



**HAL**  
open science

# Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces par injection

Erwan Bigot

► **To cite this version:**

Erwan Bigot. Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces par injection. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001. Français. NNT : 2002ENMP1073 . tel-00275305

**HAL Id: tel-00275305**

**<https://pastel.hal.science/tel-00275305>**

Submitted on 23 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

**Erwan Bigot**

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

en

SCIENCES ET GÉNIE DES MATÉRIAUX

---

**Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces  
par injection**

---

Soutenue le 12 novembre 2001

M. Jean-François AGASSANT	...	Président
M. Francisco CHINESTA	...	Rapporteur
M. Frédéric HECHT	...	Rapporteur
M. Éloi CROUAN	...	Examineur
M. Richard DUCLOUX	...	Examineur
M. Thierry COUPEZ	...	Directeur de Thèse



## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris, à Sophia Antipolis, dans le groupe de recherche Écoulements Visco-Élastiques (EVE). Je remercie Monsieur Jacques Lévy, Directeur de l'École des Mines de Paris, ainsi que la Direction du CEMEF de m'avoir permis de réaliser ma thèse au sein de ce laboratoire.

Je remercie également Jean François Agassant pour m'avoir accueilli dans son groupe de recherche, pour avoir suivi mon travail avec intérêt et pour le soutien et la confiance qu'il m'a accordés durant ces années. Qu'il soit aussi remercié d'avoir tenté de me sortir de mon ignorance crasse en m'inculquant quelques rudiments sur le monde envoûtant des polymères et, enfin, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie chaleureusement Messieurs Frédéric Hecht et Francisco Chinesta d'avoir accepté de juger mon travail en tant que rapporteurs.

Cette thèse n'aurait pu exister sans la participation financière et technique de la société RENAULT. Je remercie tout particulièrement Monsieur Pierre Lory pour avoir initié cette étude et pour m'avoir accordé sa confiance aussi bien durant ma thèse qu'à son terme en m'accueillant dans son groupe de recherche. Je remercie également Madame Cécile Hoareau et Monsieur Éloi Crouan pour avoir suivi le déroulement de mes travaux ainsi que pour leurs remarques et leurs critiques très constructives. Je remercie M. Éloi Crouan d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer une profonde reconnaissance à mon Directeur de thèse Thierry Coupez. Ce fut une grande chance de pouvoir accomplir cette thèse sous sa direction. Il m'a offert une vision très motivante de l'analyse numérique et du calcul scientifique par une connaissance étendue de ces sciences et par une capacité rare à les appliquer de façon aussi originale que pertinente pour traiter une grande variété de problématiques industrielles. Il me resterait encore beaucoup à apprendre à ses côtés mais c'est déjà une grande fierté pour moi d'avoir pu effectuer ce travail dans son équipe.

Je souhaite exprimer ma gratitude à Hugues que j'associe pleinement à ce travail : pour son langage concis, précis et syntaxiquement parfait lorsqu'il est compris entre `main( argc , argv ) { et }`, pour ses idées lumineuses, son dévouement insensé derrière un objet virtuel ou une équation rébarbative. Pour sa bonne humeur quotidienne et inébranlable et son coup de volant incisif comme une carre cisailant un grand champ de poudreuse. . .

J'exprime également toute ma sympathie aux personnes qui, par leur bonne humeur et leur gentillesse, ont rendu la vie au laboratoire et les pauses café encore plus agréables : mes compagnons de tablee Serge et Carole, mais également Karim, Arnaud, Philippe, Jérôme, Olivier, Michaëla, David, Estelle, Serge, Julien, Mike, Sabine et tous ceux que je n'ai pas cités. . .

Ces remerciements ne sauraient être complets sans penser à tous ceux grâce à qui cette thèse m'a apporté plus qu'un enrichissement scientifique : Jojo, Hervé, Élisabeth & Gillou, Éric, Fabrice & Fabrice, Cathy & Jérôme, P-O & Nathalie , Gaëlle, Étienne, Anne-Sophie, Robert & Béa, Sébastien, les Coyottes . . .

Je remercie enfin et surtout Marianne pour son soutien et le bonheur qu'elle m'apporte et mes parents qui m'ont donné l'immense chance de réaliser ces études. Je leur dédie ce travail.





# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>i</b>
<b>1 La simulation du procédé d'injection des thermoplastiques</b>	<b>1</b>
1.1 Le procédé d'injection . . . . .	3
1.2 La modélisation du procédé d'injection . . . . .	5
1.3 La simulation du procédé d'injection . . . . .	7
1.4 Algorithmes de résolution . . . . .	15
1.5 Couplage 2D/3D . . . . .	18
1.6 Démarche adoptée et principes retenus . . . . .	22
Bibliographie . . . . .	23
<b>2 Maillage anisotrope et estimation d'erreur</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	29
2.2 Génération de maillages . . . . .	30
2.3 Métrique naturelle . . . . .	49
2.4 Estimation d'erreur . . . . .	52
2.5 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> Problème de Stokes . . . . .	54
2.6 Écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles . . . . .	58
2.7 Adaptation de maillage - Calculs d'extrusion . . . . .	62
2.8 Perspectives . . . . .	71
2.9 Application à la simulation du remplissage 3D . . . . .	71
Bibliographie . . . . .	73
<b>3 R-adaptation</b>	<b>77</b>
3.1 Introduction . . . . .	79
3.2 Revue bibliographique . . . . .	79
3.3 Le problème statique . . . . .	85
3.4 Le problème dynamique . . . . .	96
3.5 Conclusion . . . . .	107

Bibliographie . . . . .	111
<b>4 Applications</b>	<b>115</b>
4.1 Comparaisons expérience/simulation . . . . .	117
4.2 Calculs multi-fluides . . . . .	120
4.3 Injection de pièces minces . . . . .	124
Bibliographie . . . . .	136
<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

# Introduction générale

Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés mathématiquement *via* des équations différentielles exprimant généralement des lois de conservation, de comportement et autres principes physiques connus. On ne peut, le plus souvent, trouver une solution exacte à ces problèmes aux équations différentielles. On cherche alors des solutions approchées comme celles issues des méthodes de discrétisations propres à l'analyse numérique (méthodes des différences finies, des éléments finis ou des volumes finis). Cette méthodologie est à l'origine du développement important de la simulation numérique depuis la fin des années soixante.

## L'essor des calculs tridimensionnels

Pendant plus de trente ans, les outils de simulation basés sur ces méthodes de discrétisation étaient restreints à des calculs bidimensionnels en espace. Puis les calculs tridimensionnels sont peu à peu apparus pour, aujourd'hui, devenir parfois incontournables. Cette chronologie est la conséquence logique de l'amélioration des méthodes numériques d'une part et de l'extraordinaire augmentation de la « puissance de calcul » des ordinateurs d'autre part. Parallèlement, la culture scientifique liée à l'utilisation de ces nouveaux outils de calcul s'est enrichie petit à petit. Les utilisateurs, qu'ils appartiennent au monde scientifique ou industriel, savent aujourd'hui en tirer pleinement profit et extraire toute information pertinente d'un résultat de simulation. Ils participent de ce fait à leur développement en créant une demande pour augmenter le réalisme des simulations. Pour répondre à cette demande il a fallu le plus souvent passer d'un cadre bidimensionnel à une approche complètement tridimensionnelle. Aujourd'hui cette demande est assez largement couverte puisqu'il existe de nombreux logiciels de simulation qui couvrent un large spectre d'applications (calcul de structures, de mécanique des fluides ou de mise en forme des matériaux).

Mais, en dépit de la croissance exponentielle de la puissance des moyens de calcul, la maîtrise du coût de calcul nécessaire pour réaliser une simulation reste un enjeu majeur pour l'ingénieur. C'est dans ce contexte de la maîtrise des coûts de calculs que s'inscrivent mes travaux de thèse et plus particulièrement dans le cadre des calculs sur des domaines aux grands rapports de forme ou la simulation de phénomènes caractérisés par une forte anisotropie dans l'espace.

---

## Les enjeux du calcul 3D pour le procédé d'injection des pièces minces

La principale application à laquelle se destine notre travail est la simulation du procédé d'injection des thermoplastiques. Le moulage par injection des polymères est un procédé de mise en forme cyclique permettant la production en grandes séries de pièces complexes aux tolérances dimensionnelles strictes. Ce procédé est l'un des modes de transformation majeurs de l'industrie plasturgique avec l'extrusion (production de câbles, tubes, profilés, films, ...) et le soufflage de gaine (sacs, films, ...). Il permet la production d'une grande variété de pièces qui peuplent notre univers quotidien : égoutoir à vaisselle, mobilier de jardin, chaussure de skis, jouets ou encore pièces automobiles (carrosserie ou mécanique). Cette énumération met en évidence une caractéristique commune à ces objets : il s'agit de géométries de type « coque mince ». Ceci a naturellement conduit au développement de codes de simulation bidimensionnels pour modéliser la production de ces pièces. Nous le verrons plus loin, ces codes sont aujourd'hui massivement utilisés. Néanmoins cette approche ne demeure qu'une approximation d'un procédé qui est caractérisé par des effets tridimensionnels. Tout d'abord, les géométries peuvent présenter localement des zones volumiques (patte de fixation sur un pare-chocs automobile par exemple) susceptibles de perturber notablement l'écoulement. De plus, lors de la phase de remplissage, la matière subit une histoire thermo-mécanique complexe : le refroidissement imposé par les parois du moule influe l'écoulement de façon importante. Il convient donc de pouvoir rendre compte suffisamment précisément du champ de température dans l'épaisseur de la pièce. Enfin, pendant cette même phase de remplissage, le front de matière qui balaye l'ensemble de la cavité est alimenté en matière par l'effet fontaine qui est un phénomène intrinsèquement volumique.

Tous ces arguments ont conduit une part grandissante de la communauté scientifique intéressée par le sujet à développer des outils de simulation tridimensionnels. La qualité des résultats obtenus fait qu'aujourd'hui ces approches connaissent un essor rapide dans le secteur industriel, essor facilité par l'augmentation de production de pièces volumiques par injection.

Néanmoins, la majeure partie de la production de pièces injectées reste constituée de pièces minces. Il est donc paru naturel à une partie de cette communauté scientifique de développer une solution logicielle qui associe une modélisation bidimensionnelle dans les zones minces et une modélisation tridimensionnelle dans les zones volumiques ou au voisinage de singularités de l'écoulement. Notre démarche, bien que motivée par les mêmes raisons, est légèrement différente puisque nous nous proposons d'adopter une résolution complètement tridimensionnelle du problème avec la contrainte de ramener les coûts de calcul dans les parties minces au même ordre de coût que celui d'un calcul 2D. Comme nous le verrons, le principal outil que nous utiliserons pour cela sera l'utilisation de *maillages anisotropes*. La notion de maillage anisotrope sera ici associée à une étude sur *l'estimation d'erreur*, étude nécessaire pour démontrer et contrôler notre approche. Puis nous exposerons une nouvelle méthode d'*adaptation de maillage* dédiée à l'amélioration de la précision du calcul au niveau des zones singulières que sont le front de matière et les zones de contact (matière/matière et matière/moule). Cette méthode devra pouvoir traiter indifféremment les zones minces ou épaisses et doit participer à l'amélioration du rapport coût/précision de calcul. Enfin, nous concluons notre étude par un certain nombre d'applications académiques ou industrielles démontrant les avantages procurés par notre approche.

Mais auparavant, nous allons présenter plus précisément le procédé d'injection et les

---

méthodes qui sont aujourd'hui les plus fréquemment employées pour modéliser ce procédé de mise en forme.



## Chapitre 1

# La simulation du procédé d'injection des thermoplastiques



## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Le procédé d'injection</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1.1	L'injection classique . . . . .	3
1.1.2	Injection assistée gaz . . . . .	4
<b>1.2</b>	<b>La modélisation du procédé d'injection</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>1.3</b>	<b>La simulation du procédé d'injection</b> . . . . .	<b>7</b>
1.3.1	Approche 1,5 <i>D</i> . . . . .	7
1.3.2	Les modèles bidimensionnels . . . . .	8
	a) Les modèles 2 <i>D</i> couche mince . . . . .	8
	b) Les modèles bidimensionnels dans l'épaisseur . . . . .	9
1.3.3	L'approche volumique . . . . .	9
<b>1.4</b>	<b>Algorithmes de résolution</b> . . . . .	<b>15</b>
1.4.1	Algorithme d'Uzawa . . . . .	15
1.4.2	Méthodes itératives de résidu minimal . . . . .	16
1.4.3	Conclusion . . . . .	18
<b>1.5</b>	<b>Couplage 2D/3D</b> . . . . .	<b>18</b>
1.5.1	Étude bibliographique - État de l'art . . . . .	18
1.5.2	Commentaires . . . . .	21
<b>1.6</b>	<b>Démarche adoptée et principes retenus</b> . . . . .	<b>22</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>23</b>

---

## 1.1 Le procédé d'injection

Le procédé d'injection des thermoplastiques permet de produire des pièces aux formes complexes à des cadences élevées tout en respectant des tolérances géométriques strictes. La bonne capacité de ce procédé de transformation à la production de masse est très attrayante et l'a amené à étendre ses domaines d'applications initiaux. Ainsi de nombreuses variantes se sont développées dont les plus connues sont l'injection multi-fluides, l'injection assistée gaz ou l'injection compression.

### 1.1.1 L'injection classique

Le moulage par injection est un procédé de mise en forme cyclique qui se décompose en 4 phases (fig. 1.1) :

- la plastification ;
- le remplissage ;
- le compactage ;
- le refroidissement.

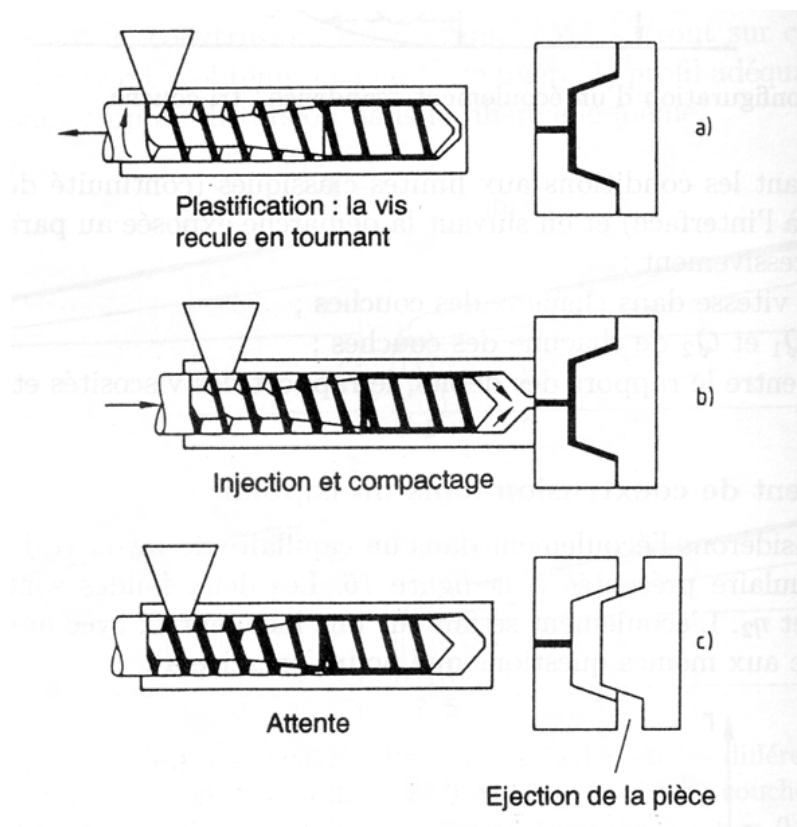


FIG. 1.1 – Description du procédé d'injection (*tiré de [Agassant et al. 96]*).

Lors de la phase de *plastification*, le polymère introduit dans la presse sous forme de granules est peu à peu fondu et convoyé vers la tête de la vis. L'énergie nécessaire à la plastification est obtenue à la fois par l'action mécanique du cisaillement des granules par la vis et par l'apport thermique du fourreau de vis qui est maintenu à haute température (de  $200^{\circ}C$  à  $300^{\circ}C$ ).

Le polymère fondu est donc acheminé en tête de vis où il occupe un volume créé par le recul progressif de la vis. Une fois que ce volume atteint la valeur nécessaire au remplissage du moule d'injection, la vis arrête son recul et avance à vitesse constante (et élevée). Sous la forte pression résultante, le polymère fondu est chassé du système vis/fourreau et remplit la ou les empreintes du moule. C'est la phase de *remplissage*.

Suite au rapide remplissage de l'empreinte, le système de refroidissement du moule régulé à basse température (de  $20^{\circ}C$  à  $30^{\circ}C$ ) va permettre de figer la pièce thermoplastique. Ce changement de phase s'accompagne d'une variation de volume de la pièce. Pour compenser d'éventuels retraits géométriques et des variations de densité volumique, on maintient une forte pression d'injection pour *compacter* la matière.

Lorsque les seuils d'injection qui font la jonction entre le moule et le système vis/fourreau ont eux-mêmes figés, les deux sous ensembles de la presse à injecter sont désolidarisés et la pièce est éjectée du moule. Le *refroidissement* complet de la pièce produite se fait à l'air libre.

Cette présentation succincte du procédé ne permet pas de rendre compte des difficultés certaines qui existent dans la mise au point du cycle complet d'injection. Le lecteur pourra d'ailleurs s'en convaincre en parcourant l'abondante bibliographie consacrée à ce procédé ([Agassant et al.96] et [Trotignon et al.96]). On remarquera toutefois qu'il est caractérisé par une histoire thermomécanique complexe avec d'importantes variations de températures, de forts cisaillements et de fortes pressions. En particulier, les variations de volume obtenues lors du refroidissement constituent une difficulté technique pour obtenir des pièces qui respectent une géométrie souhaitée. C'est pour cette raison que la production de pièces injectées est principalement constituée de pièces minces dont le refroidissement est plus homogène et plus facilement contrôlable. Un outil de simulation utile à un utilisateur de presse à injecter ou à un concepteur de moules doit donc permettre de traiter ces géométries minces pour les aider à définir le bon jeu de paramètres du cycle d'injection.

Nonobstant cette limitation, diverses variantes de ce procédé ont vu le jour. L'injection multi-matières (ou co-injection) permet d'injecter séquentiellement deux matériaux dans le même moule et ainsi conjuguer leurs caractéristiques (un pour la tenue mécanique, l'autre pour l'aspect par exemple). L'injection compression consiste à injecter une certaine quantité de polymère fondu au fond du moule « entrouvert » et à terminer le remplissage de l'empreinte en fermant le moule. Cette technologie peut permettre de minimiser la taille du système vis-fourreau et offre des possibilités particulières pour l'orientation de fibres dans le cas de polymères chargés. Enfin, l'injection assistée gaz permet de limiter les retraits liés au refroidissement dans les zones volumiques.

### 1.1.2 Injection assistée gaz

Nous ne présenterons ici ce procédé que succinctement et de façon imagée. Pour une description plus détaillée du procédé et de sa simulation, on pourra se référer à [Daboussy00].

L'injection assistée gaz peut se décomposer en deux étapes : dans un premier temps le polymère fondu est injecté de façon classique dans la cavité du moule. Cette phase de remplissage est stopée avant que le polymère n'occupe toute la cavité. Puis un gaz est injecté sous pression (le plus souvent par le même seuil d'injection que le polymère, fig. 1.2) pour terminer le remplissage. Cette technique permet à la fois de diminuer les retraits liés au refroidissement du polymère (et principalement dans les zones volumiques, nervures, . . .)

et nécessite une presse à injecter moins puissante (le compactage est obtenu par l'injection de gaz).

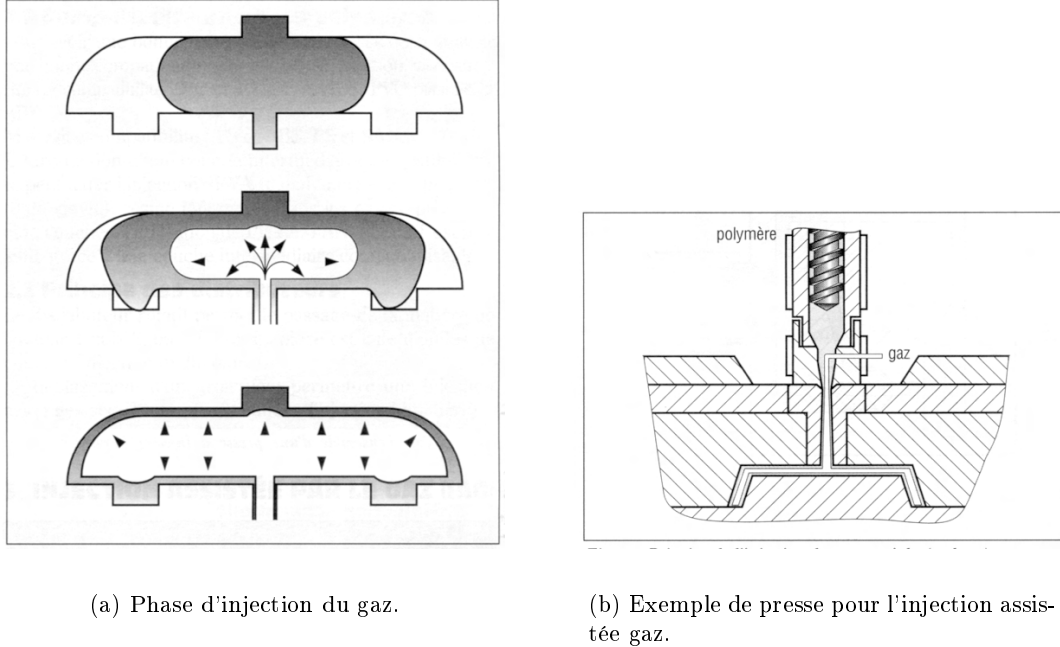


FIG. 1.2 – Description de l'injection assistée gaz (tiré de [Trotignon et al.96]).

Par nature, le gaz va occuper les zones les plus épaisses qui n'ont pas eu le temps de se solidifier. Les interfaces entre le gaz et le polymère sont caractérisées par des formes volumiques complexes. Nous verrons plus loin dans cette étude comment notre méthode d'adaptation de maillage peut améliorer la localisation de ces interfaces.

## 1.2 La modélisation du procédé d'injection

Un polymère fondu est assimilable à un milieu continu, aussi son écoulement dans un moule est régi par les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus. La matière injectée doit donc vérifier :

- la conservation de la masse ;
- la conservation de la quantité de mouvement ;
- la conservation d'énergie.

Ces principes se traduisent mathématiquement, respectivement, par :

$$- \text{l'équation de continuité :} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \quad (1.1)$$

$$- \text{l'équation de l'équilibre dynamique :} \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \vec{f} \quad ; \quad (1.2)$$

$$- \text{l'équation de conservation de l'énergie :} \quad \rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{\omega}. \quad (1.3)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique,  $\vec{v}$  la vitesse d'une particule matérielle,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\vec{f}$  la densité massique des forces extérieures,  $e$  l'énergie spécifique interne,  $\vec{q}$  le

flux de chaleur et  $\dot{\omega}$  l'apport d'énergie par dissipation visqueuse<sup>1</sup>.

Le système (1.1)-(1.2) est fermé par la relation constitutive entre contraintes et déformations donnée par la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{s} - p\mathbf{I} \quad (1.4)$$

avec :

$$\boldsymbol{s} = 2\eta (|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) \quad (1.5)$$

où  $\eta$  représente la viscosité du fluide,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})$  le tenseur des vitesses de déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{v} + {}^T \nabla \vec{v} \right) \quad (1.6)$$

et  $|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})|$  est le taux de cisaillement généralisé :  $|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})| = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2(\vec{v})}$ .

La grande majorité de la communauté scientifique attachée à l'étude de l'injection des polymères simplifie ce problème en s'appuyant sur les deux hypothèses suivantes :

- le polymère fondu peut être considéré comme un matériau incompressible ;
- les forces extérieures (forces de masse et d'inertie) sont négligeables devant les forces intérieures (forces visqueuses).

Ce dernier point est tout a fait acceptable au regard des ordres de grandeurs des valeurs caractéristiques du procédé d'injection :

		Unité	Ordre de grandeur
Géométrie	Longueur	[m]	0,1-1
	Largeur	[m]	0,1-1
	Épaisseur	[m]	0,001-0,01
Matériau	Densité	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000
	Viscosité	[Pas]	100-1000
Variables	Vitesses	[m/s]	0,1-1
	Pression	[N/m <sup>2</sup> ]	10 <sup>7</sup> -10 <sup>8</sup>

Cependant, si ces hypothèses sont licites dans le cadre de la phase de remplissage du procédé d'injection, elles peuvent ne plus l'être dès que l'on s'intéresse à des applications plus complexes ou que l'on souhaite prendre en compte des phénomènes plus fins. Ainsi :

- l'introduction de la compressibilité permet de mieux rendre compte de la fin du remplissage et de faciliter l'enchaînement avec la phase de compactage. D'autre part, certaines applications de l'injection, telles le procédé MIM (Metal Injection Molding), font intervenir des matériaux dont la caractéristique compressible n'est pas négligeable.
- les forces d'inertie peuvent localement avoir une incidence sur l'écoulement (cf. [Magnin94] p. 156-174).

---

<sup>1</sup>Les effets thermiques influencent notablement le procédé d'injection (voir [Yokoi et al.92]). Notre étude ne traite pas de la résolution de ce problème même si la plupart des applications que nous exposerons tiennent compte des effets thermiques. Sur ce sujet du couplage thermo-mécanique pour l'injection on pourra se référer à [Coupez et al.98]).

Nous ferons abstraction de ces deux remarques en n'étudiant que la phase de *remplissage* du procédé d'injection et en supposant ne pas avoir d'effet local de l'inertie. Donc l'on s'en tient aux hypothèses décrites plus haut, les équations de conservation de la masse et d'équilibre se réécrivent :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.8)$$

Notons  $\Omega$  le domaine matériel contenant le polymère fondu. Si l'on remplace  $\boldsymbol{\sigma}$  par son expression dans le système (1.8)-(1.7), on montre que le problème d'écoulement à résoudre se ramène à un problème de STOKES GÉNÉRALISÉ : trouver  $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$  et  $p(\mathbf{x}, t)$  tels que  $\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [t_o, t]$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (2\eta(|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})) - \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

avec comme conditions aux limites :

- sur  $\Gamma_{in}$  vitesse et pression sont imposées :  $\vec{v} = \vec{v}_d(\mathbf{x})$  (pour la vitesse),  $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{0}$  et  $(\boldsymbol{\sigma}\vec{n}) \cdot \vec{n} = -p_d$  (pour la pression),
- sur  $\Gamma_{pa}$  on impose un contact collant :  $\vec{v} = \vec{0}$ .

où  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_{pa}$  désignent respectivement les morceaux de frontière du domaine correspondant à la(es) zone(s) d'injection et à la zone de contact avec les parois du moule d'injection (avec  $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{pa} = \partial\Omega$ ), et  $\vec{n}$  désigne la normale sortante au point frontière considéré.

REMARQUE : pour être tout à fait exact, il faut rajouter une condition de surface libre dans les conditions aux limites :  $\boldsymbol{\sigma}\vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_{libre}$  (avec  $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{pa} \cup \Gamma_{libre}$ ). Cette surface libre est l'interface entre la partie remplie du moule d'injection et le vide en avant de cette partie remplie. Dans le cas d'une approche eulérienne, [Coupez et al.98] montrent que l'on peut faire disparaître la condition de surface libre en étendant les équations de STOKES à la partie vide elle-même (où seront imposées une vitesse et une pression nulles). Ceci permet de se ramener à la résolution d'un problème de STOKES confiné, c'est à dire à des conditions aux limites sur la vitesse uniquement (condition aux limites type DIRICHLET). Le problème ainsi écrit est bien posé et plus facile à résoudre.

Le système (1.9) définit donc la *modélisation mathématique* communément employée pour traiter le problème du remplissage des polymères fondus. Voyons maintenant les principales méthodes numériques qui ont été développées pour résoudre ce problème.

## 1.3 La simulation du procédé d'injection

### 1.3.1 Approche 1, 5D

Les premières simulations ont été développées sur une modélisation plus simplifiée que celle que nous proposons. S'appuyant sur le fait que les géométries des moules d'injection présentent de faibles épaisseurs par rapport aux autres dimensions et que ces épaisseurs présentent de faibles variations, il est possible d'appliquer les approximations de la *lubrification hydrodynamique*. Ces approximations (cinématiques) consistent à supposer que les termes d'élongation sont petits devant les termes de cisaillement et que la pression est

uniforme dans l'épaisseur de l'écoulement. L'approche  $1,5D$  consiste à choisir le repère  $(O, x, y, z,)$  tel que l'axe  $(Oz)$  caractérise l'épaisseur et à supposer que l'écoulement est **unidirectionnel** (suivant l'axe  $(Ox)$  par exemple), le système (1.9) se réduit alors à :

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 u}{dz^2} \quad , \quad (1.10)$$

dans le cas d'un fluide newtonien. Cette équation peut être simplement résolue dans le cas de géométries simples dont le remplissage est caractérisé par un écoulement unidirectionnel (disque, plaques parallèles, cône, ...). Pour pouvoir prédire le remplissage de géométries plus complexes avec l'approche  $1,5D$ , on décompose la géométrie complexe en un réseau de sous-géométries élémentaires. Le calcul est donc effectué sur chaque géométrie élémentaire, la pression est transmise entre chacune des géométries et la répartition du débit est calculée à chaque bifurcation et à chaque pas de temps.

L'avantage de cette méthode est d'être extrêmement économique en coût calcul. Mais la mise à plat de la géométrie du moule en un réseau de géométries élémentaires est un travail long et délicat. En outre, la non unicité de cette décomposition nécessite une bonne connaissance du procédé de la part de l'utilisateur.

### 1.3.2 Les modèles bidimensionnels

#### a) Les modèles $2D$ couche mince

Les modèles  $2D$  couche mince, aussi appelés modèles  $2,5D$  ou modèles de *Hele-Shaw*, ont été développés pour généraliser les méthodes  $1,5D$ . Ces modèles reprennent les approximations de la lubrification hydrodynamique et les appliquent à des écoulements bidimensionnels. Ainsi, dans le cas d'un fluide newtonien, le système (1.9) peut se réduire (après intégration) à l'équation de Hele-Shaw :

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = 0 \quad (1.11)$$

où  $h$  représente l'épaisseur de l'écoulement.

C'est sur cette modélisation que repose la grande majorité des codes de simulation du procédé d'injection actuels. Le champ de vitesse est obtenu à partir du champ de pression calculé par intégration (équation d'équilibre). Les méthodes numériques utilisées pour résoudre l'équation en pression dans le plan sont variées (différences finies, volumes ou éléments finis) et celles retenues par les acteurs majeurs dans ce domaine sont suffisamment performantes pour rendre compte fidèlement de la physique du procédé. De nombreuses variantes ont été développées à partir de ce formalisme : calculs thermomécaniques et prise en compte de la viscosité des matériaux injectés permettent par exemple d'affiner les résultats ([Brincat et al.99], [Zheng et al.99], [Tanguy et al.91]). Néanmoins, certaines limitations persistent. La première est naturellement la contrainte de se restreindre aux cas qui ne mettent pas en défaut les approximations de la lubrification hydrodynamique. La seconde, pénalisante dans le cas d'une utilisation industrielle, est la difficulté à choisir et définir la *fibres neutre* (demi-épaisseur) sur laquelle on va effectuer le calcul. Enfin, ce type de simulation ne permet pas de représenter correctement l'écoulement au niveau du front de matière (ce qui peut être très pénalisant si l'on s'intéresse à des procédés particuliers tels que l'injection de polymères chargés en fibres dont l'écoulement au front de matière détermine l'orientation des fibres).

Des modèles dédiés à l'étude de l'écoulement dans son épaisseur ont été développés pour répondre à cette dernière limitation.

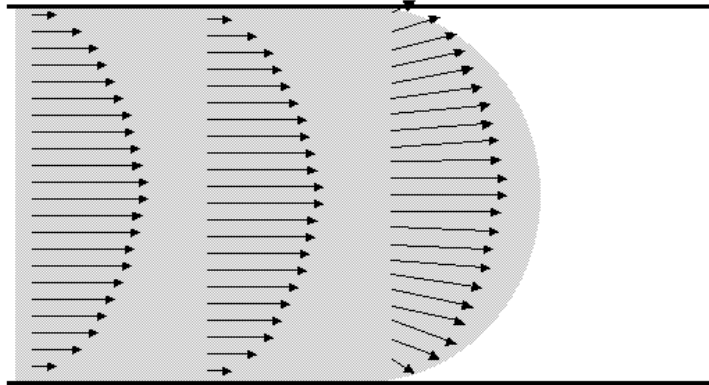


FIG. 1.3 – Représentation du champ de vitesse dans un écoulement de Poiseuille et dans le repère du laboratoire. Variation de l'orientation du champ de vitesse au front de matière.

### b) Les modèles bidimensionnels dans l'épaisseur

Les deux dimensions considérées sont la direction principale de l'écoulement et l'épaisseur. L'objectif est de décrire plus précisément la cinématique au niveau des seuils, des nervures et plus particulièrement au front de matière, siège de l'*effet fontaine* (voir fig. 1.3), effet caractéristique du mode de remplissage de la cavité d'injection.

Ces modèles reposent sur des hypothèses de symétries (dans des plans perpendiculaires à la fibre neutre) ou d'axisymétrie. Le système (1.9) est alors simplifié suivant ces hypothèses et résolu par des méthodes de type volumes ou éléments finis ([Ding et al.97], [Magnin94]). Les résultats produits apportent une connaissance fine de la cinématique de l'écoulement dans l'épaisseur et au front de matière. Cette connaissance est importante par exemple pour déterminer les vitesses de cristallisation des matériaux injectés ([Vintimiglia99]) ou l'orientation des fibres dans le cas d'injection de polymères chargés.

Ces deux modélisations bidimensionnelles apportent donc des réponses de nature différentes au concepteur de moules d'injection. Dans le contexte industriel actuel on est de plus en plus souvent amené à prendre en compte ces deux problématiques. On souhaite d'une part connaître le scénario du remplissage (répartition des flux, position des lignes de ressoudures, ...) et contrôler d'autre part l'écoulement autour des zones sensibles (nervures, inserts) ainsi que les échanges thermiques. Enfin rappelons que si ces approches sont le plus souvent peu coûteuses en temps calcul, les temps de conception et de mise en données peuvent être importants (définition de la fibre neutre). Ainsi, une approche volumique traitant « directement » les équations (1.9) peut s'avérer concurrentielle puisqu'elle permet de s'affranchir de toutes les hypothèses mentionnées ci-dessus : le temps de mise en données peut être réduit et la solution pleinement  $3D$ . Avec cette approche, l'essentiel des efforts doit porter sur la maîtrise des coûts de calculs.

### 1.3.3 L'approche volumique

Dans la suite de ce document, si l'écriture des formulations faibles continue et discrète s'applique au problème de STOKES GÉNÉRALISÉ, il est à noter que les méthodes de



résolution numérique se rapportent au problème de STOKES (à viscosité constante). En effet, si celui-ci n'est qu'un cas particulier du problème non linéaire qu'est le problème de STOKES GÉNÉRALISÉ, il peut être considéré comme problème de référence pour le choix et l'étude des schémas numériques (ceux-ci s'étendant au problème généralisé de façon « naturelle », voir [Coupez96]). À titre d'information, on notera que [Baranger et al.90] ont étudié le cas d'écoulement de fluides obéissant à la loi puissance ou à la loi de Carreau.

D'autre part, nous nous limiterons à la description de méthodes *éléments finis* pour la résolution de ce problème. Cela ne signifie nullement que ce sont les seules qui soient adaptées au problème de Stokes : la méthode des volumes finis est par exemple largement répandue car proche de la physique et permettant une implémentation simple de lois physiques complexes. Elle devient cependant délicate à manipuler dans des géométries complexes. D'autres méthodes telle que la méthode des éléments frontières n'ont pas, à ce jour, atteint le potentiel des méthodes éléments finis (voir l'étude de [Khayat et al.95] qui utilise les éléments frontières sur des cas tridimensionnels de petites dimensions.) Mais la raison principale pour laquelle nous nous restreignons aux méthodes éléments finis tient à leur « assise » théorique qui nous sera utile pour définir un estimateur d'erreur pour le problème de Stokes.

Plus précisément, nous nous concentrerons sur les méthodes éléments finis dites « méthodes mixtes », c'est à dire où les champs de vitesse et de pression sont déterminés simultanément. Comme le rappelle [Arnold90] dans un article qui traite des avantages et inconvénients des méthodes mixtes pour les problèmes elliptiques, il est aujourd'hui admis que ces méthodes sont les plus appropriées pour traiter les problèmes de type STOKES. Mais, si du point de vue théorique leur « supériorité » est avérée, il n'en reste pas moins qu'elles sont encore relativement peu employées. L'approche qui consiste à traiter le terme d'incompressibilité par pénalisation (voir [Hughes et al.79]) se rencontre encore fréquemment. Si certains auteurs la présentent comme une méthode mixte (de part sa formulation faible), son principe repose sur la dissociation des résolutions en vitesse et en pression (en faisant disparaître la dépendance en pression dans l'équation de conservation de l'équilibre). Mais cette méthode a plusieurs inconvénients surtout lorsque l'on s'intéresse à des cas tridimensionnels :

- il est nécessaire d'avoir recourt à une technique de sous intégration pour le terme d'incompressibilité et ce afin d'éviter le « locking effect » (c.a.d. l'utilisation de tous les degrés de liberté pour n'imposer que l'incompressibilité, voir [Coupez91]). Or la sous intégration pose un problème de consistance (la condition relaxée approche-t-elle la condition exacte ?) et de stabilité au niveau des schémas de résolution numérique.
- le système matriciel du problème pénalisé (obtenu après application du principe des puissances virtuelles) est mal conditionné pour être traité par un solveur itératif.

Ce sont ces quelques observations qui nous ont menés à développer plus particulièrement l'aspect méthodes mixtes pour le problème de STOKES. Une méthode mixte, comme toute méthode éléments finis, requiert le choix d'une discrétisation (ici deux discrétisations, une pour la vitesse l'autre pour la pression). Ce choix est délicat et crucial pour la résolution du problème. En effet, il faut s'assurer que la solution discrétisée converge bien vers la solution du problème initial mais aussi que le système matriciel engendré par cette discrétisation peut être traité de manière efficace. Il s'agit donc d'un « double choix » discrétisation-algorithme de résolution, et c'est sur ce point sans doute qu'il faut être le plus attentif.

Par la suite , ces deux aspects (discrétisation-résolution) sont exposés séparément, mais nous essaierons de mettre en lumière les dépendances qui peuvent exister entre ces deux problèmes.

**Les méthodes mixtes** Les méthodes mixtes en tant que méthodes éléments finis nécessitent une écriture faible des équations (formulation variationnelle).

**Formulation faible continue** La formulation faible des équations mixtes vitesse-pression (1.9) s'obtient en effectuant le produit scalaire (au sens  $L^2$ ) par des fonctions test  $\vec{v}^*$  et  $p^*$ . Après application du théorème de la divergence et prise en compte des conditions aux limites en contrainte, le problème variationnel à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\vec{v}, p) \text{ tel que } \forall (\vec{v}^*, p^*) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \\ & \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} 2\eta (|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_{in}} p_d \vec{v}^* \cdot \vec{n} d\Gamma \\ - \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \vec{v} d\Omega &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.12) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= (H_1^1(\Omega))^3 = \left\{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 ; \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_{pa}, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_{in} \right\} \\ \mathcal{Q} &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de la solution<sup>2</sup> pour ce problème sont obtenues sous les conditions du théorème de Brezzi ([Brezzi et al.91]). Dans le cas continu, Brezzi et Baranger ont respectivement montré que les problèmes de STOKES et de STOKES GÉNÉRALISÉ vérifient ces conditions (*i.e.* pour un comportement newtonien [Brezzi et al.91] et pour un comportement pseudo-plastique [Baranger et al.90]).

REMARQUE : la formulation faible de la méthode de pénalisation s'écrit :

$$\int_{\Omega} 2\eta (|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}^*) d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \nabla \cdot \vec{v}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} p_d \vec{v}^* \cdot \vec{n} d\Gamma$$

par rapport au système (1.12), l'équation sur l'incompressibilité disparaît et le terme en pression de la première équation est remplacé par :  $\alpha \nabla \cdot \vec{v}$ . Plus  $\alpha$  est grand, plus on impose l'incompressibilité.

**Formulation faible discrétisée** La discrétisation par éléments finis du problème de STOKES GÉNÉRALISÉ (1.9) consiste à calculer la solution de sa formulation variationnelle (1.12) non plus dans les espaces continus  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Q}$  (de dimension infinie) mais dans des sous-espaces d'approximations de dimension finie  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ .

Ces sous-espaces d'approximations  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  sont définis sur une triangulation  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  du domaine  $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} K$ . À chaque élément  $K$  de la triangulation, nous associons des fonctions de base (ou fonctions d'interpolation) pour approcher  $(\vec{v}, p)$ . Le choix des fonctions de base est important et doit nous assurer que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q} \quad (1.14)$$

<sup>2</sup>à une constante additive près pour la pression.

Il nous faut alors chercher la solution du problème discret suivant, correspondant à la méthode standard de Galerkin :

Trouver  $(\vec{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  tel que  $\forall (\vec{v}_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta (|\varepsilon(\vec{v}_h)|) \varepsilon(\vec{v}_h) : \varepsilon(\vec{v}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} p_d \vec{v}_h^* \cdot \vec{n} d\Gamma \\ - \int_{\Omega} p_h^* \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Par abus de notation, nous définissons les intégrales sur le domaine  $\Omega$ , mais ces intégrales sont évaluées sur le domaine discrétisé  $\mathcal{T}_h(\Omega)$ .

La difficulté consiste à présent à choisir  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ , autrement dit les fonctions d'interpolation associées respectivement aux inconnues en vitesse et en pression, de sorte que le problème (1.15) admette au moins une solution. L'analogie discret du théorème de Brezzi permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution discrète si la condition de compatibilité dite de BREZZI-BABUSKA est satisfaite. Cette condition de compatibilité entraîne que les sous-espaces  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  ne peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre. Cette condition s'écrit :

$$\inf_{p_h \in \mathcal{Q}_h - \{0\}} \sup_{\vec{v}_h \in \mathcal{V}_h - \{0\}} \frac{\int_K p_h \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega}{\|p_h\|_{\mathcal{Q}_h} \|\vec{v}_h\|_{\mathcal{V}_h}} \geq \beta > 0 \quad \forall K : \text{elt. de la triangulation}$$

Sous cette condition, on est assuré de la convergence de la solution discrète vers la solution du problème continu (1.9) lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers 0. Plus précisément, lorsque la condition de compatibilité est vérifiée, la convergence se fait suivant l'estimation d'erreur :

$$\|v - v_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq c h^{\min(k,l+1)}$$

avec :

$$\begin{aligned} v_h &\in P_k(K) = \{\text{f}^{ions} \text{ d'interpolation polynomiales de } d^o \leq k \text{ sur l'élément } K\} \\ p_h &\in P_l(K) = \{\text{f}^{ions} \text{ d'interpolation polynomiales de } d^o \leq l \text{ sur l'élément } K\} \end{aligned}$$

Un certain nombre de couples  $(\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$  possibles offrant un éventail d'éléments finis compatibles (ou éléments finis mixtes stabilisés) sont proposés dans la littérature. On peut séparer ces couples en deux familles selon qu'ils s'appuient sur une discrétisation continue ou discontinue de la pression :

- *pression discontinue* : cette discrétisation s'avère efficace dans le cadre bidimensionnel et de l'utilisation de solveurs directs (voir [Fortin et al.85]). En effet, le fait que la pression soit discontinue entraîne une augmentation de la taille de  $\mathcal{Q}_h$  par rapport au cas continu, car il faut alors associer plusieurs inconnues à un même nœud. Il faut donc augmenter aussi la taille de  $\mathcal{V}_h$  pour respecter la condition de compatibilité ce qui augmente le coût de calcul (sans amélioration de la qualité du résultat). D'autre part, le conditionnement de la matrice de raideur obtenue avec cette discrétisation n'est pas bon pour l'utilisation de solveurs itératifs ce qui nécessite d'avoir recours à des solveurs directs. Ces limitations deviennent rédhibitoires dès que l'on s'intéresse à des cas tridimensionnels comme le remarquent [Haagh et al.97] qui utilisent cette méthode pour simuler un procédé d'injection assistée gaz. (L'élément dit « Crouzeix-Raviart » ( $P_2 + /P_1$ ) fait partie de cette famille).

- *pression continue* : comme il vient d'être dit, cette discrétisation aboutit à un système matriciel plus petit et donc mieux adapté au 3D. De plus elle se prête bien aux résolutions itératives ce qui est un avantage considérable car un solveur itératif est plus efficace qu'un solveur direct pour le traitement de gros cas.

Le tableau ci-dessous, tiré de [Coupez96], montre bien l'intérêt qu'il y a, dans  $\mathbb{R}^3$ , à choisir une discrétisation continue de la pression. La dernière colonne de ce tableau permet d'évaluer la taille du système matriciel obtenu en fonction du nombre de nœuds de la discrétisation. Les éléments présentés vérifient tous la condition de BREZZI-BABUSKA et sont, dans tous les cas, les moins coûteux (en terme de taille du système matriciel) pour un ordre de d'interpolation donné.

	ordre d'interpolation			inconnues par			total $\times N$
	v	p	v et p	nœud	arête	face	
$P1 + /P1_{cont.}$	1	1	$O(h)$	4	0	0	4
$P2/P1_{cont.}$	2	1	$O(h^2)$	4	3	0	22
$R1 + +/P0_{disc.}$	1	1	$O(h)$	3	0	1	13
$P2 + /P1_{disc.}$	2	1	$O(h^2)$	3	3	1	31

(sachant que dans un maillage tridimensionnel, il y a environ six fois plus d'arêtes que de nœuds, et dix fois plus de faces que de nœuds)

Ainsi nous sommes naturellement amenés à privilégier les éléments compatibles à pression continue : le MINI-élément ( $P_1 + /P_1$ ) et la famille des éléments  $P_{k+1}/P_k$ . Ces deux éléments sont ceux qui, pour un ordre d'erreur donné, requièrent le moins de ressources mémoires. Du point de vue de la résolution du système matriciel, nous avons déjà remarqué que ce type d'éléments est lié à l'utilisation de solveurs itératifs ; nous verrons plus loin les conséquences (avantageuses) qui en résultent.

**Le MINI-élément** L'élément  $P_1 + /P_1$  ou MINI-élément, introduit par [Arnold et al.84], utilise une interpolation linéaire en vitesse et en pression. Mais afin de satisfaire la condition de compatibilité, l'interpolation en vitesse est enrichie par une fonction « bulle »

Généralement, la fonction « bulle » est un polynôme de degré 4 s'annulant sur la frontière de l'élément. [Coupez91] en propose une variante : la bulle pyramidale. La fonction bulle est nulle sur la frontière de l'élément et affine par morceau sur les quatre sous-tétraèdres internes à l'élément. Les sous-espaces d'approximation  $(\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$  s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= V_h \oplus B_h \\ \text{où } V_h &= \left\{ \vec{v}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3 ; \vec{v}_h|_K \in (P_1(K))^3 \right\} \\ B_h &= \left\{ \vec{b}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3 ; \vec{b}_h = \vec{0} \text{ sur } \partial K \text{ et } \vec{b}_h|_{K_i} \in (P_1(K_i))^3, i = 1, \dots, 4 \right\} \\ \mathcal{Q}_h &= \{ p_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) ; p_h|_K \in P_1(K) \} \end{aligned}$$

avec :

- $(K_i)_{i=1,\dots,4}$  : la décomposition du tétraèdre  $K$  en quatre sous-tétraèdres partageant le centre du tétraèdre pour sommet.
- $P_1(K)$  : l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur l'élément  $K$ .

L'erreur d'approximation de cet élément est en  $O(h)$ .

Le problème discret associé au problème de STOKES GÉNÉRALISÉ s'écrit de la façon suivante :

Trouver  $(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) \in V_h \times B_h \times Q_h$  tel que  $\forall (\vec{v}_h^*, \vec{b}_h^*, p_h^*) \in V_h \times B_h \times Q_h$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta (|\varepsilon(\vec{v}_h)|) \varepsilon(\vec{v}_h) : \varepsilon(\vec{v}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} p_d \vec{v}_h^* \cdot \vec{n} d\Gamma \\ \int_{\Omega} 2\eta (|\varepsilon(\vec{v}_h)|) \varepsilon(\vec{b}_h) : \varepsilon(\vec{b}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{b}_h^* d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} p_h^* \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega - \int_{\Omega} p_h^* \nabla \cdot \vec{b}_h d\Omega = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

REMARQUE : Les deux premières équations ont pu être découplées grâce aux propriétés de la fonction bulle  $\vec{b}_h$  montrées par [Coupez96], à savoir :

- $\vec{b}_h$  s'annule sur la frontière des éléments de la discrétisation,
- $\int_K \nabla \vec{v}_h : \nabla \vec{b}_h d\Omega = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h, \forall \vec{b}_h \in B_h$

**La famille des éléments  $P_{k+1}/P_k$**  Pour ces éléments, les sous-espaces d'approximation  $(\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \left\{ \vec{v}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3 ; \vec{v}_h|_K \in (P_{k+1}(K))^3 \right\} \\ \mathcal{Q}_h &= \left\{ p_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) ; p_h|_K \in P_k(K) \right\} \end{aligned}$$

(le problème discret s'écrivant comme (1.15))

Cette famille généralise en fait l'élément *Taylor-Hood* ( $P_2/P_1$ , approximation d'ordre 2 en vitesse et d'ordre 1 en pression).

L'élément *Taylor-Hood* lui même vérifie la condition de compatibilité de Brezzi-Babuska et permet une erreur d'approximation du second ordre (en  $O(h^2)$ ) dans  $\mathbb{R}^3$  comme le montrent [Brezzi et al.91].

Cependant, ce n'est que récemment que [Boffi97] a étendu le résultat de compatibilité dans  $\mathbb{R}^3$  aux éléments  $P_{k+1}/P_k, \forall k > 1$ . Ceci peut s'expliquer par le fait qu'actuellement la tendance est d'utiliser, à précision égale, des éléments de bas ordre sur un maillage fin plutôt que des éléments coûteux sur un maillage plus grossier. L'avantage des éléments de bas ordre réside en une implémentation plus aisée et une robustesse accrue.

Il existe de nombreux autres éléments compatibles pour ces problèmes (voir [Pironneau88] qui présente les plus classiques), mais même parmi les plus récents, peu ont pu « démontrer » leur efficacité dans  $\mathbb{R}^3$ . Par exemple, la méthode mixte présentée par [Han et al.98] (identifiable à une méthode MAC (Marker And Cell)) qui s'appuie sur des éléments de bas ordre n'a pas été étendue au cas tridimensionnel ainsi qu'aux maillages non structurés. [Farhouli et al.93] présentent une méthode qui offre l'avantage de conserver localement la masse et les moments (propriété commune aux méthodes volumes finis) mais qui, elle non plus, n'a pas de pendant tridimensionnel.

Toutefois, nous ne pourrions conclure ce paragraphe sans présenter un élément encore largement employé : l'élément *Crouzeix-Raviart*.

**L'élément de *Crouzeix-Raviart* ( $P_2 + /P_1$ )** Cet élément a une discrétisation discontinue de la pression. Comme on peut le voir dans le tableau présenté précédemment, il ne présente pas un rapport optimal entre l'erreur d'interpolation et la taille du système à résoudre, mais il est encore largement utilisé. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il ne présente pas d'aussi mauvaises caractéristiques dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, dans une triangulation

plane il n'y a que deux fois plus d'arêtes que de nœuds et deux fois plus de triangles que de nœuds; le coût du système matriciel n'est donc pas prohibitif. De plus la taille des systèmes matriciels obtenus (dans  $\mathbb{R}^2$ ) est compatible avec l'utilisation de solveurs directs (eux mêmes imposés par le choix de cet élément) efficaces dans ce cas.

La première démarche entreprise par les personnes souhaitant passer à des cas tridimensionnels a donc été d'utiliser cet élément qui avait été validé dans des cas bidimensionnels. Malheureusement, en pratiquant de la sorte, on se heurte à deux difficultés : comme nous l'avons déjà dit les caractéristiques d'un maillage 3D sont différentes de celles d'un maillage 2D, et comme nous allons le voir les propriétés des solveurs itératifs se dégradent en 3D.

On peut trouver des exemples d'utilisation de cet élément dans [Haagh et al.97].

## 1.4 Algorithmes de résolution

Classiquement, le système d'équations (1.15) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^T B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

- où
- ★  $V$  est le vecteur contenant les composantes des vitesses en chaque sommet des tétraèdres,
  - ★  $P$  est le vecteur des degrés de liberté en pression,
  - ★  $A$  est la matrice symétrique associée à la forme discrète du terme :

$$a(\vec{v}_h, \vec{v}_h^*) = \int_{\Omega} 2\eta (|\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}_h)|) \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}_h^*) d\Omega$$

- ★  $B$  est associé au terme :  $b(p_h, \vec{v}_h) = - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega$
- ★ le vecteur  $F$  exprime les conditions aux limites.

Si  $H = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^T B & 0 \end{pmatrix}$ ,  $H$  a la propriété d'être symétrique mais pas définie positive ce qui empêche une résolution simple du problème. La méthode la plus répandue pour contourner ce problème consiste à utiliser l'algorithme d'UZAWA.

### 1.4.1 Algorithme d'Uzawa

Beaucoup de méthodes proposées pour résoudre le problème (1.17) sont dérivées de l'algorithme d'Uzawa, ce choix d'algorithme étant fortement lié au choix d'une discrétisation à pression discontinue.

Cet algorithme consiste à découpler le problème (1.17) en deux sous problèmes dont les matrices sont symétriques définies positives. Il s'agit donc de trouver le champ de pression tel que :

$${}^T B A^{-1} B P = {}^T B A^{-1} F$$

par une méthode de descente ( $P^{k+1} = P^k + \alpha \times (\text{contribution de } V^k)$ ), en résolvant à chaque itérations :

$$A V^k = F - B P^{k+1}$$

par une méthode directe.

Cette méthode converge toutefois lentement. Pour réduire le nombre d'itérations nécessaires

à la résolution du système, la technique du Lagrangien augmenté est souvent employée. Elle consiste à utiliser le fait que  ${}^T B \vec{V} = 0$  pour modifier l'équation sur la vitesse en :

$$AV + rB^T B V = F - BP$$

l'équation sur la pression s'écrivant alors :

$${}^T B A_r^{-1} B P = {}^T B A_r^{-1} F$$

avec  $A_r = A + rB^T B$ .

REMARQUES : la technique du lagrangien augmenté est indispensable pour faire converger l'algorithme en un nombre d'itérations raisonnable (pour cela il faut prendre  $r$  assez grand). De plus, elle n'est viable que dans le cas de l'utilisation d'un solveur direct car le conditionnement de la matrice  $A_r$  est défavorable à l'utilisation de solveurs itératifs (pourtant indispensables pour traiter de gros cas tridimensionnels). Enfin, comme nous allons le voir, elle oblige à faire le choix de pressions discontinues.

### 1.4.2 Méthodes itératives de résidu minimal

Dans le cadre de l'utilisation de pressions continues la largeur de bande de  $B$  est doublée. Mais si  $B$  double sa largeur de bande, celle de  $A_r$  double aussi et le coût de résolution de l'équation en vitesse avec un solveur direct devient rédhibitoire.

Une autre raison défavorable aux méthodes directes est leur inefficacité à traiter de gros cas tridimensionnels (taille de maillage supérieure à  $N=2000$  nœuds). En effet, en plus du moindre coût du point de vue du stockage des données, les méthodes itératives présentent des temps de résolution plus faibles que les méthodes directes pour des tailles de système élevées. C'est ce que montrent Coupez *et al.* dans [Coupez et al.97] et [Marie97]. Les résultats qu'ils obtiennent sur des cas industriels donnent les coûts suivants :

$$CPU_{direct} = O(N^{7/3}) \quad CPU_{iter.} = O(N^{3/2})$$

$$Mem_{direct} = O(N^{5/3}) \quad Mem_{iter.} = O(N)$$

Enfin, un solveur itératif se parallélise plus facilement qu'un solveur direct : un atout de plus sachant qu'aujourd'hui cette technologie se « démocratise » de plus en plus.

On pourrait donc être tenté d'utiliser une méthode itérative dans la méthode d'Uzawa (+lagrangien augmenté), mais pour faire converger rapidement celle-ci il faut que  $r$  soit grand. Or plus  $r$  est grand plus la matrice de raideur est mal conditionnée pour une méthode itérative. C'est pourquoi d'autres approches ont été développées.

Plus particulièrement, celle proposée par [Wathen et al.93], consiste à appliquer directement une méthode itérative de résidu minimal au système (1.17) avec un préconditionnement diagonal (PCR method).

De façon synthétique, cette méthode consiste à résoudre un système :

$$Hx = b \quad ,$$

en minimisant le résidu de :

$$(M^{-1}(Hx - b), (Hx - b))$$

où  $M$  est la matrice de préconditionnement.

[Marie97] fait une revue de ces méthodes itératives associées aux systèmes linéaires non

définis positifs et propose une méthode hybride ORTHOMIN-ORTHODIR dérivée de la méthode proposée par Silvester *et al.*. Ces méthodes sont plus simples, plus robustes, moins spécifiques que les méthodes type Uzawa tout en étant efficaces. Elles présentent enfin l'avantage de pouvoir, sans modification, traiter l'incompressibilité.

**Complément** Dans le cas du MINI-élément, le système d'équations (1.16) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_b & B_b \\ {}^T B & {}^T B_b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V_b \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

- où  $\star$   $V_b$  est le vecteur contenant les composantes des vitesses aux nœuds internes ;  
 $\star$   $A_b$  est la matrice symétrique associée à la forme discrète du terme :

$$\int_{\Omega} 2\eta (|\varepsilon(\vec{v}_h)|) \varepsilon(\vec{b}_h) : \varepsilon(\vec{b}_h^*) d\Omega;$$

- $\star$   $B_b$  est associé au terme :  $-\int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{b}_h^* d\Omega$ .

Par une technique de condensation, les degrés de liberté liés à la bulle sont éliminés. On obtient ainsi une formulation mixte en vitesse-pression avec pour seules inconnues les valeurs nodales des trois composantes de la vitesse et des pressions en chaque sommet des tétraèdres. Cette technique d'élimination des degrés de liberté supplémentaires permet de se ramener localement à une approximation du type  $P_1/P_1$ . Les contributions élémentaires du sous-système se réduisent alors à :

$$\begin{pmatrix} A^e & B^e \\ {}^T B^e & -C^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^e \\ P^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

où  $C^e = {}^T B_b^e (A_b^e)^{-1} B_b^e$ .

Les notations de la forme  $A^e$  correspondent aux calculs restreints aux degrés de liberté présents sur l'élément  $K$  :  $A^e = A|_K$ , soit  $A = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} A^e$ .

REMARQUE : dans le cas de la loi de comportement pseudo-plastique,  $A$  dépend des vitesses nodales  $\vec{V}$  ; le système (1.17) est donc non linéaire. Dans ce cas, la méthode de NEWTON-RAPHSON permet de ramener ce problème à la résolution d'une suite de problèmes linéaires.

Il est important de noter le rôle primordial joué par le bloc diagonal  $C^e$  dans (1.19). En effet, l'utilisation de la méthode proposée par Silvester *et al.* impose un préconditionnement diagonal. En d'autres termes,  $M = \text{diag}(|H|)$ . Or, dans le système (1.17), le bloc diagonal inférieur est nul ce qui pose un problème pour exprimer  $M^{-1}$ . Dans le cas de l'utilisation du MINI-élément ce problème disparaît naturellement. Dans le cas d'utilisation d'un autre type d'élément, une solution est d'ajouter artificiellement un terme diagonal (qu'on appellera, par abus de langage, terme de diffusion numérique).

C'est précisément ce que propose la discrétisation dite  $P_1/P_1$ -stabilisé. Cet élément ne vérifie pas la condition de stabilité de Brezzi-Babuska, mais le schéma est stabilisé artificiellement comme expliqué précédemment (le terme de stabilisation étant de la forme  $C \simeq \beta \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla p_h^* d\Omega$ ) pour se ramener à une formulation du type (1.19).

Avant de clore ce paragraphe, nous noterons que quelques auteurs proposent des améliorations ou des alternatives à ces méthodes. Au niveau des algorithmes de résolution en particulier on pourra se référer à [Wathen et al.93] ou à [Sarin et al.98] qui proposent



des méthodes qui reprennent la technique proposée par Uzawa en traitant l'équation sur la vitesse par un algorithme de gradient conjugué. Ces techniques sont connues sous le nom de bi-gradient conjugué ou gradient conjugué à deux niveaux, mais leurs applications n'ont pas dépassé le cadre académique de cas bidimensionnels sur des maillages réguliers. C'est pourquoi, il reste difficile de dégager, dans ce domaine, une méthode type qui se démarque de toutes les autres. Une autre perspective d'amélioration possible réside dans le choix du préconditionneur de la méthode PCR (utilisation d'un préconditionneur de Cholesky incomplet).

### 1.4.3 Conclusion

Au terme de cette étude, quels enseignements convient-il de retenir ?

La simulation tridimensionnelle de la phase de remplissage du procédé d'injection, sous les hypothèses d'incompressibilité et de forces d'inertie négligeables, fait aujourd'hui l'objet d'un consensus du point de vue théorique qui est étayé par de nombreux résultats d'applications. L'emploi du MINI-élément couplé à une résolution globale du système matriciel par une méthode itérative semble rallier une bonne partie des acteurs impliqués dans le domaine. Comme ce fut le cas des problèmes elliptiques comme l'élasticité linéarisée, la méthode des éléments finis (par le biais de la théorie des méthodes mixtes) s'impose pour la résolution du problème de STOKES. Ce sont ces choix qui ont été retenus dans le cadre de cette étude. L'état de l'art n'en reste pas figé pour autant et de nombreuses perspectives existent. En particulier, le choix dual de la discrétisation et de l'algorithme de résolution associé est sans doute appelé à s'améliorer dans le futur. On a déjà cité des alternatives aussi bien au niveau de l'algorithme avec la technique de bi-gradient conjugué et qu'au niveau de la discrétisation avec l'élément de Taylor-Hood généralisé ou la discrétisation discontinue de la vitesse.

Cependant, même si nous sommes en mesure de choisir la résolution la plus efficace pour le calcul tridimensionnel du problème de Stokes, le coût des calculs 2D reste encore bien plus attrayant. Aussi, les utilisateurs industriels qui traitent une majorité de pièces minces souhaitent légitimement avoir un outil qui couple la richesse d'un calcul 3D (même localement) et le coût des calculs 2D.

## 1.5 Couplage 2D/3D

### 1.5.1 Étude bibliographique - État de l'art

Il y a très peu de publications relatives à ce sujet. À notre connaissance, seuls deux articles présentent des approches couplant des calculs bi- et tridimensionnels

Les travaux de Friedrichs et Güçeri ([Friedrichs et al.93], 1993) consistent à faire un calcul 3D au niveau du front de matière et un calcul Hele-Shaw en amont du front (voir fig. 1.4). Tous les calculs (2D ou 3D) reposent sur la méthode des différences finies.

Si les auteurs démontrent l'avantage de leur technique par rapport à une solution Hele-Shaw complète, ils limitent leur étude à des pièces de faible épaisseur (leur objectif étant de capter l'effet fontaine dans ces pièces). Les limitations intrinsèques de cette méthode apparaissent cependant clairement. La première (et la plus attendue) est due à la génération de maillage : les maillages 2D et 3D se chevauchent sur une maille et les choix

pour placer l'interface entre les deux maillages et pour définir la largeur du front 3D sont délicats. Le problème de la connexion topologique entre les maillages est toutefois évité ici dans la mesure où il s'agit de maillages structurés et réguliers (briques et rectangles). La seconde limitation de la méthode présentée tient dans la méthode de résolution des équations dans la partie 3D (équation de Poisson en pression en formulation lagrangienne puis réactualisation de la position des nœuds du front par un schéma d'Euler explicite) qui ne gère pas correctement le contact collant aux parois du moule (la position du front de matière est tronquée, après calcul, à la géométrie du moule...). Plus précisément la condition de contact imposée aux parois latérales du moule est une condition de contact glissant pour des raisons de compatibilité avec la formulation de Hele-Shaw choisie en amont. Enfin, au delà de ces limitations, nous n'étudierons pas plus avant cette technique dont le domaine d'application diffère finalement beaucoup de celui qui nous intéresse puisqu'elle ne permet un calcul tridimensionnel qu'au voisinage du front de matière et non dans une partie complète de la pièce (qui est le cas qui nous intéresse) ni même au voisinage des nervures, seuils, ...

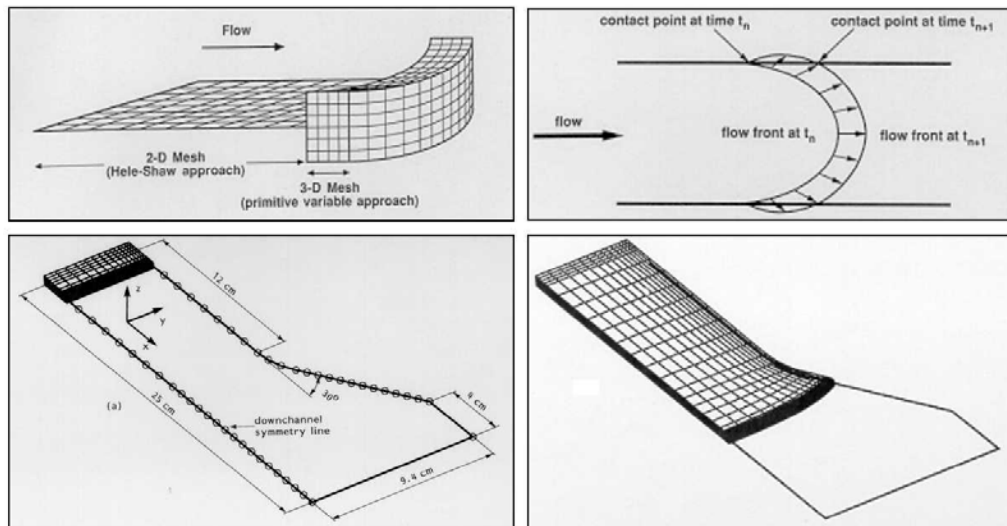


FIG. 1.4 – Illustration du principe (en haut à gauche), illustration du défaut du au contact (en haut à droite), et évolution du maillage (en bas) [tiré de [Friedrichs et al.93]].

La seconde référence, due à Yun-Wey et Ta-Jo [Yu et al.99], est plus récente (1999). Les auteurs présentent une approche plus conforme à l'idée intuitive que l'on peut se faire d'une méthode de couplage : ils ont choisi d'associer une méthode purement tridimensionnelle à un code Hele-Shaw. Les choix numériques, considérés connus, sont présentés succinctement. Il s'agit pour la partie bidimensionnelle d'un modèle Hele-Shaw sur un maillage quadrangulaire avec une discrétisation linéaire de la pression. Pour la partie 3D, la discrétisation retenue est la brique 27 nœuds (type Crouzeix-Raviart) : vitesse quadratique et pression linéaire. Pour la connexion des deux calculs, ils imposent une continuité de la pression entre les domaines 2 et 3D ainsi qu'une égalité entre les flux entrant et sortant (conservation de la masse pour un fluide incompressible). Deux applications sont présentées pour illustrer leur démarche : un écoulement dans une filière portemanteau et un écoulement dans une plaque plane autour d'un obstacle. Pour ces deux exemples les auteurs « démontrent » l'efficacité de leur méthode par rapport à un code purement Hele-Shaw en rapprochant leurs résultats des résultats obtenus avec un code purement tri-

dimensionnel. D'autre part ils mettent en avant la réduction des ressources informatiques nécessaires au calcul : le nombre d'inconnues passe de 19801 pour un code 3D à 14704 pour le modèle hybride (dont 14629 pour la partie 3D et 75 pour la partie 2D). Les gains de temps CPU peuvent atteindre, selon les auteurs, près de 40 (sans qu'ils précisent sous quelles conditions). Il convient tout de même de noter que ces deux exemples ont été fait sur des géométries extrêmement simplifiées : la filière portemanteau est représentée par 642 éléments dans le cas 3D et 530 éléments dans le cas 2D-3D (voir figure 1.5). En effet, les maillages structurés briques et quadrangulaires s'accordent assez mal avec les géométries complexes. Or l'intérêt d'un calcul 3D dans une géométrie aussi « grossière » paraît relativement limité. Ce type de calcul se justifie lorsque l'on désire avoir une connaissance relativement fine des champs de vitesse, pression, . . . Dans les zones du moule où la cinématique n'est pas triviale, zones qui correspondent souvent à des singularités géométriques (angles, inserts, . . .). Il aurait été très intéressant d'avoir un exemple d'application de cette méthode sur un maillage plus fin. Cependant, une augmentation de la taille du maillage aurait une répercussion néfaste en terme de ressources mémoire comme le reconnaissent les auteurs qui précisent n'avoir pas toujours pu évaluer les gains de temps CPU entre les approches 3D et hybride car la discrétisation choisie pour la partie volumique oblige parfois à « swaper » (échanger des données entre la mémoire centrale et le disque de l'ordinateur en raison d'une discrétisation trop « volumineuse ») ce qui fausse complètement les résultats (les temps d'accès au disque sont supérieurs de plusieurs décades au temps d'accès à la mémoire centrale).

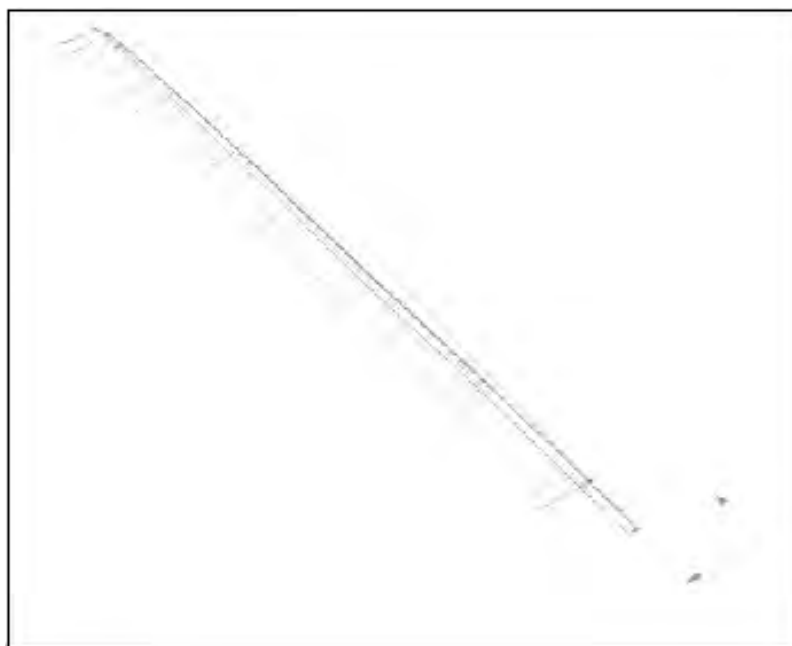


FIG. 1.5 – Maillage hybride de la filière portemanteau (la partie supérieure étant la partie la partie volumique, tiré de [Yu et al.99].

L'application de l'écoulement autour d'un obstacle dans une plaque plane est plus intéressante quant à elle en ce qui concerne le raccordement entre les zones 2D et 3D. En particulier, il est précisé qu'il faut déterminer avec soin la zone où l'écoulement est 3D (cette zone est facilement identifiable dans le cas de la géométrie portemanteau qui a fait l'objet de nombreuses études). Pour cet écoulement, deux longueurs semblent déterminantes :  $l_u$  qui représente la longueur entre le seuil d'entrée du fluide et la frontière

de domaine  $3D$  et  $l_b$  qui représente la largeur de ce domaine (voir figure 1.6). Ces deux

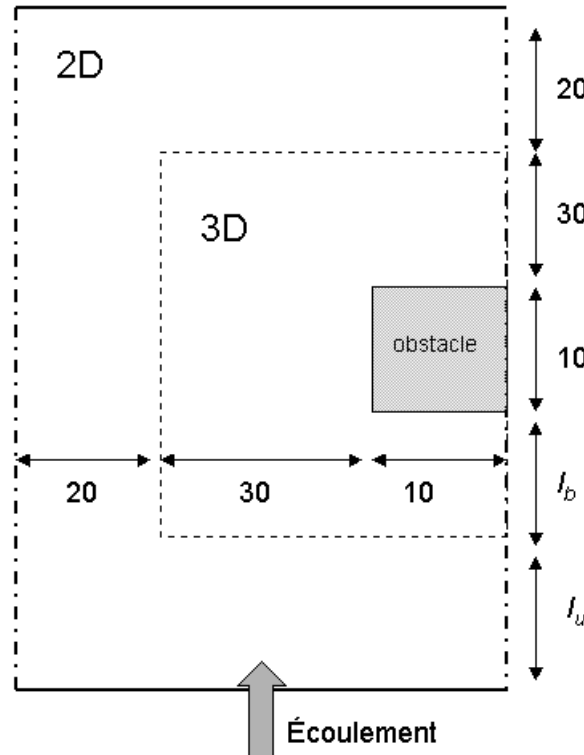


FIG. 1.6 – Géométrie de l'écoulement autour d'un obstacle.

longueurs doivent être suffisamment grandes pour que, d'une part l'écoulement puisse être considéré bidimensionnel dans la partie éloignée de l'obstacle et que, d'autre part, tous les effets volumiques dus à l'obstacle soient bien captés. Ceci a deux inconvénients : le premier est que cela réduit notablement les zones où l'écoulement peut être considéré comme bidimensionnel, le second est qu'il faut déterminer ces longueurs de façon judicieuse. Pour ce faire, les auteurs procèdent en deux étapes : ils effectuent un premier calcul sur un maillage grossier en surestimant la zone  $3D$  puis, en fonction de l'écoulement obtenu, ajustent la longueur  $l_b$  pour le calcul sur le maillage final.

### 1.5.2 Commentaires

Le premier de ces deux articles ne nous apporte pas beaucoup d'informations pour le problème qui nous intéresse. En effet, si cette méthode a pu être utile pour modéliser l'effet fontaine elle ne répond pas à notre besoin qui est une solution capable de traiter des pièces « industrielles » avec à la fois des zones minces et des zones épaisses et ce avec le plus de généralité possible. La seconde étude est elle très instructive même si elle ne met pas en exergue toutes les difficultés sous-jacentes à notre problème. En effet, la première remarque que l'on peut formuler concerne la formulation retenue pour la partie volumique : elle n'est pas optimale et il semblerait naturel de la remplacer par une formulation MINI-élément vers laquelle une bonne part des acteurs impliqués dans le domaine se tournent. Ce choix en dicte un autre qui est celui du maillage : là aussi un maillage brique ou quadrangulaire ne semble pas le plus approprié. Il serait plus judicieux de choisir un maillage tétraédrique

(triangulaire en  $2D$ ), et de préférence non structuré pour offrir plus de souplesse lorsque l'on étudie des pièces géométriquement complexes. Mais alors se pose la question de la connexion des maillages  $2D$  et  $3D$  (que l'on ne rencontre pas en utilisant des maillages structurés et réguliers). Enfin, l'information la plus importante que l'on doit retenir tient au fait que la détermination de la zone où un calcul bidimensionnel est licite n'est pas triviale et qu'elle peut, dans certains cas, se réduire à une petite partie seulement de la pièce. En outre il faut prendre en compte les efforts nécessaires pour déterminer cette zone  $2D$  : un pré-calcul et la génération de 2 maillages (un pour le pré-calcul, l'autre pour le calcul final), ainsi que la détermination de la surface moyenne dans cette zone.

Toutes ces difficultés techniques et les limitations qu'elles engendrent nous poussent à penser qu'il serait plus judicieux de développer une solution plus générale, plus facile à faire évoluer vers des applications plus complexes (en termes de géométrie, de matériaux injectés ou de procédé), et d'une mise en œuvre plus simple.

## 1.6 Démarche adoptée et principes retenus

La solution que nous proposons est beaucoup plus simple à mettre en œuvre : plutôt que de traiter le problème du couplage nous nous proposons de conserver un calcul tridimensionnel dans toute la pièce. Pour que cette solution réponde néanmoins aux exigences de diminution des coûts de calcul dans les zones où l'écoulement est considéré comme bidimensionnel, nous proposons de contrôler les coûts des calculs  $3D$  dans ces zones et de les ramener aux ordres de grandeur atteints par les calculs bidimensionnels. Plus précisément, notre démarche consiste à n'avoir qu'un nombre limité d'éléments (en pratique entre 4 et 10) dans l'épaisseur des parties minces du domaine de calcul, le nombre d'éléments dans le plan de l'écoulement restant le même que celui qui serait utilisé pour un calcul bidimensionnel.

Les avantages que l'on peut tirer d'une telle solution sont nombreux comparés à l'incompressible surcoût de calcul par rapport à un calcul bidimensionnel. Tout d'abord la résolution est intrinsèquement plus riche ce qui peut se révéler fondamental pour certaines applications. Les calculs anisothermes avec étude de la cristallisation ou les calculs sur des fluides chargés de fibres (ou de poudres pour le MIM) requièrent en effet une connaissance fine de la cinématique de l'écoulement. On pourra par exemple se référer à [Vintimiglia99] pour une revue critique des codes intégrant le phénomène de cristallisation et pour la justification, dans ce cadre, de la nécessité d'une cinématique riche. De plus le surcoût de calcul peut être largement compensé par un délai de mise en œuvre plus court. Il n'est en effet pas nécessaire de définir de surface moyenne, de déterminer les zones bi ou tridimensionnelles, d'effectuer un pré-calcul ou encore de générer deux maillages différents et de traiter le problème de connexion entre ces maillages. Enfin les conditions aux limites s'imposent naturellement et il n'est pas nécessaire de résoudre des équations de compatibilité entre les différents domaines.

## Bibliographie

- [Agassant et al.96] Agassant (J.-F.), Avenas (P.), Sergent (J.-P.), Vergnes (B.) et Vincent (M.). – *La mise en forme des matières plastiques*, chap. 6, pp. 394–425. – Technique & Documentation, 1996. 3<sup>ième</sup> édition, revue et augmentée.
- [Agouzal et al.95] Agouzal (A.), Baranger (J.), Maitre (J-F.) et Oudin (F.). – Connection between finite volume and mixed finite element methods for a diffusion problem with nonconstant coefficients. application to a convection diffusion problem. *East-West journal of Numerical Analysis*, vol. 3, n4, 1995, pp. 237–254.
- [Agouzal et al.97] Agouzal (A.) et Oudin (F.). – Finite volume scheme for stokes problem, 1997. Équipe d'Analyse Numérique Lyon Saint-Etienne.
- [Arnold et al.84] Arnold (D.N.), Brezzi (F.) et Fortin (M.). – A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*, vol. 21, 1984.
- [Arnold90] Arnold (D.N.). – Mixed finite element methods for elliptic problems. *Comput. Meth. Applied Mech. Engrg*, vol. 82, 1990, pp. 281–300.
- [Baranger et al.90] Baranger (J.) et Najib (K.). – Analyse numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau. *Numerische Mathematik*, vol. 58, 1990, pp. 35–49.
- [Boffi97] Boffi (D.). – Three-dimensional finite element methods for the stokes problem. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 34, n2, Avril 1997, pp. 664–670.
- [Brezzi et al.91] Brezzi (F.) et Fortin (M.). – *Mixed and hybrid finite element methods*. – Springer-Verlag, 1991.
- [Brincat et al.99] Brincat (P.), Talwar (K.) et Friedl (C.). – Extensional viscosity modelling for injection molding simulation. *J. of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 18, n6, 1999.
- [Coupez et al.97] Coupez (T.) et Marie (S.). – From a direct solver to a parallel iterative solver in 3-d forming simulation. *The International Journal of Supercomputing Applications and High Performance Computing*, vol. 11, n4, 1997, pp. 277–285.
- [Coupez et al.98] Coupez (T.) et Pichelin (E.). – Solution of the 3d mold filling by a taylor discontinuous galerkin method. *Fourth World Congress on Computational Mechanics*. – Buenos Aires, Argentine, 29 juin - 2 juillet 1998.
- [Coupez91] Coupez (T.). – *Grandes transformations et remaillage automatique*. – Centre de Mise en Forme des Matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1991.
- [Coupez96] Coupez (T.). – Stable-stabilized finite element for 3-d forming calculation. *Communication interne*, 1996. – CEMEF, Sophia Antipolis.
- [Daboussy00] Daboussy (D.). – *Simulation de l'injection multi-fluides*. – Centre de Mise en Forme des Matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Ding et al.97] Ding (D.), Townsend (P.) et Webster (M.F.). – Finite element simulation of an injection moulding process. *International Journal for*

- Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 7, n7, 1997, pp. 751–766.
- [Farhouli et al.93] Farhouli (M.) et Fortin (M.). – A new mixed finite element for the stokes and elasticity problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 30, n4, Août 1993, pp. 971–990.
- [Fortin et al.85] Fortin (M.) et Fortin (A.). – *Newer and newer elements for incompressible flows*. – Wiley and Sons, 1985, *Finite Element in Fluids*. pp. 171-187.
- [Friedrichs et al.93] Friedrichs (B.) et Güçeri (S.I.). – A novel hybrid numerical technique to model 3d fountain flow in injection molding processes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1993, pp. 141–173.
- [Haagh et al.97] Haagh (G.A.A.V.), Zuidema (H.), Van de Vosse (F.N.), Peters (G.W.M.) et Meijer (H.E.H.). – Towards a 3-d finite element model for the gas-assisted injection moulding process. *International Polymer Processing*, vol. XII, n3, 1997, pp. 207–215.
- [Han et al.98] Han (H.) et Wu (X.). – A new mixed finite element formulation and the mac method for the stokes equations. *SIAM Journal of numerical Analysis*, vol. 35, n2, Avril 1998, pp. 560–571.
- [Hughes et al.79] Hughes (T.J.R.), Kam Liu (W.) et Brooks (A.). – Finite analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*, vol. 30, 1979, pp. 1–60.
- [Khayat et al.95] Khayat (R.E.), Derdouri (A.) et Hebert (L.P.). – A three-dimensional boundary-element approach to gas-assisted injection molding. *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*, n°7, 1995, pp. 253–270.
- [Magnin94] Magnin (B.). – *Modélisation du remplissage des moules d'injection pour polymères thermoplastiques par une méthode eulerienne-lagrangienne arbitraire*. – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [Marie97] Marie (S.). – *Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme de matériaux*. – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [Pironneau88] Pironneau (O.). – *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. – Masson, 1988, *RMA 7*.
- [Sarin et al.98] Sarin (V.) et Sameh (A.). – An efficient iterative method for the generalized stokes problem. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 19, n1, Janvier 1998, pp. 2060–226.
- [Tanguy et al.91] Tanguy (P.A.) et Lacroix (R.). – A 3d mold filling study with significant heat effects. *Intern. Polymer Processing*, vol. VI, n1, 1991, pp. 19–25.
- [Trotignon et al.96] Trotignon (J.-P.), Verdu (J.), Dobraczynski (A.) et Pieraud (M.). – *Matières plastiques : structures-propriétés, mise en oeuvre, normalisation*. – Nathan, 1996, nathan édition, *Les précis AFNOR*.
- [Vintimiglia99] Vintimiglia (A.S.). – *Implémentation d'une cinétique de cristallisation dans un code bidimensionnel par éléments finis. Application à l'injection et au procédé push-pull*. – Centre de mise en forme des matériaux,

- Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999.
- [Wathen et al.93] Wathen (A.) et Silvester (D.). – Fast iterative solution of stabilized stokes systems, part 1 : using simple diagonal preconditioners. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 30, n3, Juin 1993, pp. 630–649.
- [Yokoi et al.92] Yokoi (H.), Murata (Y.) et Tsukakoshi (H.). – *Measurement of melt temperature profiles during filling and packing processes using a new integrated thermocouple sensor*. – Rapport technique, ANTEC, 1992. pp. 185-191.
- [Yu et al.99] Yu (Yun-Wey) et Liu (Ta-Jo). – A hybrid 3d/2d finite element technique for polymer processing operations. *Polymer Engineering and Science*, vol. 39, n1, janvier 1999, pp. 44–54.
- [Zheng et al.99] Zheng (R.), Kennedy (P.), Phan-Thien (N.) et Fan (X-J.). – Thermoviscoelastic simulation of thermally and pressure-induced stresses in injection moulding for the prediction of shrinkage and warpage for fibre-reinforced thermoplastics. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 84, 1999, pp. 159–190.





## Chapitre 2

# Maillage anisotrope et estimation d'erreur

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Génération de maillages</b>	<b>30</b>
2.2.1	Génération de maillages isotropes	30
a)	Méthode frontale	30
b)	Méthode de Delaunay	31
c)	Méthode d'optimisation locale	32
2.2.2	Rappels	41
2.2.3	Génération de maillages anisotropes	43
a)	Méthodes d'adaptation	43
b)	Méthode de raffinement anisotrope	43
c)	Méthode d'« extrusion »	45
d)	Méthode frontale - Méthode de Delaunay	46
e)	Méthode d'optimisation	47
2.2.4	Conclusion	49
<b>2.3</b>	<b>Métrique naturelle</b>	<b>49</b>
<b>2.4</b>	<b>Estimation d'erreur</b>	<b>52</b>
2.4.1	Estimations <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	52
2.4.2	Erreur d'interpolation	53
<b>2.5</b>	<b>Estimation d'erreur <i>a posteriori</i></b>	
	<b>Problème de Stokes</b>	<b>54</b>
2.5.1	Estimation classique	56
2.5.2	Estimateur d'erreur basé sur la divergence discrète	57
<b>2.6</b>	<b>Écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles</b>	<b>58</b>
2.6.1	Erreur exacte	59
2.6.2	Comparaison des estimateurs	60
2.6.3	Conclusions	62
<b>2.7</b>	<b>Adaptation de maillage - Calculs d'extrusion</b>	<b>62</b>
2.7.1	Contraction 4 : 1 - Écoulement bidimensionnel	64
2.7.2	Contraction 8 : 1 - Écoulement tridimensionnel	67
<b>2.8</b>	<b>Perspectives</b>	<b>71</b>
<b>2.9</b>	<b>Application à la simulation du remplissage 3D</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

---

## 2.1 Introduction

Si l'on considère les travaux de [Peraire et al.87] et [Palmerio et al.86] comme les premiers dans le domaine, cela fait une quinzaine d'années que la notion de maillage anisotrope a été introduite. Un maillage anisotrope est un maillage dont les éléments présentent un allongement dans une (ou plusieurs) direction(s) privilégiée(s). En cela, il viole le critère optimal d'équilatéralité des éléments issu de la théorie de l'estimation *a priori* de l'erreur d'interpolation [Ciarlet87]. Néanmoins, pour certaines applications, il peut être considéré comme un maillage *adapté*, c'est à dire qui optimise le rapport qualité/coût de calcul. C'est ce que démontrent par la pratique la grande majorité des travaux sur la dynamique des fluides compressibles qui recourent intensivement au maillage anisotrope. Dans le cas de calculs en aéronautique par exemple, les variables caractéristiques de l'écoulement présentent souvent des variations marquées dans des directions privilégiées. Cette anisotropie peut avantageusement caractériser le maillage qui va permettre de calculer ces champs de variables (voir fig. 2.1 la similitude de « forme » entre le maillage et les isovalues du nombre de Mach).

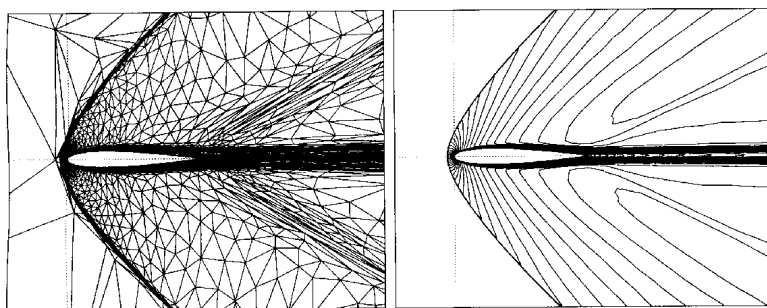


FIG. 2.1 – Exemple de calcul sur un champ anisotrope (tiré de [Castro diaz et al.95]).

Comment obtient-on un maillage anisotrope? S'agissant d'un maillage adapté, le problème ne se pose pas en termes de génération de maillage mais plutôt comme un processus itératif d'adaptation selon un *critère* le plus souvent issu d'un calcul préalable sur un maillage isotrope. De fait, la stratégie d'adaptation de maillage la plus couramment employée peut se décomposer de la façon suivante :

1. Donnée d'un maillage initial.
2. Résolution du problème discrétisé.
3. Calcul de l'erreur locale sur chaque élément  $K$  du maillage.
4. Si l'erreur globale est inférieure à la précision souhaitée alors fin de l'algorithme. Sinon, extraire l'information pour améliorer le maillage.
5. Adaptation ou reconstruction du maillage à partir de cette information et réitération de l'algorithme à partir de l'étape 2.

Adaptation de maillage et calcul d'erreur éléments finis sont donc étroitement liés. Notre travail portera donc à la fois sur une technique de maillage qui permet l'adaptation anisotrope et sur l'estimation d'erreur nécessaire à la définition d'un critère d'adaptation. Ces deux points seront présentés dans cet ordre au cours de ce chapitre.

Mais auparavant, rappelons que l'application de nos recherches va se faire au sein d'un outil de simulation de remplissage de corps minces. C'est là une des spécificités de

notre travail : nous détenons un critère *a priori* pour l'adaptation anisotrope, à savoir la géométrie même des pièces que l'on souhaite traiter. Celles-ci présentent de grands rapports de forme (qui engendrent certainement une anisotropie des champs que l'on souhaite calculer). Cette connaissance préalable de la géométrie doit nous servir pour la génération primale du maillage anisotrope. En outre, la génération doit se faire à faible coût et de façon la plus automatique possible pour que cet outil puisse être utile dans un contexte industriel. C'est même là la motivation essentielle de notre travail pour une application industrielle aujourd'hui trop souvent limitée par la taille des maillages. C'est pourquoi nous commencerons par présenter les méthodes de génération de maillage et en particulier les méthodes de génération anisotrope dont celle que nous proposons. Nous verrons aussi quelles réponses nous avons tenté d'apporter aux questions liées à la « métrique naturelle » du domaine de calcul.

## 2.2 Génération de maillages

Parceque nous souhaitons traiter des pièces tridimensionnelles complexes, nous avons fait le choix d'un maillage tétraédrique non structuré. Le lecteur intéressé par la génération de maillage structuré pourra se référer au travail de [Martin95, ch.1]. Parmi ces méthodes de maillage tétraédrique non structuré, nous avons choisi de présenter celles qui sont les plus répandues et qui permettent la génération de maillages anisotropes. Si l'on écarte de ce choix la méthode octree ([Perucchio et al.89], [Shephard et al.91]) difficilement applicable à des géométries tridimensionnelles et qui pose le problème du respect des géométries, il reste la méthode frontale, la méthode de Delaunay et les méthodes reposant sur l'optimisation locale. Ces méthodes seront tout d'abord présentées dans un contexte isotrope puis nous nous intéresserons à leur déclinaison anisotrope.

### 2.2.1 Génération de maillages isotropes

#### a) Méthode frontale

La technique de maillage frontale consiste à s'appuyer sur le maillage initial de la frontière du domaine pour mailler l'espace qu'elle délimite (la frontière du domaine est donc respectée par construction). C'est une méthode itérative qui remplit le domaine par création d'un tétraèdre à partir d'une face (triangle) de la frontière courante. À chaque insertion d'un élément, la définition du maillage frontière est modifiée en enlevant la face sur laquelle s'appuie ce nouvel élément et en ajoutant les faces nouvellement créées. Le processus itératif se termine lorsque la zone restant à mailler devient vide. Cet algorithme, qui s'énonce simplement, ne s'avère efficace que si les trois points suivants sont maîtrisés :

- le choix du triangle de base servant à la création du nouvel élément ;
- le choix de la position du nouveau nœud qui définit ce nouvel élément ;
- le respect de la compatibilité du maillage (*i.e.* que le nouvel élément ne chevauche pas des éléments précédemment créés).

La littérature propose un certain nombre de solutions qui respectent ces trois points et donnent des résultats satisfaisants aussi bien en génération 3D [Lohner et al.88], [Frykestig94] qu'en adaptation [Hoch et al.99]. Néanmoins, la qualité du maillage final est fortement dépendante de la qualité du maillage de la frontière. En effet, il est impossible de construire un bon élément à partir d'une face de mauvaise qualité ; un tétraèdre idéal ne peut pas toujours être inséré dans le domaine s'il intersecte des éléments voisins et une

disproportion de taille entre les éléments frontières engendre la rencontre de différentes parties du front de maillage au cours de la génération. Pour que l'algorithme puisse aboutir, il faut alors soit accepter la création d'éléments de mauvaise qualité soit détruire une partie des éléments créés et améliorer localement la topologie.

### b) Méthode de Delaunay

De toutes les méthodes de génération, la méthode de Delaunay est très certainement la plus répandue. Son principe repose sur les propriétés du diagramme de Voronoï : celui-ci permet, par dualité, de construire un maillage simplicial de l'enveloppe convexe d'un nuage de points  $\mathcal{N}$  sur lequel on a construit le diagramme de Voronoï. Ce diagramme est une partition du plan en cellules. Chaque cellule est « centrée » autour d'un point  $n_i$  du nuage et est constituée de l'ensemble des points du plan les plus proches de  $n_i$  que de n'importe quel autre point de  $\mathcal{N}$ . Le maillage est obtenu en reliant entre eux les points du nuage dont les cellules partagent une face commune (voir fig. 2.2). [Hermeline80] montre qu'il existe un maillage de Delaunay quel que soit le nuage de points (en dimension  $n$ ). De plus, en dimension 2, il y a unicité si il n'y a pas quatre points cocycliques dans ce nuage.

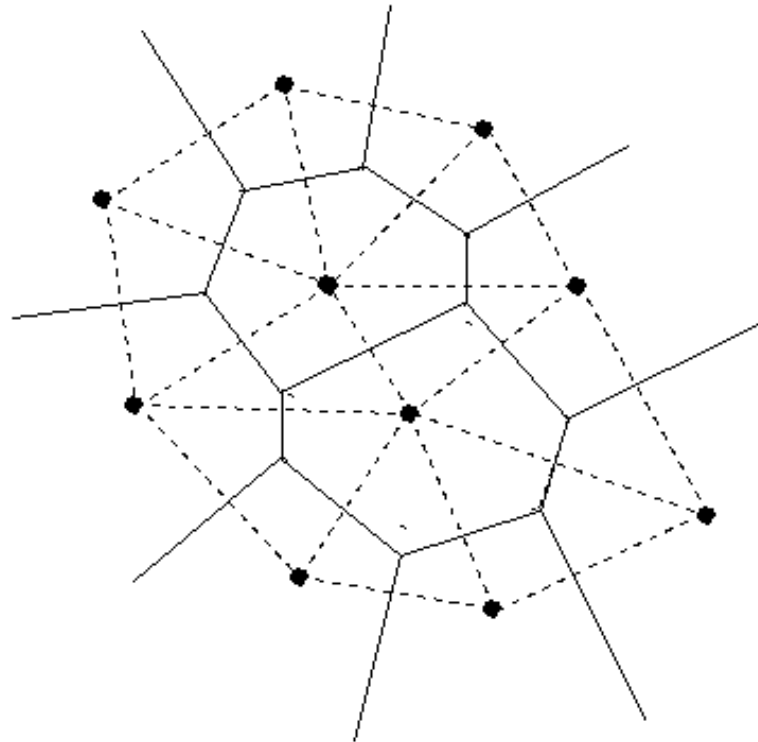


FIG. 2.2 – Partition de Voronoï et son dual le maillage de Delaunay.

La principale propriété d'un maillage de Delaunay est de vérifier le critère de la sphère vide :

**Proposition 2.2.1** *La sphère circonscrite à chaque tétraèdre ne contient aucun autre sommet que ceux formant le tétraèdre.*

En dimension 2, un maillage vérifiant cette propriété maximise localement l'angle minimum [Sibson77]. Cette propriété, garante d'éléments de bonne qualité, a contribué à la popularité de la méthode de Delaunay. Malheureusement, cette propriété ne peut être étendue au cas tridimensionnel (en considérant alors l'angle solide minimum). Autre point à remarquer, cette méthode permet de mailler l'enveloppe convexe d'un nuage de points donnés : cette enveloppe convexe ne coïncide pas nécessairement avec le bord du domaine que l'on souhaite mailler. Enfin, la taille du nuage de points n'assure pas que le maillage obtenu contienne suffisamment de nœuds pour effectuer un calcul numérique. Il convient donc de définir un algorithme constructif qui à la fois permette la création de nœuds internes et qui recouvre la frontière du domaine. La littérature propose de nombreux algorithmes répondant à ces critères, algorithmes qui s'avèrent le plus souvent simples et efficaces en dimension 2 mais dont la généralisation en dimension 3 ne permet pas selon certains auteurs ([Cavendish et al.85], [Moulard94]) d'obtenir un maillage toujours satisfaisant. En particulier, ils relèvent que :

- le respect de la frontière est un problème complexe en 3D dont la résolution oblige souvent à ne plus respecter le critère de la sphère vide ;
- le coût de calcul du critère de la sphère vide est important et des erreurs d'arrondis trop importantes sur ce critère peuvent mener à un maillage non conforme (recouvrement d'éléments) ;
- la qualité du maillage obtenu peut être assez médiocre avec un nombre non négligeable d'éléments aplatis.

Pour une description d'algorithmes constructifs d'un maillage de Delaunay, le lecteur pourra se reporter à [Vallet92, ch. 3] ou [Moulard94, ch. 1].

### c) Méthode d'optimisation locale

Les méthodes dites d'optimisation locale ont tout d'abord été développées pour optimiser les maillages (par des algorithmes d'exploration locale visant à diminuer une fonction coût donnée, [Talon89], [Mailfert90]) ou les adapter (adaptation et remaillage pour des domaines en grandes déformations, [Coupez91]). Mais depuis ces premiers travaux certains auteurs ont utilisés les bonnes propriétés de ces algorithmes d'optimisation pour les adapter à la génération [Moulard94], [Coupez et al.92]. La méthode de génération et d'adaptation de maillage anisotrope que nous avons développée n'est, on le verra, qu'une modification mineure des algorithmes de génération et d'adaptation proposés par T. Coupez et que nous présentons ici.

Les deux principaux outils utiles à cette technique de maillage sont d'une part un critère dit de *volume minimal* et d'autre part des opérateurs locaux permettant d'échanger des *topologies de maillage*.

**Topologie de maillage** Un maillage est la donnée d'un ensemble ordonné des coordonnées (le tableau des nœuds) et d'un ensemble d'éléments, chaque élément étant défini par les numéros des nœuds formant ses sommets. Cet ensemble de numéros de nœuds définissant les éléments est appelé la *connectivité* ou la *topologie* de maillage.

Soit  $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$  un ensemble fini de nœuds et  $\mathcal{P}_D(\mathcal{N})$  l'ensemble des parties de  $\mathcal{N}$  composées de  $D$  nœuds différents (*i.e.* l'ensemble de tous les éléments qu'il est possible de construire sur  $\mathcal{N}$ ). L'ensemble des nœuds de  $\mathcal{T}$  est le sous ensemble des nœuds atteints par

ses éléments :

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K.$$

En raison des discrétisations éléments finis retenues pour la modélisation du procédé d'injection, nous limiterons notre étude aux triangulations de  $d$ -simplexes. Par la suite, nous ne considérerons donc que des topologies de maillages de type simpliciales : les éléments de ces topologies sont formés de  $D = d + 1$  sommets avec  $d$  la dimension de l'espace. Chaque élément  $K$  de  $\mathcal{T}$  possède ainsi un bord  $\partial K$  défini par l'ensemble des sous-ensembles de  $D - 1$  nœuds de  $K$  (les 3 arêtes du triangle ou les 6 faces du tétraèdre). L'ensemble des faces de  $\mathcal{T}$  est donc défini par :

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \partial K.$$

Enfin, par convention, on notera  $\mathcal{T}(\eta)$  l'ensemble des éléments ayant le groupe de nœuds  $\eta$  en commun :

$$\mathcal{T}(\eta) = \{K \in \mathcal{T}, \eta \subset \mathcal{N}\}.$$

Nous pouvons ainsi définir une topologie de maillage :

**Définition 2.2.2**  *$\mathcal{T}$  est une topologie de maillage si :*

$$\text{card}(\mathcal{T}(F)) \leq 2, \forall F \in \mathcal{F},$$

et sa frontière est alors définie par :

$$\partial \mathcal{T} = \{F \in \mathcal{F}, \text{card}(\mathcal{T}(F)) = 1\}.$$

Enfin, il est à noter qu'une topologie peut être *orientée*. Un maillage est dit orienté lorsque le choix de la numérotation locale des nœuds pour décrire chaque élément induit une normale aux faces de l'élément. De plus, sur chaque face, les normales définies par les deux éléments qui s'appuient sur celle-ci sont opposées.

**Critère du volume minimal** Si la définition d'une topologie de maillage est indépendante des coordonnées des nœuds, il convient, pour accéder au maillage véritable, de définir une application de l'ensemble des nœuds de la topologie dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$X : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

L'ensemble des  $D$  sommets associés à chaque élément de  $\mathcal{T}$  est donc noté  $X(K)$  (ou  $X_K$ ) et  $\Omega_K$  (noté aussi  $K$ ) est le  $d$ -simplexe défini comme l'enveloppe convexe de ces  $D$  points.

Ainsi, l'ensemble  $(\mathcal{T}, X)$  génère un domaine  $\Omega(\mathcal{T}, X)$  et le bord de la topologie une surface  $\Gamma(\partial \mathcal{T}, X)$  :

$$\Omega(\mathcal{T}, X) = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \Omega_K,$$

$$\Gamma(\partial \mathcal{T}, X) = \bigcup_{F \in \partial \mathcal{T}} \Gamma_F.$$

L'ensemble  $(\mathcal{T}, X)$  ne définit pas nécessairement un maillage. De même,  $\Gamma(\partial \mathcal{T}, X)$  peut être différent de  $\partial \Omega(\mathcal{T}, X)$ . Mais dans le cas d'un domaine polyédrique  $\Omega$  défini par une triangulation conforme de sa frontière, on peut énoncer le résultat suivant :



**Théorème 2.2.3 (Critère du volume minimal)** Soit l'ensemble  $(\mathcal{T}, X)$  où  $\mathcal{T}$  est supposée orientable. Supposons que  $(\partial\mathcal{T}, X)$  engendre une triangulation conforme de la frontière du domaine  $\Omega : \Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \partial\Omega$ . Alors :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |\Omega_K| \geq |\Omega|,$$

et  $(\mathcal{T}, X)$  engendre un maillage de  $\Omega$  ssi :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |\Omega_K| = |\Omega| \text{ et } |\Omega_K| > 0, \forall K \in \mathcal{T}.$$

La démonstration de ce théorème est donnée par [Coupez99].

L'utilisation conjointe de la notion de topologie de maillage et du critère de volume minimal permet de générer, par un processus itératif d'optimisation, un maillage sans nœud interne d'un domaine polyédrique défini par une discrétisation conforme de sa frontière (voir fig. 2.3).

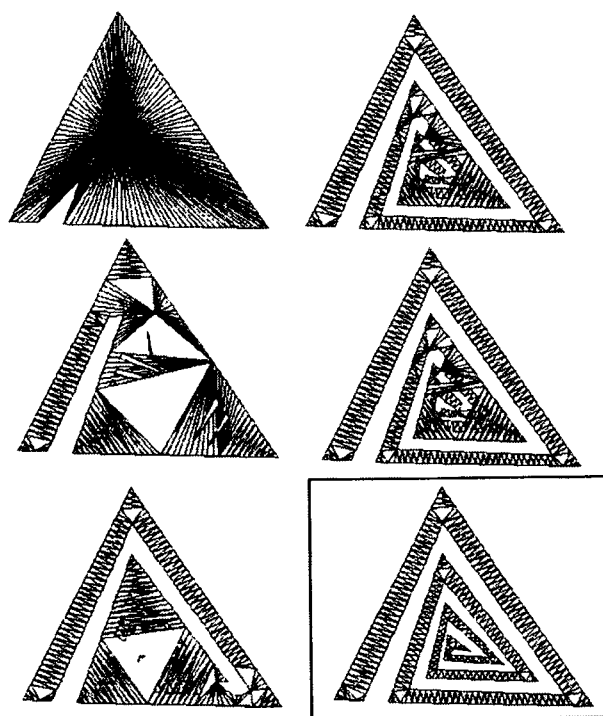


FIG. 2.3 – Génération d'un maillage sans nœud interne (tiré de [Coupez99]).

Pour aboutir au maillage final, il a été nécessaire de modifier plusieurs fois la topologie du maillage par des opérations du type :

$$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} - a + b, \tag{2.1}$$

où  $a$  est un sous-ensemble d'éléments choisis dans  $\mathcal{T}$  et  $b$  un ensemble d'éléments les remplaçant. Ces changements de topologie sont effectués par des opérateurs d'extraction et de remplacement.

**Opérateurs d'extraction et de remplacement** Pour que l'opération 2.1 soit licite, il faut s'assurer que  $a \subset \mathcal{T}$  et que  $b \in \mathcal{E}(\partial a)$  (où  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des topologies de maillage et  $\mathcal{E}(\partial a)$  l'ensemble des topologies de frontière  $\partial a$ ). Il s'agit de vérifier en particulier que l'opérateur de génération préserve la frontière interne créée par l'extraction pour pouvoir assurer le raccordement du « patch » avec le maillage. Mais ces conditions ne sont pas suffisantes pour s'assurer que l'on a obtenu une topologie de maillage valide. Pour cela il y a d'autres conditions à vérifier par  $a$  et  $b$  qui sont énoncées dans les résultats qui suivent.

REMARQUE : on ne considèrera que les ensembles d'éléments autour d'un nœud ( $a = \mathcal{T}(n)$ ) ou d'une arête ( $a = \mathcal{T}(\{n, m\})$ ) dans la suite puisqu'ils suffisent à décrire toutes les opérations de génération. On peut aussi noter que l'algorithme de Delaunay peut être décrit par l'opération 2.1 si on considère que  $a$  est l'ensemble des éléments dont le cercle circonscrit contient un certain point géométrique et que  $b$  est l'ensemble des éléments obtenus par étoilement de ce point.

**Définition 2.2.4 (opérateur d'étoilement)** Une topologie de maillage qui respecte un bord donné peut être obtenue en reliant un nœud particulier à toutes les faces frontières ne le contenant pas. C'est l'opérateur d'étoilement  $\mathcal{T}^*(.,.)$  défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^*(n, \partial\mathcal{T}) = \{K : | : K = \{\{n\} \cup F\}, F \in \partial\mathcal{T}, n \notin F\}.$$

**Lemme 2.2.5** Dans le cas de triangles ( $d = 2$  et  $D = 3$ ), et si on ne considère que des topologies de maillage sans nœud interne, si  $\mathcal{T}$  est une topologie de maillage, alors :

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}(n) + \mathcal{T}^*(m, \partial\mathcal{T}(n)) \text{ et } \mathcal{T} - \mathcal{T}(n_1, n_2) + \mathcal{T}^*(m, \partial\mathcal{T}(n_1, n_2))$$

sont aussi des topologies de maillages.

La démonstration de ce résultat est donnée dans [Coupez91].

Mais ce résultat n'est plus vrai dès qu'il y a des nœuds internes ni lorsque  $D > 3$ . La proposition suivante définit des conditions à vérifier qui permettent de déterminer si l'on est encore en présence d'une topologie de maillage de façon plus générale.

**Proposition 2.2.6** Soit  $\mathcal{T}$  une topologie de maillage sans bord ( $\partial\mathcal{T} = \emptyset$ ). Soit  $a$  un sous ensemble d'éléments de  $\mathcal{T}$  tel que  $\partial a$  est une topologie de maillage. Soit :

$$\tilde{\partial}a = \{F = K \cap \mathcal{N}(a), \text{ card}(F) = D - 1, K \in \mathcal{T}\}.$$

Si  $\tilde{\partial}a = \partial a$  alors  $\mathcal{T} - a + \mathcal{T}^*(n, \partial a)$  est une topologie de maillage  $\forall n \in \mathcal{N}(a)$ .

La démonstration de ce résultat est donnée dans [Coupez99].

REMARQUE : une topologie de maillage n'est pas sans bord. Mais si on lui ajoute l'ensemble des éléments formés à partir des faces frontières connectées à un nœud fictif, on obtient une topologie sans bord. Nous nous placerons implicitement dans ce cas dans la suite.

On peut désormais donner la définition d'un opérateur d'extraction remplacement qui respecte la topologie de maillage. Soit  $\eta \subset \mathcal{N}$  et  $m \in \mathcal{N}$  :

$$\theta_\eta^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}(\eta)} + \mathcal{T}^*(m, \tilde{a}). \quad (2.2)$$

On a introduit pour cette définition la notation suivante relative à un sous-ensemble  $a$  de  $\mathcal{T}$  :

$$\bar{a} = \{K \in \mathcal{T}, K \subset \mathcal{N}(a)\}.$$

On remarquera que si  $\bar{a} \neq a$  alors  $\tilde{\partial}a \neq \partial a$ . De même, on peut montrer que l'égalité  $\tilde{\partial}\bar{a} = \partial a$  n'est pas systématiquement vérifiée.

Nous pouvons maintenant introduire des suites définies sur cet opérateur d'extraction remplacement qui formeront le processus d'optimisation défini pour générer un maillage. La première suite permet de travailler « autour des nœuds » :

$$\mathcal{T}^{k+1} = \theta_n^{m^k}(\mathcal{T}^k), \tag{2.3}$$

la seconde permet de travailler « autour des arêtes » :

$$\mathcal{T}^{k+1} = \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k). \tag{2.4}$$

Le choix de  $(n_k, m_k)_{k=1, \dots, \infty}$  permet de définir ces suites.

**Génération de maillage** L'algorithme de génération proprement dit peut se décomposer en trois phases :

- génération du maillage sans nœud interne ;
- création et destruction de nœuds interne ;
- couplage surface volume.

La donnée initiale est un maillage de la frontière  $\partial\mathcal{S} : (\partial\mathcal{S}, X), \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$ . On recherche une topologie sans nœud interne qui définisse un maillage du domaine défini par la frontière  $\partial\mathcal{S}$ . D'après les résultats précédents, ceci revient à chercher dans  $\mathcal{E}(\partial\mathcal{S})$  la topologie qui réalise :

$$\min_{\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\partial\mathcal{S})} \sum_{K \in \mathcal{T}} |\Omega_K|. \tag{2.5}$$

On introduit la notation suivante :

$$N^*(a) = \left\{ n \in \mathcal{N}(a), Vol(\mathcal{T}^*(n, \partial a)) = \min_{i \in \mathcal{N}(a)} Vol(\mathcal{T}^*(i, \partial a)) \right\},$$

avec  $Vol(a) = \sum_{K \in a} |\Omega_K|$ .

Le moteur de l'algorithme est donc, d'après 2.5, la minimisation du volume par optimisations successives. Pour assurer l'obtention d'un maillage, il faut assortir le critère de volume minimal par une contrainte de volume sur chaque élément (qui doit être de volume non nul). Le respect de cette dernière contrainte est obtenu par optimisation du critère de forme des éléments. Le critère de forme retenu (car peu coûteux à calculer tout en étant suffisamment discriminant) est le suivant :

$$C(K) = \frac{|\Omega_K|}{h(K)^d} \text{ avec : } h(K) = \sum_{i, j \in K} \|X(i) - X(j)\|. \tag{2.6}$$

Une stratégie pourrait consister à définir une fonction coût à minimiser à partir du critère de forme des éléments. Nous choisirons une solution alternative en munissant l'ensemble

des topologies de maillage d'une relation d'ordre. Pour cela on ordonne chaque topologie en fonction du critère de forme de ces éléments :

$$K = a_i \in a \text{ avec } i = 1, \dots, |a| ; \quad C(a_i) \leq C(a_{i+1}). \quad (2.7)$$

On peut ainsi comparer deux topologies  $a$  et  $b$  par le plus petit élément différent :

$$a < b, \text{ avec } : a \in \mathcal{E} \text{ et } b \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{N} \mid \forall i < e : a_i = b_i \text{ et } a_e < b_e.$$

L'avantage de ce choix est d'une part qu'il s'applique indifféremment localement ou globalement et, d'autre part, qu'il permet de comparer des topologies ayant un nombre quelconque d'éléments dégénérés (plats) en recherchant le premier élément non dégénéré.

Munis de cette relation d'ordre sur les topologies de maillage, de la définition des opérateurs d'extraction remplacement et des suites 2.3 et 2.4, nous pouvons décrire les trois algorithmes d'optimisation qui permettent de générer un maillage sans nœud interne à partir d'un maillage de la frontière du domaine.

---

**Algorithme 2.1** Amélioration autour des nœuds.

---

Étape 0 :

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S}) \quad (\text{étoilement du domaine})$$

Étape 1 :

$$n^k \in \mathcal{N}, \quad a^k = \overline{\mathcal{T}^k(\{n^k\})}$$

Étape 2 :

$$m^k \in \mathcal{N}^*(a^k), \quad \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \theta_{n^k}^i(\mathcal{T}^k), \quad \forall i \in \mathcal{N}^*(a^k)$$

Étape 3 :

$$\text{si } \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \mathcal{T}^k \text{ alors } \mathcal{T}^{k+1} = \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k)$$

fin Algorithme

---



---

**Algorithme 2.2** Amélioration autour des arêtes.

---

Étape 0 :

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S}) \quad (\text{étoilement du domaine})$$

Étape 1 :

$$n_1^k \in \mathcal{N}, \quad n_2^k \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(n_1^k)), \quad a^k = \overline{\mathcal{T}^k(\{n_1^k, n_2^k\})}$$

Étape 2 :

$$m^k \in \mathcal{N}^*(a^k), \quad \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^i(\mathcal{T}^k), \quad \forall i \in \mathcal{N}^*(a^k)$$

Étape 3 :

$$\text{si } \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \mathcal{T}^k \text{ alors } \mathcal{T}^{k+1} = \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k)$$

fin Algorithme

---

Les suites définies par ces algorithmes se finissent lorsqu'aucun changement n'intervient plus entre deux itérations. Plus précisément, lorsque, à l'étape 1, tous les nœuds sont

parcourus sans que l'on puisse trouver une optimisation locale, l'algorithme s'arrête. On note alors  $\mathcal{T}_{A1}^\infty(\mathcal{T})$  la topologie de maillage obtenue avec l'algorithme 2.1 à partir de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_{A2}^\infty(\mathcal{T})$  celle obtenue avec le second. L'algorithme d'optimisation global est une combinaison des deux précédents et peut se décrire de la façon suivante :

---

**Algorithme 2.3** Algorithme général.

---

Initialisation :

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S}) \quad (\text{étoilement du domaine})$$

Itérations :

$$\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}_{A2}^\infty(\mathcal{T}_{A1}^\infty((\mathcal{T}^k)))$$

fin Algorithme

---

Cet algorithme se montre, en pratique, extrêmement efficace et permet un haut niveau d'automatisation de l'outil de maillage. Néanmoins, en 3D, il n'est pas toujours possible d'obtenir un maillage sans nœud interne. L'obtention d'un maillage dans ces situations (uniquement dues à la géométrie du domaine considéré) nécessite la création d'un ou plusieurs nœuds internes. De plus, un maillage sans nœud interne est rarement satisfaisant pour effectuer un calcul éléments finis ! On notera simplement que la pratique montre qu'il est toujours plus efficace de commencer par générer un maillage sans nœud interne (même si le maillage est dégénéré à ce stade), puis de l'enrichir en créant des sommets internes.

La création, ou la destruction, de nœuds peut être vue comme une optimisation de maillage. Dès lors cette création se fait très simplement en enrichissant la liste des sommets à essayer dans les algorithmes 2.1 et 2.2 avec un nouveau nœud. Les coordonnées de ce nouveau sommet sont définies comme les coordonnées du barycentre des sommets existants :

$$\mathcal{N}^*(a) = \mathcal{N}(a) \cup \{n'\}, \quad X(n') = \sum_{i \in \mathcal{N}(a)} \frac{X(i)}{|\mathcal{N}(a)|}.$$

En pratique, il suffit d'échanger  $\mathcal{N}(a)$  par  $\mathcal{N}'(a)$  dans les suites 2.1 et 2.2 pour que des nœuds soient créés (algo. 2.2), détruits ou déplacés au barycentre de leurs voisins (algo. 2.1) si, et seulement si, cela améliore la topologie de maillage obtenue.

La méthode de génération proposée respecte la géométrie du domaine à mailler au sens où l'on suppose que le maillage de la frontière du domaine (la donnée initiale pour notre méthode) respecte lui même la géométrie. Toutefois il peut être souhaitable de modifier la triangulation de cette frontière soit pour les besoins du calcul soit pour améliorer localement la qualité des éléments. Pour cela, T. Coupez propose un couplage fort entre volume et surface : sa solution consiste à considérer les sommets et éléments frontières comme intérieurs au maillage. Pour cela, on étend le maillage courant en un maillage virtuel en dédoublant chaque sommet frontière. Chaque nœud frontière est alors relié à son double ainsi qu'au double des sommets frontières voisins créant ainsi une couche d'éléments « virtuels ». Soit  $n$  un nœud frontière et  $n_v$  son double, l'ensemble des tétraèdres virtuels associés à ce double est défini par :

$$\mathcal{T}_v(n_v) = \mathcal{T}^*(n^*, (\partial\mathcal{T})(n)).$$

Cette nouvelle couche d'éléments rend le maillage étendu non conforme (ces éléments se superposent) mais n'affecte pas l'algorithme d'optimisation. Il suffit ensuite de remarquer qu'une surface est un domaine de volume nul, ce qui permet d'énoncer la condition d'obtention d'un maillage du domaine  $\Omega$  :

**Proposition 2.2.7** *Soit  $(\mathcal{T}, X)$  tel que  $(\partial\mathcal{T}, X)$  forme une triangulation de la frontière de  $\Omega$ . Alors  $(\mathcal{T}_r, X)$  engendre un maillage conforme de  $\omega$  ssi :*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |\Omega_K| = |\Omega| \quad \text{et} \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_v(\mathcal{T})} |\Omega_K| = 0.$$

Avec les notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_r &= \mathcal{T} - \mathcal{T}_v, \\ \mathcal{T}_v &= \{K \in \mathcal{T}, K \cap \mathcal{N}_v \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{N}_v &: \text{l'ensemble des sommets virtuels.} \end{aligned}$$

Pour s'assurer que le volume des éléments virtuels est nul au départ de l'algorithme, on affecte aux nœuds virtuels les mêmes coordonnées que leur double. Ceci termine la description de la méthode de génération de maillage par adaptation locale.

**Adaptation de maillage** Ce dernier paragraphe est consacré à montrer comment on peut aisément générer un maillage adapté (respectant une carte de taille de maille) avec l'algorithme décrit ci-dessus. La technique présentée ici sera reprise pour générer des maillages anisotropes.

Soit  $H$  une carte de taille de maille définie sur  $\Omega$  comme une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Soit  $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, X)$  un maillage de  $\Omega$  et  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions continues linéaires par morceaux par éléments :

$$\mathcal{H} = \{H_h \in C^0(\Omega), H_h|_K \in P^1(K), \forall K \in \mathcal{T}\}.$$

Si on considère  $H_h \in \mathcal{H}$  comme l'interpolée de  $H$ , la théorie de l'interpolation permet d'écrire :

$$\|H_h - H\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2).$$

Mais, si l'on admet que la taille du maillage en un point quelconque du domaine  $\Omega$  est la taille de l'élément le contenant, il convient de donner une expression  $P^0$  par élément à la carte de taille de maille. On obtient ce champ  $P^0$  par projection dans l'ensemble des constantes par éléments :

$$H_K = \sum_{i \in K} \frac{H_h(X(i))}{D}.$$

Pour adapter le maillage afin qu'il respecte la carte de taille de maille prescrite, il suffit donc de minimiser sur chaque élément l'écart entre sa taille réelle  $H(K)$  et la taille requise  $H_K$ . Ceci est obtenu en modifiant dans les algorithmes 2.1 et 2.2 le critère de forme des éléments qui devient :

$$C^*(K, H_K) = \frac{\min(|K|, |K_{eq}(H_K)|)}{\max(|K|, |K_{eq}(H_K)|)} \cdot C(K). \quad (2.8)$$

où  $|K_{eq}(H_K)|$  est le volume du simplexe équilatéral de taille  $H_K$ . Les figures 2.4 et 2.5 illustrent les capacités de la méthode de génération/adaptation dans le cadre d'applications dynamiques.

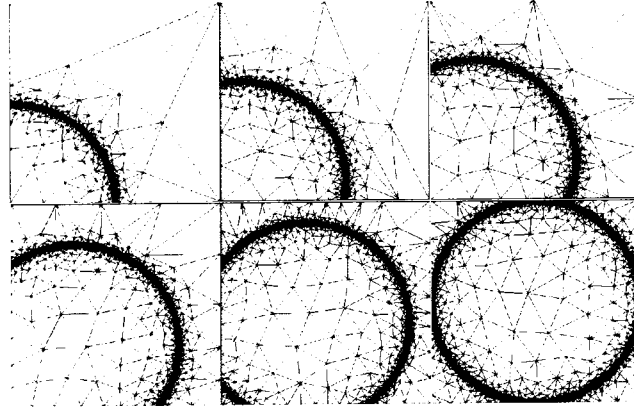


FIG. 2.4 – Propagation d’un front d’adaptation de maillage (*tiré de [Coupez99]*).

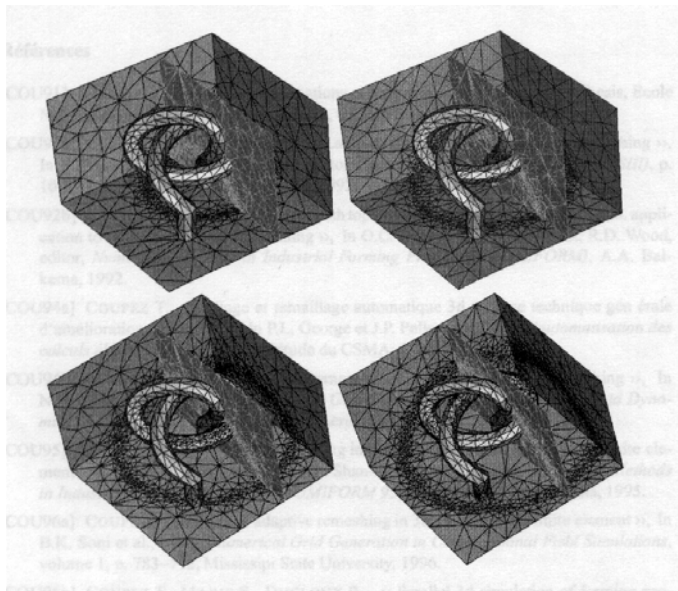


FIG. 2.5 – Propagation d’un front d’adaptation de maillage (sphère) autour d’un nœud (*tiré de [Coupez99]*).

## 2.2.2 Rappels

Avant de présenter les méthodes de génération de maillages anisotropes, nous rappelons quelques définitions et résultats d'algèbre linéaire utiles.

**Définition 2.2.8** *Un produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  est une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur  $E$ , soit une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y, z \in E$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :*

$$\begin{aligned} \langle (\alpha x + \beta y), z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle &\geq 0 \\ \langle x, y \rangle = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

**Définition 2.2.9** *Une application  $\rho$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall x, y, z \in E$  :*

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(y, x) \\ \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \\ \rho(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

*est une métrique euclidienne sur  $E$ .*

**Proposition 2.2.10** *Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur l'espace vectoriel  $E$ . L'application  $\rho$  définie par :*

$$\forall x, y \in E \quad \rho(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

*est une métrique sur  $E$ .*

**Proposition 2.2.11** *Sur  $\mathbb{R}^n$ , un produit scalaire peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :*

$$\langle x, y \rangle = x^T M y$$

*avec  $M$  une matrice  $n \times n$  symétrique définie positive.*

Munis de ces définitions et résultats, on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

**Proposition 2.2.12** *Soit un maillage  $\mathcal{M}(\mathcal{T}, X)$ . Si  $K$  est un élément du maillage non dégénéré, il existe une et une seule métrique  $M$ , induite par un produit scalaire, pour laquelle  $K$  est un élément équilatéral de côté 1.*

On trouvera une démonstration de ce résultat (en 2D) dans [Vallet92, ch. 1] .

À partir de cette propriété locale, on peut définir un espace de contrôle qui permet de générer des maillages anisotropes. Cet espace de contrôle est défini par la donnée de  $M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  où  $M(x)$  est la métrique au point  $x$ . On peut aussi dire que  $\{M(x), x \in \Omega\}$  définit une métrique *riemanienne* sur la variété  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Dans cette métrique riemanienne, la longueur d'une courbe  $\Gamma$  est donnée par :

$$l(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma'(t)^T M(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt, \quad (2.9)$$



avec les notations  $\gamma : [t_0, t_1] \mapsto \Gamma$  la représentation paramétrique de  $\Gamma$  (soit  $\gamma(t) = (x_1(t), x_i(t), \dots)_{i=2, \dots, d}^T$ ) et  $\gamma'(t) = \left(\frac{dx_i}{dt}(t)\right)^T$ .

Dans la suite, nous supposons toujours que la métrique considérée est induite par un produit scalaire. Sa forme matricielle  $M$  a donc la propriété d'être symétrique définie positive (et donc définie par 3 coefficients en  $2D$  et 6 en  $3D$ ). Elle peut se décomposer sous la forme de matrices de rotations et d'une matrice diagonale.

Plus particulièrement, sur un élément de maillage<sup>1</sup>  $K$ , on écrira en dimension  $2^2$  :

$$M = \mathcal{R}(\alpha) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}(\alpha) \quad (2.10)$$

avec :

- $\alpha$  : angle de la rotation ;
- $\lambda_1 = 1/l_1^2$  : où  $l_1$  est la longueur de l'élément  $K$  dans la direction  $\alpha$  ;
- $\lambda_2 = 1/l_2^2$  : où  $l_2$  est la longueur de  $K$  dans la direction orthogonale.

L'interprétation géométrique de la métrique dans le plan est illustrée par la figure 2.2.2 : dans le cas du contrôle anisotrope, le cercle circonscrit au triangle équilatéral unité est transformé en une ellipse de rayons  $l_1$  et  $l_2$  (resp. pour son grand et son petit axe) dont le grand axe fait un angle de  $\alpha$  avec l'axe des abscisses.

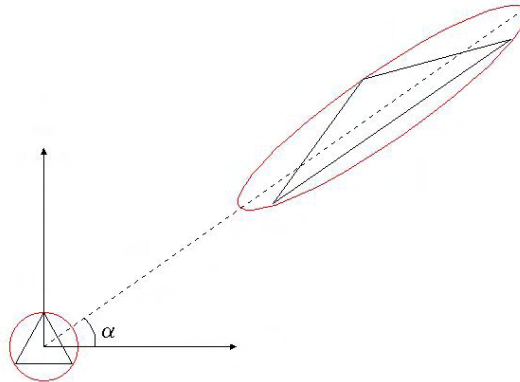


FIG. 2.6 – Représentation géométrique de la métrique dans le plan.

REMARQUE : le contrôle isotrope du maillage (tel qu'on l'a défini dans le paragraphe dédié à l'adaptation de maillage) peut être vu comme un cas particulier du contrôle anisotrope. Il suffit de substituer la carte de taille de maille par une carte de métrique du type :

$$M = \frac{1}{H_K^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Naturellement, nous sous-entendons ici le fait que l'on doit interpoler la métrique  $\{M(x), x \in \Omega\}$  sur le maillage  $\mathcal{M}(\mathcal{T}, X)$ . Nous choisissons une interpolation du même type que celle proposée dans le paragraphe consacré à l'adaptation de maillage pour la méthode de génération par optimisation. De même, il est nécessaire d'intégrer numériquement l'expression la longueur d'une courbe (eq. 2.9).

<sup>2</sup>On se place dans un contexte bidimensionnel pour plus de simplicité d'écriture, mais tous ces résultats s'appliquent de façon identique en  $3D$ .

Cette généralisation de la fonction de raffinement (carte de taille de maille) a permis de modifier certains algorithmes de génération de maillage sous contrôle isotrope pour générer des maillages anisotropes.

### 2.2.3 Génération de maillages anisotropes

La génération de maillages anisotropes dans des pièces minces est un sujet qui intéresse des domaines scientifiques variés pour des applications souvent « ponctuelles ». Ainsi, les techniques de maillages qui ont été développées pour ces applications l'ont été parfois sans soucis de généralité. La méthode la plus souvent rencontrée est la méthode d'adaptation à partir d'un maillage isotrope selon l'algorithme présenté en introduction de ce chapitre. Après avoir brièvement décrit celle-ci, nous exposerons deux méthodes de génération qui ont la particularité d'avoir été conçues pour mailler des domaines caractérisés par d'importants rapports de forme. Enfin, nous nous intéresserons à trois méthodes dérivées de techniques isotropes (méthode frontale, de Delaunay et d'optimisation) qui apportent une réponse plus générale à la génération de maillages anisotropes.

#### a) Méthodes d'adaptation

Dans le cas des méthodes d'adaptation, il ne s'agit pas de générer *ab nihilo* un maillage anisotrope mais d'adapter un maillage initial isotrope sur lequel une carte d'erreur aura été calculée. Le plus souvent l'estimateur d'erreur est basé sur le calcul de la dérivée seconde (hessien) de la solution ([Castro diaz et al.95], [Fortin et al.96] ou [Peraire et al.87]). Dans [Fortin et al.96], l'erreur est intégrée le long des arêtes du maillage ce qui permet d'obtenir, en plus du niveau d'erreur, une information sur sa direction (on cherche en fait les directions du gradient de l'erreur). Les arêtes peuvent alors être coupées en deux ou des nœuds sont supprimés selon le principe d'équirépartition de l'erreur sur chaque arête. Les résultats obtenus sont convaincants (voir fig. 2.7), aussi la méthode d'adaptation est moins l'objet d'améliorations techniques que les travaux sur l'estimation d'erreur ([Pichelin et al.00]) et les moyens d'en extraire une information caractérisant l'anisotropie des champs étudiés.

Ces méthodes restent néanmoins confinées à l'adaptation de maillage, ce qui exige de partir d'un maillage initial isotrope et d'effectuer plusieurs calculs successifs pour converger vers un maillage adapté.

#### b) Méthode de raffinement anisotrope

La présentation de cette méthode s'inspire des travaux de ([Garimella et al.99] qui en font une description complète dans leur article. Il faut tout d'abord générer un maillage isotrope du domaine. Puis on cherche les sous domaines où le nombre d'éléments est insuffisant par rapport aux souhaits de l'utilisateur. Pour chaque nœuds de la surface, on cherche le nœud « opposé » (dans la direction de la normale locale à la frontière et sur la surface « opposée », voir fig.2.8(a)). On procède de la même façon pour les arêtes et les éléments. Ceci permet de définir des « parts » (*wedges*) de maillage (voir fig.2.8(b)). Les auteurs découpent alors les segments joignant deux faces opposées en autant de segments qu'ils souhaitent obtenir d'éléments dans l'épaisseur du domaine. Chaque nœud ainsi créé est relié à deux nœuds frontières de la part de maillage considérée. On obtient ainsi un maillage avec le nombre d'éléments désiré dans l'« épaisseur ». Ces éléments présentent

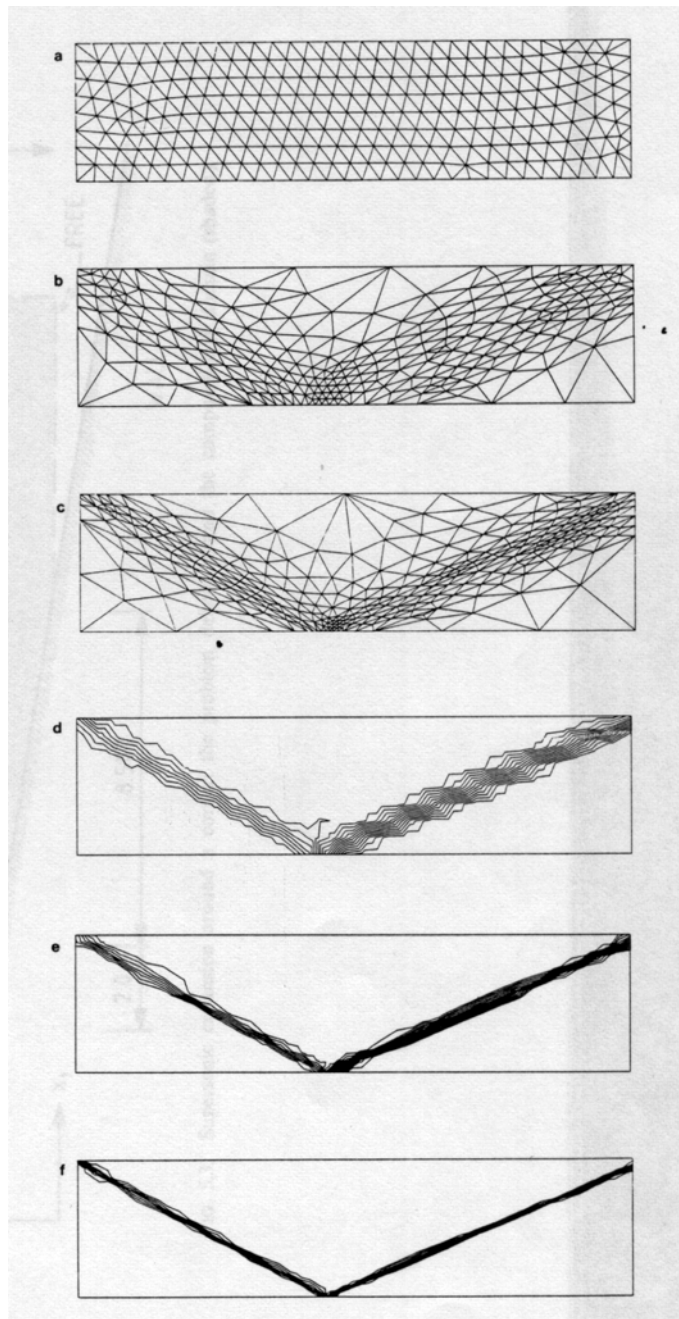


FIG. 2.7 – Choc régulier réfléchi sur une paroi (*tiré de [Peraire et al.87]*).

toutefois un critère de forme qui peut être très mauvais, ils sont alors améliorés par un algorithme d'inversion des diagonales. Ceci termine l'algorithme d'un point de vue théorique. En pratique, il existe un certain nombre de cas particuliers à traiter en fonction des topologies de maillage rencontrées. De même, le maillage initial doit être pré-traité pour obtenir des parts de maillages suffisamment régulières et favoriser ainsi l'étape de création des nœuds. Un exemple de maillage obtenu avec cette technique est présenté figure 2.9.

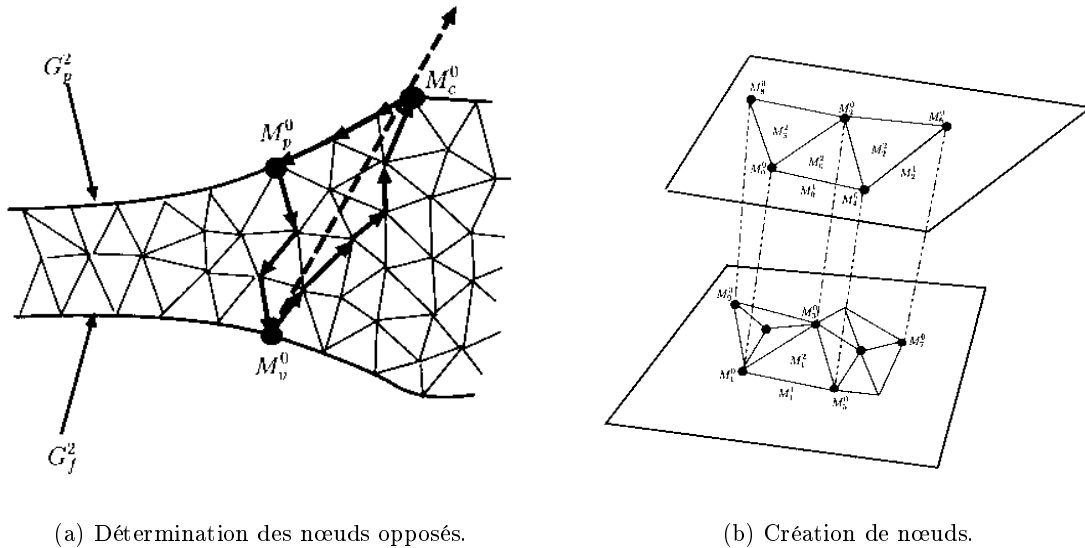


FIG. 2.8 – Description de l'algorithme de raffinement.

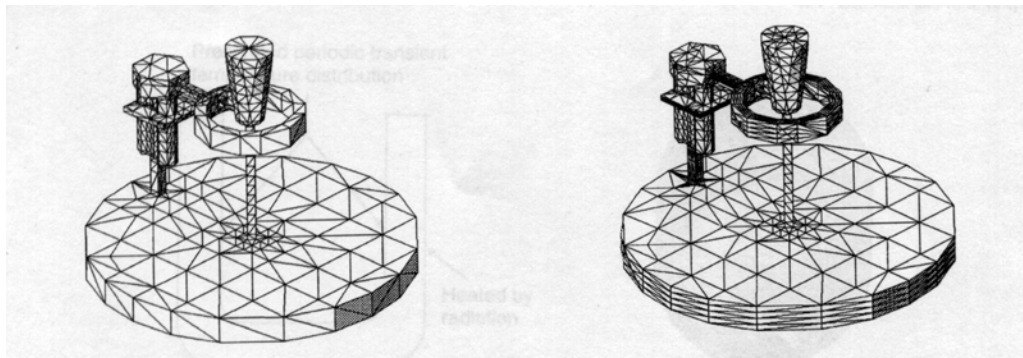


FIG. 2.9 – Application du raffinement anisotrope ( [Garimella et al.99]).

En conclusion, notons que cette technique nécessite de mailler au préalable de façon isotrope le domaine considéré (cette étape n'étant pas triviale si le domaine présente un important rapport d'allongement) ; que la recherche des nœuds, segments et faces opposés est nécessairement coûteuse et qu'il existe un certain nombre de cas particuliers à traiter. Cette technique semble, en définitive, peu envisageable en tant qu'outil de remaillage ou de maillage adaptatif automatique.

### c) Méthode d'« extrusion »

Dans le cadre d'une étude sur la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces, M. Bellet et son équipe ont mis au point une technique de

génération de maillage et remaillage anisotrope originale. Les procédés de mise en forme concernés (emboutissage et hydroformage) s'appliquent à des tôles de faibles épaisseurs. Les simulations de ces procédés se font selon une description lagrangienne du mouvement. Le domaine d'étude, la feuille métallique, est donc maillé de façon anisotrope en regard des rapports de forme des tôles considérées (quelques dizaines de centimètres en longueur et largeur pour une épaisseur de l'ordre du millimètre).

La technique de maillage peut succinctement se décrire de la façon suivante :

1. la surface moyenne de la feuille est triangulée avec un mailleur surfacique (triangles, non-structuré) ;
2. chaque élément triangulaire est extrudé selon la direction normale à la surface moyenne pour obtenir des éléments prismatiques. La position des nœuds extrudés est calculée en fonction de l'épaisseur de la feuille (stockée aux nœuds) ;
3. chaque prisme est divisé en cinq tétraèdres.

Chaque couche d'éléments est ainsi composée du même nombre de nœuds (les auteurs utilisent d'ailleurs cette propriété en se servant de la numérotation des nœuds pour retrouver les nœuds qui sont sur une même « hauteur »). Cette technique de génération est aussi appliquée dans le cadre du remaillage (ce remaillage s'effectue sur la surface moyenne). Ceci présente le grand avantage d'être extrêmement efficace en terme de temps de (re)maillage puisque cette étape a toujours lieu dans un contexte 2D. Il faut toutefois relever que l'étape de découpage des prismes en cinq sous tétraèdres n'est pas triviale puisque'il faut que le découpage d'un prisme concorde avec le découpage des prismes adjacents. L'algorithme développé par les auteurs pour ce problème ne semble pas pénaliser les temps de calcul.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux produits plats présentant peu de variations d'épaisseur. En fait, on peut faire ici la même analyse que pour le modèle de Hele-Shaw qui lui aussi repose sur la définition d'une surface moyenne. On en conclut donc que cette méthode est peu adaptée pour le problème qui nous intéresse.

Nous invitons le lecteur intéressé à consulter [Knockaert00, chap. 3] pour une description complète de cette méthode.

### d) Méthode frontale - Méthode de Delaunay

Les méthodes présentées jusqu'ici se montrent relativement efficaces pour les applications auxquelles elles se destinent. Mais aucune d'entre elles ne peut prétendre apporter une réponse générique au problème de la génération de maillage anisotrope alors que, dans le contexte isotrope, nous avons pu présenter un certain nombre d'algorithmes génériques (et efficaces). Certains auteurs ont donc tenté d'apporter une réponse satisfaisante à ce problème, le plus souvent en réutilisant ces algorithmes performants pour générer des maillages isotropes sous la contrainte d'une carte de taille de maille. Toutes les solutions proposées reposent sur le même principe : substituer l'espace de contrôle isotrope défini par la carte de taille de maille par un espace de contrôle anisotrope défini par une carte de métriques. C'est ce que propose par exemple [Lee99] qui reprend l'algorithme *frontal* et modifie le calcul des longueurs des segments, des angles, des surfaces, ... De même l'algorithme de *Delaunay* est généralisé à la génération anisotrope par [Borouchaki et al.95], [Castro diaz et al.95] et [Vallet92]. Là encore les modifications sont mineures puisque le calcul de la longueur des segments (selon une approximation de l'équation 2.9), de l'aire et du critère des éléments sont modifiés suivant une métrique donnée initialement. Les résultats obtenus sont satisfaisants et démontrent une certaine capacité à traiter différentes géométries (voir

fig. 2.1) voire différents types d'éléments (mais le plus souvent, il s'agit de maillages bidimensionnels). Les qualités et les défauts que l'on peut reconnaître à ces algorithmes sont finalement les mêmes que ceux de leur version isotrope.

### e) Méthode d'optimisation

Comme dans le cas de l'adaptation isotrope, la seule modification à opérer dans la méthode développée par T. Coupez pour son mailleur MTC® concerne le calcul du critère de forme des éléments. Pour cela, on introduit la matrice  $Q$  qui, pour un élément quelconque  $K$ , définit la transformation affine (non singulière) telle que l'image de  $K$  soit un triangle (tétraèdre) équilatéral de côté 1. On a donc :

$$M = Q^T Q, \quad (2.11)$$

et :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{l_d} \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}. \quad (2.12)$$

Le critère de forme de l'élément  $K$  s'écrit alors :

$$C(X, K, Q) = \left( \min \left( H(Q.X, K), \frac{1}{H(Q.X, K)} \right) \right)^d . C(Q.X, K). \quad (2.13)$$

Le critère définit ainsi le tétraèdre (triangle) équilatéral normalisé comme optimal dans l'espace transformé. Le reste de l'algorithme de génération/adaptation de maillage reste strictement identique. Les exemples suivants (voir fig. 2.10 et 2.11) démontrent l'efficacité de cette technique aussi bien en  $2D$  qu'en  $3D$ .

Pratiquement, la génération automatique est obtenue en donnant au mailleur un fichier de données contenant le maillage et la carte définissant  $Q$ . Le fichier suivant est celui qui permet de passer de la discrétisation de la frontière de la plaque (fig. 2.11(a)) au maillage volumique.

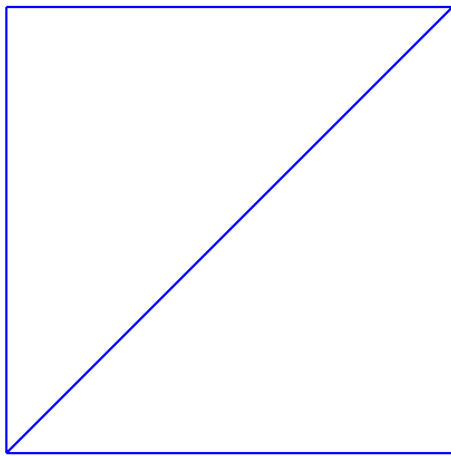
```
[ M : plaque.t ]
```

```
[ metrique= 8
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
0.5 0 0 0 6 0 0 0 0.5
]
```

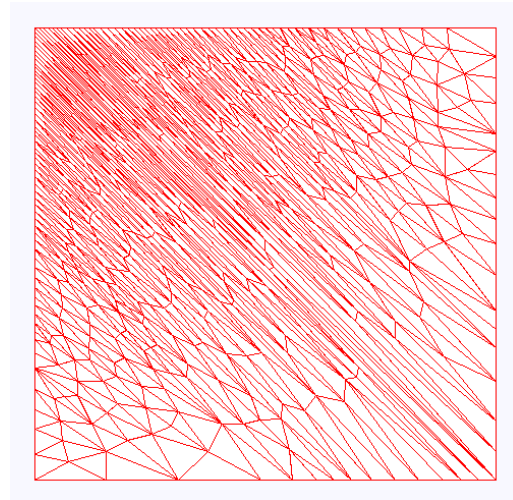
← nom du fichier contenant le maillage.

← tenseur  $Q$  (noté *métrique* par abus de langage) donnée en chaque noeud du maillage initial.

Le temps de génération du maillage de la plaque (fig. 2.11(b)) est inférieur à 3s. sur un ordinateur de bureau (Céléron 466Mhz, 64Mo).

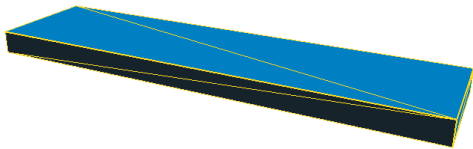


(a) Maillage initial.

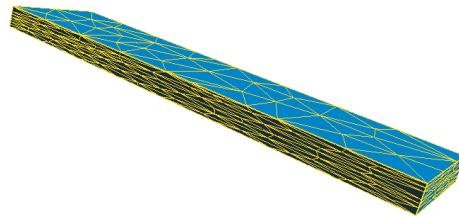


(b) Maillage anisotrope (307 nœuds et 540 éléments).

FIG. 2.10 – Génération automatique de maillage anisotrope en  $2D$ .



(a) Maillage initial.



(b) Maillage anisotrope (420 nœuds et 2152 éléments).

FIG. 2.11 – Génération automatique de maillage anisotrope en  $3D$ .

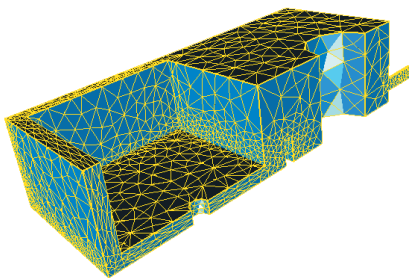


FIG. 2.12 – Maillage mixte (iso/anisotrope).

## 2.2.4 Conclusion

Les méthodes de maillage qui reposent sur un espace de contrôle anisotrope défini par une métrique semblent apporter la réponse la plus efficace, la plus globale et la plus automatique au problème de la génération de maillages anisotropes. Si l'on se satisfait des défauts et qualités des algorithmes sur lesquelles elles sont basées (les mêmes que dans le cas isotrope), la seule contrainte supplémentaire est de fournir une métrique sur le domaine que l'on souhaite mailler. La littérature ne recèle actuellement que peu d'exemples de maillages anisotropes tridimensionnels sur des pièces que l'on qualifiera d'« industrielles ». Faut-il voir là un certain manque d'efficacité de ces méthodes ? L'expérience que nous avons sur la méthode que nous proposons nous laisse penser que les temps de calculs ne sont pas significativement plus élevés que pour un maillage isotrope de même complexité (en effet, seul le calcul du critère de forme est modifié). Sur l'ensemble des pièces que nous avons traitées, la principale difficulté rencontrée concerne les grands rapports de forme (supérieurs à 20) et les forts gradients sur la carte des métriques (le calcul des qualités locales peut alors être affecté par des valeurs proches de la précision numérique requise pour l'algorithme d'optimisation et stopper celui-ci). Ces maillages « extrêmes » peuvent tout de même être obtenus en procédant par étapes (on part d'une métrique avec des rapports de forme plus faibles pour, en 2 ou 3 étapes, atteindre les rapports de forme désirés).

Reste que si l'obtention d'un maillage anisotrope par l'une de ces méthodes est quasiment automatique (peu ou pas d'intervention de l'utilisateur), la donnée de la (carte de) métrique sur le domaine  $\Omega$  à mailler requiert une certaine connaissance. Cela peut être une connaissance de la localisation de phénomènes physiques anisotropes et de leur orientation. Cela peut être aussi la géométrie même du domaine qui peut présenter des élancements. Dans ces deux cas, il faut alors savoir traduire cette connaissance sous la forme d'une carte de métrique. Finalement, pour l'utilisateur, la génération d'un maillage adapté à son problème reste une tâche ardue. Pourtant, des outils permettent d'espérer lever cette dernière difficulté. Le premier est déjà bien connu puisqu'il s'agit de l'*estimation d'erreur* : on estime l'erreur commise sur le calcul que l'on est en train de réaliser et on en extrait l'information pour adapter le maillage et réduire cette erreur. C'est un outil assez répandu dans le cas de calculs sur des maillages isotropes mais assez peu dans le cadre anisotrope : nous tenterons donc d'apporter des éléments de réponses dans ce contexte. Mais auparavant, nous nous intéresserons à la géométrie même du domaine en étudiant si l'on ne peut pas « identifier » cette géométrie à une carte de métrique.

## 2.3 Métrique naturelle

Nous avons souhaité développer un outil permettant de déterminer automatiquement, pour un maillage donné, la carte des métriques associées à chaque élément du maillage (*i.e.* la métrique pour laquelle l'élément est vu comme isotrope). Le but de cet outil est très pragmatique et consiste à générer à moindre coût un maillage anisotrope à partir d'un maillage minimal du domaine. On entend par « maillage minimal » le maillage obtenu en génération libre : seul le critère du respect de la géométrie est considéré, aucun critère de forme des éléments n'est pris en compte. L'algorithme de maillage décrit au paragraphe c) permet ce type de création de maillage. La création du maillage est très rapide et le nombre d'éléments le constituant est minimal. En observant l'exemple suivant (fig.2.13(a)), on peut supposer que ce type de maillage contient l'information sur l'anisotropie du domaine. Si l'on parvient à exprimer cette information sous la forme d'une carte de métriques associée



au maillage, on pourra par exemple raffiner très simplement de manière anisotrope notre maillage et obtenir le maillage 2.13(b).

Puisque la méthode de génération anisotrope que nous avons développée requiert la donnée de la matrice  $Q$  définissant la transformation qui ramène l'élément courant à l'élément de référence, il semble naturel de vouloir déterminer la valeur de  $Q$  en chaque nœud du maillage minimal. En rappelant que :

$$M = Q^T Q = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1},$$

il suffit alors de calculer les coefficients de  $Q$  en fonction des angles de rotation et des longueurs caractéristiques  $l_1, \dots, l_d$  pour, par exemple, diviser ces longueurs par un facteur donné par l'utilisateur. L'exemple de la figure 2.13 illustre cette technique. La carte de métrique a été calculée sur le maillage minimal, puis elle a été modifiée pour raffiner le maillage en préservant les rapports de forme des éléments. Cette nouvelle carte de métriques permet alors de générer automatiquement le maillage final.

REMARQUE : pour cet exemple, l'élément de référence choisi pour définir la transformation  $Q$  n'est pas équilatéral mais orthogonal. On souhaitait ainsi observer si le maillage final présentait ce caractère orthogonal (intéressant pour certains solveurs). Ce caractère se retrouve bien, par exemple dans la partie isotrope du maillage.

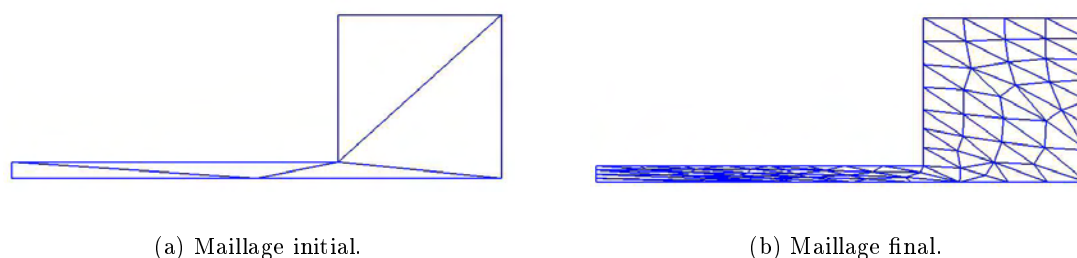


FIG. 2.13 – Métrique naturelle et importante variation du rapport de forme.

Mais si l'on observe attentivement le maillage final, le résultat n'est pas optimal. En particulier, si l'on étudie l'extrémité gauche (partie anisotrope) du maillage (voir le grossissement fig. 2.14) on remarque des variations dans l'orientation principale de l'étirement des éléments. Cette observation se justifie par le fait que l'application représentée par  $Q$  n'est pas injective : il existe évidemment une infinité d'éléments équilatéraux pour une métrique donnée. Tous ces éléments ont en commun leur volume et leur allongements mais diffèrent par leur orientation.

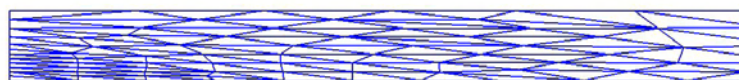


FIG. 2.14 – Zoom sur la partie mince : dualité sur l'orientation du maillage.

L'exemple illustré par la figure 2.15 met encore plus clairement en évidence la carrence

de la méthode. Si le raffinement respecte le facteur qui a été imposé par l'utilisateur, l'orientation du maillage n'est pas « conforme » à ce que l'on pouvait attendre.

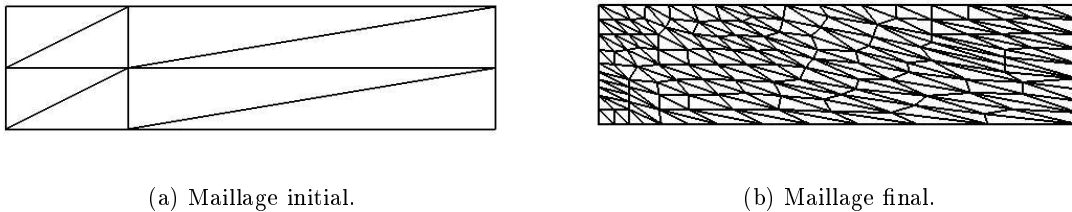


FIG. 2.15 – Changement de l'orientation principale du maillage.

Néanmoins, l'approche décrite ici permet de travailler sur les étirements des éléments (et ce à faible coût de calculs). Il suffirait de l'enrichir par un contrôle sur l'orientation du maillage (de la géométrie?) pour obtenir un outil robuste qui serait une étape de plus vers l'automatisation de la génération du maillage. Nous ne sommes pas à ce jour allé plus loin dans le développement de cet algorithme. Notre but initial était très pragmatique en souhaitant avoir un outil très simple et rapide qui permette de générer rapidement des cartes de métriques pour évaluer les performances du mailleur anisotrope. Dans ce cadre, les défauts d'orientation n'étaient pas préjudiciables. Cet outil préfigure toutefois un outil en cours de réalisation qui, comme on l'a déjà remarqué, permettra d'augmenter le niveau d'automatisation de la génération de maillage anisotrope. En particulier, le problème lié à l'orientation pourrait être résolu en considérant des *patches* d'éléments (autour d'un élément ou d'un nœud) dont on détermine l'orientation principale. Cette information permettra alors de déterminer, pour chaque élément, les valeurs des angles ( $\alpha, \dots$ ) qui, avec les valeurs des longueurs ( $l_1, \dots, l_d$ ) déjà connues, permettront de déterminer  $Q$ .

Nous nous sommes jusqu'ici intéressé au problème de la génération de maillage anisotrope. Pour cela nous avons proposé une méthode de génération qui permet, à partir d'une carte de métriques et de la discrétisation de la frontière d'un objet, d'en mailler automatiquement le volume. Nous avons supposé la carte des métriques connue. Cette connaissance *a priori* des métriques est celle de l'utilisateur qui, à partir de la géométrie de la pièce, calcule la carte de métriques associée (ou celle qui pourrait être fournie de façon relativement automatique par un outil tel que la « métrique naturelle »). Mais le maillage obtenu peut être optimal en regard de la géométrie de la pièce et ne pas l'être pour le calcul dont il va être le support. Pour cela, il faut être capable de mesurer quantitativement la précision du calcul et, le cas échéant, optimiser le maillage relativement à l'erreur commise. Il ne s'agit plus alors de génération mais d'adaptation de maillage, adaptation pilotée par un critère issu de l'*estimation d'erreur*.

## 2.4 Estimation d'erreur

### 2.4.1 Estimations *a priori* et *a posteriori*

Classiquement, on distingue deux types d'estimateurs d'erreur : les estimateurs *a priori* et les estimateurs *a posteriori*. Afin de mettre en évidence ce qui les distingue, considérons le problème général suivant :

$$L(u) = f \text{ sur } \Omega, \quad (2.14)$$

où  $L$  est un opérateur linéaire muni de conditions aux bords sur un domaine  $\Omega$ . La solution  $u$  de ce problème ainsi que son second membre  $f$  appartiennent à un espace de Hilbert  $V$  muni de son produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_V$ . On note  $u_h$  l'approximation de  $u$  associée au maillage  $\mathcal{T}_h$  et  $e_h = u - u_h$  l'erreur de discrétisation.

Un estimateur d'erreur *a priori* permet de majorer  $e_h$  (dans une norme appropriée) en fonction de la taille de maille du maillage et de la norme des dérivées de la solution exacte  $u$ . De façon générale ce résultat peut s'écrire :

$$\|e_h\|_W \leq Ch^p \|D^i\|_Y, \quad (2.15)$$

où  $\|\cdot\|_W$  et  $\|\cdot\|_Y$  sont des normes appropriées et  $C$  est une constante d'interpolation dépendante de la discrétisation choisie mais indépendante de la taille de maille  $h$ . La valeur de  $p$  dépend du problème considéré, de la discrétisation et des normes choisies ( $D^i$  représente la  $i$ -ème dérivée de  $u$ ).

Exemple, dans le cas du problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et d'une discrétisation linéaire par élément, on a classiquement l'estimation *a priori* :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

avec  $f$  et  $\Omega$  suffisamment réguliers (le lecteur intéressé trouvera une démonstration de ce résultat dans [Girault et al.81] ou [Pironneau88] ).

Dans le cadre de l'estimation *a posteriori*, l'erreur de discrétisation est évaluée comme une fonction de quantités calculées numériquement. Parmi ces estimateurs d'erreur, nous nous intéresserons principalement aux estimateurs basés sur le *résidu*<sup>3</sup> :  $R(u_h) = f - L(u_h)$ . De même que précédemment, on peut écrire de façon générique :

$$\|e_h\|_W \leq Ch^\alpha \|R(u_h)\|_Y, \quad (2.16)$$

où  $\alpha > 0$  dépend encore du problème considéré, de la discrétisation et des normes choisies.

Ainsi, en comparant (2.15) et (2.16), on peut remarquer que :

<sup>3</sup>les autres estimateurs *a posteriori* se regroupent en trois classes : les méthodes hiérarchiques [Bank et al.93], les estimateurs type Zienkiewicz-Zhu [Fourment92] et les méthodes qui s'appuient sur la résolution de problèmes locaux [Babuska et al.78]

- Dans le premier cas, l'erreur est évaluée en fonction de la solution exacte  $u$  du problème continu (2.14) et des conditions aux limites, alors que la connaissance de  $u_h$  n'est pas requise. On ne peut pas tirer d'information quantitative sur l'erreur d'approximation de cet estimateur puisqu'il est donné en fonction de la solution  $u$  qui est inconnue. En fait, ce type d'estimateur est généralement employé pour prévoir le comportement asymptotique de l'erreur lorsque l'on diminue la taille de maille ( $h \rightarrow 0$ ).
- À l'inverse, l'estimation *a posteriori* donne une majoration de l'erreur  $e_h$  que l'on peut quantifier puisque son expression est fonction de la solution approchée  $u_h$  calculée. En revanche, si le comportement de  $R(u_h)$  lorsque  $h \rightarrow 0$  n'est pas connu, on ne peut en déduire le comportement asymptotique de l'erreur.

Naturellement, en regard de la stratégie adaptative décrite en introduction, seuls les estimateurs *a posteriori* sont à même de donner une carte d'erreur locale dont on puisse extraire l'information nécessaire au maillieur. Dans la suite nous nous attacherons donc principalement à la description des estimateurs *a posteriori*.

Rappelons enfin que le problème qui nous intéresse consiste à optimiser le rapport qualité/coût de calcul d'un écoulement de fluide visqueux incompressible dans un domaine aux grands rapports de forme. L'estimateur d'erreur sera donc appliqué au problème de Stokes et doit permettre de contrôler l'anisotropie du maillage élément fini support du calcul.

## 2.4.2 Erreur d'interpolation

Avant de présenter les estimateurs d'erreur que nous avons testés, il convient de rappeler quelques résultats de la théorie de l'interpolation utiles pour borner inférieurement l'estimateur *a posteriori*.

**Définition 2.4.1 (interpolation de Lagrange)** Soit  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  et  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$ . L'opérateur d'interpolation linéaire de Lagrange est défini par :

$$\pi_h : \begin{cases} C^0(\overline{\Omega}) & \longrightarrow V_h \\ \pi_h(u)(N_i) & = u(N_i) \end{cases}$$

où  $V_h$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  et linéaires par morceaux sur chaque élément du maillage.

**Théorème 2.4.2 (estimation de l'erreur d'interpolation de Lagrange)** Soit  $m = 0, 1$ . Il existe une constante positive  $C_i$ , uniquement dépendant de  $m$ , telle que :

$$|u - \pi_h(u)|_{H^m(K)} \leq C_i \frac{h_K^2}{\rho_K^m} |u|_{H^2(K)}. \quad (2.17)$$

Cette estimation locale s'étend facilement à l'ensemble du domaine  $\Omega$  considéré dans le cas où  $m = 0$ . On a alors le résultat suivant :

**Corollaire 2.4.3** Soit  $u \in H^2(\Omega)$ , et  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante positive  $C$  telle que :

$$\|u - \pi_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \quad (2.18)$$

REMARQUE : on peut trouver dans la littérature des stratégies d'adaptation de maillage qui reposent sur l'estimation de l'erreur d'interpolation. Ces approches, bien qu'heuristiques, donnent des résultats intéressants par exemple dans le cas d'écoulements compressibles. La supposition qui est faite est que l'erreur de discrétisation se comporte comme l'erreur d'interpolation. L'erreur d'interpolation est elle même évaluée en approximant les dérivées de la solution  $u$  par les dérivées de la solution numérique calculée sur un maillage initial (voir par exemple [Castro diaz et al.95, chap. 1] et [Fortin et al.96]). Ce type d'estimation est naturellement du type *a priori*.

## 2.5 Estimation d'erreur *a posteriori* Problème de Stokes

Prenons comme problème modèle le problème de Stokes :

$$\begin{cases} 2\eta \nabla \cdot \varepsilon(\vec{u}) - \nabla p & = f \\ \nabla \cdot \vec{u} & = 0 \end{cases} \text{ dans } \Omega$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Appliquant à ce problème la méthode de Galerkin, nous obtenons la formulation faible :

Soit  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{P}$  les espaces fonctionnels associés à la formulation faible :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{w}) \, d\omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} \, d\omega & = f \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} \, d\omega & = 0 \end{cases}$$

$(\vec{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_0$  sur  $\partial\Omega$  ( $\mathcal{V} = (H^1(\Omega))^d$ ,  $\mathcal{V}_0 = (H_0^1(\Omega))^d$  et  $\mathcal{P} = L^2(\Omega)$ ).

Soient les formes bilinéaires :

$$a(\vec{v}, \vec{w}) = \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(\vec{v}) : \varepsilon(\vec{w}) \, d\omega$$

et

$$b(q, \vec{w}) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{w} \, d\omega.$$

$(\vec{u}, p)$  est solution de :

$$a(\vec{u}, \vec{w}) + b(p, \vec{w}) + b(q, \vec{u}) = \langle f, \vec{w} \rangle \quad \forall (\vec{w}, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P} \quad (2.19)$$

Supposons que l'on fasse le choix d'une discrétisation éléments finis identitique à celle proposée pour résoudre le problème de stokes généralisé dans le logiciel REM3D ®.

Soient  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{P}_h$  les espaces discrets associés au MINI-élément ( $P1 + /P1$ ).  $(\vec{u}_h, p_h)$  est solution de :

$$a(\vec{u}_h, \vec{w}_h) + b(p_h, \vec{w}_h) + b(q_h, \vec{u}_h) = \langle f, \vec{w}_h \rangle \quad \forall (\vec{w}_h, q_h) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{P}_h \quad (2.20)$$

L'expression du résidu est alors définie par :

$$\langle R_h, \vec{w}, q \rangle = a(\vec{u}_h, \vec{w}) + b(p_h, \vec{w}) + b(q, \vec{u}_h) - \langle f, \vec{w} \rangle, \quad (2.21)$$

qui, combiné avec 2.19, donne :

$$\langle R_h, \vec{w}, q \rangle = a(\vec{u}_h - \vec{u}, \vec{w}) + b(p_h - p, \vec{w}) + b(q, \vec{u}_h - \vec{u}). \quad (2.22)$$

En prenant  $\vec{w} = \vec{u}_h - \vec{u}$  et  $q = p_h - p$ , on peut encadrer la norme du résidu  $R_h$ . Pour cela, il convient d'utiliser la  $\mathcal{V}$ -ellipticité de  $a(\cdot, \cdot)$  et de rappeler que la condition *inf-sup* de Brezzi-Babuska est vérifiée. Ainsi, l'équation 2.22 appliquée à  $\langle R_h, \vec{u}_h - \vec{u}, p_h - p \rangle$  permet de montrer que la norme du résidu est un estimateur d'erreur *a posteriori* pour le problème de Stokes :

$$c_1 \|\vec{u}_h - \vec{u}\|_{1,\Omega} + c_2 \|p_h - p\|_{0,\Omega} \leq \|R_h\|_{-1,\Omega} \leq c'_1 \|\vec{u}_h - \vec{u}\|_{1,\Omega} + c'_2 \|p_h - p\|_{0,\Omega} \quad (2.23)$$

La norme du résidu est définie par :

$$\|R_h\|_{-1,\Omega} = \sup_{\vec{w}, q \neq 0} \frac{\langle R_h, \vec{w}, q \rangle}{\|\vec{w}\|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\Omega}}.$$

L'étape suivant consiste donc à calculer cette norme.

REMARQUE : on ne prendra plus en compte par la suite le terme d'incompressibilité. Les travaux de [Abdalass87] justifient cette omission en montrant que ce terme est du second ordre par rapport aux termes associés au champ vitesse. Ainsi, on écrit :

$$\begin{aligned} \langle R_h, \vec{w}, 0 \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K 2\eta\varepsilon(\vec{u}_h) : \varepsilon(\vec{w}) - p_h \nabla \cdot \vec{w} d\omega \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} 2\eta(\varepsilon(\vec{u}_h) \cdot \vec{n}_K) \cdot \vec{w} d\omega + \int_K \nabla p_h \cdot \vec{w} d\omega \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left[ \sum_{F \in \mathcal{F}(K)} \int_F 2\eta(\varepsilon(\vec{u}_h) \cdot \vec{n}_K^F) \cdot \vec{w} d\Gamma + \int_K \nabla p_h \cdot \vec{w} d\omega \right] \\ &= \sum_{F \in \mathcal{T}} \left[ \sum_{K' \in \mathcal{T}(F)} \int_F (2\eta\varepsilon(\vec{u}_h) \cdot \vec{n}_{K'}^F) \cdot \vec{w} d\Gamma \right] + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p_h \cdot \vec{w} d\omega \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K^F \cdot \sum_{F \in \mathcal{F}(K)} \int_F \left( \sum_{K' \in \mathcal{T}(F)} 2\eta\varepsilon(\vec{u}_h) \cdot \vec{n}_{K'}^F \right) \cdot \vec{w} d\Gamma + \int_K \nabla p_h \cdot \vec{w} d\omega \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left[ \alpha_K^F \sum_{F \in \mathcal{F}(K)} \int_F [2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \cdot \vec{w} d\Gamma + \int_K \nabla p_h \cdot \vec{w} d\omega \right], \end{aligned}$$

où  $[2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F$  est le saut du déviateur des contraintes à travers la face  $F$ .  $\vec{u}_h$  étant linéaire sur chaque élément  $K$ , sa dérivée seconde est nulle et ne subsiste que le saut entre les éléments. Le saut est défini sur chaque élément par :

$$[2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F = \sum_{K' \in \mathcal{T}(F)} 2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)(\vec{n}_{K'}^F \cdot \vec{n}_K^F),$$

et où les poids<sup>4</sup>  $\alpha_K^F$  vérifient  $\sum_{K \in \mathcal{T}(F)} \alpha_K^F = 1$ . Par la suite, nous allégerons l'écriture indicielle des sommations lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

### 2.5.1 Estimation classique

À partir de cette expression du résidu, on peut exprimer un estimateur *a posteriori* pour le problème de Stokes assez répandu dans la littérature et largement développé par [Verfurth]. Nos qualifierons cet estimateur de *classique* par la suite.

Par définition du résidu, nous avons :

$$\langle R_h, \vec{w}_h, 0 \rangle = 0 \quad , \quad (2.24)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\langle R_h, \vec{w}, 0 \rangle = \langle R_h, \vec{w} - \vec{w}_h, 0 \rangle \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h. \quad (2.25)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle R_h, \vec{w}, 0 \rangle &\leq \sum_K \alpha_K^F \sum_F \left\| [2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F} \cdot \|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,F} \\ &\quad + \sum_K \|\nabla p_h\|_{0,K} \cdot \|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,K} \\ &\leq \left( \sum_K \sum_F \alpha_K^F \left\| [2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F}^2 \sum_F \alpha_K^F \|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,F}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_K \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \cdot \|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En faisant le choix  $\vec{w}_h = \Pi_h \vec{w}$  et en utilisant les résultats standards de la théorie de l'interpolation :

$$\|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,K}^2 \leq h_K^2 \|\vec{w}\|_{1,K}^2 \quad \text{et} \quad h_F \|\vec{w} - \vec{w}_h\|_{0,F}^2 \leq h_K^2 \|\vec{w}\|_{1,K}^2 \quad (\text{Clément}),$$

on obtient l'estimateur d'erreur *a posteriori*  $\eta_h$  ainsi défini :

$$\eta_h = \left( \sum_K \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec :

$$\eta_K^2 = \sum_F \alpha_K^F \left\| [2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F}^2 h_F + \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 h_K^2 \quad (2.26)$$

Cet estimateur découple le terme en gradient de la pression et le saut de la partie déviatorique du tenseur des contraintes. La convergence de cet estimateur ne dépend que de l'erreur d'interpolation  $\|\vec{w} - \vec{w}_h\|$ . Cela a comme conséquence qu'il a un mauvais comportement dans le cadre de l'utilisation de maillages anisotropes (voir résultats) puisque l'erreur d'interpolation est donnée dans un cadre isotrope.

On peut toutefois espérer lever cette faiblesse en proposant un estimateur qui couple plus fortement ces termes et peut-être pouvoir mieux cerner l'anisotropie des champs. L'estimateur que nous proposons peut être vu comme une expression discrète de la divergence du tenseur des contraintes.

---

<sup>4</sup>l'introduction de poids permet de « déplacer » le saut en amont ou en aval de l'interface. Ici, nous ne considérerons que des sauts centrés.

### 2.5.2 Estimateur d'erreur basé sur la divergence discrète

Afin d'alléger l'écriture de ce paragraphe on note par convention  $\int_{\Omega} = \int_{\Omega} d\omega$  et  $w = \vec{w}$ .

**Proposition 2.5.1** *Soient  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{P}_h$  les espaces associés à la discrétisation du MINI-élément. Si  $(\vec{u}_h, p_h)$  est solution du problème de Stokes discrétisé 2.20, et si l'on définit  $\bar{\eta}_K$ ,  $\beta_K$  et  $\bar{\eta}_h^\beta$  tels que :*

$$\bar{\eta}_K^2 = \left\| \left( \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \frac{|F|}{|K|} + \nabla p_h \right) \right\|_{0,K}^2 h_K^2 ,$$

$$\beta_K^2 = \sum_F (\alpha_K^F)^2 \left\| [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F}^2 h_F ,$$

$$\bar{\eta}_h^\beta = \left( \sum_K \bar{\eta}_K^2 + \beta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

alors  $\bar{\eta}_h^\beta$  est un estimateur d'erreur a posteriori pour le problème de Stokes.

#### Démonstration :

Nous reprenons l'expression du résidu :

$$\langle R_h, w, 0 \rangle = \sum_K \left[ \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \cdot \int_F w + \nabla p_h \cdot \int_K w \right]$$

Introduisons  $\bar{w}$  l'interpolation constante par élément de  $w$  :

$$\bar{w}|_K = \frac{1}{|K|} \int_K w.$$

$$\langle R_h, w, 0 \rangle = \sum_K \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \cdot \int_F ((w - \bar{w}) + \bar{w}) + \nabla p_h \cdot \int_K w$$

$$\begin{aligned} \langle R_h, w, 0 \rangle &= \sum_K \left( \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \frac{|F|}{|K|} + \nabla p_h \right) \cdot \int_K w \\ &\quad + \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \cdot \int_F (w - \bar{w}). \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \langle R_h, w, 0 \rangle &\leq \sum_K \left\| \left( \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \frac{|F|}{|K|} + \nabla p_h \right) \right\|_{0,K} \|w\|_{0,K} \\ &\quad + \alpha_K^F \sum_F \left\| [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F} \cdot \|w - \bar{w}\|_{0,F}, \end{aligned}$$

et puisque  $\langle R_h, w, 0 \rangle = \langle R_h, w - w_h, 0 \rangle$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle R_h, w, 0 \rangle|^2 &\leq \sum_K \left\| \left( \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \frac{|F|}{|K|} + \nabla p_h \right) \right\|_{0,K}^2 \|w - w_h\|_{0,K}^2 \\ &\quad + \sum_K \sum_F \alpha_K^F \left\| [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \right\|_{0,F}^2 \alpha_K^F \|w - w_h - \bar{w} - \bar{w}_h\|_{0,F}^2 \end{aligned}$$



En tenant compte des erreurs d'interpolation :

$$\|w - w_h\|_{0,K}^2 \leq c.h_K^2 \|w\|_{1,K}^2$$

et

$$\|w - w_h - \overline{w - w_h}\|_{0,F}^2 \leq c.h_F \|w - w_h\|_{1,K}^2 \leq c.h_F \|w\|_{1,K}^2.$$

Ce qui termine le démonstration en introduisant les estimateurs locaux suivants :

$$\bar{\eta}_K^2 = \left\| \left( \alpha_K^F \sum_F [2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F \frac{|F|}{|K|} + \nabla p_h \right) \right\|_{0,K}^2 h_K^2$$

$$\beta_K^2 = \sum_F (\alpha_K^F)^2 \|[2\eta\varepsilon(u_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F\|_{0,F}^2 h_F.$$

□

L'intérêt de cet estimateur réside d'une part dans le couplage des termes en vitesse et en pression et d'autre part dans l'apparition du rapport  $\frac{|F|}{|K|}$ . Ce rapport entre les tailles des faces et le volume des éléments est un moyen de générer un caractère anisotrope. On peut, par exemple, souhaiter diminuer le niveau d'erreur local en conservant le même volume pour l'élément mais en modifiant sa géométrie, son rapport de forme. La détermination d'une carte de métriques serait alors le résultat de problèmes d'optimisation locaux.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons nous attacher à évaluer la qualité de notre estimateur d'erreur. Tout d'abord en le comparant à l'estimateur classique en ce qui concerne la mesure du niveau d'erreur sur un écoulement caractérisé par une forte anisotropie. Puis nous étudierons sa capacité à fournir une information pour adapter le maillage sur des calculs d'écoulements bi- et tridimensionnels.

## 2.6 Écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles

Pour comparer notre estimateur à l'estimateur classique, nous avons fait le choix d'étudier un écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles. La distance ( $h$ ) entre les plaques est petite par rapport à leurs dimensions (les plaques sont supposées suffisamment grandes pour que l'on puisse admettre être en présence d'un écoulement bidimensionnel). Le contact aux parois est supposé collant. En appliquant une différence de pression  $\Delta P$  entre l'entrée ( $x = 0$ ) et la sortie ( $x = L$ ), on établit l'écoulement de Poiseuille. On connaît la solution analytique de ce problème. La pression décroît linéairement entre l'entrée et la sortie. Le champ de vitesse est lui invariant le long de l'écoulement et ne dépend que la position dans l'épaisseur de l'écoulement :

$$\vec{u}(y) = \frac{3}{2}\bar{V} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right], \quad (2.27)$$

où  $\bar{V}$  est la vitesse moyenne.

Puisque le gradient de la vitesse est nul le long de l'écoulement et le gradient de la pression constant, une interpolation linéaire de la vitesse et de la pression doit être équivalente sur des maillages présentant une même discrétisation dans l'épaisseur de l'écoulement

(mais qui peut être différente dans la longueur). En particulier, un maillage ne comportant qu'un élément dans la longueur est optimal pour représenter exactement le champ de pression.

Nous avons utilisé deux séries de maillages qui représentent le domaine de l'écoulement. La première série (fig. 2.16) présente des maillages *quasi*-isotropes et donc la taille caractéristique d'élément est divisée par deux d'un maillage à l'autre. La seconde série (fig. 2.17) présente des maillages anisotropes qui n'ont qu'un élément dans la longueur de l'écoulement et la même séquence de discrétisation dans l'épaisseur que la série précédente.

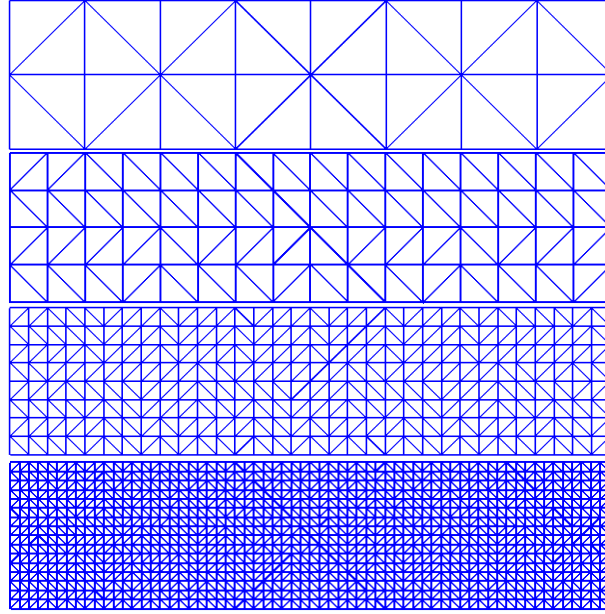


FIG. 2.16 – Maillages isotropes (mesh iso1,...,mesh iso4).

### 2.6.1 Erreur exacte

Connaissant la solution de cet écoulement, nous pouvons calculer l'erreur exacte entre la solution et son interpolation linéaire en vitesse et en pression sur les différents maillages (noter qu'il ne s'agit pas d'une comparaison avec le résultat d'un calcul numérique, eq. (2.28)). Naturellement, à discrétisation équivalente dans l'épaisseur, nous trouvons les mêmes résultats et la convergence de l'erreur est linéaire ( $O(h)$ ) pour les maillages isotropes.

$$Erreur = \left( \sum_K \left\| 2\eta(\varepsilon(\vec{u}_{ex}) - \varepsilon(\vec{u}_h)) \right\|_{0,K}^2 + \left\| p_{ex} - p_h \right\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

Pour les huit maillages étudiés, on obtient les résultats suivants<sup>5</sup> :

<sup>5</sup>la dernière colonne de chaque tableau donne le nombre de nœuds du maillage considéré.

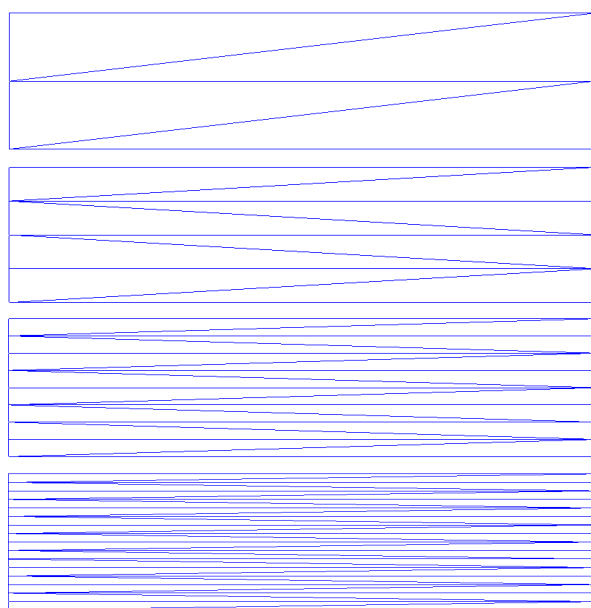


FIG. 2.17 – Maillages anisotropes (mesh anis1,...,mesh anis4).

<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Nœuds</i>	<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Nœuds</i>
mesh iso1	1,00	1,44338	27	mesh anis1	8,00	1,44338	6
mesh iso2	0,50	0,721688	85	mesh anis2	8,00	0,721688	10
mesh iso3	0,25	0,360844	297	mesh anis3	8,00	0,360844	18
mesh iso4	0,125	0,180422	1105	mesh anis4	8,00	0,180422	34

$$Erreur(h) \approx 1.44 h_y$$

### 2.6.2 Comparaison des estimateurs

Observons tout d'abord le comportement de l'estimateur classique sur ces maillages et ce choix d'interpolation :

<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>
mesh iso1	1,00	5,59017	mesh anis1	8,00	40,6202
mesh iso2	0,50	2,93151	mesh anis2	8,00	40,4660
mesh iso3	0,25	1,4987	mesh anis3	8,00	40,2725
mesh iso4	0,125	0,757449	mesh anis4	8,00	40,1462

$$Erreur(h) \approx 4.9 h_{max}^{0.94}$$

$$Erreur(h) \approx 40.6 h_{max}^{0.0005}$$

Si le comportement de l'estimateur est satisfaisant dans le cadre isotrope, il ne permet pas de détecter la diminution de l'erreur sur les maillages anisotropes. La première remarque que l'on peut faire est que cette différence peut s'expliquer par le fait que la taille de maille utilisée pour la majoration de l'erreur d'interpolation n'est pas la même dans les deux cas. En effet, si l'on s'en tient à la définition classique de la taille d'un élément fini, c'est la plus grande dimension des éléments anisotropes qu'il faut retenir. Celle-ci ne diminuant pas lors des raffinements successifs, le niveau d'erreur reste artificiellement constant. Mais observons plus précisément la contribution apportée par le terme en pression pour cet estimateur :

$$\eta_h = \left( \sum_K \|\nabla p_h\|^2 h_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>
mesh iso1	1,00	5,0000	mesh anis1	8,00	40,0000
mesh iso2	0,50	2,5000	mesh anis2	8,00	40,0000
mesh iso3	0,25	1,2500	mesh anis3	8,00	40,0000
mesh iso4	0,125	0,6250	mesh anis4	8,00	40,0000

$$Erreur(h) = 5 h_{max}$$

$$Erreur(h) = 40 h_{max}^0$$

Cette fois on voit clairement l'artefact créé par le choix de la taille caractéristique des éléments puisque l'on peut passer des résultats de la colonne isotrope à la colonne anisotrope modulo le rapport des tailles de maille retenues. Cependant, ce tableau montre aussi une faiblesse de l'estimateur classique sur les maillages isotropes (et pour un écoulement de Poiseuille) : l'erreur diminue lorsque l'on raffine le maillage alors que l'on a vu que cette erreur est nulle sur le terme en pression et pour ce choix d'interpolation.

Comportement du terme en vitesse :

$$\eta_h = \left( \sum_K \beta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>
mesh iso1	1,00	2,5	mesh anis1	8,00	7,07107
mesh iso2	0,50	1,53093	mesh anis2	8,00	6,12372
mesh iso3	0,25	0,82679	mesh anis3	8,00	4,67708
mesh iso4	0,125	0,427907	mesh anis4	8,00	3,42326

$$Erreur(h) \approx 2.29 h_{max}^{0.8}$$

$$Erreur(h) \approx 7.26 h_{max}^{0.3}$$

De même que pour la pression, on observe un artefact du au choix de  $h = h_{max}$ . Il suffit de prendre  $h_{max} = h_y$  pour que l'on retrouve les mêmes niveaux d'erreur entre maillages isotropes et anisotropes :

$$\bar{\eta}_h^a = \left( \sum_K a_K^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec :

$$a_K^2 = \sum_F (\alpha_K^F)^2 \|[2\eta\varepsilon(\vec{u}_h)]_K^F \cdot \vec{n}_K^F\|_{0,F}^2 h_y.$$

<i>Maillage</i>	$h_y$	<i>Erreur</i>
mesh anis1	1,00	2,5
mesh anis2	0,50	1,53093
mesh anis3	0,25	0,826799
mesh anis4	0,125	0,427907

$$Erreur(h) \approx 2.29 h_y^{0.8}$$

Observons maintenant les résultats obtenus avec notre estimateur :

$$\eta_h = \left( \sum_K \bar{\eta}_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>	<i>Maillage</i>	$h_{max}$	<i>Erreur</i>
mesh iso1	1,00	3,53553	mesh anis1	8,00	28,2843
mesh iso2	0,50	1,2500	mesh anis2	8,00	20,000
mesh iso3	0,25	0,441942	mesh anis3	8,00	14,1421
mesh iso4	0,125	0,15625	mesh anis4	8,00	10,000

$$Erreur(h) \approx 2.95 h_{max}^{1.48}$$

$$Erreur(h) \approx 28.2 h_{max}^{0.57}$$

Les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. En effet, dans la cadre isotrope, l'erreur est sous-estimée (convergence en  $O(h^{1.48})$ ) et surestimée dans le cadre anisotrope. Néanmoins dans ce dernier cas, la convergence est plus rapide que celle obtenue avec l'estimation classique. De plus, cette convergence, bien que lente, a pu être obtenue en prenant comme taille d'élément la plus grande des dimensions des éléments anisotropes.

### 2.6.3 Conclusions

Un important travail reste à accomplir pour obtenir un estimateur d'erreur *a posteriori* satisfaisant pour le problème de Stokes dans des écoulements anisotropes. L'estimation classique semble converger artificiellement (« grâce » au terme de pression) et l'estimateur que nous proposons ne donne pas la bonne vitesse de convergence même si il détecte mieux l'anisotropie de l'écoulement. Avant de chercher à extraire de ces estimations d'erreur l'information nécessaire pour adapter un maillage anisotrope il convient donc d'améliorer leur qualité. En particulier, la majoration de l'erreur d'interpolation et le « choix » de la taille de l'élément apparaissent comme des points importants à étudier.

Bien que notre estimateur d'erreur ne soit pas quantitativement satisfaisant, est-il tout de même capable d'apporter une réponse qualitative sur l'erreur commise au cours d'un calcul et d'adapter le maillage en conséquence (dans un contexte isotrope pour l'instant) ?

## 2.7 Adaptation de maillage - Calculs d'extrusion

Pour répondre à cette question nous nous sommes intéressés à deux écoulements d'extrusion (connus du point de vue expérimental) présentant une singularité. Le but de cette étude était d'observer l'évolution de la solution au cours d'itérations de calcul de l'écoulement/estimation d'erreur/adaptation de maillage. Les deux écoulements choisis sont des écoulements d'extrusion à travers une brusque contraction (4 : 1 et 8 : 1). Les modèles retenus pour les simulations sont respectivement un modèle bidimensionnel (fig. 2.18(a)) et un modèle tridimensionnel (fig. 2.18(b)).

Les écoulements présentent une singularité au niveau du coin rentrant. Sur les clichés expérimentaux ([Gavrus01]) comme sur les résultats de calculs (fig. 2.7), on observe un niveau de contrainte faible dans le réservoir, maximal au droit de la contraction (contrainte localement infinie), puis décroissant dans le chenal.

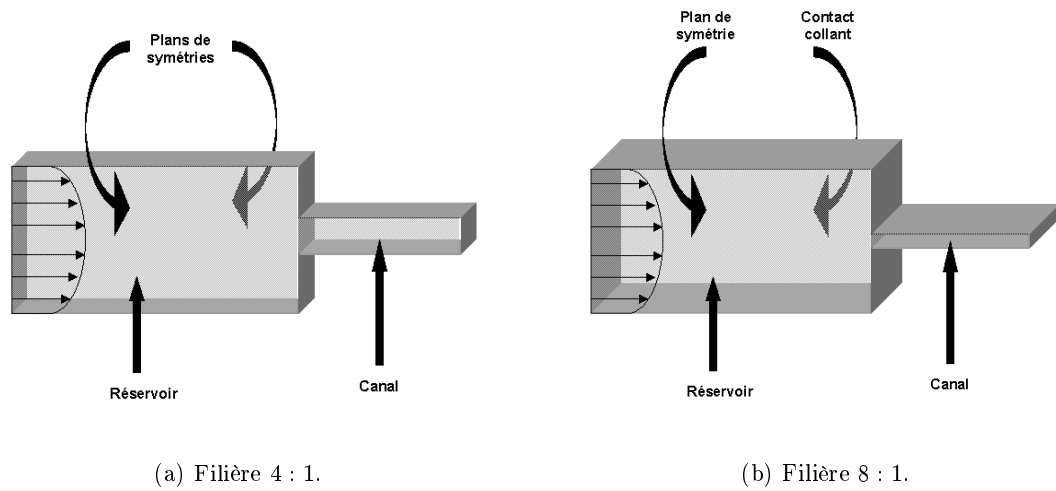


FIG. 2.18 – Géométries des filières d'extrusion.

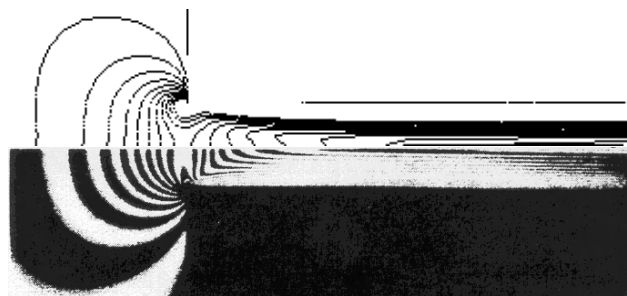


FIG. 2.19 – Comparaison entre cliché de biréfringence expérimentale et différences des contraintes principales au centre de l'écoulement (*tiré de [Nouatin00]*).

Les itérations *calcul/estimation/adaptation* doivent, si l'on retient le principe de l'équirépartition de l'erreur<sup>6</sup>, conduire à une concentration de mailles au niveau de la singularité.

### 2.7.1 Contraction 4 : 1 - Écoulement bidimensionnel

À chaque étape, on calcule la carte d'erreur associée au maillage à partir des champs de vitesse et de pression issus de la résolution de l'écoulement de Stokes. La carte d'erreur est traduite en une carte de tailles de mailles : la taille courante des éléments est divisée par le rapport entre l'erreur locale et l'erreur moyenne théorique (erreur globale divisée par le nombre d'éléments). Cette carte de tailles de mailles (exprimée aux nœuds ici) et le maillage associé sont donnés en entrée au mailleur automatique MTC® qui produit le maillage adapté.

Entre la première et la seconde itération, la taille du maillage augment considérablement : alors que la zone du réservoir reste inchangé, le canal est fortement raffiné. L'estimateur a « vu » les gradients de vitesse et de pression plus importants dans cette zone. La singularité n'est cependant pas prise en compte. Au cours des itérations suivante par contre, le maillage va continuellement se raffiner au niveau du coin tout en convergeant vers une répartition hétérogène du maillage dans les autres zones. On remarque enfin le long de l'axe central la convergence du maillage vers un gradient continu des tailles de mailles (du réservoir vers le canal) reflétant l'augmentation des gradients de vitesse et de pression.

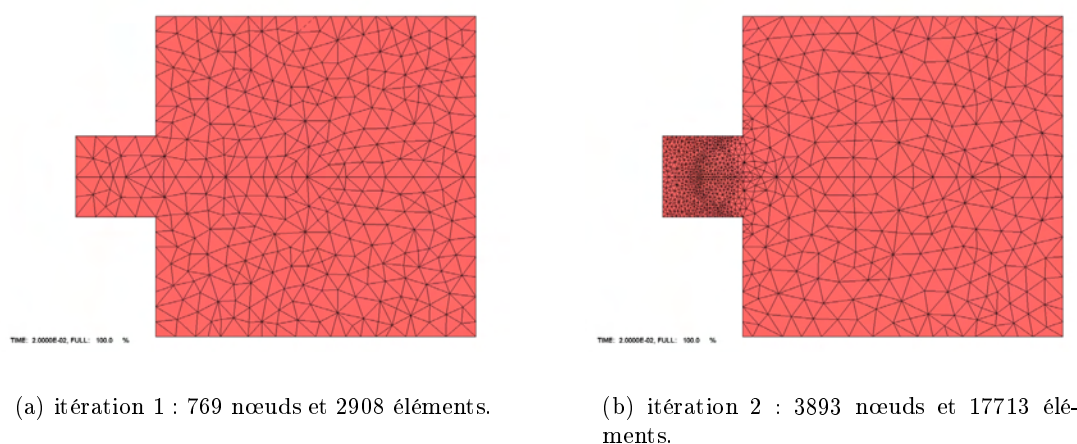
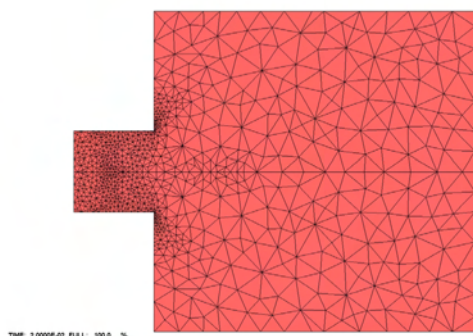


FIG. 2.20 – Itérations 1 et 2.

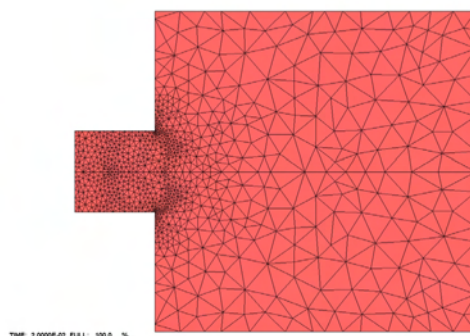
REMARQUE : l'écoulement étant symétrique, le calcul n'est effectué que dans la partie supérieure du domaine représenté ici.

Du point de vue qualitatif, l'étude de l'évolution des isovaleurs des champs de vitesse, pression, ... montre une amélioration du niveau de résolution. Les gradients sont mieux rendus et la singularité de l'écoulement est mise en évidence (voir par exemple la carte des isovaleurs de la déformée équivalente, fig. 2.25(b)).

<sup>6</sup>répartition homogène de l'erreur globale

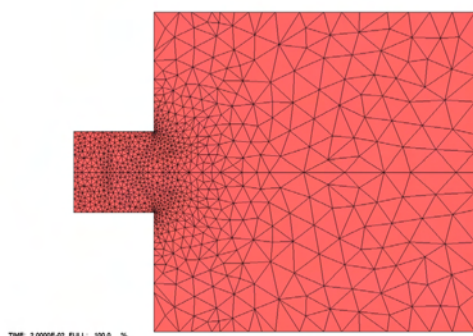


(a) itération 3 : 4689 nœuds et 21999 éléments.

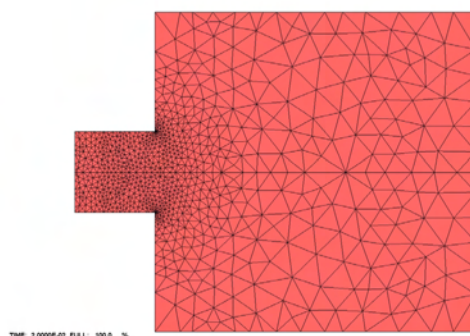


(b) itération 4 : 5159 nœuds et 25305 éléments.

FIG. 2.21 – Itérations 3 et 4.

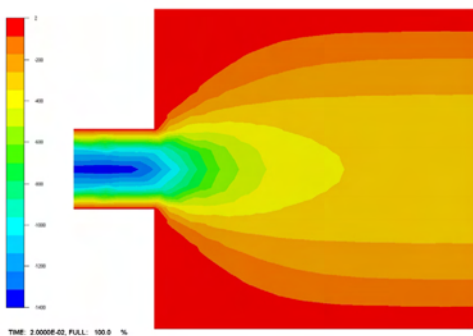


(a) itération 5 : 5819 nœuds et 29135 éléments.

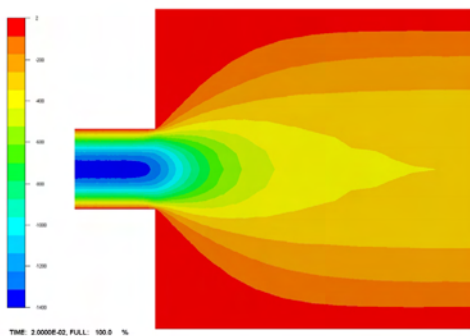


(b) itération 6 : 6137 nœuds et 30892 éléments.

FIG. 2.22 – Itérations 5 et 6.



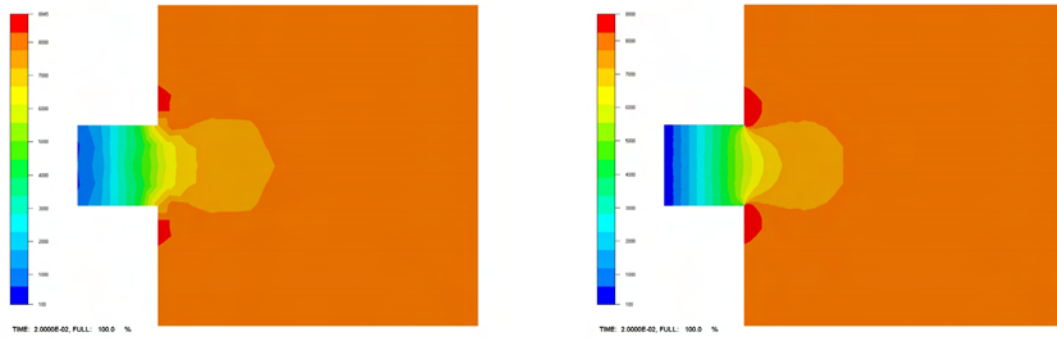
(a) maillage initial.



(b) maillage final.

FIG. 2.23 – Isovaleurs du champ de vitesse horizontale.

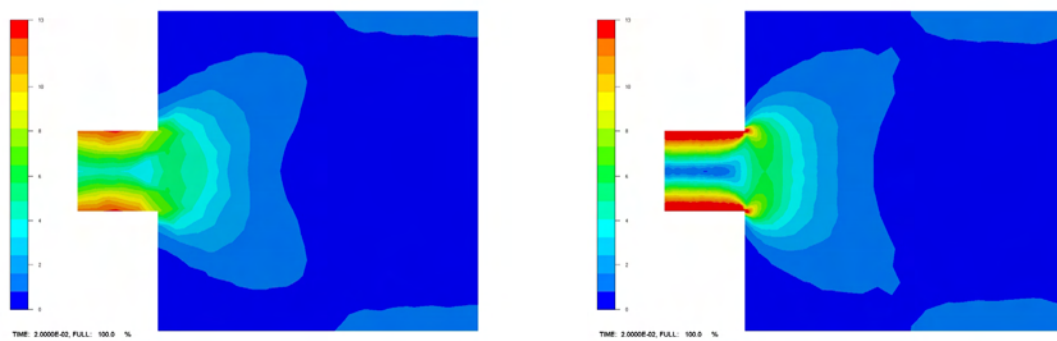




(a) maillage initial.

(b) maillage final.

FIG. 2.24 – Isovaleurs du champ de pression.



(a) maillage initial.

(b) maillage final.

FIG. 2.25 – Isovaleurs de la déformation équivalente.

Les mesures d'erreur données par notre estimateur confirment la diminution du niveau d'erreur et la relative stabilisation de la taille du maillage. Les évolutions des niveaux d'erreurs locaux (mini. et maxi.) sont elles opposées : selon le principe d'équirépartition, les deux courbes doivent converger vers la même valeur. Toutefois, pour cet écoulement, la présence de la singularité interdit à cette convergence d'aboutir même après un très grand nombre d'itérations.

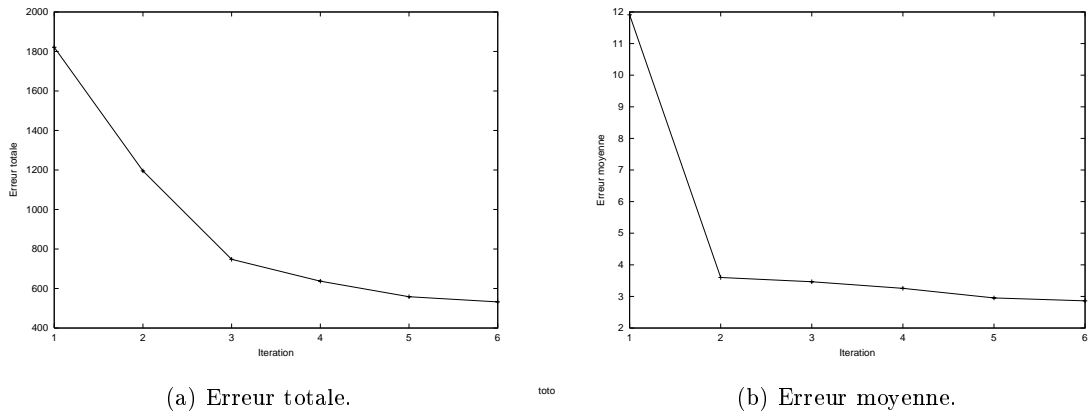


FIG. 2.26 – Évolution des niveaux d'erreur globaux.

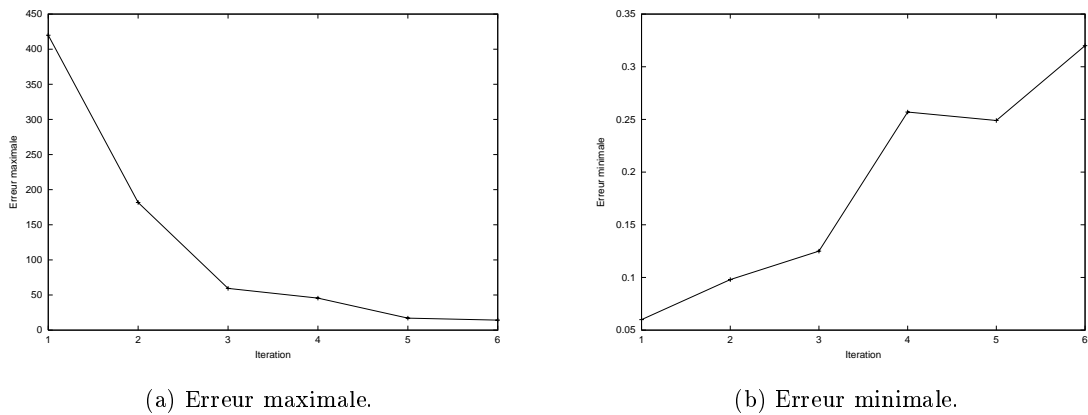
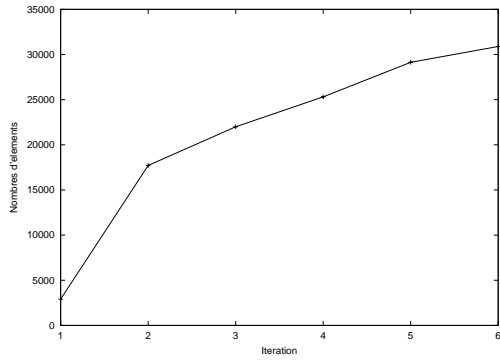


FIG. 2.27 – Évolution des niveaux d'erreur locaux.

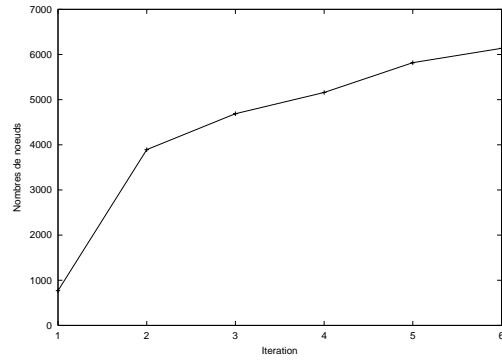
### 2.7.2 Contraction 8 : 1 - Écoulement tridimensionnel

La même étude a été réalisée avec une géométrie de filière légèrement différente et surtout une modification des conditions aux limites (un des plans de symétrie devient une paroi au contact collant). Ces changements induisent un écoulement tridimensionnel : on peut voir sur la figure 2.29(a) que le champ de vitesse s'annule au niveau de cette paroi (le champ de pression n'est bien entendu pas affecté). Pour mieux visualiser l'écoulement interne, nous ne représentons que sa partie inférieure.

Cette dissymétrie se traduit au fil des itérations par une adaptation de maillage asy-

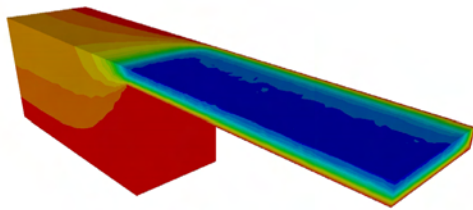


(a) Nombre d'éléments.



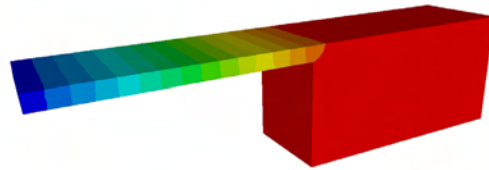
(b) Nombre de nœuds.

FIG. 2.28 – Évolution du maillage.



TIME: 0.000 , FULL: 100.0 %

(a) Champ de vitesse horizontale.



TIME: 0.000 , FULL: 100.0 %

(b) Champ de pression.

FIG. 2.29 – Isovaleurs de la déformation équivalente.

métrique : le raffinement est moins marqué du côté de la paroi au droit de la singularité. Toujours du côté paroi mais au niveau de l'« angle mort », le long du canal, on aurait pu s'attendre à ce que le maillage se raffine puisque le contact collant induit un fort cisaillement à la paroi. Néanmoins le niveau d'erreur local étant bien moindre qu'au niveau de la contraction, le pilotage de l'adaptation reste dictée par la singularité de la contraction.



(a) itération 1 : 821 nœuds et 3391 éléments.

(b) itération 2 : 6793 nœuds et 31006 éléments.

FIG. 2.30 – Isovaleurs de la déformation équivalente.

Le second fait marquant de cette étude est l'évolution de la taille du maillage. Entre la première et la seconde itération, le maillage est fortement raffiné au niveau de la contraction pour « encaisser » le fort gradient des champs. Puis c'est la singularité elle-même (au niveau de l'angle rentrant) qui va piloter le niveau d'erreur (qui a été fortement réduit au niveau du canal grâce au raffinement). La concentration des mailles va donc se déplacer au niveau de l'angle. Le maillage est déraffiné au niveau du canal. Entre les itérations 2 et 3, la taille du maillage diminue ; puis elle réaugmente une fois que la singularité a été détectée (on retrouve alors la même évolution que dans l'exemple précédent.)

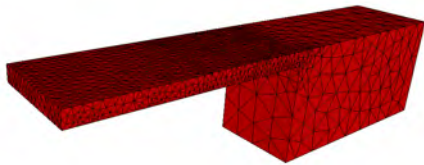


(a) itération 3 : 3289 nœuds et 14274 éléments.

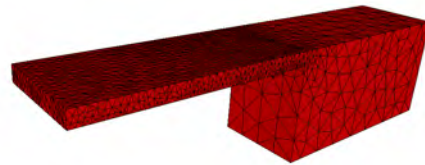
(b) itération 4 : 3959 nœuds et 17532 éléments.

FIG. 2.31 – Itérations 3 et 4.

Du point de vue qualitatif, là encore on remarque que l'adaptation permet de représenter l'écoulement plus précisément (fig. 2.33).

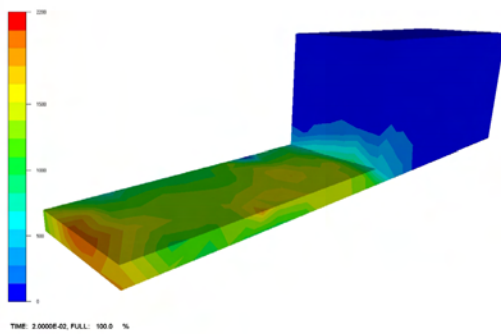


(a) itération 5 : 4585 nœuds et 20699 éléments.

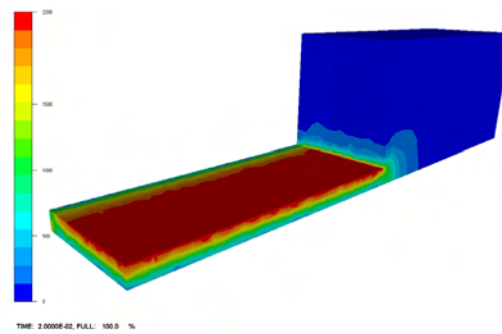


(b) itération 6 : 5807 nœuds et 26450 éléments.

FIG. 2.32 – Itérations 5 et 6.



(a) Maillage initial.



(b) Maillage final.

FIG. 2.33 – Isovaleurs de la déformation équivalente.

Ces deux exemples montrent que notre estimateur est capable de détecter les singularités d'un écoulement et de proposer, dans un contexte isotrope, un pilotage de l'adaptation de maillage approprié. Le second exemple est caractérisé par une importante variation des rapports de formes de sa géométrie et ouvre ainsi la perspective souhaitée à ce travail : l'adaptation anisotrope. On souhaiterait en effet que les éléments qui sont dans l'étroit canal adoptent un rapport de forme proche de la géométrie de la filière en ce lieu. Cet exemple est aussi assez symbolique de la problématique du problème du raccordement  $2D/3D$  qui sous-tend l'ensemble de notre étude. Mais pour parvenir à maîtriser l'adaptation anisotrope, il est tout d'abord nécessaire d'améliorer la qualité de notre estimateur.

## 2.8 Perspectives

À la lumière des résultats que nous avons obtenus, il me semble nécessaire de s'intéresser plus précisément à l'estimation de l'erreur d'interpolation. Les résultats classiques de la théorie de l'interpolation (en particulier pour l'interpolation de Lagrange) doivent être dépassés pour pouvoir rendre compte du caractère anisotrope des champs calculés. Récemment, une petite communauté d'auteurs ([Duran99], [Agosta et al.99], [Siebert96], [Dobrowolski et al.], [Carstensen99], [Apel99], [Kunert99]) ont publié des résultats qui permettent de lever une partie des limitations posées par les opérateurs de projection standards. La plupart de ces travaux s'appuient sur la définition de nouveaux opérateurs de projection (projections sur des patches d'éléments) et permettent d'obtenir localement une borne de l'erreur d'interpolation du type :

$$\|u - \pi_h(u)\|_K = \sum_{i=1, \dots, d} h_K^i |D^i u|_K.$$

Ce type d'estimation, en faisant intervenir des tailles de maille différentes selon la direction des gradients, ouvre naturellement la voie vers la prise en compte de l'anisotropie des champs. Ces résultats supposent cependant de nombreuses hypothèses aussi bien sur les champs (régularité, ...) que sur les maillages ( $2D$ , structurés et réguliers, avec des conditions d'angle maximum). Mais même si les travaux des auteurs les plus avancés ([Formaggia et al.01]) ne permettent pas d'apporter une réponse immédiate à notre problème c'est certainement à partir de ces travaux que nous pourrons prochainement définir un estimateur *a posteriori* performant pour le problème de Stokes. Restera alors la difficulté d'extraire de ce résultat l'information nécessaire pour adapter un maillage anisotrope. L'estimateur que nous proposons, modifié par ces nouvelles estimations de l'erreur d'interpolation, pourra peut être apporter une réponse simple à ce problème.

Naturellement, une autre perspective nécessaire à cette étude concerne son extension à des écoulements dont la viscosité est non newtonienne plus représentatifs du comportement des polymères ainsi qu'aux écoulements visco-élastiques.

## 2.9 Application à la simulation du remplissage 3D

Jusqu'à présent, en nous intéressant au problème de *Stokes*, nous nous sommes limités à l'étude d'écoulements stationnaires et confinés (sans surface libre). Du point de vue industriel, ce type d'écoulements est caractéristique du procédé d'extrusion et on retrouvera quelques similitudes entre les idées développées ici et les travaux J.-F. Gobeau (voir [Gobeau96, chap.3 et 4]). Ce procédé étant le plus souvent utilisé pour produire des produits

minces (profilés, . . .), les géométries de filières se prêtent naturellement à l'utilisation de maillages anisotropes (voir figure 2.34).

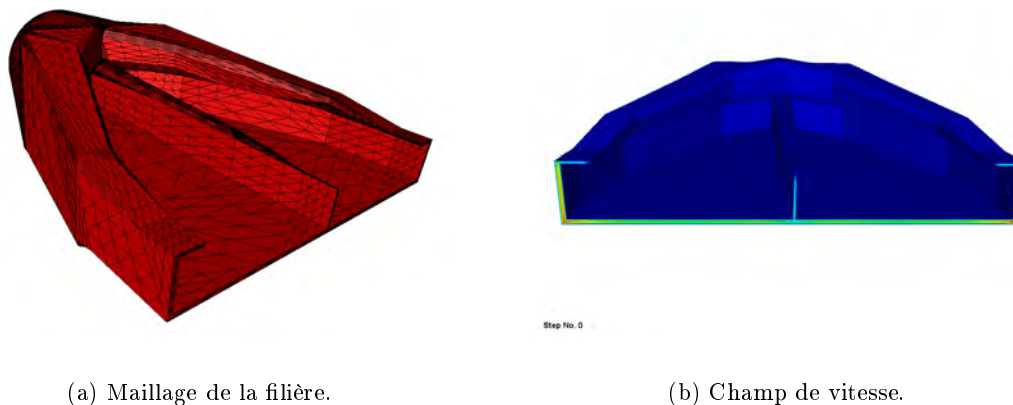


FIG. 2.34 – Exemple de simulation du procédé d'extrusion (tiré de [Gobeau96]).

Dans le cas du procédé d'injection, le contexte est bien différent puisque, durant le phase de remplissage, l'écoulement est caractérisé par de grandes surfaces libres en mouvement.

Pour résoudre ce problème instationnaire à surface libre, nous avons choisi une approche purement eulérienne pour laquelle le domaine fluide est caractérisé par une fonction de présence. La résolution de l'équation de transport associée à cette fonction de présence détermine l'évolution du domaine fluide au cours du temps dans la cavité maillée. Or, la résolution de problèmes hyperboliques tels que celui du transport engendre nécessairement une diffusion numérique (et souvent des oscillations). Cette diffusion numérique nuit à la précision du calcul dans son ensemble. L'utilisation, dans ce cadre, de maillages anisotropes peut alors se révéler désastreuse. En effet, un allongement des mailles dans la direction principale du champ de vitesse convectif va amplifier la diffusion. Il ne faudrait pas en déduire que la résolution d'un problème hyperbolique est incompatible avec l'utilisation de maillages anisotropes. Au contraire, bien souvent, on utilise des maillages anisotropes dont l'élançement est orienté perpendiculairement à la direction principale du champ convectif (onde de choc, . . .). Dans le cas de l'injection nous nous retrouvons malheureusement le plus souvent dans la situation la plus défavorable. Reprenons l'exemple d'un écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles. Si l'on s'intéresse à la phase de « remplissage », la direction principale du champ de vitesse est parallèle aux plans soit la même direction que celle « choisie » pour étirer le maillage. Il en résulte une importante diffusion au niveau du front de matière (voir figure 2.35).

Cette limitation justifie à elle seule la nécessité de développer un outil d'adaptation de maillage qui permette de « resserer » les mailles au niveau du front de matière. Le chapitre qui suit est consacré à l'exposé de la méthode d'adaptation de maillage que nous proposons.

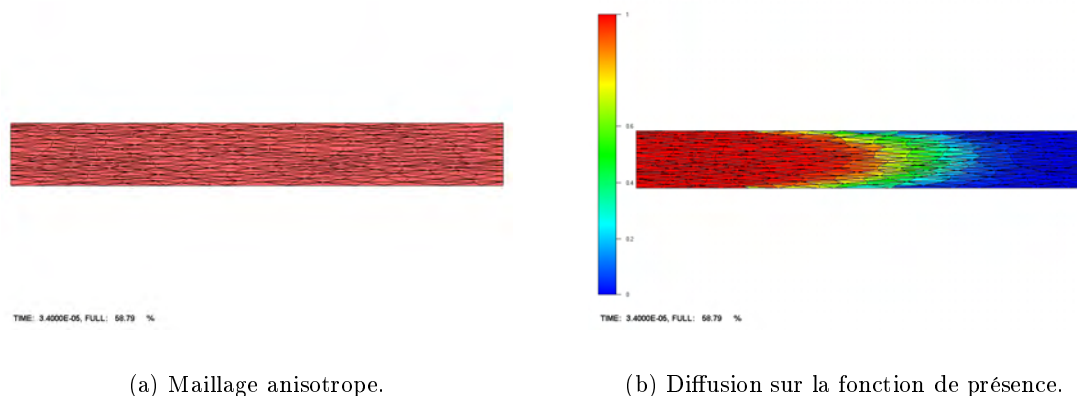


FIG. 2.35 – Écoulement entre plaques parallèles.

## Bibliographie

- [Abdalass87] Abdalass (E.M.). – *Résolution performante du problème de Stokes par mini-éléments, maillages auto-adaptatifs et méthodes multi-grilles - Applications*. – Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1987.
- [Agosta et al.99] Agosta (G.) et Duràn (R. G.). – The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements : application to the stokes equations. *Siam J. Numer. Anal.*, vol. 37, n1, 1999, pp. 18–36.
- [Apel99] Apel (T.). – Interpolation of non-smooth functions on anisotropic finite element meshes. *M2AN*, vol. 33, n6, 1999, pp. 1149–1185.
- [Babuska et al.78] Babuska (I.) et Rheinboldt (W.C.). – Error estimates for adaptative finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, 1978, pp. 736–754.
- [Bank et al.93] Bank (R.E.) et Smith (R.K.). – A posteriori error estimates based on hierarchical bases. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 30, 1993.
- [Borouchaki et al.95] Borouchaki (H.), George (P.L.), Hecht (F.), Laug (P.) et Saltel (E.). – *Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I : algorithmes*. – Rapport de recherche n2741, INRIA, décembre 1995.
- [Carstensen99] Carstensen (C.). – Quasi-interpolation and a posteriori error analysis in finite element methods. *M2AN*, vol. 33, n6, 1999, pp. 1187–1202.
- [Castro diaz et al.95] Castro Diaz (M.J.), Hecht (F.) et Mohammadi (B.). – *New progress in anisotropic grid adaptation for inviscid and viscous flows simulations*. – Rapport technique n2671, INRIA, octobre 1995.
- [Cavendish et al.85] Cavendish (J.C.), Field (D.A.) et Frey (W.H.). – An approach to automatic three-dimensionnal finite element method generation. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 21, 1985, pp. 329–347.
- [Ciarlet87] Ciarlet (Ph.G.). – *The finite element methods for elliptic problems*. – North-Holland, 1987.



- [Coupez et al.92] Coupez (T.) et Chenot (J.L.). – Mesh topology for mesh generation problems. application to three dimensional remeshing. *NUMIFORM*. – 1992.
- [Coupez91] Coupez (T.). – *Grandes transformations et remaillage automatique*. – Centre de Mise en Forme des Matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1991.
- [Coupez99] Coupez (T.). – Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 1999.
- [Dobrowolski et al.] Dobrowolski (M.), Gräf (S.) et Pflaum (C.). – On a posteriori error estimators in the finite element method on anisotropic meshes. *unknown*.
- [Duran99] Duràn (R. G.). – Error estimates for 3d narrow finite elements. *Mathematics of Computation*, vol. 68, n225, 1999, pp. 187–199.
- [Formaggia et al.01] Formaggia (L.), Perotto (S.) et Zunino (P.). – An anisotropic a-posteriori error estimate for convection-diffusion problem. *Computing and Visualization in Science*, vol. to be published, 2001.
- [Fortin et al.96] Fortin (M.), Vallet (M.-G.), Dompierre (J.), Bourgault (Y.) et Habashi (W.G.). – Anisotropic mesh adaptation : theory, validation and applications. *Computational Fluid Dynamics*, 1996.
- [Fourment92] Fourment (L.). – *Estimateurs d'erreur et maillage adaptatif pour la simulation numérique des procédés de mises en forme*. – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992.
- [Frykestig94] Frykestig (J.). – *Advancing front mesh generation techniques with application to the finite element method*. – Göteborg, Phd thesis, Chalmers university of technology, 1994.
- [Garimella et al.99] Garimella (R.V.) et Shephard (M.S.). – Generation of tetrahedral meshes with multiple elements through thin sections. *Engineering with Computers*, vol. 15, n2, 1999, pp. 181–197.
- [Gavrus01] Gavrus (L.). – *Étude expérimentale et modélisation de l'écoulement des polyéthylènes dans des géométries convergentes*. – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Girault et al.81] Girault (V.) et Raviart (P.-A.). – *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. – Springer-Verlag, 1981, *Lecture Notes in Mathematics*.
- [Gobeau96] Gobeau (J.-F.). – *Étude expérimentale et simulation numérique 3D par éléments finis de l'écoulement dans les filières d'extrusion de profilés PVC*. – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.
- [Hermeline80] Hermeline (F.). – *Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension n*. – Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1980.
- [Hoch et al.99] Hoch (P.) et Rascle (M.). – Hamilton-jacobi equations on a manifold and applications to grid generation or refinement. – 1999. soumis.

- [Knockaert00] Knockaert (R.). – *Étude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces.* – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Kunert99] Kunert (G.). – *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes.* – Thèse de PhD, Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz, 1999.
- [Lee99] Lee (C.K.). – Automatic adaptative mesh generation using metric advancing front approach. *Engineering computations*, vol. 16, n 2, 1999, pp. 230–263.
- [Lohner et al.88] Löhner (R.) et Parikh (P.). – Three dimensional grid generation by the advancing-front method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 8, 1988, pp. 1135–1149.
- [Mailfert90] Mailfert (J.). – *Heuristiques parallèles, critères physiques et problèmes théoriques.* – Grenoble, Thèse de doctorat, INPG, 1990.
- [Martin95] Martin (C.). – *Adaptation de maillages structurés par un modèle d'élasticité non linéaire. Application aux équations de Navier-Stokes.* – Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 1995.
- [Moulard94] Moulard (L.). – *Optimisation de maillages non structurés : applications à la génération, à la correction et à l'adaptation.* – Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Joseph Fournier (Grenoble I), 1994.
- [Nouatin00] Nouatin (O. H.). – *Identification de paramètres rhéologiques visco-élastiques par analyse inverse - Méthode et analyse de simulation numérique d'écoulement 3D de polymères fondus.* – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Palmerio et al.86] Palmerio (B.) et Dervieux (A.). – Application of a fem moving node adaptative method to accurate shock capturing. *Numerical Grid Generation in CFD.* – 1986.
- [Peraire et al.87] Peraire (J.), Vahdati (M.), Morgan (K.) et Zienkiewicz (O.C.). – Adaptative remeshing for compressible flow computations. *J. of Computational Physics*, vol. 72, 1987, pp. 449–466.
- [Perucchio et al.89] Perucchio (R.), Saxena (M.) et Kela (A.). – Automatic mesh generation from solid models based on recursive spatial decompositions. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 28, 1989, pp. 2469–2501.
- [Pichelin et al.00] Pichelin (E.), Fortin (M.) et Boivin (S.). – étude numérique d'estimations d'erreur *a posteriori*. *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 9, n4, 2000.
- [Pironneau88] Pironneau (O.). – *Méthodes des éléments finis pour les fluides.* – Masson, 1988, *RMA 7*.
- [Shephard et al.91] Shephard (M.S.) et Georges (M.K.). – Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 32, 1991, pp. 709–749.

- [Sibson77] Sibson (R.). – Locally equiangular triangulations. *Int. J. Num. Meth. Ingrg.*, vol. 21, n3, 1977, pp. 243–245.
- [Siebert96] Siebert (K. G.). – An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numerische Mathematik*, vol. 73, 1996, pp. 373–398.
- [Talon89] Talon (J.Y.). – *Génération et amélioration de maillages pour éléments en 2 et 3 dimensions*. – Grenoble, Thèse de doctorat, INPG, 1989.
- [Vallet92] Vallet (M-G.). – *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. – Thèse de doctorat en mathématiques, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1992.
- [Verfurth] Verfurth. – A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, pp. 257–274.

## Chapitre 3

# R-adaptation

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Revue bibliographique</b>	<b>79</b>
3.2.1	Régularisation de maillage	79
a)	Méthodes de barycentrage	80
b)	Méthodes d'optimisation	80
c)	Méthodes <i>physiques</i>	81
3.2.2	Capture d'interfaces	81
a)	Reconstruction d'interfaces	81
b)	Méthode d'équirépartition	83
c)	Méthode MFE	84
<b>3.3</b>	<b>Le problème statique</b>	<b>85</b>
3.3.1	La méthode	86
a)	Algorithme de barycentrage pondéré	88
b)	Calcul des poids	89
c)	Contrainte sur la déformation de l'élément	91
3.3.2	Initialisation de la fonction caractéristique	92
3.3.3	Les exemples	94
<b>3.4</b>	<b>Le problème dynamique</b>	<b>96</b>
3.4.1	Équation de transport - Vitesse de maillage	98
3.4.2	Application à l'injection	99
3.4.3	Les exemples	100
a)	Écoulement de poiseuille	100
b)	Pièce type 2D/3D	100
c)	Écoulement de poiseuille et maillages anisotropes	101
d)	Remplissage d'une marche : approche globale	102
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter une méthode d'adaptation de maillage destinée à réduire la diffusion numérique liée à la résolution d'un problème de transport dans une approche eulérienne. Comme nous venons de le voir l'utilisation de maillages anisotropes peut exacerber ce phénomène mais il reste sensible dans le cas d'utilisation de maillages isotropes. Nous nous placerons donc dans le cas de maillages quelconques.

La nécessité de développer cette méthode d'adaptation de maillage est dictée par l'application à laquelle elle est destinée. Une diffusion sur la fonction de présence est synonyme d'imprécision sur la position du front de matière au cours du remplissage. Or la position du front de matière est une information importante dans le cas de la formation d'une ligne de ressoudure qui est un défaut majeur rencontré avec le procédé d'injection (le lecteur intéressé trouvera une revue synthétique des principaux défauts d'injection dans [Trotignon et al.96]).

Ce manque de précision au front de matière est encore plus pénalisant lorsque l'on s'intéresse aux procédés d'injection multi-matières ou injection assistée gaz <sup>1</sup>. Une mauvaise définition des interfaces peut mener à l'échec de la simulation. Là encore la méthode d'adaptation doit apporter une amélioration sensible des résultats puisque ces travaux seront intégrés aux versions multi-fluides de REM3D ®.

Nous avons choisi une méthode simple, robuste et peu coûteuse tant en temps de mise en oeuvre qu'en rapidité d'exécution. C'est une méthode qui appartient à la classe des méthodes de *r-adaptation*, c'est à dire par déplacement de noeuds à topologie fixe. Pour cela on a développé un algorithme de type barycentrage pondéré. Cette méthode dérive des méthodes de régularisation de maillage utilisant l'opérateur laplacien.

Nous rappellerons donc tout d'abord quelques résultats connus sur les méthodes de régularisation de maillage ainsi que des méthodes de r-adaptation dédiées à la capture d'interface. Puis, après avoir présenté notre démarche, nous présenterons quelques applications de notre méthode d'adaptation à des exemples statiques et dynamiques.

## 3.2 Revue bibliographique

### 3.2.1 Régularisation de maillage

Les méthodes de régularisation de maillage sont souvent employées en complément des algorithmes de génération pour améliorer la qualité globale du maillage. La plupart de ces méthodes de régularisation reposent sur un algorithme itératif qui repositionne chaque noeud individuellement (en conservant la topologie de maillage) pour améliorer la qualité locale des éléments. Il existe une grande variété de techniques utilisant ce principe. On peut généralement les regrouper en trois classes distinctes (si l'on omet les méthodes relatives aux éléments quadratiques [Salem et al.97]) :

- les méthodes de barycentrage ;
- les méthodes d'optimisation ;
- les méthodes basées sur un modèle physique.

---

<sup>1</sup>Voir au chapitre 4 la description et les modélisations de ces deux procédés.

**a) Méthodes de barycentrage**

De toutes les méthodes de régularisation, la plus basique et la plus répandue est l'algorithme de Laplace [Field88]. Elle consiste à placer chaque noeud interne au maillage au barycentre des noeuds auxquels il est connecté par une arête. Cette technique s'applique naturellement pour toute dimension de l'espace et peut, avec peu de modifications, traiter toute forme d'élément. Ce barycentrage est répété itérativement sur tout le maillage jusqu'à ce que chaque noeud se déplace d'une distance inférieure à une tolérance donnée. En pratique, cette convergence est obtenue en 4 ou 5 itérations. De nombreuses variantes de cet algorithme ont été développées, le plus souvent en modifiant le barycentrage en un barycentrage pondéré : la contribution de chaque noeud voisin est pondérée par une fonction dépendant de la taille de l'arête, de la surface de l'élément ou autre critère similaire. Les autres variantes de l'algorithme de Laplace visent à corriger ou prévenir les défauts qui peuvent être créés.

Le principal défaut induit par cette méthode est la distorsion ou le retournement d'éléments dans les zones concaves du domaine. Le problème du chevron met en évidence ce défaut (fig. 3.13). Un autre défaut rencontré est la création d'angles plats (problème du maillage à  $k$ -points, fig. 3.1). Pour éviter ces défauts, on utilisera soit une procédure de correction après la régularisation soit un algorithme de régularisation sous contrainte(s).

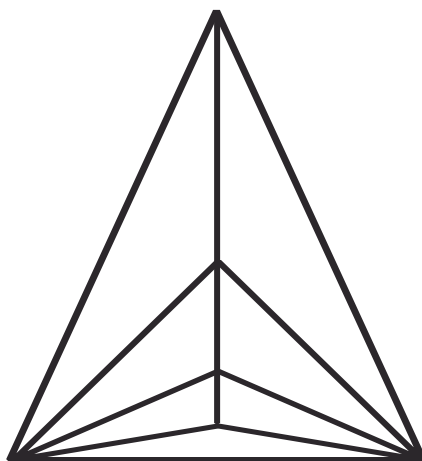


FIG. 3.1 – Maillage à  $k$ -points : la régularisation par barycentrage crée des petits angles en  $O(2^{-k})$ .

**b) Méthodes d'optimisation**

Baucoup d'auteurs se sont départis de la méthode de Laplace trouvant l'algorithme trop heuristique et les maillages obtenus parfois de mauvaise qualité (création d'angles plats...). Ils reformulent alors le problème de régularisation comme un problème d'optimisation. Les fonctions objectives choisies sont : la distorsion des éléments dans une certaine métrique [de cougny et al.], [Canann et al.98], [Li et al.00], le rapport de forme des éléments [Parthasarathy91] ou encore l'angle minimum du maillage [Freitag et al.]. [Amenta et al.98] présentent ces fonctions objectives (et quelques autres dérivées) et montrent que ces problèmes d'optimisation peuvent être formulés comme des problèmes de programmation quasi-convexe et donc être résolus *via* des méthodes de programmation linéaire généralisée.

Néanmoins, les coûts de calculs de ces méthodes d'optimisation sont bien plus important que l'algorithme de Laplace ([Parthasarathy91] trouve que la phase de régularisation est aussi coûteuse que la génération de maillage avec une méthode octree). Aussi, nombreux sont les auteurs parmi ceux-ci qui ont développé des méthodes mixtes utilisant un algorithme de Laplace pour sa rapidité puis un algorithme d'optimisation pour améliorer la qualité du maillage plutôt qu'un algorithme de Laplace contraint [Freitag97], [Canann et al.98].

### c) Méthodes *physiques*

Dernière grande famille de méthodes de régularisation de maillage, les méthodes développées selon une approche physique ou mécanique. [Lohner et al.86] décrit le maillage comme un réseau de ressorts (chaque arête est assimilée à un ressort) dont le module élastique est donné par le rapport entre la taille courante et la taille souhaitée pour l'élément ; interprétation qui est reprise par [Zhou et al.]. [Jacquotte87] interprète lui le problème de génération et d'adaptation comme un problème de minimisation d'élasticité non-linéaire. Enfin, [Djidjev] associe des forces d'attraction/répulsion à chaque noeud du maillage, les noeuds étant considérés comme le centre de sphères interagissant les unes avec les autres.

Ces méthodes ne sont parfois qu'une interprétation physique des méthodes d'optimisation, mais elles sont le plus souvent locales ce qui leur donne un avantage certain en terme de temps de calcul sur les méthodes d'optimisation dont la fonction objective est globale. Toutefois, méthodes d'optimisation ou approche mécanique, les coûts de calculs restent très supérieurs à l'algorithme de Laplace et peu d'applications tridimensionnelles sont montrées. Les estimations les plus couramment données dans la littérature donnent des temps de calcul pour les méthodes d'optimisation qui seraient 5 fois plus importants qu'un laplacien contrôlé et 30 à 40 fois plus qu'un laplacien standard.

## 3.2.2 Capture d'interfaces

Nous nous intéressons à l'amélioration de la capture d'interface ou de surface libre par adaptation de maillage ; nous écartons donc de notre étude les travaux relatifs à l'augmentation du degré polynomial de l'interpolation (*p-adaptation*) ainsi qu'à l'utilisation de schémas adaptatifs sur des maillages fixes (TVD, FCT, [Ubbink et al.99]). Les méthodes d'adaptation de maillage pour les procédés quasi-stationnaires (voir [Maury96] pour le procédé d'extrusion et [Egelja et al.98] pour le *coating*) sortent aussi de notre champ d'étude.

### a) Reconstruction d'interfaces

La méthode qui a été retenue pour déterminer la position du fluide au cours de l'écoulement est du type VOF (Volume Of Fluid). Pour ces méthodes qui implicitent la position de l'interface, comment définir précisément cette position lorsque l'on souhaite y apporter un traitement local comme, par exemple, l'imposition d'une tension de surface ? [Lock et al.98] et [Kang et al.99] proposent des solutions sensiblement équivalentes qui consistent à changer localement la topologie du maillage en ajoutant des noeuds à l'intersection de l'isovaleur 0,5 de la fonction de présence et des arêtes du maillage (fig. 3.2). Ceci leur permet de définir explicitement « l'interface » et d'y appliquer le traitement ad'hoc.

Autre méthode assez fréquemment utilisée : l'algorithme PLIC (Piecewise Linear Interface Construction). Il s'agit ici de construire dans chaque élément du maillage, la nor-



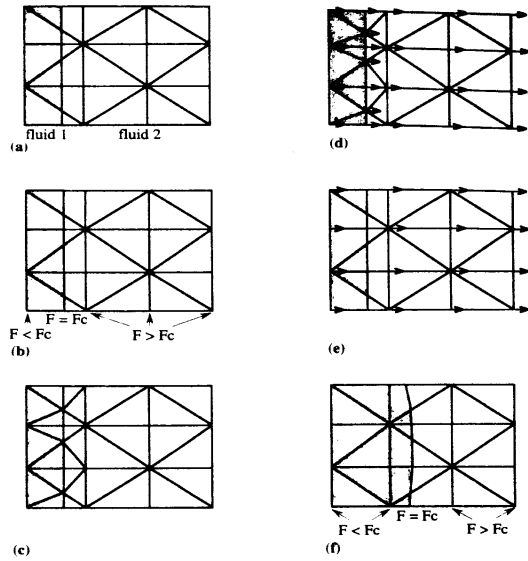
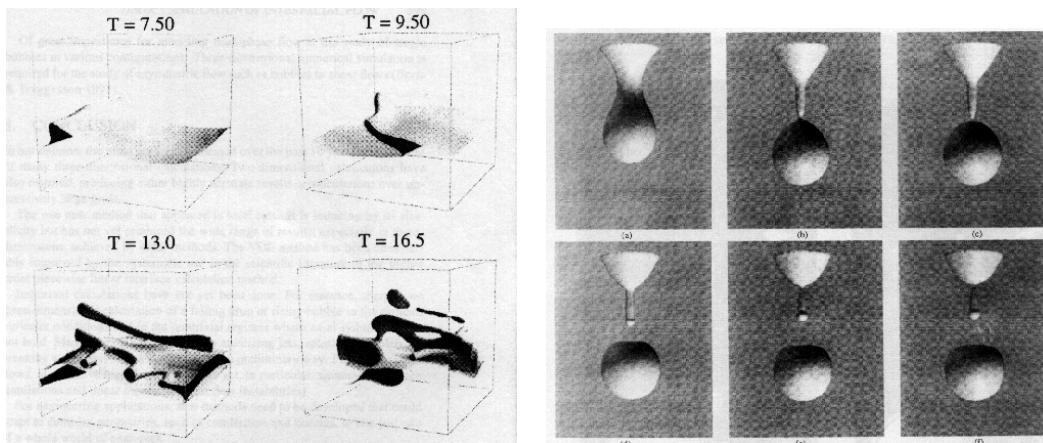


FIG. 3.2 – Modification locale de la topologie (*tiré de [Lock et al.98]*).

male à l'interface, l'intersection du plan défini par cette normale avec l'élément en tenant compte de la valeur de la fonction de présence puis de propager l'interface. Cette méthode a été largement utilisée par [Gueyffier et al.99] et [Scardovelli et al.99] qui l'ont appliquée à des cas tridimensionnels. Les résultats qu'ils obtiennent sont très spectaculaires permettant de visualiser de la coalescence, la chute de gouttes ou encore des ruptures d'interfaces (fig. 3.3). Néanmoins, l'une et l'autre de ces méthodes visent avant tout à reconstruire expli-



(a) Rupture d'interface.

(b) Chute d'une goutte.

FIG. 3.3 – Résultats obtenus avec la méthode PLIC (*tiré de [Gueyffier et al.99] et [Scardovelli et al.99]*).

citement une interface ce qui est un problème sensiblement différent de celui qui consiste réduire l'erreur sur le schéma numérique utilisé pour trouver la position de l'interface. En particulier, avec la première de ces deux méthodes on fait le choix arbitraire de définir l'interface comme l'isovaleur 0.5 de la fonction de présence, mais si les isovaleurs 0 et 1

sont distantes de cette isovaleur de plusieurs couches d'éléments, quel sens peut on donner à la reconstruction explicite de l'interface? Pour notre part, nous nous « contentons » de la définition implicite de l'interface. Notre souhait, par contre, est de s'assurer que le lieu géométrique où elle est définie soit le plus petit possible. Pour cela notre stratégie consiste à resserrer les noeuds au voisinage de l'interface pour diminuer l'étalement de la diffusion numérique. Quelles sont les méthodes proposées dans la littérature pour ce problème?

### b) Méthode d'équirépartition

La méthode d'équirépartition (ou d'équidistribution) est très répandue dans la littérature. Son principe consiste à resserrer les points du maillage là où le critère d'adaptation est le plus grand ou encore à répartir une *fonction poids*  $w$  sur l'ensemble des mailles. Cette fonction poids est le plus souvent définie comme le gradient du champ  $u$  par rapport auquel on souhaite adapter le maillage, soit pour un maillage 1D :

$$w(x) = \frac{du}{dx},$$

ou comme la fonction *rayon de courbure*

$$w(x) = \frac{ds}{dx},$$

$$s(x) = \int_a^x \left( 1 + \left( \frac{du}{dl} \right)^2 \right)^{1/2} dl.$$

La position des noeuds est alors déterminées par l'expression :

$$x_k = x_{min} + (x_{max} - x_{min}) \frac{G(k)}{G(N)},$$

avec :  $G(k) = \sum_{i=1}^{k-1} w_{i+1/2}^{-1}$ . On peut trouver dans la littérature plusieurs références (

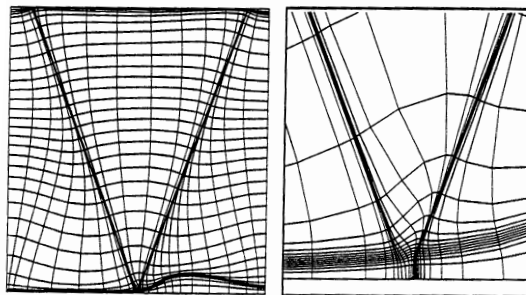
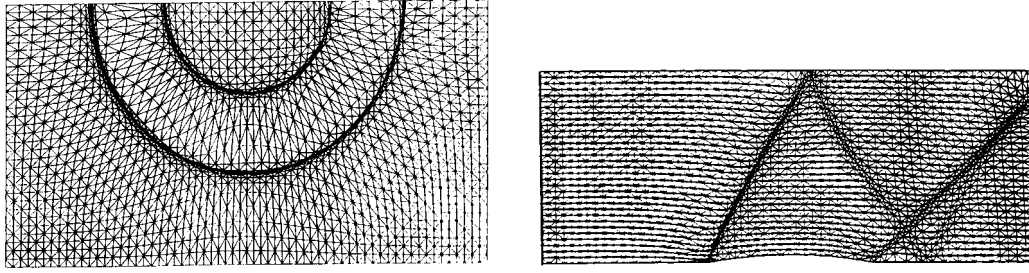


FIG. 3.4 –

[Baines98], [Laffin et al.96], [Carpenter v et al.96], [Degtyarev et al.96], [Agarwal96], [Scott mcrae96]) qui appliquent cette méthode dans différentes dimensions de l'espace et pour plusieurs types d'éléments (triangles fig. (3.5) ou quadrangles fig. (3.4)). Si la plupart des applications sont des problèmes statiques, [Scott mcrae96] présentent un cas instationnaire en résolvant le problème de minimisation à chaque pas de temps du schéma temporel.



(a) Maillage initial.

(b) Étape intermédiaire.

FIG. 3.5 – Exemple de Baines ([Baines98]).

Méthode concurrente des méthodes d'équidistribution, l'approche par minimisation directe consiste à minimiser l'erreur sur le problème considéré en cherchant en même temps la positions des noeuds et les coefficients de la solution approchée. Cette approche est étendue au cas instationnaire sous l'appellation de méthode MFE (Moving Finite Elements method).

### c) Méthode MFE

Cette méthode due à K. Miller en 1981 a été reprise et améliorée par plusieurs auteurs qui l'étendent au problèmes bidimensionnels [Huang et al.99], le réduisent à la résolution de problèmes variationnels locaux [Tourigny et al.98] ou à un problème de minimisation d'une fonctionnelle « énergie » [Martin95]. C'est [Baines87] qui en fait la description la plus synthétique que nous reprendrons ici.

Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad (3.1)$$

avec :  $u = u(x, t)$  et  $\mathcal{L}$  un opérateur différentiel spatial dans l'espace de la variable  $x$ . Considérons la transformation entre les coordonnées  $x, t$  et les variables indépendantes  $\xi, \tau$  définie par :

$$\begin{cases} x = x(\xi, \tau), & t = \tau; \\ u(\xi, \tau) = u(x, t). \end{cases}$$

On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau}.$$

On peut alors réécrire (3.1) :

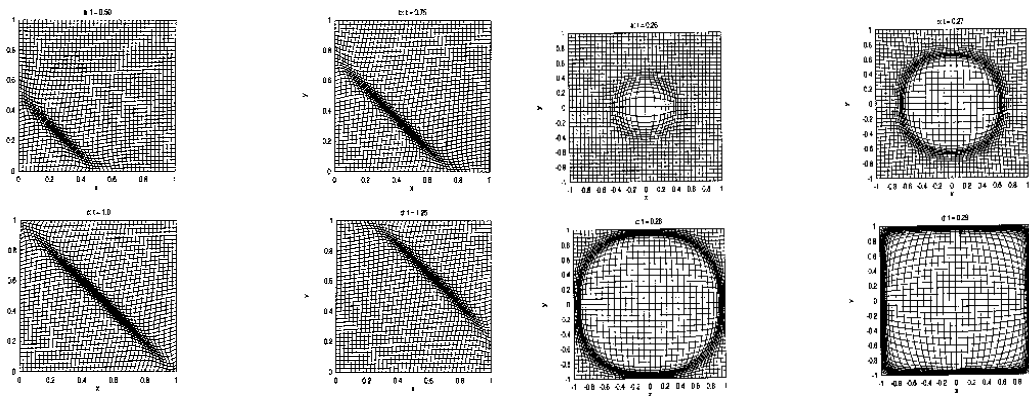
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \mathcal{L}u.$$

En introduisant l'opérateur  $R(\frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial x}{\partial \tau}) = \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \mathcal{L}u$ , on en conclut que lorsque  $u$  et  $x$  sont restreints à des ensembles des fonctions tests admissibles,  $R$  est le résidu du problème aux dérivées partielles initial. On cherche donc alors à minimiser ce résidu (sous une forme faible) en introduisant les approximations éléments finis des champs  $x$  et  $u$ . Ceci mène à la construction d'un système non linéaire du type :

$$\mathbf{A}(y)\dot{y} = g(y),$$

où  $y$  est le vecteur des inconnues aux noeuds *et* des coordonnées des noeuds. Nous ne décrirons pas ici les différentes méthodes retenues pour résoudre ce système.

Cette méthode est plus séduisante que la méthode d'équirépartition en ce sens qu'il n'y a pas ici de choix heuristique à faire comme c'est le cas avec la fonction poids. En contrepartie la résolution du système peut s'avérer très coûteuse. Il est enfin à noter qu'ici encore la littérature ne montre pas d'application tridimensionnelle de cette méthode mais des cas bidimensionnels « simples » (et intéressant comme ceux proposés par Russell voir fig. (3.6)).



(a) Équation de Burger.

(b) Problème modèle de combustion.

FIG. 3.6 – Exemples d'applications de la méthode MFE (tirés de [Huang et al.99]).

Quels sont les enseignements que l'on peut tirer de cette étude bibliographique ? Tout d'abord, les méthodes d'adaptation par déplacement de noeuds montrent une réelle capacité à capter les forts gradients (onde de choc, interface, gradient thermique, ...) Leur capacité ne se borne pas aux problèmes hyperbolique ou parabolique mais s'étend aussi aux problèmes diffusifs [Zegeling98]. Mais le choix de la méthode de déplacement des noeuds influence fortement les temps de calculs : notre choix se portera donc vers une méthode proche de la méthode de Laplace. En effet, sa simplicité permet une mise en oeuvre rapide qui nous permettra d'évaluer la pertinence de notre démarche et son faible coût ne grèvera pas trop lourdement un temps de calcul déjà important lorsque l'on traite des problèmes thermomécaniques instationnaires. En outre, alors que la littérature présente peu de résultats dans ce cadre, notre algorithme doit être performant dans des géométries tridimensionnelles complexes.

Pour présenter la méthode d'adaptation de maillage, on se place dans un cadre statique c'est à dire en considérant que l'interface entre les domaines est immobile. Cette situation peut être interprétée comme un incrément de temps de la résolution de l'équation de transport.

### 3.3 Le problème statique

Dans le cadre statique, le problème pourrait se résumer à : « comment extraire d'un maillage  $\mathcal{M}$  du domaine  $\Omega$ , un maillage du sous-domaine  $\Omega_f \subset \Omega$  ? ». La figure (3.7) illustre le problème. On cherche à déformer le maillage initial aux frontières du sous-domaine grisé

pour bien « visualiser » l'interface entre les deux domaines.

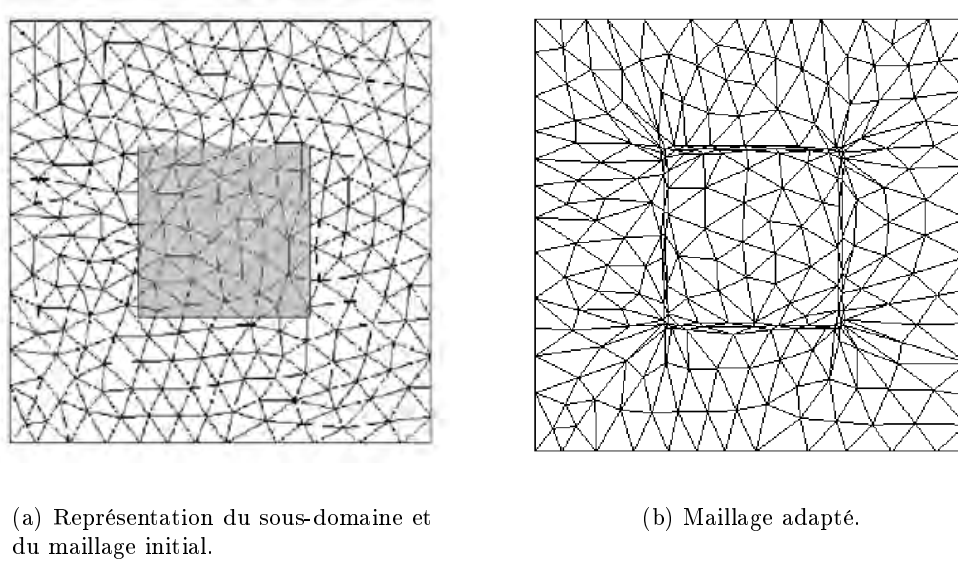


FIG. 3.7 – Illustration du problème : adaptation autour d'un carré.

### 3.3.1 La méthode

Pour définir le sous-domaine  $\Omega_f$ , on se donne une fonction *caractéristique* qui lui est associée et définie sur  $\Omega$  :

$$\mathbb{1}_{\Omega_f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_f. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

On notera  $\mathbb{1}_{\Omega_f}^h = \pi^h(\mathcal{M})\mathbb{1}_{\Omega_f}$  la projection de la fonction caractéristique sur le maillage. Notre problème peut alors s'écrire sous la forme :

$$\min_{\mathcal{M}} \|\pi^h(\mathcal{M})\mathbb{1}_{\Omega_f} - \mathbb{1}_{\Omega_f}\|. \quad (3.3)$$

Notre choix se portant sur une méthode de *r-adaptation*, la topologie  $\mathcal{T}$  du maillage est invariante. On cherche donc un ensemble de coordonnées  $\mathcal{X}'$  solution du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \|\pi^h(\mathcal{X}', \mathcal{T})\mathbb{1}_{\Omega_f} - \mathbb{1}_{\Omega_f}\| &= \min_{\mathcal{X}} \|\pi^h(\mathcal{X}, \mathcal{T})\mathbb{1}_{\Omega_f} - \mathbb{1}_{\Omega_f}\|, \\ &\leq \|\pi^h(\mathcal{X}^i, \mathcal{T})\mathbb{1}_{\Omega_f} - \mathbb{1}_{\Omega_f}\|, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{X}^i$  représente l'ensemble des coordonnées initiales des noeuds du maillage.

Nous ne ferons pas ici l'analyse mathématique de ce problème puisque déjà traité dans l'abondante bibliographie concernant les méthodes de régularisation de maillage par déplacement des noeuds. Pour démontrer l'existence d'une solution à ce problème on pourra en particulier s'inspirer de [Martin95, ch. IV].

$\mathbb{1}_{\Omega_f}$  : fonction *caractéristique* du domaine grisé.  
 $\mathbb{1}_{\Omega_f}^h$  : projection de  $\mathbb{1}_{\Omega_f}$  sur  $\mathcal{M}$ .  
 $\mathbb{1}^K = \frac{|K \cup \Omega_f|}{|K|}$ .

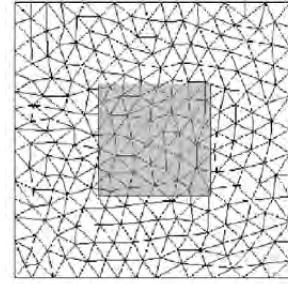


FIG. 3.8 – Fonctions et valeurs caractéristiques du sous-domaine.

Nous faisons le choix d'une projection sur l'ensemble des fonctions constantes par élément du maillage  $\mathcal{M}$ . On peut ainsi considérer  $\mathbb{1}_{\Omega_f}^h$  comme l'interpolée  $P0$  de  $\mathbb{1}_{\Omega_f}$  sur  $\mathcal{M}$ . Par la suite, nous utiliserons par abus de langage l'une ou l'autre définition de  $\mathbb{1}_{\Omega_f}^h$ . L'erreur exacte d'interpolation commise est donnée par :

$$\mathcal{E} = \|\mathbb{1}_{\Omega_f}^h - \mathbb{1}_{\Omega_f}\|_{0,K} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} (1 - \mathbb{1}^K) \mathbb{1}^K |K| \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

où  $\mathbb{1}^K$  est la valeur de l'interpolée sur l'élément  $K$  (voir fig. 3.3.1).

En observant l'expression (3.4), on voit que seuls les éléments dont la fonction caractéristique a une valeur différente de 1 ou 0 contribuent à l'erreur (noter ici l'abus de langage : fonction caractéristique pour valeur de l'interpolation de la fonction caractéristique sur l'élément). Ces éléments sont ceux qui sont traversés par l'interface entre les deux domaines. Leur contribution à l'erreur est proportionnelle à leur volume  $|K|$  et la valeur de la fonction caractéristique. Pour réduire l'erreur d'interpolation, nous avons donc trois possibilités :

1. réduire le nombre d'éléments traversés par l'interface ;
2. modifier la valeur de la fonction caractéristique sur ces éléments ;
3. réduire le volume de ces éléments.

Intuitivement, c'est sur la dernière de ces possibilités qu'il est le plus facile d'agir. L'idée la plus simple consiste en effet à réduire le volume des éléments traversés par l'interface en conservant leur connectivité. Nous n'avons cependant pas d'information *a priori* sur la façon dont on doit réduire ce volume. Nous prenons donc le parti de le réduire arbitrairement selon une homothétie centrée par rapport au barycentre de l'élément. La figure (3.9) illustre le principe de la méthode (la ligne rouge représentant l'interface entre les domaines).

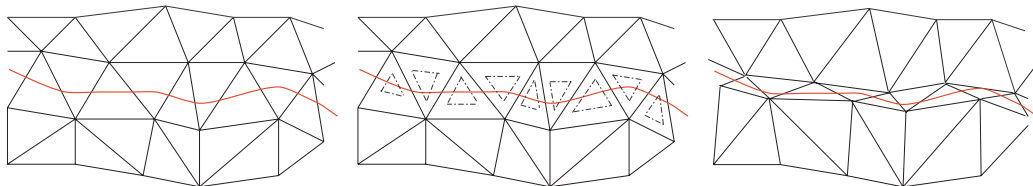
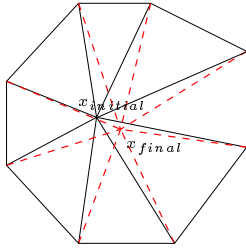


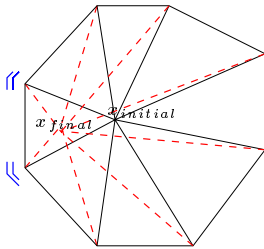
FIG. 3.9 – Illustration de la méthode : maillage initial, volumes visés et maillage final.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} |\mathcal{V}_n(x_1)| & 0 & \dots & 1 \\ 0 & |\mathcal{V}_n(x_2)| & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & |\mathcal{V}_n(x_i)| \end{pmatrix}$$

$\mathcal{V}_n(x_i)$  : ensemble des noeuds connectés au noeud  $x_i$ .

FIG. 3.10 – Méthode de barycentrage.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} |\mathcal{V}_n(x_1)| & 0 & \dots & \alpha_{1j} \\ \alpha_{21} & |\mathcal{V}_n(x_2)| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{ij} & \dots & |\mathcal{V}_n(x_i)| \end{pmatrix}$$

$(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,NbNoeuds}$  : vecteur des poids.

FIG. 3.11 – Barycentrage pondéré.

Le déplacement des noeuds doit donc permettre d'atteindre les volumes visés pour chaque élément. Ce déplacement est calculé par un algorithme itératif inspiré par les méthodes de régularisation de maillage par barycentrage (opérateur laplacien). Il peut être vu comme un algorithme de barycentrage pondéré.

#### a) Algorithme de barycentrage pondéré

Comme nous l'avons vu précédemment, la technique de régularisation de maillage par barycentrage est largement utilisée dans la littérature. Cette méthode, qui consiste à placer chaque noeud au barycentre des positions de ses voisins, est souvent réduite à la résolution itérative (de type Gauss-Seidel) d'un système :

$$\mathbf{A}(x)x = b,$$

où  $\mathbf{A}$  dépend de la connectivité du maillage (fig. (3.10)) et  $b$  donne la position des noeuds frontières.

Nous proposons de modifier cette méthode en affectant un poids à chaque noeud du maillage (fig. (3.11)). Les poids doivent être choisis pour attirer les noeuds dans les zones où l'erreur est la plus importante. Donc, la valeur des poids est dépendante de la position des noeuds. Le problème à résoudre est non linéaire.

REMARQUE : le problème peut aussi s'exprimer sous la forme d'un problème de minimisation :

$$\min_x \Phi(x, \alpha_{ij}(x)), \tag{3.5}$$

avec :  $\Phi(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}x, x) - (b, x)$ .

Naturellement le calcul des poids est un point crucial de notre méthode puisque ce sont eux qui vont piloter l'adaptation. Nous n'avons toutefois pas déterminé si le choix des

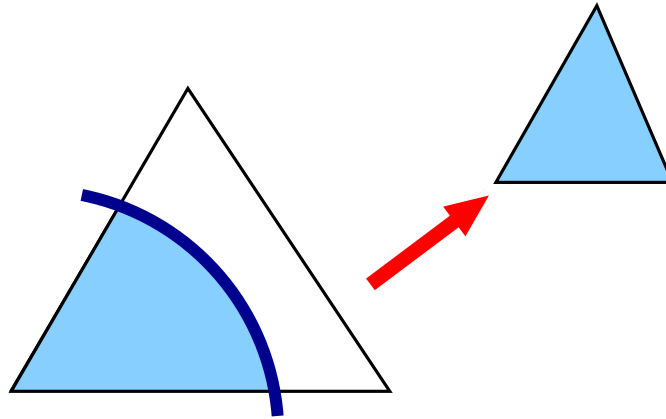


FIG. 3.12 – Définition d'un volume optimal.

poids est unique (pas plus que leur valeur optimale). Notre approche se veut beaucoup plus pragmatique et efficace (en terme de temps de calcul) : dans le cadre de l'adaptation de maillage, la détermination d'un maillage optimal n'est pas primordiale. Au contraire cette recherche peut s'avérer coûteuse en regard du gain de précision qu'elle apporte au calcul. Il est préférable de proposer un maillage qui améliore de façon significative la qualité des calculs pour un coût qui reste négligeable comparativement au calcul dont il est le support.

### b) Calcul des poids

Comme nous l'avons dit, on peut réduire l'erreur d'interpolation de la fonction caractéristique en réduisant le volume des éléments traversés par l'interface, mais quel est leur volume optimal ?

On considère que notre adaptation de maillage se fait selon le principe d'équirépartition. Suivant ce principe, chaque élément doit contribuer de façon identique à l'erreur globale ( $\mathcal{E}_{loc} = \mathcal{E}_{Tot}/NbElts$ ). Par ailleurs, si  $K'$  désigne le volume optimal, l'erreur locale s'écrit :

$$\mathcal{E}_{loc}^2 = \mathbb{1}^{K'} (1 - \mathbb{1}^{K'}) |K'|. \quad (3.6)$$

**Première hypothèse** On fait la supposition que  $\mathbb{1}^{K'} = \mathbb{1}^K$ . Ce qui revient à supposer qu'un élément situé sur l'interface des deux domaines reste dans la même situation après réduction de son volume (ce qui est cohérent avec le choix que nous faisons pour sa transformation : homothétie centrée). Ainsi, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_{loc}^2 = \left( \mathbb{1}^K (1 - \mathbb{1}^K) \right) |K'|. \quad (3.7)$$

et le volume optimal pour chaque élément est déterminé par :

$$|K'| = \frac{\mathcal{E}_{loc}^2}{\mathbb{1}^K (1 - \mathbb{1}^K)}. \quad (3.8)$$



Sur chaque élément, ce volume est donc atteint en appliquant une homothétie centrée par rapport à son barycentre. La position d'un noeud est alors déterminée par la formule :

$$x = \frac{1}{|\mathcal{T}_n(x)|} \sum_{K \in \mathcal{T}_n(x)} [(1 - \beta_K)X_{bary}^K + \beta_K x] \quad (3.9)$$

avec :

- $\mathcal{T}_n(x)$  : l'ensemble des éléments connectés au noeud  $x$  ;
- $X_{bary}^K$  : le barycentre de l'élément  $K$  ;
- $\beta_K = f\left(\frac{|K'|}{|K|}\right)$  le facteur d'homothétie de l'élément  $K$ .

REMARQUE : on notera que chaque noeud est placé au barycentre (pondéré) des barycentres des éléments auxquels il est connecté et non au barycentre des noeuds voisins. En fait, on peut montrer qu'il y a équivalence entre ces deux choix en 2D mais pas en 3D. Ce choix arbitraire n'influe évidemment pas sur notre méthode, le choix des poids ( $\alpha_{ij}$ ) est simplement « remplacé » par le choix des poids ( $\beta_K$ ).

Il nous reste donc à déterminer le vecteur  $(\beta_K)_{K=1, \dots, nbElts}$ .

**Seconde hypothèse** On suppose que la fonction  $f$  est de la forme :

$$f(\cdot) = \cdot^{1/d}, \text{ dans } \mathbb{R}^d.$$

En effet, considérons le volume d'une sphère de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Son volume  $V$  est proportionnel à  $\pi r^d$ . Considérons la sphère de rayon  $r' = \alpha r$ , le rapport des volumes entre les deux sphères est donné par  $\frac{V'}{V} = \alpha^d$ . Ainsi dans notre cas, le coefficient de pondération du barycentrage destiné à piloter la réduction du volume des éléments peut être dimensionné en fonction de la dimension de l'espace :  $\alpha = c^{1/d}$ .

Nous avons donc déterminés les poids qui pilotent le barycentrage pondéré des noeuds du maillage. Ces positions barycentrées sont calculées avec une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Reste pour terminer l'algorithme d'adaptation à contrôler la qualité du maillage obtenu et en particulier sa non dégénérescence. En effet, comme pour les méthodes de régularisation par barycentrage, nous ne contrôlons pas le retournement d'un élément (voir le problème du chevron (fig. 3.13), ou d'un domaine non convexe (fig. 3.14)). C'est pourquoi il nous faut introduire une contrainte sur la déformation de l'élément.

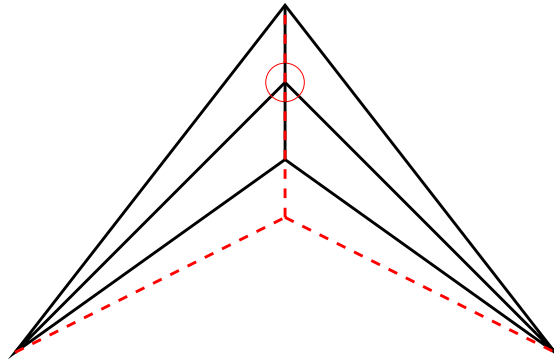


FIG. 3.13 – Problème du chevron : le barycentrage du noeuds encerclé provoque le retournement de 2 éléments.

## c) Contrainte sur la déformation de l'élément

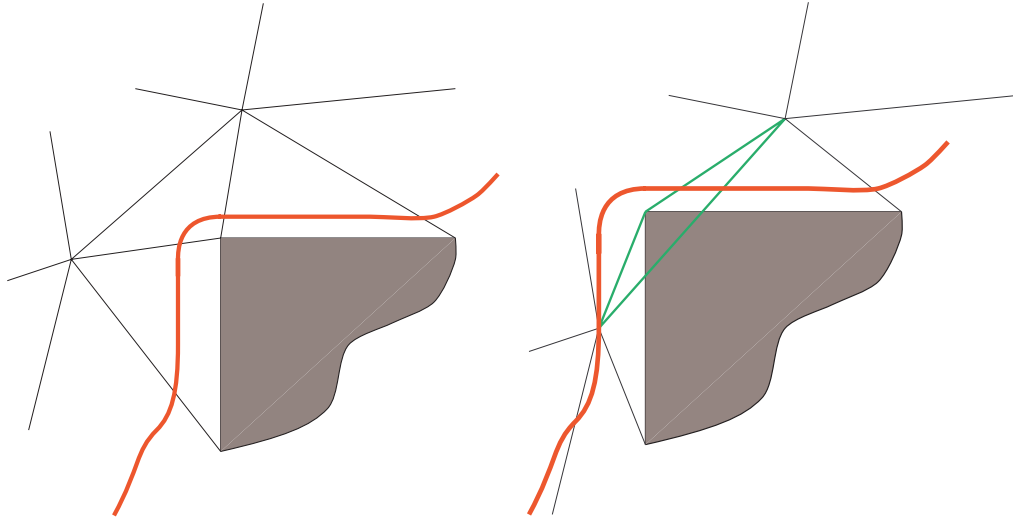


FIG. 3.14 – Domaine non convexe : retournement d'un élément.

Chaque élément doit respecter le critère volumique :

$$J(K) \geq 0, \quad (3.10)$$

où  $J(K)$  est le jacobien de la transformation. Ce critère peut être avantageusement remplacé par une contrainte sur le respect d'un critère de forme du type :

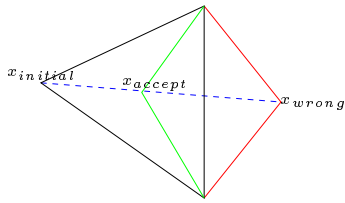
$$\mathcal{C}(K) = \frac{|K|}{h^d} \geq \mathcal{C}_{min}. \quad (3.11)$$

Finalement, notre méthode d'adaptation de maillage peut être vue comme un problème d'optimisation non linéaire sous contrainte de type inégalité :

$$\min_{x, J(K) \geq 0} \Phi(x, \beta_K). \quad (3.12)$$

Il existe, pour ce type de problème, une littérature assez riche qui reflète la diversité des méthodes développées pour le traiter. On retiendra simplement que [Martin95] traite ce type de problème aussi dans le cadre de l'adaptation de maillage et que [Ciarlet94] en donne une vision plus générale ainsi que quelques résultats d'existence.

Nous avons eû une démarche pragmatique pour résoudre ce problème : nous nous « contentons » de corriger *a posteriori* la position des noeuds qui violeraient la contrainte. Cette correction se fait en utilisant un algorithme de dichotomie et en utilisant le fait que la maillage initial respecte la contrainte. Ainsi, pour chaque noeud qui viole la contrainte, on cherche par dichotomie la position qui respecte la contrainte sur le volume de l'élément entre sa position initiale et la position calculée par l'algorithme d'adaptation (voir la figure ci-dessous). Bien évidemment cette méthode n'est théoriquement pas optimale, mais en pratique peu de noeuds doivent voir leur position corrigée. Le coût de la correction est marginal dans le coût de l'adaptation.



**Méthode de dichotomie**

on cherche  $\delta_{opt.} \in [0, 1]$  qui maximise le déplacement du noeud et tel que :

$$J(K(x + \delta\Delta x)) \geq 0.$$

**3.3.2 Initialisation de la fonction caractéristique**

Pour tester notre méthode d’adaptation nous avons développé un outil qui permet d’initialiser une fonction caractéristique sur un maillage à partir du maillage du sous-domaine. Il s’agit en fait de déterminer l’intersection entre les deux domaines, cette intersection étant « matérialisée » par la fonction caractéristique.

Par convention, on appellera domaine maître le domaine de « fond », celui sur lequel est définie la fonction caractéristique du sous-domaine (le domaine esclave).

On associe au domaine maître une carte de *pixels* (ou *voxels* en 3D) ; cette carte de pixels couvrant l’ensemble du domaine (voir fig. 3.15). La *résolution* de la pixelisation est modifiable par l’utilisateur : plus la résolution est importante, plus l’intersection sera déterminée de façon précise.

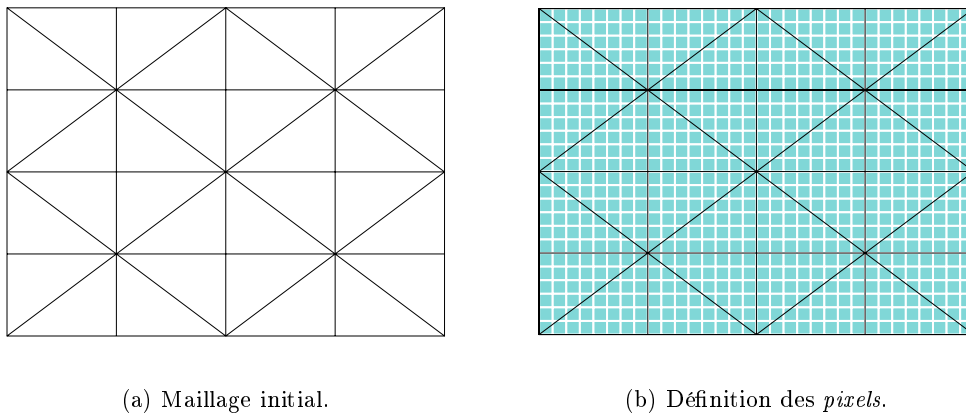


FIG. 3.15 – Définition d’une boîte de pixels sur le domaine global.

Cette carte de pixels (fig. 3.16(a)) est ensuite coloriée à partir du maillage esclave que l’on « immerge » dans la carte. Pour cela, on balaie chaque élément de ce maillage suivant une grille dont le pas est égal au pas de résolution de la carte de pixels. À chaque noeud de cette grille, on teste si les coordonnées sont incluses dans le domaine défini par la carte de pixels et si oui le pixel est colorié (fig. 3.16(b) et 3.17(a)).

Reste ensuite à parcourir les éléments du maillage maître. Chaque élément est balayé de la même façon que le maillage esclave. Le rapport entre le nombre de pixels coloriés et le nombre de pixels couvrant l’élément donne la valeur de la fonction caractéristique sur cet élément (fig. 3.17(b) et 3.18).

Cet outil présente l’avantage de pouvoir traiter un grand nombre de géométries et donc de valider notre démarche sur autant de cas.

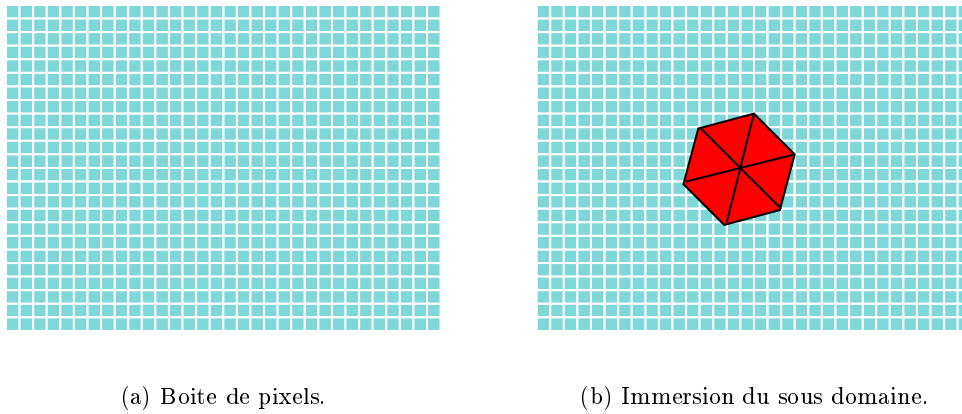


FIG. 3.16 – Récupération de la boite de pixels et insertion du sous domaine.

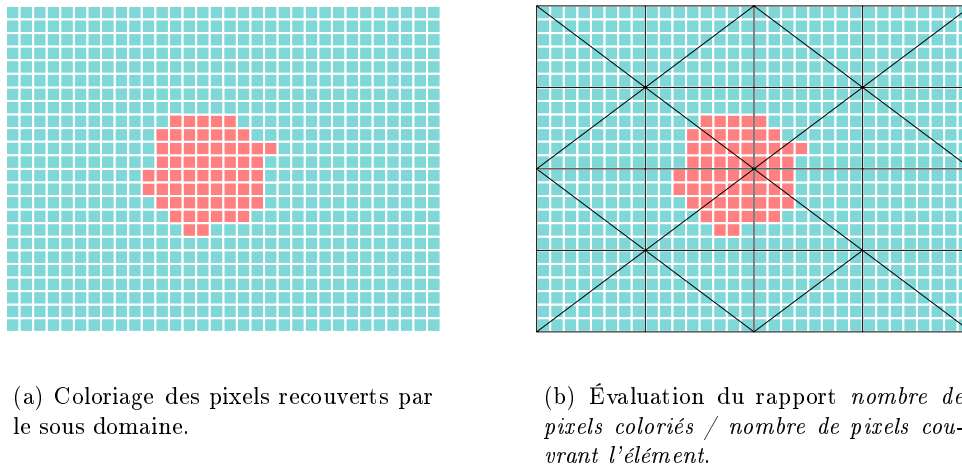


FIG. 3.17 – Initialisation de la fonction caractéristique relative au sous domaine rouge.

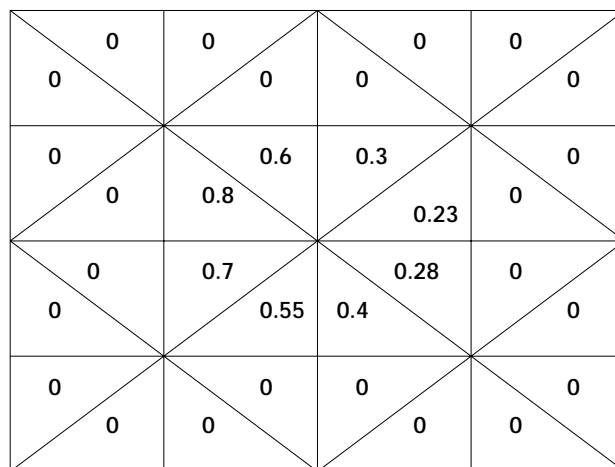
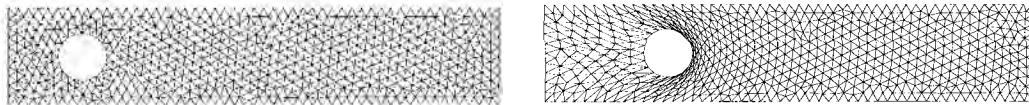


FIG. 3.18 – Valeur de la fonction caractéristique sur le maillage

En outre cette versatilité nous est utile pour d'autres applications. En particulier, les développements actuels du code REM3D<sup>®</sup> requièrent de définir plusieurs domaines au sein d'un même maillage : un domaine pour le fluide (polymère fondu), un pour le gaz, un pour le moule autour de la cavité à remplir, une pour les canaux de régulation, . . . Cette approche eulérienne « étendue » présente de nombreux avantages en termes de résolution couplée, de gestion du contact et plus globalement une meilleure prise en compte des conditions aux limites. Pour initialiser le calcul, il est donc nécessaire de pouvoir définir sur un même maillage plusieurs fonctions caractéristiques relatives aux géométries de chacun des domaines considérés. Ceci est rendu possible *via* cette méthode d'initialisation. Un exemple d'application sera présenté à la fin de ce chapitre.

### 3.3.3 Les exemples

Le premier exemple est inspiré de la littérature. L'application proposée par [Baker00] consiste à convecter un cercle dans un domaine rectangulaire (dans la direction du plus grand côté du rectangle). Le maillage initial (fig. 3.19(a)) est progressivement déformé de façon lagrangienne jusqu'à ce que des éléments atteignent un critère de forme qui n'est plus acceptable (fig. 3.19). Ces éléments sont alors détruits et une opération de remaillage locale est entreprise. Sur ce nouveau maillage, on reprend le calcul du mouvement de convection, . . .

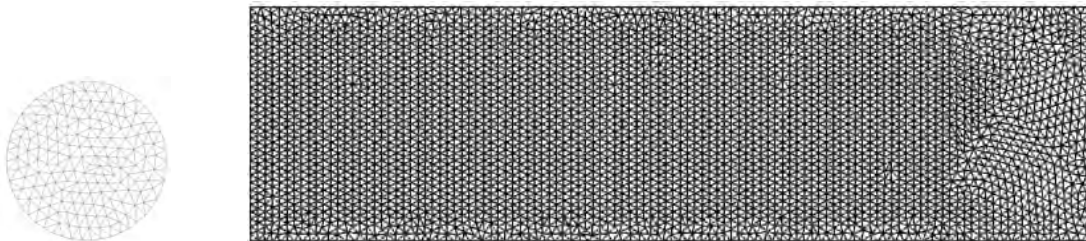


(a) Maillage initial.

(b) Étape intermédiaire.

FIG. 3.19 – Convection d'un cercle dans un rectangle ( [Baker00]).

L'approche que nous proposons consisterait plutôt à convecter non pas le cercle de façon lagrangienne mais la *fonction caractéristique* associée au cercle dans un contexte eulérien. Pour cela, il faut déterminer la fonction caractéristique du cercle (fig. 3.20(a)) sur le maillage du rectangle (fig. 3.20(b)).



(a) Maillage du sous-domaine.

(b) Maillage initial du domaine global.

FIG. 3.20 – Maillages initiaux.

Si on applique la méthode d'initialisation proposée précédemment on obtient le résultat présenté ci dessous (fig. 3.21(a)). Mais une légère diffusion sur la fonction caractéristique

à l'état initial peut générer une erreur numérique trop importante lors de la résolution du problème de convection pur. En appliquant la méthode d'adaptation de maillage que nous avons développée, cette réduction peut être significativement réduite (fig. 3.21(b)).



(a) Valeur de la fonction caractéristique sur le maillage initial.

(b) Valeur de la fonction caractéristique sur le maillage adapté.

FIG. 3.21 – Isovaleurs de la fonction caractéristique (du plus sombre (valeur= 1) au plus clair (valeur= 0)).

L'adaptation a permis de *resserrer* un certain nombre d'éléments à la frontière du cercle (fig. 3.22) qui « absorbent » la discontinuité de la fonction caractéristique. Pour cet exemple ainsi que pour les autres cas statiques, nous avons en fait itéré entre initialisation la fonction caractéristique et adaptation du maillage (moins de 10 itérations dans les cas les plus complexes testés). Ceci nous affranchit d'avoir à choisir les paramètres optimaux pour la méthode d'adaptation (*i.e.* choisir la(es) meilleure(s) pente(s) pour résoudre notre problème d'optimisation).

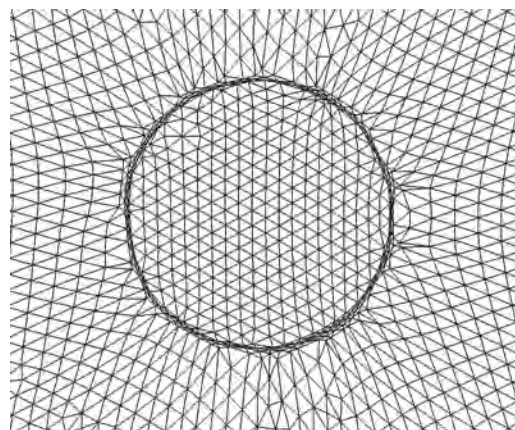
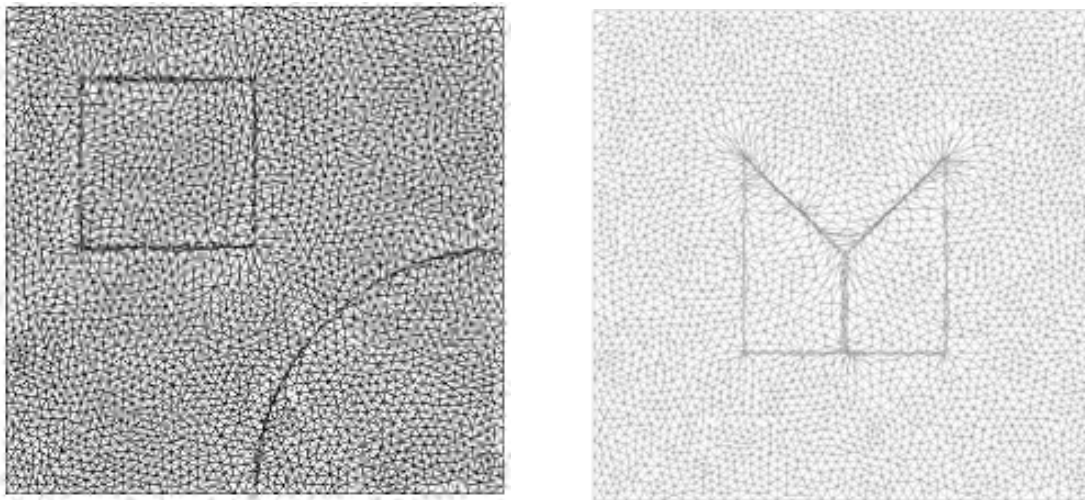


FIG. 3.22 – Maillage adapté.

Nous n'évoquerons pas ici la résolution du problème de convection puisqu'il fait l'objet du paragraphe suivant. Notons simplement que dans ce cadre, il ne sera plus possible d'itérer entre adaptation de maillage et initialisation de la fonction caractéristique puisque la définition de celle-ci change à chaque instant. Nous verrons que pour l'application qui

nous intéresse (l'injection des polymères), il n'est pas nécessaire d'itérer de la sorte : le pas de temps étant petit, le maillage n'est que faiblement déformé entre deux pas de temps de la résolution du problème de transport.

Les exemples qui suivent permettent de mettre en évidence certaines caractéristiques de notre méthode. Par exemple la capacité à traiter automatiquement plusieurs domaines (fig. 3.23(a)) ou encore des domaines présentant des singularités géométriques (fig. 3.23(b)). Pour ce dernier exemple, on notera que la qualité des éléments au voisinage des singularités respecte le critère de qualité défini par l'utilisateur.



(a) Avec 2 sous-domaines.

(b) Rendu des singularités.

FIG. 3.23 – Exemples d'applications statiques.

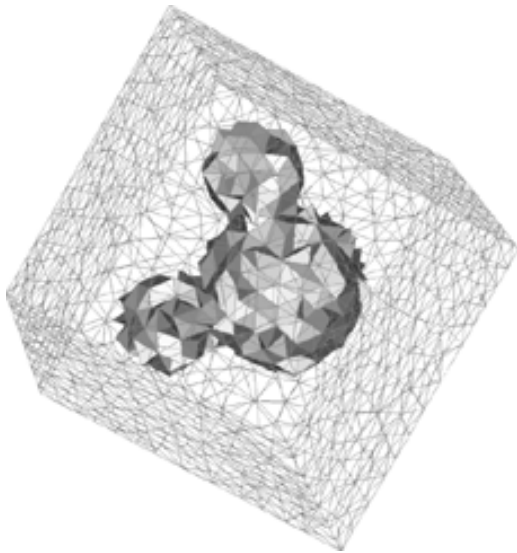
Enfin, la simplicité de l'algorithme et les choix d'implémentation qui ont été faits permettent de traiter automatiquement les géométries  $3D$ . Dans cet exemple (fig. 3.24), L'algorithme démontre encore sa capacité à rendre compte des singularités géométriques (zones à l'intersection des sphères). Le choix de représentation du maillage adapté qui a été fait (fig. 3.24(b)) consiste à n'afficher que les éléments dont la valeur de la fonction caractéristique dépasse un certain seuil (ici  $0,9$ ). Grâce à l'effet de resserrement des éléments, nous aurions visualisé sensiblement la même géométrie en choisissant comme valeur seuil  $0,95$  ou  $0,8$  par exemples.

**Remarque sur les effets de la pixélisation** Si la résolution choisie pour la pixélisation est trop grossière, la forme du sous domaine (un losange dans l'exemple qui suit, voir fig. 3.25(a)) n'est pas correctement rendue. Nous tentons ici d'adapter le maillage de la figure 3.25(b), au centre duquel on place le domaine défini par le losange.

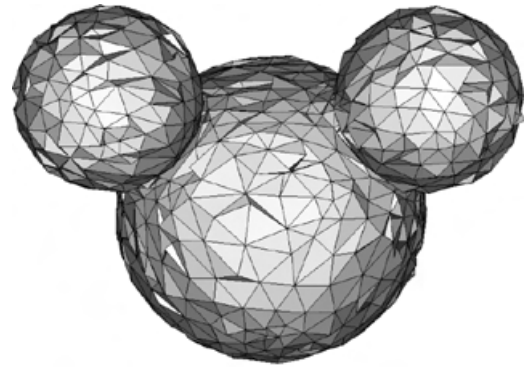
Le résultat obtenu (voir fig. 3.26) montre que la méthode d'adaptation capte les contours de la carte de pixels et pas ceux du losange.

### 3.4 Le problème dynamique

L'application de notre méthode d'adaptation à la simulation de l'injection des polymères nécessite une approche dynamique pour suivre l'évolution des fronts de matière(s) au

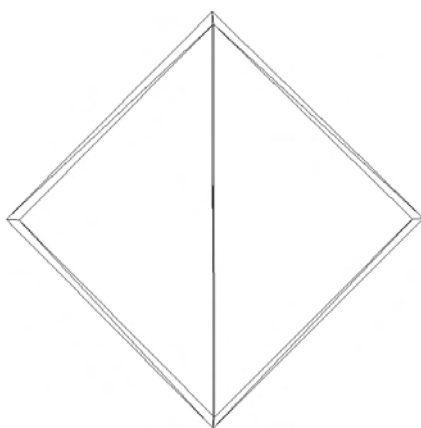


(a) Maillage initial (fonction caractéristique du sous domaine).

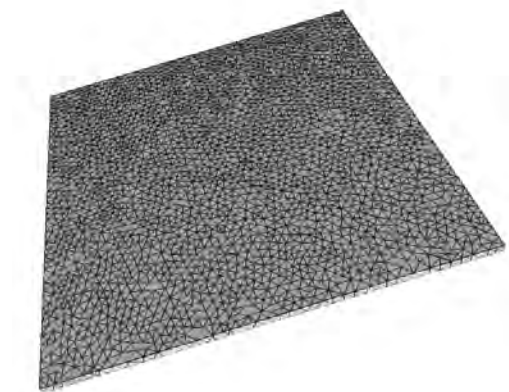


(b) Maillage adapté (vue extraite du sous domaine).

FIG. 3.24 – Exemple 3D.



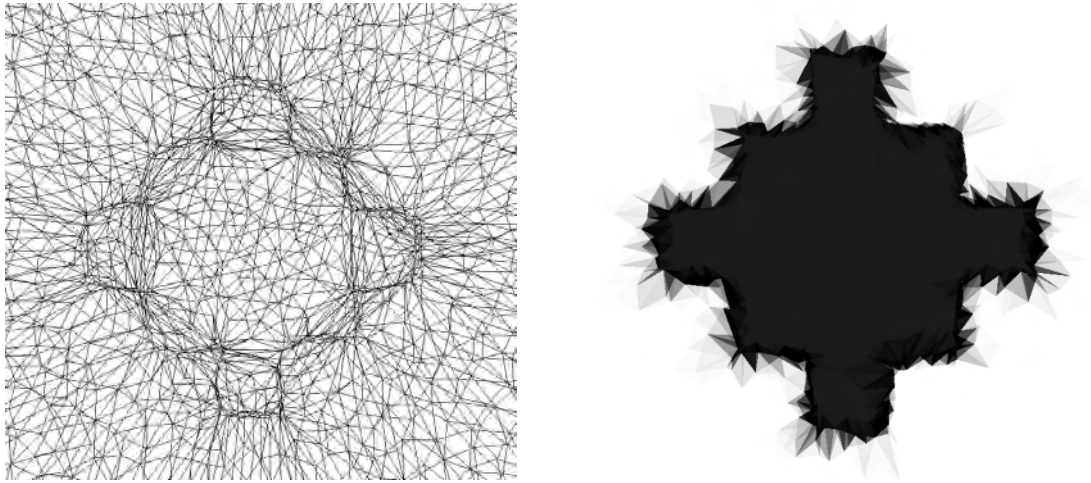
(a) Sous domaine : losange.



(b) Maillage initial.

FIG. 3.25 – Définition d'une boîte de pixels sur le domaine global.





(a) Maillage adapté (*zoom*).

(b) Trace de la fonction caractéristique sur le maillage adapté (*zoom*).

FIG. 3.26 – Effet d'un résolution trop grossière.

cours du remplissage. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre de ce document, la position des fronts de matière est donnée par la résolution d'une équation de transport appliquée à la(aux) fonction(s) caractéristique(s). Nous allons voir qu'une légère modification de cette équation permet d'introduire directement la méthode d'adaptation de maillage au niveau de la résolution de cette équation.

### 3.4.1 Équation de transport - Vitesse de maillage

Le résultat produit par la méthode d'adaptation est le vecteur des déplacements des noeuds du maillage. Ce déplacement doit donc être calculé à chaque pas de temps donné par la résolution du transport. D'autre part la résolution des champs transportés (principalement la fonction caractéristique) doit tenir compte de ce déplacement. Pour ce faire, il suffit de modifier le champ convectif de l'équation de transport (3.13) en lui retranchant un champ de vitesse associé au déplacement des noeuds du maillage  $\vec{V}_{may}$  :

$$\frac{\partial \mathbb{1}_{\Omega_f}}{\partial t} + (\vec{V} - \vec{V}_{may}) \cdot \nabla \mathbb{1}_{\Omega_f} = 0. \quad (3.13)$$

Le champ de vitesse du maillage est lui simplement donné comme étant le rapport du champ des déplacements des noeuds sur le pas de temps courant :

$$\vec{V}_{may} = \frac{\vec{U}_{may}}{\Delta t}. \quad (3.14)$$

À noter que cette vitesse de convection est faible<sup>2</sup> ce qui rend notre méthode d'adaptation efficace car le domaine fluide change peu d'un pas de temps à l'autre.

REMARQUE : L'erreur  $\mathcal{E}$  donnée par (3.4) dans le cadre statique devient maintenant un indicateur d'erreur sur la fonction caractéristique.

<sup>2</sup>vitesse faible au sens *numérique* du terme, l'injection étant un procédé rapide de mise en forme.

L'introduction du champ de vitesse du maillage nous fait passer d'une méthode eulérienne à une méthode ALE. Mais il est intéressant de noter que notre démarche procède à l'inverse de ce que l'on peut trouver dans la littérature relative à cette description du mouvement. En effet, dans la majorité des cas, l'utilisation d'une description ALE est envisagée lorsque la description lagrangienne ne permet pas de rendre compte du phénomène physique étudié. Le lecteur intéressé pourra consulter [Traore01] qui fait une intéressante revue bibliographique consacrée aux méthodes ALE.

### 3.4.2 Application à l'injection

Avant de présenter les applications de notre méthode d'adaptation dans le cadre de l'injection, rappelons que la modélisation de ce procédé fait principalement intervenir deux types de résolutions : une résolution du problème mixte vitesse-pression pour le calcul de l'écoulement et une résolution de l'équation de transport pour le déplacement des surfaces libres. La méthode d'adaptation qui est exposée dans ce chapitre a trait à ce dernier problème. Mais dans quelle mesure ne dégrade-t-elle pas la résolution du problème de Stokes? Hormis les observations qualitatives que l'on peut faire des applications où l'on remarque que l'adaptation de maillage tend à donner un caractère isotrope au maillage au front de matière (ce qui est « bénéfique » car ici l'orientation principale de l'anisotropie n'est pas la même que celles des gradients de vitesse ou de pression), il est possible de contrôler plus finement la méthode.

- Pour cela, il suffit de sommer les valeurs des estimateurs d'erreur. Ainsi, en notant :
- $\mathcal{E}_{loc}$  : l'erreur locale visée ;
  - $\omega_v$  : l'erreur sur l'écoulement de Stokes dans la partie vide ;
  - $\omega_f$  : l'erreur sur le problème de Stokes dans la partie fluide ;
  - $K$  : volume de l'élément courant ;
  - $K'$  : volume de l'élément transformé.

L'expression de l'erreur locale est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{loc}^2 &= \mathbb{1}^{K'}(1 - \mathbb{1}^{K'})|K'| + ((1 - \mathbb{1}^{K'})\omega_v + \mathbb{1}^{K'}\omega_f)|K'| \\ &= \left( \mathbb{1}^{K'}(1 - \mathbb{1}^{K'}) + (1 - \mathbb{1}^{K'})\omega_v + \mathbb{1}^{K'}\omega_f \right) |K'|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

REMARQUE : le terme  $\omega_v$  est dû au principe de prolongement du problème de Stokes (voir [Pichelin98]).

On peut même étendre ce principe dans le cadre multi-domaine (injection multi-fluides ou assistée gaz) :

$$\mathcal{E}_{loc}^2 = \underbrace{\left\{ \sum_i \mathbb{1}_i^K(1 - \mathbb{1}_i^K) + (1 - \sum_i \mathbb{1}_i^K)\omega_v + \mathbb{1}_i^K\omega_f \right\}}_C |K'|. \quad (3.16)$$

Ainsi, le volume optimal pour chaque élément est déterminé par :

$$|K'| = \frac{\mathcal{E}_{loc}^2}{C}. \quad (3.17)$$

### 3.4.3 Les exemples

#### a) Écoulement de poiseuille

Ce premier exemple met en évidence la réduction de la diffusion numérique liée à la résolution de l'équation de transport. Il s'agit de l'écoulement, sous un gradient de pression, d'un fluide visqueux newtonien entre plaques parallèles (bords supérieur et inférieur sur les figures). Le contact aux parois est considéré comme collant. Le calcul est une simulation tridimensionnelle mais les deux plans latéraux (dont le plan d'observation) sont des plans de symétrie ce qui nous ramène dans un contexte bidimensionnel.

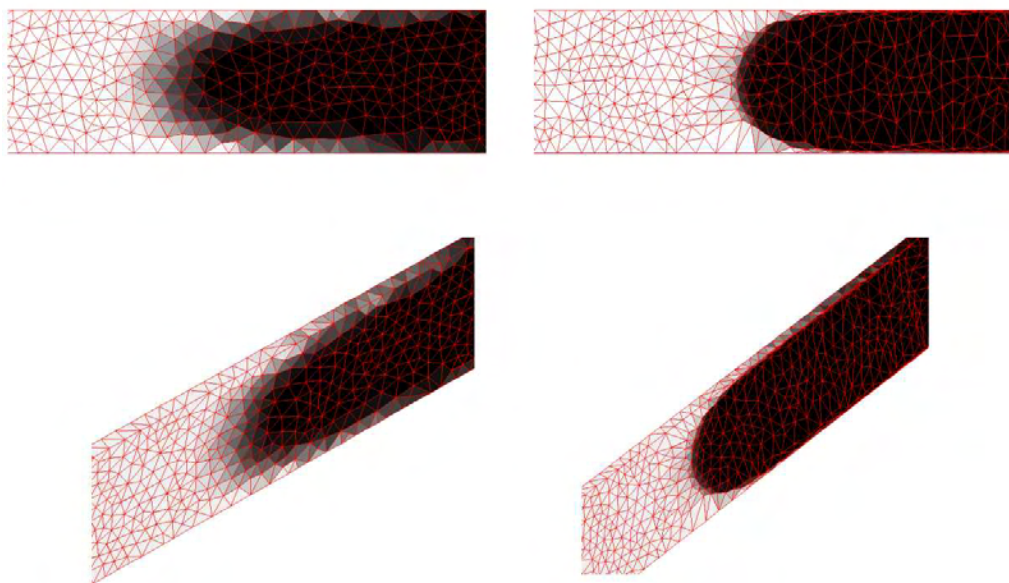


FIG. 3.27 – Écoulement de poiseuille entre plaques parallèles.

Sur la partie gauche de la figure (3.27), le calcul a été réalisé sans adaptation ; sur la partie droite avec. Sur le calcul non adapté, la diffusion de la fonction caractéristique s'étale sur environ quatre couches d'éléments (cette épaisseur de diffusion reste constante au cours du remplissage). Dans le cas adapté, le nombre de couches d'éléments reste sensiblement le même mais ces éléments sont confinés au front de matière permettant de mieux en localiser la position. Outre le meilleur rendu de la forme du front de matière, on note une plus grande précision sur la position du point de contact matière/moule. Les vitesses étant d'ailleurs très faibles en ce point, on remarque sur les vues en perspective que la couche d'éléments à la paroi n'est pas complètement « remplie » par le polymère. L'utilisation de l'adaptation permet malgré cela de bien rendre compte de l'écoulement au voisinage des parois puisqu'elle a « aplatie » ces éléments à la paroi.

#### b) Pièce type 2D/3D

Ce second exemple illustre la capacité du code à déterminer la position de lignes de ressoudure. La pièce choisie présente à la fois une partie volumique et une partie mince. Plusieurs remplissages de cette pièce ont été réalisés en modifiant la position et la forme du seuil d'injection. Le remplissage complet de la pièce sera présenté au chapitre suivant

concernant les applications. Nous nous intéresserons ici uniquement à la partie volumique de la pièce, partie qui présente un insert cylindrique en son milieu qui va créer un ligne de ressoudure lors du remplissage. Le seuil d'injection est positionné latéralement et de forme asymétrique (ce qui engendre un remplissage asymétrique).

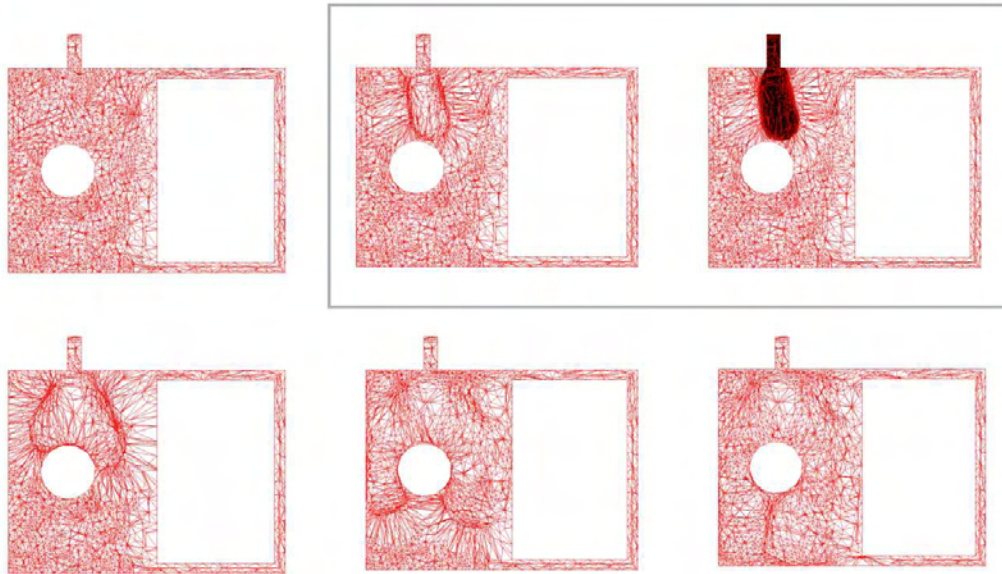


FIG. 3.28 – Coupes du maillage à différentes étapes du remplissage (dans le cadre : au même instant comparaison maillage/remplissage).

La figure (3.28) présente des coupes du maillage (tétraédrique), dans le plan médian de la pièce, à différents instants du remplissage. La simple observation de ces coupes permet de nous renseigner sur la position de la surface libre en mouvement dans le moule. Les figures encadrées mettent en évidence ce phénomène : la position du polymère (représenté en noir) correspond bien à la « trace » laissée par l'adaptation du maillage. Lors du remplissage, l'effet de l'adaptation est semblable à une onde qui balaie le maillage en même temps que le front de matière.

Sur la figure (3.29), on a représenté le front de matière au cours du remplissage de la partie volumique. La formation de la ligne de ressoudure en aval de l'insert est bien rendu. L'adaptation de maillage a encore permis de réduire la zone de diffusion numérique. Le contact matière/matière n'est donc pas « anticipé », l'interstice entre les deux fronts de matière pouvant être très fin. La position de la ligne de ressoudure telle qu'elle est représentée sur la dernière de cette série d'images est identique à celle que l'on devine sur le maillage (fig. 3.28).

### c) Écoulement de poiseuille et maillages anisotropes

En introduction de ce chapitre, nous avons remarqué que l'utilisation de maillages anisotropes exacerbe le phénomène de diffusion sur la position du front de matière. Nous allons voir que notre méthode d'adaptation permet de réduire la diffusion même dans le cas de maillages anisotropes.

Nous reprenons l'exemple de l'écoulement de poiseuille entre plaques parallèles en

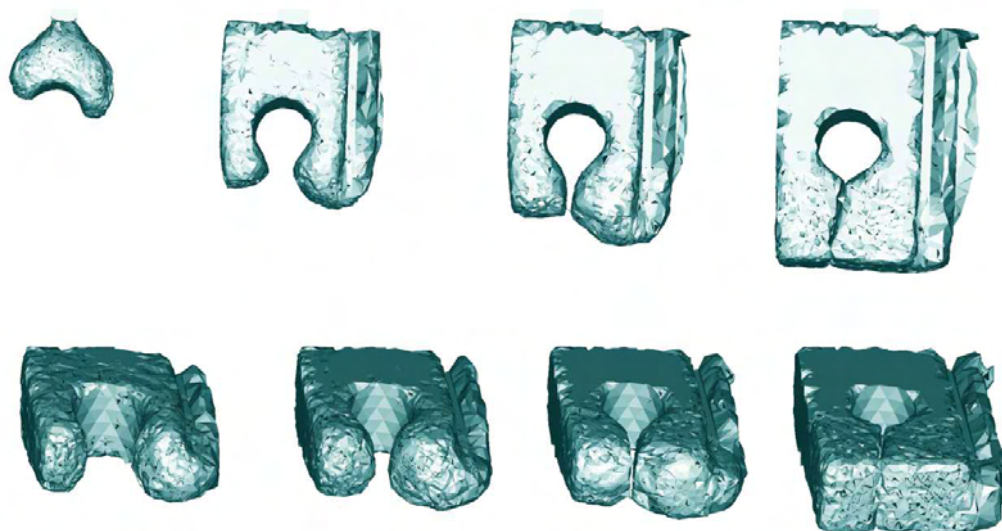


FIG. 3.29 – Zoom sur la partie volumique : formation d'une ligne de ressoudure en aval de l'insert.

utilisant un maillage anisotrope, dont la direction principale d'anisotropie est la même que celle de l'écoulement. Les figures (3.30(a)) et (3.30(c)) montrent clairement que la zone de diffusion numérique est trop étendue pour que l'on puisse déterminer la position du front de matière ou sa forme.

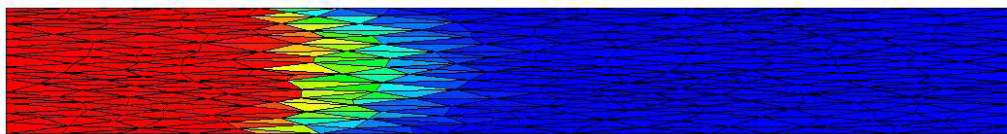
Pourtant, c'est bien cette direction du rapport qui permet d'une part d'avoir suffisamment d'éléments dans l'épaisseur de la pièce pour capter les chocs thermiques induits par le refroidissement imposé aux parois du moule et d'autre part conserver un temps de calcul raisonnable par rapport à un calcul bidimensionnel.

La méthode d'adaptation permet, grâce au resserrement des mailles au niveau du front de matière, de réduire l'incertitude sur la position du front (fig. (3.30(b)), (3.30(d)) et (3.31(b))). De plus, ce resserrement confère un caractère isotrope au maillage en cette zone où l'écoulement lui même est caractérisé par des variations isotropes en espaces (effet fontaine, fig. (1.3)). Il est aussi à noter que les éléments reprennent leur caractère anisotrope une fois le front de matière passé.

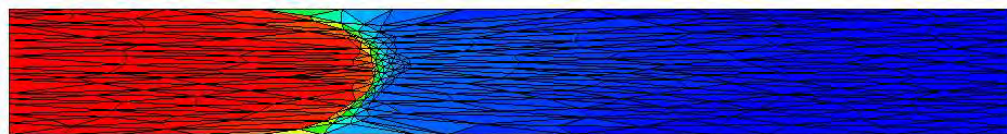
**DISCUSSION** On peut se demander si l'adaptation n'augmente pas exagérément l'anisotropie des éléments situés de part et d'autre du front en les étirant pour concentrer les noeuds dans la zone du front. Mais cet étirement touchant l'ensemble des éléments (sauf au front), la déformation locale reste faible. Cette déformation peut, de plus, être contrôlée en adoptant le calcul de l'erreur locale (3.15). Une autre façon de préserver la forme des éléments dans la partie fluide et par conséquent la qualité du calcul de l'écoulement est de déformer préférentiellement le maillage dans les zones qui nous intéressent peu (ici en aval du front, dans la partie vide). Pour cela on choisit arbitrairement des poids plus forts dans la partie fluide que dans la partie vide.

#### d) Remplissage d'une marche : approche globale

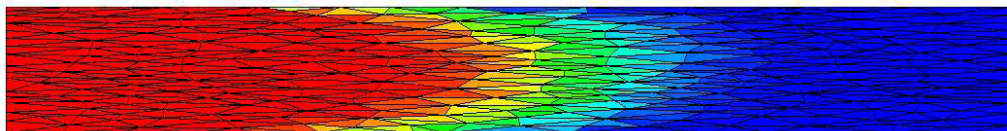
Le dernier exemple de ce chapitre est dédié au remplissage d'une marche dans une *approche globale*. L'objectif est de présenter à la fois une nouvelle façon d'envisager la



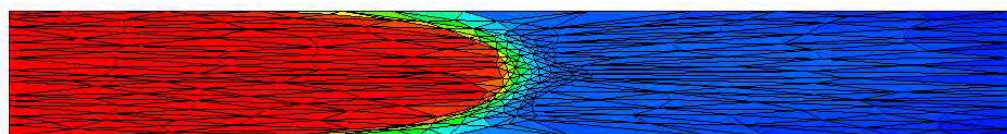
(a) Sans adaptation (étape 1).



(b) Avec adaptation (étape 1).



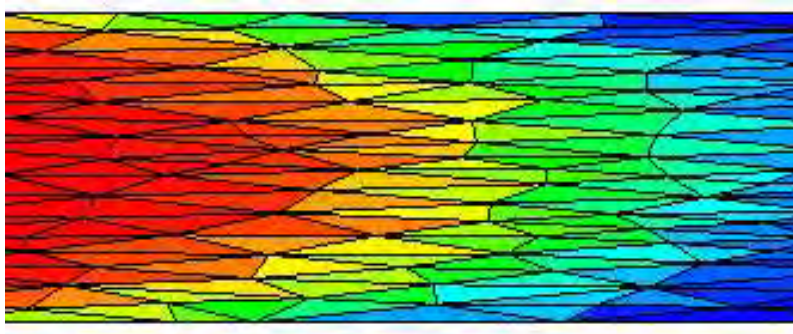
(c) Sans adaptation (étape 2).



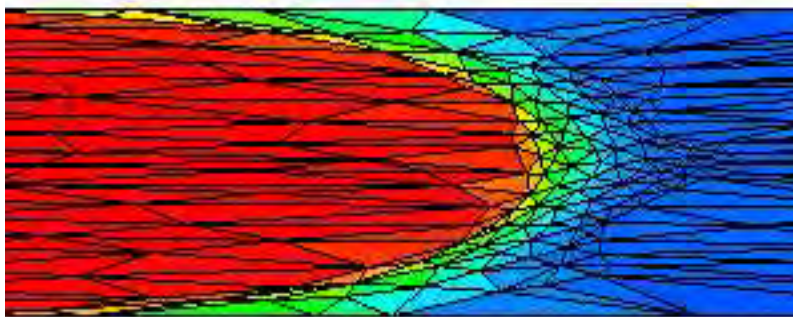
(d) Avec adaptation (étape 2).

FIG. 3.30 – Visualisation de la fonction caractéristique associée au fluide.





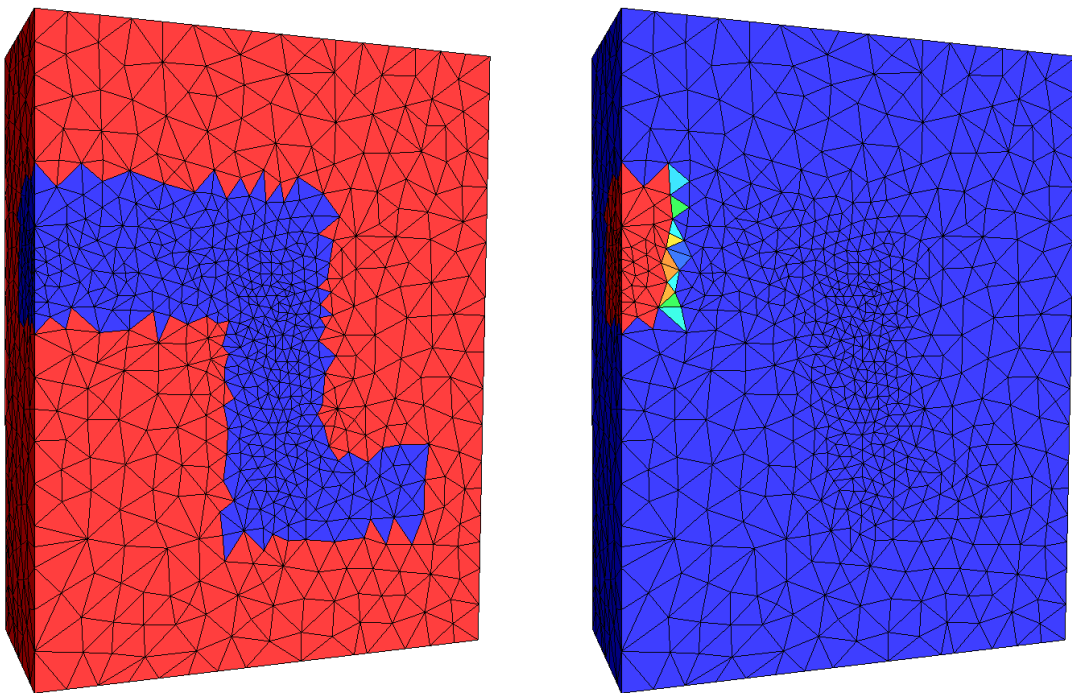
(a) Sans adaptation (étape 2).



(b) Avec adaptation (étape 2).

FIG. 3.31 – Zoom sur le front de matière.

simulation du remplissage de moules et d'élargir le champ d'application de la méthode d'adaptation. Comme nous l'avons déjà écrit, notre méthode d'initialisation de la fonction caractéristique permet de définir plusieurs domaines au sein d'un même maillage. La « maquette » de calcul présentée ici comporte trois domaines : le fluide (polymère visqueux incompressible), le vide (caractérisé par des champs de vitesse et de pression nuls) et le moule qui entoure la cavité (acier). Le maillage à construire ne doit donc pas être limité à la cavité mais couvrir en plus de celle-ci l'ensemble du bloc d'acier la définissant physiquement. Le principal avantage de cette approche est de pouvoir repousser les conditions aux limites thermiques et d'en rendre compte de façon plus réaliste. L'ensemble du calcul thermo-mécanique de l'écoulement s'en trouve modifié (voir les travaux de S. Batkam [Batkam99]).



(a) Fonction caractéristique associée au moule (début de remplissage).

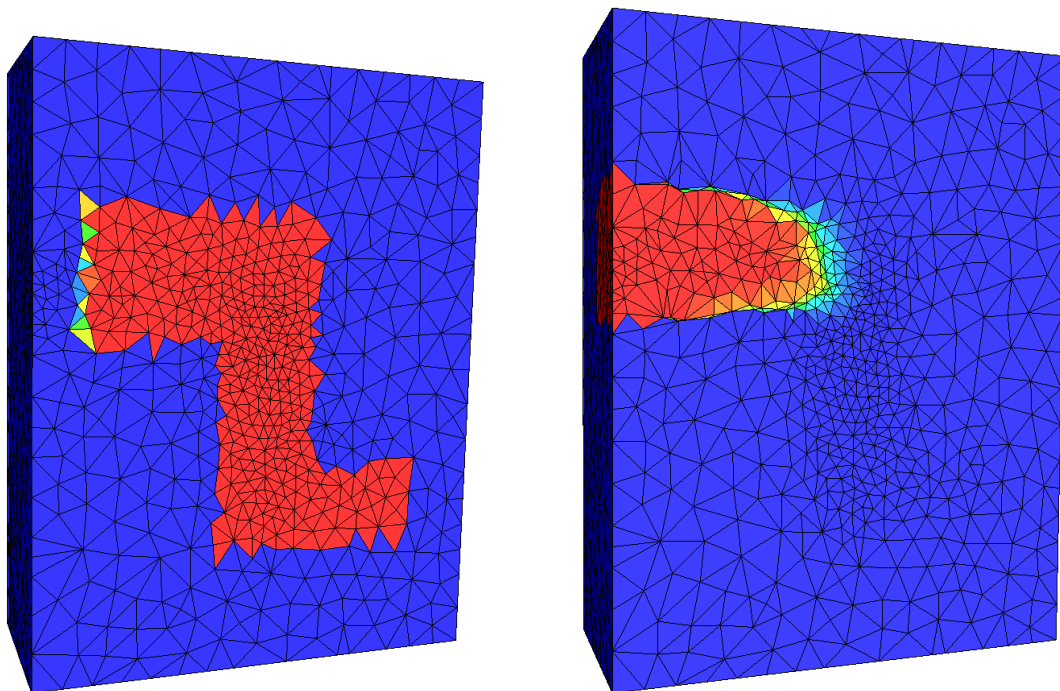
(b) Fonction caractéristique associée au fluide (début de remplissage).

FIG. 3.32 – Définition du moule et du domaine fluide.

Dans ce contexte, la méthode d'adaptation peut être appliquée (ou pas) à chaque domaine *via* sa fonction caractéristique. Le vecteur des déplacements des noeuds considéré pour la résolution du transport de chacun des domaines est alors le vecteur de la moyenne des déplacements.

Dans notre exemple, nous avons choisi de n'adapter le maillage que par rapport au domaine fluide. Les figures (3.34(a)) et (3.34(b)) montrent que l'adaptation va se faire aussi bien à l'interface fluide/vide qu'à l'interface fluide/moule. On remarque que le maillage est plus déformé aux interfaces polymère/moule qu'à l'interface polymère/vide. Ceci est simplement dû au fait que le champ de vitesse de l'écoulement est plus faible en paroi qu'à coeur, le champ de convection de l'équation de transport (3.13) est donc plus fortement « influencé » dans ces zones par la vitesse de maillage.

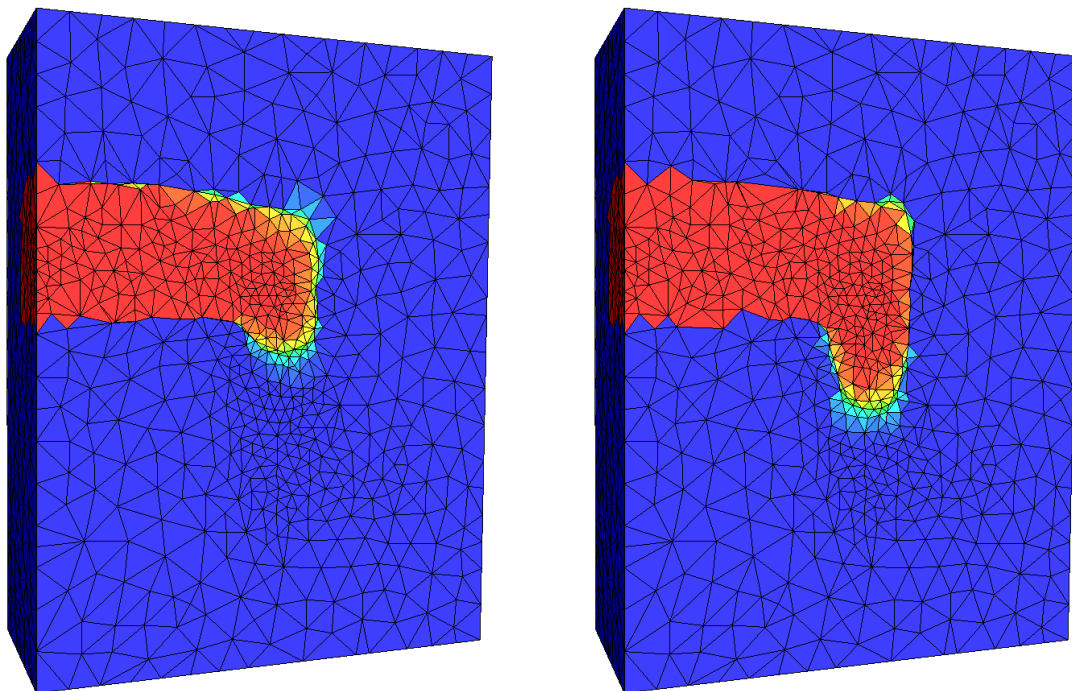




(a) Fonction caractéristique associée au vide (début de remplissage).

(b) Évolution du fluide (étape 1).

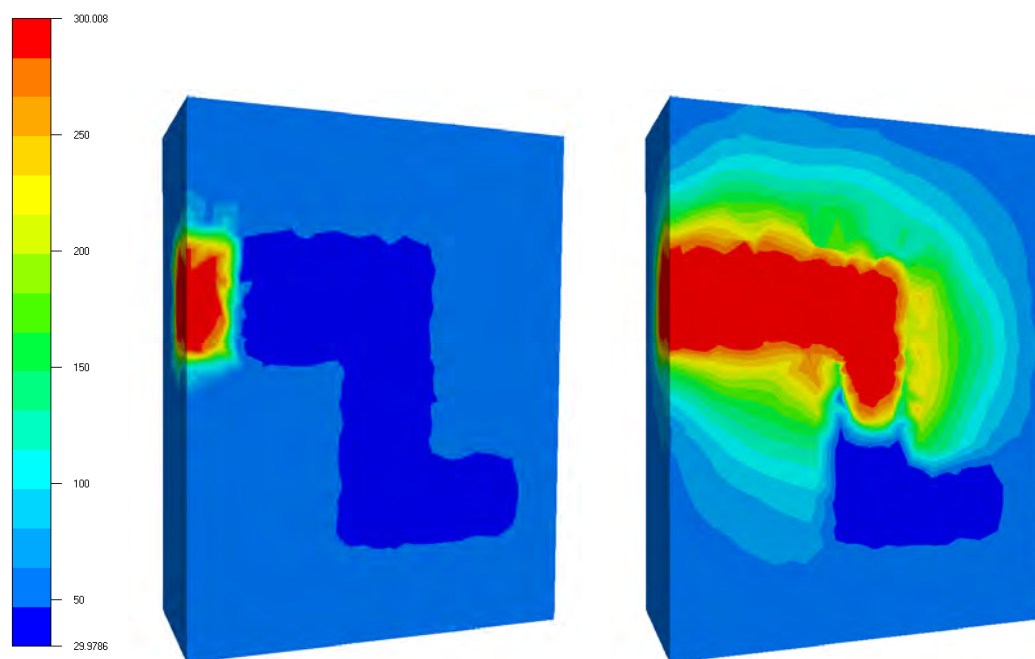
FIG. 3.33 – Définition du domaine vide et étape de remplissage.



(a) Évolution du fluide (étape 2).

(b) Évolution du fluide (étape 3).

FIG. 3.34 – Évolution de la surface libre dans l’empreinte du moule .



(a) Champ thermique en début de remplissage.

(b) Champ thermique au cours du remplissage (étape 3).

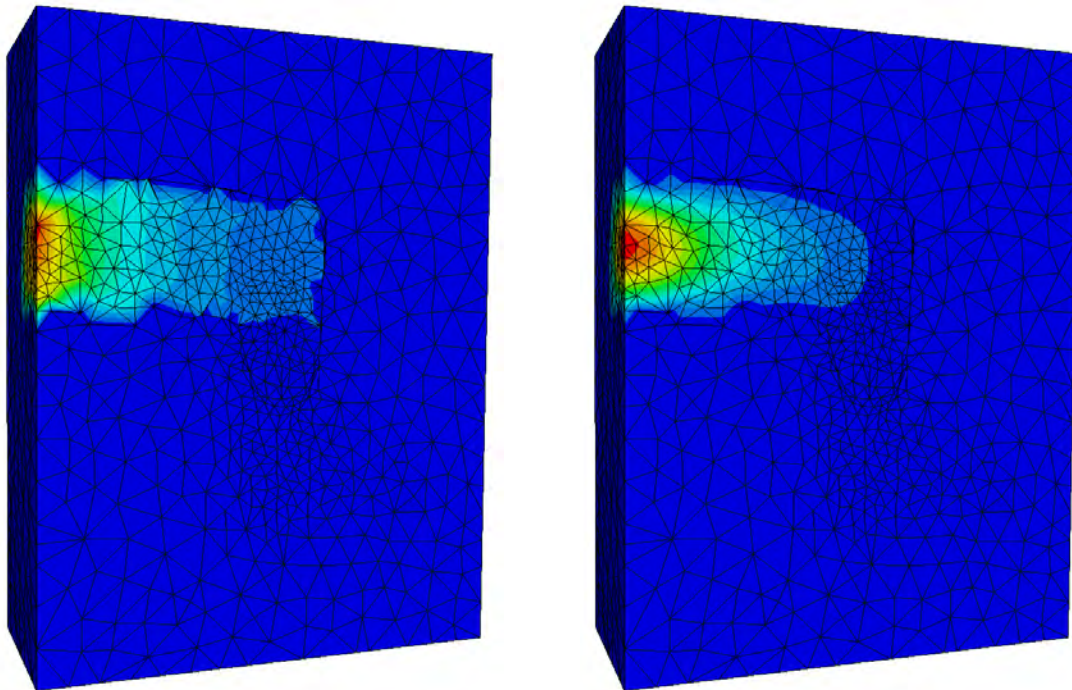
FIG. 3.35 – Champ de température.

Ce calcul est cependant loin d'être satisfaisant et ce en premier lieu en raison de la définition quelque peu heuristique de la géométrie de la cavité. Il est nécessaire pour un tel calcul de procéder au préalable à une phase d'adaptation statique du maillage par rapport à la fonction caractéristique du moule pour en donner une définition beaucoup plus précise. Il n'est toutefois pas nécessaire, à notre sens, d'en donner une définition *exacte* en terme de maillage. Si l'utilisation de maillages coincidents par exemple (un maillage du moule en acier coincidant avec le maillage de la cavité) apporte une aide indéniable en terme de visualisation de l'interface polymère/moule, la position « réelle » de cette interface n'en est pas moins déterminée numériquement qu'à un facteur dépendant de la taille de maille du(des) maillage(s) considéré(s). Il est donc préférable d'avoir de petits éléments « à cheval » sur l'interface que de gros dont les faces définissent « clairement » celle-ci.

Nonobstant cette importante remarque, il semble que cette nouvelle façon d'appréhender la simulation du remplissage de moule ouvre de réelles perspectives en termes d'informations directement exploitables (champ de température en tout point du moule (fig.3.35(b)), pression de fermeture de la presse, déformée du moule, ...) Elle va aussi permettre de simuler aisément une large gamme de procédés (injection multi-matière, assistée gaz, injection compression, surinjection, injection de mousses [Bruchon00], ...).

### 3.5 Conclusion

Nous avons proposé une méthode d'adaptation de maillage par déformation qui permet de capturer plus précisément des surfaces libres ou des interfaces en mouvements. Cette méthode met en oeuvre des algorithmes robustes et efficaces permettant des applications



(a) Champ de pression.

(b) Champ de vitesse horizontal.

FIG. 3.36 – Champs de pression et de vitesse (étape 3).

variées. Elle s'insère très naturellement, *via* la vitesse de maillage, au schéma de transport relatif aux domaines en mouvement.

Bien que certains auteurs affirment que les méthodes de r-adaptation sont souvent pénalisées par des difficultés dans leur mise en oeuvre dans un cadre multidimensionnel et plus particulièrement lorsque l'on doit traiter des maillages fortement anisotropes [Venkatkrishnan95], notre méthode s'avère encore efficace dans ce cadre (parce que pour nous, l'anisotropie est dictée par la géométrie du domaine). Notre travail, ainsi que quelques travaux issus de la littérature, tendent à démontrer que les méthodes de r-adaptation ne doivent pas rester confinées à des applications statiques et qu'elles concurrencent les méthodes de remaillage local pour traiter de grands déplacements de surface libre par leur simplicité de mise en oeuvre.

Pour cela, quelles sont les améliorations et les perspectives à donner à ce travail? Bien qu'elle ne nous ait pas paru pénalisante, l'hypothèse que nous avons faite de laisser les noeuds frontières fixes peut être levée sans que le calcul des déplacements n'en soit alourdi. Le choix des poids pour l'algorithme de barycentrage, lui aussi, peut être amélioré : une étude plus fine du problème de minimisation doit permettre de trouver des pentes de descente plus grandes même si elles ne sont pas optimales. De plus, une courte étude que nous avons pu mener sur ce sujet montre une variation de la forme de la zone de resserrement des noeuds en fonction du choix des poids. Enfin, nous nous sommes contentés d'un algorithme de type Gauss-Seidel pour la résolution du système. Là encore, il serait souhaitable d'adopter un algorithme itératif plus efficace. En termes de perspectives, la version commerciale de REM3D<sup>®</sup> intégrant déjà notre méthode d'adaptation, l'application la plus prometteuse concerne l'« approche globale » dont la définition des domaines nécessite

un raffinement local du maillage (aux frontières des domaines). À plus longue échéance, on peut même envisager aborder des problèmes de mécanique du solide avec cette approche qui a le grand avantage d’impliciter le contact matière/matière.

### Temps de calcul

À plusieurs reprises dans ce chapitre, nous avons affirmé que notre méthode est efficace sans quantifier les coûts de calculs induits par la méthode. L’efficacité d’une méthode d’adaptation est le rapport entre le gain en précision qu’elle procure et le temps de calcul qu’elle coûte. Naturellement, plus on souhaite augmenter la précision plus le coût de la méthode sera important.

Les mesures de temps de calcul que nous avons pu faire concernent le deuxième exemple présenté dans les applications de ce chapitre. Le temps de calcul pour le remplissage complet de cette pièce (partie volumique et partie mince, soit un maillage de 40000 éléments) est de une heure sans adaptation de maillage. Avec l’adaptation de maillage et pour une erreur divisée par deux sur la position de la surface libre (selon l’indicateur 3.4), le même calcul dure une heure et quinze minutes. Une reprogrammation partielle de l’algorithme depuis ces premiers calculs place le coût de l’adaptation en deça de ce résultat. Nous n’avons cependant pas systématiquement évalué l’efficacité de notre méthode sur tous les exemples que l’on peut trouver dans cette étude. La principale raison à cela est que le coût de la méthode est indirect. En effet, le temps nécessaire au calcul du vecteur des déplacements est marginal par rapport au reste du calcul, par contre le coût de résolution de l’équation de transport peut être influencé par l’adaptation. Dans notre étude, la méthode retenue pour la résolution de l’équation de transport est le schéma de Taylor Galerkin discontinu. Ce schéma explicite est stable si l’on prend le pas de temps *autocalculé* à partir de l’erreur de troncature sur le schéma. Or l’expression de ce pas de temps fait intervenir le volume du plus petit des éléments du maillage (voir [Pichelin98, p.49]). Notre méthode d’adaptation consistant à réduire localement le volume des éléments, elle peut entraîner une diminution du pas de temps ce qui va ralentir de façon sensible le temps de calcul. Pour lever cette difficulté, nous avons choisi de respecter un volume minimal pour chaque élément ce qui nous assure de conserver une bonne efficacité.

Enfin, entre le début de cette étude sur l’adaptation de maillage et sa fin, le schéma de résolution de l’équation de transport a lui même été modifié. Du schéma de Taylor Galerkin discontinu explicite nous sommes passé à un schéma espace-temps implicite [Coupez01]. Les gains procurés par ce nouveau schéma sont très importants puisque un même calcul (à précision égale) le temps CPU peut être divisé par un facteur supérieur à dix. Ce nouveau schéma a été mis en place dans notre outil de simulation sans qu’il soit nécessaire de modifier notre algorithme d’adaptation ce qui montre son indépendance vis à vis de la résolution choisie. Par contre, le caractère implicite de ce nouveau schéma « oblige » l’utilisateur à définir lui même le pas de temps pour la résolution du transport. Si ce pas de temps est *trop grand* par rapport au phénomène qu’il souhaite observer, la diffusion numérique pourra être assez importante (c.a.d. sur une zone allant de 5 ou 6 couches d’éléments à plusieurs dizaines d’éléments). Dans ces cas extrêmes, l’algorithme d’adaptation ne pourra pas donner d’aussi bons résultats qu’avec un pas de temps plus raisonnable. On peut observer ce phénomène sur le dernier des exemples du paragraphe dédié aux applications : on a remarqué que l’adaptation était plus marquée au niveau des interfaces polymère/moule que de l’interface polymère/vide. Cette différence est attribuée au champ de vitesse qui y est naturellement différent. En fait, ce calcul grossier a été réalisé avec le nouveau schéma

espace-temps et un pas de temps relativement grand, trop grand pour que le champ de vitesse de maillage calculé puisse perturber le champ de vitesse convectif au niveau de l'interface polymère/vidé. Concernant l'intégration de la méthode d'adaptation de maillage à ce nouveau schéma espace-temps, une perspective intéressante consisterait à alterner les itérations du barycentrage pondéré avec les itérations de la résolution du schéma espace-temps. L'indépendance de la méthode d'adaptation vis à vis de l'équation de transport serait réduite mais on peut espérer améliorer les vitesses de convergence des deux résolutions itératives et diminuer une diffusion excessive dans le cas de grands pas de temps.

Malgré ces dernières remarques et les quelques améliorations qui pourraient lui être apportées, l'algorithme d'adaptation a démontré son intérêt pour l'application à laquelle il est destiné : le remplissage de moule. Les défauts tels que les lignes de ressoudure sont rendus de façon réaliste et leurs positions sont comparables à celles relevées sur les pièces réalisées au cours d'essais comme nous allons le voir dans le chapitre suivant consacré aux applications en injection.

## Bibliographie

- [Agarwal96] Agarwal (R.K.). – A comparative study of two algebraic moving mesh strategies for adaptive grid generation. *5th. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 79–88. – 1996.
- [Amenta et al.98] Amenta (N.), Bern (M.) et Eppstein (D.). – Optimal point placement for mesh smoothing. *arXiv :cs.CG/98009081*. – 1998.
- [Baines87] Baines (M.J.). – Moving finite elements. *Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages*. – Grenoble, 1987.
- [Baines98] Baines (M.J.). – Grid adaption via node movement. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 26, 1998, pp. 77–96.
- [Baker00] Baker (T.J.). – Deformation and quality measures for tetrahedral meshes. *ECCOMAS 2000*. – Barcelone, Septembre 2000.
- [Batkam99] Batkam (S.). – *Simulation numérique du remplissage 3D : prise en compte du couplage thermique moule/polymère*. – Rapport technique, CEMEF - École des Mines de Paris, 1999.
- [Bruchon00] Bruchon (J.). – *Étude numérique d'une structure de mousse biopolymère*. – Centre de mise en forme des matériaux, Rapport de recherche, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Canann et al.98] Canann (S.A.), Tristano (J.R.) et Staten (M.L.). – An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and quad-dominant meshes. *In 7th International Meshing Roundtable*. pp. 479–494. – Sandia National Labs, 1998.
- [Carpenter v et al.96] Carpenter V (J.G.) et Scott McRae (D.). – Adaptation of unstructured meshes using node movement. *5th. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 269–278. – 1996.
- [Ciarlet94] Ciarlet (Ph.G.). – *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. – Masson, 1994.
- [Coupez01] Coupez (T.). – A new implicit space time scheme for advection/diffusion problems. *soumis*, 2001.
- [de cougny et al.] de Cougny (H.L.), Shephard (M.S.) et Georges (M.K.). – *Explicit node point smoothing within the octree mesh generator*.
- [Degtyarev et al.96] Degtyarev (L.M.), Ivanova (T.S.), Martynov (A.A.) et Medvedev (S.Yu.). – Generation of solution adaptive quasi orthogonal moving grids for complex structure flows. *5th. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 99–118. – 1996.
- [Djidjev] Djidjev (H.N.). – Force-directed methods for smoothing unstructured triangular and tetrahedral meshes. *In 9th International Meshing Roundtable*.
- [Egelja et al.98] Egelja (A.), Schäfer (M.) et Durst (F.). – An adaptative grid eulorian method for the computation of free surface flows. *Intern. J. of Comput. Fluid Dynamics*, vol. 10, 1998, pp. 213–224.

- [Field88] Field (D.A.). – Laplacian smoothing and delaunay triangulations. *Comm. in Applied Numer. Analysis*, vol. 4, 1988, pp. 709–712.
- [Freitag et al.] Freitag (L.) et Plassmann (P.). – *Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement*.
- [Freitag97] Freitag (L.). – On combining laplacian and optimization-based mesh smoothing techniques. *Trends in Unstructured Mesh Generation*, éd. par Canann (S.A.) et Saigal (S.), pp. 37–44. – 1997.
- [Gueyffier et al.99] Gueyffier (D.), Li (J.), Nadim (A.), Scardovelli (R.) et Zaleski (S.). – Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, n152, 1999, pp. 423–456.
- [Huang et al.99] Huang (W.) et Russell (R.D.). – Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 20, n3, 1999, pp. 998–1015.
- [Jacquotte87] Jacquotte (O.-P.). – A new mechanical approach for grid generation in computational fluid dynamics. *Journée sur la génération automatique et l'adaptation de maillages*. – Grenoble, 1987.
- [Kang et al.99] Kang (M.K.) et Lee (W.I.). – A flow-front refinement technique for the numerical simulation of the resin-transfer molding process. *Composites Science and Technology*, vol. 59, 1999, pp. 1663–1674.
- [Laffin et al.96] Laffin (K.R.) et Scott McRae (D.). – Solver-independent efficient  $r$ -refinement algorithm. *5th. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 109–118. – 1996.
- [Li et al.00] Li (T.S.), Wong (S.M.), Hon (Y.C.), Armstrong (C.G.) et McKeag (R.M.). – Smoothing by optimization for a quadrilateral mesh with invalid elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 34, 2000, pp. 37–60.
- [Lock et al.98] Lock (N.), Jaeger (M.), Medale (M.) et Occelli (R.). – Local mesh adaptation technique for front tracking problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 28, 1998, pp. 718–736.
- [Lohner et al.86] Löhner (R.), Morgan (K.) et Zienkiewicz (O.C.). – *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, chap. Adaptive grid refinement for compressible Euler equations, pp. 281–297. – Wiley, 1986.
- [Martin95] Martin (C.). – *Adaptation de maillages structurés par un modèle d'élasticité non linéaire. Application aux équations de Navier-Stokes*. – Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 1995.
- [Maury96] Maury (B.). – Characteristics ale method for the unsteady 3d navier-stokes equations with a free surface. *Comp. Fluid Dyn.*, vol. 6, 1996, pp. 175–188.
- [Parthasarathy91] Parthasarathy (V.N.). – A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 9, 1991, pp. 309–320.

- [Pichelin98] Pichelin (E.). – *Calcul par éléments finis du remplissage 3D pour les fluides visqueux incompressibles. Application à l'injection.* – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [Salem et al.97] Salem (A.), Canann (S.A.) et Saigal (S.). – Robust distortion metric for quadratic triangular 2d finite elements. *Trends in Unstructured Mesh Generation*, pp. 73–80. – 1997.
- [Scardovelli et al.99] Scardovelli (R.) et Zaleski (S.). – Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 31, 1999, pp. 567–603.
- [Scott mcrae96] Scott McRae (D.). – r-refinement grid adaptation issues. *5th. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 33–51. – 1996.
- [Tourigny et al.98] Tourigny (Y.) et Hüselmann (F.). – A new moving mesh algorithm for the finite element solution of variational problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, n4, 1998, pp. 1416–1438.
- [Traore01] Traore (K.). – *Simulation thermo-mécanique du laminage circulaire.* – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Trotignon et al.96] Trotignon (J.-P.), Verdu (J.), Dobraczynski (A.) et Pieraud (M.). – *Matières plastiques : structures-propriétés, mise en oeuvre, normalisation.* – Nathan, 1996, nathan édition, *Les précis AFNOR.*
- [Ubbink et al.99] Ubbink (O.) et Issa (R.I.). – A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes. *Journal of Computational Physics*, n153, 1999, pp. 26–50.
- [Venkatakrishnan95] Venkatakrishnan (V.). – *A perspective on unstructured grid flow solvers.* – Rapport technique, ICASE - NASA Langley Research Center, 1995.
- [Zegeling98] Zegeling (P.A.). – r-refinement for evolutionary pdes with finite elements or finite differences. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 26, n1-2, 1998, pp. 97–104.
- [Zhou et al.] Zhou (T.) et Shimada (K.). – An angle-based approach to two-dimensional mesh smoothing. *In 9th International Meshing Roundtable.*





Chapitre 4

Applications

## Sommaire

---

<b>4.1 Comparaisons expérience/simulation . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>4.2 Calculs multi-fluides . . . . .</b>	<b>120</b>
4.2.1 Expansion d'une bulle . . . . .	120
4.2.2 Expansion de mousses polymère . . . . .	121
<b>4.3 Injection de pièces minces . . . . .</b>	<b>124</b>
4.3.1 Éprouvette d'injection . . . . .	124
4.3.2 Déplacement d'une ligne de flux . . . . .	127
4.3.3 Aile type . . . . .	131
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>136</b>

---

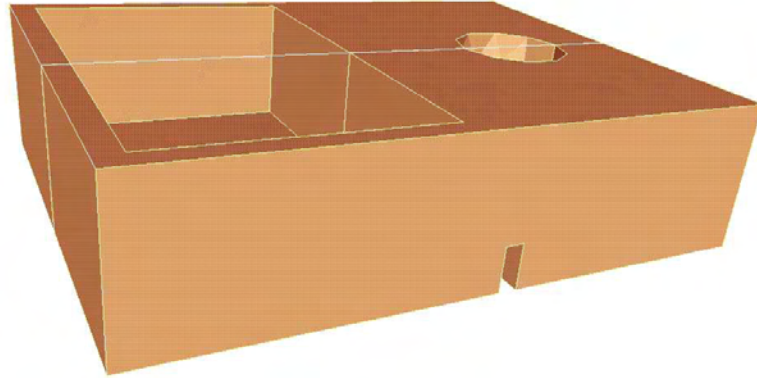


FIG. 4.1 – Géométrie de la pièce de validation.

## 4.1 Comparaisons expérience/simulation

Le premier exemple d'application proposé dans ce chapitre concerne le raccordement  $2D/3D$ . La géométrie<sup>1</sup> a été conçue dans cette optique et est donc constituée d'une partie massive sur laquelle est implantée le seuil d'injection et d'une partie mince qui se remplira en fin d'injection. Cette configuration n'est pas la plus pertinente du point de vue pratique : les parties minces sont, en général, remplies en début d'injection pour éviter tout risque de figeage<sup>2</sup>, mais elle est discriminante du point de vue de la modélisation. La pièce comporte aussi deux inserts et une rainure pour tenter de synthétiser sur une même géométrie les principaux défauts rencontrés avec le procédé d'injection : les lignes de ressoudure et les défauts de remplissage. La géométrie est présentée sur la figure (4.1).

Pour la modélisation, seule la moitié de la pièce est considérée en imposant des conditions de symétrie sur le plan médian. La rhéologie (pseudo-plastique) et les paramètres d'injection sont identiques à ceux retenus pour les essais sur presse ([Revillard98], [David98]). Le maillage utilisé est isotrope dans la partie massive et anisotrope dans les parties minces. Les singularités géométriques (angles, rainures, inserts et seuil) ont été maillés relativement finement. Pour ce calcul, comme pour les suivants, nous n'avons pas effectué de boucle d'adaptation en utilisant notre estimateur d'erreur, celui-ci n'étant pas suffisamment performant actuellement. L'adaptation de maillage au niveau du front est par contre toujours utilisée (par défaut, l'objectif est de diviser par 2 l'erreur estimée par l'indicateur d'erreur issu des travaux de E. Pichelin.)

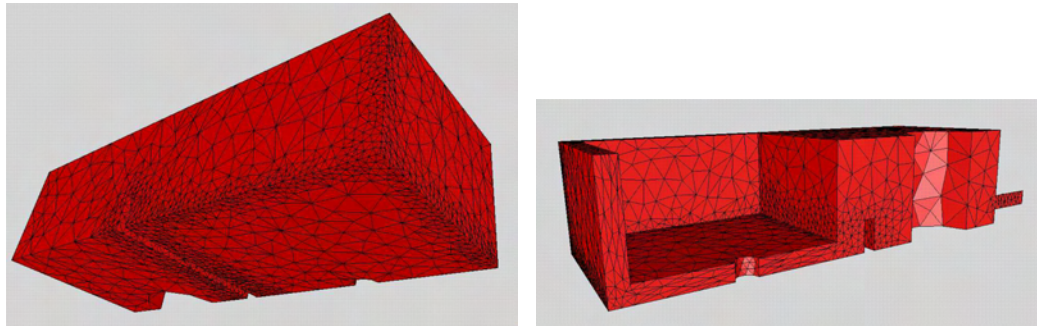
L'approche  $3D$  *directe* permet une modélisation « naturelle » du remplissage : la prédiction de l'écoulement est aussi précise dans la partie volumique (fig. 4.3(a)) que dans la partie mince (fig. 4.3(b))<sup>3</sup>

L'adaptation du maillage au niveau des fronts de matière permet de bien repérer la position des lignes de flux ainsi que du remplissage au niveau des singularités géométriques (fig. 4.1).

<sup>1</sup>géométrie définie dans le cadre du projet *PREDIT - Modélisation de l'injection MIM*.

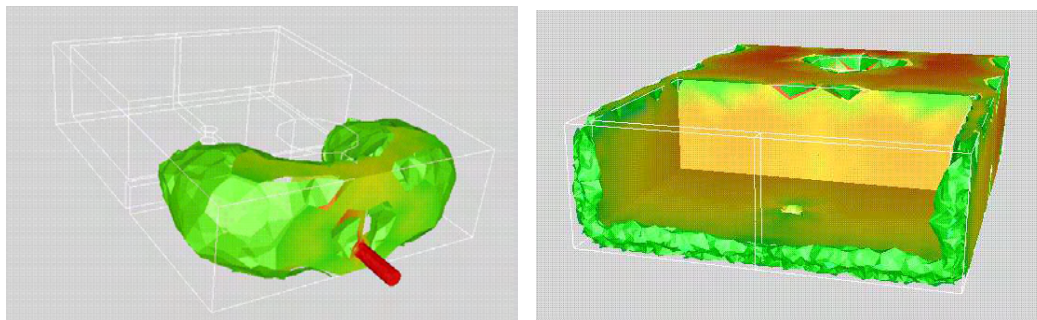
<sup>2</sup>le fort cisaillement imposé en début d'injection permet un fort autoéchauffement qui compense le refroidissement imposé en paroi.

<sup>3</sup>la cavité visible au dessus du seuil d'injection disparaît en fin de remplissage mais sa position est identique à celle d'un défaut d'aspect présent sur les pièces produites.



(a) Raffinement au niveau des singularités.      (b) Zone anisotrope au niveau de l'insert

FIG. 4.2 – Maillage de la (demi-) pièce.



(a) Vue de la surface libre      (b) Vue de la surface libre

FIG. 4.3 – Évolution du remplissage de la pièce (2).

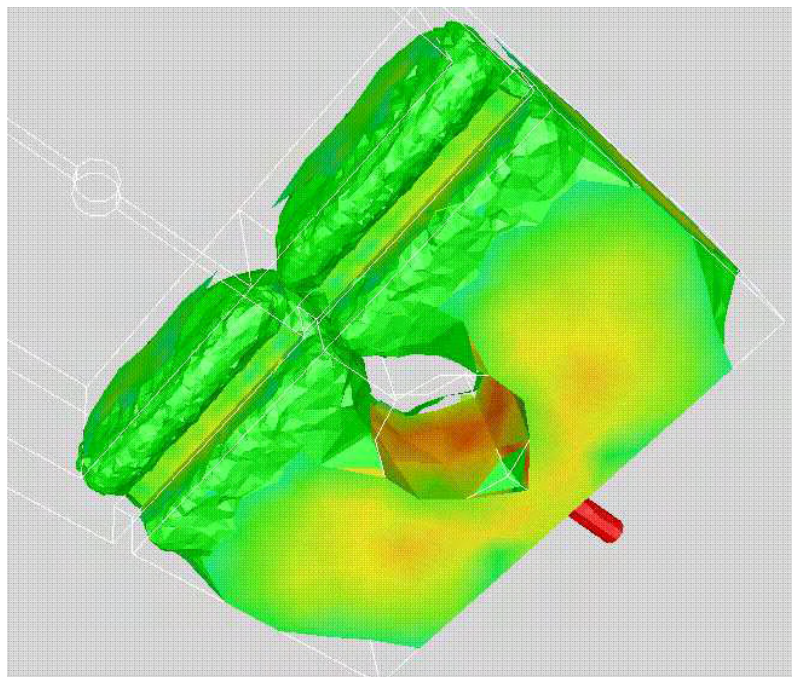


FIG. 4.4 – Formation de la ligne de ressoudure.

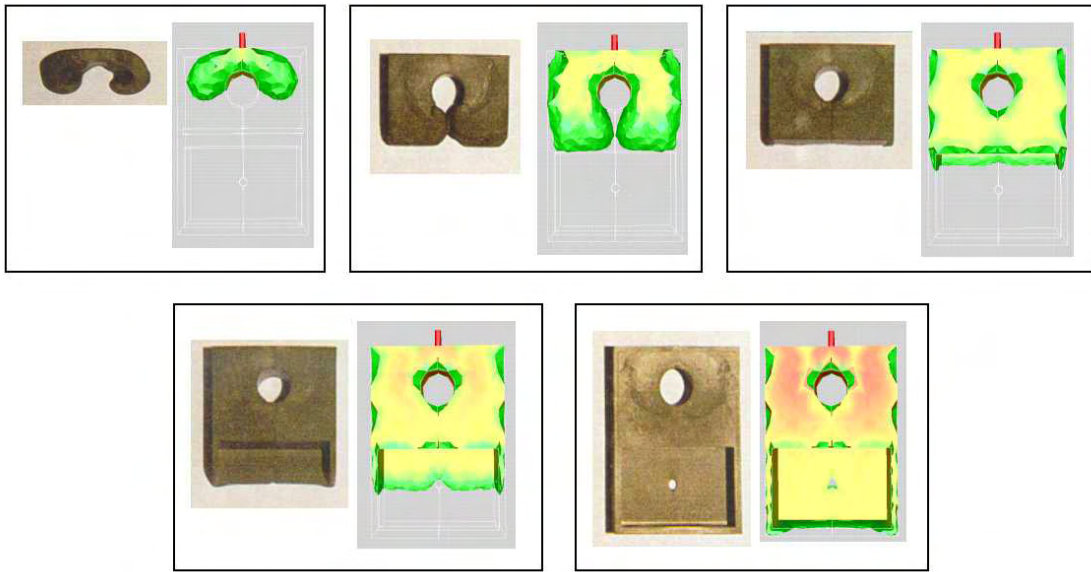


FIG. 4.5 – Comparaison calculs/essais.

Globalement, l'histoire du remplissage est bien prédite par la simulation comme le confirme la comparaison des résultats de calcul et des essais (fig. 4.5)<sup>4</sup>.

En conclusion, notre approche semble s'avérer pertinente puisque l'outil que nous proposons permet de bien modéliser le remplissage de pièces complexes sans approximation d'aucune sorte. Il reste néanmoins un point à discuter pour affirmer que ce choix est plus intéressant qu'une modélisation  $2D$  par exemple : le temps de calcul. Ce critère a été assez peu discuté dans ce manuscrit principalement parce que, parallèlement à cette étude, ont été mené des travaux sur la résolution des équations convectives (transport du front de matière) et de convection-diffusion (résolution thermique) qui influent notablement sur les temps de calculs. Rappelons simplement que nos travaux sur le maillage anisotrope permettent de ramener les coûts de calcul dans les mêmes ordres de grandeurs qu'un calcul dans le plan et que l'algorithme d'adaptation de maillage est très efficace (le gain de précision est important par rapport aux coûts engendrés). En pratique, le coût de calcul pour un maillage de 4000 nœuds et 20000 éléments est de 3 – 4 heures pour une résolution thermomécanique couplée et une rhéologie pseudoplastique<sup>5</sup>. Dernier point à considérer au chapitre du temps de calcul : la préparation des données. L'« absence » d'approximations géométriques permet une mise en données du problème plus simple et plus intuitive que celle d'un modèle dont on est obligé de construire la fibre neutre et d'y reporter les conditions aux limites *ad'hoc*.

<sup>4</sup>Quelques éléments de maillage reste non remplis en fin de cycle d'injection : ce sont des éléments dont les 4 sommets sont sur les parois du moule. Le champ de vitesse interpolé sur ces éléments est donc nul et aucun flux de matière ne peut les pénétrer. Ce résultat est attendu et acceptable pour une méthode de résolution en  $O(h)$ .

<sup>5</sup>Ces coûts sont naturellement encore appelés à diminuer dans les prochains mois grâce à l'utilisation de résolutions plus performantes (préconditionnement des systèmes linéaires, parallélisation).

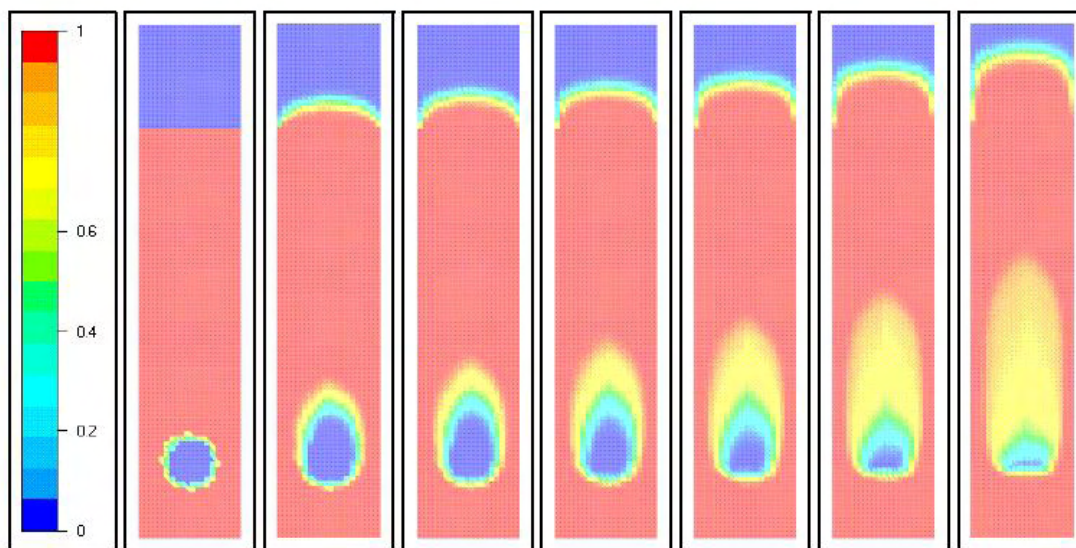


FIG. 4.6 – Montée d’une bulle sous gravité : sans adaptation de maillage.

## 4.2 Calculs multi-fluides

Dans ce paragraphe, nous avons simplement souhaiter illustrer la capacité de l’algorithme d’adaptation à traiter aussi bien le front de matière que des interfaces entre différents fluides.

### 4.2.1 Expansion d’une bulle

Ce premier exemple est un des premiers réalisés avec l’algorithme d’adaptation de maillage. Il a été proposé et mis en œuvre par D. Daboussy. L’exercice consiste à modéliser la remontée vers la surface d’une bulle de gaz immergée dans un fluide soumis à la gravité (la pression dans la bulle étant inférieure à celle du fluide l’entourant). Cet exemple met donc en jeu trois fluides (le gaz dans la bulle, le fluide et le gaz en surface) et deux interfaces. Le premier calcul réalisé suivant la modélisation proposée dans [Daboussy00] et sans adaptation de maillage est un échec (fig. 4.6).

L’algorithme utilisé pour calculer l’évolution de la poche de gaz est trop diffusif et, au cours du temps, le domaine gazeux diffuse dans le domaine fluide sans qu’il soit possible de les distinguer.

L’utilisation de l’algorithme d’adaptation de maillage a permis de réduire cette diffusion et de ce fait de maintenir l’intégrité de la bulle. Celle-ci augmente de volume à mesure qu’elle monte vers la surface (fig. 4.8) et la différence de pression entre le fluide et la bulle diminue. Pour être certain de limiter la diffusion du domaine gazeux, les critères d’adaptation ont été exagérés : le volume des éléments à l’interface est extrêmement faible et le critère de forme des éléments n’est que faiblement pris en compte ce qui explique la persistance de certaines « déformations » du maillage après le passage de l’interface. De plus, il aurait été profitable d’effectuer une adaptation de maillage (statique) sur la position initiale de la bulle pour limiter la bande de diffusion initiale. Le résultat est néanmoins pro-



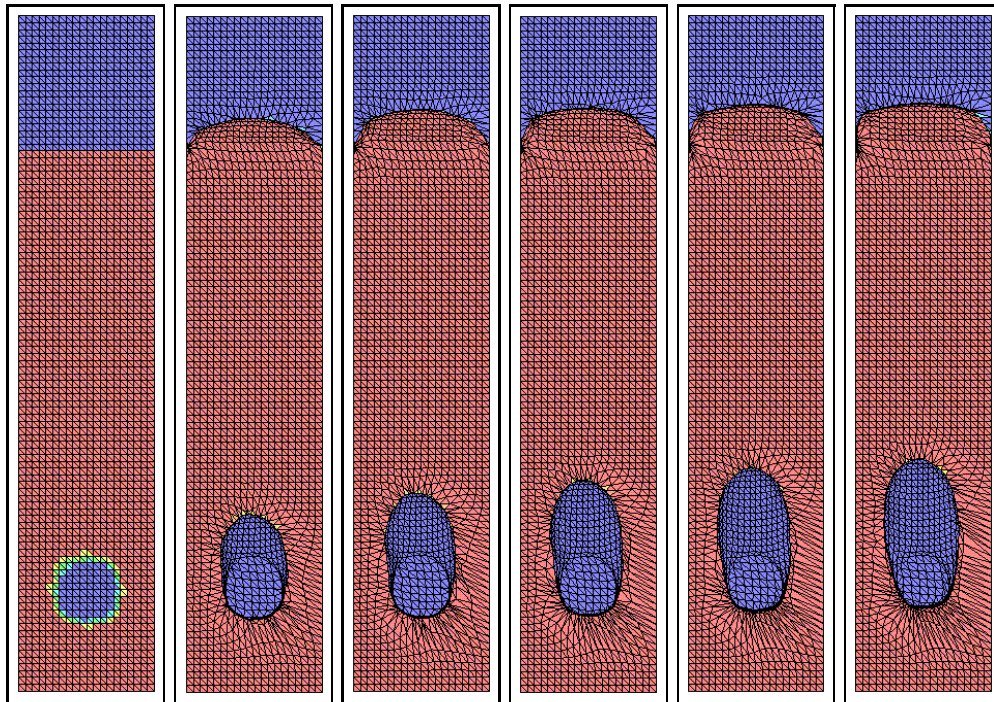


FIG. 4.7 – Réduction de la diffusion grâce à l’adaptation de maillage.

bant et permet de bien localiser l’interface bulle/fluide ainsi que l’interface fluide/surface dont l’évolution est liée à la première.

#### 4.2.2 Expansion de mousses polymère

Le même type de calcul a été réalisé par J. Bruchon dans le cadre de son étude sur la simulation de l’expansion des mousses. Cet exemple est tiré de ses travaux récents [Bruchon00]. Il s’agit d’une cellule élémentaire au centre de laquelle gonfle, par réaction chimique, une bulle de gaz au sein d’une matrice de polymère liquide. La vitesse d’expansion de la bulle est dictée par la cinétique chimique (augmentation du volume de gaz dans la bulle, pression constante). Les conditions aux limites en vitesse sont libres aux bords de la cellule sauf au 4 coins ce qui perturbe le champ de vitesse.

L’utilisation de l’algorithme d’adaptation permet encore une fois de bien localiser l’interface entre les deux fluides. Cette précision sur la localisation est d’autant plus importantes lorsque l’on met en présence plusieurs bulles (de volume et donc de croissance différents) qui vont se rencontrer et coalescer (étude en cours). La bande d’éléments affectés par l’adaptation reste constante au cours du calcul (fig. 4.9 et 4.10) et sa largeur indique que la diffusion est maîtrisée. En raison des conditions en vitesse imposées aux coins du domaine, le calcul tend vers une solution non physique qui peut être « lue » sur le dernier maillage (fig. 4.10(b)).

La visualisation du champ de pression montre d’une part que l’on peut nettement distinguer les deux fluides en présence en observant les différences de pression (gradient de pression très localisé) et d’autre part que l’adaptation de maillage « suit » bien l’interface entre les fluides (elle localise le gradient). On tire les mêmes enseignements de l’observation du champ de vitesse (fig. 4.12(b)), on remarque la perturbation du champ de vitesse aux coins de la cellule).



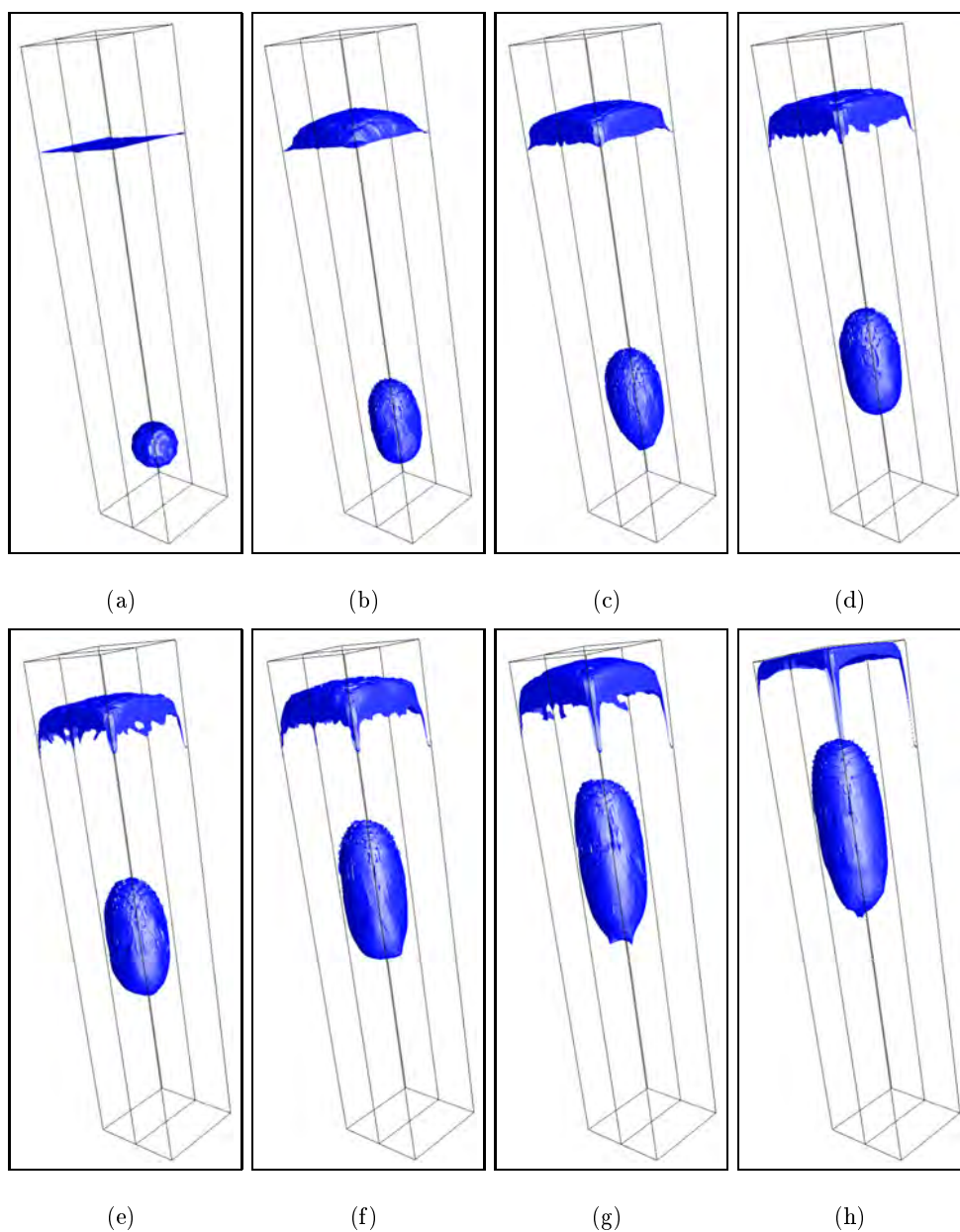


FIG. 4.8 – Full simulation.

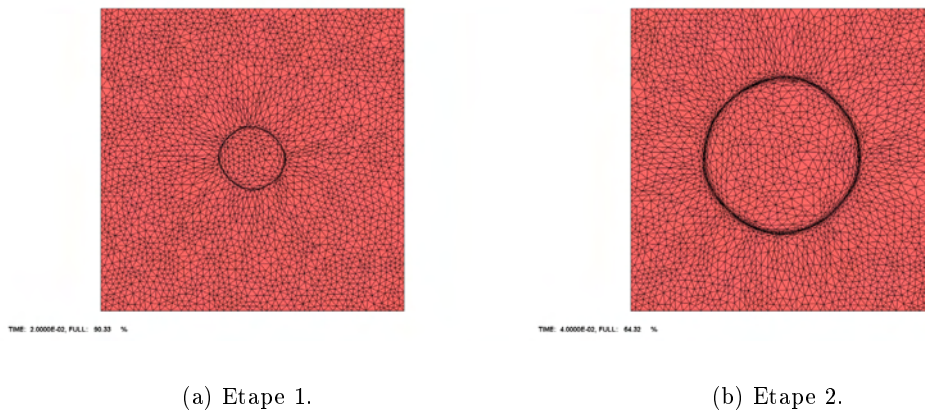


FIG. 4.9 – Evolution du maillage.

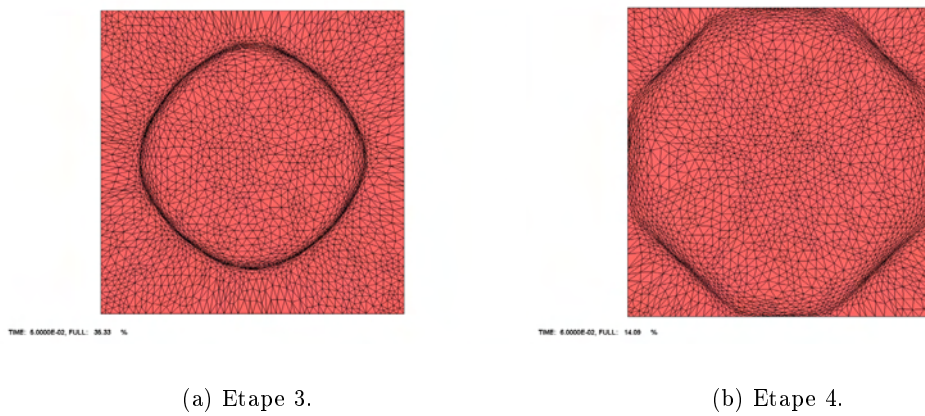


FIG. 4.10 – Evolution du maillage.

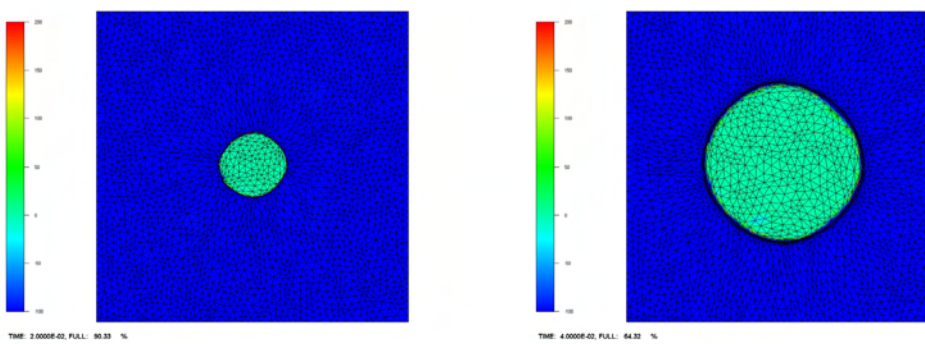
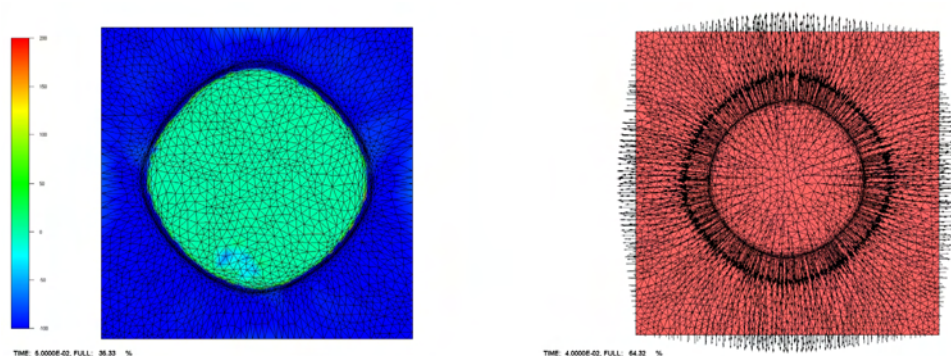


FIG. 4.11 – Évolution du champ de pression dans la cellule élémentaire.



(a) Champ de pression (instant  $t_2$ ). (b) Champ de vitesse (instant  $t_1$ ).

FIG. 4.12 – Champs de pression et de vitesse dans la cellule.

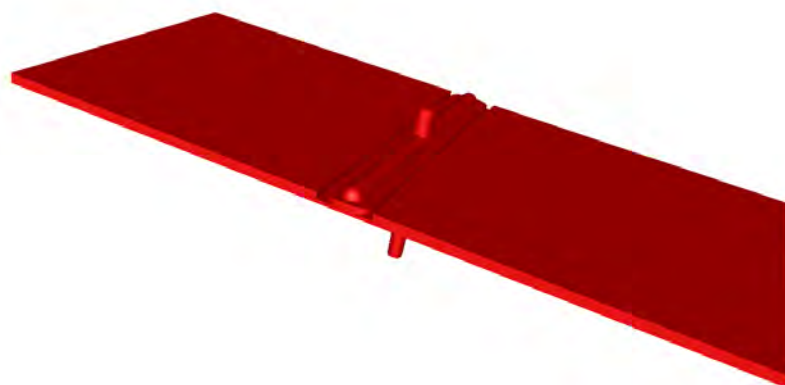


FIG. 4.13 – Géométrie du moule.

## 4.3 Injection de pièces minces

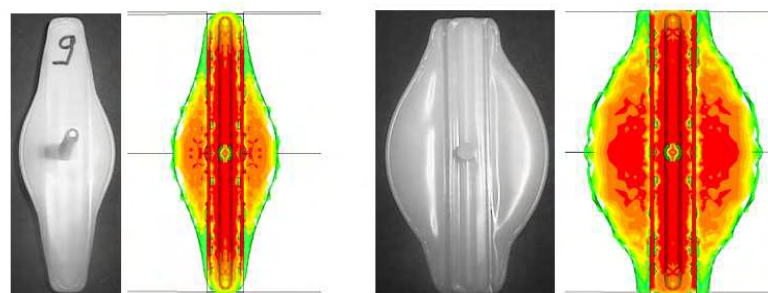
### 4.3.1 Éprouvette d'injection

Le premier exemple de pièce mince injectée que nous présenterons ici a été proposé par F. Chopinez ([Chopinez01]) qui a réalisé une campagne d'essai sur l'injection de cette géométrie (fig. 4.13).

Pour nous l'intérêt de cette étude était de démontrer qu'une modélisation de cette pièce s'appuyant sur un maillage anisotrope est pertinente et permet d'appréhender finement l'histoire thermomécanique du remplissage.

REMARQUE : en raison de la symétrie de l'écoulement, seul un quart de la pièce a été modélisé.

Les résultats de simulation obtenus à partir des données rhéologiques et des para-



(a) Remplissage de la zone du distributeur. (b) Début du remplissage en nappe.

FIG. 4.14 – Comparaison essai/calcul.

mètres d'injection fournis par F. Chopinez sont tout à fait comparables aux essais réalisés sur presse. Les temps de remplissage sont respectés et la forme du front bien prédite (fig. 4.14 et 4.15). L'intérêt de la modélisation tridimensionnelle pour l'expérimentateur est de pouvoir accéder directement aux taux de cisaillement, champ de pression ou de contrainte par exemple en tout point de la pièce et sur toute l'épaisseur de celle-ci. Ce complément d'information pourra lui permettre d'expliquer une différence de caractérisation ou de comportement de la pièce en fonction d'une sollicitation ou d'une contrainte thermique.

Bien entendu, pour une géométrie aussi simple, une simulation bidimensionnelle apporte des informations elles aussi pertinentes et pour un coût moindre. Il faut toutefois ajouter à ce faible coût de calcul un coût de conception (préparation) plus important que pour la modélisation tridimensionnelle. En effet, même si elle a été conçue pour produire un remplissage en nappe, on remarque que la zone de distribution chargée de répartir l'écoulement uniformément sur toute la largeur de la plaque ne remplit pas complètement son rôle. Pour pouvoir rendre compte de cela avec un code  $2D$  il est nécessaire de renseigner, pour tout point de la fibre neutre, l'épaisseur de la pièce. Si cette information n'est pas correctement collectée, la géométrie de la pièce n'est plus respectée et c'est toute l'histoire du remplissage qui s'en trouve modifiée.

En fait, la géométrie du distributeur (qui est tridimensionnelle) et les conditions thermiques imposées ont des rôles prépondérants dans l'histoire du remplissage. On peut mettre cela en évidence en utilisant un fluide dont la thermodépendance est plus marquée que celui utilisé pour les essais. On remarque sur les comparaisons que, pour un même temps de remplissage, la forme et la position du front va être différente (sur la partie gauche le même fluide que précédemment, sur la partie droite un fluide fortement thermodépendant, figure 4.16 et suivantes).

La technique de maillage que nous avons déployée ici permet d'avoir un maillage isotrope fin pour la zone du distributeur et un raffinement anisotrope dans l'épaisseur au niveau de la rainure. Les effets thermomécaniques complexes sont ainsi relativement bien rendus en ce lieu. Mais cet exemple de géométrie met aussi en évidence un autre point important à considérer : la thermique du moule d'injection. Dans notre modèle, le moule est supposé parfaitement régulé. Le champ de température imposé en paroi est donc le même en tout point de la géométrie. Or, au niveau de la rainure, il y a peu de chance que la température puisse être finement contrôlée : la température risque de s'y élever par conduction de la chaleur apportée par le polymère fondu. Une perspective à ce

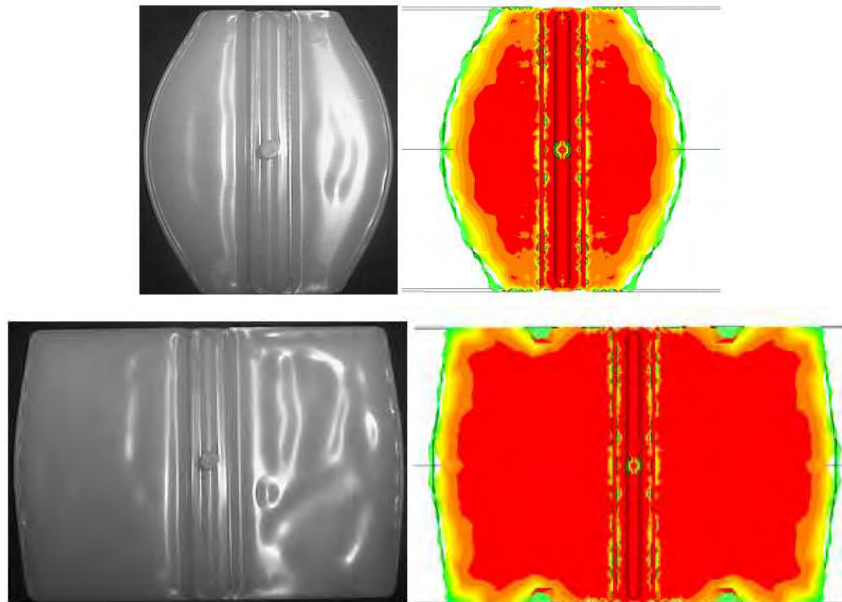
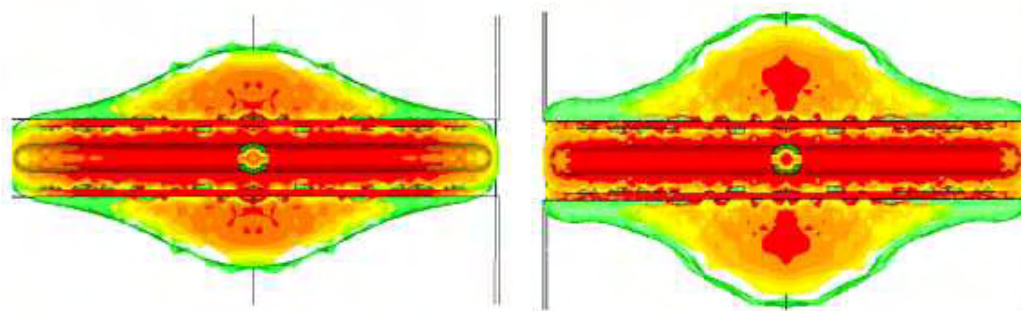


FIG. 4.15 – Comparaison essai/calcul.



(a) Fluide modèle.

(b) Fluide fortement thermodépendant.

FIG. 4.16 – Influence de la thermodépendance (1).



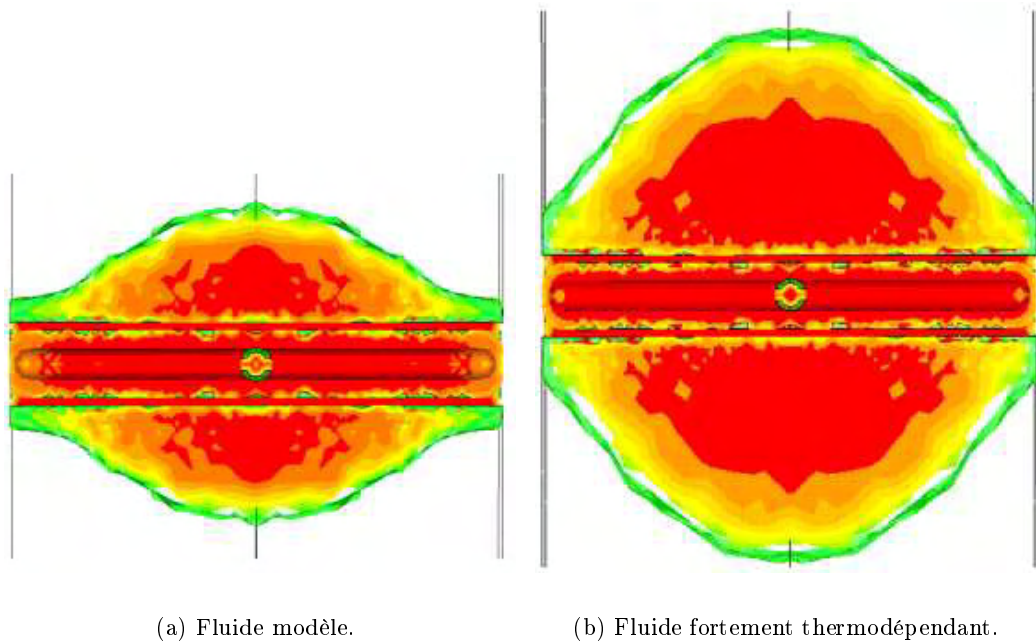


FIG. 4.17 – Influence de la thermodépendance (2).

travail consiste donc à prendre en compte la thermique du moule en couplant la résolution thermique dans la cavité et dans le moule. Ce travail a déjà été largement entamé par S. Batkam ([Batkam99]).

### 4.3.2 Déplacement d'une ligne de flux

L'exemple proposé ici traite une fois de plus des lignes de flux. Cependant, il ne s'agit plus seulement de déterminer la position de sa formation (qui peut être le lieu d'une fragilité mécanique en fonction des conditions thermomécanique) mais aussi son évolution au cours du remplissage. En effet, dans certaines configurations géométriques, une ligne de soudure peut être déplacée par la réorganisation de l'écoulement. Ce déplacement entraîne une déformation de la ligne de flux qui le plus souvent passe d'une forme de front plan séparant les deux flux primaires à une forme en forme de cloche sous la pression de l'un des deux flux. La position de la ligne de soudure est en effet figée en paroi par le figeage de la matière mais peut évoluer à cœur si le refroidissement n'est pas complet. Cette déformation de la ligne de flux peut engendrer une augmentation des propriétés mécaniques locales principalement par l'« ancrage » que cela crée entre les deux flux [Michaeli et al.93].

Sans que l'on soit intéressé par cette amélioration des propriétés mécaniques, il est cependant important de déterminer où peut s'être déplacée une ligne de flux. C'est en particulier le cas lorsque l'on s'intéresse à l'injection de polymères complexes pour produire des pièces avec des tolérances de défauts géométriques et d'aspect quasi-nulles. A. Claverie s'est intéressée à ce sujet pour la production de pièces de carrosserie automobile en thermoplastique [Claverie00]. Les critères de qualité en vigueur chez les constructeurs automobile et la complexité des pièces à produire exigent de prédire suffisamment tôt et très précisément les défauts susceptibles d'enrayer la production. L'étude de A. Claverie portait sur des défauts visuels et géométriques dans des zones avoisinant une ligne de soudure. L'analyse qu'elle a faite du problème concluait au déplacement de la ligne de soudure

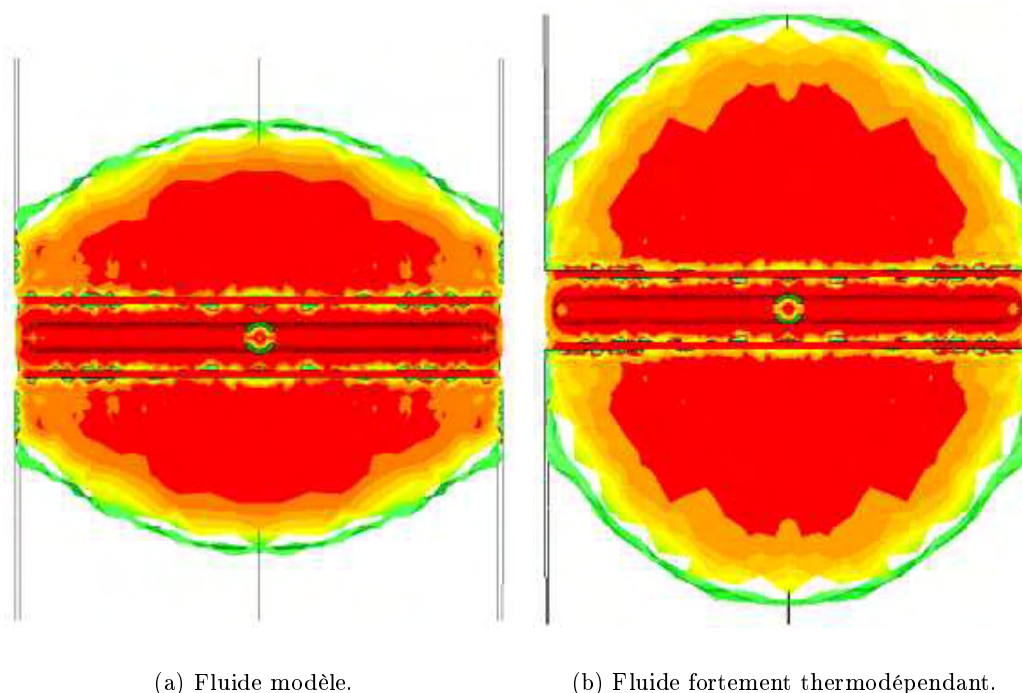


FIG. 4.18 – Influence de la thermodépendance (3).

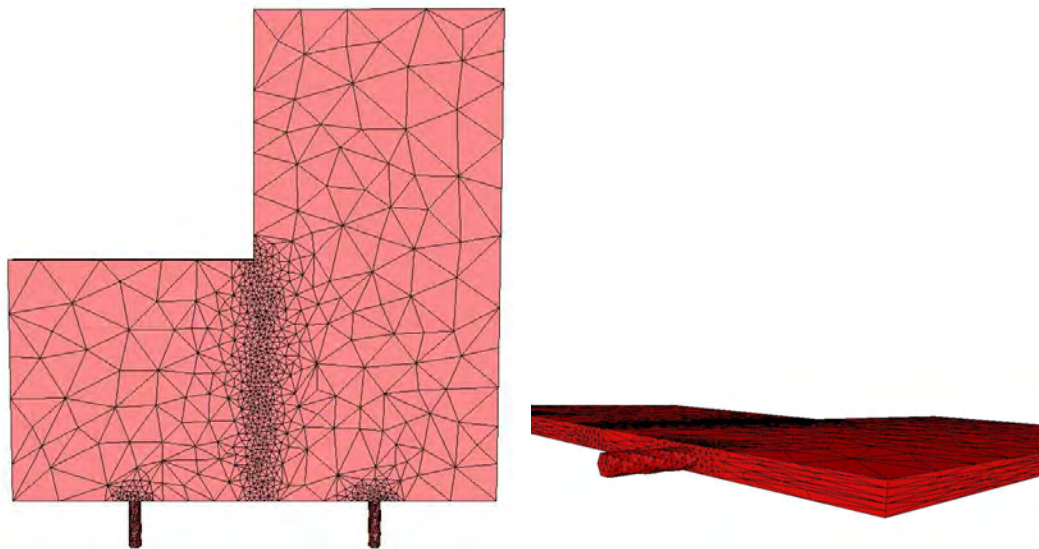
sans qu'elle ait de moyen de mettre en évidence ce déplacement.

Dans ce but, nous avons proposé de modéliser la formation d'une ligne de soudure sur une géométrie susceptible de provoquer le déplacement de la ligne (fig. 4.19).

N'ayant pas de moyens de marquer la position de la ligne de flux pour suivre son évolution, on caractérise celle-ci en étudiant le champ de température issu du calcul et en comparant les cartes en peau (à gauche sur les figures suivantes) et à cœur (à droite). En peau, la position de la ligne de soudure est caractérisée par une température plus élevée qu'en d'autres points de la paroi. En effet, le polymère vient au contact du moule au droit de la ligne de flux plus tardivement (il a été ralenti par la rencontre des deux flux) et il est donc resté plus chaud car pas encore affecté par la régulation thermique du moule. À cœur, c'est l'inverse qui se produit : la position de la ligne de flux est caractérisée par un champ de température moins élevé qu'en d'autres points de la pièce. Le ralentissement du flux sur la ligne diminue le cisaillement (donc l'autoéchauffement) et donne plus de temps au polymère pour se refroidir alors qu'ailleurs la température est entretenue par un apport continu de polymère chaud en provenance des seuils d'injection.

Au cours du remplissage, on remarque que : les positions de la ligne de flux à cœur et en peau sont confondues tant que la longueur d'écoulement est la même pour les deux flux (fig. 4.20 et 4.21). Dès que la partie gauche de la pièce est remplie, l'écoulement se réorganise et le fluide apporté par le seuil de gauche entraîne la ligne de soudure vers la partie droite de la pièce où va se terminer le remplissage (fig. 4.22 et 4.23). En paroi, le figeage de la matière empêche tout déplacement.

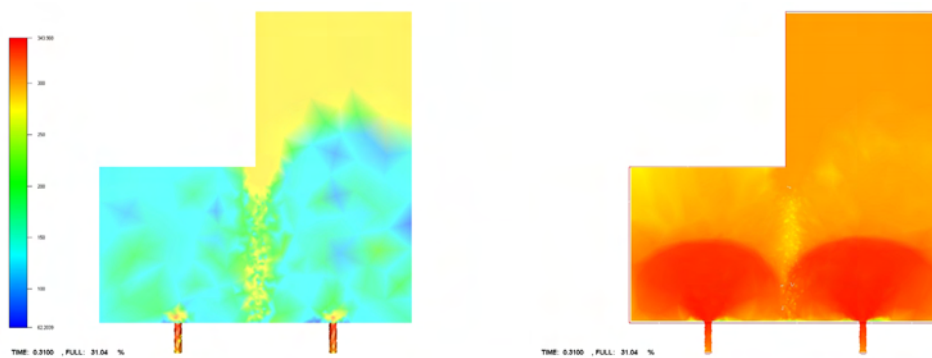
Ce simple exemple d'écoulement met donc en évidence les causes probables des défauts visuel (au droit de la ligne de flux à la paroi) et géométrique (au droit de la position finale de la ligne) observés par A. Claverie. Naturellement, cette information n'aurait pas pu être fournie par une modélisation bidimensionnelle de l'écoulement.



(a) Raffinement au niveau de la ligne de sou-  
dure.

(b) Anisotropie respectant le rapport de  
forme de la pièce.

FIG. 4.19 – Maillage de la géométrie.

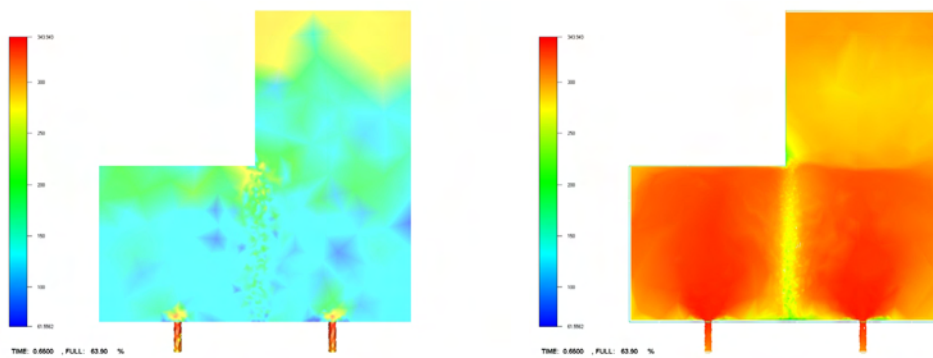


(a) Carte des températures en peau.

(b) Carte des températures à cœur.

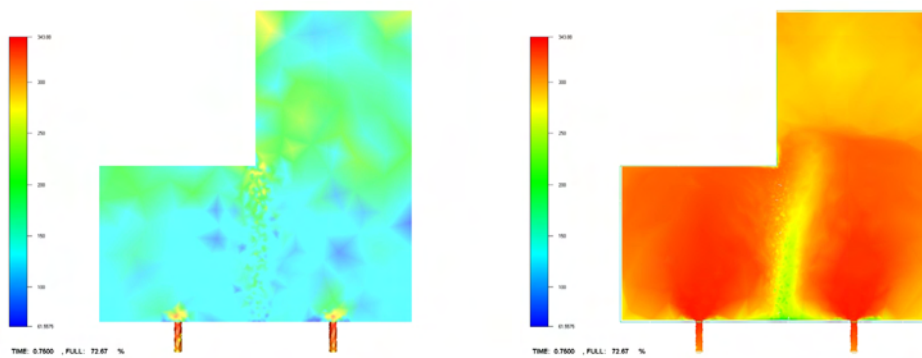
FIG. 4.20 – Taux de remplissage : 31%.





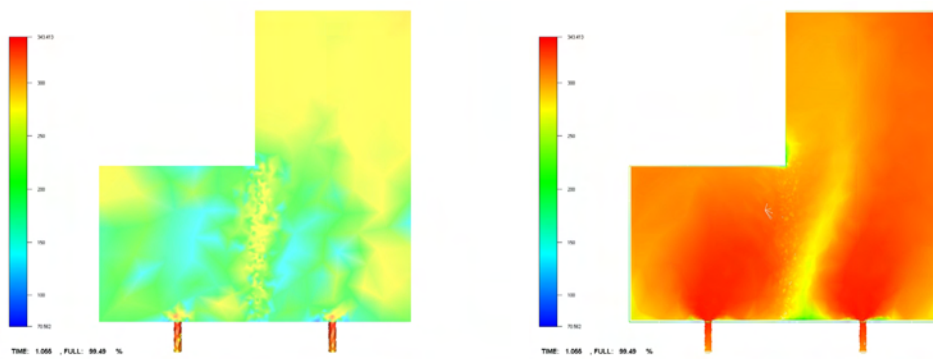
(a) Carte des températures en peau. (b) Carte des températures à cœur.

FIG. 4.21 – Taux de remplissage : 63%.



(a) Carte des températures en peau. (b) Carte des températures à cœur.

FIG. 4.22 – Taux de remplissage : 72%.



(a) Carte des températures en peau. (b) Carte des températures à cœur.

FIG. 4.23 – Taux de remplissage : 99%.

### 4.3.3 Aile type

La géométrie présentée ici (figure 4.24) est celle d'une aile type utilisée au sein de la direction de l'ingénierie des matériaux (DIMat) de RENAULT pour la mise au point de nouvelles méthodologies de production. Sa forme et ses dimensions sont différentes de celles des ailes de production mais les rapports de forme sont conservés. Il s'agit donc d'une pièce intéressante pour valider l'approche 3D directe dans les géométries minces.

L'expérience accumulée sur cette géométrie au sein de la DIMat montre que les différentes configurations de la zone d'alimentation du moule (dans la zone du passage de roue) modifient le mode de remplissage et en particulier la réorganisation des flux. Le premier intérêt d'un calcul sur cette géométrie était donc de démontrer la faisabilité d'un calcul tridimensionnel sur une géométrie industrielle jusqu'ici exclusivement traitée par des calculs 2D. Dans un second temps, on souhaite utiliser cet exemple pour montrer la capacité du code à prédire une réorganisation de flux entraînant un déplacement d'une ligne de ressoudure comme on a pu l'observer au paragraphe précédent sur une géométrie simple.

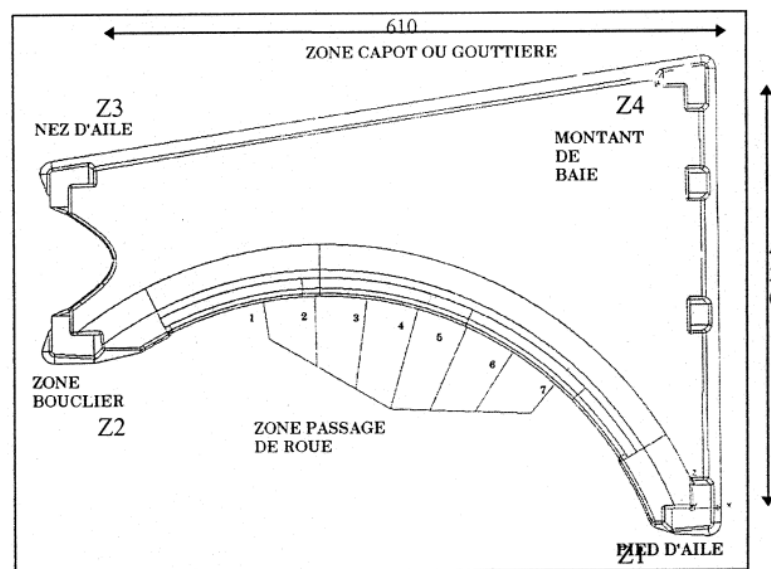
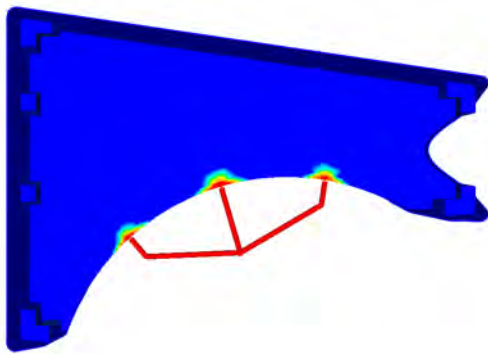


FIG. 4.24 – Moule type d'une aile.

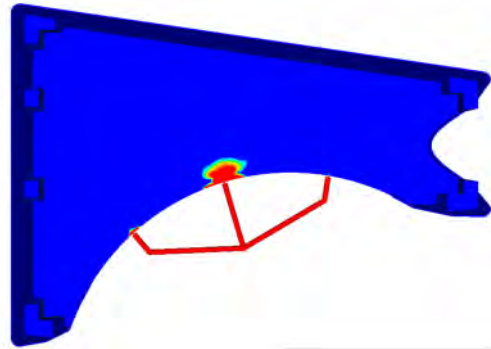
Les résultats suivants décrivent le remplissage de l'aile par un polymère non newtonien en tenant compte ou pas de la thermodépendance de la viscosité. Le but de ces calculs était de démontrer leur faisabilité dans un contexte industriel (calculs réalisés sur un PC Intel PIII 700Mhz, 512Mo).

Si les scénarii de remplissage décrits par les calculs ci-dessus sont reproductibles par des modélisations de type Hele-Shaw, l'accès direct à l'information dans l'épaisseur n'est possible qu'avec l'approche volumique (voir le champ de vitesse au niveau des seuils d'injection, fig. (4.31)).

Cette première étude démontre la faisabilité de ce type calcul. Le maillage employé (fig. 4.32(a)) est toutefois trop grossier (un à deux nœuds dans l'épaisseur) pour pouvoir calculer suffisamment finement la carte thermique (fig. 4.32(b)) et observer le déplacement de lignes de flux.

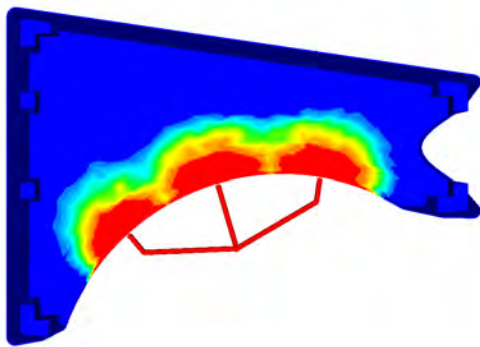


(a) Calcul isotherme.

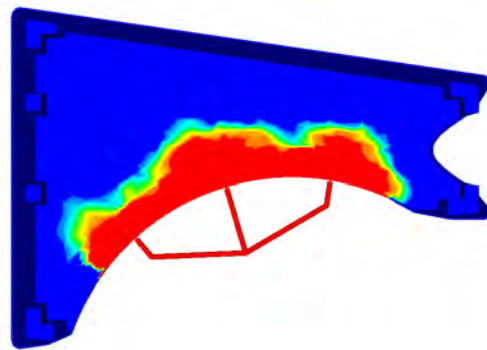


(b) Calcul thermique.

FIG. 4.25 – Taux de remplissage : 5%.

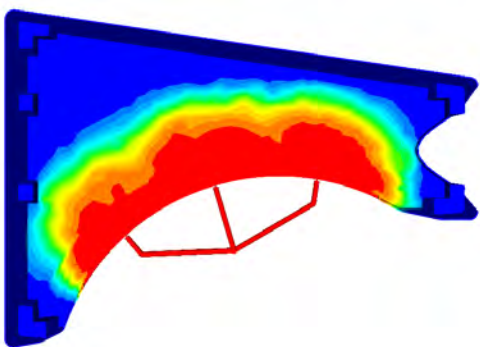


(a) Calcul isotherme.

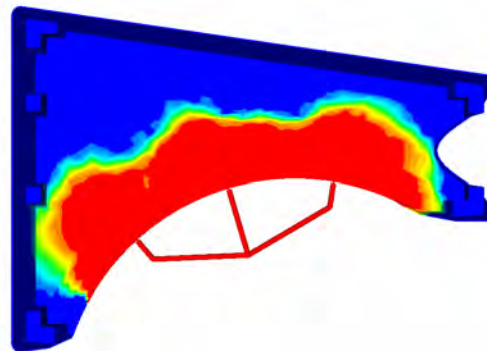


(b) Calcul thermique.

FIG. 4.26 – Taux de remplissage : 20%.

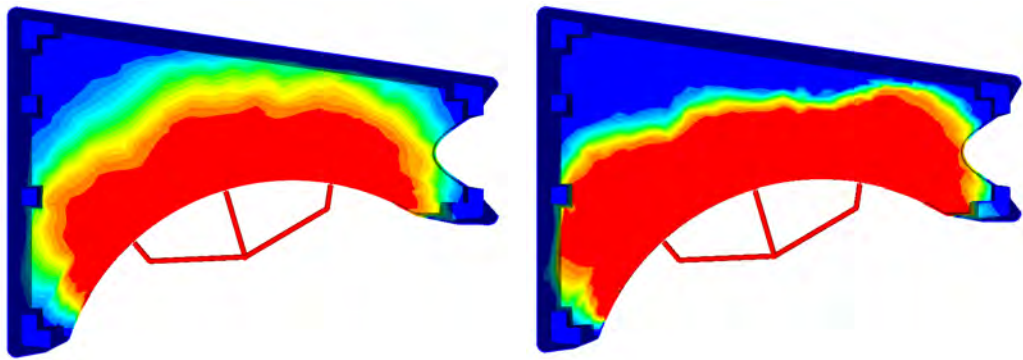


(a) Calcul isotherme.



(b) Calcul thermique.

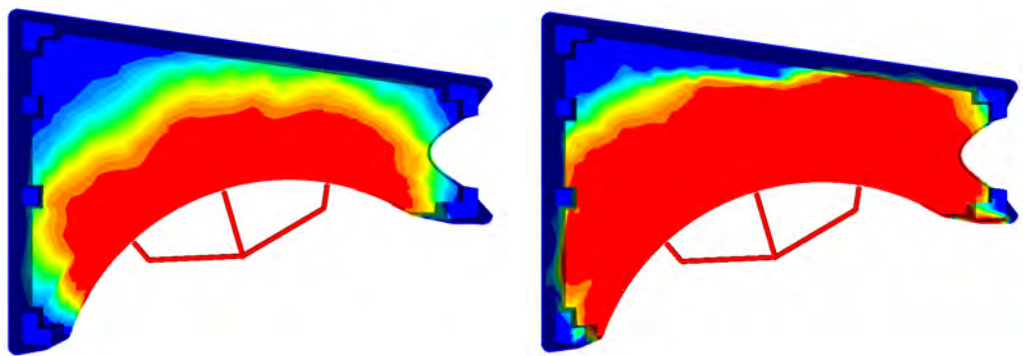
FIG. 4.27 – Taux de remplissage : 35%.



(a) Calcul isotherme.

(b) Calcul thermique.

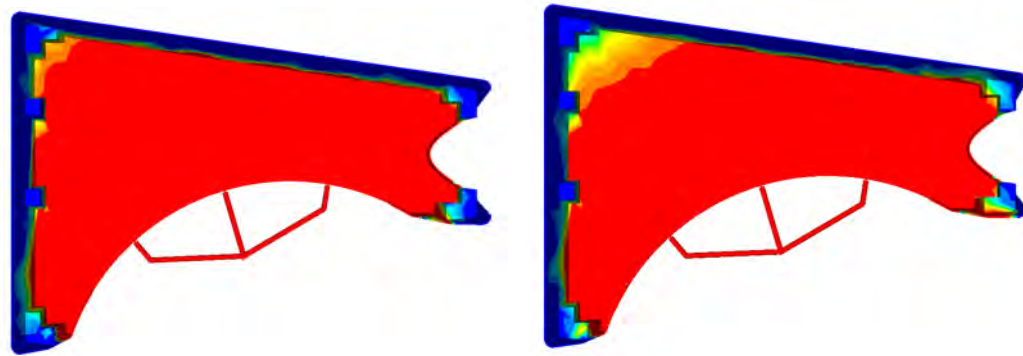
FIG. 4.28 – Taux de remplissage : 50%.



(a) Calcul isotherme.

(b) Calcul thermique.

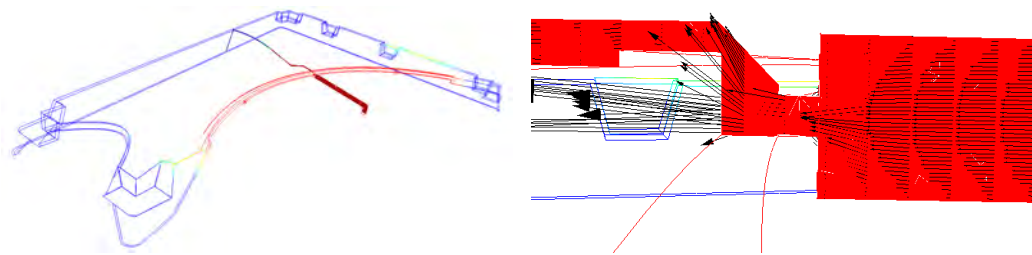
FIG. 4.29 – Taux de remplissage : 65%.



(a) Calcul isotherme.

(b) Calcul thermique.

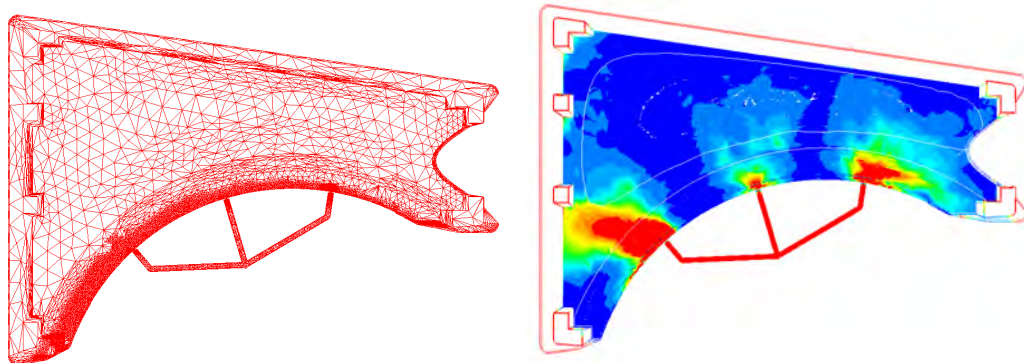
FIG. 4.30 – Taux de remplissage : 75%.



(a) Vue du plan de coupe choisi.

(b) Champ de vitesse dans la coupe au niveau d'un *pin point*.

FIG. 4.31 – Vues du champ de vitesse dans l'épaisseur de la pièce.



(a) Maillage.

(b) Champ de température à cœur pour 75% de remplissage.

FIG. 4.32 – Vues du maillage et du champ thermique en cours de remplissage.

Une suite à ce travail, menée par la DIMat et le CEMEF, a permis de comparer calculs et essais pour un certain nombre de configurations connues présentant des lignes de flux. Ce travail, mené par J. Possamaï, montre que l'on peut retrouver par calcul les paramètres qui vont influencer sur la forme et la position des lignes de flux ([Possamai01]).

En conclusion, on peut estimer que l'approche volumique est pertinente dès aujourd'hui dans un contexte industriel. Elle apporte une information complète sur le procédé de mise en forme et s'affranchit d'hypothèses simplificatrices fortes. Néanmoins des progrès sont encore à réaliser en ce qui concerne la génération d'un maillage anisotrope pour une géométrie telle que celle de l'aile type. Le travail réalisé durant cette thèse ne permet pas de s'affranchir de cette étape délicate pour les géométries complexes.

## Bibliographie

- [Batkam99] Batkam (S.). – *Simulation numérique du remplissage 3D : prise en compte du couplage thermique moule/polymère.* – Rapport technique, CEMEF - École des Mines de Paris, 1999.
- [Bruchon00] Bruchon (J.). – *Étude numérique d'une structure de mousse biopolymère.* – Centre de mise en forme des matériaux, Rapport de recherche, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Chopinez01] Chopinez (F.). – *Mise en œuvre des peintures à eau.* – Centre de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Claverie00] Claverie (A.). – *Étude des lignes de soudures dans les ailes injectées en thermoplastiques.* – Centre de Mise en Forme des Matériaux, Rapport final - mastère mise en forme des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Daboussy00] Daboussy (D.). – *Simulation de l'injection multi-fluides.* – Centre de Mise en Forme des Matériaux, Thèse de doctorat en sciences et génie des matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [David98] David (G.). – *Plan d'expérience de la campagne d'essai d'une pièce prototype MIM.* – Rapport technique, Société IMPAC, 1998.
- [Michaeli et al.93] Michaeli (W.) et Galuschka (S.). – Procedures for increasing the weldline strength of injection molded parts. *ANTEC*, pp. 534–542. – 1993.
- [Possamai01] Possamai (J.). – *Étude des lignes de soudure dans les ailes injectées en thermoplastique.* – Rapport de projet de formation spécialisée (mastère), Centre de Mise en Forme des Matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Revillard98] Revillard (F.). – *Caractérisation rhéologique.* – Rapport technique, Université de Grenoble I, 1998.

# Conclusion générale

L'objectif de cette étude était de déterminer les outils et les techniques permettant de prédire le remplissage de corps minces par injection. L'originalité de notre démarche réside dans le choix d'une simulation complètement tridimensionnelle de ce procédé. Cette approche permet d'obtenir des résultats précis en s'affranchissant de toute hypothèse sur la géométrie de l'écoulement. La physique du procédé est ainsi mieux appréhendée et l'analyse des résultats plus intuitive.

Ce choix d'une simulation volumique directe, en opposition avec l'approche dite « couche mince » largement répandue, se justifie aussi par l'exigence de prédictibilité du remplissage de plus en plus importante et précise pour des applications telles que les pièces de carrosserie automobile ou d'électroménager (boîtier de téléviseur, . . .) dont les qualités d'aspect sont aussi importantes que la tenue mécanique. Pour atteindre ce niveau de prédiction, un certain nombre de choix techniques se sont imposés : utilisation d'une discrétisation éléments finis compatibles ( $P1 + /P1$ ), utilisation de maillages tétraédriques non structurés pour pouvoir traiter tout type de géométries et d'une méthode de résolution d'équation de transport peu diffusive pour traiter le déplacement des fronts de matières. Ces choix ont été déterminés et validés par le travail d'E. Pichelin dans le cadre de géométries volumiques. Le but de cette étude est de les appliquer à des géométries minces.

## Maillage anisotrope

Le premier outil qu'il a été nécessaire de développer est un mailleur anisotrope. Son objectif était de permettre de générer des maillages tétraédriques non structurés pour des géométries complexes pouvant présenter de grands rapports de formes. En choisissant une méthode de génération de maillage par optimisation on répond simplement à ce problème en redéfinissant le critère de forme des éléments que l'on cherche à optimiser. Ce critère de forme prend en compte une *métrique* qui définit le caractère anisotrope de l'espace. Dans notre cas, en s'appuyant sur le mailleur développé par T. Coupez, il nous suffit de fournir une carte de métriques associée aux nœuds du maillage<sup>6</sup> et ce nouveau critère de forme pour obtenir un outil de génération qui hérite des performances de la version isotrope (aussi bien en termes de vitesse que de qualité d'éléments).

## Estimation d'erreur

L'utilisation de tels maillages nécessite de contrôler que la résolution du problème de Stokes n'est pas perturbée par l'anisotropie des éléments. Pour cela, nous proposons un

---

<sup>6</sup>si ce maillage existe; sinon la discrétisation en triangles de la frontière suffit.



---

estimateur qui améliore l'estimation de l'erreur commise pour ce type d'écoulements sur un maillage anisotrope par rapport à un estimateur d'erreur classique de la littérature. Tel qu'il se présente, il indique bien une diminution de l'erreur lorsque les directions principales d'anisotropie du maillage se superposent avec les directions d'anisotropie des champs calculés. Dans un contexte isotrope, il est comparable aux estimateurs proposés par la littérature et permet de piloter un algorithme d'adaptation de maillage. Cet estimateur n'est toutefois pas optimal. Les résultats que nous avons obtenus montrent qu'il devrait prendre en compte la taille de l'élément dans la direction du plus fort gradient calculé sur cet élément. Il est donc probable que cet estimateur puisse être amélioré en utilisant des résultats d'interpolation qui tiendraient compte des directions de gradients.

## Adaptation de maillage

Si l'utilisation d'un maillage anisotrope est adaptée au calcul d'un écoulement présentant des directions principales confondues avec celles de la métrique anisotrope, elle peut être pénalisante pour localiser précisément les interfaces (mobiles ou non) de cet écoulement. En particulier, nous intéressants à la phase de remplissage du procédé d'injection, nous souhaitons déterminer finement la cinétique du front de matière qui pilote le remplissage (effet fontaine). En ce lieu, l'écoulement a un caractère plus isotrope et l'utilisation d'éléments fortement étirés pénalise la localisation du front de matière (étalement de la zone de diffusion numérique). Pour remédier à ce problème, nous proposons une méthode d'adaptation de maillage par déformations locales qui permet de réduire la zone de diffusion. Son principe consiste à réduire le volume des éléments traversés par le front de matière (de façon plus générale par une interface) proportionnellement à leur taux de remplissage. Les éléments tendent ainsi à devenir ou complètement « pleins » ou complètement « vides » limitant ainsi l'erreur sur la position du front de matière. L'algorithme itératif qui en découle peut être vu comme un barycentrage pondéré des nœuds du maillage et converge en quelques itérations. Cette méthode d'adaptation de maillage est simple à mettre en œuvre, efficace et peut être utilisée pour plusieurs applications : elle permet de diminuer la zone de diffusion des fronts de matières en mouvement, de mieux localiser les interfaces (calculs multi-fluides), les lignes de flux, . . . Elle s'applique indifféremment dans un contexte isotrope ou anisotrope. Dans le cas du remplissage de corps minces, l'adaptation par déformation permet, dynamiquement, de donner un caractère isotrope au maillage au niveau du front de matière puis de lui rendre son aspect anisotrope une fois le front de matière passé.

## Applications

Ces différents outils nous ont permis de traiter un certains nombres d'applications académiques ou pré-industrielles. L'adaptation de maillage au front de matière nous a permis de prédire précisément la formation de lignes de ressoudure (objectif initial) mais aussi d'améliorer très sensiblement la qualité des premiers calculs multi-fluides réalisés avec REM3D ® en diminuant fortement la diffusion à l'interface des fluides. Le mailleur a démontré qu'il peut traiter simplement des géométries présentant à la fois des zones minces et des zones volumiques et assurer une bonne maîtrise des coûts de calculs. Enfin, plusieurs calculs sur des géométries généralement traitées avec des outils de simulation bidimensionnels ont démontrés la faisabilité d'un calcul complètement tridimensionnel. Les réponses qu'il apporte sur ces géométries démontrent des avantages certains par rapport

---

aux modélisations 2D :

- prise en compte naturelle de la physique du procédé : dans le cas du remplissage d'une plaque rainurée, l'absence d'hypothèse géométrique permet un couplage thermomécanique simplifié et plus réaliste ;
- information complète sur l'écoulement : le déplacement de la ligne de ressoudure dans l'épaisseur de la plaque mince ne peut être obtenu que par une simulation tridimensionnelle. Cette information est importante car ce déplacement de la ligne de flux peut entraîner deux défauts observables à la surface de la pièce, l'un géométrique, l'autre affectant la brillance de la peau.

L'exemple de simulation du remplissage de l'aile type prouve qu'un tel outil de simulation est aujourd'hui utilisable dans un contexte industriel et apporte des informations jusqu'alors inaccessibles.

## Perspectives

L'algorithme d'adaptation par déformations locales est, sous sa forme actuelle, robuste et efficace. Cette efficacité peut encore être améliorée en :

- permettant de déplacer les nœuds sur la frontière du domaine considéré ;
- améliorant la méthode de résolution du système linéaire ;
- prenant en compte dans le critère d'adaptation l'erreur commise sur l'écoulement de Stokes (*via* l'estimateur d'erreur anisotrope).

Toutefois, au terme de cette étude, les principales perspectives de recherche à explorer concernent à mon sens l'estimation d'erreur et la génération automatique de maillages anisotropes :

- Pour la génération de maillages anisotropes, la définition d'une carte de métriques peut dépendre d'un ou plusieurs critères arbitraires définis par l'utilisateur. Un critère possible est la forme (les rapports de forme) de l'objet que l'on souhaite mailler. Pour cela, nous souhaitons déterminer « automatiquement » la *métrique naturelle* associée à un objet discrétisé. Si la solution que nous avons développée permet d'obtenir des résultats sur des géométries simples il n'en va pas de même pour des géométries complexes. Il serait souhaitable de reprendre ce travail car un tel outil serait très utile dans un contexte industriel où la génération de maillages devient de plus en plus souvent une étape pénalisante (coûteuse) d'un calcul et est de plus en plus souvent sous-traitée (perte de la maîtrise d'œuvre).
- Concernant l'estimateur d'erreur a posteriori, une amélioration de l'estimation d'erreur d'interpolation doit permettre de le rendre optimal et ainsi de contrôler beaucoup plus précisément la qualité du calcul de l'écoulement.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, ce travail démontre la faisabilité industrielle d'un calcul volumique pour le remplissage de corps minces. Dès lors, la chaîne de conception du calcul s'en trouve modifiée puisque l'on passe directement du dessin CAO au modèle volumique (maillage automatique) sur lequel on effectue un calcul direct. Il n'est plus nécessaire de définir, parfois arbitrairement, une surface moyenne (travail long et délicat). De même, la mise en données des paramètres d'injection est plus simple car plus proche de la réalité.



---

## RÉSUMÉ

Cette thèse propose de nouveaux outils de calcul pour la simulation du moulage de pièces minces par injection de thermoplastiques. Ces travaux s'intègrent au sein d'un code de calcul 3D dédié à la simulation du remplissage de pièces volumiques.

La description thermo-mécanique du remplissage du moule est obtenue par une discrétisation éléments finis eulérienne. Nous proposons en première partie une méthode de génération de maillages pour traiter les géométries minces. La solution proposée, issue des méthodes d'optimisations locales, nécessite l'introduction de la notion de métriques. Elle permet de générer et d'adapter des maillages anisotropes bi- ou tridimensionnels non structurés tétraédriques ou triangulaires.

En deuxième partie, on a été amené à caractériser l'erreur commise sur le calcul d'un écoulement visqueux incompressible sur de tels maillages. Un nouvel estimateur d'erreur a posteriori pour le problème de Stokes est proposé pour traiter ces maillages.

Enfin, l'utilisation de tels maillages peut dégrader, localement, le calcul du remplissage au niveau des surfaces libres. Pour maîtriser cet effet, une méthode d'adaptation de maillage par déformations locales est proposée. S'inspirant des méthodes de régularisation par barycentrage, elle permet d'adapter dynamiquement les mailles au niveau des fronts en mouvement, tout en régularisant le maillage en amont et en aval de ceux-ci.

L'ensemble de ces outils permet d'élargir le domaine d'applications du logiciel de simulation existant aux géométries minces, mais aussi d'en améliorer la précision dans le cadre de l'injection multifluides. Des applications, regroupées dans le dernier chapitre, permettent d'illustrer les avancées permises par cette étude.

**Mots clés :** simulation 3D ; éléments finis ; adaptation de maillage ; maillage anisotrope ; estimateur d'erreur anisotrope ; surface libre instationnaire ; mécanique des fluides ; injection de polymère.

---

## ABSTRACT

This study provides new tools for injection moulding simulation of thin pieces. This work is based on an existing code dedicated to describe the filling of 3D parts. Finite element methods in an eulerian description of the flow are used. At first, a new anisotropic meshing method is proposed. Issue from locals optimisations methods, this new tool is based on metric concept. It enables to generate or to adapt unstructured anisotropic meshes in 2D or 3D (triangle or tetrahedral).

In the second part, we focus on the error estimation of the flow calculus using anisotropic meshes. We propose a new a posteriori anisotropic error estimate for Stokes problem. It is shown that this estimate is able to detect the anisotropy of meshes but without being optimal.

Finally, using anisotropic meshes could not be convenient to describe precisely the flow around free surfaces and flow fronts inducing too large diffusion. In order to prevent this problem, we developed a new mesh adaptation dedicated to front tracking. This method can be seen as a weighted barycentric algorithm and allows to dynamically adapt the mesh at flow fronts and to smooth it toward and backward.

Applications of these new features are presented in the last chapter of this study. It is shown that the 3D simulation of large thin parts like car fender is now affordable using anisotropic meshes.

**Keywords :** 3D numerical simulation ; finite element method ; meshing adaption ; anisotropic meshing ; anisotropic error estimates ; unsteady free surface ; fluid mechanics ; polymer moulding.