



**HAL**  
open science

# Représentation Microlocale de Solutions de Systèmes Hyperboliques, Application à l'Imagerie, et Contributions au Contrôle et aux Problèmes Inverses pour des Equations Paraboliques

Jérôme Le Rousseau

► **To cite this version:**

Jérôme Le Rousseau. Représentation Microlocale de Solutions de Systèmes Hyperboliques, Application à l'Imagerie, et Contributions au Contrôle et aux Problèmes Inverses pour des Equations Paraboliques. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. tel-00201887v2

**HAL Id: tel-00201887**

**<https://theses.hal.science/tel-00201887v2>**

Submitted on 22 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de Provence**  
**U.F.R. de Mathématiques, Informatique et Mécanique**

## **HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Discipline : Mathématiques Appliquées

### **Représentation Microlocale de Solutions de Systèmes Hyperboliques, Application à l'Imagerie, et Contributions au Contrôle et aux Problèmes Inverses pour des Équations Paraboliques**

présentée par

**Jérôme LE ROUSSEAU**

le 30 novembre 2007

Après avis des rapporteurs :

M. E. F	´	-C	Professeur	Université de Séville, Espagne
M. O. G	`		Professeur	Université de Provence, Marseille
M. G. L			Professeur	Université de Nice-Sophia Antipolis

Devant la commission d'examen composée de :

Président :

M. P. J	Directeur de Recherche	INRIA, Rocquencourt
---------	------------------------	---------------------

Examineurs :

Mme A. B	Professeur	Université de Provence, Marseille		
M. M. V.	H	Professeur	Purdue University, West Lafayette, IN, USA	
M. Y. D		Professeur	Université de Provence, Marseille	
M. E. F	´	-C	Professeur	Université de Séville, Espagne
M. O. G	`		Professeur	Université de Provence, Marseille
M. G. L			Professeur	Université de Nice-Sophia Antipolis
M. N. L			Professeur	Université Pierre et Marie Curie, Paris
M. L. R			Professeur	Université de Versailles Saint-Quentin



M' 'H ` D R

Représentation Microlocale de  
Solutions de Systèmes Hyperboliques,  
Application à l'Imagerie,  
et  
Contributions au Contrôle et aux Problèmes  
Inverses pour des Équations Paraboliques

par  
Jérôme L R



# Remerciements

C'est d'abord à Enrique Fernández-Cara, Olivier Guès et Gilles Lebeau que vont tous mes remerciements pour avoir accepté de rapporter sur le travail présenté dans ce mémoire. Leurs avis sur ces résultats me sont d'autant plus précieux que leurs travaux scientifiques ont toujours été une source d'inspiration pour moi.

Je remercie aussi les autres membres du jury, Assia Benabdallah, Maarten de Hoop, Yves Dermenjian, Patrick Joly, Nicolas Lerner et Luc Robbiano de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour les résultats que j'expose ici. Leur présence dans ce jury est un honneur pour moi. J'ai une pensée particulière pour Maarten de Hoop qui a encadré ma thèse de doctorat il y a quelques années. Il a fortement contribué à mes goûts scientifiques et son influence se retrouve encore aujourd'hui dans une grande partie de mon travail. La rédaction de ce mémoire m'a donné l'occasion de m'entretenir avec tous les membres du jury ; ces discussions fructueuses m'ont ouvert des perspectives de futures recherches.

Il me serait impossible de ne pas citer de nouveau Yves Dermenjian dans ces remerciements. Depuis mon arrivée à Marseille, Yves a toujours été disponible aussi bien comme collègue que comme ami. Nous avons été amenés à collaborer ensemble, pour mon plus grand plaisir et au bénéfice de mes connaissances mathématiques ; certains de ces travaux sont présentés ici. Je remercie encore Yves pour ses encouragements permanents ainsi que pour avoir pris le temps de relire soigneusement ce mémoire.

Je dois beaucoup aussi à Assia Benabdallah, qui m'a enseigné une grande partie de ce que je sais en théorie du contrôle. Là aussi, c'est entre estimations et publications que nous avons tissé nos liens d'amitié.

Je souhaite aussi remercier mes autres coauteurs récents : Alison Malcolm (Université de Utrecht/MIT), Patricia Gaitan (Université de la Méditerranée) et Günther Hörmann (Université de Vienne). Les travaux que nous avons réalisés ensemble et les discussions, craie en main, qui les ont accompagnés ont toujours été pour moi une source de motivation et d'apprentissage. C'est quasiment dans ce cadre que je remercie Olivier Guès de m'avoir encouragé vers la généralisation de certains résultats aux systèmes hyperboliques symétrisables.

Les recherches que j'ai poursuivies au LATP ont été stimulées par de nombreuses discussions mathématiques avec mes collègues Boris Andreianov, Michel Cristofol, François Hamel, Raphaële Herbin et Olivier Poisson ; je suis reconnaissant tout particulièrement à Thierry Gallouët pour son accueil en tant que directeur de laboratoire, pour sa disponibilité et son soutien, ainsi qu'à Florence Hubert et Franck Boyer, pour tous les échanges que nous avons eus ensemble. Avec ces deux derniers nous commençons des travaux en commun. Quel plaisir !

Je remercie aussi mes autres collègues de l'équipe d'analyse appliquée avec qui j'ai la fortune de travailler ; je pense en particulier à Philippe Angot, Marie-Thérèse Aimar, Florence Bachmann, Clément Cancès, Catherine Choquet, Marie Henry, Stella Krell, Sébastien Minjeaud, Sylvie Monniaux, Claudia Negulescu, Anne Nouri et Emmanuel Russ.

Les secrétaires du LATP, Aline Blanc, Nadia Pittet, Julie Raud et Marie-Christine Tort ont très souvent, avec le sourire, simplifié ma vie administrative. Je les en remercie vivement ainsi que le personnel administratif

de l'UFR, en particulier Nathalie Bonifay, Sandrine Ifrah et Chantal Ravier.

Je suis reconnaissant à Anna Wojciechowska, Norbert Deleutre, Gérard Henry et Kai Poutrain pour leurs contributions au fonctionnement du LATP, à la bibliothèque et sur le réseau informatique.

Au delà de mon équipe de recherche, le LATP et les autres laboratoires de mathématiques de Marseille sont pour moi des lieux d'échange souvent par delà les disciplines. Au moment de ces remerciements, toutes mes pensées vont donc aussi à Pascal Hubert, Erwan Lanneau, Hamish Short, Clothilde Melot, Peter Haissinsky, Jérôme Los, Hervé Gaussier, Christophe Pouet, Fabienne Castell, Étienne Pardoux, Stéphane Rigat, Jean-Yves Briend, Karim Kelley, Stanislav Kupin et d'autres collègues.

Mes travaux ont été influencés par des interactions avec de nombreux chercheurs. Je remercie en particulier Farid Ammar-Khodja, Anna Doubova, Manuel González-Burgos et Sergio Guerrero-Rodríguez pour des discussions sur les inégalités de Carleman ; Matania Ben-Artzi, Viorel Iftimie, Hiroshi Isozaki, Didier Robert pour des discussions sur les problèmes hyperboliques, paraboliques, l'analyse microlocale, etc...

Je sais gré à l'INRIA et au CNRS de m'avoir accordé, tous les deux, six mois de délégation pour l'année universitaire 2006–2007, ce qui, entre autres, a permis la rédaction de ce mémoire. Je remercie Yvon Maday pour l'accueil qu'il m'a réservé au Laboratoire Jacques-Louis Lions à l'Université Pierre et Marie Curie ainsi que Nicolas Seguin, Olivier Glass, Olivier Bokanowski, Frédéric Lagoutière, Franck Sueur et Albert Cohen. A l'INRIA, j'ai reçu un très bon accueil des membres de l'UMR POems. Je remercie tout particulièrement Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet-Bendhia, Nathalie Bonte, Laurent Bourgeois, Xavier Claeys, Marc Duruflé, Sonia Fliss, Christophe Hazard, Houssein Haddar, Patrick Joly, Marc Lenoir, Eric Lunéville, Jean-François Mercier, Christine Poirier et Hasnaa Zidani.

Il est coutume de finir en remerciant la patience et la gentillesse d'un compagnon ou d'une compagne. J'ajouterai pour ma part que je remercie infiniment ma compagne Iris Levasseur ; ses capacités quasi-inépuisables de travail et de concentration sont un modèle pour moi. La plupart des résultats de ce mémoire ont pris forme à ses cotés, dans son atelier.

Mes derniers mots iront pour mes proches en remerciement de leur soutien. J'y inclus Geneviève Dermenjian grâce à qui Marseille est un lieu où j'ai tant plaisir à séjourner.

## Résumé

Dans une première partie, nous considérons des problèmes de Cauchy pour des équations et systèmes hyperboliques du premier ordre. Nous donnons une représentation de l'opérateur solution comme produit infini d'opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe. Nous démontrons la convergence de cette représentation dans les espaces de Sobolev, ainsi que celle du front d'onde. Pour les systèmes, nous traitons les cas symétriques et symétrisables. La représentation proposée conduit naturellement à des schémas numériques pour la résolution des problèmes de Cauchy. Nous présentons des applications de cette méthode dans le domaine de l'imagerie sismique. Dans ce cadre, grâce à des approximations microlocales nous obtenons des schémas efficaces. D'autres applications de l'analyse microlocale à la sismologie sont présentées.

Dans une seconde partie, nous étudions la contrôlabilité aux trajectoires pour des équations paraboliques linéaires et semi-linéaires. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas d'opérateurs sous forme divergente où le coefficient de la partie principale est non continu. Nous prouvons tout d'abord une inégalité de Carleman, en dimension un d'espace, pour un coefficient  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Par un passage à la limite dans l'inégalité de Carleman, ce résultat est étendu au cas d'un coefficient  $BV$ . Avec ces résultats, nous prouvons la contrôlabilité de ces équations paraboliques en dimension un d'espace sans faire d'hypothèse de compatibilité entre la région de contrôle et les signes des sauts du coefficient discontinu. De plus, nous exhibons un cas en dimension supérieure pour lequel la même conclusion est obtenue. Finalement, nous utilisons une inégalité de Carleman afin d'identifier le coefficient discontinu à partir de mesures faites sur la solution.

## Abstract

In a first part, we consider Cauchy problems for first-order hyperbolic equations and systems. A representation of the solution operator of these equations is given as an infinite product of Fourier integral operators with complex phase. The convergence in Sobolev spaces of this representation is proven as well as the convergence of the wavefront set. In the case of systems, symmetric and symmetrizable systems are considered. The proposed representation naturally yields numerical schemes for the resolution of the Cauchy problems. We present applications of this method to the field of seismic imaging. There, approximations are performed to obtain efficient schemes. Other applications of microlocal analysis to seismology are presented.

In a second part, we study the controllability to the trajectories for linear and semilinear parabolic equations. We focus on the case of operators in divergence form where the coefficient in the principal part is non continuous. We first derive a Carleman estimate, in one space dimension, for a piecewise- $\mathcal{C}^1$  coefficient. This result is extended to a  $BV$  coefficient by passing to the limit in the Carleman estimate. With these results, we prove that the controllability for parabolic equations is achievable in one space dimension without assuming any compatibility between the control region and the signs of the jumps of the discontinuous coefficient. We further exhibit a case in higher dimension for which the same conclusion holds. Finally, we make use of a Carleman estimate to identify the discontinuous coefficient from measurements of the solution.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Première partie Analyse microlocale appliquée</b>	<b>3</b>
<b>1 Représentation de solutions d'équations hyperboliques par produits d'opérateurs intégraux de Fourier</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Notations . . . . .	8
1.3 Le problème de Cauchy . . . . .	9
1.4 Propriétés du propagateur couche mince . . . . .	9
1.5 Résultats de stabilité et de convergence dans les espaces de Sobolev . . . . .	13
1.6 Propagation des singularités, convergence du front d'onde . . . . .	15
1.6.1 Propriétés géométriques de $\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}$ . . . . .	15
1.6.2 Propagation des singularités, convergence du front d'onde . . . . .	16
1.7 Le cas des systèmes . . . . .	18
1.7.1 Systèmes symétriques . . . . .	19
1.7.2 Systèmes symétrisables . . . . .	22
<b>2 Contributions à l'imagerie sismique</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Découplage microlocal en champs montant et descendant de l'équation des ondes . . . . .	25
2.3 Approximations . . . . .	27
2.3.1 Troncature . . . . .	27
2.3.2 Approximations « Generalized Screens » . . . . .	28
2.4 Formulation du problème d'imagerie et mise en pratique . . . . .	30
2.5 Prolongement de données . . . . .	32

<b>Perspectives</b>	<b>35</b>
<b>Deuxième partie Contrôle et problème inverse</b>	<b>37</b>
<b>3 Contributions à la théorie du contrôle des équations paraboliques et aux problèmes inverses</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction et notations . . . . .	39
3.2 Inégalités de Carleman pour des coefficients de diffusion $\mathcal{C}^1$ par morceaux . . . . .	43
3.3 Coefficients à variations bornées : passage à la limite dans des inégalités de Carleman . . . . .	45
3.4 Contrôlabilité d'équations paraboliques semi-linéaires à coefficient discontinu en dimension un d'espace . . . . .	48
3.5 Un résultat de contrôlabilité en dimension plus grande que deux . . . . .	51
3.6 Problème d'identification de coefficients non réguliers . . . . .	53
3.7 Perspectives . . . . .	56
3.A Sur l'inégalité de G. Lebeau et L. Robbiano . . . . .	58
<b>Publications de l'auteur</b>	<b>63</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>

# Introduction

Les travaux constituant ce mémoire concernent deux sujets différents. Le premier est en continuité avec certains de mes travaux de thèse et concerne l'analyse microlocale appliquée ; le second est issu d'une problématique que j'ai abordée plus récemment, le contrôle des équations aux dérivées partielles.

Dans une première partie je m'intéresse à des systèmes hyperboliques et en particulier à une forme de représentation de leurs solutions par produit infini d'opérateurs intégraux de Fourier (OIF). J'entends par là qu'une approximation de la solution est donnée par produit fini d'OIF et qu'un passage à la limite sur le nombre d'opérateurs utilisés donne la solution recherchée. Les outils employés pour arriver à de tels résultats sont ceux de l'analyse microlocale : calcul pseudodifférentiel, calcul des OIF, estimations pour les opérateurs pseudodifférentiels (inégalité de Gårding, théorème de Calderón-Vaillancourt). Les étapes des démonstrations sont aussi liées à des idées d'analyse numérique (stabilité, consistance). Les points d'orgue de cette première partie sont le théorème de convergence de cette représentation dans les espaces de Sobolev et celui de convergence du front d'onde de la solution, dans le cas scalaire, ainsi que l'extension de cette représentation au cas des systèmes symétrisables. Cette représentation de la solution est intéressante car chaque OIF dans le produit est donné de manière explicite et simple. De plus, la représentation obtenue est exacte et non modulo un opérateur régularisant. Enfin, ces résultats conduisent à des schémas numériques naturels. Moyennant certaines approximations ils peuvent être rendus efficaces. Une de mes motivations dans ces travaux est l'imagerie sismique et je montre comment ces résultats sont utilisés à des fins de reconstruction des interfaces du sous-sol à partir de données sismiques. Des exemples d'implémentations sont présentés. Le Chapitre 1 de cette première partie concerne les travaux publiés dans [8, 15, 10] ainsi que l'article soumis [20]. Dans le Chapitre 2, dans un but d'illustration, j'expose certains de mes travaux plus anciens d'imagerie, correspondant pour une partie à mes travaux de thèse [6, 12, 13, 5, 14, 11]. Bien que restant concis, je les reformule à la lumière des résultats obtenus au Chapitre 1. Je résume aussi à la fin de ce chapitre des travaux sur le prolongement de données sismiques [7, 16] que j'ai entrepris depuis ma thèse.

La deuxième partie de ce mémoire traite du contrôle des équations paraboliques et plus particulièrement des équations pour lesquelles le coefficient de diffusion dans la partie principale est discontinu. Dans ce cas, seuls des résultats partiels ont été obtenus à ce jour. En dimension un d'espace, il existe un résultat de contrôlabilité à zéro d'équations linéaires, ainsi que, en dimension quelconque, un résultat de contrôlabilité à zéro pour des équations semilinéaires avec une condition de compatibilité entre le coefficient discontinu et la zone de contrôle. En dimension un d'espace, je montre comment la contrôlabilité des équations semilinéaires peut être obtenue sans avoir à imposer cette condition de compatibilité. En dimension plus grande que deux, j'exhibe des cas où la contrôlabilité à zéro est réalisable sans avoir à respecter cette compatibilité. Les outils essentiels dans ces travaux sont les inégalités de Carleman pour les opérateurs paraboliques qui ont un vaste champ d'applications. En dimension un d'espace, une telle inégalité est obtenue pour un coefficient  $\mathcal{C}^1$  par morceaux avec un zone d'observation arbitraire grâce à un choix particulier de fonction poids. Le résultat de contrôlabilité des équations semilinéaires en découle alors. Pour des coefficients plus généraux, à variations bornées, je procède par un passage à la limite dans les inégalités de Carleman. Ce sont ces

inégalités en dimension un d'espace qui permettent alors de montrer la contrôlabilité d'une équation parabolique, en dimension plus grande que deux, où le coefficient est singulier dans une seule direction, avec une zone de contrôle arbitraire. Avec de telles inégalités de Carleman je m'intéresse aussi à un problème d'identification de coefficients pour les équations paraboliques. J'expose un tel travail de problème inverse à la fin de cette deuxième partie. Cette deuxième partie concerne les travaux publiés dans [1, 9, 2, 3].

Première partie

## **Analyse microlocale appliquée**



# Chapitre 1

## Représentation de solutions d'équations hyperboliques par produits d'opérateurs intégraux de Fourier

### 1.1 Introduction

Les équations hyperboliques modélisent les phénomènes ondulatoires et ceux de transport. L'analyse microlocale est un outil privilégié de leur étude. Le point de vue mathématique du front d'onde [Hör71], et sa propagation, permettent de comprendre les notions physiques contenues dans le principe de Huygens [Huy90]. Quand les coefficients sont suffisamment réguliers les solutions de telles équations peuvent être représentées en général<sup>1</sup> à partir d'intégrales oscillantes. Cette méthode remonte aux travaux de Lax [Lax57]. Cette approche fut concrétisée par la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (OIF) d'Hörmander [Hör71, DH72]. En pratique, lorsque l'on cherche à caractériser l'opérateur solution comme un OIF, la représentation est, en fait, obtenue modulo un opérateur régularisant. On obtient alors une paramétrix [DH72, GS94]. Nous allons développer ici une méthode différente de représentation de l'opérateur solution. L'opérateur sera exprimé comme un produit infini d'OIF, où chaque OIF sera une approximation infinitésimale de l'opérateur solution. Cette représentation ne se fera pas modulo un opérateur régularisant. Nous étudions tout d'abord les équations du premier ordre. Les équations d'ordres supérieurs quand elles peuvent être mises sous la forme de systèmes du premier ordre symétrisables seront étudiées ensuite.

Nous considérons le problème de Cauchy scalaire suivant

$$(1.1.1) \quad \partial_z u + a(z, x, D_x)u = 0, \quad 0 < z \leq Z,$$

$$(1.1.2) \quad u|_{z=0} = u_0,$$

où  $Z > 0$ ,  $u = u(z, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , et  $a(z, x, \xi)$  est continu en  $z$  à valeurs dans  $S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , avec la notation habituelle  $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$ . Des hypothèses supplémentaires seront faites sur le symbole  $a(z, x, \xi)$  (les espaces de symboles sont proprement définis dans la section 1.2). Nous désignons par  $U(z, 0)$  l'opérateur solution de (1.1.1)–(1.1.2) quand il est bien défini. Nous préciserons l'espace de fonctions dans lequel nous nous plaçons plus loin.

Nous nous intéressons ici à l'obtention d'une représentation de  $U(z, 0)$ , par passage à la limite dans un produit de composition d'opérateurs intégraux de Fourier qui, individuellement, réalisent une approximation de  $U(z', z)$  quand  $|z' - z|$  est petit. En particulier nous nous intéressons à l'ordre de convergence d'une telle

---

<sup>1</sup>Si nous nous plaçons par exemple dans le cas des équations strictement hyperboliques.



approximation ainsi qu'à la propagation des singularités et à sa convergence dans le passage à la limite. La représentation étudiée ici trouve ses origines dans des travaux de sismologues [Gaz78, Sto78, GS84, SFdLFK90] qui ont l'imagerie sismique comme objectif.

Le cas des coefficients constants permet de bien appréhender la méthode que nous proposons. Quand  $a(z, x, \xi)$  est indépendant de  $x$  et  $z$ , il est alors naturel de traiter un problème tel que (1.1.1)–(1.1.2) au moyen d'une transformée de Fourier. Alors nous avons

$$u(z, x') = \iint e^{i(x' - x, \xi) - za(\xi)} u_0(x) d\xi dx,$$

où  $d\xi := d\xi/(2\pi)^n$ . Pour que ceci soit bien défini pour tout  $u_0$ , pris par exemple dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , nous allons imposer à la partie réelle du symbole principal de  $a$  d'être positive. Quand le symbole  $a$  dépend à la fois de  $x$  et  $z$  on s'attend intuitivement à avoir

$$u(z, x') \approx u_1(z, x') := \iint e^{i(x' - x, \xi) - za(0, x', \xi)} u_0(x) d\xi dx$$

quand  $z$  est petit. On obtient alors une solution approximative du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) quand  $z \in [0, z^{(1)}]$  avec  $z^{(1)}$  petit. Souhaitant obtenir une approximation de la solution pour des valeurs plus importantes du paramètre d'évolution  $z$  nous résolvons le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_z u + a(z, x, D_x)u &= 0, \quad z^{(1)} < z \leq Z, \\ u(z, \cdot) |_{z=z^{(1)}} &= u_1(z^{(1)}, \cdot), \end{aligned}$$

dont nous obtenons une approximation de la solution par

$$u(z, x') \approx u_2(z, x') := \iint e^{i(x' - x, \xi) - (z - z^{(1)})a(z^{(1)}, x', \xi)} u_1(z^{(1)}, x) d\xi dx.$$

Cette procédure est alors répétée jusqu'à atteindre  $z = Z$ .

Nous désignons par  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  l'opérateur de noyau

$$(1.1.3) \quad G_{(z', z)}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi)} e^{-(z' - z)a(z, x', \xi)} d\xi.$$

La procédure itérative que nous venons de décrire nécessite la composition de tels opérateurs : si  $0 \leq z^{(1)} \leq \dots \leq z^{(k)} \leq Z$ , nous avons alors

$$u_{k+1}(z, x) = \mathcal{G}_{(z, z^{(k)})} \circ \mathcal{G}_{(z^{(k)}, z^{(k-1)})} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{(z^{(1)}, 0)}(u_0)(x),$$

quand  $z \geq z^{(k)}$ . Nous définissons alors l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$  pour une subdivision  $\mathfrak{B}$  de  $[0, Z]$ ,  $\mathfrak{B} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$ , avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$ ,

$$(1.1.4) \quad \mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z} := \begin{cases} \mathcal{G}_{(z, 0)} & \text{si } 0 \leq z \leq z^{(1)}, \\ \mathcal{G}_{(z, z^{(k)})} \prod_{i=k}^1 \mathcal{G}_{(z^{(i)}, z^{(i-1)})} & \text{si } z^{(k)} \leq z \leq z^{(k+1)}. \end{cases}$$

Nous posons  $\Delta_{\mathfrak{B}} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (z^{(i+1)} - z^{(i)})$ . Selon la procédure décrite plus haut, l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}(u_0)$  fournit une approximation de la solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2). Nous allons montrer dans la section 1.4 que l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  est un OIF. Il est souvent nommé propagateur « couche mince » (voir par exemple [6, 5, 8]). Ainsi l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$  est un produit d'OIF. Nous allons montrer sa convergence quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

**Remarque 1.1.1.** On remarquera qu'une procédure assez similaire peut être utilisée pour montrer l'existence d'un système d'évolution associé au problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) à travers la composition de solutions semi-groupes avec le paramètre  $z$  « gelé » dans l'opérateur  $a(z, x, D_x)$  [Kat70, Paz83]. On observera cependant que dans le cas présent le propagateur couche mince  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  n'est ni un semi-groupe ni un système d'évolution (l'analyse de la propagation des singularités en fournit le plus simple argument : voir section 1.6 ou [15]).

Plus qu'une représentation de l'opérateur solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2), l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  fournit un outil de calcul numérique des solutions. En particulier nous verrons que la régularité exigée par rapport au paramètre d'évolution  $z$  peut être même hölderienne ce qui peut être le cas dans de nombreuses applications. Nous utiliserons cet outil numérique au chapitre 2 avec des applications à la sismologie et à l'imagerie sismique.

Les compositions multiples d'OIF en vue d'approcher des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques furent d'abord proposées dans [KgTT78] et [KgT79]. Dans ces articles l'opérateur solution est cependant approché par un Ansatz différent. L'approximation est faite, in fine, modulo un opérateur régularisant. La technique utilisée est fondée sur le calcul et l'estimation de la fonction de phase et de l'amplitude de l'OIF obtenues par ces produits multiples, un résultat connu sous le nom du théorème de Kumano-go-Taniguchi. Cette technique a alors été appliquée à l'équation de Schrödinger [KKg81, Kg95]. Dans ces travaux le produit multiple est aussi interprété comme une intégrale de Feynman et la convergence est étudiée dans un sens faible. Dans [KKg81] un résultat de convergence dans  $L^2$  est aussi démontré. C'est ce type de résultat que nous recherchons ici pour les équations hyperboliques du premier ordre. Cependant nous ne faisons pas usage des techniques de « phases multiples » mais nous nous concentrons sur l'estimation de la régularité dans les espaces de Sobolev de chaque terme dans le produit multiple. Quoique l'opérateur que nous obtenons après produits multiples soit un OIF nous ne calculons ni sa phase ni son amplitude. Ceci est en accord avec les techniques numériques que nous présentons dans le chapitre 2. La régularité de  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  dans les espaces de Sobolev et l'utilisation d'une inégalité d'énergie a priori nous permettent de démontrer la convergence de  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  vers l'opérateur solution  $U(z, 0)$  du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2).

La section 1.3 introduit précisément le problème de Cauchy étudié ainsi que les hypothèses faites sur le symbole  $a(z, x, \xi)$ , en particulier sur la partie réelle,  $c_1$ , et la partie imaginaire,  $-b_1$ , de son symbole principal. Dans la section 1.4 nous étudions les propriétés du propagateur couche mince. En particulier nous prouvons l'estimation suivante de sa norme d'opérateur pour tout  $s \in \mathbb{R}$  :

$$\|\mathcal{G}_{(z', z)}\|_{(H^s, H^s)} \leq 1 + C(z' - z), \quad 0 \leq z \leq z' \leq Z,$$

quand  $z' - z$  est suffisamment petit.

La convergence dans les espaces de Sobolev de la représentation  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  est étudiée dans la section 1.5. Notre résultat principal est alors

$$\|\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z} - U(z, 0)\|_{(H^{s+1}, H^s)} \leq C\Delta_{\mathbb{F}}^\alpha,$$

quand  $a(z, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{C}^{0, \alpha}$  en  $z$ ,  $\alpha > 0$  et nous rappelons que  $\Delta_{\mathbb{F}} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (z^{(i+1)} - z^{(i)})$ . On observera que la méthode proposée ici correspond à une approximation d'ordre un. L'ordre de convergence obtenu dans le cas Lipschitz ( $\alpha = 1$ ) semble donc optimal.

Ce résultat de convergence est à considérer sous deux points de vue. Le point de vue de l'analyse numérique où il donne un résultat de convergence pour le schéma numérique associé à l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  et justifie le développement de beaucoup de méthodes utilisées en pratique dont la méthode « Generalized Screens » décrite dans le chapitre 2. Le point de vue d'un théorème de représentation *exacte* des solutions de (1.1.1)–(1.1.2) dans le cas où les solutions microlocales, i.e. modulo un opérateur régularisant, ne sont pas adéquates. On remarquera que la régularité hölderienne par rapport à la variables  $z$  ne permet pas la construction de la paramétrix classique [GS94, Smi98].

Dans la section 1.6 nous étudions les aspects microlocaux de la représentation  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p},z}$ , en particulier la propagation des singularités ainsi que la convergence du front d'onde de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p},z}(u_0)$  vers celui de la solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2). Là aussi nous obtenons un ordre de convergence optimal en accord avec celui obtenu pour la convergence en norme d'opérateur. La convergence du front d'onde de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p},z}(u_0)$  est cruciale pour des applications telles que l'imagerie sismique comme nous le verrons au chapitre 2. Cette section correspond à un travail en collaboration avec Günther Hörmann.

Dans la section 1.7 nous montrons comment les résultats obtenus dans le cas scalaire peuvent être étendus aux cas des systèmes symétriques et symétrisables moyennant une hypothèse de régularité géométrique. Cette généralisation est importante car de nombreux systèmes aux dérivées partielles issus de la modélisation de phénomènes physiques entrent dans ces catégories.

## 1.2 Notations

Nous utiliserons la lettre  $C$  pour désigner une constante générique. Sa valeur peut donc changer d'une ligne à l'autre. Lorsque nous écrivons qu'une fonction est bornée uniformément en  $z$  et/ou  $\Delta$ , ceci implique sans que nous le précisions que  $z$  est pris dans l'intervalle  $[0, Z]$  et que  $\Delta$  est dans un intervalle du type  $[0, \Delta_{\max}]$ , avec  $\Delta_{\max}$  suffisamment petit. Nous écrirons souvent  $X, X', Y, \dots$  à la place de  $\mathbb{R}^n$  en accord avec les noms des variables utilisées, par exemple,  $x, x', y, \dots$ .

Nous désignons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^n$ . Nous désignons par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire hermitien de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et par  $\|\cdot\|_{L^2}$  la norme associée. Pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ou  $H^s$  est l'espace de Sobolev classique et la norme associée s'écrit  $\|\cdot\|_{H^s}$ . Enfin lorsqu'un opérateur  $F$  agit continûment de  $H^s$  dans  $H^{s'}$  nous notons  $\|F\|_{(H^s, H^{s'})}$  sa norme d'opérateur.

Ici nous utiliserons les espaces de symboles globaux ; une fonction  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$  est dans  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , si pour tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  il existe une constante  $C_{\alpha\beta} > 0$  telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^p,$$

où  $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ . Les meilleurs constantes possibles, i.e.,

$$p_{\alpha\beta}(a) := \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p} \langle \xi \rangle^{-m+\rho|\beta|-\delta|\alpha|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)|,$$

définissent des semi-normes qui donnent une structure d'espace de Fréchet à  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ . De manière usuelle nous écrivons  $S_\rho^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$  dans le cas  $\rho = 1 - \delta$ ,  $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$  et  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$  dans le cas  $\rho = 1$ ,  $\delta = 0$ . De plus, nous écrivons  $S_\rho^m$  (resp.  $S^m$ ) à la place de  $S_\rho^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  (resp.  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ).

De manière standard nous utiliserons la notation  $\#$  pour le produit de composition des symboles des opérateurs pseudodifférentiels (O $\psi$ D) et le plus souvent nous utiliserons la représentation par intégrale oscillante du symbole produit. Si nous nous donnons une amplitude  $p(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ ,  $\rho \geq \delta$ , nous utiliserons la notation  $\sigma\{p\}(x, \xi)$  pour désigner le symbole de l'O $\psi$ D d'amplitude  $p$ . Pour tout  $p \in S_{\rho, \delta}^m$  nous écrivons  $p^*$  le symbole de l'opérateur adjoint.

Pour  $r \in \mathbb{R}$  nous désignons par  $E^{(r)}$  l'O $\psi$ D de symbole  $\langle \xi \rangle^r$ . L'opérateur  $E^{(r)}$  est un isomorphisme de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{s-r}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $E^{(-r)}$  est son inverse.

Pour les O $\psi$ D nous indiquons les références suivantes [Trè80a, Shu01, SR91, AG91, GS94, Cor95, Mar02, Tay81, Kg81, Hör85a] et les références suivantes pour les OIF [Hör71, DH72, Dui96, Trè80b, Kg81, Hör85b]. Nous ne suivons pas l'approche de Melin et Sjöstrand [MS74, MS76] pour le traitement des OIFs à phase complexe mais celle d'Hörmander donnée dans [Hör85b, chapitre 25].

### 1.3 Le problème de Cauchy

Nous considérons le problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) avec la condition initiale  $u_0$  dans  $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$  pour un certain  $s$  réel. Nous faisons l'hypothèse suivante sur le symbole  $a(z, x, \xi)$ .

**Hypothèse 1.3.1.** Soient  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $a \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0, Z], S^1)$  avec  $a(z, x, \xi) = -i b(z, x, \xi) + c(z, x, \xi)$ , de parties principales  $b_1$  et  $c_1$  réelles et homogènes de degré un en  $\xi$  pour  $|\xi|$  suffisamment grand, disons  $|\xi| \geq 1$ . De plus  $c_1$  est positif.

La régularité hölderienne d'ordre  $\alpha$  signifie ici que

$$a(z', x, \xi) - a(z, x, \xi) = (z' - z)^\alpha \tilde{a}(z', z, x, \xi), \quad 0 \leq z \leq z' \leq Z,$$

avec  $\tilde{a}(z', z, x, \xi)$  borné dans  $S^1$  uniformément en  $z$  et  $z'$ .

La régularité hölderienne ne sera utilisée que dans la section 1.5. Les résultats de la section 1.4, eux, n'utilisent que la bornitude du symbole  $a(z, x, \xi)$  par rapport à  $z$ .

L'hypothèse 1.3.1 assure que les hypothèses (i)–(iii) du théorème 23.1.2 de [Hör85a] sont satisfaites. Alors, il existe une unique solution dans  $\mathcal{C}^0([0, Z], H^{s+1}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0, Z], H^s(\mathbb{R}^n))$  au problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2). De plus, pour toute fonction  $u$  dans  $\mathcal{C}^1([0, Z], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^0([0, Z], H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ , nous avons l'inégalité d'énergie a priori [Hör85a, lemme 23.1.1]

$$(1.3.1) \quad \sup_{z \in [0, Z]} e^{-\lambda z} \|u(z, \cdot)\|_{H^s} \leq \|u(0, \cdot)\|_{H^s} + 2 \int_0^Z e^{-\lambda z} \|\partial_z u + a_z(x, D_x)u\|_{H^s} dz,$$

avec  $\lambda$  suffisamment grand ( $\lambda$  dépend uniquement de  $s$ ). La famille d'opérateurs  $(a_z)_{z \in [0, Z]}$  génère un système d'évolution fortement continu. Nous désignons par  $U(z', z)$  ce système d'évolution :

$$U(z'', z') \circ U(z', z) = U(z'', z), \quad 0 \leq z \leq z' \leq z'' \leq Z.$$

La partie réelle de  $a_1$  correspond à un amortissement. Dans la région de  $T^*(\mathbb{R}^n)$  où  $c_1 = \operatorname{Re}(a_1) > 0$ , le problème hyperbolique est dégénéré. Cela n'affecte en rien l'existence et l'unicité d'une solution [Hör85a, section 23.1]. En revanche les singularités disparaissent dans cette région (voir par exemple [Trè80b]). Nous reverrons cet effet dans la section 1.6. Ce phénomène sera aussi exploité dans le chapitre 2.

### 1.4 Propriétés du propagateur couche mince

Soient  $z', z \in [0, Z]$  avec  $z' \geq z$  et soit  $\Delta := z' - z$ . Nous définissons  $\phi_{(z', z)} \in \mathcal{C}^\infty(X' \times X \times \mathbb{R}^n)$  par

$$(1.4.1) \quad \phi_{(z', z)}(x', x, \xi) := \langle x' - x, \xi \rangle + i\Delta a_1(z, x', \xi) = \langle x' - x, \xi \rangle + \Delta b_1(z, x', \xi) + i\Delta c_1(z, x', \xi).$$

Nous posons  $g_{(z', z)}(x, \xi) := e^{-\Delta a_0(z, x, \xi)}$ , qui est borné dans  $S^0$  uniformément en  $z$  et  $\Delta$  par le lemme 18.1.10 dans [Hör85a].

Nous suivons la terminologie des OIF à phase complexe exposée dans [Hör85b, section 25.4–5].

**Lemme 1.4.1** ([8]).  $\phi_{(z', z)}$  est une fonction de phase complexe, globale, non dégénérée de type positif (en chaque point  $(x'_0, x_0, \xi_0)$  où  $\partial_\xi \phi_{(z', z)} = 0$ ) quand  $\Delta$  est suffisamment petit.

C'est l'aspect global de la phase qui nécessite de prendre  $\Delta$  suffisamment petit. Pour cela nous montrons qu'il existe un idéal Lagrangien de fonctions,  $(J_{(z', z)})'$ , qui est défini au voisinage de tout point de  $(J_{(z', z)}\mathbb{R})'$  par la fonction de phase  $\phi_{(z', z)}$ . Le prime correspond à l'involution habituelle, « twist » en anglais, qui pour

le sous-ensemble  $J_{(z',z)\mathbb{R}}$  de  $T^*(X') \times T^*(X)$  se traduit par le changement de signe de la seconde variable cotangente (voir [Hör85b, section 25.5]). Les natures de  $J_{(z',z)}$  et  $J_{(z',z)\mathbb{R}}$  seront étudiées dans la section 1.6 afin d'appréhender la propagation des singularités.

Définissant le noyau  $G_{(z',z)}(x', x)$  comme dans (1.1.3) et  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  l'opérateur associé nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition 1.4.2.** *Il existe  $\Delta_0 > 0$  tel que si  $0 \leq \Delta = z' - z \leq \Delta_0$  alors l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  est un opérateur intégral de Fourier global à phase complexe et  $G_{(z',z)} \in I^0(X' \times X, (J_{(z',z)})')$ .*

En général (voir [Hör85b]) le noyau est défini comme une section du fibré des densités d'ordre  $\frac{1}{2}$  sur  $X' \times X$  mais il est trivial ici. Nous ne le faisons donc pas apparaître.

Nous pouvons montrer que pour  $\Delta$  suffisamment petit alors  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  est continu de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ , de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$ , et de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . La composition de propagateurs couche mince peut donc se faire naturellement. La bornitude de  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  sur les espaces de Sobolev  $H^s$ , n'est pas suffisante pour obtenir la stabilité du produit multiple d'OIF que nous réalisons pour définir l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p},z}$ . En fait nous prouvons le résultat plus fin suivant.

**Théorème 1.4.3** ([8]). *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe  $C > 0$  et  $\Delta_1 > 0$  tel que si  $0 \leq z \leq z' \leq Z$ , et si  $0 \leq \Delta := z' - z \leq \Delta_1$  alors*

$$\|\mathcal{G}_{(z',z)}\|_{(H^s, H^s)} \leq 1 + C\Delta.$$

Cette estimation de la norme d'opérateur est différente de celles que l'on rencontre habituellement dans la littérature. Souvent on se contente d'obtenir la bornitude de tels opérateurs et cette borne est donnée par une semi-norme de l'amplitude de l'OIF multipliée par une constante universelle que l'on ne sait pas estimer. Ce résultat, ainsi que la forme du noyau (1.1.3), semblent montrer que l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  est proche de l'identité lorsque  $\Delta$  devient petit, ce qui semble assez intuitif lorsque l'on observe la forme de la phase de l'opérateur ainsi que son amplitude. Cependant, si nous écrivons la différence entre  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  et l'identité, les estimations que nous obtenons font apparaître la perte d'une dérivée, soit une descente d'un cran dans l'échelle des espaces de Sobolev. Une telle estimation nous est d'aucun intérêt pour ce que nous souhaitons faire ici puisque nous composons les opérateurs  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  de multiples fois dans la définition de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p},z}$  et que le nombre de termes dans le produit tend vers l'infini.

Afin de démontrer le résultat du théorème 1.4.3 nous devons introduire quelques définitions et montrer des résultats préliminaires.

**Définition 1.4.4.** *Soit  $L \geq 2$ . Un symbole  $q(z, \dots)$  borné dans  $S^1(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r)$  uniformément en  $z$ , satisfait la propriété  $(P_L)$  s'il est positif et satisfait*

$$(P_L) \quad |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta q(z, y, \eta)| \leq C(1 + |\eta|)^{-|\beta| + (|\alpha| + |\beta|)/L} (1 + q(z, y, \eta))^{1 - (|\alpha| + |\beta|)/L}, \quad z \in [0, Z], \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad \eta \in \mathbb{R}^r.$$

Nous posons alors  $\rho = 1 - 1/L$  et  $\delta = 1/L$ .

**Définition 1.4.5.** *Soient  $L \geq 2$  et  $\rho_\Delta(z, y, \eta)$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r)$  qui dépend des paramètres  $\Delta \geq 0$  et  $z \in [0, Z]$ . Nous disons que  $\rho_\Delta$  satisfait la propriété  $(Q_L)$  si*

$$(Q_L) \quad \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\rho_\Delta - \rho_0)(z, y, \eta) = \Delta^{m + \delta(|\alpha| + |\beta|)} \rho_\Delta^{m\alpha\beta}(z, y, \eta), \quad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \leq L, \quad 0 \leq m \leq 1 - \delta(|\alpha| + |\beta|),$$

où  $\rho_\Delta^{m\alpha\beta}(z, y, \eta)$  est borné dans  $S_\rho^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r)$  uniformément en  $\Delta$  et  $z$ . Alors  $\rho_\Delta(z, y, \eta) - \rho_0(z, y, \eta)$  est lui-même borné dans  $S_\rho^0(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r)$  uniformément en  $\Delta$  et  $z$ .

Nous avons le lemme suivant [8].

**Lemme 1.4.6.** Soit  $q(z, y, \eta)$  borné dans  $S^1(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r)$  uniformément en  $z$ . Si  $q \geq 0$  alors  $q$  satisfait la propriété  $(P_L)$  quand  $L = 2$ .

La démonstration de ce résultat repose sur l'inégalité de Landau : soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  avec  $f \geq 0$  et  $f''$  bornée, alors  $|f'(t)| \leq 2(f(t))^{\frac{1}{2}} (\sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|)^{\frac{1}{2}}$  (voir [Dui96, page 40] et [Hör90, lemme 7.7.2]).

Des exemples de symboles qui satisfont la propriété  $(P_L)$  pour  $L > 2$  sont donnés dans [Sto05]. Dans la suite nous supposons que le symbole  $c_1$  satisfait la propriété  $(P_L)$  pour un certain  $L \geq 2$ . Nous savons bien sûr que c'est toujours vrai dans le cas  $L = 2$  par le lemme 1.4.6 mais des choix particuliers de symbole  $c_1$  peuvent être faits en pratique. Si nous posons

$$p_\Delta(z, x, \xi) := e^{-\Delta c_1(z, x, \xi)},$$

nous pouvons montrer que  $p_\Delta(z, x, \xi)$  est borné dans  $S_\rho^0$  uniformément en  $z$  et régulier par rapport à  $\Delta$  quand  $\Delta \geq \Delta_{\min} > 0$ . Par contre, cette régularité par rapport à  $\Delta$  cesse d'être valable dans un voisinage de 0 :

$$\partial_\Delta p_\Delta|_{\Delta=0} = -c_1 \notin S_\rho^0(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r).$$

Il nous faudra cependant contrôler le comportement de  $p_\Delta$  quand  $\Delta$  devient petit. Pour cela nous avons recours à la propriété  $(Q_L)$  introduite plus haut.

**Lemme 1.4.7.** Le symbole  $p_\Delta$  satisfait la propriété  $(Q_L)$  pour  $\Delta \in [0, \Delta_{\max}]$  pour tout  $\Delta_{\max} > 0$ . Comme  $p_0 = 1$ ,  $p_\Delta$  est lui-même borné dans  $S_\rho^0$  uniformément en  $\Delta$  et  $z$ .

Ce résultat nous permettra à certains moments dans la suite de considérer alternativement le propagateur couche mince,  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  comme un OIF à phase complexe et à amplitude dans  $S^0$ , ou bien comme un OIF à phase réelle et à amplitude dans  $S_\rho^0$ .

La propriété  $(Q_L)$  de  $p_\Delta$  est utilisée pour démontrer le théorème 1.4.3 : à travers des arguments de composition de  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  avec son adjoint cette propriété permet de factoriser des coefficients  $\Delta$  dans les symboles obtenus. Nous utilisons par exemple cette conséquence suivante de la propriété  $(Q_L)$ .

**Lemme 1.4.8.** Soit  $q_\Delta(z, x, y, \xi)$  une amplitude dans  $S_\rho^0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$  qui dépend des paramètres  $\Delta \geq 0$  et  $z \in [0, Z]$  et satisfait la propriété  $(Q_L)$  pour  $1 \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2$  et telle que  $q_0(z, \cdot)$  est indépendant de  $(x, y, \xi)$ . Si  $\mu(x, \xi) \in S^r$  pour un  $r \in \mathbb{R}$ , alors nous avons

$$\sigma\{q_\Delta \mu\}(z, x, \xi) - q_\Delta(z, x, x, \xi) \mu(x, \xi) = \Delta^{m+2\delta} \lambda_\Delta^m(z, x, \xi), \quad 0 \leq m \leq \rho - \delta,$$

où  $\lambda_\Delta^m(z, x, \xi)$  est borné dans  $S_\rho^{m+s-(\rho-\delta)}$  uniformément en  $\Delta$  et  $z$ .

Le résultat suivant est au centre de la démonstration du théorème 1.4.3.

**Théorème 1.4.9.** Il existe  $C \geq 0$  et  $\Delta_2$  tels que l'opérateur pseudodifférentiel  $p_\Delta(z, x, D_x)$  satisfait

$$\|p_\Delta(z, x, D_x)\|_{(L^2, L^2)} \leq 1 + C\Delta,$$

pour tout  $z', z \in [0, Z]$  tels que  $0 \leq \Delta = z' - z \leq \Delta_2$ .

*Démonstration.* L'OpD  $p_\Delta(z, x, D_x) \circ p_\Delta(z, x, D_x)^*$  admet comme amplitude  $\rho_\Delta(z, x, y, \xi) = e^{-\Delta(c_1(z, x, \xi) + c_1(z, y, \xi))}$ , qui satisfait la propriété  $(Q_L)$ . Nous avons  $\sigma\{\rho_\Delta(z, x, y, \xi)\} - e^{-2\Delta c_1(z, x, \xi)} = \Delta \lambda_\Delta(z, x, \xi)$ , avec  $\lambda_\Delta(z, x, \xi)$  borné dans  $S_\rho^0$  uniformément en  $z$  et  $\Delta$  par le lemme 1.4.8 (en prenant  $m = \rho - \delta$ ). Par le théorème de Calderón-Vaillancourt (voir [CV72], [Kg81, chapitre 7, sections 1 et 2], [Tay81, section XIII-2] ou [Hwa87]), nous obtenons l'estimation souhaitée pour  $(p_\Delta(z, x, D_x) \circ p_\Delta(z, x, D_x)^* u, u)_{(L^2, L^2)}$  si nous prouvons que

$$\operatorname{Re}(e^{-2\Delta c_1(z, x, D_x)} u, u)_{(L^2, L^2)} \leq (1 + C\Delta) \|u\|_{L^2}^2, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Nous posons  $q_\Delta(z, x, \xi) = (1 - e^{-2\Delta c_1(z, x, \xi)})/\Delta$  pour  $\Delta > 0$ . Grâce à la propriété  $(Q_L)$  nous constatons que le symbole  $q_\Delta(z, x, \xi)$  se comporte pour ses dérivées partielles d'ordre zéro et du premier ordre comme un élément de  $S^1$  mais, pour les dérivées partielles d'ordre supérieur, comme un élément de  $S_\rho^{\rho-\delta}$ . L'inégalité de Gårding précisée telle qu'énoncée dans [Bon99, exemple 2.4] donne  $\text{Re}(q_\Delta(z, x, D_x)u, u)_{(L^2, L^2)} \geq -C\|u\|_{L^2}^2$  pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ce qui donne

$$\|u\|_{L^2}^2 - \text{Re}(e^{-2\Delta c_1(z, x, D_x)}u, u)_{(L^2, L^2)} \geq -C\Delta\|u\|_{L^2}^2,$$

et conclut la démonstration.  $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant donner les étapes de la démonstration du théorème 1.4.3 (pour une démonstration complète voir [8]).

*Étapes de la démonstration du théorème 1.4.3.* Nous utilisons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^s & \xrightarrow{\mathcal{G}_{(z', z)}} & H^s \\ E^{(s)} \downarrow & & \downarrow E^{(s)} \\ L^2 & \xrightarrow{\mathcal{H}_{(z', z)}} & L^2 \end{array}$$

et montrons que  $\|\mathcal{H}_{(z', z)}\|_{(L^2, L^2)} \leq 1 + C\Delta$ . Le noyau de  $\mathcal{A}_{(z', z)} := \mathcal{G}_{(z', z)} \circ E^{(-s)}$  est donné par

$$\mathcal{A}_{(z', z)}(x', x) = \int e^{i\phi_{(z', z)}(x', x, \xi)} g_{(z', z)}(x', \xi) \langle \xi \rangle^{-s} d\xi.$$

Le noyau  $D_{(z', z)}$  de l'opérateur  $\mathcal{D}_{(z', z)} := \mathcal{A}_{(z', z)}^* \circ \mathcal{A}_{(z', z)}$  est quant à lui donné par

$$D_{(z', z)}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi) + i\Delta(b_1(z, x', \xi) - b_1(z, x, \xi))} d_{(z', z)}(x', x, \xi) d\xi$$

où  $d_{(z', z)}(x', x, \xi) = e^{-\Delta(c_1(z, x', \xi) + c_1(z, x, \xi))} g_{(z', z)}(x', \xi) \overline{g_{(z', z)}(x, \xi)} \langle \xi \rangle^{-2s}$ . Nous écrivons  $b_1(z, x', \xi) - b_1(z, x, \xi) = \langle x' - x, h(z, x', x, \xi) \rangle$  où la fonction  $h$  est régulière, homogène de degré un en  $\xi$ ,  $|\xi| \geq 1$ , et continue en  $z$  à valeurs dans  $S^1(X' \times X \times \mathbb{R}^n)$  par l'hypothèse 1.3.1 et la formule de Taylor à l'ordre un. Nous obtenons que le changement de variable  $\xi \rightarrow \xi + \Delta h(z, x', x, \xi) = H_{(\Delta, z, x', x)}(\xi)$  est un difféomorphisme global quand  $\Delta$  est suffisamment petit (uniformément en  $z \in [0, Z]$ ). Nous notons  $\tilde{\xi}(\Delta, z, x', x, \xi) = H_{(\Delta, z, x', x)}^{-1}(\xi)$ . Nous avons ainsi

$$D_{(z', z)}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi)} d_{(z', z)}(x', x, \tilde{\xi}(\Delta, z, x', x, \xi)) \mathcal{J}_\Delta(z, x', x, \xi) d\xi$$

où  $\mathcal{J}_\Delta(z, x', x, \xi)$  est le jacobien, qui est borné dans  $S^0(X' \times X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z$ .

À partir de la propriété  $(Q_L)$ , en utilisant des techniques proches de celles du lemme 1.4.8 afin de traiter les termes de la forme  $e^{-\Delta(c_1(z, x', \xi) + c_1(z, x, \xi))}$ , ainsi que leurs compositions avec différents symboles, nous parvenons à montrer que l'opérateur  $\mathcal{F}_{(z', z)} := E^{(s)} \circ \mathcal{D}_{(z', z)} \circ E^{(s)} = \mathcal{H}_{(z', z)} \circ \mathcal{H}_{(z', z)}^*$  s'écrit de la forme

$$\mathcal{F}_{(z', z)} = \mathcal{F}_{(z', z)}^a + \Delta \mathcal{F}_{(z', z)}^1,$$

où  $\mathcal{F}_{(z', z)}^a$  est l'OψD de symbole  $e^{-2\Delta c_1(z, x, \xi)}$  et  $\mathcal{F}_{(z', z)}^1$  est un OψD de symbole borné dans  $S_\rho^0$  uniformément en  $z$  et  $\Delta$ . Le théorème de Calderón-Vaillancourt et le théorème 1.4.9 donnent alors

$$\|\mathcal{F}_{(z', z)}\|_{(L^2, L^2)} \leq 1 + C\Delta,$$

quand  $\Delta$  est suffisamment petit.  $\blacksquare$

### 1.5 Résultats de stabilité et de convergence dans les espaces de Sobolev

Du théorème 1.4.3 nous démontrons la proposition suivante qui traduit la stabilité de l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  défini dans (1.1.4) quand  $|\mathfrak{P}|$  devient grand.

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe  $K > 0$  tel que pour toute subdivision  $\mathfrak{P} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$  de  $[0, Z]$  avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$  nous avons*

$$\forall z \in [0, Z], \quad \|\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}\|_{(H^s, H^s)} \leq K,$$

si  $\Delta_{\mathfrak{P}}$  est suffisamment petit.

*Démonstration.* Du théorème 1.4.3 il existe  $M > 0$  tel que si  $\Delta = z' - z$  est suffisamment petit alors  $\|\mathcal{G}_{(z',z)}\|_{(H^s, H^s)} \leq 1 + M\Delta$ . Nous obtenons alors  $\|\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}\|_{(H^s, H^s)} \leq \prod_{i=0}^{N-1} (1 + M(z^{(i+1)} - z^{(i)}))$ . Nous posons  $U_{\mathfrak{P}} = \ln \left( \prod_{i=0}^{N-1} (1 + M(z^{(i+1)} - z^{(i)})) \right)$ . Alors  $U_{\mathfrak{P}} \leq \sum_{i=0}^{N-1} M(z^{(i+1)} - z^{(i)}) = MZ$ . Nous obtenons donc  $\|\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}\|_{(H^s, H^s)} \leq e^{MZ}$ . ■

Nous allons prouver la convergence de l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  vers l'opérateur solution  $U(z, 0)$  du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) en analysant l'erreur infinitésimale commise en remplaçant  $U(z', z)$  par  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  à travers le résultat suivant qui correspond à l'estimation d'une erreur de consistance.

**Théorème 1.5.2** ([10]). *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe  $\Delta_3 > 0$  et  $C \geq 0$  tel que pour  $z' - z = \Delta$ ,  $\Delta \in [0, \Delta_3]$ ,*

$$\|(\partial_{z'} + a_{z'}(x, D_x)) \circ \mathcal{G}_{(z',z)}\|_{(H^{s+1}, H^s)} \leq C\Delta^\alpha.$$

*Démonstration.* Un développement de Taylor du symbole d'ordre zéro,  $g_{(z',z)}(x, \xi)$ , permet de se ramener au cas où  $g_{(z',z)}(x, \xi) = 1$  par le théorème de Calderón-Vaillancourt. Nous définissons  $\mathcal{A}_{(z',z)} := \partial_{z'} \circ \mathcal{G}_{(z',z)}$  et  $\mathcal{B}_{(z',z)} := a_z(x, D) \circ \mathcal{G}_{(z',z)}$ . Nous avons

$$\mathcal{A}_{(z',z)}u(x') = - \iint e^{i(x' - x, \xi) + i\Delta b_1(z, x', \xi)} a_z(x', \xi) p_\Delta(z, x', \xi) u(x) dx d\xi.$$

Considérant ici  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  comme un OIF à phase réelle et à amplitude dans  $S_\rho^0$  nous avons

$$\mathcal{B}_{(z',z)}u(x') = \iint e^{i(x' - x, \xi) + i\Delta b_1(z, x', \xi)} \sigma_\Delta(z, x', \xi) u(x) dx d\xi$$

par le théorème 2.2 dans [Kg81, section 10.2], où  $\sigma_\Delta(z, x, \xi)$  est un symbole de  $S_\rho^1$  donné par l'intégrale oscillante suivante

$$\sigma_\Delta(z, x, \xi) = \iint e^{-i(x-y, \xi - \eta) + i\Delta(b_1(z, y, \xi) - b_1(z, x, \xi))} p_\Delta(z, y, \xi) a_z(x, \eta) d\eta dy.$$

L'hypothèse de régularité hölderienne faite sur le symbole  $a(z, x, \xi)$  donne

$$\|(a_z(x, D_x) - a_{z'}(x, D_x)) \circ \mathcal{G}_{(z',z)}\|_{(H^{s+1}, H^s)} \leq C\Delta^\alpha,$$

et nous voyons que le résultat se ramène à montrer que

$$\|\mathcal{A}_{(z',z)} + \mathcal{B}_{(z',z)}\|_{(H^{s+1}, H^s)} = \|(\partial_{z'} + a_z(x, D_x)) \circ \mathcal{G}_{(z',z)}\|_{(H^{s+1}, H^s)} \leq C\Delta.$$

Nous considérons le symbole  $\kappa_\Delta(z, x, \xi) := \sigma_\Delta(z, x, \xi) - a_z(x, \xi) p_\Delta(z, x, \xi) = \kappa_{\Delta,1}(z, x, \xi) + \kappa_{\Delta,2}(z, x, \xi)$  avec

$$\kappa_{\Delta,1}(z, x, \xi) := \sigma_\Delta(z, x, \xi) - (a_z \# p_\Delta(z, \cdot))(x, \xi), \quad \kappa_{\Delta,2}(z, x, \xi) := (a_z \# p_\Delta(z, \cdot))(x, \xi) - a_z(x, \xi) p_\Delta(z, x, \xi).$$



Le produit de composition des O $\psi$ D donne

$$\kappa_{\Delta,1}(z, x, \xi) = \iint e^{-i\langle x-y, \xi-\eta \rangle} \left( e^{i\Delta v(z,x,y,\xi)} - 1 \right) a_z(x, \eta) p_{\Delta}(z, y, \xi) d\eta dy,$$

où  $v(z, x, y, \xi) = b_1(z, y, \xi) - b_1(z, x, \xi) = \langle y - x, h(z, x, y, \xi) \rangle$ . Il suffit alors d'une formule de Taylor à l'ordre un et d'une intégration par parties pour obtenir

$$\kappa_{\Delta,1}(z, x, \xi) = \Delta \int_0^1 \iint e^{-i\langle x-y, \xi-\eta \rangle} e^{is\Delta(b_1(z,y,\xi)-b_1(z,x,\xi))} \langle h(z, t, y, \xi), \nabla_{\eta} a_z(x, \eta) \rangle p_{\Delta}(z, y, \xi) d\eta dy ds|_{t=x}.$$

La forme de cette formule est celle d'une amplitude d'un OIF provenant de la composition d'un O $\psi$ D et d'un OIF [Kg81, théorème 2.2, section 10.2] modulo une intégration par rapport au paramètre  $s$ . Nous obtenons donc que  $\kappa_{\Delta,1}(z, x, \xi) = \Delta \tilde{\kappa}_{\Delta,1}(z, x, \xi)$  avec  $\tilde{\kappa}_{\Delta,1}(z, x, \xi)$  borné dans  $S_p^1$  uniformément en  $z$  et  $\Delta$ .

Quant au second terme  $\kappa_{\Delta,2}(z, x, \xi)$ , nous le traitons avec une méthode similaire à celle utilisée dans le lemme 1.4.8, i.e. en se fondant sur la propriété ( $Q_L$ ) satisfaite par  $p_{\Delta}(z, y, \xi)$  pour factoriser  $\Delta$ . Nous obtenons ainsi  $\kappa_{\Delta,2}(z, x, \xi) = \Delta \tilde{\kappa}_{\Delta,2}(z, x, \xi)$  avec  $\tilde{\kappa}_{\Delta,2}(z, x, \xi)$  borné dans  $S_p^1$  uniformément en  $z$  et  $\Delta$ . ■

La régularité Lipschitz en  $z$  de  $\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}$  [8, proposition 3.5] permet d'appliquer l'inégalité d'énergie 1.3.1 à la différence  $U(z, 0)(u_0) - \mathcal{W}_{\mathbb{F},z}(u_0)$  :

$$(1.5.1) \quad \sup_{z \in [0, Z]} e^{-\lambda z} \|U(z, 0)(u_0) - \mathcal{W}_{\mathbb{F},z}(u_0)\|_{H^s} \leq 2 \int_0^z e^{-\lambda z} \|(\partial_z + a_z(x, D_x))\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}(u_0)\|_{H^s} dz.$$

En utilisant à la fois le résultat de stabilité de la proposition 1.5.1 et l'estimation de l'erreur infinitésimale donnée par le théorème 1.5.2 nous obtenons le résultat de convergence suivant.

**Théorème 1.5.3** ([8, 10]). *Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq r < 1$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}$  converge vers l'opérateur solution  $U(z, 0)$  du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) dans  $L(H^{s+1}(\mathbb{R}^n), H^{s+r}(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $z$  quand  $\Delta_{\mathbb{F}}$  tend vers 0 avec un ordre de convergence d'ordre  $\alpha(1-r)$  :*

$$\|\mathcal{W}_{\mathbb{F},z} - U(z, 0)\|_{(H^{s+1}, H^{s+r})} \leq C \Delta_{\mathbb{F}}^{\alpha(1-r)}, \quad z \in [0, Z].$$

De plus, l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}$  converge fortement vers  $U(z, 0)$  dans  $L(H^{s+1}(\mathbb{R}^n), H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $z \in [0, Z]$ .

Nous rappelons que  $\alpha$  correspond à la régularité hôlderienne du symbole  $a(z, x, \xi)$  que nous avons supposée dans l'hypothèse 1.3.1. Les estimations pour  $0 < r < 1$  s'obtiennent par interpolation entre les espaces de Sobolev. La convergence forte s'obtient en approchant la condition initiale  $u_0$  par un élément plus régulier, disons dans  $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ .

On notera une fois de plus que le résultat de convergence est exact et non modulo un opérateur de régularisation comme dans le cas de la construction d'une paramétrix classique lorsque le symbole  $a(z, x, \xi)$  est suffisamment régulier en  $z$ .

Une caractéristique importante de l'approximation proposée est de donner des méthodes numériques (que l'on peut rendre efficace au moyen d'approximations supplémentaires – voir chapitre 2) mais aussi de propager les singularités de la condition initiale  $u_0$  de telle sorte que le front d'onde de  $\mathcal{W}_{\mathbb{F},z}(u_0)$  converge vers celui de  $U(z, 0)(u_0)$  lorsque  $\Delta_{\mathbb{F}}$  tend vers zéro. C'est le sujet que nous abordons maintenant.

## 1.6 Propagation des singularités, convergence du front d'onde

### 1.6.1 Propriétés géométriques de $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$

La théorie des OIF offre un cadre naturel pour l'étude de la propagation des singularités par l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$ . Nous avons déjà vu que pour  $z' - z$  suffisamment petit,  $z \leq z'$ , le propagateur couche mince est un OIF global à phase complexe.

Nous avons vu plus haut que la composition des propagateurs couche mince peut se faire naturellement puisqu'ils sont continus de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$ , resp.  $H^s$  dans  $H^s$ ). Nous allons maintenant prouver que l'opérateur résultant de telles compositions est encore un OIF à phase complexe.

Nous rappelons qu'une fonction de phase complexe définit localement un idéal canonique (ou un idéal lagrangien modulo le « twist » habituel) de fonctions sur l'espace cotangent [Hör85b, section 25.4]. Nous avons vu plus haut (lemme 1.4.1) que la phase  $\phi_{(z',z)}(x', x, \xi)$  définit un idéal canonique (resp. lagrangien)  $J_{(z',z)}$  (resp.  $(J_{(z',z)})'$ ) de manière globale. On désigne par  $J_{(z',z)\mathbb{R}}$  le sous-ensemble de  $(T^*(X') \times T^*(X)) \setminus 0$  où toutes les fonctions de  $J_{(z',z)}$  s'annulent. Cet ensemble coïncide avec la relation canonique générée par la phase dans le cas d'une phase réelle.

Nous regardons tout d'abord la composition de deux propagateurs couche mince. La composition de deux OIF globaux donne un nouvel OIF global quand la composition est injective, propre et par exemple transversale [Hör85b, théorème 25.5.5]. Un point fixe de Banach permet de montrer les deux premières conditions [15]. La composition est prouvée transverse si nous montrons que la phase résultante est non-dégénérée (voir proposition 25.5.4 dans [Hör85b] et [15, proposition A.4] pour la réciproque).

**Lemme 1.6.1.** *Il existe  $\Delta_4 > 0$  tel que si  $z'' \geq z' \geq z \in [0, Z]$  avec  $z'' - z' \leq \Delta_4$  et  $z' - z \leq \Delta_4$  alors*

$$\phi_{(z'',z',z)}(x'', x, \xi'', x', \xi) := \phi_{(z'',z')}(x'', x', \xi'') + \phi_{(z',z)}(x', x, \xi)$$

*est une fonction de phase non-dégénérée de type positif sur  $X'' \times X \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus 0)$ .*

**Remarque 1.6.2.** De façon habituelle la variable  $x'$  est maintenant considérée comme une variable de phase<sup>2</sup> au même titre que  $\xi'$  et  $\xi$ . Un léger changement de variables permet de rendre cette nouvelle fonction de phase,  $\phi_{(z'',z',z)}$ , homogène de degré un par rapport à  $\xi'', \xi$  et «  $x'$  ». Nous ne rentrons pas dans ces détails ici (voir [15, remarque suivant le lemme 2.6]).

La démonstration du lemme se fait en considérant la structure des différentielles partielles de  $\partial_{x'} \phi_{(z'',z',z)}$ ,  $\partial_{\xi'} \phi_{(z'',z',z)}$ , et  $\partial_{\xi} \phi_{(z'',z',z)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , par rapport aux variables  $x'', x', x, \xi'', \xi$  et en montrant que la matrice résultante est de rang plein quand les différences  $z'' - z'$  et  $z' - z$  sont suffisamment petites [15].

Nous obtenons ainsi que l'opérateur  $G_{(z'',z')} \circ G_{(z',z)}$  est un OIF global de phase complexe  $\phi_{(z'',z',z)}(x'', x, \xi'', x', \xi)$ . En appliquant le même raisonnement pour la composition de plus de deux opérateurs nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 1.6.3** ([15]). *Soit  $\mathfrak{P} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$  une subdivision de  $[0, Z]$  avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$  telle que  $z^{(i+1)} - z^{(i)} \leq \Delta_{\mathfrak{P}}$ . Soit  $z \in [0, Z]$ , avec  $z^{(k)} \leq z \leq z^{(k+1)}$ ,  $0 \leq k < N$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  est un opérateur intégral de Fourier global d'ordre 0 si  $\Delta_{\mathfrak{P}}$  est suffisamment petit. Sa phase est complexe et donnée par*

$$\begin{aligned} \phi_{(z,z^{(k)}, \dots, z^{(0)})}(x, x^{(0)}; \xi^{(k)}, x^{(k)}, \dots, \xi^{(1)}, x^{(1)}, \xi^{(0)}) &:= \phi_{(z,z^{(k)})}(x, x^{(k)}, \xi^{(k)}) + \sum_{i=1}^k \phi_{(z^{(i)}, z^{(i-1)})}(x^{(i)}, x^{(i-1)}, \xi^{(i-1)}) \\ &= \langle x - x^{(k)}, \xi^{(k)} \rangle + (z - z^{(k)}) a_1(z^{(k)}, x, \xi^{(k)}) + \sum_{i=1}^k \langle x^{(i)} - x^{(i-1)}, \xi^{(i-1)} \rangle + (z^{(i)} - z^{(i-1)}) a_1(z^{(i-1)}, x^{(i)}, \xi^{(i-1)}). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Par variables de phase nous entendons les variables qui interviennent dans la représentation par intégrale oscillante du noyau de l'OIF, par exemple uniquement  $\xi$  pour la phase  $\phi_{(z',z)}(x', x, \xi)$ .

L'idéal canonique associé est donné par  $J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})} = J_{(z, z^{(k)})} \circ J_{(z^{(k)}, z^{(k-1)})} \circ \dots \circ J_{(z^{(1)}, z^{(0)})}$  où les compositions sont transversales. De même nous avons  $J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})_{\mathbb{R}}} = J_{(z, z^{(k)})_{\mathbb{R}}} \circ J_{(z^{(k)}, z^{(k-1)})_{\mathbb{R}}} \circ \dots \circ J_{(z^{(1)}, z^{(0)})_{\mathbb{R}}}$ .

**Commentaire 1.6.4.** Le lecteur habitué à la construction d'une paramétrix pour une équation hyperbolique connaît les difficultés que l'on rencontre en présence de caustiques. Il faut en effet changer de phase à la traversée de la caustique et prendre en compte les changements d'indice que cela génère. Ces aspects sont pris en compte par l'amplitude de l'OIF qui est une section à valeurs dans le fibré de Maslov [Hör71, DH72, Hör85b]. Ici la représentation proposée élude ces difficultés. En effet, à aucun moment nous ne cherchons à minimiser le nombre de variables de phase utilisées (ici les variables de phase sont  $\xi^{(k)}, x^{(k)}, \dots, \xi^{(1)}, x^{(1)}, \xi^{(0)}$ ). Le nombre important de variables de phase dans  $\phi_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})}$  permet de donner une représentation globale de l'idéal canonique associée à  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}$ . En prenant  $\Delta = z' - z$  suffisamment petit, nous prohibons la formation d'une caustique dans l'intervalle  $[z, z']$  pour l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z', z)}$ . Dans [5], cette argumentation géométrique est développée ; la taille maximale du pas discret  $\Delta$  est alors donnée à partir des variations du symbole  $a(z, x, \xi)$  en fonction des variables transverses  $x$ . Un tel critère est important en pratique lorsque l'on veut être sûr que toutes les caustiques ont bien été prises en compte.

Nous pouvons caractériser les éléments de  $J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})_{\mathbb{R}}}$ .

**Proposition 1.6.5.** Soit  $z \in [0, Z]$  avec  $z^{(k)} \leq z \leq z^{(k+1)}$ , avec  $0 \leq k < N$ . Alors  $(x^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}, x^{(0)}, \xi^{(0)}) \in J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})_{\mathbb{R}}}$  si et seulement s'il existe  $\theta_k \in \mathbb{R}^{n(2k)} \setminus 0$ ,  $\theta_k := (\xi^{(k)}, x^{(k)}, \dots, \xi^{(1)}, x^{(1)}) \in \mathbb{R}^{n(2N-1)}$ , tel que

$$(1.6.1) \quad \xi^{(j)} - \xi^{(j+1)} + (z^{(j+1)} - z^{(j)}) \partial_x b_1(z^{(j)}, x^{(j+1)}, \xi^{(j)}) = 0,$$

$$(1.6.2) \quad x^{(j+1)} - x^{(j)} + (z^{(j+1)} - z^{(j)}) \partial_{\xi} b_1(z^{(j)}, x^{(j+1)}, \xi^{(j)}) = 0, \quad j = 0, \dots, k,$$

$$\text{et } c_1(z^{(j)}, x^{(j+1)}, \xi^{(j)}) = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

La propagation des singularités pour l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}$  se fait le long de  $J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})_{\mathbb{R}}}$  [Hör85b, théorème 25.4.7]. Pour mieux comprendre son rapport avec le flot bicaractéristique associé au hamiltonien  $\text{Im}(a_1)(z, x, \xi)$  nous allons maintenant analyser sa structure.

## 1.6.2 Propagation des singularités, convergence du front d'onde

Nous considérons le système hamiltonien associé à  $-b_1 = \text{Im}(a_1)$

$$(1.6.3) \quad \frac{dx}{dz} = -\partial_{\xi} b_1(z, x, \xi), \quad \frac{d\xi}{dz} = \partial_x b_1(z, x, \xi).$$

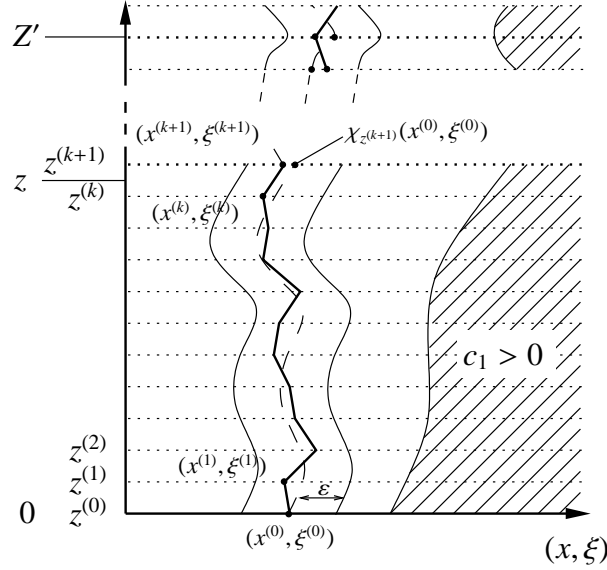
Nous désignons par  $\chi_z$  son flot. Nous notons que l'hypothèse 1.3.1 assure l'existence et l'unicité des solutions de (1.6.3) pour  $z \in [0, Z]$ .

Nous observons maintenant que les équations (1.6.1)–(1.6.2) forment un schéma discret à un pas pour ce système hamiltonien. Ce schéma est explicite en  $\xi$ , mais implicite en  $x$ . Des résultats standards d'analyse numérique (voir par exemple [Gau97, HNW93]) montrent qu'un tel schéma converge uniformément pour une condition initiale qui reste dans un domaine borné de  $T^*(\mathbb{R}^n)$ . L'ordre de consistance du schéma est donné par la régularité hölderienne en  $z$  de  $(-\partial_{\xi} b_1, \partial_x b_1)$ . Nous obtenons donc le résultat de convergence suivant.

**Lemme 1.6.6.** Soit  $\mathfrak{P} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$  une subdivision de  $[0, Z]$  avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$ . Soit  $K$  un compact de  $T^*(\mathbb{R}^n)$ . Il existe  $C > 0$  tel que, pour  $\Delta_{\mathfrak{P}} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (z^{(i+1)} - z^{(i)})$  suffisamment petit,

$$(1.6.4) \quad |(x^{(j)}, \xi^{(j)}) - \chi_{z^{(j)}}(x^{(0)}, \xi^{(0)})| \leq C \Delta_{\mathfrak{P}}^{\alpha}, \quad (x^{(0)}, \xi^{(0)}) \in K \setminus 0,$$

où  $j = 0, \dots, N$  et  $(x^{(i)}, \xi^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sont les solutions de (1.6.1)–(1.6.2).


 F . 1.1: Convergence du flot hamiltonien discret loin de la région où  $c_1$  est non nul.

**Remarque 1.6.7.** Il est intéressant de constater que le schéma numérique obtenu, et qui est « caché » dans la définition de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{F},z}$  que nous nous sommes donnée, est du type Euler symplectique [HLW02]. Ce type de schéma préserve la forme symplectique à chaque étape du procédé d'intégration et ainsi le volume dans l'espace cotangent  $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$  est conservé le long de ce flot discret.

Les singularités des solutions du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) ne peuvent se propager que le long des bicaractéristiques qui sont solutions de (1.6.3) et pour lesquelles  $c_1$  est nul [Trè80b, théorème 2.2, section XI.1, XI.2]. Nous posons donc

$$\Omega := ([0, Z] \times (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0)) \setminus \text{supp}(c_1), \quad \Omega_z := \{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0 \mid (z, x, \xi) \in \Omega, \quad z \in [0, Z]\}.$$

L'ensemble  $\Omega$  est un ouvert et nous faisons l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.6.8.**  $\Omega$  est non vide.

Si une bicaractéristique issue de  $\gamma_0 = (x_0, \xi_0)$  reste dans  $\Omega_z$  pour tout  $z$  alors la propagation de singularités le long de cette bicaractéristique est assurée, ce qui se montre en adaptant, par exemple, la démonstration du théorème 23.1.4 dans [Hör85a]. En fait dans un voisinage de la bicaractéristique tout se passe comme si  $c_1 = 0$  dans le problème de Cauchy (voir la démonstration du lemme 3.5 dans [15]).

Pour appréhender la propagation des singularités par l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{F},z}$  nous avons l'estimation suivante :

$$\text{WF}(\mathcal{W}_{\mathfrak{F},z}(u_0)) \subset J_{(z, z^{(0)}, \dots, z^{(0)})\mathbb{R}} \circ \text{WF}(u_0), \quad u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

On remarquera ici qu'il est utile de considérer la phase des OIF comme une phase complexe. Ainsi la propagation des singularités dans la région où  $c_1 > 0$  est immédiatement exclue. Ceci n'apparaîtrait pas aussi directement si nous considérons les opérateurs comme des OIF à phase réelle et amplitude dans  $S^0_\rho$ .

Comme pour l'opérateur solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2), nous pouvons préciser les choses.

**Proposition 1.6.9.** *Soient  $K$  un compact de  $\Omega_0$  et  $Z' \in [0, Z]$  tels que toute bicaractéristique  $\chi_z(\gamma^{(0)})$  issue de  $\gamma^{(0)} \in K \setminus 0$  en  $z = 0$  satisfait  $\chi_z(\gamma^{(0)}) \in \Omega_z$  pour tout  $z \in [0, Z']$ . Sous ces conditions, il existe  $d > 0$  tel que si  $\Delta_{\mathfrak{B}} \leq d$  et  $z \in [0, Z']$ , avec  $z^{(k)} \leq z \leq z^{(k+1)}$ , le sous-ensemble  $K \setminus 0$  est dans le domaine de la relation  $J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})\mathbb{R}}$  et pour tout  $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\gamma^{(0)} \in K \setminus 0$  nous avons*

$$J_{(z, z^{(k)}, \dots, z^{(0)})\mathbb{R}}(\gamma^{(0)}) \in \text{WF}(\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}(u_0)) \quad \text{si et seulement si} \quad \gamma^{(0)} \in \text{WF}(u_0).$$

*Démonstration.* La première partie du résultat est contenue dans le lemme 1.6.6. Pour montrer la propagation effective du front d'onde par l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$  nous utilisons l'ellipticité de  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  loin du support de  $c_1(z, \cdot)$ . Voir [15] pour les détails. ■

Ce résultat permet de voir facilement que le propagateur couche mince,  $\mathcal{G}_{(z', z)}$ , ne satisfait pas les propriétés d'un semi-groupe ni celles d'un système d'évolution ; en effet nous voyons que

$$J_{(z'', z)\mathbb{R}} \neq J_{(z'', z')\mathbb{R}} \circ J_{(z', z)\mathbb{R}}.$$

Combinant les différents résultats de cette section, nous obtenons le théorème de convergence microlocale suivant qui est illustré dans la Figure 1.1.

**Théorème 1.6.10.** *Soient  $u_0(\cdot) \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  et  $u(z, \cdot)$ ,  $z \in [0, Z]$ , la solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2). Soient  $Z' \in [0, Z]$  et  $K$  un compact de  $T^*(\mathbb{R}^n)$  tel que pour tout  $\gamma^{(0)} = (x^{(0)}, \xi^{(0)}) \in K \setminus 0$  la bicaractéristique  $\chi_z(\gamma^{(0)})$  satisfait  $\chi_z(\gamma^{(0)}) \in \Omega_z$  pour tout  $z \in [0, Z']$ . Alors si  $\gamma^{(0)} \in K \cap \text{WF}(u_0)$  nous avons  $\chi_{Z'}(\gamma^{(0)}) \in \text{WF}(u(Z', \cdot))$ . Pour une subdivision  $\mathfrak{B}$  de  $[0, Z]$ , avec  $\Delta_{\mathfrak{B}}$  suffisamment petit, nous avons alors*

$$\text{dist}(\chi_z(\gamma^{(0)}), \text{WF}(\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}(u_0))) \rightarrow 0, \quad \text{quand } \Delta_{\mathfrak{B}} \rightarrow 0$$

*uniformément par rapport à  $\gamma^{(0)} \in K \cap \text{WF}(u_0)$  et  $z \in [0, Z']$ . De plus la convergence est d'ordre  $\alpha$ .*

Nous rappelons que  $\alpha$  est l'ordre de la régularité hölderienne dans l'hypothèse 1.3.1.

**Commentaire 1.6.11.** Le résultat du théorème 1.6.10 complète celui du théorème 1.5.3. En effet la convergence dans les espaces de Sobolev n'exclut en rien que le front d'onde de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}(u_0)$  soit sans rapport avec celui de la solution  $U(z, 0)(u_0)$  du problème de Cauchy que nous considérons. Ce résultat est crucial pour certaines applications. Celle que nous avons en tête est l'imagerie sismique (voir le chapitre 2) où le support singulier est précisément ce que l'on cherche à analyser dans l'image du sous-sol obtenue.

Ce résultat est important aussi lorsque l'on considère le passage à la limite dans l'approximation proposée comme une réalisation d'une intégrale de chemin (de type Feynman) pour représenter la solution. Alors la propagation des singularités correspond à la propagation de l'énergie le long des chemins stationnaires.

## 1.7 Le cas des systèmes

Prenons maintenant le symbole  $a(z, x, \xi)$  sous la forme d'une matrice  $k \times k$ ,  $k \geq 1$ , où chaque élément est du premier ordre. Quand le symbole principal  $a_1(z, x, \xi)$  est diagonalisable avec un diagonaliseur  $w(z, x, \xi)$  qui est un symbole matriciel d'ordre zéro, nous pouvons envisager d'appliquer au système un opérateur elliptique de symbole principal  $w(z, x, \xi)$  et ainsi se ramener au cas scalaire (comme cela est fait en partie dans [Kg81, chapitre 10]). Cependant la solution n'est alors obtenue que via une paramétrix de cet opérateur elliptique. C'est précisément ce que nous ne souhaitons pas faire car alors la solution obtenue n'est connue que modulo un opérateur régularisant.

Avec certaines hypothèses sur  $a(z, x, \xi)$  nous allons développer une méthode similaire à celle du cas scalaire : les OIF considérés sont alors à phase matricielle. L'extension que nous faisons n'est pas triviale à cause de la

perte de commutativité des phases et des amplitudes entre elles, en particulier si nous souhaitons appliquer des arguments de composition de ces opérateurs. Cette extension nous paraît importante car de nombreux problèmes hyperboliques issus de la physique peuvent être formulés sous forme d'un système du premier ordre. Un exemple est le système de l'élastodynamique.

Nous utilisons la notation  $\mathcal{M}_k S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p)$  pour désigner les symboles matriciels  $k \times k$  composés d'éléments dans  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p)$ . Le produit de composition  $a \# b$  désigne alors le symbole matriciel  $(a \# b)_{ij} = \sum_k a_{ik} \# b_{kj}$ . Pour  $r \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $E^{(r)}$  désigne maintenant l'OψD de symbole diagonal  $\langle \xi \rangle^r \mathbf{I}_k$ .

### 1.7.1 Systèmes symétriques

Nous considérons un problème de Cauchy de la même forme que (1.1.1)–(1.1.2) avec cette fois  $u_0 \in (H^s(\mathbb{R}^n))^k$  et le symbole  $a(z, x, \xi)$  vérifiant l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.7.1.** *Le symbole matriciel principal de  $a$ ,  $a_1(z, x, \xi) = -ib_1(z, x, \xi) + c_1(z, x, \xi)$ , est tel que  $b_1$  et  $c_1$  sont tous deux continus en  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_k S^1(X \times \mathbb{R}^n)$  et homogènes de degré un en  $\xi$ , pour  $|\xi| \geq 1$ . Les matrices  $b_1(z, x, \xi)$  et  $c_1(z, x, \xi)$  sont de plus hermitiennes et  $c_1(z, x, \xi)$  est positive.*

*Le reste du symbole de  $a(z, x, \xi)$ , à savoir  $a_0(z, x, \xi) := a(z, x, \xi) - a_1(z, x, \xi)$ , est continu en  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_k S^0(X \times \mathbb{R}^n)$ .*

L'inégalité de Gårding précisée pour les systèmes (voir [LN66, théorème 3.2], [Vai70], [Tay81, chapitre VII]) permet d'obtenir une inégalité d'énergie similaire à celle du cas scalaire (voir aussi [CP82, théorème 6.4.3]) ce qui donne l'existence et l'unicité d'une solution dans  $\mathcal{C}^1([0, Z], (H^s(\mathbb{R}^n))^k) \cap \mathcal{C}^0([0, Z], (H^{s+1}(\mathbb{R}^n))^k)$  pour le problème de Cauchy que nous considérons. Nous désignons comme précédemment par  $U(z', z)$  l'opérateur solution.

Pour pouvoir définir proprement notre propagateur couche mince dans le cas des systèmes symétriques nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante sur la partie principale du symbole  $a_1(z, x, \xi)$ .

**Hypothèse 1.7.2.** *Il existe  $w(z, x, \xi)$  continue en  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_k S^0(X \times \mathbb{R}^n)$ , unitaire, homogène de degré zéro en  $\xi$ , pour  $|\xi| \geq 1$ , telle que*

$$b_1(z, x, \xi) = w(z, x, \xi) d_b(z, x, \xi) (w(z, x, \xi))^{-1}, \quad c_1(z, x, \xi) = w(z, x, \xi) d_c(z, x, \xi) (w(z, x, \xi))^{-1},$$

*où  $d_b(z, x, \xi)$  et  $d_c(z, x, \xi)$  sont des matrices  $k \times k$  diagonales dont les éléments sont continus en  $z$  à valeurs dans  $S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et homogènes de degré un en  $\xi$ , pour  $|\xi| \geq 1$ . (Les éléments diagonaux de  $d_c(z, x, \xi)$  sont positifs puisque  $c_1(z, x, \xi) \geq 0$ .)*

Nous disons que le symbole matriciel  $a_1(z, x, \xi)$  est « géométriquement régulier » en référence à la terminologie utilisée dans [MZ05, définition 2.2 (ii)].

L'hypothèse 1.7.2 est satisfaite par exemple si les valeurs propres de  $b_1(z, x, \xi)$  et  $c_1(z, x, \xi)$  sont de multiplicité constante puisque  $b_1(z, x, \xi)$  et  $c_1(z, x, \xi)$  sont hermitiennes [Kat80, section II.4] et si les matrices  $b_1(z, x, \xi)$  et  $c_1(z, x, \xi)$  commutent. Cependant, l'hypothèse 1.7.2 est bien plus générale et permet le *croisement*  $\mathcal{C}^\infty$  de valeurs propres.

Nous posons  $v(z, x, \xi) := (w(z, x, \xi))^{-1} = (w(z, x, \xi))^t$  et  $d(z, x, \xi) := -id_b(z, x, \xi) + d_c(z, x, \xi)$ . Nous désignons par  $d_{b,l}(z, x, \xi)$  et  $d_{c,l}(z, x, \xi)$ ,  $1 \leq l \leq k$ , les éléments diagonaux des matrices  $d_b(z, x, \xi)$  et  $d_c(z, x, \xi)$ . Comme dans le cas scalaire nous supposons que les éléments diagonaux de  $d_c(z, x, \xi)$  satisfont la propriété  $(P_L)$  avec  $L \geq 2$ . Nous posons  $\rho = 1 - 1/L$  et  $\delta = 1/L$  (le cas  $L = 2$  est vrai par défaut par le lemme 1.4.6).

**Exemple 1.7.3.** L'opérateur de Dirac  $\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_{x_j} + m\beta$  possède un symbole principal hermitien. Les matrices de Dirac sont les matrices  $4 \times 4$  suivantes

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{avec } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres  $\pm|\xi|$  sont de multiplicité constante égale à deux et nos résultats s'appliquent. À la différence de la formule du produit de Trotter, nous n'utilisons pas le semi-groupe obtenu en « gelant » l'influence du paramètre d'évolution dans le symbole (voir la remarque 1.1.1). Un résultat de convergence de la formule du produit de Trotter pour cet opérateur en présence d'un potentiel peut être trouvé dans [IT04].

Le propagateur couche mince peut être maintenant défini par son noyau matriciel

$$G_{(z',z)}(x', x) := \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} g_{(z',z)}(x', \xi) e^{-\Delta a_1(z, x', \xi)} d\xi,$$

avec  $g_{(z',z)}(x, \xi) := e^{-\Delta a_0(z, x, \xi)}$ . Ce noyau est bien défini grâce à l'hypothèse 1.7.2 qui permet d'écrire

$$G_{(z',z)}(x', x) = \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} g_{(z',z)}(x', \xi) w(z, x', \xi) e^{-\Delta d(z, x', \xi)} v(z, x', \xi) d\xi,$$

et donc chaque élément du noyau peut être écrit comme une somme de noyaux scalaires d'OIF globaux de la forme décrite dans la section 1.4.

Le théorème 1.4.9 peut être adapté au cas présent et nous pouvons montrer le résultat de régularité suivant.

**Théorème 1.7.4** ([20]). *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe  $\Delta_6 > 0$  et  $C \geq 0$  tels que*

$$\|\mathcal{G}_{(z',z)}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq 1 + C\Delta,$$

pour tout  $z', z \in [0, Z]$  tel que  $0 \leq \Delta = z' - z \leq \Delta_6$ .

*Démonstration.* Nous donnons ici une idée de la preuve et des difficultés rencontrées du fait de la non commutativité des matrices impliquées.

Nous observons que si nous écrivons,  $g_{(z',z)}(x, \xi) = I_k + \Delta \tilde{g}_{(z',z)}(x, \xi)$ , par la formule de Taylor, avec  $\tilde{g}_{(z',z)}$  borné dans  $\mathcal{M}_k S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $\Delta$  et  $z$ , nous obtenons  $\mathcal{G}_{(z',z)} = \mathcal{G}_{(z',z)}^k + \Delta \tilde{\mathcal{G}}_{(z',z)}$ , où l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z',z)}^k$  est de la même forme que  $\mathcal{G}_{(z',z)}$  avec l'amplitude  $g_{(z',z)}$  remplacée par  $I_k$ . Nous pouvons montrer que  $\|\tilde{\mathcal{G}}_{(z',z)}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq C$ , pour  $\Delta$  suffisamment petit. Sans perte de généralité nous pouvons donc supposer que  $a_0(z, x, \xi) = 0$ .

Nous travaillons avec le même diagramme commutatif que dans la démonstration du théorème 1.4.3 page 12. Le noyau de  $\mathcal{B}_{(z',z)} := \mathcal{G}_{(z',z)} \circ E^{(-s)}$  est donné par

$$B_{(z',z)}(x', x) = \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} e^{-\Delta a_1(z, x', \xi)} \langle \xi \rangle^{-s} d\xi,$$

alors que celui de son adjoint est donné par

$$B_{(z',z)}^*(x', x) = \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} e^{-i\Delta b_1(z, x, \xi) - \Delta c_1(z, x, \xi)} \langle \xi \rangle^{-s} d\xi,$$

puisque les matrices  $b_1(z, x, \xi)$  et  $c_1(z, x, \xi)$  sont hermitiennes. Nous définissons  $\mathcal{D}_{(z',z)} = \mathcal{B}_{(z',z)} \circ \mathcal{B}_{(z',z)}^*$  et son noyau s'écrit

$$D_{(z',z)}(x', x) = \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} e^{-\Delta a_1(z, x', \xi)} e^{-i\Delta b_1(z, x, \xi) - \Delta c_1(z, x, \xi)} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi,$$

ou encore

$$D_{(z',z)}(x', x) = \int e^{i\langle x' - x, \xi \rangle} \left( w(z, \cdot) e^{-\Delta d(z, \cdot)} v(z, \cdot) \right) (x', \xi) \left( w(z, \cdot) e^{-\Delta \bar{d}(z, \cdot)} v(z, \cdot) \right) (x, \xi) \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi.$$

De la formule de Taylor au premier ordre nous obtenons  $v(z, x', \xi) = v(z, x, \xi) + \langle x' - x, \tilde{v}(z, x', x, \xi) \rangle$ , avec  $\tilde{v}(z, x', x, \xi)$  borné dans  $(\mathcal{M}_k S^0(X' \times X \times \mathbb{R}^n))^n$  uniformément en  $z$ . Nous écrivons alors

$$D_{(z', z)}(x', x) = D_{(z', z), 1}(x', x) + D_{(z', z), 2}(x', x) + D_{(z', z), 3}(x', x),$$

où

$$D_{(z', z), 1}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi)} w(z, x', \xi) e^{-\Delta(d(z, x', \xi) + \bar{d}(z, x, \xi))} v(z, x', \xi) \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi,$$

$$D_{(z', z), 2}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi)} w(z, x', \xi) e^{-\Delta d(z, x', \xi)} \langle x' - x, \tilde{v}(z, x', x, \xi) \rangle w(z, x, \xi) e^{-\bar{\Delta} \bar{d}(z, x, \xi)} v(z, x, \xi) \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi,$$

et

$$D_{(z', z), 3}(x', x) = - \int e^{i(x' - x, \xi)} w(z, x', \xi) e^{-\Delta(d(z, x', \xi) + \bar{d}(z, x, \xi))} \langle x' - x, \tilde{v}(z, x', x, \xi) \rangle \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi.$$

Nous prouvons alors les estimations suivantes pour les opérateurs associés,  $\mathcal{D}_{(z', z), 1}$ ,  $\mathcal{D}_{(z', z), 2}$ , et  $\mathcal{D}_{(z', z), 3}$ ,

$$\|E^{(s)} \circ \mathcal{D}_{(z', z), 1} \circ E^{(s)}\|_{((L^2)^k, (L^2)^k)} \leq 1 + C\Delta, \quad \|E^{(s)} \circ (\mathcal{D}_{(z', z), 2} + \mathcal{D}_{(z', z), 3}) \circ E^{(s)}\|_{((L^2)^k, (L^2)^k)} \leq C\Delta,$$

pour un certain  $C \geq 0$ , uniformément en  $z \in [0, Z]$  et  $\Delta$ ,  $\Delta$  suffisamment petit. La première estimation est obtenue à partir de l'équivalent du théorème 1.4.9 pour les systèmes symétriques. ■

À partir de ce résultat nous obtenons, comme dans le cas scalaire, la stabilité de l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  que nous définissons comme dans (1.1.4). La convergence se prouve comme dans le cas scalaire à partir d'une estimation de consistance de la forme du théorème 1.5.2. Un ingrédient essentiel de la preuve du théorème 1.5.2 est la formule de composition des OψD et OIF donnée par le théorème 2.2 dans [Kg81, section 10.2]. Or ce résultat ne s'étend pas directement au cas des phases et symboles matriciels. Nous le remplaçons par le résultat suivant qui diffère de la forme escomptée par un terme résiduel qui, clairement, est sans importance pour la suite de la démonstration de la convergence de l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$ .

**Théorème 1.7.5.** Soient  $\rho', \rho'' \in [\frac{1}{2}, 1]$  et soient  $\mu(z, x, \xi)$  borné dans  $\mathcal{M}_k S_{\rho'}^m(X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z$  et l'opérateur  $\mathcal{A}_{(z', z)}$  défini par

$$\mathcal{A}_{(z', z)}(u)(x') = \iint e^{i(x' - x, \xi)} \sigma_{(z', z)}(x', \xi) e^{-\Delta a_1(z, x', x, \xi)} u(x) d\xi dx,$$

où  $0 \leq z \leq z' \leq Z$ ,  $\Delta = z' - z$ , et  $\sigma_{(z', z)}(x', \xi)$  est borné dans  $\mathcal{M}_k S_{\rho''}^{m'}(X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z'$  et  $z$ . Alors, pour  $\Delta$  suffisamment petit, nous avons  $\mu(z, x, D_x) \circ \mathcal{A}_{(z', z)} = \mathcal{B}_{(z', z)} + \Delta \mathcal{R}_{(z', z)}$ , où pour tout  $s \in \mathbb{R}$  il existe  $C \geq 0$  tel que  $\|\mathcal{R}_{(z', z)}\|_{((H^s)^k, (H^{s-m-m'})^k)} \leq C$ ,  $0 \leq z \leq z' \leq Z$ , et l'opérateur  $\mathcal{B}_{(z', z)}$  a pour noyau

$$B_{(z', z)}(x', x) = \int e^{i(x' - x, \xi)} q_{(z', z)}(x', \xi) e^{i\Delta b_1(z, x', \xi)} d\xi,$$

avec  $q_{(z', z)}(x', \xi)$  borné dans  $\mathcal{M}_k S_{\min(\rho, \rho', \rho'')}^{m+m'}(X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z'$  et  $z$  et donné par l'intégrale oscillante

$$q_{(z', z)}(x', \xi) = \iint e^{i(x' - y, \eta - \xi)} \mu(z, x', \eta) \sigma_{(z', z)}(y, \xi) p_{\Delta}(z, y, \xi) w(z, y, \xi) e^{i\Delta(d_b(z, y, \xi) - d_b(z, x', \xi))} v(z, y, \xi) d\eta dy,$$

avec  $p_{\Delta}(z, y, \xi) = e^{-\Delta c_1(z, y, \xi)}$ .

Nous obtenons ainsi le même résultat de convergence de  $\mathcal{W}_{\mathbb{F}, z}$  dans les espaces de Sobolev  $(H^s(\mathbb{R}^n))^k$  que celui donné par le théorème 1.5.3 dans le cas scalaire. Le lecteur est renvoyé à [20] pour les détails.



### 1.7.2 Systèmes symétrisables

De nombreux systèmes hyperboliques du premier ordre ne sont pas immédiatement symétriques mais plutôt symétrisables. Par exemple, partant d'une équation hyperbolique d'ordre  $k$ ,  $k \geq 2$ , nous pouvons la reformuler comme un système  $k \times k$  du premier ordre [Tay81, CP82]. Ce système n'est alors pas symétrique mais par exemple dans le cas strictement hyperbolique, il est symétrisable. Il nous est donc apparu comme naturel de considérer non seulement le cas symétrique mais aussi le cas symétrisable dans notre étude. Un autre exemple est le système de l'élastodynamique écrit en termes de la vitesse et du champ de contraintes. Il est symétrisable si les multiplicités sont constantes.

Par symétrisable ici nous entendons que le symbole matriciel  $a_1(z, x, \xi)$  satisfait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.7.6.** *Il existe une matrice  $k \times k$  inversible  $L(z, x, \xi)$  qui est bornée dans  $M_k S^0(X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z$ , homogène de degré zéro en  $\xi$ ,  $|\xi| \geq 1$ , avec  $(L(z, x, \xi))^{-1}$  satisfaisant les mêmes propriétés, et telle que  $a_1(z, x, \xi) = L(z, x, \xi) \alpha_1(z, x, \xi) (L(z, x, \xi))^{-1}$ , avec  $\alpha_1 = -i\beta_1 + \gamma_1$  satisfaisant les hypothèses 1.7.1 et 1.7.2.*

Nous faisons de plus l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.7.7.** *Le symbole matriciel  $L(z, x, \xi)$  est Lipschitz continu, au sens où*

$$L(z', x, \xi) - L(z, x, \xi) = (z' - z)\tilde{L}(z', z, x, \xi),$$

avec  $\tilde{L}(z', z, x, \xi)$  borné dans  $M_k S^0(X \times \mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z'$  et  $z$ . La même propriété est alors naturellement vérifiée par  $R(z, x, \xi) := (L(z, x, \xi))^{-1}$ .

Ces deux hypothèses permettent de démontrer une estimation d'énergie a priori de la forme de (1.3.1) [CP82, chapitre VI], et donc l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy de la forme de (1.1.1)–(1.1.2). Les deux hypothèses permettent aussi de définir le propagateur couche mince et l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$  comme dans le cas symétrique.

Ici aussi, un résultat de convergence de la forme du théorème 1.5.3 se démontre une fois que nous avons montré la stabilité de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$ , c'est à dire un résultat similaire à la proposition 1.5.1. Cependant, nous ne parvenons pas à démontrer une estimation de la norme d'opérateur de  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  comme dans le théorème 1.7.4 et qui est essentielle dans la démonstration de la proposition 1.5.1. Cela est dû au fait que la matrice  $L(z, x, \xi)$  n'est pas unitaire, alors que le caractère unitaire du diagonaliseur est utilisé dans la démonstration du théorème 1.7.4 dans le cas symétrique. Bien que nous ne puissions pas fournir tous les détails ici nous allons indiquer comment nous parvenons à montrer la stabilité de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}, z}$  quand  $|\mathfrak{B}|$  devient grand.

Nous définissons les OIF à phase matricielle suivants,  $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^k$ ,

$$(1.7.1) \quad \mathcal{H}_{(z', z)}^l(u)(x') := \iint e^{i(x' - x, \xi)} g_{(z', z)}(x', \xi) L(z, x', \xi) e^{-\Delta \alpha_1(z, x', \xi)} u(x) dx d\xi,$$

$$(1.7.2) \quad \mathcal{H}_{(z', z)}^r(u)(x') := \iint e^{i(x' - x, \xi)} g_{(z', z)}(x', \xi) e^{-\Delta \alpha_1(z, x', \xi)} R(z, x', \xi) u(x) dx d\xi,$$

$$(1.7.3) \quad \mathcal{H}_{(z', z)}(u)(x') := \iint e^{i(x' - x, \xi)} g_{(z', z)}(x', \xi) e^{-\Delta \alpha_1(z, x', \xi)} u(x) dx d\xi,$$

et

$$(1.7.4) \quad \mathcal{H}_{(z', z)}^{lr}(u)(x') := \mathcal{G}_{(z', z)}(u)(x') = \iint e^{i(x' - x, \xi)} g_{(z', z)}(x', \xi) L(z, x', \xi) e^{-\Delta \alpha_1(z, x', \xi)} R(z, x', \xi) u(x) dx d\xi,$$

ainsi que les opérateurs suivants formés à partir de compositions des précédents ( $0 \leq l \leq l' \leq N = |\mathfrak{B}| - 1$ ) :

$$\mathcal{G}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(l)})} := \begin{cases} \text{Id} & \text{si } l' = l, \\ \mathcal{G}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})} & \text{si } l' - 1 = l, \\ \mathcal{G}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{(z^{(l'+1)}, z^{(l)})} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(l)})}^{lr} := \begin{cases} \text{Id} & \text{si } l' = l, \\ \mathcal{H}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})}^{lr} = \mathcal{G}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})} & \text{si } l' - 1 = l, \\ \mathcal{H}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})}^{lr} \circ \mathcal{H}_{(z^{(l'-1)}, z^{(l'-2)})}^{lr} \circ \dots \circ \mathcal{H}_{(z^{(l+2)}, z^{(l+1)})}^{lr} \circ \mathcal{H}_{(z^{(l+1)}, z^{(l)})}^{lr} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(l)})}^r := \begin{cases} \text{Id} & \text{si } l' = l, \\ \mathcal{H}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})}^r & \text{si } l' - 1 = l, \\ \mathcal{H}_{(z^{(l')}, z^{(l'-1)})}^r \circ \dots \circ \mathcal{H}_{(z^{(l+2)}, z^{(l+1)})}^r \circ \mathcal{H}_{(z^{(l+1)}, z^{(l)})}^r & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera que la stabilité de la norme d'opérateur de  $\mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(l)})}^{lr}$  quand le nombre de termes dans la composition devient grand est assurée par le théorème 1.7.4 du cas symétrique qui s'applique à  $\mathcal{H}_{(z', z)}$ .

Notre argumentation s'articule autour de la remarque suivante : lorsque nous composons les opérateurs  $\mathcal{G}_{(z', z')}$  et  $\mathcal{G}_{(z', z)}$ , nous souhaitons naïvement que la contribution de  $R(z', x, \xi)$  dans l'amplitude du premier –voir (1.7.4)– compense celle de  $L(z, x, \xi)$  dans l'amplitude du second. Malheureusement c'est faux de part la nature même du produit de composition des OIF. En revanche, cette simplification peut se faire quitte à accepter que des termes/opérateurs « parasites » apparaissent. Dans [20] nous montrons qu'une partie de ces termes est de « taille »  $\Delta_{\mathfrak{F}}$  et que l'autre partie fait apparaître de tels termes au cours des compositions suivantes. La difficulté réside alors dans la gestion de ces termes « parasites » qui s'accumulent à mesure des compositions dans  $\mathcal{W}_{\mathfrak{F}, z}$ .

Les résultats fondamentaux sont les deux suivants.

**Lemme 1.7.8.** *Soit  $l \geq 5$ . Nous avons*

$$(1.7.5) \quad \mathcal{G}_{(z^{(l)}, \dots, z^{(0)})} = \mathcal{J}_{(z^{(l)}, z^{(0)})} + \Delta_{\mathfrak{F}} \mathcal{G}_{(z^{(l)}, \dots, z^{(3)})} \circ \mathcal{K} + \mathcal{M}_{z^{(l)}} \circ \left( \text{Id} + \Delta_{\mathfrak{F}} \sum_{j=0}^{l-4} \mathcal{K} \circ \widetilde{\mathcal{J}}_{(z^{(j)}, z^{(0)})} \right) \\ + \Delta_{\mathfrak{F}} \sum_{j=4}^l \left( \mathcal{G}_{(z^{(l)}, \dots, z^{(j)})} \circ \mathcal{K} \circ \left( \text{Id} + \Delta_{\mathfrak{F}} \sum_{i=0}^{j-5} \mathcal{K} \circ \widetilde{\mathcal{J}}_{(z^{(i)}, z^{(0)})} \right) \right),$$

avec la convention  $\sum_{i=0}^{-1} \mathcal{K} \circ \widetilde{\mathcal{J}}_{(z^{(i)}, z^{(0)})} = 0$ , où  $\mathcal{M}_z := I - L(z, x, D_x) \circ R(z, x, D_x)$ , et où l'opérateur  $\mathcal{J}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}$ ,  $0 \leq l \leq l' \leq N$ , est de la forme

$$(1.7.6) \quad \mathcal{J}_{(z^{(l')}, z^{(l)})} = \mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(l)})}^{lr} \\ + \Delta_{\mathfrak{F}} \sum_{l+1 \leq m_1 \leq l'-1} \mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(m_1+1)})}^{lr} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_1-1)}, \dots, z^{(l)})}^r \\ \vdots \\ + \Delta_{\mathfrak{F}}^r \sum_{\substack{l+2r-1 \leq m_r \leq l'-1 \\ l+3 \leq m_2 \leq m_3-2 \\ l+1 \leq m_1 \leq m_2-2}} \mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(m_r+1)})}^{lr} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_r-1)}, \dots, z^{(m_{r-1}+1)})}^r \circ \dots \\ \dots \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_2-1)}, \dots, z^{(m_1+1)})}^r \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_1-1)}, \dots, z^{(l)})}^r \\ \vdots \\ + \Delta_{\mathfrak{F}}^{r'} \sum_{\substack{l+2r'-1 \leq m_{r'} \leq l'-1 \\ l+3 \leq m_2 \leq m_3-2 \\ l+1 \leq m_1 \leq m_2-2}} \mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(m_{r'}+1)})}^{lr} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_{r'}-1)}, \dots, z^{(m_{r-1}+1)})}^r \circ \dots \\ \dots \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_2-1)}, \dots, z^{(m_1+1)})}^r \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_{(z^{(m_1-1)}, \dots, z^{(l)})}^r,$$

avec  $r' = E((l' - l)/2)$  et où  $\mathcal{K}$  est un opérateur générique qui vérifie  $\|\mathcal{K}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq K$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . L'opérateur  $\widetilde{\mathcal{J}}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}$  a la même forme que  $\mathcal{J}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}$  avec l'opérateur  $\mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(m_r+1)})}^{lr}$  remplacé à chaque fois par  $\mathcal{H}_{(z^{(l')}, \dots, z^{(m_r+1)})}^{lr}$ .

**Lemme 1.7.9.** *Il existe  $S \geq 0$  et  $C \geq 0$  telles que*

$$(1.7.7) \quad \|\mathcal{J}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq S^2 e^{CZ}, \quad \|\widetilde{\mathcal{J}}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq S e^{CZ}, \quad 0 \leq l \leq l' \leq N,$$

pour  $\Delta_{\mathfrak{P}}$  suffisamment petit.

Pour simplifier, prenons ici des subdivisions  $\mathfrak{P}$  telles que  $\Delta_{\mathfrak{P}} \leq CZ/N$  pour une certaine constante  $C$ , i.e. nous considérons des subdivisions quasi-uniformes. Des lemmes précédents nous obtenons

$$\|\mathcal{G}_{(z^{(l)}, z^{(0)})}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq A + \Delta_{\mathfrak{P}} B \sum_{j=3}^l \|\mathcal{G}_{(z^{(l)}, z^{(j)})}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)},$$

pour certaines constantes  $A$  et  $B$  positives et  $0 \leq l \leq N$ .

Si nous posons  $V_{l,l} = \|\mathcal{G}_{(z^{(l')}, z^{(l)})}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)}$ , nous avons alors

$$V_{l,0} \leq A + \Delta_{\mathfrak{P}} B \sum_{j=3}^l V_{l,j} \leq A + \Delta_{\mathfrak{P}} B \sum_{j=1}^l V_{l,j}.$$

Plus haut, nous avons choisi d'utiliser  $z^{(0)} = 0$  comme valeur de départ pour  $z$ . Nous obtenons de même

$$V_{l,l} \leq A + \Delta_{\mathfrak{P}} B \sum_{j=l+1}^l V_{l,j}, \quad 0 \leq l \leq l' \leq N.$$

Nous définissons alors la suite finie  $(W_l)_{0 \leq l \leq N}$  par  $W_0 = 1$  et la relation  $W_{l+1} = A + \Delta_{\mathfrak{P}} B \sum_{j=0}^l W_j$ ,  $0 \leq l \leq N-1$ . Comme nous avons  $\mathcal{G}_{(z^{(l)}, z^{(0)})} = \text{Id}$ ,  $0 \leq l \leq N$ , alors  $V_{l,l} = 1$  et une récurrence immédiate donne  $V_{l,l} \leq W_{l-1}$ ,  $0 \leq l \leq l' \leq N$ . Nous observons alors que pour tout  $l \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} W_l &= W_{l-1} + \Delta_{\mathfrak{P}} B W_{l-1} = (1 + \Delta_{\mathfrak{P}} B) W_{l-1} = (1 + \Delta_{\mathfrak{P}} B)^l W_1 \\ &= (1 + \Delta_{\mathfrak{P}} B)^l (A + \Delta_{\mathfrak{P}} B) \leq \left(1 + \frac{CBZ}{N}\right)^N (A + \Delta_{\mathfrak{P}} B) \leq C e^{CBZ}. \end{aligned}$$

Pour l'opérateur  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  dans le cas *symétrisable*, nous avons ainsi obtenu le résultat suivant.

**Théorème 1.7.10.** *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Nous supposons les hypothèses 1.7.6 et 1.7.7 satisfaites. Alors il existe  $K' \geq 0$  tel que pour toute subdivision  $\mathfrak{P} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$  de  $[0, Z]$  avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$  et  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  défini dans (1.1.4), nous avons*

$$\forall z \in [0, Z], \quad \|\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}\|_{((H^s)^k, (H^s)^k)} \leq K',$$

pour  $\Delta_{\mathfrak{P}}$  suffisamment petit (avec  $\Delta_{\mathfrak{P}} \leq CZ/N$ ).

La suite de la démonstration de la convergence de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P},z}$  dans les espaces de Sobolev  $(H^s(\mathbb{R}^n))^k$  se fait comme dans le cas symétrique. Nous obtenons ainsi le même résultat de représentation de l'opérateur solution du problème de Cauchy (1.1.1)–(1.1.2) dans le cas des systèmes symétrisables que celui dans le cas scalaire énoncé dans le théorème 1.5.3. Ici la représentation est donnée par des produits d'OIF à phase matricielle.

## Chapitre 2

# Contributions à l'imagerie sismique

### 2.1 Introduction

En sismologie d'exploration, des données sismiques sont acquises en mer ou sur terre. Une fois traitées, ces données permettent d'obtenir une image du sous-sol utile aux travaux d'interprétation des géophysiciens et géologues. En particulier, le support singulier de cette image correspond aux singularités dans le milieu de propagation. En surface, une source (canon à air, dynamite) génère une onde qui se propage vers le bas. Lorsqu'elle rencontre les hétérogénéités du milieu de propagation elle est diffractée. Une partie de l'énergie diffractée est enregistrée en surface par des hydrophones ou géophones. L'enregistrement dure quelques secondes. L'expérience est répétée un nombre important de fois avec des positions différentes de la source. Le but de l'imagerie est de reconstruire les discontinuités du sous-sol à partir des réflexions enregistrées dans les données sismiques.

Les ondes impliquées dans l'expérience sismique obéissent à l'équation des ondes élastiques. Dans la section 2.2, nous allons faire apparaître des équations des ondes découplées, dites « one-way », qui auront la forme des équations traitées au chapitre 1. Nous pourrions alors utiliser la méthode de représentation de l'opérateur solution par produits d'OIF et étudier sa mise en pratique dans la section 2.3, dans le cas où le symbole utilisé est tronqué, par exemple en ne gardant que le symbole principal. De plus nous allons faire des approximations sur la phase de ces OIF ce qui donnera la méthode dite « Generalized Screens » (GS). Après avoir introduit le problème d'imagerie dans ce contexte, nous montrerons, dans la section 2.4, des applications de nos méthodes à des données sismiques. Ce travail sur la méthode GS a été réalisé en collaboration avec Maarten de Hoop.

Dans la section 2.5, nous nous intéresserons à la question du prolongement de données sismiques telle qu'elle est formulée par les géophysiciens : souvent, les données sismiques sont lacunaires, pour des raisons variées comme le mauvais fonctionnement ou le mauvais positionnement des récepteurs. Cela crée des « trous » dans les données. On souhaite alors pouvoir combler ces lacunes, parfois substantielles, à partir des données que l'on possède. Nous donnons une formulation microlocale de certaines méthodes employées en pratique. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Alison Malcolm et Maarten de Hoop.

### 2.2 Découplage microlocal en champs montant et descendant de l'équation des ondes

Nous montrons ici comment nous pouvons faire apparaître des équations de la forme traitée dans le chapitre 1 à partir des équations des ondes habituelles en découplant microlocalement ce qui se propage dans une direction de ce qui se propage dans la direction opposée. En pratique cette direction est la profondeur. Pour simplifier, nous traitons ici le cas d'une équation des ondes scalaire, correspondant à un problème acoustique. Le cas élastique est par exemple traité dans [dd94] ou [14] pour le découplage de la partie

principale de l'équation. La méthode se fonde sur celle de Taylor pour le traitement de la réflexion des singularités [Tay75]. Nous résumons ici la présentation donnée dans [Sto04] où le symbole entier est découplé modulo un opérateur régularisant.

Nous considérons l'équation des ondes acoustiques dans  $\mathbb{R}^n$

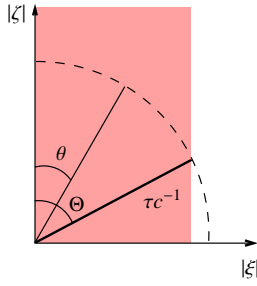
$$(2.2.1) \quad \left( -\rho^{-1}c^{-2}\partial_t^2 + \sum_{j=1}^n \partial_{y_j}\rho^{-1}\partial_{y_j} \right) u = F,$$

où  $\rho$  est la densité du fluide, et  $c$  la vitesse des ondes. Ces deux fonctions sont supposées indépendantes du temps ici et régulières ( $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) avec de plus  $0 < \rho_0 \leq \rho(y) \leq \rho_1$  et  $0 < c_0 \leq c(y) \leq c_1$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Nous écrivons  $p(x, z, D_t, D_x, D_z) = \rho^{-1}c^{-2}D_t^2 - \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}\rho^{-1}D_{x_j} - D_z\rho^{-1}D_z$  avec  $z = y_n$  et  $x = (y_1, \dots, y_{n-1})$ . Le symbole principal est  $p_2(t, x, z, \tau, \xi, \zeta) = \rho^{-1}(c^{-2}\tau^2 - |\xi|^2 - \zeta^2)$ . Écrite sous forme matricielle l'équation (2.2.1) devient

$$D_z w(t, x, z) = G(x, z, D_t, D_x) w(t, x, z) + f(t, x, z), \quad \text{avec } G = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda\rho \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \Lambda u \\ \rho^{-1}D_z u \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix},$$

où  $\Lambda$  est l'O $\psi$ D de symbole  $\sqrt{1 + \tau^2 + |\xi|^2}$  et  $A = \rho^{-1}c^{-2}D_t^2\Lambda^{-1} - \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}\rho^{-1}D_{x_j}\Lambda^{-1}$ . Nous définissons

$$I'_\Theta = \{(x, z, \tau, \xi) \mid \tau \neq 0, |c(x, z)\tau^{-1}\xi| \leq \sin \Theta\}, \quad \text{et } I_\Theta = \{(t, x, z, \tau, \xi, \zeta) \mid (x, z, \tau, \xi) \in I'_\Theta, |\zeta| \leq c_0^{-1}|\tau|\},$$



F . 2.1: La zone ombrée correspond à l'ensemble  $I_\Theta$  en un certain point  $(t, x, z)$  et à une certaine fréquence  $\tau$ . L'angle de la direction de propagation est noté  $\theta$ . En pointillé est représenté l'ensemble caractéristique  $\text{Char}(p)$ .

Dans  $I_\Theta$  nous avons ainsi découplé ce qui se propage dans le sens des  $z$  positifs,  $\tilde{w}_+$ , de ce qui se propage dans le sens des  $z$  négatifs,  $\tilde{w}_-$ . Dans [Sto04], il est montré que  $b_\pm$  peuvent être choisis autoadjoints.

Nous définissons l'ensemble  $J_{\Theta_+}$  de points  $(t_0, x_0, z_0, \tau_0, \xi_0, \zeta_0)$  tels que les bicaractéristiques associées à  $b_+$ , paramétrées par  $z$ ,  $(t(z), x(z), \tau(z), \xi(z))$ , passant par  $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$  en  $z = z_0$ , sont telles que pour tout  $z \in [0, Z]$ ,  $(x(z), z, \tau(z), \xi(z))$  reste dans  $I'_\Theta$  : autrement dit l'angle de propagation,  $\theta(z)$  n'excède jamais  $\Theta$  le long de ces bicaractéristiques.

Nous choisissons maintenant  $0 < \Theta_1 < \Theta_2 < \frac{\pi}{2}$  ainsi qu'un symbole réel positif  $c(z, x, \tau, \xi) \in S^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$  tel que  $c = 0$  dans  $I_{\Theta_1}$  et non caractéristique dans le complément de  $I_{\Theta_2}$ . Nous étendons  $b_+$  hors de  $I_\Theta$  de manière  $\mathcal{C}^\infty$ , de telle sorte que  $b_+$  soit réel homogène de degré 1, et nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(2.2.2) \quad (\partial_z - ib_+(z, x, D_t, D_x) + c(z, x, D_t, D_x))v = 0,$$

$$(2.2.3) \quad v(0, \cdot) = \tilde{w}_+(0, \cdot).$$

où  $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Nous choisissons un tel angle  $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  et travaillons dans la région microlocale  $I_\Theta$  supposant que  $\text{WF}(u) \subset I_\Theta$ . La Figure 2.1 illustre l'ensemble  $I_\Theta$  en un certain point  $(t, x, z)$  et à une certaine fréquence  $\tau$ . L'angle  $\Theta$  est un angle de propagation critique que nous nous donnons. La restriction à  $I_\Theta$  nous permet de rester loin de la propagation dans la direction horizontale, i.e., dans la direction  $x$ , lorsque l'on se place sur l'ensemble caractéristique  $\text{Char}(p)$ . Dans  $I_\Theta$ ,  $G$  est un O $\psi$ D d'ordre 1 par le théorème 18.1.35 dans [Hör85a].

En suivant la méthode de [Tay75], nous voyons qu'il existe un  $Q \in \Psi^0$  dans  $I_\Theta$  tel que  $\tilde{w} = (\tilde{w}_+, \tilde{w}_-) = Q^{-1}w$  satisfait

$$D_z \tilde{w} = \tilde{G}\tilde{w} + \tilde{f} \pmod{\mathcal{C}^\infty}, \quad \tilde{f} = Q^{-1}f,$$

avec  $\tilde{G} = \tilde{G}(x, z, D_t, D_x) \in \Psi^1$  dans  $I_\Theta$ , diagonal,  $\tilde{G} = \begin{pmatrix} b_+ & 0 \\ 0 & b_- \end{pmatrix}$ , où  $b_\pm$  est de symbole principal  $\pm(c(x, z)^{-2}\tau^2 - |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Dans  $I_\Theta$  nous avons ainsi découplé ce qui se propage dans le sens des  $z$  positifs,  $\tilde{w}_+$ , de ce qui se propage dans le sens des  $z$  négatifs,  $\tilde{w}_-$ . Dans [Sto04], il est montré que  $b_\pm$  peuvent être choisis autoadjoints.

Ce problème est de la forme de celui traité au chapitre 1. Nous posons  $a(z, x, \tau, \xi) := -ib_+(z, x, \tau, \xi) + c(z, x, \tau, \xi)$ . Si certaines hypothèses sont vérifiées par  $c$ , le théorème suivant est démontré dans [Sto04]

**Théorème 2.2.1.** *Nous avons  $v = \tilde{w}_+$  (mod  $\mathcal{C}^\infty$ ) dans l'intérieur de  $J_{\Theta_1+}$  et  $v = 0$  (mod  $\mathcal{C}^\infty$ ) dans le complémentaire de  $J_{\Theta_2+}$  si les singularités de  $u$  se propagent dans la direction des  $z$  positifs en  $z = 0$ , i.e.,  $\text{WF}(u) \cap \{z = 0, \tau^{-1}\zeta > 0\} = \emptyset$ .*

Les équations « one-way » de la forme de (2.2.2) sont intéressantes en géophysique car elles permettent de ne considérer qu'une partie de la solution. Or, les notions de champs montant et descendant sont importantes dans ce domaine. En effet, au cours d'une expérience sismique, une source génère un champ qui se propage tout d'abord vers le bas. Ce champ rencontre les singularités du milieu, par exemple une faille ou des interfaces lorsque des couches sédimentaires changent de nature. Une faible partie de ce champ est réfléchi vers le haut tandis que le reste poursuit sa route vers le bas. Au bout de quelques réflexions le champ devient extrêmement faible. Les géophysiciens ne s'intéressent donc (à tort ?) qu'aux quelques premières réflexions et même en général uniquement à la première. Dans cette optique, une formulation « one-way » est un bon moyen de séparer les différentes composantes du champ et de les traiter une par une. Le théorème précédent montre que microlocalement les solutions de l'équation des ondes acoustiques et celles de l'équation « one-way » coïncident si on se place à distance de la direction horizontale. Cette restriction est en général sans conséquence en géophysique car la plus grande partie de l'énergie utilisée se propage à des angles proches de celui de la verticale.

## 2.3 Approximations

### 2.3.1 Troncature

La procédure de découplage des champs montant et descendant que nous venons de décrire fournit en fait le symbole de l'opérateur  $a(z, x, D_t, D_x)$  sous forme d'une série asymptotique,  $a(z, x, \tau, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{1-j}(z, x, \tau, \xi)$ , où  $a_{1-j}(z, x, \tau, \xi) \in \mathcal{C}^\infty([0, Z], S^{1-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n))$  (voir plus précisément [Sto04] ou l'Annexe A de [8]). Afin de nous ramener au formalisme du chapitre 1, nous regroupons les variables  $t$  et  $x$  sous la variable  $x$  et ainsi  $\tau$  et  $\xi$  sous la variable  $\xi$ . Alors  $a(z, x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{1-j}(z, x, \xi)$ . La construction précédente donne le symbole  $a(z, x, \xi)$  satisfaisant l'hypothèse 1.3.1.

En pratique, le symbole complet n'est pas employé ni même calculé. La série asymptotique est plutôt tronquée et nous utilisons :

$$\underline{a}(z, x, \xi) = \sum_{j=0}^k a_{1-j}(z, x, \xi),$$

pour  $k \geq 0$ . Le plus souvent, seul le symbole principal est conservé ; alors  $k = 0$ . Nous posons  $\underline{a}_0 = \sum_{j=1}^k a_{1-j}(z, x, \xi)$ . Nous souhaitons montrer les conséquences d'une telle approximation sur la représentation de la solution du problème de Cauchy,

$$(2.3.1) \quad \partial_z u + a(z, x, D_x)u = 0, \quad 0 < z \leq Z$$

$$(2.3.2) \quad u|_{z=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

par le produit d'OIF  $\mathcal{W}_{\mathfrak{F}, z}$  défini dans (1.1.4), en particulier quand  $\Delta_{\mathfrak{F}}$  tend vers zéro. Nous définissons ainsi un deuxième propagateur couche-mince,  $\underline{\mathcal{G}}_{(z', z)}$ , à travers son noyau :

$$\underline{\mathcal{G}}_{(z', z)}(x', x) := \int e^{i(x' - x, \xi)} e^{-\Delta a(z, x, \xi)} d\xi = \int e^{i\phi_{(z', z)}(x', x, \xi)} \underline{g}_{(z', z)}(x', \xi) d\xi,$$

où  $\underline{g}_{(z', z)}(x, \xi) := e^{-\Delta a_0(z, x, \xi)}$  et la phase  $\phi_{(z', z)}(x', x, \xi)$  est la même que celle définie dans (1.4.1). Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.1** ([10]). *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Il existe  $C > 0$  tel que pour  $z', z \in [0, Z]$  avec  $z' \geq z$ , nous avons  $\|\mathcal{G}_{(z', z)} - \underline{\mathcal{G}}_{(z', z)}\|_{(H^{(s)}, H^{(s+k)})} \leq C\Delta p(a(z, \cdot) - \underline{a}(z, \cdot))$ , pour une semi-norme  $p$  sur  $S^{-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  bien choisie et  $\Delta = z' - z$  suffisamment petit.*

Nous définissons  $\underline{\mathcal{W}}_{\mathfrak{P}, z}$  en remplaçant  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  par  $\underline{\mathcal{G}}_{(z', z)}$  dans (1.1.4). L'estimation précédente pour la propagation sur un pas de la discrétisation du paramètre d'évolution,  $z$ , peut être étendue au produit multiple d'OIF.

**Théorème 2.3.2** ([10]). *Soit  $\mathfrak{P} = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$  une subdivision de  $[0, Z]$  avec  $0 = z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(N)} = Z$  avec  $\Delta_{\mathfrak{P}} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (z^{(i+1)} - z^{(i)})$ . Pour  $\Delta_{\mathfrak{P}}$  suffisamment petit nous avons*

$$\|\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z} - \underline{\mathcal{W}}_{\mathfrak{P}, z}\|_{(H^{(s)}, H^{(s+k)})} \leq CZ \sup_{z \in [0, Z]} p(a(z, \cdot) - \underline{a}(z, \cdot)) e^{CZ}, \quad z \in [0, Z],$$

pour une semi-norme  $p$  sur  $S^{-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  bien choisie.

Ce résultat est en accord avec la proposition suivante qui s'obtient à partir de l'inégalité d'énergie (1.3.1).

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $u$  la solution du problème de Cauchy (2.3.1)–(2.3.2) et  $\underline{u}$  la solution du même problème avec  $a(z, x, \xi)$  remplacé par  $\underline{a}(z, x, \xi)$ . Il existe  $\lambda_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que*

$$\|u(z, \cdot) - \underline{u}(z, \cdot)\|_{H^{(s+k)}} \leq CZ \sup_{z \in [0, Z]} p(a(z, \cdot) - \underline{a}(z, \cdot)) e^{\lambda Z} \|u_0\|_{H^{(s)}}, \quad z \in [0, Z], \lambda > \lambda_0,$$

pour une semi-norme  $p$  sur  $S^{-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  bien choisie.

**Remarque 2.3.4.** En imagerie sismique, c'est principalement le front d'onde et sa propagation qui nous intéressent. Nous avons vu dans la section 1.6 que celle-ci est uniquement gouvernée par le symbole principal  $a_1(z, x, \xi)$ . Ainsi, nous obtenons  $\text{WF}(\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}(u_0)) = \text{WF}(\underline{\mathcal{W}}_{\mathfrak{P}, z}(u_0))$ , ce qui ne signifie pas pour autant que  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}(u_0) - \underline{\mathcal{W}}_{\mathfrak{P}, z}(u_0)$  soit  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous voyons alors que le théorème 1.6.10 est aussi valable pour l'approximation  $\underline{\mathcal{W}}_{\mathfrak{P}, z}$ .

### 2.3.2 Approximations « Generalized Screens »

Nous considérons de nouveau le symbole  $a(z, x, \tau, \xi) = -ib(z, x, \tau, \xi) + c(z, x, \tau, \xi)$  obtenu dans la section 2.2 avec les variables  $t$  et  $x$  traitées indépendamment maintenant. Le symbole principal est  $a_1(z, x, \tau, \xi) = -ib_1(z, x, \tau, \xi) = -i\sqrt{c^{-2}(x)\tau^2 - |\xi|^2}$  dans  $I_{\Theta_1}$ . La suite de l'analyse, en particulier les approximations faites sur  $b(z, x, \tau, \xi)$  vont se placer dans  $I_{\Theta_2}$ . Hors de  $I_{\Theta_2}$  les singularités disparaissent et le choix fait pour  $b(z, x, \tau, \xi)$  dans cette région importe peu.

Dans le cas d'un milieu invariant horizontalement, la phase de l'opérateur  $\mathcal{G}_{(z', z)}$  correspond à celle d'une transformée de Fourier dans les directions horizontales, un changement de phase correspondant au pas de propagation  $z' - z$ , et une transformée de Fourier inverse. Si nous discrétisons les directions horizontales et remplaçons les transformées de Fourier par des transformées de Fourier discrètes rapides (FFT), la forme de  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}$  donne alors un schéma avec un nombre d'opérations proportionnel à  $N_x \log N_x$ , où  $N_x$  est le nombre d'échantillons dans les directions horizontales.

En présence de variations horizontales du milieu, le symbole  $a(z, x, \tau, \xi)$  et son symbole principal  $a_1(z, x, \tau, \xi)$  sont différents pour chaque point  $x$  associé à une vitesse différente  $c(x)$  et l'opération de propagation doit être recalculée pour chaque point. Nous obtenons alors une complexité proportionnelle à  $N_x^2 \log N_x$  pour chaque pas de propagation ce qui n'est pas acceptable, en pratique, pour des applications telles que l'imagerie. La représentation des solutions de (2.2.2)–(2.2.3) par  $\mathcal{W}_{\mathfrak{P}, z}$  va être à première vue limitée dans son application du fait d'un coût de calcul important. Nous pouvons cependant développer des approximations pour cette représentation afin d'obtenir des algorithmes rapides avec une complexité de l'ordre de  $N_x \log N_x$ .

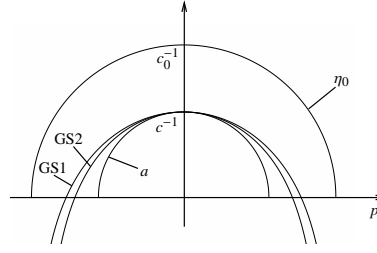


Fig. 2.2: Symboles principaux GS. Celui du milieu exact correspond à la vitesse  $c$  ; celui du milieu référence,  $\eta_0$ , correspond à la vitesse  $c_0$  ; GS 1 et GS 2 correspondent aux symboles principaux incorporant le premier et deuxième terme dans le développement GS de  $a(z, x', \xi)$  ;  $p = \tau^{-1}\xi$  est la « lenteur horizontale ».

L'idée de la méthode GS est de séparer les dépendances en  $x$  et  $\xi$  dans la phase des opérateurs afin de pouvoir « extraire » les dépendances spatiales hors des intégrales de Fourier du propagateur couche-mince  $\mathcal{G}_{(z',z)}$ . Pour cela nous introduisons une formulation par contraste. Pour  $z \in [0, Z]$ , nous choisissons  $\rho_0(z)$  et  $c_0(z)$ , avec  $c_0(z) \leq c(x, z)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Nous posons alors  $\gamma_0(z, \tau, \xi)$  égal au symbole  $a(z, x, \tau, \xi)$  dans le cas où  $c(x, z)$  est remplacé par  $c_0(z)$  et  $\rho$  est remplacé par  $\rho_0$ . La procédure de la section 2.2 donne  $\gamma_0(z, \tau, \xi)$  avec son symbole principal égal à  $\sqrt{c_0(z)^{-2}\tau^2 - |\xi|^2}$  dans  $I_{\Theta_1}$ . Nous écrivons

$$\varepsilon_c(x, z) = c(z)/c_0(x, z) - 1 = \varepsilon e_c(x, z), \quad \varepsilon_\rho(x, z) = \rho(x, z)/\rho_0(z) - 1 = \varepsilon e_\rho(x, z).$$

La propagation verticale correspond à  $\xi = 0$ . Souhaitant une propagation exacte dans cette direction qui est notre direction principale de propagation, nous développons le symbole  $a(z, x, \tau, \xi) - a(z, x, \tau, 0)$  en une série asymptotique en puissances de  $\varepsilon$  :

$$(2.3.3) \quad a(z, x, \tau, \xi) - a(z, x, \tau, 0) \sim \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \eta_j(z, x, \tau, \xi).$$

Au niveau du symbole principal  $a_1(z, x, \tau, \xi)$  cela revient en fait à un développement de Taylor. Pour le reste du symbole, la méthode utilisée dans [6] consiste à faire tout d'abord cette formulation par contraste<sup>1</sup> sur l'opérateur  $A$  défini dans la section 2.2 et à procéder à l'identification des termes constituant la série asymptotique (2.3.3) à travers la procédure de calcul (pseudodifférentiel) de  $a(z, x, \xi)$  de la section 2.2. Nous référons le lecteur à [6] pour plus de détails.

L'aspect intéressant de ce développement asymptotique du symbole  $a(z, x, \tau, \xi) - a(z, x, \tau, 0)$  est que chaque élément de la série (2.3.3) est de la forme  $\eta_j(z, x, \tau, \xi) = \sum_{0 \leq l \leq l_j} \hat{\eta}_j^{(l)}(z, \tau, x) \tilde{\eta}_j^{(l)}(z, \tau, \xi)$ , où la somme est finie, mais  $l_j$  varie. Ainsi, dans chacun des termes de cette somme les dépendances en  $x$  et  $\xi$  sont séparées.

Le développement GS (2.3.3) est tronqué en pratique. Nous écrivons

$$a(z, x, \tau, \xi) - a(z, x, \tau, 0) \simeq \gamma_0(z, \tau, \xi) - \gamma_0(z, \tau, 0) + \gamma_1(z, x, \tau, \xi),$$

avec  $\gamma_0(z, \tau, \xi) - \gamma_0(z, \tau, 0) = \eta_0(z, \tau, \xi)$ ,  $\gamma_1(z, x, \tau, \xi) = \sum_{1 \leq j \leq R} \varepsilon^j \eta_j(z, x, \tau, \xi)$ . La Figure 2.3.2 illustre le développement GS pour la partie principale du symbole. Si nous injectons maintenant ce développement tronqué dans le propagateur couche mince nous obtenons le propagateur GS [6, 12] :

$$\mathcal{G}_{(z',z)}^{GS} u(\tau, x') := e^{-\Delta(a(z,x',\tau,0) - \gamma_0(z,\tau,0))} \iint e^{i(x' - x, \xi)} e^{-\Delta(\gamma_0(z,\tau,\xi) + \gamma_1(z,x',\tau,\xi))} u(\tau, x) dx d\xi$$

où la transformée de Fourier par rapport au temps n'est pas indiquée par simplification (les coefficients ne dépendent pas de  $t$ ).

<sup>1</sup>Un facteur d'adimensionnement relatif à la variable transverse  $x$  est aussi utilisé afin d'identifier plus facilement, à travers ses puissances, les différents ordres de symbole dans le développement asymptotique.



La dernière approximation qui est faite est la suivante, à l'ordre un,

$$e^{-\Delta\gamma_1(z, x', \tau, \xi)} \simeq 1 - \Delta\gamma_1(z, x', \tau, \xi) = 1 - \Delta \sum_{1 \leq j \leq R} \sum_{0 \leq l \leq l_j} \varepsilon^j \tilde{\eta}_j^{(l)}(z, \tau, x) \tilde{\eta}_j^{(l)}(z, \tau, \xi),$$

ce qui permet de faire sortir les éléments ne dépendant pas de  $\xi$  hors de l'intégrale de Fourier. Cette dernière approximation est numériquement valide quand  $\Delta$  est petit mais affecte la stabilité du schéma obtenu. Une opération de normalisation permet de la rétablir [6, 12].

La Figure 2.3 montre des calculs numériques de la résolution de l'équation des ondes « one-way » dans un modèle géologiquement raisonnable. La comparaison est faite avec une résolution complète de l'équation des ondes par différences finies. Un exemple est donné pour la propagation dans le cas élastique pour lequel nous pouvons aussi formuler des équations « one-way » suivant la procédure de la section 2.2 ; une approximation GS du propagateur couche mince peut alors être développée et mise en pratique dans le cas d'une phase matricielle (voir [14]). On notera la prise en compte des caustiques par cette méthode de résolution de l'équation « one-way » (voir le commentaire 1.6.4). Dans le cas élastique on observe un couplage entre les ondes de compression (P) rapides et les ondes de cisaillement (S) plus lentes (nous avons simplement pris la vitesse des ondes S égale à la moitié de celle des ondes P). Ici nous nous sommes intéressés à la propagation des ondes dans des milieux isotropes. Un type particulier d'anisotropie est traité pour les ondes P dans [13]. Les calculs avec la méthode GS dans la figure 2.3 utilisent uniquement le symbole principal de  $a(z, x, \tau, \xi)$ .

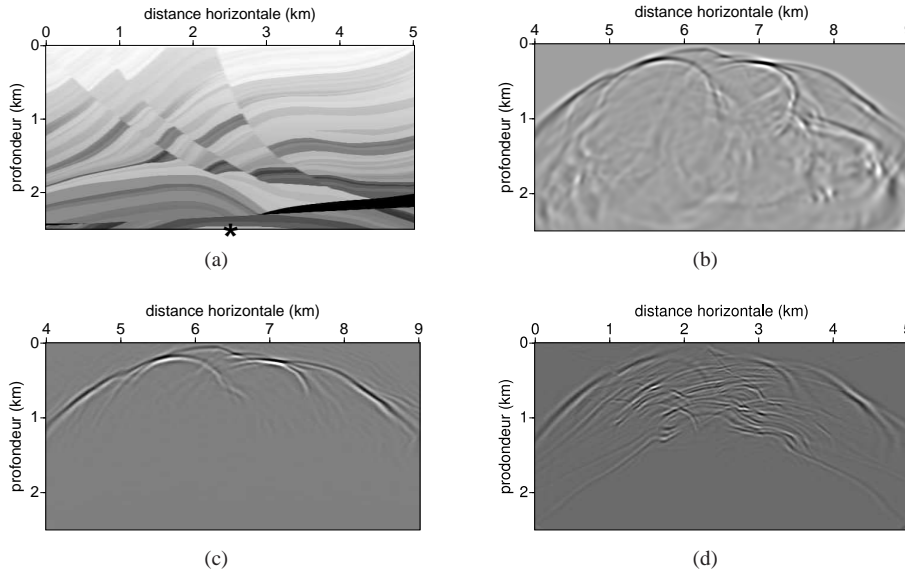


FIG. 2.3: (a) Modèle de vitesse Marmousi (Institut Français du Pétrole). Blanc=1500 m/s ; noir=5500 m/s. L'étoile indique la position de la source ; (b) Champ d'onde complet calculé par une méthode de différences finies (deuxième ordre en espace et en temps) ; (c) Champ d'onde montant acoustique calculé par méthode GS (ordre 4) au temps  $t=0.9$  s ; (d) Champ d'onde montant élastique (composante horizontale) calculé par méthode GS (ordre 2) au temps  $t=0.9$  s ; la source utilisée est explosive.

## 2.4 Formulation du problème d'imagerie et mise en pratique

Lors des expériences d'acquisition de données sismiques, nous notons  $s$  la position des sources,  $r$  la position des récepteurs, et  $t$  désigne le temps d'enregistrement. Les deux premières variables sont dans une sous-

variété de  $\mathbb{R}^3$  de codimension 1 et  $t$  est dans  $\mathbb{R}$ . Pour simplifier nous prenons  $s$  et  $r$  dans le plan horizontal  $\{z = 0\}$  ici.

Soit  $H(z', z)$  l'opérateur solution de

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} (\text{DSR}) \quad & (\partial_z + a(z, s, D_t, D_s) + a(z, r, D_t, D_r))u(z, t, s, r) = 0, \\ & u(0, \cdot) = u_0(\cdot). \end{aligned}$$

Le nom de cette équation vient de « double-square-root », puisque le symbole principal de  $a(z, x, D_t, D_x)$  est une racine carrée dans  $I_{\Theta_1}$ . La première des « racines carrées » correspond à la propagation entre la source et le point diffractant et la seconde entre celui-ci et le récepteur. À partir de  $H(z', z)$  nous obtenons l'opérateur de modélisation sismique dans le cadre de l'approximation de linéarisation de Born [SDH05] :

$$(2.4.2) \quad F(\delta c)(s, r, t) := Q_r^*(0)Q_s^*(0) \int_0^z H(0, z)Q_r(z)Q_s(z)g(z, \cdot)dz, \quad \delta c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{d+1}),$$

où les opérateurs  $Q_r(z)$  et  $Q_s(z)$  correspondent à ceux de la section 2.2 et  $g(z, \cdot)$  est donné par

$$(2.4.3) \quad g(z, s, r, t) := \delta(t)\delta(s-r) \left( \frac{\delta c}{c} \right) \left( z, \frac{s+r}{2} \right).$$

La distribution à support compact  $\delta c(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , représente la partie singulière de la vitesse de propagation des ondes  $c(x) + \delta c(x)$  où  $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Dans le cadre de l'approximation de Born seule la vitesse  $c(x)$  est utilisée dans le calcul de  $a(z, x, \tau, \xi)$ .

Nous pouvons donner une description intuitive de l'action de  $F$  telle qu'on la trouve dans la littérature géophysique (voir par exemple [Cla85]). L'opérateur étant linéaire, il suffit de décrire l'action de  $F$  sur une mesure de Dirac,  $\delta c = \delta_{y_0}$ , placée en  $y_0 = (x_0, z_0)$  ( $x$  est la variable horizontale). Nous écrivons  $U(x', z', t, x, z)$  l'opérateur solution de la section 2.2 pour l'équation « one-way » vers le haut. Alors la solution de notre modélisation est donnée par l'action de  $\int U(s, 0, t - \sigma, x, z)U(r, 0, \sigma, x, z)d\sigma$  sur  $\delta_{y_0}/c(y_0)$ , où nous avons oublié ici, pour simplifier, l'action des opérateurs  $Q_r$  et  $Q_s$  qui permettent de passer à la formulation « one-way ». La convolution en temps que nous avons écrite « relie » la propagation entre la source et le point diffractant,  $y_0$ , et celle entre  $y_0$  et le récepteur, au niveau de  $y_0$ . Le rapport  $\delta_{y_0}/c(y_0)$  provient de l'approximation de Born. En posant

$$H(z, z')(s, r, t, s', r', t') = \int U(s, z, t - t' - \sigma, s', z')U(r, z, \sigma, r', z')d\sigma,$$

nous obtenons l'opérateur solution de l'équation (DSR). Nous observons alors que nous avons bien

$$\begin{aligned} & \iiint H(0, z')(s, r, t, s', r', t') g(z', s', r', t') ds' dr' dt' dz' \\ & = \iiint U(s, 0, t - \sigma, x, z)U(r, 0, \sigma, x, z) \delta((x, z) - y_0)/c(y_0) d\sigma dx dz, \end{aligned}$$

avec  $g$  donné dans (2.4.3).

L'opérateur d'imagerie est l'opérateur adjoint de  $F$  : des conditions sur  $c$  permettent de montrer que  $F^* \circ F$  est un  $\text{Op}\psi\text{D}$  (voir par exemple [SdH06]). L'opérateur  $F^*$  appliqué aux données sismiques permet ainsi de localiser les singularités de  $\delta c$  par la propriété pseudolocale des  $\text{Op}\psi\text{D}$ . Les méthodes que nous avons développées donnent une représentation de  $H_{(z', z)}$  par produit d'OIF et permettent ainsi de formuler l'opérateur d'imagerie par de tels produits (voir [5]). L'approximation GS permet d'appliquer numériquement cette représentation de manière efficace. La Figure 2.4 montre des résultats d'imagerie par les méthodes présentées pour des données réelles de mer du Nord. Ces images ont été réalisées en collaboration avec Total (voir

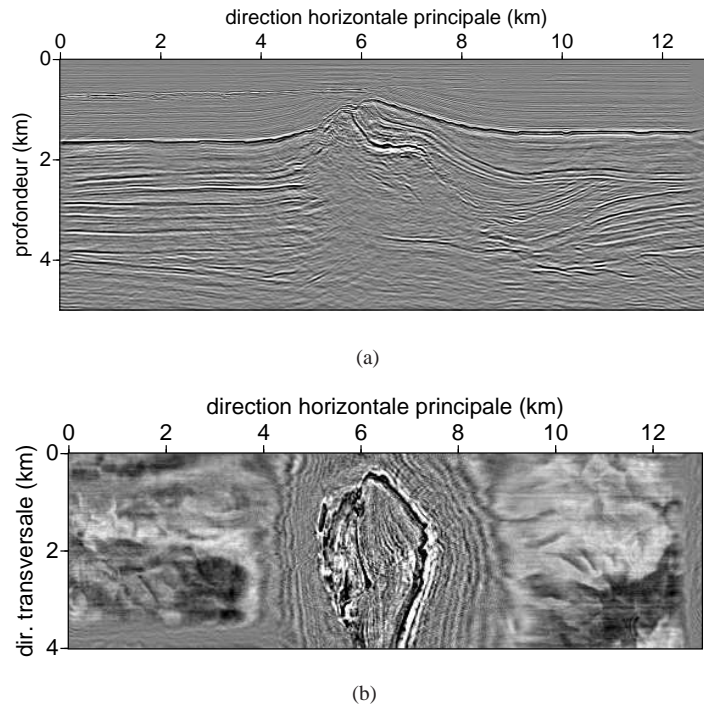


Fig. 2.4: Image d'un bloc de données 3D de mer du Nord (données L7D de Total) ; (a) coupe verticale ; (b) coupe horizontale.

[11] pour une description des données et du traitement appliqué). Sur ces images on peut voir une structure de dôme de sel assez typique de la géologie de la mer du Nord. En particulier la coupe horizontale de la Figure 2.4b permet de voir les couches sédimentaires qui entourent le dôme et qui ont été plissées, ainsi que des chenaux qui se sont créés au moment de la percée du sel<sup>2</sup>.

## 2.5 Prolongement de données

Contrairement à ce qui précède, l'approche que nous suivons ici ne se fonde pas sur un découplage micro-local de l'équation des ondes. Cela reste cependant une technique utilisable pour la mise en pratique. Nous nous intéressons ici à la possibilité de générer des données sismiques à partir de données lacunaires. Il est commun en effet de vouloir générer des données qui n'ont pas pu être acquises. Un exemple classique est les données à « offset » nul. L'offset est la demi-distance entre la source et le récepteur. La source utilisée étant extrêmement violente (explosion, canon à air) il est impossible de placer un récepteur près de la source. Pourtant les données à offset nul sont utilisées en géophysique. Elles sont créées numériquement à partir des autres données. Dans d'autres cas la géographie de la zone d'acquisition ne permet pas de placer des sources ou des récepteurs en certains endroits. En outre, le plus souvent, une acquisition complète serait trop onéreuse et sources et récepteurs sont placés sur une sous-variété de la variété d'acquisition. Pour le travail d'interprétation il est important de reconstruire ces données manquantes. Pour cela nous exploitons la redondance des données sismiques. Les opérateurs impliqués dans ces prolongements de données sont

<sup>2</sup>Des corps constitués de sel percent les sédiments qui les recouvrent lors de la première phase de la diagénèse, la compaction des sédiments (les sédiments s'appauvrissent en eau et leur densité augmente jusqu'à devenir supérieure à celle du sel qui se trouve en dessous).

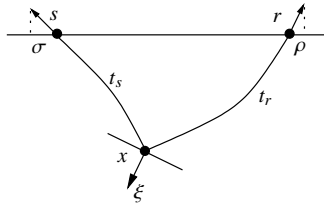


Fig. 2.5: Paramétrisation d'une expérience sismique : source,  $s$ , récepteur,  $r$ , point diffractant,  $x$ , temps de parcours,  $t = t_s + t_r$ ;  $(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^3) \setminus 0$ ;  $(s, r, t, \sigma, \rho, \tau) \in T^*(Y) \setminus 0$ .

des OIF. Les sommations impliquées ont la vertu d'améliorer le rapport signal sur bruit. Ainsi par exemple des données à offset nul obtenues numériquement sont moins bruitées que les données originelles et donc très utiles pour l'interprétation des données.

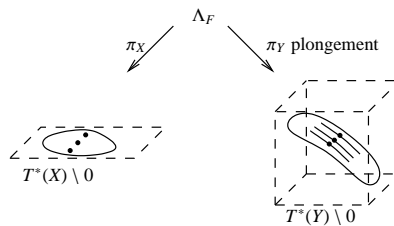
Comme précédemment le milieu de propagation est caractérisé par une vitesse de propagation  $c + \delta c$ ,  $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  et  $\delta c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ . Dans le cadre de l'approximation de Born, le champ diffracté par la partie singulière du milieu  $\delta c$  est donné par [7],[SdH02]

$$(2.5.1) \quad \delta G(s, r, t) = \int_X \int_0^t G(r, t - t_s; x) 2c^{-3}(x) \delta c(x) \partial_t^2 G(x, t_s; s) dt_s dx,$$

où  $G(x, t; y)$  est la fonction de Green causale de l'équation des ondes. Cette fonction de Green est le noyau d'un OIF. Nous désignons par  $X = \mathbb{R}^3$  le milieu de propagation et  $Y$  la variété d'acquisition pour les variables  $s, r$  et  $t$ . Typiquement  $Y$  est de dimension 5 ( $2 + 2 + 1$ ).

L'opérateur de modélisation des données sismiques s'obtient à travers la composition de l'opérateur  $M : \delta c \mapsto \delta G$  avec l'opérateur de restriction  $R$  à la variété d'acquisition  $Y$ . Sous certaines conditions de transversalité des bicaractéristiques à la traversée de  $Y$  l'opérateur de modélisation  $F = R \circ M$  est un OIF. L'opérateur  $F^*$  est l'opérateur d'imagerie. Il est de même un OIF. C'est à travers sa relation canonique que nous pouvons suivre les singularités dans les données (réflexions) jusqu'à celles de l'image. La relation canonique de  $F$  est notée  $\Lambda_F$ . Nous faisons l'hypothèse suivante (condition de Bolker).

**Hypothèse 2.5.1.** [Gui85] *La projection de  $\Lambda_F$  sur  $T^*Y \setminus 0$  est un plongement.*



Cette hypothèse permet de montrer que  $F^* \circ \psi \circ F$  est un  $O\psi D$  pour  $\psi$ , un  $O\psi D$  bien choisi [SdH02]. Ainsi le front d'onde de  $\delta c$  n'est pas déplacé dans l'opération d'imagerie.

L'hypothèse 2.5.1 permet de paramétrer  $\Lambda_F$  par les variables de  $T^*(X) \setminus 0$  ainsi qu'une variable  $e \in E$  qui caractérise la redondance des données. Dans le cas où  $Y$  est de dimension 5,  $E \subset \mathbb{R}^2$ . La relation canonique  $\Lambda_F$  possède une structure fibrée naturelle comme illustrée dans la figure précédente. Un exemple de variable  $e$  utilisable en pratique correspond aux angles de réflexion et d'azimut au niveau du point diffractant  $x$  dans l'expérience sismique (voir la Figure 2.5).

L'opérateur  $F^*$  inclut de manière implicite une intégration par rapport à  $e$ . En un point diffractant<sup>3</sup>,  $(x, \xi)$ , toutes les données contribuant à la formation d'une image sont sommées. Si cette sommation n'est pas réalisée nous avons une famille d'opérateurs  $L = L(e)$  paramétrée par  $e$ .

Localement, des données sismiques lacunaires correspondent à des lacunes dans la direction  $e$ . À travers la relation canonique  $\Lambda_F$ , nous pouvons identifier dans les données sismiques l'ensemble des variables  $e$  qui caractérisent un point diffractant  $(x, \xi)$ . Par exemple si nous reprenons le cas où  $e$  désigne les angles de réflexion et d'azimut, les données à angle de réflexion nul, qui correspondent à un offset nul sont absentes des données sismiques. Nous donnons maintenant un résultat de [7] pour la création de ces données à offset nul.

Une méthode pour générer des données à offset nul est de considérer que les trajets source–point diffractant et point diffractant–récepteur  $s-x$  et  $x-r$  sont les mêmes. Alors, suivant le modèle introduit plus haut, un opérateur de modélisation de données à offset nul  $F_0$  peut être écrit comme un OIF, moyennant une hypothèse de transversalité des bicaractéristiques sur la sous-variété  $\{s = r\} \times \mathbb{R}$  de  $Y$ .

L'opérateur de prolongement de données est alors  $F_0 \circ L$  (l'opérateur  $F_0$  est trivialement étendu à des fonctions en  $x$  et  $e$ ). En pratique,  $F_0 \circ L$  est nommé DipMoveOut (DMO) par les géophysiciens. Moyennant une hypothèse technique sur le choix du paramètre  $e$ , qui est vérifié dans l'exemple naturel donné plus haut, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 2.5.2.** *L'opérateur DMO,  $F_0 \circ L$ , est un OIF. De plus sa relation canonique peut être caractérisée.*

La démonstration passe par une analyse de la composition des relations canoniques associées aux deux opérateurs. Ce résultat est important car il permet de représenter localement le noyau de l'opérateur DMO par une intégrale oscillante. Cette représentation est très naturelle en géophysique. La relation canonique de l'opérateur DMO qui est alors une sous-variété régulière permet, entre autres, de suivre comment les singularités des données lacunaires sont utilisées pour générer celles des nouvelles données.

D'autres types de prolongement de données sont traités dans [7]. Dans [16], ces techniques sont illustrées numériquement. En particulier, des réponses impulsionnelles de ces opérateurs de prolongement sont générées. Ici, dans la Figure 2.6, nous donnons un exemple de prolongement de données réalisé dans le cas d'un milieu de propagation caractérisé par une lentille où les vitesses sont lentes ce qui génère des caustiques.

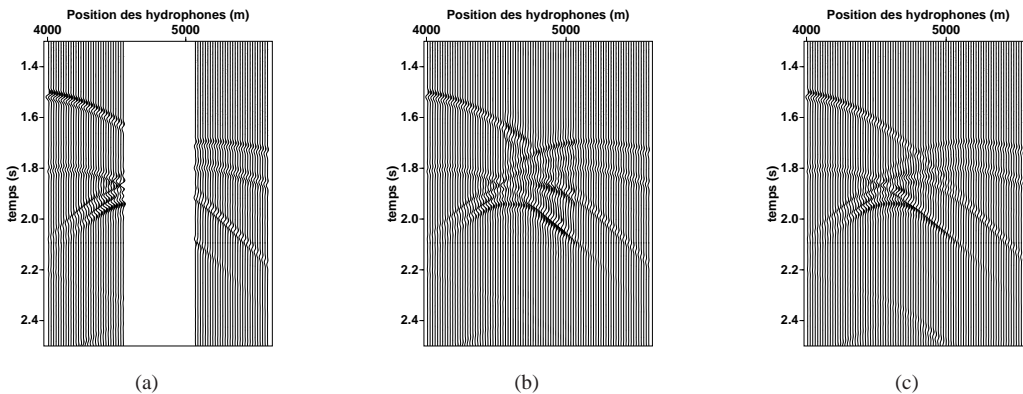


FIG. 2.6: Prolongement de données synthétiques en présence de caustiques ; (a) données lacunaires ; (b) données prolongées ; (c) données exactes.

<sup>3</sup>la variable cotangent  $\xi$  correspond à la direction normale d'un réflecteur en  $x$  (voir la Figure 2.5).

# Perspectives

Nous achevons cette première partie par des perspectives et développements futurs que nous souhaitons entreprendre.

Les résultats du chapitre 1 concernent des équations pseudodifférentielles d'ordre un. Les coefficients  $y$  sont donc réguliers par rapport à la variable  $x$ . Pour les applications pratiques, telles que celles d'imagerie décrites dans le chapitre 2, il est fréquent de rencontrer des milieux à coefficients non réguliers. En géophysique, la présence de failles issues de la tectonique, les variations de faciès sédimentaires, génèrent des discontinuités dans les vitesses de propagation des ondes. Lorsque nous appliquons nos méthodes à des données sismiques, les hypothèses de régularité des coefficients ne sont pas satisfaites. Bien que nous ne disposions d'aucun résultat démontré dans de tels cas, nous pouvons observer de bons résultats numériques. Pour les données de mer du Nord de Total que nous avons traitées au chapitre 2 (voir aussi [11]), le contraste entre les sédiments et le sel est grand. On passe d'une vitesse des ondes P de  $2500 \text{ m.s}^{-1}$  à  $5000 \text{ m.s}^{-1}$ . Malgré de telles violations de nos hypothèses de régularité, la stabilité numérique reste préservée (expérimentalement). Bien que le calcul des OIF et celui des  $O\psi/D$  nécessitent beaucoup de régularité sur les coefficients, il devrait être possible d'étendre certains de nos résultats à des coefficients singuliers. Nous avons aussi en tête, en collaboration avec l'équipe de P. Joly et A.-S. Bonnet, l'utilisation de nos méthodes pour la simulation de la propagation dans des guides d'onde. Alors, le milieu est typiquement singulier dans la direction transverse, avec des discontinuités à l'échelle de la longueur d'onde. Une approche possible serait l'introduction d'un terme de viscosité évanescence. Nous y reviendrons un peu plus bas.

L'analyse que nous avons faite ici correspond à celle d'une semi-discrétisation en temps du problème continu hyperbolique. Afin de compléter l'étude des aspects numériques de cette méthode, il faudrait aussi analyser les approximations faites en remplaçant les transformées de Fourier par des transformations discrètes comme nous le faisons dans nos codes numériques. Le domaine de calcul est alors borné et il se pose le problème de définition de conditions au bord. L'utilisation de couches absorbantes de type PML, « Perfectly Matched Layer » [Ber94], devrait permettre de restituer l'aspect « milieu non-borné » du problème. La formulation des PML étant proche de celle des équations « one-way », leur utilisation devrait être assez naturelle. Nous avons déjà procédé à des tests numériques qui se révèlent très encourageants.

Le cas des systèmes hyperboliques que nous avons traité appelle à des développements.

- Bien que nous ne l'ayons pas traité explicitement, nous pouvons nous attendre à ce que la propagation des singularités s'étudie de manière similaire à ce que nous avons fait dans le cas scalaire. En effet, avec un diagonaliseur régulier, le traitement doit pouvoir se ramener à l'étude scalaire.
- Dans le cas d'un système symétrisable, il semble important de savoir si une estimation fine de la norme de l'opérateur couche mince, comme celle donnée dans le théorème 1.7.4, est vraie ou non.
- Concernant la régularité des symétriseurs/diagonaliseurs nous pouvons faire le commentaire suivant. Dans le cas symétrisable nous avons vu que la régularité du symétriseur par rapport au paramètre d'évolution  $z$  (Lipschitz) semble optimale au sens où elle correspond à la régularité exigée pour obtenir une inégalité d'énergie et donc l'existence et l'unicité des solutions. Dans le cas symétrique, le diagonaliseur a été supposé continu par rapport à  $z$  et régulier par rapport à la variable transverse,  $x$ . Cette dernière ré-

gularité exclut certains cas où les changements des multiplicités des valeurs propres rendent le choix de bases de vecteurs propres réguliers impossible (voir [Kat80]). L'étude de tels cas semble très difficile. On ne sait alors pas toujours construire de paramétrix. Il serait bon d'étudier la méthode que nous proposons dans ces cas. Il faudrait pouvoir définir des intégrales oscillantes à phase matricielle sans avoir recours à une diagonalisation.

En collaboration avec H. Isozaki (Université de Tsukuba, Japon) nous avons étudié des extensions possibles de notre approche au cas parabolique du deuxième ordre. Il est alors intéressant de constater qu'il nous faut recourir au calcul de Weyl [Hör79] plutôt qu'au calcul standard des  $O\psi D$ . Nous considérons un  $O\psi D$  du second ordre défini par la quantification de Weyl de  $q(x, \xi)$  :

$$q^w(x, D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} q((x+y)/2, \xi) u(y) dy d\xi.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante

**Hypothèse.** Le symbole  $q(x, \xi)$  est de la forme  $q(x, \xi) = q_2(x, \xi) + q_1(x, \xi)$ , où  $q_j(x, \xi) \in S^j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $q_2(x, \xi)$  est réel et  $q_2(x, \xi) \geq C|\xi|^2$  pour  $C > 0$  et  $|\xi|$  suffisamment grand.

Nous posons  $p_\Delta(x, \xi) = e^{-\Delta q(x, \xi)}$ . Nous avons déjà obtenu le résultat suivant, en particulier en remplaçant l'utilisation de l'inégalité de Gårding précisée faite dans le théorème 1.4.9 par celle de Fefferman-Phong ([FP78], [Hör85a, corollaire 18.6.11]).

**Théorème.** Il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|p_\Delta^w(x, D_x)\|_{(L^2, L^2)} \leq 1 + C\Delta,$$

pour  $0 \leq \Delta \leq \Delta_{\max}$ .

Ce résultat permet de procéder comme nous l'avons fait ici dans le cas hyperbolique et d'obtenir un résultat de représentation de l'opérateur solution comme produit infini d' $O\psi D$ . Nous souhaitons obtenir l'extension de ce résultat aux équations différentielles paraboliques sur une variété en s'inspirant du traitement du cas des systèmes symétrisables que nous avons fait ici. En effet, si un opérateur différentiel elliptique est défini sur une variété riemannienne, son symbole de Weyl obéit à certaines transformations lorsque l'on passe d'une carte locale à l'autre. Il est clair que le symbole  $p_\Delta(x, \xi)$  ne respecte pas ces transformations. Cependant, nous espérons que les « erreurs » introduites lors de la composition des opérateurs  $p_\Delta^w(x, D_x)$  pourront être gérées comme les termes « parasites » de la section 1.7.2.

Le cas des équations de Schrödinger est aussi un domaine de développement possible. Nous avons signaler plus haut les liens qui existent entre notre approche et les intégrales de Feynman qui permettent de donner une formulation de la solution fondamentale pour des opérateurs de Schrödinger (voir par exemple [FKg05]).

Si maintenant, pour le cas hyperbolique, nous introduisons un terme de la forme  $e^{-\Delta^2 q(x, \xi)}$  dans le propagateur couche mince du chapitre 1 et si  $q(x, \xi)$  satisfait l'hypothèse donnée plus haut, alors ce terme, quadratique en  $\Delta$ , correspond à une viscosité évanescence. Par exemple, le produit infini d' $O\psi D$  de symbole  $e^{-\Delta^2 q(x, \xi)}$  converge vers l'identité. L'introduction d'un tel terme de régularisation parabolique pourra peut-être s'avérer intéressante pour l'étude des cas à coefficients non réguliers. En pratique, cela peut permettre par exemple la stabilisation de schémas.

Deuxième partie

## **Contrôle et problèmes inverses**





## Chapitre 3

# Contributions à la théorie du contrôle des équations paraboliques et aux problèmes inverses

### 3.1 Introduction et notations

Dans ce troisième chapitre nous traitons de la théorie du contrôle et d'un problème inverse relatifs aux équations paraboliques.

La contrôlabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques a connu un développement important depuis les années 90 en particulier grâce aux contributions de [LR95] et [FI96] : l'obtention d'inégalités dites de Carleman et leur utilisation dans ce cadre ont conduit à des résultats nouveaux de contrôlabilité dits de contrôlabilité aux trajectoires. La méthode de [LR95] a été étendue, entre autres, au problème de la contrôlabilité du système de la thermoélasticité [LZ98a] ainsi qu'à celui de la thermoélasticité des plaques [BN02]. L'utilisation des inégalités de Carleman dites globales de [FI96] a permis d'obtenir la contrôlabilité d'équations paraboliques semi-linéaires [Bar00, FCZ00], de systèmes de réaction-diffusion [ABD06], et des équations de Navier-Stokes [Ima01]. Ces mêmes inégalités ont également permis d'établir de nouveaux résultats de stabilité de type Lipschitz pour des problèmes inverses [IY98, BP02]. Dans notre étude, nous nous concentrons sur le cas où les coefficients de la partie principale de l'opérateur sont non réguliers. Typiquement la partie principale des opérateurs que nous considérons est de la forme  $\partial_t - \nabla \cdot (c \nabla)$ . Nous prenons le coefficient  $c$  de type  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et même simplement à variations bornées (BV) dans certains cas.

Soient  $\Omega$  un ouvert régulier et borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\omega \Subset \Omega$ . Soit  $T > 0$ . Nous posons  $Q = (0, T) \times \Omega$  et  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ . Afin d'expliquer la méthodologie que nous suivons, nous nous plaçons tout d'abord dans le cas simple d'une équation à coefficients constants avec des données de Dirichlet au bord :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

La fonction  $v$  s'appelle le contrôle. Ce contrôle est ici « distribué » car il s'applique dans un sous-domaine de mesure non nulle de  $\Omega$ . Nous considérerons aussi le cas d'un contrôle « frontière ». La contrôlabilité exacte dans  $L^2(\Omega)$  au temps  $T$  d'une telle équation serait

$$(CE) \quad \forall y_T, y_0 \in L^2(\Omega), \exists v \in L^2(Q) \text{ tel que } y(T) = y_T.$$

Il est bien connu que dans le cas des équations paraboliques, en particulier dans le cas de l'équation de la chaleur que nous avons écrite, la contrôlabilité exacte est fautive par le caractère régularisant du semi-groupe de la chaleur. La contrôlabilité exacte est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante [Zab92]

$$(3.1.2) \quad \|q(T)\|_{L^2}^2 \leq C \iint_{(0,T) \times \omega} |q|^2 dx dt,$$

pour le système dual

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T) = q_T & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En considérant une base orthonormale de fonctions propres du Laplacien sur  $\Omega$  nous constatons en effet qu'une telle inégalité est impossible.

Une deuxième notion souvent abordée dans la théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles est celle de la contrôlabilité approchée. On souhaite alors démontrer que

$$(CA) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall y_T, y_0 \in L^2(\Omega), \exists v \in L^2(Q) \text{ tel que } \|y(T) - y_T\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Dans le cas des équations paraboliques telles que l'équation de la chaleur que nous avons écrite la contrôlabilité approchée est vraie. Comme elle correspond à la densité de l'image du semi-groupe de la chaleur, elle est équivalente au problème d'unicité suivant pour le système dual (3.1.3) [FPZ95] :

$$q = 0 \text{ sur } (0, T) \times \omega \quad \Rightarrow \quad q = 0 \text{ sur } Q.$$

La notion qui nous intéresse ici est celle de la contrôlabilité à zéro. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$(C-0) \quad \forall y_0 \in L^2(\Omega), \exists v \in L^2(Q) \text{ tel que } y(T) = 0.$$

Cette notion est équivalente à celle de la contrôlabilité aux trajectoires dans le cas des équations linéaires :

$$\forall y_0 \in L^2(\Omega), \exists v \in L^2(Q) \text{ tel que } y(T) = z(T),$$

où  $z(t)$  est une solution de (3.1.1) pour une donnée initiale  $z_0 \in L^2(\Omega)$  et un second membre de la forme  $w1_\omega$  avec  $w \in L^2(Q)$ . La contrôlabilité à zéro est aussi équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante pour le système dual (3.1.3)

$$(3.1.4) \quad \|q(0)\|_{L^2}^2 \leq C_{\text{obs}} \iint_{(0,T) \times \omega} |q|^2 dx dt,$$

(comparer (3.1.2) avec (3.1.4)). C'est ce dernier type d'inégalité que nous appellerons dans la suite inégalité d'observabilité.

Dans le cas de l'équation de la chaleur, la contrôlabilité à zéro fut tout d'abord démontrée dans [LR95]. Le résultat clé est alors l'obtention d'une inégalité qui mesure la perte d'orthogonalité des fonctions propres du Laplacien lorsqu'on se restreint au sous-domaine  $\omega$ . Si nous désignons par  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  de fonctions propres de  $-\Delta$  pour des données de Dirichlet homogènes au bord et  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ , les valeurs propres associées, l'inégalité de Lebeau et Robbiano s'écrit<sup>1</sup>

$$(3.1.5) \quad \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \phi_j(x) \right|^2 dx, \quad \mu > 0, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>L'inégalité telle qu'elle est écrite dans [LR95] présente une intégrale en temps et des exponentielles qui en dépendent. Elle est écrite sous cette forme par exemple dans [LZ98a].

Cette inégalité conduit à l'existence d'un contrôle à zéro pour (3.1.1) construit de manière itérative [LR95]. La démonstration de l'inégalité (3.1.5) se fait au moyen d'une inégalité d'interpolation obtenue à partir d'inégalités de Carleman locales pour un opérateur elliptique. L'inégalité (3.1.5) est démontrée dans [LR95] dans un cadre géométrique plus général, i.e., pour l'opérateur de Laplace sur une variété riemannienne. Dans l'Annexe 3.A, nous donnons une démonstration différente de l'inégalité (3.1.5) qui est fondée sur une inégalité de Carleman globale pour un opérateur elliptique sans avoir recours à des inégalités d'interpolation. La méthode de construction du contrôle de [LR95] ne s'applique pas lorsqu'on se trouve en présence de termes d'ordre zéro et du premier ordre en variables d'espace dans l'opérateur parabolique qui dépendent du temps. En particulier, cela ne permet pas d'étendre le résultat de contrôlabilité globale à zéro à des équations paraboliques semi-linéaires.

En 1996, Fursikov et Imanuvilov ont montré comment l'obtention d'inégalités de Carleman globales pour les opérateurs paraboliques permettait de prouver des inégalités d'observabilité du type de (3.1.4) et de comprendre la dépendance de  $C_{\text{obs}}$  en fonction des termes d'ordre zéro et du premier ordre en variables d'espace de l'opérateur parabolique dépendant du temps [FI96]. Cette approche a permis la démonstration de résultats de contrôlabilité à zéro pour des équations paraboliques semi-linéaires [Bar00, FCZ00, DFCGBZ02, DOP02]. Une partie de notre travail se place dans ce cadre. Une autre partie exploite à la fois les inégalités de Carleman globales ainsi que la méthode de [LR95] fondée sur une inégalité de la forme de (3.1.5). Comme références sur les inégalités de Carleman locales nous citerons [Hör63, chapitre VIII], [Hör85b, sections 28.2–3], [Zui83] et pour le cas parabolique [Isa93]. Pour les inégalités globales nous citerons [FI96, IY01] et enfin [FCG06] pour une revue de leur application au contrôle des équations paraboliques. En général, les inégalités de Carleman, locales ou globales, sont démontrées pour des opérateurs à coefficients réguliers.

Notre travail se place, nous l'avons déjà dit, dans le cas où les coefficients de la partie principale de l'opérateur sont non réguliers. Dans ce cas, la question de la contrôlabilité à zéro n'est pas complètement résolue. Un résultat de contrôlabilité pour une équation semi-linéaire avec un coefficient  $\mathcal{C}^1$  par morceaux a été démontré dans [DOP02] au moyen d'une inégalité de Carleman globale ; les discontinuités (sauts) du coefficient  $c$  de l'opérateur  $\partial_t - \nabla \cdot (c\nabla)$  se trouvent le long d'une interface dans le domaine  $\Omega$  considéré. Cependant, ce résultat se démontre en supposant que la région d'observation se trouve dans la zone où le coefficient de diffusion  $c$  est le plus « petit » (en fait, c'est le signe du saut de  $c$  à travers l'interface qui dicte le choix de la région de contrôle/observation). On remarquera que ce résultat semblait indiquer des similarités avec le cas hyperbolique (voir par exemple [Lio88, page 356 et suivantes]). La contrôlabilité approchée est quant à elle vraie, indépendamment du choix fait pour la région de contrôle/observation.

Il est naturel de poser la question de l'observabilité dans le cas non traité dans [DOP02] ainsi que celle de l'existence d'une inégalité de Carleman globale afin de pouvoir, entre autres, traiter le cas des équations semi-linéaires. Nous apportons des éléments de réponse à ces deux questions. Dans la section 3.2, en dimension un d'espace, nous montrons que nous pouvons obtenir une inégalité de Carleman indépendamment de la région d'observation. Ce travail a été réalisé en collaboration avec A. Benabdallah et Y. Dermenjian [18, 1]. De ce résultat, si nous approchons des coefficients singuliers par des coefficients réguliers par morceaux, par un passage à la limite dans ces inégalités de Carleman, en prenant soin de maîtriser le comportement des fonctions poids et constantes impliquées, nous voyons dans la section 3.3 que nous pouvons même obtenir une telle inégalité dans le cas d'un coefficient de classe  $BV$  [19, 9]. Cela permet, comme nous l'avons dit plus haut, d'obtenir des résultats de contrôlabilité pour des équations semi-linéaires (section 3.4). Dans la section 3.5, en dimension plus grande que deux, nous couplons notre inégalité de Carleman de la dimension un avec l'inégalité (3.1.5) de [LR95] afin d'obtenir un résultat de contrôle dans le cas d'un milieu stratifié avec une région de contrôle arbitraire. Nous supposons alors que le milieu n'est singulier que dans une seule direction d'espace. Ce travail a été réalisé en collaboration avec A. Benabdallah et Y. Dermenjian [2]. L'analogie avec le cas hyperbolique s'avère ainsi infondée : il existe des cas où l'équation de la chaleur à coefficients discontinus est contrôlable à zéro avec un choix de région de contrôle arbitraire. Comme ce dernier résultat de contrôle utilise en partie la méthode de [LR95], il ne s'étend pas à

la contrôlabilité globale des équations semi-linéaires. L'existence d'une inégalité de Carleman globale dans ce cas et les cas plus généraux en dimension d'espace plus grande que deux, avec une observation dans un sous-domaine arbitraire, reste une question ouverte.

En dimension un d'espace, la contrôlabilité pour des équations paraboliques linéaires avait été prouvée dans le cas de coefficients  $BV$  dans [FCZ02]. La démonstration repose sur la méthode de Russell [Rus73]. Cependant la question de l'existence d'une inégalité de type Carleman était restée ouverte. Au moment où nous répondions à cette question un résultat de contrôlabilité de la chaleur en dimension un d'espace pour des coefficients  $L^\infty$  a été démontré [AE07]. En fait, les auteurs de [AE07] démontrent une inégalité de la forme de (3.1.5) ce qui leur permet de conclure grâce à la méthode de [LR95]. Ce résultat ne s'étend pas à la contrôlabilité globale des équations semi-linéaires contrairement à notre résultat. L'existence d'une inégalité de Carleman dans le cas de coefficients  $L^\infty$  est une question ouverte. Le lecteur verra que, dans notre méthode d'obtention d'une telle inégalité dans le cas d'un coefficient de classe  $BV$ , nous utilisons le caractère  $BV$  du coefficient  $c$  afin de maîtriser le comportement des fonctions de poids de Carleman dans le passage à la limite. Il ne nous semble pas possible d'étendre notre méthode au cas de coefficients  $L^\infty$ .

Nous utilisons finalement des inégalités de Carleman pour des équations paraboliques à coefficients discontinus afin d'obtenir des inégalités de stabilité dans un problème d'identification du coefficient  $c$  de la partie principale de l'opérateur. L'utilisation des inégalités de Carleman pour obtenir ce type de résultat est maintenant bien établie depuis [BK81]. Certains auteurs utilisent des inégalités de Carleman locales et en déduisent des résultats d'unicité et des estimations de stabilité de type Hölder (voir [Kli04, Isa98] et les références qui y sont citées). D'autres utilisent des inégalités de Carleman globales et en déduisent des estimations de stabilité de type Lipschitz [IY98, BP02]. Nous suivons cette seconde approche dans la section 3.6. Notons que peu de résultats concernent l'identification de la partie principale de l'opérateur. En général c'est un terme source ou potentiel qui est identifié. À notre connaissance, notre résultat est le seul dans le cas d'un coefficient  $c$  non régulier dans la partie principale.

Nous considérons, pour simplifier, le cas d'un ouvert  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega_0, \Omega_1$  deux ouverts non vides de  $\Omega$  tels que

$$\Omega_0 \Subset \Omega, \text{ et } \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}.$$

Soit un coefficient  $c, \mathcal{C}^1$  par morceaux, discontinu sur l'interface  $S = \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_1}$  qui est elle-même supposée de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nous posons  $\Omega' = \Omega \setminus S$ . Pour  $T > 0$  nous considérons le problème de transmission pour la chaleur suivant

$$(3.1.6) \quad \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (c \nabla y) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega', \\ y(t, x) = h(t, x) & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ y|_{(0, T) \times S_0} = y|_{(0, T) \times S_1}, \quad c_0 \partial_n y|_{(0, T) \times S_0} = c_1 \partial_n y|_{(0, T) \times S_1}, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où les traces sur  $S_0$  sont prises du côté de  $\Omega_0$  et celles sur  $S_1$  du côté de  $\Omega_1$ . Les conditions au bord,  $h(t, x)$ , sont précisées dans [3].

Si le coefficient  $c$  est changé en  $\tilde{c}$  nous notons alors  $\tilde{y}$  la solution associée. Nous supposons que l'interface, bien qu'inconnue, reste inchangée. Nous supposons que nous avons accès à des mesures de la différence des solutions sur une partie  $\gamma$  du bord de  $\Omega$  sur l'intervalle de temps  $(t_0, T)$ ,  $t_0 > 0$  et sur la différence des solutions à un certain temps positif  $T' > t_0$  sur *tout* l'ouvert  $\Omega$ . Nous noterons que de telles mesures peuvent être assez restrictives quant aux champs d'applications de nos résultats. En particulier une mesure sur le domaine tout entier est impossible dans de nombreux cas. Dans des domaines de biologie expérimentale, où certains phénomènes sont modélisés par des équations paraboliques, de telles mesures sont atteignables. Les résultats de stabilité obtenus en collaboration avec A. Benabdallah et P. Gaitan [3] sont de la forme suivante. Dans le cas où la différence des coefficients  $c$  et  $\tilde{c}$  est constante par morceaux nous avons :

$$|c - \tilde{c}|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq C |\partial_n (\partial_t y - \partial_t \tilde{y})|_{L^2((0, T) \times \gamma)}^2 + C |(y - \tilde{y})(T', \cdot)|_{H^2(\Omega')}^2,$$

ainsi qu'un résultat de stabilité pour la condition initiale :

$$(3.1.7) \quad |y_0 - \tilde{y}_0|_{L^2(\Omega)} \leq C \left| \ln \left( |\partial_n(\partial_t y - \partial_t \tilde{y})|_{L^2((0,T) \times \gamma)}^2 + |(y - \tilde{y})(T', \cdot)|_{H^2(\Omega')} \right) \right|^{-1},$$

pour  $|\partial_n(\partial_t y - \partial_t \tilde{y})|_{L^2((0,T) \times \gamma)}^2 + |(y - \tilde{y})(T', \cdot)|_{H^2(\Omega')}$  suffisamment petit. Comme nous l'avons dit plus haut ce type de résultat s'obtient au moyen d'une inégalité de Carleman globale. La forme de cette inégalité n'est pas classique car elle présente des termes d'interface. C'est dans leur traitement que se trouve en partie l'originalité de nos travaux. Dans le cas  $n = 1$  nous utilisons nos travaux des sections 3.2 et 3.3 ; dans le cas  $n \geq 2$  nous faisons une hypothèse de monotonie sur le coefficient  $c$  comme celle faite dans [DOP02].

### 3.2 Inégalités de Carleman pour des coefficients de diffusion $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Les inégalités de Carleman globales pour les équations paraboliques à coefficients réguliers ( $\mathcal{C}^1$ ) ont été démontrées dans [FI96]. La démonstration se fonde sur la construction d'une fonction poids  $\beta$  adaptée, dont le gradient ne s'annule pas dans le complémentaire de la région d'observation. En particulier cette fonction est choisie régulière ( $\mathcal{C}^2$ ). Dans le cas d'un coefficient de diffusion  $c$  présentant un saut le long d'une interface, les auteurs de [DOP02] introduisent une fonction poids singulière, continue mais de dérivée discontinue. En fait, ils imposent à la fonction  $\beta$  de satisfaire les mêmes conditions de transmission au niveau de l'interface que la solution du problème parabolique. Afin de démontrer l'inégalité de Carleman recherchée ils introduisent une hypothèse de monotonie sur les coefficients comme nous l'avons indiquée plus haut. Ici nous considérons de même une fonction poids  $\beta$  singulière mais nous relaxons cette condition de monotonie sur le coefficient  $c$  en introduisant des conditions de transmission *ad hoc* sur la fonction  $\beta$ .

Nous nous plaçons en dimension un d'espace. Nous considérons l'opérateur formellement défini par  $A = \partial_x(c\partial_x(\cdot))$  sur  $L^2(\Omega)$  où  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Le coefficient de diffusion  $c$  satisfait  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$ . Nous supposons que  $c$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux : il existe  $a_i, i = 0, \dots, n$  avec  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$  et  $c|_{(a_i, a_{i+1})} \in \mathcal{C}^1([a_i, a_{i+1}])$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Le domaine de l'opérateur  $A$  est donné par

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); c\partial_x u \in H^1(\Omega)\},$$

i.e., nous considérons des données de Dirichlet homogènes au bord. Soit  $T > 0$ . Nous utilisons les notations suivantes  $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ,  $Q = (0, T) \times \Omega$ ,  $Q' = (0, T) \times \Omega'$ ,  $\Gamma = \{0, 1\}$  et  $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$ . Soit  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  qui restera fixé dans la suite et  $\omega_0 \Subset O \Subset (a_j, a_{j+1})$  deux ouverts non vides. La fonction poids  $\beta$  est obtenue à partir du lemme suivant.

**Lemme 3.2.1** ([18, 1]). *Il existe une fonction  $\tilde{\beta} \in \mathcal{C}(\Omega)$  telle que  $\tilde{\beta}|_{[a_i, a_{i+1}]} \in \mathcal{C}^2([a_i, a_{i+1}])$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , satisfaisant*

$$\tilde{\beta} > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \tilde{\beta} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (\tilde{\beta}|_{[a_j, a_{j+1}]})' \neq 0 \text{ dans } [a_j, a_{j+1}] \setminus \omega_0, \quad (\tilde{\beta}|_{[a_i, a_{i+1}]})' \neq 0, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad i \neq j,$$

et la fonction  $\tilde{\beta}$  satisfait les propriétés de trace suivantes, pour un certain  $\alpha > 0$ ,  $(A_i u, u) \geq \alpha |u|^2$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ , avec les matrices  $A_i$ , définies par

$$A_i = \begin{pmatrix} [\tilde{\beta}' ]_{a_i} & \tilde{\beta}'(a_i^+) [c\tilde{\beta}' ]_{a_i} \\ \tilde{\beta}'(a_i^+) [c\tilde{\beta}' ]_{a_i} & \tilde{\beta}'(a_i^+) [c\tilde{\beta}' ]_{a_i}^2 + [c^2(\tilde{\beta}')^3]_{a_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

où  $[\rho]_x$  est le saut  $\rho(x^+) - \rho(x^-)$  pour  $x \in (0, 1)$ .

*Démonstration.* Le lemme se prouve en construisant la fonction  $\tilde{\beta}$  de proche en proche, en partant de chaque extrémité de l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous choisissons tout d'abord une pente strictement positive en 0 et une pente strictement négative en 1. Nous prolongeons la fonction de manière affine à droite de 0 et à gauche de 1 jusqu'à rencontrer une singularité de  $c$ . Plaçons nous à droite de 0. Alors nous choisissons la

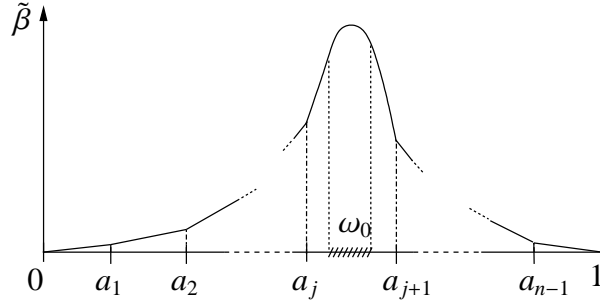


Fig. 3.1: Schéma de la forme typique de la fonction  $\tilde{\beta}$  pour une « observation » sur  $\omega_0 \in (a_j, a_{j+1})$ .

nouvelle pente en  $a_1$  de manière à satisfaire la stricte positivité de la matrice  $A_1$  donnée plus haut. Ceci est possible en choisissant le saut  $[\tilde{\beta}']_{a_1} > 0$  et en observant que le déterminant de  $A_1$  est un polynôme d'ordre 4 en  $\tilde{\beta}'(a_1^+)$ . Si nous choisissons le saut  $[\tilde{\beta}']_{a_1}$  suffisamment grand la condition est satisfaite. La construction se fait de même par le côté gauche. Enfin sur l'intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  nous raccordons les deux bouts de la fonction  $\tilde{\beta}$  de manière  $\mathcal{C}^2$ , avec  $\beta'$  s'annulant seulement dans  $\omega_0$ . ■

**Remarque 3.2.2.** La construction de  $\tilde{\beta}$  est raffinée dans la section suivante afin de pouvoir prendre en compte un nombre de singularités de  $c$  arbitrairement grand et de garder la fonction  $\tilde{\beta}$  et sa dérivée bornées.

La Figure 3.1 donne la forme typique d'une fonction  $\tilde{\beta}$  donnée par le lemme précédent. Nous en choisissons une et nous introduisons  $\beta = \tilde{\beta} + K$  avec  $K = m\|\tilde{\beta}\|_\infty$  et  $m > 1$ . Pour  $\lambda > 0$  et  $t \in (0, T)$ , nous définissons les fonctions poids suivantes

$$(3.2.1) \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \quad \eta(t, x) = \frac{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)},$$

avec  $\bar{\beta} = 2m\|\tilde{\beta}\|_\infty$  (voir [FI96, DOP02, FCG06]). Nous introduisons

$$\mathfrak{N} = \left\{ q \in \mathcal{C}(Q, \mathbb{R}); q|_{(0,T) \times [a_i, a_{i+1}]} \in \mathcal{C}^2([0, T] \times [a_i, a_{i+1}]), i = 0, \dots, n-1, q|_\Sigma = 0, \text{ et } q \text{ satisfait (CT)} \right\},$$

avec

$$(CT) \quad q(t, a_i^-) = q(t, a_i^+), \quad c(a_i^-)\partial_x q(t, a_i^-) = c(a_i^+)\partial_x q(t, a_i^+), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in (0, T).$$

L'inégalité de Carleman globale que nous prouvons est alors donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.2.3** ([18, 1]). *Soit  $O \in (a_j, a_{j+1})$ . Il existe  $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, O) > 0$ ,  $s_1 = s_1(\lambda_1)(T + T^2) > 0$  et une constante positive  $C = C(\Omega, O)$  tels que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$(3.2.2) \quad s^{-1} \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi^{-1} (|\partial_t q|^2 + |\partial_x(c\partial_x q)|^2) dx dt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi |\partial_x q|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi^3 |q|^2 dx dt \\ \leq C \left[ s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times O} e^{-2s\eta} \varphi^3 |q|^2 dx dt + \iint_Q e^{-2s\eta} |\partial_t q \pm \partial_x(c\partial_x(q))|^2 dx dt \right],$$

pour  $s \geq s_1$ ,  $\lambda \geq \lambda_1$  et pour tout  $q \in \mathfrak{N}$ .

*Esquisse de la démonstration du théorème 3.2.3.* Nous traitons le cas de l'opérateur  $\partial_t + \partial_x(c\partial_x(\cdot))$ . Nous prenons  $s > 0$ ,  $\lambda > 1$  et  $q \in \mathfrak{N}$  et posons  $f = \partial_t q + \partial_x(c\partial_x q)$ ; alors  $f \in L^2(Q)$ . Nous définissons  $\psi = e^{-s\eta} q$  et notons que  $\psi(0, \cdot) = \psi(T, \cdot) = 0$  et comme  $q$  satisfait la condition de transmission (CT) nous avons

$$(3.2.3) \quad \psi(t, a_i^-) = \psi(t, a_i^+), \quad [c\partial_x \psi(t, \cdot)]_{a_i} = s\lambda \varphi(t, a_i) \psi(t, a_i) [c\beta']_{a_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

Dans  $Q'$ , la fonction  $\psi$  satisfait  $M_1\psi + M_2\psi = f_s$  avec  $f_s = e^{-s\eta} f + s\lambda \varphi(c\beta')' \psi - s\lambda^2 \varphi c(\beta')^2 \psi$  et

$$(3.2.4) \quad M_1\psi = \partial_x(c\partial_x \psi) + s^2 \lambda^2 \varphi^2 (\beta')^2 c \psi + s(\partial_t \eta) \psi, \quad M_2\psi = \partial_t \psi - 2s\lambda \varphi c \beta' \partial_x \psi - 2s\lambda^2 \varphi c (\beta')^2 \psi.$$

Nous écrivons  $\|M_1\psi\|_{L^2(Q')}^2 + \|M_2\psi\|_{L^2(Q')}^2 + 2(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q')} = \|f_s\|_{L^2(Q')}^2$ . Avec les mêmes notations que celles de [DOP02, théorème 3.3], nous écrivons  $(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q')}$  comme une somme de 9 termes  $I_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , où  $I_{ij}$  est le produit scalaire du  $i$ ème terme dans l'expression de  $M_1\psi$  et du  $j$ ème terme dans l'expression de  $M_2\psi$ . Nous ne donnons pas les détails des calculs de ces neuf produits scalaires ici. Le lecteur pourra se référer à [1]. Les calculs pour démontrer l'inégalité de Carleman font appel à de nombreuses intégrations par parties. Nous nous contentons ici de donner les termes de trace dominants aux points  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  qui apparaissent au cours du calcul et de discuter leurs signes. Les autres termes sont traités classiquement comme dans [FI96].

Du terme  $I_{12}$  nous obtenons la contribution suivante :  $J_{12} = s\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \varphi(t, a_i) [\beta' |c\partial_x \psi|^2(t, \cdot)]_{a_i} dt$ . Du terme  $I_{22}$  nous obtenons la contribution suivante :  $J_{22} = s^3 \lambda^3 \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \varphi^3(t, a_i) |\psi(t, a_i)|^2 [c^2(\beta')^3]_{a_i} dt$ . Appliquant les conditions de transmission (3.2.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} [\beta' |c\partial_x \psi|^2(t, \cdot)]_{a_i} &= [\beta']_{a_i} |c(a_i^-) \partial_x \psi(t, a_i^-)|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2(a_i, b) \beta'(a_i^+) [c\beta']_{a_i}^2 |\psi(t, a_i)|^2 \\ &\quad + 2s\lambda \varphi(t, a_i) \beta'(a_i^+) [c\beta']_{a_i} (c\partial_x \psi)(t, a_i^-) \psi(t, a_i), \end{aligned}$$

ce qui donne  $J_{12} + J_{22} = s\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \varphi(t, a_i) (A_i u(t, a_i), u(t, a_i)) dt$ , où les matrices symétriques  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sont celles du lemme 3.2.1 et  $u(t, a_i) = (c(a_i^-) \partial_x \psi(t, a_i^-), s\lambda \varphi(t, a_i) \psi(t, a_i))^t$ . Nous pouvons alors dominer les autres termes de trace en  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , par ce terme qui est strictement positif en choisissant les paramètres  $s$  et  $\lambda$  suffisamment grands. ■

### 3.3 Coefficients à variations bornées : passage à la limite dans des inégalités de Carleman

Afin d'obtenir une inégalité de Carleman dans le cas de coefficients plus généraux, tels que de classe  $BV$ , nous reconsidérons tout d'abord la condition que nous avons imposée sur la fonction poids  $\tilde{\beta}$  dans le lemme 3.2.1. La condition que nous donnons fait intervenir la dérivée de  $\tilde{\beta}$ ; aussi nous écrivons souvent  $\beta$  au lieu de  $\tilde{\beta}$  ici, puisque que ces deux fonctions ne diffèrent que d'une constante (voir page 44).

Considérons de nouveau un coefficient  $\mathcal{C}^1$  par morceaux avec une discontinuité en  $a \in (0, 1)$ . Définissant la fonction  $\beta$ , comme dans le lemme 3.2.1, la matrice  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} [\beta']_a & \beta'(a^+) [c\beta']_a \\ \beta'(a^+) [c\beta']_a & \beta'(a^+) [c\beta']_a^2 + [c^2(\beta')^3]_a \end{pmatrix},$$

est définie positive si et seulement si  $[\beta']_a > 0$  et  $\det(A) > 0$ . Nous posons  $Y = \frac{c(a^+)}{c(a^-)}$ ,  $X = \frac{\beta'(a^-)}{\beta'(a^+)}$ , et nous obtenons  $\det(A) = c^2(a^-) (\beta'(a^+))^4 P_Y(X)$  avec

$$P_Y(X) = (1 - X)(Y^2 - X^3) - X(Y - X)^2.$$

Nous nous plaçons dans le cas où  $\beta' < 0$ , i.e., à droite de  $\omega_0$  (voir le lemme 3.2.1). Alors,  $[\beta']_a > 0$  équivaut à  $X > 1$ . Nous observons que  $P_Y(Y) = Y^2(1 - Y)^2$ . Si  $Y > 1$  nous pouvons donc faire le choix  $X = Y$ . C'est ce choix qui est fait dans [DOP02] puisqu'alors  $c(a^-) \partial_x \beta(a^-) = c(a^+) \partial_x \beta(a^+)$ .

Dans le cas  $Y < 1$ , nous faisons le choix  $X = 2 - Y$  ayant observé que  $P_Y(2 - Y) = Y^2(1 - Y)^2$ .



**Remarque 3.3.1.** On notera que les choix proposés ne sont pas optimaux [9] mais donnent des conditions suffisantes et faciles d'application pour la suite.

Dans le cas  $\beta' > 0$ , i.e. à gauche de  $\omega_0$ , nous faisons le choix  $X = Y$  si  $Y < 1$  (car ici il est nécessaire d'avoir  $X < 1$ ) et  $X = \frac{Y}{2Y-1}$  si  $Y > 1$ .

Nous considérons maintenant un coefficient  $c$ , de classe  $BV$ , mais de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\bar{O}$ , avec  $O$  un ouvert non vide de  $\Omega$ ,  $O \Subset \Omega$ . Nous supposons  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$ . Nous prenons, sans perte de généralité, l'ouvert  $O$  de la forme  $(x_0, x_1)$ , avec  $0 < x_0 < x_1 < 1$ . Soit aussi  $\omega_0 \Subset O$  un ouvert non vide. Nous désignons les variations totales de  $c$  sur  $[0, x_0]$  et  $[x_1, 1]$  par  $\vartheta_0 = V_0^{x_0}(c)$ , et  $\vartheta_1 = V_{x_1}^1(c)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $c_\varepsilon$ , constant par morceaux sur  $(0, x_0) \cup (x_1, 1)$ , et régulier sur  $O$  (ici  $\mathcal{C}^1$  suffit) tel que (voir par exemple [Bre00])

$$\|c - c_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad V_0^{x_0}(c_\varepsilon) \leq \vartheta_0, \quad \text{et } V_{x_1}^1(c_\varepsilon) \leq \vartheta_1, \quad \|c_\varepsilon - c\|_{\mathcal{C}^1(\bar{O})} \leq \varepsilon.$$

Nous désignons par  $a_1, \dots, a_n$  les points de discontinuité de  $c_\varepsilon$  sur l'intervalle  $[x_1, 1]$ . Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^n |c_\varepsilon(a_i^+) - c_\varepsilon(a_i^-)| \leq \vartheta_1.$$

Suivant les notations introduites plus haut nous posons  $Y_i = c_\varepsilon(a_i^+)/c_\varepsilon(a_i^-)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et nous définissons  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , par  $X_i = Y_i$ , si  $Y_i > 1$ , et  $X_i = 2 - Y_i$ , si  $Y_i < 1$ . Nous définissons alors la fonction constante par morceaux  $\gamma_{1,\varepsilon}$  suivante :

$$\gamma_{1,\varepsilon}(x) := \gamma_{1,\varepsilon}(1) \prod_{x < a_j} X_j, \quad x \notin \{a_1, \dots, a_n\},$$

pour une valeur  $\gamma_{1,\varepsilon}(1) < 0$ . Cette fonction est choisie de telle sorte que  $X_i = \frac{\gamma_{1,\varepsilon}(a_i^-)}{\gamma_{1,\varepsilon}(a_i^+)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nous procédons de manière similaire sur l'intervalle  $[0, x_0]$ . Nous définissons enfin les fonctions  $\tilde{\beta}_{1,\varepsilon}(x) := \int_1^x \gamma_{1,\varepsilon}(y) dy$  et  $\tilde{\beta}_{0,\varepsilon}(x) := \int_0^x \gamma_{0,\varepsilon}(y) dy$ , et la fonction  $\tilde{\beta}_\varepsilon$  par  $\tilde{\beta}_\varepsilon(x) = \tilde{\beta}_{0,\varepsilon}(x)$  sur  $[0, x_0]$  et  $\tilde{\beta}_\varepsilon(x) = \tilde{\beta}_{1,\varepsilon}(x)$  sur  $[x_1, 1]$ , et  $\mathcal{C}^2$  dans  $\bar{O}$ , telle que  $\tilde{\beta}'_\varepsilon$  ne s'annule pas en dehors de  $\omega_0$ .

La fonction  $\tilde{\beta}_\varepsilon$  vérifie les propriétés prescrites dans le lemme 3.2.1. Si nous construisons les fonctions poids de Carleman  $\varphi_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  à partir de  $\beta_\varepsilon$  suivant (3.2.1) nous obtenons des inégalités de Carleman pour les opérateurs  $\partial_t \pm \partial_x(c_\varepsilon \partial_x)$ . Nous souhaitons passer à la limite dans ces inégalités quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Le lemme suivant nous permet de maîtriser le comportement de  $\beta'_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous donnons des détails de la démonstration car c'est ici qu'est utilisé de manière essentielle le caractère  $BV$  du coefficient  $c$ .

**Lemme 3.3.2.** *Il existe  $K > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  qui dépendent uniquement de  $c \in BV(0, 1)$  tels que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , nous avons  $V_0^{x_0}(\gamma_{0,\varepsilon}) \leq K \gamma_{0,\varepsilon}(0)$  et  $V_{x_1}^1(\gamma_{1,\varepsilon}) \leq K |\gamma_{1,\varepsilon}(1)|$ .*

*Démonstration.* Nous avons  $V_{x_1}^1(\gamma_{1,\varepsilon}) = |\gamma_{1,\varepsilon}(x_1) - \gamma_{1,\varepsilon}(1)|$  puisque  $\gamma_{1,\varepsilon}$  est croissante. Ainsi  $V_{x_1}^1(\gamma_{1,\varepsilon}) = (X_1 \dots X_n - 1)|\gamma_{1,\varepsilon}(1)|$ . Nous écrivons

$$\sum_{i \in I_1} |c_\varepsilon(a_i^+) - c_\varepsilon(a_i^-)| + \sum_{i \in I_2} |c_\varepsilon(a_i^+) - c_\varepsilon(a_i^-)| \leq \vartheta_1,$$

où  $i \in I_1$  si  $c_\varepsilon(a_i^+) > c_\varepsilon(a_i^-)$  et  $i \in I_2$  si  $c_\varepsilon(a_i^+) < c_\varepsilon(a_i^-)$ . En factorisant  $c_\varepsilon(a_i^-)$  ou  $c_\varepsilon(a_i^+)$ , nous obtenons

$$\sum_{i \in I_1} (Y_i - 1) + \sum_{i \in I_2} \left(\frac{1}{Y_i} - 1\right) \leq \vartheta_1 / (c_{\min} - \varepsilon_0).$$

(Nous avons pris  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < c_{\min}$ .) Nous observons que si  $0 < Y < 1$  alors  $X = 2 - Y < 1/Y$ . Cela nous donne  $\sum_{i=1}^n (X_i - 1) \leq \vartheta_1 / (c_{\min} - \varepsilon_0)$ . Finalement, puisque  $X_1, \dots, X_n > 1$ , nous pouvons écrire

$$X_1 \dots X_n \leq e^{X_1-1} \dots e^{X_n-1} = e^{\sum_{i=1}^n (X_i-1)} \leq e^{\vartheta_1 / (c_{\min} - \varepsilon_0)},$$

ce qui conclut l'argument pour  $\gamma_{1,\varepsilon}$ . Nous procédons de même pour  $\gamma_{0,\varepsilon}$ . ■

Le théorème de Helly [KF74, Bre00] nous permet de dire que, modulo une sous-suite, les fonctions  $\gamma_{0,\varepsilon}$  (resp.  $\gamma_{1,\varepsilon}$ ) convergent partout vers une certaine fonction  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma_1$ ) quand  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus nous avons

$$V_0^{x_0}(\gamma_0) \leq K \gamma_{0,\varepsilon}(0) = K \gamma_0(0), \quad \text{et} \quad V_{x_1}^1(\gamma_1) \leq K |\gamma_{1,\varepsilon}(1)| = K |\gamma_1(1)|.$$

Par convergence dominée cette convergence passe aux fonctions  $\tilde{\beta}_{0,\varepsilon}$  et  $\tilde{\beta}_{1,\varepsilon}$ . De plus, nous pouvons définir plus précisément le comportement des fonctions  $\gamma_{0,\varepsilon}$  et  $\gamma_{1,\varepsilon}$  sur  $\bar{O}$  afin d'avoir une convergence dans  $\mathcal{C}^2$  sur  $\bar{O}$ . Ce passage à la limite définit donc une fonction  $\beta$  sur  $\Omega$  et des fonctions poids de Carleman suivant (3.2.1). Nous prouvons alors la proposition technique suivante.

**Proposition 3.3.3** ([9]). *La constante  $C$  à droite dans l'inégalité de Carleman (3.2.2) pour les opérateurs  $\partial_t \pm \partial_x(c_\varepsilon \partial_x)$  et les constantes  $s_1$  et  $\lambda_1$  peuvent être choisies uniformément par rapport à  $\varepsilon$  quand  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , avec  $\varepsilon_0$  choisi plus haut.*

Pour démontrer cette proposition il nous faut reprendre intégralement la démonstration de l'inégalité de Carleman du théorème 3.2.3 et vérifier que « tout » peut se faire uniformément par rapport à  $\varepsilon$ . Cela utilise la bornitude de  $\beta_\varepsilon$  et celle de sa dérivée (grâce aux propriétés vues plus haut) dans  $L^\infty(\Omega)$ . Nous renvoyons le lecteur à [9, proposition 2.4]. Nous donnons cependant une idée de l'argument utilisé pour le traitement des termes de trace au niveau des singularités de  $c_\varepsilon$ .

Soit  $a$  une singularité de  $c_\varepsilon$  et  $A$  la matrice associée (voir le lemme 3.2.1). Comme plus haut nous posons  $Y = \frac{c_\varepsilon(a^+)}{c_\varepsilon(a^-)}$ .

**Lemme 3.3.4.** *Les valeurs propres  $v_1, v_2$  de la matrice  $A$  satisfont  $v_i \geq C|Y - 1|$ ,  $i = 1, 2$ , où  $C$  est uniforme par rapport à  $\varepsilon$  et à la singularité de  $c_\varepsilon$  considérée.*

Dans tous les termes de trace à dominer (voir la démonstration du théorème 3.2.3) nous pouvons factoriser  $|Y - 1|$ . L'uniformité dans le traitement des termes de trace au niveau des singularités de  $c_\varepsilon$  en découle d'après le lemme précédent.

Les fonctions poids dans les inégalités de Carleman ainsi que les constantes se comportant raisonnablement (les premières convergent, les secondes restent identiques) il nous reste à comprendre le comportement des solutions des problèmes paraboliques pour conclure.

Nous considérons les solutions (faibles)  $q$  et  $q_\varepsilon$  de

$$\begin{cases} \partial_t q \pm \partial_x(c \partial_x q) = f & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T, x) = q_0(x) \text{ (resp. } q(0, x) = q_0(x)) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t q_\varepsilon \pm \partial_x(c_\varepsilon \partial_x q_\varepsilon) = f & \text{dans } Q, \\ q_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q_\varepsilon(T, x) = q_{0,\varepsilon}(x) \text{ (resp. } q_\varepsilon(0, x) = q_{0,\varepsilon}(x)) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

avec les conditions initiales (ou finales)  $q_0$  et  $q_{0,\varepsilon}$  données par  $\partial_x(c \partial_x q_0) = \mu$  et  $\partial_x(c_\varepsilon \partial_x q_{0,\varepsilon}) = \mu$ , avec le même  $\mu$ , où  $\mu$  et  $f$  sont suffisamment régulières. Ce choix de condition initiale entraîne la convergence de  $q_{0,\varepsilon}$  vers  $q_0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Nous voyons assez facilement que  $\partial_t q_\varepsilon, q_\varepsilon, \partial_x q_\varepsilon$  et  $\partial_x(c \partial_x q_\varepsilon)$  convergent vers  $\partial_t q, q, \partial_x q$  et  $\partial_x(c \partial_x q)$  en norme  $L^2$  [9]. Ainsi les résultats précédents montrent que les inégalités de Carleman pour  $q_\varepsilon$  et les opérateurs  $\partial_t \pm \partial_x(c_\varepsilon \partial_x)$  donnent des inégalités semblables pour  $q$  et les opérateurs  $\partial_t \pm \partial_x(c \partial_x)$  avec les mêmes constantes, quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Si nous relaxons maintenant l'hypothèse de régularité faite sur  $\mu$  et  $f$ , nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 3.3.5** ([9]). Soit  $O \Subset \Omega$  un ouvert non vide et  $c \in BV(\Omega)$  avec  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$  et  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\bar{O}$ . Il existe  $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, O) > 0$ ,  $s_1 = s_1(\lambda_1)(T + T^2) > 0$  et une constante positive  $C = C(\Omega, O)$  tels que l'inégalité de Carleman (3.2.2) soit valable pour  $s \geq s_1$ ,  $\lambda \geq \lambda_1$  et pour tout  $q$  solution (faible) de

$$\begin{cases} \partial_t q \pm \partial_x(c\partial_x q) = f & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T, x) = q_0(x) \text{ (resp. } q(0, x) = q_0(x)) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec  $q_0 \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(Q)$ . Les fonctions poids utilisées sont celles définies par (3.2.1) à partir de la fonction  $\beta$  obtenue plus haut.

Suivant la méthode de [IY01], du théorème 3.3.5 nous obtenons maintenant une inégalité de Carleman dans le cas où le membre de droite,  $f$ , est de régularité  $H^{-1}$  en espace. Cette inégalité nous permet de traiter la contrôlabilité de systèmes non linéaires où la non-linéarité est fonction non seulement de l'état du système mais aussi son gradient [DFCGBZ02]. Nous posons

$$\tilde{\mathfrak{N}}_{\pm} = \left\{ q \in \mathcal{C}([0, T], H_0^1(\Omega)); q(t) \in D(A) \forall t \in (0, T) \text{ et } \partial_t q \pm \partial_x(c\partial_x q) = F_0 + \partial_x F_1 \text{ avec } F_0, F_1 \in L^2(Q) \right\}.$$

**Théorème 3.3.6.** Soit  $O \Subset \Omega$  un ouvert non vide  $c \in BV(\Omega)$  avec  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$  et  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\bar{O}$ . Il existe  $\lambda_2 = \lambda_2(\Omega, O, c) > 0$ ,  $s_2 = s_2(\Omega, O, c, \lambda_2)(T + T^2) > 0$  et une constante positive  $C = C(\Omega, O, c)$  tels que, pour  $s \geq s_2$ ,  $\lambda \geq \lambda_2$  et pour tout  $q \in \tilde{\mathfrak{N}}_{\pm}$ ,

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi |\partial_x q|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi^3 |q|^2 dx dt \\ \leq C \left[ s^3 \lambda^4 \iint_{(0, T) \times O} e^{-2s\eta} \varphi^3 |q|^2 dx dt + \iint_Q e^{-2s\eta} |F_0|^2 dx dt + s^2 \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\eta} \varphi^2 |F_1|^2 dx dt \right]. \end{aligned}$$

### 3.4 Contrôlabilité d'équations paraboliques semi-linéaires à coefficient discontinu en dimension un d'espace

Grâce aux résultats obtenus dans les sections précédentes, nous traitons maintenant le problème de la contrôlabilité d'un système semi-linéaire parabolique de la forme

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} \partial_t y - \partial_x(c\partial_x y) + \mathcal{G}(y, \partial_x y) = 1_{\omega} v & \text{dans } Q, \\ y(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $c$  est de classe  $BV$  et où  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de la forme  $\mathcal{G}(y_1, y_2) = y_1 g(y_1, y_2) + y_2 G(y_1, y_2)$ , avec  $g$  et  $G$  dans  $L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Nous faisons l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.4.1.** Les fonctions  $g$  et  $G$  satisfont

$$(3.4.2) \quad \lim_{(|y_1, y_2| \rightarrow \infty)} \frac{|g(y_1, y_2)|}{\ln^{3/2}(1 + |y_1| + |y_2|)} = 0, \quad \lim_{(|y_1, y_2| \rightarrow \infty)} \frac{|G(y_1, y_2)|}{\ln^{1/2}(1 + |y_1| + |y_2|)} = 0.$$

Nous supposons que  $\omega \Subset \Omega$  est un ouvert non vide et  $c \in BV(\Omega)$  avec  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$  et  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\bar{O}$ , avec  $O$  ouvert non vide de  $\omega$ .

Nous décrivons brièvement ici comment la méthode de [Bar00, FCZ00], ensuite généralisée par [DFCGBZ02] peut être adaptée au cas que nous considérons et permet de montrer la contrôlabilité à zéro de (3.4.1). Pour des raisons techniques nous avons besoin d'un contrôle dans  $L^{\infty}(0, T, L^2(\Omega))$ . Nous avons pour cela l'inégalité d'observabilité suivante obtenue à partir du théorème 3.3.6 qui donne même un contrôle dans  $L^{\infty}(Q)$ .

**Lemme 3.4.2.** *La solution  $q$  de*

$$\begin{cases} -\partial_t q - \partial_x(c\partial_x q) + aq - \partial_x(bq) = 0 & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T) = q_T & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

satisfait  $\|q(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{CH} \left( \iint_{(0,T) \times \omega} |q| dx dt \right)^2$ , où  $H = 1 + \frac{1}{T} + T + (T + T^{1/2})\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1 + T)\|b\|_\infty^2$ .

Comme le coefficient  $c$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\bar{O}$ , la démonstration de [DFCGBZ02, théorème 2.5, lemme 2.5] peut être adaptée ; voir aussi [DOP02, proposition 4.2, lemme 4.3].

Considérons maintenant le système *linéaire* suivant

$$(3.4.3) \quad \begin{cases} \partial_t y - \partial_x(c\partial_x y) + ay + b\partial_x y = 1_\omega v & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec  $a$  et  $b$  dans  $L^\infty(Q)$  et  $y_0 \in L^2(\Omega)$ . Si  $v \in L^2(Q)$ , nous considérons son unique solution (faible) dans  $\mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  [LM68, Bre83]. Du lemme précédent découle le résultat de contrôlabilité à zéro suivant.

**Théorème 3.4.3.** *Pour tout  $T > 0$  et tout  $y_0$  dans  $L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in L^\infty((0, T) \times \omega)$ , tel que la solution  $y_v$  de (3.4.3) satisfait  $y_v(T) = 0$ . De plus, le contrôle  $v$  peut être choisi tel que  $\|v\|_{L^\infty((0,T) \times \omega)} \leq e^{CH} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$ , avec  $H = H(T, \|a\|_\infty, \|b\|_\infty)$  donné dans le lemme 3.4.2.*

La démonstration de la contrôlabilité du système (3.4.1) utilise une technique de point fixe. Pour pouvoir l'appliquer il nous faut avoir des estimations de la solution  $y$  du système linéarisé (3.4.3) en fonction de la donnée initiale  $y_0$  et du contrôle  $v$ .

**Lemme 3.4.4.** *La solution  $y$  du système (3.4.3) satisfait*

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_x y\|_{L^2(Q)}^2 \leq K_1 (\|v\|_{L^2(Q)}^2 + \|y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2), \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec  $K_1 = e^{C(1+T+T\|a\|_\infty+T\|b\|_\infty^2)}$ . Si  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$  alors nous avons  $y \in \mathcal{C}([0, T], H_0^1(\Omega))$  et

$$\|\partial_x y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t y\|_{L^2(Q)}^2 + \|\partial_x(c\partial_x y)\|_{L^2(Q)}^2 \leq K_2 (\|v\|_{L^2(Q)}^2 + \|y(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2), \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec  $K_2 = e^{C(1+T+(T+T^{1/2})\|a\|_\infty+(T+T^{1/2})\|b\|_\infty^2)}$ . Si  $v \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  et  $y_0 \in D(A)$ , alors nous avons

$$\|\partial_x y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_3 (\|v\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|y\|_{D(A)}),$$

avec  $K_3 = e^{C(1+T+(T+l_s(T))\|a\|_\infty+(T+l_s(T)^2)\|b\|_\infty^2)}$ , où  $l_s$  est une fonction croissante positive telle que  $l_s(0) = 0$ . Plus précisément  $l_s(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)^s \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)^{1-s} d\tau$  avec  $\frac{1}{2} < s < 1$ .

Les deux premiers points du lemme sont classiques. Le dernier point est démontré dans [9] à partir d'un argument d'interpolation qui transparaît dans la forme de la fonction  $l_s$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat de contrôle annoncé.

**Théorème 3.4.5.** *Soit  $\omega \Subset \Omega$  un ouvert non vide et  $c \in BV(\Omega)$  avec  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$  et  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert non vide de  $\omega$ . Soit  $T > 0$  :*

1. *Contrôlabilité à zéro locale* : il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y_0$  dans  $L^2(\Omega)$  avec  $\|y_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$ , il existe un contrôle  $v \in L^\infty((0, T) \times \omega)$  pour lequel la solution de (3.4.1) satisfait  $y(T) = 0$ .
2. *Contrôlabilité à zéro globale* : Soit  $\mathcal{G}$  satisfaisant de plus l'hypothèse 3.4.1. Alors pour tout  $y_0$  dans  $L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in L^\infty((0, T) \times \omega)$  pour lequel la solution de (3.4.1) satisfait  $y(T) = 0$ .

Après les estimations précédentes la démonstration devient classique et nous pouvons procéder comme dans [DFCGBZ02, DOP02] qui eux-mêmes suivent de très près [Bar00, FCZ00]. Nous ne donnons ici que les étapes de la preuve. Plus de détails sont disponibles dans [9].

*Étapes de la démonstration du théorème 3.4.5.* Nous prenons  $R > 0$  et posons  $Z = L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ . La fonction de troncature  $T_R$  est définie par

$$T_R(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq R, \\ R \operatorname{sgn}(s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $z \in Z$  nous considérons le système *linéaire* suivant

$$\begin{cases} \partial_t y_{z,v} - \partial_x(c \partial_x y_{z,v}) + g(T_R(z), T_R(\partial_x z)) y_{z,v} + G(T_R(z), T_R(\partial_x z)) \partial_x y_{z,v} = 1_\omega v & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ y_{z,v} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_{z,v}(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous posons  $a_z = g(T_R(z), T_R(\partial_x z))$ . En choisissant le contrôle  $v$  nul sur un intervalle  $[0, \delta]$ , avec  $\delta > 0$ , nous pouvons supposer que  $y_0 \in D(A)$ . En laissant le contrôle agir sur l'intervalle  $[0, T_z]$  avec  $T_z = \min(T, \|a_z\|_\infty^{-2/3}, \|a_z\|_\infty^{-1/3}, I_s^{-1}(\|a_z\|_\infty^{-1/3}))$ , les estimations précédentes permettent de trouver un contrôle  $v_z \in L^\infty(\mathcal{Q})$  tel que  $y_{z,v}(T) = 0$  et

$$(3.4.4) \quad \|v_z\|_{L^\infty((0, T) \times \omega)} \leq \mathfrak{H} \|y_0\|_{L^2(\Omega)},$$

$$(3.4.5) \quad \|y_{z,v}\|_{L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))} \leq \mathfrak{H} \|y_0\|_{D(A)},$$

où  $\mathfrak{H} = e^{(C(T_z)(1+\|a_z\|_\infty^{2/3}+\|b_z\|_\infty^2))}$ . Nous avons utilisé le caractère unidimensionnel du problème dans ces estimations. Nous définissons maintenant

$$\begin{aligned} U(z) &= \{v \in L^\infty((0, T) \times \omega); y_{z,v}(T) = 0, (3.4.4) \text{ est satisfait}\}, \\ \Lambda(z) &= \{y_{z,v}; v \in U(z), (3.4.5) \text{ est satisfait}\}. \end{aligned}$$

L'application  $z \mapsto \Delta(z)$  de  $Z$  dans  $\mathcal{P}(Z)$  satisfait les conditions suffisantes à l'application du théorème de point fixe de Kakutani [Aub79, théorème 1, chapitre 15, section 3]. Le résultat de contrôlabilité locale en découle alors en choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que le supremum du point fixe obtenu soit plus petit que  $R$  par (3.4.5). Le résultat global découle de la forme de la constante  $\mathfrak{H}$  et de l'hypothèse 3.4.1 comme exposé dans [DFCGBZ02, page 813]. ■

**Remarque 3.4.6.** Suivant [FI96] ou par exemple [DFCGBZ02], à partir du résultat précédent, nous pouvons démontrer le même résultat de contrôlabilité pour un contrôle frontière en 0 ou en 1. Le contrôle peut alors être pris de classe  $\mathcal{C}([0, T])$ . On remarquera que dans ce cas il n'est pas nécessaire de supposer une régularité  $\mathcal{C}^1$  pour le coefficient  $c$  sur une sous-partie de  $\Omega$ . Nous généralisons ainsi complètement le résultat de [FCZ02] au cas semi-linéaire.

**Commentaire 3.4.7.** C'est la forme de la constante  $H$  dans le lemme 3.4.2 obtenue à partir des inégalités de Carleman qui dicte l'hypothèse 3.4.1 imposée à  $\mathcal{G}$ . Alors que la contrôlabilité est fautive en général dans le cas où  $g(y_1, y_2)$  a une croissance plus rapide que  $\ln^2(1 + |y_1| + |y_2|)$ , la question reste ouverte pour les cas intermédiaires.

### 3.5 Un résultat de contrôlabilité en dimension plus grande que deux

Nous exhibons ici un cas en dimension plus grande que deux où l'équation de la chaleur à coefficients discontinus peut être contrôlée avec un contrôle distribué supporté de manière arbitraire.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\Omega = \Omega' \times (0, H)$ , où  $\Omega'$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de frontière  $\mathcal{C}^2$ . Nous posons  $x = (x', x_n) \in \Omega' \times (0, H)$ . Soit  $B(x)$ , une matrice  $n \times n$  qui satisfait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.5.1.** La matrice  $B(x', x_n)$  admet la structure diagonale par blocs

$$(3.5.1) \quad B(x', x_n) = \begin{pmatrix} c_1(x_n)C_1(x') & 0 \\ 0 & c_2(x_n) \end{pmatrix},$$

où  $c_1 \in L^\infty(0, H)$ ,  $c_2 \in BV(0, H)$  et  $C_1 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega'}, \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$ . La matrice  $C_1(x')$  est symétrique. Nous supposons de plus que  $0 < c_{\min} \leq c_i(x_n) \leq c_{\max}$ ,  $x_n \in (0, H)$ ,  $i = 1, 2$ , et  $0 < c_{\min} \leq C_1(x') \leq c_{\max}$ ,  $x' \in \Omega'$ .

Soit l'opérateur autoadjoint  $A = -\nabla_x \cdot (B\nabla_x)$  dans  $L^2(\Omega)$  de domaine  $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \nabla_x \cdot (B\nabla_x u) \in L^2(\Omega)\}$ . Soit  $T > 0$  et  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ . Nous considérons le système

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} \partial_t y - \nabla_x \cdot (B\nabla_x y) = 1_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ y(t, x) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ q(0, x) = q_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $y_0 \in L^2(\Omega)$  et  $\omega$  est un ouvert non vide de  $\Omega$  tel que  $\omega \Subset \Omega$ . Nous choisissons  $\omega'$  un ouvert non vide de  $\Omega'$  et  $\omega_n$  un ouvert non vide de  $(0, H)$  tels que  $\omega' \times \omega_n \subset \omega$ . Nous supposons de plus que

**Hypothèse 3.5.2.** Le coefficient  $c_2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un ouvert non vide de  $\omega_n$ .

Nous montrons que le système linéaire (3.5.2) est contrôlable avec un contrôle supporté dans  $\omega' \times \omega_n$ , et ainsi dans  $\omega$ .

Nous donnons tout d'abord quelques propriétés spectrales de  $A$  et d'autres opérateurs associés à notre problème. Nous définissons l'opérateur autoadjoint  $A' = -\nabla_{x'} \cdot (C_1 \nabla_{x'})$ , dans  $L^2(\Omega')$ , de domaine  $D(A') = \{u \in H_0^1(\Omega'); \nabla_{x'} \cdot (C_1 \nabla_{x'} u) \in L^2(\Omega')\}$ . Nous prenons une base hilbertienne de  $L^2(\Omega')$  formée de fonctions propres  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  de  $A'$ , associées aux valeurs propres,  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \mu_{k+1} \leq \dots$

Nous définissons aussi les opérateurs autoadjoints  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , sur  $L^2(0, H)$  par  $A_k = -\partial_{x_n}(c_2(x_n)\partial_{x_n}) + c_1(x_n)\mu_k$  de domaine  $D(A_k) = \{u \in H_0^1(0, H); c_2\partial_{x_n} u \in H^1(0, H)\}$ . Nous prenons une base hilbertienne de  $L^2(0, H)$  formée de fonctions propres  $\psi_{k,p}(x_n)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , de  $A_k$ , associées aux valeurs propres  $0 < \lambda_{k,1} \leq \lambda_{k,2} \leq \dots \leq \lambda_{k,p} \leq \lambda_{k,p+1} \leq \dots$ . Nous avons  $\lambda_{k,p} > c_{\min} \mu_k$ .

La séparation des variables dans les coefficients de la matrice  $B$  permet de montrer que les fonctions propres de l'opérateur  $A$  données par  $\varphi_{k,p}(x', x_n) = (\phi_k \otimes \psi_{k,p})(x', x_n) = \phi_k(x')\psi_{k,p}(x_n)$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ . Nous désignons par  $H_k$  les sous-espaces fermés de dimension infinie de  $L^2(\Omega)$  suivant :

$$H_k = \overline{\text{vect}\{\varphi_{k,p}; p \geq 1\}} = \{\phi_k \otimes f; f \in L^2(0, H)\}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

et nous posons  $E_j = \bigoplus_{k \leq 2^j} H_k$  pour  $j \in \mathbb{N}^*$ . Nous désignons par  $\Pi_{E_j}$  la projection orthogonale sur  $E_j$  dans  $L^2(\Omega)$ . Nous notons que  $E_j \subset E_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , et  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} H_k = L^2(\Omega)$  et que l'opérateur  $(-A, D(A))$  génère un  $\mathcal{C}^0$ -semi-groupe de contraction,  $S(t) = e^{-tA}$  pour  $t \geq 0$ , qui réduit l'espace  $H_k$ ,  $k \geq 1$ . Si  $f \in L^2(\Omega)$  nous avons  $S(t)f = \sum_{k,p \geq 1} e^{-t\lambda_{k,p}}(f, \varphi_{k,p})\varphi_{k,p}$  (voir par exemple [DL88] ou [RS80]).

Nous montrons maintenant l'existence d'un contrôle agissant sur le sous-espace  $E_j$ . Suivant [LR95], pour  $\rho \in (0, \frac{2}{3(n-1)})$ , nous posons  $T_j = K\sigma_j^{-\rho}$ , avec  $\sigma_j = 2^j$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . La constante  $K$  est ajustée afin d'avoir  $2 \sum_{j=0}^{\infty} T_j = T$ . Alors, nous définissons  $a_0 = 0$ ,  $a_{j+1} = a_j + 2T_j$ , pour  $j \geq 0$ .

Nous montrons que pour tout  $j \geq j_0$ , pour un certain  $j_0 \in \mathbb{N}$ , l'inégalité d'observabilité

$$(3.5.3) \quad \|q(a_j, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{T_j}^2 \int_{a_j}^{a_j+T_j} \int_{\omega} |q(t)|^2 dx dt,$$

est satisfaite par la solution  $q \in \mathcal{C}([a_j, a_j + T_j]; E_j)$  du système

$$(3.5.4) \quad \begin{cases} -\partial_t q - \nabla_x \cdot (B \nabla_x q) = 0 & \text{dans } (a_j, a_j + T_j) \times \Omega, \\ q(a_j + T_j) = q_0 & \text{dans } \Omega, \quad q_0 \in E_j. \end{cases}$$

Cela donne l'existence d'un contrôle  $v_j \in L^2(a_j, a_j + T_j; L^2(\Omega))$  pour tout  $y_j \in L^2(\Omega)$  tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t y - \nabla_x \cdot (B \nabla_x y) = 1_{\omega} v_j & \text{dans } (a_j, a_j + T_j) \times \Omega, \\ y(t, x) = 0 & \text{sur } (a_j, a_j + T_j) \times \partial\Omega, \\ y(a_j, x) = y_j(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

satisfait  $\Pi_{E_j} y(a_j + T_j, x) = 0$  puisque  $S(t)$  et  $\Pi_{E_j}$  commutent. De plus  $v_j$  satisfait

$$\|v_j\|_{L^2((a_j, a_j+T_j) \times \Omega)} \leq C_{T_j} \|\Pi_{E_j} y_j\|_{E_j} \leq C_{T_j} \|y_j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Au passage nous estimons la constante  $C_{T_j}$  ce qui nous permettra d'utiliser la méthode de [LR95] pour conclure.

De l'inégalité de Carleman du théorème 3.3.5 pour l'opérateur  $-\partial_t + A_k$  sur l'intervalle  $(a_j, a_j + T_j)$  avec des fonctions poids de la forme  $\varphi(t, x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{(t-a_j)(a_j+T_j-t)}$ ,  $\eta(t, x) = \frac{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta(x)}}{(t-a_j)(a_j+T_j-t)}$ , avec  $\bar{\beta} = 2m\|\tilde{\beta}\|_{\infty}$ , nous avons le résultat suivant.

**Proposition 3.5.3.** *Il existe des constantes positives  $C = C(H, \omega_n, c_{\min}, c_{\max})$ , et  $C' = C'(H, \omega_n, c_{\min}, c_{\max})$  telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour  $s_k = \max(C'T_j^2 \mu_k^{2/3}, \tilde{s}_0(T_j + T_j^2))$ , les solutions de*

$$(3.5.5) \quad \begin{cases} -\partial_t z + A_k z = 0 & \text{dans } (a_j, a_j + T_j) \times \Omega, \\ z(t) = 0 & \text{sur } (a_j, a_j + T_j) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{satisfont } \|z(a_j, \cdot)\|_{L^2(0, H)}^2 \leq \frac{1}{T_j} C e^{C s_k T_j^{-2}} \int_{a_j}^{a_j+T_j} \int_{\omega_n} |z(t, x)|^2 dx dt.$$

Cela nous permet de prouver maintenant l'observabilité dans l'espace de  $E_j$ .

**Proposition 3.5.4.** *Il existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que, si  $j \geq j_0$ , les solutions de (3.5.4) satisfont (3.5.3) avec  $C_{T_j} = C T_j^{-\frac{1}{2}} e^{C \mu_{\sigma_j}^{2/3}}$ .*

*Démonstration.* Nous avons  $q(t, x', x_n) = \sum_{k \leq \sigma_j} \phi_k(x') q_k(t, x_n)$  et  $q$  est solution de (3.5.4) dans  $\mathcal{C}([a_j, a_j + T_j]; E_j)$ , si et seulement si chaque fonction  $q_k$ ,  $1 \leq k \leq \sigma_j$ , est solution de (3.5.5) dans  $\mathcal{C}([a_j, a_j + T_j]; L^2(0, H))$  et  $q_k(a_j + T_j) = q_{0,k}$ , où  $q_0(x', x_n) = \sum_{k \leq \sigma_j} \phi_k(x') q_{0,k}(x_n)$ . Nous avons alors  $\|q(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k \leq \sigma_j} \|q_k(t, \cdot)\|_{L^2(0, H)}^2$  et de manière similaire  $\|q(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega' \times \omega_n)}^2 = \sum_{k \leq \sigma_j} \|q_k(t, \cdot)\|_{L^2(\omega_n)}^2$  quand  $t \in [a_j, a_j + T_j]$ . Grâce à la formule de Weyl [Agm65, théorème 14.6, p. 250],  $\mu_{\sigma_j} \sim C(\Omega')(\sigma_j)^{\frac{2}{n-1}}$ , nous voyons que, pour  $j$  suffisamment grand, nous avons  $s_{\sigma_j} = C T_j^2 \mu_{\sigma_j}^{2/3}$ . Nous avons alors  $T_j^{-2} \max_{1 \leq k \leq \sigma_j} s_k = T_j^{-2} s_{\sigma_j} = C \mu_{\sigma_j}^{2/3}$ . De la proposition 3.5.3 nous obtenons

$$\|q(a_j, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{T_j} e^{C \mu_{\sigma_j}^{2/3}} \int_{a_j}^{a_j+T_j} \int_{\omega_n} \sum_{k \leq \sigma_j} |q_k(t, x_n)|^2 dx_n dt.$$

Si nous utilisons  $q_k(t, x_n)$  à la place de  $b_k$  dans (3.1.5), nous en déduisons

$$\|q(a_j, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{T_j} e^{C\mu_{\sigma_j}^{2/3}} \int_{a_j}^{a_j+T_j} \int_{\omega_n} C' e^{C' \sqrt{\mu_{\sigma_j}}} \int_{\omega'} \left| \sum_{k \leq \sigma_j} \phi_k(x') q_k(t, x_n) \right|^2 dx' dx_n dt. \quad \blacksquare$$

Avec la valeur de  $C_{T_j}$  que nous avons obtenue, en suivant la méthode constructive de [LR95], nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 3.5.5.** *Sous les hypothèses 3.5.1 et 3.5.2, pour un temps arbitraire  $T > 0$  et une condition initiale  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in L^2((0, T) \times \Omega)$  tel que la solution associée  $y$  du système (3.5.2) satisfait  $y(T) = 0$  p.p. dans  $\Omega$ .*

**Remarque 3.5.6.** La méthode que nous avons exposée s'étend naturellement au cas où le domaine est de la forme  $M \times (0, H)$  où  $M$  est une variété riemannienne régulière compacte avec ou sans bord de dimension  $n - 1$ .

**Remarque 3.5.7.** La démonstration que nous venons de faire est fondée en partie sur l'inégalité (3.1.5) pour les fonctions propres associées à l'opérateur  $-\nabla_{x'} \cdot (C_1(x') \nabla_{x'})$  sur  $\Omega'$ . Si nous nous plaçons en dimension deux,  $\Omega = \Omega' \times (0, H)$  avec par exemple  $\Omega' = (0, 1)$ , le changement de variable introduit dans [AE07] ainsi que le théorème 2 de [AE07] permettent de démontrer l'inégalité (3.1.5) dans le cas où  $C_1(x') \in L^\infty(0, 1)$  avec  $0 < c_{\min} \leq C_1(x') \leq c_{\max}$ . Nous obtenons ainsi le résultat de contrôlabilité du théorème 3.5.5 dans ce cas. La matrice  $B(x', x_n)$  définie dans (3.5.1) est alors singulière dans les deux directions  $x'$  et  $x_n$ . On notera cependant qu'une des composantes de  $B(x', x_n)$  dépend uniquement de  $x_n$ . La généralisation, en dimension deux d'espace, que donne le résultat de [AE07] ne semble donc pas permettre de répondre à la question générale qui nous intéresse.

**Remarque 3.5.8.** D'après [FI96], la contrôlabilité pour un contrôle distribué permet d'obtenir un résultat similaire pour un contrôle frontière qui agit sur  $(0, H) \times \gamma'$  avec  $\gamma'$  un ouvert non vide de  $\partial\Omega'$ , ou tout  $\{0\} \times \partial\Omega'$  ou tout  $\{H\} \times \partial\Omega'$ .

### 3.6 Problème d'identification de coefficients non réguliers

Nous commençons par rappeler le cadre introduit dans la section 3.1. Nous considérons un ouvert  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega_0, \Omega_1$  deux ouverts non vides de  $\Omega$  tels que

$$\Omega_0 \Subset \Omega, \text{ et } \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0},$$

et  $\Omega_0$  est connexe. Soit un coefficient de diffusion  $c, \mathcal{C}^1$  par morceaux, discontinu sur l'interface  $S = \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_1}$ , elle-même supposée de classe  $\mathcal{C}^2$ . (Pour simplifier, nous prenons une seule interface mais cette configuration peut être généralisée; voir la remarque 3.6.6.) Nous posons  $\Omega' = \Omega \setminus S$ . Pour  $T > 0$  nous considérons le problème de transmission pour la chaleur suivant

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (c \nabla y) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega', \\ y(t, x) = h(t, x) & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ y|_{(0, T) \times S_0} = y|_{(0, T) \times S_1}, \quad c_0 \partial_n y|_{(0, T) \times S_0} = c_1 \partial_n y|_{(0, T) \times S_1}, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où les traces sur  $S_0$  sont prises du côté de  $\Omega_0$  et celles sur  $S_1$  du côté de  $\Omega_1$ . Si le coefficient  $c$  est changé en  $\tilde{c}$  nous notons alors  $\tilde{y}$  la solution associée. Nous supposons que l'interface, bien qu'inconnue, reste inchangée. Nous supposons que  $c$  et  $\tilde{c}$  vérifient  $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}, 0 < c_{\min} \leq \tilde{c} \leq c_{\max}$ .



Nous définissons  $\xi = c - \bar{c}$ ,  $u = y - \bar{y}$  et  $v = \partial_t u$ . Alors la fonction  $v$  est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t v - \nabla \cdot (c \nabla v) = \nabla \cdot (\xi \nabla \partial_t \bar{y}) & \text{dans } (0, T) \times \Omega', \\ v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ v|_{(0,T) \times S_0} = v|_{(0,T) \times S_1}, \quad c_0 \partial_n v|_{(0,T) \times S_0} = c_1 \partial_n v|_{(0,T) \times S_1} + g(t, x), \end{cases}$$

où  $g(t, x) = (\xi \partial_n \partial_t \bar{y})|_{(0,T) \times S_1} - (\xi \partial_n \partial_t \bar{y})|_{(0,T) \times S_0} = \alpha \partial_n \partial_t \bar{y}|_{(0,T) \times S_0}$ , avec  $\alpha = \xi|_{S_1} \frac{\bar{c}|_{S_0}}{\bar{c}|_{S_1}} - \xi|_{S_0}$ .

Pour la fonction  $v$  satisfaisant un tel système avec ces conditions de transmission particulières nous démontrons l'inégalité de Carleman suivante.

**Théorème 3.6.1** ([3]). *Soit  $\gamma$  un ouvert non vide de  $\partial\Omega$ . Si la dimension  $n$  est supérieure ou égale à 2 nous supposons que  $c|_{S_0} - c|_{S_1} \geq d > 0$ . Il existe  $\lambda_1 = \lambda_1 > 0$ ,  $s_1 = s_1(\lambda_1) > 0$  et  $C \geq 0$  tels que*

$$(3.6.2) \quad \begin{aligned} & |M_1^{(1)}(e^{-s\eta^{(1)}} v)|_{L^2(Q')}^2 + |M_1^{(2)}(e^{-s\eta^{(2)}} v)|_{L^2(Q')}^2 + |M_2^{(1)}(e^{-s\eta^{(1)}} v)|_{L^2(Q')}^2 + |M_2^{(2)}(e^{-s\eta^{(2)}} v)|_{L^2(Q')}^2 \\ & + s\lambda^2 \iint_Q (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)}) |\nabla v|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)3} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)3}) |v|^2 dx dt \\ & \leq C \left[ s\lambda \iint_{t_0}^T \int_{\gamma} (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)}) |\partial_n v|^2 d\sigma dt + \iint_{Q'} (e^{-2s\eta^{(1)}} + e^{-2s\eta^{(2)}}) |\partial_t v \pm \nabla \cdot (c \nabla v)|^2 dx dt \right. \\ & \quad + s\lambda \iint_{t_0}^T \int_S (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)}) |g|^2 d\sigma dt + \iint_{t_0}^T \int_S (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)4} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)4}) |g|^2 d\sigma dt \\ & \quad \left. + s^{-2} \iint_{t_0}^T \int_S (e^{-2s\eta^{(1)}} + e^{-2s\eta^{(2)}}) |\partial_t g|^2 d\sigma dt \right], \end{aligned}$$

pour  $s \geq s_1$ ,  $\lambda \geq \lambda_1$  avec les opérateurs  $M_1^{(i)}$  et  $M_2^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , de la même forme que (3.2.4) et  $Q = (t_0, T) \times \Omega$ ,  $Q' = (t_0, T) \times \Omega'$ .

Ici, pour des raisons techniques, il nous faut introduire deux familles de fonctions poids (voir la démonstration du théorème dans [3] qui s'inspire de celle du théorème 3.4 dans [DOP02]). Cette inégalité s'obtient en faisant des hypothèses géométriques sur l'ouvert  $\Omega$  qui suivent celles faites dans [DOP02], à partir desquelles nous construisons les fonctions poids de Carleman,  $\beta^{(i)}$ ,  $\eta^{(i)}$  et  $\varphi^{(i)}$ , suivant  $\varphi^{(i)}(t, x) = \frac{e^{\lambda\beta^{(i)}(x)}}{(t-t_0)(T-t)}$ ,  $\eta^{(i)}(t, x) = \frac{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta^{(i)}(x)}}{(t-t_0)(T-t)}$ , avec  $\bar{\beta} = 2m\|\bar{\beta}^{(i)}\|_\infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $m > 1$ . La forme de l'inégalité de Carleman du théorème 3.6.1 est peu classique à cause des termes d'interfaces dans le membre de droite de (3.6.2). Sa démonstration dans le cas  $n \geq 2$  suit néanmoins d'assez près celle de [FI96] et plus particulièrement celle de [DOP02]. Dans le cas  $n = 1$  l'hypothèse de monotonie sur  $c$  à l'interface  $S$  n'est pas nécessaire en suivant la méthodologie que nous avons exposée dans la section 3.2 (alors une seule fonction poids  $\beta$  construite suivant le lemme 3.2.1 est suffisante).

Nous posons  $T' = \frac{1}{2}(T + t_0)$ . L'inégalité de Carleman permet d'obtenir l'estimation suivante [3, lemme 2.3], pour  $s \geq s_1$  et  $\lambda \geq \lambda_1$ ,

$$\int_{\Omega'} \left( e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)\frac{3}{2}} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)\frac{3}{2}} \right) (T', x) |v(T', \cdot)|^2 dx \leq C s^{-3/2} \lambda^{-2} \times (\text{le terme de droite de (3.6.2)}).$$

Nous pouvons nous assurer qu'une des solutions de (3.6.1), par exemple  $\bar{y}$ , se trouve dans une classe de fonctions suffisamment régulières, et bornées dans de « bons » espaces, par un choix particulier de conditions au bord  $h(t, x)$  (voir [3, sections 2 et 3]). En particulier nous pouvons nous assurer que  $\Delta \bar{y} \geq r > 0$  sur  $\Omega'$  au temps  $T'$  en utilisant le principe du maximum.

Alors, si nous exploitons le fait que  $\xi$ , la différence entre  $c$  et  $\tilde{c}$ , est constante par morceaux nous obtenons, en posant  $\xi_i = \xi|_{\Omega_i}$ ,  $i = 0, 1$ ,

$$(3.6.3) \quad \sum_{i=0,1} |\xi_i|^2 \left\{ (1 - Cs^{-\frac{3}{2}}\lambda^{-2})W_i(s, \lambda) - C'[s^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}w_1(s, \lambda) + s^{-\frac{3}{2}}\lambda^{-2}w_4(s, \lambda) + s^{-\frac{7}{2}}\lambda^{-2}w_0(s, \lambda)] \right\} \\ \leq C'' \int_{\Omega'} \left( e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)\frac{3}{2}} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)\frac{3}{2}} \right) (T', x) |\nabla \cdot (c \nabla u(T', \cdot))|^2 dx \\ + C'' s^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \int_{t_0}^T \int_{\gamma} (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)}) |\partial_n v|^2 d\sigma dt,$$

où les termes  $W_i(s, \lambda)$ ,  $i = 1, 2$  et  $w_k(s, \lambda)$ ,  $k = 0, 1, 4$  sont donnés par

$$w_k(s, \lambda) := \int_{t_0}^T (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)k} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)k})(t, S) dt, \quad W_i(s, \lambda) := \int_{\Omega_i} (e^{-2s\eta^{(1)}} \varphi^{(1)\frac{3}{2}} + e^{-2s\eta^{(2)}} \varphi^{(2)\frac{3}{2}})(T', x) dx.$$

Nous aurons prouvé le résultat de stabilité si nous parvenons à rendre les coefficients accompagnant  $\xi_0$  et  $\xi_1$  strictement positifs puisque le membre de droite de (3.6.3) correspond aux termes d'observation que nous nous sommes donnés. Cela se fait en prenant les paramètres de Carleman  $s$  et  $\lambda$  suffisamment grands. C'est par l'étude des comportements asymptotiques de  $w_k(s, \lambda)$  et  $W_i(s, \lambda)$  que nous concluons. L'argument est assez simple pour le coefficient accompagnant  $\xi_1$ . Nous montrons que

$$W_1(s, \lambda) \geq C(\lambda, i) e^{-2sK^{(i)}}, \quad \text{avec } K^{(i)} < \eta^{(i)}(T', S), \quad i = 1, 2,$$

pour  $s$  suffisamment grand, où  $\eta^{(i)}(T', S)$  désigne la valeur de la fonction  $\eta^{(i)}$  sur l'interface  $S$ , où elle est effectivement constante, et nous montrons

$$w_k(s, \lambda) \leq C(\lambda) \left( e^{-2s\eta^{(1)}(T', S)} + e^{-2s\eta^{(2)}(T', S)} \right),$$

pour  $s$  suffisamment grand, ce qui permet de conclure en prenant  $s$  grand [3, proposition 2.8]. En général, pour obtenir un résultat de stabilité, un seul des deux paramètres de Carleman est utilisé. Nous les employons maintenant tous les deux pour montrer que le coefficient accompagnant  $\xi_0$  dans (3.6.3) est strictement positif quand  $\lambda$  et  $s$  sont suffisamment grands. L'équivalent asymptotique de  $w_k(s, \lambda)$  que nous donnons permet de « gagner », entre autres, une demi-puissance de  $s$  par rapport au résultat que donnerait une simple majoration de la fonction intégrée dans  $w_k(s, \lambda)$ .

**Lemme 3.6.2.** *Nous avons le comportement asymptotique suivant, pour  $s > s_3 > 0$  et  $\lambda > \lambda_3 > 0$  :*

$$w_k(s, \lambda) = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1,2} e^{-2s\eta^{(i)}(T', S)} \varphi^{(i)k}(T', S) \left( \frac{1}{\sqrt{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta^{(i)}(S)}}} + \mathcal{O}\left(\frac{s^{-\frac{3}{2}}}{(e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta^{(i)}(S)})^{\frac{3}{2}}}\right) \right).$$

Ce résultat correspond en fait à une formule de phase stationnaire pour une phase complexe [Hör90, théorème 7.7.5], qui, dans notre cas, correspond aussi à la méthode dite de Laplace [Erd56].

**Lemme 3.6.3.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous avons, pour  $s \geq s_2 > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,*

$$W_0(s, \lambda) \geq \frac{e^{-\lambda\varepsilon}}{s\lambda} \left( C_{s_2,1} e^{-2s\eta^{(1)}(T', S)} (\varphi^{(1)}(T', S))^{\frac{1}{2}} + C_{s_2,2} e^{-2s\eta^{(2)}(T', S)} (\varphi^{(2)}(T', S))^{\frac{1}{2}} \right).$$

Ce dernier résultat s'obtient en ne considérant qu'une petite partie de l'intégrale qui définit  $W_0(s, \lambda)$  près du bord de  $S$  dans  $\Omega_0$ . Nous pouvons alors utiliser des coordonnées normales à  $S$  et le long de  $S$  ce qui permet de comprendre plus facilement la dépendance de  $W_0(s, \lambda)$  en  $s$  et  $\lambda$ .

Si nous injectons maintenant la minoration de  $W_0(s, \lambda)$  et les équivalents de  $w_k$ ,  $k = 0, 1, 4$ , obtenus dans la forme du coefficient accompagnant  $\xi_0$  dans (3.6.3), nous voyons que le gain d'une demi-puissance en  $s$  obtenu dans le lemme 3.6.2 est essentiel. Nous pouvons alors montrer que ce coefficient est strictement positif quand  $\lambda$  et  $s$  sont pris successivement grands. Nous obtenons ainsi le théorème de stabilité suivant.

**Théorème 3.6.4.** *Soit  $\gamma$  un ouvert non vide de la frontière  $\partial\Omega$  et soient les coefficients  $c$  et  $\tilde{c}$  tels que  $c - \tilde{c}$  soit constant par morceaux. En dimension  $n \geq 2$  nous supposons de plus que  $c|_{S_0} - c|_{S_1} \geq d > 0$ . Alors nous avons*

$$\sum_{i=0,1} |(c - \tilde{c})|_{\Omega_i}|^2 \leq C|\partial_n(\partial_t y - \partial_t \tilde{y})|_{L^2((0,T) \times \gamma)}^2 + C|(y - \tilde{y})(T', \cdot)|_{H^2(\Omega')}^2.$$

avec  $y$  et  $\tilde{y}$ , solutions de (3.6.1) pour  $c$  et  $\tilde{c}$  respectivement, pour la condition de bord  $h(t, x)$  bien choisie.

**Remarque 3.6.5.** Le « bon » choix des conditions au bord,  $h(t, x)$ , permet d'obtenir certaines conditions de régularité et de positivité pour une des solutions comme nous l'avons écrit plus haut (pour plus de détails, voir [3, sections 2 et 3]).

**Remarque 3.6.6.** Pour simplifier l'exposition, nous n'avons considéré ici qu'une seule interface séparant deux ouverts de  $\Omega$ . Nous pouvons généraliser cette situation et suivre la même méthodologie. En particulier l'ouvert  $\Omega_0$  peut avoir plusieurs composantes connexes. Nous pouvons aussi considérer une suite d'ouverts « emboîtés ». Alors à chaque interface il nous faut faire une hypothèse de monotonie sur les coefficients en dimension  $n \geq 2$  [3]. En dimension un, nous pouvons considérer des coefficients constants par morceaux quelconques.

Si nous suivons la méthode de [YZ01] nous pouvons montrer le résultat de stabilité sur la condition initiale énoncé dans (3.1.7) à partir du résultat précédent. Cette méthode se fonde sur un argument de convexité logarithmique énoncé dans [Pay75] (voir [3, section 4]).

### 3.7 Perspectives

L'étude de la contrôlabilité des équations paraboliques à coefficients discontinus nous paraît importante car de telles singularités dans les coefficients existent dans de nombreuses applications. Nous avons en tête, en particulier, des systèmes de réaction-diffusion, par exemple en biologie, où les propriétés du milieu peuvent varier rapidement. Pour ces systèmes, beaucoup de questions de contrôle restent ouvertes. Les questions d'identification de coefficients sont aussi de première importance dans ce domaine.

Pour l'équation de la chaleur, avec un coefficient de diffusion non régulier, la question de l'observabilité dans une région quelconque reste ouverte pour les dimensions  $n \geq 2$ , pour un coefficient de diffusion complètement général. Le résultat de [2] constitue un encouragement pour continuer dans ce type de recherches. La plupart des résultats de contrôlabilité à zéro des équations paraboliques connus à ce jour peuvent être obtenus au moyen d'inégalités de Carleman pour l'opérateur parabolique, qui impliquent les inégalités d'observabilité (à l'exception du résultat récent de [AE07] et aussi de [2] qui utilisent la technique de G. Lebeau et L. Robbiano [LR95]). Il est donc naturel de vouloir vérifier si une telle inégalité est possible dans le cas général qui nous intéresse.

Lorsque nous cherchons à prouver une telle inégalité en utilisant la technique de [DOP02] ou [1], nous nous rendons compte que les problèmes proviennent d'une incapacité à estimer la dérivée tangentielle de la solution du problème parabolique au niveau des interfaces. Les techniques développées dans [LR97, Bel03] permettent un découpage microlocal près de l'interface en plusieurs zones. Certaines zones sont traitées comme pour des inégalités de Carleman au bord [LR95]. Dans d'autres zones, ce sont des projecteurs de Calderón qui sont utilisés. Nous comptons étudier les possibles applications de ces techniques au cas parabolique.

Dans l'optique du résultat de [AE07], l'existence d'une inégalité de Carleman pour une régularité aussi basse que  $L^\infty$  serait un résultat remarquable. Cette question semble difficile.

Pour des applications telles que la biologie, nous ne pouvons pas nous contenter de résultats théoriques de contrôlabilité. C'est pour cela que nous souhaitons explorer les aspects numériques de la contrôlabilité à zéro. À ce jour, seuls des résultats partiels existent et les équations hyperboliques sont bien plus étudiées que les équations paraboliques. En dimension un d'espace, il existe un résultat positif de contrôlabilité *uniforme* pour un schéma aux différences finies à pas constant pour le laplacien avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord [LZ98b]. En dimension deux cependant, dans un domaine carré, un contre-exemple montre que, pour un schéma aux différences finies à cinq points, à pas uniformes et identiques dans les deux directions, la zone de contrôle ne peut pas être arbitraire [Zua06]. Nous pouvons aussi citer le résultat de [LT06] qui ne concerne pas la contrôlabilité à zéro uniforme mais la convergence de la contrôlabilité approchée. Ce résultat est moins précis car il s'applique à des schémas très généraux.

À la lecture de ces quelques résultats, il semble important d'essayer de généraliser le résultat de [LZ98b] à des schémas à pas non constants pour des opérateurs à coefficients variables, tout d'abord en dimension un d'espace. L'obtention d'inégalités de type Carleman pour les opérateurs elliptiques et paraboliques discrets reste une question ouverte [Zua06]. Les premiers calculs que nous avons réalisés dans ce domaine, en collaboration avec F. Boyer et F. Hubert, indiquent une difficulté à obtenir des inégalités avec les grands paramètres  $s$  et  $\lambda$  indépendants du pas de discrétisation  $h$ . Ceci limite les possibilités d'applications de telles inégalités. Un objectif pourrait être l'obtention d'une version discrète de l'inégalité (3.1.5) :

$$(3.7.1) \quad \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq h C e^{C\sqrt{\mu}} \sum_{k=k_1, \dots, k_l} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \phi_{j,k} \right|^2, \quad \mu > 0, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

où ici les fonctions discrètes  $\phi_j$  sont les fonctions propres de l'opérateur discrétisé avec les valeurs propres  $\mu_j$  associées (qui sont en nombre fini). L'intégrale sur  $\omega \Subset \Omega$  est ici remplacée par une somme finie sur les points de discrétisation,  $x_{k_1}, \dots, x_{k_l}$  contenus dans  $\omega$ . Cependant, en prenant  $\mu$  suffisamment grand, un simple raisonnement d'algèbre linéaire montre qu'une telle inégalité est *fausse*. Nous pouvons alors être tentés d'obtenir une inégalité similaire comportant une intégrale continue par rapport à une variable supplémentaire comme obtenue originellement dans [LR95] :

$$(3.7.2) \quad \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq h C e^{C\sqrt{\mu}} \sum_{k=k_1, \dots, k_l} \int_{t_1}^{t_2} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j e^{\mu_j t} \phi_{j,k} \right|^2 dt, \quad \mu > 0, \quad t_2 > t_1, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

Une telle inégalité s'obtient à partir d'inégalités d'interpolation dans [LR95]. Cependant, le lien, que nous constatons entre les grands paramètres des inégalités de Carleman avec le pas de discrétisation  $h$ , ne semble pas permettre la démonstration de versions discrètes de telles inégalités.

En dimension plus grande, il semble important de comprendre si le contre-exemple donné dans [Zua06] est générique ou seulement exceptionnel et lié à la géométrie et au schéma considérés. Si nous parvenons à obtenir des inégalités d'observabilité uniformes, la question de la convergence de la fonction de contrôle obtenue pourra être abordée quand la discrétisation est raffinée.

Parallèlement à cette étude théorique, il semble important de procéder à une prospection numérique de certaines questions comme celle de la dépendance du contrôle vis-à-vis de la taille et de la localisation de la zone de contrôle. De telles questions sont importantes en pratique. Les résultats numériques que nous obtiendrons permettront d'orienter nos recherches plus théoriques. Nous avons, par exemple, projeté d'étudier les applications de la théorie du contrôle aux questions de thérapie du cancer.

Concernant le problème inverse que nous avons étudié ici, il semble important de traiter des cas de coefficients réguliers par morceaux plus généraux. Ici nous avons supposé que la différence des deux coefficients était constante par morceaux. Pour le moment, certainement pour des raisons uniquement techniques, nous

ne parvenons pas à relaxer cette condition. Ce serait pourtant un progrès important. Le résultat que nous obtenons, comme dans beaucoup de résultats de ce type pour les équations paraboliques, nécessite une mesure de la solution dans tout le domaine pour un temps positif. Supprimer une telle mesure représenterait une avancé significative.

### 3.A Sur l'inégalité de G. Lebeau et L. Robbiano

Dans cette annexe, nous donnons une démonstration indépendante et assez courte de l'inégalité (3.1.5) à partir d'une inégalité de Carleman globale. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $\mathcal{C}^2$ , et  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\Omega$  tel que  $\mathcal{O} \Subset \Omega$ . Soit  $T > 0$  et  $Q = (0, T) \times \Omega$ . Nous utilisons ici la notation  $\nabla = (\partial_t, \nabla_x)^t$  et nous désignons par  $n$  la normale unitaire sortante de  $Q$  sur  $\partial Q$  et par  $n_x$  la normale unitaire sortante de  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ .

Du fait de la régularité de la frontière, nous pouvons choisir une fonction  $\beta \in \mathcal{C}^2(\bar{Q})$  qui satisfait la propriété suivante :

$$\begin{aligned} |\nabla\beta| \geq c > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ dans } Q, \quad \partial_{n_x}\beta(t, x) = f(t) < 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \partial_t\beta \geq c > 0 \text{ sur } \{0\} \times (\Omega \setminus \mathcal{O}), \quad \nabla_x\beta = 0 \text{ et } \partial_t\beta \leq c < 0 \text{ sur } \{T\} \times \Omega, \quad \sup_{x \in \Omega} \beta(0, x) > \beta(T, x) = cst. \end{aligned}$$

Une telle fonction peut être obtenue en suivant par exemple la technique de [FI96], i.e. en utilisant le théorème de Morse [AE84]. Nous définissons  $\varphi := e^{\lambda\beta}$ . Avec cette fonction poids nous obtenons l'inégalité de Carleman globale suivante pour l'opérateur elliptique  $P = \partial_t^2 + \nabla_x \cdot (C_1 \nabla_x)$  sur  $(0, T) \times \Omega$ , avec  $C_1$  une matrice de diffusion régulière ( $\mathcal{C}^1$ ).

**Théorème 3.A.1.** *Soit  $C_1(x)$  dans  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , symétrique telle que  $0 < c_{\min} \leq C_1(x) \leq c_{\max}$ . Il existe  $C = C(\Omega, \mathcal{O}, T, c_{\min}, c_{\max}) > 0$ ,  $s_0 = s_0(\Omega, \mathcal{O}, T, c_{\min}, c_{\max}) > 0$  et  $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \mathcal{O}, T, c_{\min}, c_{\max}) > 0$  tels que*

$$\begin{aligned} (3.A.1) \quad & s^3 \lambda^4 \iint_Q \varphi^3 e^{2s\varphi} |u|^2 dx dt + s \lambda^2 \iint_Q e^{2s\varphi} \varphi (|\nabla u|^2) dx dt + s \lambda \int_{\Omega} (e^{2s\varphi} \varphi)(0, x) |\partial_t u(0, x)|^2 dx \\ & + s \lambda \int_{\Omega} (e^{2s\varphi} \varphi)(T, x) |\partial_t u(T, x)|^2 dx + s^3 \lambda^3 \int_{\Omega} (e^{2s\varphi} \varphi^3)(T, x) |u(T, x)|^2 dx \\ & \leq C \left[ \iint_Q e^{2s\varphi} |Pu|^2 dx dt + s \lambda \int_{\Omega} (e^{2s\varphi} \varphi)(T, x) |\nabla_x u(T, x)|^2 dx + s \lambda \int_{\mathcal{O}} (e^{2s\varphi} \varphi)(0, x) |\partial_t u(0, x)|^2 dx \right], \end{aligned}$$

pour  $s \geq s_0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ , pour tout  $u \in H^2(Q)$ , satisfaisant  $u|_{\{0\} \times \Omega} = 0$ ,  $u|_{(0, T) \times \partial\Omega} = 0$ .

On remarquera que nous n'imposons aucune condition au bord sur  $\{T\} \times \Omega$ .

*Démonstration.* Nous définissons la matrice symétrique  $\tilde{C}_1(x)$  d'ordre  $n + 1$  égale à

$$\tilde{C}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_1(x) \end{pmatrix}.$$

Posons  $f = Pu \in L^2(Q)$ . Alors  $f = \nabla \cdot \tilde{C}_1 \nabla u$ . Nous prenons  $s > 0$  et  $\lambda > 0$ . Nous définissons  $\psi = e^{s\varphi} u$ . La fonction  $\psi$  satisfait alors  $M_1\psi + M_2\psi = f_s$  avec  $f_s = e^{s\varphi} f + s\lambda\varphi(\nabla\beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla\beta)\psi - s\lambda^2\varphi(\nabla\beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla\beta)\psi$  et

$$M_1\psi = P\psi + s^2\lambda^2\varphi^2(\nabla\beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla\beta)\psi, \quad M_2\psi = -2s\lambda\varphi\nabla\beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla\psi - 2s\lambda^2\varphi(\nabla\beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla\beta)\psi.$$

Nous avons  $\|M_1\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|M_2\psi\|_{L^2(Q)}^2 + 2(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)} = \|f_s\|_{L^2(Q)}^2$ , puis nous écrivons  $(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)}$  comme une somme de quatre termes  $I_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , où  $I_{ij}$  est le produit scalaire du  $i$ ème terme dans l'expression de  $M_1\psi$  et du  $j$ ème terme dans l'expression de  $M_2\psi$ .

Le terme  $I_{11}$  est donné par  $I_{11} = -2s\lambda \iint_Q \varphi(\nabla \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi)(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) dx dt$  ce qui après deux intégrations par parties donne

$$I_{11} = 2s\lambda^2 \iint_Q \varphi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi)^2 dx dt - s\lambda^2 \iint_Q \varphi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)(\nabla \psi \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) dx dt \\ - 2s\lambda \int_{\partial Q} \varphi(n \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi)(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) d\sigma(t, x) + s\lambda \int_{\partial Q} \varphi(n \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)(\nabla \psi \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) d\sigma(t, x) + X_{11},$$

où

$$X_{11} = 2s\lambda \sum_{i,j,k,l} \iint_Q \varphi(\tilde{C}_1)_{ij}(\partial_j \psi) \partial_i((\tilde{C}_1)_{kl} \partial_k \beta) \partial_l \psi dx dt \\ - s\lambda \sum_{k,l} \iint_Q \varphi(\nabla \psi \cdot (\partial_i \tilde{C}_1) \nabla \psi) (\tilde{C}_1)_{kl} \partial_k \beta dx dt - s\lambda \iint_Q \varphi(\nabla \psi \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) (\nabla \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) dx dt.$$

Le terme  $I_{12}$ , donné par  $I_{12} = -2s\lambda^2 \iint_Q \varphi(\nabla \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi)(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) \psi dx dx$ , devient

$$I_{12} = 2s\lambda^2 \iint_Q \varphi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)(\nabla \psi \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) dx dt + X_{12},$$

après deux intégrations par parties, avec

$$X_{12} = 2s\lambda^2 \iint_Q (\tilde{C}_1 \nabla \psi) \cdot \nabla(\varphi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)) \psi dx dt - 2s\lambda^2 \int_{\partial Q} \varphi(n \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi)(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) \psi d\sigma(t, x).$$

Le terme  $I_{21}$ , donné par  $I_{21} = -2s^3\lambda^3 \iint_Q \varphi^3(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) \psi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) dx dt$ , devient

$$I_{21} = 3s^3\lambda^4 \iint_Q \varphi^3(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)^2 \psi^2 dx dt - s^3\lambda^3 \int_{\partial Q} \varphi^3(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)(n \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) \psi^2 d\sigma(t, x) + X_{21},$$

après une intégration par parties, avec  $X_{21} = s^3\lambda^3 \iint_Q \varphi^3 \nabla(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta) \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta \psi^2 dx dt$ . Finalement, le terme  $I_{22}$  est donné par  $I_{22} = -2s^3\lambda^4 \iint_Q \varphi^3(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)^2 \psi^2 dx dt$ .

Nous observons que  $\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta \geq c > 0$  dans  $Q$ , et nous voyons ainsi que pour  $s$  et  $\lambda$  suffisamment grands, nous pouvons dominer et « absorber » les termes volumiques dans  $X_{11}$ ,  $X_{12}$  et  $X_{13}$  par les termes positifs qui suivent,

$$s^3\lambda^4 \iint_Q \varphi^3(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)^2 \psi^2 dx dt \quad \text{et} \quad s\lambda^2 \iint_Q \varphi(\nabla \beta \cdot \tilde{C}_1 \nabla \beta)(\nabla \psi \cdot \tilde{C}_1 \nabla \psi) dx dt,$$

par des manipulations classiques (voir [FI96]).

Nous écrivons maintenant précisément les termes de surface de  $I_{11}$ ,  $X_{12}$  et  $I_{21}$ . Nous considérons ces termes successivement sur  $(0, T) \times \partial\Omega$ ,  $\{0\} \times \Omega$  et  $\{T\} \times \Omega$ .

1. Sur  $(0, T) \times \partial\Omega$ , nous avons  $n = (0, n_x)^t$ ,  $\psi = 0$ ,  $\partial_t \psi = 0$ ,  $\nabla_x \beta = f(t)n_x$  avec  $f(t) < 0$ , et  $\nabla_x \psi =$

$(\partial_{n_x}\psi)n_x$ . Les termes de surfaces de  $I_{11}$  sont alors

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi f(t) \left( -2(n_x \cdot C_1 \nabla_x \psi)^2 + (n_x \cdot C_1 n_x)(\nabla_x \psi \cdot C_1 \nabla_x \psi) \right) d\sigma(x) dt \\ & = -s\lambda \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi f(t) (n_x \cdot C_1 n_x)^2 (\partial_{n_x} \psi)^2 d\sigma(x) dt > 0. \end{aligned}$$

Sur  $(0, T) \times \partial\Omega$  les termes de surface de  $X_{12}$  et  $I_{21}$  s'annulent.

2. Sur  $\{0\} \times \Omega$ , nous avons  $n = (-1, 0)^t$ ,  $\nabla\psi = (\partial_t\psi, 0)$  puisque  $\psi = 0$ . Les termes de surface de  $I_{11}$  donnent alors  $s\lambda \int_{\Omega} \varphi(0, x) \partial_t\beta(0, x) (\partial_t\psi(0, x))^2 dx$ , que nous pouvons séparer en deux termes : une intégrale sur  $O$  de signe indéterminé, et une autre intégrale sur  $\Omega \setminus O$  qui est positive puisque  $\partial_t\beta(0, x)$  y est strictement positif. Sur  $\{0\} \times \Omega$ , les termes de surface de  $X_{12}$  et  $I_{21}$  s'annulent.
3. Sur  $\{T\} \times \Omega$ , nous avons  $n = (1, 0)^t$  et  $\beta(T, x) = \beta(T)$ . Les termes de surface de  $I_{11}$  deviennent

$$-s\lambda \int_{\Omega} \varphi(T) \partial_t\beta(T) (\partial_t\psi(T, x))^2 dx + s\lambda \int_{\Omega} \varphi(T) \partial_t\beta(T) (\nabla_x \psi(T, x) \cdot C_1 \nabla_x \psi(T, x)) dx,$$

où le premier terme est positif et le second est négatif puisque  $\partial_t\beta(T)$  est strictement négatif. Le terme de surface de  $I_{21}$  devient  $-s^3 \lambda^3 \varphi(T)^3 (\partial_t\beta(T))^3 \int_{\Omega} \psi(T, x)^2 dx$  qui est positif. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le terme de  $X_{12}$  peut être dominé et « absorbé » sur  $\{T\} \times \Omega$  par le terme positif que nous venons de trouver. Nous notons que

$$s\lambda \int_{\Omega} \varphi(T) \partial_t\beta(T) (\nabla_x \psi(T, x) \cdot C_1 \nabla_x \psi(T, x)) dx = s\lambda \int_{\Omega} \varphi(T) e^{s\varphi(T)} \partial_t\beta(T) (\nabla_x u(T, x) \cdot C_1 \nabla_x u(T, x)) dx$$

puisque  $\beta$  est constante sur  $\{T\} \times \Omega$ .

Les différents signes que nous avons obtenus pour les termes de surface dominants conduisent à l'inégalité de Carleman recherchée. ■

Nous considérons maintenant l'opérateur  $A = -\nabla_x \cdot (C_1 \nabla_x)$  défini sur  $\Omega$  de domaine  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  (conditions de Dirichlet homogènes). Nous supposons que  $0 < c_{\min} \leq C_1(x) \leq c_{\max}$ . L'opérateur  $A$  est autoadjoint et son spectre est purement ponctuel, donné par les valeurs propres (qui peuvent être multiples)  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ , classées par ordre croissant avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty$ . Nous désignons par  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de fonctions propres associées aux valeurs propres  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . De l'inégalité de Carleman précédente nous prouvons l'inégalité recherchée.

**Théorème 3.A.2.** *Soit  $O$  un ouvert de  $\Omega$ . Il existe  $C > 0$ , tel que, pour tout  $\mu > 0$ ,*

$$(3.A.2) \quad \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_O \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \phi_j(x) \right|^2 dx, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

L'inégalité (3.A.2) mesure la perte d'orthogonalité des fonctions propres  $\phi_j$ ,  $\mu_j \leq \mu$ , quand elles sont restreintes à l'ouvert  $O$ .

*Démonstration.* Nous posons  $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x)$ . Nous observons que  $Pu = 0$  pour  $P = \partial_t^2 + \nabla_x \cdot (C_1 \nabla_x)$ . Si nous ne gardons qu'un seul terme à gauche dans l'inégalité de Carleman (3.A.1) nous obtenons (en prenant  $\lambda = \lambda_0$ )

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |u(T, x)|^2 dx \leq K \left[ s e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |\nabla_x u(T, x)|^2 dx + s \int_O e^{2s\varphi(0, x)} |\partial_t u(0, x)|^2 dx \right],$$

pour tout  $s \geq s_0 > 0$ , où nous avons utilisé le fait que la fonction poids  $\beta$ , définie plus haut, est constante sur  $\{T\} \times \Omega$ .

On notera que

$$\int_{\Omega} |u(T, x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x) \right|^2 dx = \sum_{\mu_j \leq \mu} \left| a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \right|^2 \geq T^2 \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2,$$

puisque les fonctions propres  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont orthonormales. Nous observons de plus que

$$\int_0^T (e^{2s\varphi})(0, x) |\partial_t u(0, x)|^2 dx \leq C e^{2s \sup_{x \in \Omega} \varphi(0, x)} \int_0^T |\partial_t u(0, x)|^2 dx = e^{2s \sup_{x \in \Omega} \varphi(0, x)} \int_0^T \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \phi_j(x) \right|^2 dx.$$

Le choix de fonction poids  $\beta$  que nous avons fait plus haut donne  $\sup_{x \in \Omega} \varphi(0, x) \geq \varphi(T)$ . Ainsi il nous suffit maintenant de montrer que

$$(3.A.3) \quad \frac{1}{2} s^3 e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |u(T, x)|^2 dx \geq K s e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |\nabla_x u(T, x)|^2 dx,$$

pour  $s \geq C \sqrt{\mu}$  afin d'obtenir l'inégalité recherchée. Nous écrivons

$$\frac{1}{2} s^3 e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |u(T, x)|^2 dx = \frac{1}{2} s^3 e^{2s\varphi(T)} \sum_{\mu_j \leq \mu} \left| a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \right|^2$$

et

$$\begin{aligned} s e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} |\nabla_x u(T, x)|^2 dx &= s e^{2s\varphi(T)} \int_{\Omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \nabla_x \phi_j \right|^2 dx \\ &\leq s e^{2s\varphi(T)} \frac{1}{c_{\min}} \int_{\Omega} \left( \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \nabla_x \phi_j \right) \cdot C_1 \left( \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \frac{\sinh(T \sqrt{\mu_j})}{\sqrt{\mu_j}} \nabla_x \phi_j \right) dx \\ &\leq s e^{2s\varphi(T)} \frac{1}{c_{\min}} \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j \sinh(T \sqrt{\mu_j})|^2, \end{aligned}$$

puisque les fonctions  $(\nabla_x \phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfont  $\int_{\Omega} \nabla_x \phi_i \cdot C_1 \nabla_x \phi_j dx = \mu_j \delta_{ij}$ . Nous voyons alors que la condition

(3.A.3) est satisfaite pour  $s^2 \geq C\mu$ . ■





# Publications de l'auteur

## Articles parus dans des revues internationales à comité de lecture

- [1] A. Benabdallah, Y. Dermenjian et J. Le Rousseau. Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 336, 865-887, 2007.
- [2] A. Benabdallah, Y. Dermenjian et J. Le Rousseau. On the controllability of linear parabolic equations with an arbitrary control location for stratified media. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, 344, 357-362, 2007.
- [3] A. Benabdallah, P. Gaitan et J. Le Rousseau. Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation. *SIAM J. Control Optim.*, à paraître, 2007.
- [4] H. Chauris, J. Le Rousseau, B. Beaudoin, S. Propson et A. Montanari. Inoceramid extinction in the Gubbio basin (northeastern Apennines of Italy) and relations with mid-Maastrichian environmental changes. *Palaeogeog. Palaeoclim. Palaeoecol.*, 139, 177-193, 1998.
- [5] M. V. de Hoop, J. Le Rousseau et B. Biondi. Symplectic structure of wave-equation imaging : A path-integral approach based on the double-square-root equation. *Geoph. J. Int.*, 153, 52-74, 2003.
- [6] M. V. de Hoop, J. Le Rousseau et R.-S. Wu, Generalization of the phase-screen approximation for the scattering of acoustic waves. *Wave Motion*, 31, 43-70, 2000.
- [7] M. V. de Hoop, A. E. Malcolm et J. Le Rousseau. Seismic wavefield 'continuation' in the single scattering approximation : A framework for Dip and Azimuth MoveOut. *Can. Appl. Math. Q.*, 10, 199-237, 2002.
- [8] J. Le Rousseau. Fourier-integral-operator approximation of solutions to pseudodifferential first-order hyperbolic equations I : convergence in Sobolev spaces. *Comm. Partial Differential Equations*, 31, 867-906, 2006.
- [9] J. Le Rousseau. Carleman estimates and controllability results for the one-dimensional heat equation with *BV* coefficients. *J. Differential Equations*, 233, 417-447, 2007.
- [10] J. Le Rousseau. On the convergence of some products of Fourier integral operators. *Asymptotic Anal.*, 51, 189-207, 2007.
- [11] J. Le Rousseau, H. Calandra et M. V. de Hoop. 3D depth imaging with generalized screens : A subsalt case study. *Geophysics*, 68, 1132-1139, 2003.
- [12] J. Le Rousseau et M. V. de Hoop. Modeling and imaging with the scalar generalized-screen algorithms in isotropic media. *Geophysics*, 66, 1551-1568, 2001.
- [13] J. Le Rousseau et M. V. de Hoop. Scalar generalized-screen algorithms in transversely isotropic media with a vertical symmetry axis. *Geophysics*, 66, 1538-1550, 2001.
- [14] J. Le Rousseau et M. V. de Hoop. Generalized-screen approximation and algorithm for the scattering of elastic waves. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 56, 1-33, 2003.
- [15] J. Le Rousseau et G. Hörmann. Fourier-integral-operator approximation of solutions to pseudodifferential first-order hyperbolic equations II : microlocal analysis. *J. Math. Pures Appl.*, 86, 403-426, 2006.

- [16] A. E. Malcolm, M. V. de Hoop et J. Le Rousseau. The applicability of DMO/AMO in the presence of caustics. *Geophysics*, 70(1), S1-S17, 2005.
- [17] B. Zadler, J. Le Rousseau, J. Scales et M. Smith. Resonant Ultrasound Spectroscopy : theory and application. *Geoph. J. Int.*, 156, 154-169, 2004.

**Comptes Rendus à l'Académie des Sciences (annonce de résultat)**

- [18] A. Benabdallah, Y. Dermenjian et J. Le Rousseau. Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications. *Comptes Rendus Mécanique*, 334, 582–586, 2006.
- [19] J. Le Rousseau. Carleman estimates and controllability results for the one-dimensional heat equations with  $BV$  coefficients. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, 344, 175-180, 2007.

**Article soumis**

- [20] J. Le Rousseau. FIO-product representation of solutions to symmetrizable hyperbolic systems. *Prépublication : LATP, Université d'Aix-Marseille I*, 2006.

# Bibliographie

- [ABD06] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah et C. Dupaix. Null controllability of some reaction-diffusion systems with one control force. *J. Math. Anal. Appl.*, 320, 928–943, 2006.
- [AE84] J.-P. Aubin et I. Ekeland. *Applied Non Linear Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [AE07] G. Alessandrini et L. Escauriaza. Null-controllability of one-dimensional parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var., in press*, 2007.
- [AG91] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs Pseudo-Différentiels et Théorème de Nash-Moser*. Editions du CNRS, 1991.
- [Agm65] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand, 1965.
- [Aub79] J.-P. Aubin. *Applied Functional Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [Bar00] V. Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Appl. Math. Optim.*, 42, 73–89, 2000.
- [Bel03] M. Bellassoued. Carleman estimates and distribution of resonances for the transparent obstacle and application to the stabilization. *Asymptotic Anal.*, 35, 257–279, 2003.
- [Ber94] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114, 185–200, 1994.
- [BK81] A. L. Bukhgeim et M. V. Klibanov. Global uniqueness of class of multidimensional inverse problems. *Soviet Math. Dokl.*, 24, 244–247, 1981.
- [BN02] A. Benabdallah et M. G. Naso. Null controllability of a thermoelastic plate. *Abstr. Appl. Anal.*, 7, 585–599, 2002.
- [Bon99] J.-M. Bony. Sur l’inégalité de Fefferman-Phong. *Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau*, 1999.
- [BP02] L. Baudouin et J.-P. Puel. Uniqueness and stability in an inverse problem for the schrodinger equation. *Inverse Problems*, 18, 1537–1554, 2002.
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [Bre00] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws : The One Dimensional Cauchy Problem*. Oxford University Press, 2000.
- [Cla85] J. F. Claerbout. *Imaging the Earth’s Interior*. Blackwell Scientific Publications, Palo Alto, 1985.
- [Cor95] H. O. Cordes. *The Technique of Pseudodifferential Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [CP82] J. Chazarain et A. Piriou. *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*. North-Holland, Amsterdam, 1982.

- [CV72] A. P. Calderón et R. Vaillancourt. A class of bounded pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 69, 1185–1187, 1972.
- [dd94] M. V. de Hoop et A. T. de Hoop. Elastic wave up/down decomposition in inhomogeneous and anisotropic media : an operator approach and its approximations. *Wave Motion*, 20, 57–82, 1994.
- [DFCGBZ02] A. Doubova, E. Fernandez-Cara, M. Gonzales-Burgos et E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41, 798–819, 2002.
- [DH72] J. J. Duistermaat et L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128, 183–269, 1972.
- [DL88] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, volume 5. Masson, Paris, 1988.
- [DOP02] A. Doubova, A. Osses et J.-P. Puel. Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients. *ESAIM : Control Optim. Calc. Var.*, 8, 621–661, 2002.
- [Dui96] J. J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators*. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [Erd56] A. Erdélyi. *Asymptotic expansions*. Dover publications, 1956.
- [FCG06] E. Fernández-Cara et S. Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and application to controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 45(4), 1395–1446, 2006.
- [FCZ00] E. Fernández-Cara et E. Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non lin.*, 17, 583–616, 2000.
- [FCZ02] E. Fernández-Cara et E. Zuazua. On the null controllability of the one-dimensional heat equation with BV coefficients. *Comput. Appl. Math.*, 21, 167–190, 2002.
- [FI96] A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34. Seoul National University, Korea, 1996. Lecture notes.
- [FKg05] D. Fujiwara et N. Kumano-go. Smooth functional derivatives in feynman path integrals by time slicing approximation. *Bull. Sci. Math.*, 129, 57–79, 2005.
- [FP78] C. Fefferman et D. H. Phong. On positivity of pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 75, 4673–4674, 1978.
- [FPZ95] C. Fabre, J.-P. Puel et E. Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 125, 31–61, 1995.
- [Gau97] W. Gautschi. *Numerical Analysis : an Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [Gaz78] J. Gazdag. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, 43, 1342–1351, 1978.
- [GS84] J. Gazdag et P. Sguazzero. Migration of seismic data by phase shift plus interpolation. *Geophysics*, 49, 124–131, 1984.
- [GS94] A. Grigis et J. Sjöstrand. *Microlocal Analysis for Differential Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Gui85] V. Guillemin. On some results of Gel'fand in integral geometry. Dans *Pseudodifferential operators and applications (Notre Dame, Ind., 1984)*, pages 149–155. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [HLW02] E. Hairer, C. Lubich et G. Wanner. *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [HNW93] E. Hairer, S. P. Nørsett et G. Wanner. *Solving Ordinary differential equations I : nonstiff problems*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

- [Hör63] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [Hör71] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127, 79–183, 1971.
- [Hör79] L. Hörmander. The Weyl calculus of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 359–443, 1979.
- [Hör85a] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume III. Springer-Verlag, 1985. Second printing 1994.
- [Hör85b] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume IV. Springer-Verlag, 1985.
- [Hör90] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume I. Springer-Verlag, second edition, 1990.
- [Huy90] C. Huygens. *Traité de la Lumière*. Pierre van der Aa, Leyden, 1690. Translated reprint (*Treatise on Light*), Dover, New York, 1962.
- [Hwa87] I. L. Hwang. The  $L^2$ -boundedness of pseudodifferential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302, 55–76, 1987.
- [Ima01] O. Yu. Imanuvilov. Remarks on the exact controllability of Navier-Stokes equations. *ESAIM : Control Optim. Calc. Var.*, 6, 39–72, 2001.
- [Isa93] V. Isakov. Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *J. Differential Equations*, 105, 217–238, 1993.
- [Isa98] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [IT04] T. Ichinose et H. Tamura. Note on the norm convergence of the unitary trotter product formula. *Lett. Math. Phys.*, 70, 65–81, 2004.
- [IY98] O. Yu. Imanuvilov et M. Yamamoto. Lipschitz stability in inverse problems by Carleman estimate. *Inverse problems*, 14, 1229–1245, 1998.
- [IY01] O. Yu. Imanuvilov et M. Yamamoto. Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications. Dans *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 218, pages 113–137. Dekker, New York, 2001.
- [Kat70] T. Kato. Linear evolution equations of "hyperbolic" type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I*, 17, 241–258, 1970.
- [Kat80] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [KF74] A. Kolmogorov et S. V. Fomin. *Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle*. Editions MIR, 1974.
- [Kg81] H. Kumano-go. *Pseudo-Differential Operators*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [Kg95] N. Kumano-go. A construction of the fundamental solution for Schrödinger equations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 2, 441–498, 1995.
- [KgT79] H. Kumano-go et K. Taniguchi. Fourier integral operators of multi-phase and the fundamental solution for a hyperbolic system. *Funkcialaj Ekvacioj*, 22, 161–196, 1979.
- [KgTT78] H. Kumano-go, K. Taniguchi et Y. Tozaki. Multi-products of phase functions for Fourier integral operators with an application. *Comm. Partial Differential Equations*, 3(4), 349–380, 1978.
- [KKg81] H. Kitada et H. Kumano-go. A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation. *Osaka J. Math.*, 18, 291–360, 1981.
- [Kli04] M. V. Klibanov. Global uniqueness of a multidimensional inverse problem for a nonlinear parabolic equation by a Carleman estimate. *Inverse problems*, 20, 1003–1032, 2004.
- [Lax57] P. D. Lax. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.*, 24, 627–646, 1957.

- [Lio88] J.-L. Lions. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, volume 1. Masson, Paris, 1988.
- [LM68] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, volume 1. Dunod, 1968.
- [LN66] P. D. Lax et L. Nirenberg. On stability for difference schemes : A sharp form of Gårding's inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, 19, 473–492, 1966.
- [LR95] G. Lebeau et L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20, 335–356, 1995.
- [LR97] G. Lebeau et L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math. J.*, 86, 465–491, 1997.
- [LT06] S. Labbé et E. Trélat. Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems. *Systems Control Lett.*, 55, 597–609, 2006.
- [LZ98a] G. Lebeau et E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141, 297–329, 1998.
- [LZ98b] A. Lopez et E. Zuazua. Some new results to the null controllability of the 1-d heat equation. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1997–1998, Exp. No. VIII, 22 pp., École Polytech., Palaiseau, 1998.*
- [Mar02] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer-Verlag, 2002.
- [MS74] A. Melin et J. Sjöstrand. Fourier integral operators with complex-valued phase functions. Dans *Lecture Notes*, volume 459, pages 120–223. Springer-Verlag, 1974.
- [MS76] A. Melin et J. Sjöstrand. Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 1(4), 313–400, 1976.
- [MZ05] G. Métivier et K. Zumbrun. Hyperbolic boundary value problems for symmetric systems with variable multiplicities. *J. Differential Equations*, 211, 61–134, 2005.
- [Pay75] L. E. Payne. *Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1975.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [RS80] R. Reed et B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1. Academic Press, San Diego, 1980.
- [Rus73] D. L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math.*, 52, 189–221, 1973.
- [SdH02] C. C. Stolk et M. V. de Hoop. Microlocal analysis of seismic inverse scattering in anisotropic, elastic media. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55, 261–301, 2002.
- [SDH05] C. C. Stolk et M. V. De Hoop. Modelling of seismic data in the downward continuation approach. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(4), 1388–1406, 2005.
- [SdH06] C. C. Stolk et M. V. de Hoop. Seismic inverse scattering in the downward continuation approach. *Wave Motion*, 43, 579–598, 2006.
- [SFdLFK90] P. L. Stoffa, J. T. Fokkema, R. M. de Luna Freire et W. P. Kessinger. Split-step Fourier migration. *Geophysics*, 55, 410–421, 1990.
- [Shu01] M. A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2001.
- [Smi98] H. Smith. A parametrix construction for wave equations with  $C^{1,1}$  coefficients. *Ann. Inst. Fourier*, 48, 797–835, 1998.

- [SR91] X. Saint Raymond. *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*. CRC Press, Boca Raton, 1991.
- [Sto78] R. H. Stolt. Migration by Fourier transform. *Geophysics*, 43, 23–48, 1978.
- [Sto04] C. C. Stolk. A pseudodifferential equation with damping for one-way wave propagation in inhomogeneous media. *Wave Motion*, 40(2), 111–121, 2004.
- [Sto05] C. C. Stolk. Parametrix for a hyperbolic initial value problem with dissipation in some region. *Asymptotic Anal.*, 43(1-2), 151–169, 2005.
- [Tay75] M. E. Taylor. Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, 457–478, 1975.
- [Tay81] M. E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.
- [Trè80a] F. Trèves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, volume 1, Pseudodifferential Operators. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [Trè80b] F. Trèves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, volume 2, Fourier Integral Operators. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [Vai70] R. Vaillancourt. A simple proof of Lax-Nirenberg Theorems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23, 151–163, 1970.
- [YZ01] M. Yamamoto et J. Zou. Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient. *Inverse problems*, 17, 1181–1202, 2001.
- [Zab92] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory : an Introduction*. Birkhauser, System & Control : Foundations & Applications, Boston, MA, 1992.
- [Zua06] E. Zuazua. Control and numerical approximation of the wave and heat equations. *International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain*, III, 1389–1417, 2006.
- [Zui83] C. Zuily. *Uniqueness and Non Uniqueness in the Cauchy Problem*. Birkhauser, Progress in mathematics, 1983.