



HAL
open science

Intégration approchée des équations différentielles lorsque la dérivée d'ordre le plus élevé ne figure que dans un terme correctif

Gerhard Neidhofer

► **To cite this version:**

Gerhard Neidhofer. Intégration approchée des équations différentielles lorsque la dérivée d'ordre le plus élevé ne figure que dans un terme correctif. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1958. Français. NNT : . tel-00277368

HAL Id: tel-00277368

<https://theses.hal.science/tel-00277368>

Submitted on 6 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE
en vue de l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

Gerhard J. NEIDHOFER

ingénieur diplômé
de la Technische Hochschule Darmstadt

1ère THESE :

INTEGRATION APPROCHEE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
LORSQUE LA DERIVEE D'ORDRE LE PLUS ELEVE NE FIGURE
QUE DANS UN TERME CORRECTIF

2ème THESE :

Propositions données par la Faculté :
LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS.

Soutenues le 6 décembre 1958, devant
la Commission d'Examen.

JURY :

MM. Cl. CHABAUTY,	}	Président
M. BLAMBERT		Examineurs
J. KUNTZMANN		

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

-:-:-

Doyen : M. MORET, Correspondant de l'Institut.

PROFESSEURS :

MORET,.....	Géologie, Minéralogie, Correspondant de l'Institut	WEIL,.....	Physique
ANDRIEUX,.....	Chimie, Correspondant de l'Institut	FELICI,.....	Physique
NEEL,.....	Physique expérimentale, Membre de l'Institut	KUNTZMANN,....	Analyse appliquée
PARDE,.....	Hydrologie fluviale	DODERO,.....	Electrochimie, Electrometallurgie
DORIER,.....	Zoologie	SANTON,.....	Mécanique des fluides
HEILMANN,.....	Chimie	BARBIER,.....	Géologie appliquée
KRAVTCHENKO,..	Mécanique rationnelle	CHABAUTY,.....	Calcul différentiel et intégral
BENOIT,.....	Radio-Electricité	OZENDA,.....	Botanique
CHENE,.....	Chimie papetière	FALLOT,.....	Electrotechnique
NOBECOURT,....	Micrographie papetière	GALVANI,.....	Mathématiques
		TRAYNARD,.....	Chimie
		SOUTIF,.....	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

REULOS,.....	Physique	REEB,.....	Mathématiques
SILBER,.....	Mécanique des fluides	Melle LUTZ,..	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES :

CRAYA,.....	Mécanique physique	BOUCHEZ,.....	Physique nucléaire
MICHEL,.....	Géologie	PILLET,.....	Electrotechnique
GALLISSOT,....	Mécanique	BARBIER J.Cl..	Physique
AYANT,.....	Physique	LLIBOUTRY,....	Physique
MOUSSIEGT,....	Electrotechnique	BLAMBERT,.....	Calcul Numérique
BONNIER,.....	Chimie	VAILLANT,.....	Zoologie

PAUTHENET,.....	Electrotechnique	DEPASSEL,.....	Mécanique
DREYFUS,.....	Physique	Mme KOFLER,..	Botanique
Melle NAIM,..	Mathématiques	DEBELMAS,.....	Géologie
BUYLE-BODIN,..	Physique	BRISSONNEAU,..	Physique
PERRET,.....	Servomécanismes	Mme BARBIER,..	Chimie

Secrétaire principal : Mr GRENIER

Secrétaire : Mr BICHET

PREMIER SUJET

-:-

INTEGRATION APPROCHEE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LORSQUE LA DERIVEE D'ORDRE LE PLUS ELEVE NE

FIGURE QUE DANS UN TERME CORRECTIF

-:-:-:-

A V A N T - P R O P O S

-:-:-

La présente étude a été entreprise près la Faculté des Sciences de l'Université de GRENOBLE, et menée à bien sous la direction de Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, qui, non seulement m'a communiqué l'idée originale, mais encore a eu la bienveillance d'être pour moi un guide constant et avisé tout au long de mes recherches. En effet, il m'a prodigué directives et conseils que sa grande érudition et sa vaste expérience rendaient particulièrement précieux. Je lui garde une profonde reconnaissance.

J'adresse aussi mes remerciements sincères à Monsieur le Professeur Cl. CHABAUTY qui a bien voulu accepter la direction de mon second sujet de thèse. Cette étude a été pour moi l'occasion d'approfondir mes connaissances dans le domaine des mathématiques pures.

Quant à Monsieur le Professeur NEEL, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Hydraulique et de Radio-électricité de GRENOBLE, je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance pour l'honneur qu'il m'a fait en m'accueillant à mon arrivée à l'Université et en acceptant d'être Président du Jury.

Enfin, j'ai à coeur de dire aussi combien ma tâche fut facilitée par l'accueil et l'aide que j'ai reçus au Laboratoire de Calcul. A ce titre, je tiens à remercier Messieurs BOLLIET, RAYBAUD et MUSSO.

Ces recherches n'ont été rendues possibles que grâce à une bourse d'études accordée par le Gouvernement Français dans le cadre des accords culturels franco-allemands. Que les comités qui ont bien voulu m'attribuer cette bourse, veuillent bien accepter mes très vifs remerciements.

I N T R O D U C T I O N

-:-:-

L'étude mathématique de certains phénomènes se ramène à l'intégration d'équations différentielles dans lesquelles la dérivée d'ordre le plus élevé ne figure que dans un terme correctif. Une nouvelle méthode d'intégration approchée de telles équations sera exposée ici.

Notre étude comprend trois parties.

Dans le chapitre I, nous étudions des équations différentielles du 2ème ordre, linéaires, à coefficients constants et homogènes. Nous mettons en évidence l'intérêt de la méthode (qui est convergente) dans deux directions :

- lorsque les intégrales dépendent très peu de la valeur initiale donnée à y'_0 : on approche alors le faisceau de ces intégrales.
- lorsque les intégrales forment un faisceau très divergent : on obtient alors un procédé pour approcher l'une des intégrales qui ne devient pas infinie (ou devient infinie moins vite que les autres). Une telle intégrale est, en général, difficile à isoler.

Dans le chapitre II, nous montrons sur des exemples relatifs à des équations linéaires et homogènes à coefficients variables, que le procédé est sans doute souvent divergent. Nous n'avons pas abordé la recherche de catégories d'équations pour lesquelles le procédé convergerait.

Dans le chapitre III, nous traitons un exemple emprunté à la théorie des réacteurs nucléaires. On obtient une approximation d'une solution. Cette approximation fournit la solution du problème proposé dans la mesure où la valeur initiale y'_0 intervient peu.

Notre étude ne comporte l'examen d'aucun cas non linéaire, mais il est hors de doute que ce genre de méthode doit pouvoir être appliqué à certaines équations non linéaires.

L'intégration approchée des équations traitées, par des méthodes classiques, présente certains inconvénients quant à la rapidité et simplicité du calcul. Pour atteindre une bonne précision, nous devons choisir un très petit pas d'intégration. Nous serions donc obligés d'effectuer un lourd calcul si l'intervalle intéressant est un peu long.

A la machine analogique, la difficulté d'une intégration provient du fait que les coefficients sont extrêmement différents. L'affichage du coefficient de la dérivée d'ordre supérieur, qui est très petit, manque de précision. Il est possible d'améliorer cet affichage par un changement de variables qui va accroître le temps d'intégration, mais on risque alors d'introduire des erreurs dues, à la dérive des amplificateurs.

Dans la recherche d'une méthode d'intégration plus maniable et plus adaptée aux exigences du problème, il nous vient l'idée de considérer le terme de la dérivée d'ordre le plus élevé comme un terme correctif. En le supprimant dans une première étape, mais en tenant compte de son existence d'une façon approchée par la suite, l'équation traitée est transformée en une suite d'équations différentielles dont l'ordre est abaissé d'une unité. La résolution de ces équations, effectuée soit par le moyen des fonctions élémentaires, soit par des méthodes d'intégration approchée, conduit à une suite de fonctions, rigoureusement ou pratiquement convergentes vers une intégrale particulière de l'équation originale.

C H A P I T R E I

--:--

INTEGRATION APPROCHEE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

LORSQUE LE COEFFICIENT DE LA DERIVEE SECONDE EST

PETIT

1°) EXPLICATION DE LA METHODE. -

Donnons-nous une équation différentielle linéaire du 2ème ordre, à coefficients constants, et homogène :

$$h y'' + a y' + b y = 0 \quad (I)$$

dans laquelle le coefficient h est une constante très inférieure à a et b :

$$h \ll a, b$$

Nous considérons des intégrales satisfaisant à la condition initiale

$$y_{(x=0)} = 1$$

Nous allons appliquer à ce type d'équation une nouvelle méthode d'intégration approchée. La méthode nous fournira, par un procédé d'approximations successives, des fonctions qui sont voisines d'une certaine intégrale de cette équation.

Profitant du fait que l'influence de $h y''$ n'est pas grande, nous nous proposons de supprimer ce terme dans un premier pas. Nous obtenons alors une équation différentielle du 1er ordre $y'_0 = Y_0(y_0)$

dont l'intégrale y_0 , passant par le point $P(0,1)$ peut ne pas être très différente de l'une des intégrales de (I). La fonction $y_0(x)$ est la "première approximation".

Dans un deuxième pas d'approximation, nous nous servons de y_0 pour la détermination approchée de la dérivée seconde de y . Nous ne commettons pas une grande erreur parce que y_0'' , deuxième membre d'une nouvelle équation différentielle du 1er ordre, est affecté du très petit coefficient h .

L'intégrale $y_1(x)$ de cette nouvelle équation

$$y_1' = Y_1(y_1; y_0'')$$

contenant le point $P(0,1)$ est une deuxième approximation.

D'une façon plus générale :

$$y_{n+1}' = Y_{n+1}(y_{n+1}; y_n'')$$

En poussant le calcul assez loin, nous aurons une suite de fonctions, probablement convergente vers une fonction y .

2°) PRESENTATION SUR UN EXEMPLE. -

$$\text{Soit } h y'' + y' + y = 0 \tag{II}$$

$$y(0) = 1$$

Premier pas : suppression du terme $h y''$ dans (II)

Reste l'équation différentielle du premier ordre :

$$\underline{y_0' + y_0 = 0} \tag{1}$$

qui admet l'intégrale, passant par le point $P(0,1)$:

$$\underline{y_0 = e^{-x}} \tag{2}$$

=====

Deuxième pas : cherchant une première correction de l'intégrale approchée (2), nous posons :

$$\underline{y_1' + y_1 = -h y_0''} \quad (3)$$

Cette équation admet l'intégrale en utilisant

$$y_0 = e^{-x} \quad \text{et } y_{(x=0)} = 1 :$$

$$\underline{y_1 = y_0 (1 - x h)}$$

D'une manière analogue, nous continuons à appliquer le procédé. En supposant que y_n est la $n^{\text{ème}}$ solution approchée, nous obtenons la $(n+1)^{\text{ème}}$ approximation d'après la formule :

$$\underline{y_{n+1}' + y_{n+1} = -h y_n''}$$

Voici les expressions des six premières fonctions :

$$y_0 = e^{-x} [1]$$

$$y_1 = e^{-x} [1 - x h]$$

$$y_2 = e^{-x} \left[1 - x h - \left(2x - \frac{x^2}{2!} \right) h^2 \right]$$

$$y_3 = e^{-x} \left[1 - x h - \left(2x - \frac{x^2}{2!} \right) h^2 - \left(5x - 4 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) h^3 \right]$$

$$y_4 = e^{-x} \left[1 - x h - \left(2x - \frac{x^2}{2!} \right) h^2 - \left(5x - 4 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) h^3 - \left(14x - 14 \frac{x^2}{2!} + 6 \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \right) h^4 \right]$$

$$y_5 = e^{-x} \left[1 - x h - \left(2x - \frac{x^2}{2!} \right) h^2 - \left(5x - 4 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) h^3 - \left(14x - 14 \frac{x^2}{2!} + 6 \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \right) h^4 - \left(42x - 48 \frac{x^2}{2!} + 27 \frac{x^3}{3!} - 8 \frac{x^4}{4!} \right) h^5 \right]$$

3°) EXPRESSION GENERALE DE $y_{n+1}(x)$. -

Nous allons montrer que l'on peut donner l'expression générale suivante de $y_{n+1}(x)$:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - h^{n+1} e^{-x} \sum_{K=0}^n (-1)^{n-K} (C_{2n}^K - C_{2n}^{K-2}) \frac{x^{n-K+1}}{(n-K+1)!}$$

$$\equiv y_n - h^{n+1} e^{-x} S'_{n+1}$$

Remarquons que la formule est vraie pour $n = 0$. Démontrons-la par récurrence. En portant cette valeur dans l'équation :

$$y'_{n+1} + y_{n+1} = -h y''_n$$

cela revient à démontrer que :

$$S'_{n+1} - (S_n - 2S'_n + S''_n) = 0$$

Pour vérifier cette identité, nous écrivons le terme en x^α . Il vient, en supprimant des coefficients constants :

$$(C_{2n}^{n-\alpha} - C_{2n}^{n-\alpha-2}) - (C_{2n-2}^{n-\alpha} - C_{2n-2}^{n-\alpha-2} + 2C_{2n-2}^{n-\alpha-1} - 2C_{2n-2}^{n-\alpha-3} + C_{2n-2}^{n-\alpha-2} - C_{2n-2}^{n-\alpha-4}) = 0$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n+1$

ce qui est bien exact car :

$$C_{2n}^{n-\alpha} = C_{2n-1}^{n-\alpha} + C_{2n-1}^{n-\alpha-1} = C_{2n-2}^{n-\alpha} + 2C_{2n-2}^{n-\alpha-1} + C_{2n-2}^{n-\alpha-2}$$

et, de même :

$$C_{2n}^{n-\alpha-2} = C_{2n-2}^{n-\alpha-2} + 2C_{2n-2}^{n-\alpha-3} + C_{2n-1}^{n-\alpha-4}$$

Il se présente pourtant une difficulté relative aux valeurs extrêmes des indices. Il faut, en effet, que l'indice supérieur soit compris entre 0 inclus et la moitié de l'indice inférieur inclus. Si certains indices inférieurs sont positifs, il n'y a aucune difficulté. Les relations de récurrence sont exactes en posant :

$$C_n^{-p} = 0 \quad p > 0$$

Pour l'autre extrémité, il n'y a pas non plus de difficulté car

$$n-\alpha \leq 2n-2 \quad \text{puisque} \quad \alpha \geq 1$$

4°) ETUDE DE LA CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHEES. -

Nous allons démontrer leur convergence quel que soit x , pourvu que h soit assez petit.

Soit donc le terme général :

$$a_{n+1}(x, h) = y_0 \cdot h^{n+1} \sum_{K=0}^n (-1)^{n-K} (C_{2n}^K - C_{2n}^{K-2}) \frac{x^{n+1-K}}{(n+1-K)!}$$

Nous remarquerons que

$$C_{2n}^K > C_{2n}^{K-2} \quad \text{pour} \quad K \leq n$$

et nous majorerons par :

$$y_0 \cdot h^{n+1} \sum_{K=0}^n [C_{2n}^K - C_{2n}^{K-2}] \frac{|x^{n+1-K}|}{(n+1-K)!}$$

Par ailleurs, pour Z entier :

$$\frac{x^Z}{Z!} \leq \frac{x^{E(x)}}{E(x)!} \quad E(x) \text{ désignant la partie entière de } x$$

Par suite, on peut majorer par :

$$y_0 \cdot h^{n+1} \frac{x^{E(x)}}{E(x)!} \sum_{K=0}^n [C_{2n}^K - C_{2n}^{K-2}]$$

Or :

$$\sum_{K=0}^n [C_{2n}^K - C_{2n}^{K-2}] = C_{2n+1}^n$$

Nous obtenons donc :

$$a_{n+1}(x, h) < y_0 \frac{x^{E(x)}}{E(x)!} h^{n+1} C_{2n+1}^n \equiv y_0 \frac{x^{E(x)}}{E(x)!} u_{n+1}(h)$$

La convergence de la série en u_i ne dépend visiblement pas de x .

$$u_{n+1} = h^{n+1} \frac{(2n+1)!}{n! (n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} h \frac{2(2n+1)}{n+1} \rightarrow 4h$$

La convergence est assurée si $h \leq p < \frac{1}{4}$ et elle est uniforme en x .

5°) LA LIMITE AINSI TROUVEE EST UNE INTEGRALE DE L'EQUATION PROPOSEE. -

En effet, les expressions obtenues en dérivant $a_{n+1}(x, h)$ par rapport à x , ont des formes analogues à celle de $a_{n+1}(x, h)$. Il en résulte que ce sont les termes de séries uniformément convergentes en x pourvu que $h < \frac{1}{4}$. Il en résulte que la série de terme général $a_{n+1}(x, h)$ est dérivable terme à terme autant de fois que l'on veut, c'est donc une intégrale de l'équation différentielle proposée.

Pour caractériser cette intégrale, nous prendrons sa tangente à l'origine. En dérivant y_{n+1} par rapport à x et en faisant $x = 0$, nous obtenons :

$$-y'_{n+1}(x=0) = 1 + h \sum_{k=0}^n \left[c_{2k}^k - c_{2k}^{k-2} \right] h^k$$

série qui est convergente pour $h < \frac{1}{4}$.

On vérifie facilement par identification que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y'_{n+1}(x=0) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4h}}{2h}$$

c'est-à-dire que l'intégrale ainsi définie est :

$$e^{r_1 x}$$

r_1 désignant la racine de

$$h r^2 + r + 1 = 0 \quad \text{la plus voisine de zéro.}$$

Remarque : La série donnant $y'(x=0)$ ne converge pas pour $h > \frac{1}{4}$.

Ceci nous donne à penser que les séries utilisées plus haut ne convergent sans doute pas non plus pour $h > \frac{1}{4}$. Cette valeur de h est d'ailleurs celle pour laquelle les solutions exactes deviennent oscillatoires.

6°) GENERALISATION. -

$$\text{L'équation } h y'' + a y' + b y = 0$$

$$y(x=0) = 1 \quad (2)$$

se ramène à la précédente par le changement d'inconnue

$$x = \frac{a}{b} t$$

et le changement de paramètre

$$\frac{h b}{a^2} = c$$

L'expression générale de la $(n+1)^{\text{ème}}$ approximation de (I) s'écrit donc :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - c^{n+1} e^{-b/a \cdot x} \sum_{K=0}^n (-1)^{n-K} \left[c_{2n}^K - c_{2n}^{K-2} \right] \left(\frac{b}{a} \right)^{n-K+1} \frac{x^{n-K+1}}{(n-K+1)!}$$

La convergence de cette série est assurée si

$$c \leq p < \frac{1}{4}$$

et elle est uniforme en x .

7°) POSITION LIMITE DES SOLUTIONS APPROCHEES. -

Nous allons montrer que la limite de la suite des approximations est une intégrale de l'équation (I).

Ecrivons la relation entre la limite et les $y_n(x)$ comme suit :

$$y = e^{r_1 x} = y_0 e^{-\sigma_1 \cdot \lambda \cdot x} = y_0 \left[1 - \sigma_1 \cdot \lambda \cdot x + \dots + (-1)^p \frac{(\sigma_1 \lambda x)^p}{p!} + \dots \right]$$

$$y_0 = e^{-b/a \cdot x}$$

$$\lambda = \frac{b}{a}$$

r_1 désignant la racine de $h r^2 + a r + b = 0$ la plus voisine de zéro.

$$\sigma_1 = c \sum_{K=0}^{\infty} \left[c_{2K}^K - c_{2K}^{K-2} \right] c^K = - \left(\frac{r_1}{\lambda} + 1 \right)$$

Remarquons que :

$$c_1^n = c^n \sum_{K=0}^n \left[c_{2K+2n-2}^K - c_{2K+2n-2}^{K-2} \right] c^K$$

Cette formule est vraie pour $n = 1$. Démontrons-la par récurrence.

Avec

$$c_{2K+2n-2}^K - c_{2K+2n-2}^{K-2} = \rho_K$$

$$\text{et } c_{2K}^K - c_{2K}^{K-2} = \gamma_K$$

nous écrivons :

$$c_1^{n+1} = c^{n+1} \sum_{K=0}^{\infty} \rho_K \cdot c^K \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \gamma_K \cdot c^K$$

Cela revient à démontrer que :

$$\rho_0 \gamma_K + \rho_1 \gamma_{K-1} + \dots + \rho_{K-1} \gamma_1 + \rho_K \gamma_0 = c_{2K+2n}^K - c_{2K+2n}^{K-2}$$

En effet :

$$\begin{aligned} c_{2K+2n}^K - c_{2K+2n}^{K-2} &= 1 \left[c_{2K+2n-2}^K - c_{2K+2n-2}^{K-2} \right] + 2 \left[c_{2K+2n-4}^{K-1} - c_{2K+2n-4}^{K-3} \right] \\ &+ \left[c_4^2 - c_4^0 \right] \left[c_{2K+2n-6}^{K-2} - c_{2K+2n-6}^{K-4} \right] + \dots \\ &\dots + \left[c_{2K-4}^{K-2} - c_{2K-4}^{K-4} \right] \left[c_{2n+2}^2 - c_{2n+2}^0 \right] \\ &+ \left[c_{2K-2}^{K-1} - c_{2K-2}^{K-3} \right] c_{2n}^1 + \left[c_{2K}^K - c_{2K}^{K-2} \right] c_{2n-2}^0 \end{aligned}$$

propriété qui démontre l'identité proposée.

En tronquant la série double donnant y , nous obtenons l'expression de y_n , ordonnée d'après les puissances de x .

Conclusion : Le procédé donne l'approximation d'une des intégrales de l'équation proposée, pourvu qu'elles ne soient pas oscillatoires. L'intégrale ainsi définie est :

$$y = e^{r_1 \cdot x}$$

r_1 désignant la racine de $h r^2 + a r + b = 0$

la plus voisine de zéro.

8°) EXEMPLES NUMERIQUES. -

1er exemple :

$$h y'' + y' + y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0,1$$

Solutions rigoureuses :

$$y'(0) = 0 \quad : \quad y = 1,1455 \cdot e^{-1,127 \cdot x} - 0,1455 \cdot e^{-8,873 \cdot x}$$

$$y'(0) = -1 \quad : \quad y = 1,0164 \cdot e^{-1,127 \cdot x} - 0,0164 \cdot e^{-8,873 \cdot x}$$

$$y'(0) = -1,127 \quad : \quad y = e^{-1,127 \cdot x}$$

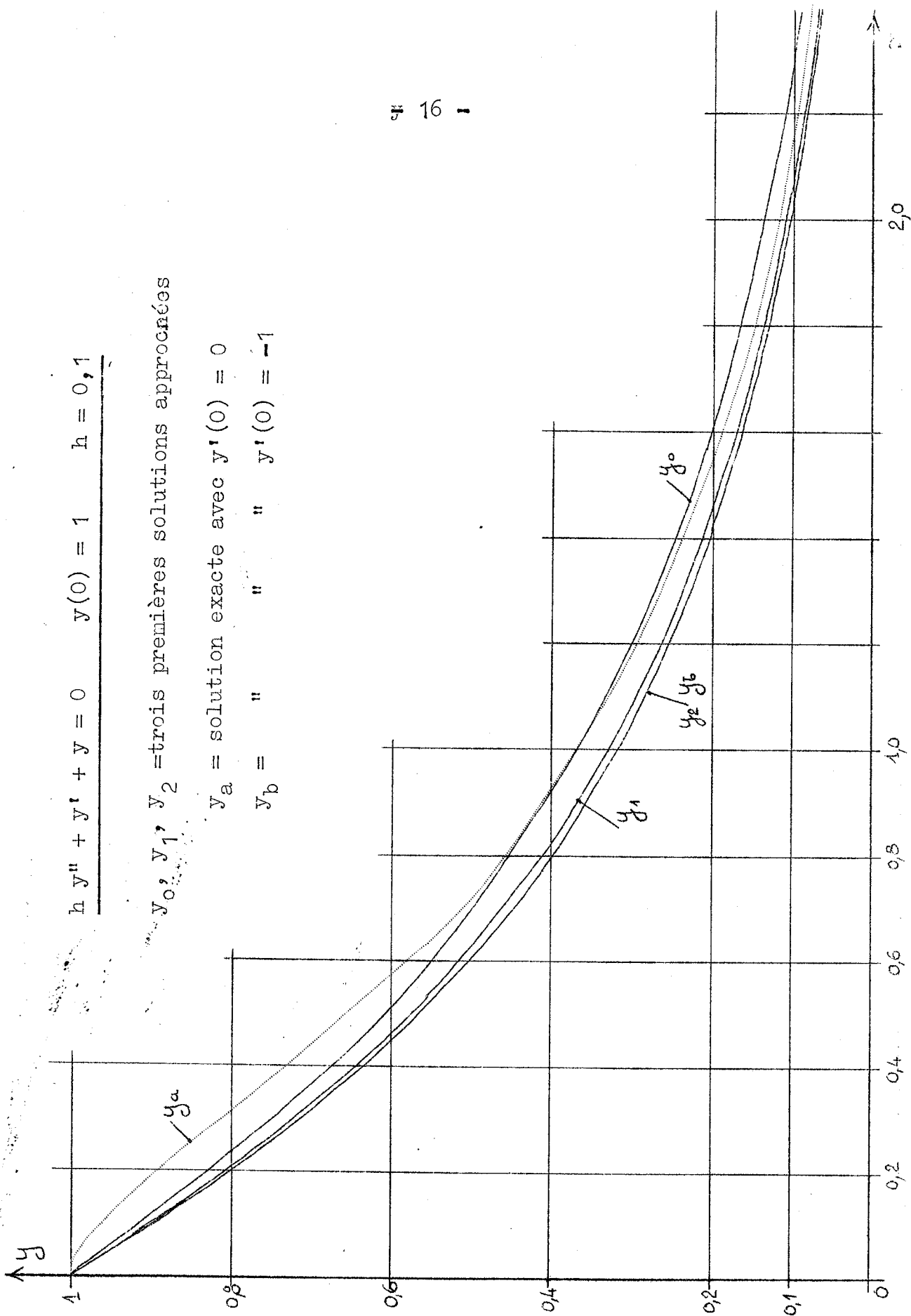
$y'(0)$	x	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	y_{exact}	0,848 45	0,650 29	0,371 14	0,211 23	0,120 25	0,068 50
-1	y_{exact}	0,765 09	0,578 34	0,329 31	0,187 42	0,106 70	0,060 78
-1,127	y_{exact}	0,754 46	0,569 21	0,324 00	0,184 43	0,104 98	0,059 80
-1	y_0	0,778 80	0,606 53	0,367 88	0,223 13	0,135 34	0,082 09
-1,1	y_1	0,759 33	0,576 20	0,331 09	0,189 66	0,108 27	0,061 57
-1,12	y_2	0,755 68	0,570 89	0,325 57	0,185 48	0,105 56	0,060 03
-1,125	y_3	0,754 80	0,568 97	0,324 41	0,184 68	0,105 11	0,059 82
-1,126 4	y_4	0,754 56	0,568 65	0,324 12	0,184 49	0,105 01	0,059 77
-1,126 82	y_5	0,754 49	0,568 56	0,324 03	0,184 44	0,104 98	0,059 76

$$h y'' + y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$$

y_0, y_1, y_2 = trois premières solutions approchées

y_a = solution exacte avec $y'(0) = 0$

y_b = " " " $y'(0) = -1$



2ème exemple :

$$h y'' + y' - y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$$

Solutions rigoureuses :

$$y'(0) = 0 \quad : \quad y = 0,922\ 6 \cdot e^{0,916\ 1 \cdot x} + 0,077\ 4 \cdot e^{-10,916\ 1 \cdot x}$$

$$y'(0) = 0,9 \quad : \quad y = 0,998\ 6 \cdot e^{0,916\ 1 \cdot x} + 0,001\ 4 \cdot e^{-10,916\ 1 \cdot x}$$

$$y'(0) = 0,916\ 1 \quad : \quad y = e^{0,916\ 1 \cdot x}$$

$y'(0)$	x	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	y exact	1,165 14	1,458 94	2,306 00	3,645 58	5,763 91	9,112 21
0,9	y exact	1,255 84	1,578 86	2,496 12	3,946 15	6,239 13	9,863 49
0,916 1	y exact	1,257 46	1,581 00	2,499 52	3,951 52	6,247 62	9,876 91
1,0	y_0	1,284 03	1,648 72	2,718 28	4,481 69	7,389 06	12,182 49
0,9	y_1	1,251 92	1,566 29	2,446 45	3,809 44	5,911 25	9,136 87
0,92	y_2	1,258 75	1,584 83	2,514 41	3,994 31	6,354 59	10,126 69
0,915	y_3	1,256 98	1,579 85	2,494 93	3,938 01	6,211 74	9,790 41
0,916 4	y_4	1,257 48	1,581 32	2,500 92	3,956 08	6,259 51	9,907 36

Interprétation des résultats des exemples 1 et 2 :

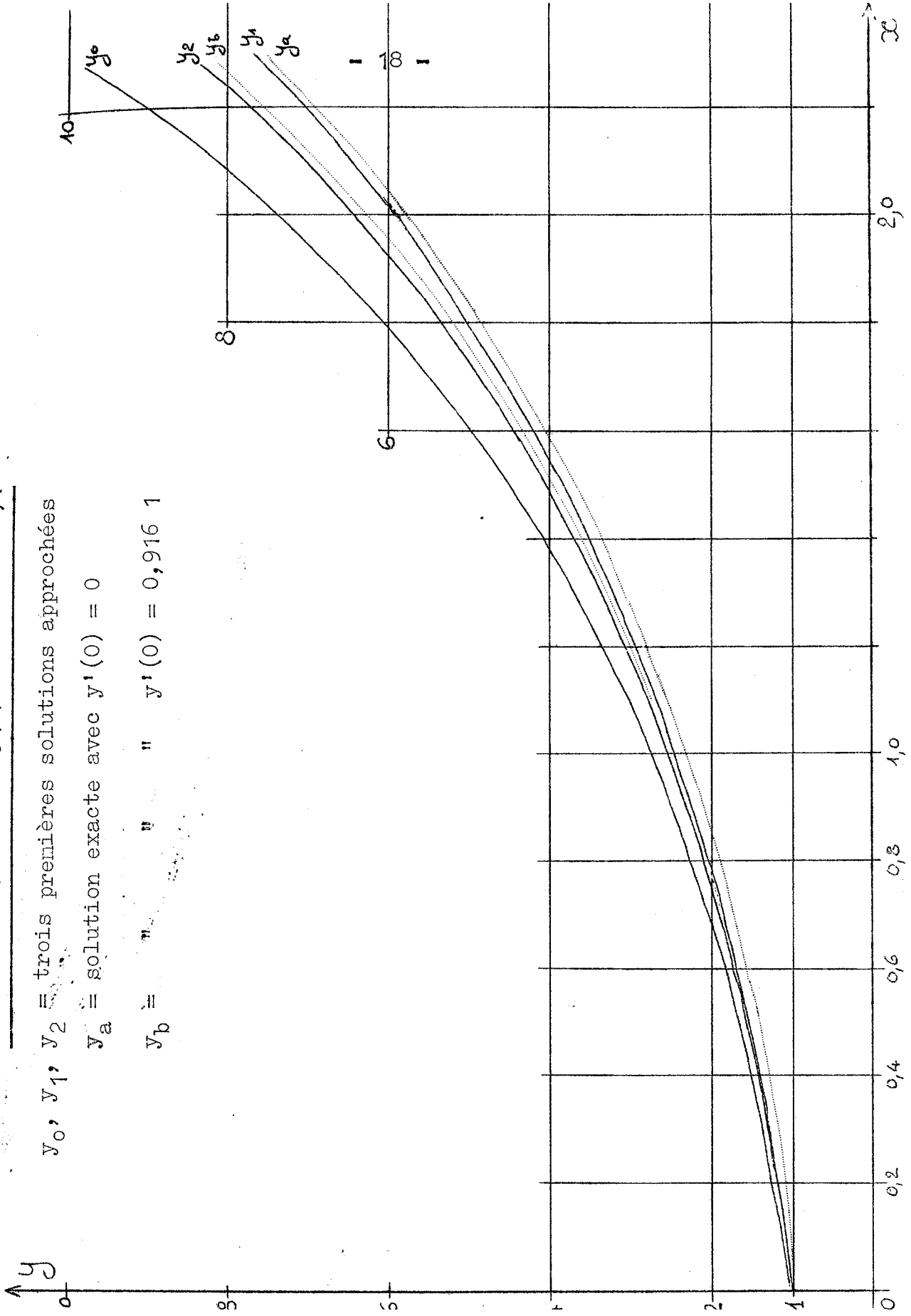
Les solutions exactes correspondant à des $y'(0)$ différents sont très voisines les unes des autres et vont en se rapprochant. On peut donc considérer que le procédé donne une approximation de l'une quelconque de ces solutions.

$$h y'' + y' - y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$$

y_0, y_1, y_2 = trois premières solutions approchées

y_a = solution exacte avec $y'(0) = 0$

y_b = " " " " $y'(0) = 0,916$



3ème exemple :

$$h y'' - y' + y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0,1$$

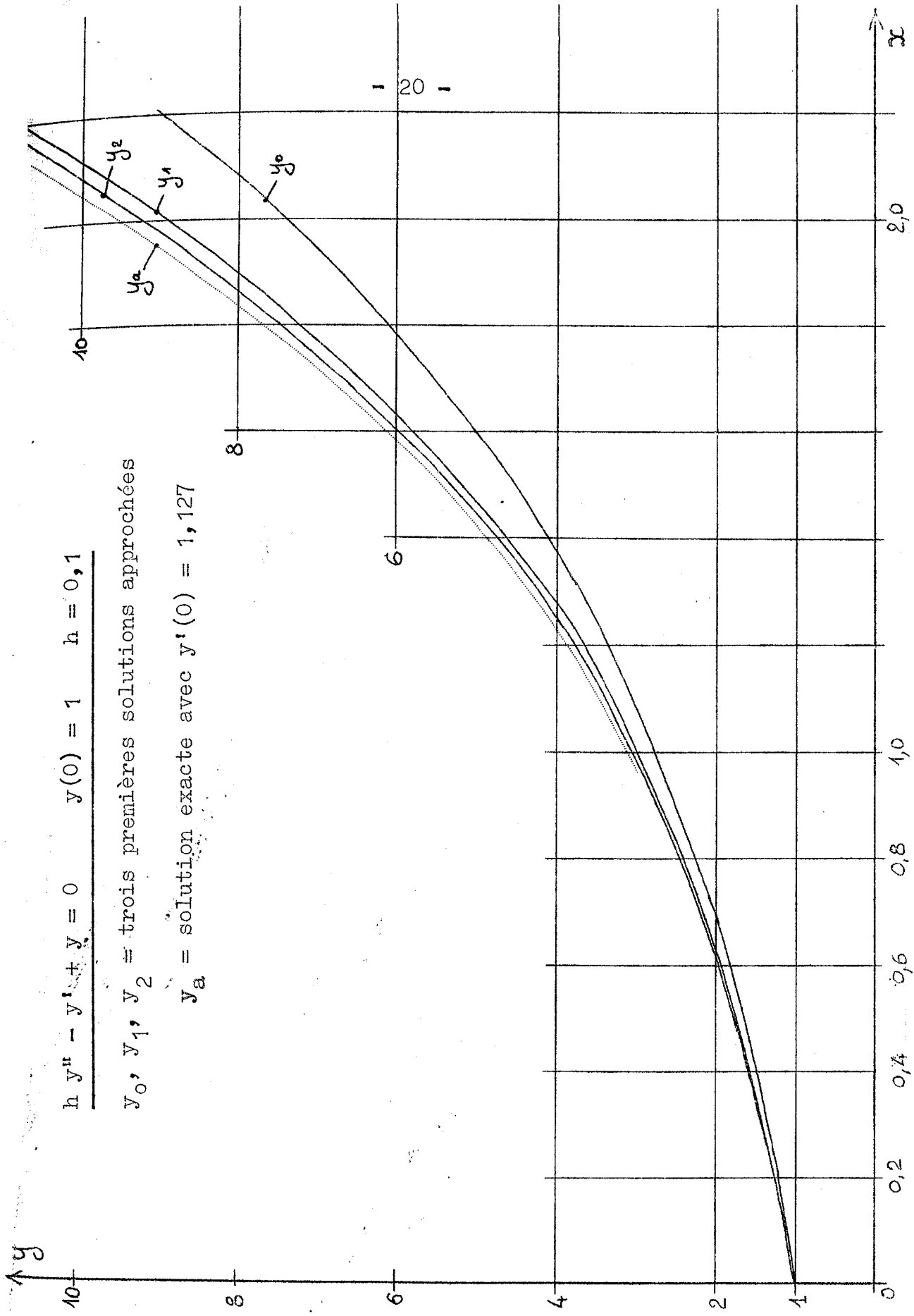
Solutions rigoureuses :

$$y'(0) = 0 \quad \# \quad y = 1,1455 \cdot e^{1,127 \cdot x} - 0,1455 \cdot e^{8,873 \cdot x}$$

$$y'(0) = 1 \quad : \quad y = 1,0164 \cdot e^{1,127 \cdot x} - 0,0164 \cdot e^{8,873 \cdot x}$$

$$y'(0) = 1,127 \quad : \quad y = e^{1,127 \cdot x}$$

$y'(0)$	x	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	y exact	0,180 94	-10,280 0	-1,034 ·10 ³	-8,773 ·10 ⁴	-7,412 ·10 ⁶	-6,262 ·10 ⁸
1,127	y exact	1,325 44	1,756 81	3,086 38	5,422 19	9,525 76	16,693 2
1	y_0	1,284 03	1,648 72	2,718 28	4,481 69	7,389 06	12,182 49
1,1	y_1	1,316 13	1,731 16	2,990 11	5,153 94	8,866 87	15,228 11
1,12	y_2	1,322 95	1,749 71	3,058 07	5,338 81	9,310 21	16,217 94
1,125	y_3	1,324 71	1,754 68	3,077 41	5,395 11	9,453 06	16,554 23
1,126 4	y_4	1,325 22	1,756 15	3,083 40	5,413 19	9,500 84	16,671 18



$$h y'' - y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$$

y_0, y_1, y_2 = trois premières solutions approchées

y_a = solution exacte avec $y'(0) = 1,127$

4ème exemple :

$$h y'' - y' - y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0,1$$

Solutions rigoureuses :

$$y'(0) = 0 \quad : y = 0,9226 \cdot e^{-0,9161 \cdot x} + 0,0774 \cdot e^{10,9161 \cdot x}$$

$$y'(0) = -0,9161 \quad : y \approx e^{-0,9161 \cdot x}$$

$y'(0)$	x	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0
0	y exact	1,919 3	18,737 2	4,26.10 ³	1.10 ⁶	2,347.10 ⁸
-0,916 1	y exact	0,795 33	0,632 55	0,400 08	0,253 09	0,160 06
-1	y ₀	0,778 80	0,606 53	0,367 88	0,223 13	0,135 34
-0,9	y ₁	0,798 27	0,636 85	0,404 67	0,256 59	0,162 40
-0,92	y ₂	0,794 62	0,631 55	0,399 15	0,252 42	0,159 70
-0,915	y ₃	0,795 50	0,632 81	0,400 31	0,253 21	0,160 15
-0,916 4	y ₄	0,795 26	0,632 49	0,400 39	0,253 02	0,160 05

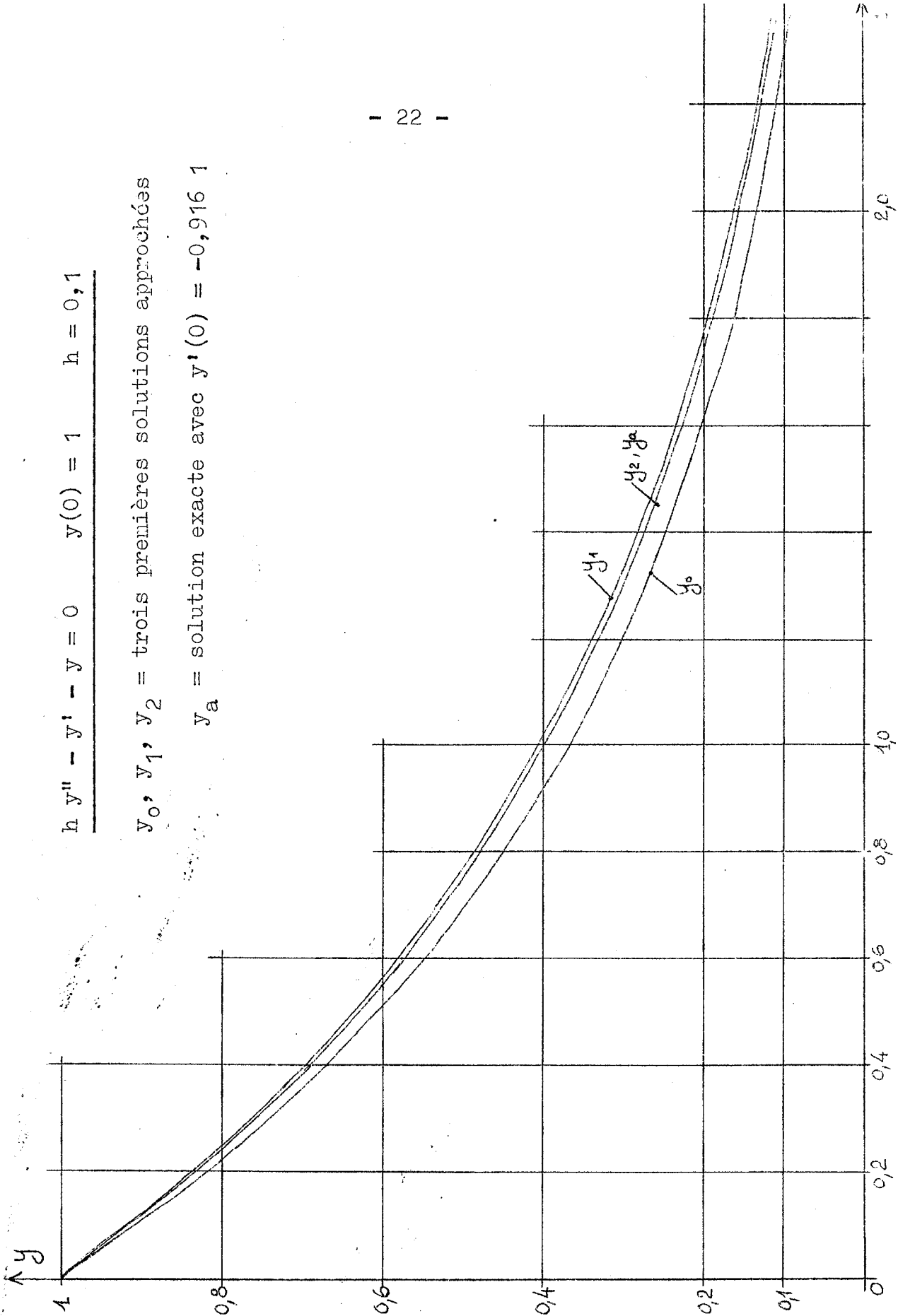
Interprétation des résultats des exemples 3 et 4 :

Les solutions exactes correspondant à des $y'(0)$ différents divergent très fortement. Le procédé permet de sélectionner celle qui ne devient pas (ou devient le moins rapidement) infinie.

$$h y'' - y' - y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$$

y_0, y_1, y_2 = trois premières solutions approchées

y_a = solution exacte avec $y'(0) = -0,916$



C H A P I T R E II

-:-

APPLICATION DU PROCÉDÉ A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

LINEAIRE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS VARIABLES

-:-:-:-:-

Sachant que le procédé d'approximations successives peut être appliqué à la résolution approchée des équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants, sous certaines conditions concernant les coefficients eux-mêmes, on est tenté de l'appliquer aussi à la résolution d'équations à coefficients variables.

1°) ETUDE D'UN EXEMPLE. -

Pour voir si, dans ce cas, le procédé peut aussi fournir un ensemble de solutions approchées tendant vers une limite, on va l'appliquer, à titre d'exemple, à l'équation de forme simple :

$$h y'' + x y' + y = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad h \ll 1 \quad (\text{III})$$

Nous obtenons la formule de récurrence :

$$y'_{n+1} + \frac{1}{x} y_{n+1} = - \frac{h}{x} y''_n \quad (1)$$

équation différentielle du 1er ordre, qui admet l'intégrale générale :

$$y_{n+1} = y_0 \left[K - h \int y''_n dx \right] \qquad y_0 = \frac{1}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Avec } y_{n+1} - y_n = v_{n+1} \\ y_n - y_{n-1} = v_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{corrections relatives au numéro du pas} \\ \text{d'approximation} \end{array}$$

nous obtenons :

$$\underline{v_{n+1} = -h y_0 \left(\frac{v_n}{x_0} \right)^x} \quad y_0 = \frac{1}{x} \quad (2)$$

2°) DETERMINATION DES PREMIERES APPROXIMATIONS. -

Première correction à y_0 : $n = 0$

$$v_1 = -h y_0 \left(\frac{v_0}{x_0} \right)^x$$

Or :

$$v_0 = y_0 = \frac{1}{x}$$

ce qui donne :

$$\underline{v_1 = h^1 y_0 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)}$$

Deuxième correction à y_0 : $n = 1$

$$v_2 = -h y_0 \left(\frac{v_1}{x_0} \right)^x$$

Cela devient :

$$\underline{v_2 = h^2 y_0 \left[1 \cdot 3 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) - 1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right]}$$

Poussant le calcul assez loin avec le procédé indiqué, nous obtenons les expressions suivantes :

$$v_1 = h^1 y_0 \left[1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right]$$

$$v_2 = h^2 y_0 \left[1.3 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) - 1.a_1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right]$$

$$v_3 = h^3 y_0 \left[1.3.5 \left(\frac{1}{x^6} - 1 \right) - 1.3.a_1 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) - 1.a_2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right]$$

$$v_4 = h^4 y_0 \left[1.3.5.7 \left(\frac{1}{x^8} - 1 \right) - 1.3.5 \left(\frac{1}{x^6} - 1 \right) - 1.3.a_2 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) - 1.a_3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right]$$

Les coefficients a_K ont les valeurs :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1.3 - 1.a_1$$

$$a_3 = 1.3.5 - 1.3.a_1 - 1.a_2$$

$$a_4 = 1.3.5.7 - 1.3.5.a_1 - 1.3.a_2 - 1.a_3$$

ce qui conduit à la formule de récurrence :

$$a_K = \frac{(2K-1)!}{2^{K-1}(K-1)!} - \sum_{p=1}^{K-1} \frac{(2K-2p-1)!}{2^{K-p-1}(K-p-1)!} a_p \quad (3)$$

3°) EXPRESSION GENERALE DE y_{n+1} .

Nous allons montrer que l'on peut donner l'expression générale de y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + h^{n+1} y_0 \left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \left(\frac{1}{x^{2n+2}} - 1 \right) - \sum_{K=1}^n \frac{(2n-2K+1)!}{2^{n-K} (n-K)!} a_K \left(\frac{1}{x^{2n-2K+2}} - 1 \right) \right] \quad (4)$$

$$\equiv y_n + h^{n+1} y_0 S_{n+1} = y_n + v_{n+1}$$

La formule est vraie pour $n = 0$. Démontrons-la par récurrence. En portant cette valeur dans l'équation :

$$v_{n+1} = -h y_0 (v'_n)_{x_0=1}^x$$

cela revient à démontrer que :

$$S_{n+1} + y_0 (S'_n - y_0 S_n) - (S'_n)_{x_0=1} = 0$$

Il vient, en supprimant des coefficients constants :

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \left[a_n - \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!} + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{(2n-2K-1)!}{2^{n-K-1} (n-K-1)!} a_K \right] = 0$$

ce qui est bien vrai, car, d'après la formule (3), l'expression dans les crochets devient nulle.

4°) ETUDE DE LA CONVERGENCE. -

Soit le terme général

$$v_{n+1} = h^{n+1} y_0 \left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \left(\frac{1}{x^{2n+2}} - 1 \right) - \sum_{K=1}^n \frac{(2n-2K+1)!}{2^{n-K} (n-K)!} a_K \left(\frac{1}{x^{2n-2K+2}} - 1 \right) \right]$$

Introduisons :

$$\frac{1}{x^{2n+2}} - 1 = \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \sum_{p=0}^n \frac{1}{x^{2p}}$$

$$\frac{1}{x^{2n-2K+2}} - 1 = \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \sum_{p=0}^{n-K} \frac{1}{x^{2p}} = \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{x^{2p}} - \sum_{p=K+1}^n \frac{1}{x^{2p}} \right]$$

Il vient :

$$v_{n+1} = h^{n+1} y_0 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \left[\underbrace{\left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!} - \sum_{K=1}^n \frac{(2n-2K+1)!}{2^{n-K} (n-K)!} a_K \right)}_{a_{n+1}} \sum_{p=0}^n \frac{1}{x^{2p}} + \sum_{K=1}^n \frac{(2n-2K+1)!}{2^{n-K} (n-K)!} a_K \sum_{p=K+1}^n \frac{1}{x^{2p}} \right]$$

Minorons cette expression par :

$$v_{n+1} > h^{n+1} y_0 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) a_{n+1} \sum_{p=0}^n \frac{1}{x^{2p}}$$

Or :

$$a_{n+1} > \frac{(2n+1)!}{2^{n-1} n!} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^n \frac{1}{x^{2p}} = \frac{\frac{1}{x^{2n+2}} - 1}{\frac{1}{x^2} - 1}$$

Enfin :

$$v_{n+1} > h^{n+1} y_0 \frac{(2n+1)!}{2^{n-1} n!} \left(\frac{1}{x^{2n+2}} - 1 \right) \equiv b_{n+1}$$

La série en v est certainement divergente car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{|b_{n+1}|}} \rightarrow \infty$$

5°) TANGENTE DES FONCTIONS POUR $x_0 = 1$. -

Calculant la première dérivée de $y_{n+1} = y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} v_i$

et en faisant $x_0 = 1$, nous obtenons :

$$-y'_{n+1}(x=1) = a_1 + a_2 \cdot h^1 + a_3 h^2 + \dots + a_{n+2} h^{n+1}$$

d'une façon générale :

$$-y'_{n+1}(x=1) = \sum_{K=0}^{n+1} a_{K+1} h^K \tag{5}$$

série qui est aussi divergente.

6°) VALEURS NUMERIQUES DES PREMIERES SOLUTIONS APPROCHEES. -

Pour $h = 0,1$, on trouve :

$y'(x=1)$	x	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0
-1	y_0	0,800 00	0,666 67	0,500 00	0,400 00	0,333 33
-1,2	y_1	0,771 20	0,629 63	0,462 50	0,366 40	0,303 70
-1,3	y_2	0,759 91	0,617 28	0,452 19	0,358 07	0,296 79
-1,374	y_3	0,753 05	0,610 51	0,446 96	0,353 93	0,293 38
-1,344 46	y_4	0,747 52	0,605 39	0,443 13	0,350 90	0,290 87

7°) VALEURS NUMERIQUES OBTENUES PAR UNE INTEGRATION APPROCHEE CLASSIQUE
 DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE. -

L'intégration approchée de l'équation III par la méthode de la tangente améliorée à pas variable donne, pour $h = 0,1$ et $y(x=1) = 1$:

$1 - y'(1) = 0$

x	y	x	y	x	y
1,01	0,999 5	1,182 8	0,907 3	1,736 4	0,597 3
1,02	0,998 1	1,191 4	0,901 0	1,763 4	0,587 4
1,024 4	0,997 2	1,200 0	0,894 6	1,791 4	0,577 5
1,028 8	0,996 2	1,209 0	0,888 0	1,819 4	0,568 0
1,033 4	0,995 0	1,218 0	0,881 4	1,849 4	0,558 1
1,038 0	0,993 6	1,227 9	0,874 1	1,879 4	0,548 6
1,042 7	0,992 0	1,237 8	0,866 9	1,910 4	0,539 1
1,047 4	0,990 4	1,247 8	0,859 6	1,941 4	0,530 0
1,052 3	0,989 5	1,257 8	0,852 4	1,974 4	0,520 6
1,057 2	0,986 4	1,269 8	0,843 8	2,007 4	0,511 5
1,062 3	0,984 2	1,281 8	0,835 2	2,041 4	0,502 5
1,067 4	0,981 8	1,296 8	0,824 7	2,075 4	0,493 9
1,072 7	0,979 2	1,311 8	0,814 4	2,111 4	0,485 0
1,078 0	0,976 5	1,329 8	0,802 2	2,147 4	0,476 5
1,083 4	0,973 6	1,347 8	0,790 4	2,183 4	0,468 2
1,088 8	0,970 5	1,374 8	0,773 1	2,219 4	0,460 3
1,094 5	0,967 3	1,401 8	0,756 5	2,252 4	0,453 2
1,100 2	0,963 9	1,408 6	0,752 4	2,285 4	0,446 4
1,106 2	0,960 2	1,415 4	0,748 3	2,325 4	0,438 4
1,112 2	0,956 4	1,459 4	0,723 2	2,365 4	0,430 7
1,118 5	0,952 3	1,503 4	0,699 6	2,414 4	0,421 6
1,124 8	0,948 2	1,529 4	0,686 4	2,463 4	0,412 9
1,131 4	0,943 8	1,555 4	0,673 7	2,526 4	0,402 2
1,138 0	0,939 2	1,580 4	0,662 0	2,589 4	0,392 1
1,145 0	0,934 4	1,605 4	0,650 6	2,674 4	0,379 2
1,152 0	0,929 5	1,631 4	0,639 3	2,759 4	0,367 2
1,159 4	0,924 2	1,657 4	0,628 3	2,859 4	0,353 9
1,166 8	0,918 9	1,683 4	0,617 7	2,959 4	0,341 3
1,174 8	0,913 1	1,709 4	0,607 5	2,979 7	0,338 8
				3,0	0,336 4

$$2 \rightarrow y'(1) = -1$$

x	y	x	y	x	y
1,01	0,99	1,423 8	0,669 6	1,981 8	0,466 6
1,02	0,98	1,444 8	0,658 5	2,015 8	0,458 3
1,029 9	0,970 1	1,465 8	0,647 9	2,051 8	0,449 8
1,039 8	0,960 3	1,487 8	0,637 1	2,087 8	0,441 6
1,049 8	0,950 5	1,509 8	0,626 8	2,124 8	0,433 5
1,059 8	0,940 8	1,532 8	0,616 3	2,161 8	0,425 7
1,070 8	0,930 1	1,555 8	0,606 2	2,191 8	0,419 6
1,081 8	0,919 6	1,579 8	0,596 0	2,221 8	0,413 7
1,094 8	0,907 4	1,603 8	0,586 2	2,257 8	0,406 8
1,107 8	0,895 4	1,628 8	0,576 3	2,293 8	0,400 2
1,124 8	0,879 9	1,653 8	0,566 8	2,336 8	0,392 5
1,141 8	0,864 8	1,680 8	0,556 8	2,379 8	0,385 1
1,163 8	0,845 9	1,707 8	0,547 3	2,432 8	0,376 4
1,185 8	0,827 7	1,734 8	0,538 0	2,485 8	0,368 1
1,239 8	0,785 7	1,761 8	0,529 1	2,555 8	0,357 6
1,293 8	0,747 5	1,790 8	0,519 9	2,625 8	0,347 8
1,316 8	0,732 4	1,819 8	0,511 0	2,716 8	0,335 8
1,339 8	0,717 9	1,850 8	0,501 8	2,807 8	0,324 5
1,360 8	0,705 1	1,881 8	0,493 0	2,903 9	0,313 3
1,381 8	0,692 8	1,914 8	0,484 0	3,0	0,302 7
1,402 8	0,681 0	1,947 8	0,475 2		

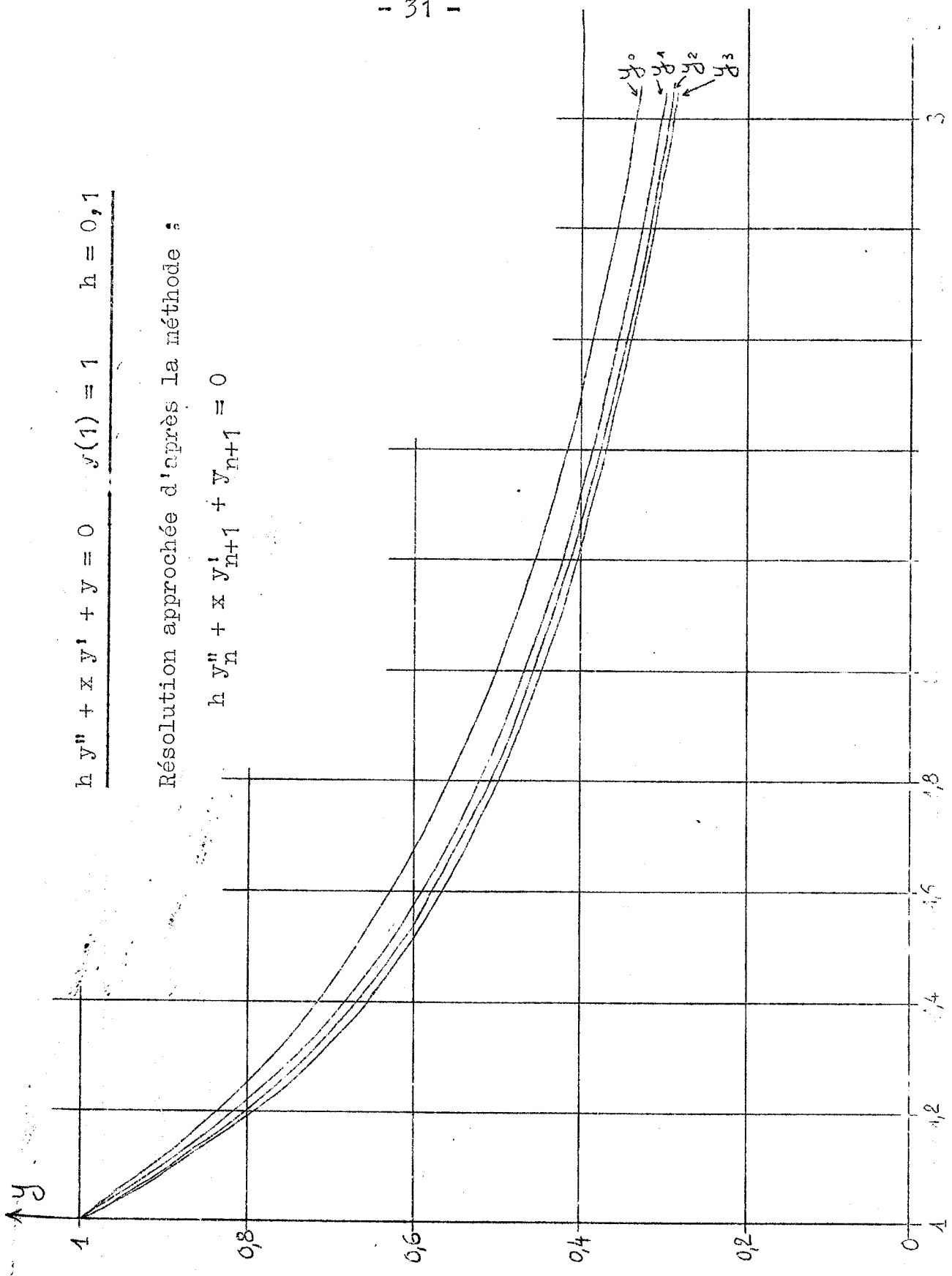
$$3) \rightarrow y'(1) = -1,3$$

x	y	x	y	x	y
1,01	0,987 1	1,372	0,675 6	1,942	0,460 8
1,02	0,974 5	1,390	0,665 5	1,976	0,452 4
1,038	0,952 7	1,408	0,655 7	2,012	0,443 8
1,056	0,931 7	1,427	0,645 7	2,048	0,430 6
1,072	0,913 8	1,446	0,636 1	2,084	0,427 7
1,088	0,896 6	1,466	0,626 3	2,120	0,420 0
1,103	0,881 1	1,486	0,616 8	2,158	0,412 3
1,118	0,866 0	1,507	0,607 1	2,196	0,404 8
1,133	0,851 6	1,528	0,597 8	2,229	0,398 5
1,148	0,837 6	1,551	0,588 0	2,262	0,392 5
1,163	0,824 1	1,574	0,578 4	2,302	0,385 4
1,178	0,811 0	1,598	0,568 9	2,342	0,378 5
1,193	0,798 4	1,622	0,559 6	2,391	0,370 4
1,208	0,786 2	1,648	0,549 9	2,440	0,362 7
1,223	0,774 4	1,674	0,540 6	2,503	0,353 3
1,238	0,769 0	1,701	0,531 3	2,566	0,344 3
1,254	0,751 3	1,728	0,522 3	2,650	0,333 0
1,270	0,739 9	1,756	0,513 3	2,734	0,322 4
1,286	0,728 9	1,784	0,504 6	2,834	0,310 6
1,302	0,718 3	1,814	0,495 6	2,934	0,299 5
1,319	0,707 4	1,844	0,487 0	2,967	0,296 0
1,336	0,696 8	1,876	0,478 1	3,0	0,292 6
1,354	0,686 0	1,908	0,469 6		

$$h y'' + x y' + y = 0 \quad y(1) = 1 \quad h = 0,1$$

Résolution approchée d'après la méthode :

$$h y_n'' + x y_{n+1}' + y_{n+1} = 0$$



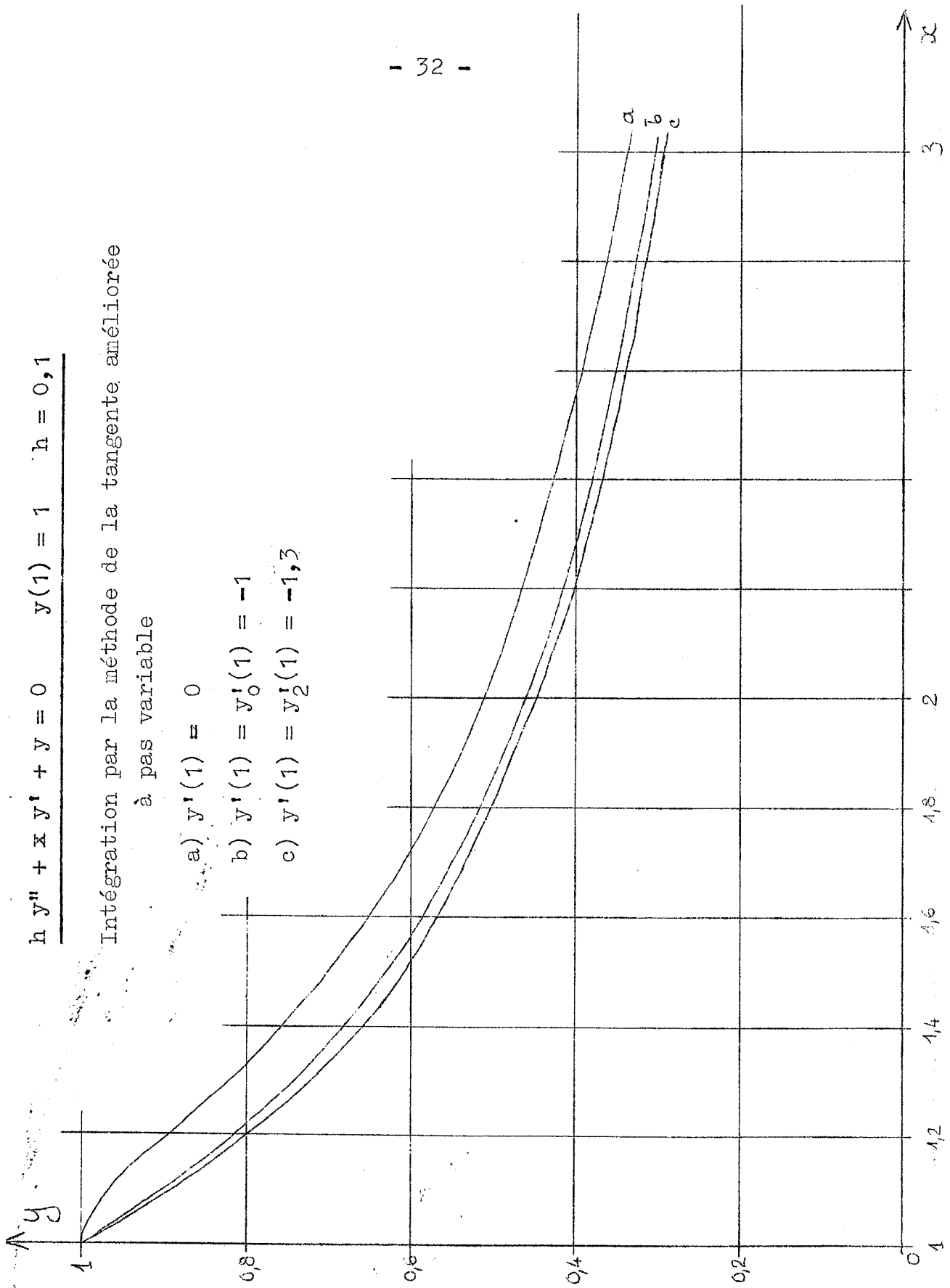
$$h y'' + x y' + y = 0 \quad y(1) = 1 \quad h = 0,1$$

Intégration par la méthode de la tangente améliorée
à pas variable

a) $y'(1) = 0$

b) $y'(1) = y_0'(1) = -1$

c) $y'(1) = y_2'(1) = -1,3$



8°) INTERPRETATION DES RESULTATS. -

Malgré la divergence de la suite des solutions approchées, les premières approximations paraissent "pratiquement" convergentes. En effet, leurs valeurs numériques ne diffèrent pas beaucoup au fur et à mesure que l'on continue le procédé et elles montrent le caractère utilisable de la méthode.

La méthode n'a besoin que d'une seule condition initiale $y(x_0)$. La pente de la tangente des fonctions au début de l'intervalle d'intégration n'est plus arbitraire. Si nous imposons, par la deuxième condition initiale, à l'intégrale rigoureuse, d'avoir une pente de sa tangente pour x_0 pas trop différente de celle des solutions approchées, nous constatons un bon accord de la solution exacte et de la solution approchée. Plus $y'(x_0)$ tend vers la pente de la tangente d'une des premières approximations, plus diminue la différence entre solutions rigoureuse et approchée, ce que montre la représentation graphique des résultats, trouvés d'une part par une intégration approchée classique, et d'autre part par la nouvelle méthode. Par un tel choix des tangentes, pour $x = x_0$, l'influence de la deuxième intégrale particulière, que nous n'approchons pas par la méthode, est alors diminuée.

9°) ETUDE D'UN SECOND EXEMPLE. -

$$\text{Soit } h y'' + y' - x y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h \ll 1 \quad (\text{IV})$$

L'application du procédé d'approximations successives à cette équation conduit à la formule de récurrence :

$$v_{n+1} = -h y_0 \int \frac{v_n''}{y_0} dx \quad (6)$$

où $y_0 = e^{x^2/2}$ = première approximation

v_n = $n^{\text{ème}}$ correction à y_0

Voici les expressions des quatre premières corrections :

$$v_1 = -h^1 y_0 \left[x + \frac{1}{3} x^3 \right]$$

$$v_2 = h^2 y_0 \left[\frac{5}{2} x^2 + \frac{5}{6} x^4 + \frac{1}{18} x^6 \right]$$

$$v_3 = -h^3 y_0 \left[5x + \frac{15}{2} x^3 + \frac{7}{3} x^5 + \frac{2}{9} x^7 + \frac{1}{162} x^9 \right]$$

$$v_4 = h^4 y_0 \left[30x^2 + \frac{625}{24} x^4 + \frac{85}{12} x^6 + \frac{55}{72} x^8 + \frac{11}{324} x^{10} + \frac{1}{1944} x^{12} \right]$$

10°) EXPRESSION GENERALE DE y_n . -

Nous allons démontrer que l'on peut écrire l'expression générale de y_n :

$$y_n = y_{n+1} + (-h)^n y_0 \sum_{j=1}^{3n} a_{n,j} x^j \quad (7)$$

ou $y_n = y_{n-1} + v_n \equiv y_{n-1} + (-h)^n y_0 S_n$

avec $a_{1,1} = 1$; $a_{n,3n} = \frac{1}{3^n n!}$

et $a_{n+1,j} = (j+1) a_{n,j+1} + \frac{2j-1}{j} a_{n,j-1} + \frac{1}{j} a_{n,j-3}$ (8)

La formule (7) est vraie pour $n = 1$. Démontrons-la par récurrence. En portant cette valeur dans l'équation :

$$y'_{n+1} - x y_{n+1} = -h y_n''$$

cela revient à démontrer que :

$$S'_{n+1} - (1+x^2)S'_n - 2x S'_n - S''_n = 0$$

Pour vérifier cette identité, nous écrivons le terme en x^{j-1} . Il vient en supprimant des coefficients constants :

$$j a_{n+1,j} - (2j-1) a_{n,j-1} - a_{n,j-3} - j(j+1) a_{n,j+1} = 0$$

ce qui est bien exact d'après la formule de récurrence (8).

11°) ETUDE DE LA CONVERGENCE. -

De l'équation (7), nous déduisons : $a_{n,j} > 0$

" " (8), il vient : $a_{n+1,j} \geq (j+1) a_{n,j}$

et, par suite :

$$a_{3n,n} \geq \frac{(3n)!}{n!} a_{n,3n} = \frac{(3n)!}{n!} \frac{1}{3^n n!} \quad (9)$$

Soit le terme général :

$$v_{3n} = (-h)^{3n} y_0 \sum_{j=1}^{9n} a_{3n,j} x^j$$

Minorons cette expression par :

$$|v_{3n}| > h^{3n} y_0 \cdot a_{3n,n} \cdot x^n$$

Introduisons l'inégalité (9). Il vient :

$$|v_{3n}| > \left(\frac{h^3 x}{3}\right)^n e^{x^2/2} \frac{(3n)!}{n! n!} \equiv b_{3n}$$

La série en v est certainement divergente, si $x > 0$, car :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{b_{3n}} \rightarrow \infty$$

12°) VALEURS NUMERIQUES DES PREMIERES APPROXIMATIONS. -

Pour $h = 0,1$, on trouve :

$x=0$)	x	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
	y_0	1,031 74	1,133 15	1,648 72	3,080 22	7,389 06	22,759 89	90,017 13
,1	y_1	1,005 41	1,071 77	1,428 89	2,271 66	3,940 83	5,215 82	-18,003 43
,1	y_2	0,821 34	1,079 45	1,493 00	2,594 36	5,927 66	19,267 87	99,468 93
105	y_3	1,005 64	1,075 55	1,468 18	2,426 29	4,625 17	7,507 26	-25,835 46

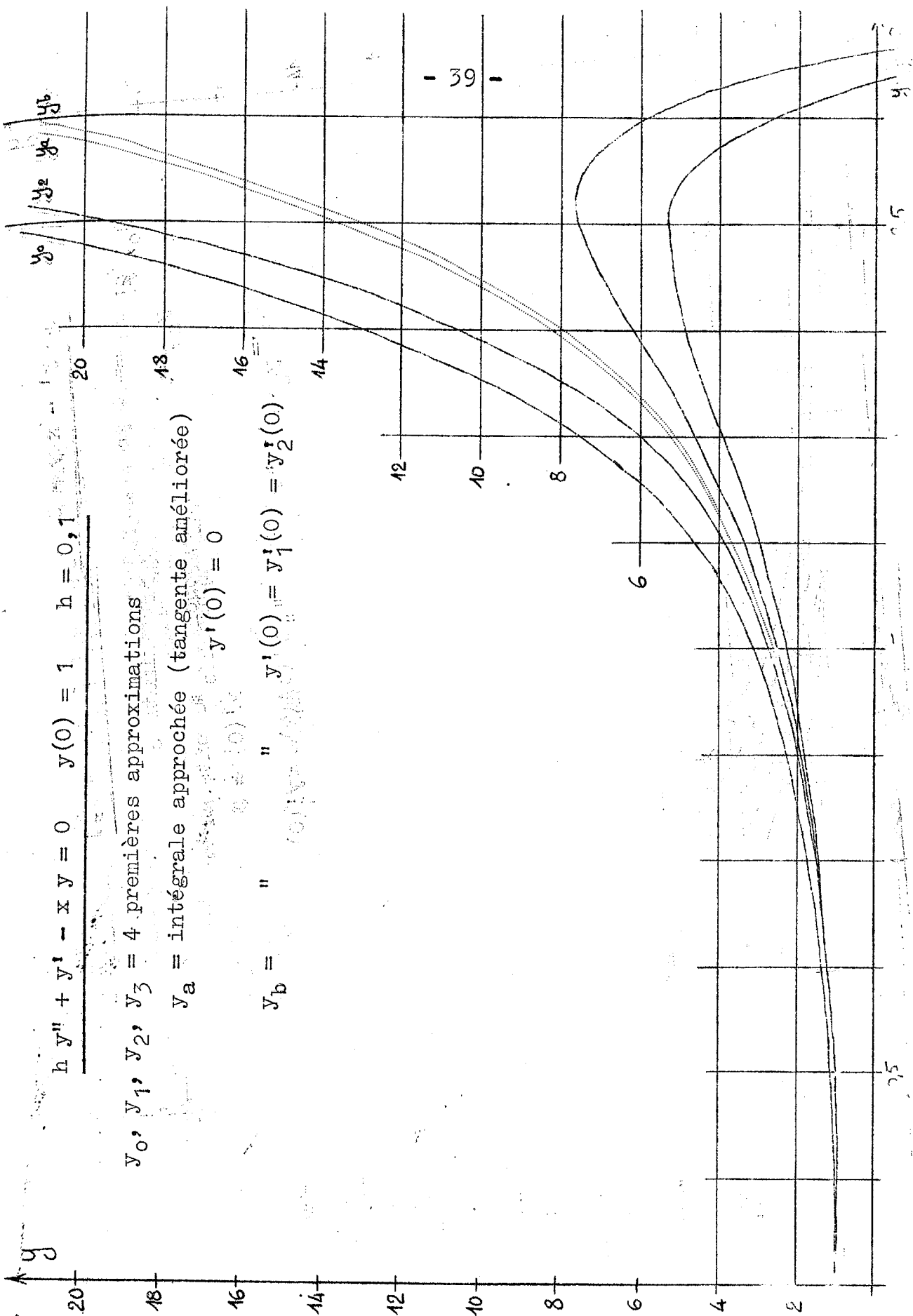
13°) INTEGRATION DE L'EQUATION (IV) PAR LA METHODE DE LA TANGENTE

AMELIOREE A PAS VARIABLE. -

Pour $h = 0,1$ et $y_{(x=0)} = 1$, on obtient :

x	y (y'(0) = 0)	x	y (y'(0) = -0,1)
0,01	1,000 0	0,01	0,999
0,02	1,000 0	0,02	0,998 1
0,16	1,005 8	0,068	0,995 5
0,3	1,028 3	0,116	0,995 1
0,44	1,069 9	0,296	1,014 2
0,58	1,133 2	0,476	1,067 1
0,74	1,236 9	0,559	1,103 9
0,90	1,382 1	0,642	1,149 3
1,03	1,538 0	0,762	1,232 1
1,16	1,736 4	0,882	1,338 3
1,27	1,945 6	1,002	1,472 4
1,38	2,201 9	1,122	1,640 6
1,48	2,485 3	1,232	1,831 3
1,58	2,827 8	1,342	2,065 1
1,67	3,198 0	1,452	2,352 2
1,76	3,639 7	1,562	2,705 8
1,839	4,098 6	1,652	3,056 4
1,918	4,637 6	1,742	3,474 2
1,984	5,160 6	1,823	3,919 9
2,050	5,761 3	1,904	4,445 2
2,107	6,352 8	1,972	4,959 2
2,164	7,021 8	2,040	5,552 0
2,214	7,681 6	2,098	6,130 0
2,264	8,418 9	2,156	6,785 0
2,308	9,139 8	2,207	7,433 9
2,352	9,936 4	2,258	8,160 3
2,391	10,713 0	2,303	8,874 1
2,430	11,562 8	2,348	9,664 5
2,466	12,419 1	2,388	10,438 9
2,502	13,351 2	2,428	11,288 3
2,534	14,249 3	2,464	12,123 6
2,566	15,219 0	2,500	13,032 9
2,595	16,164 7	2,533	13,937 5
2,624	17,179 5	2,566	14,916 4
2,651	18,191 1	2,596	15,876 5
2,678	19,272 2	2,626	16,909 2
2,703	20,339 7	2,653	17,905 6
2,728	21,475 8	2,680	18,970 5
2,751	22,585 6	2,706	20,065 5
2,774	23,761 6	2,732	21,233 7

x	y (y'(0) = 0)	x	y (y'(0) = -0,1)
2,796	24,952 2	2,755	22,332 5
2,818	26,211 4	2,778	23,496 8
2,838	27,419 1	2,800	24,675 7
2,858	28,690 4	2,822	25,922 5
2,877	29,960 3	2,842	27,118 4
2,896	31,294 3	2,862	28,377 3
2,914	32,620 2	2,881	29,635 0
2,932	34,010 0	2,900	30,956 1
2,950	35,466 7	2,918	32,269 3
2,968	36,994 2	2,936	33,645 7
2,984	38,414 1	2,954	35,088 6
3,0	39,895 6	2,972	36,601 6
		2,989	38,098 0
		3,006	39,663 5



$h y'' + y' - x y = 0 \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1$

$y_0, y_1, y_2, y_3 = 4$ premières approximations

$y_a =$ intégrale approchée (tangente améliorée)

$y'(0) = 0$

$y_b = \dots \quad y'(0) = y_1'(0) = y_2'(0)$

"

"

"

"

"

"

"

14°) INTERPRETATION DES RESULTATS. -

Les approximations, trouvées par la nouvelle méthode, sont utilisables dans un intervalle qui s'étend de l'origine jusqu'à une valeur de x , qui doit dépendre de la **grandeur** du coefficient h . La détermination exacte de cette valeur limite de x n'est pas possible à cause de la divergence de la suite des fonctions approchées pour toute valeur de x . Mais, le calcul numérique montre, empiriquement, que la méthode est utilisable dans un intervalle restreint.

15°) CONCLUSION. -

L'application de la nouvelle méthode à deux équations différentielles du 2ème ordre à coefficients variables et de forme simple ne conduisait pas à des approximations convergentes. Nous constatons numériquement le caractère utilisable de la méthode, dans certains cas, quel que soit x , dans d'autres cas, seulement dans un certain intervalle.

C H A P I T R E I I I

--:-

E T U D E D ' U N E X E M P L E R E E L

--:-:-:-:-

1°) INTRODUCTION. -

Considérons l'équation suivante, que nous désignerons par l'expression "équation de la chute des barres" :

$$y'' + \frac{59}{\rho} (\varepsilon + x) y' + \frac{59}{\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) y = 0 \quad (V)$$

$$y(x=0) = 1 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{45}{59} \quad ; \quad \rho = 1, 5, 10, 20$$

origine du problème : $y'(x=0) = 0$

Pour cette équation, l'influence de y'' ne sera pas très grande, parce que les autres termes sont affectés de coefficients toujours ^{très} supérieurs à celui de y'' , lorsque ρ n'est pas trop grand et $x > 0$. Par conséquent, la nouvelle méthode d'intégration approchée devrait, en principe, être applicable.

Cependant, la recherche de la convergence ou de la divergence des solutions approchées, obtenues au cours du procédé, présente de grandes difficultés. En effet, les premières approximations sont déjà représentées par des expressions assez lourdes. Voici, par exemple, les deux premières expressions pour $\rho = 1$:

$$y_0 = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{1-\varepsilon} e^{-x}$$

$$y_1 = y_0 \left[1 + \frac{2(1-\varepsilon)}{59} \left(\frac{1}{\varepsilon+x} - \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{2+\varepsilon^2-3\varepsilon}{2 \cdot 59} \left(\frac{1}{(\varepsilon+x)^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) - \frac{1}{59} \left(\frac{\varepsilon+x}{\varepsilon} \right) \right]$$

On voit déjà que la recherche de la forme du terme général est très compliquée.

Laissons-donc de côté la convergence ou la divergence des solutions approchées. Nous allons, tout de même, essayer de trouver les valeurs numériques des premières fonctions approchées, fournies par le procédé. En les comparant avec des valeurs, fournies par une méthode classique, nous allons examiner l'efficacité du procédé, et, en variant ρ , nous verrons l'influence du terme en y'' sur la valeur pratique des résultats.

Au lieu de rechercher des solutions exactes des équations différentielles du 1er ordre, obtenues au cours du procédé, nous allons appliquer une méthode classique pour la recherche des solutions approchées de ces équations :

$$y'_n = Y_n(y_n; y''_{n-1}; x)$$

Nous pouvons déduire y''_{n-1} par la dérivation de l'équation $y'_{n-1} = Y_{n-1}(\dots)$ ce qui permet d'écrire :

$$y''_{n-1} = \mathfrak{F}(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}; Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}; x)$$

La $n^{\text{ème}}$ équation différentielle à résoudre par une intégration approchée, sera donc :

$$y'_n = Y_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n; Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}; x)$$

2°) DETERMINATION DES EQUATIONS SIMPLIFIEES. -

Formule de récurrence :

$$(\varepsilon + x) y_n' + (1 + K x) y_n = -\lambda y_{n-1}'' \quad K = \frac{1}{\rho}, \quad \lambda = \frac{\rho}{59}$$

Premier pas : $n = 0$

$$(\varepsilon+x) y_0' + (1 + K x) y_0 = 0 \quad (1)$$

Première équation à intégrer :

$$y_0' = - \frac{1 + K x}{\varepsilon + x} y_0 \quad (2)$$

Deuxième pas : $n = 1$

$$(\varepsilon+x) y_1' + (1 + K x) y_1 = -\lambda y_0'' \quad (3)$$

La dérivation de (1) donne :

$$y_0'' = - \frac{K y_0 + y_0'(2 + K x)}{\varepsilon + x}$$

L'équation (3) devient :

$$(\varepsilon+x) y_1' + (1+K x) y_1 = \lambda \frac{K y_0 + y_0'(2+K x)}{\varepsilon+x} \quad (4)$$

Deuxième équation à intégrer :

$$y_1' = - \frac{1 + K x}{\varepsilon+x} y_1 + \lambda \frac{K y_0 + y_0'(2 + K x)}{(\varepsilon+x)^2} \quad (5)$$

D'une façon analogue, on trouve la troisième équation à intégrer :

$$y_2' = - \frac{1 + K x}{\varepsilon + x} y_2 + \lambda \frac{K y_1 + (2 + K x) y_1'}{(\varepsilon + x)^2} + \lambda^2 \frac{(3K + K^2 x) y_0 + y_0' (6 - 2K \varepsilon + 3K x + K^2 x^2)}{(\varepsilon + x)^4} \quad (6)$$

3°) INTEGRATION APPROCHEE DES EQUATIONS SIMPLIFIEES. -

Les équations (2), (5) et (6) conduisent à un système de la forme :

$$y_0' = Y_0(y_0 ; x)$$

$$y_1' = Y_1(y_0, y_1 ; Y_0 ; x)$$

$$y_2' = Y_2(y_0, y_1, y_2 ; Y_0, Y_1 ; x)$$

$$\text{avec } y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = 1$$

Son intégration a été effectuée sur le calculateur "GAMMA" par la méthode de RUNGE-KUTTA classique.

Pas d'intégration : $h = 0,1$

Intervalle de la variable : $0 \leq x \leq 6$

Nous avons noté les valeurs numériques brutes telles qu'elles ont été sorties par la machine.

1°) $\rho = 1$

- 45 -

x	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,1	0,878 768	0,875 038	0,874 677
0,2	0,774 716	0,768 728	0,768 207
0,3	0,684 745	0,677 437	0,676 859
0,4	0,606 502	0,598 489	0,597 906
0,5	0,538 146	0,529 839	0,529 277
0,6	0,478 208	0,469 879	0,469 353
0,7	0,425 490	0,417 322	0,416 837
0,8	0,379 005	0,371 116	0,370 675
0,9	0,337 927	0,330 394	0,329 994
1,0	0,301 561	0,294 427	0,294 067
1,1	0,269 314	0,262 603	0,262 280
1,2	0,240 681	0,234 399	0,234 111
1,3	0,215 224	0,209 369	0,209 112
1,4	0,192 567	0,187 130	0,186 901
1,5	0,172 383	0,167 347	0,167 143
1,6	0,154 386	0,149 733	0,149 552
1,7	0,138 327	0,134 037	0,133 876
1,8	0,123 987	0,120 038	0,119 895
1,9	0,111 173	0,107 545	0,107 418
2,0	0,099 718	0,096 387	0,096 275
2,1	0,089 470	0,086 417	0,086 317
2,2	0,080 299	0,077 503	0,077 414
2,3	0,072 087	0,069 529	0,069 450
2,4	0,064 732	0,062 393	0,062 323
2,5	0,058 141	0,056 004	0,055 942
2,6	0,052 232	0,050 281	0,050 227
2,7	0,046 934	0,045 154	0,045 106
2,8	0,042 182	0,040 558	0,040 515
2,9	0,037 918	0,036 438	0,036 400
3,0	0,034 091	0,032 742	0,032 709
3,1	0,030 655	0,029 427	0,029 397
3,2	0,027 570	0,026 452	0,026 426
3,3	0,024 799	0,023 782	0,023 758
3,4	0,022 310	0,021 384	0,021 364
3,5	0,020 074	0,019 231	0,019 213
3,6	0,018 064	0,017 298	0,017 282
3,7	0,016 257	0,015 561	0,015 546
3,8	0,014 633	0,014 000	0,013 987
3,9	0,013 172	0,012 597	0,012 586
4,0	0,011 859	0,011 336	0,011 326

4,1	0,010 678	0,010 203	0,010 194
4,2	0,009 615	0,009 184	0,009 176
4,3	0,008 659	0,008 267	0,008 260
4,4	0,007 798	0,007 443	0,007 437
4,5	0,007 024	0,006 701	0,006 696
4,6	0,006 327	0,006 034	0,006 030
4,7	0,005 700	0,005 434	0,005 430
4,8	0,005 136	0,004 894	0,004 891
4,9	0,004 627	0,004 408	0,004 405
5,0	0,004 169	0,003 971	0,003 968
5,1	0,003 757	0,003 577	0,003 574
5,2	0,003 386	0,003 223	0,003 220
5,3	0,003 052	0,002 903	0,002 901
5,4	0,002 751	0,002 616	0,002 614
5,5	0,002 479	0,002 357	0,002 356
5,6	0,002 235	0,002 124	0,002 123
5,7	0,002 015	0,001 914	0,001 913
5,8	0,001 816	0,001 725	0,001 724
5,9	0,001 637	0,001 555	0,001 554
6,0	0,001 476	0,001 402	0,001 401

2°) $\rho = 5$

x	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,1	0,883 020	0,856 803	0,840 721
0,2	0,788 714	0,748 430	0,726 330
0,3	0,710 987	0,663 311	0,639 445
0,4	0,645 769	0,594 523	0,570 749
0,5	0,590 235	0,537 670	0,514 791
0,6	0,542 361	0,489 823	0,468 161
0,7	0,500 655	0,448 954	0,428 601
0,8	0,463 996	0,413 611	0,394 553
0,9	0,431 518	0,382 725	0,364 899
1,0	0,402 548	0,355 491	0,338 816
1,1	0,376 551	0,331 293	0,315 680
1,2	0,353 094	0,309 645	0,295 009
1,3	0,331 830	0,290 165	0,276 425
1,4	0,312 468	0,272 543	0,259 625
1,5	0,294 770	0,256 527	0,244 364
1,6	0,278 536	0,241 909	0,230 440
1,7	0,263 596	0,228 517	0,217 687
1,8	0,249 806	0,216 206	0,205 965
1,9	0,237 044	0,204 854	0,195 157
2,0	0,225 203	0,194 355	0,185 163
2,1	0,214 191	0,184 620	0,175 896
2,2	0,203 929	0,175 572	0,167 284
2,3	0,194 346	0,167 144	0,159 261
2,4	0,185 380	0,159 277	0,151 772
2,5	0,176 979	0,151 919	0,144 768
2,6	0,169 092	0,145 026	0,138 206
2,7	0,161 679	0,138 558	0,132 048
2,8	0,154 699	0,132 478	0,126 260
2,9	0,148 120	0,126 756	0,120 812
3,0	0,141 911	0,121 362	0,115 677
3,1	0,136 043	0,116 273	0,110 830
3,2	0,130 492	0,111 463	0,106 250
3,3	0,125 234	0,106 914	0,101 918
3,4	0,120 251	0,102 607	0,097 815
3,5	0,115 522	0,098 523	0,093 926
3,6	0,111 031	0,094 649	0,090 236
3,7	0,106 762	0,090 969	0,086 731
3,8	0,102 701	0,087 472	0,083 400
3,9	0,098 835	0,084 145	0,080 230
4,0	0,095 151	0,080 978	0,077 213

4,1	0,091 639	0,077 960	0,074 338
4,2	0,088 288	0,075 083	0,071 596
4,3	0,085 089	0,072 338	0,068 981
4,4	0,082 033	0,069 717	0,066 484
4,5	0,079 112	0,067 214	0,064 098
4,6	0,076 318	0,064 821	0,061 818
4,7	0,073 645	0,062 532	0,059 637
4,8	0,071 086	0,060 342	0,057 550
4,9	0,068 634	0,058 245	0,055 551
5,0	0,066 284	0,056 237	0,053 637
5,1	0,064 031	0,054 312	0,051 802
5,2	0,061 870	0,052 466	0,050 043
5,3	0,059 796	0,050 696	0,048 355
5,4	0,057 805	0,048 997	0,046 736
5,5	0,055 893	0,047 365	0,045 181
5,6	0,054 055	0,045 799	0,043 687
5,7	0,052 289	0,044 293	0,042 252
5,8	0,050 591	0,042 847	0,040 873
5,9	0,048 958	0,041 455	0,039 546
6,0	0,047 387	0,040 117	0,038 271

3°) $\rho = 10$

x	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,1	0,883 553	0,829 211	0,761 427
0,2	0,790 482	0,707 234	0,614 400
0,3	0,714 337	0,615 986	0,515 873
0,4	0,650 852	0,545 207	0,445 457
0,5	0,597 091	0,488 697	0,392 562
0,6	0,550 963	0,442 512	0,351 257
0,7	0,510 940	0,404 032	0,318 000
0,8	0,475 880	0,371 453	0,290 564
0,9	0,444 909	0,343 494	0,267 479
1,0	0,417 348	0,319 222	0,247 740
1,1	0,392 662	0,297 940	0,230 635
1,2	0,370 422	0,279 119	0,215 645
1,3	0,350 282	0,262 347	0,202 384
1,4	0,331 958	0,247 302	0,190 556
1,5	0,315 215	0,233 726	0,179 932
1,6	0,299 858	0,221 410	0,170 329
1,7	0,285 721	0,210 185	0,161 602
1,8	0,272 666	0,199 910	0,153 633
1,9	0,260 575	0,190 467	0,146 325
2,0	0,249 344	0,181 760	0,139 596
2,1	0,238 887	0,173 705	0,133 379
2,2	0,229 126	0,166 230	0,127 616
2,3	0,219 996	0,159 275	0,122 259
2,4	0,211 437	0,152 788	0,117 266
2,5	0,203 400	0,146 723	0,112 601
2,6	0,195 838	0,141 040	0,108 232
2,7	0,188 711	0,135 704	0,104 132
2,8	0,181 984	0,130 685	0,100 276
2,9	0,175 625	0,125 955	0,096 645
3,0	0,169 604	0,121 492	0,093 217
3,1	0,163 897	0,117 272	0,089 978
3,2	0,158 480	0,113 277	0,086 912
3,3	0,153 332	0,109 489	0,084 006
3,4	0,148 435	0,105 894	0,081 248
3,5	0,143 770	0,102 478	0,078 627
3,6	0,139 323	0,099 227	0,076 133
3,7	0,135 079	0,096 130	0,073 758
3,8	0,131 026	0,093 177	0,071 493
3,9	0,127 150	0,090 358	0,069 331
4,0	0,123 441	0,087 665	0,067 266

4,1	0,119 889	0,085 090	0,065 291
4,2	0,116 485	0,082 625	0,063 400
4,3	0,113 221	0,080 265	0,061 590
4,4	0,110 087	0,078 001	0,059 854
4,5	0,107 077	0,075 830	0,058 189
4,6	0,104 184	0,073 746	0,056 591
4,7	0,101 402	0,071 743	0,055 055
4,8	0,098 725	0,069 818	0,053 578
4,9	0,096 147	0,067 966	0,052 158
5,0	0,093 664	0,066 184	0,050 791
5,1	0,091 270	0,064 467	0,049 474
5,2	0,088 961	0,062 813	0,048 206
5,3	0,086 733	0,061 217	0,046 982
5,4	0,084 582	0,059 679	0,045 802
5,5	0,082 504	0,058 194	0,044 663
5,6	0,080 497	0,056 759	0,043 563
5,7	0,078 556	0,055 374	0,042 500
5,8	0,076 679	0,054 035	0,041 473
5,9	0,074 863	0,052 740	0,040 480
6,0	0,073 105	0,051 487	0,039 519

4°) $\rho = 20$

x	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,1	0,883 819	0,773 223	0,495 204
0,2	0,791 367	0,622 178	0,242 007
0,3	0,716 018	0,516 281	0,106 550
0,4	0,653 409	0,438 901	0,030 584
0,5	0,600 549	0,380 406	-0,013 429
0,6	0,555 315	0,334 916	-0,039 420
0,7	0,516 162	0,298 687	-0,054 833
0,8	0,481 936	0,269 241	0,063 839
0,9	0,451 759	0,244 889	0,068 866
1,0	0,424 951	0,224 443	0,071 375
1,1	0,400 974	0,207 050	0,072 269
1,2	0,379 403	0,192 083	0,072 122
1,3	0,359 890	0,179 072	0,071 304
1,4	0,342 154	0,167 660	0,070 057
1,5	0,325 963	0,157 570	0,068 544
1,6	0,311 123	0,148 584	0,066 873
1,7	0,297 471	0,140 531	0,065 117
1,8	0,284 869	0,133 272	0,063 327
1,9	0,273 202	0,126 693	0,061 537
2,0	0,262 368	0,120 704	0,059 768
2,1	0,252 282	0,115 226	0,058 036
2,2	0,242 869	0,110 197	0,056 350
2,3	0,234 064	0,105 563	0,054 717
2,4	0,225 809	0,101 279	0,053 140
2,5	0,218 055	0,097 306	0,051 619
2,6	0,210 758	0,093 611	0,050 156
2,7	0,203 878	0,090 164	0,048 750
2,8	0,197 381	0,086 943	0,047 399
2,9	0,191 237	0,083 925	0,046 102
3,0	0,185 416	0,081 090	0,044 857
3,1	0,179 895	0,078 424	0,043 661
3,2	0,174 651	0,075 910	0,042 513
3,3	0,169 664	0,073 536	0,041 411
3,4	0,164 915	0,071 291	0,040 352
3,5	0,160 388	0,069 164	0,039 334
3,6	0,156 068	0,067 146	0,038 356
3,7	0,151 941	0,065 229	0,037 415
3,8	0,147 995	0,063 406	0,036 510
3,9	0,144 218	0,061 669	0,035 639
4,0	0,140 599	0,060 012	0,034 800

4,1	0,137 129	0,058 431	0,033 991
4,2	0,133 800	0,056 919	0,033 212
4,3	0,130 602	0,055 474	0,032 461
4,4	0,127 529	0,054 089	0,031 736
4,5	0,124 573	0,052 762	0,031 036
4,6	0,121 727	0,051 489	0,030 360
4,7	0,118 987	0,050 267	0,029 707
4,8	0,116 346	0,049 092	0,029 076
4,9	0,113 798	0,047 963	0,028 465
5,0	0,111 340	0,046 876	0,027 875
5,1	0,108 967	0,045 829	0,027 303
5,2	0,106 673	0,044 820	0,026 749
5,3	0,104 457	0,043 847	0,026 213
5,4	0,102 313	0,042 908	0,025 693
5,5	0,100 239	0,042 001	0,025 189
5,6	0,098 231	0,041 126	-0,024 701
5,7	0,096 286	0,040 279	-0,024 226
5,8	0,094 401	0,039 460	-0,023 766
5,9	0,092 574	0,038 668	-0,023 319
6,0	0,090 801	0,037 901	-0,022 885

4°) RESOLUTION DE L'EQUATION PAR UNE METHODE CLASSIQUE D'INTEGRATION
APPROCHEE. -

Pour examiner la valeur pratique des approximations résultant du nouveau procédé, nous avons intégré l'équation (V) par la méthode de la tangente améliorée à pas variable.

Pas au début : $h = 0,001$

Précision : $\eta = 0,01$

Conditions initiales : $y_{(x=0)} = 1$

$$y'_{(x=0)} = 0 \quad \text{et} \quad y''_{(x=0)} = y'''_{(x=0)}$$

Nous avons noté les valeurs numériques brutes, telles qu'elles ont été présentées par la machine.

1°) $\rho = 1$; $y'(x=0) = 0$

x	y	x	y
0,001	0,999 970	0,127 4	0,870 119
0,002	0,999 885	0,139 4	0,856 641
0,003 2	0,999 711	0,163 4	0,830 405
0,004 4	0,999 464	0,187 4	0,805 115
0,005 7	0,999 117	0,205 4	0,786 746
0,007 0	0,998 693	0,223 4	0,768 873
0,008 3	0,998 196	0,246 4	0,746 729
0,009 6	0,997 629	0,269 4	0,725 330
0,011 0	0,996 947	0,288 4	0,708 193
0,012 4	0,996 195	0,307 4	0,691 528
0,013 9	0,995 315	0,327 4	0,674 476
0,015 4	0,994 364	0,347 4	0,657 907
0,017 0	0,993 277	0,368 4	0,641 013
0,018 6	0,992 120	0,389 4	0,624 613
0,020 4	0,990 741	0,409 4	0,609 438
0,022 2	0,989 287	0,429 4	0,594 681
0,024 0	0,987 764	0,449 4	0,580 328
0,025 8	0,986 177	0,469 4	0,566 365
0,027 8	0,984 346	0,489 4	0,552 778
0,029 8	0,982 451	0,509 4	0,539 557
0,032 0	0,980 298	0,529 4	0,526 688
0,034 2	0,978 083	0,549 4	0,514 160
0,036 6	0,975 601	0,569 4	0,501 963
0,039 0	0,973 060	0,589 4	0,490 086
0,041 7	0,970 140	0,608 4	0,479 090
0,044 4	0,967 163	0,627 4	0,468 366
0,047 3	0,963 912	0,646 4	0,457 906
0,050 2	0,960 615	0,665 4	0,447 701
0,053 5	0,956 815	0,685 4	0,437 229
0,056 8	0,952 976	0,705 4	0,427 023
0,060 6	0,948 515	0,723 4	0,418 060
0,064 4	0,944 025	0,741 4	0,409 302
0,068 9	0,938 681	0,760 4	0,400 274
0,073 4	0,933 320	0,779 4	0,391 461
0,078 8	0,926 881	0,797 4	0,383 306
0,084 2	0,920 448	0,815 4	0,375 334
0,090 9	0,912 491	0,833 4	0,367 541
0,097 6	0,904 577	0,851 4	0,359 923
0,106 5	0,890 149	0,869 4	0,352 474
0,115 4	0,889 833	0,887 4	0,345 191

x	y	x	y
0,905 4	0,338 069	1,539 4	0,164 849
0,923 4	0,331 105	1,553 4	0,162 301
0,941 4	0,324 293	1,567 4	0,159 793
0,959 4	0,317 632	1,581 4	0,157 326
0,977 4	0,311 116	1,595 4	0,154 898
0,995 4	0,304 743	1,609 4	0,152 509
1,012 4	0,298 851	1,623 4	0,150 159
1,029 4	0,293 081	1,637 4	0,147 845
1,045 4	0,287 758	1,650 4	0,145 730
1,061 4	0,282 538	1,663 4	0,143 647
1,079 4	0,276 786	1,676 4	0,141 594
1,097 4	0,271 158	1,689 4	0,139 572
1,114 4	0,265 953	1,703 4	0,137 428
1,131 4	0,260 853	1,717 4	0,135 318
1,146 4	0,256 440	1,731 4	0,133 241
1,161 4	0,252 106	1,745 4	0,131 197
1,177 4	0,247 568	1,757 4	0,129 470
1,193 4	0,243 116	1,769 4	0,127 768
1,210 4	0,238 478	1,781 4	0,126 088
1,227 4	0,233 933	1,793 4	0,124 432
1,243 4	0,229 739	1,807 4	0,122 528
1,259 4	0,225 623	1,821 4	0,120 653
1,273 4	0,222 086	1,834 4	0,118 939
1,287 4	0,218 607	1,847 4	0,117 250
1,303 4	0,214 701	1,859 4	0,115 713
1,319 4	0,210 868	1,871 4	0,114 197
1,335 4	0,207 107	1,883 4	0,112 701
1,351 4	0,203 416	1,895 4	0,111 226
1,365 4	0,200 242	1,908 4	0,109 650
1,379 4	0,197 121	1,921 4	0,108 097
1,394 4	0,193 833	1,934 4	0,106 566
1,409 4	0,190 603	1,947 4	0,105 058
1,424 4	0,187 428	1,958 4	0,103 799
1,439 4	0,184 309	1,969 4	0,102 555
1,454 4	0,181 244	1,981 4	0,101 217
1,469 4	0,178 231	1,993 4	0,099 896
1,483 4	0,175 467	2,006 4	0,098 485
1,497 4	0,172 747	2,019 4	0,097 094
1,511 4	0,170 072	2,031 4	0,095 828
1,525 4	0,167 439	2,043 4	0,094 579

x	y	x	y
2,053 4	0,093 551	2,493 1	0,058 029
2,063 4	0,092 535	2,503 0	0,057 412
2,075 4	0,091 330	2,513 0	0,056 795
2,087 4	0,090 142	2,523 0	0,056 185
2,099 4	0,088 969	2,534 0	0,055 522
2,111 4	0,087 812	2,545 0	0,054 867
2,124 4	0,086 576	2,555 0	0,054 278
2,137 4	0,085 358	2,565 0	0,053 695
2,147 4	0,084 432	2,574 9	0,053 125
2,157 4	0,083 517	2,584 8	0,052 561
2,167 4	0,082 613	2,594 7	0,052 003
2,177 4	0,081 718	2,604 6	0,051 451
2,191 4	0,080 483	2,614 6	0,050 899
2,205 4	0,079 266	2,624 6	0,050 354
2,215 4	0,078 408	2,634 6	0,049 814
2,225 4	0,077 560	2,644 6	0,049 281
2,235 4	0,076 721	2,654 5	0,048 758
2,245 4	0,075 892	2,664 4	0,048 241
2,257 4	0,074 909	2,674 3	0,047 730
2,269 4	0,073 939	2,684 2	0,047 224
2,281 4	0,072 982	2,694 1	0,046 723
2,293 4	0,072 037	2,704 0	0,046 228
2,303 4	0,071 260	2,713 0	0,045 783
2,313 4	0,070 490	2,722 0	0,045 342
2,323 4	0,069 930	2,731 9	0,044 862
2,333 4	0,068 978	2,741 8	0,044 387
2,345 4	0,068 087	2,751 7	0,043 917
2,357 4	0,067 207	2,761 6	0,043 452
2,368 4	0,066 410	2,771 5	0,042 992
2,379 4	0,065 624	2,781 4	0,042 537
2,389 3	0,064 924	2,790 4	0,042 128
2,399 2	0,064 231	2,799 4	0,041 723
2,409 2	0,063 540	2,808 4	0,041 321
2,419 2	0,062 856	2,817 4	0,040 924
2,430 2	0,062 112	2,827 3	0,040 492
2,441 2	0,061 378	2,837 2	0,040 064
2,452 2	0,060 652	2,847 1	0,039 940
2,463 2	0,059 935	2,857 0	0,039 221
2,473 2	0,059 290	2,865 8	0,038 853
2,483 2	0,058 653	2,874 6	0,038 487

x	y	x	y
2,883 3	0,038 130	3,236 7	0,026 129
2,892 0	0,037 776	3,245 4	0,025 888
2,901 0	0,037 413	3,253 9	0,025 654
2,910 0	0,037 054	3,262 4	0,025 422
2,919 9	0,036 663	3,270 5	0,025 204
2,929 8	0,036 276	3,278 6	0,024 987
2,938 8	0,035 928	3,286 8	0,024 769
2,947 8	0,035 583	3,295 0	0,024 554
2,956 8	0,035 242	3,303 6	0,024 330
2,965 8	0,034 904	3,312 2	0,014 108
2,974 8	0,034 569	3,320 6	0,023 893
2,983 8	0,034 238	3,329 0	0,023 680
2,992 8	0,033 909	3,337 0	0,023 479
3,001 8	0,033 584	3,345 0	0,023 280
3,010 8	0,033 262	3,353 1	0,023 080
3,019 8	0,032 943	3,361 2	0,022 881
3,028 8	0,032 628	3,369 6	0,022 678
3,037 8	0,032 315	3,378 0	0,022 476
3,046 7	0,032 009	3,386 2	0,022 280
3,055 6	0,031 705	3,394 4	0,022 087
3,064 3	0,031 412	3,402 4	0,021 899
3,073 0	0,031 121	3,410 4	0,021 714
3,081 7	0,030 833	3,418 4	0,021 529
3,090 4	0,030 547	3,426 4	0,021 347
3,099 3	0,030 258	3,434 5	0,021 164
3,108 2	0,029 972	3,442 6	0,020 982
3,117 0	0,029 691	3,450 7	0,020 802
3,125 8	0,029 413	3,458 8	0,020 623
3,134 2	0,029 150	3,466 8	0,020 449
3,142 6	0,028 890	3,474 8	0,020 275
3,151 2	0,028 626	3,482 7	0,020 106
3,159 8	0,028 364	3,490 6	0,019 937
3,168 6	0,028 099	3,498 5	0,019 771
3,177 4	0,027 836	3,506 4	0,019 605
3,186 0	0,027 582	3,514 4	0,019 439
3,194 6	0,027 330	3,522 4	0,019 275
3,202 9	0,027 088	3,530 3	0,019 113
3,211 2	0,026 850	3,538 2	0,018 953
3,219 6	0,026 610	3,545 9	0,018 799
3,228 0	0,026 373	3,553 6	0,018 646

x	y	x	y
3,561 4	0,018 492	3,863 4	0,013 421
3,569 2	0,018 339	3,870 8	0,013 316
3,577 2	0,018 184	3,878 6	0,013 207
3,585 2	0,018 030	3,886 4	0,013 098
3,592 9	0,017 883	3,893 6	0,012 998
3,600 6	0,017 737	3,900 8	0,012 899
3,608 1	0,017 597	3,907 5	0,012 808
3,615 6	0,017 457	3,914 2	0,012 718
3,623 4	0,017 313	3,921 4	0,012 621
3,631 2	0,017 170	3,928 6	0,012 525
3,639 2	0,017 025	3,936 4	0,012 422
3,647 2	0,016 881	3,944 2	0,012 320
3,654 7	0,016 747	3,951 4	0,012 226
3,662 2	0,016 614	3,958 6	0,012 133
3,669 5	0,016 486	3,965 1	0,012 050
3,676 8	0,016 359	3,971 6	0,011 967
3,684 6	0,016 224	3,978 8	0,011 877
3,692 4	0,016 090	3,986 0	0,011 786
3,700 3	0,015 956	3,993 8	0,011 690
3,708 2	0,015 822	4,001 6	0,011 593
3,715 5	0,015 700	4,008 6	0,011 508
3,722 8	0,015 579	4,015 6	0,011 423
3,730 0	0,015 461	4,021 9	0,011 347
3,737 2	0,015 343	4,028 2	0,011 271
3,745 0	0,015 217	4,035 4	0,011 186
3,752 8	0,015 091	4,042 6	0,011 101
3,760 6	0,014 967	4,050 4	0,011 010
3,768 4	0,014 843	4,058 2	0,010 919
3,775 6	0,014 730	4,065 1	0,010 840
3,782 8	0,014 618	4,072 0	0,010 761
3,789 9	0,014 509	4,078 2	0,010 690
3,797 0	0,014 400	4,084 4	0,010 620
3,804 6	0,014 284	4,091 5	0,010 541
3,812 2	0,014 170	4,098 6	0,010 462
3,820 0	0,014 053	4,106 3	0,010 377
3,827 8	0,013 937	4,114 0	0,010 293
3,835 0	0,013 831	4,120 8	0,010 219
3,842 2	0,013 726	4,127 6	0,010 146
3,849 1	0,013 626	4,133 8	0,010 079
3,856 0	0,013 527	4,140 0	0,010 013

x	y	x	y
4,147 0	0,009 940	4,415 6	0,007 483
4,154 0	0,009 866	4,422 2	0,007 431
4,161 6	0,009 787	4,429 3	0,007 375
4,169 2	0,009 709	4,436 4	0,007 320
4,175 9	0,009 640	4,442 7	0,007 271
4,182 6	0,009 572	4,449 0	0,007 223
4,188 8	0,009 510	4,455 0	0,007 177
4,915 0	0,009 448	4,461 0	0,007 132
4,201 9	0,009 379	4,467 7	0,007 082
4,208 8	0,009 311	4,474 4	0,007 032
4,216 2	0,009 238	4,481 3	0,006 981
4,223 6	0,009 166	4,488 2	0,006 930
4,230 3	0,009 101	4,494 5	0,006 884
4,237 0	0,009 037	4,500 8	0,006 838
4,243 2	0,008 978	4,506 7	0,006 796
4,249 4	0,008 919	4,512 6	0,006 754
4,256 2	0,008 856	4,519 1	0,006 708
4,263 0	0,008 792	4,525 6	0,006 662
4,270 3	0,008 725	4,532 6	0,006 613
4,277 6	0,008 658	4,539 6	0,006 564
4,284 2	0,008 597	4,545 9	0,006 520
4,290 8	0,008 537	4,552 2	0,006 477
4,297 0	0,008 482	4,557 9	0,006 438
4,303 2	0,008 426	4,563 6	0,006 399
4,310 0	0,008 366	4,570 0	0,006 356
4,316 8	0,008 306	4,576 4	0,006 314
4,323 9	0,008 244	4,583 5	0,006 267
4,331 0	0,008 182	4,590 6	0,006 220
4,337 5	0,008 126	4,596 9	0,006 178
4,344 0	0,008 071	4,603 2	0,006 137
4,350 2	0,008 018	4,608 7	0,006 102
4,356 4	0,007 966	4,614 2	0,006 066
4,363 1	0,007 909	4,620 5	0,006 026
4,369 8	0,007 854	4,626 8	0,005 986
4,376 9	0,007 795	4,633 9	0,005 942
4,384 0	0,007 737	4,641 0	0,005 897
4,390 4	0,007 684	4,647 2	0,005 859
4,396 8	0,007 633	4,653 4	0,005 820
4,402 9	0,007 584	4,658 8	0,005 787
4,409 0	0,007 535	4,664 2	0,005 754

x	y	x	y
4,670	5	4,914	4
4,676	8	4,920	4
4,683	9	4,927	1
4,691	0	4,933	8
4,697	1	4,939	7
4,703	2	4,945	6
4,708	6	4,950	8
4,714	0	4,956	0
4,720	2	4,961	9
4,726	4	4,967	8
4,733	4	4,974	5
4,740	4	4,981	2
4,746	5	4,987	0
4,752	6	4,992	8
4,757	9	4,998	0
4,763	2	5,003	2
4,769	4	5,009	1
4,775	6	5,015	0
4,782	5	5,021	5
4,789	4	5,028	0
4,795	4	5,033	8
4,801	4	5,039	6
4,806	7	5,044	9
4,812	0	5,050	2
4,818	1	5,056	0
4,824	2	5,061	8
4,831	1	5,068	1
4,838	0	5,074	4
4,844	0	5,080	2
4,850	0	5,086	0
4,855	2	5,091	4
4,860	4	5,096	8
4,866	4	5,102	5
4,872	4	5,108	2
4,879	3	5,114	4
4,886	2	5,120	6
4,892	1	5,126	4
4,898	0	5,132	2
4,903	2	5,137	5
4,908	4	5,142	8
		0,004	418
		0,004	390
		0,004	359
		0,004	328
		0,004	301
		0,004	275
		0,004	251
		0,004	228
		0,004	202
		0,004	176
		0,004	146
		0,004	117
		0,004	092
		0,004	067
		0,004	044
		0,004	022
		0,003	997
		0,003	973
		0,003	945
		0,003	918
		0,003	894
		0,003	871
		0,003	849
		0,003	827
		0,003	804
		0,003	781
		0,003	756
		0,003	731
		0,003	708
		0,003	685
		0,003	664
		0,003	644
		0,003	622
		0,003	600
		0,003	577
		0,003	553
		0,003	531
		0,003	510
		0,003	490
		0,003	471

x	y	x	y
5,148 4	0,003 450	5,373 2	0,002 720
5,154 0	0,003 430	5,378 6	0,002 705
5,160 3	0,003 407	5,384 8	0,002 687
5,166 6	0,003 385	5,391 0	0,002 669
5,172 4	0,003 364	5,396 5	0,002 654
5,178 2	0,003 343	5,402 0	0,002 638
5,183 3	0,003 325	5,406 9	0,002 625
5,188 4	0,003 307	5,411 8	0,002 611
5,194 0	0,003 288	5,417 2	0,002 596
5,199 6	0,003 268	5,422 6	0,002 582
5,205 9	0,003 247	5,428 8	0,002 565
5,212 2	0,003 225	5,435 0	0,002 548
5,217 9	0,003 206	5,440 4	0,002 533
5,223 6	0,003 187	5,445 8	0,002 519
5,228 7	0,003 169	5,450 6	0,002 506
5,233 8	0,003 152	5,455 4	0,002 493
5,239 3	0,003 134	5,460 8	0,002 479
5,244 8	0,003 116	5,466 2	0,002 465
5,251 1	0,003 095	5,472 4	0,002 449
5,257 4	0,003 075	5,478 6	0,002 433
5,263 1	0,003 056	5,484 0	0,002 419
5,268 8	0,003 038	5,489 4	0,002 405
5,273 8	0,003 022	5,494 1	0,002 393
5,278 8	0,003 006	5,498 8	0,002 381
5,284 2	0,002 989	5,504 2	0,002 368
5,289 6	0,002 972	5,509 6	0,002 354
5,295 9	0,002 952	5,515 8	0,002 339
5,302 2	0,002 932	5,522 0	0,002 324
5,307 9	0,002 915	5,527 3	0,002 311
5,313 6	0,002 897	5,532 6	0,002 297
5,318 5	0,002 882	5,537 2	0,002 286
5,323 4	0,002 867	5,541 8	0,002 275
5,328 8	0,002 851	5,547 2	0,002 262
5,334 2	0,002 835	5,552 6	0,002 249
5,340 5	0,002 816	5,558 8	0,002 235
5,346 8	0,002 797	5,565 0	0,002 220
5,352 4	0,002 781	5,570 3	0,002 208
5,358 0	0,002 764	5,575 6	0,002 195
5,362 9	0,002 750	5,580 1	0,002 185
5,367 8	0,002 736	5,584 6	0,002 174

x	y	x	y
5,590 0	0,002 162	5,799 8	0,001 730
5,595 4	0,002 150	5,805 2	0,001 720
5,601 6	0,002 136	5,810 6	0,001 710
5,607 8	0,002 121	5,816 0	0,001 700
5,613 0	0,002 110	5,821 4	0,001 691
5,618 2	0,002 098	5,826 8	0,001 681
5,622 7	0,002 088	5,831 7	0,001 672
5,627 2	0,002 078	5,836 6	0,001 664
5,632 6	0,002 066	5,841 5	0,001 655
5,638 0	0,002 054	5,846 4	0,001 646
5,644 0	0,002 041	5,851 8	0,001 637
5,650 0	0,002 029	5,857 2	0,001 628
5,655 2	0,002 017	5,862 5	0,001 618
5,660 4	0,002 006	5,867 8	0,001 609
5,664 9	0,001 997	5,872 6	0,001 601
5,669 4	0,001 987	5,877 4	0,001 593
5,674 8	0,001 976	5,882 3	0,001 585
5,680 2	0,001 964	5,887 2	0,001 576
5,686 2	0,001 952	5,892 6	0,001 567
5,692 2	0,001 940	5,898 0	0,001 558
5,697 3	0,001 929	5,903 3	0,001 550
5,702 4	0,001 919	5,908 6	0,001 541
5,706 9	0,001 909	5,913 3	0,001 533
5,711 4	0,001 900	5,918 0	0,001 525
5,716 8	0,001 889	5,922 9	0,001 518
5,722 2	0,001 879	5,927 8	0,001 510
5,728 1	0,001 867	5,933 2	0,001 501
5,734 0	0,001 855	5,938 6	0,001 492
5,739 0	0,001 845	5,943 9	0,001 484
5,744 0	0,001 836	5,949 2	0,001 476
5,748 5	0,001 827	5,953 8	0,001 468
5,753 0	0,001 818	5,958 4	0,001 461
5,758 4	0,001 808	5,963 2	0,001 454
5,763 8	0,001 798	5,968 0	0,001 446
5,769 8	0,001 786	5,973 5	0,001 438
5,775 8	0,001 775	5,979 0	0,001 430
5,780 7	0,001 765	5,984 3	0,001 421
5,785 6	0,001 756	5,989 6	0,001 413
5,790 0	0,001 748	5,994 1	0,001 407
5,794 4	0,001 740	5,998 6	0,001 400
		5,999 3	0,001 399
		6,0	0,001 398

2°) $\rho = 1$; $y'(0) = -1,358\ 375$

x	y	x	y
0,001	0,998 642	0,786	0,376 672
0,002	0,997 287	0,804	0,368 830
0,03	0,960 221	0,823	0,360 744
0,058	0,924 838	0,842	0,352 848
0,072	0,907 752	0,860	0,345 539
0,086	0,891 056	0,878	0,338 393
0,110	0,863 307	0,896	0,331 406
0,134	0,836 609	0,914	0,324 573
0,153	0,816 184	0,932	0,317 891
0,172	0,796 362	0,950	0,311 356
0,192	0,776 120	0,968	0,304 964
0,212	0,756 492	0,986	0,298 712
0,232	0,737 451	1,003	0,292 933
0,252	0,718 976	1,02	0,287 273
0,272	0,701 042	1,037	0,281 730
0,292	0,683 631	1,054	0,276 300
0,313	0,665 889	1,071	0,270 981
0,334	0,648 678	1,088	0,265 770
0,354	0,632 763	1,105	0,260 666
0,374	0,617 295	1,122	0,255 665
0,394	0,602 258	1,138	0,251 051
0,414	0,587 638	1,154	0,246 525
0,435	0,572 719	1,170	0,242 085
0,456	0,558 227	1,186	0,237 730
0,476	0,544 809	1,203	0,233 193
0,496	0,531 752	1,220	0,228 746
0,516	0,519 045	1,235	0,224 897
0,536	0,506 677	1,250	0,221 116
0,556	0,494 636	1,265	0,217 402
0,576	0,482 912	1,280	0,213 754
0,595	0,472 059	1,297	0,209 697
0,614	0,461 475	1,314	0,205 720
0,634	0,450 616	1,329	0,202 276
0,654	0,440 037	1,344	0,198 893
0,673	0,430 239	1,358	0,195 789
0,692	0,420 680	1,372	0,192 736
0,711	0,411 352	1,387	0,189 520
0,730	0,402 250	1,402	0,186 360
0,749	0,393 366	1,418	0,183 051
0,768	0,384 696	1,434	0,179 802

x	y	x	y
1,448	0,177 008	1,976	0,098 727
1,462	0,174 260	1,990	0,097 225
1,476	0,171 556	2,003	0,095 851
1,490	0,168 896	2,016	0,094 497
1,505	0,166 094	2,026	0,093 469
1,520	0,163 340	2,036	0,092 452
1,534	0,160 813	2,047	0,091 348
1,548	0,158 326	2,058	0,090 257
1,561	0,156 053	2,072	0,088 887
1,574	0,153 813	2,086	0,087 539
1,589	0,151 271	2,098	0,086 399
1,604	0,148 772	2,110	0,085 275
1,618	0,146 478	2,119 9	0,084 359
1,632	0,144 221	2,129 8	0,083 453
1,644	0,142 315	2,139 8	0,082 548
1,656	0,140 435	2,149 8	0,081 654
1,670	0,138 275	2,163 8	0,080 419
1,684	0,136 149	2,177 8	0,079 202
1,699	0,133 909	2,187 8	0,078 344
1,714	0,131 706	2,197 8	0,077 496
1,726	0,129 971	2,207 8	0,076 658
1,738	0,128 259	2,217 8	0,075 829
1,750	0,126 571	2,230 8	0,074 765
1,762	0,124 906	2,243 8	0,073 716
1,776	0,122 993	2,255 8	0,072 760
1,790	0,121 109	2,267 8	0,071 818
1,804	0,119 255	2,277 7	0,071 049
1,818	0,117 430	2,287 6	0,070 289
1,829	0,116 017	2,297 5	0,069 538
1,840	0,114 621	2,307 4	0,068 795
1,852	0,113 118	2,318 4	0,067 979
1,864	0,111 636	2,329 4	0,067 173
1,878	0,109 932	2,341 4	0,066 305
1,892	0,108 254	2,353 4	0,065 448
1,905	0,106 720	2,364 4	0,064 672
1,918	0,105 208	2,375 4	0,063 906
1,929	0,103 945	2,385 3	0,063 224
1,940	0,102 699	2,395 2	0,062 550
1,951	0,101 468	2,405 1	0,061 883
1,962	0,100 252	2,415 0	0,061 223

x	y	x	y
2,426 0	0,060 499	2,823 3	0,039 429
2,437 0	0,059 783	2,833 2	0,039 013
2,448 0	0,059 076	2,843 1	0,038 600
2,459 0	0,058 378	2,853 0	0,038 192
2,469 0	0,057 750	2,862 0	0,037 825
2,479 0	0,057 129	2,871 0	0,037 462
2,488 9	0,056 521	2,879 8	0,037 110
2,498 8	0,055 920	2,888 6	0,036 761
2,508 8	0,055 319	2,897 6	0,036 408
2,518 8	0,054 725	2,906 6	0,036 059
2,529 8	0,054 079	2,916 5	0,035 678
2,540 8	0,053 441	2,926 4	0,035 301
2,550 8	0,052 867	2,935 4	0,034 963
2,560 8	0,052 300	2,944 4	0,034 627
2,570 7	0,051 744	2,953 3	0,034 298
2,580 6	0,051 195	2,962 2	0,033 973
2,590 6	0,050 646	2,971 2	0,033 647
2,600 6	0,050 103	2,980 2	0,033 324
2,610 6	0,049 565	2,989 2	0,033 005
2,620 6	0,049 034	2,998 2	0,032 688
2,630 6	0,048 509	3,007 2	0,032 375
2,640 6	0,047 989	3,016 2	0,032 065
2,650 5	0,047 480	3,025 2	0,031 757
2,660 4	0,046 977	3,034 2	0,031 453
2,670 3	0,046 479	3,043 2	0,031 151
2,680 2	0,045 986	3,052 2	0,030 853
2,690 1	0,045 499	3,060 9	0,030 567
2,700 0	0,045 016	3,069 6	0,030 284
2,709 9	0,044 539	3,078 3	0,030 004
2,719 8	0,044 067	3,087 0	0,029 726
2,728 8	0,043 643	3,095 9	0,029 444
2,737 8	0,043 223	3,104 8	0,029 166
2,747 7	0,042 765	3,113 5	0,028 896
2,757 6	0,042 312	3,122 2	0,028 628
2,767 5	0,041 865	3,130 7	0,028 369
2,777 4	0,041 422	3,139 2	0,028 113
2,786 4	0,041 023	3,147 9	0,027 853
2,795 4	0,040 628	3,156 6	0,027 595
2,804 4	0,040 237	3,165 4	0,027 337
2,813 4	0,039 851	3,174 2	0,027 081

x	y	x	y
3,182 6	0,026 839	3,511 4	0,018 907
3,191 0	0,026 600	3,519 2	0,018 751
3,199 3	0,026 365	3,527 0	0,018 596
3,207 6	0,026 133	3,534 8	0,018 443
3,216 3	0,025 891	3,542 8	0,018 286
3,225 0	0,025 652	3,550 8	0,018 132
3,233 7	0,025 415	3,558 7	0,017 980
3,242 4	0,015 180	3,566 6	0,017 830
3,250 5	0,024 963	3,574 2	0,017 686
3,258 6	0,024 749	3,581 8	0,017 544
3,266 8	0,024 533	3,589 5	0,017 401
3,275 0	0,024 320	3,597 2	0,017 259
3,283 7	0,024 095	3,605 2	0,017 115
3,292 4	0,023 873	3,613 2	0,016 968
3,300 9	0,023 657	3,620 9	0,016 830
3,309 4	0,023 444	3,628 6	0,016 693
3,317 3	0,023 247	3,636 0	0,016 562
3,325 2	0,023 052	3,643 4	0,016 433
3,333 3	0,022 854	3,651 1	0,016 299
3,341 4	0,022 658	3,658 8	0,016 166
3,350 0	0,022 451	3,666 8	0,016 029
3,358 6	0,022 246	3,674 8	0,015 894
3,366 9	0,022 051	3,682 3	0,015 768
3,375 2	0,021 856	3,689 8	0,015 643
3,383 0	0,021 676	3,697 0	0,015 524
3,390 8	0,021 496	3,704 2	0,015 405
3,398 8	0,021 314	3,711 9	0,015 280
3,406 8	0,021 133	3,719 6	0,015 156
3,415 2	0,020 945	3,727 6	0,015 028
3,423 6	0,020 759	3,735 6	0,014 901
3,431 7	0,020 580	3,742 9	0,014 785
3,439 8	0,020 404	3,750 2	0,014 671
3,447 6	0,020 235	3,757 3	0,014 561
3,455 4	0,020 068	3,764 4	0,014 452
3,463 4	0,019 898	3,772 0	0,014 336
3,471 4	0,019 729	3,779 6	0,014 221
3,479 5	0,019 560	3,787 4	0,014 104
3,487 6	0,019 392	3,795 2	0,013 988
3,495 6	0,019 228	3,802 4	0,013 881
3,503 6	0,019 065	3,809 6	0,013 776

x	y	x	y
3,816 7	0,013 672	4,103 5	0,010 090
3,823 8	0,013 570	4,110 2	0,010 019
3,831 4	0,013 461	4,117 2	0,009 945
3,839 0	0,013 353	4,124 2	0,009 872
3,846 6	0,013 246	4,131 3	0,009 798
3,854 2	0,013 139	4,138 4	0,009 724
3,861 3	0,013 041	4,145 2	0,009 655
3,868 4	0,012 943	4,152 0	0,009 586
3,875 4	0,012 847	4,158 7	0,009 518
3,882 4	0,012 752	4,165 4	0,009 451
3,889 9	0,012 651	4,172 4	0,009 381
3,897 4	0,012 551	4,179 4	0,009 312
3,904 9	0,012 452	4,186 4	0,009 243
3,912 4	0,012 353	4,193 4	0,009 175
3,919 5	0,012 261	4,200 1	0,009 110
3,926 6	0,012 169	4,206 8	0,009 046
3,933 5	0,012 080	4,213 4	0,008 983
3,940 4	0,011 992	4,220 0	0,008 920
3,947 7	0,011 900	4,227 0	0,008 855
3,955 0	0,011 808	4,234 0	0,008 789
3,962 5	0,011 715	4,240 9	0,008 725
3,970 0	0,011 622	4,247 8	0,008 662
3,977 0	0,011 536	4,254 3	0,008 602
3,984 0	0,011 451	4,260 8	0,008 544
3,990 8	0,011 369	4,267 4	0,008 484
3,997 6	0,011 287	4,274 0	0,008 425
4,004 8	0,011 202	4,281 0	0,008 363
4,012 0	0,011 117	4,288 0	0,008 301
4,019 4	0,011 030	4,294 8	0,008 242
4,026 8	0,010 944	4,301 6	0,008 183
4,033 8	0,010 863	4,308 0	0,008 128
4,040 8	0,010 783	4,314 4	0,008 073
4,047 5	0,010 706	4,320 9	0,008 018
4,054 2	0,010 631	4,327 4	0,007 963
4,061 3	0,010 551	4,334 4	0,007 904
4,068 4	0,010 472	4,341 4	0,007 846
4,075 6	0,010 393	4,348 2	0,007 790
4,082 8	0,010 314	4,355 0	0,007 734
4,089 8	0,010 238	4,361 3	0,007 682
4,096 8	0,010 162	4,367 6	0,007 631

x	y	x	y
4,373 9	0,007 581	4,631 5	0,005 774
4,380 2	0,007 530	4,637 6	0,005 737
4,387 1	0,007 476	4,643 8	0,005 700
4,394 0	0,007 422	4,650 0	0,005 663
4,400 9	0,007 368	4,656 4	0,005 625
4,407 8	0,007 314	4,662 8	0,005 587
4,414 0	0,007 266	4,669 1	0,005 550
4,420 2	0,007 219	4,675 4	0,005 513
4,426 4	0,007 172	4,681 5	0,005 477
4,432 6	0,007 125	4,687 6	0,005 442
4,439 4	0,007 074	4,693 8	0,005 407
4,446 2	0,007 023	4,700 0	0,005 371
4,453 0	0,007 973	4,706 3	0,005 336
4,459 8	0,006 923	4,712 6	0,005 300
4,466 0	0,006 878	4,718 8	0,005 266
4,472 2	0,006 833	4,725 0	0,005 231
4,478 4	0,006 788	4,731 0	0,005 198
4,484 6	0,006 744	4,737 0	0,005 166
4,491 3	0,006 696	4,743 2	0,005 132
4,498 0	0,006 649	4,749 4	0,005 098
4,504 7	0,006 602	4,755 7	0,005 065
4,511 4	0,006 556	4,762 0	0,005 031
4,517 5	0,006 513	4,768 0	0,004 999
4,523 6	0,006 472	4,774 0	0,004 968
4,529 8	0,006 429	4,780 0	0,004 936
4,536 0	0,006 387	4,786 0	0,004 905
4,542 6	0,006 343	4,792 2	0,004 873
4,549 2	0,006 299	4,798 4	0,004 841
4,555 8	0,006 255	4,804 6	0,004 810
4,562 4	0,006 212	4,810 8	0,004 778
4,568 6	0,006 171	4,816 7	0,004 749
4,574 8	0,006 131	4,822 6	0,004 719
4,580 9	0,006 091	4,828 6	0,004 689
4,587 0	0,006 052	4,834 6	0,004 660
4,593 4	0,006 012	4,840 8	0,004 629
4,599 8	0,005 971	4,847 0	0,004 599
4,606 3	0,005 930	4,853 1	0,004 569
4,612 8	0,005 890	4,859 2	0,004 540
4,619 1	0,005 851	4,865 0	0,004 512
4,625 4	0,005 812	4,870 8	0,004 485

x	y	x	y
4,876 8	0,004 456	5,112 2	0,003 475
4,882 8	0,004 428	5,118 4	0,003 453
4,889 0	0,004 399	5,124 3	0,003 431
4,895 2	0,004 371	5,130 2	0,003 410
4,901 2	0,004 343	5,135 5	0,003 391
4,907 2	0,004 316	5,140 8	0,003 372
4,912 9	0,004 290	5,146 3	0,003 352
4,918 6	0,004 264	5,151 8	0,003 333
4,924 6	0,004 237	5,158 1	0,003 311
4,930 6	0,004 210	5,164 4	0,003 289
4,936 8	0,004 183	5,170 3	0,003 268
4,943 0	0,004 155	5,176 2	0,003 248
4,948 9	0,004 130	5,181 3	0,003 230
4,954 8	0,004 104	5,186 4	0,003 213
4,960 4	0,004 080	5,191 9	0,003 194
4,966 0	0,004 056	5,197 4	0,003 176
4,972 0	0,004 030	5,203 7	0,003 155
4,978 0	0,004 005	5,210 0	0,003 134
4,984 2	0,003 979	5,215 8	0,003 115
4,990 4	0,003 953	5,221 6	0,003 095
4,996 1	0,003 929	5,226 7	0,003 079
5,001 8	0,003 905	5,231 8	0,003 062
5,007 4	0,003 882	5,237 2	0,003 045
5,013 0	0,003 859	5,242 6	0,003 028
5,019 1	0,003 834	5,248 9	0,003 007
5,025 2	0,003 810	5,255 2	0,002 987
5,031 3	0,003 785	5,261 0	0,002 969
5,037 4	0,003 761	5,266 8	0,002 951
5,042 9	0,003 739	5,271 8	0,002 935
5,048 4	0,003 718	5,276 8	0,002 920
5,054 0	0,003 696	5,282 2	0,002 903
5,059 6	0,003 674	5,287 6	0,002 887
5,065 8	0,003 650	5,293 9	0,002 868
5,072 0	0,003 626	5,300 2	0,002 849
5,078 0	0,003 603	5,305 9	0,002 831
5,084 0	0,003 580	5,311 6	0,002 814
5,089 4	0,003 560	5,316 5	0,002 800
5,094 8	0,003 540	5,321 4	0,002 785
5,100 4	0,003 519	5,326 8	0,002 769
5,106 0	0,003 498	5,332 2	0,002 754

x	y	x	y
5,338	5	0,002	735
5,344	8	0,002	717
5,350	4	0,002	701
5,356	0	0,002	685
5,360	8	0,002	671
5,365	6	0,002	658
5,371	0	0,002	643
5,376	4	0,002	628
5,382	7	0,002	610
5,389	0	0,002	593
5,394	6	0,002	578
5,400	2	0,002	562
5,405	0	0,002	549
5,409	8	0,002	536
5,415	2	0,002	522
5,420	6	0,002	508
5,426	7	0,002	491
5,432	8	0,002	475
5,438	3	0,002	461
5,443	8	0,002	447
5,448	7	0,002	434
5,453	6	0,002	421
5,459	0	0,002	408
5,464	4	0,002	394
5,470	4	0,002	379
5,476	4	0,002	364
5,481	8	0,002	350
5,487	2	0,002	337
5,492	1	0,002	324
5,497	0	0,002	312
5,502	4	0,002	299
5,507	8	0,002	286
5,513	7	0,002	272
5,519	6	0,002	258
5,525	0	0,002	245
5,530	4	0,002	232
5,535	3	0,002	220
5,540	2	0,002	209
5,545	6	0,002	196
5,551	0	0,002	184
5,556	8	0,002	170
5,562	6	0,002	157
5,567	9	0,002	145
5,573	2	0,002	133
5,578	1	0,002	122
5,583	0	0,002	111
5,588	4	0,002	099
5,593	8	0,002	087
5,599	6	0,002	074
5,605	4	0,002	061
5,610	6	0,002	050
5,615	8	0,002	039
5,620	6	0,002	028
5,625	4	0,002	018
5,630	8	0,002	007
5,636	2	0,001	995
5,642	1	0,001	983
5,648	0	0,001	970
5,653	1	0,001	960
5,658	2	0,001	949
5,662	9	0,001	939
5,667	6	0,001	930
5,673	0	0,001	919
5,678	4	0,001	908
5,684	3	0,001	906
5,690	2	0,001	894
5,695	3	0,001	874
5,700	4	0,001	863
5,704	9	0,001	855
5,709	4	0,001	846
5,714	8	0,001	835
5,720	2	0,001	825
5,725	7	0,001	814
5,731	2	0,001	804
5,736	7	0,001	793
5,742	2	0,001	783
5,747	1	0,001	773
5,752	0	0,001	764
5,756	9	0,001	755
5,761	8	0,001	746

x	y	x	y
5,767 3	0,001 736	5,971 7	0,001 396
5,772 8	0,001 726	5,977 2	0,001 388
5,778 3	0,001 716	5,982 5	0,001 380
5,783 8	0,001 706	5,987 8	0,001 372
5,788 7	0,001 697	5,992 3	0,001 366
5,793 6	0,001 688	5,996 8	0,001 359
5,798 4	0,001 679	5,998 4	0,001 357
5,803 2	0,001 671	6,0	0,001 355
5,808 6	0,001 661		
5,814 0	0,001 652		
5,819 5	0,001 642		
5,825 0	0,001 632		
5,829 9	0,001 624		
5,834 8	0,001 615		
5,839 6	0,001 607		
5,844 4	0,001 599		
5,849 8	0,001 590		
5,855 2	0,001 581		
5,860 6	0,001 572		
5,866 0	0,001 563		
5,870 9	0,001 555		
5,875 8	0,001 546		
5,880 6	0,001 539		
5,885 4	0,001 531		
5,890 7	0,001 522		
5,896 0	0,001 514		
5,901 4	0,001 505		
5,906 8	0,001 496		
5,911 6	0,001 489		
5,916 4	0,001 481		
5,921 2	0,001 473		
5,926 0	0,001 466		
5,931 4	0,001 458		
5,936 8	0,001 449		
5,942 1	0,001 441		
5,947 4	0,001 433		
5,952 0	0,001 426		
5,956 6	0,001 419		
5,961 4	0,001 412		
5,966 2	0,001 404		

3°) $\rho = 5$; $y'(x=0) = 0$

x	y	x	y
0,001	0,999 994	1,649	0,274 335
0,002	0,999 976	1,712	0,264 730
0,016	0,998 560	1,774	0,255 759
0,030	0,995 147	1,836	0,247 231
0,043	0,990 410	1,895	0,239 498
0,056	0,984 354	1,954	0,232 116
0,070	0,976 555	2,011	0,225 294
0,084	0,967 623	2,068	0,218 760
0,100	0,956 258	2,124	0,212 603
0,116	0,943 890	2,180	0,206 691
0,133	0,929 887	2,235	0,201 110
0,150	0,915 215	2,290	0,195 739
0,169	0,898 262	2,343	0,190 752
0,188	0,880 945	2,396	0,185 942
0,210	0,860 688	2,446	0,181 558
0,232	0,840 438	2,496	0,177 318
0,259	0,815 867	2,546	0,173 215
0,286	0,791 844	2,596	0,169 241
0,332	0,760 953	2,645	0,165 467
0,358	0,731 584	2,694	0,161 808
0,421	0,684 088	2,741	0,158 400
0,484	0,641 455	2,788	0,155 090
0,539	0,607 846	2,834	0,151 940
0,594	0,577 229	2,880	0,148 877
0,650	0,548 764	2,926	0,145 896
0,706	0,522 697	2,972	0,142 994
0,762	0,498 733	3,017	0,140 229
0,818	0,476 620	3,062	0,137 534
0,878	0,454 737	3,104	0,135 080
0,938	0,434 505	3,146	0,132 685
1,001	0,414 835	3,188	0,130 346
1,064	0,396 596	3,230	0,128 062
1,129	0,379 115	3,272	0,125 830
1,194	0,362 846	3,314	0,123 649
1,260	0,347 441	3,355	0,121 567
1,326	0,333 047	3,396	0,119 530
1,392	0,319 567	3,436	0,117 586
1,458	0,306 915	3,476	0,115 682
1,522	0,295 369	3,515	0,113 864
1,586	0,284 475	3,554	0,112 083

x	y	x	y
3,592	0,110 383	4,934	0,066 661
3,630	0,108 716	4,962	0,066 004
3,668	0,107 081	4,992	0,065 309
3,706	0,105 478	5,022	0,064 622
3,744	0,103 905	5,053	0,063 922
3,782	0,102 362	5,084	0,063 229
3,819	0,100 886	5,112	0,062 611
3,856	0,099 438	5,140	0,062 001
3,892	0,098 054	5,167	0,061 419
3,928	0,096 694	5,194	0,060 844
3,964	0,095 059	5,223	0,060 235
4,000	0,094 046	5,252	0,059 632
4,035	0,092 091	5,281	0,059 037
4,070	0,091 058	5,310	0,058 448
4,104	0,090 379	5,337	0,057 905
4,138	0,089 220	5,364	0,057 369
4,172	0,088 079	5,391	0,056 840
4,206	0,086 957	5,418	0,056 316
4,241	0,085 820	5,445	0,055 798
4,276	0,084 701	5,472	0,055 286
4,309	0,083 662	5,500	0,054 760
4,342	0,082 639	5,528	0,054 240
4,374	0,081 662	5,555	0,053 744
4,406	0,080 700	5,582	0,053 254
4,438	0,079 752	5,608	0,052 786
4,470	0,078 818	5,634	0,052 323
4,503	0,077 869	5,660	0,051 866
4,536	0,076 933	5,686	0,051 413
4,568	0,076 039	5,713	0,050 948
4,600	0,075 157	5,740	0,050 487
4,631	0,074 315	5,766	0,050 048
4,662	0,073 484	5,792	0,049 613
4,692	0,072 691	5,817	0,049 199
4,722	0,071 909	5,842	0,048 790
4,753	0,071 112	5,867	0,048 384
4,784	0,070 325	5,892	0,047 983
4,816	0,069 524	5,919	0,047 554
4,848	0,068 733	5,946	0,047 129
4,877	0,068 025	5,970	0,046 755
4,906	0,067 327	5,994	0,046 384
		5,997	0,046 338
		6,000	0,046 292

4°) $\rho = 5$; $y'(x=0) = -1,663\ 978$

x	y	x	y
0,001	0,998 337	2,173	0,168 580
0,002	0,996 678	2,230	0,163 853
0,053	0,916 438	2,284	0,159 545
0,104	0,845 014	2,338	0,155 395
0,140	0,799 751	2,389	0,151 613
0,176	0,758 475	2,440	0,147 960
0,221	0,712 009	2,491	0,144 430
0,266	0,670 617	2,542	0,141 014
0,304	0,639 130	2,592	0,137 777
0,342	0,610 430	2,642	0,134 633
0,382	0,582 857	2,690	0,131 709
0,422	0,557 643	2,738	0,128 872
0,466	0,532 270	2,784	0,126 230
0,510	0,509 041	2,830	0,123 663
0,558	0,485 813	2,877	0,121 111
0,606	0,464 492	2,924	0,118 630
0,660	0,442 481	2,969	0,116 317
0,714	0,422 281	3,014	0,114 063
0,774	0,401 681	3,058	0,111 916
0,834	0,382 767	3,102	0,109 822
0,898	0,364 218	3,144	0,107 871
0,962	0,347 138	3,186	0,105 966
1,029	0,330 642	3,228	0,104 106
1,096	0,315 398	3,270	0,102 288
1,165	0,300 857	3,312	0,100 512
1,234	0,287 363	3,354	0,098 776
1,302	0,274 982	3,394	0,097 158
1,370	0,263 420	3,434	0,095 574
1,437	0,252 753	3,473	0,094 063
1,504	0,242 738	3,512	0,092 583
1,569	0,233 591	3,552	0,091 096
1,634	0,224 958	3,592	0,089 639
1,698	0,216 919	3,631	0,088 247
1,762	0,209 301	3,670	0,086 882
1,824	0,202 293	3,706	0,085 646
1,886	0,195 625	3,742	0,084 433
1,944	0,189 675	3,779	0,083 210
2,002	0,183 986	3,816	0,082 009
2,059	0,178 633	3,854	0,080 799
2,116	0,173 503	3,892	0,079 610

x	y	x	y
3,928	0,078 504	5,198	0,049 278
3,964	0,077 417	5,224	0,048 832
3,998	0,076 407	5,250	0,048 393
4,032	0,075 415	5,276	0,047 959
4,067	0,074 412	5,306	0,047 465
4,102	0,073 425	5,336	0,046 976
4,138	0,072 426	5,366	0,046 491
4,174	0,071 444	5,396	0,046 012
4,208	0,070 531	5,421	0,045 616
4,242	0,069 632	5,446	0,045 226
4,274	0,068 799	5,471	0,044 840
4,306	0,067 980	5,496	0,044 459
4,339	0,067 148	5,525	0,044 022
4,372	0,066 328	5,554	0,043 589
4,406	0,065 497	5,583	0,043 161
4,440	0,064 678	5,612	0,042 736
4,472	0,063 918	5,636	0,042 388
4,504	0,063 169	5,660	0,042 044
4,535	0,062 453	5,684	0,041 704
4,566	0,061 749	5,708	0,041 368
4,598	0,061 032	5,737	0,040 967
4,630	0,060 325	5,766	0,040 569
4,662	0,059 627	5,793	0,040 202
4,694	0,058 939	5,820	0,039 838
4,724	0,058 303	5,843	0,039 531
4,754	0,057 675	5,866	0,039 228
4,783	0,057 077	5,891	0,038 902
4,812	0,056 486	5,916	0,038 580
4,844	0,055 844	5,943	0,038 235
4,876	0,055 209	5,970	0,037 893
4,907	0,054 602	5,985	0,037 704
4,938	0,054 002	6,0	0,037 518
4,965	0,053 486		
4,992	0,052 977		
5,020	0,052 456		
5,048	0,051 941		
5,080	0,051 361		
5,112	0,050 787		
5,142	0,050 255		
5,172	0,049 729		

$5^\circ) \rho = 10 ; y'(x=0) = 0$

x	y	x	y
0,001	0,999 997	3,538	0,141 312
0,002	0,999 988	3,612	0,137 958
0,042	0,995 127	3,686	0,134 725
0,082	0,982 573	3,757	0,131 732
0,118	0,965 973	3,828	0,128 840
0,154	0,945 427		
0,191	0,921 194	3,902	0,125 926
0,228	0,894 708	3,976	0,123 106
0,269	0,863 684	4,048	0,120 448
0,310	0,831 774	4,120	0,117 871
		4,186	0,115 576
0,357	0,795 039	4,252	0,113 349
0,404	0,758 944	4,316	0,111 249
0,464	0,714 719	4,380	0,109 208
0,524	0,673 284	4,447	0,107 129
0,614	0,617 057	4,514	0,105 105
0,704	0,567 982		
0,790	0,527 148	4,579	0,103 190
0,876	0,491 444	4,644	0,101 322
0,966	0,458 716	4,703	0,099 667
1,056	0,429 932	4,762	0,098 053
		4,821	0,096 477
1,146	0,404 423	4,880	0,094 939
1,236	0,381 641	4,942	0,093 359
1,335	0,359 213	5,004	0,091 813
1,434	0,339 087	5,063	0,090 373
1,534	0,320 739	5,122	0,088 963
1,634	0,304 091		
1,744	0,287 458	5,176	0,087 699
1,854	0,272 332	5,230	0,086 462
1,964	0,258 511	5,284	0,085 251
2,074	0,245 830	5,338	0,084 066
		5,396	0,082 818
2,174	0,235 177	5,454	0,081 592
2,274	0,225 275	5,510	0,080 430
2,374	0,216 043	5,566	0,079 288
2,474	0,207 412	5,616	0,078 286
2,574	0,199 323	5,666	0,077 305
2,674	0,191 723		
2,773	0,184 635	5,716	0,076 341
2,872	0,177 940	5,766	0,075 396
2,958	0,172 420	5,820	0,074 394
3,044	0,167 168	5,874	0,073 408
		5,927	0,072 454
3,124	0,162 506	5,980	0,071 515
3,204	0,158 049	5,990	0,071 338
3,288	0,153 572	6,0	0,071 164
3,372	0,149 283		
3,455	0,145 218		

6°) $\rho = 10$; $y'(x=0) = -2,045\ 980\ 73$

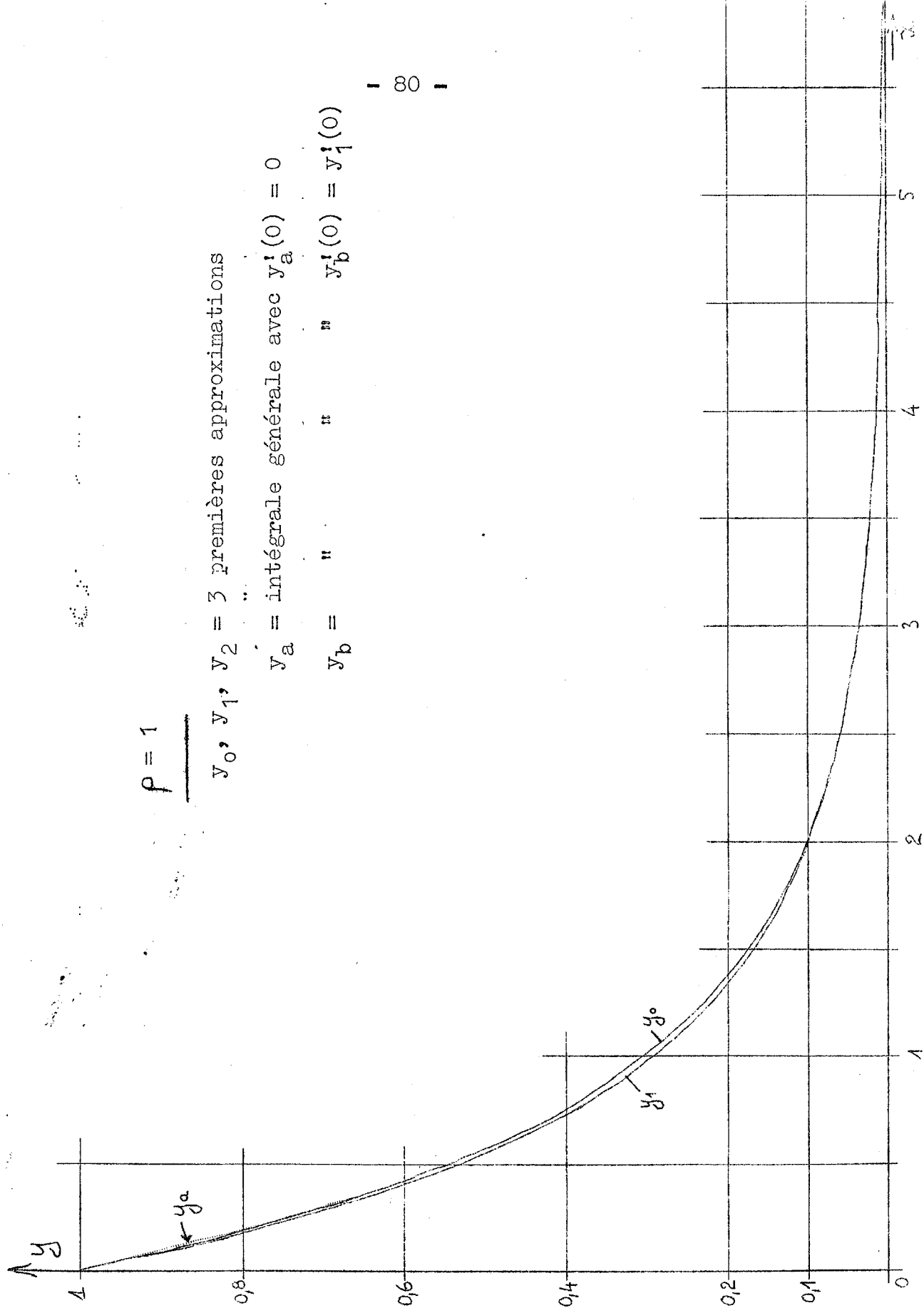
x	y	x	y
0,001	0,997 955	3,338	0,080 925
0,002	0,995 914	3,418	0,078 768
0,072	0,861 732	3,501	0,076 619
0,142	0,745 662	3,584	0,074 551
0,191	0,675 221	3,662	0,072 677
0,240	0,613 243	3,740	0,070 869
0,301	0,546 997	3,809	0,069 323
0,362	0,491 509	3,878	0,067 832
0,418	0,448 729	3,948	0,066 371
0,474	0,412 563	4,018	0,064 957
0,529	0,382 426	4,091	0,063 529
0,584	0,356 699	4,164	0,062 141
0,644	0,332 729	4,233	0,060 866
0,704	0,312 195	4,302	0,059 626
0,772	0,292 209	4,365	0,058 524
0,840	0,274 958	4,428	0,057 454
0,921	0,257 176	4,491	0,056 414
1,002	0,241 716	4,554	0,055 402
1,092	0,226 668	4,618	0,054 401
1,182	0,213 389	4,682	0,053 423
1,292	0,199 074	4,745	0,052 483
1,402	0,186 442	4,808	0,051 565
1,522	0,174 230	4,867	0,050 723
1,642	0,163 363	4,926	0,049 902
1,762	0,153 621	4,983	0,049 127
1,882	0,144 832	5,040	0,048 370
2,002	0,136 854	5,099	0,047 604
2,122	0,129 571	5,158	0,046 854
2,222	0,123 971	5,216	0,046 131
2,322	0,118 772	5,274	0,045 421
2,422	0,113 927	5,328	0,044 773
2,522	0,109 397	5,382	0,044 139
2,622	0,105 148	5,436	0,043 518
2,722	0,101 152	5,490	0,042 909
2,821	0,097 419	5,544	0,042 312
2,920	0,093 888	5,598	0,041 726
3,010	0,090 837	5,652	0,041 150
3,100	0,087 934	5,706	0,040 584
3,179	0,085 500	5,757	0,040 058
3,258	0,083 176	5,808	0,039 942
		5,858	0,039 045
		5,908	0,038 557
		5,954	0,038 117
		6,0	0,037 686

$$7^{\circ} \left. \begin{array}{l} \rho = 20 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

x	y	x	y
0,001	0,999 998	4,024	0,138 776
0,002	0,999 994	4,164	0,133 754
0,102	0,985 914	4,304	0,129 015
0,202	0,949 561	4,444	0,124 527
0,286	0,906 971	4,564	0,120 866
0,370	0,857 469	4,684	0,117 389
0,458	0,801 864	4,794	0,114 351
0,546	0,745 511	4,904	0,111 454
0,645	0,684 088	5,034	0,108 183
0,744	0,626 848	5,164	0,105 039
0,884	0,555 116	5,274	0,102 473
1,024	0,494 798	5,384	0,100 006
1,124	0,458 154	5,484	0,097 847
1,224	0,426 215	5,584	0,095 772
1,404	0,378 435	5,684	0,093 773
1,584	0,340 168	5,784	0,091 844
1,734	0,313 749	5,892	0,089 830
1,884	0,291 227	6,0	0,087 876
2,064	0,268 119		
2,244	0,248 266		
2,424	0,230 997		
2,604	0,215 814		
2,784	0,202 336		
2,964	0,190 271		
3,134	0,179 968		
3,304	0,170 583		
3,454	0,162 967		
3,604	0,155 929		
3,744	0,149 820		
3,884	0,144 118		

8°) $\rho = 20$; $y'(0) = -2,809\ 986$.

x	y	x	y
0,001	0,997 191	3,782	-0,040 272
0,002	0,994 386	3,932	-0,038 698
0,092	0,756 809	4,082	-0,037 224
0,182	0,551 464	4,232	-0,035 843
0,282	0,363 085	4,382	-0,034 546
0,382	0,215 360	4,532	-0,033 326
0,468	0,117 893	4,652	-0,032 400
0,554	0,044 172	4,772	-0,031 516
0,634	-0,006 432	5,012	-0,029 865
0,714	-0,042 864	5,252	-0,028 374
0,791	-0,067 242	5,307	-0,028 057
0,868	-0,083 461	5,362	-0,027 739
0,950	-0,093 979	5,492	-0,027 004
1,032	-0,099 455	5,622	-0,026 303
1,122	-0,101 479	5,772	-0,025 542
1,212	-0,100 812	5,922	-0,024 849
1,322	-0,097 882	5,961	-0,024 686
1,432	-0,093 830	6,0	-0,024 511
1,592	-0,087 364		
1,752	-0,081 180		
1,992	-0,072 973		
2,232	-0,066 177		
2,442	-0,061 128		
2,652	-0,056 732		
2,832	-0,053 397		
3,012	-0,050 389		
3,172	-0,047 954		
3,332	-0,045 712		
3,482	-0,043 767		
3,632	-0,041 958		



$$\rho = 1$$

$y_0, y_1, y_2 = 3$ premières approximations

$y_a =$ intégrale générale avec $y_a'(0) = 0$

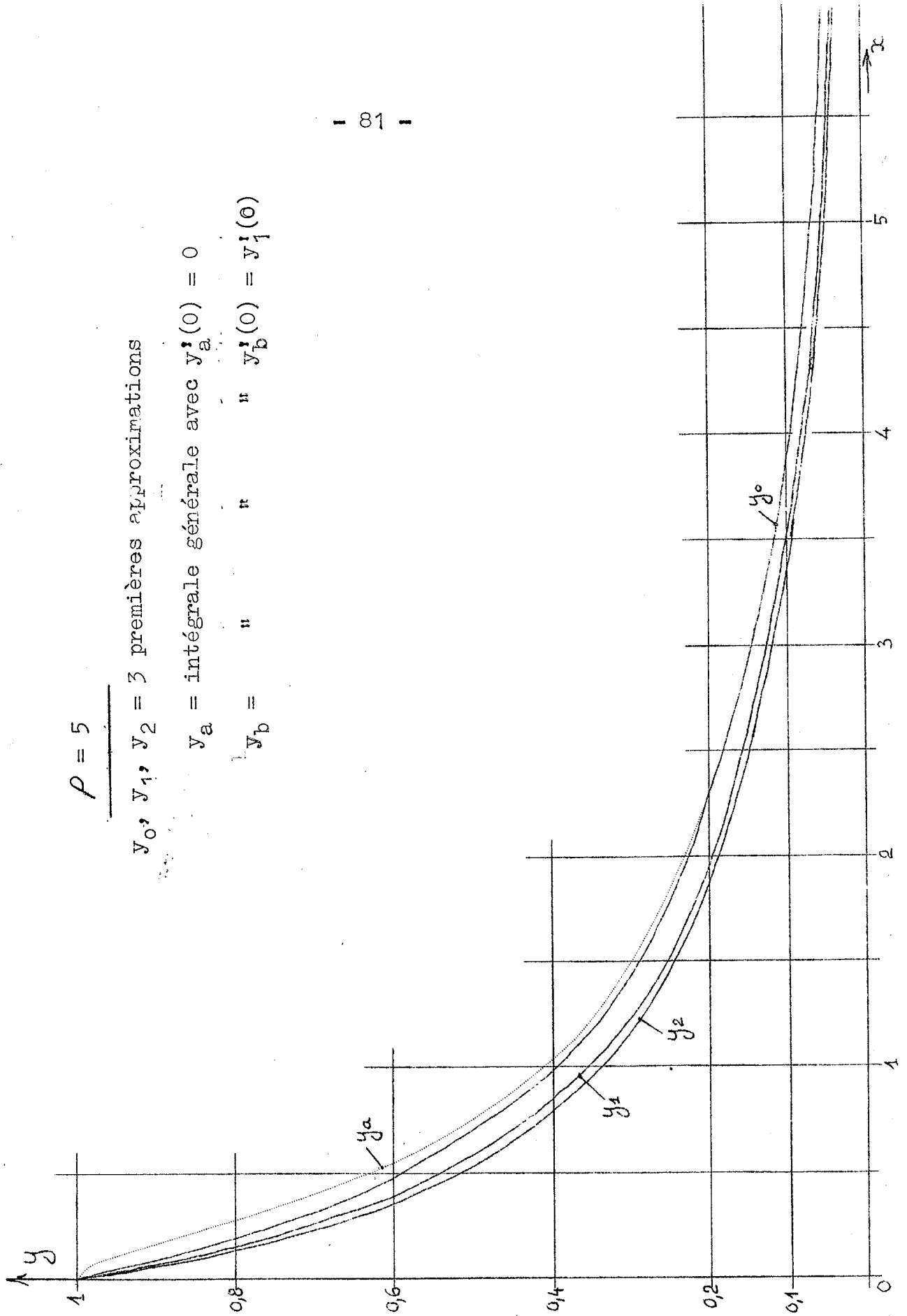
$y_b =$ " " " " $y_b'(0) = y_1'(0)$

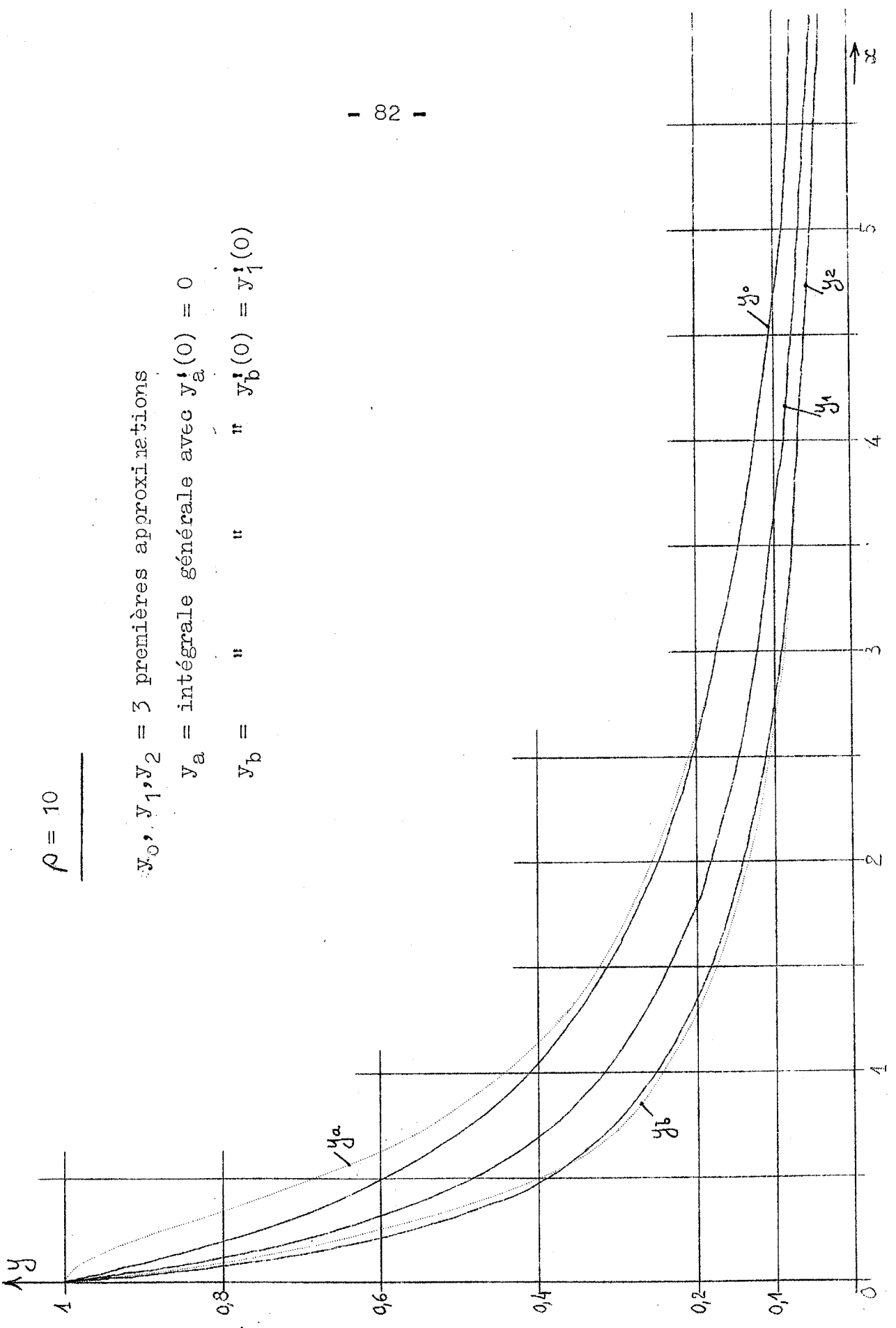
$$\rho = 5$$

$y_0, y_1, y_2 = 3$ premières approximations

$y_a =$ intégrale générale avec $y_a'(0) = 0$

$y_b =$ " " " " $y_b'(0) = y_1'(0)$





$$\rho = 10$$

$y_0, y_1, y_2 = 3$ premières approximations

$y_a =$ intégrale générale avec $y'_a(0) = 0$

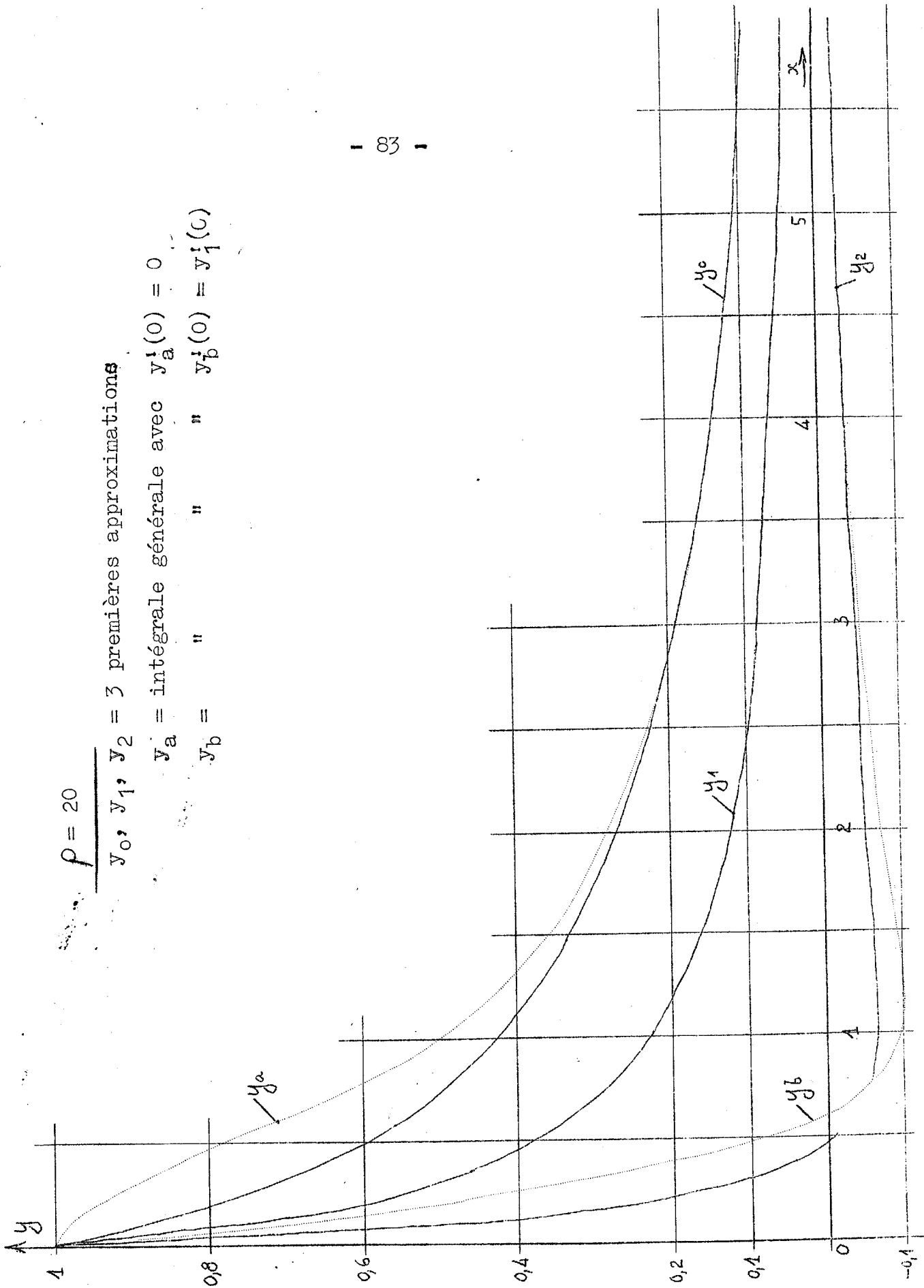
$y_b =$ " " " " $y'_b(0) = y'_1(0)$

$$\rho = 20$$

$y_0, y_1, y_2 = 3$ premières approximations

$y_a =$ intégrale générale avec $y_a'(0) = 0$

$y_b =$ " " " " $y_b'(0) = y_1'(0)$



6°) INTERPRETATION DES RESULTATS. -

Considérons d'abord les suites des approximations elles-mêmes. A l'aide du paramètre ρ , nous avons fait varier la grandeur du terme en y'' par rapport aux autres termes. Pour $\rho = 1$, la suite est pratiquement convergente, les 2^{ème} et 3^{ème} fonctions approchées étant presque identiques. En faisant croître ρ , c'est-à-dire en augmentant l'influence du terme en y'' , les différences entre les premières approximations deviennent plus grandes. Jusqu'à $\rho = 10$, ces approximations sont pratiquement convergentes, bien que nous supposions que le procédé employé ne conduit probablement pas à des approximations convergentes d'après les expériences faites dans le chapitre II.

Comparons alors les suites des approximations avec les solutions trouvées par une méthode classique d'intégration approchée, que nous considérerons comme les intégrales exactes.

Si $y'(0) = 0$, la courbe exacte diffère des approximations au voisinage de l'origine. Pour de petites valeurs de ρ , par exemple $\rho = 1$, cette différence n'est pas grande, et, déjà pour des valeurs de x un peu plus éloignées de l'origine, la courbe exacte coïncide pratiquement avec la famille des approximations. Cela prouve que l'intégrale particulière satisfaisant à $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, que nous ne pouvons pas approcher par la méthode, n'exerce qu'une certaine influence près de l'origine. Plus ρ augmente, plus l'influence de cette intégrale particulière croît, ce qui se produit sous forme d'une différence croissante entre l'intégrale exacte et la suite des approximations dans un intervalle de plus en plus grand.

La différence décrite existe même pour de très petites valeurs de ρ , car chaque approximation a une pente à l'origine non nulle.

Cependant, si nous imposons à l'intégrale générale d'avoir une pente à l'origine pas trop différente de celle des solutions approchées, la différence entre l'intégrale exacte et les approximations au voisinage de l'origine diminue. Dans ces conditions, nous pouvons donc éviter la somme de lourds calculs de la région voisine de l'origine qui impliquerait l'emploi d'une méthode classique.

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

--:--

- 1) COLLATZ L., "Numerische Behandlung von Differential
gleichungen"
Springer Verlag, 1957
- 2) FERROUX G., "Mathématiques Supérieures"
Paris, Albin Michel, Editeur, 1923
- 3) SCHWATT, I.J., "An introduction to the operations
with series"
The Press of the University of Pennsyl-
vania, Philadelphia, 1926

TABLE DES MATIERES

-:-

Avant-Propos, p. I

Introduction, p. 2

CHAPITRE I - INTEGRATION APPROCHEE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS LORSQUE LE COEFFICIENT DE LA DERIVEE SECONDE EST PETIT.

1°) Explication de la méthode, p. 4

2°) Présentation sur un exemple, p. 5

3°) Expression générale de $y_{n+1}(x)$, p. 8

4°) Etude de la convergence des solutions approchées, p. 9

5°) La limite ainsi trouvée est une intégrale de l'équation proposée, p. 10

6°) Généralisation, p. 11

7°) Position limite des solutions approchées, p. 12

8°) Exemples numériques, p. 14

CHAPITRE II - APPLICATION DU PROCEDE A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS VARIABLES.

1°) Etude d'un exemple, p. 23

2°) Détermination des premières approximations, p. 24

3°) Expression générale de y_{n+1} , p. 26

4°) Etude de la convergence, p. 27

5°) Tangente des fonctions pour $x_0 = 1$, p. 28

6°) Valeurs numériques des premières solutions approchées, ... p. 28

7°) Valeurs numériques obtenues par une intégration approchée classique de l'équation différentielle, p. 29

8°) Interprétation des résultats, p. 33

9°) Etude d'un second exemple, p. 33

10°) Expression générale de y_n , p. 34

1°) Etude de la convergence,	p.	35
2°) Valeurs numériques des premières approximations,	p.	36
3°) Intégration de l'équation (IV) par la méthode de la tangente améliorée à pas variable,	p.	36
4°) Interprétation des résultats,	p.	40
5°) Conclusion,	p.	40

CHAPITRE III - ETUDE D'UN EXEMPLE REEL.

1°) Introduction,	p.	41
2°) Détermination des équations simplifiées,	p.	43
3°) Intégration approchée des équations simplifiées,	p.	44
4°) Résolution de l'équation par une méthode classique d'intégration approchée,	p.	53
= 1 ; $y'(x=0) = 0$,	p.	54
= 1 ; $y'(0) = -1,358\ 375$,	p.	63
= 5 ; $y'(x=0) = 0$,	p.	72
= 5 ; $y'(x=0) = -1,663\ 978$,	p.	74
= 10 ; $y'(x=0) = 0$,	p.	76
= 10 ; $y'(x=0) = -2,045\ 980$,	p.	77
= 20 ; $y'(0) = 0$,	p.	78
= 20 ; $y'(0) = -2,809\ 986$,	p.	79
6°) Interprétation des résultats,	p.	84
LISTE BIBLIOGRAPHIQUE,	p.	85