h^2(L+l)} \left\{ \frac{1-\eta}{6} [(4+\eta)l^2 + (4+\eta)lL - 2(7+4\eta)L^2] + (1+\eta)L [(2+\eta)l - 3\eta L] \right\} \frac{L^2}{L^2 - l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \\ & + \frac{1}{10} \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \frac{l(L-l)}{h^2(L+l) \operatorname{tg} \alpha} \{ (6-5\eta-\eta^2)l^3 + 2(6-5\eta-\eta^2)l^2L + (28+25\eta+7\eta^2)L^2 + 2(7-5\eta-2\eta^2)L^3 \} \\ & - \delta \cos \alpha \frac{l(L-l)}{45h^2(L+l) \operatorname{tg} \alpha} \{ 2(7-6\eta-\eta^2)l^5 + 6(7-6\eta-\eta^2)l^4L + (69+24\eta+7\eta^2)l^3L^2 + (31+24\eta+5\eta^2)l^2L^3 \\ & \qquad \qquad \qquad + (93+24\eta+3\eta^2)lL^4 + (31-24\eta-7\eta^2)L^5 \} \\ & - ph \sin \alpha \frac{l}{3(L+l) \operatorname{tg} \alpha} \{ (1-\eta)l^2 + (1-\eta)lL + 2(2+\eta)L^2 \} \\ & \left. + \frac{ph\omega^2 \sin^2 \alpha}{g} \frac{l}{4} \{ (1-\eta)l^2 + (3+\eta)L^2 \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi = \frac{1}{Eh^3} & \left[- \frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{t \xi \alpha} \frac{8L^2}{(L+l)^2} \{ (2+\eta)l + (1-\eta)L \} - \frac{z \sin \alpha + \sqrt{c} \cos \alpha}{t \xi \alpha} \frac{4L^2}{(L+l)^2} \{ 3(1+\eta)L^2 + 2(1-\eta)Ll + (1-\eta)L^2 \} \right. \\ & - m \frac{2+2l^2}{L^2-l^2} + \eta \left(\frac{12L}{L^2-l^2} \right) \{ (1+\eta)L^2 + (1-\eta)L^2 \} \\ & + \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} 6L \{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \frac{l^2}{L^2-l^2} \text{Log} \frac{L}{l} \} \\ & + (q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha}) \frac{3L}{z} \{ (2+\eta)L^2 + (1-\eta)L^2 \} \\ & - \delta \cos \alpha \frac{4L}{15} \{ 2(4+\eta)L^2 \frac{L^2+Ll+l^2}{L+l} + 3(1-\eta)L^3 \} \\ & \left. - \frac{ph \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \frac{3+\eta}{L} \frac{L(L-l)^2}{L+l} \{ 2(3+2\eta)L^2 + 3(1-\eta)Ll + (1-\eta)L^2 \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \frac{1}{Eh^3} & \left[- (t \sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{2l^2 L}{L^2-l^2} + (z \sin \alpha + \sqrt{c} \cos \alpha) \frac{L}{L^2-l^2} \{ (1+\eta)L^2 + (1-\eta)L^2 \} \right. \\ & + m \frac{8L^2 L}{h^2 (L+l)^2 t \xi \alpha} \{ (1-\eta)l + (2+\eta)L \} - \eta \left(\frac{4L^2}{h^2 (L+l)^2 t \xi \alpha} \right) \{ 3(1+\eta)L^2 + 2(1-\eta)Ll + (1-\eta)L^2 \} \\ & - \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{4L}{h^2 (L+l) t \xi \alpha} \frac{1-\eta}{e} \{ 2(7+\eta)L^2 + (2+\eta)Ll + (4+\eta)L^2 \} + (1+\eta)L \{ -3\eta l + (2+\eta)L \} \frac{l^2}{L^2-l^2} \text{Log} \frac{L}{l} \\ & - (q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha}) \frac{L(L-l)}{10h^2 (L+l) t \xi \alpha} \{ 2(7-3\eta-2\eta^2)L^3 + (26+23\eta+7\eta^2)L^2 L + 2(6-3\eta-\eta^2)L^2 L^2 + (6-3\eta-\eta^2)L^3 \} \\ & + \delta \cos \alpha \frac{L(L-l)}{43h^2 (L+l)^2 t \xi \alpha} \{ (61-24\eta-7\eta^2)L^5 + (93+24\eta+3\eta^2)L^4 L + (91+24\eta+3\eta^2)L^3 L^2 + (69+24\eta+7\eta^2)L^2 L^3 \\ & \qquad \qquad \qquad + 6(7-3\eta-\eta^2)L^4 L + 2(6-3\eta-\eta^2)L^5 \} \\ & - \eta b \sin \alpha \frac{L}{3(L+l) t \xi \alpha} \{ 2(2+\eta)L^2 + (1-\eta)Ll + (1-\eta)L^2 \} \\ & \left. + \frac{ph \omega^2 \sin^2 \alpha}{\xi} \frac{L}{4} \{ (3+\eta)L^2 + (1-\eta)L^2 \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z-z = & \frac{1}{Eh \sin \alpha} \left[\frac{t \sin \alpha + f \cos \alpha}{t g \alpha} \frac{l}{L+l} \left[h^2 \sin^2 \alpha \{ -(1-\nu)l + (1+\nu)L \} + \frac{2(1-\nu)}{3} l \{ (1+\nu)l^2 + (1+\nu)lL - 2(1+\nu)L^2 \} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4(1+\nu)l^2 \{ (1+\nu)l - 3\nu L \} \frac{l^2}{L^2-l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \right. \\
 & + \frac{2 \sin \alpha + f \cos \alpha}{t g \alpha} \frac{L}{L+l} \left[h^2 \sin^2 \alpha \{ -(1+\nu)l + (1-\nu)L \} + \frac{2(1-\nu)}{3} L \{ 2(1+\nu)l^2 - (1+\nu)lL - (1+\nu)L^2 \} \right. \\
 & \left. + 4(1+\nu)L^2 \{ 3\nu l - (2+\nu)L \} \frac{l^2}{L^2-l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \\
 & - m G l^2 \left[(1-\nu) + 3(1+\nu) \frac{L^2}{L^2-l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \\
 & + \mu G L^2 \left[(1-\nu) + 3(1+\nu) \frac{l^2}{L^2-l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \\
 & + \frac{K \cos \alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{3}{2} (1-\nu) (1+\nu) (L^2-l^2) + 6(1+\nu)^2 \frac{l^2 L^2}{L^2-l^2} \left(\operatorname{Log} \frac{L}{l} \right)^2 \right] \\
 & + \left(q_0 + \frac{ph}{\sin \alpha} \right) \left[\frac{3}{16} (1-\nu) (1+\nu) (L^4-l^4) + \frac{3}{4} (1+\nu) (1+\nu) l^2 L^2 \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \\
 & - \delta \cos \alpha \left[\frac{2}{25} (1-\nu) (1+\nu) (L^5-l^5) + \frac{4}{15} (1+\nu) (1+\nu) \frac{l^2 + lL + L^2}{L+l} l^2 L^2 \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right] \\
 & + \frac{ph^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{4} h^2 (L-l) \{ (1-\nu)l^2 - 2(1+\nu)lL + (1-\nu)L^2 \} \right. \\
 & \left. - \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{150} (L-l) \{ (23+6\nu)l^4 + (23+6\nu)l^3 L - 4(38+23\nu)l^2 L^2 \right. \\
 & \left. + (23+6\nu)lL^3 + (23+6\nu)L^4 \right. \\
 & \left. - \frac{(1+\nu)(1+\nu)}{3} (1+2\nu)l^2 - 2(1+\nu)lL + (1+2\nu)L^2 \right] \frac{l^2 L^2}{L+l} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Le domaine de validité de ces formules est plus restreint que celui dans lequel on peut assimiler les fonctions $\frac{z}{L} J_1(z), J_2(z), \frac{z}{L} Y_1(z), Y_2(z)$ à leurs développements en série ascendante mais limitée aux six premiers termes. Pratiquement il est raisonnable de considérer que l'assimilation est acceptable lorsque le rapport de d'Alembert est sensiblement égal à l'unité pour le troisième terme, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{z}{L} \right)^2 < 2 \times 3$$

....

$$z < 4,0$$

Mais la détermination du domaine de la validité de nos formules approchées est plus délicate et même très difficile. Cependant il nous semble que pour

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 < 1$$

$$z < 2$$

c'est-à-dire pour

$$\frac{h}{L} \operatorname{tg} \alpha > \sqrt{12(1-\eta^2)}$$

les formules donnent probablement une bonne précision.

Comme industriellement, $\frac{h}{L}$ est toujours plus petit que $\frac{1}{4}$, on a alors pour $\eta = 0,3$ (pour l'acier)

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{4} \quad \operatorname{tg} \alpha > 12,5 \quad \frac{\pi}{2} > \alpha > 85^{\circ}, 26'$$

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{10} \quad \operatorname{tg} \alpha > 31,5 \quad \frac{\pi}{2} > \alpha > 88^{\circ}, 10'$$

ce qui montre qu'au point de vue de la résistance des matériaux, le domaine de quasi-plaque est très réduit, tel que généralement α est à 2° ou 3° autour de $\pi/2$.

Pour les z un peu plus grands, les formules ci-dessus donnent des ordres de grandeur.

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$lf = \frac{q_0 l^2}{2} - \frac{phl^2}{2} = L^2 \left[\frac{q_0 L^2}{2} - \frac{phL^2}{2} \right] = k$$

c'est-à-dire :

$$k \cos \alpha \rightarrow k$$

et

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{11^3} \left[- \eta \frac{12l}{L^2 - l^2} \left\{ (1+\eta) l^2 + (1-\eta) L^2 \right\} + \eta \frac{24lL^2}{L^2 - l^2} \right. \\ \left. + k \cdot l \left\{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \frac{l^2}{L^2 - l^2} \operatorname{Log} \frac{L}{l} \right\} \right. \\ \left. + (q_0 + ph) \frac{3l}{2} \left\{ (1-\eta) l^2 + (3+\eta) L^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{Eh} \left[-t \frac{l}{L^2 - l^2} \{ (1-\eta) l^2 + (1+\eta) L^2 \} + \mathcal{C} \frac{L l L^2}{L^2 - l^2} + \frac{phw^2 l}{\xi \cdot 4} \{ (1-\eta) l^2 + (1+\eta) L^2 \} \right]$$

$$\phi = \frac{1}{Eh^3} \left[-m \frac{L l^2 L}{L^2 - l^2} + \mathcal{M} \frac{L l L}{L^2 - l^2} \{ (1+\eta) l^2 + (1-\eta) L^2 \} + k \cdot c \cdot L \{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \frac{l^2}{L^2 - l^2} \text{Log} \frac{L}{l} \} + (q_0 + ph) \frac{3L}{z} \{ (1+\eta) l^2 + (1-\eta) L^2 \} \right]$$

$$V = \frac{1}{EhL} \left[-t \frac{L l^2 L}{L^2 - l^2} + \mathcal{C} \frac{L}{L^2 - l^2} \{ (1+\eta) l^2 + (1-\eta) L^2 \} + \frac{phw^2 L}{\xi \cdot 4} \{ (1+\eta) l^2 + (1-\eta) L^2 \} \right]$$

$$\Sigma z = \frac{1}{Eh^3} \left[-m \cdot c \cdot l^2 \{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \frac{l^2}{L^2 - l^2} \text{Log} \frac{L}{l} \} + \mathcal{M} \cdot c \cdot L^2 \{ (1-\eta) + 2(1+\eta) \frac{l^2}{L^2 - l^2} \text{Log} \frac{L}{l} \} + k \left\{ \frac{\xi}{z} (1-\eta) (1+\eta) (L^2 - l^2) + c (1+\eta)^2 \frac{l^2 L^2}{L^2 - l^2} (\text{Log} \frac{L}{l})^2 \right\} + (q_0 + ph) \left\{ \frac{3}{10} (1-\eta) (1+\eta) (L^4 - l^4) + \frac{\xi}{4} (1+\eta) (1+\eta) l^2 L^2 \text{Log} \frac{L}{l} \right\} \right]$$

formulaires des coefficients d'influence bien connues des plaques circulaires.

II) θ assez grand -

Pour θ assez grand, on pense normalement que les formules asymptotiques :

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \left[\cos \left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) U(z, n) - \sin \left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) V(z, n) \right]$$

$$Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \left[\sin \left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) U(z, n) + \cos \left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) V(z, n) \right]$$

avec :

$$U(z, n) = 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(\xi z)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 - 7^2)}{4!(\xi z)^4} \dots$$

$$V(z, n) = \frac{(4n^2 - 1^2)}{1!(\xi z)} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(\xi z)^3} + \dots$$

données par Hankel et Lommel, peuvent être utiles pour établir des formules pratiques de coefficients d'influence.

Or, ces expressions asymptotiques, justes au point de vue mathématique ne semblent pas, à notre avis, adéquates pour être appliquées ici, car, sans parler des difficultés pratiques* en les utilisant dans des calculs littéraux elles présentent des lacunes. En effet, nous avons vu que :

$$\frac{z}{z} J_1(z) , J_2(z) , \frac{z}{z} Y_1(z) , Y_2(z)$$

sont des fonctions où ne figurent que des opérations bien connues sur $(\frac{z}{z})^2$, mais l'application des expressions asymptotiques citées ci-dessus fait apparaître pour chaque fonction considérée le facteur $(\frac{z}{z})^{-\frac{1}{2}}$ qui leur est, de toute apparence, étranger. Ainsi, nous sommes conduits tout naturellement à poser la question suivante :

"Pour des problèmes physiques, est-ce que l'on peut utiliser les expressions asymptotiques de Hankel - Lommel sans introduire des termes étrangers aux problèmes donnés? Est-ce que le résultat obtenu en utilisant ces expressions asymptotiques exprime tous les phénomènes physiques sans rien laisser de côté ?"

Il nous semble bien que cette question pourrait soulever des recherches très intéressantes sur les fonctions de Bessel, recherches, qui dépassent de loin le cadre du sujet que nous nous sommes imposés dans cette étude.

Nous nous contentons alors d'établir des formules pratiques des coefficients d'influence des troncs de cône de la façon suivante :

Pour que ϵ soit très grand, il faut que λ^2 le soit. Or physiquement h est de grandeur ordinaire, et l aussi sauf pour α très petit. Ce qui implique que ϵ est très grand pour α petit. Or à la fin du chapitre III, nous avons rappelé les formules des coefficients d'influence des cylindres dans le cas des seules charges t, ζ, m, \mathcal{M} . Et ces formules ne dépendent de μ que par la présence de μ . Comme théoriquement ces formules ne sont autre chose que la forme limite écrite avec les notations du cylindre, vers laquelle tendent les formules de coefficients d'influence des troncs de cône chargés par t, ζ, m, \mathcal{M} lorsque α tend vers zéro ($\epsilon, \textcircled{1}$ infiniment grand), nous pouvons donc transcrire spécialement ici avec les notations de calculs des cônes les formules des cylindres sous la forme suivante :

....

* voir - KAKOVITZ : A property of Bessel functions - Journal of appl. phys. Vol. 2, n° 2 - 1931

avec les notations du cylindre. Alors quelles sont leur forme originale dans les notations du cône ?

En comparant ces expressions à celles des formules du chapitre IV, nous savons d'abord que les divers [...] doivent être dans les notations du cône, des fonctions en λ^2 , l , L , η , et ne dépendent pas explicitement de α et de h . Et de plus, certains facteurs $\frac{E}{l \sin \alpha}$, $\frac{E}{l \operatorname{tg} \alpha}$ doivent avoir respectivement la même origine que certains $\frac{l}{L \sin \alpha}$, $\frac{E}{L \operatorname{tg} \alpha}$ et les facteurs $\frac{l}{\sin \alpha}$, $\frac{E}{\operatorname{tg} \alpha}$ doivent avoir des origines symétriques par rapport à l et à L . Pour le moment, nous supposons que les

$$\frac{E}{l \sin \alpha}, \frac{E}{l \operatorname{tg} \alpha}, \frac{l}{L \sin \alpha}, \frac{E}{L \operatorname{tg} \alpha}$$

aient comme origine l et que les

$$\frac{E}{\sin \alpha}, \frac{E}{\operatorname{tg} \alpha}$$

aient comme origine $\frac{l+L}{2}$. Nous montrerons dans la suite le bien-fondé de ces suppositions.

Nous remarquons que le paramètre caractéristique du cylindre :

$$\mu H = \sqrt{\frac{4 \sqrt{1-\eta^2}}{h^2 R^2}} H$$

peut être défini par

$$(\mu H)^2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4(1-\eta^2)}}{h \operatorname{tg} \alpha} \frac{(L-l)^2}{L+l} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda^2 (L-l)^2}{L+l}$$

et que H du cylindre peut être définie par

$$H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (L-l)$$

Il est alors très légitime de remplacer dans les divers [...] les H non accompagnés de μ par $L-l$ et le paramètre caractéristique du cylindre par le paramètre intrinsèque du cône pour α très petit, désigné encore par μH , mais défini par :

$$(\mu H)^2 = \frac{\lambda^2 (L-l)^2}{L+l}$$

pour avoir des formules valables pour des α très petits.

Comme les divers [...] sont des fonctions en λ , susceptibles d'être

développées sous la forme

$$a + b(\mu H)^4 + c(\mu H)^6 + d(\mu H)^{12} + \dots$$

dont le premier terme, c'est-à-dire a, prendra un des quatre nombres

$$3, 0, 4, 2$$

suivant le {...} considéré, nous arrivons alors d'après la remarque préliminaire, faites au début de ce chapitre, et les exigences de compatibilité relevées par les formules du cône au chapitre IV, aux formules :

$$\begin{aligned} \psi = & \text{(I)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_1(\lambda^4)] \\ & + \text{(II)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{2\text{sh} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_2(\lambda^4)] \\ & + \text{(III)} \frac{L+l}{L-l} \frac{1}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^3 \frac{2\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H + 2\sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_3(\lambda^4)] \\ & + \text{(IV)} \frac{L+l}{L-l} \frac{-1}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^3 \frac{2\text{sh} \mu H \cos \mu H + 2\text{ch} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_4(\lambda^4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \frac{1}{\lambda^2 l t \varepsilon \alpha} \left[\text{(I)} \frac{L+l}{2(L-l)} \left\{ (\mu H) \frac{2\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H - 2\sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_5(\lambda^4)] \right. \\ + \text{(II)} \frac{L+l}{2(L-l)} \left\{ (\mu H) \frac{-2\text{sh} \mu H \cos \mu H + 2\text{ch} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_6(\lambda^4)] \\ + \text{(III)} \frac{-i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_7(\lambda^4)] \\ \left. + \text{(IV)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{2\text{sh} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon_8(\lambda^4)] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi = & \text{(I)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{2\text{sh} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon'_2(\lambda^4)] \\ & + \text{(II)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^2 \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon'_1(\lambda^4)] \\ & + \text{(III)} \frac{L+l}{L-l} \frac{1}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^3 \frac{2\text{sh} \mu H \cos \mu H + 2\text{ch} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon'_4(\lambda^4)] \\ & + \text{(IV)} \frac{L+l}{L-l} \frac{-1}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu H)^3 \frac{2\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H + 2\sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right\} [1+\varepsilon'_3(\lambda^4)] \end{aligned}$$

... ..

$$V = \frac{1}{\lambda^2 L t g \alpha} \left[\begin{aligned} & \text{(I)} \frac{-(L+l)}{z(L-l)} \left\{ (\mu h) \frac{-2sh\mu h \cos \mu h + 2ch\mu h \sin \mu h}{sh^2 \mu h - \sin^2 \mu h} \right\} [1 + \varepsilon_6(\lambda^4)] \\ & + \text{(II)} \frac{-(L+l)}{z(L-l)} \left\{ (\mu h) \frac{2sh\mu h ch\mu h - 2\sin \mu h \cos \mu h}{sh^2 \mu h - \sin^2 \mu h} \right\} [1 + \varepsilon'_6(\lambda^4)] \\ & + \text{(III)} \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu h)^2 \frac{2sh\mu h \sin \mu h}{sh^2 \mu h - \sin^2 \mu h} \right\} [1 + \varepsilon_2(\lambda^4)] \\ & + \text{(IV)} \frac{-i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \left\{ (\mu h)^2 \frac{sh^2 \mu h + \sin^2 \mu h}{sh^2 \mu h - \sin^2 \mu h} \right\} [1 + \varepsilon'_1(\lambda^4)] \end{aligned} \right]$$

où les $\varepsilon(\lambda^4)$, $\varepsilon'(\lambda^4)$ sont des fonctions en λ^4 , de la forme suivante :

$$\frac{a}{\lambda^4} + \frac{b}{\lambda^8} + \frac{c}{\lambda^{12}} + \dots$$

(qui tendent vers zéro pour λ^2 infiniment grand, c'est-à-dire α très petit) et les (I), (II), (III), (IV), sont les expressions définies dans le chapitre IV, réduites pour le moment jusqu'aux seules charges t, ζ, m, π .

Or, d'après ces expressions, nous pouvons dire que les divers coefficients de (I), (II), (III), (IV) sont respectivement les expressions asymptotiques pour λ^2 infiniment grand, des diverses quantités :

$$\frac{\textcircled{a}}{\Delta}, \frac{z}{\pi} \frac{\textcircled{b}}{\Delta}, z \frac{\textcircled{c}}{\Delta}, \frac{z}{\pi} \frac{\textcircled{d}}{\Delta}, z \frac{\textcircled{e}}{\Delta}, \frac{z}{\pi} \frac{\textcircled{f}}{\Delta}, \frac{\textcircled{A}}{\Delta}, \frac{z}{\pi} \frac{\textcircled{B}}{\Delta}, z \frac{\textcircled{C}}{\Delta}, z \frac{\textcircled{D}}{\Delta}$$

à condition d'avoir justifié la légitimité des choix comme origine de :

$$\frac{h}{l \sin \alpha}, \frac{h}{l t g \alpha}, \frac{E}{L \sin \alpha}, \frac{R}{L t g \alpha}$$

et de

$$\frac{E}{\sin \alpha}, \frac{R}{t g \alpha}$$

pour α très petit et tendant vers zéro.

Pour ceci, nous considérons les cas, où λ^2 , ε , \textcircled{B} infiniment grand, c'est-à-dire α très petit, et de plus, h/R très petit, l, L quelconques mais $L-l$ est de même ordre de grandeur que h . Alors le paramètre μ défini par :

$$(\mu h)^2 = \frac{\lambda^2(L-l)^2}{l+l}$$

est de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\frac{h}{R}}$, c'est-à-dire, peut être suffisamment

petit. Pour les seules charges $t, \mathcal{Z}, m, \mathcal{M}$, les dernières formules montrent que

$$\varphi = \varphi = (I) \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{Z} + (II) \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{Z} + (III) \frac{L+l}{L-l} \frac{1}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M} + (IV) \frac{L+l}{L-l} \frac{-1}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M}$$

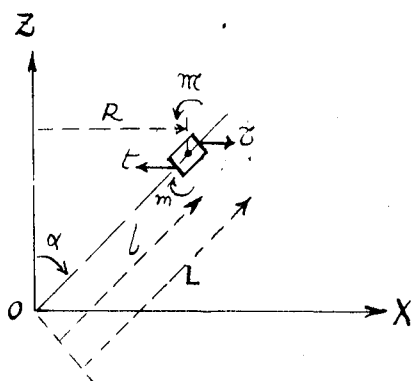
$$v = \frac{i}{\lambda^2 L \operatorname{tg} \alpha} \left[(I) \frac{L+l}{z(L-l)} \mathcal{Z} + (II) \frac{L+l}{z(L-l)} \mathcal{Z} + (III) \frac{-i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M} + (IV) \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M} \right]$$

$$v = \frac{i}{\lambda^2 L \operatorname{tg} \alpha} \left[(I) \frac{-(L+l)}{z(L-l)} \mathcal{Z} + (II) \frac{-(L+l)}{z(L-l)} \mathcal{Z} + (III) \frac{i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M} + (IV) \frac{-i\lambda^2(L+l)}{\lambda^4(L-l)^2} \mathcal{M} \right]$$

Physiquement, le quasi-cylindre auquel nous venons d'appliquer les formules supposées, se présente sous la forme d'un anneau, et plus exactement d'un anneau conique, mais d'angle α très petit. Or pour un anneau conique : défini par α, h, l, L , toutes quelconques ; mais avec :

$$\frac{zh}{(L+l)\sin\alpha}, \quad \frac{z(L-l)}{(L+l)\sin\alpha}$$

très petits et de même ordre de grandeur ; chargé par $t, \mathcal{Z}, m, \mathcal{M}$ on sait faire les calculs directement. En effet, en écrivant que l'anneau tourne autour du centre de gravité de sa section, on trouve que :



$$\text{rotation absolue} = \frac{\text{Moment} \times R^2}{EJ}$$

$$\text{avec } R = \frac{L+l}{z} \sin \alpha$$

$$J = \frac{h(L-l)}{12} \{ (L-l)^2 \cos^2 \alpha + h^2 \sin^2 \alpha \}$$

$$\text{Moment} = \frac{z l}{L+l} m - \frac{z L}{L+l} \mathcal{M} + \frac{L-l}{L+l} (l t + L \mathcal{Z}) \cos \alpha$$

Si l'on adopte comme sens positif de la rotation, celui de $\frac{dw}{dr}$ pour le calcul des cônes, on trouve qu'en tenant compte : $h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{12(1-\lambda^2)}{\lambda^4}$,

$$\varphi = \varphi = \frac{i \lambda^2 (L+l)}{L(L-l)^2 + \lambda^4 (L-l)^2} \{ (I) + (II) \} + \frac{0}{12(L-l)^2 + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{L+l}{L-l} \{ (III) - (IV) \}$$

ou (I), (II), (III), (IV) sont les expressions définies dans le chapitre IV, mais réduit au cas de $t, \mathcal{Z}, m, \mathcal{M}$, seuls.

D'autre part, les calculs des déplacements relatifs dans la direction OX pour les sections $r = l, r = L$ se font aussi directement par :

$$v = \frac{(L\delta - lt)(L+l)}{2 \epsilon h l (L-l)} \sin \alpha + \frac{L-l}{2l} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \psi$$

$$V = \frac{(L\delta - lt)(L+l)}{2 \epsilon h l (L-l)} \sin \alpha - \frac{(L-l) \cos \alpha}{2L \sin \alpha} \psi$$

c'est-à-dire :

$$v = \frac{i}{\lambda^2 l t \epsilon \alpha} \left[\frac{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{L+l}{2(L-l)} \text{ (I)} + \frac{-1 \epsilon (1-\eta^2) + 2\lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{L+l}{2(L-l)} \text{ (II)} \right. \\ \left. + \frac{i \lambda^2 \psi (L+l)}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \text{ ((III) + (IV))} \right]$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L t \epsilon \alpha} \left[\frac{-1 \epsilon (1-\eta^2) + 2\lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{-(L+l)}{2(L-l)} \text{ (I)} + \frac{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{-(L+l)}{2(L-l)} \text{ (II)} \right. \\ \left. + \frac{i \lambda^2 \psi (L+l)}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \text{ ((III) - (IV))} \right]$$

Pour α très petit, on sait ^{que} $\sqrt{\lambda^2}$ tend vers infiniment grand, ainsi que $\lambda^4 (L-l)^2$, et les quantités :

$$\frac{1}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}, \quad \frac{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}, \quad \frac{-1 \epsilon (1-\eta^2) + 2\lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}$$

tendent respectivement vers :

$$\frac{1}{\lambda^4 (L-l)^2}, \quad 1, \quad 2$$

et nous retrouvons les relations déduites des formules supposées quelles que soient l, L . Ceci démontre que nos suppositions sont justes, c'est-à-dire les formules supposées sont en effet les formules asymptotiques.

De plus, d'après cette comparaison, nous trouvons que nous pouvons même améliorer les formules asymptotiques en y introduisant les facteurs de corrections :

$$\frac{1}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}, \quad \frac{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}, \quad \frac{-1 \epsilon (1-\eta^2) + 2\lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2}$$

révélés d'après les calculs directs des anneaux coniques pour élargir le domaine de la validité des formules asymptotiques. Après des simplifications, on a finalement :

$$\psi = \text{(I)} \frac{i \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{\text{sh}^2 \mu l + \sin^2 \mu l}{\text{sh}^2 \mu l - \sin^2 \mu l} [1 + \epsilon_1(\lambda^4)]$$

$$\text{(II)} \frac{2i \lambda^4 (L-l)^2}{1 \epsilon (1-\eta^2) + \lambda^4 (L-l)^2} \frac{\text{sh} \mu l \cdot \sin \mu l}{\text{sh}^2 \mu l - \sin^2 \mu l} [1 + \epsilon_2(\lambda^4)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{(III)} \frac{2\lambda^2(L-l)}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H + \text{sin}\mu H \text{cos}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_3(\lambda^4)] \\
 & + \text{(IV)} \frac{-2\lambda^2(L-l)}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{cos}\mu H + \text{ch}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_4(\lambda^4)] \\
 v = \frac{i}{\lambda^2 l t g \alpha} & \left[\begin{aligned}
 \text{(I)} & \frac{1\epsilon(1-\eta^2)+4\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\lambda^2(L-l)}{4 \cdot \mu H} \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H - \text{sin}\mu H \text{cos}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_5(\lambda^4)] \\
 \text{(II)} & \frac{-1\epsilon(1-\eta^2)+2\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\lambda^2(L-l)}{2 \cdot \mu H} \frac{-\text{sh}\mu H \text{cos}\mu H + \text{ch}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_6(\lambda^4)] \\
 \text{(III)} & \frac{-i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}^2\mu H + \text{sin}^2\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_1(\lambda^4)] \\
 \text{(IV)} & \frac{2i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_2(\lambda^4)] \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi = \text{(I)} & \frac{2i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_2(\lambda^4)] \\
 & + \text{(II)} \frac{i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}^2\mu H + \text{sin}^2\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_1(\lambda^4)] \\
 & + \text{(III)} \frac{2\lambda^2(L-l)}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{cos}\mu H + \text{ch}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_4(\lambda^4)] \\
 & + \text{(IV)} \frac{-2\lambda^2(L-l)}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H + \text{sin}\mu H \text{cos}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_3(\lambda^4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = \frac{i}{\lambda^2 l t g \alpha} & \left[\begin{aligned}
 \text{(I)} & \frac{-1\epsilon(1-\eta^2)+2\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{-\lambda^2(L-l)}{2 \cdot \mu H} \frac{-\text{sh}\mu H \text{cos}\mu H + \text{ch}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_6(\lambda^4)] \\
 \text{(II)} & \frac{1\epsilon(1-\eta^2)+4\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{-\lambda^2(L-l)}{4 \cdot \mu H} \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H - \text{sin}\mu H \text{cos}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_5(\lambda^4)] \\
 \text{(III)} & \frac{2i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}\mu H \text{sin}\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon_2(\lambda^4)] \\
 \text{(IV)} & \frac{-i\lambda^4(L-l)^2}{1\epsilon(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}^2\mu H + \text{sin}^2\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \text{sin}^2\mu H} [1+\epsilon'_1(\lambda^4)] \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons que pour :

$$\left. \begin{aligned}
 \theta & = \lambda \sqrt{\frac{z l}{L}} \\
 \text{(H)} & = \lambda \sqrt{\frac{z L}{L}}
 \end{aligned} \right\} \text{très grands et } L > l$$

on a en posant :

$$(\mu H)^2 = \frac{\lambda^2(L-l)^2}{L+l}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{i\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}^2\mu H + \sin^2\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon_1(\lambda^4)] \\ \textcircled{b} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \pi \frac{i\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}\mu H \sin\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon_2(\lambda^4)] \\ \textcircled{c} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{\lambda^2(L-l)}{12(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H + \sin\mu H \cos\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon_3(\lambda^4)] \\ \textcircled{d} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \pi \frac{-\lambda^2(L-l)}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \cos\mu H + \text{ch}\mu H \sin\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon_4(\lambda^4)] \\ \textcircled{e} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{1\kappa(1-\eta^2)+4\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\lambda^2(L-l)}{\varepsilon \cdot \mu H} \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H - \sin\mu H \cos\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\lambda_5(\lambda^4)] \\ \textcircled{f} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \pi \frac{-1\kappa(1-\eta^2)+\kappa\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\lambda^2(L-l)}{4 \cdot \mu H} \frac{-\text{sh}\mu H \cos\mu H + \text{ch}\mu H \sin\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\lambda_6(\lambda^4)] \\ \textcircled{A} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{i\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}^2\mu H + \sin^2\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon'_1(\lambda^4)] \\ \textcircled{B} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \pi \frac{i\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{\text{sh}\mu H \sin\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon'_2(\lambda^4)] \\ \textcircled{C} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{-\lambda^2(L-l)}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \mu H \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H + \sin\mu H \cos\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon'_3(\lambda^4)] \\ \textcircled{D} \frac{\Delta}{\Delta} &\sim \frac{1\kappa(1-\eta^2)+4\lambda^4(L-l)^2}{1\kappa(1-\eta^2)+\lambda^4(L-l)^2} \frac{-\lambda^2(L-l)}{\varepsilon \cdot \mu H} \frac{\text{sh}\mu H \text{ch}\mu H - \sin\mu H \cos\mu H}{\text{sh}^2\mu H - \sin^2\mu H} [1+\varepsilon'_5(\lambda^4)] \end{aligned}$$

Les $\varepsilon'(\lambda^4)$, $\varepsilon(\lambda^4)$, sont des fonctions en l , L , η , mais tendent vers zéro pour λ^2 infiniment grand. Et en changeant l en L , et L en l à la fois, les :

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$$

deviennent

$$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon_4, \varepsilon'_5, \varepsilon_6$$

respectivement .

Or dans le cas de tuyau, comme dans le cas d'anneau conique, les quantités

$$\frac{L-l}{l}, \frac{L-l}{L}$$

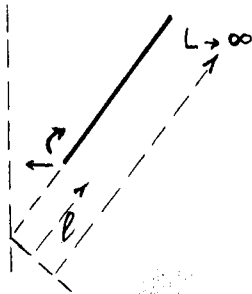
sont très petites. En conséquence, les diverses expressions ci-dessus de $\frac{\textcircled{a}}{\Delta}, \frac{\textcircled{b}}{\Delta}, \dots, \frac{\textcircled{f}}{\Delta}$ sont valables pour L voisin $\frac{de}{l}$. Dans le cas général, où L n'est

pas voisin de l , on doit multiplier respectivement ces diverses expressions par des facteurs $a, b, c, d, e, f, A, B, C, E$ qui sont des fonctions de L, l, \dots comme

- $a(L, l, \dots)$
- $b(L, l, \dots)$
- $c(L, l, \dots)$
- $d(L, l, \dots)$
- $e(L, l, \dots)$
- $f(L, l, \dots)$
- $A(L, l, \dots)$
- $B(L, l, \dots)$
- $C(L, l, \dots)$
- $E(L, l, \dots)$

telles que $a = b = c = d = e = f = A = B = C = E = 1$ pour L voisin de l .

Or en considérant le cas ci-contre où $(II) = 0$, $(IV) = 0$, et L tend vers infini, alors pour l suffisamment grand, nous savons que les expressions asymptotiques caractérisant les déformations φ, v pour $r = l$ doivent ne dépendre que de l . Ceci exige que :



$$a = 1$$

$$c = \sqrt{\frac{L+l}{2l}}$$

$$e = \sqrt{\frac{2l}{L+l}}$$

On en déduit alors

$$A = 1$$

$$C = \sqrt{\frac{L+l}{2L}}$$

$$E = \sqrt{\frac{L}{L+l}}$$

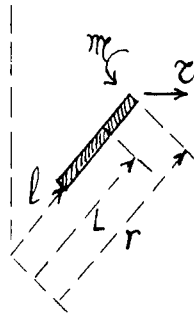
Par conséquent, pour le cas ci-contre, où $(I) = 0$, $(III) = 0$, l est grand et L est suffisamment grand, tels que :



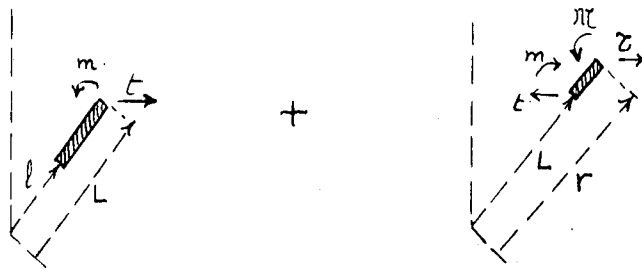
$$\frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1k(1-\eta^2)}, \frac{\lambda^4 (L-l)^2 + 1k(1-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1k(i-\eta^2)}, \frac{\lambda^4 (L-l)^2 - 1k(i-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1k(i-\eta^2)}$$

$$\frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu l}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu l}, \frac{\text{sh} \mu l \text{ch} \mu H \sin \mu l \cos \mu l}{\text{sh}^2 \mu l - \sin^2 \mu l}$$

tendent tous vers 1, on voit que les expressions asymptotiques caractérisant les déformations φ, v pour $r=L$, ne dépendent plus que de L . Alors, plaçons-nous dans ces conditions et considérons le cas :



qui est évidemment le cas résultant de deux cas suivants :



quel que soit r plus grand que L. Ceci exige d'après un calcul long mais sans difficulté, que

$$b = \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4}$$

$$d = \sqrt{\frac{L+l}{\sqrt{4Ll}}}$$

$$f = \sqrt{\frac{\sqrt{4Ll}}{L+l}}$$

En tenant compte de ces divers facteurs, et en posant finalement :

$$\mu H = \frac{\lambda(L-l)}{\sqrt{L+l}}$$

Les expressions asymptotiques peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\textcircled{a} \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} i \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_1(\lambda^4)]$$

$$\textcircled{b} \frac{\Delta}{\lambda} = \pi \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} i \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \frac{\text{sh} \mu H \cdot \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_2(\lambda^4)]$$

$$\textcircled{c} \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} \frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_3(\lambda^4)]$$

$$\textcircled{d} \frac{\Delta}{\lambda} = \pi \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} \frac{-1}{\sqrt{4Ll}} \frac{\text{sh} \mu H \cos \mu H + \text{ch} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_4(\lambda^4)]$$

....

$$\frac{\textcircled{e}}{\Delta} = \frac{\lambda^4 (L-l)^2 + 3(1-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} \frac{\lambda \sqrt{2l}}{2} \frac{\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_5(\lambda^4)]$$

$$\frac{\textcircled{f}}{\Delta} = \pi \frac{\lambda^4 (L-l)^2 - 6(1-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} \frac{\lambda \sqrt{4Ll}}{2} \frac{-\text{sh} \mu H \cos \mu H + \text{ch} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} [1 + \epsilon_6(\lambda^4)]$$

On en déduit très facilement les expressions de $\frac{\textcircled{A}}{\Delta}$, $\frac{\textcircled{B}}{\Delta}$, ..., $\frac{\textcircled{F}}{\Delta}$, mais en remarquant qu'en changeant les L en l et les l en L à la fois,

$$\sin \mu H \text{ devient } - \sin \mu l$$

$$\text{sh} \mu H \text{ devient } - \text{sh} \mu l$$

Théoriquement, les fonctions de **Bessel** en z admettent toutes des expressions asymptotiques, valables pour |z| suffisamment grand, alors leurs combinaisons aussi. Donc les expressions asymptotiques obtenues ci-dessus, valables pour $\lambda^2 l$ très grand, restent valables et constituent une très bonne approximation pour $\lambda^2 l$ grand.

Ainsi, nous arrivons en première approximation aux formules suivantes, dites approchées pour les calculs d'un tronç de cône mince, pesant, travaillant sous la charge hydrostatique et de rotation, valable pour $\lambda^2 l$ assez grand, mais de α quelconque:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{12(1-\eta^2)}{h^2 \text{tg}^2 \alpha}}$$

$$lf - \frac{q_0 l^2}{2} \sin \alpha + \frac{\delta l^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{ph l^2}{2} = L \sigma - \frac{q_0 L^2}{2} \sin \alpha + \frac{\delta L^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{pL^2}{2}$$

$$(i) = \frac{i \lambda^2 l \text{tg}^2 \alpha \sin \alpha}{Eh} \left[t-f \cdot \text{tg} \alpha - \frac{\delta \delta}{\lambda^4} + 3(3+\eta) \text{ph} \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot g} \right]$$

$$(ii) = \frac{i \lambda^2 l \text{tg}^2 \alpha \sin \alpha}{Eh} \left[\mathcal{Z}-\mathcal{F} \cdot \text{tg} \alpha - \frac{\delta \delta}{\lambda^4} + 3(3+\eta) \text{ph} \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \cdot g} \right]$$

$$(iii) = \frac{-\lambda^4 l \text{tg}^2 \alpha}{Eh} \left[m + \frac{1}{\lambda^4} \left\{ \frac{1-\eta}{L \sin \alpha} f + (1+2\eta) q_0 - (5+3\eta) \delta l \cos \alpha + \frac{\text{ph}}{\sin \alpha} [1+2\eta - (1+\eta)(2+\eta) \cos^2 \alpha] \right. \right. \\ \left. \left. + (2+\eta)(3+\eta) \text{ph} \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right\} \right]$$

$$(iv) = \frac{-\lambda^4 l \text{tg}^2 \alpha}{Eh} \left[\mathcal{M} + \frac{1}{\lambda^4} \left\{ \frac{1-\eta}{L \sin \alpha} \mathcal{F} + (1+2\eta) q_0 - (5+3\eta) \delta L \cos \alpha + \frac{\text{ph}}{\sin \alpha} [1+2\eta - (1+\eta)(2+\eta) \cos^2 \alpha] \right. \right. \\ \left. \left. + (2+\eta)(3+\eta) \text{ph} \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right\} \right]$$

$$\mu H = \frac{\lambda(L-l)}{\sqrt{L+l}}$$

....

$$\psi = \frac{t\epsilon\alpha}{lh} \left\{ \frac{f}{\cos\alpha} - zq_0 l t\epsilon\alpha + 3\delta l^2 \sin\alpha - \frac{phl}{\cos\alpha} [z - (z+\eta) \cos^2\alpha] - (3+\eta)ph \frac{l^2 \omega^2 \sin^2\alpha}{\epsilon} \right\}$$

$$+ (I) \frac{\lambda^4 (l-l)^2}{\lambda^4 (l-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} i \frac{sh^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (II) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} 2i \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \frac{sh \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (III) \frac{\lambda^4 (l-l)^2}{\lambda^4 (l-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \frac{z}{\lambda \sqrt{2l}} \frac{sh \mu H ch \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (IV) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \frac{-z}{\lambda \sqrt{4Ll}} \frac{sh \mu H \cos \mu H + ch \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$v = \frac{1}{lh} \left\{ -\eta \frac{f}{\cos\alpha} + q_0 l t\epsilon\alpha - \delta l^2 \sin\alpha \left[1 - \frac{\delta(1-\eta)}{\lambda^4 l^2} \right] + phl \sin\alpha t\epsilon\alpha + ph \frac{l^2 \omega^2 \sin^2\alpha}{\epsilon} \left[1 - \frac{3(1-\eta)(3+\eta)}{\lambda^4 l^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{i}{\lambda^2 l t\epsilon\alpha} \left[(I) \frac{\lambda^4 (l-l)^2 + 3(1-\eta^2)}{\lambda^4 (l-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \lambda \sqrt{2l} \frac{ch \mu H sh \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right.$$

$$+ (II) \frac{\lambda^4 (L-l)^2 - 6(1-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \lambda \sqrt{4Ll} \frac{-sh \mu H \cos \mu H + ch \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (III) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} (-i) \frac{sh^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$\left. + (IV) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} 2i \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \frac{sh \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right]$$

$$\phi = \frac{t\epsilon\alpha}{lh} \left\{ \frac{F}{\cos\alpha} - zq_0 l t\epsilon\alpha + 3\delta L^2 \sin\alpha - \frac{phL}{\cos\alpha} [z - (z+\eta) \cos^2\alpha] - (3+\eta) ph \frac{L^2 \omega^2 \sin^2\alpha}{\epsilon} \right\}$$

$$+ (I) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} 2i \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \frac{sh \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (II) \frac{\lambda^4 (l-l)^2}{\lambda^4 (l-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} i \frac{sh^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (III) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \frac{z}{\lambda \sqrt{4Ll}} \frac{sh \mu H \cos \mu H + ch \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$+ (IV) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} \frac{-z}{\lambda \sqrt{2L}} \frac{sh \mu H ch \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$v = \frac{1}{lh} \left\{ -\eta \frac{F}{\cos\alpha} + q_0 l t\epsilon\alpha - \delta L^2 \sin\alpha \left[1 - \frac{\delta(1-\eta)}{\lambda^4 L^2} \right] + phL \sin\alpha t\epsilon\alpha + ph \frac{L^2 \omega^2 \sin^2\alpha}{\epsilon} \left[1 - \frac{3(1-\eta)(3+\eta)}{\lambda^4 L^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{i}{\lambda^2 L t\epsilon\alpha} \left[(I) \frac{\lambda^4 (l-l)^2 - 6(1-\eta^2)}{\lambda^4 (l-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} (-\lambda \sqrt{4Ll}) \frac{-sh \mu H \cos \mu H + ch \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right.$$

$$+ (II) \frac{\lambda^4 (L-l)^2 + 3(1-\eta^2)}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} (-\lambda \sqrt{2L}) \frac{sh \mu H ch \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$\left. + (III) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 1z(1-\eta^2)} 2i \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \frac{sh \mu H \sin \mu H}{sh^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right]$$

....

$$\begin{aligned}
& + (IV) \frac{\lambda^4 (L-l)^2}{\lambda^4 (L-l)^2 + 12(1-\eta^2)} (-i) \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\
Z-z = & \frac{1}{Eh \cos^2 \alpha} \left\{ (1-2\eta \cos^2 \alpha) \frac{q_0}{4} (L^2 - l^2) \sin \alpha - (1-3\eta \cos^2 \alpha) \frac{\delta}{9} (L^3 - l^3) \sin \alpha \cos \alpha \right. \\
& + \frac{\text{ph}}{4} (L^2 - l^2) - \eta \frac{\text{ph} (L^3 - l^3)}{3g} \omega^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
& + \left[\frac{l f + L \sigma}{z} - \frac{q_0 (L^2 + l^2)}{4} \sin \alpha + \frac{\delta (L^3 + l^3)}{6} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\text{ph} (L^2 + l^2)}{4} \right] \text{Log} \frac{L}{l} \\
& + \frac{\sin \alpha}{Eh \cos^2 \alpha} (\eta - m) + \frac{h^2 \text{tg}^2 \alpha}{12(1+\eta)} \left(\frac{\phi}{L \sin \alpha} - \frac{\psi}{l \sin \alpha} \right) - \text{tg} \alpha (V L \sin \alpha - v l \sin \alpha) \\
& - \frac{1}{Eh \cos \alpha} (\zeta L \sin \alpha - t l \sin \alpha).
\end{aligned}$$

Il est bon que nous mentionnons ici qu'en désignant par :

q : la pression hydrostatique pour $r = l$

qui est très bien définie et toujours finie, on peut remplacer alors q_0 par $q + \delta l \cos \alpha$ dans les formules ci-dessus pour les rendre plus claires.

La détermination du domaine de validité de ces formules *approchées* est un problème très difficile, puisque le domaine de validité des expressions asymptotiques ordinaires des fonctions de Bessel J Y est très mal connu*.

Mais nous sommes sûrs que si pour $|z| > Z$, Z un nombre donné, on peut appliquer les formules *approchées* des coefficients, on pourrait alors dire que le domaine est défini par :

$$\frac{h}{l} \text{tg} \alpha < \frac{4 \sqrt{12(1-\eta^2)}}{Z^2}$$

En prenant $\eta = 0,3$ (cas de l'acier), on a

$$\frac{h}{l} \text{tg} \alpha < \frac{13,21}{Z^2}$$

Pratiquement, il n'est pas tout à fait irraisonnable de prendre $Z = 20$ d'après les tables de fonction de Bessel, on trouve que

$$\frac{h}{l} \text{tg} \alpha < 0,033$$

ainsi, on voit que :

....

* Voir : WHITTAKER & WATSON, Modern Analysis 1927 Cambridge p.369

Mc LACHLAN : Bessel functions for Engineers 1934, Oxford p.70 ; p.173 ; p.182 .

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}, \quad \text{tg} \alpha < 0,165 \quad \alpha < 9^{\circ}22'$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10}, \quad \text{tg} \alpha < 0,33 \quad \alpha < 17^{\circ}15'$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{20}, \quad \text{tg} \alpha < 0,66 \quad \alpha < 33^{\circ}25'$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{50}, \quad \text{tg} \alpha < 1,65 \quad \alpha < 58^{\circ}47'$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{100}, \quad \text{tg} \alpha < 3,30 \quad \alpha < 73^{\circ}09'$$

ce qui montre que le domaine des quasi-cylindres est très vaste, et dépasse de loin ce que donne l'intuition ordinaire.

Revenons au cas où $\alpha = 0$, on voit que

$$l \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad L-l : \text{finie}$$

$$q_0 = q + \delta l \cos \alpha \rightarrow \infty$$

et il est assez facile de trouver d'après les formules ci-dessus que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= f + ph(L-l) \\ \mu H &= \sqrt{\frac{3(1-\eta^2)}{R h}} (L-l) \end{aligned}$$

(R : le rayon de tuyau) et :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{Eh} \{ \delta R^2 + \eta phR \} - \frac{\sqrt{12(1-\eta^2)}R}{Eh^2} t \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{12(1-\eta^2)}R}{Eh^2} \zeta \frac{\text{sh} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{12(1-\eta^2)}R}{Eh^2} \frac{m}{L-l} \mu H \frac{\text{ch} \mu H \text{sh} \mu H + \cos \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{12(1-\eta^2)}R}{Eh^2} \frac{\eta}{L-l} \mu H \frac{\text{ch} \mu H \sin \mu H + \text{sh} \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{Eh} \left\{ -\eta f + qR + ph \frac{R^2 \omega^2}{g} \right\} - \frac{2}{Eh} t \frac{R}{L-l} \mu H \frac{\text{ch} \mu H \text{sh} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad - \frac{2}{Eh} \zeta \frac{R}{L-l} \mu H \frac{\text{ch} \mu H \sin \mu H - \text{sh} \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad - \frac{\sqrt{12(1-\eta^2)}}{Eh^2} \frac{m}{L-l} \mu H \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{12(1-\eta^2)}}{Eh^2} \frac{\eta}{L-l} \mu H \frac{\text{sh} \mu H \sin \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \end{aligned}$$

$$\phi = \frac{1}{Lh} \{ \delta i^2 + \eta p h k \} - \frac{2\sqrt{1k(1-\eta^2)}k}{Lh^2} t \frac{\text{sh}\mu h \sin\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$- \frac{\sqrt{1k(1-\eta^2)}k}{Lh^2} \zeta \frac{\text{sh}^2\mu h + \sin^2\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$- \frac{2\sqrt{1k(1-\eta^2)}L}{Lh^2} \frac{m}{L-l} \mu h \frac{\text{ch}\mu h \sin\mu h + \text{sh}\mu h \cos\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$+ \frac{2\sqrt{1k(1-\eta^2)}k}{Lh^2} \frac{\pi}{L-l} \mu h \frac{\text{ch}\mu h \text{sh}\mu h + \sin\mu h \cos\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$V = \frac{1}{Lh} \{ -\eta \bar{f} + [q - \delta(L-l)]k + p h \frac{i^2 \omega^2}{\epsilon} \} + \frac{2}{Lh} t \frac{k}{L-l} \mu h \frac{\text{ch}\mu h \sin\mu h - \text{sh}\mu h \cos\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$+ \frac{2}{Lh} \zeta \frac{k}{L-l} \mu h \frac{\text{ch}\mu h \text{sh}\mu h - \sin\mu h \cos\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$+ \frac{2\sqrt{1k(1-\eta^2)}}{Lh^2} m \frac{\text{sh}\mu h \sin\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$- \frac{\sqrt{1k(1-\eta^2)}}{Lh^2} \pi \frac{\text{sh}^2\mu h + \sin^2\mu h}{\text{sh}^2\mu h - \sin^2\mu h}$$

$$\Sigma - z = \frac{L-l}{Lh} \left\{ \frac{f+\bar{f}}{z} - \eta \left[q - \delta \frac{L-l}{z} \right] k - \eta p h \frac{i^2 \omega^2}{\epsilon} - \eta \frac{k}{L-l} (\sigma - t) \right\}$$

~~~~~

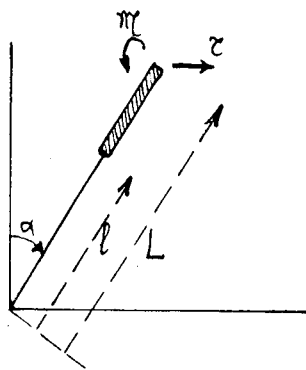
CHAPITRE VI

APPLICATIONS DES FORMULES ET CONCLUSION :  
 COEFFICIENTS D'INFLUENCE DES CONES COMPLETS  
 ET  
 PRECISION DES FORMULES OBTENUES

Dans notre étude, il reste encore quelques sujets à traiter ; par exemple : préciser les erreurs des formules et montrer leurs applications.

A ce propos, nous allons déduire, comme application de nos formules des troncs de cône, des formules des coefficients d'influence des cônes complets, qui, théoriquement devraient être très approximatives, mais répondent en réalité aux besoins de l'industrie avec une précision inespérée.

Pour ceci, nous considérons d'abord un tronc de cône tel que :



$$\lambda^2 l \text{ suffisamment grand}$$

$$\lambda^4 (L-l)^2 \gg 12(1-\eta^2)$$

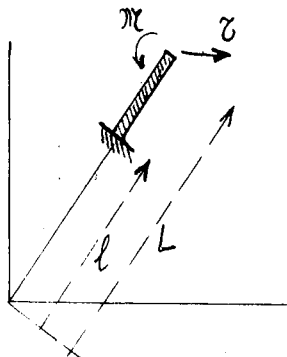
$$\mu H = \frac{\lambda(L-l)}{\sqrt{L+l}} \text{ quelconque}$$

chargé par les seuls efforts  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{M}$  à  $r = L$ . Alors avec les notations de (I), (II), (III), (IV), introduites dans notre chapitre IV, nous savons qu'en  $r = L$ , les déformations sont données par :

$$\phi = (II) i \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + (IV) \frac{-k}{\lambda \sqrt{2L}} \frac{\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H}$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L \text{tg} \alpha} \left[ (II) (-\lambda \sqrt{2L}) \frac{\text{sh} \mu H \text{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} + (IV) (-i) \frac{\text{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\text{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H} \right]$$

Puis, nous considérons le même tronc de cône, et les mêmes charges, mais avec encastrement parfait à  $r = l$  ; ceci est un problème hyperstatique. En introduisant les efforts  $t$ ,  $m$  à  $r = l$  dus à l'encastrement, ces efforts sont déterminés par



$$\phi = 0$$

$$v = 0$$

c'est-à-dire, d'après les formules de tronc de cône,

$$(I) i (\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) + (III) \frac{z}{\lambda \sqrt{2L}} (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H) = (II) (-zi) \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H$$

$$+ (IV) \frac{z}{\lambda \sqrt{4Ll}} (\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H)$$

$$(i) \lambda \sqrt{2L} (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H) + (III) (-i) (\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) = (II) (-\lambda \sqrt{4Ll}) (-\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H)$$

$$+ (IV) (-zi) \left(\frac{l}{L}\right)^{1/4} \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H$$

L'ou on trouve qu'en posant :

$$\Delta = (\sin^2 \mu H - \operatorname{sh}^2 \mu H) (\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H)$$

$$(I) = \frac{1}{\Delta} \left[ (II) z \left(\frac{L}{l}\right)^{1/4} \{ -(\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H + (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H) (-\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H) \} \right.$$

$$\left. + (IV) \frac{zi}{\lambda \sqrt{4Ll}} \{ -(\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) (\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H) + z (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H) \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H \} \right]$$

$$(III) = \frac{1}{\Delta} \left[ (II) i \lambda \sqrt{4Ll} \{ -(\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) (-\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H) + z (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H) \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H \} \right.$$

$$\left. + (IV) z \left(\frac{l}{L}\right)^{1/4} \{ (\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H) \operatorname{sh} \mu H \sin \mu H - (\operatorname{sh} \mu H \cos \mu H + \operatorname{ch} \mu H \sin \mu H) (\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H) \} \right]$$

Et les déformations à  $r = L$  du problème sont données, après un calcul long mais sans difficulté, par :

$$\phi = (II) i \frac{\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H} + (IV) \frac{-z}{\lambda \sqrt{2L}} \frac{\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H}$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L \operatorname{tg} \alpha} \left[ (II) (-\lambda \sqrt{2L}) \frac{\operatorname{sh} \mu H \operatorname{ch} \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H} + (IV) (-i) \frac{\operatorname{sh}^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H} \right]$$

comme  $\operatorname{ch}^2 \mu H + \cos^2 \mu H$  est toujours plus grand que  $\operatorname{sh}^2 \mu H - \sin^2 \mu H$  quel que soit  $\mu H$  ces dernières formules illustrent parfaitement le fait physique bien connu de la résistance des matériaux : à savoir : l'encastrement fait diminuer les déformations.

Théoriquement, nous savons que les dernières formules trouvées sont valables pour  $\lambda^2 l$  suffisamment grand et  $\lambda^4 (L-l)^2 \gg 12(1-\eta^2)$ . Alors en maintenant toujours  $\lambda^4 (L-l)^2 \gg 12(1-\eta^2)$ , mais en diminuant la valeur de  $\lambda^2 l$ , ces formules deviennent moins bonnes. Et ainsi, à la limite où

$$l = 0$$

$$\lambda^4 L^2 \gg 12(1-\eta^2)$$

$$\mu H = \lambda \sqrt{L}$$

On sait a priori que ces formules sont très approximatives.



Mais physiquement, en encastrant à  $r = l$  le tronc de cône, on fait tendre  $l$  à zéro, le cas considéré est devenu un cône complet. Il est assez naturel d'adopter comme formules très approximatives des coefficients d'influence des cônes complets, d'après les considérations ci-dessus, les formules suivantes :

$$L\mathcal{F} - \frac{q_0 L^2 \sin \alpha}{2} + \frac{\delta L^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{phL^2}{2} = 0$$

$$(II) = \frac{i\lambda^2 L t g \alpha \sin \alpha}{Eh} \left\{ \mathcal{F} - \mathcal{F} t g \alpha - \frac{\delta \delta}{\lambda^4} + 3(3+\eta) ph \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\lambda^4 \xi} \right\}$$

$$(IV) = \frac{-\lambda^4 L t g \alpha}{Eh} \left[ \eta + \frac{1}{\lambda^4} \left( \frac{1-\eta}{L \sin \alpha} \sqrt{\mathcal{F}} + (1+2\eta) q_0 - (3+3\eta) \delta L \cos \alpha + \frac{ph}{\sin \alpha} [1+2\eta \cdot (1+\eta) (2+\eta) \cos^2 \alpha] \right. \right. \\ \left. \left. + (2+\eta) (3+\eta) ph \frac{L \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \right) \right]$$

$$\phi = \frac{t g^2 \alpha}{Eh} \left\{ \frac{\mathcal{F}}{\sin \alpha} - 2q_0 L + 3\delta L^2 \cos \alpha - \frac{phL}{\sin \alpha} [2 - (2+\eta) \cos^2 \alpha] - (3+\eta) ph \frac{L^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \right\}$$

$$+ (II) i \frac{sh^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{ch^2 \mu H + \cos^2 \mu H} + (IV) \frac{-2}{\lambda \sqrt{2L}} \frac{sh \mu H ch \mu H + \sin \mu H \cos \mu H}{ch^2 \mu H + \cos^2 \mu H}$$

$$V = \frac{t g \alpha}{Eh} \left\{ -\eta \frac{\mathcal{F}}{\sin \alpha} + q_0 L - \delta L^2 \cos \alpha \left[ 1 - \frac{3(1-\eta)}{\lambda^4 L^2} \right] + phL \sin \alpha + \frac{phL^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\xi} \left[ 1 - \frac{3(1-\eta)(3+\eta)}{\lambda^4 L^2} \right] \right\} \\ + \frac{i}{\lambda^2 L t g \alpha} \left[ (II) (-\lambda \sqrt{2L}) \frac{sh \mu H ch \mu H - \sin \mu H \cos \mu H}{ch^2 \mu H + \cos^2 \mu H} + (IV) (-i) \frac{sh^2 \mu H + \sin^2 \mu H}{ch^2 \mu H + \cos^2 \mu H} \right]$$

Ces formules sont très faciles à utiliser par l'ingénieur. Elles paraissent a priori très approximatives et pourtant donnent en réalité une grande précision pour  $\lambda \sqrt{L}$  assez grand.

En effet, dans leur récente recherche, publiée\*, M<sup>r</sup>. Taylor et Wenk ont calculé un tronc de cône sous la charge de pression constante (donc un cas particulier de notre étude). Ils ont exprimé la solution générale en fonctions de Bessel :

Ber<sub>2</sub>  
Bei<sub>2</sub>  
Her<sub>2</sub>  
Hei<sub>2</sub>

Or, en utilisant les formules :

$$J_2(\rho e^{i\frac{\pi}{4}}) = \text{Ber}_2 \rho - i \text{Bei}_2 \rho$$

....

\* Voir : Proceeding of the 2<sup>d</sup> U.S. National Congress of Applied mechanics p.325- p.331

$$Y_2(\rho e^{i\frac{\pi}{4}}) = (\text{Bei}_2 \rho - \frac{2}{\pi} \text{Ker}_2 \rho) + i (\text{Ber}_2 \rho + \frac{2}{\pi} \text{Kei}_2 \rho)$$

et en posant :

$$U^4 = 12(1-\eta^2)$$

$$C_1 = \frac{Eh^2}{U^2} \{i(-A+C) + (E+L)\}$$

$$C_2 = \frac{Eh^2}{U^2} \{- (A+C) - i (E-L)\}$$

$$C_3 = \frac{Eh^2}{U^2} i \frac{2}{\pi} \{B-D\}$$

$$C_4 = \frac{Eh^2}{U^2} \frac{2}{\pi} \{E+D\}$$

A, B, C, D étant les constantes d'intégration du chapitre I, nous retrouvons, sans difficulté, d'après les formules du chapitre I, comme cas particulier, les intégrales de **MM. Taylor et Wenk**.

**MM. Taylor et Wenk** ont tenté ensuite de calculer les coefficients d'influence qu'ils appellent "Edge coefficients" d'un tronc de cône :  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$  et  $a_2, b_2, \dots, e_2, f_2$ .

Malgré les résultats très élégants sur  $a_2, b_2, \dots, e_2, f_2$ , ceux-ci ne présentent pas théoriquement à notre connaissance les vraies valeurs qu'ils escomptaient.

Quant aux calculs de  $a_1, b_1, \dots, e_1, f_1$ , ils ont pris :

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = 0$$

c'est-à-dire dans notre notation :

$$B = 0$$

$$L = 0$$

donc les  $a_1, b_1, \dots, e_1, f_1$  obtenues ne sont autres choses que les coefficients d'influence d'un cône complet. En effet, en exprimant nos formules du chapitre IV relatives au cône complet, en  $\text{Ber}_2, \text{Bei}_2$ , on retrouve sans difficulté les formules littérales de **MM. Taylor et Wenk**.

**MM. Taylor et Wenk** ont fait des abaques relatifs à  $a_1, b_1, \dots, e_1, f_1$ , qui représentent un intérêt capital pour les calculs des cônes complets. Nous regrettons seulement que ces abaques aient été présentés comme coefficients d'influence d'un tronc de cône.

Comparons les résultats de nos formules très approximatives des cônes complets avec ceux des abaques de **MM. Taylor et Wenk**, on voit que :

....

1°) Pour  $\rho = 20$ ,  $\lambda\sqrt{L} = 10$ . Nos formules donnent pour les seules charges  $\tau, \pi$ ,

$$\phi = (II) i + (IV) \frac{-z}{\lambda\sqrt{2L}}$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L t g \alpha} [(II) (-\lambda\sqrt{2L}) + (IV) (-i)]$$

Et les abaques de MM. Taylor et Wenk donnent :

$$\phi = (II) i 0,9835 + (IV) \frac{-z}{\lambda\sqrt{2L}} 0,9835$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L t g \alpha} [(II) (-\lambda\sqrt{2L}) 0,9828 + (IV) (-i) 0,9835]$$

l'écart relatif de ces deux groupes de formules ne dépasse pas

4,95 %

2°) Pour  $\rho = 10$ , c'est-à-dire  $\lambda\sqrt{L} = 5$ . Alors qu'on attendait a priori des valeurs très mauvaises si non erronées de nos formules, puisque  $\lambda\sqrt{L}$  n'est pas tellement grand, on voit que :

$$\phi = (II) i + (IV) \frac{-z}{\lambda\sqrt{2L}}$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L t g \alpha} [(II) (-\lambda\sqrt{2L}) + (IV) (-i)]$$

Les abaques de MM. Taylor et Wenk donnent :

$$\phi = (II) i 0,9475 + (IV) \frac{-z}{\lambda\sqrt{2L}} 0,968$$

$$V = \frac{i}{\lambda^2 L t g \alpha} [(II) (-\lambda\sqrt{2L}) 0,895 + (IV) (-i) 0,9475]$$

l'écart relatif de ces deux groupes de formules ne dépasse pas

17,2 %

Donc, même dans la zone où nos formules ne devraient pas être utilisées, elles donnent encore une approximation intéressante qui s'améliore beaucoup pour des  $\rho$  plus grands que 10. Et à partir de  $\rho = 20$ , elles donnent une approximation dont l'erreur relative est plus petite que 5 %.

Cette bonne concordance avec <sup>les</sup> résultats connus sur les coefficients d'influence des cônes complets nous conduit à penser que les formules approchées des coefficients des troncs de cône donnent dans le domaine défini par  $|z| > 20$ , une précision de 5 % sinon supérieure.

~~~~~

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Parmi les livres et les études, nous citons simplement les suivants :

I - Elasticité et Résistance des matériaux

- 1°) A.E.H.LOVE : "Mathematical theory of elasticity" 1927 CAMBRIDGE
- 2°) R.L'HERMITE: "Résistances des matériaux" T.1 1954, Dunod, PARIS
- 3°) S.TIMOSHENKO : "Theory of plates and shells" 1940, Mc Graw-Hill
NEW-YORK
- 4°) FLÜGGE : "Statik und Dynamik der Shalen" 1934, Springer, BERLIN

II - Etudes sur les enveloppes coniques à épaisseur constante

A - Etudes de base :

- 1°) E.MEISSNER : "Das Elastizitäts problem für dünne Schalen" Phy.Z.
Bd 14, 1913, voir la traduction en anglais avec
corrections par W.A.NASH : Translation 238, 1951.
Navy Department. The David W.TAYLOR Model Basin.
- 2°) F.DUFOIS : "Über die Festigkeit der Kegelschale" 1917, ZÜRICH
- 3°) C.E.TAYLOR et E.WENK Jr. voir "Proceeding of the 2d U.S. National
Congress of Appl.Mech. p.323-331.

B - Etudes diverses :

- 1°) J.W.GECKELER : voir "Forsh.Ing.Wes" n°276, 1926, BERLIN
- 2°) E.SIEBEL : voir "V.D.I.Forsch" n°400, 1940, BERLIN
- 3°) E.WENK Jr. et C.E.TAYLOR : voir "David W.TAYLOR Model Basin
rapport n° 826, 1953"
- 4°) R.WAHL : voir "Dissertation" Technische Hochschule. STUTTGART,
1954

III - Fonctions de Bessel

- 1°) GN.WATSON : Theory of Bessel functions 1944, CAMBRIDGE
- 2°) G.PETIAU : La théorie des fonctions de Bessel, 1955, C.N.R.S.
PARIS
- 3°) N.W.Mc LACHLAN : Bessel functions for engineers, 1934 OXFORD
- 4°) H.MARKOVITZ : A property of Bessel functions, J.App.Phy.Vol.23
n°10, 1952

TABLE DES MATIERES

	PAGES
AVANT-PROPOS	I
Chapitre I - LES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES DES CÔNES ET LEUR INTÉGRATION	1
Chapitre II - CAS PARTICULIER : LES QUASI-PLAQUES CIRCULAIRES	15
Chapitre III - CAS PARTICULIER : LES QUASI-CYLINDRES	27
Chapitre IV - LES CONSTANTES D'INTÉGRATION ET LES FORMULES DE COEFFICIENTS D'INFLUENCE	32
Chapitre V - LES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DES QUASI-PLAQUES CIRCULAIRES ET DES QUASI-CYLINDRES	48
Chapitre VI - APPLICATION DES FORMULES ET CONCLUSION COEFFICIENTS D'INFLUENCE DES CÔNES COMPLETS, PRÉCISIONS DES FORMULES OBTENUES	76
BIBLIOGRAPHIE	81
TABLE DES MATIERES	82

~~~~~



II<sup>ème</sup> THESE

SUR LA DETERMINATION DES VITESSES CRITIQUES  
ET DES PULSATIONS PROPRES D'UN ARBRE TOURNANT

A SECTION CIRCULAIRE





Vu :

*Grenoble, le 24 Mai 1956*

Le Président de la Thèse

R. FORTRAT

Vu :

*Grenoble, le 25 Mai 1956*

Le Doyen de la Faculté des Sciences

L. MORET

• Vu et permis d'imprimer :

*Grenoble, le 28 Mai 1956*

Le Recteur de l'Académie de Grenoble

H. PARISELLE