



**HAL**  
open science

# Évaluation de la biréfringence en ligne et modélisation du procédé de soufflage de gaine multicouche

Eric Gamache

► **To cite this version:**

Eric Gamache. Évaluation de la biréfringence en ligne et modélisation du procédé de soufflage de gaine multicouche. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004. Français. NNT : 2004ENMP1264 . tel-00274690

**HAL Id: tel-00274690**

**<https://pastel.hal.science/tel-00274690>**

Submitted on 21 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉVALUATION DE LA BIRÉFRINGENCE EN LIGNE ET MODÉLISATION DU  
PROCÉDÉ DE SOUFFLAGE DE GAINÉ MULTICOUCHE

ERIC GAMACHE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIA DOCTOR  
(GÉNIE CHIMIQUE)  
NOVEMBRE 2004

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ÉVALUATION DE LA BIRÉFRINGENCE EN LIGNE ET MODÉLISATION DU  
PROCÉDÉ DE SOUFFLAGE DE GAINÉ MULTICOUCHE

présentée par : GAMACHE Eric  
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophae Doctor  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. FAVIS Basil D., Ph.D., président  
M. LAFLEUR Pierre G., Ph.D., membre et directeur de recherche  
M. AGASSANT Jean-François, D. Sc., membre et codirecteur de recherche  
M. DEMAY Yves, D.Sc., membre et codirecteur de recherche  
M. AJJI Abdellah, Ph. D., membre  
M. MOAN Michel, D.Sc., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherche. Pierre G. Lafleur pour m'avoir donné l'opportunité d'entreprendre une thèse, et ce même si j'avais été corrompu par un long séjour en entreprise, et pour son soutien moral constant. Jean-François Agassant, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, pour son encadrement exceptionnel, ses nombreux commentaires et sa capacité à synthétiser de façon claire mes élucubrations nébuleuses. Yves Demay pour nos discussions sur l'élaboration du modèle et sa patience face à mon manque de formalisme mathématique.

Je désire aussi remercier les collègues des cinq bureaux sur deux continents que j'ai occupés lors des quatre dernières années. Parmi ceux-ci il y a mes trois muses du CEMEF, Olgita, Lucia et Elyse qui m'ont inspiré par leur humour, leur gentillesse et leur vivacité d'esprit. Il faut aussi mentionner Noëlle et Olga pour les cafés matinaux et les discussions philosophiques. Il ne faudrait pas oublier : Christophe qui a été une de mes principales sources de divertissement, Arnaud pour les tartes et gâteaux, Johann pour son aide inestimable ainsi que Caroline qui m'ont aidé à de nombreuses reprises lors de mes séjours en France. Il y a aussi, Pierre, Rachid et Ramin qui ont été dans l'obligation de m'endurer pendant la rédaction. Cedric et Annelaure Roy pour leur amitié et pour s'être occupé de Gaston, ainsi que la petite Marguerite Roy pour n'avoir réveillé que ses parents lors de notre cohabitation. Christine et Marc pour être là quand j'ai besoin d'eux.

Merci

Enfin je ne remercie pas Karen car cela serait bien insuffisant.

## RÉSUMÉ

Plus de 42 % des plastiques élaborés en Europe de l'Ouest sont utilisés pour fabriquer des emballages. Au cours des dernières années la production d'emballages flexibles comme les pellicules et les sacs, qui constituent 46% de la production totale des emballages, a connu une forte croissance. Ce type d'emballage présente plusieurs avantages, ils sont légers, peu coûteux, peu volumineux. Le procédé de soufflage de gaine est une des deux méthodes permettant de produire des films à haut volume. Le développement des emballages multicouches, qui permettent de créer des films très performants offrant des propriétés barrières et optiques améliorées, en combinant plusieurs matériaux a fait exploser la demande en emballages flexibles. La production de films multicouches présente des particularités qui ont peu été étudiées. En effet la combinaison de plusieurs matériaux lors de l'élaboration d'un film complexe présente des difficultés qui ont été peu abordées. Par exemple, les matériaux utilisés peuvent posséder des propriétés rhéologiques, et thermiques différentes. De plus les températures de mise en forme et de cristallisation de ces matériaux peuvent aussi fortement différer. Il peut même être nécessaire pour certaines combinaisons de matériaux d'ajouter un liant afin d'assurer l'intégralité structurelle du film. Ceci a eu pour conséquence que la vaste majorité des travaux portant sur la production de films plastiques s'attardent à la production de gaines monocouches. Notre objectif est donc de développer des outils permettant une meilleure compréhension du procédé de soufflage de gaines multicouches.

Afin de mieux comprendre le procédé, une campagne expérimentale a été réalisée afin d'identifier l'effet des conditions opératoires (taux de gonflement, taux d'étirage et température de l'air de refroidissement etc.) sur l'évolution du rayon et de la température de gaines monocouches et multicouches en utilisant une filière de petite taille. L'augmentation du taux de gonflement et la diminution du taux d'étirage ont pour effet de diminuer la hauteur de figeage des bulles monocouches et multicouches. Il est aussi possible d'observer que les films multicouches peuvent gonfler plus rapidement que les films monocouches aux mêmes conditions opératoires. Lors de la production de films multimatières deux plateaux de cristallisation thermique sont observés correspondant aux températures de cristallisation successives des deux matériaux utilisés.

Dans un second temps la technique de mesure de la biréfringence en ligne a été améliorée afin de pouvoir réduire le temps d'acquisition de données. Il a alors été possible d'évaluer les contraintes développées à l'intérieur des films monocouches et multicouches lors de leur production. Il nous a alors été possible de relier les conditions opératoires à l'évolution du rayon de la bulle et des contraintes axiale et transversale en fonction de la position axiale grâce à une filière de taille semi industrielle. Grâce à ces essais il a été possible de constater que l'agencement des différentes couches affectait peu le gonflement et les profils de contraintes développés à l'intérieur du film. Par contre, la quantité de LDPE dans le film affecte de façon significative les profils de contraintes des films multicouches. En effet les résultats obtenus lors de la production de films monocouches nous avaient démontré que le matériau le plus visqueux nécessitait, comme la logique le commandait, une force plus importante et donc des contraintes plus élevées qu'un matériau moins visqueux. Une augmentation des contraintes était observée lorsque les taux de gonflement et d'étirage étaient augmentés. Une des constatations découlant de l'analyse expérimentale est que l'interprétation des résultats est rendue ardue par la difficulté de reproduire dans des conditions exactement identiques les différents essais. Le calcul semble donc être une solution appropriée nous permettant de nous libérer de l'incertitude expérimentale.

Un modèle mécanique non isotherme Newtonien permettant de décrire le soufflage de gaine multicouche a donc été développé. Afin d'établir notre système d'équations une approche novatrice a été utilisée plutôt que de reprendre l'approche classique qui est basée sur l'utilisation d'un repère local mobile tangent à la paroi de la bulle. Le développement des équations mécaniques et thermique ainsi que des conditions frontières dans un repère global fait apparaître un paramètre, le ratio de l'entrefer sur le rayon de la filière, présent dans toutes les équations. En effectuant un développement en série des variables en fonction de ce paramètre il été possible de réaliser une analyse aux différents ordre de grandeur de ce ratio. Cette approche permet entre autre, de valider certaines des hypothèses qui étaient faites précédemment. Par exemple, nous avons démontré que le profil thermique radial était d'un ordre de grandeur inférieur au profil thermique axial. Nous avons développé nos équations thermiques à l'ordre supérieur de façon à pouvoir évaluer l'évolution de la température en fonction de la position axiale. Nous avons aussi démontré que notre modèle bicouche pouvait être utilisé afin de décrire les écoulements monocouche et qu'il pouvait aisément être étendu afin de décrire la production de gaines possédant de nombreuses couches.

Par la suite une étude de sensibilité qui nous permet de dégager plus clairement l'effet de certains paramètres a été réalisée. Par exemple nous avons illustré l'effet du taux de refroidissement, de l'énergie d'activation, de la chaleur spécifique et d'une foule d'autres facteurs sur le gonflement de bulles monocouches et multicouches. Il a aussi été possible de constater que, dans certaines conditions, il était possible que les films multicouches gonflent plus rapidement que les films monocouches. De plus les calculs montrent que l'agencement des couches n'affecte pas les bulles produites alors que la quantité respective de chaque couche a un effet. Ceci vient valider les résultats expérimentaux de façon qualitative. Les calculs illustrent le fait que le profil thermique radial disparaît très rapidement pour devenir quasi inexistant à la position de figeage. Ceci vient invalider certains travaux réalisés précédemment qui présupposaient l'existence d'un profil thermique important au niveau de la ligne de figeage du film.

L'étape de validation a mis en évidence certaines limitations du calcul. En effet il est nécessaire de connaître l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale afin de pouvoir réaliser le calcul thermique. Nous avons néanmoins été capable de déduire cette relation grâce à une de nos courbes expérimentales. Ceci illustre l'importance de développer un modèle permettant de décrire l'écoulement de l'air dans l'anneau de refroidissement et à la surface de la bulle. De façon générale les résultats permettent de reproduire adéquatement l'évolution du rayon, de la température et des contraintes survenant lors de la production de gaines monocouches et multicouches.

Le modèle multicouche thermo mécanique qui a été conçu présente une grande versatilité qui permet d'obtenir des résultats de calculs similaires aux résultats expérimentaux pour une grande variété de conditions opératoires. Par contre il reste encore énormément de travaux à réaliser avant de pouvoir maîtriser parfaitement le procédé de soufflage de gaine multicouche.

En résumé même si les travaux que nous venons d'accomplir permettent de faire progresser notre compréhension du procédé de soufflage de gaine multicouche nous sommes donc encore loin de comprendre l'ensemble des facteurs affectant ce procédé.



## ABSTRACT

Over 42 % of all polymers produced in Western Europe are used to make packaging products. The production of film, such as shrink wrap or plastic bags, is the segment of the packaging industry which has been subjected to the fastest growth in the last few years. At the present time, 46% of all packing materials produced are made out of film. Films are used because they are light, inexpensive and they occupy a small storage volume. The film blowing process is one of two methods which can be used to produce film at a high flow rate. The recent development of multilayer film from the combination of a variety of different polymer resins allows the elaboration of technical films with enhanced optical and barrier properties. The development of these products has further increased the growth of the film processing industry. Some of the difficulties associated with this process are linked to the combination of various materials. For example the resins used might have different activation energy, viscosity, interfacial or thermal properties. It might also be necessary to add an additive between the resins in order to insure the structural integrity of the film. Because of all these complications, most research work has been done on the monolayer film blowing process and the production of multilayer film has not been properly studied to this date. Thus our objective is to develop tools that will allow us to improve our knowledge of the multilayer film blowing process.

In order to gain general knowledge of the process an experimental campaign was realized to identify the effect of the main processing conditions (take up ratio, blow up ratio, temperature of the cooling air flow, etc.) on the radius and temperature profile of monolayer and multilayer bubbles. We were able to observe that an increase of the blow up ratio and a decrease of the take up ratio resulted in a diminution of the solidification position of the polymer melt. Surprisingly we showed that it was possible for multilayer film to blow faster than monolayer film composed of its two constituents at identical processing conditions. Interestingly, it was possible to observe the two crystallization plateaus on some of our temperature scans obtained during the multilayer bubble formation.

The second step we took was to improve the in-line birefringence measurement system in order to be able to complete a scan of the bubble length in less than one minute. From these data we were able to evaluate the average axial and transverse stress generated inside the monolayer and multilayer bubble during their formation. This allowed us to relate the process conditions to the axial and transverse stress profile. We were able to observe that the layer position had almost no effect on radius and stress profiles. On the other hand, the composition of the film had a noticeable effect on the axial and transverse stress profiles. It seems that there is a direct relationship between the amount of the viscous material (LDPE 609a) and the stress level in the multilayer film. Furthermore the stress profiles also showed a significant increase when the take up and blow up ratio was increased. One of the main conclusions that we were able to derive from the experimental campaign is that the interpretation of the results is far from easy since it is quite difficult to reproduce the various experiments at exactly the same process conditions. It was clear from this observation that the elaboration of a model, which would allow the calculation of results at fixed condition, could alleviate us from this problem.

A Newtonian thermo mechanical model that describes the multilayer film blowing process was developed. In order to obtain the appropriate set of equations a novel approach was used instead of the classical development (for the monolayer film blowing process) which is based on the thin membrane theory and its use of a mobile reference framework tangential to the skin surface of the bubble. The mechanicals and thermal equations were developed in a

global fixed reference framework. This caused the appearance of a small parameter, the ratio of the die gap over the die radius, in all the equations. This allowed us to realize an expansion development on the variables which make it possible to analyze the equations at various orders of magnitude of the parameter. With this approach it is possible to demonstrate results which were previously assumed. For example, we are able to demonstrate that the temperature profile in the radial direction is at least one order of magnitude lower than the temperature profile in the axial direction. This validates, in a formal way, hypotheses which were previously made. It is also possible to develop the heat transfer equation at a higher order of magnitude in order to be able to derive the radial temperature profile. The multilayer model that we develop can also be used to describe the monolayer film blowing process. It can also be easily expanded to describe the multilayer film blowing of a large number of different materials.

A sensibility analysis was undertaken in order to clearly identify the effect of various parameters such as, the cooling rate, the activation energy, the heat capacity on the radius, temperature and stress profiles of both monolayer and multilayer film blowing. The calculation allowed us to identify the conditions which could lead to a faster blowing of multilayer bubble in comparison to the blowing of their one layer counterpart. We were able to show that the initial radial temperature profile disappears quickly to become almost non-existent at the frost line height position. This invalidates some of the models published which were based on the assumption of the existence of a strong temperature gradient in the film thickness at the crystallization temperature. The analysis allowed us to validate qualitatively our experimental results. Finally the calculated results were compared to the experimental results. Generally the calculated variables (radius, temperature and stress) are in good agreement with the experimental data obtained from both monolayer and multilayer film blowing.

In conclusion we were able to develop a model which allows us to properly describe the multilayer film blowing process. This allowed us to increase the knowledge on how the various operating conditions and material properties affected the bubble formation.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT .....	viii
TABLE DES MATIÈRES .....	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xii
LISTE DES FIGURES.....	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS.....	xv
LISTE DES ANNEXES.....	xvii
CHAPITRE 1 Introduction.....	1
1.1 Méthodes de fabrication de film.....	2
1.1.1 Cast Film .....	2
1.1.2 Soufflage de gaine.....	3
1.1.2.1 Historique.....	3
1.1.2.2 Description du procédé.....	3
1.1.2.3 Avantage de cette technique.....	6
1.2 Films multicouches .....	6
1.3 Objectif.....	9
CHAPITRE 2 Étude Expérimentale.....	10
2.1 Revue de la littérature .....	10
2.1.1 Films monocouches.....	10
2.1.1.1 Effet des conditions opératoires.....	10
2.1.1.2 Les instabilités.....	12
2.1.1.3 La structure.....	14
2.1.2 Films multicouches .....	15
2.2 Matériaux .....	16
2.3 Équipement.....	20
2.3.1 Filière multicouche de petite taille.....	20
2.3.1.1 Mesure de la température de la bulle .....	21
2.3.1.2 Mesure des dimensions la bulle .....	22
2.3.1.3 Plan expérimental.....	23
2.3.2 Filière multicouche semi industrielle.....	24
2.3.2.1 Mesure de la biréfringence.....	25
2.3.2.2 Plan expérimental.....	31
2.4 Résultats .....	32
2.4.1 Films réalisés grâce à la petite filière.....	32
2.4.1.1 Films monocouches.....	32
2.4.1.2 Films multicouches .....	37
2.4.2 Films réalisés grâce à la filière semi industrielle.....	42
2.4.2.1 Films monocouches.....	42
2.4.2.2 Films multicouches .....	50
2.5 Analyse enthalpique différentielle .....	56
2.6 Conclusion.....	58
CHAPITRE 3 Modélisation.....	59
3.1 Revue de la littérature. Modèles monocouches.....	60
3.1.1 Modèles newtoniens.....	60
3.1.2 Modèles viscoélastiques.....	66
3.1.3 Modèle aérodynamique.....	67
3.1.4 Modèles viscoélastiques bi phasiques.....	68
3.2 Revue de la littérature. Modèles multicouches .....	68

3.3 Développement mécanique multicouches .....	69
3.3.1 Hypothèses .....	69
3.3.2 Les équations dans le volume.....	71
3.3.3 Conditions Frontières .....	72
3.3.3.1 Vitesse .....	72
3.3.3.2 Contraintes .....	73
3.3.4 Adimensionnalisation.....	74
3.3.4.1 Équations.....	74
3.3.4.2 Conditions Frontières .....	77
3.3.5 Résolution des équations mécaniques .....	79
3.3.6 Validation .....	83
3.3.7 Récapitulatif .....	87
3.4 Développement thermique .....	88
3.4.1 Hypothèses .....	88
3.4.2 Conditions Frontières .....	88
3.4.3 Adimensionnalisation.....	89
3.4.4 Analyse des équations .....	92
3.4.5 Résultats .....	97
3.4.6 Récapitulatif .....	101
3.5 Calcul thermique multicouches bidimensionnel .....	102
3.5.1 Résolution par la méthode d'approximation sur la température .....	103
3.5.2 Résolution par la méthode des différences finies.....	105
3.5.3 Prise en compte de la cristallisation .....	110
3.6 Généralisation aux cas complexes.....	112
3.7 Étude de sensibilité.....	116
3.7.1 Films Monocouches .....	116
3.7.2 Films multicouches multimatériaux .....	125
3.8 Conclusion.....	135
CHAPITRE 4- Validation .....	136
4.1 Films réalisés grâce à la petite filière .....	137
4.1.1 Films monocouches.....	137
4.1.2 Films multicouches .....	144
4.2 Films réalisés grâce à la filière semi industrielle .....	146
4.2.1 Films monocouches.....	146
4.2.2 Films multicouches .....	152
4.3 Conclusion.....	160
CHAPITRE 5 Conclusion .....	161
RÉFÉRENCES.....	164
ANNEXES .....	170

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Proportion des principales résines utilisées pour la fabrication de films en Amérique du Nord.....	2
Tableau 2.1 : Principales propriétés des résines utilisées.....	17
Tableau 2.2 : Facteurs de glissement .....	19
Tableau 2.3 : Caractéristiques dimensionnelles des extrudeuses de la petite filière.....	20
Tableau 2.4 : Plan expérimental. Filière de petite taille.....	24
Tableau 2.5 : Plan expérimental. Filière semi industrielle.....	32
Tableau 2.6 : Résultats de l'analyse calorimétrique réalisé sur les films produits.....	56
Tableau 3.1 : Relation permettant de décrire l'évolution du coefficient de convection en fonction de la vitesse de l'air de refroidissement.....	64
Tableau 3.2 : Valeurs utilisées lors des calculs de validation .....	83
Tableau 3.3 : Valeurs utilisées pour réaliser le calcul avec cristallisation.....	111
Tableau 3.4 : Propriétés de refroidissement à l'intérieur de la bulle.....	118
Tableau 4.1 : Valeurs utilisées lors des simulations pour la filière de petite taille .....	138
Tableau 4.2 : Valeurs utilisées lors des simulations pour la filière semi industrielle .....	147

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Illustration du procédé de soufflage de gaine multicouche .....	4
Figure 1.2 : Anneau de refroidissement double lèvres.....	5
Figure 1.3 : Emballage alimentaire typique .....	8
Figure 2.1 : Types d'instabilités .....	13
Figure 2.2 : Évolution de la viscosité complexe, du module de perte et du module élastique. Effet de la température.....	18
Figure 2.3 : Courbes maîtresses de viscosité à une température de 220 °C .....	19
Figure 2.4 : Évolution de l'émissivité d'un film de polyéthylène en fonction de l'épaisseur. (André 1999).....	22
Figure 2.5 : Montage expérimental .....	23
Figure 2.6 : Train optique utilisé pour les mesures de biréfringence.....	27
Figure 2.7 : Parcours de la lumière dans un film monocouche .....	28
Figure 2.8 : Montage expérimental à l'IMI.....	31
Figure 2.9 : Évaluation de la reproductibilité à un taux de gonflement de 2.59 .....	33
Figure 2.10 : Effet de la température de l'air de refroidissement. TUR=9.35 BUR=2.59.....	33
Figure 2.11 : Effet du taux de gonflement sur la position de la ligne de figeage de films de LDPE-A.....	34
Figure 2.12 : Évolution de la température et du rayon de films de LDPE-A en fonction de la position axiale.....	35
Figure 2.13 : Comparaison entre les bulles de LDPE-A et de mMDPE. TUR=9.35.....	36
Figure 2.14 : Effet des conditions opératoires sur les profils géométriques et thermique. Films multicouches .....	39
Figure 2.15 : Effet du rapport des débits sur les profils géométriques de films multicouches.....	41
Figure 2.16 : Évolution du rayon et des contraintes dans la bulle de ULDPE. Effet du taux d'étirage.....	44
Figure 2.17 : Évolution du rayon et des contraintes dans la bulle de LDPE-B. Effet du taux de gonflement.....	47
Figure 2.18 : Évolution du rayon et des contraintes. Comparaison entre les deux matériaux. BUR=1.6 .....	49
Figure 2.19 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches LDPE-B/ULDPE. Effet du taux de gonflement .....	51
Figure 2.20 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches. Effet de l'agencement des couches. BUR=1.7, TUR=11.8. ....	53
Figure 2.21 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches. Effet de la composition des films. BUR=2.1, TUR=16.....	55
Figure 2.22 : Courbes de DSC .....	57
Figure 3.1 : Système de coordonnées utilisé par Pearson et Petrie (1970a et 1970b).....	60
Figure 3.2 : Illustration des solutions newtoniennes multiples pour une force d'étirage F et une pression de soufflage B. Figure : 4.2 André (1999). ....	62
Figure 3.3 : Coefficient de convection obtenu expérimentalement. Nagarajan (1995) .....	65
Figure 3.4 : Système de coordonnées utilisé.....	70
Figure 3.5 : Processus de changement de variables .....	75
Figure 3.6 : Algorithme de résolution des équations mécaniques avec un taux de refroidissement linéaire constant.....	84
Figure 3.7 : Comparaison entre le calcul monocouche et multicouche dans des conditions identiques avec un taux de refroidissement constant égal à -573.35 °C/m.....	85
Figure 3.8 : Comparaison entre les données expérimentales (Essai 25) et le calcul réalisé avec un taux de refroidissement constant égal à -420 °C/m. ....	86

Figure 3.9 : Algorithme de résolution thermomécanique .....	96
Figure 3.10 : Soufflage de gaine multicouche monomatière. Profil thermique et géométrique. $dT/dz$ imposé vs Température calculée.....	98
Figure 3.11 : Effet du taux de refroidissement. (Laffargue 2003) .....	99
Figure 3.12 : Effet de la méthode de calcul de la température.....	100
Figure 3.13 : Algorithme de résolution du profil thermique 2D par la méthode des petits paramètres .....	105
Figure 3.14 : Maillage utilisé pour la résolution par différences finies .....	106
Figure 3.15 : Algorithme de résolution par différences finies .....	108
Figure 3.16 : Algorithme de résolution général .....	109
Figure 3.17 : Effet de l'ajout du module de cristallisation.....	112
Figure 3.18 : Évolution du rayon, des contraintes et de la température en fonction de la position axiale. ....	118
Figure 3.19 : Évolution du rayon, des contraintes et de la température en fonction de la position axiale. Effet de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique.....	120
Figure 3.20 : Évolution de la température. Effet de la méthode de calcul.....	124
Figure 3.21 : Effet de l'agencement sur l'évolution de la température, des contraintes et du rayon de bulles multicouches .....	126
Figure 3.22 : Effet de la répartition des couches sur l'évolution de la température, des contraintes et du rayon de bulles multicouches.....	128
Figure 3.23 : Effet de la viscosité initiale des matériaux sur l'évolution des contraintes axiales et du rayon de bulles multicouches .....	130
Figure 3.24 : Effets combinés de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique sur les profils géométrique de bulles multicouches. ....	132
Figure 3.25 : Évolution de la température de films multicouches en fonction de la position axiale et radiale.....	134
Figure 4.1 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de LDPE-A et mMDPE. ....	140
Figure 4.2 : Comparaison entre les calculs et les résultats expérimentaux. Effet du taux de gonflement et de la correction du coefficient de convection.....	144
Figure 4.3 : Comparaison entre les calculs et les résultats expérimentaux. Effet du taux de gonflement et de l'agencement des couches sur les films multicouches.....	146
Figure 4.4 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de LDPE-B. Profil géométrique et profils de contraintes.....	149
Figure 4.5 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de ULDPPE. Profil géométrique et profils de contraintes.....	152
Figure 4.6 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches. Profil géométrique et de contraintes. Effet de l'agencement. ....	155
Figure 4.7 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches de LDPE-B/ULDPPE. Profil géométrique et de contraintes. Effet du taux de gonflement .....	157
Figure 4.8 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches de LDPE-B/ULDPPE. Profil géométrique et de contraintes. Effet de la quantité de LDPE-B.....	159

## LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS

### Alphabet Grec

$\phi$	: Direction circonférentielle
$[\varepsilon]^*$	: Tenseur de vitesse de déformations
$[\sigma]$	: Tenseur des contraintes
$\beta_e$	: Nombre de Biot, externe
$\beta_i$	: Nombre de Biot, interne
$\Delta P$	: Surpression. Différence entre la pression interne de la bulle et la pression atmosphérique (Pa)
$\varepsilon$	: Ratio de l'entrefer de la filière sur le rayon de la filière
$\eta$	: Viscosité (Pa s)
$\eta_0$	: Ratio de la viscosité initiale de la couche <b>b</b> sur la viscosité initiale de la couche <b>a</b> (Pa s)
$\theta$	: Angle de gonflement
$\xi$	: Vecteur unitaire d'orientation
$\rho$	: Densité ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_a$	: Densité de la couche <b>a</b> ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_b$	: Densité de la couche <b>b</b> ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_{oa}$	: Densité de la couche <b>a</b> à la sortie de la filière ( $\text{kg/m}^3$ )
$\sigma_{\theta\theta}$	: Contrainte dans la direction circonférentielle (Pa)
$\sigma_{rr}$	: Contrainte dans la direction radiale (Pa)
$\sigma_{rz}$	: Contrainte de cisaillement (Pa)
$\sigma_{zz}$	: Contrainte dans la direction axiale (Pa)

### Alphabet Latin

<b>BUR</b>	: Blow Up Ratio, Taux de gonflement de la bulle
$C_p$	: Chaleur spécifique ( $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ )
$C_{pa}$	: Chaleur spécifique de la couche <b>a</b> ( $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ )
$C_{pb}$	: Chaleur spécifique de la couche <b>b</b> ( $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ )
$C_{poa}$	: Chaleur spécifique de la couche <b>a</b> à la sortie de la filière ( $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ )
<b>F</b>	: Force exercée par les rouleaux pinceurs sur le film (N)
<b>FLH</b>	: Frost line Height, Position de la ligne de figeage (m)
<b>H</b>	: Coefficient de convection ( $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ )
<b>H</b>	: Épaisseur de la bulle (m)
$H_a$	: Épaisseur de la couche <b>a</b> (m)
$H_b$	: Épaisseur de la couche <b>b</b> (m)
$h_e$	: Coefficient de convection à l'extérieur de la bulle ( $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ )
$h_i$	: Coefficient de convection à l'intérieur de la bulle ( $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ )
<b>Ho</b>	: Épaisseur initiale du film, Entrefer de la filière (m)
$Ho_a$	: Épaisseur initiale de la couche <b>a</b> (m)
$Ho_b$	: Épaisseur initiale de la couche <b>b</b> (m)
<b>k</b>	: Coefficient de conduction ( $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ )
$k_a$	: Coefficient de conduction de la couche <b>a</b> ( $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ )
$k_b$	: Coefficient de conduction de la couche <b>b</b> ( $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ )
$k_{oa}$	: Coefficient de conduction de la couche <b>a</b> à la sortie de la filière ( $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ )
<b>L</b>	: Longueur de figeage (m)



$\mathbf{n}_{ab}$	: vecteur normal à l'interface entre la couche <b>a</b> et la couche <b>b</b> de la bulle
$\mathbf{n}_{ba}$	: vecteur normal à l'interface entre la couche <b>b</b> et la couche <b>a</b> de la bulle
$\mathbf{n}_e$	: vecteur normal à la paroi externe de la bulle
$\mathbf{n}_i$	: vecteur normal à la paroi interne de la bulle
$p$	: pression hydrostatique
$Q$	: Débit volumique ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
$q$	: Flux de chaleur ( $\text{W}/\text{m}^2$ )
$r$	: Direction radiale
$R$	: Rayon de la bulle (m)
$R_0$	: Rayon initial de la bulle,
$T$	: Température ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{\infty}$	: Température de l'air à l'extérieur de la bulle ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{\text{cristallisation}}$	: Température de cristallisation du film ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{\text{ex}_a}$	: Température d'extrusion du fluide a ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{\text{ex}_b}$	: Température d'extrusion du fluide b ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{\infty i}$	: Température de l'air à l'intérieur de la bulle ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_{oa}$	: Température de la couche <b>a</b> à la sortie de la filière ( $^{\circ}\text{C}$ )
<b>TUR</b>	: Take Up Ratio, Taux d'étirage de la bulle
$v$	: Vitesse du fluide (m/s)
$V_0$	: Vitesse initiale (m/s)
$z$	: Direction axiale

### Indice inférieur

1,2,3	: Axe d'orientation
j,k	: Axe d'orientation variable
i	: matériau <b>a</b> ou <b>b</b> .
a	: couche interne
b	: couche externe
o :	: Valeur en sortie de filière

### Indice supérieur

–	: Nombre adimensionnel
0,1	: ordre de grandeur de la variable

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE A Courbes rhéologiques.....	171
ANNEXE B Développement des équations mécaniques.....	172
ANNEXE C Anneaux de refroidissement.....	186

## CHAPITRE 1 Introduction

Depuis l'apparition des plastiques synthétiques avec le celluloïd Parkes, commercialisé par Hyatt, il y a 130 années, les polymères ont connu une croissance inégale dans le domaine des matériaux. Cela s'explique entre autres par la forte demande en ressources naturelles (métaux, fibres naturelles et caoutchouc naturel) engendrée par la seconde Guerre mondiale, qui a entraîné le développement de nouveaux matériaux. Des efforts scientifiques et commerciaux considérables ont amené les découvertes successives du polystyrène et du nylon 66 (1938), du polyvinylidène chloré (1939) du polyester et du polyéthylène (1942) du caoutchouc butylique et du nylon 6 (1943) et finalement du polyéthylène téréphtalate (1944). La période de l'après-guerre, qui a vu l'apparition de la société de consommation, a entraîné la production d'une multitude d'objets. Les polymères thermoplastiques, qui sont en général facilement transformables, légers, versatiles et relativement peu coûteux, furent largement utilisés. Ceci a engendré le développement et l'adaptation de techniques de mise en forme de ces matériaux tels que le moulage par injection, le gainage de câble, l'extrusion de profilé et la production de film par la technique de soufflage de gaine.

Aujourd'hui les plastiques sont principalement utilisés pour l'emballage. En effet, selon Bain et Giles (2000), 46 % des thermoplastiques produits en Europe de l'Ouest en 1997 ont été utilisés pour élaborer des emballages sous forme de bouteilles, bidons, sacs et films. Les emballages produits peuvent être séparés en deux grandes catégories : les rigides et les flexibles. Les emballages rigides sont en général produits par les méthodes de moulage par injection, de thermoformage et de moulage gonflage. Parmi les exemples d'emballages rigides, on retrouve les emballages à salade, les contenants à margarine et les bouteilles. Le polyéthylène téréphtalate (PET) a d'ailleurs éclipsé presque totalement le verre dans le domaine des bouteilles de boissons gazeuses. La seconde catégorie sert à produire des sacs d'épicerie, des pellicules protectrices, des poches autoportantes, des sacs d'emballage en vrac, etc. Le principal avantage des emballages flexibles est leur faible coût. Les emballages flexibles permettent une utilisation très efficace des matériaux et de l'espace. Le rapport entre la masse transportée et le poids de l'emballage est très élevé. Par exemple, il est possible d'entreposer dans 55 sacs de polyéthylène 1375 kg de grains. La masse de ces sacs et de la pellicule de polyéthylène servant à les retenir est de 7.75 kg. Ceci signifie que le rapport entre la masse du contenu et la masse du contenant est de 177. De plus, l'entreposage de ces emballages flexibles nécessite peu d'espace, et les opérations d'ensachage peuvent être effectuées rapidement et facilement, ce qui contribue à maintenir les coûts relativement faibles. Les principaux désavantages des emballages flexibles sont leur manque de résistance à la perforation, leur très faible module et contrainte à la rupture ainsi que la difficulté d'ouverture. De plus, une fois ouverts, les emballages flexibles sont en général impossibles à refermer. Cet inconvénient a été contourné en utilisant un système de fermeture similaire à la bonne vieille fermeture éclair, mais ceci a pour conséquence d'augmenter les coûts de production. Dans certains cas, des becs verseurs sont ajoutés pour faciliter l'écoulement des liquides. Traditionnellement, les emballages flexibles étaient beaucoup moins utilisés que les emballages rigides, mais les innovations énoncées plus haut ont eu pour effet d'en faire le segment de production où la croissance est la plus rapide au cours des cinq dernières années. Selon Hernandez et al (2000) en 1998, les emballages flexibles comptaient pour 47 % des emballages produits, ce qui correspond à 19 % de la masse des résines produites. Ces statistiques européennes sont comparables à la production nord-américaine de la dernière décennie comme l'illustre le tableau 1.1. Dans les cinq prochaines années, ils sont amenés à supplanter les emballages rigides.

L'utilisation des plastiques afin de produire des emballages est bénéfique à plusieurs niveaux. Par exemple, ils contribuent à une diminution : de 391 % la masse des emballages, de 208 % l'énergie nécessaire à la production de contenants et de 258 % la quantité de déchets solides rejetés à l'environnement par rapport aux emballages constitués de métaux, de verres et de papiers.

**Tableau 1.1 : Proportion des principales résines utilisées pour la fabrication de films en Amérique du Nord**

	1996	1997	1998	1999
	Million de kg	Million de kg	Million de kg	Million de kg
Masse totale de résine utilisée pour la fabrication de film	4932	4731	5092	5513
Masse totale de résine produite	25298	26054	27225	29262
Pourcentage de résine utilisée pour la fabrication de films	19.5	18.2	18.7	18.8

Deux types de films sont produits : les films monocouches et les films multicouches. Les films ne possédant qu'une couche sont produits à très grand volume pour des applications générales comme les sacs d'épicerie. Jusqu'à récemment, ils étaient la seule option. Ces films sont fabriqués par soufflage de gaine ou bien par extrusion de film à plat (Cast film).

Récemment, les films multicouches ont fait une percée importante et la part de marché qu'ils occupent est en forte croissance. Les films multicouches sont produits en combinant en minces couches superposées divers matériaux pour optimiser les performances tout en minimisant les coûts. Dans la plupart des cas, ce type de film est constitué d'une résine peu coûteuse servant de structure mécanique et d'une couche coûteuse offrant par exemple des propriétés barrières. Il est donc possible en combinant du nylon avec du polyéthylène basse densité de créer un film offrant à la fois une bonne protection face à l'oxygène et à l'humidité. Il est aussi possible d'inclure une couche de matière recyclée entre deux couches de résines vierges afin de diminuer les pertes et réduire les coûts en matières premières. Les films multicouches peuvent être obtenus par laminage et par coextrusion soit par soufflage de gaine ou par la méthode du cast film.

## **1.1 Méthodes de fabrication de film**

Il existe principalement deux façons de produire des films plastiques monocouches ou multicouches : le cast film et le soufflage de gaine.

### **1.1.1 Cast Film**

La production de films par cette méthode consiste à extruder à l'aide d'une filière plate un ou des matériaux plastiques. Les différentes résines fondues provenant des extrudeuses alimentent à l'aide d'adaptateurs une filière servant à superposer en couches successives les extrudats. Suite à son passage dans cette filière qui est très large et très mince, la matière est étirée puis refroidie sur des rouleaux métalliques dont la température est maintenue aux environs de 40 °C. Les rouleaux sont polis afin d'obtenir un film ayant de bonnes caractéristiques de surface. Ce type de refroidissement permet une plus grande productivité. Une alternative est de faire passer l'extrudat dans un bain d'eau. Les dimensions du film sont

contrôlées par les dimensions de la filière, par la température du bain de refroidissement, par la vitesse des rouleaux, et par la vitesse d'extrusion. Dans les deux cas, une variation sur l'épaisseur d'environ 3 % est observée. Il est par contre nécessaire d'éliminer les extrémités latérales du film produit en les coupant, car ces dernières présentent de fortes variations d'épaisseur par rapport au reste du film. Ces variations résultent de la diminution de la largeur du film ( neck in) entre la sortie de la filière et les rouleaux. Il est possible de modifier les propriétés des films obtenus par cette méthode en leur faisant subir un post étirage de façon à augmenter l'orientation. Si on désire un film très mince bi-orienté, des étapes supplémentaires doivent être ajoutées. En général, cette méthode permet de produire des films très minces ayant d'excellentes propriétés optiques tout en ayant des volumes de production relativement élevés.

## **1.1.2 Soufflage de gaine**

### **1.1.2.1 Historique**

L'utilisation de la technique du soufflage de gaine a débuté au début des années 40. Les premiers films étaient fabriqués avec du polyéthylène afin d'élaborer des emballages étanches à l'eau et possédant une bonne durabilité à basse température. Visking Corporation est créditée pour avoir été l'une des premières entreprises à développer ce type de procédé. Jusqu'en 1960, les améliorations du procédé de soufflage de bulle résultaient de l'initiative des producteurs de films. Ces derniers, grâce à leur expérience, développèrent de nouveaux types de filières et d'anneaux de refroidissement. Au début des années soixante, les producteurs de résines qui désiraient augmenter leurs ventes de matières premières ont acheté de nombreuses entreprises productrices de films et ont rendu publiques ces innovations. Ceci a eu pour conséquence de faire exploser le marché. Par la suite, l'extrusion de nouveaux produits comme le polypropylène et l'acétate de vinyle éthylène (EVA) et le développement de nouvelles technologies comme les filières rotatives, hélicoïdales, et de coextrusion, et les anneaux de refroidissement à double lèvres ont permis de développer des produits de meilleure qualité tout en augmentant la productivité.

### **1.1.2.2 Description du procédé**

La première étape nécessaire pour produire un film selon le procédé de soufflage de gaine est d'extruder un polymère fondu au travers d'une filière annulaire, la plupart du temps vers le haut, de façon à former un tube. Le tube résultant est gonflé avec de l'air de façon à former une bulle. Un schéma du procédé est présenté à la figure 1.1.



La bulle est aussi exposée sur sa surface extérieure à un jet d'air projeté à haute vitesse afin de la refroidir. Ceci a pour effet d'augmenter le taux de production (en permettant une vitesse de production plus élevée). L'apport d'air est réalisé sur les machines moins récentes grâce à un anneau de refroidissement simple qui projette le jet d'air axialement le long du tube. Sous l'effet du refroidissement, le film atteint sa température de cristallisation, il est alors possible d'observer une opacification du film. La position à laquelle la turbidité du film change radicalement est nommée hauteur de figeage ou FLH. Quand le film est suffisamment refroidi, la bulle est rabattue progressivement sur elle-même à l'aide de plaques et des rouleaux pinceurs. Par la suite, le film est enroulé après avoir été coupé longitudinalement. Les lignes de production modernes utilisent un anneau de refroidissement double similaire à celui illustré à la figure 1.2. Dans ce type d'anneau, 20 % du débit d'air total est alimenté par la lèvre inférieure. Ceci aide à stabiliser l'extrudat tout en créant un effet venturi permettant d'induire plus facilement la forme de la bulle. Il est possible sur certains anneaux de modifier la géométrie de l'anneau de refroidissement afin de faire varier le débit d'air relatif aux deux lèvres. Une augmentation du taux de production pouvant atteindre 30 % peut être obtenue en utilisant de l'air refroidi entre 8°C et 18°C plutôt que de l'air à température ambiante. En deçà de ces valeurs, la vapeur d'eau contenue dans l'air a tendance à se condenser sur l'anneau de refroidissement. Les autres avantages de l'utilisation d'air refroidi sont une moins grande variabilité causée par les conditions climatiques et de meilleures propriétés optiques résultant d'une cristallisation plus fine. Les systèmes de refroidissement interne (IBC, voir figure 1.1) sont de plus en plus utilisés pour la production de film à partir de matériaux comme le polyéthylène métallocène. Ces systèmes consistent à utiliser une soufflante afin d'alimenter l'intérieur de la bulle avec de l'air frais. Une autre soufflante est utilisée pour retirer l'air réchauffé afin de conserver un volume constant à l'intérieur de la bulle. Ce type d'équipement a pour effet d'augmenter encore le taux de production en refroidissant plus rapidement la bulle. De plus, le refroidissement interne a pour conséquence de stabiliser la bulle, rendant possible l'utilisation d'un débit d'air plus important dans l'anneau de refroidissement externe.

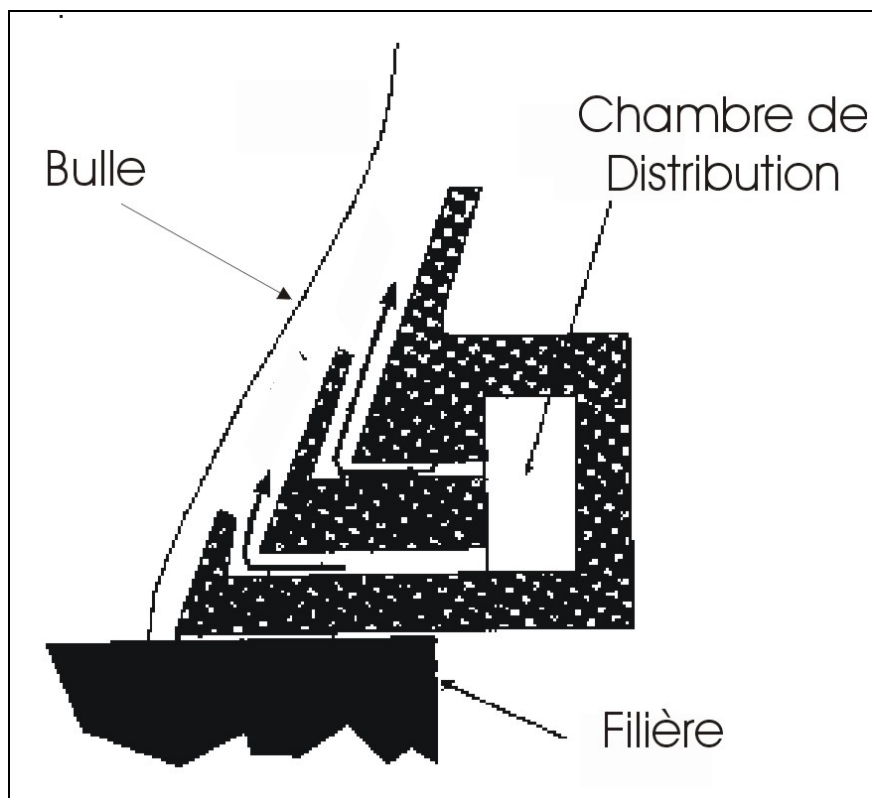


Figure 1.2 : Anneau de refroidissement double lèvres

### **1.1.2.3 Avantage de cette technique.**

Le procédé de soufflage de bulle est caractérisé par le fait qu'un champ de contraintes biaxiales est imposé au film. Les propriétés mécaniques et optiques du film peuvent être contrôlées par le refroidissement et le taux d'étirement et de gonflage imposé au polymère fondu. Cette technique présente donc une grande versatilité. Il est en effet possible de modifier les propriétés et les dimensions du film produit en choisissant adéquatement la résine utilisée et les conditions opératoires. Un autre avantage de cette technique de fabrication par rapport à la précédente est la plus faible dimension de la filière. En effet, pour produire un film possédant une largeur de 2.5 m par cast film il est nécessaire d'utiliser une filière de 2.6 m; par contre, en utilisant la technique de soufflage de gaine avec un taux de gonflement de 3 il faut utiliser une filière de 0.265 m de diamètre. Ce procédé nécessite donc moins d'énergie (entraîne des coûts énergétiques plus faibles). En contrepartie de cette flexibilité, les films produits par cette technique sont en général de qualité légèrement inférieure à ceux produits par la technique du cast film. En effet, le taux de refroidissement plus lent a pour effet de créer des films possédant un plus haut degré de cristallinité. Ceci a pour conséquence de rendre le film produit moins translucide, mais d'améliorer les propriétés barrières. En général, le refroidissement, qui se fait à température ambiante, est moins efficace, ce qui a pour conséquence de créer des variations d'épaisseur plus importantes (environ 7 %) que sur les films produits par cast film. De plus, le démarrage de ce type d'équipement est plus compliqué et cause donc plus de pertes. Par contre lorsque le régime permanent est établi le taux de pertes est très faible, car il n'est pas nécessaire de couper les extrémités. Cette méthode est donc souhaitable pour les productions nécessitant de très hauts volumes plutôt que pour des productions nécessitant des arrêts et démarrages fréquents.

## **1.2 Films multicouches**

L'élaboration de films multicouches consiste à combiner différents matériaux de façon à obtenir un film possédant les vertus de chacun des constituants afin d'obtenir un film plus performant qu'un film monocouche. Le secteur de l'emballage alimentaire, qui nécessite une forte imperméabilité aux gaz et aux odeurs a fait exploser la demande en emballages multicouches. Cette forte progression de la demande a entraîné le développement d'équipement de coextrusion. Les lignes de production contemporaines possèdent présentement la capacité de produire des films pouvant atteindre 11 couches. Ce nombre impressionnant est nécessaire pour les matériaux barrières de haute performance. En effet, les résines utilisées (polyamides, éthylène vinyle alcool) doivent être protégées de l'humidité par une couche protectrice et il est souvent nécessaire d'utiliser des couches adhésives entre les différents polymères composant le film afin d'assurer l'intégrité physique du film. La coextrusion permet donc aux manufacturiers de films de produire des emballages flexibles répondant aux demandes spécifiques de leurs clients. Le procédé est très similaire au soufflage de gaine conventionnel. La principale différence entre le procédé de soufflage de gaine monocouche et le soufflage de gaine multicouche réside dans l'ajout d'extrudeuses additionnelles afin d'alimenter une filière multicouche.

Parmi les matériaux les plus fréquemment utilisés pour la fabrication de films multicouches on retrouve les polyoléfines. Le LDPE est utilisé, en combinaison avec un grand nombre d'autres matériaux, afin de fabriquer des pellicules protectrices pour la nourriture, des films barrières contre la vapeur dans le secteur de l'habitation, et des films protecteurs en agriculture. Ce matériau est aisément mis en forme, il est flexible, il possède une bonne capacité de soudure à chaud, il montre une bonne résistance à l'impact et il reste peu coûteux. Le LDPE peut être combiné avec le LLDPE, le HDPE ou encore le mPE afin d'obtenir un



film possédant de bonnes capacités de sellage à chaud ou encore de meilleures propriétés mécaniques. Par contre, les polyoléfines présentent une forte perméabilité aux gaz ce qui est un désavantage majeur. Afin de contrecarrer ce problème on associe couramment les polyoléfines à des matériaux offrant d'excellentes propriétés barrières aux gaz comme le PET, le PVDC (polyvinylidène chloré) et les polyamides.

Le polyéthylène téréphtalate qui est un matériau assez coûteux permet d'obtenir une bonne perméabilité à l'oxygène et au dioxyde de carbone. Les films de PET forment une barrière efficace contre les odeurs et ils sont résistants aux graisses et aux huiles tout en étant transparents. Il est d'ailleurs possible d'augmenter sensiblement les propriétés en orientant bi-axialement le film. Le principal désavantage de ce matériau est qu'il possède une très faible viscosité à l'état fondu ce qui rend le démarrage de la ligne particulièrement pénible.

Le PVDC, utilisé sous forme d'emballage depuis 1946, est commercialisé sous le nom de Saran par Dow Chemical. Ce matériau très flexible et transparent possède des propriétés barrières exceptionnelles vis-à-vis des gaz et de l'humidité. Par contre, il est trois fois plus coûteux que les autres films transparents, mais sa très forte résistance permet une utilisation à de faibles épaisseurs ce qui a pour effet de contrebalancer son prix élevé. Ce matériau possède une forte tendance à adhérer sur lui-même ce qui cause des problèmes lors de la production mais est souhaitable pour son application finale comme emballage. Il permet de conserver la saveur et l'odeur des aliments de façon très efficace. Le PVDC possède une bonne résistance aux produits alcalins et aux acides, il est par contre vulnérable aux halogènes.

Le nylon a été introduit sur le marché en 1938 par Du Pont de Nemours. Le polyamide 6 est le type le plus fréquemment utilisé pour la fabrication de films. Le nylon est généralement considéré comme étant trois fois plus résistant à l'abrasion que le polyéthylène. Il est résistant aux produits alcalins et aux acides dilués. Il possède une bonne perméabilité aux gaz mais, par contre, c'est un matériau très hydrophile. Malgré son coût relativement élevé le nylon est fréquemment utilisé, car sa résistance et sa tenue en température élevée lui confèrent un marché important dans la fabrication d'emballages stérilisables. Ce matériau est aussi utilisé pour l'emballage de produits alimentaires abrasifs comme les pâtes. Des structures typiques de films multicouches utilisés pour l'emballage alimentaire sont présentées à la figure 1.3.

L'utilisation conjointe de matériaux aussi différents fait apparaître des difficultés qui ne sont pas rencontrées dans la production de films monocouches. Premièrement, chaque couche du film possède un comportement rhéologique qui lui est propre, il est donc nécessaire afin d'obtenir un écoulement équilibré dans la filière, d'ajuster de façon appropriée la température de chacun des matériaux de façon à minimiser les écarts de viscosités au niveau de la filière. Il est de plus possible que les températures de mise en forme de ces matériaux soient fortement différentes l'une de l'autre. Ceci entraînera forcément des difficultés supplémentaires lors de la mise en œuvre à l'état fondu mais aussi au cours du soufflage. La présence de plusieurs matériaux a pour effet d'augmenter le nombre de températures de changement de phase. Il est possible qu'une des couches soit encore à l'état fondu alors que les autres sont à l'état solide. Ceci affecte directement la cinématique du procédé pouvant ainsi restreindre ou étendre la zone de stabilité. Il est aussi possible que la superposition des matériaux affecte la structure cristalline du film produit, ce qui pourrait avoir un effet non négligeable sur les propriétés finales du film. L'interface entre les différents matériaux peut être de qualité variable. Si elle est de mauvaise qualité, une couche supplémentaire devra être ajoutée afin d'assurer une bonne adhésion entre les différentes couches. Pour l'ensemble de ces raisons la modélisation prédictive s'avère donc plus ardue. De plus, comme il sera

démontré dans la section suivante, les travaux portant sur le soufflage de gaine sont fortement axés sur le procédé de production de film monocouche. En résumé, il s'avère important de développer un modèle permettant de décrire adéquatement le procédé de soufflage de gaine multicouche afin de pouvoir évaluer l'importance relative de ces phénomènes particuliers qui sont rencontrés lors de la production de films multicouches.

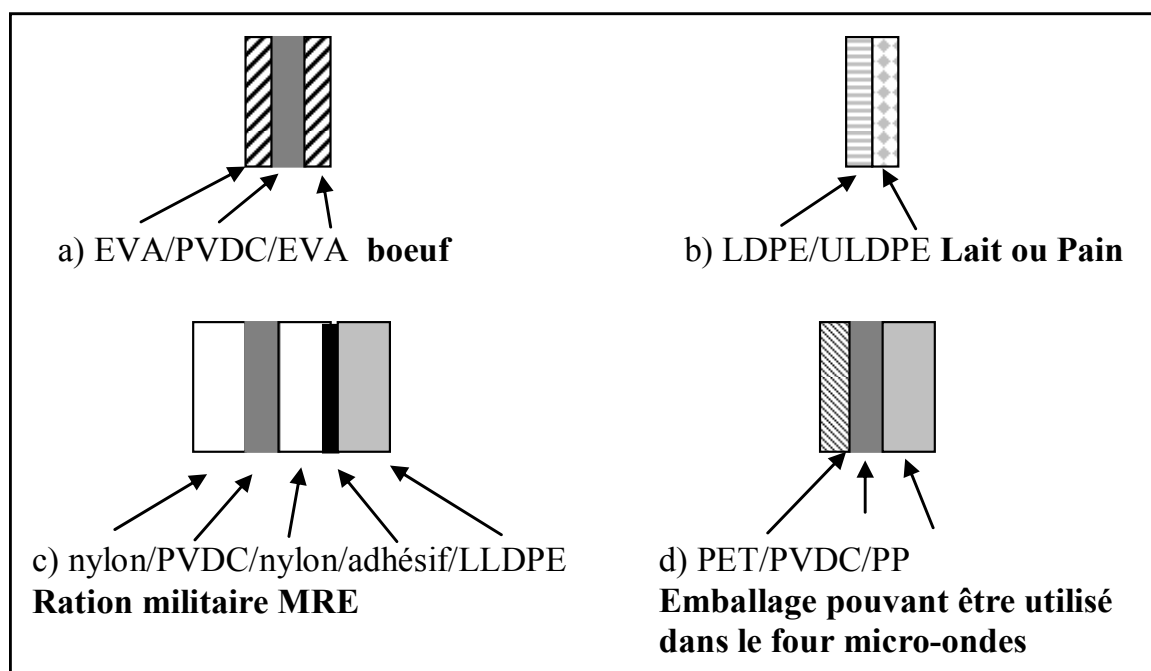


Figure 1.3 : Emballage alimentaire typique

### **1.3 Objectif**

Bien que l'utilisation du procédé de soufflage de gaine multicouche pour la fabrication de film soit en forte croissance, il a été très peu étudié comparativement au soufflage de gaine monocouche. L'objectif de la présente thèse est donc de développer des outils permettant une meilleure compréhension du procédé de soufflage de gaine multicouche.

Dans un premier temps nous effectuons des essais expérimentaux sur deux lignes d'extrusion distinctes en utilisant deux couples de matériaux afin de produire des films monocouches et multicouches. Ceci nous permettra d'évaluer l'effet des différents paramètres opératoires sur le profil géométrique et thermique des bulles produites. De plus nous utilisons la technique de mesure de la biréfringence en ligne en mode continu afin d'obtenir des informations sur le champ de contraintes généré à l'intérieur des films lors de leur production.

Par la suite nous développons un modèle non isotherme newtonien du soufflage de gaine multicouche. Ce modèle nous permet d'effectuer une analyse de sensibilité afin d'évaluer l'effet des différents paramètres sur la forme, la température et les champs de contraintes survenant lors du soufflage de gaine.

Finalement nous utilisons les données expérimentales que nous avons obtenues afin de valider notre modèle.

## **CHAPITRE 2 Étude Expérimentale**

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats expérimentaux obtenus lors de la production de gaines monocouches et multicouches. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux matériaux qui ont été utilisés lors de nos différentes campagnes expérimentales.

En second lieu, nous présenterons les différents couples extrudeuses/filière qui ont été utilisés afin de produire les films. Dans un premier temps, nous évaluerons l'effet des conditions opératoires (taux de gonflement et taux d'étirage) et de la nature du matériau utilisé sur les profils géométrique et thermique de bulles monocouches entre la sortie de l'anneau de refroidissement et la position de figeage. Ceci nous permettra d'affiner notre compréhension du procédé dans le cadre simple du soufflage de gaine monocouche. Par la suite, nous présenterons les résultats obtenus lors de la production de gaines multicouches. En plus des paramètres opératoires que nous venons de mentionner s'ajouteront alors : l'effet de l'agencement des couches, l'effet du pourcentage massique de chaque matériau dans le film et l'effet de la combinaison de différents matériaux.

Finalement, nous présenterons la technique de mesure de la biréfringence en ligne lors du soufflage de gaines monocouches et multicouches. Ceci nous permettra d'obtenir des informations intéressantes sur le champ de contraintes se développant à l'intérieur du film lors de la formation de la bulle. L'ensemble de ces résultats, profils thermiques, géométriques et de contraintes, pourra par la suite être utilisé afin de valider le modèle que nous présenterons au chapitre 3.

### **2.1 Revue de la littérature**

La très grande majorité des travaux portant sur le soufflage de gaine ont été réalisés sur des gaines monocouches. Les travaux expérimentaux peuvent être divisés en 3 catégories : l'effet des conditions opératoires sur la géométrie du film, les instabilités et l'effet de la microstructure cristalline sur les propriétés finales des films produits. Nous allons nous attarder particulièrement aux deux premiers aspects. La compréhension de ce procédé devrait nous être d'une grande utilité pour nous permettre de mieux comprendre les phénomènes potentiellement plus complexes, pouvant se produire lors du soufflage de gaines multicouche. Finalement, nous examinerons les travaux portant spécifiquement sur le soufflage de gaine multicouches.

#### **2.1.1 Films monocouches**

##### **2.1.1.1 Effet des conditions opératoires**

Les travaux visant à identifier l'effet des conditions opératoires sur le soufflage de gaine sont réalisés principalement afin d'identifier les paramètres affectant le plus fortement les propriétés mécaniques et optiques des films. Ces travaux ont donc pour fonction principale de permettre le développement de films plus performants.

André (1999) et Laffargue (2003) sont parmi les derniers auteurs à avoir mis en évidence l'influence des diverses conditions opératoires sur la forme de la bulle. Par exemple l'augmentation du taux de gonflement a pour conséquence de diminuer la position de la ligne de figeage alors que l'augmentation du taux d'étirage a l'effet inverse mais de façon plus

modéré. Le matériau, et le taux de refroidissement ont aussi une forte influence sur la géométrie de la bulle. En effet un matériau possédant une énergie d'activation élevée gonfle très rapidement. De même il semble évident qu'un taux de refroidissement élevé engendrera une bulle atteignant sa température de cristallisation plus rapidement. Par contre ces aspects ont aussi une forte incidence sur le niveau de contraintes développées dans le film. Ainsi une énergie d'activation élevée et un taux de refroidissement élevé nécessiteront une force aux rouleaux pinceurs plus importante et donc des contraintes internes plus élevées. Il est alors possible d'imaginer que cet accroissement des contraintes peut avoir un effet sur la structure cristalline des films et donc des propriétés.

La tentative la plus simple de maximiser les propriétés en traction des films de polyéthylène basse densité a été présentée par Cantor et Harrison (1990). Les auteurs utilisent une fonction de mérite similaire aux fonctions d'optimisation rencontrées dans le traitement statistique d'analyse expérimentale. Ils proposent donc aux producteurs de films une technique simple, issue du design expérimental, permettant d'obtenir des résultats de manière plus efficace que la méthode d'essais et erreurs (traditionnellement utilisée dans l'industrie) et plus rapide que la modélisation pure. Cette approche, bien qu'utile, demeure primitive et ne permet pas de comprendre les principes fondamentaux gouvernant les propriétés des films produits.

Babel et *al* (1993, 1995) posent comme hypothèse que le champ de contraintes développé lors de la formation de la bulle joue un rôle primordial sur les propriétés mécaniques finales des films produits. Les auteurs ont donc fabriqué des films et ont mesuré le taux de déformation (qui peut être relié aux contraintes) à l'aide d'une caméra digitale en mesurant l'évolution de la vitesse d'un marqueur déposé à la surface de la bulle en fonction de la position axiale. Par la suite, les propriétés mécaniques des films produits ont été évaluées. Les résultats semblent confirmer leur hypothèse initiale. En 1994, Sukhadia (1994) est parvenu à relier le taux de déformation et de refroidissement au développement de la structure cristalline. Il démontre qu'un taux de refroidissement élevé semble avoir pour effet d'engendrer la formation de nombreux cristaux de petites tailles résultant en une résistance à l'impact plus élevée et en une résistance aux déchirures plus faible. Il démontre aussi que les propriétés des films produits dépendent, comme le supposaient Babel et *al* (1993), du champ de contraintes.

Plus récemment, Ghaneh-Fard et *al* (1996b) ont présenté un article portant sur l'application de la biréfringence en ligne à la détermination de l'orientation de films produits par soufflage de bulle. L'avantage de cette technique est qu'elle permet une mesure indirecte sans contact des contraintes survenant à l'intérieur de la bulle. Elle ne perturbe donc pas l'opération de soufflage de gaine. Il est en effet possible de déterminer grâce à la loi tensio-optique la différence des contraintes axiales et transversales à partir des données de biréfringence. Les résultats obtenus confirment que l'orientation est principalement développée pendant le processus de cristallisation. Il est aussi possible, en utilisant cette technique, de déterminer la viscosité élongationnelle en ligne, ce qui en fait un outil précieux de caractérisation du procédé. Ghaneh-Fard et *al* (1997a) présentent des résultats étoffés obtenus grâce à la biréfringence en ligne afin de déterminer la contrainte dans des bulles de LLDPE. Un système de caméra permet d'évaluer le taux de déformation. Ils illustrent en outre l'effet du processus de cristallisation sur la biréfringence. En effet lorsque le taux de cristallisation augmente dans le film, la biréfringence augmente. De plus les auteurs ont réalisé plusieurs essais de façon à identifier l'effet des conditions opératoires sur la biréfringence. Cette étude a été suivie par une analyse de l'effet des conditions opératoires et des caractéristiques des matériaux sur la cinématique et la dynamique du procédé, (Ghaneh-Fard 1997b). Les auteurs ont utilisé du LDPE, du HDPE et du LLDPE : il apparaît que les trois matériaux se comportent différemment. Le LLDPE nécessite la pression de gonflage la plus élevée alors

que le LDPE demande la plus faible. Parallèlement à cette observation, la biréfringence du LLDPE est la plus faible et celle du LDPE est la plus élevée. La dernière publication de Ghaneh-Fard (1999) porte sur l'effet des conditions opératoires sur l'orientation moléculaire et sur les propriétés physiques des films. Il rapporte une série de résultats non intuitifs. En effet, dans certains cas, l'augmentation du taux d'étirage a pour effet de diminuer la valeur du module en traction dans le sens machine et transverse. Des variations importantes de la biréfringence dans le sens machine et transverse ont aussi été observées par l'auteur. Il ne parvient pas, contrairement à Babel et *al* (1993,1995) et Sukhadia (1994) à relier de façon décisive les propriétés à la biréfringence. Malheureusement l'auteur n'a pas tenté d'analyser les effets d'interdépendance entre les différents paramètres grâce à une analyse statistique qui aurait peut être permis de dégager une relation plus claire.

Les travaux que nous venons de présenter semblent indiquer que les propriétés mécaniques dépendent du champ de contraintes généré pendant la production du film. Il semble donc logique d'aller en amont du procédé pour s'intéresser à la rhéologie des résines utilisées dans le soufflage de gaine qui sont responsables des contraintes développées pendant la mise en œuvre.

Cette démarche a été abordée par Becker et *al* (1990) qui ont déterminé la résistance à l'étirage (melt strength) des polyoléfines à l'aide d'un rhéomètre capillaire fonctionnant à différentes vitesses. Par la suite, en utilisant des lignes de soufflage de gaine commerciales, ils sont parvenus à relier le taux de fréquence de rupture de la bulle à la résistance des différents matériaux. Ils parviennent ainsi à expliquer adéquatement pourquoi il est de pratique courante de mélanger une faible quantité de HDPE au LDPE afin de diminuer les ruptures de bulles.

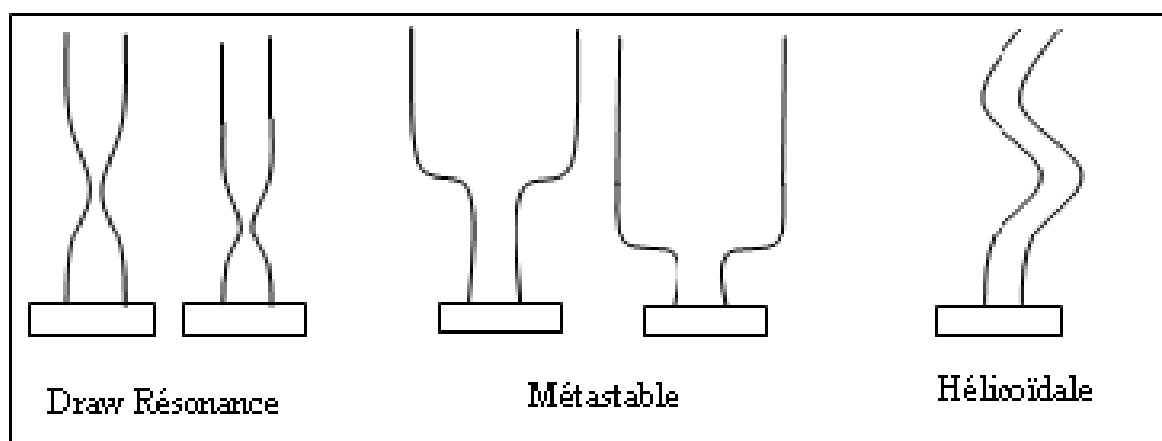
Récemment, Kuijk et *al* (1998) ont développé un modèle basé sur les propriétés rhéologiques afin de prédire les propriétés mécaniques de films de LDPE et de mélanges de LDPE et de LLDPE. Ils utilisent l'anémométrie laser Doppler pour déterminer le profil de vitesse du polymère, et des photographies pour mesurer le diamètre de la bulle. Leur analyse révèle que, contrairement aux résultats de Ghaneh-Fard (1999), une augmentation des contraintes à la position de figeage a pour effet d'engendrer un film de LDPE possédant de meilleures propriétés mécaniques en traction. Ils obtiennent des résultats similaires pour des mélanges de LDPE contenant moins de 20 % de LLDPE. Sukhadia (1998) a étudié l'effet de la structure moléculaire, de la rhéologie de la morphologie et de l'orientation sur les propriétés des films de polyéthylène. Ces résultats montrent que la rhéologie et la structure moléculaire des résines utilisées affectent profondément le degré d'orientation moléculaire et l'empilement des lamelles cristallines, ce qui a un effet direct sur les propriétés mécaniques des films produits. Selon lui, l'utilisation de résines présentant un temps de relaxation élevé a pour effet de produire des films possédant de plus faibles propriétés d'impact.

### **2.1.1.2 Les instabilités**

Les instabilités sont un phénomène survenant fréquemment dans les procédés de mise en forme des matériaux plastiques à l'aide d'une filière. Dans de nombreux cas ces instabilités peuvent être atténuées par l'utilisation de filières plus performantes, ou grâce à des conformateurs. Par contre, dans le cas du filage textile et de la production de film, les dimensions finales du produit désiré sont obtenues par un étirage (axial ou bi axial) dans l'air. Le polymère fondu comporte alors une surface libre pouvant se mouvoir facilement. Il est donc fortement sensible aux nombreuses perturbations pouvant générer des instabilités. Ces dernières représentent une des causes principales de la diminution de productivité et donc des

profits. Il n'est donc pas surprenant que les instabilités aient été l'un des premiers sujets étudiés en soufflage de gaine.

Han et Park (1975c) ont rapporté une instabilité de type 'draw resonance'. Ce type d'instabilité correspond à une variation périodique du diamètre de la bulle lors de l'étirement unidirectionnel. Cette instabilité débute à un taux d'étirement critique et son amplitude et sa fréquence augmentent, conduisant ultimement à la rupture de la bulle. Ce type d'instabilité avait déjà été observé dans le filage textile. Les travaux de Minoshiwa et White (1986) ainsi que ceux de Ghaneh-Fard et al. (1996a) réalisés lors d'étirement bi axial ont permis de valider ces observations. Ces auteurs ont identifié qualitativement deux autres types d'instabilités : les instabilités métastables, qui sont caractérisées par une variation de la position de la ligne de figeage, et les instabilités hélicoïdales, caractérisées par une rotation de la bulle autour de l'axe de la filière. La figure 2.1 illustre ces trois types d'instabilités. Alors que Minoshiwa et White (1986) attribuent l'instabilité hélicoïdale à un effet aérodynamique causé par l'air de refroidissement, Laffargue (2003) avance l'hypothèse que cette instabilité serait causée par un gonflement trop important de la bulle qui induirait une résonance transversale ayant pour effet de causer la perte d'axisymétrie de la bulle.



**Figure 2.1 : Types d'instabilités**

Minoshiwa et White (1986) ainsi que Kanai et White (1984) ont établi des cartes illustrant les régions de stabilité et d'instabilité pour le HDPE, le LDPE et le LLDPE en fonction du taux d'étirage et de gonflement. Selon eux, une distribution de poids moléculaire étroite aurait pour effet de diminuer la zone de stabilité. Le LDPE présente une zone de stabilité plus étendue que les deux autres matériaux. Ceci vient confirmer une pratique courante dans l'industrie. En effet les films de HDPE et de LLDPE sont fréquemment produits en leur ajoutant, par mélange, une faible quantité de LDPE. L'effet stabilisant de ce type de mélange a été démontré formellement par Fleisner (1988) qui attribue la stabilité accrue du LDPE à un effet d'écrouissage (strain hardening). Il apparaît que les résines possédant un comportement d'écrouissage prononcé présentent toujours une stabilité plus élevée. Finalement tous les travaux démontrent qu'un taux de refroidissement élevé a pour effet d'augmenter la zone de stabilité.

Malheureusement la caractérisation de ces instabilités et leur classification étaient jusqu'à présent uniquement qualitatives. Une nouvelle méthode permettant de quantifier le degré d'instabilité pendant la formation de la bulle a été développée par Sweeney et al (1992). La bulle est filmée à l'aide d'une caméra vidéo. L'image captée est alors analysée grâce à un système de traitement de données afin d'obtenir des informations sur la variation du diamètre en fonction du temps et de la position axiale. Plus récemment, Ghaneh-Fard et al. (1996a) ont utilisé la même technique afin d'établir un critère permettant de caractériser les instabilités

hélicoïdale. Ce critère permet d'obtenir des cartes de stabilité basées sur un paramètre quantifiable plutôt que sur une observation subjective de l'expérimentateur. Ce système a été amélioré par Laffargue et al (2002). Ces derniers utilisent un système de miroirs afin de capter de façon simultanée deux points de vue différents de la bulle. Ceci permet donc de discerner clairement les instabilités hélicoïdales des instabilités de type 'draw résonance'. Les auteurs peuvent donc quantifier clairement et rigoureusement ces instabilités.

### 2.1.1.3 La structure

Une partie importante des travaux expérimentaux publiés porte aussi sur la microstructure. En effet, la microstructure affecte non seulement les propriétés mécaniques des films mais aussi les propriétés optiques telles que la brillance et la turbidité. Or, dans le domaine de l'emballage, les propriétés optiques sont essentielles. En effet, dans la majorité des cas, les films produits doivent être d'une transparence parfaite afin de pouvoir permettre aux consommateurs d'observer le produit qu'ils s'appêtent à acheter.

Les auteurs de la première publication portant sur l'orientation des polymères amorphes produits par soufflage de gaine sont Choi et al (1980). Ils ont utilisé la biréfringence hors ligne afin d'évaluer l'orientation finale d'un film de polystyrène soumis à des étirements uniaxiaux et biaxiaux. Les données obtenues sont mises en relation avec les contraintes agissant sur le film au point de solidification, et sont ensuite comparées à des corrélations développées pour la biréfringence d'échantillons vitrifiés en subissant des écoulements élongationnels ou en cisaillement. Les auteurs précisent que la technique qu'ils utilisent ne peut pas être appliquée directement à la détermination de l'orientation de films de matériaux semi-cristallins.

Ashizawa et al (1984) ont utilisé des films de polyéthylène basse densité et des films de polyéthylène basse densité linéaire afin d'évaluer l'orientation cristalline, la quantité de lumière transmise et la rugosité des échantillons produits. Les auteurs rapportent que la majorité de la lumière est dispersée à la surface des films et non pas à l'intérieur du film. Ils attribuent ce phénomène à la rugosité des films, qui est causée à la fois par l'écoulement et par la cristallisation, mais ils ne parviennent pas à identifier le phénomène dominant. L'intérêt principal de ces travaux est qu'ils permettent d'identifier les facteurs principaux affectant les propriétés optiques. De plus, les auteurs rapportent que l'orientation cristalline des systèmes étudiés est peu influencée par les conditions opératoires.

Gupta et al (1993), quant à eux, utilisent la diffraction des rayons X aux petits angles (SAXS) pour étudier la morphologie cristalline de films de HDPE. Ils démontrent qu'une augmentation du taux d'étirage a pour effet de créer une augmentation du nombre de lamelles par empilement cristallin. Ceci est cohérent avec l'hypothèse généralement acceptée qui affirme que la formation de germes de cristallisation est favorisée par le champ de contraintes. Une augmentation du taux de gonflement a peu d'effet sur l'état cristallographique des films étudiés.

Récemment, Haudin et al (2000) ont publié des résultats portant sur l'orientation de la phase amorphe de films de polyéthylène. Les résultats ont été obtenus à l'aide de la technique de la biréfringence. Il semble que la phase amorphe ait tendance à s'orienter dans la direction transversale. Ceci a pour conséquence de créer dans la majorité des cas une orientation globale du film dans la direction transversale. Les auteurs rapportent des cas d'orientation dans le sens machine pour un taux de gonflement unitaire et des taux d'étirement élevés. Ils



illustrent ainsi une différence de comportement fondamentale entre les deux phases des polymères semi cristallins.

### 2.1.2 Films multicouches

La production de films multicouches fait apparaître des problèmes inexistants lors de la production de films monocouches. Par exemple, les températures de mise en forme et les propriétés rhéologiques peuvent varier grandement d'un matériau à l'autre. De plus il est parfois nécessaire d'utiliser des adhésifs avec certaines combinaisons de matériaux car ceux-ci n'adhèrent pas entre eux. L'effet de la combinaison de plusieurs résines a aussi un effet direct important sur les propriétés des films. Il est donc important pour des raisons économiques de trouver la quantité optimale de chacun des matériaux à utiliser afin d'obtenir les propriétés désirées. D'ailleurs, la plupart des travaux sur les films multicouches portent sur l'adhésion entre les différentes couches et sur les propriétés mécaniques des films produits.

Perdikoulis et Tzoganakis (1995,1996) ont publié des résultats portant sur l'instabilité interfaciale survenant lors de la production de films multicouches de LDPE. Le film produit était constitué de deux couches de la même résine (étude sur différents grades) à la même température, afin d'évaluer si la stabilité interfaciale dépendait du poids moléculaire, de la distribution du poids moléculaire ou de la température d'extrusion. Il semble que la température et le poids moléculaire aient peu d'effet sur les instabilités interfaciales, mais qu'une distribution de poids moléculaire étroite ait pour conséquence de les réduire. Cela contredisait les résultats de Minoshima et White (1986) ainsi que les résultats de Kanai et White (1984) obtenus grâce à des films monocouches.

Sanchez-Valdes et al (1997) ont évalué l'adhésion entre les couches de films coextrudés de PA6 et de LLDPE. Afin de favoriser l'adhésion entre ces deux matériaux hautement immiscibles, la couche extérieure est constituée d'un mélange de LLDPE et de LLDPEgMA. Ils ont démontré que l'utilisation de 20 % de LLDPEgMA augmente l'adhésion. Cette augmentation est encore plus drastique quand la température de mise en forme des matériaux est supérieure à 220 °Celsius. Les auteurs avancent l'hypothèse que la force d'adhésion est reliée à la diffusion polymère / polymère à l'interface et à un développement possible de liens covalents à l'interface LLDPEgMa / PA6. Mendez-Prieto et Sanchez-Valdes (1998) continuent leurs travaux portant sur l'adhésion de films multicouches en étudiant l'effet de l'utilisation de films recyclés sur les propriétés physiques. Ils évaluent les propriétés rhéologiques d'un film à cinq couches de LLDPE/liant/PA6/liant/LLDPE qu'ils font fondre et mélangent. Ils utilisent par la suite ce mélange pour créer des films mélange recyclé/PA6 et LLDPE/mélange recyclé/LLDPE pour ensuite évaluer les propriétés d'adhésion et de perméabilité à l'oxygène et à l'eau. Il semble que l'utilisation du mélange recyclé dans les films à deux couches ne crée pas d'augmentation significative de l'adhésion. Une augmentation de la quantité de mélange dans les films à trois couches crée une diminution des propriétés mécaniques et une diminution de la perméabilité à l'oxygène. Ces travaux illustrent les problèmes liés au recyclage des films multicouches et mettent en évidence l'importance des couches d'adhésif pour la production de films multicouches. Zhang et al (2001) ont produit des films multicouches de LDPE/PET avec et sans adhésifs. L'utilisation de l'adhésif n'apportait pas de modification à la structure cristalline des films produits mais améliorait l'adhésion. Les mesures de biréfringence indiquent une orientation négligeable de la couche de PET et une orientation dans le sens de la machine pour le LDPE. Lorsque les conditions opératoires sont modifiées, la couche de PET n'est pas influencée, mais la structure lamellaire de la couche de LDPE est modifiée.

Kamykowski et *al* (1996) ont, quant à eux, travaillé sur l'effet de la répartition (épaisseur) des couches sur l'adhésion dans des films à cinq couches de type PE/liant/EVOH/liant/PE. Cette étude sommaire a permis d'identifier, pour les systèmes considérés, l'épaisseur du film comme étant le paramètre influençant le plus fortement l'adhésion. Le type et la quantité de la couche externe, ainsi que la quantité d'adhésif, ont aussi une influence sur la force d'adhésion.

Morris (1996, 1999) a étudié l'effet des conditions opératoires sur la force d'adhésion d'un film à trois couches constitué de HDPE, d'EVOH et de plusieurs adhésifs (basés sur le LLDPE ou sur l'EVA). L'auteur tente de relier l'adhésion entre les couches à un paramètre défini comme étant le temps de procédé. Ce paramètre correspond au temps nécessaire au polymère fondu pour atteindre la zone de figeage. La force d'adhésion des films produits avec des adhésifs à base de LLDPE augmente drastiquement avec le temps de procédé. Les films produits avec des adhésifs à base d'EVA présentent des résultats plus mitigés. Par la suite, en retirant la pellicule d'adhésif du film multicouche, il est possible de comparer les propriétés physiques du HDPE co-extrudé avec celle du HDPE monocouche en fonction du temps de procédé. Les propriétés des films produits par co-extrusion ne semblent pas être dépendantes du temps de procédé, ce qui est équivalent à affirmer qu'elles sont indépendantes des contraintes générées dans le film.

Beagan et *al* (1999) ont étudié l'effet de mélanger et de coextruder un polyéthylène métallocène avec du LDPE. La résistance à la rupture des films de mPE est plus grande que celle des films de LDPE et les films coextrudés ont généralement de meilleures propriétés de rupture que les films produits à partir d'un mélange réalisé dans les mêmes proportions. De plus, les films multicouches sont généralement plus stables que les films monocouches de mPE. Ceci illustre l'importance future du procédé de coextrusion appliqué au soufflage de bulle.

Il est intéressant de noter que ces travaux, même s'ils sont relativement récents, ne font qu'effleurer l'étude des films multicouches. En effet, l'ensemble de ces travaux ne fait que confirmer la logique. Affirmer que la quantité d'adhésif est un paramètre pouvant affecter la qualité de l'adhésion entre deux matériaux semble en effet assez évident. Ceci illustre l'ampleur des travaux restant à accomplir sur les films multicouches. Il faut aussi noter qu'une des grandes incertitudes demeurant dans le domaine de fabrication des films (qu'ils soient monocouches ou multicouches) est de déterminer si il existe une relation entre le champ de contraintes généré pendant la production du film, la quantité de cristaux, la microstructure et l'agencement des couches dans le cas des films multicouches et les propriétés finales du film. En effet certains auteurs (Babel et *al* 1993,1995), Sukhadia (1994,1998), Kuïjk (1998)) affirment que ces paramètres peuvent affecter les propriétés des films, alors que les résultats de Ghaneh-Fard (1999) et Morris (1999) ne permettent pas d'illustrer clairement une telle tendance.

## **2.2 Matériaux**

Le choix des matériaux a été dicté par différents impératifs. Premièrement, les résines choisies devaient être utilisées industriellement pour la production de films monocouches et multicouches. En second lieu, afin de pouvoir réaliser les essais de biréfringence, il était aussi vital que ces résines soient transparentes à l'état fondu. Ceci nous a amenés à nous arrêter sur différentes combinaisons de résines polyoléfinées.

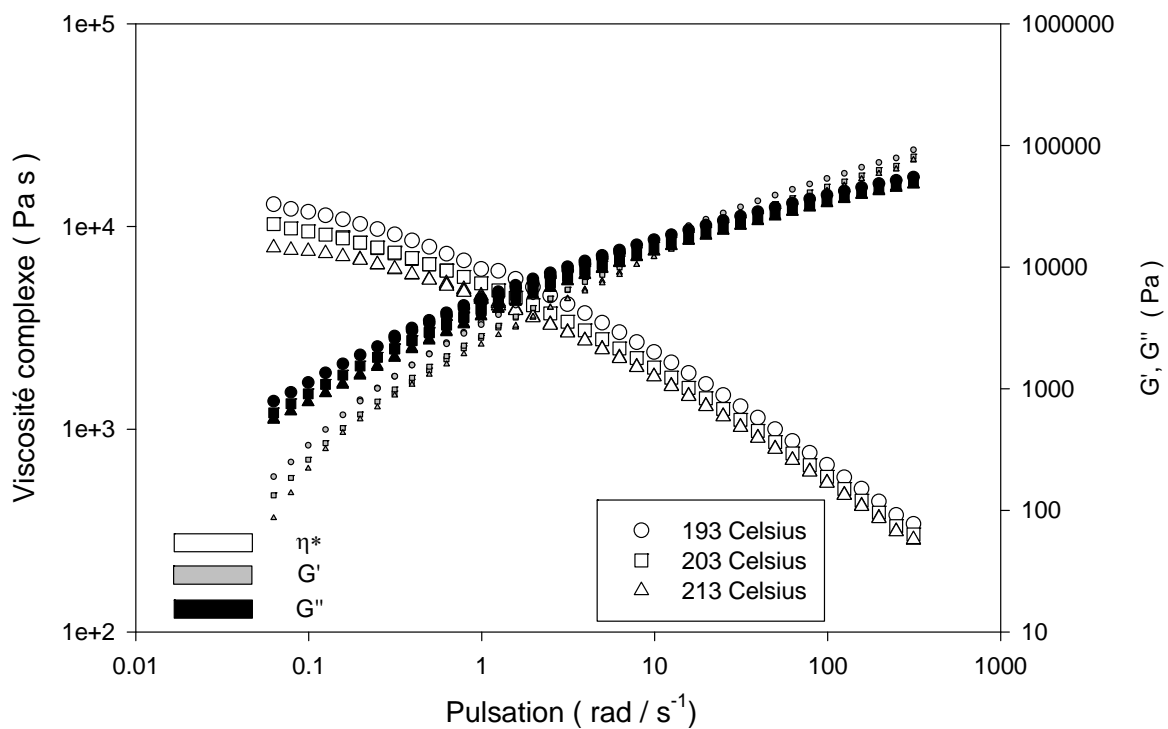
Deux des résines polyoléfiniques utilisées furent gracieusement fournies par Atofina afin de réaliser les essais en France. Le polyéthylène basse densité grade 1003FE23 (LDPE-A) est produit par le procédé de polymérisation radicalaire dans un réacteur tubulaire sous haute pression à une température supérieure à 200 °Celsius. Cette résine est principalement utilisée dans l'élaboration de pellicules de type "shrink wrap" et comme couche structurelle en coextrusion. La seconde résine polyéthylène fournie par Atofina, le M3410EP, (mMDPE) est produite grâce au procédé Phillips, qui consiste à effectuer la polymérisation en phase liquide (slurry loop reactor) à une température comprise entre 85 et 110 °Celsius en présence d'un catalyseur de type métallocène. Ce procédé permet un excellent contrôle du poids moléculaire et de la polydispersité de la résine produite. Ce type de résine est principalement utilisé pour la production de films rétractables monocouches ou multicouches où un fini brillant est requis.

Les deux autres résines polyoléfiniques nous ont été fournies par Glopak Inc. Cette entreprise se spécialise dans la fabrication de films alimentaires multicouches destinés à l'emballage de produits laitiers. Le polyéthylène basse densité Dow 609a (LDPE-B) offre d'excellentes propriétés de résistance aux déchirures tout en étant facilement imprimable. Lors de la production de films multicouches, cette résine est donc typiquement située sur la paroi externe. Le second matériau utilisé par Glopak Inc. est le ULDPE Attane 4201 de Dow. Ce matériau est particulièrement utilisé pour contenir des liquides, car il offre une bonne ductilité à basse température et d'excellentes propriétés au scellage. Lorsqu'il est localisé sur la paroi interne du film, il est alors possible de produire des emballages flexibles possédant d'excellente capacité de scellage à chaud sans utiliser d'adhésif supplémentaire. Ceci est particulièrement important pour l'emballage alimentaire. Les principales caractéristiques de ces matériaux sont présentées au tableau 2.1.

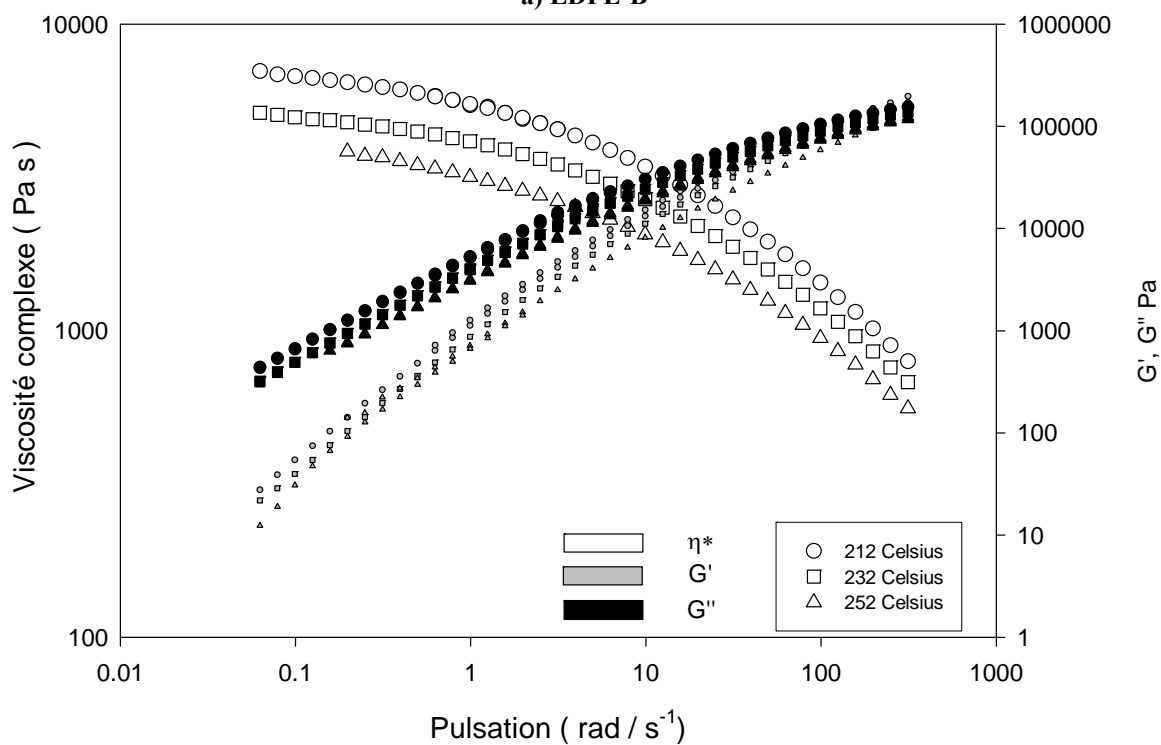
**Tableau 2.1 : Principales propriétés des résines utilisées**

Propriété	Unité	Matériaux			
		LDPE-A	mMDPE	LDPE-B	ULDPE
		Lacqtène® 1003FE23	Finacène® M3410EP	Dow 609a	Dow Attane 4201
Température de fusion	°C	114	124	112	123
Indice d'écoulement	g /10 min	0.3	0.9	0.88	1.0
Densité	g /cm <sup>3</sup>	.92	.93	.92	.91
Chaleur spécifique	J/(kg°C)	2300	1800	2300	2300

Le comportement rhéologique en cisaillement des différents matériaux a été étudié à l'aide d'un rhéomètre SR5000 de Rheometric Scientific entre 0.628 et 62.8 rad/s à différentes températures. Il est possible de déduire la viscosité complexe, le module de perte et le module élastique à partir du couple et de l'angle de déphasage. La figure 2.2 illustre les résultats obtenus pour le LDPE-B et pour le ULDPE. Les résultats obtenus pour les autres matériaux sont illustrés à l'annexe A.



a) LDPE-B



b) ULDPPE

**Figure 2.2 : Évolution de la viscosité complexe, du module de perte et du module élastique. Effet de la température.**

Ces données peuvent maintenant être utilisées afin de déterminer, à l'aide du principe de superposition, les facteurs de glissement et les courbes maîtresses qui sont respectivement présentés au tableau 2.2 et à la figure 2.3.

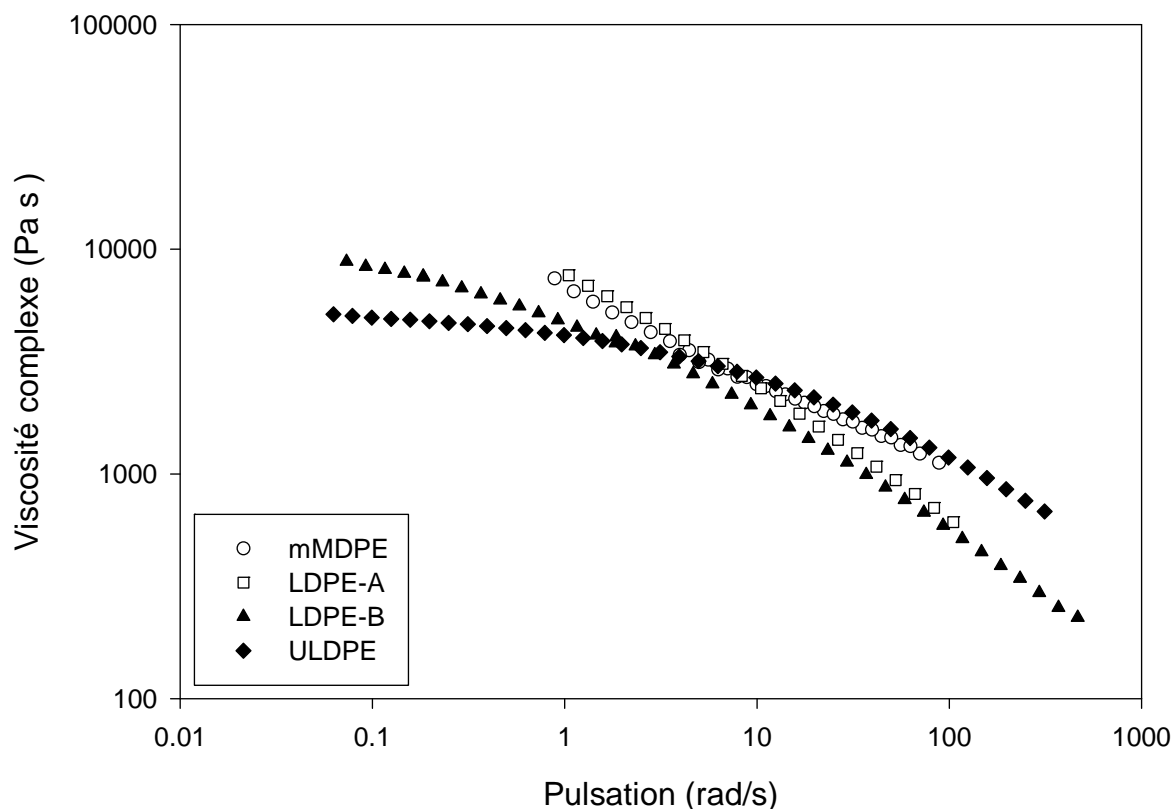
**Tableau 2.2 : Facteurs de glissement**

Matériaux	Facteur de glissement		Température de référence
	T=180 <sup>0</sup> C	T=220 <sup>0</sup> C	
LDPE-A	T=180 <sup>0</sup> C	T=220 <sup>0</sup> C	200 <sup>0</sup> C
	1.45	.71	
mMDPE	T=180 <sup>0</sup> C	T=220 <sup>0</sup> C	200 <sup>0</sup> C
	1.77	0.6	
LDPE-B	T=193 <sup>0</sup> C	T=203 <sup>0</sup> C	213 <sup>0</sup> C
	1.7	1.22	
ULDPE	T=212 <sup>0</sup> C	T=252 <sup>0</sup> C	232 <sup>0</sup> C
	1.16	0.71	

On exprime l'évolution du coefficient de glissement en fonction de la température par une loi de type Arrhenius.

$$\eta(T) = a_T \eta(T_r) = e^{\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right)} \eta(T_r) \quad 2.1$$

D'où l'on déduit l'énergie d'activation. Celle-ci est de 50 kJ/mol pour le LDPE-A, 33 kJ/mol pour le mMDPE, 44 kJ/mol pour le LDPE-B et 26 kJ/mol pour le ULDPE. Les valeurs obtenues pour les LDPE sont du même ordre de grandeur que celles rapportées par André (1999). Pour ce qui est du mMDPE et du ULDPE, aucune valeur typique n'a pu être trouvée dans la littérature. En revanche, à titre de comparaison, Yu et Wilkes (1996) rapportent des valeurs d'énergie d'activation comprises entre 25 et 30 kJ/mol pour différentes familles de HDPE.



**Figure 2.3 : Courbes maîtresses de viscosité à une température de 220 °C**

En utilisant un modèle de Carreau Yasuda, il nous a été possible à partir de la figure 2.3 de déduire la valeur de la viscosité au plateau newtonien à 220 °C comme étant respectivement 12000 Pa.s et 6200 Pa.s pour les résines LDPE B et ULDPE. Par contre, pour les deux autres matériaux, il nous a été impossible d'atteindre le plateau newtonien même en réalisant des essais rhéologiques à plus faible température.

Il nous est maintenant possible de passer aux résultats obtenus lors de la fabrication des films monocouches et multicouches avec les matériaux que nous venons de caractériser.

## 2.3 Équipement

Deux campagnes expérimentales ont été réalisées : la première a été effectuée en utilisant une filière multicouche de petite taille, alors que la seconde a été réalisée sur une filière multicouche semi industrielle. La filière de petite taille nous permettra de mesurer le rayon et la température en fonction de la position axiale alors que la filière semi industrielle nous permettra d'évaluer le rayon et la biréfringence. Les objectifs de ces campagnes étaient d'identifier les effets des conditions opératoires sur l'évolution du rayon, de la température et des contraintes des bulles monocouches et multicouches produites. Ceci devrait nous permettre de mieux comprendre le procédé et d'obtenir des données nous permettant de valider le modèle.

### 2.3.1 Filière multicouche de petite taille

Une campagne expérimentale qui portait sur la production de films monomatières et multimatières de LDPE-A et de mMDPE a été réalisée dans le service de transformation des thermoplastiques d'un groupe Français en juillet 2003. Nous avons mesuré l'évolution du rayon et de la température des diverses bulles produites entre la sortie de l'anneau de refroidissement et la position de la ligne figeage. Les paramètres opératoires que nous avons fait varier lors de ces essais sont : le taux de gonflement, le taux d'étirage et la température de l'air de refroidissement. De plus, pour les films multimatières, l'agencement et la quantité respective des matériaux ont aussi varié. Par contre, contrairement à la majorité des travaux expérimentaux portant sur le soufflage de gaine, nous avons décidé de travailler à débit d'air de refroidissement constant. Ceci entraîne obligatoirement une variation de la position de la ligne de figeage. Nous avons utilisé un débit constant afin de pouvoir déduire, à partir de nos mesures, l'évolution du coefficient de convection thermique en fonction de la position axiale. Cette relation pourra alors être utilisée pour la réalisation des calculs sur toutes les bulles produites grâce à cette filière.

L'équipement qui a été utilisé pour la fabrication des films monomatières et multimatières est une ligne d'extrusion Collin. La filière utilisée possédait un diamètre externe de 51.6 mm et un entrefer de 1.2mm. Afin d'alimenter la filière trois extrudeuses étaient disponibles. Les dimensions des vis sont présentées au tableau 2.3.

**Tableau 2.3 : Caractéristiques dimensionnelles des extrudeuses de la petite filière.**

Extrudeuse	Diamètre	Longueur
1	30 mm	25 D
2	30 mm	25 D
3	25 mm	25 D

La production d'un film monomatière était assurée par la répartition du débit d'extrusion avec le même polymère sur les trois extrudeuses. Dans le cas de la production de films

multimatières, les extrudeuses 2 et 3 étaient utilisées pour produire la couche interne, et l'extrudeuse 1 pour produire la couche externe. L'alimentation des trois extrudeuses en résines se fait à l'aide d'un système d'alimentation gravimétrique. Ce système permet de contrôler avec précision le débit massique de chacune des extrudeuses. Le refroidissement est assuré par un anneau à simple lèvre. La température de l'air de refroidissement était contrôlée et pouvait être modifiée. Pour la majorité des essais, elle a été maintenue à 20 °Celsius. Rappelons que la totalité des expérimentations ont été réalisées en utilisant un débit d'air constant.

### 2.3.1.1 Mesure de la température de la bulle

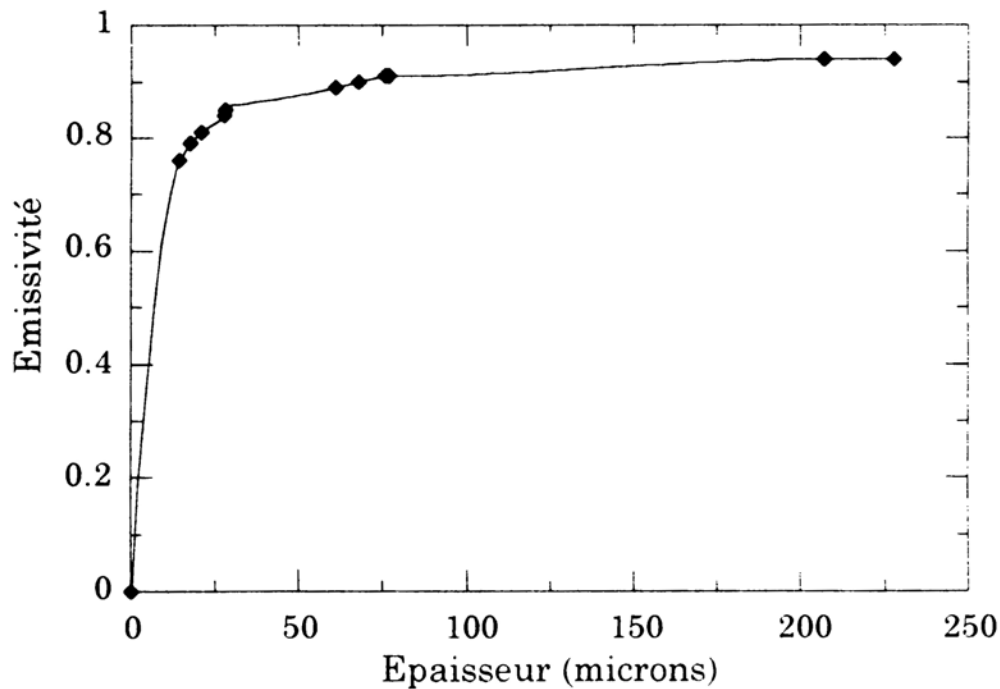
La mesure de la température à l'aide d'un pyromètre l'infrarouge est basée sur la théorie de l'échange d'énergie par rayonnement. Le principal intérêt de cette technique de mesure est qu'elle permet de réaliser une mesure sans contact et surtout presque ponctuelle (1 cm<sup>2</sup>). Par contre, afin d'utiliser efficacement cette technique, il est nécessaire de connaître la transmissivité  $\tau$ , la réflectivité  $\rho$ , et surtout l'absorptivité  $\alpha$  qui sont reliées entre elles par la relation suivante.

$$\tau + \rho + \alpha = 1 \quad 2.2$$

Il faut aussi noter que pour une température et une longueur d'onde données, l'absorptivité est égale à l'émissivité  $\varepsilon$ .

$$\tau + \rho + \varepsilon = 1 \quad 2.3$$

De plus, il a été démontré par Billmeyer en 1971, que la transmissivité du polyéthylène à une longueur d'onde de 3.43 micromètre (correspondant à un pic d'absorption des liaisons CH du polyéthylène) était très faible. Si cette longueur d'onde est utilisée pour mesurer la température d'un film de polyéthylène, la température mesurée correspondra alors à la température de la surface extérieure de la bulle, puisqu'à cette longueur d'onde, le rayonnement lumineux n'est pas transmis. Comme le polyéthylène n'est pas un corps noir, il est nécessaire de connaître l'importance de son émissivité par rapport à sa réflectivité afin de pouvoir réaliser un échantillonnage efficace. André (1999) rapporte, tel qu'illustré à la figure 2.4, que l'évolution de l'émissivité est une fonction de l'épaisseur du film mesuré. Dans le cas du soufflage de gaine, l'émissivité varie entre 0.84 et 0.94 compte tenu de l'épaisseur des films produits. Il est possible de constater sur cette figure que la composante de l'émissivité sera beaucoup plus importante que la composante de réflectivité. Ghaneh Fard et al (1997b) utilisent une valeur constante de 0.96 pour l'émissivité. Ils rapportent de plus que, pour le cas du soufflage de gaine, le fait de négliger la variation de l'émissivité en fonction de l'épaisseur du film cause une erreur maximale de 2 °Celsius sur la lecture de la température. Tout comme André (1999) et Laffargue (2003), nos mesures ont donc été réalisées en utilisant une émissivité moyenne de 0.87.



**Figure 2.4 : Évolution de l'émissivité d'un film de polyéthylène en fonction de l'épaisseur. (André 1999).**

Le thermocouple infrarouge était fixé sur une plateforme mobile permettant de mesurer la température de la bulle en fonction de la position axiale. Le système d'acquisition de données permettait de mesurer 20 points successifs. Dans un premier temps, l'écart entre chaque point de mesure était de 1cm avec une hauteur initiale de 19 cm au dessus de la filière compte tenu de la présence de l'anneau de refroidissement. Ceci nous permettait d'évaluer la longueur du plateau de cristallisation. Par contre, il ne nous était pas possible de connaître l'évolution de la température juste au dessus de l'anneau de refroidissement. Par la suite, l'écart entre les points de mesure fut fixé à 1.4 cm, et la hauteur initiale de la plateforme fut diminuée à 8 cm compte tenu de la présence de l'anneau de refroidissement afin de pouvoir mesurer la température sur une plus longue distance. Ceci nous donne donc des longueurs d'acquisition respectives de 200 et de 280 mm.

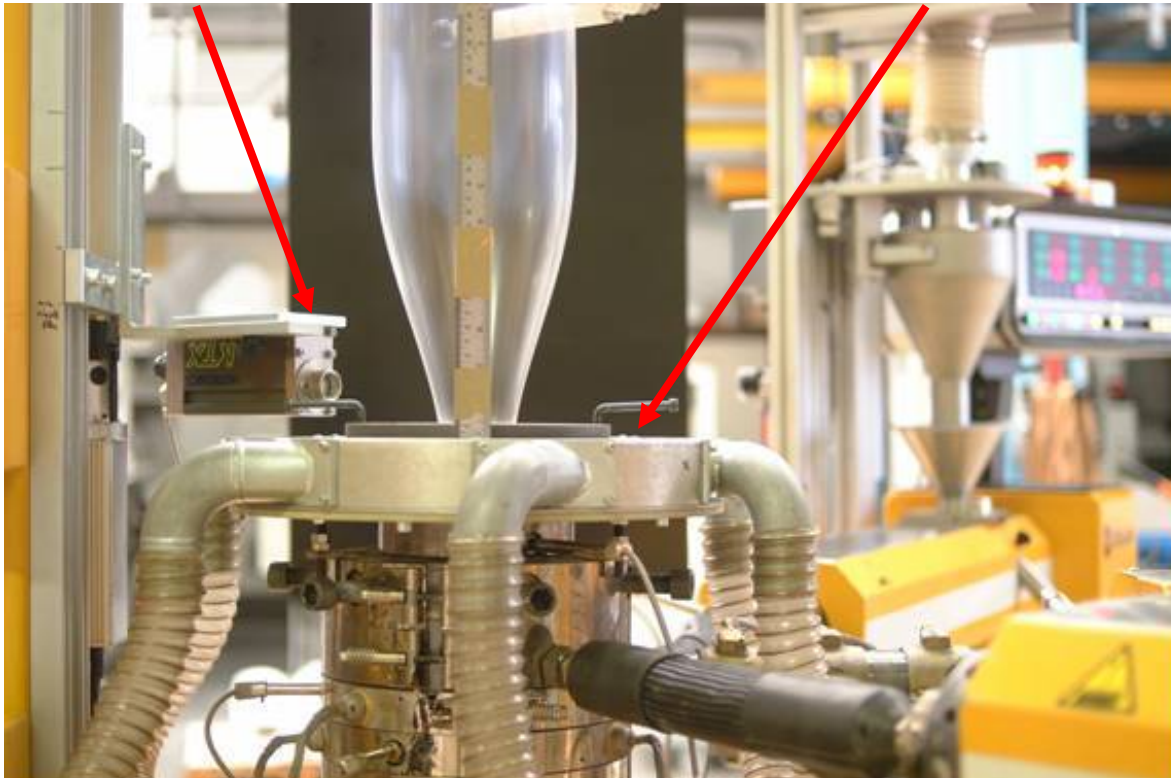
### 2.3.1.2 Mesure des dimensions la bulle

La mesure des dimensions de la bulle était réalisée grâce à un appareil photo numérique fixé à un trépied. Pour chaque condition expérimentale, quatre photographies étaient prises sur une période d'approximativement 30 secondes. La première et la dernière photographie permettaient d'obtenir une vue d'ensemble de la bulle, du haut de l'anneau de refroidissement à la position de figeage, alors que la seconde et la troisième permettaient d'obtenir un gros plan de la bulle à la sortie de l'anneau de refroidissement. Une règle métallique de 30 cm (voir figure 2.5) était fixée sur l'anneau de refroidissement et sur la tour de façon à avoir un repère dimensionnel pour pouvoir évaluer les dimensions réelles de la bulle aux différents grossissements. Les photographies obtenues étaient analysées grâce à un logiciel de traitement d'image. La stabilité des bulles obtenues était évaluée en comparant les dimensions de la première et de la dernière photographie pour chacune des conditions expérimentales. Il s'avère que la totalité des bulles produites étaient stables.



Thermocouple

Anneau de refroidissement



**Figure 2.5 : Montage expérimental**

### 2.3.1.3 Plan expérimental

Un plan expérimental à deux paramètres et trois niveaux a été utilisé afin d'effectuer un balayage des conditions opératoires lors de la production de films de LDPE-A, de mMDPE, LDPE-A/mMDPE et de mMDPE/LDPE-A. Ceci nous a permis d'étudier l'effet de l'énergie d'activation et de la température de cristallisation. Il faut aussi noter que la reproductibilité des résultats ainsi que l'effet de la température de l'air de refroidissement ont aussi été étudiés. Des essais complémentaires visant à évaluer l'effet de l'agencement et de la répartition des matières sur les profils thermique et géométrique ainsi que sur les propriétés des films produits ont aussi été réalisés pour les films multimatières. Il faut souligner que, suite à un problème technique, la majorité des films multicouches de LDPE-A/mMDPE ont été réalisés à une température de mise en forme de 10 °Celsius inférieure aux autres essais expérimentaux. Le plan expérimental utilisé est présenté au tableau 2.4. Ce plan nous permettra d'évaluer l'influence des conditions opératoires (débit, BUR, TUR) et de la répartition des matériaux sur la géométrie et le profil thermique des bulles monocouches et multicouches produites. Ces essais sont classiques pour les bulles monocouches, par contre ils n'ont jamais été réalisés pour les films multicouches. Nous nous intéresserons donc particulièrement à cet aspect et nous présenterons les résultats monocouches à titre de comparaison.

**Tableau 2.4 : Plan expérimental. Filière de petite taille**

Matériaux	Essai	BUR Objectif	TUR Objectif	Débit	Température	Température de l'air
				Kg/hr	Celsius	Celsius
LDPE-A	1	2.07	6.55	5	220	20
	2	2.07	9.35	5	220	20
	3	2.07	12.15	5	220	20
	4	2.59	6.55	5	220	20
	5	2.59	9.35	5	220	20
	6	2.59	12.15	5	220	20
	7	3.11	6.55	5	220	20
	8	3.11	9.35	5	220	20
	9	3.11	12.15	5	220	20
	10	2.59	9.35	5	220	15
	11	2.59	9.35	5	220	20
	12	2.59	9.35	5	220	25
mMDPE	13	2.07	6.55	5	220	20
	14	2.07	9.35	5	220	20
	15	2.07	12.15	5	220	20
	16	2.59	6.55	5	220	20
	17	2.59	9.35	5	220	20
	18	2.59	12.15	5	220	20
	19	3.11	6.55	5	220	20
	20	3.11	9.35	5	220	20
	21	3.11	12.15	5	220	20
LDPE-A /mMDPE Int/Ext	22	2.07	6.55	2.5/2.5	220	20
	23	2.07	9.35	2.5/2.5	220	20
	24	2.07	12.15	2.5/2.5	210	20
	25	2.59	6.55	2.5/2.5	210	20
	26	2.59	9.35	2.5/2.5	210	20
	27	2.59	12.15	2.5/2.5	210	20
	28	3.11	6.55	2.5/2.5	210	20
	29	3.11	9.35	2.5/2.5	210	20
	30	3.11	12.15	2.5/2.5	210	20
	31	2.59	9.35	1/4	210	20
	32	2.59	9.35	4/1	210	20
	mMDPE /LDPE-A Int/Ext	33	2.07	6.55	2.5/2.5	220
34		2.07	9.35	2.5/2.5	220	20
35		2.07	12.15	2.5/2.5	220	20
36		2.59	6.55	2.5/2.5	220	20
37		2.59	9.35	2.5/2.5	220	20
38		2.59	12.15	2.5/2.5	220	20
39		3.11	6.55	2.5/2.5	220	20
40		3.11	9.35	2.5/2.5	220	20
41		3.11	12.15	2.5/2.5	220	20
42		2.59	9.35	1/4	220	20
43		2.59	9.35	4/1	220	20

### 2.3.2 Filière multicouche semi industrielle

Deux séries d'essais portant sur la production de films monomatières et multimatières de LDPE-B et de ULDPE ont été réalisés à l'Institut des Matériaux Industriels à Boucherville en janvier 2003 et en février 2004. Nous avons mesuré le rayon et la biréfringence des diverses bulles produites entre la sortie de l'anneau de refroidissement et la position de figeage. En revanche la température des bulles produites sur cette ligne n'a pas été mesurée car le pyromètre n'était pas disponible. Les paramètres opératoires que nous avons fait varier lors

de ces essais sont : le taux de gonflement et le taux d'étirage. De plus, pour les films multimatériaux, l'agencement et la quantité respective des matériaux ont aussi été variés. Comme lors de la précédente campagne, le débit d'air de refroidissement était maintenu constant.

L'équipement permettant de fabriquer des films multicouches disponible à l'IMI est constitué de 5 extrudeuses Brampton Engineering. Uniquement les deux extrudeuses d'alimentation des couches externes furent utilisées. Le diamètre de ces extrudeuses était de 31.8 mm. L'alimentation des résines est contrôlée à l'aide de balances gravimétriques. Il est donc possible de maintenir au point de consigne les débits de chaque couche et donc l'épaisseur du film produit. La filière utilisée possède un diamètre extérieur de 101.6 mm et un entrefer de 1.1 mm. La température d'extrusion était maintenue à 230 Celsius.

### 2.3.2.1 Mesure de la biréfringence

Au cours des dernières années, de nombreux travaux ont été effectués afin d'évaluer les contraintes développées dans le film lors du procédé de soufflage de gaine. L'approche la plus répandue consiste à mesurer le taux de déformation du film lors de sa production. Un traceur est appliqué sur la paroi externe de la bulle et son déplacement est suivi grâce à une caméra vidéo. Il est alors possible de relier le taux de déformation aux contraintes transversale et axiale grâce aux relations de Pearson et Petrie (1970a, 1970b) sans faire appel à la loi de comportement des matériaux. Le principal désavantage de cette méthode est que le taux de déformation ne peut pas être mesuré localement, car il faut suivre le déplacement du traceur sur une distance de quelques centimètres afin de pouvoir déduire le taux de déformation. La valeur obtenue est donc une valeur moyenne. Récemment, Ghaneh Fard et al (1996b) ont développé un système permettant d'évaluer les contraintes internes dans le film pendant le soufflage de gaine à partir de mesures de la biréfringence.

Afin de comprendre le phénomène de la biréfringence, il est nécessaire de revenir sur les notions d'optique. Un faisceau lumineux peut être comparé à un champ électrique oscillant se propageant dans l'espace. La matière est composée d'atomes, constitués d'un noyau et d'électrons possédant une charge électrique. Les électrons sont affectés par les champs électriques. Lorsque la lumière traverse un matériau, son champ électrique interagit avec les composantes chargées de la matière, et le faisceau lumineux est affecté par cette interaction. Il est possible d'analyser ces interactions afin de déterminer l'état de la matière traversée par le faisceau lumineux. L'interaction la plus simple entre la lumière et la matière est la transmission par un milieu isotrope non absorbant. Le résultat de cette interaction est une diminution de la vitesse de la lumière dans le milieu en comparaison avec la vitesse de la lumière dans le vide. Le rapport de la vitesse dans le vide sur la vitesse dans le milieu est l'indice de réfraction.

Le phénomène de la double réfraction, ou encore biréfringence, peut être observé lorsqu'un faisceau lumineux traverse un milieu optiquement anisotrope. Si la densité linéaire des particules chargées électriquement varie dans les différentes directions du corps traversé, l'interaction de la lumière avec ce corps va aussi varier avec la direction (Dealy et Wissbrun 1990). Le faisceau lumineux incident sera divisé en deux faisceaux polarisés à angle droit l'un par rapport à l'autre, d'où l'appellation de double réfraction. Ces deux faisceaux sont nommés ordinaire et extraordinaire. Dans le cas des polymères fondus, ces deux faisceaux sont essentiellement superposés, car la biréfringence est beaucoup plus petite que la valeur absolue des indices de réfractifs. Un aspect particulièrement intéressant de la biréfringence

est qu'il est possible de la relier aux contraintes internes grâce à la loi tensio-optique qui est exprimée par la relation suivante :

$$\Delta n_{ij} = C \Delta \sigma_{ij} \quad 2.4$$

La constante de proportionnalité  $C$  est le coefficient tensio-optique, ou encore coefficient de Brewster. Il est égal à  $2.1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \text{N}^{-1}$  pour le polyéthylène. Pour un polymère possédant un motif structural donné,  $C$  est indépendant du poids moléculaire, de sa distribution de poids moléculaire, du taux d'étirement et de la température. Selon Lodge (1955) et Janeschitz-Kriegl (1983), cette loi a été démontrée comme étant valide pour les écoulements de polymères fondus. Récemment, Ryu et *al* (1998) ont étudié la relation entre la contrainte et la biréfringence du PET amorphe soumis à un étirement uniaxial à différentes vitesses entre 80 et 95 °Celsius. Ils ont porté une attention particulière aux zones d'application de la loi optique. Par exemple, quand le taux d'étirement est faible à des températures élevées, la loi optique est valide. Par contre, pour certains taux d'étirement très élevés, la biréfringence augmente plus rapidement que la contrainte et la loi optique n'est pas respectée. Des essais de DSC ont permis de démontrer que la divergence par rapport à la loi optique était due à une cristallisation induite par la déformation. Par la suite si le taux d'étirement augmente encore, la contrainte se met à augmenter très rapidement. Les auteurs attribuent cette réaction à la nature non gaussienne des chaînes moléculaires fortement étirées. Ils identifient donc les limites d'application de la loi optique. Pour les conditions normales de soufflage de gaine nous sommes en dessous de ces limites. Plus récemment Cakmak et Hassan (2003) ont présenté un montage permettant de mesurer la biréfringence en ligne en plan et hors plan de films étirés axialement ou bi axialement. Le film peut être soumis à des étirages simultanés ou successifs. Ces travaux mettent en outre en évidence la validité de la loi tensio optique pour les taux de déformation rencontrés lors du procédé de soufflage de gaine.

L'évaluation du champ des contraintes par mesure de la biréfringence présente plusieurs avantages :

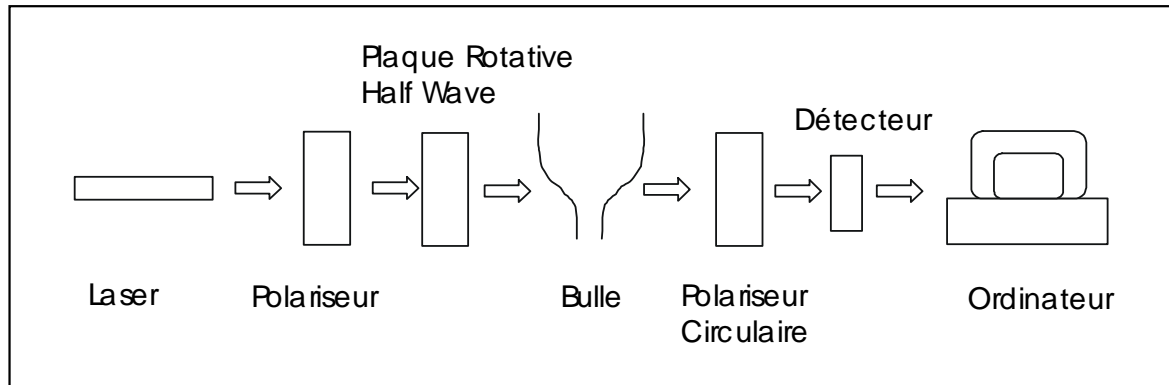
1. L'écoulement n'est pas perturbé, car aucun contact physique n'intervient dans la prise de mesure.
2. La réponse est rapide.
3. C'est une méthode de mesure très sensible.

En contrepartie, cette méthode indirecte comporte quelques inconvénients si l'on désire l'appliquer au cas du soufflage de gaine :

1. Le matériau étudié doit être transparent.
2. Le faisceau lumineux doit être détecté après avoir traversé les deux cotés de la bulle. Il faut donc que la bulle soit symétrique et stable, ce qui peut s'avérer difficile pour certaines conditions opératoires.
3. Il faut aussi mesurer l'épaisseur (ou les épaisseur, quand on est en multicouche) du film traversée par le faisceau lumineux afin d'appliquer cette technique aux films multicouche.
4. Si le film n'est pas perpendiculaire à la direction du faisceau lumineux dans la zone de gonflement, il est nécessaire d'effectuer une correction qui dépendra du taux de gonflement.

L'équipement disponible afin de réaliser les expérimentations de biréfringence est illustré à la figure 2.6. La notation de Fuller (1995) est utilisée. La source lumineuse est constituée d'un laser He-Ne possédant une longueur d'onde de 632.8 nm. Le dispositif comprend également

un polariseur à  $0^\circ$  et une lame de demi longueur d'onde servant à polariser la lumière avant qu'elle ne passe au travers de l'échantillon (qui dans notre cas sera une bulle). La rotation de la lame et du polariseur est réalisée grâce à un moteur électrique tournant à une fréquence de 100 Hz. La fréquence de rotation est contrôlée grâce à un encodeur. À la sortie de l'échantillon, le train optique est constitué d'un polariseur circulaire, d'un détecteur et d'un système d'acquisition de données.



**Figure 2.6 : Train optique utilisé pour les mesures de biréfringence.**

Comme nous l'avons mentionné précédemment, lorsque la lumière est mise en interaction avec la matière, sa polarisation est affectée. Les propriétés de polarisation de la lumière peuvent être représentées grâce aux vecteurs de Jones ( $A$ ) et de Stokes ( $S$ ). L'interaction peut généralement être décrite par les relations linéaires suivantes :

$$A_{\text{transmise}} = \mathbf{J} A_{\text{incident}}$$

Et

$$S_{\text{transmise}} = \mathbf{M} S_{\text{incident}}$$

Comme la valeur mesurée en polarimétrie est l'intensité lumineuse, le vecteur de Stokes est le plus fréquemment utilisé. En effet, le vecteur de Jones n'est pas directement observable, alors que pour une lumière monochromatique parfaitement polarisée les éléments du vecteur de Stokes sont observables. En décomposant la matrice de Mueller ( $\mathbf{M}$ ) en plusieurs éléments représentant chaque composante du train optique, il est possible de relier l'intensité incidente et l'intensité transmise à la biréfringence du film. En utilisant le montage de la figure 2.6 dans les conditions de soufflage de gaine monocouche, ou de gaine multicouche composée de matériaux possédant les mêmes propriétés réfractives, l'intensité finale au détecteur peut être représentée par la relation suivante (Ghaneh Fard 1996b) :

$$I = I_0(1 + A_2 \sin 4\omega t + B_2 \cos 4\omega t) \quad 2.5$$

En négligeant les imperfections des éléments optiques on trouve grâce à une analyse de Fourier les valeurs des coefficients  $A_2$  et  $B_2$  :

$$A_2 = \frac{-2T_p T_s}{T_p^2 + T_s^2} \sin(2\delta) \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{T_p^2 - T_s^2}{T_p^2 + T_s^2} \quad 2.6$$

Où  $I_0$  est l'intensité du faisceau lumineux incident,  $\delta$  est le retard de phase du champ électrique causé par le passage de la lumière dans le film, et  $T_p$  et  $T_s$  sont respectivement les coefficients de transmission des composantes p et s du champ électrique.

Il est possible de relier le retard à la biréfringence grâce à la relation suivante

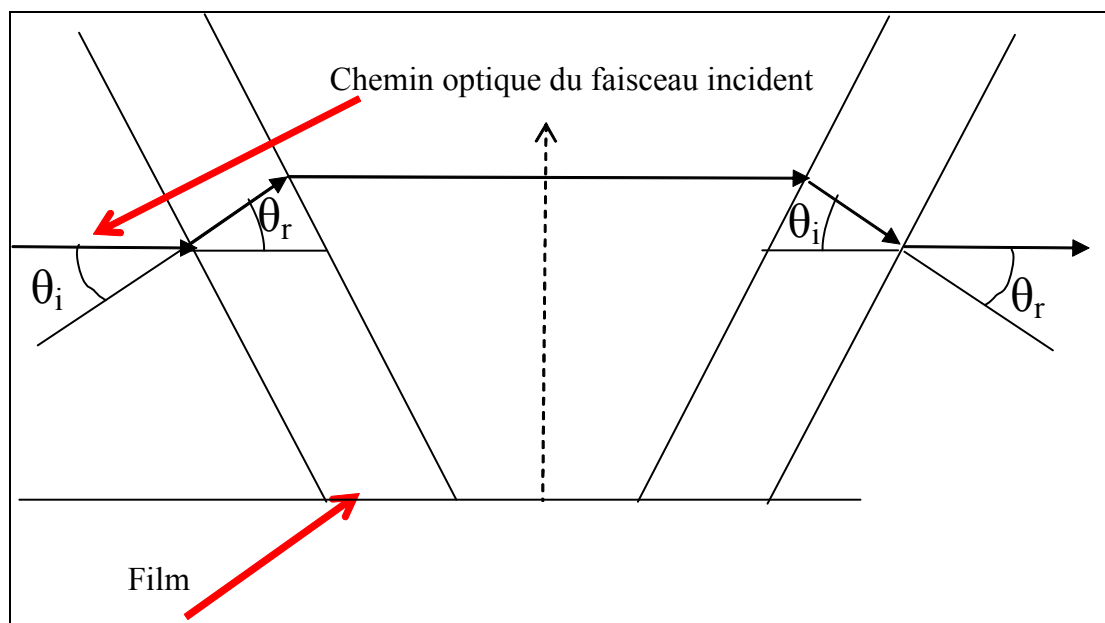
$$\Delta n(\theta_r, \phi_r)(z) = \frac{\delta(z)\lambda \cos(\theta_r(z)) \cos(\phi_r(z))}{2\pi h(z)} \quad 2.7$$

Où  $h$  est l'épaisseur du film,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $\Delta n(z)$  est la biréfringence,  $\phi_r$  est l'angle de décentrage par rapport au centre de la bulle et  $\theta_r$  est l'angle de réfraction.

En effet, notre faisceau lumineux incident n'est pas parfaitement perpendiculaire à la surface de la bulle car cette dernière n'est pas parfaitement tubulaire. À l'interface entre le film et l'air, le faisceau incident donne donc naissance à un faisceau réfléchi se propageant dans l'air et à un faisceau transmis (ou réfracté) se propageant dans le film. La figure 2.7 illustre le parcours que la lumière doit suivre dans un film monocouche. L'angle de réfraction  $\theta_r$  peut être évalué grâce à la loi de Snell qui est exprimée de la façon suivante :

$$\sin \theta_r = \frac{\sin \theta_i}{n} \quad 2.8$$

Où  $n$  est l'indice de réfraction du film et  $\theta_i$  correspond à l'angle de gonflement de la bulle.



**Figure 2.7 : Parcours de la lumière dans un film monocouche**

Dans le cas du soufflage de gaine, les composantes en cisaillement du tenseur de contraintes sont en général négligeables. En négligeant de même les composantes qui ne sont pas comprises sur la diagonale du tenseur des indices de réfraction, et en effectuant une rotation du système de coordonnées, nous obtenons alors la relation suivante :

$$\Delta n(\theta_r, \phi_r)(z) = (\cos^2 \theta_r \sin^2 \phi_r - \sin^2 \theta_r \sin^2 \phi_r) \Delta_1 + \sin^2 \theta_r \cos^2 \phi_r \Delta_2 + \cos^2 \theta_r \cos^2 \phi_r \Delta_3$$

Avec

$$\Delta_1 = n_{11} - n_{22}$$

$$\Delta_2 = n_{22} - n_{33}$$

$$\Delta_3 = \Delta_1 + \Delta_2 = n_{11} - n_{33}$$

**2.9**

Lorsque le faisceau incident est parfaitement aligné avec le centre de la bulle (in plane biréfringence), nous obtenons alors :

$$\Delta n(\theta_r, \phi_r)(z) = \sin^2 \theta_r \Delta_2 + \cos^2 \theta_r \Delta_3 \quad \mathbf{2.10}$$

Dans le cas des expérimentations que nous avons réalisées, l'angle de gonflage maximum de la bulle que nous avons mesuré était de  $14^0$  alors qu'il était en moyenne d'environ  $8^0$ . Pour ces valeurs, en utilisant un indice de réfraction de 1.49 pour le polyéthylène, on trouve des angles de réfraction de  $9.3^0$  et  $5.4^0$ . En appliquant ces valeurs on constate que le premier terme du membre de droite contribue pour moins de 3% à la biréfringence totale. L'utilisation d'un faisceau lumineux centré nous permet donc de considérer que la biréfringence mesurée est essentiellement composée du terme  $\Delta_3$ . La relation précédente sera alors égale à :

$$\Delta n(\theta_r)(z) \cong \cos^2 \theta_r(z) \Delta_3 \quad \mathbf{2.11}$$

Nous mesurons donc la biréfringence entre la direction axiale et la direction transverse

On obtient finalement :

$$\Delta_3(z) = n_{11}(z) - n_{33}(z) = \frac{\delta(z)\lambda}{2\pi h(z) \cos(\theta_r(z))} \quad \mathbf{2.12}$$

Il est alors possible grâce à la loi optique

$$n_{11}(z) - n_{33}(z) = C(\sigma_{11}(z) - \sigma_{33}(z)) \quad \mathbf{2.13}$$

De déterminer les contraintes axiales et transversales en utilisant les relations issues du modèle membrane de Pearson et Petrie (1970a, 1970b) que nous présenterons au début du chapitre 3 :

$$\frac{\Delta P}{h(z)} = \frac{\sigma_{11}(z)}{R_m(z)} + \frac{\sigma_{33}(z)}{R_p(z)} - \rho g \sin \theta \quad \mathbf{2.14}$$

$$R_p(z) = R(z) \sqrt{1 + (tg \theta)^2} \quad \mathbf{2.15}$$

$$R_m(z) = \frac{-(1 + (tg \theta)^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 r}{dz^2}(z)} \quad \mathbf{2.16}$$

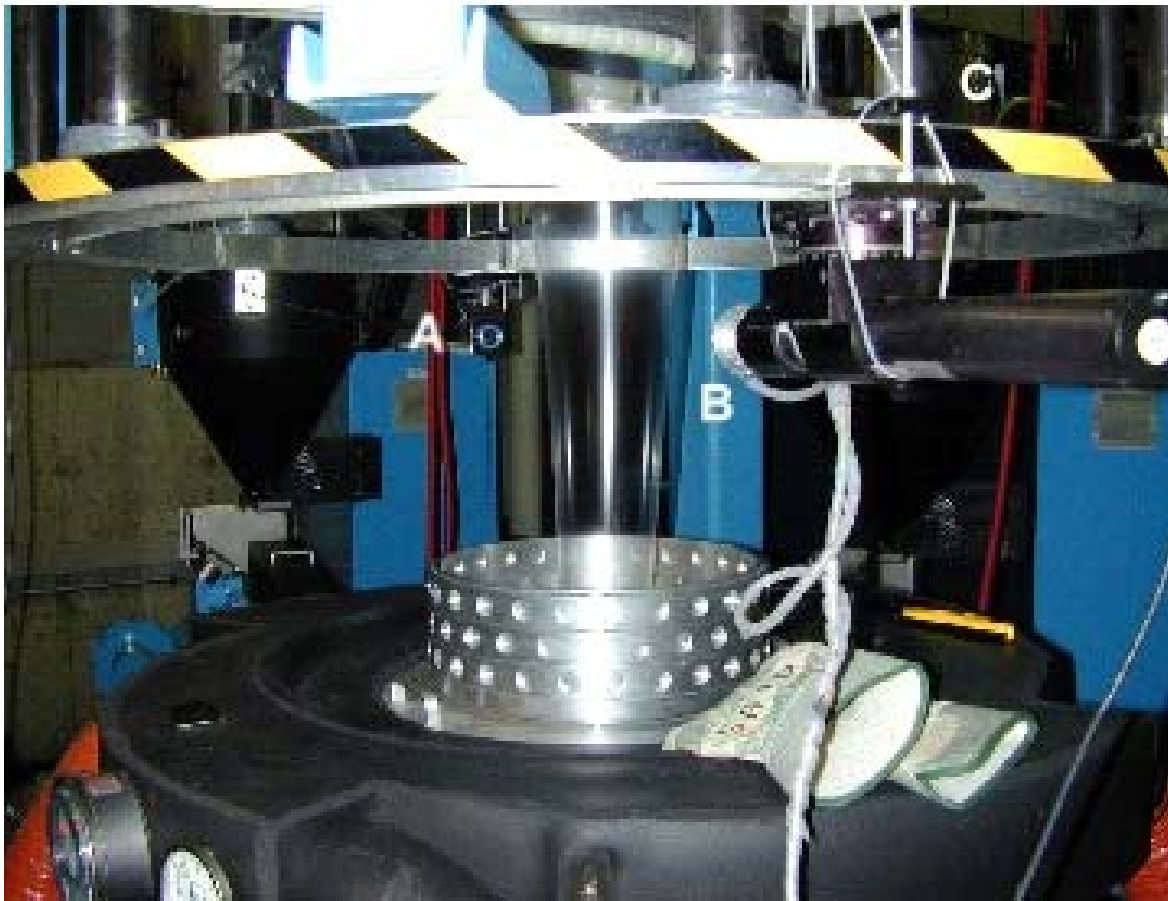
Afin de déduire la biréfringence, il est donc nécessaire de connaître le retard, l'évolution de l'épaisseur  $h(z)$  et du rayon en fonction de la position axiale, ainsi que la pression à l'intérieur de la bulle. Grâce au rayon, nous pouvons déduire l'angle de gonflement. L'angle de réfraction est obtenu avec la relation 2.8 alors que les paramètres géométriques  $R_m$  et  $R_p$  sont obtenus grâce aux relations 2.15 et 2.16. Il nous suffit alors de connaître la pression à l'intérieur de la bulle pour obtenir les contraintes axiale et transversale en combinant les relations 2.12 à 2.14. La principale difficulté réside dans la détermination de l'évolution de l'épaisseur du film en fonction de la position axiale. Il existe deux méthodes permettant de déterminer l'épaisseur de la bulle. La première méthode consiste à utiliser des marqueurs et un système de caméra vidéo afin de pouvoir déterminer le profil de vitesse du film. Il est alors possible d'effectuer un bilan de matière de façon à obtenir l'épaisseur. La seconde

technique consiste à arrêter simultanément l'extrudeuse et les rouleaux pinceurs tout en augmentant le débit d'air de refroidissement de façon à figer la bulle extrêmement rapidement. Il est alors possible de prélever la coquille rigide obtenue que nous pouvons utiliser afin de mesurer l'épaisseur. C'est cette dernière méthode que nous avons utilisée

Deux cas peuvent se présenter lors de l'analyse de la biréfringence de films multicouches. Le premier cas, qui est le plus simple à traiter, est un film produit à partir de deux résines possédant un motif structurel identique (par exemple, un film constitué d'une couche de HDPE et d'une couche de LDPE). Dans ce cas, l'analyse est identique à celle que nous venons de décrire pour le film monocouche, car les propriétés réfractives des deux matériaux sont essentiellement identiques. Il nous sera alors possible d'évaluer la différence des contraintes totales. Par contre, si nous sommes en présence de deux matériaux possédant des motifs structuraux différents, les indices de réfraction et le coefficient de Brewster seront différents. Il faudra alors décomposer le film en plusieurs éléments pour évaluer les matrices de Jones et de Mueller, afin de tenir compte des interfaces additionnelles.

Nous avons modifié la technique d'acquisition de données utilisée originellement par Ghaneh Fard et *al* (1996b) de façon à pouvoir obtenir des données en mode continu plutôt qu'en mode discret. Ceci est grandement utile puisque le temps d'acquisition pour effectuer un balayage complet de la bulle passe de 1 heure à 1 minute. Ceci est primordial, car les mesures de biréfringence doivent être effectuées sur des bulles stables. Il est donc important de pouvoir effectuer les mesures dans le plus court laps de temps possible. Un système de fixation a été conçu afin de pouvoir fixer de façon stable la source lumineuse (B) et le détecteur (A) à la cage (C) de la tour. Le montage expérimental utilisé à l'IMI est illustré à la figure 2.8. Le laser et le détecteur ont été positionnés de façon à ce que le faisceau lumineux soit aligné sur le centre de la filière. Comme la cage est mobile, il est possible d'effectuer un balayage axial. La position initiale et finale du faisceau lumineux, ainsi que le temps de balayage, sont mesurés. Il est donc possible de réaliser un balayage axial et de connaître la position du faisceau en tout temps. La zone accessible à la prise de donnée était comprise entre 17 et 100 cm compte tenu de la présence de l'anneau de refroidissement. Avant de débiter les mesures, une calibration du système d'acquisition est effectuée. Pour chacune des conditions opératoires, trois balayages en biréfringence sont réalisés selon la séquence suivante : montée, descente, montée. Ceci permet d'évaluer la répétitivité des résultats et la stabilité de la bulle. Pendant ces balayages, des échantillons de films sont prélevés. Immédiatement après le troisième balayage axial, les rouleaux pinceurs et les extrudeuses sont arrêtés et le débit d'air de refroidissement est augmenté. Ceci permet de prélever un échantillon permettant de déterminer l'évolution du rayon et de l'épaisseur en fonction de la position axiale. La pression à l'intérieur de la bulle est mesurée grâce à un capteur relié au système d'alimentation en air servant à gonfler la bulle.





**Figure 2.8 : Montage expérimental à l'IMI.**

Afin d'évaluer la stabilité de la bulle durant les mesures expérimentales, des photographies sont effectuées. Tout comme pour les bulles produites grâce à la petite filière, les photographies obtenues sont analysées grâce à un logiciel de traitement de l'image. La stabilité des bulles obtenues est évaluée en comparant les dimensions de la première et de la dernière photographie pour chacune des conditions expérimentales. Il s'avère que, dans la majorité des cas, les bulles produites étaient stables. Les rares instabilités observées étaient certainement liées au fait que le débit d'air de refroidissement utilisé était très faible. En effet, rappelons qu'afin de mesurer la biréfringence il est nécessaire que la bulle soit transparente. Le balayage doit donc être réalisé entre la sortie de l'anneau de refroidissement et la ligne de figeage. Afin de pouvoir réaliser les essais, il est donc nécessaire que la ligne de figeage des bulles produite soit relativement élevée et qu'elle soit située au dessus de 13 cm (fin de l'anneau de refroidissement) et en dessous de 100 cm (course maximale de la tour). Cet impératif nous a amené à utiliser un taux de refroidissement très faible.

### **2.3.2.2 Plan expérimental**

Afin de réaliser les essais de biréfringence, un plan expérimental partiel centré à deux paramètres et trois niveaux a été utilisé afin d'effectuer un balayage des conditions opératoires lors de la production de films de LDPE-B, ULDPE, LDPE-B/ULDPE et ULDPE/LDPE-B. Ceci nous permet d'étudier l'effet de l'énergie d'activation et de la viscosité. L'effet de l'agencement et de la répartition des matériaux sur les profils de contraintes et le profil géométrique est aussi étudié. Ceci nous permet de valider les essais réalisés sur la petite filière. Il nous est alors aussi possible d'utiliser ces résultats pour valider le modèle que nous développerons au chapitre suivant et que nous appliquerons aux deux types de filières. Les

températures, rayons et contraintes calculés seront comparés aux valeurs expérimentales correspondantes. Le plan expérimental utilisé est présenté au tableau 2.5. Une température de mise en forme de 230 °C a été choisie de façon à obtenir une position de ligne de figeage élevée.

**Tableau 2.5 : Plan expérimental. Filière semi industrielle.**

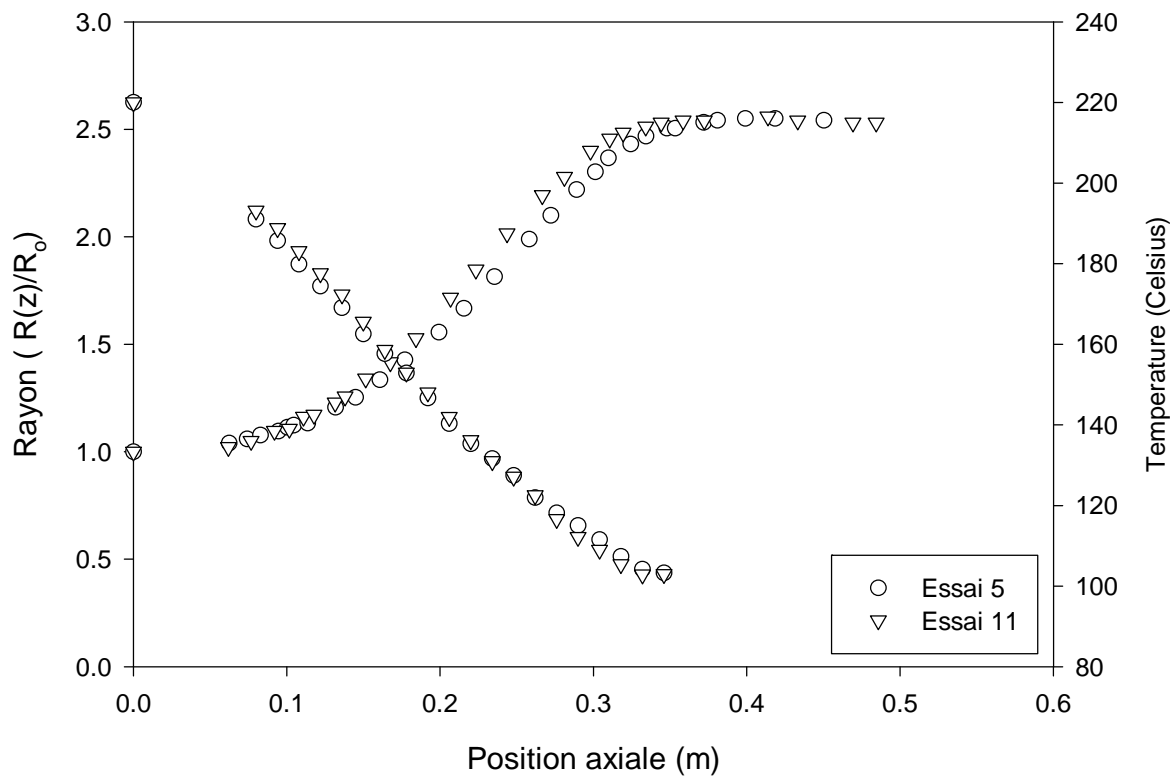
Matériaux	Essai	BUR Objectif	TUR Objectif	Débit	Température
				Kg/hr	Celsius
LDPE-B	1	1.67	10.6	7	230
	2	1.67	18.6	7	230
	3	2.02	14.6	7	230
	4	2.37	10.6	7	230
	5	2.37	18.6	7	230
	6	2.02	14.6	7	230
ULDPE	7	1.67	10.6	7	230
	8	1.67	18.6	7	230
	9	2.02	14.6	7	230
	10	2.37	10.6	7	230
	11	2.37	18.6	7	230
LDPE B / ULDPE Int/Ext	12	1.67	10.6	3.5/3.5	230
	13	1.67	18.6	3.5/3.5	230
	14	2.02	14.6	3.5/3.5	230
	15	2.37	10.6	3.5/3.5	230
	16	2.37	18.6	3.5/3.5	230
	17	2.02	14.6	2/5	230
	18	2.02	14.6	5/2	230
ULDPE / LDPE-B Int/Ext	19	1.67	10.6	3.5/3.5	230
	20	1.67	18.6	3.5/3.5	230
	21	2.02	14.6	3.5/3.5	230
	22	2.37	10.6	3.5/3.5	230
	23	2.37	18.6	3.5/3.5	230
	24	2.02	14.6	2/5	230
	25	2.02	14.6	5/2	230

## 2.4 Résultats

### 2.4.1 Films réalisés grâce à la petite filière

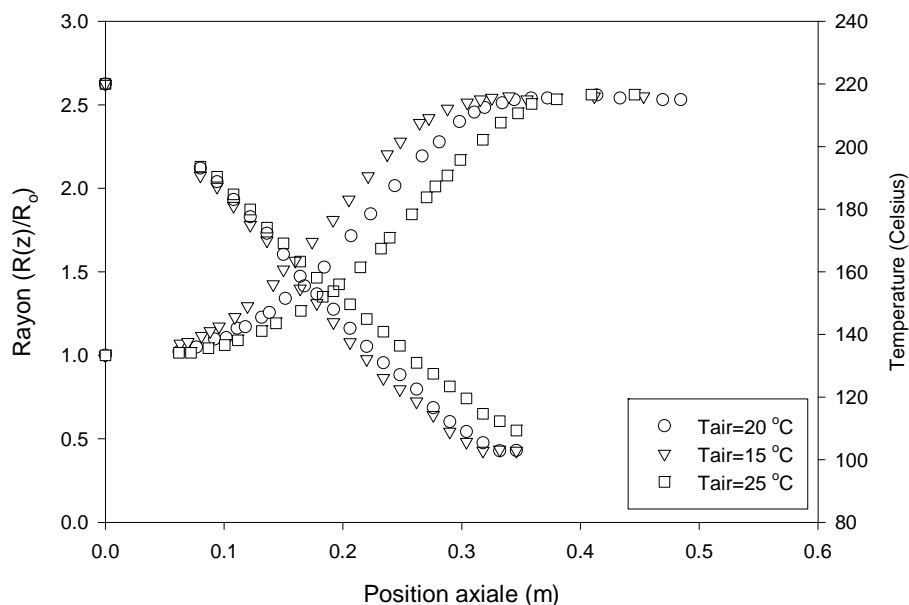
#### 2.4.1.1 Films monocouches

En tout premier lieu, il est essentiel de s'assurer de la reproductibilité des essais. La figure 2.9 illustre les résultats obtenus lors de l'exécution des essais 5 et 11. Nous constatons que les profils thermiques et géométriques sont presque parfaitement superposés.



**Figure 2.9 : Évaluation de la reproductibilité à un taux de gonflement de 2.59**

La figure 2.10 nous montre qu'une variation, positive ou négative, de 5 °Celsius de la température de l'air de refroidissement influence de façon significative la température et la cinématique de la bulle. En effet, une diminution de la température du fluide de refroidissement a pour effet d'augmenter l'échange thermique entre l'air et la surface de la bulle, ce qui entraîne une augmentation du taux de refroidissement du film. Comme le film se refroidit plus rapidement, sa viscosité augmente aussi plus rapidement, résultant en une force et une surpression plus importantes pour obtenir la déformation désirée. Cette augmentation engendre des contraintes plus importantes à l'intérieur du film, résultant en un gonflement initial plus rapide de la bulle (pour des conditions initiales de mise en forme identiques). Ceci illustre l'importance de prendre en compte les effets thermiques directs et indirects intervenant lors du soufflage de gaine.



**Figure 2.10 : Effet de la température de l'air de refroidissement. TUR=9.35 BUR=2.59.**

La figure 2.11 illustre l'effet du taux de gonflement sur la position de la ligne de figeage. En diminuant le taux de gonflement (figure 2.11b), la surface disponible pour l'échange thermique est plus faible. La longueur nécessaire pour atteindre la température de cristallisation est donc plus importante. Il est possible d'observer les résultats dépouillés issus de ces photographies à la figure 2.12a. Le profil de température permet de constater que la température de cristallisation du LDPE-A est d'environ 103 Celsius. La longueur du palier de cristallisation, pour un taux de gonflement de 3.11, est de 6 cm.

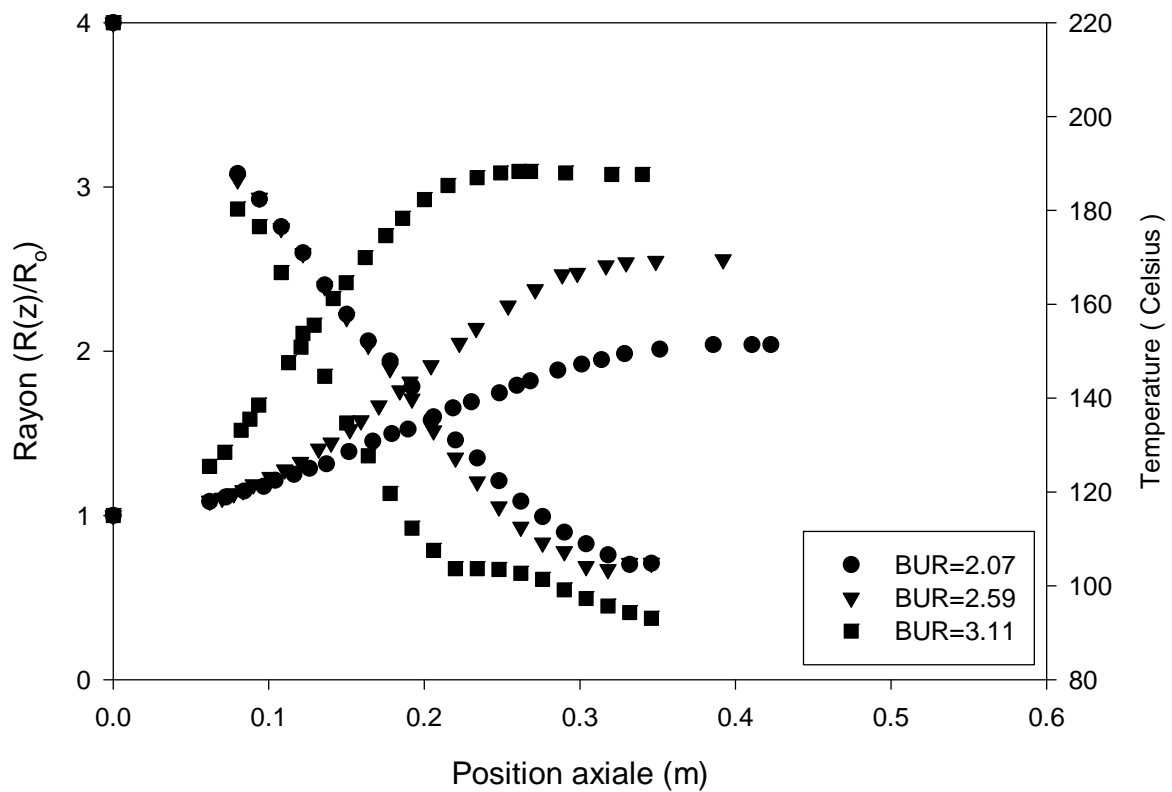


a) TUR = 6.55 et BUR=3.11

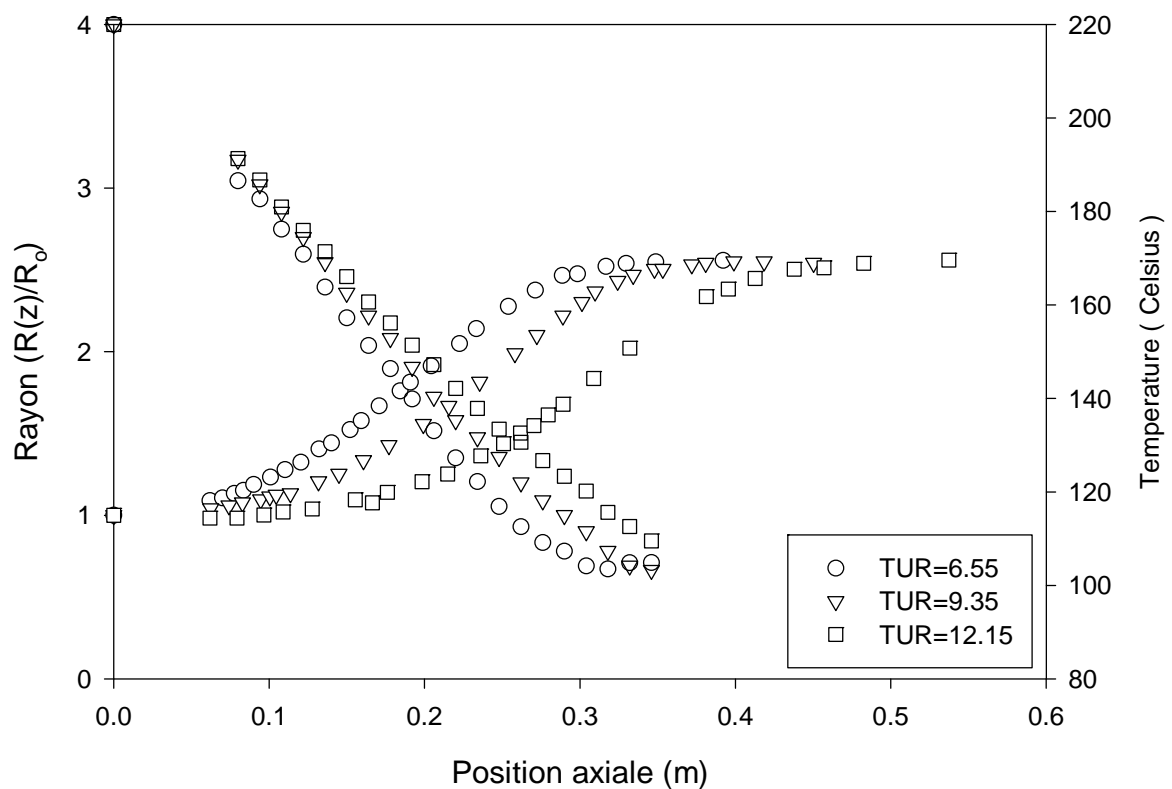


b) TUR=6.55 et BUR= 2.07

**Figure 2.11 : Effet du taux de gonflement sur la position de la ligne de figeage de films de LDPE-A**



a) Effet du taux de gonflement. TUR=6.55



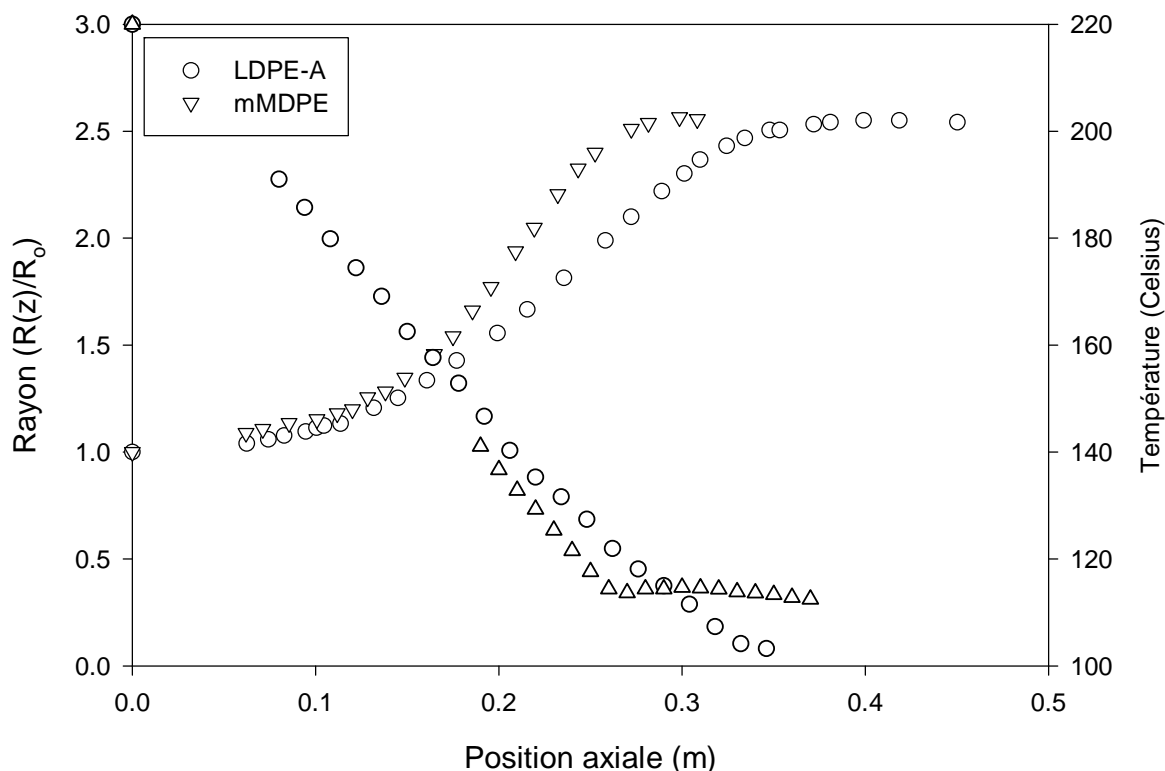
b) Effet du taux d'étirage. BUR=2.59

**Figure 2.12 : Évolution de la température et du rayon de films de LDPE-A en fonction de la position axiale.**

La figure 2.12b montre qu'une augmentation du taux d'étirage entraîne une augmentation de la position de la ligne figeage (à taux de gonflement constant). Dans ce cas, l'augmentation de la vitesse des rouleaux pinceurs a pour effet de favoriser la déformation élongationnelle par

rapport à la déformation radiale. Il en résulte une bulle gonflant moins rapidement, ce qui entraîne une augmentation de la longueur de figeage. De façon générale, la figure 2.12 est représentative de tous les essais expérimentaux réalisés sur le LDPE-A et le mMDPE. Les profils géométrique et thermique issus des essais réalisés avec un taux de gonflement de 2.59 sont situés entre ceux réalisés avec un taux de gonflement de 2.07 et 3.11 à un taux d'étirage constant. Il en est de même pour les essais réalisés à taux d'étirage variable pour un taux de gonflement constant.

La figure 2.13 illustre les profils thermiques et géométriques obtenus lors des essais 5 et 17. Ces deux essais ont été réalisés à des conditions opératoires identiques mais avec des matériaux différents. Si on s'attarde au profil géométrique des bulles, il est possible de constater que la bulle de mMDPE gonfle plus rapidement que celle de LDPE-A. Ceci peut paraître surprenant car les calculs réalisés par Kanai et White (1985) démontrent que, plus l'énergie d'activation d'un fluide est élevée, plus la bulle gonfle rapidement. Or, comme nous l'avons vu précédemment, l'énergie d'activation du mMDPE est inférieure à celle du LDPE-A. Nous observons donc le contraire des calculs de Kanai et White. Cette contradiction s'explique lorsque l'on observe les profils thermiques des deux bulles. En effet le plateau de cristallisation pour la bulle de mMDPE apparaît aux environs de 114 °Celsius et mesure environ 10 cm. Cela signifie donc que le mMDPE atteint sa température de cristallisation plus rapidement que le LDPE-A, qui lui semble cristalliser aux environs de 103 °Celsius. De plus, la chaleur spécifique des polyéthylènes basse densité est plus importante que celle des polyéthylènes de densité plus élevée. Ces deux différences signifient qu'il faut retirer beaucoup moins d'énergie de la bulle de mMDPE que de la bulle de LDPE-A pour atteindre leur température de cristallisation respective. Ceci se traduit, malgré la différence d'énergie d'activation, par une bulle de mMDPE se formant plus rapidement. Pour tous les cas étudiés, à condition opératoire équivalente, les films de mMDPE gonflent plus rapidement que ceux de LDPE-A. L'écart entre la position de la ligne figeage des deux bulles dépend des conditions opératoires. De manière générale, plus le taux d'étirage est élevé, plus cet écart augmente. L'effet du taux de gonflement est en revanche moins clair.

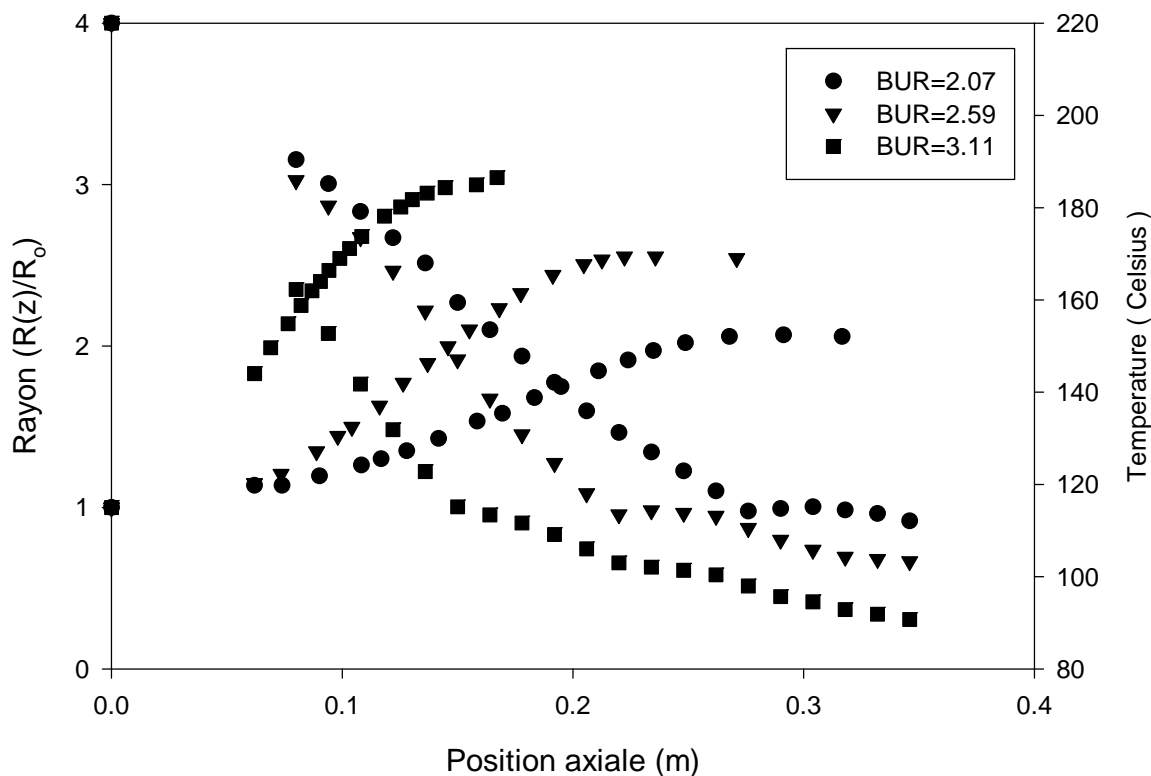


**Figure 2.13 : Comparaison entre les bulles de LDPE-A et de mMDPE. TUR=9.35**

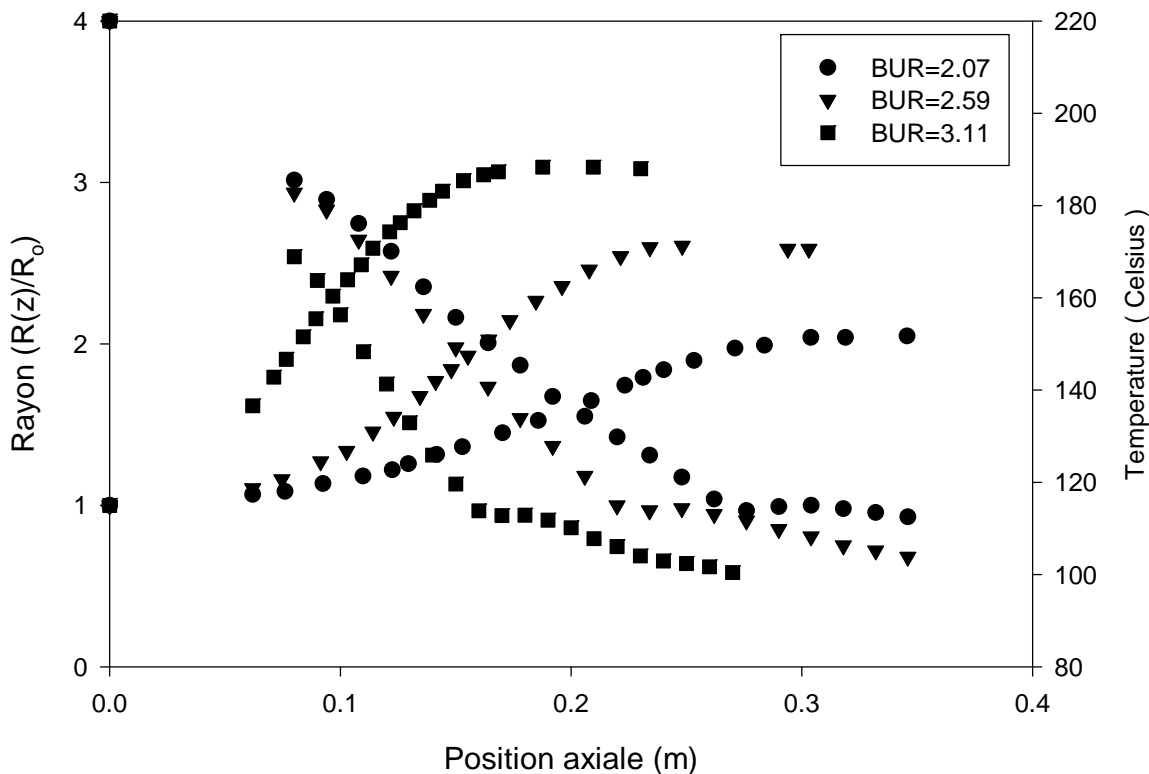
L'observation de la longueur des plateaux de cristallisation obtenus grâce au profil de température nous révèle, qu'à condition opératoire identique, la longueur de cristallisation des films de mMDPE est en général 20 à 30 % supérieure à celle des films de LDPE-A. Le taux de cristallinité des films de mMDPE est donc plus élevé que celui des films de LDPE-A.

#### **2.4.1.2 Films multicouches**

Les résultats présentés dans cette section sont exclusivement issus des essais 22 à 43 présentés dans le plan expérimental. La figure 2.14 permet d'observer l'effet du taux de gonflement, du taux d'étirage et de l'agencement sur les profils thermiques et géométriques des films multicouches possédant une composition de 50% de chaque matériau. Les films multicouches, quel qu'en soit l'agencement, suivent le même comportement que les films monocouches. Il peut être intéressant de noter à la figure 2.14a la présence de deux plateaux de cristallisation. Ce phénomène est plus facilement observable pour un taux de gonflement de 3.11. Ces plateaux correspondent à la cristallisation successive du mMDPE et du LDPE-A. La longueur des plateaux est approximativement deux fois plus faible que celle obtenue lors de la production des films monomatériaux. Ceci s'explique aisément par le fait que le débit de chaque couche est deux fois moins important que lors de la production de films monomatériaux, il est donc logique que la quantité d'énergie nécessaire pour cristalliser chaque matériau soit deux fois moins importante. Les figures 2.14a et b permettent aussi de constater que le rayon de la bulle ne varie plus, une fois la température de cristallisation du mMDPE atteinte. Ceci semble donc nous indiquer que lorsque l'un des deux matériaux atteint sa température de cristallisation, la forme de la bulle est figée. Il est aussi possible de constater aux figures 2.14a à d que, lorsque le mMDPE est positionné sur la paroi extérieure de la bulle, le rayon final est toujours atteint plus rapidement que dans les cas où le LDPE-A est situé sur la couche externe. Cette différence est attribuable à une différence de température d'extrusion de 10°C. Nous verrons lors des essais réalisés sur la filière de grande dimension que l'agencement des couches n'affecte pas la forme des bulles multicouches produites.

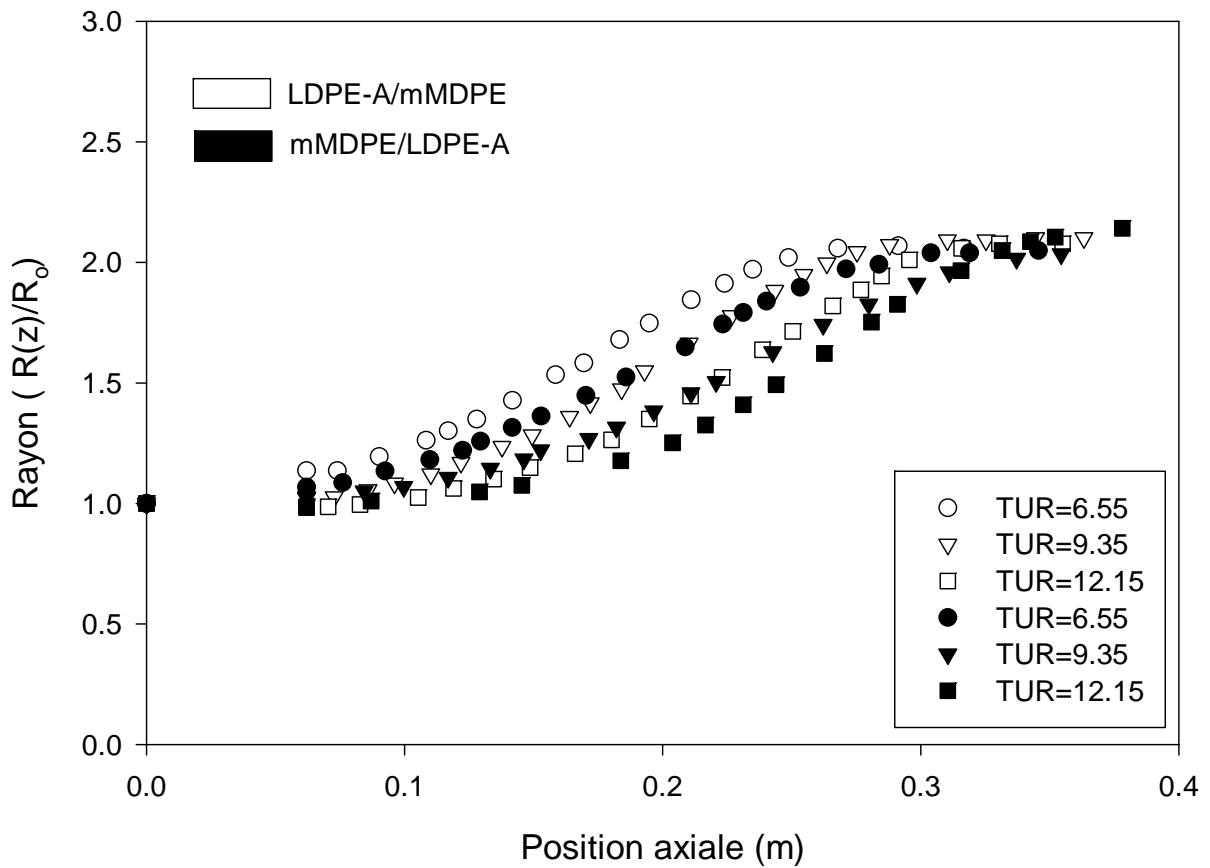
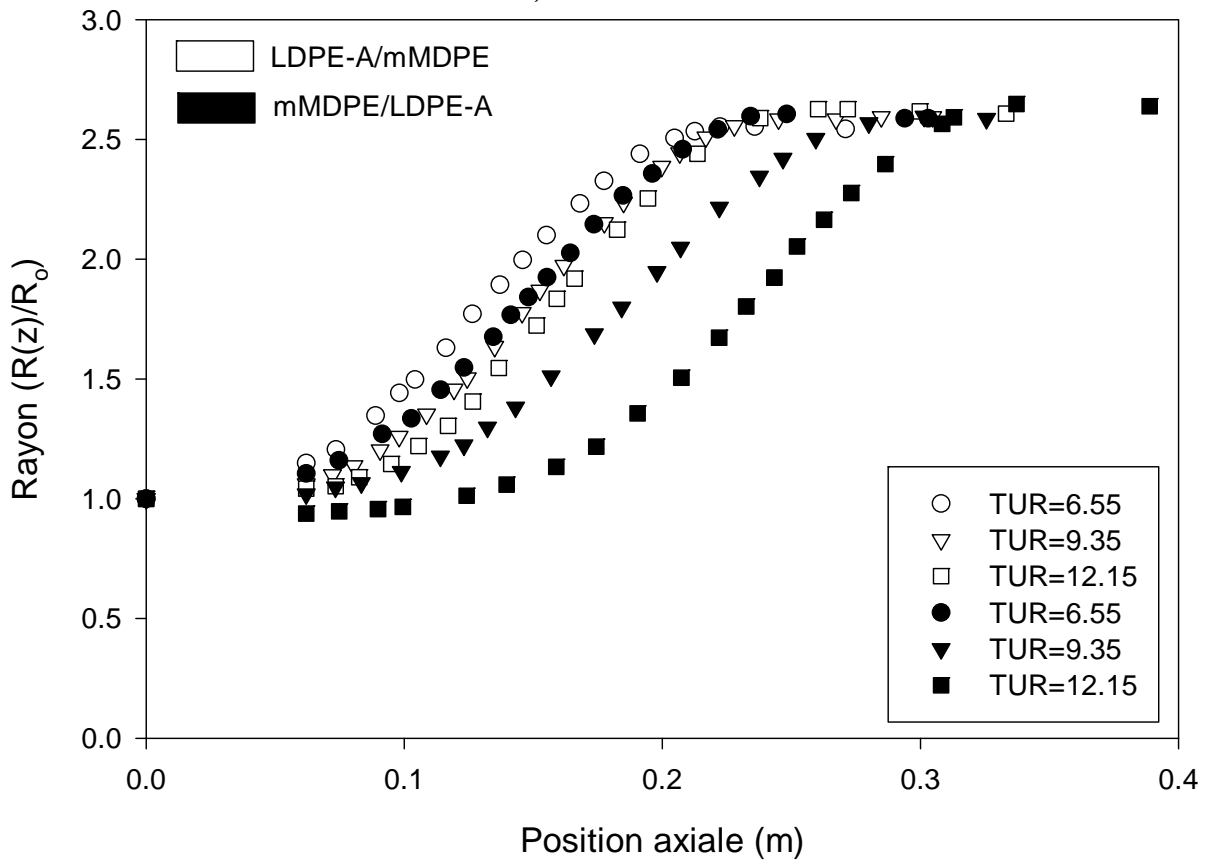


a) LDPE-A (intérieur)/mMDPE (extérieur) TUR=6.55



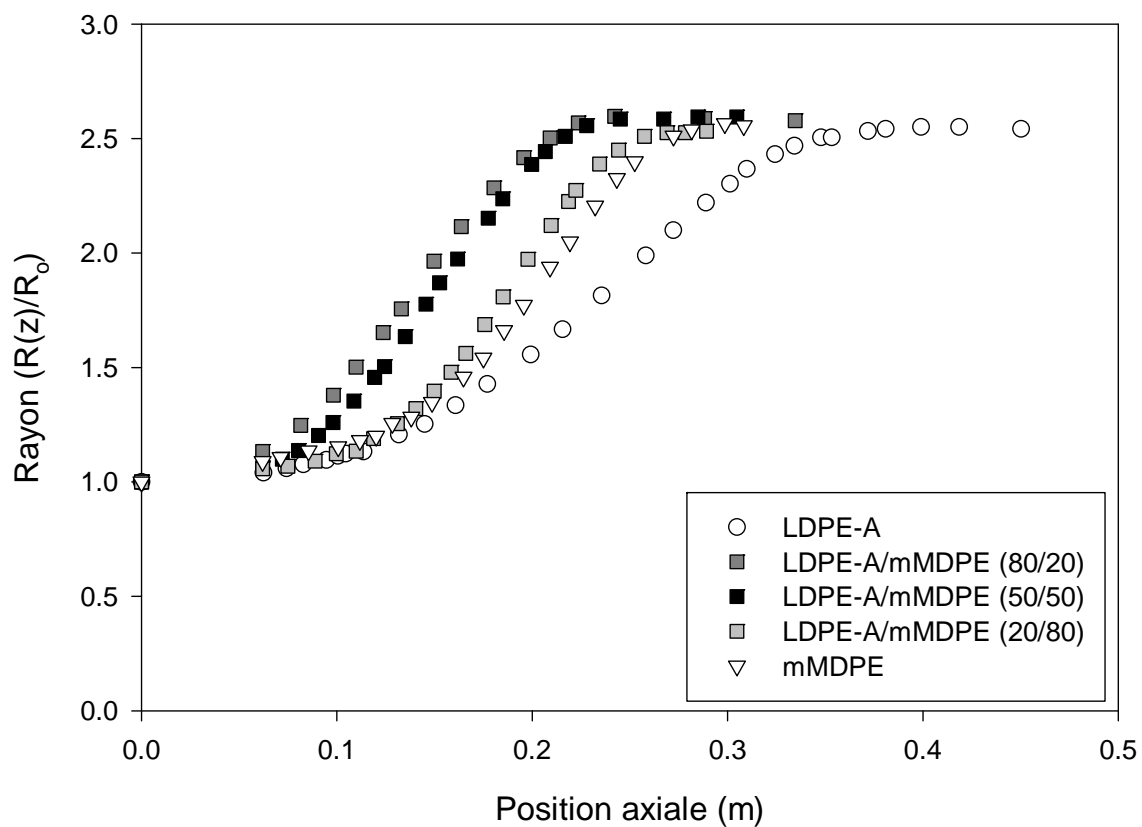
b) mMDPE (intérieur)/LDPE-A (extérieur) TUR=6.55



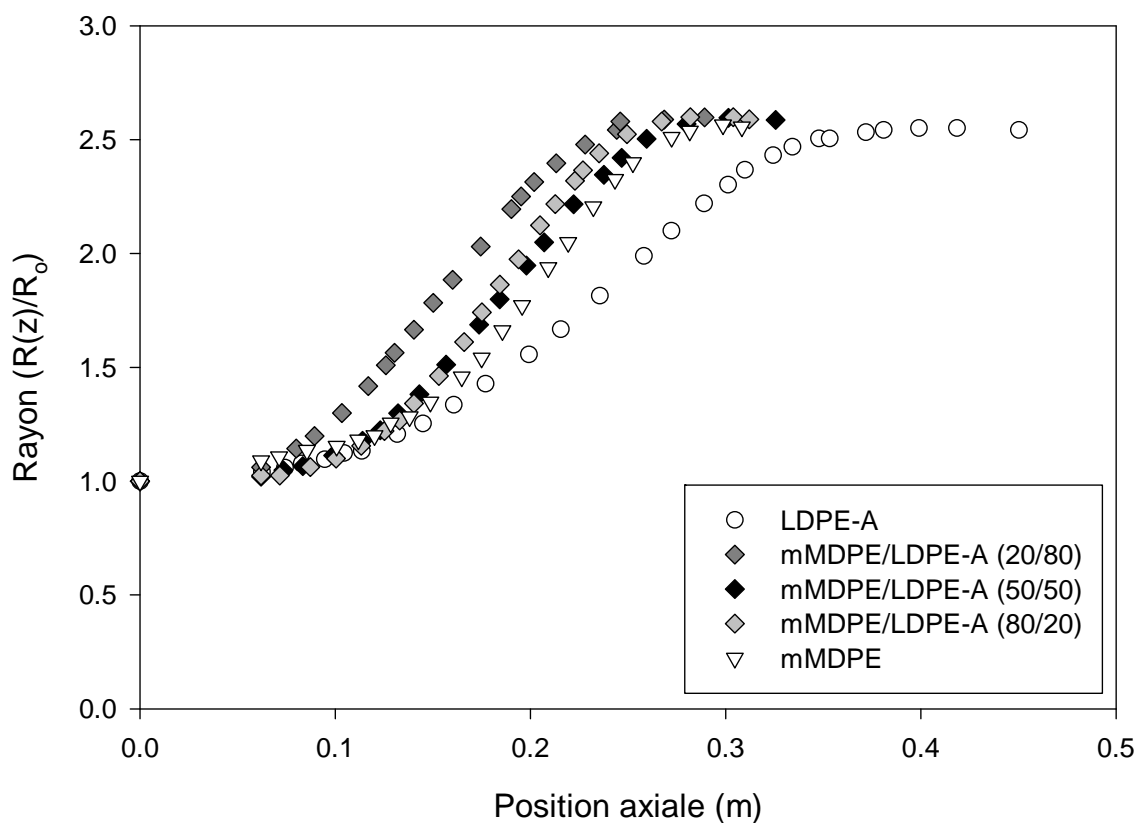
c)  $BUR=2.07$ d)  $BUR=2.59$ 

**Figure 2.14 : Effet des conditions opératoires sur les profils géométriques et thermique. Films multicouches**

La figure 2.15 illustre la différence entre les films monocouches et les films multicouches à des compositions massiques de 20/80, 50/50 et 80/20. Il nous est possible d'observer, à notre grande surprise, que les films multicouches gonflent dans tous les cas plus rapidement que les films monocouches de mMDPE. Ceci semble indiquer la présence d'un effet synergique survenant lors de la production de films multicouches. En observant attentivement la figure 2.15, on constate que plus la quantité de mMDPE présente dans le film multicouche est importante, plus le profil géométrique se rapproche de celui du film monocouche. Il est possible d'observer le même phénomène à la figure 2.15b, si on fait abstraction de la bulle produite avec un ratio de 50/50. Les raisons pouvant expliquer un gonflement plus rapide des films multicouches semblent être liées à la quantité des différents matériaux présents dans le film. Nous avons établi que la matière atteignant sa température de cristallisation le plus rapidement est le mMDPE. C'est donc ce polymère qui régit l'évolution de la forme de la bulle. En effet à partir du moment où le mMDPE cristallise la bulle est un tube. Si on prend en compte le fait que la chaleur spécifique moyenne d'un film multicouche est plus faible que celle d'un film monocouche de LDPE-A, il est possible de supposer que le taux de refroidissement obtenu sera alors plus important. Ce taux de refroidissement plus important, joint à une énergie d'activation plus élevée que celle du mMDPE, va avoir pour conséquence de créer des bulles qui gonflent plus rapidement que les bulles de LDPE-A, et peut être même que les bulles de mMDPE. Par contre, cette explication n'est pas suffisante. En effet, elle devrait nous amener à obtenir des films multicouches à haute teneur en mMDPE gonflant plus rapidement que ceux à faible teneur. Or, nous observons le phénomène inverse. De plus il faut aussi considérer que le gonflement plus rapide des bulles multicouches face aux bulles monocouches engendrera un champ de contraintes plus important. Les propriétés mécaniques des films produits ne sont donc pas nécessairement la moyenne des propriétés des constituants. Ceci démontre l'importance du calcul qui devrait nous permettre d'identifier rapidement l'effet des différents paramètres opératoires et des propriétés des matériaux sur la forme des bulles produites et sur les profils de contraintes.



a) LDPE-A (intérieur)/ mMDPE (extérieur) TUR=9.35



b) mMDPE (intérieur)/LDPE-A (extérieur) TUR=9.35

Figure 2.15 : Effet du rapport des débits sur les profils géométriques de films multicouches

## 2.4.2 Films réalisés grâce à la filière semi industrielle

L'utilisation de la filière de grande taille pour réaliser des essais de biréfringence présente certaines difficultés. Premièrement, le taux de refroidissement utilisé était très faible car il était nécessaire de maintenir la position de figeage à une valeur élevée. La ligne de figeage était située entre 40 et 100 cm. Dans quelques rares cas, nous avons été dans l'obligation d'augmenter très légèrement le taux de refroidissement (le débitmètre passant de 8.8 à 9.2 sur une échelle de 100) de façon à obtenir des bulles stables. En second lieu, le débit utilisé était relativement faible (7 kg/hr) en comparaison de la capacité de production optimale (40-50 kg/hr) du système extrudeuse filière. Afin d'obtenir le taux d'étirage désiré, il fallait donc utiliser une vitesse d'étirage relativement faible (située entre 4 et 7 m/min). Ces conditions ne sont pas des conditions typiquement rencontrées lors de la production industrielle de gaines, mais elles s'avéraient nécessaires afin de pouvoir mesurer la biréfringence sur l'ensemble des conditions opératoires étudiées.

### 2.4.2.1 Films monocouches

Les films monocouches ont été produits avec les résines ULDPE et LDPE-B. La figure 2.16 illustre l'effet du taux d'étirage sur l'évolution du rayon et des contraintes lors de la production de films de ULDPE. La première de ces figures (2.16a) permet de constater qu'une augmentation du taux d'étirage a pour effet d'augmenter légèrement la distance nécessaire pour atteindre la température de cristallisation. Ceci est cohérent avec les résultats que nous avons observés précédemment pour la petite filière.

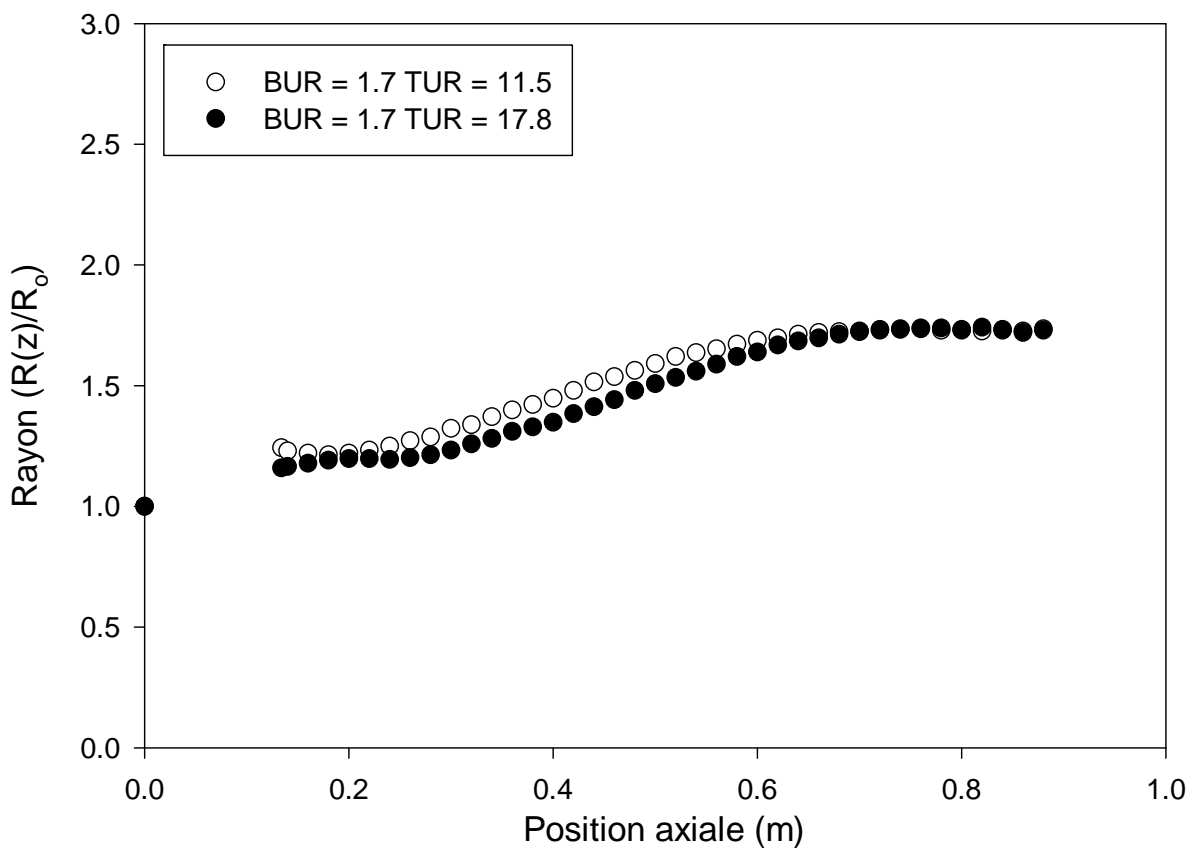
Les figures 2.16b et 2.16c illustrent respectivement l'évolution de la contrainte axiale et de la contrainte transversale en fonction de la position axiale. Les résultats ont été obtenus par analyse des données de biréfringence. Il convient de mentionner, qu'étant donné la très forte répétitivité des résultats de biréfringence, un seul des trois balayages en biréfringence effectués pour une condition opératoire donnée est présenté. Il faut aussi souligner que la relation 2.14 peut être utilisée pour évaluer la contrainte transversale en fin d'étirage. En effet, à ce moment, le rayon  $R_m$  est infini, l'angle de gonflement de la bulle est nul et le rayon  $R_p$  est égal au rayon final. La relation 2.14 est alors égale à :

$$\sigma_{33}(z) = \frac{R(z)\Delta P}{h(z)} \quad 2.17$$

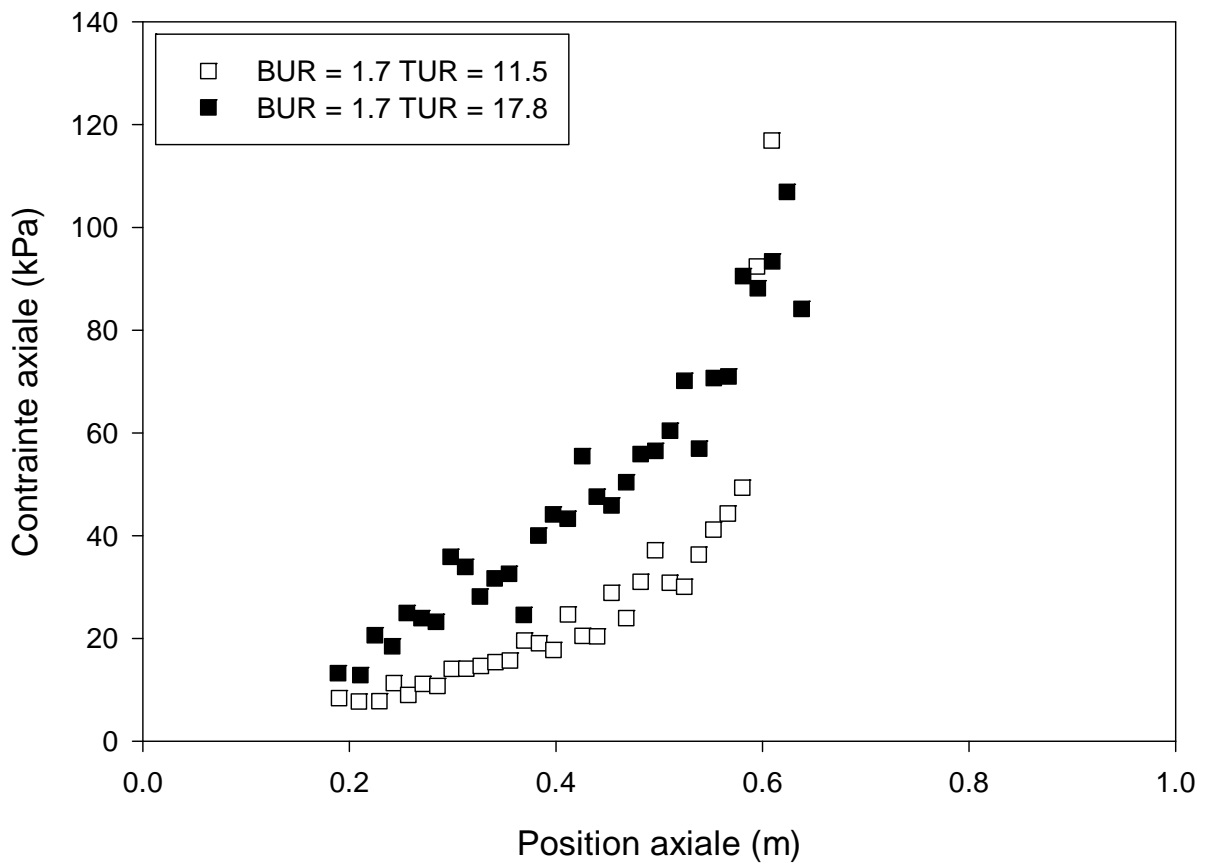
Grâce à cette relation il nous est possible de comparer nos contraintes transversales expérimentales aux contraintes calculées grâce aux relations de Pearson et Petrie en fin d'étirage.

Il est possible de constater à la figure 2.16b que les contraintes axiales mesurées lorsque le TUR est égal à 17.8 sont approximativement deux fois plus élevées que lorsque le TUR est égal à 11.5. En effet, en augmentant le taux d'étirage, on augmente la force au niveau des rouleaux pinceurs, ce qui entraîne une augmentation des contraintes internes. Cette figure est représentative des résultats obtenus pour les deux matériaux sujets à une variation du taux d'étirage. Une augmentation du taux d'étirage entraîne donc une augmentation de la contrainte axiale dans le polymère fondu. Ceci est valable pour une position axiale inférieure à 60 cm. Au dessus de cette valeur, il est possible de constater que la contrainte du film possédant un TUR de 11.5 augmente très rapidement jusqu'à être équivalente à celle du film fortement étiré. Ceci est attribuable au fait qu'au dessous de cette position, le film est encore

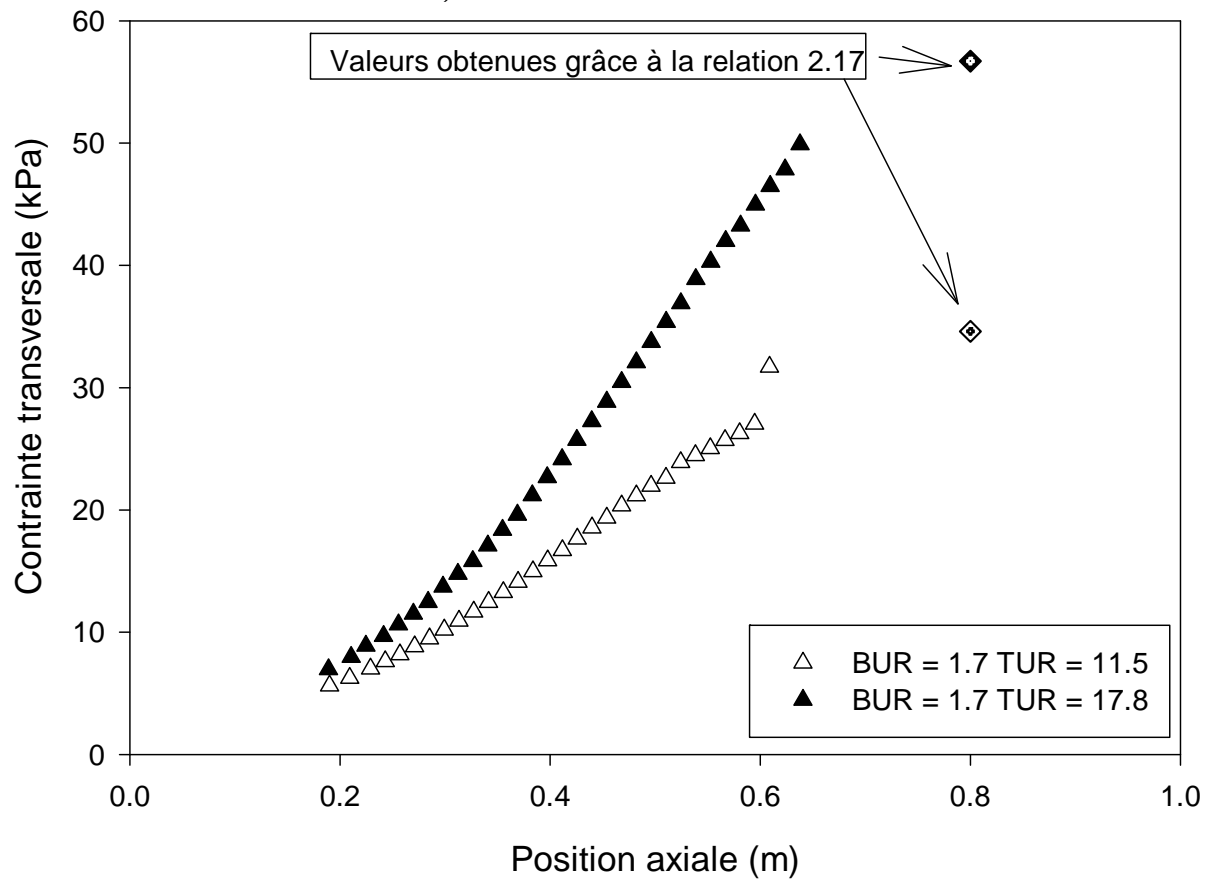
à l'état fondu. Il est donc possible de mesurer la biréfringence sans le moindre problème. Par contre, on constate à la figure 2.16a qu'au dessus de cette position (60 cm), une des bulles (TUR=11.5) a presque atteint sa température de cristallisation. Il est donc possible que le faisceau lumineux traverse localement des cristaux. Le film n'est donc plus complètement transparent. Ceci entraîne une forte diminution de l'intensité lumineuse au détecteur, ce qui affecte directement le retard mesuré et donc la biréfringence. Dans ce cas, l'augmentation est peut être liée à l'apparition de la phase cristalline et la biréfringence nous donne donc accès en quelque sorte à la cristallisation. Les données de biréfringence obtenues pendant la cristallisation doivent donc être analysées avec beaucoup de prudence et de circonspection. La figure 2.16c montre que le taux d'étirage a aussi un effet sur la contrainte transversale. Ici aussi, une augmentation du TUR se traduit par une augmentation de la contrainte. Il est intéressant de noter que les contraintes transversales sont inférieures aux contraintes axiales. Ceci est cohérent avec le fait que le bi étirage du film est majoritairement accompli dans la direction axiale. Les essais de biréfringence sur les films de LDPE-B réalisés afin de déterminer l'effet du taux d'étirage ont conduit à des résultats similaires. De plus il est possible de constater que nos valeurs expérimentales de contraintes transversales sont cohérentes avec les résultats issus de la relation 2.17.



a) Profil géométrique



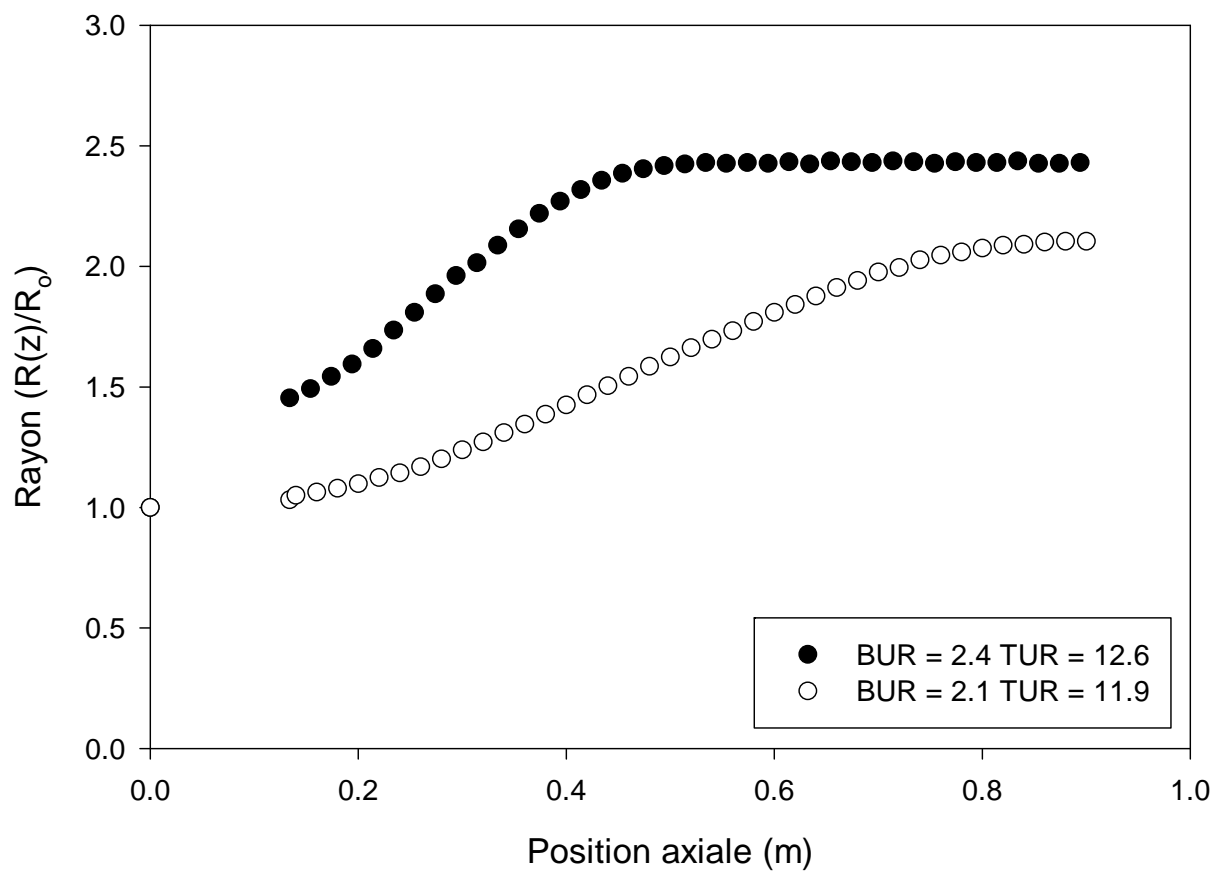
b) Profil de contrainte axiale



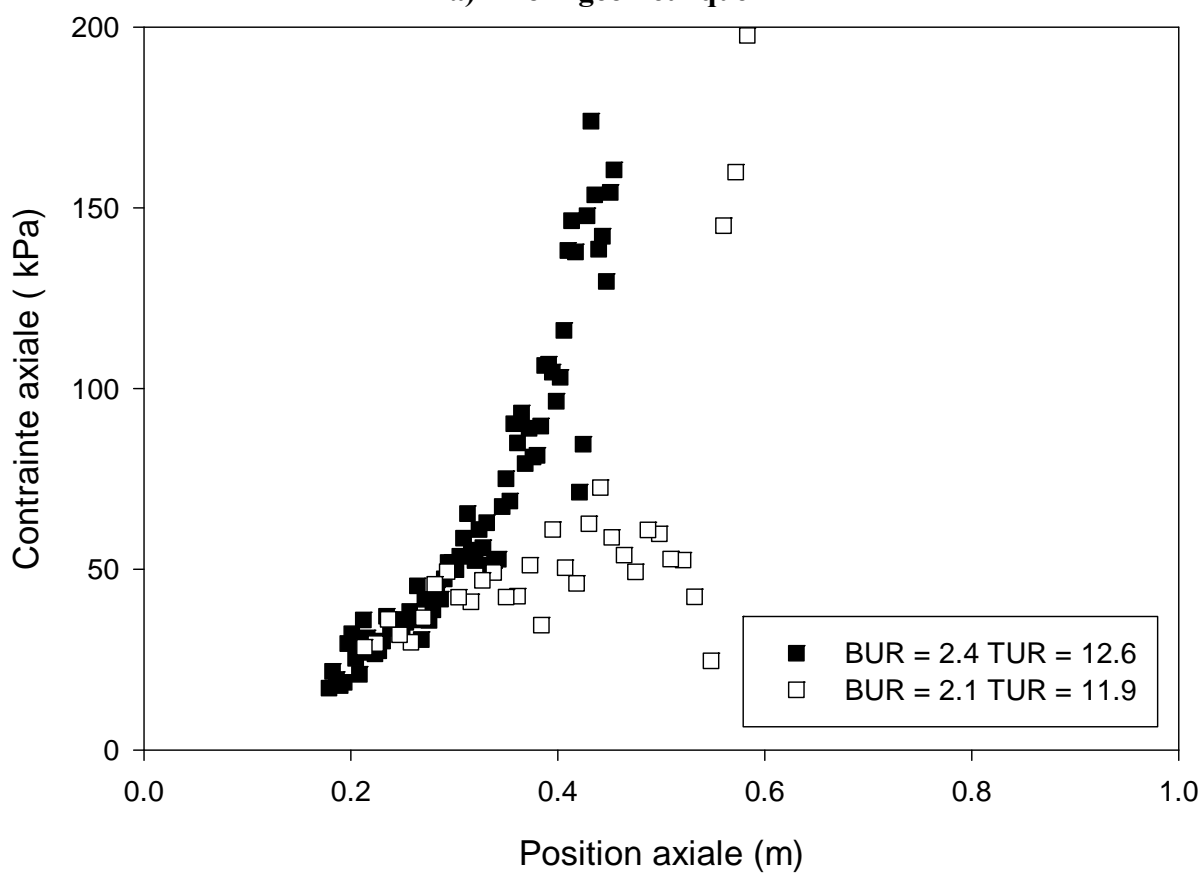
c) Profil de contrainte transversale

Figure 2.16 : Évolution du rayon et des contraintes dans la bulle de ULDPE. Effet du taux d'étirage.

La figure 2.17 illustre l'effet du taux de gonflement sur l'évolution du rayon et des contraintes lors de la production de films de LDPE-B. La figure 2.17a permet de constater qu'une augmentation du taux de gonflement a pour effet de diminuer la distance nécessaire pour atteindre la température de cristallisation. Ceci est cohérent avec les résultats observés précédemment pour la petite filière. L'évolution de la contrainte axiale correspondant à ces bulles est illustrée à la figure 2.17b. Même si les bulles produites sont drastiquement différentes, la contrainte axiale développée dans le film est approximativement égale jusqu'à une position de 0.3. Ceci n'est pas typique des résultats obtenus. Au dessus de cette position, la contrainte axiale augmente très rapidement pour le film possédant un taux de gonflement élevé. Malheureusement cette figure ne permet pas d'observer l'évolution de la contrainte lorsque le taux de gonflement est faible car le balayage axial réalisé était trop court. La figure 2.17c, qui a été obtenue à des conditions opératoires différentes, est plus représentative de l'effet du taux de gonflement sur la contrainte axiale que la précédente. Dans ce cas la contrainte est clairement plus élevée (environ deux fois plus importante) lorsque le taux de gonflement est élevé. Ceci correspond au résultat que nous attendions intuitivement. En effet, une bulle plus grosse fige plus rapidement, la viscosité du polymère augmente donc plus rapidement. Il est donc nécessaire d'imposer une force plus élevée aux rouleaux pinceurs afin d'étirer le film. De manière générale, une augmentation du taux de gonflement a pour effet de générer des contraintes axiales plus élevées. Ceci illustre l'importance de la modélisation. En effet, le calcul pourra permettre d'identifier si la différence entre la figure 2.17b et 2.17c est due à une erreur expérimentale ou bien à un comportement particulier survenant dans certaines conditions opératoires. Une augmentation du taux de gonflement de 2.4 à 2.1 a pour effet de créer une augmentation très importante de la contrainte transversale (figure 2.17d). Cette augmentation peut être attribuée à l'augmentation de la force que nous venons de mentionner, mais aussi au fait que la surpression à l'intérieur de la bulle augmente. En effet, la surpression à l'intérieur de la bulle passe de 18 Pa à 22 Pa lorsque le taux de gonflement passe de 2.1 à 2.4. L'effet combiné de la force et de la surpression a donc pour conséquence de générer un profil de contrainte transversale trois fois plus important lorsque le BUR est élevé que lorsqu'il est faible. Ici encore il faut noter que les contraintes transversales calculées grâce à la relation 2.17 sont du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales.

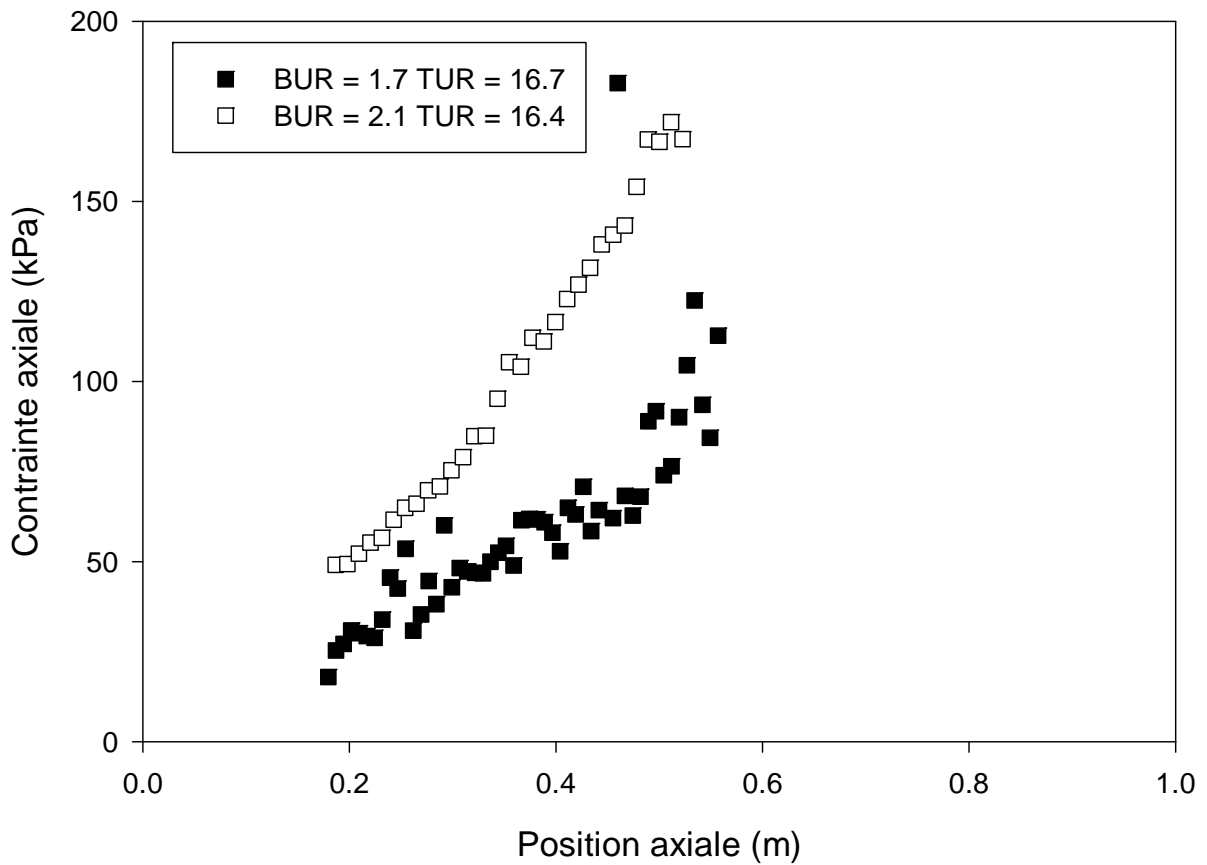


a) Profil géométrique

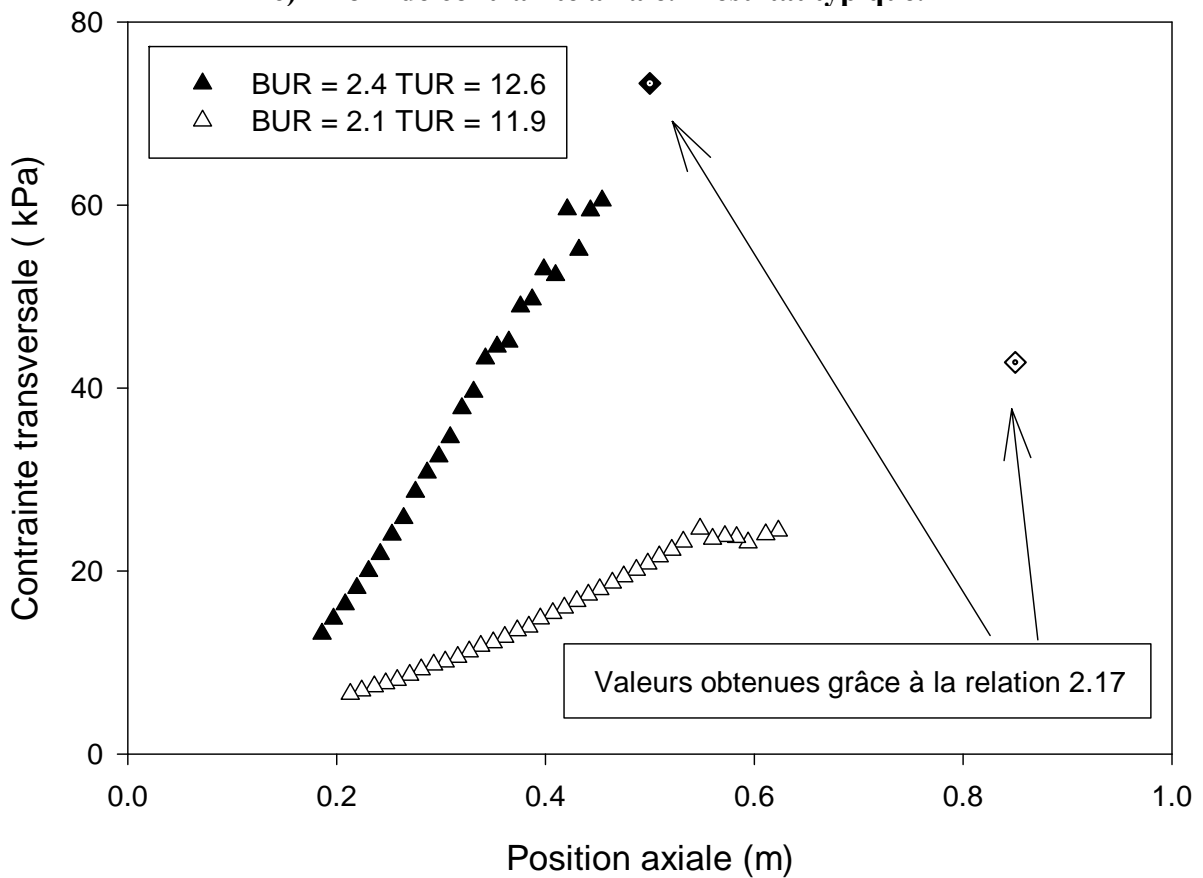


b) Profil de contrainte axiale. Résultat atypique.





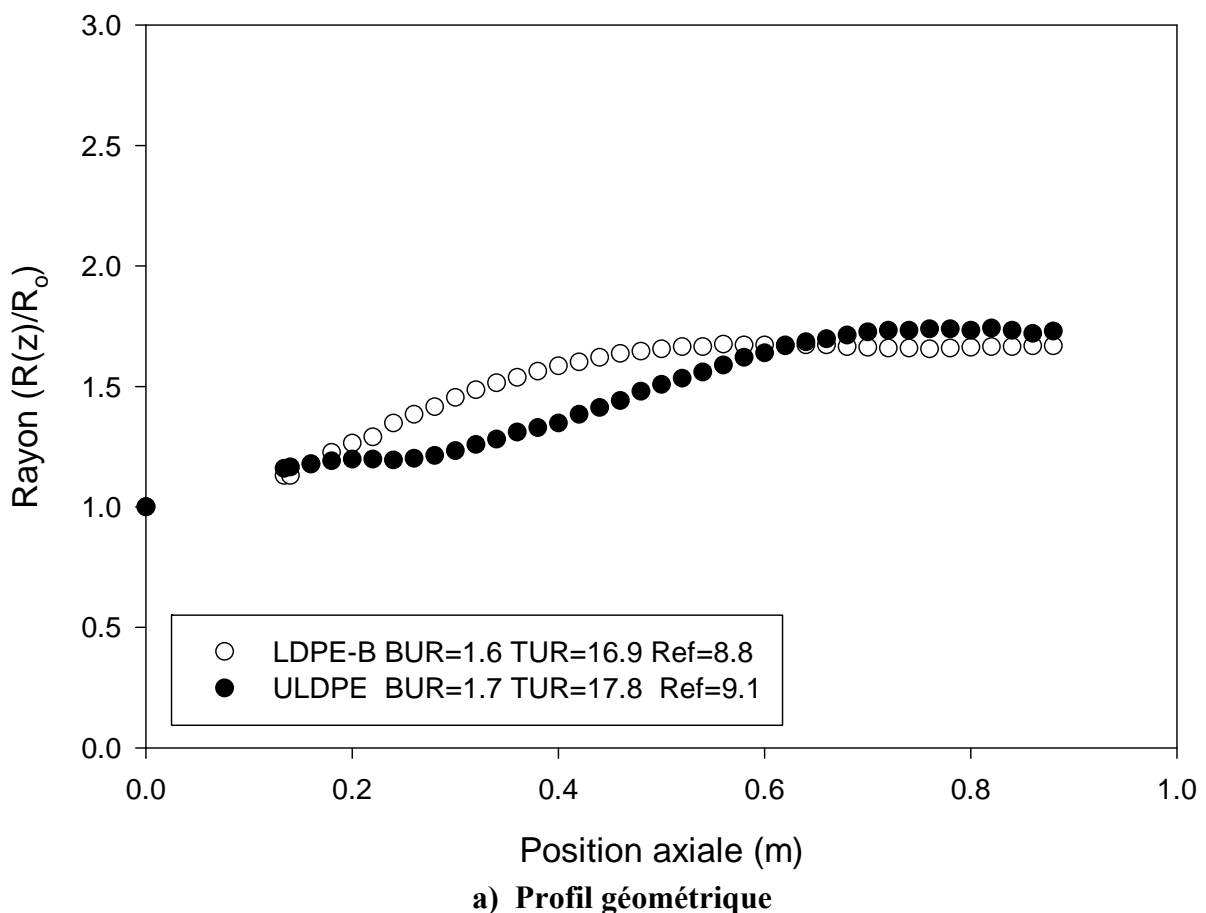
c) Profil de contrainte axiale. Résultat typique.

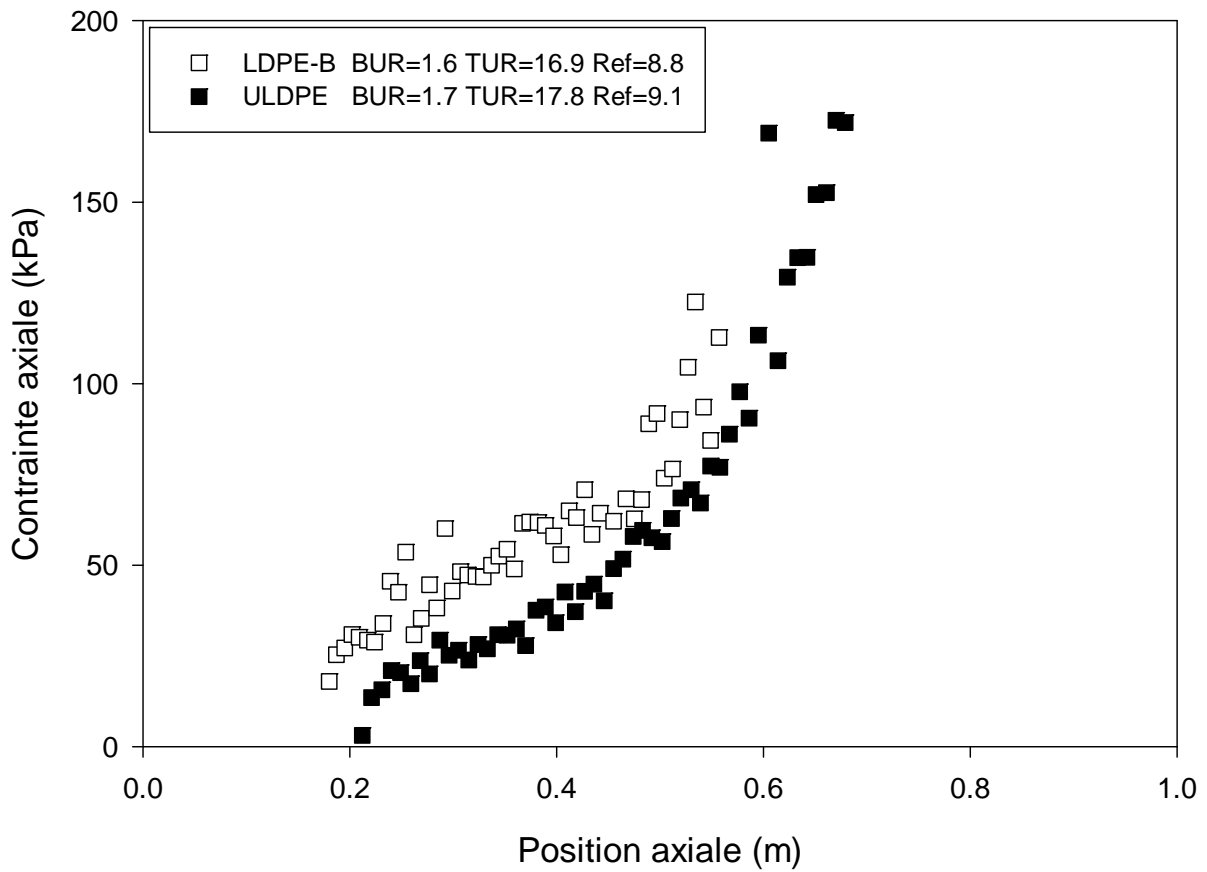


d) Profil de contrainte transversale

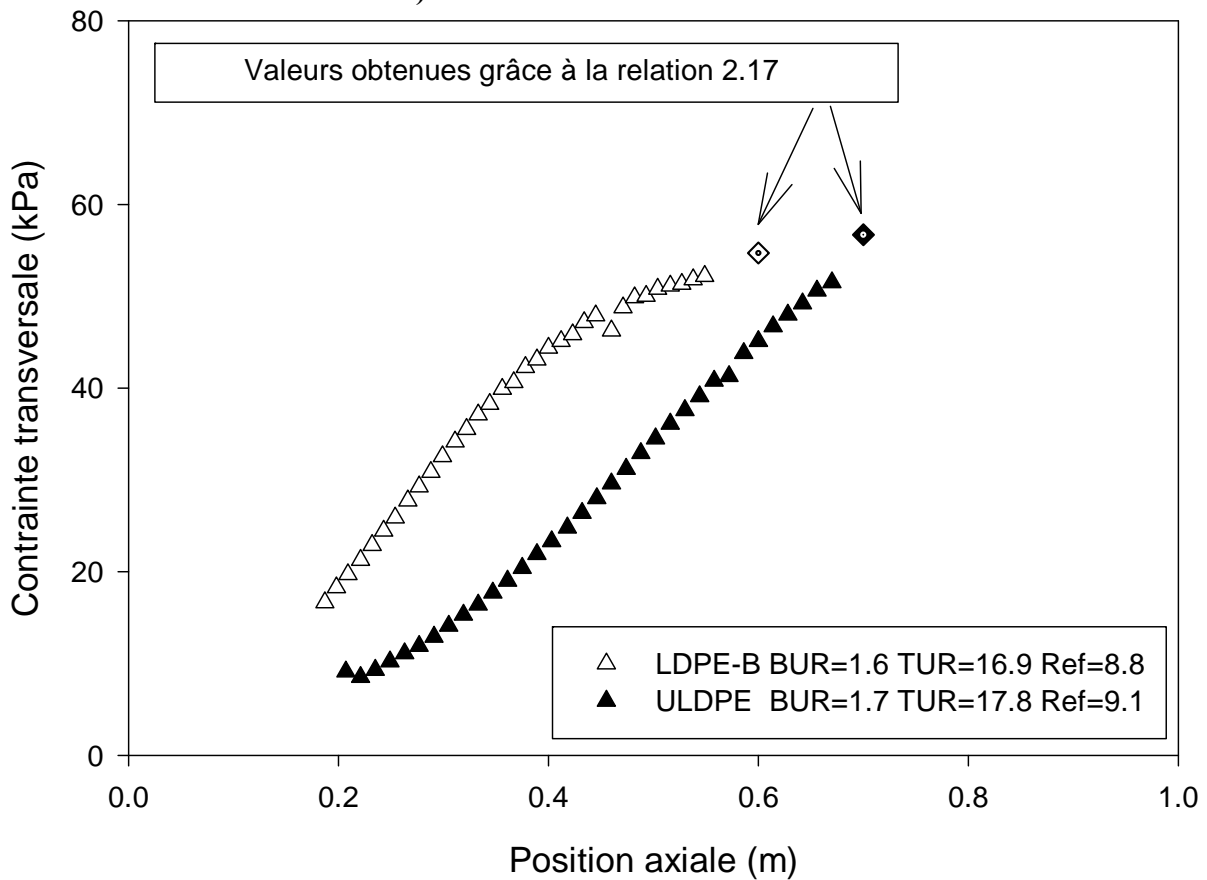
Figure 2.17 : Évolution du rayon et des contraintes dans la bulle de LDPE-B. Effet du taux de gonflement

La figure 2.18 permet d'illustrer l'effet du matériau utilisé sur l'évolution du rayon et des contraintes en fonction de la position axiale. Le taux de refroidissement utilisé afin de produire la bulle de ULDPE était légèrement plus élevé que celui utilisé pour produire la bulle de LDPE-B (9.1 contre 8.8). La figure 2.18a montre que le LDPE-B gonfle plus rapidement que le ULDPE. Ceci est cohérent avec les calculs de Kanai et White (1985), car la température de cristallisation de ces matériaux est quasiment identique et l'énergie d'activation LDPE-B est plus élevée que celle du ULDPE. Les contraintes transversales et axiales (figures 2.18b et 2.18c) à l'intérieur des films de LDPE-B sont aussi plus élevées que les valeurs mesurées dans les films de ULDPE. On peut supposer que cette augmentation est associée au gonflement rapide, qui engendre une augmentation de la viscosité et donc de la force aux rouleaux pinceurs. Mais il faut aussi rappeler que la viscosité du LDPE-B est aussi plus élevée que la viscosité du ULDPE aux environ du plateau newtonien. Les contraintes internes mesurées dans les films de LDPE-B sont supérieures aux contraintes internes mesurées dans les films de ULDPE pour l'ensemble des films produits pour des conditions opératoires similaires.





b) Profil de contrainte axiale



c) Profil de contrainte transversale

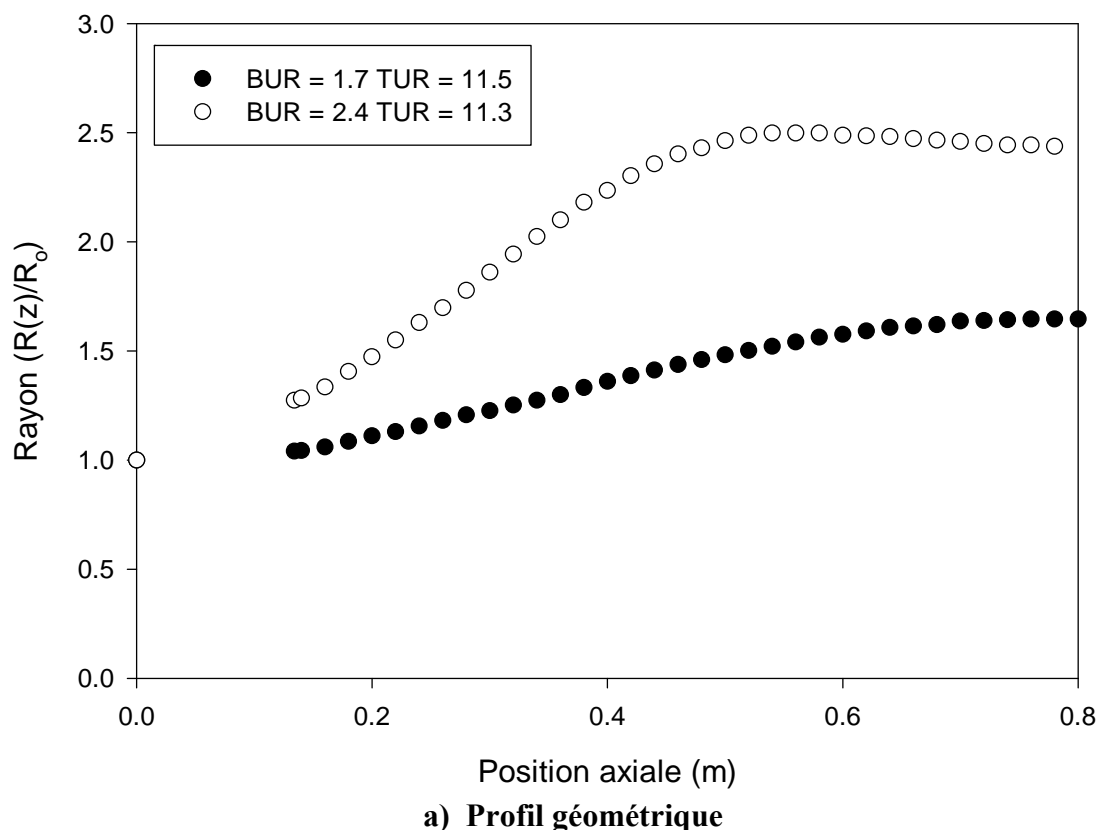
Figure 2.18 : Évolution du rayon et des contraintes. Comparaison entre les deux matériaux. BUR=1.6

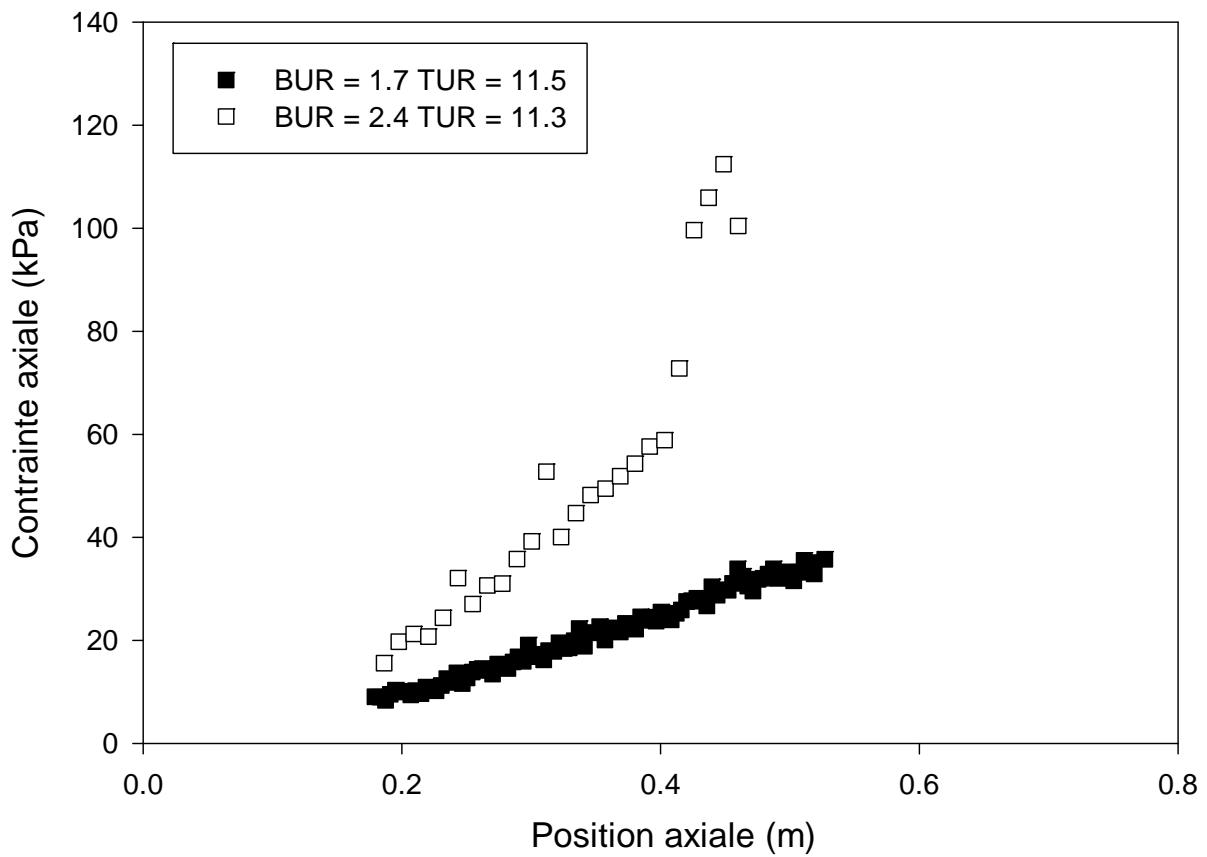
Généralement, les profils géométriques des films monocouches obtenus avec la filière de grande dimension sont comparables aux résultats que nous avons obtenus grâce à la petite filière. En effet, une augmentation du taux de gonflement a pour effet de diminuer la position de la ligne de figeage, alors qu'une augmentation du taux d'étirage augmente la position de la ligne de figeage. De plus, un matériau possédant une énergie d'activation élevée atteindra sa température de cristallisation plus rapidement qu'un matériau possédant une énergie d'activation faible.

Les résultats de biréfringence obtenus lors de la fabrication de films monocouches nous ont permis de constater qu'une augmentation du taux d'étirage et du taux de gonflement avait pour effet d'augmenter les contraintes axiales et transversales à l'intérieur des films produits. Il convient aussi de noter que les résultats que nous venons de présenter à titre de comparaison ne sont pas toujours obtenus à des conditions opératoires rigoureusement identiques. Ceci nous permet d'évaluer qualitativement l'effet des différents paramètres opératoires, mais l'analyse quantitative des résultats est plus ardue. Ceci illustre l'importance du calcul, qui nous permettra de découpler efficacement l'influence de chacune des conditions opératoires.

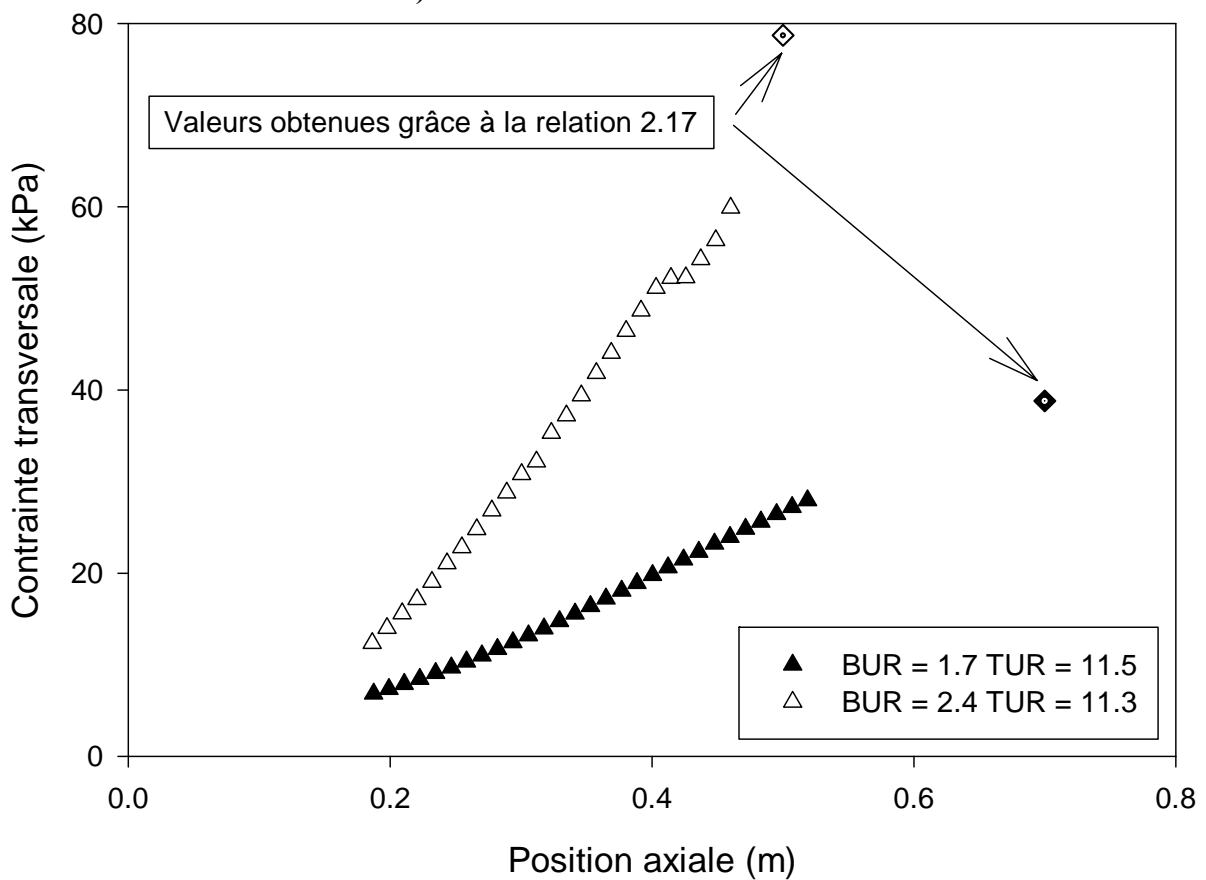
#### 2.4.2.2 Films multicouches

La figure 2.19 illustre l'effet du taux de gonflement lors de la production de films multicouches. Il faut mentionner que les contraintes illustrées aux figures qui suivent sont les contraintes moyennes du film, et non les contraintes à l'intérieur de chacune des couches. Tout comme nous l'avons observé à la figure 2.17, les contraintes axiales et transversales générées dans le films augmentent lorsque le taux de gonflement augmente. De manière générale, l'évolution des contraintes axiales et transversales, en fonction des paramètres opératoires, observée pour les films monocouches est similaire à celle observée pour les films multicouches.





b) Profil de contrainte axiale

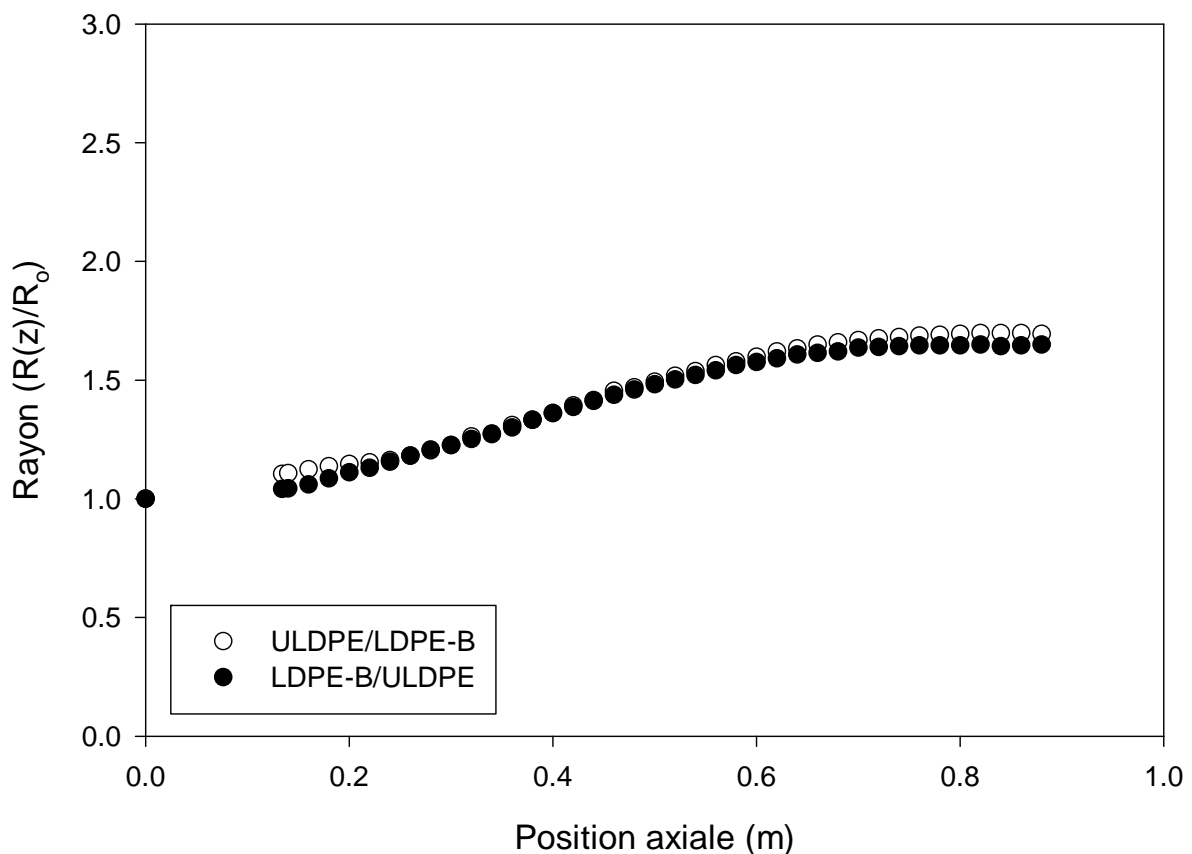


c) Profil de contrainte transversale

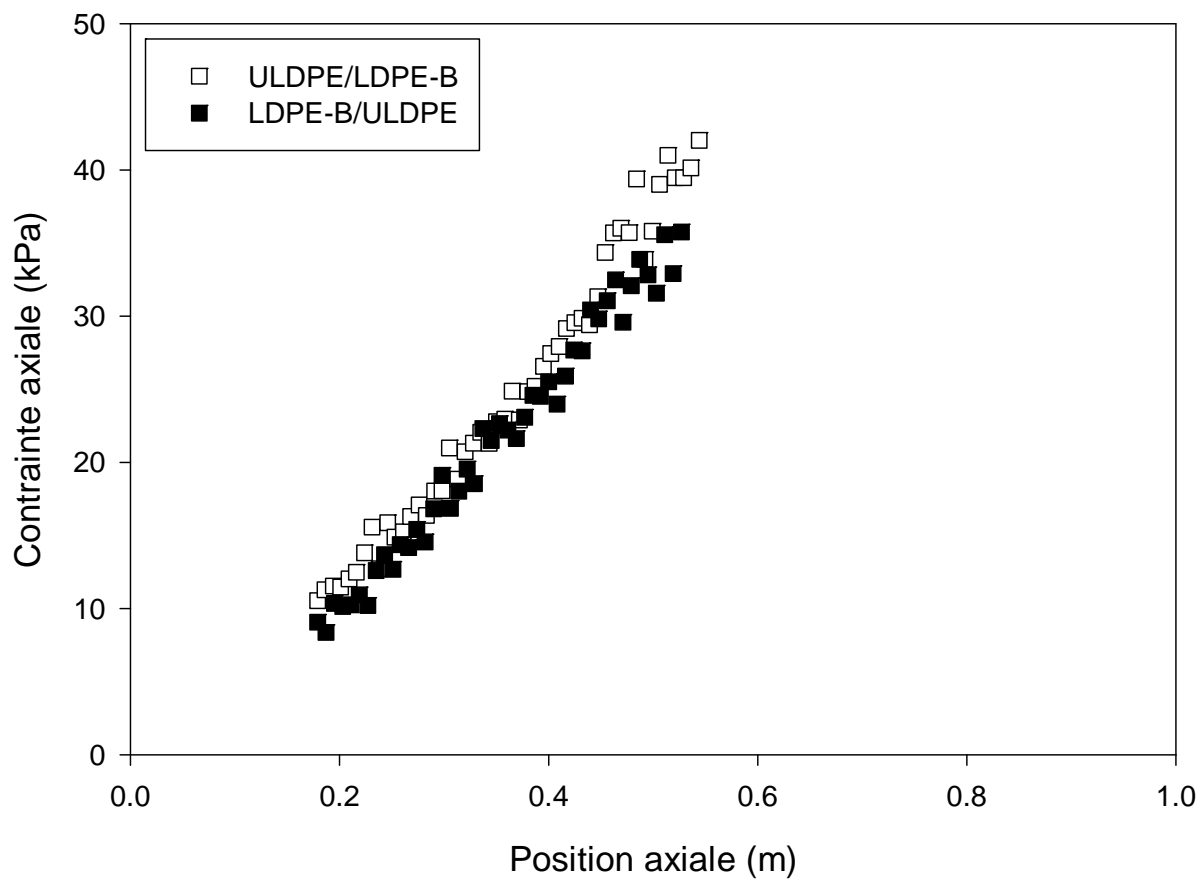
Figure 2.19 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches LDPE-B/ULDPE. Effet du taux de gonflement

La figure 2.20 illustre les profils géométriques et les profils de contraintes de films multicouches obtenus en inversant le positionnement des matériaux. Il est possible de constater que les courbes sont presque parfaitement superposées. L'agencement des couches n'a donc aucun effet significatif sur les films produits.

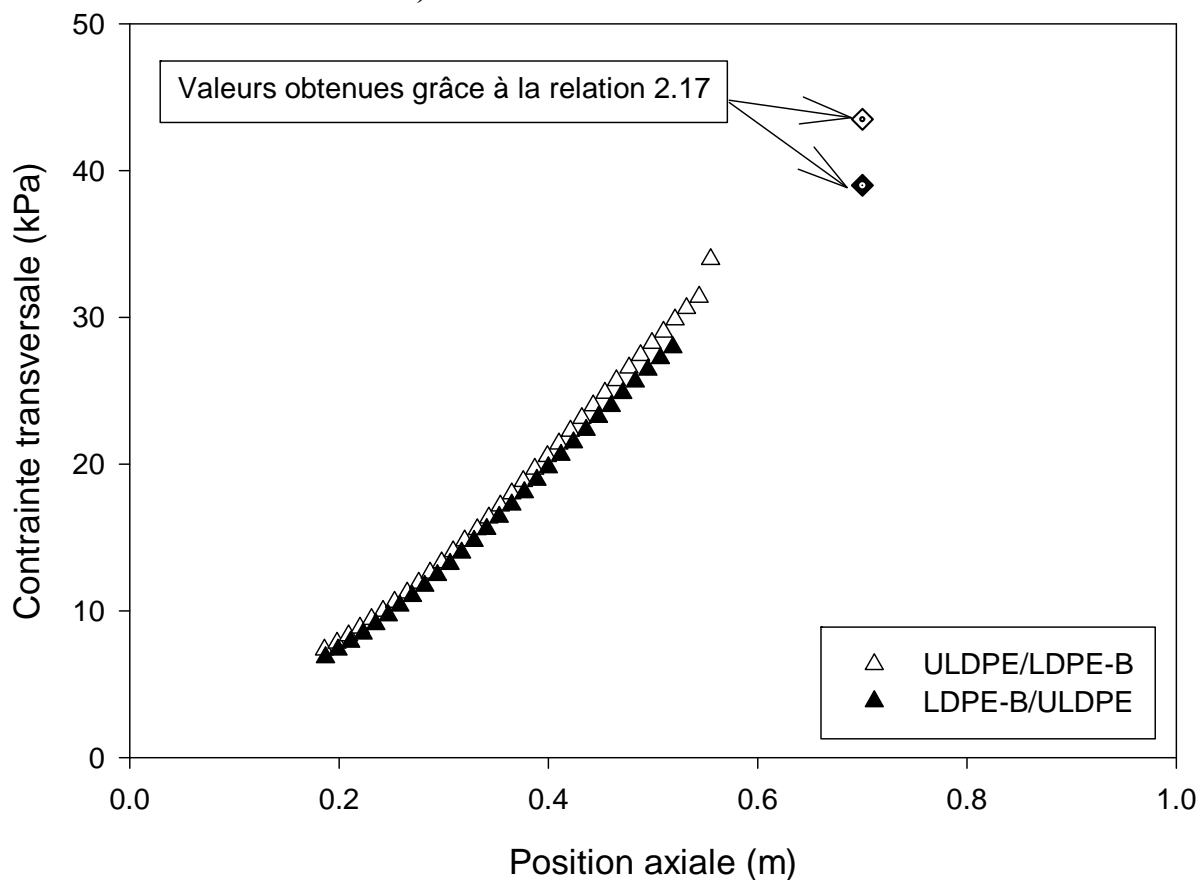
La figure 2.21 permet d'observer l'effet de la quantité de LDPE-B dans le film sur la forme de la bulle et sur les profils de contraintes. Premièrement, la bulle monocouche de LDPE-B gonfle légèrement plus rapidement que les bulles multicouches. Il s'agit de l'effet inverse observé précédemment sur la filière de petite taille avec le premier couple de matériau. Ceci est probablement dû au fait que l'énergie d'activation du LDPE-B est plus élevée que celle du ULDPE alors que la chaleur spécifique des deux matériaux est équivalente. Un ajout de ULDPE aura donc pour effet de diminuer l'énergie d'activation moyenne du film, et donc de générer une bulle gonflant moins rapidement. C'est ce que l'on observe à la figure 2.21a. La figure 2.21b montre que la contrainte axiale dépend de la composition. En effet, à une position axiale donnée, la contrainte axiale augmente proportionnellement à la quantité de LDPE-B. Ceci est cohérent avec le fait que le LDPE-B est un matériau plus visqueux que le ULDPE. Par contre, assez étrangement, la contrainte transversale semble peu affectée par la composition jusqu'à une position de 0.4m. Au delà de cette valeur, nous constatons que la pente de la contrainte axiale du film monocouche augmente, alors que celle du film 50/50 diminue, pendant que celle du film 21/79 demeure stable. Intuitivement, nous nous serions attendus à ce que le film contenant la plus faible quantité de LDPE-B soit celui possédant les plus faibles contraintes transversales, ce qui n'est pas le cas.



a) Profil géométrique

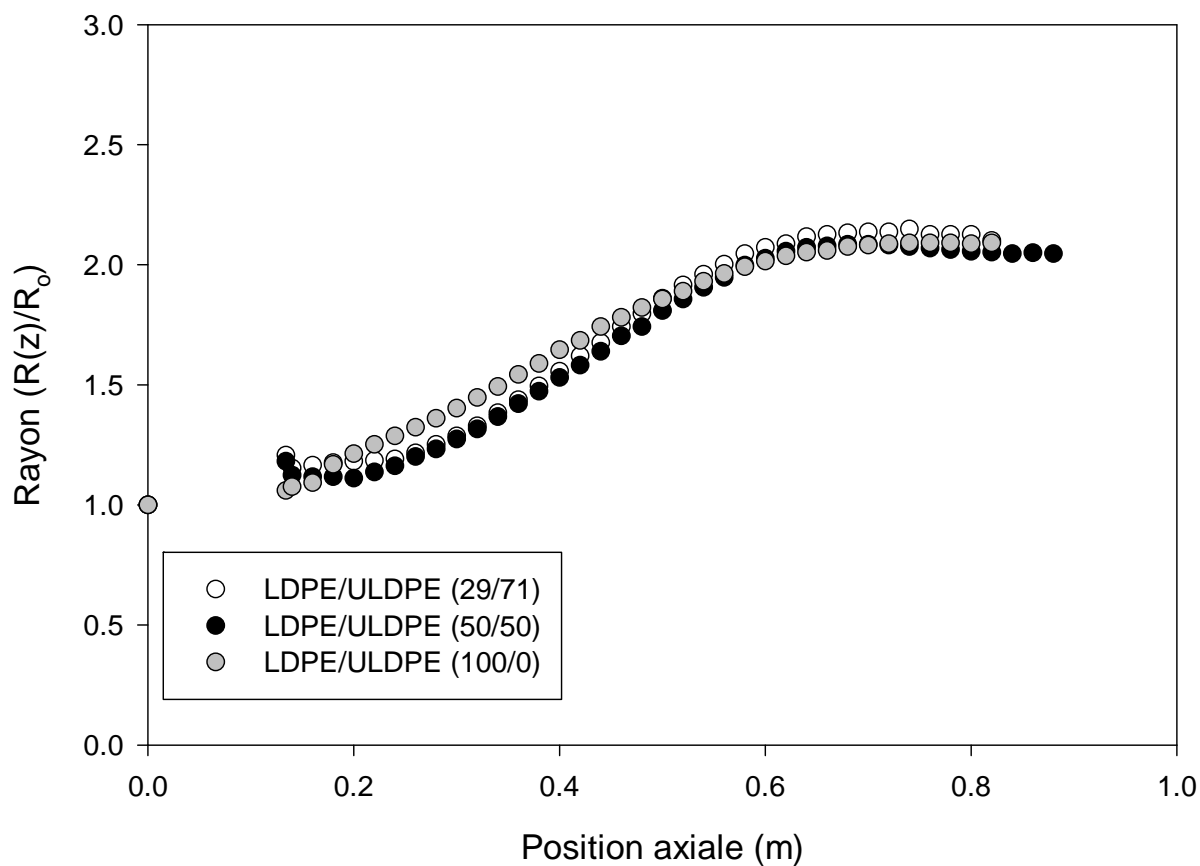
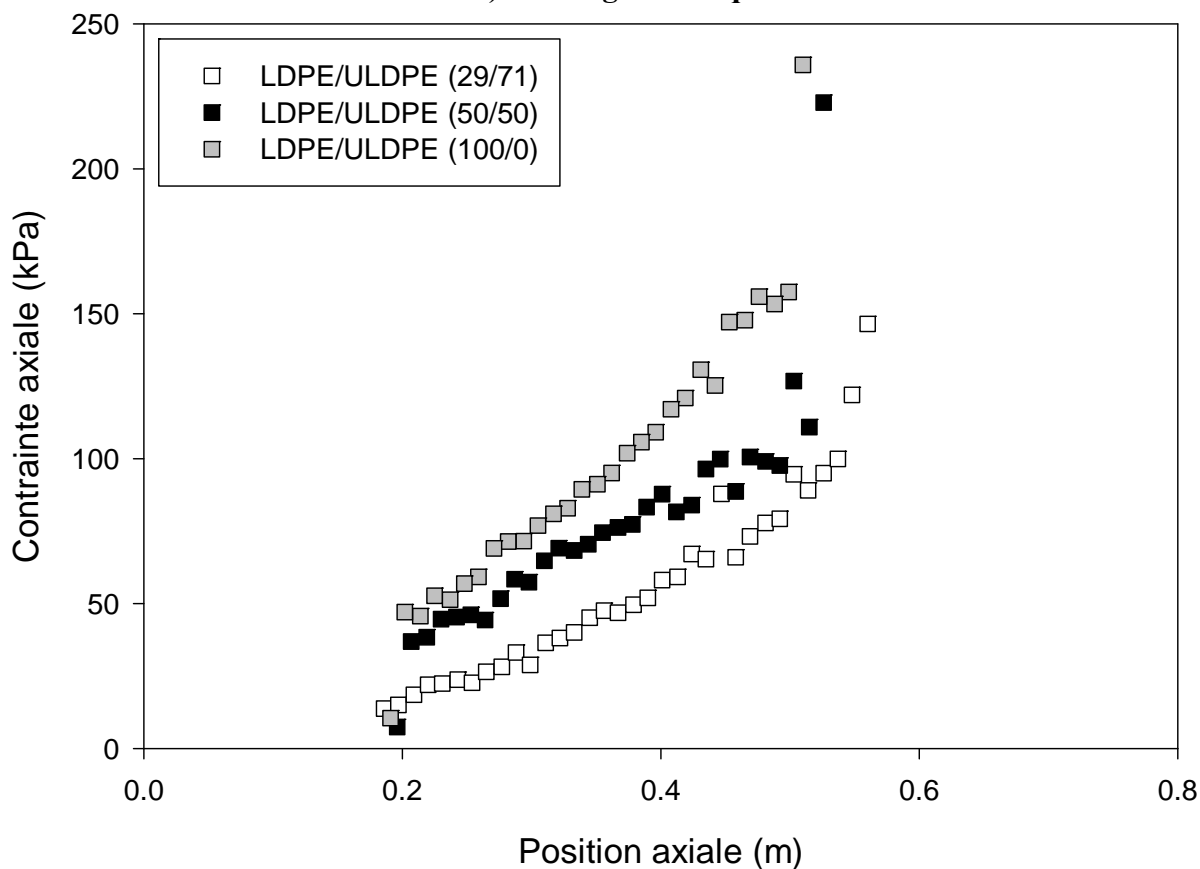


b) Profil de contraite axiale

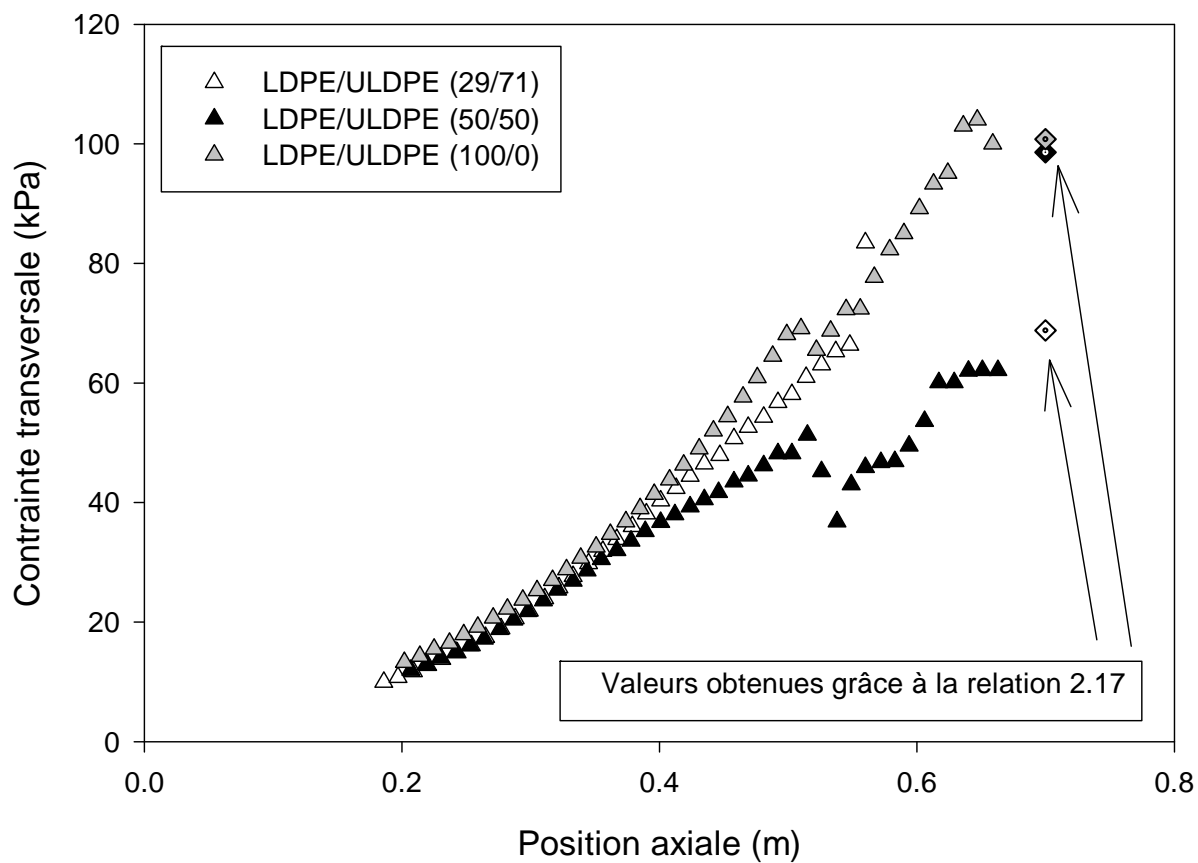


c) Profil de contraite transversale

Figure 2.20 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches. Effet de l'agencement des couches. BUR=1.7, TUR=11.8.

**a) Profil géométrique****b) Profil de contrainte axiale**





c) Profil de contrainte transversale

Figure 2.21 : Évolution du rayon et des contraintes de films multicouches. Effet de la composition des films. BUR=2.1, TUR=16.

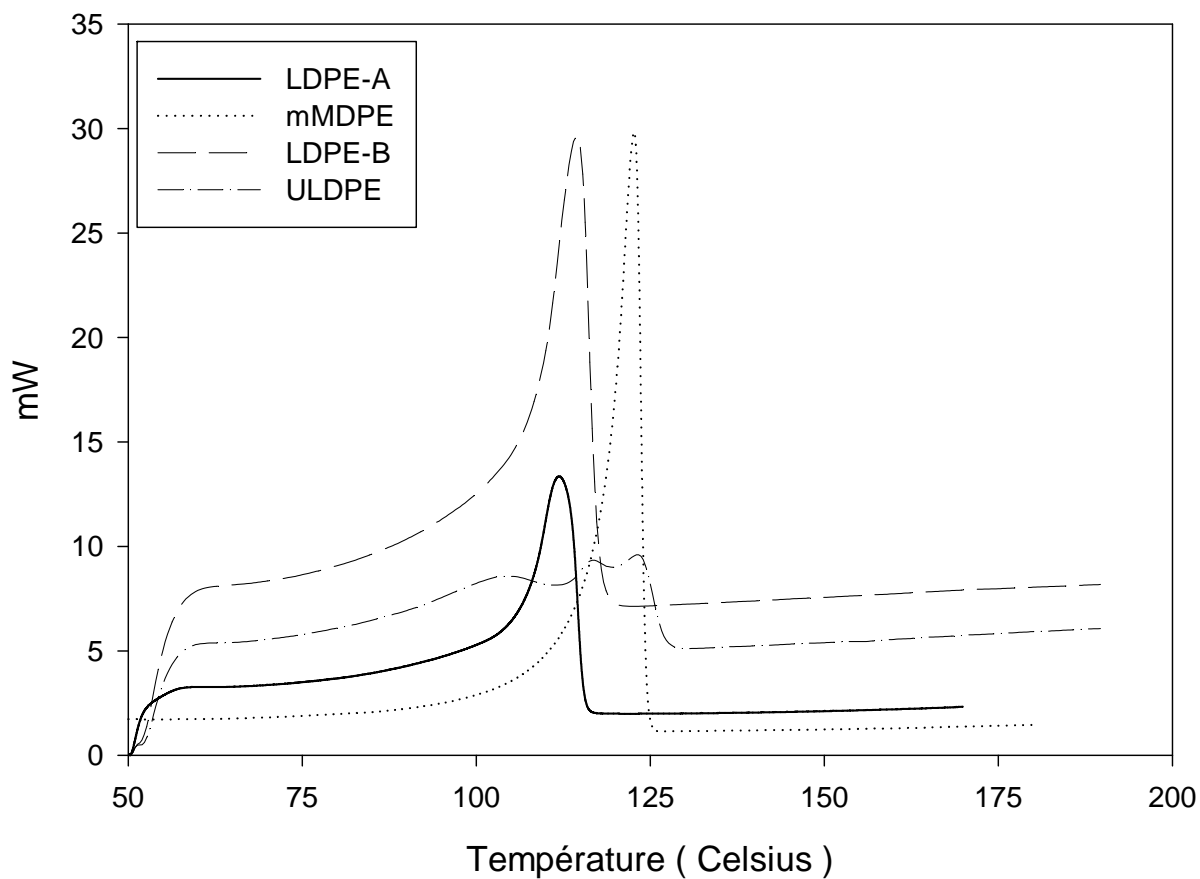
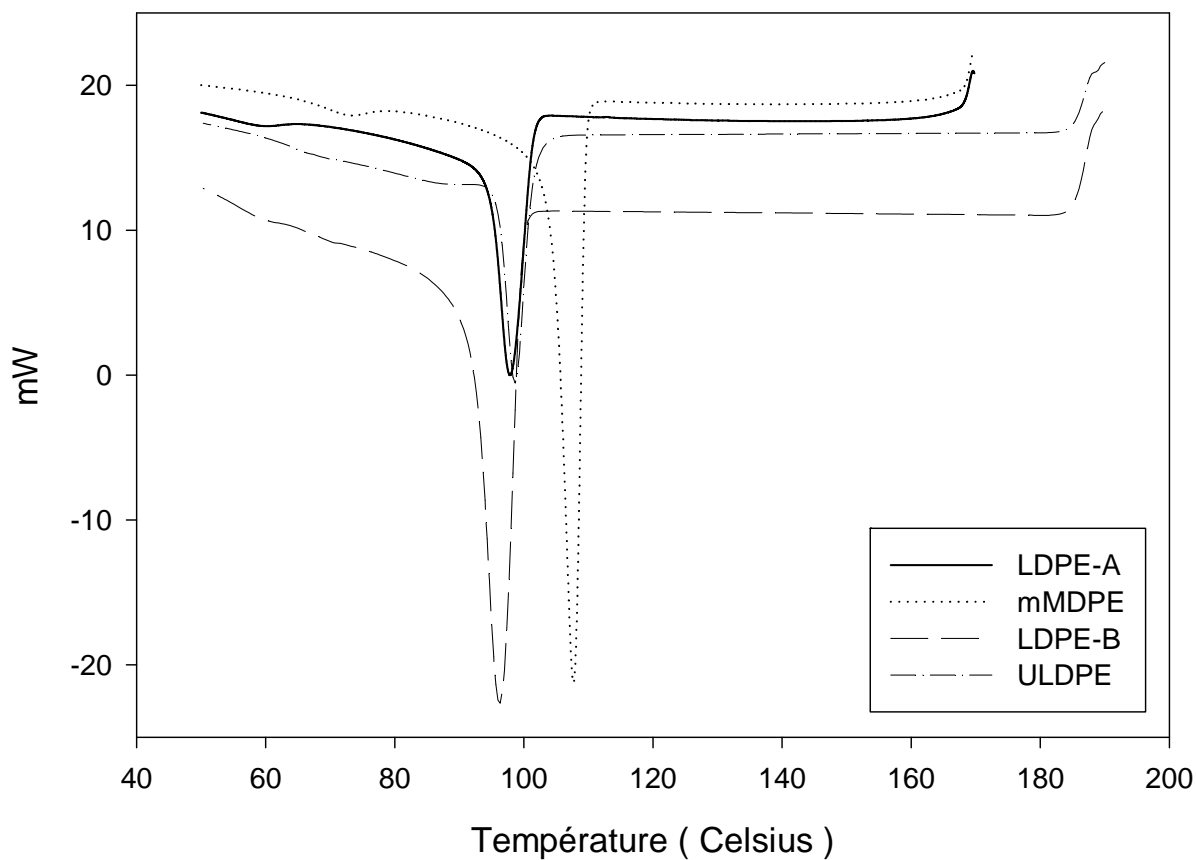
## 2.5 Analyse enthalpique différentielle

Une analyse enthalpique différentielle a été réalisée sur les films monocouches produits à l'aide d'un appareil DSC 7 de Perkin-Elmer. Cette analyse avait pour but de déterminer la température de cristallisation de nos matériaux (afin de pouvoir réaliser les calculs numériques avec les valeurs appropriées) et de déterminer la valeur du taux de cristallinité. Un balayage en température a donc été effectué à un taux de 10°C/min en montée puis en descente. Les courbes obtenues sont présentées à la figure 2.22. Afin de déterminer le taux de cristallinité des films, les résultats issus de l'analyse en montée ont été utilisés. Par contre, les courbes issues de l'analyse en descente ont été utilisées pour déterminer la température de cristallisation. Les résultats obtenus sont présentés au tableau 2.6.

**Tableau 2.6 : Résultats de l'analyse calorimétrique réalisé sur les films produits**

Film	X (%)	Écart type sur X(%)	T <sub>cristallisation</sub> (Celsius)	Écart type sur la température
LDPE-A	32	2.8	103	1
mMDPE	43	2.3	114	0.1
LDPE-B	36	1	102	0.3
ULDPE	21	2.2	103	0.3

Mentionnons tout d'abord que le taux de cristallinité dans les films monocouches et la température de cristallisation semblent indépendants des conditions opératoires. En effet, il est possible de constater au tableau 2.6 que l'écart type est très faible. On note également que la température de cristallisation est presque identique (102 Celsius) pour trois des matériaux, alors qu'elle atteint 114 Celsius pour le mMDPE. Ceci est intéressant car ces valeurs correspondent aux valeurs auxquelles il était possible d'observer le plateau de cristallisation aux figures 2.12 et 2.13. De plus, il est intéressant de noter, que lorsque l'on fait le ratio de la surface d'échange thermique du plateau de cristallisation du mMDPE (figure 2.13, BUR=2.59 et longueur de cristallisation = 10 cm) sur la surface d'échange thermique du plateau de cristallisation du LDPE-A (figure 2.12, BUR=3.11 et longueur de cristallisation = 6 cm), on trouve une valeur de 1.34. Cette valeur est approximativement la même que le ratio du taux de cristallinité de mMDPE sur le taux de cristallinité de LDPE-A, soit 1.38. Le pyromètre infrarouge peut donc être utilisé afin d'évaluer la température de cristallisation et le taux de cristallinité dans le film à partir du diamètre de la bulle et de la longueur du plateau de cristallisation.

**A) Montée en température****B) Descente en température****Figure 2.22 : Courbes de DSC**

## **2.6 Conclusion**

L'étude expérimentale que nous venons de réaliser à l'aide de deux filière nous a permis de constater que les conditions opératoires et les propriétés des matériaux affectaient fortement la forme, le profil thermique et les profils de contraintes des bulles produites.

De manière générale, nous avons constaté qu'une augmentation du taux de gonflement a pour conséquence de diminuer la position de la ligne de figeage tout en augmentant le taux de refroidissement et les contraintes à l'intérieur du film. Une augmentation du taux d'étirage a pour effet d'augmenter la position de la ligne de figeage et les contraintes tout en diminuant le taux de refroidissement.

Les essais sur la filière semi industrielle nous ont permis de constater que l'agencement des matériaux n'avait aucun effet sur le gonflement et sur le profil de contraintes des films. Ceci n'avait pas pu être vérifié sur la filière de petites dimensions à cause d'un problème de régulation thermique.

Il est intéressant de constater que les résultats issus du soufflage de gaine multicouche sont drastiquement différents lorsque l'on compare les deux couples de résines utilisés. En effet, les bulles multicouches composées de LDPE-A et de mMDPE se forment plus rapidement que les bulles équivalentes monocouches. Par contre la forme des bulles multicouches formées de LDPE-B et de ULDPE se situe entre les bulles monocouches de ces deux constituants. Il peut donc y avoir des bulles multicouches gonflant plus rapidement que leurs constituants monocouche des bulles multicouches gonflant moins rapidement que leurs constituants monocouche. Nous supposons que ces divers comportements dépendent des couples énergie d'activation et chaleur spécifique des différents matériaux. Le calcul devrait nous permettre de valider cette hypothèse.

Il semble aussi que la répartition massique des couches ait un effet marqué sur le rayon et sur les contraintes des films multicouches. En effet, lorsque la quantité de matériau plus visqueux augmente, on observe en général un gonflement plus rapide du film. Il nous a été possible de constater grâce aux essais de biréfringence que l'augmentation de la quantité du matériau visqueux dans le film était aussi accompagnée d'une augmentation des contraintes axiales. Par contre, assez étrangement, les contraintes transversales semblent être peu affectées par la quantité de chacun des matériaux.

Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus seront utilisés afin de valider qualitativement et quantitativement le modèle que nous développerons au chapitre suivant. La modélisation devrait nous permettre d'obtenir une meilleure compréhension de l'effet des conditions opératoires sur l'évolution de la température, du rayon et des contraintes.

## **CHAPITRE 3 Modélisation.**

Dans ce chapitre, nous présenterons un modèle mécanique non isotherme newtonien permettant de décrire le procédé de soufflage de gaine multicouche dans un repère global fixe en régime stationnaire. Nous allons tout d'abord commencer par un retour sur les travaux portant sur la modélisation du soufflage de gaine monocouche. La compréhension des efforts successifs visant à améliorer la modélisation de ce procédé devrait nous permettre de bien cibler les problèmes envisageables dans le cas plus complexe du soufflage de gaine multicouche. Par la suite, nous allons appliquer une méthode basée sur les travaux de Housiadas et Tsamopoulos (2000a, 2000b) ainsi que Laffargue (2003) afin d'écrire un système d'équations permettant de décrire le comportement mécanique de la bulle. Il nous sera alors possible d'étendre cette méthode au calcul thermique de façon à pouvoir déterminer, dans un premier temps, l'évolution de la température en fonction de la position axiale et par la suite l'évolution de la température en fonction de la position axiale et de l'épaisseur du film. Par la suite nous verrons que notre système d'équations peut être très facilement étendu à des cas plus complexe que le soufflage de gaine bicouche. Nous terminerons cette partie par une analyse de sensibilité qui nous permettra d'identifier les facteurs opératoires ayant un effet marqué sur le procédé.

### 3.1 Revue de la littérature. Modèles monocouches

#### 3.1.1 Modèles newtoniens

Les premiers travaux visant à décrire mathématiquement l'écoulement axisymétrique d'un film liquide tubulaire au rayon variable ont été réalisés par Pearson et Petrie (1970a et 1970b). Afin de faciliter la résolution du problème les auteurs supposent que la bulle est axisymétrique et isotherme et que le fluide utilisé est newtonien. De plus ils traitent la bulle comme étant une membrane mince. Ceci a pour effet que le profil de vitesse et le tenseur des contraintes doivent être considérés comme étant indépendants de l'épaisseur du film. Le système de coordonnées utilisé par Pearson et Petrie (1970a et 1970b) est présenté à la figure 3.1. Le repère utilisé est lié aux tangentes et à la normale au film. Comme ce repère est situé sur la surface du film, et que la position de cette paroi varie avec la position axiale le repère est mobile.

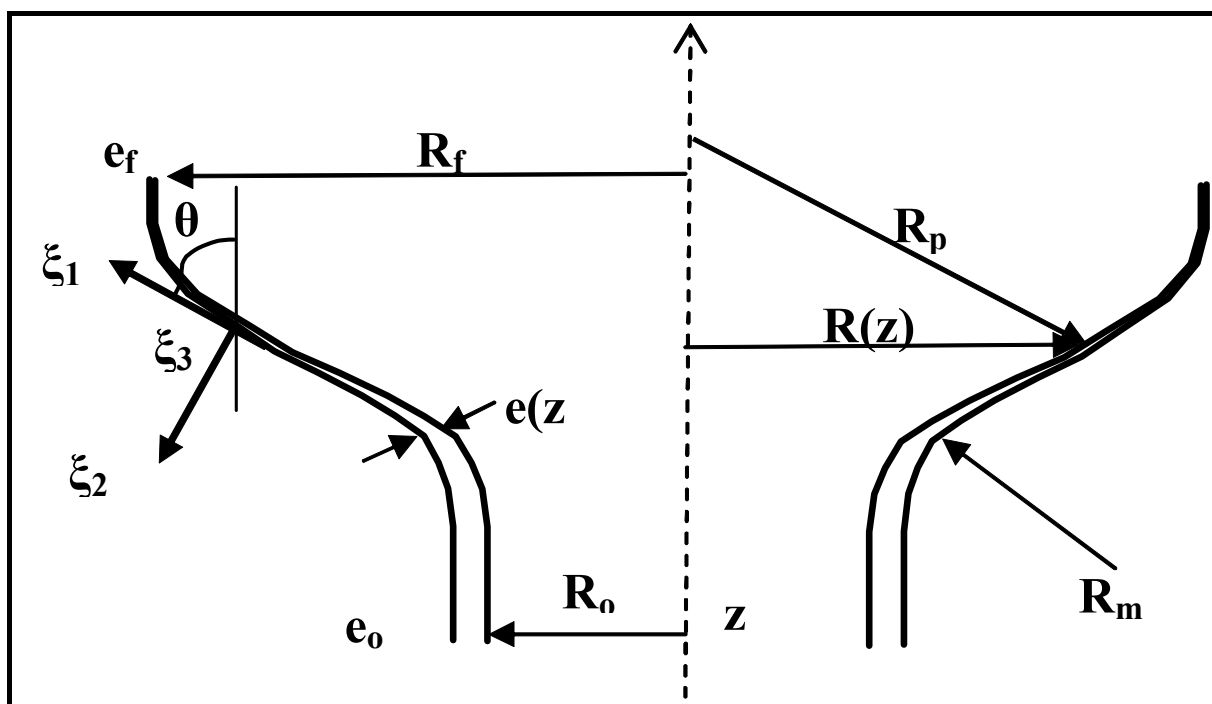


Figure 3.1 : Système de coordonnées utilisé par Pearson et Petrie (1970a et 1970b)

Il est possible de décrire l'angle de gonflement de la bulle selon la relation suivante :

$$\frac{dR(z)}{dz} = \tan \theta \quad 3.1$$

De plus il est possible de décrire les deux rayons de courbures de la bulle grâce aux relations suivantes :

$$R_p = \frac{R(z)}{\cos \theta} = R(z) \sqrt{1 + \left( \frac{dR(z)}{dz} \right)^2} \quad 3.2$$

$$R_m = - \frac{\left( 1 + \left( \frac{dR(z)}{dz} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{d^2 R(z)}{dz^2}} \quad 3.3$$

L'hypothèse de la conservation de la matière est donnée par la relation suivante :

$$Q = 2\pi R(z)e(z)v(z) = \text{Constante} \quad 3.4$$

De plus, en utilisant les relations d'équilibre dynamique, tout en négligeant les forces de frottement, d'inertie et de gravité, Pearson et Petrie obtiennent respectivement les relations suivantes selon les directions  $\xi_1, \xi_2$ :

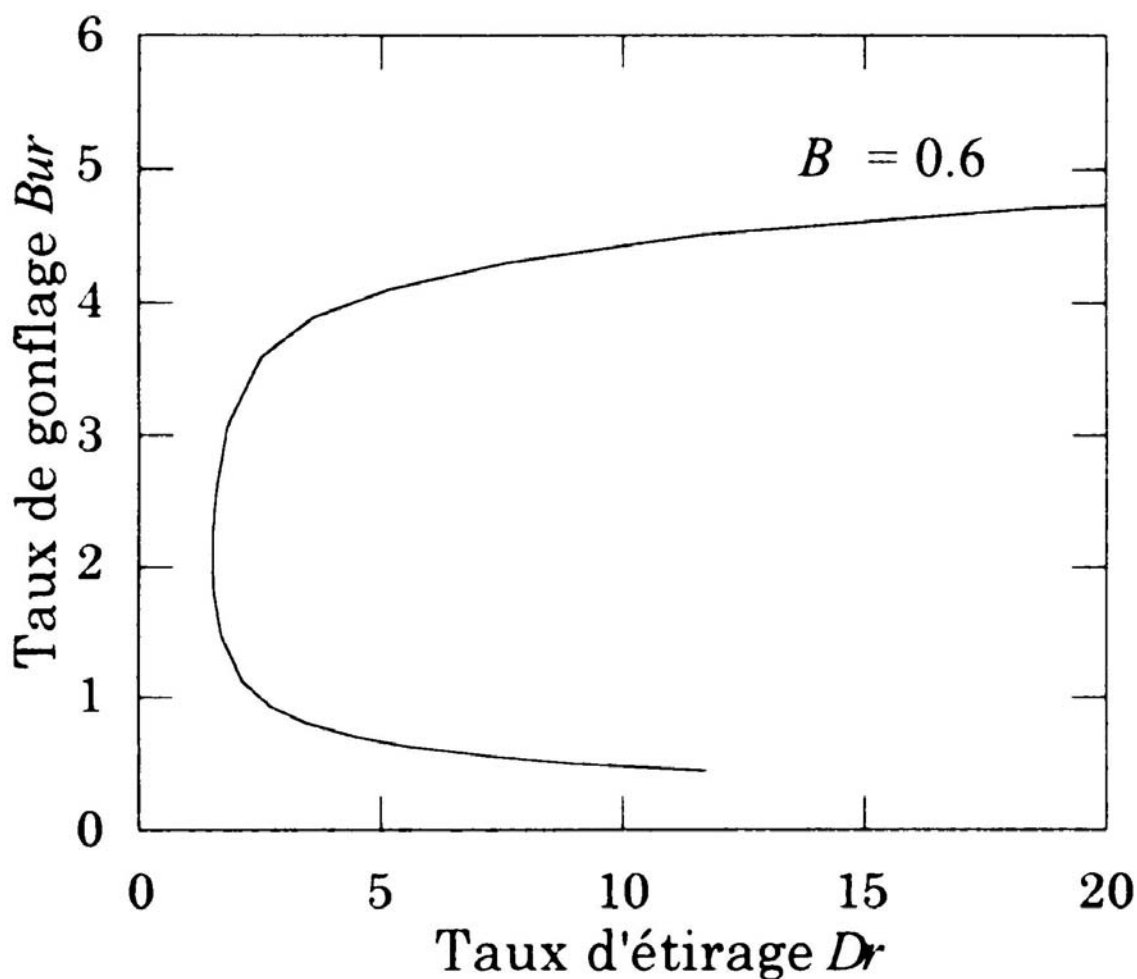
$$F_f = 2\pi R(z)e(z)\sigma_m \cos \theta + \pi(R_f^2 - R(z)^2)\Delta P \quad 3.5$$

$$\frac{\Delta P}{e(z)} = \frac{\sigma_m}{R_m} + \frac{\sigma_p}{R_p} \quad 3.6$$

Où  $F_f$  et  $\Delta P$  sont respectivement la force de tirage appliquée à la position de figeage et la surpression interne à l'intérieur de la bulle par rapport à la pression atmosphérique.

En fixant arbitrairement la position de figeage il est possible d'obtenir les valeurs du rayon, de l'épaisseur et des contraintes à cette position de figeage. Par la suite il suffit de réaliser un tir à deux paramètres en ajustant la force aux niveaux des rouleaux pinceurs et la surpression à l'intérieur de la bulle, jusqu'à ce que les dimensions du film calculées au niveau de la filière soient égales aux dimensions initiales de la filière. Cette méthode de résolution est communément nommée tir vers le bas.

Une autre méthode de résolution, beaucoup plus naturelle consiste à effectuer le tir de la sortie de la filière à la position axiale. Cain et Denn (1988) et André (1998,1999) ont résolu les équations de Pearson et Petrie en utilisant cette approche. Il leur est nécessaire d'utiliser l'angle de gonflement initial en sortie de filière comme paramètre de tir. Or, en fonction de la valeur initiale de cet angle, la bulle calculée peut alors avoir tendance à gonfler jusqu'à atteindre un rayon infini ou encore à se rétracter jusqu'à atteindre un rayon nul. Les travaux de André (1999) illustrent de plus l'existence de solutions multiples. En effet le choix initial de l'angle de gonflement affecte directement la convergence des équations vers une solution pouvant posséder un taux de gonflement inférieur ou supérieur à l'unité. La figure 3.2 illustre un exemple de multiplicité de solutions. En effet pour un taux d'étirage de 10 et une surpression de 0.6, il est possible d'obtenir une bulle possédant un taux de gonflement de 0.5 ou de 4.5. Afin d'éviter ces problèmes André (1999) propose d'utiliser une méthode de calcul de haut vers le bas tel qu'initialement proposé par Pearson (1970).



**Figure 3.2 : Illustration des solutions newtoniennes multiples pour une force d'étirage  $F$  et une pression de soufflage  $B$ . Figure : 4.2 André (1999).**

Malgré le fait que les phénomènes thermiques étaient négligés par Pearson et Petrie, les résultats obtenus semblent être qualitativement fiables et permettent d'identifier l'influence des différents paramètres opératoires sur la bulle. Petrie (1975a, 1975b) a modifié le modèle développé en 1970 afin d'inclure les effets de la gravité et de l'inertie. Il apparaissait tout de même évident aux auteurs que des équations servant à évaluer le comportement thermique allaient être nécessaires pour décrire quantitativement le procédé de soufflage de gaine. Il a de plus utilisé les valeurs de profil de température obtenu par Ast et Farber (1973) afin d'inclure de manière empirique l'influence de la thermique dans son modèle en reliant la viscosité à la température grâce à la loi d'Arrhénius. Petrie montre que les effets de l'inertie et de la variation de la densité due au caractère non isotherme du procédé sont très faibles. Par contre, l'influence de la gravité, bien que faible, est significative, et la géométrie et le profil de vitesse de la bulle sont affectés par la prise en considération de ce phénomène. L'auteur a comparé ses résultats de calculs aux résultats expérimentaux de Ast et Farber (1973). Ceci lui a permis de démontrer que la forme de la bulle est régie par un comportement situé entre le modèle purement élastique et le modèle purement visqueux ce qui n'est guère surprenant étant donné le caractère viscoélastique des polymères. Les profils de vitesses et de taux de déformation obtenus par calculs élastiques et visqueux ne parvenaient pas à recouper adéquatement les résultats expérimentaux. André (1999) et Laffargue (2003) ont repris une démarche similaire à celle de Petrie. Ces derniers utilisent leurs propres résultats expérimentaux concernant le profil thermique afin de tenir compte de la thermodépendance de la viscosité.



Han et Park (1975a 1975b) ont présenté un modèle prenant en compte le transfert de chaleur entre l'air de refroidissement et la bulle. L'équation de transfert de chaleur est simplifiée en supposant que la température du film est indépendante de l'épaisseur. Elle s'écrit alors :

$$\rho C_p v \frac{\partial T}{\partial \xi_1} = \frac{\partial q}{\partial \xi_2} \quad 3.7$$

Où  $v$  est la vitesse et  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont respectivement : la direction de l'écoulement et la direction transversale. En utilisant les conditions frontières suivantes :

À la paroi interne

$$q = 0 \quad 3.8$$

À la paroi externe

$$q = h(T - T_\infty) \quad 3.9$$

Et en substituant les relations appropriées qui suivent :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial z} \cos \theta \quad 3.10$$

$$v_1 = \frac{Q}{2\pi RH} = \frac{v_z}{\cos \theta} \quad 3.11$$

On obtient

$$\frac{dT}{dz} = \frac{h(T - T_\infty)}{\rho C_p v_z H} \quad 3.12$$

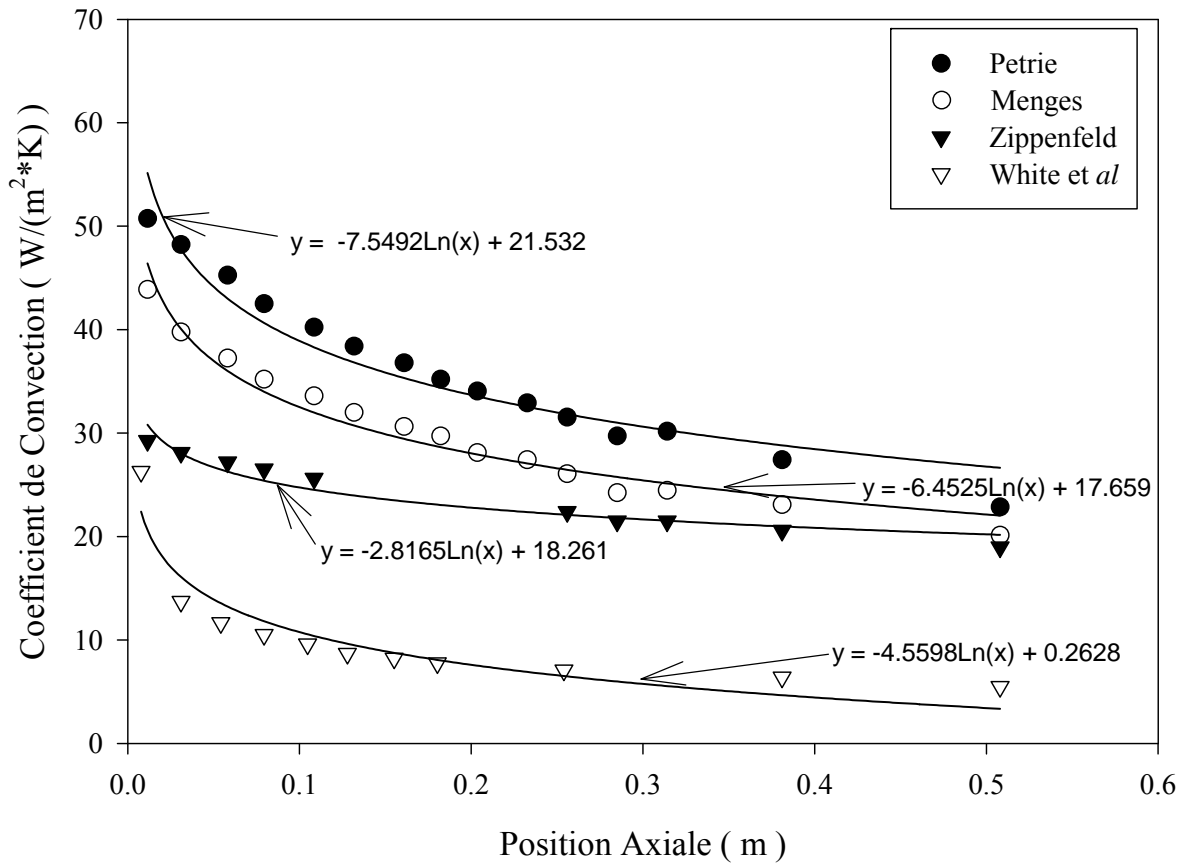
Dans cette approche initiale du calcul thermique le coefficient de transfert de chaleur  $h$ , était considéré comme constant. Sa valeur était fixée arbitrairement de façon à pouvoir décrire adéquatement les résultats expérimentaux. Cette relation a par la suite été reprise par de nombreux auteurs parmi lesquels on retrouve : Kanai et White (1985), Luo et Tanner (1985) ainsi que par Sidiropoulos et al (2001) sans que l'hypothèse initiale d'uniformité de la température dans l'épaisseur du film ne soit validée formellement. Il faut de plus souligner que le coefficient de convection utilisé dans tout ces cas était ajusté selon les circonstances de façon à lisser adéquatement l'ensemble des résultats expérimentaux. Ceci explique la forte concordance observée entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux.

L'utilisation d'un coefficient de convection constant n'est pas représentatif des conditions survenant pendant la production de films. En effet, la vitesse de l'air projeté à la surface de la bulle à l'aide d'anneaux de refroidissement à simple et à double flux est nécessairement plus élevée dans la zone située près de la filière que près de la ligne de figeage. Afin de réaliser les calculs de façon prédictive, une représentation réaliste de l'évolution du coefficient de convection devait être obtenue. Il s'avère que parmi les publications portant sur le soufflage de gaine certains auteurs, Petrie (1974), Menges et al (1972), Kanai et White (1984) et Zippenfeld (1971), sont parvenus à relier le coefficient de convection à la vitesse de l'air de refroidissement en utilisant des mesures de la vitesse de l'air couplées avec des mesures de la température de la bulle avec un pyromètre infrarouge. En connaissant le profil thermique, il est possible, grâce au bilan de chaleur que nous venons de présenter, de déduire la valeur locale du coefficient de convection. Les relations empiriques présentées au tableau 3.1, ont été obtenues par les quatre auteurs que nous venons de mentionner. Elles permettent de relier la vitesse maximale de l'air de refroidissement au coefficient de convection :

**Tableau 3.1 : Relation permettant de décrire l'évolution du coefficient de convection en fonction de la vitesse de l'air de refroidissement.**

Travaux	Relation
Petrie (1974)	$h = 4(V_{\max})^{1.5}$
Menges et Predohl (1972)	$h = 3.3(V_{\max})^{1.5}$
Zippenfeld (1971)	$h = 7.11(V_{\max})^{0.78}$
Kanai et White (1985)	$h = 0.043 * \frac{K_{air}}{L} (Re)^{0.78}$

Ces relations bien qu'utiles ne nous permettent pas d'obtenir l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale dans les cas où la vitesse de l'air est inconnue. Nagarajan et Campbell (1995) ont utilisé le modèle de distribution de la vitesse de l'air élaboré par Cao (1989) afin de déterminer l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale à partir de relations obtenues par ces quatre auteurs. La figure 3.3 illustre les résultats obtenus par Nagarajan et Campbell (1995) ainsi que les corrélations permettant de décrire l'évolution du coefficient de convection pour chacun des cas. Il est immédiatement possible d'observer sur cette figure que les quatre courbes possèdent la même allure générale. Ceci n'est pas surprenant car la totalité de ces essais ont été réalisés sur des lignes d'extrusion de laboratoire. Les anneaux de refroidissement utilisés devaient donc avoir une hauteur comprise entre 8 et 12 cm. Ceci explique pourquoi les coefficients de convection subissent une forte diminution (zone de l'anneau de refroidissement) pour ensuite diminuer plus doucement à une distance de la sortie de la filière d'environ 15 cm. Il est aussi possible de constater que le coefficient de convection découlant de la relation de Kanai et White est beaucoup plus faible que ceux découlant des données de Menges (1972), de Petrie (1974) et Zippenfeld (1971). Ceci s'explique par le fait que Kanai et White ne considéraient pas un coefficient d'échange thermique global incluant à la fois le rayonnement et la convection alors que c'était le cas pour les trois autres auteurs.



**Figure 3.3 : Coefficient de convection obtenu expérimentalement. Nagarajan (1995)**

En effet Kanai et White (1985, 1987) ont modifié l'équation de transfert de chaleur de Han et Park (1975a 1975b) afin d'inclure le terme de rayonnement thermique. Dans ce cas, l'équation de chaleur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & 2\pi R_{ext} \left[ h_c(z)(\bar{T} - T_{air\_out}) + \varepsilon\sigma((\bar{T} + 273)^4 - (T_{air\_out} + 273)^4) \right] \\
 & = -\rho C_p \left( Q \cos\theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Les auteurs posent comme hypothèse que le comportement en écoulement du polymère fondu est dominé par la dépendance thermique des propriétés rhéologiques plutôt que par le modèle rhéologique. La viscosité est évaluée grâce à une loi d'Arrhenius modifiée permettant de prendre en compte la température et l'effet de la présence de la cristallinité. Ils sont les premiers à couvrir entièrement le procédé de soufflage de gaine de la rhéologie des matériaux étudiés au taux de cristallinité finale des films produit en passant par une étude de l'évolution de la pression interne dans la bulle en fonction du taux d'étirement. La rapidité avec laquelle le rayon et l'épaisseur de la bulle atteignent leur dimension finale dépend principalement de l'énergie d'activation. Ces travaux ont permis d'illustrer l'importance de la prise en compte de la thermique afin de modéliser adéquatement le procédé.

Plus récemment, Laffargue (2003) a développé un modèle newtonien du soufflage de gaine monocouche permettant de traiter les cas axisymétrique et non axisymétrique basé sur les travaux de Housiadas et Tsamopoulos (2000a, 2000b) qui contrairement à l'approche de Pearson et Petrie, passe par l'obtention d'un système d'équations obtenu en utilisant un repère fixe. Cette approche présente l'avantage majeur de permettre le traitement des bulles non axisymétriques. Il faut aussi noter que les suppositions qui étaient faites dans l'approche

membrane (uniformité de la vitesse et des contraintes dans l'épaisseur) sont actuellement prouvées dans le traitement de Laffargue. Par contre, ces équations sont beaucoup plus lourdes à traiter que les équations originales de Pearson et Petrie. De plus il est nécessaire de procéder à une analyse des équations à différents ordres de grandeur d'un petit paramètre (le rapport entre l'entrefer et le rayon interne de la filière) afin de pouvoir les résoudre. Cette méthode permet d'obtenir des équations non stationnaires qui ne seront plus liées à la surface de la bulle. Ceci rend donc possible l'analyse des instabilités rencontrées lors de la production des bulles. La diminution de la température était supposée comme étant linéaire et était imposée à partir de la position de figeage déterminée expérimentalement.

### 3.1.2 Modèles viscoélastiques

Les premiers travaux portant sur l'introduction de la viscoélasticité dans le calcul du soufflage de gaine isotherme furent réalisés par Petrie (1973). Il a introduit le modèle de Maxwell dans les équations originales de Pearson et Petrie. Ces travaux font apparaître des problèmes d'instabilités numériques qu'il attribue au fait que la hauteur de figeage est fixée.

Plus récemment, Gupta et *al* (1982) ont présenté leurs travaux sur la production et la modélisation du soufflage d'un film de polystyrène. La nature viscoélastique du polymère fondu est représentée par une équation du type White-Metzner, adéquatement modifiée pour tenir compte du caractère non isotherme du procédé. Afin de valider le modèle, les auteurs ont réalisé des mesures de la forme de la bulle, de la vitesse, du taux d'étirement, des contraintes et de la température dans la région située sous la ligne de figeage. Dans le cas d'étirement uniaxial, le modèle ainsi développé permet de prédire les contraintes axiales dans le film pour les cas isothermes et non isothermes. Lorsque la bulle est gonflée, le modèle s'avère moins efficace pour prédire les contraintes axiales. Par contre, dans tous les cas, les contraintes circonférentielles sont grossièrement sous-estimées par le modèle.

Luo et Tanner (1985), développèrent un modèle non isotherme en utilisant les lois de comportement de Maxwell et de Leonov. L'effet global de la viscoélasticité est de rendre le film plus rigide et de restreindre l'augmentation du diamètre de la bulle. Les simulations révélaient de légères différences dans la forme de la bulle lorsque les modèles de Maxwell et Leonov sont utilisés. Par contre, il semble que la variation des propriétés physiques sous l'influence de la température est l'effet dominant ce qui confirme les approches précédente de Kanai et White (1985). La réponse obtenue grâce au modèle de Leonov ne semble pas être en mesure de décrire des écoulements purement élongationnels. Le modèle de Maxwell avec un temps de relaxation moyen permettait d'obtenir des résultats de modélisation comparables aux résultats expérimentaux de Gupta et *al* (1982). Malheureusement, ici encore, la résolution numérique s'avère ardue. Les auteurs font face à des problèmes de convergence et obtiennent même des solutions multiples dans certaines conditions. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, Cain et Denn (1988) (modèle de Maxwell et Marucci) ainsi que André (1999) (modèle de Maxwell) ont démontré que ces instabilités de calculs sont directement liées à la nature des équations. On peut dans certains cas palier à ces instabilités en débutant le calcul de la ligne de figeage et en descendant vers la filière.

Suite aux travaux de Cain et Denn (1988), Cao et Campbell (1990) ont fait une incursion dans le domaine de la simulation en proposant un modèle couvrant le procédé de la filière aux rouleaux pinceurs. Ils tentent d'inclure dans leur modèle le phénomène de relaxation pouvant survenir entre la ligne de figeage et les rouleaux pinceurs. Ils proposent donc l'utilisation d'une condition frontière rhéologique plutôt que sur la non-variation du rayon de la bulle au dessus de la ligne de figeage. Il s'agit donc d'un modèle de type viscoélastique – élastique

incorporant le phénomène d'écrouissage. Ils obtiennent des résultats qualitativement comparables aux résultats expérimentaux de Gupta (1982). Alai et Papanastasiou (1993) ont développé un modèle non isotherme en étudiant plusieurs modèles rhéologiques viscoélastiques. Les équations d'énergie et de mouvement sont résolues de façon à calculer les profils de température, de vitesse et de rayon simultanément. Les auteurs prennent aussi en considération l'histoire du polymère en intégrant l'écoulement au travers de la filière annulaire. Ils présentent leurs résultats en fonction des propriétés rhéologiques et les comparent aux résultats expérimentaux de Gupta (1982). Ce modèle est malheureusement régi par une multitude de paramètres ajustables.

### 3.1.3 Modèle aérodynamique

Les travaux portant sur l'effet de l'anneau de refroidissement sur le soufflage de gaine demeurent trop peu nombreux. En effet, les travaux expérimentaux ont démontré que le taux de refroidissement affecte fortement la géométrie de la bulle et les contraintes internes développées lors de la formation de la gaine.

Afin de prendre en compte cet aspect Cao et Campbell (1989) puis Campbell et *al* (1992), utilisent un montage rigide reproduisant plusieurs formes de bulles afin de mesurer la distribution des profils de pression et de vitesse de l'air et la force axiale exercée sur le montage rigide. Ils effectuent ensuite un bilan macroscopique de quantité de mouvement pour développer une solution analytique de la pression exercée sur la surface extérieure de la bulle par l'air de refroidissement en fonction de la position axiale. La solution analytique est alors utilisée afin de modifier la surpression à l'intérieur de la bulle. Cette correction de la surpression démontre le fait que la forme de la bulle calculée à la sortie de la filière, le taux de déformation et la contrainte dans le film peut être fortement influencés par la pression externe. Ceci vient confirmer les résultats expérimentaux. Il est donc nécessaire, selon les auteurs, d'inclure le phénomène d'aérodynamisme dans le traitement du procédé de soufflage de gaine si on désire prédire adéquatement les propriétés physiques des films. Une approche similaire a été utilisée avec succès par André (1999) afin d'illustrer l'effet des anneaux de refroidissement à simple et double lèvres sur la géométrie des bulles.

Sidiroupoulos et *al* (1996, 1998, 2000a, 2000b 2001) ont réalisé des simulations numériques par éléments finis afin de prédire l'écoulement de l'air autour de la bulle à la sortie de deux types d'anneaux de refroidissement (simple et double flux). Les profils d'écoulements et les coefficients de transfert de chaleur correspondants ont été déterminés en utilisant les bilans de conservation de masse, de mouvement et d'énergie. Les résultats indiquent des différences importantes entre les deux types d'anneaux. L'alimentation par anneau simple flux a pour effet de créer une accélération locale de l'air entre l'anneau de refroidissement et la bulle, créant une pression relative négative dans l'anneau de refroidissement. Ce phénomène n'est pas observé avec les anneaux double flux. L'anneau double a pour effet de créer une surpression locale dans l'anneau. Ceci explique pourquoi l'utilisation d'un anneau simple a pour effet de tirer la bulle vers l'anneau alors que le phénomène contraire est observé lors de l'utilisation d'anneaux double. Dans le cas de l'anneau simple, le refroidissement se fait majoritairement au niveau de l'anneau. Par contre pour l'anneau de refroidissement double, les auteurs rapportent que le refroidissement maximal se produit 15 cm au-dessus de l'anneau de refroidissement. Ils attribuent ce phénomène à une turbulence accrue dans ces régions. Leur dernière publication porte sur la prise en considération de la présence d'un système de refroidissement interne. Sidiroupoulos et *al* (1996) ont comparé leurs résultats à une grande quantité de résultats expérimentaux obtenus par Butler (1993) Farber (1973) Gupta (1982) et

Tas (1994). Ceci a le mérite de valider le modèle qu'ils présentent sur une vaste gamme de matériaux et de lignes de production.

### 3.1.4 Modèles viscoélastiques bi phasiques

Campbell et Cao (1987) et Ashok et Campbell (1992) ont introduit un modèle à deux phases. Cette hypothèse semblait être supportée par le fait que des résultats expérimentaux obtenus précédemment indiquaient une différence de température de 15 à 20 °C entre les deux parois de la bulle. Il serait donc possible que la paroi externe du film cristallise avant la paroi interne. Ceci engendrerait donc une évolution du comportement rhéologique en fonction de la position radiale dans le film. Ils utilisent donc un modèle rhéologique permettant de prendre en considération le passage de l'état fondu à l'état semi-cristallin. Ils considèrent que la cristallisation est indépendante des contraintes et du taux de déformation. Doufas et Mchugh (2000-2001) présentent un modèle thermodynamique beaucoup plus complexe permettant de prendre en considération ces effets sur la formation des germes de cristallisation et sur l'évolution de la structure cristalline.

Tout récemment Muslet et Kamal (2004) ont développé un modèle bi phasique. Les équations constitutives de Phan-Thien et Tanner étaient utilisées pour décrire le comportement en étirage du film fondu alors les équations néo Hookéenne étaient utilisées pour décrire le comportement solide du film lors du processus de cristallisation. Un aspect intéressant de leur modèle, est que lorsque le film atteint un angle de gonflement nul, le modèle néo Hookéen est utilisé, ce qui permet alors au film de s'amincir tout en conservant son diamètre. Cette approche est particulièrement intéressante car elle tente d'inclure dans un modèle unique les effets thermiques, le processus de cristallisation et la cristallisation induite sous contrainte. En effet le coefficient de convection local est déterminé en utilisant l'approche de Sidiropoulos (2000), alors que la cinétique de cristallisation est régie par le modèle non isotherme de Nakamura. Les résultats de calculs se comparent avantageusement aux résultats expérimentaux obtenus par plusieurs auteurs.

Il faut finalement mentionner les travaux de Rakos et Sebastian (1990) et Perdikoulis et *al* (1990) qui travaillent à la modélisation et l'optimisation des écoulements survenant dans les filières afin de pouvoir simuler le procédé de l'entrée de l'extrudeuse à la sortie de la tour de refroidissement.

## 3.2 Revue de la littérature. Modèles multicouches

La modélisation du soufflage de gaine multicouche en est à ses balbutiements. Yoon et Park (1991) se sont attelés au problème de la co-extrusion de bulles en considérant un écoulement isotherme newtonien pour la couche interne et un écoulement isotherme de Maxwell pour la couche externe. Les auteurs se sont attardés au profil et à l'évolution de l'épaisseur de la bulle. Selon le modèle développé, si le temps de relaxation de la couche viscoélastique est grand, l'écoulement des deux couches est dominé par celle-ci même si son débit est beaucoup plus faible que celle de la couche newtonienne. La forme de la bulle est donc décrite par un équilibre entre les forces visqueuses et les forces viscoélastiques. Malheureusement, les résultats des simulations ne sont pas comparés à des résultats expérimentaux. Dans une publication postérieure, Yoon et Park (1992) présentent une version plus étoffée de leur modèle.

Stasiek (2000) a décrit le transfert de chaleur entre l'air et la bulle pour le cas de film à trois couches. Après avoir développé les équations thermiques en tenant compte de la conduction

entre les couches, du rayonnement, de la convection, et la chaleur générée par dissipation visqueuse ainsi que la chaleur de cristallisation il néglige la majorité de ces termes. Assez étrangement, aucun résultat de simulation n'est présenté.

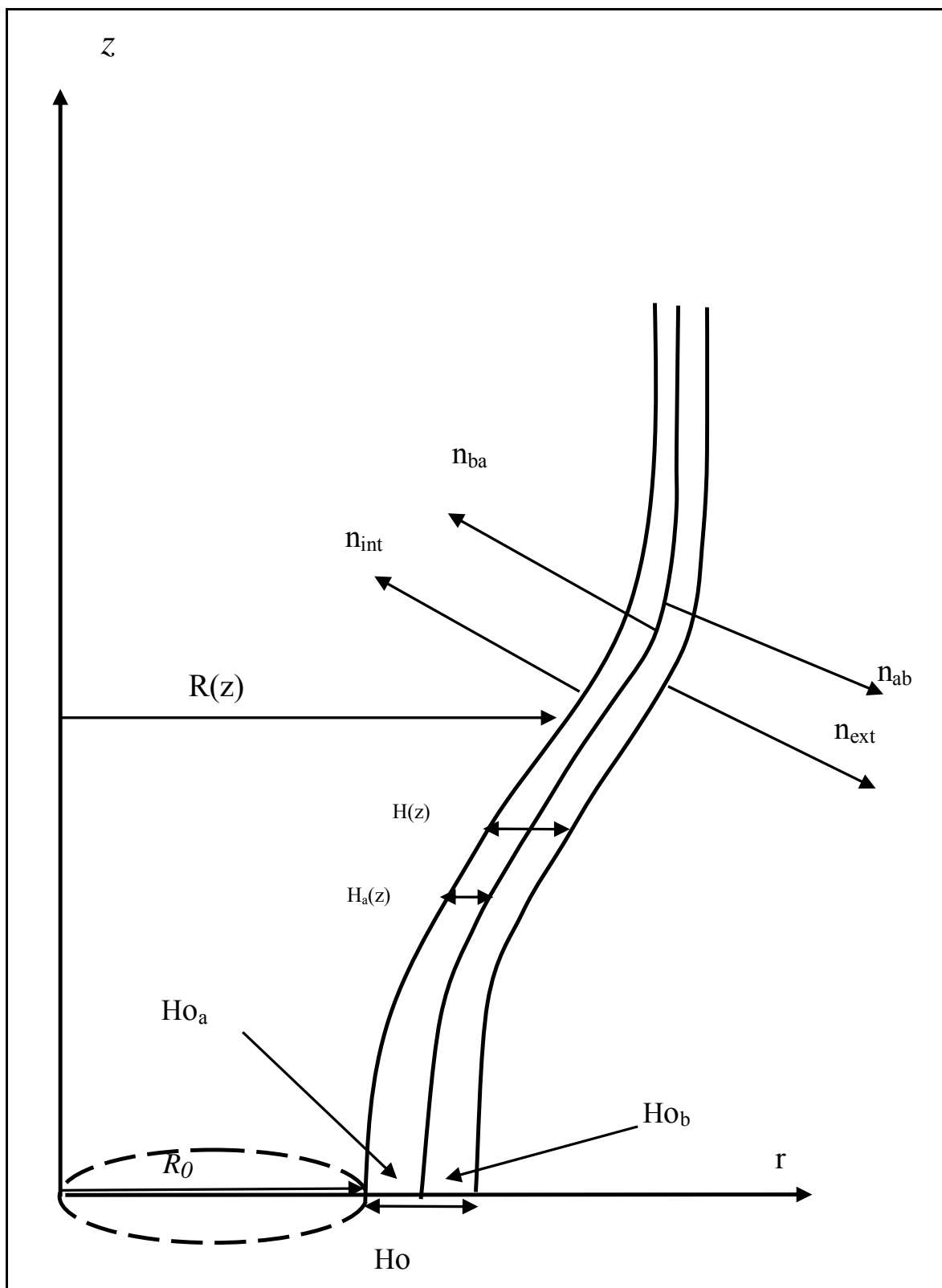
Finalement, Yoon et Park (2000) tentent d'évaluer la stabilité de films à une et deux couches en modifiant leurs équations de façon à obtenir un système instationnaire. Cette approche avait initialement été développée par Yeow (1975) qui avait modifié le modèle de Pearson et Petrie (1970a, 1970b) en lui greffant des petites perturbations axisymétriques. Cette approche est problématique car les équations en régime stationnaire de Yoon (1991) et de Pearson et Petrie sont développés dans un repère local situé sur la paroi de la bulle. Lorsqu'on applique des perturbations le repère dans lequel les équations sont développées est donc mobile, il faut alors être extrêmement critique face aux cartes de stabilité obtenues dans ces conditions.

### **3.3 Développement mécanique multicouches**

Parmi les méthodes que nous venons de présenter il nous semble que l'approche de Laffargue (2003) soit la plus prometteuse malgré la complexité du système d'équations obtenu. Elle offre l'avantage de la flexibilité et permet le traitement des instabilités survenant lors du procédé de soufflage de gaine. Nous allons donc utiliser cette méthode afin de l'appliquer au cas relativement plus complexe du soufflage de gaine multicouche. Ceci nous permettra entre autres de vérifier si l'hypothèse thermique affirmant que la température n'est pas une fonction de l'épaisseur, est bien valide. Notre approche initiale consistera à développer un modèle mécanique permettant de décrire la production d'une bulle bicouche. L'évolution de la température sera alors supposée linéaire. Ceci nous donnera la possibilité de valider notre modèle par rapport aux modèles monocouches développés précédemment. Nous démontrerons que l'imposition d'un profil thermique linéaire présente quelques lacunes et ceci nous amènera à réaliser un calcul thermique, qui dans un premier temps, nous permettra de déterminer l'évolution de la température en fonction de la position axiale et dans un second temps de déterminer l'évolution de la température en fonction de la position radiale. Nous mettrons aussi en évidence certaines différences notables pouvant survenir entre l'imposition d'un profil linéaire et le calcul de la température. Finalement nous démontrerons que notre modèle bicouche peut être aisément étendu afin de considérer des écoulements multicouches beaucoup plus complexes.

#### **3.3.1 Hypothèses**

Les équations mécaniques permettant d'évaluer l'évolution de la dynamique et de la cinématique lors du procédé de soufflage de gaine multicouche peuvent être obtenues en utilisant les hypothèses de base de la mécanique des fluides. L'approche que nous avons décidé d'utiliser est similaire à la méthode présentée par Laffargue (2003) pour le traitement du soufflage de gaine monocouche. Les équations seront donc développées dans un repère cylindrique global contrairement à l'approche initiale de Pearson et Petrie (1970a, 1970b) qui utilisaient un repère mobile local. La figure 3.4 illustre le repère choisi.



**Figure 3.4 : Système de coordonnées utilisé.**

Afin de pouvoir traiter aisément le problème il nous est nécessaire de faire quelques hypothèses. Nous supposons que les fluides sont incompressibles, que la bulle est axisymétrique (même si il est possible d'écrire les équations pour tenir compte de la non axisymétrie), que le glissement est nul à l'interface entre les deux fluides et que le gonflement en sortie de filière est négligeable. L'hypothèse d'absence de glissement à l'interface signifie qu'il n'y aura pas de cisaillement généré entre les deux couches. Les forces d'inertie, de masse et de frottement seront négligées face aux forces de viscosité. De plus nous



supposerons qu'à l'exception des propriétés rhéologiques, toutes les propriétés physiques des fluides sont indépendantes de la température.

### 3.3.2 Les équations dans le volume

Si on considère que notre bulle est axisymétrique, nos variables seront uniquement fonctions de la position axiale et radiale. La figure 3.4 nous permet de constater que nos variables d'espaces seront elles bornées par :

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq FLH \\ R(z) \leq r \leq (R(z) + H(z)) \end{aligned}$$

Il est possible de définir les vecteurs normaux à la paroi interne et externe grâce aux relations suivantes :

$$\vec{n}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{dR(z)}{dz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{dR(z) + H(z)}{dz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{3.14}$$

Il nous faut aussi définir les vecteurs normaux à l'interface entre les deux couches grâce aux relations suivantes :

$$\vec{n}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{d(R(z) + H_a(z))}{dz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{ba} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{d(R(z) + H_a(z))}{dz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{3.15}$$

La vitesse des fluides peut être définie par la relation suivante :

$$\vec{V}_i = V_{r_i} \vec{e}_r + V_{\phi_i} \vec{e}_\phi + V_{z_i} \vec{e}_z \quad \mathbf{3.16}$$

De plus l'hypothèse d'axisymétrie ( $V_{\phi_i} = 0$ ) nous permet d'éliminer le terme circonférentiel et on obtient alors :

$$\vec{V}_i = \begin{pmatrix} \vec{V}_{r_i}(r, z) \\ 0 \\ \vec{V}_{z_i}(r, z) \end{pmatrix} \quad \mathbf{3.17}$$

Où  $i$  est l'indice indiquant le fluide A ou le fluide B. Il est maintenant possible grâce aux relations suivantes d'obtenir le tenseur des vitesses de déformation dans le système de coordonnées cylindriques pour chacun des fluides.

$$\begin{aligned}
\left[ \dot{\varepsilon} \right]_i &= \frac{1}{2} \left( \left[ \text{grad } \vec{v}_i \right] + \left[ \text{grad } \vec{v}_i \right]^t \right) = \frac{1}{2} \left( \left| \nabla \vec{v}_i \right| + \left| \vec{v}_i \nabla \right| \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial z} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour un fluide incompressible

$$\text{trace} \left[ \dot{\varepsilon} \right]_i = 0 \tag{3.19}$$

On aura alors

$$\frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial r} + \frac{v_{r_i}(r, z)}{r} + \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial z} = 0 \tag{3.20}$$

Nous utiliserons aussi un modèle purement visqueux afin de décrire le comportement rhéologique des résines. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, il semble que les effets thermiques sont dominants face au comportement viscoélastique. Ceci nous permettra d'éviter les difficultés associées au traitement de la viscoélasticité. Dans ce cas, il est possible de lier le tenseur des contraintes au tenseur des vitesses de déformations par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
[\sigma_i] &= -p_i [I] + 2\eta_i \left[ \dot{\varepsilon} \right]_i \\
&= \begin{pmatrix} -p_i(r, z) + 2\eta_i(z) \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial r} & 0 & \eta_i(z) \left( \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial r} \right) \\ 0 & -p_i(r, z) + 2\eta_i(z) \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{r} & 0 \\ \eta_i(z) \left( \frac{\partial v_{r_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial r} \right) & 0 & -p_i(r, z) + 2\eta_i(z) \frac{\partial v_{z_i}(r, z)}{\partial z} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La relation d'équilibre dynamique  $\text{div}[\sigma_i] = 0$  en coordonnées cylindriques nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr_i}(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr_i}(r, z) - \sigma_{\theta\theta_i}(r, z)}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz_i}(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz_i}(r, z)}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.22}$$

### 3.3.3 Conditions Frontières

#### 3.3.3.1 Vitesse

Il est possible d'évaluer la vitesse aux différentes interfaces en utilisant les résultats de Laffargue (2003); on obtient alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z) \\ v_{r_a}(R(z), z) - \left( \frac{dR(z)}{dz} \right) v_{z_a}(R(z), z) &= 0 \end{aligned} \quad 3.23$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z, t) + H_a(z, t) \\ v_{r_a}(R(z) + H_a(z), z) - \left( \frac{dR(z) + H_a(z)}{dz} \right) v_{z_a}(R(z) + H_a(z), z) &= 0 \end{aligned} \quad 3.24$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z) + H_a(z) \\ v_{r_b}(R(z) + H_a(z), z) - \left( \frac{d}{dz}(R(z) + H_a(z)) \right) v_{z_b}(R(z) + H_a(z), z) &= 0 \end{aligned} \quad 3.25$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z) + H(z) \\ v_{r_b}(R(z) + H(z), z) - \left( \frac{d}{dz}(R(z) + H(z)) \right) v_{z_b}(R(z) + H(z), z) &= 0 \end{aligned} \quad 3.26$$

### 3.3.3.2 Contraintes

Les conditions frontières en contraintes sont obtenues en réalisant un bilan de force à chaque interface. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z), \quad [\sigma_a] \vec{n}_i = -\Delta P \vec{n}_i \\ \dot{\hat{a}} r &= R(z) + H(z), \quad [\sigma_b] \vec{n}_e = 0 \\ \dot{\hat{a}} r &= R(z) + H_a(z), \quad [\sigma_a] \vec{n}_{ab} = -[\sigma_b] \vec{n}_{ba} \end{aligned} \right\} \quad 3.27$$

Qu'il est possible de décomposer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z), \quad [\sigma_a] \vec{n}_i = -\Delta P \vec{n}_i \\ \left\{ \begin{aligned} -\sigma_{r_a}(R(z), z) + \sigma_{r_a}(R(z), z) \frac{dR(z)}{dz} &= \Delta P \\ \text{et} \\ -\sigma_{r_a}(R(z), z) + \sigma_{z_a}(R(z), z) \frac{dR(z)}{dz} &= -\Delta P \frac{dR(z)}{dz} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad 3.28$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} r &= R(z) + H(z), \quad [\sigma_b] \vec{n}_e = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \sigma_{r_b}(R(z) + H(z), z) - \sigma_{r_b}(R(z) + H(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H(z)) &= 0 \\ \text{et} \\ \sigma_{r_b}(R(z) + H(z), z) - \sigma_{z_b}(R(z) + H(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H(z)) &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad 3.29$$

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H_a(z), \quad [\sigma_a] \vec{n}_{ab} = -[\sigma_b] \vec{n}_{ba} \\ \left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{r r_a}(R(z) + H_a(z), z) - \sigma_{r z_a}(R(z) + H_a(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H_a(z)) = \\ & + \sigma_{r r_b}(R(z) + H_a(z), z) - \sigma_{r z_b}(R(z) + H_a(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H_a(z)) \end{aligned} \right. \\ & \text{et} \\ & \left. \begin{aligned} & \sigma_{r z_a}(R(z) + H_a(z), z) - \sigma_{z z_a}(R(z) + H_a(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H_a(z)) = \\ & + \sigma_{r z_b}(R(z) + H_a(z), z) - \sigma_{z z_b}(R(z) + H_a(z), z) \frac{d}{dz}(R(z) + H_a(z)) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{3.30} \end{aligned}$$

### 3.3.4 Adimensionnalisation

#### 3.3.4.1 Équations

Il est possible d'obtenir un système d'équations adimensionnelles en réalisant le changement de variables suivant :

- Variables géométriques

$$\begin{aligned} R(z) &= R_o \bar{R}(\bar{z}) \\ H(z) &= H_a(z) + H_b(z) \quad \text{et} \quad H_o(z) = H_{o_a}(z) + H_{o_b}(z) \\ H(z) &= H_o \bar{H}(\bar{z}) \quad \text{et} \quad H_a(z) = H_o \bar{H}_a(\bar{z}) \quad \text{et} \quad H_b(z) = H_o \bar{H}_b(\bar{z}) \\ \bar{H}(\bar{z}) &= \bar{H}_a(\bar{z}) + \bar{H}_b(\bar{z}) \end{aligned}$$

- Variables dynamiques et cinématiques

$$\begin{aligned} V_{r_a}(r, z, t) &= V_{o_a} \bar{V}_{r_a}(\bar{r}, \bar{z}) \quad \text{et} \quad V_{r_b}(r, z) = V_{o_b} \bar{V}_{r_b}(\bar{r}, \bar{z}) \\ V_{z_a}(r, z) &= V_{o_a} \bar{V}_{z_a}(\bar{r}, \bar{z}) \quad \text{et} \quad V_{z_b}(r, z) = V_{o_b} \bar{V}_{z_b}(\bar{r}, \bar{z}) \\ \eta_a(z) &= \eta_{o_a} \bar{\eta}_a(\bar{z}) \quad \text{et} \quad \eta_b(z) = \eta_{o_b} \bar{\eta}_b(\bar{z}) \\ \Delta P(r, z) &= \frac{\eta_{o_a} V_{o_a} \bar{\Delta P}(\bar{r}, \bar{z})}{R_o}, \quad \sigma_{j k_a}(r, z) = \frac{\eta_{o_a} V_{o_a} \bar{\sigma}_{j k_a}(\bar{r}, \bar{z})}{R_o} \quad \text{et} \quad \sigma_{j k_b}(r, z) = \frac{\eta_{o_b} V_{o_b} \bar{\sigma}_{j k_b}(\bar{r}, \bar{z})}{R_o} \\ p_a(r, z) &= \frac{\eta_{o_a} V_{o_a} \bar{p}_a(\bar{r}, \bar{z})}{R_o} \quad \text{et} \quad p_b(r, z) = \frac{\eta_{o_b} V_{o_b} \bar{p}_b(\bar{r}, \bar{z})}{R_o} \end{aligned}$$

L'indice 0 est ici utilisé pour représenter les valeurs en sortie de filière du rayon, de l'épaisseur, de la vitesse et de la viscosité.

- Coordonnée axiale :

Il aurait été logique d'utiliser la position de la ligne de figeage comme paramètre d'adimensionnalisation afin de transformer la position axiale, mais cette valeur est une inconnue. Nous allons donc utiliser le rayon interne de la filière afin de réaliser cette opération et on obtient alors :

$$z = R_o \bar{z}$$

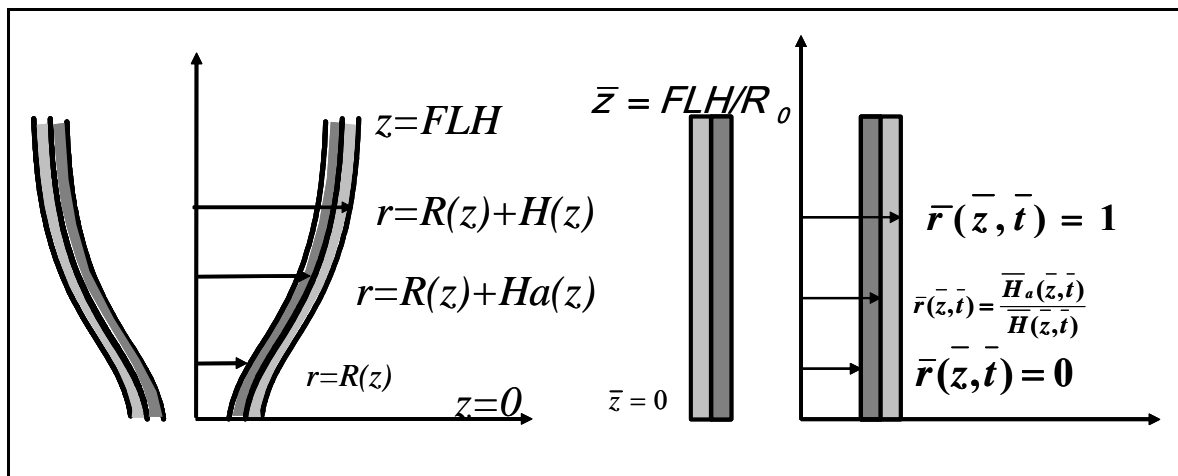
Notre système sera alors borné entre  $0 \leq \bar{z} \leq \frac{FLH}{R_o}$

- Coordonnée radiale :

La technique de transformation non orthogonale utilisée par Housiadas et Tsamopoulos (2000a, 2000b) pour le cas de la formation de tube a été utilisée afin de réaliser l'adimensionnalisation de la position radiale. La relation utilisée pour l'adimensionnalisation est :

$$r = R(z) + H(z)\bar{r} \Rightarrow \bar{r} = \frac{r - R(z)}{H(z)}$$

Ce changement de variable a pour effet de faire passer la forme de la bulle d'une configuration semi conique à une configuration purement cylindrique comme illustré à la figure 3.5. De plus, le rayon de la bulle est borné entre 0 et 1 de la sortie de la filière à la position de la ligne de figéage.



**Figure 3.5 : Processus de changement de variables**

Il est aussi possible d'adimensionnaliser la variable temporelle à l'aide de la relation suivante :

$$t = \frac{R_o}{V_{o_a}} \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = \frac{t V_{o_a}}{R_o}$$

En appliquant le changement de variable approprié aux termes dérivatifs on trouve les relations complémentaires suivantes permettant de terminer l'adimensionnalisation des équations :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{1}{H(z)} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{1}{H_o \bar{H}(\bar{z})} \quad 3.31$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{R_o H_o \bar{H}(\bar{z})} \left( R_o \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + H_o \bar{r} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right) + \frac{1}{R_o} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad 3.32$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{V_o}{R_o H_o \bar{H}(\bar{z})} \left( R_o \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{t}} + H_o \bar{r} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{t}} \right) \right) + \frac{V_o}{R_o} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \quad 3.33$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R_o \bar{R}(\bar{z})} \left( 1 - \frac{H_o}{R_o} \frac{\bar{H}(\bar{z}) \bar{r}}{\bar{R}(\bar{z})} + \left( \frac{H_o}{R_o} \frac{\bar{H}(\bar{z}) \bar{r}}{\bar{R}(\bar{z})} \right)^2 \right) \quad 3.34$$

Finalement définissons un dernier paramètre :

$$\varepsilon = \frac{H_o}{R_o}$$

Dans le cas du soufflage de gaine la valeur de ce paramètre est relativement faible, par exemple il vaut environ 0.05 pour des filières de laboratoires et 0.01 pour des filières de production industrielle. C'est par l'analyse des équations non dimensionnelles aux différents ordres de grandeurs de ce petit paramètre qu'il nous sera possible de simplifier notre système d'équations. Écrivons à nouveau les équations sous forme non dimensionnelle.

- L'équation d'incompressibilité deviendra alors :

$$\frac{\partial \bar{V}_{r_i}(r, z)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} - \varepsilon^2 \bar{V}_{r_i}(r, z) r \left( \frac{H(z)}{R(z)} \right)^2 + \varepsilon \left[ \frac{H(z)}{R(z)} \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial z} + \frac{H(z)}{R(z)} \bar{V}_{r_i}(r, z) - \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dH(z)}{dz} \right] = 0 \quad 3.35$$

$$\text{Quand } i=a \quad 0 \leq r \leq \frac{\bar{H}_a(z)}{H(z)}$$

$$\text{Quand } i=b \quad \frac{\bar{H}_b(z)}{H(z)} \leq r \leq 1$$

- La loi de comportement :

$$\bar{\sigma}_{r_i}(r, z) = -p_i + \frac{2\bar{\eta}_i(z)}{\varepsilon H(z)} \frac{\partial \bar{V}_{r_i}(r, z)}{\partial r} \quad 3.36$$

$$\bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z) = \bar{\eta}_i(z) \left[ \frac{\partial \bar{V}_{r_i}(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{V}_{r_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dH(z)}{dz} \frac{r}{H(z)} \right] + \frac{\bar{\eta}_i(z)}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} \frac{1}{H(z)} - \frac{\partial \bar{V}_{r_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} \frac{1}{H(z)} \right) \quad 3.37$$

$$\bar{\sigma}_{\phi\phi}(r, z) = -p_i + \frac{2\bar{\eta}_i(z) \bar{V}_{r_i}(r, z)}{R(z)} - \varepsilon \frac{2\bar{\eta}_i(z) \bar{V}_{r_i}(r, z) H(z) r}{R^2(z)} + \varepsilon^2 \frac{2\bar{\eta}_i(z) \bar{V}_{r_i}(r, z) H^2(z) r^2}{R^3(z)} \quad 3.38$$

$$\bar{\sigma}_{z_z_i}(r, z) = -p_i + \frac{2\bar{\eta}_i(z)}{H(z)} \left[ -\frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dH(z)}{dz} \frac{r}{H(z)} \right] + 2\bar{\eta}_i(z) \frac{\partial \bar{V}_{z_i}(r, z)}{\partial z} \quad 3.39$$

- L'équilibre dynamique du fluide :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r_i}(r, z)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z)}{\partial z} \frac{H(z)}{R(z)} - r \frac{\partial \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dH(z)}{dz} \right] + \left( \bar{\sigma}_{r_i}(r, z) - \bar{\sigma}_{\phi\phi_i}(r, z) \right) \frac{H(z)}{R(z)} \quad 3.40$$

$$- \varepsilon^2 \left( \bar{\sigma}_{r_i}(r, z) - \bar{\sigma}_{\phi\phi_i}(r, z) \right) \frac{H^2(z)}{R^2(z)} r = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{z_z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dR(z)}{dz} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}_{z_z_i}(r, z)}{\partial z} \frac{H(z)}{R(z)} - r \frac{\partial \bar{\sigma}_{z_z_i}(r, z)}{\partial r} \frac{dH(z)}{dz} \right] + \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z) \frac{H(z)}{R(z)} \quad 3.41$$

$$- \varepsilon^2 \bar{\sigma}_{r_z_i}(r, z) \frac{H^2(z)}{R^2(z)} r = 0$$

### 3.3.4.2 Conditions Frontières

#### 3.3.4.2.1 Vitesse

- À la paroi interne

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) \text{ c'est à dire à } \bar{r} = 0 \\ \bar{v}_{r_a}(0, \bar{z}) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_a}(0, \bar{z}) = 0 \end{aligned} \quad 3.42$$

- À l'interface entre les deux fluides

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H_a(z) \text{ c'est à dire à } \bar{r} = \frac{H_a(z)}{H(z)} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \\ \bar{v}_{r_a} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_a} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \varepsilon \left( \bar{v}_{z_a} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \end{aligned} \quad 3.43$$

Et

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H_a(z) \text{ c'est à dire à } \bar{r} = \frac{H_a(z)}{H(z)} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \\ \bar{v}_{r_b} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_b} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \varepsilon \left( \bar{v}_{z_b} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \end{aligned} \quad 3.44$$

L'hypothèse d'absence de glissement nous donne aussi :

$$\bar{v}_{r_a} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) = \bar{v}_{r_b} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \quad \text{et} \quad \bar{v}_{z_a} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) = \bar{v}_{z_b} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right)$$

- À la paroi externe

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H(z) \text{ c'est à dire à } \bar{r} = 1 \\ \bar{v}_{r_b}(1, \bar{z}) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_b}(1, \bar{z}) - \varepsilon \left( \bar{v}_{z_b}(1, \bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \end{aligned} \quad 3.45$$

#### 3.3.4.2.2 Contraintes

- À la paroi interne

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z), \quad \bar{r} = 0 \\ \left. \begin{aligned} & \left[ \bar{\sigma}_{r_r_a}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_z_a}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = -\Delta \bar{P} \right. \\ & \text{et} \\ & \left. \left[ \bar{\sigma}_{r_z_a}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_z_a}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = +\Delta \bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \right\} \end{aligned} \quad 3.46 \end{aligned}$$

- À l'interface entre les deux fluides

- 

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H_a(z) \quad c'est \text{ à dire} \quad \text{à } \bar{r} = \frac{H_a(z)}{H(z)} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \\ \left. \begin{aligned} & \left[ \bar{\sigma}_{r_{r_a}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{r_{z_a}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \left[ \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = \right. \\ & \left. \bar{\eta}_o \left[ + \bar{\sigma}_{r_{r_b}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{r_{z_b}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right] \right] \\ & \text{et} \\ & \left[ \bar{\sigma}_{r_{z_a}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{z_{z_a}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \left[ \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = \right. \\ & \left. \bar{\eta}_o \left[ + \bar{\sigma}_{r_{z_b}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{z_{z_b}} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{3.47} \end{aligned}$$

- À la paroi externe

$$\begin{aligned} \text{à } r = R(z) + H(z) \quad c'est \text{ à dire} \quad \text{à } \bar{r} = 1 \\ \left. \begin{aligned} & \left[ \bar{\sigma}_{r_{r_b}}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_{z_b}}(1, \bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \right] \\ & \text{et} \\ & \left[ \bar{\sigma}_{r_{z_b}}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_{z_b}}(1, \bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \right] \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{3.48} \end{aligned}$$

Nous avons maintenant un système d'équations non dimensionnelles complet qui apparaît très lourd à traiter. Afin de résoudre notre système nous allons donc effectuer un développement limité des variables de vitesses et de contraintes en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .

La décomposition des variables par un développement en série est réalisée à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{r_i}(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{v}_{r_i}^0(\bar{r}, \bar{z}) + \varepsilon \bar{v}_{r_i}^1(\bar{r}, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{v}_{r_i}^n(\bar{r}, \bar{z}) \\ \bar{v}_{z_i}(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{v}_{z_i}^0(\bar{r}, \bar{z}) + \varepsilon \bar{v}_{z_i}^1(\bar{r}, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{v}_{z_i}^n(\bar{r}, \bar{z}) \\ \bar{\sigma}_{j k_i}(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{\sigma}_{j k_i}^0(\bar{r}, \bar{z}) + \varepsilon \bar{\sigma}_{j k_i}^1(\bar{r}, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{\sigma}_{j k_i}^n(\bar{r}, \bar{z}) \\ \bar{p}_i(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{p}_i^0(\bar{r}, \bar{z}) + \varepsilon \bar{p}_i^1(\bar{r}, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{p}_i^n(\bar{r}, \bar{z}) \end{aligned}$$

Il nous est alors possible de substituer ces relations aux variables présentes dans le système d'équations développé précédemment. Ceci va donner naissance à un nouveau système d'équations possédant des variables non géométriques à plusieurs ordres de grandeur de  $\varepsilon$ . Nous effectuerons donc l'analyse des équations et des conditions frontières à l'ordre minimal de  $\varepsilon$ , dans ce cas l'ordre 0. Par la suite les résultats issus de l'ordre 0 seront utilisés pour évaluer les équations à l'ordre supérieur, dans ce cas l'ordre 1. Cette analyse aux différents ordres de grandeurs nous permettra d'obtenir un système d'équations plus simple qu'il sera alors possible de résoudre. L'analyse complète des équations aux différents ordres de grandeur est présentée en annexe **B**.



### 3.3.5 Résolution des équations mécaniques

Afin de résoudre le système d'équations obtenu en annexe (équations encadrées), nous devons déterminer la valeur des inconnues suivantes qui dépendent uniquement de la position axiale.

$$\begin{aligned} & \bar{V}_r(\bar{z}); \bar{V}_z(\bar{z}); \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r}(\bar{z}); \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r}(\bar{z}); \bar{p}_a^0(\bar{z}); \bar{\sigma}_{z z_a}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{r z_a}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{r r_a}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{\phi \phi_a}(\bar{z}); \\ & \bar{H}(\bar{z}); \bar{R}(\bar{z}); \bar{H}_a(\bar{z}); \bar{p}_b^0(\bar{z}); \bar{\sigma}_{z z_b}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{r r_b}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{\phi \phi_b}(\bar{z}) \end{aligned}$$

Il faut noter que dans cette approche initiale le profil de température est supposé connu entre la sortie de la filière et la position de la ligne de figeage. Le calcul thermique sera réalisé lors de la section suivante.

Nos inconnues issues du développement mécanique sont liées par un ensemble d'équations dynamiques, cinématiques et rhéologiques qui ont été développées en annexe **B**.

- Les équations issues de l'équilibre dynamique à l'ordre 0 sont :

$$\bar{\sigma}_{r r_a}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r z_a}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \mathbf{3.49} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\sigma}_{r z_a}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_a}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \mathbf{3.50}$$

$$\bar{\sigma}_{r r_b}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \mathbf{3.51} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_b}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \mathbf{3.52}$$

$$\boxed{\bar{\eta}_a(\bar{z}) \frac{d\bar{\sigma}_{z z_b}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{\eta}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{\sigma}_{z z_b}(\bar{z}) = \bar{\eta}_b(\bar{z}) \frac{d\bar{\sigma}_{z z_a}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{\eta}_b(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{\sigma}_{z z_a}(\bar{z})} \quad \mathbf{3.53}$$

- Les équations issues de l'équilibre dynamique à l'ordre 1 sont;

$$\boxed{\begin{aligned} & -\Delta \bar{P} = \bar{\sigma}_{r z_a}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{\eta}_a(\bar{z}) \left[ \bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r r_b}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi \phi_b}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \right] \left[ 1 - \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right] - \bar{\sigma}_{r z_b}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \\ & + \bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r z_a}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r r_a}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi \phi_a}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \end{aligned}} \quad \mathbf{3.54}$$

$$\Delta \bar{P} \frac{\partial \bar{R}(z)}{\partial z} = \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(z) \frac{d \bar{H}_a(z)}{dz} - \eta_o \left[ \bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(z) \frac{d \bar{H}(z)}{dz} + \bar{H}(z) \left[ \frac{d \bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(z)}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}(z)}{\bar{R}(z)} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_a(z)}{\bar{H}(z)} \right) - \bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(z) \frac{d \bar{H}_a(z)}{dz} \right] + \bar{H}_a(z) \left[ \frac{d \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(z)}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(z)}{\bar{R}(z)} \right] \quad 3.55$$

- Les équations cinématiques issues de l'incompressibilité à l'ordre 0

$$\bar{v}_r^{-0}(z) - \left( \frac{d \bar{R}(z)}{dz} \right) \bar{v}_z^{-0}(z) = 0 \quad 3.56$$

- Les équations cinématiques issues de l'incompressibilité à l'ordre 1

$$\frac{d \bar{V}_r^{-1}(z)}{dr} - \frac{d \bar{V}_z^{-1}(z)}{dr} \frac{d \bar{R}(z)}{dz} = - \left[ \bar{H}(z) \frac{d \bar{V}_z^{-0}(z)}{dz} + \frac{\bar{H}(z)}{\bar{R}(z)} \bar{V}_r^{-0}(z) \right] \quad 3.57$$

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{H}(z) \bar{V}_z^{-0}(z) \bar{R}(z) \right) = 0 \quad 3.58 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \left( \bar{H}_a(z) \bar{V}_z^{-0}(z) \bar{R}(z) \right) = 0 \quad 3.59$$

- Les équations rhéologiques issues des lois de comportements à l'ordre 0 :

$$\bar{\sigma}_{r r_a}^{-0}(z) = -\bar{p}_a(z)^0 + \frac{2 \bar{\eta}_a(z)}{\bar{H}(z)} \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}(z)}{\partial r} \quad 3.60 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\phi \phi_a}^{-0}(z) = -\bar{p}_a(z)^0 + \frac{2 \bar{\eta}_a(z) \bar{V}_{r a}^{-0}(z)}{\bar{R}(z)} \quad 3.61$$

$$\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(z) = \bar{\eta}_a(z) \left[ \frac{d \bar{V}_{r a}^{-0}(z)}{dz} \right] + \frac{\bar{\eta}_a(z)}{\bar{H}(z)} \left( \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(z)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}(z)}{\partial r} \right) \frac{d \bar{R}(z)}{dz} \quad 3.62$$

$$\bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(z) = -\bar{p}_a(z)^0 - \frac{2 \bar{\eta}_a(z)}{\bar{H}(z)} \left[ \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(z)}{\partial r} \right] \frac{d \bar{R}(z)}{dz} + 2 \bar{\eta}_a(z) \frac{d \bar{V}_{z a}^{-0}(z)}{dz} \quad 3.63$$

$$\bar{\sigma}_{r r_b}^{-0}(z) = -\bar{p}_b(z)^0 + \frac{2 \bar{\eta}_b(z)}{\bar{H}(z)} \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}(z)}{\partial r} \quad 3.64 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\phi \phi_b}^{-0}(z) = -\bar{p}_b(z)^0 + \frac{2 \bar{\eta}_b(z) \bar{V}_{r b}^{-0}(z)}{\bar{R}(z)} \quad 3.65$$

$$\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}(z) = \bar{\eta}_b(z) \left[ \frac{d \bar{V}_r^{-0}(z)}{dz} \right] + \frac{\bar{\eta}_b(z)}{\bar{H}(z)} \left( \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(z)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}(z)}{\partial r} \right) \frac{d \bar{R}(z)}{dz} \quad 3.66$$

$$\bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(z) = -\bar{p}_b(z)^0 - \frac{2 \bar{\eta}_b(z)}{\bar{H}(z)} \left[ \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(z)}{\partial r} \right] \frac{d \bar{R}(z)}{dz} + 2 \bar{\eta}_b(z) \frac{d \bar{V}_{z b}^{-0}(z)}{dz} \quad 3.67$$

Afin d'éviter les problèmes de multiplicité de solutions mis en avant par André (1999) lors des calculs réalisés du bas vers le haut, nous résolvons notre système d'équations de la ligne de figeage jusqu'à la sortie de la filière. Pour ce faire il nous sera nécessaire de poser les valeurs de la force d'étirage aux rouleaux pinceurs, de la surpression permettant le gonflement de la bulle, et de la position de la ligne de figeage. Les conditions frontières à la position de figeage seront utilisées afin d'évaluer la valeur des variables à cet endroit. La température en sortie de filière sera égale à la température moyenne pondérée par rapport aux débits relatifs des fluides. La température à la position de figeage correspondra à la valeur de température de cristallisation la plus élevée des deux fluides coextrudés. Entre ces deux extrêmes nous utiliserons comme approche initiale un profil thermique imposé afin de décrire l'évolution de la température entre la ligne de figeage et la sortie de la filière. En utilisant ce profil thermique imposé il nous sera alors possible de déterminer la viscosité en fonction de la position axiale. Ceci nous permettra de valider notre modèle afin de comparer nos résultats de calculs à ceux obtenus par Laffargue (2003). Le taux de refroidissement que nous utiliserons (-573 °C/m ou encore -53 °C/s) correspond à un refroidissement typique survenant lors du soufflage de gaine. Dans la section suivante nous développerons l'équation de chaleur de façon à pouvoir prendre en considération les échanges thermiques entre la bulle et l'air de refroidissement.

Grâce aux termes dérivatifs de nos variables et de la viscosité il nous sera possible d'évaluer de façon successive la valeur de nos variables en fonction de la position axiale jusqu'à la sortie de la filière. Nous itérerons alors en utilisant une méthode de Newton sur les valeurs de la force, de la surpression et de la position de figeage jusqu'à ce que les valeurs calculées à la sortie de filières soient égales aux conditions frontières à cette position.

Les conditions frontières aux deux extrémités de la bulle sont données par :

*en sortie de filière*

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{R}(0) = 1, \quad \|\bar{\vec{v}}\| = \sqrt{\bar{v}_z^2(0) + \bar{v}_r^2(0)} = 1,$$

$$T^0(0) = T_{ex\_a} \frac{\bar{H}_a(0)}{\bar{H}(0)} + T_{ex\_b} \frac{\bar{H}(0) - \bar{H}_a(0)}{\bar{H}(0)}$$

*en fin d'étirage*

$$\bar{z} = L/R_o, \quad \bar{R}(L/R_o) = BUR, \quad \frac{d\bar{R}(L/R_o)}{d\bar{z}} = 0, \quad \|\bar{\vec{v}}\| = \bar{v}_z^0(L/R_o) = DR,$$

$$T^0(L/R_o) = T_{cristallisation}$$

Ces conditions nous permettent de déterminer les valeurs initiales de certaines de nos variables. En intégrant les relations **3.58** et **3.59** on a :

$$\bar{H}_a(\bar{z})\bar{V}_z^0(\bar{z})\bar{R}(\bar{z}) = CteA \quad \mathbf{3.68} \quad \text{et} \quad \bar{H}(\bar{z})\bar{V}_z^0(\bar{z})\bar{R}(\bar{z}) = CteB \quad \mathbf{3.69}$$

En évaluant ces équations à  $\bar{z} = 0$  et à  $\bar{z} = \frac{L}{R_o}$  on trouve :

$$\bar{H}_a\left(\frac{L}{R_o}\right) = \frac{H_{0a}}{H_o * BUR * TUR} \quad \mathbf{3.70} \quad \text{et} \quad \bar{H}\left(\frac{L}{R_o}\right) = \frac{1}{BUR * TUR} \quad \mathbf{3.71}$$

La relation **3.56** nous donne

$$\bar{v}_r^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.72}$$

Et les relations **3.49** à **3.52** nous permettent d'obtenir :

$$\bar{\sigma}_{rr_a}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.73} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{rr_b}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.74}$$

$$\bar{\sigma}_{rz_a}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.75} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{rz_b}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.76}$$

En combinant les relations **Eq.82** et **Eq.115** présentées en annexe **B** on obtient :

$$\bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{\bar{F}_{tirage}}{\bar{R}\left(\frac{L}{R_0}\right) \left[ \bar{H}_a\left(\frac{L}{R_0}\right) + \left[ \bar{H}\left(\frac{L}{R_0}\right) - \bar{H}_a\left(\frac{L}{R_0}\right) \right] \frac{\bar{\eta}_b\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\bar{\eta}_a\left(\frac{L}{R_0}\right)} \right]} \quad \mathbf{3.77}$$

$$\bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{\bar{\eta}_b\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\bar{\eta}_a\left(\frac{L}{R_0}\right)} \left( \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}\left(\frac{L}{R_0}\right) \right) \quad \mathbf{3.78}$$

Il nous reste alors les variables suivantes à déterminer afin de résoudre notre système d'équations :

$$\bar{p}_a^{-0}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{\varphi\varphi_a}^{-0}(\bar{z}); \bar{p}_b^{-0}(\bar{z}); \bar{\sigma}_{\varphi\varphi_b}^{-0}(\bar{z}); \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}}{\partial r}(\bar{z}); \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}}{\partial r}(\bar{z});$$

Ainsi que les termes dérivatifs suivants qui sont aussi inconnus :

$$\frac{d\bar{V}_r^{-0}}{dz}(\bar{z}); \frac{d\bar{V}_z^{-0}}{dz}(\bar{z}); \frac{d\bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}}{dz}(\bar{z}); \frac{d\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}}{dz}(\bar{z});$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}}{dz}(\bar{z}); \frac{d\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}}{dz}(\bar{z}); \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{dz}; \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz}; \frac{d^2\bar{R}(\bar{z})}{dz^2}$$

Ce qui fait un total de 15 inconnues à déterminer à chaque position axiale. Pour calculer la valeur de ces inconnues on utilisera la dérivé des équations 3.50, 3.52, 3.56 qui sont respectivement égales à

$$\boxed{\frac{d\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}}{dz}(\bar{z}) - \frac{d\bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}}{dz}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} - \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d^2\bar{R}(\bar{z})}{dz^2} = 0} \quad \mathbf{3.79}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}}{dz}(\bar{z}) - \frac{d\bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}}{dz}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} - \bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d^2\bar{R}(\bar{z})}{dz^2} = 0} \quad \mathbf{3.80}$$

$$\boxed{\left( \frac{d\bar{v}_r^{-0}}{dz}(\bar{z}) \right) - \left( \frac{d\bar{v}_z^{-0}}{dz}(\bar{z}) \right) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right) - \left( \frac{d^2\bar{R}(\bar{z})}{dz^2} \right) \bar{v}_z^{-0}(\bar{z}) = 0} \quad \mathbf{3.81}$$

A ces trois équations s'ajoutent les relations 3.53 à 3.55 issues de l'équilibre dynamique, les relations 3.57 à 3.59 issues de l'incompressibilité à l'ordre 1 et les équations rhéologiques 3.60 à 3.65. Ce qui fait un total de 15 équations qu'il est possible de résoudre par inversion de matrice pour chaque incrément de position. Ayant préalablement déterminé les valeurs suivantes à la cote z:

$$\bar{V}_r\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{V}_z\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{\sigma}_{zz_a}\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{\sigma}_{rz_a}\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{H}\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{R}\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{H}_a\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{\sigma}_{zz_b}\left(\frac{L}{R_o}\right); \bar{\sigma}_{rz_b}\left(\frac{L}{R_o}\right)$$

Il nous sera possible de déterminer les valeurs de ces variables à la cote z-dz grâce aux termes dérivatifs que nous aurons évalués en solutionnant le système matriciel. Nous pouvons alors résoudre de façon successive notre système d'équations à chaque segment de la bulle jusqu'à ce que la position axiale soit égale à 0. Si le rayon l'épaisseur de la bulle et la température ne coïncident pas avec les dimensions et la température de la filière, nous modifierons alors la force d'étirage, la surpression et la longueur de figeage que nous avons initialement supposé. Typiquement ce type de résolution fait apparaître des erreurs d'approximation que nous combattons en utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et en utilisant 10001 segments différents. L'algorithme de résolution utilisé est présenté à la figure 3.6.

### 3.3.6 Validation

Notre première préoccupation est maintenant de démontrer la validité du modèle multicouche que nous venons de développer. La méthode la plus simple consiste à démontrer qu'un calcul multicouche monomatière est exactement identique à un calcul monocouche pour des conditions identiques (taux de refroidissement, géométrie, etc.). Nous avons donc réalisé ces deux calculs dans les conditions présentées au tableau 3.2, ces valeurs correspondent à un LDPE mis en forme sur une filière qui aurait les mêmes dimensions que la filière du CRASP. Les résultats de ces calculs sont présentés à la figure 3.7. Il est possible de constater sur cette figure que les résultats obtenus sont parfaitement identiques. Notre modèle multicouche nous permet donc de décrire aussi le cas du soufflage de gaine monocouche.

**Tableau 3.2 : Valeurs utilisées lors des calculs de validation**

	Unités	Valeur
Propriétés du matériau		
Densité	Kg/m <sup>3</sup>	818
E/R	K	5300
Paramètres opératoires		
Débit massique	kg/hr	Intérieur / extérieur = total 1.8 / 1.8 = 3.6
Température d'extrusion	°C	220
BUR	----	2
TUR	----	8
Température de cristallisation	°C	103
Température extérieure	°C	20
dT/dz	°C/m	-573.35
Paramètres géométriques		
Rayon extérieur de la filière	m	.03175
Entrefer de la filière	m	.00153

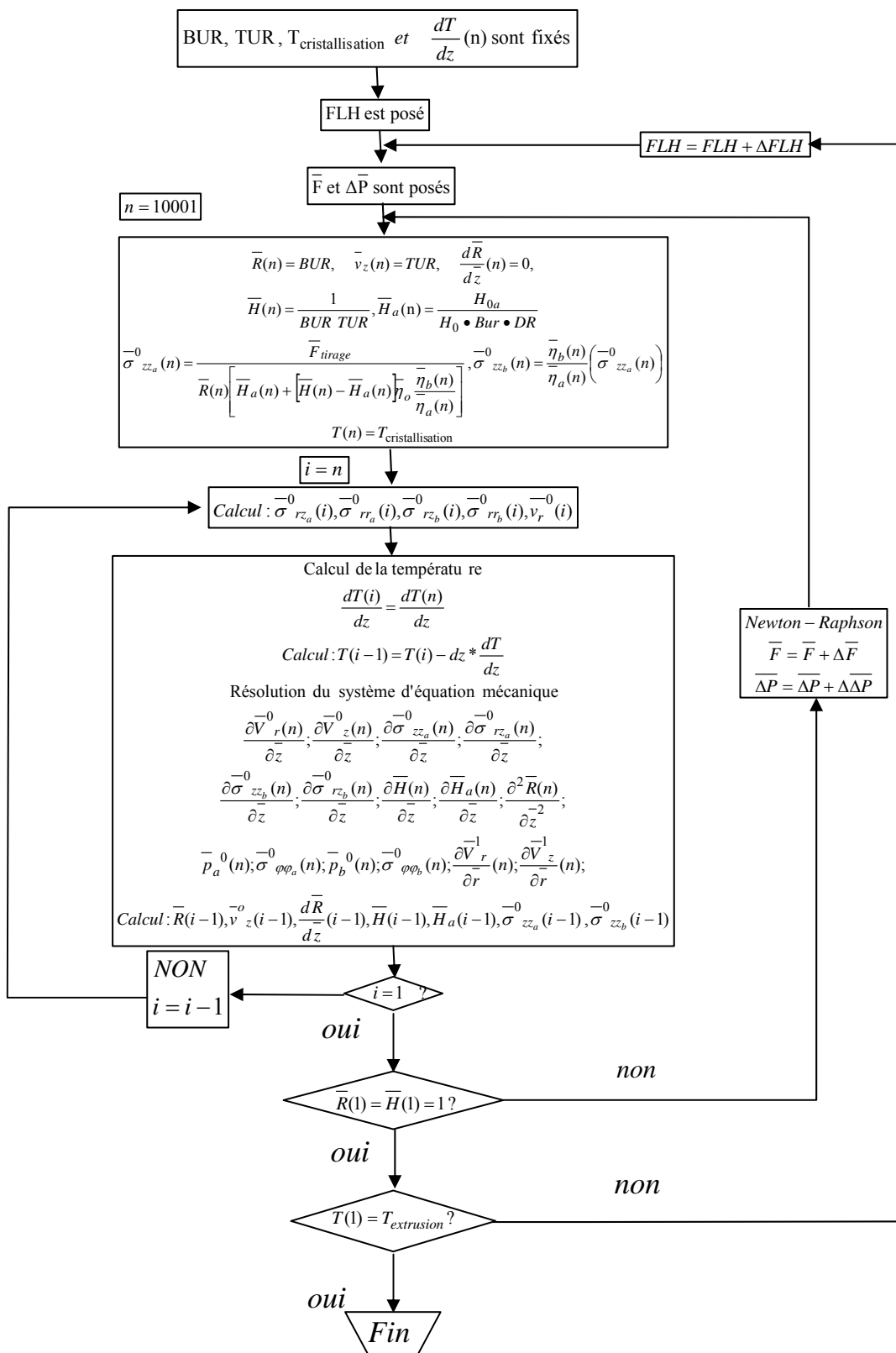
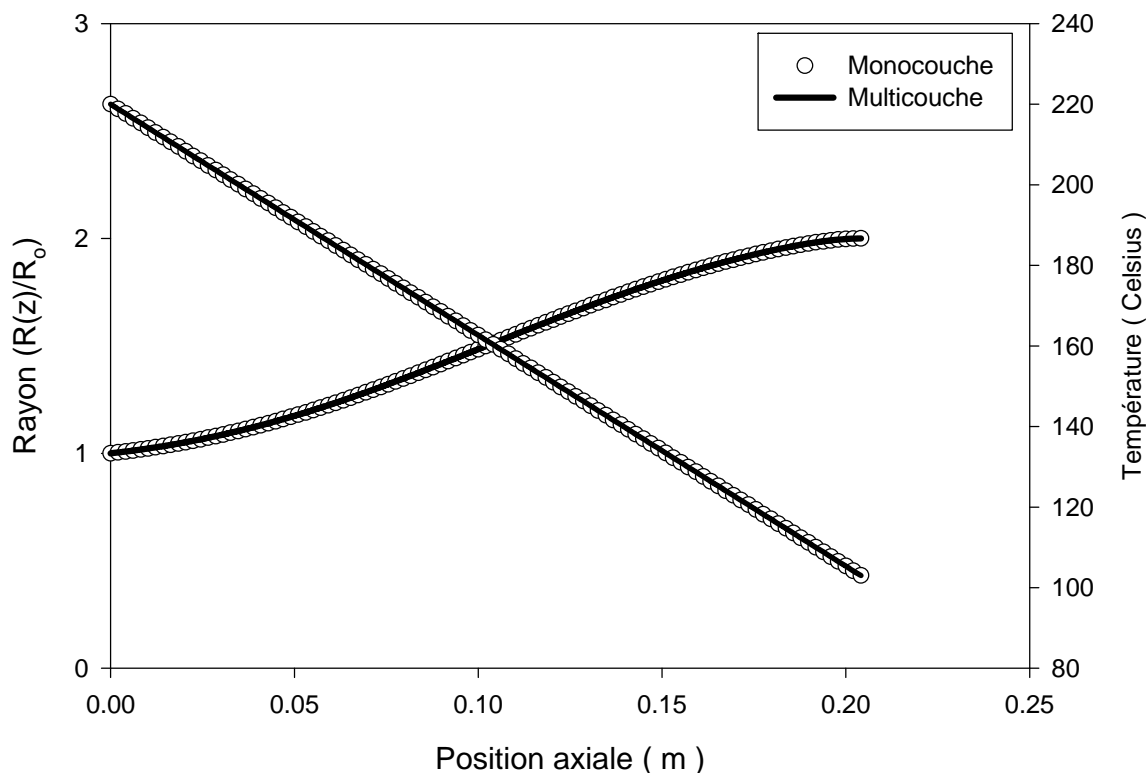
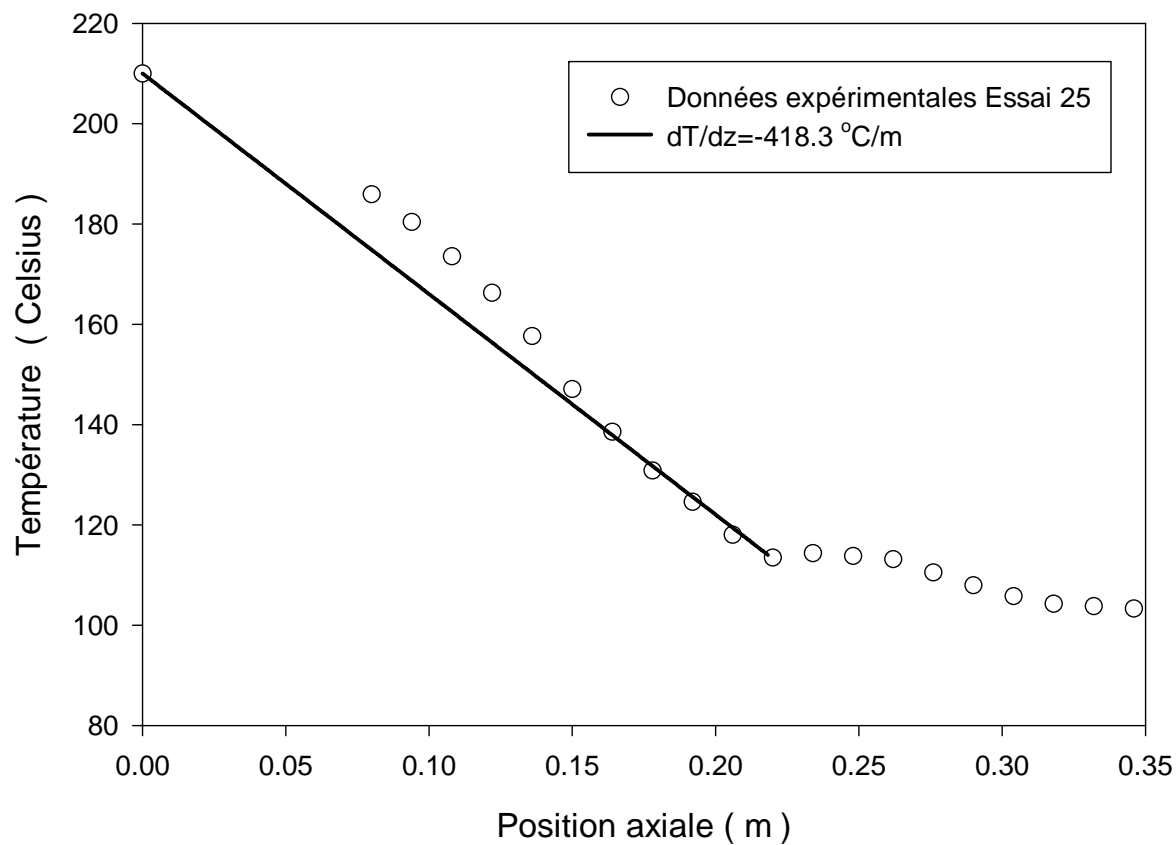


Figure 3.6 : Algorithme de résolution des équations mécaniques avec un taux de refroidissement linéaire constant

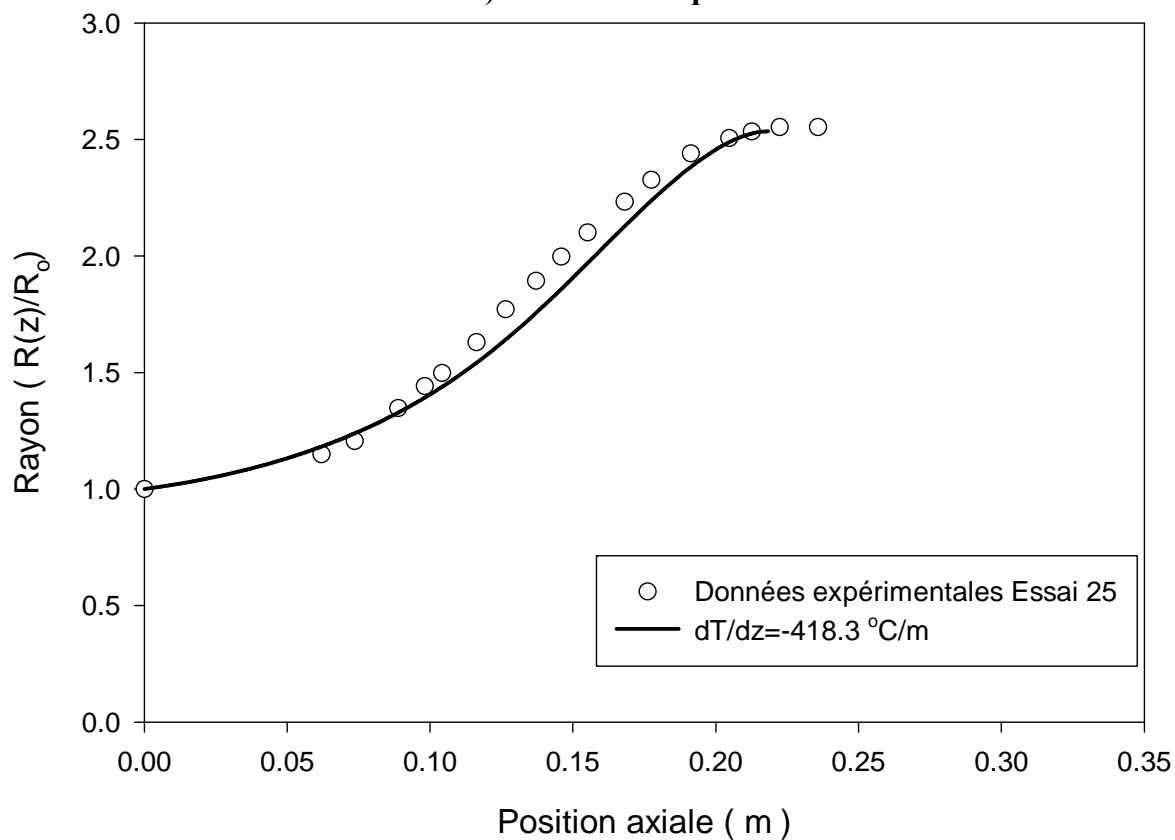


**Figure 3.7 : Comparaison entre le calcul monocouche et multicouche dans des conditions identiques avec un taux de refroidissement constant égal à  $-573.35$  °C/m.**

Comparons maintenant nos résultats de calculs à un de nos résultats expérimentaux multicouches obtenus avec la petite filière (Essai 25). Grâce au profil thermique obtenu expérimentalement il nous a été possible de déterminer que le taux de refroidissement moyen était de  $-420$  °C/min. Le calcul mécanique a donc été réalisé en utilisant cette valeur. Les résultats sont illustrés à la figure 3.8. Il est possible de constater que l'utilisation d'un profil thermique linéaire ne permet pas de représenter de façon totalement adéquate l'évolution de la température en fonction de la position axiale pour ce cas particulier. Par contre l'allure générale du profil géométrique calculé est globalement représentative du profil géométrique expérimental.



a) Profil thermique



b) Profil géométrique

**Figure 3.8 : Comparaison entre les données expérimentales (Essai 25) et le calcul réalisé avec un taux de refroidissement constant égal à  $-420 \text{ }^\circ\text{C/m}$ .**



### 3.3.7 Récapitulatif

Nous venons de développer un modèle permettant d'évaluer la cinématique et la dynamique du procédé de soufflage de gaine multicouche dans un repère fixe en utilisant l'approche développée à l'origine par Housiadas et Tsamopoulos (2000a, 2000b). L'analyse des équations relativement complexes que nous obtenons aux différents ordres de grandeur de  $\varepsilon$  nous permet de valider les hypothèses faites lors de l'élaboration des modèles monocouches et multicouches basés sur l'approche de Pearson (1970a, 1970b). Nous avons démontré que le calcul multicouche nous permet de retrouver les résultats obtenus en calcul monocouche lorsque l'on suppose que l'on coextrude deux résines identiques.

Le principal désavantage de la méthode de résolution que nous venons de présenter réside dans le fait que nous imposons un profil de température afin d'évaluer les propriétés rhéologiques. Il est donc nécessaire de connaître préalablement au calcul la position de la ligne de figeage. Ceci est particulièrement gênant si nous tentons de réaliser un calcul prédictif. De plus l'imposition du profil thermique ne permet pas de calculer la longueur du plateau de cristallisation. Dans la partie suivante nous allons donc développer l'équation de la chaleur dans un repère fixe en utilisant l'approche de Housiadas. Ceci devrait nous permettre de calculer le profil de température. La position de la ligne de figeage sera alors un résultat de calcul direct qui dépendra des conditions de refroidissement que nous imposerons au film.

### 3.4 Développement thermique

#### 3.4.1 Hypothèses

Notre approche initiale est de développer l'équation thermique en utilisant la même méthode que celle utilisée pour traiter les équations mécaniques afin d'obtenir un modèle thermomécanique dans un système de coordonnées cylindriques en utilisant un repère fixe. L'évaluation de la température en régime stationnaire de la bulle nous oblige à faire quelques hypothèses supplémentaires. L'hypothèse de bulle axisymétrique faite lors du développement mécanique nous amène naturellement à une distribution du profil de température de la bulle axisymétrique. À l'interface entre les deux matériaux nous supposons que le profil thermique est continu et que le transfert de chaleur entre les deux matériaux est réalisé par conduction sans résistance de contact. De plus, la dissipation visqueuse sera considérée comme négligeable face aux effets de convection et de conduction. En effet le nombre de Brinkman correspondant à notre écoulement est très inférieur à l'unité. Dans ces conditions l'équation de chaleur en coordonnées cylindriques est :

$$\rho C_p \left( v_r(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + v_z(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} \right] \quad 3.82$$

#### 3.4.2 Conditions Frontières

- Paroi interne

A la paroi interne contrairement à la plupart des travaux réalisés jusqu'à maintenant nous allons tenir compte de la possibilité de l'existence d'un échange thermique entre l'air situé à l'intérieur de la bulle et le film. Ceci devrait nous permettre de prendre en compte les effets de convection naturelle ou de convection forcée à l'aide d'un système de refroidissement interne.

$$k_a \frac{\partial T(R(z) + H(z), z)}{\partial \vec{n}_i} = -h_i(z)(T(R(z), z) - T_{\infty i}) \quad 3.83$$

- Paroi externe

$$k_b \frac{\partial T_b(R(z) + H(z), z)}{\partial \vec{n}_e} = -h_e(T_b(R(z) + H(z), z) - T_{\infty e}) \quad 3.84$$

- Interface entre les deux fluides

$$k_a \frac{\partial T_a(R(z) + H_a(z), z)}{\partial \vec{n}_{ab}} = k_b \frac{\partial T_b(R(z) + H_b(z), z)}{\partial \vec{n}_{ba}} \quad 3.85$$

L'hypothèse de continuité de température à l'interface nous donne

$$T_a(R(z) + H_a(z), z) = T_b(R(z) + H_a(z), z) \quad 3.86$$

### 3.4.3 Adimensionnalisation.

Tout comme pour le développement mécanique il nous faut maintenant procéder à l'adimensionnalisation de nos équations. Afin de réaliser cette tâche nous utilisons le changement de variable suivant.

$$\begin{aligned} k_a &= k_{oa} \bar{k}_a; & \rho_a &= \rho_{0a} \bar{\rho}_a; & C_{p_a} &= C_{p_{oa}} \bar{C}_{p_a} \\ k_b &= k_{ob} \bar{k}_b; & \rho_b &= \rho_{0b} \bar{\rho}_b; & C_{p_b} &= C_{p_{ob}} \bar{C}_{p_b} \\ \rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o \bar{h}_i(\bar{z}) &= h_i(z) & \rho_{ob} C_{p_{ob}} V_o \bar{h}_e(\bar{z}) &= h_e(z) \\ T_a(r, z) &= T_{oa} \bar{T}_a(\bar{r}, \bar{z}) & T_b(r, z) &= T_{ob} \bar{T}_b(\bar{r}, \bar{z}) \\ \text{et } \lambda &= \frac{k_{oa}}{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o H_o} & \bar{\alpha}_a &= \frac{\bar{k}_a}{\rho_a C_{p_a}} & \bar{\alpha}_b &= \frac{\bar{k}_b}{\rho_b C_{p_b}} \\ \beta_i &= \frac{\bar{h}_i(\bar{z}) R_o}{k_a} & \beta_e &= \frac{\bar{h}_e(\bar{z}) R_o}{k_a} \end{aligned}$$

Pour la couche A l'équation de la chaleur prendra alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{H(\bar{z})} \left( \bar{v}_r(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{v}_z(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{\partial R(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} + \varepsilon \bar{v}_z(\bar{r}_a, \bar{z}) \left( \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{r}(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial H(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \right) \right] \\ & = \bar{\lambda} \bar{\alpha}_a \left[ \frac{1}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{\partial R(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \right. \\ & \quad + \varepsilon \left[ \frac{2\bar{r}(\bar{z})}{\bar{H}^2(\bar{z})} \frac{\partial R(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial H(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{1}{H(\bar{z})} \frac{\partial R(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{H(\bar{z})} \frac{\partial R(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ & \quad + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\bar{r}(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial H(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{r}(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial H(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{r}^2(\bar{z})}{H^2(\bar{z})} \left( \frac{\partial H(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \right] \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon^3 H(\bar{z}) \bar{r}^3(\bar{z})}{\bar{R}^3(\bar{z})} \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \right] \quad 3.87 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \bar{r}_a = 0 \leq \bar{r} \leq \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}$$

Pour la couche B on aura alors :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{\overline{H(z)}} \left( \overline{v_r(r_b, z)} - \overline{v_z(r_b, z)} \frac{\partial \overline{R(z)}}{\partial z} \right) \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r} + \overline{v_z(r_b, z)} \varepsilon \left( \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial z} - \frac{\overline{r(z)}}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{H(z)}}{\partial z} \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r} \right) \right] \\
 & = \lambda \overline{\alpha_b} \left[ \frac{1}{\overline{H^2(z)}} \left( 1 + \left( \frac{\partial \overline{R(z)}}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r^2} \right. \\
 & \quad + \varepsilon \left[ \frac{2\overline{r(z)}}{\overline{H^2(z)}} \frac{\partial \overline{R(z)}}{\partial z} \frac{\partial \overline{H(z)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r^2} - \frac{1}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{R(z)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{R(z)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r} \right] \\
 & \quad + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial z^2} - \frac{\overline{r(z)}}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{H(z)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r} - \frac{\overline{r(z)}}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{H(z)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial z} + \frac{\overline{r^2(z)}}{\overline{H^2(z)}} \left( \frac{\partial \overline{H(z)}}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r^2} \right] \\
 & \quad \left. + \frac{\varepsilon^3 \overline{H(z)} \overline{r^3(z)}}{\overline{R^3(z)}} \frac{\partial^2 \overline{T_b(r_b, z)}}{\partial r^2} \right] \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \overline{r_b} = \frac{\overline{H_a(z)}}{\overline{H(z)}} \leq \overline{r} \leq 1$$

Les conditions frontières deviennent :

Paroi interne

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{\overline{H(z)}} \frac{\partial \overline{T_a(0, z)}}{\partial r} \left( 1 + \left( \frac{d\overline{R(z)}}{dz} \right)^2 \right) - \varepsilon \left[ \frac{\partial \overline{T_a(0, z)}}{\partial z} \frac{d\overline{R(z)}}{dz} \right] \right) = \varepsilon \kappa_i (\overline{T_a(0, z)} - \overline{T_{\infty i}}) \\
 & \kappa_i = \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \overline{h_i(z)}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Paroi externe

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{\overline{H(z)}} \left( 1 + \left( \frac{d\overline{R(z)}}{dz} \right)^2 \right) \frac{\partial \overline{T_b(1, z)}}{\partial r} + \varepsilon \left( \frac{2}{\overline{H(z)}} \frac{d\overline{R(z)}}{dz} \left( \frac{d\overline{H(z)}}{dz} \right) \frac{\partial \overline{T_b(1, z)}}{\partial r} - \frac{d\overline{R(z)}}{dz} \frac{\partial \overline{T_b(1, z)}}{\partial z} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\overline{H(z)}} \left( \frac{d\overline{H(z)}}{dz} \right)^2 \frac{\partial \overline{T_b(1, z)}}{\partial r} - \frac{d\overline{H(z)}}{dz} \frac{\partial \overline{T_b(1, z)}}{\partial z} \right) \right) = -\varepsilon \kappa_e (\overline{T_b(1, z)} - \overline{T_{\infty e}}) \\
 & \kappa_e = \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_b} \overline{h_e(z)}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

## Interface

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{H}(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} + \varepsilon \left( \frac{1}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} + \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}^2(\bar{z})} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} \right) \\
& - \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial z} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \\
& + \varepsilon^2 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} - \frac{\partial \bar{T}_a(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial z} \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)
\end{aligned} \right] \\
& \left[ \begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{H}(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} + \varepsilon \left( \frac{1}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} + \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}^2(\bar{z})} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} \right) \\
& - \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial z} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \\
& + \varepsilon^2 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial r} - \frac{\partial \bar{T}_b(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial z} \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)
\end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{3.91}$$

et

$$\bar{T}_a\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z}\right) = \bar{T}_b\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z}\right) \tag{3.92}$$

Il est possible de constater que ici, comme dans le cas des équations mécaniques, les équations sont affectées par le paramètre  $\varepsilon$ . Nous effectuerons donc le même type de développement en série que celui que nous avons réalisé lors du développement mécanique.

$$\begin{aligned}
\bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z}) &= \bar{T}_a^0(\bar{r}_a, \bar{z}) + \varepsilon \bar{T}_a^1(\bar{r}_a, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{T}_a^n(\bar{r}_a, \bar{z}) \\
\bar{T}_b(\bar{r}_b, \bar{z}) &= \bar{T}_b^0(\bar{r}_b, \bar{z}) + \varepsilon \bar{T}_b^1(\bar{r}_b, \bar{z}) + \dots + \varepsilon^n \bar{T}_b^n(\bar{r}_b, \bar{z})
\end{aligned}$$

Tout comme pour les équations mécaniques nous pouvons maintenant évaluer les équations aux différents ordres de grandeur afin d'obtenir un système d'équations plus simple qu'il sera possible de solutionner.

Il faut aussi noter que les termes  $\kappa_e$  et  $\kappa_i$  que l'on retrouve aux équations 3.89 et 3.90 sont des facteurs de  $\varepsilon$ . Pour la vaste majorité des cas que nous traitons les valeurs de ces termes qui sont directement liées au taux de refroidissement, sont comprises entre 0.2 et 5. Dans ce cas l'analyse des équations aux différents ordres de grandeur de  $\varepsilon$  est valide car les couples  $\kappa_e \varepsilon$  et  $\kappa_i \varepsilon$  posséderont un ordre de grandeur d'environ 0.01 ce qui rend licite le développement en série de l'analyse thermique au même titre qu'elle était valide lors de la partie mécanique. Par contre pour des cas de refroidissement extrême, il se pourrait que localement, la valeur de  $\kappa_e$  deviennent très élevée. Ce type de refroidissement pourra uniquement être rencontré à la sortie de la filière. Dans ces cas particuliers le calcul pourrait être hasardeux et générer des solutions aberrantes localement. Il ne faut aussi mentionner que le calcul mécanique est réalisé en utilisant une température moyenne qui permet d'évaluer la viscosité dans chacune des couches. Si le calcul est utilisé pour reproduire un cas physique ou la différence de température entre les deux matériaux est très importante le calcul pourrait donner naissance à des solutions non représentatives de la réalité. En gardant en mémoire ces réserves nous pouvons maintenant évaluer les équations aux différents ordre grandeur afin d'obtenir un système d'équation plus simple qu'il sera possible de solutionner.

### 3.4.4 Analyse des équations

A l'ordre 0 l'équation de la chaleur pour le matériau A devient :

$$\left[ \frac{1}{H(\bar{z})} \left( v_r^0(\bar{z}) - v_z^0(\bar{z}) \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \right] = \lambda \bar{\alpha}_a \left[ \frac{1}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_a^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \right] \quad \mathbf{3.93}$$

Or la relation **Eq.4** présentée en annexe **B** nous permet d'éliminer le membre de gauche, l'équation précédente devient donc :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_a^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \mathbf{3.94}$$

Il est possible d'appliquer le même raisonnement pour la couche B afin d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_b^0(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \mathbf{3.95}$$

A cet ordre de grandeur les conditions frontières à la paroi interne et externe deviennent :

$$\frac{\partial \bar{T}_a^0(0, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \mathbf{3.96} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}_b^0(1, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \mathbf{3.97}$$

Donc en intégrant les relations **3.94** et **3.95** en utilisant les relations précédentes on obtient :

$$\frac{\partial \bar{T}_a^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 = \frac{\partial \bar{T}_b^0(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \quad \mathbf{3.98}$$

De plus la condition de continuité des températures à l'interface nous donne :

$$\bar{T}_a^0\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, z\right) = \bar{T}_b^0\left(\frac{\bar{H}_b(\bar{z})}{H(\bar{z})}, z\right) = \bar{T}^0(z) \quad \mathbf{3.99}$$

Il est donc possible de conclure que la température à l'ordre 0 n'est pas une fonction de la position radiale. Ceci signifie donc qu'à l'ordre 0, la température est la même dans les deux couches à une position axiale donnée. Cela peut paraître paradoxal, surtout si on considère que les deux matériaux peuvent être extrudés à des températures différentes. Mais il faut se souvenir que ce résultat est lié à nos hypothèses initiales et donc que la température à l'ordre 0 n'est pas la température exacte du film, mais uniquement une de ses composantes. Ceci est une limitation du modèle. Afin de déterminer l'évolution de la température en fonction de la position axiale et radiale, il est nécessaire de passer à un ordre de grandeur supérieur afin de déterminer la température à l'ordre 1. La température du film sera alors constituée d'une

composante majoritaire à l'ordre 0 indépendante de la position radiale et d'une perturbation de faible intensité à l'ordre 1 qui elle sera dépendante de la position radiale et axiale. Il faut aussi noter que ce résultat à l'ordre 0 permet de valider l'hypothèse sur la température réalisée par Han et Park (1975a 1975b). Il nous est maintenant possible d'analyser nos équations à un ordre supérieur. A l'ordre 1 l'équation de la chaleur pour le fluide A s'écrit, en tenant compte du résultat précédent, de la façon suivante :

$$\left[ \begin{aligned} & \frac{1}{H(\bar{z})} \left( \bar{v}_r(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial r} - \bar{v}_z(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} \right) \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \\ & + \frac{1}{H(\bar{z})} \left( \bar{v}_r(\bar{z}) - \bar{v}_z(\bar{z}) \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right) \frac{\partial \bar{T}^1(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r} + \bar{v}_z(\bar{z}) \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} \end{aligned} \right] = \lambda \bar{\alpha}_a \left[ \frac{1}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r^2} \right] \quad \mathbf{3.100}$$

Ici encore les deux premiers termes du membre de gauche sont nuls (relations **Eq.4** et **3.99**), cette équation est donc égale à :

$$\left[ \bar{v}_z(\bar{z}) \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} \right] = \lambda \bar{\alpha}_a \left[ \frac{1}{\bar{H}^2(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r^2} \right] \quad \mathbf{3.101}$$

Qu'il est possible d'intégrer de façon à obtenir :

$$\frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r} = \frac{\bar{H}^2(\bar{z})}{\lambda \bar{\alpha}_a \left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right)^2 \right)} \bar{v}_z(\bar{z}) \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} r + C11 \quad \mathbf{3.102}$$

A cet ordre de grandeur la condition frontière à la paroi interne est exprimée par la relation suivante :

$$\left( \frac{\partial \bar{T}_a(0, \bar{z})}{\partial r} \right) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right)^2 \right)} \left[ \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \bar{h}_i (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) + \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right] \quad \mathbf{3.103}$$

En évaluant la relation **3.102** à la paroi interne en combinaison avec la relation précédente il est possible de déterminer la valeur de la constante d'intégration C11 et on obtient :

$$\frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r} = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right)^2 \right)} \left( \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z})}{\lambda \bar{\alpha}_a} \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} r + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \bar{h}_i (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) + \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial z} \right) \quad \mathbf{3.104}$$

En utilisant le même raisonnement pour la couche B, en utilisant la condition frontière à la paroi externe on trouve :

$$\frac{\partial \bar{T}_b^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^2\right)} \left[ \frac{\bar{H}(\bar{z}) \bar{v}_z(\bar{z})}{\lambda \alpha_b} \left( \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) (\bar{r}-1) - \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_o \bar{k}_b} \bar{h}_e \left( \bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_e} \right) + \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \quad 3.105$$

Afin de pouvoir déterminer  $\frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}}$  il nous faut maintenant éliminer les termes dérivatifs à l'ordre 1. En évaluant la relation de condition frontière à l'interface à l'ordre 1 (3.91) on obtient après un réarrangement la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{T}_b^{-1}(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{T}_a^{-1}(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_b} + \frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( 1 - \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_b} \right) \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left( 1 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right)} \quad 3.106$$

Il nous est maintenant possible d'évaluer les relations 3.104 et 3.105 à l'interface et de substituer le résultat obtenu dans l'équation 3.106 de façon à obtenir :

$$\frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{- \left[ \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_o \bar{k}_b} \bar{h}_e \left( \bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_e} \right) + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_o \bar{k}_a} \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_b} \bar{h}_i \left( \bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_i} \right) \right]}{\left[ \frac{\bar{v}_z(\bar{z})}{\lambda \alpha_b} \left[ \bar{H}(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z}) \right] + \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}_a(\bar{z})}{\lambda \alpha_a} \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_b} \right]} \quad 3.107$$

L'utilisation de la relation 3.107 nous permet donc de déterminer l'évolution de la température dans la direction uniaxiale en fonction de la position si nous négligeons les termes aux ordres de grandeurs supérieurs.

Il est maintenant intéressant de vérifier si, grâce à cette équation, il est possible de décrire le cas du soufflage de gaine monocouche que nous avons présenté dans la partie modélisation. Si on suppose que nous avons un écoulement composé uniquement du fluide B et que le terme de convection interne est nul l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{R_o}{H_o} \frac{\left[ \bar{h}_e \left( \bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_e} \right) \right]}{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z}) \rho_b C_{p_b}} \quad 3.108$$

En reprenant l'équation de chaleur traditionnellement utilisée, que nous avons présentée dans la partie modélisation sous forme adimensionnelle, on obtient :

$$\left( \frac{d\bar{T}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \frac{1}{\varepsilon \bar{H}(\bar{z})} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{T}(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{r}(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{\partial \bar{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \right) = - \frac{\bar{h}_e}{\rho C_p \bar{H}(\bar{z}) \bar{v}_z(\bar{z})} \frac{R_o}{H_o} \left( \bar{T}(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_e} \right) \quad 3.109$$



Qui se réduit en considérant l'hypothèse de l'indépendance de la température face au rayon qui est faite dans ce cas, a :

$$\frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} = -\frac{\bar{h}_e}{\rho C_p H(\bar{z}) v_z(\bar{z})} \frac{R_o}{H_o} (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty_e}) \quad \mathbf{3.110}$$

La relation **3.108** est donc bel et bien équivalente à l'équation utilisée originellement par Han et Park (1975b). L'algorithme de résolution permettant le calcul de la température et la résolution des équations mécaniques est présenté à la figure 3.9.

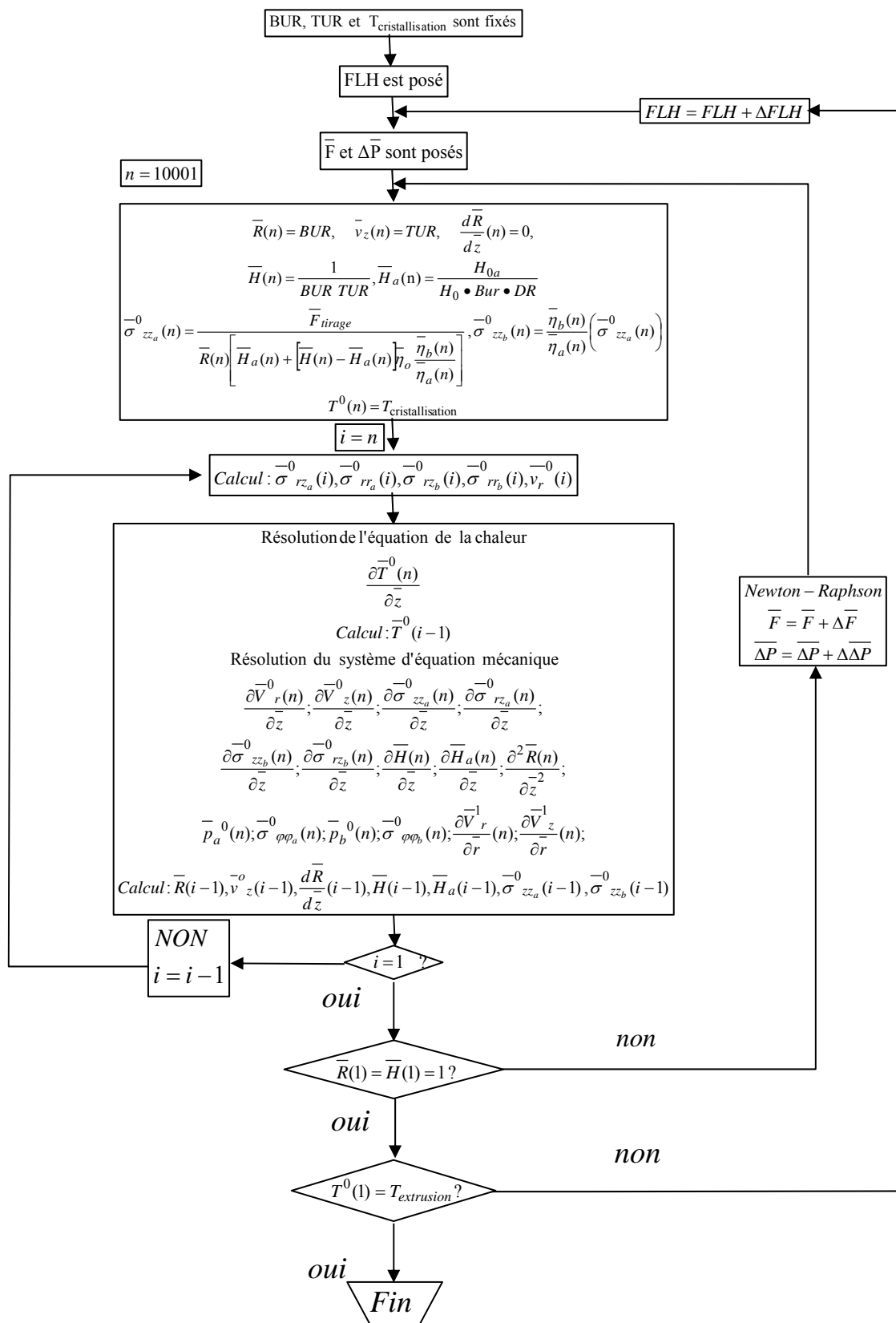
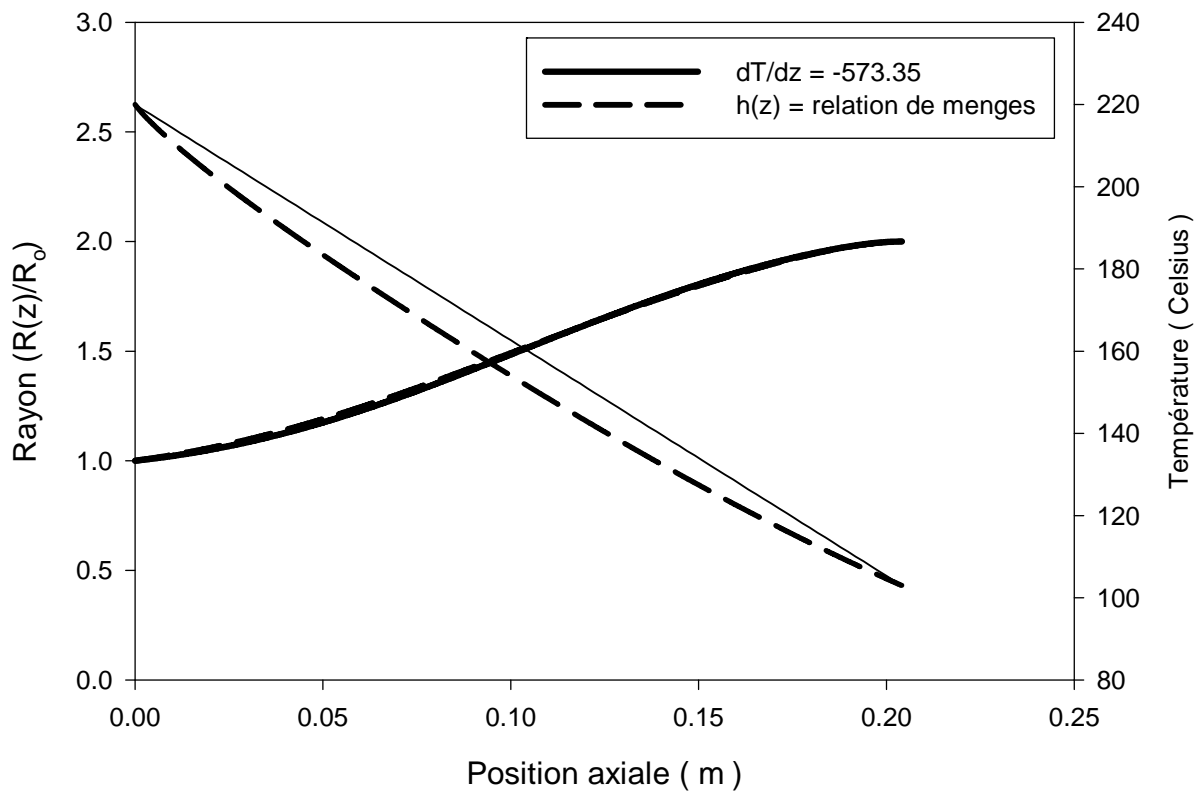


Figure 3.9 : Algorithme de résolution thermomécanique

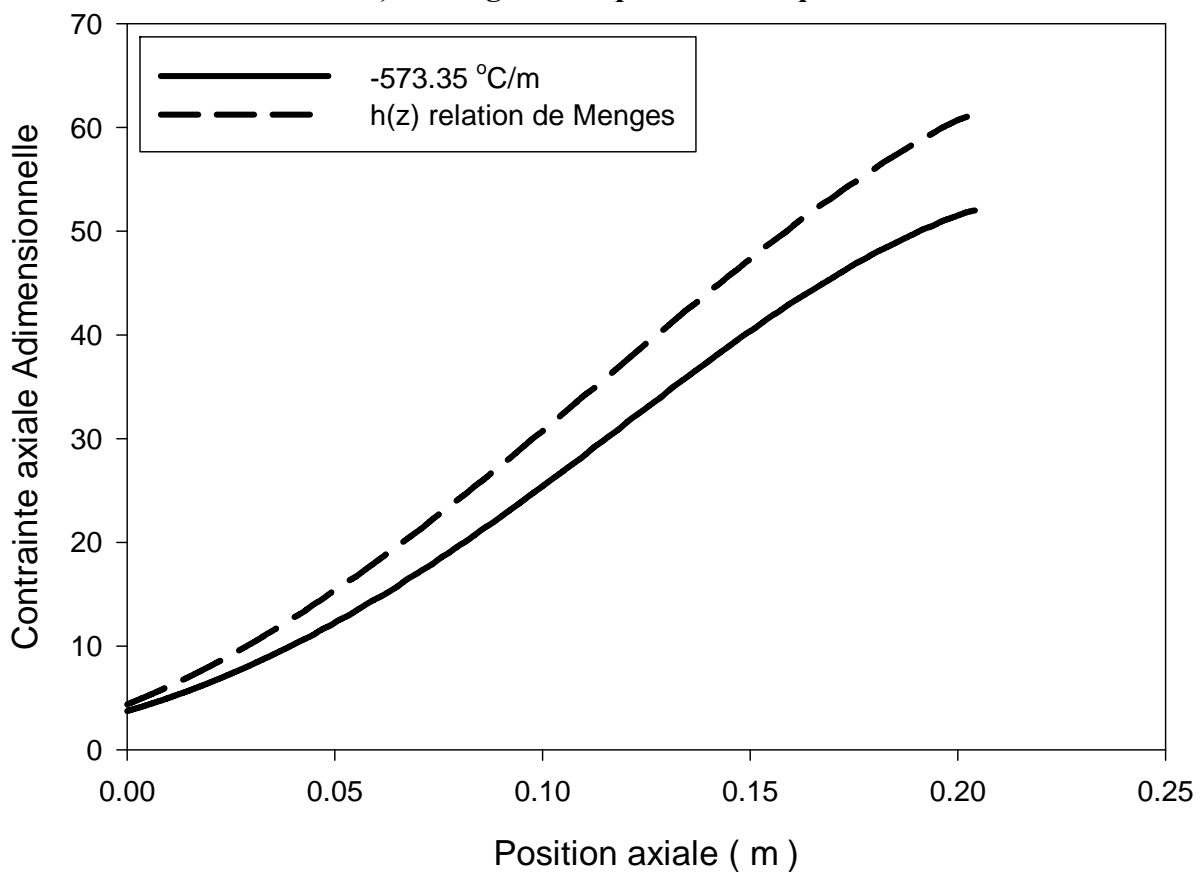
### 3.4.5 Résultats

Nous constatons que la relation **3.107** dépend du coefficient de convection. Afin de réaliser nos calculs il est donc nécessaire de connaître l'évolution de ce paramètre en fonction de la position axiale. Heureusement nous avons vu précédemment que Nagarajan (1995) avait repris les travaux de certains auteurs, Petrie (1974), Menges et *al* (1972), Kanai et White (1985) et Zippenfeld (1971), afin d'obtenir l'évolution de ce coefficient en fonction de la position axiale sous différentes conditions de refroidissement. Il sera possible en utilisant une des quatre corrélations présentées à la figure 3.3 de simuler un taux de refroidissement qualitativement faible (relation de Zippenfeld), moyen (relation de Menges) ou fort (relation de Petrie)

Utilisons la relation découlant des travaux de Menges afin d'obtenir la même position de figeage que celle obtenue à la figure 3.7. Les résultats obtenus en utilisant une chaleur spécifique de 2200 J/(kg °C) sont illustrés à la figure 3.10a. Nous constatons que les deux profils géométriques obtenus sont fortement semblables ce qui n'est guère surprenant étant donné que le taux de refroidissement global est identique dans les deux cas. Par contre, le taux de refroidissement calculé en utilisant le coefficient de convection issu de la relation de Menges est initialement plus important que le taux de refroidissement imposé. Par la suite à environ 11 cm de la filière cette tendance s'inverse. L'allure du profil thermique obtenu correspond de façon qualitative aux observations expérimentales rapportées par Laffargue (2003) (voir figure 3.11). Il est donc intéressant de constater qu'un calcul de la température réalisé avec un coefficient de convection approprié permet d'obtenir, du moins qualitativement, des résultats plus représentatifs qu'avec l'utilisation d'un profil thermique linéaire. La figure 3.10b illustre la contrainte axiale en fonction de la position. Cette figure permet de constater l'effet de la méthode d'évaluation de la température sur la contrainte. Lorsque la température est calculée, la contrainte calculée à la position de figeage est 20 % plus élevée que lorsque l'on suppose un profil linéaire de la température. Ceci reflète en quelque sorte l'effet de l'histoire thermique de la bulle. Il est donc important d'effectuer un calcul thermique car les effets locaux (augmentation du taux de refroidissement) qui sont pris en considération lors du calcul thermique vont avoir des effets majeurs sur la force et la surpression d'air et donc sur le champ de contraintes. Ceci est particulièrement important dans notre cas car nous allons tenter de relier les contraintes mesurées en biréfringence aux contraintes calculées.

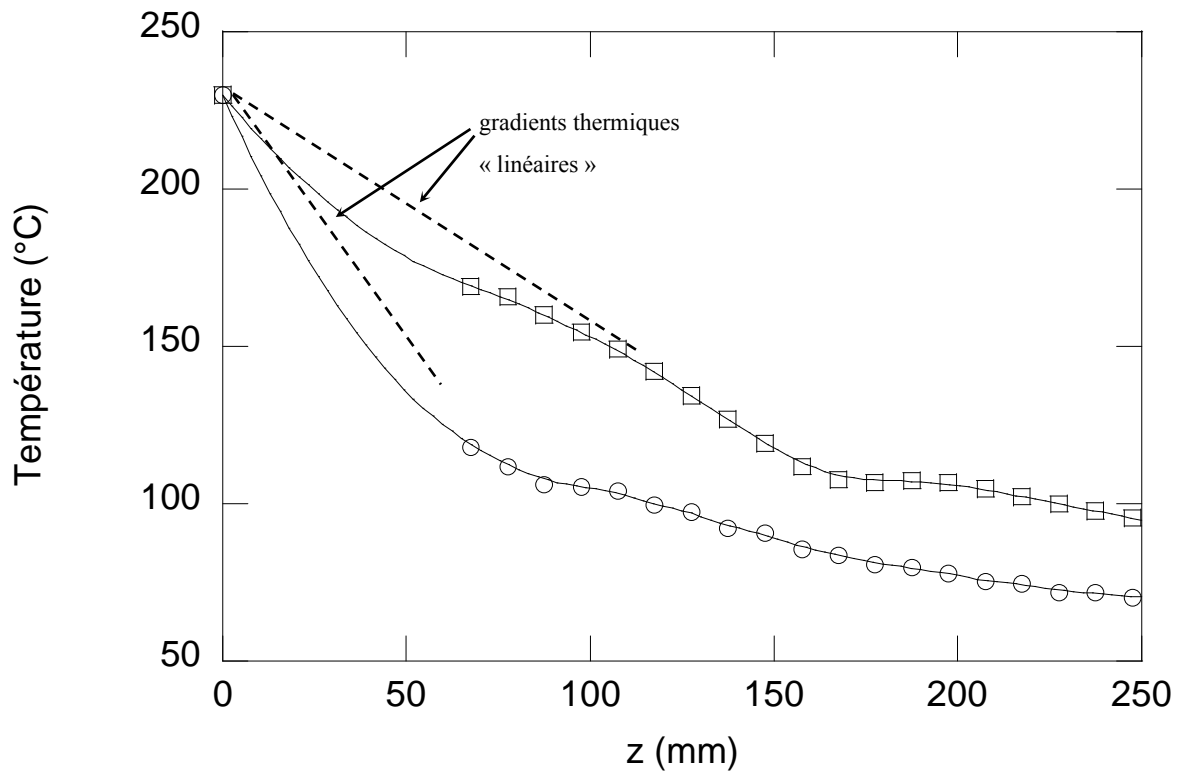


a) Profil géométrique et thermique



b) Contrainte dans la direction machine

Figure 3.10 : Soufflage de gaine multicouche monomatériau. Profil thermique et géométrique.  $dT/dz$  imposé vs Température calculée.

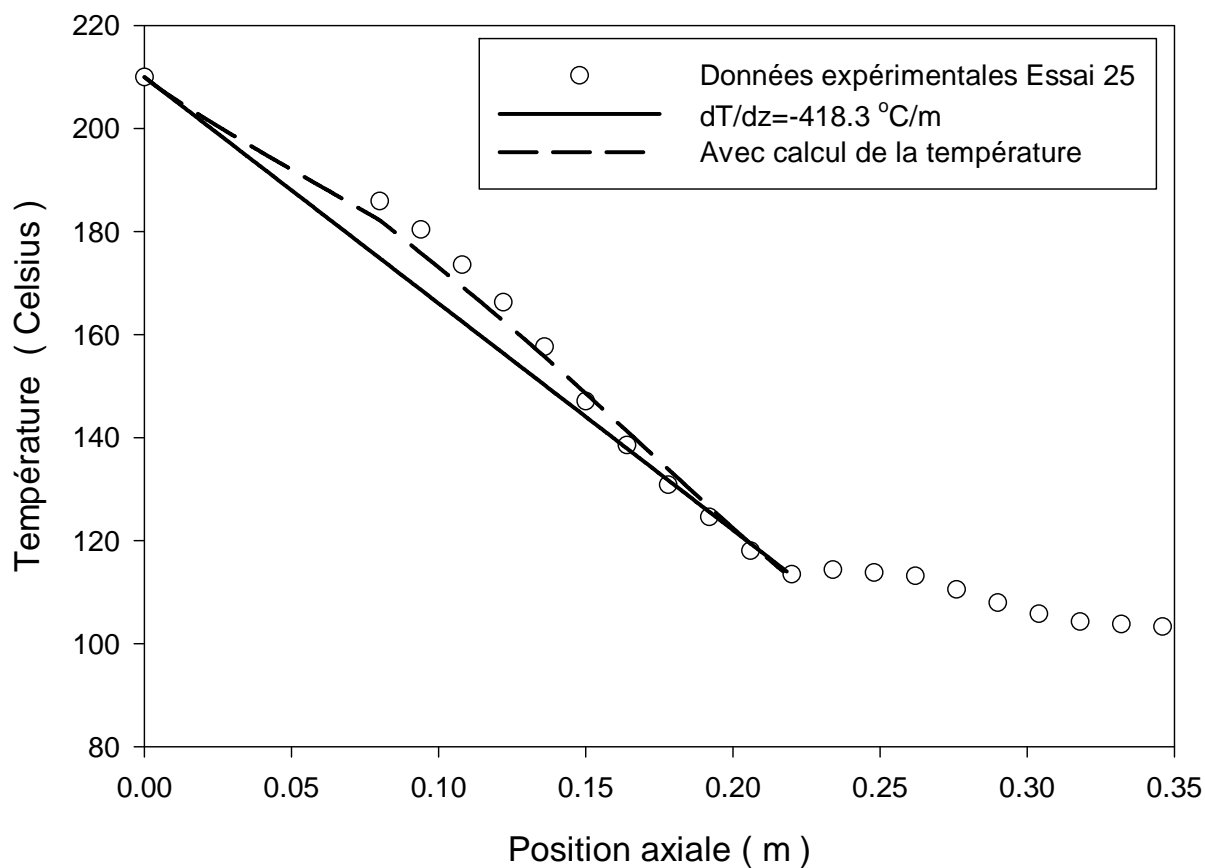


(□) : essai 2 ; BUR=2.2 ; DR=19, FLH=175 mm ( $d\bar{T}/dz \approx -17,8 \text{ } ^\circ\text{C}$ )

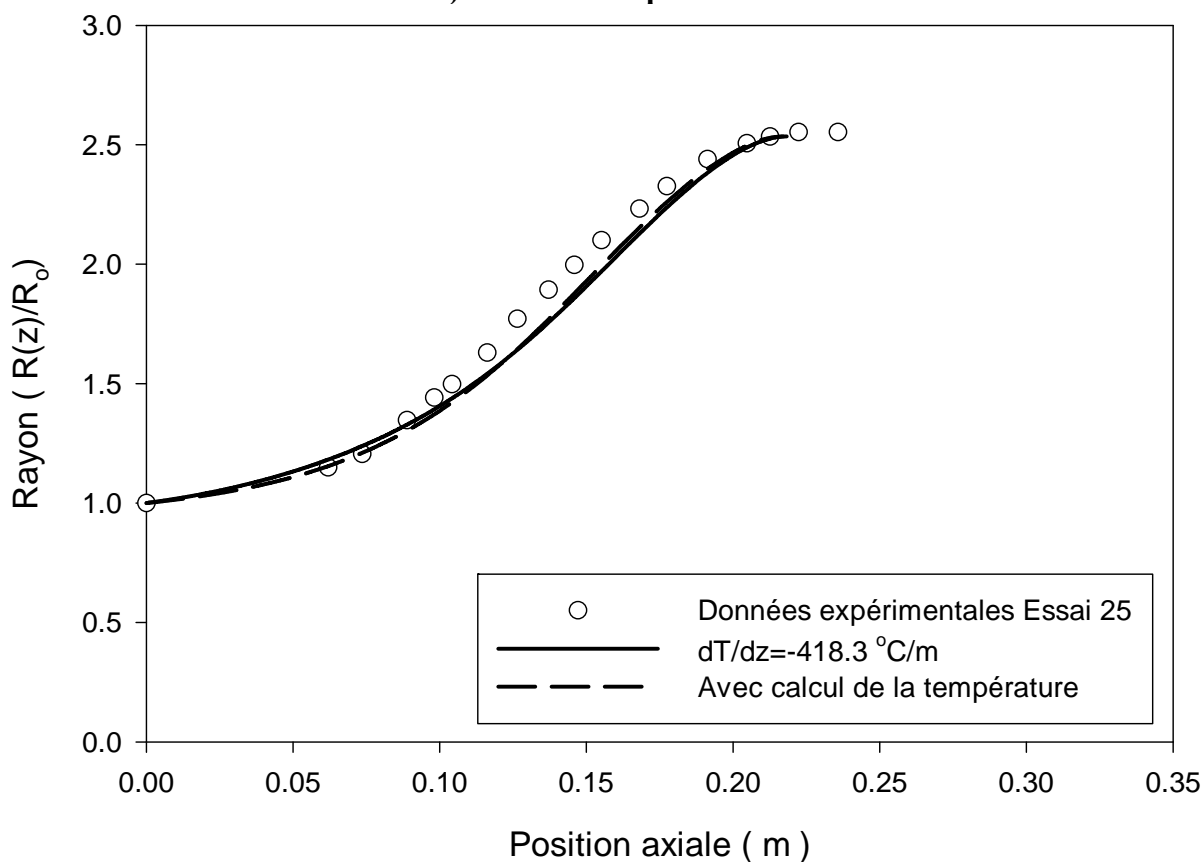
(○) : essai 9 : BUR=3, DR=19, FLH=90 mm ( $d\bar{T}/dz \approx -34,7 \text{ } ^\circ\text{C}$ )

**Figure 3.11 : Effet du taux de refroidissement. (Laffargue 2003)**

Il nous est maintenant possible de reprendre nos données issues de l'essai 25. Nous allons donc utiliser la relation 3.110 couplée au calcul mécanique de façon à déduire la fonction  $h(z)$  nous permettant de nous caler sur le profil thermique expérimental. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 3.12. Il est possible de noter sur cette figure, que le profil thermique calculé est fortement amélioré, mais que par contre, le profil géométrique est peu affecté. Mais si le calcul de la température permet une représentation plus fidèle du profil thermique, il demeure que les résultats obtenus sont issus d'un lissage semi empirique. En effet il est nécessaire de connaître le profil thermique expérimental afin de pouvoir réaliser les calculs. Ceci est encore insatisfaisant si on désire réaliser un calcul prédictif. Nous verrons au chapitre suivant qu'il nous sera possible à l'aide d'une seule expérimentation d'obtenir une représentation de l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale qui pourra être considéré comme valide pour toutes les autres expérimentations réalisées dans les mêmes conditions de refroidissement. Or, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, l'ensemble des manipulations réalisées dans une campagne expérimentale ont été réalisées en maintenant le débit d'air constant.



a) Profil de température



b) Profil géométrique

Figure 3.12 : Effet de la méthode de calcul de la température

### 3.4.6 Récapitulatif

Nous venons de développer un modèle permettant d'évaluer la température moyenne en fonction de la position axiale de soufflage de gaines multicouche dans un repère fixe en utilisant l'approche développée à l'origine par Housiadas et Tsamopoulos (2000a, 2000b). L'analyse de l'équation de la chaleur que nous obtenons nous permet de valider les hypothèses de Han et Park (1975a 1975b). Nous avons de plus illustré l'importance du calcul thermique. Bien que l'utilisation d'un profil thermique linéaire ne semble pas affecter le profil géométrique il semble qu'il puisse engendrer un champ de contrainte différent que celui survenant en réalité.

Malheureusement il ne nous est pas possible grâce à l'équation obtenue d'évaluer le profil thermique du film en fonction de la position axiale et radiale. Nous allons donc pousser l'analyse de l'équation de la chaleur à l'ordre supérieur afin d'évaluer l'amplitude du profil thermique pouvant exister dans l'épaisseur du film. Nous présenterons aussi une méthode simplifiée permettant de prendre en compte l'effet du processus de cristallisation. Finalement nous effectuerons une analyse de sensibilité afin d'illustrer l'effet du taux de refroidissement, de l'énergie activation et de la chaleur spécifique sur les profils thermique et géométrique de gaines multicouches monomatières. Par la suite nous utiliserons ces résultats afin de comparer les gaines monomatières à des gaines multimatières. Finalement nous illustrerons l'effet de l'agencement et de l'épaisseur de chacune des couches.

### 3.5 Calcul thermique multicouches bidimensionnel

Voyons maintenant s'il est possible de déterminer l'évolution de la température à l'ordre 1 afin de pouvoir reconstruire le profil thermique bidirectionnel. En intégrant la relation **3.104** on obtient :

$$\bar{T}_a^1(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^2\right)} \left( \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z})}{\lambda \alpha_a} \left( \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \bar{r}^2 + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \bar{h}_i (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) \bar{r} + \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{r} \right) + C12 \quad \mathbf{3.111}$$

En évaluant cette expression à la paroi interne il nous est possible de déterminer la valeur de la constante d'intégration; après substitution la relation **3.111** devient :

$$\bar{T}_a^1(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^2\right)} \left( \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z})}{\lambda \alpha_a} \left( \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \bar{r}^2 + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \bar{h}_i (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) \bar{r} + \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{r} \right) + \bar{T}_a^1(0, \bar{z}) \quad \mathbf{3.112}$$

En évaluant cette expression à  $\bar{r} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}$  on a :

$$\bar{T}_a^1\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z}\right) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\right)^2\right)} \left( \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z})}{\lambda \alpha_a} \left( \frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \left[ \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right]^2 + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_a} \bar{h}_i (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} + \frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right) + \bar{T}_a^1(0, \bar{z}) \quad \mathbf{3.113}$$

En intégrant la relation **3.105** et en évaluant l'expression résultante à  $\bar{r} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}$  on trouve :

$$\bar{T}_b^1\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z}\right) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\right)^2\right)} \left[ \frac{\bar{H}(\bar{z}) \bar{v}_z(\bar{z})}{\lambda \alpha_b} \left( \frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \left( \left[ \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right]^2 - \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right) - \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_{oa} k_b} \bar{h}_e (\bar{T}^0(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty e}) \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} + \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{T}^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right] + C13 \quad \mathbf{3.114}$$

Or l'hypothèse de continuité à l'interface nous donne :  $\bar{T}_b^1\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z}\right) = \bar{T}_a^1\left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z}\right)$ . Il est donc possible d'insérer l'équation **3.113** dans l'équation **3.114** afin d'évaluer la constante d'intégration.

Ceci nous donne :

$$\bar{T}_b^1(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\left(1 + \left(\frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\right)^2\right)} \left\{ \frac{\bar{H}(\bar{z}) \bar{v}_z(\bar{z})}{2\lambda \alpha_b} \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[ \bar{r}^2(\bar{z}) - 2\bar{r}(\bar{z}) + \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial \alpha} - 1\right) \left(\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}\right)^2 + 2\frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right] + \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{r}(\bar{z}) + \bar{T}_a^1(0, \bar{z}) \right. \\ \left. + \left( \frac{\bar{h}_e}{\lambda k_b} (\bar{T}_b^1(1, \bar{z}) - \bar{T}_{\infty}^1) \left[ \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} - \bar{r}(\bar{z}) \right] + \frac{1}{\lambda k} \bar{h}_i (\bar{T}_{(0,\bar{z})}^1 - \bar{T}_{\infty}^1) \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \right) \right\} \quad \mathbf{3.115}$$



L'utilisation des relations **3.112** et **3.115** s'avère problématique car le terme  $\bar{T}_a^{-1}(0, \bar{z})$  est une inconnue. Il n'est donc pas possible d'évaluer le profil de température à cet ordre de grandeur de façon exacte à moins de connaître cette valeur. Il faudrait donc passer à une analyse à l'ordre 2 de l'équation de la chaleur. Mais ce passage fait apparaître, tel qu'illustré ci-dessous pour la couche A, de nouvelles inconnues mécaniques et thermiques.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{H(\bar{z})} \left( \bar{v}_r(\bar{r}, \bar{z}) - \bar{v}_z(\bar{r}, \bar{z}) \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} + \bar{v}_z(\bar{r}, \bar{z}) \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \bar{v}_r(\bar{r}, \bar{z}) \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \bar{v}_z(\bar{r}) \frac{\partial \bar{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \right] \\
 & = \lambda \bar{\alpha}_a \left[ \frac{1}{H^2(\bar{z})} \left( 1 + \left( \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} + \left[ \frac{2\bar{r}(\bar{z})}{H^2(\bar{z})} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{1}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_a(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}_a(\bar{z})}{\partial \bar{z}^2} \right] \right] \quad \mathbf{3.116}
 \end{aligned}$$

La seule façon de déterminer la valeur de  $\bar{v}_r(\bar{r}, \bar{z})$  et  $\bar{v}_z(\bar{r}, \bar{z})$  et de  $\bar{T}_a^{-2}(\bar{r}_a, \bar{z})$  est donc de faire une analyse à un ordre de grandeur supérieur des équations mécaniques. Cette analyse va faire elle aussi apparaître des variables mécaniques supplémentaires ce qui donnera naissance à un système d'équations beaucoup plus lourd. Une étude d'applicabilité a été réalisée sur le cas plus simple du cast film afin d'évaluer si le système thermomécanique ainsi obtenu était soluble. Cette analyse nous révèle que le passage à un ordre supérieur à l'ordre 1 génère un système possédant un degré de liberté supérieur à 0. Le passage à l'ordre 2 nous causera des problèmes au niveau des conditions frontières. En effet la condition frontière en vitesse à la position de figeage quand on ne considère que l'ordre 0 est donné par :

$$\|\bar{v}\| = \bar{v}_z^{-0}(L/R_0) = DR$$

Dans ce cas en connaissant le taux d'étréage, qui est une condition que nous imposons, nous en déduisons immédiatement la vitesse axiale à l'ordre 0. Par contre en considérant la vitesse comme étant une combinaison de deux composantes possédant des ordres de grandeur distincts, cette condition devient :

$$\|\bar{v}\| = \bar{v}_z^{-0}(L/R_0) + \varepsilon \bar{v}_z^{-1}(L/R_0) = DR$$

Même en connaissant le taux d'étréage il n'est plus possible de déterminer la valeur de la vitesse à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Ceci a pour conséquence de rendre ce système non soluble à cet ordre de grandeur. Le même phénomène se produit sur les conditions initiales en contraintes.

Nous verrons dans la partie qui suit qu'il est néanmoins possible de déterminer l'évolution de la température en fonction de l'épaisseur du film. Pour ce faire deux techniques s'offrent à nous : la première passe par une approximation sur la température en utilisant les relations **3.112** et **3.115** et la seconde passe par une résolution par tranche en utilisant la méthode des différences finies.

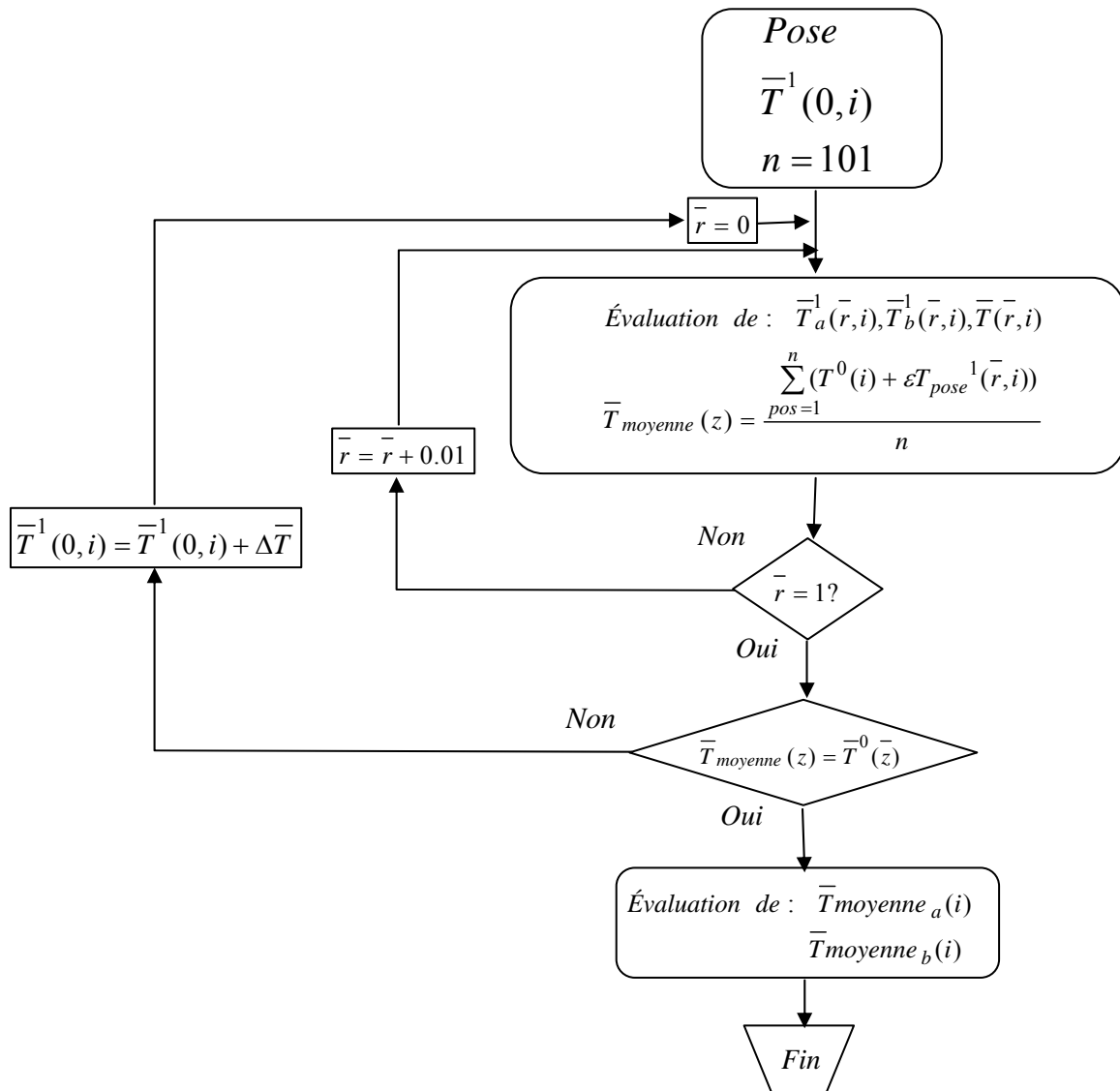
### 3.5.1 Résolution par la méthode d'approximation sur la température

En posant une valeur initiale de  $\bar{T}_a^{-1}(0, \bar{z})$  il nous est possible de calculer la valeur de  $\bar{T}_a^{-1}(\bar{r}, \bar{z})$  en utilisant les relations **3.112** et **3.115** selon l'algorithme de résolution présenté à la figure 3.13. Le calcul thermique à l'ordre 1 est alors réalisé simultanément aux calculs mécanique et

thermique à l'ordre 0 de la position de figeage à la sortie de la filière. il nous est possible d'évaluer la température moyenne dans l'épaisseur à une position axiale donnée en utilisant la relation suivante :

$$\bar{T}_{moyenne}(\bar{z}) = \frac{\sum_{pos=0}^1 (\bar{T}^0(\bar{z}) + \varepsilon T^1(pos, \bar{z}))}{n} \quad \mathbf{3.117}$$

Ou  $n$  est le nombre de points radiaux considéré afin de réaliser le calcul. Dans notre cas nous avons choisi 101 points nodaux distincts. Il suffit alors d'itérer sur la valeur de  $\bar{T}_a^1(0, \bar{z})$  que nous avons posée, jusqu'à ce que :  $\bar{T}_{moyenne}(\bar{z}) \cong \bar{T}^0(\bar{z})$ . Sommairement nous tentons de faire converger une température moyenne obtenue grâce à un calcul à l'ordre 1 sur une valeur de température moyenne d'ordre 0 obtenue grâce à la relation **3.107**. Ceci entraînera forcément une très légère sous évaluation de la température. En effet comme nous l'avons démontré précédemment le terme  $\varepsilon \bar{T}^1(\bar{r}, \bar{z})$  est relativement faible comparativement au terme  $\bar{T}^0(\bar{z})$ . Par contre, la forme et l'amplitude du profil de température obtenu ne seront pas affectées par cette approximation. C'est pour cette raison que les profils de température calculés en utilisant cette méthode devront toujours être comparés aux résultats obtenus en utilisant la résolution par différences finies de façon à valider l'approximation qui a été réalisée. Ce désavantage est par contre contrebalancé par le fait qu'en utilisant cette méthode il nous est possible d'obtenir le profil de température dans l'épaisseur pendant le calcul mécanique. Il sera alors possible, si nous le désirons, d'utiliser la température moyenne de chaque matériau pour évaluer sa viscosité plutôt que la température moyenne globale. Cette approche peut donc potentiellement nous permettre de tenir compte de l'effet de la température de chaque couche sur les propriétés rhéologiques des fluides qui seront utilisées pour l'évaluation des variables mécaniques à la position axiale suivante. Lorsque cette méthode de résolution est utilisée le profil thermique en sortie de filière est un résultat de calcul alors que physiquement c'est le profil de température en sortie de filière qui nous est donné.



**Figure 3.13 : Algorithme de résolution du profil thermique 2D par la méthode des petits paramètres**

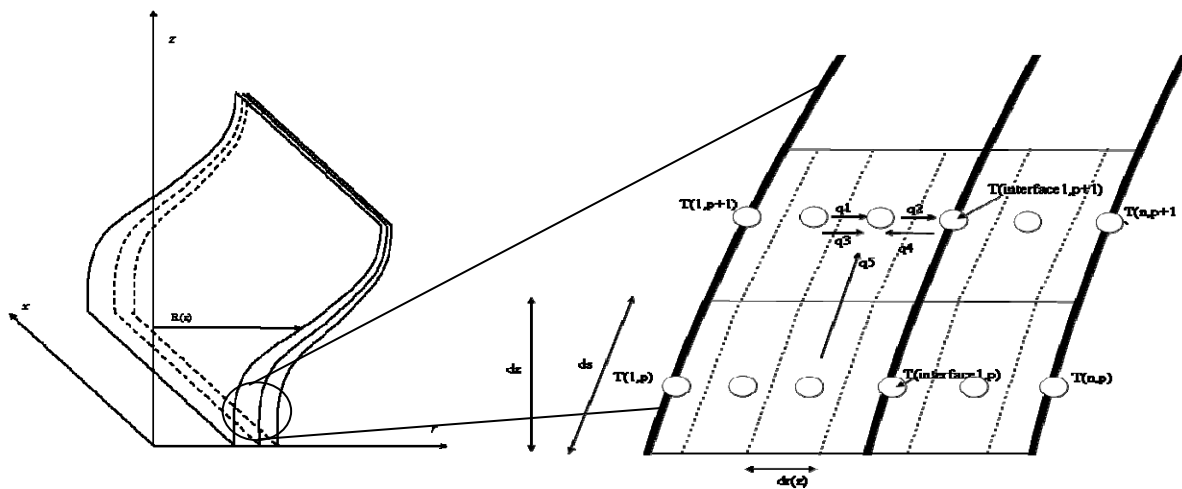
### 3.5.2 Résolution par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies centrées appliquée au calcul thermique est basée sur l'équation locale de la chaleur qui est discrétisée et résolue de proche en proche. Cette méthode permet d'approcher le comportement décrit par une équation différentielle. L'application de cette méthode au cas du soufflage de gaine présente quelques problèmes : Premièrement la représentation de la géométrie de la bulle par des mailles rectangulaires n'est pas possible, il faudra utiliser des parallélogrammes comme illustrés à la figure 3.14. Deuxièmement la géométrie finale de la bulle est obtenue à la toute fin du calcul. La résolution numériques qui nous permettra d'obtenir la valeur de  $T(\bar{r}, \bar{z})$  devra donc être réalisée sur une géométrie de bulle calculée à partir de  $T^0(\bar{z})$ . Ceci aura pour conséquence que la température moyenne calculée par la méthode des différences finies sera légèrement supérieure à la température calculée à l'ordre 0 à une position axiale donnée. Nous allons aussi inclure une approximation géométrique supplémentaire, qui bien que non nécessaire, aura pour effet de simplifier l'écriture des équations discrétisées. En effet comme l'illustre la Figure 3.14 la bulle sera déroulée de façon à former un mur situé à une distance  $R(z)$  du centre de la filière. Ceci nous permettra d'avoir une surface d'échange à la paroi interne égale à la

surface à la paroi externe. L'erreur sur la surface causée par cette opération est maximale à la sortie de filière et atteint une valeur d'environ .05 % pour un maillage à 101 éléments dans l'épaisseur du film pour des géométries typiques de filières. Elle est donc négligeable face aux hypothèses posées lors de la résolution mécanique. Afin de résoudre il est donc nécessaire de réécrire l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes.

$$\rho C_p \left( v_r(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + v_z(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} \right] \quad 3.118$$

Nous pouvons démontrer que le nombre de Peclet qui représente le rapport entre le transport de chaleur par convection et le transport de chaleur par conduction possède une valeur approximative de  $10^5$  dans la direction axiale. Ceci signifie que la conduction axiale est de loin négligeable par rapport à la convection.



**Figure 3.14 : Maillage utilisé pour la résolution par différences finies**

Le nombre de maille demeurant constant la diminution de l'épaisseur du film entraînera une diminution de la distance entre les points nodaux. L'utilisation de ce type de maillage nous amènera donc à discrétiser la relation suivante :

$$\rho C_p \left( v_r(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + v_s(r, z) \frac{\partial T(r, z)}{\partial s} \right) = k \left[ \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial r^2} \right] \quad 3.119$$

Il est possible, en observant la figure précédente, de constater que la discrétisation de l'équation de la chaleur nous donnera cinq cas différents, (paroi interne, paroi externe, interface entre les polymères, conduction dans la couche interne et conduction dans la couche externe) à traiter afin de pouvoir calculer la température du film en fonction de l'épaisseur à une position axiale donnée. Les équations discrétisées que nous obtenons sont :

À la paroi interne, cas sans convection interne à  $m=0$

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + 2Foa_s T(m+1, p+1) + 2\beta T(m+1, p+1)}{1 + 2Foa_s + 2\beta} \quad 3.120$$

À la paroi interne cas avec convection interne à  $m=0$  :

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + 2Foa_s T(m+1, p+1) + 2\beta T(m+1, p+1) + 2Bi_i Foa_s T_{\infty_i}}{1 + 2Foa_s + 2Bi_i Foa_s + 2\beta} \quad 3.121$$

À la paroi externe à  $m=101$  :

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + 2Fob_s T(m-1, p+1) + 2\beta T(m-1, p+1) + 2Bi_e Fob_s T_{\infty_e}}{1 + 2Fob_s + 2Bi_e Fob_s + 2\beta} \quad 3.122$$

À l'interface entre les deux couches à  $m=$  position interfaciale :

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + 2[Foa_{sm} + \Omega_a \beta] T(m-1, p+1) + 2[Fob_{sm} + \Omega_b \beta] T(m+1, p+1)}{1 + 2[Foa_{sm} + Fob_{sm}] + 2\beta[\Omega_a + \Omega_b]} \quad 3.123$$

Points internes pour le fluide A à  $m > 1$  et  $m <$  position interfaciale :

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + Foa_s [T(m-1, p+1) + T(m+1, p+1)] + 2\beta [T(m-1, p+1) + T(m+1, p+1)]}{1 + 2Foa_s + 2\beta} \quad 3.124$$

Points internes pour le fluide b à  $m >$  position interfaciale à  $m < 101$  :

$$T(m, p+1) = \frac{T(m, p) + Fob_s [T(m-1, p+1) + T(m+1, p+1)] + 2\beta [T(m-1, p+1) + T(m+1, p+1)]}{1 + 2Fob_s + 2\beta} \quad 3.125$$

Où  $m$  est la position radiale.

Avec

$$Foa_s = \frac{k_a ds}{\rho_a Cp_a V_s^0(z) dr(z)^2} \quad \text{et} \quad Fob_s = \frac{k_b ds}{\rho_b Cp_b V_s(z) dr(z)^2}$$

$$Foa_{sm} = \frac{k_a ds}{[\rho_a Cp_a + \rho_b Cp_b] V_s^0(z) dr(z)^2} \quad \text{et} \quad Fob_{sm} = \frac{k_b ds}{[\rho_a Cp_a + \rho_b Cp_b] V_s(z) dr(z)^2}$$

$$\beta = \frac{V_r^0(z) ds}{V_s^0(z) dr(z)}; \quad Bi_i = \frac{h_i dr(z)}{k_a}; \quad Bi_e = \frac{h_e dr(z)}{k_b}; \quad \Omega_a = \frac{\rho_a Cp_a}{\rho_a Cp_a + \rho_b Cp_b}; \quad \Omega_b = \frac{\rho_b Cp_b}{\rho_a Cp_a + \rho_b Cp_b}$$

En combinant ces relations aux conditions thermiques en sortie de filière il nous est possible, en utilisant une procédure itérative de type Gauss Seidel, d'obtenir de proche en proche le profil thermique à l'intérieur du film. L'algorithme de résolution est présenté à la figure 3.15. Une autre différence majeure existe entre cette méthode de résolution et la méthode de résolution par approximation numérique. En effet la méthode de résolution par différences finies est réalisée en imposant le profil thermique en sortie de filière et en balayant la géométrie de la bulle de la sortie de la filière à la position de figeage ce qui physiquement beaucoup plus réaliste. C'est donc l'inverse de la méthode présentée précédemment. Ceci

engendrera des variations locales sur les profils thermiques calculés lorsque les résultats issus de ces deux méthodes seront comparés. Les résultats de calculs sont présentés dans l'analyse de sensibilité.

L'algorithme global incluant la résolution thermomécanique à l'ordre 0, la résolution thermique à l'ordre 1 et la résolution par différences finies est présenté à la figure 3.16.

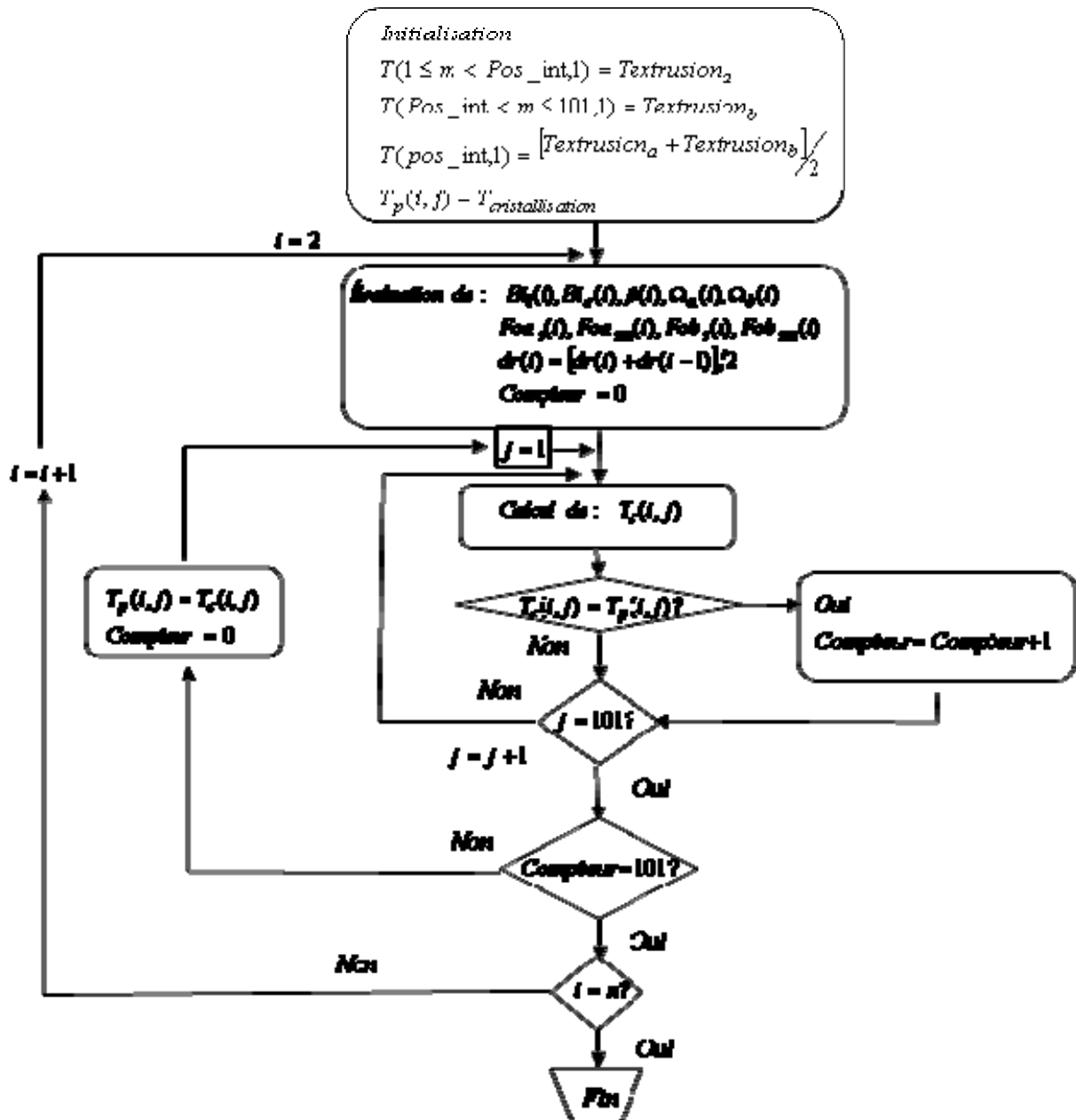


Figure 3.15 : Algorithme de résolution par différences finies

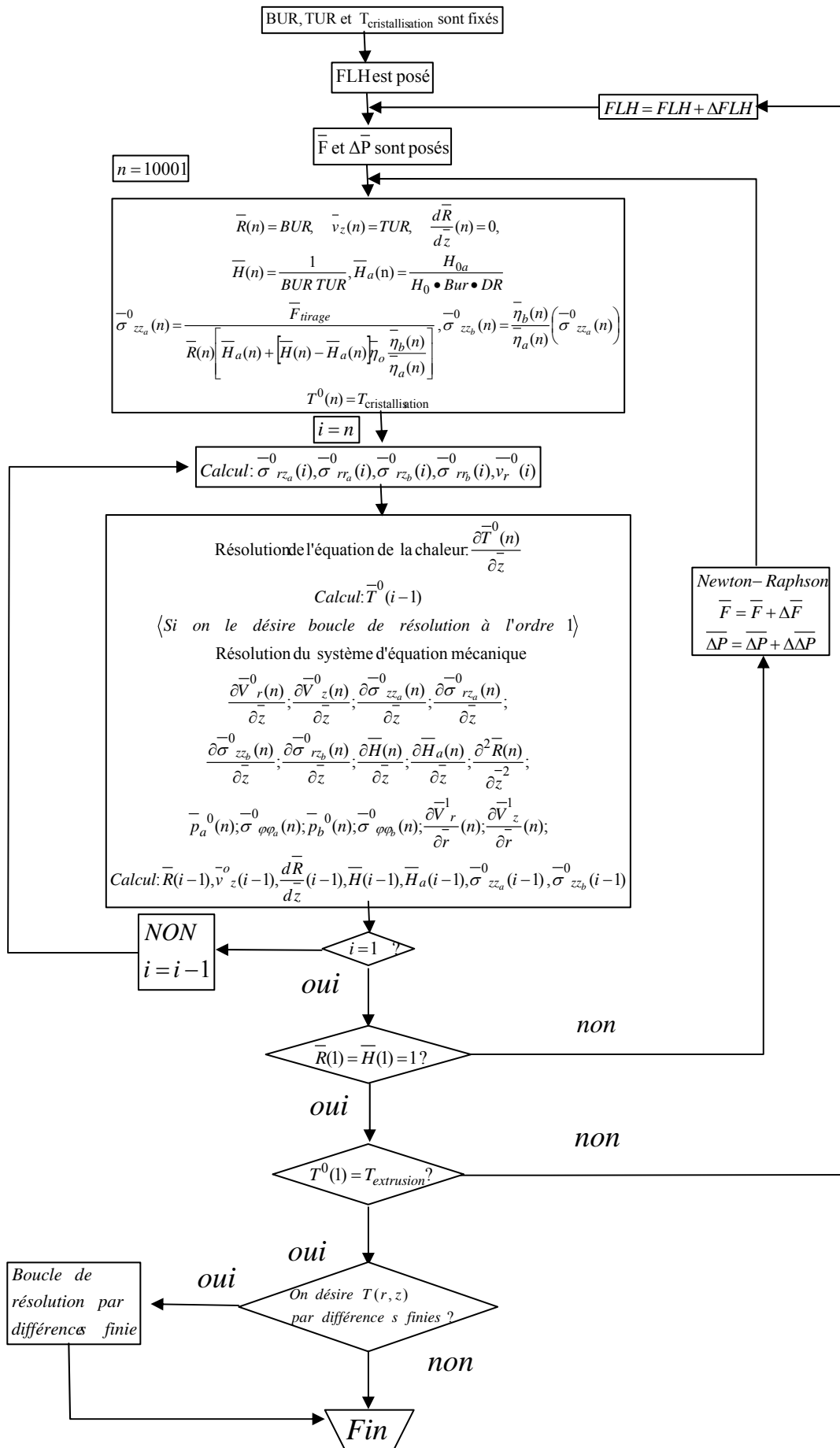


Figure 3.16 : Algorithme de résolution général

### 3.5.3 Prise en compte de la cristallisation

La prise en compte de la cristallisation de façon rigoureuse passe par une analyse de ce phénomène au point de vue thermodynamique. Les travaux les plus notables visant à prendre en considération ce phénomène lors du soufflage de gaines ont été réalisés par Doufas et McHugh (2000). Ils ont développé une approche thermodynamique de la germination prenant en compte les effets de l'écoulement du polymère pendant la formation de la bulle. Préalablement aux travaux de Doufas et McHugh, Kanai et White (1985, 1987) ainsi que Luo (1985) ont ajouté le terme d'enthalpie de cristallisation à l'équation de la chaleur de façon à pouvoir évaluer la longueur du palier de cristallisation. Afin de prendre en compte l'effet de l'apparition des cristaux sur les propriétés rhéologiques ces auteurs introduisent un terme additionnel à la loi de comportement de façon à générer une forte augmentation de la viscosité pendant le changement de phase. C'est cette méthode simple que nous avons utilisée afin de prendre en compte la rigidification du polymère pendant le processus de cristallisation. Il nous faut alors supposer que la cristallisation est un processus isotherme et que la cristallisation se produit de façon uniforme dans l'épaisseur du film. De plus nous supposerons qu'aucune cristallisation préférentielle n'est induite suite à l'étirement du film.

Lorsque la température du film sera égale à la température de cristallisation la viscosité du fluide sera décrite selon Luo, par la relation suivante :

$$\eta(z) = \exp\left(\frac{E}{R}\left(\frac{1}{\bar{T}(z)} - \frac{1}{T_r}\right)\right) \exp\left(\alpha\left(\frac{X(z)}{X_\infty}\right)^\beta\right) \quad \bar{T}(z) = \bar{T}_{\text{cristallisation}} \quad 3.126$$

La viscosité évolue donc avec le taux de cristallinité dans le film. L'utilisation de cette relation permettra donc de déformer la bulle pendant la cristallisation. Quand la température moyenne sera supérieure à la température de cristallisation la viscosité sera décrite par la relation suivante

$$\eta = \exp\left(\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r}\right)\right) \quad T(z) < T_{\text{cristallisation}} \quad 3.127$$

La quantité d'énergie qu'il faut retirer au film pour qu'il atteigne son taux de cristallinité final peut être obtenue grâce à la relation suivante :

$$q_{\text{cristallisation}} = \Delta H_c \rho Q \cos \theta X (\%) \quad \text{quand } T(z) = T_{\text{cristallisation}} \quad 3.128$$

L'hypothèse de processus isotherme nous permet alors, grâce à un bilan de chaleur entre le film et l'air d'obtenir la relation suivante qui donne l'évolution du taux de cristallinité le long du palier de cristallisation :

Sans convection interne

$$\Delta H_c \rho Q \cos \theta \frac{dX_j(z)}{dz} = 2\pi R(z) h_e(z) [T_c - T_\infty] \quad 3.129$$



Qui après adimensionnalisation nous donne à l'ordre 0:

$$\left[ \frac{dX_j(z)}{dz} \right] = \frac{\bar{h}_e(z) \left[ \bar{T}_{cj}^0 - \bar{T}_\infty \right]}{\Delta H_{cj} \rho_j \bar{H}_j(z) \bar{v}_z(z)} \text{ avec } \overline{\Delta H_c} = \frac{\Delta H_c}{Cp_o T_o} \quad 3.130$$

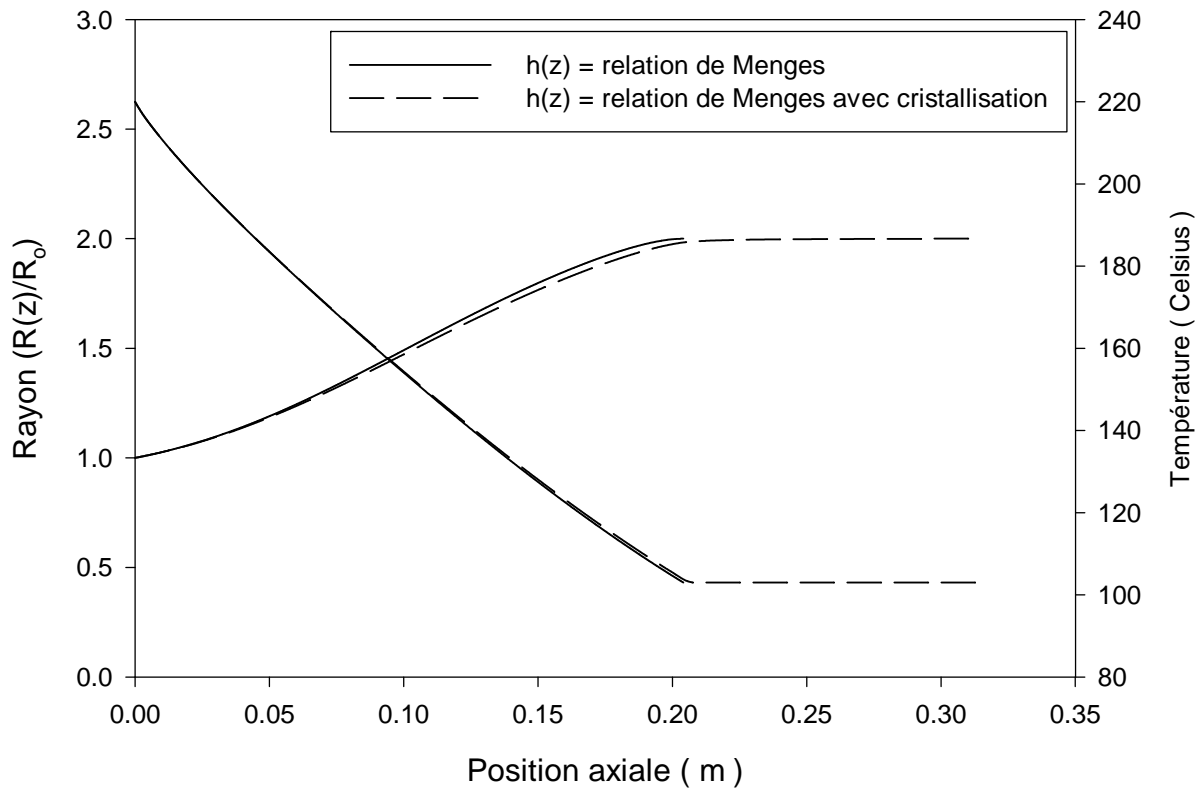
De même on aura dans les cas avec convection interne:

$$\left[ \frac{dX_j(z)}{dz} \right] = \frac{\bar{h}_e(z) \left[ \bar{T}_{cj}^0 - \bar{T}_\infty \right] + \bar{h}_i(z) \left[ \bar{T}_{cj}^0 - \bar{T}_{\infty_{in}} \right]}{\Delta H_{cj} \rho_j \bar{H}_j(z) \bar{v}_z(z)} \quad 3.131$$

Où  $T_c$  est égal à la température de cristallisation à l'ordre 0, et l'indice  $j$  représente le matériau ayant atteint sa température de cristallisation. Dans les cas où la cristallisation sera prise en compte, il faudra ajouter une condition frontière à la position de figeage qui correspondra au taux de cristallinité final dans le film. L'algorithme présenté à la figure 3.16 sera alors légèrement modifié de façon à inclure le calcul du taux de cristallinité et de la viscosité modifiée en fonction de la position axiale lorsque la température est égale à la température de cristallisation. La viscosité modifiée (relation 3.126) sera alors utilisée afin de résoudre les équations mécaniques jusqu'à ce que le taux de cristallinité dans le film soit nul. Lorsque ce point est atteint le calcul reprendra alors en utilisant la relation 3.127 pour évaluer la viscosité. La figure 3.17 illustre l'effet d'ajouter le module de cristallisation au calcul. Les valeurs que nous avons utilisées pour obtenir cette courbe sont représentative du LDPE et sont présentées au tableau 3.3. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ont été choisis arbitrairement de façon à ce que la viscosité du fluide soit 5000 fois plus élevée lorsqu'il atteint son taux de cristallinité final qu'en sortie de filière.

**Tableau 3.3 : Valeurs utilisées pour réaliser le calcul avec cristallisation**

Paramètre	Valeur
Pourcentage de cristallinité	30%
Chaleur de cristallisation (kJ/kg)	286
Coefficient $\alpha$	4.65
Coefficient $\beta$	0.4



**Figure 3.17 : Effet de l'ajout du module de cristallisation.**

On constate que l'addition du module de cristallisation permet de calculer la longueur du plateau. Dans ce cas le plateau de cristallisation représente le tiers de la distance entre la filière et la ligne de figeage. Il est de plus possible de constater que globalement l'allure générale de la bulle calculée n'est pas affectée par l'ajout du calcul de cristallisation. Nous verrons dans le chapitre suivant que ce calcul permet de représenter assez efficacement les valeurs expérimentales.

### 3.6 Généralisation aux cas complexes

Il est aussi possible d'utiliser les équations mécaniques et thermique que nous venons de développer pour décrire des cas plus complexes que le soufflage de gaine bicouche. En effet le système d'équations obtenu peut être très facilement modifié de façon à prendre en compte la coextrusion de plusieurs matériaux. Chaque couche supplémentaire fera apparaître 5 nouvelles variables, nécessitant l'ajout de 5 équations et la modification de trois équations préexistantes.

Considérons, à titre d'exemple, la coextrusion de trois matériaux différents suivant le positionnement suivant dans le film : A paroi interne de la bulle, B paroi externe de la bulle et C couche centrale située entre les matériaux A et B. Dans ces conditions, en plus des 15 inconnues mentionnées précédemment, il nous faudra déterminer la valeur des 5 variables supplémentaires suivantes qui dépendent du matériau C.

$$p_c^-(z), \sigma_{\phi_c}^-(z), \frac{\partial \bar{\sigma}_{z z_c}^-(z)}{\partial z}, \frac{\partial \bar{\sigma}_{r z_c}^-(z)}{\partial z}, \frac{\partial \bar{H}_c(z)}{\partial z}$$

Comme nous l'avons mentionné, afin de résoudre notre nouveau système d'équations avec les inconnues supplémentaires, il nous est nécessaire d'ajouter des équations. Trois de ces

équations sont obtenues très intuitivement, ce sont les relations découlant directement de l'ajout d'une couche additionnelle.

La dérivé de l'équation d'équilibre dynamique à l'ordre 0 (similaire aux relations **3.37** et **3.39**) pour la couche interne C :

$$\boxed{\frac{d\bar{\sigma}_{rz_c}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \frac{d\bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z}) \frac{d^2\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}^2} = 0} \quad 3.132$$

Les équations rhéologiques issues des lois de comportements à l'ordre 0 (similaire aux relations **3.51** et **3.52**) pour la couche interne C :

$$\boxed{\bar{\sigma}_{rz_c}^{-0}(\bar{z}) = -\bar{p}_c(\bar{z})^0 + \frac{2\bar{\eta}_c(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}}{\partial r}(\bar{z})} \quad 3.133 \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\sigma}_{\phi\phi_i}^{-0}(\bar{z}) = -\bar{p}_c(\bar{z})^0 + \frac{2\bar{\eta}_c(\bar{z})\bar{V}_r^{-0}(\bar{z})}{R(\bar{z})}} \quad 3.134$$

Il est aussi nécessaire d'avoir une relation permettant de prendre en considération la conservation du débit de la nouvelle couche. Pour ce faire il suffit d'utiliser une équation cinématique issue de l'incompressibilité à l'ordre 1 (similaire à la relation 3.46) pour la couche interne C :

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left( \left[ \bar{H}_c(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z}) \right] \bar{V}_z^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \right) \quad 3.135$$

Il est nécessaire de modifier la relation **3.40** de façon à prendre en considération les deux sauts de viscosité à l'interface. Ceci fera apparaître très simplement deux équations qui peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\boxed{\bar{\eta}_a(\bar{z}) \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\eta}_a(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z}) = \bar{\eta}_c(\bar{z}) \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\eta}_c(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z})} \quad 3.136$$

$$\boxed{\bar{\eta}_c(\bar{z}) \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\eta}_c(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z}) = \bar{\eta}_b(\bar{z}) \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\eta}_b(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \bar{\sigma}_{zz_c}^{-0}(\bar{z})} \quad 3.137$$

Finalement en modifiant les équations issues de l'équilibre dynamique à l'ordre 1 (**3.41** et **3.42**) de façon à inclure l'effet de la couche médiane on obtient :

$$\begin{aligned}
& -\Delta \bar{P} = \bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}_a(\bar{z}, t) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \\
& + \frac{\eta_{oc}}{\eta_{oa}} \left[ \bar{\sigma}_{r_c}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_c(\bar{z})}{d\bar{z}} + (\bar{H}_c(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z})) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_c}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r_c}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] - \bar{\sigma}_{r_c}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \\
& + \frac{\eta_{ob}}{\eta_{oa}} \left[ \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z}, t)} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_c(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right) - \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_c(\bar{z})}{d\bar{z}} \right]
\end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = \bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \\
& + \frac{\eta_{oc}}{\eta_{oa}} \left[ \bar{\sigma}_{z_{int}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_c(\bar{z})}{d\bar{z}} + (\bar{H}_c(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z})) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z_c}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_{r_c}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] - \bar{\sigma}_{z_c}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \\
& + \frac{\eta_{ob}}{\eta_{oa}} \left[ \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_c(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_c(\bar{z})}{d\bar{z}} \right]
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Si on désire réaliser le calcul thermique, il suffit de modifier très simplement l'équation de l'évolution de la température à l'ordre 0 (3.79) de façon à obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{T}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{- \left[ \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_o k_b} \bar{h}_e (\bar{T}^{-0}(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty e}) + \frac{\rho_{oa} C_{p_{oa}} V_o R_o}{k_o k_a} \frac{\bar{k}_a}{k_b} \bar{h}_i (\bar{T}^{-0}(\bar{z}) - \bar{T}_{\infty i}) \right]}{\left[ \frac{\bar{v}_z(\bar{z})}{\lambda \alpha_b} [\bar{H}(\bar{z}) - \bar{H}_c(\bar{z})] + \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) \bar{H}_a(\bar{z})}{\lambda \alpha_a} \frac{\bar{k}_a}{k_b} + \frac{\bar{v}_z(\bar{z}) (\bar{H}_c(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z}))}{\lambda \alpha_c} \frac{\bar{k}_c}{k_b} \right]} \tag{3.140}$$

Nous avons maintenant un système d'équation complet qu'il est possible de résoudre en utilisant l'approche décrite précédemment. Les nouvelles conditions frontières aux deux extrémités de la bulle sont données par :

en sortie de filière

$$\begin{aligned}
& \bar{z} = 0, \quad \bar{R}(0) = 1, \quad \|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v}_z^2(0) + \bar{v}_r^2(0)} = 1, \\
& T^0(0) = T_{ex\_a} \frac{\bar{H}_a(0)}{\bar{H}(0)} + T_{ex\_c} \frac{\bar{H}_c(0)}{\bar{H}(0)} + T_{ex\_b} \frac{\bar{H}(0) - \bar{H}_a(0) - \bar{H}_c(0)}{\bar{H}(0)}
\end{aligned}$$

en fin d'étirage

$$\begin{aligned}
& \bar{z} = L/R_o, \quad \bar{R}(L/R_o) = BUR, \quad \frac{d\bar{R}(L/R_o)}{d\bar{z}} = 0, \quad \|\bar{v}\| = \bar{v}_z(L/R_o) = DR, \\
& T^0(L/R_o) = T_{crystallisation}
\end{aligned}$$

Ces conditions nous permettent de déterminer les valeurs initiales de certaines de nos variables. En intégrant les relations de conservation du débit on obtient :

$$\overline{H}_a(\overline{z})\overline{V}_z^0(\overline{z})\overline{R}(\overline{z}) = CteA \quad \mathbf{3.141} \quad \text{et} \quad \overline{H}(\overline{z})\overline{V}_z^0(\overline{z})\overline{R}(\overline{z}) = CteB \quad \mathbf{3.142}$$

$$\text{et} \quad \overline{H}_c(\overline{z})\overline{V}_z^0(\overline{z})\overline{R}(\overline{z}) = CteC \quad \mathbf{3.143}$$

En évaluant ces équations à  $\overline{z}=0$  et à  $\overline{z}=\frac{L}{R_0}$  on trouve :

$$\overline{H}_a\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{H_{0a}}{H_0 * BUR * TUR} \quad \mathbf{3.144} \quad \text{et} \quad \overline{H}\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{1}{BUR * TUR} \quad \mathbf{3.145}$$

$$\text{et} \quad \overline{H}_c\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{H_{0c}}{H_0 * BUR * TUR} \quad \mathbf{3.146}$$

La relation **3.56** nous donne

$$\overline{v}_r^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.147}$$

Et les relations **3.49** à **3.52** ainsi que les relations correspondantes pour le matériau C nous permettent d'obtenir :

$$\overline{\sigma}_{rr_a}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.148} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma}_{rr_b}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.149}$$

$$\text{et} \quad \overline{\sigma}_{rr_c}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.150}$$

$$\overline{\sigma}_{rz_a}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.151} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma}_{rz_b}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.152}$$

$$\text{et} \quad \overline{\sigma}_{rz_c}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = 0 \quad \mathbf{3.153}$$

En combinant les relations en annexe **Eq.82** et **Eq.115** on obtiendra alors :

$$\overline{\sigma}_{z_a}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{\overline{F}_{tirage}}{\overline{R}\left(\frac{L}{R_0}\right) \left[ \overline{H}_a\left(\frac{L}{R_0}\right) + \left[ \overline{H}\left(\frac{L}{R_0}\right) - \overline{H}_a\left(\frac{L}{R_0}\right) - \overline{H}_c\left(\frac{L}{R_0}\right) \right] \frac{\overline{\eta}_b\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\overline{\eta}_a\left(\frac{L}{R_0}\right)} + \overline{H}_c\left(\frac{L}{R_0}\right) \frac{\overline{\eta}_c\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\overline{\eta}_a\left(\frac{L}{R_0}\right)} \right]} \quad \mathbf{3.154}$$

$$\overline{\sigma}_{z_c}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{\overline{\eta}_c\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\overline{\eta}_a\left(\frac{L}{R_0}\right)} \left( \overline{\sigma}_{z_a}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) \right) \quad \mathbf{3.155} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma}_{z_b}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) = \frac{\overline{\eta}_b\left(\frac{L}{R_0}\right)}{\overline{\eta}_c\left(\frac{L}{R_0}\right)} \left( \overline{\sigma}_{z_c}^0\left(\frac{L}{R_0}\right) \right) \quad \mathbf{3.156}$$

Grâce à ces relations il nous est possible de solutionner notre système d'équation de la position de figeage à la sortie de la filière.

## 3.7 Étude de sensibilité

### 3.7.1 Films Monocouches

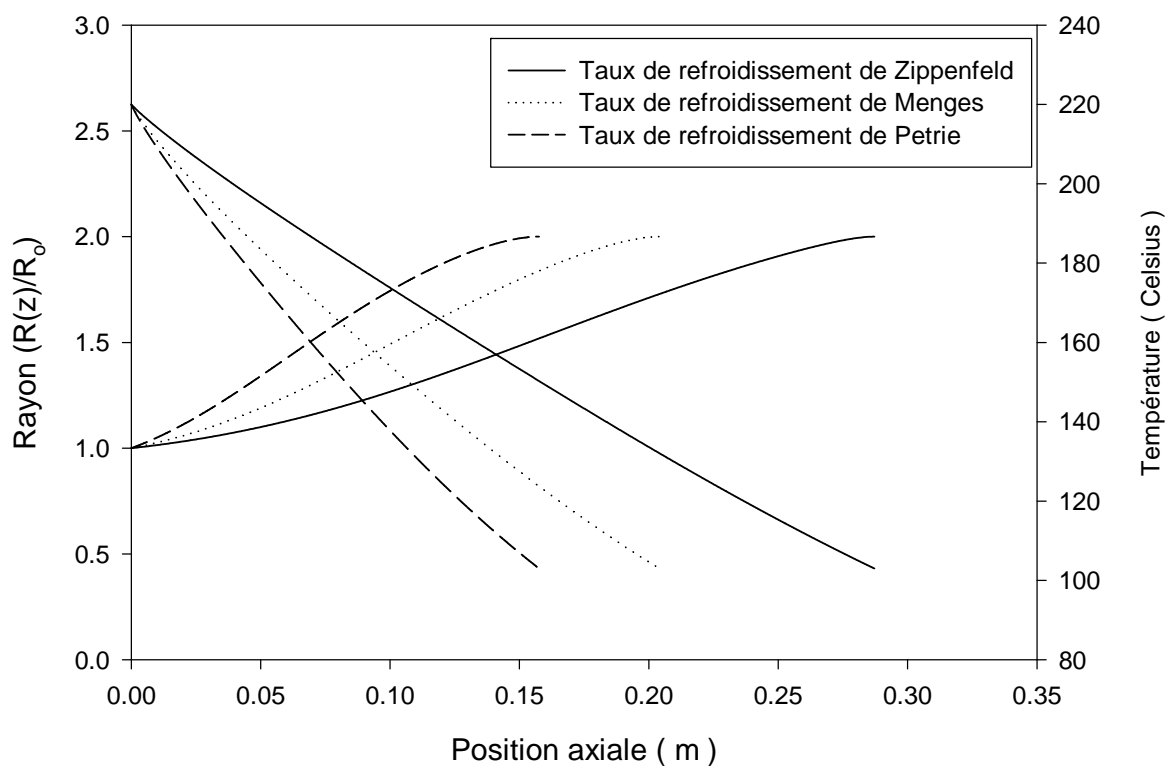
Il nous est maintenant possible d'étudier l'effet, du coefficient de convection, de la prise en compte de la convection à l'intérieur de la bulle et de l'énergie d'activation sur le profil de température et le profil géométrique de bulles monomatières. Les figures qui suivent ont été obtenues, sauf contre indications en utilisant les valeurs présentées au tableau 3.2. La figure 3.18a nous permet de constater que le taux de refroidissement influence fortement le profil thermique et la forme de la bulle. Les taux de refroidissement utilisés afin d'obtenir cette figure sont ceux présentés à la figure 3.3. La hauteur de la ligne de figeage passe en effet de 0.15 à 0.3 m lorsque l'on passe du refroidissement de Petrie à celui de Zippenfeld. Ceci confirme la forte interdépendance entre le refroidissement et la géométrie de la bulle. Il s'avère donc nécessaire de mieux comprendre les phénomènes liés à l'évolution du coefficient de convection en fonction de la géométrie et du débit d'air de refroidissement afin de pouvoir simuler de façon adéquate le procédé de soufflage de gaine. Ceci illustre une fois de plus la nécessité de développer des outils permettant une meilleure description de l'aérodynamique. Il faut aussi souligner l'importance du refroidissement sur la productivité. Un refroidissement doux donne naissance à une bulle possédant une forme très évasée. Par contre un refroidissement violent va donner naissance à une bulle gonflant très rapidement. La bulle pourrait alors entrer en contact avec l'anneau de refroidissement ce qui pourrait affecter sa stabilité.

Il apparaît évident à la figure 3.18b que l'augmentation de la position de figeage causée par une diminution du taux de refroidissement cause une très forte diminution des contraintes dans le film. En effet lorsque la position de figeage passe de 0.15 m à 0.3 m la contrainte axiale adimensionnelle passe de 80 à 40. Un comportement similaire, bien que de moindre amplitude peut être observé pour les contraintes transversales. Cette diminution peut être expliquée par le fait qu'une diminution du taux de refroidissement entraîne une évolution plus lente de la viscosité du polymère. Le film est donc plus facile à déformer lorsque le taux de refroidissement est faible ce qui entraîne une force plus faible aux rouleaux pinceurs et donc des profils de contraintes plus faibles.

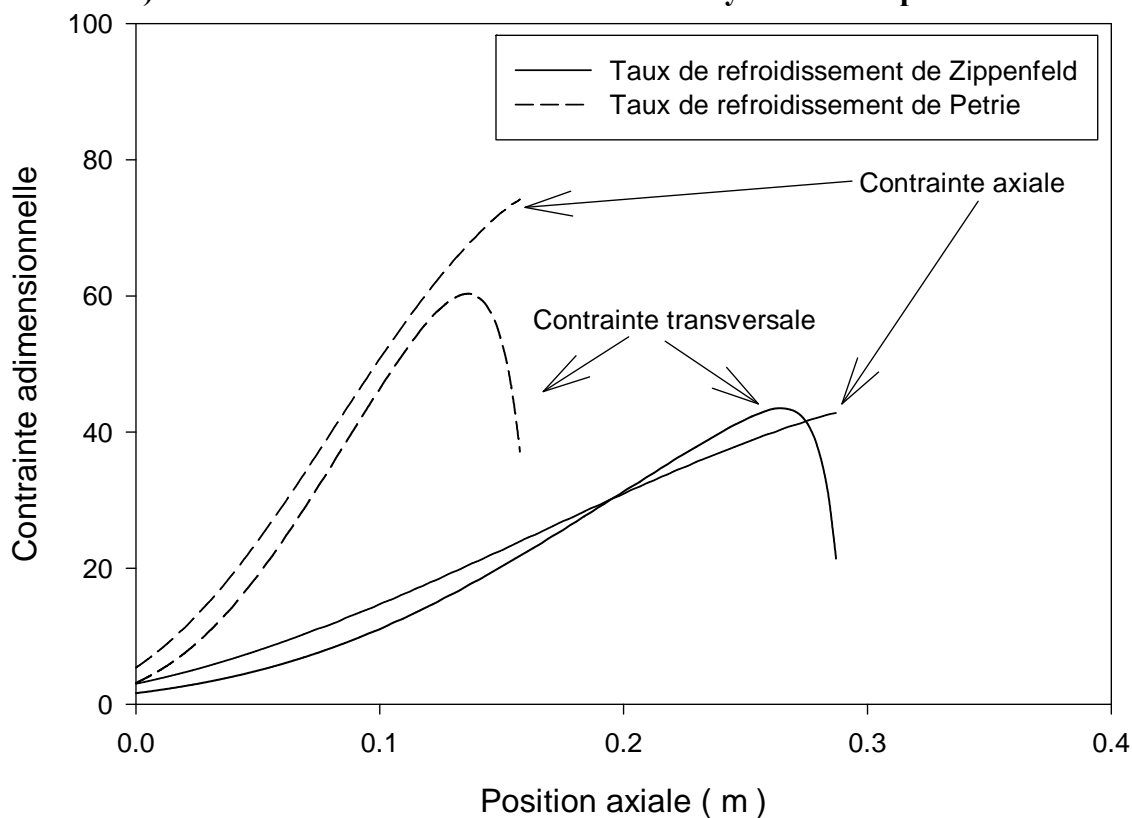
La figure 3.18c nous permet de prendre en compte la présence de convection à l'intérieur de la bulle soit par convection naturelle, soit par convection forcée lorsque un système de refroidissement interne est utilisé. Il faut mentionner que la forte diminution des contraintes transversales en fin de gonflement est causée par le fait que le terme de vitesse radiale fonction de la position axiale tend vers 0 à la position de figeage. Or il est possible de constater aux relations 3.61 et 3.65 que la contrainte axiale dépend entre autre de la pression hydrostatique et de la vitesse radiale. Ce type de comportement n'est pas habituellement présenté dans les publications portant sur le soufflage de gaine car les courbes sont tronquées en raison de l'existence de multiplicités de solutions que nous avons précédemment mentionnés.

Le tableau 3.4 illustre les propriétés utilisées dans ces deux cas. Premièrement notons que le fait de considérer la convection naturelle affecte très peu la bulle. Ceci vient valider l'hypothèse commune qui est de négliger ce terme. Par contre, il est possible de constater que l'addition d'un système de refroidissement interne a pour effet de diminuer de 30% la position de la ligne de figeage de la bulle. Cette forte diminution, qui a pour effet d'augmenter la productivité, est accompagnée d'une nette augmentation du niveau des contraintes induites dans le film d'environ 25 %. Ceci est d'une importance capitale car l'augmentation des contraintes et des taux de déformations qui les accompagnent pourrait affecter le taux de

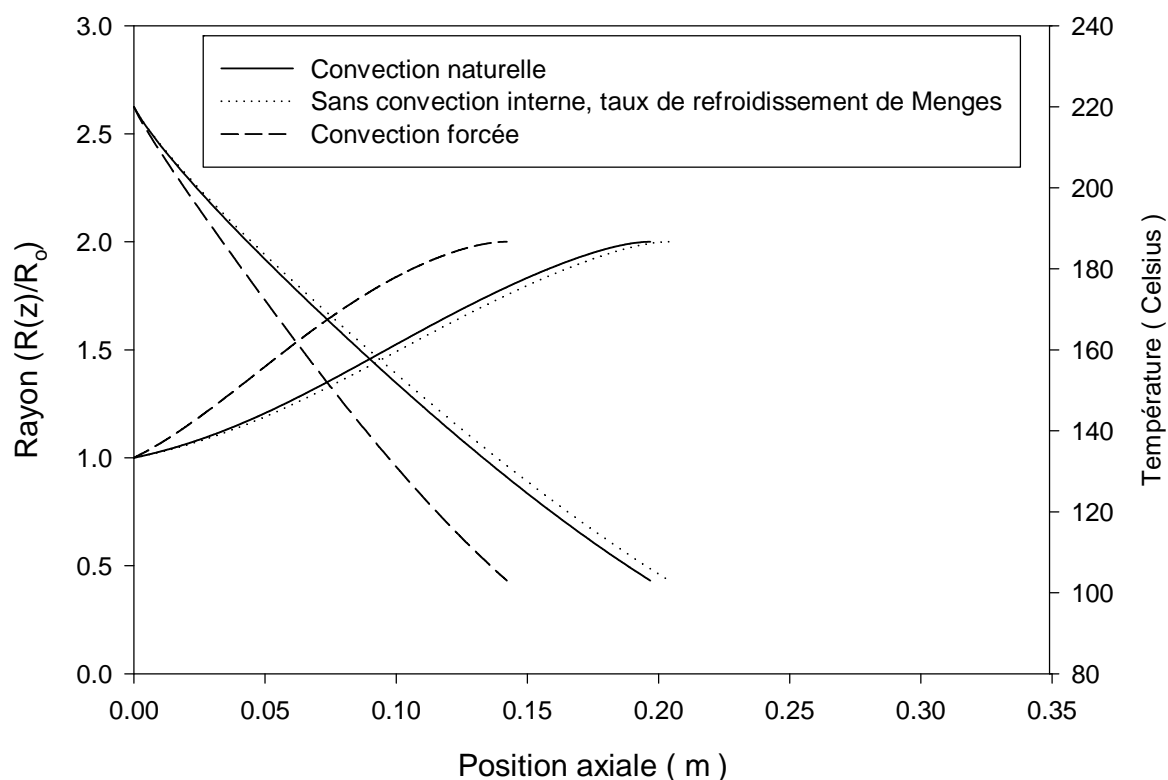
crystallinité et la microstructure des films produits. Or il a été démontré que ces paramètres jouent un rôle important sur les propriétés optiques et mécaniques des films produits. L'utilisation de système de refroidissement interne pourrait donc avoir des conséquences favorables à la fois sur la productivité et sur la qualité des films produits dépendamment des propriétés recherchées.



**a) Effet du taux de refroidissement sur le rayon et la température**



**b) Effet du taux de refroidissement sur les contraintes**



### c) Effet de la prise en compte de la convection interne

**Figure 3.18 : Évolution du rayon, des contraintes et de la température en fonction de la position axiale.**

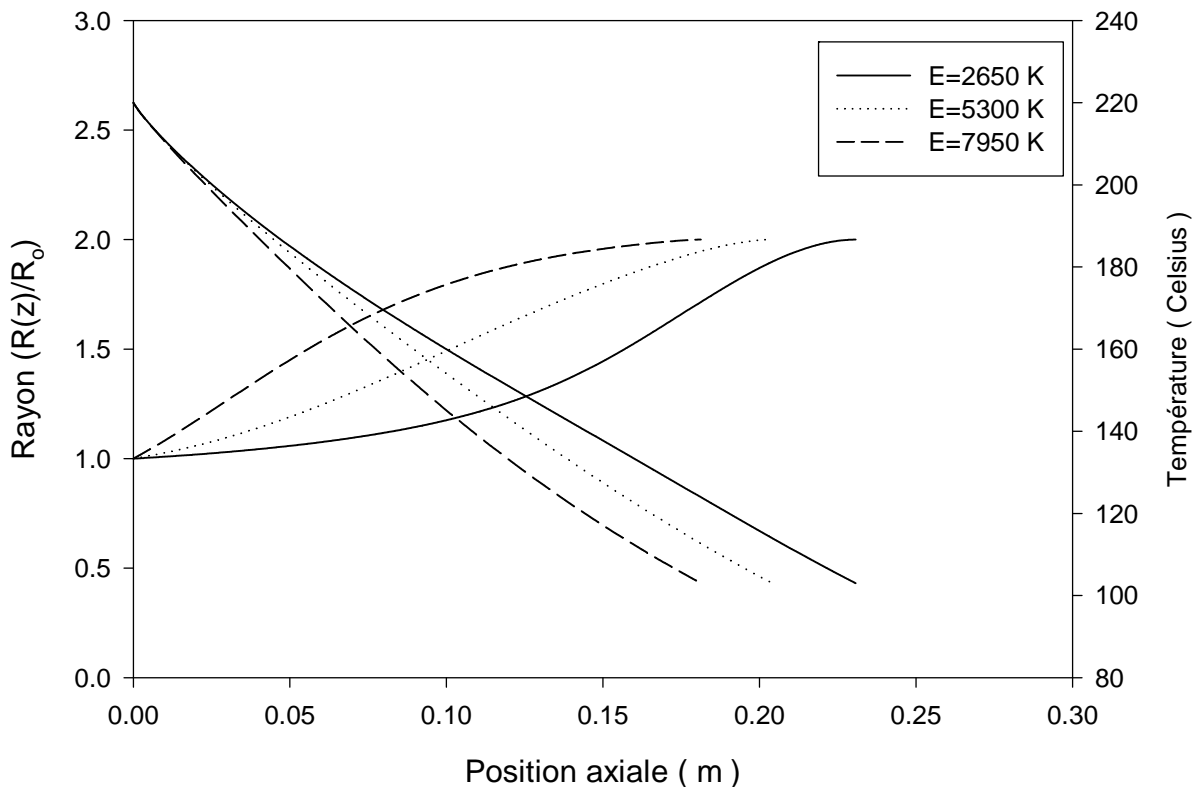
**Tableau 3.4 : Propriétés de refroidissement à l'intérieur de la bulle**

Cas	Coefficient de convection interne W/(m <sup>2</sup> °C)	Température de l'air à l'intérieur de la bulle °C
Convection forcée	10	20
Convection naturelle	2	90

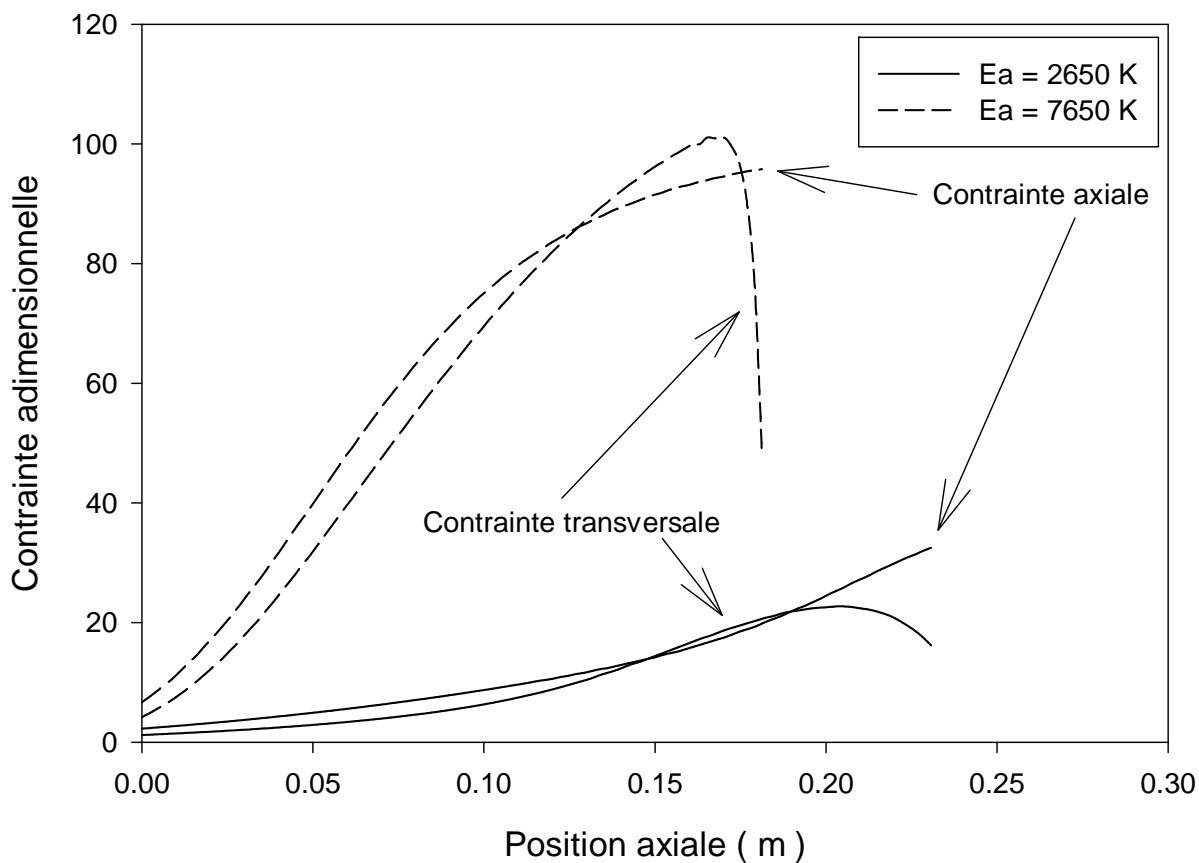
L'observation de la figure 3.19a nous permet d'évaluer l'effet de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique sur la forme des bulles indépendamment des autres propriétés. Ceci nous permet de constater que plus l'énergie d'activation est élevée plus la bulle gonfle rapidement; cela correspond aux résultats obtenus précédemment par André (1999). Ce comportement est explicable par le fait qu'une énergie d'activation élevée résulte en une viscosité qui croît très fortement quand la température décroît. Cette thermodépendance de la viscosité entraîne une augmentation de la force aux rouleaux pinceurs nécessaire pour produire la bulle. Il est possible de constater à la figure 3.19b que cette augmentation de la force a pour effet de générer des contraintes internes dans le film plus importantes. Par contre l'augmentation de l'énergie d'activation n'affecte pas la viscosité en sortie de filière car selon notre définition la viscosité adimensionnelle à cette position est égale à 1 dans les trois cas. C'est donc la combinaison de ces deux phénomènes qui entraîne une augmentation rapide du taux de déformation et donc du diamètre de la bulle. Ce gonflement rapide de la bulle a pour effet d'augmenter le taux de refroidissement et ce même si la fonction permettant d'évaluer le coefficient de convection externe demeure inchangée. Il est de plus possible d'observer que le taux de refroidissement n'est pas nécessairement constant. Si on compare les figures 3.19a et 3.19b à la figure 2.18 il est possible de constater que notre calcul nous permet de reproduire des résultats qualitativement similaires aux données expérimentales. C'est-à-dire qu'un matériau possédant une énergie d'activation élevée gonflera plus rapidement tout en ayant des contraintes internes plus élevées qu'un matériaux de faible énergie d'activation.



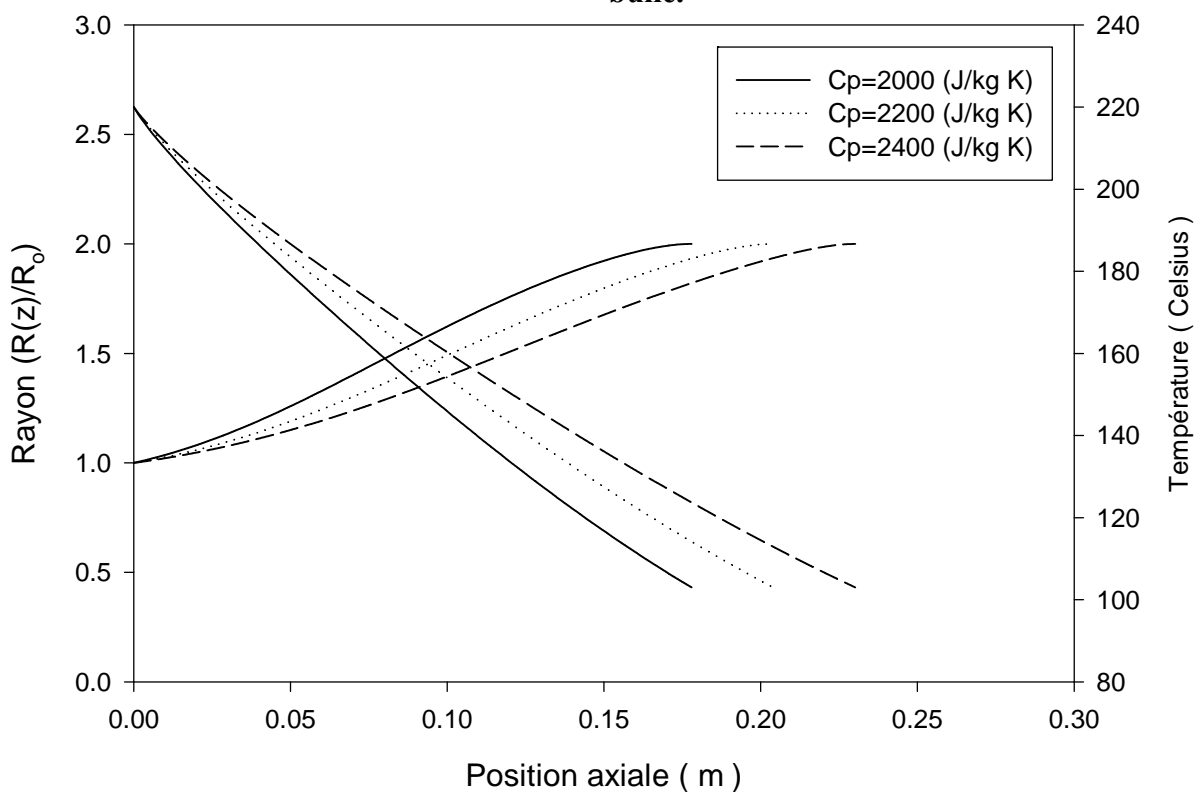
La figure 3.19c nous permet de constater que l'utilisation d'un matériau possédant une chaleur spécifique faible résultera en une bulle atteignant sa température de cristallisation plus rapidement. Ceci est attribuable au fait que la chaleur spécifique affecte directement la quantité d'énergie qui faut retirer au film pour qu'il atteigne sa température de cristallisation. Il y a donc une relation directe entre la chaleur spécifique et la longueur de figeage. Ces résultats illustrent bien l'importance de faire un calcul de la température plutôt qu'utiliser un taux de refroidissement mesuré en particulier lorsque l'on tente de traiter les cas de coextrusion. Il faut noter que ces résultats ont été obtenus en supposant que la température de cristallisation était égale à 103 °C pour tous les cas traités. L'étude de ces paramètres peut sembler purement académique mais elle nous permet de comprendre que le soufflage de gaine multicouche ne sera pas uniquement régi par le refroidissement mais aussi par la nature rhéologique et les propriétés thermiques des matériaux utilisés.



a) Effet de l'énergie d'activation sur le rayon et la température de la bulle.



**b) Effet de l'énergie d'activation sur les contraintes adimensionnelles dans la bulle.**



**c) Effet de la chaleur spécifique**

**Figure 3.19 : Évolution du rayon, des contraintes et de la température en fonction de la position axiale. Effet de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique**

Il nous est maintenant possible de réaliser des calculs permettant d'évaluer l'évolution de la température en fonction de la position axiale et radiale. Il faut souligner de nouveau les différences entre ces deux méthodes de résolution. La méthode de résolution par différences finies passe par une discrétisation de l'équation de la chaleur sur une géométrie fixe obtenue suite à un calcul de la température à l'ordre 0. Dans ce cas le calcul bidimensionnel de la température est réalisé du bas vers le haut, donc de la sortie de la filière, où le profil thermique initial est fixé, à la position de figeage du film. La résolution par approximation numérique est réalisée simultanément au calcul mécanique et thermique à l'ordre 0 de la position de figeage à la sortie de la filière. Dans ce cas, la condition frontière initiale est la température de cristallisation à la position de figeage. Le profil thermique en sortie de filière est donc un résultat de calcul. La figure 3.20 a été réalisée en utilisant les valeurs présentées au tableau 3.2. La relation de Menges a été utilisée pour évaluer l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale.

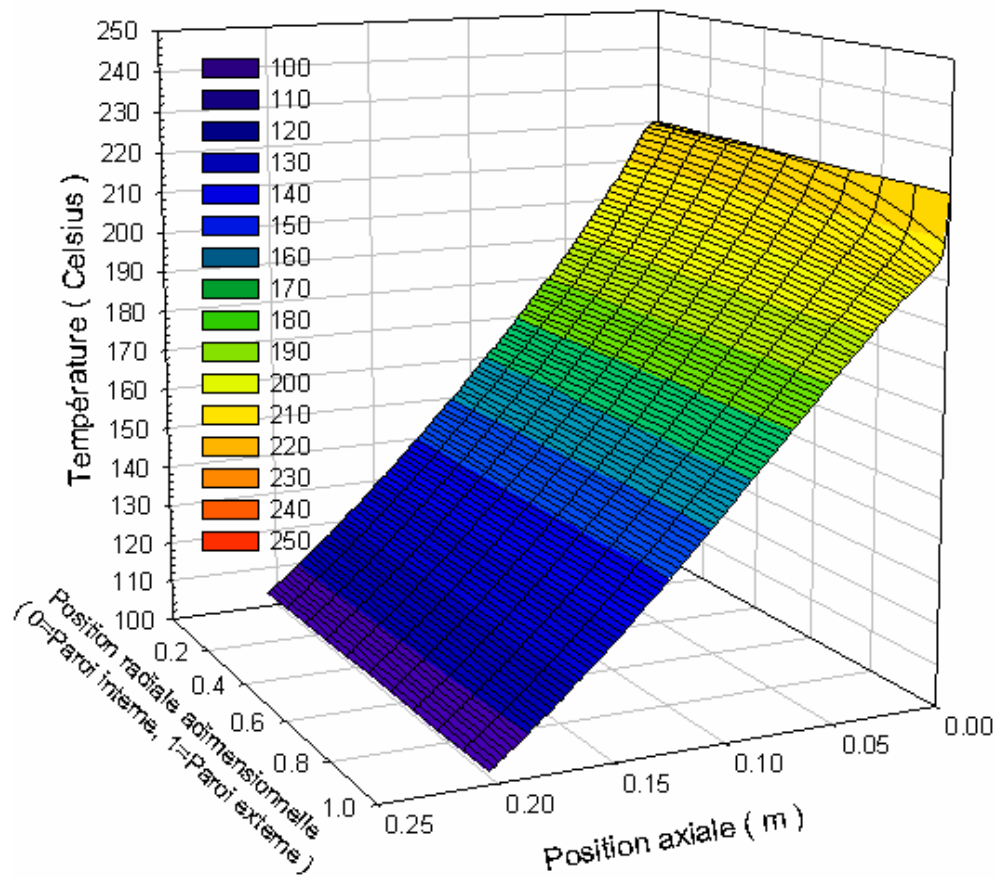
La figure 3.20a a été obtenue par la méthode des différences finies en utilisant une température uniforme en sortie de filière égale à 220 Celsius. Le comportement illustré est celui que nous attendions. En effet, la température de la paroi externe diminue très fortement à la sortie de la filière, alors que la température de la paroi interne diminue très légèrement, ce qui a pour effet de créer un gradient de température d'environ 15 Celsius entre les deux parois du film. Ce gradient est causé par le refroidissement intense (le coefficient de convection est très élevé) près de la filière. Très rapidement, comme il est possible de le constater à la figure 3.20d ce gradient thermique diminue pour atteindre une valeur finale de 0.3 °C à la position de figeage. Cette diminution du gradient est causée par l'effet combiné de l'amincissement du film, qui cause un équilibrage très rapide de la température et par la diminution très rapide du coefficient de convection.

La figure 3.20b a été obtenue en utilisant la méthode des différences finies en imposant une température en sortie de filière de 240 Celsius pour la couche intérieure et de 200 Celsius pour la couche externe. Il est possible de constater que le fait d'imposer un profil thermique initial dans l'épaisseur a pour effet de créer un écart thermique beaucoup plus important que dans le cas précédent. En effet, il est possible d'observer à la figure 3.20d, que dans ces conditions la différence de température entre les deux parois du film peut atteindre 45 Celsius à la sortie de la filière pour ensuite s'atténuer très rapidement pour atteindre ici encore une valeur de 0.3 Celsius. Par contre il est possible de constater que localement la température de la couche externe augmente. Cette augmentation locale est causée par des effets concurrentiels: la convection exercée par l'air de refroidissement sur la paroi externe et l'existence d'un gradient thermique initial de 40 °C qui fait qu'une quantité importante de chaleur migre de la paroi interne vers la paroi externe. Il est en effet possible de constater que contrairement à ce qui se produisait à la figure a, la température de la paroi interne diminue très rapidement en sortie de filière. Il faut aussi noter, que cet effet est augmenté par le fait qu'au point central la température passe immédiatement de 240 à 200 Celsius. L'utilisation d'un gradient thermique initial plus faible, ou d'une transition plus progressive de la température initiale en fonction de la position radiale fait disparaître cette augmentation locale de la température.

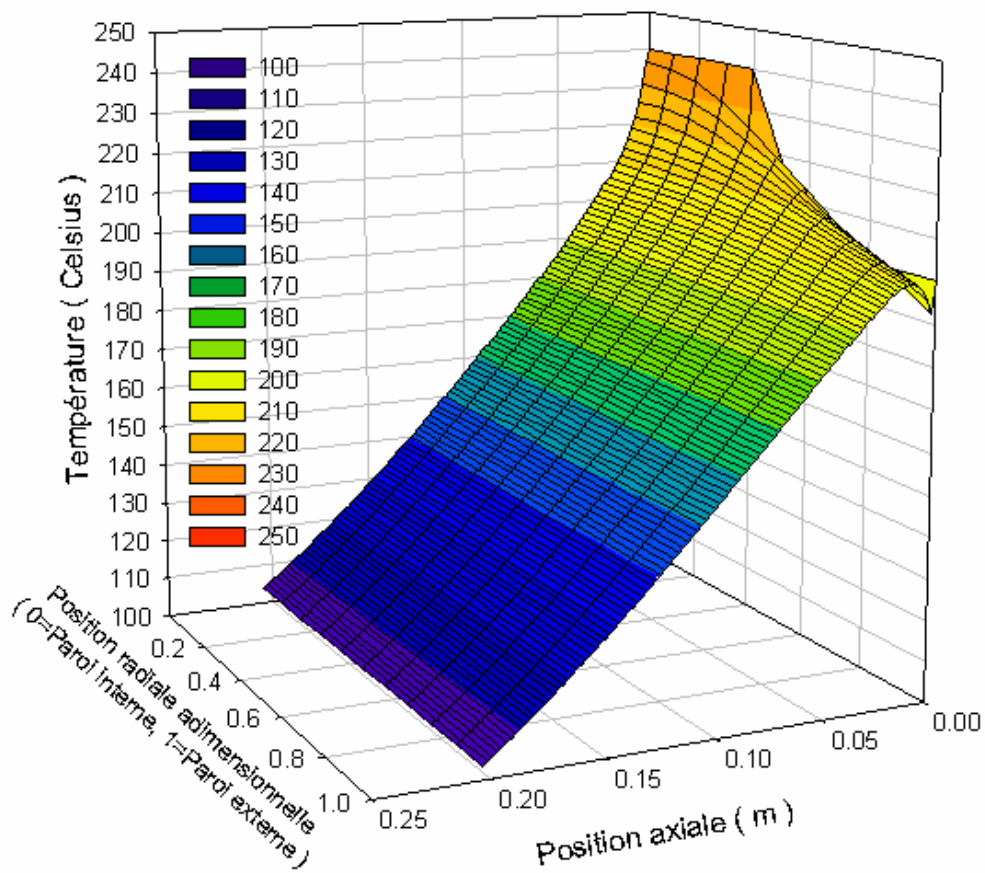
La figure 3.20c qui a été obtenues en utilisant la méthode par approximation numérique nous permet de constater que les résultats sont globalement identiques à ceux obtenus par différences finies. Ici aussi il y a présence d'un gradient de température dans l'épaisseur (environ 35 Celsius) en sortie de filière. Par contre le gradient de température en sortie de filière, qui est un résultat de calcul dans ce cas, est beaucoup plus progressif que celui que nous avons imposé pour le calcul de la figure b. Il faut aussi noter que l'augmentation locale de la température dépend ici encore du taux de refroidissement et donc du coefficient de

convection. Dans le cas présent cette valeur passe de 100 à 50 W/(m<sup>2</sup> °C) sur le premier centimètre de soufflage. Dans ce cas particulier le coefficient  $\kappa_e$  sera égal à 9, nous nous approchons donc localement de la zone de non applicabilité du développement aux différents ordres de grandeur car dans ce cas le couple  $\kappa_e \varepsilon$  vaut approximativement 0.1. Ceci constitue donc la seconde raison pouvant expliquer la variation locale de la température de la paroi externe dans ce cas particulier.

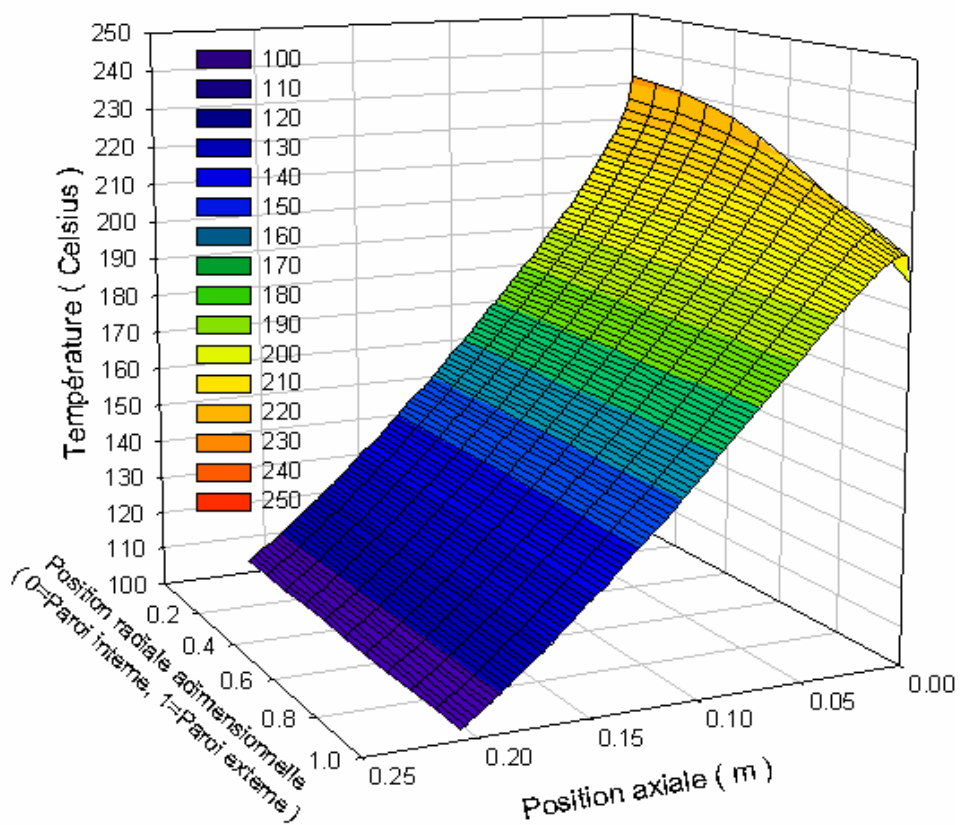
A l'exception des différences observées près de la filière, qui résultent des différentes méthodes de calculs, il est intéressant de constater que ces trois figures peuvent être superposées presque parfaitement. La figure 3.20d nous permet de constater que très rapidement (2 cm) la différence de température entre la paroi interne et la paroi externe en fonction de la position axiale suit le même comportement pour les trois cas étudiés. A la position de figeage cette différence de température est minimale dans les trois cas. En plus, les conditions d'opérations utilisées, taux de gonflement de 2 et taux d'étirage de 8, produisent un film relativement épais de 62  $\mu\text{m}$ . Un calcul réalisé sur un film plus mince, en utilisant un taux de gonflement de 3 et un taux d'étirage 8 par exemple, aurait généré une différence de température dans l'épaisseur du film encore plus faible que celle observée. Ceci est très intéressant car cela nous permet de valider notre hypothèse de cristallisation uniforme dans l'épaisseur du film pour un fluide donné. Ceci vient d'ailleurs invalider l'hypothèse réalisée par Campbell et Cao (1997) ainsi que par Ashok et Campbell (1992) dans le développement de leur modèle biphasique. Ils supposaient l'existence d'une différence de température entre les deux parois du film qui entraînait une cristallisation plus précoce à la paroi externe qu'à la paroi interne. Or nous venons de démontrer que le gradient était quasi inexistant à la position de figeage. Par contre les variations locales de température le long de l'axe de la bulle pourraient induire des variations locales de contraintes qui pourraient à leur tour induire la formation de germes qui aurait pour conséquence de modifier le processus de cristallisation du film. Or nous ne considérons pas de tels aspects lors de la résolution de notre système d'équations mécaniques.



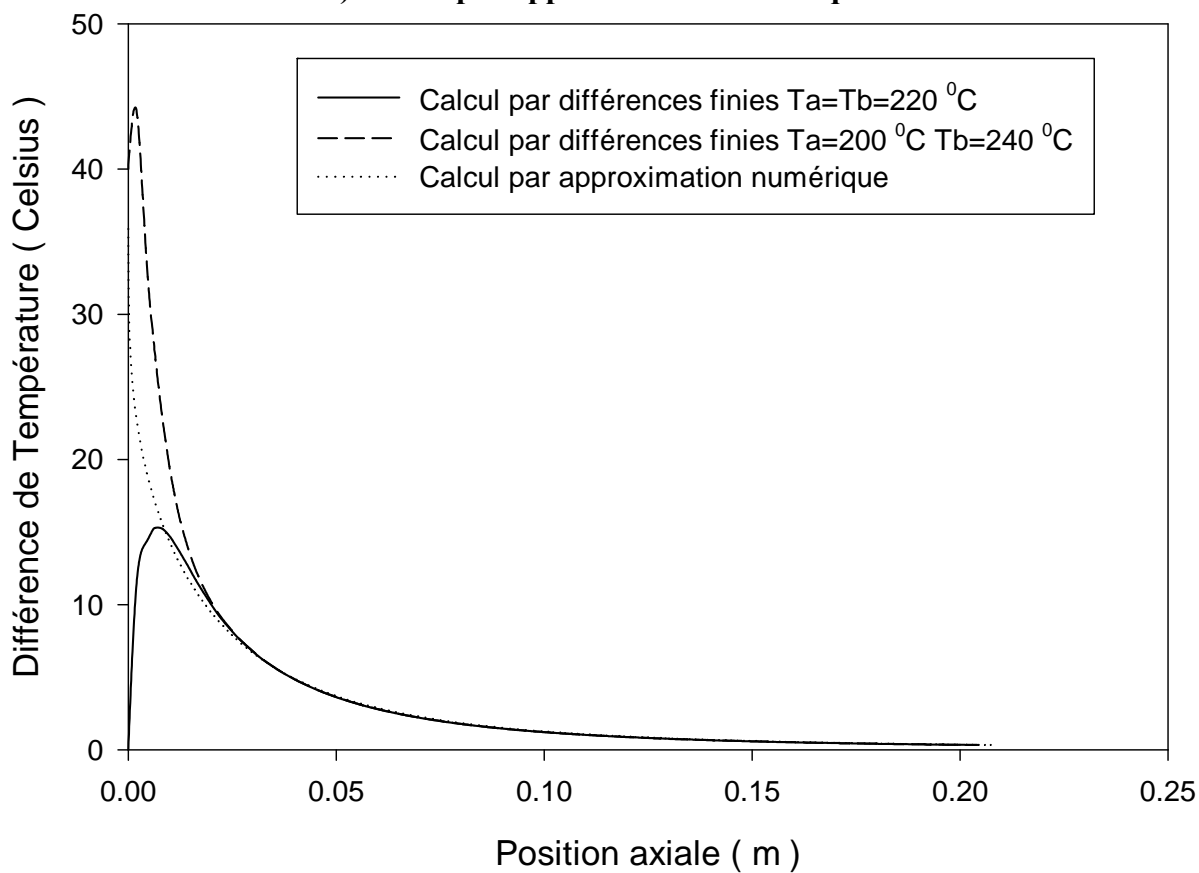
a) Calcul par différences finies



b) Calcul par différences finies



c) Calcul par approximation numérique

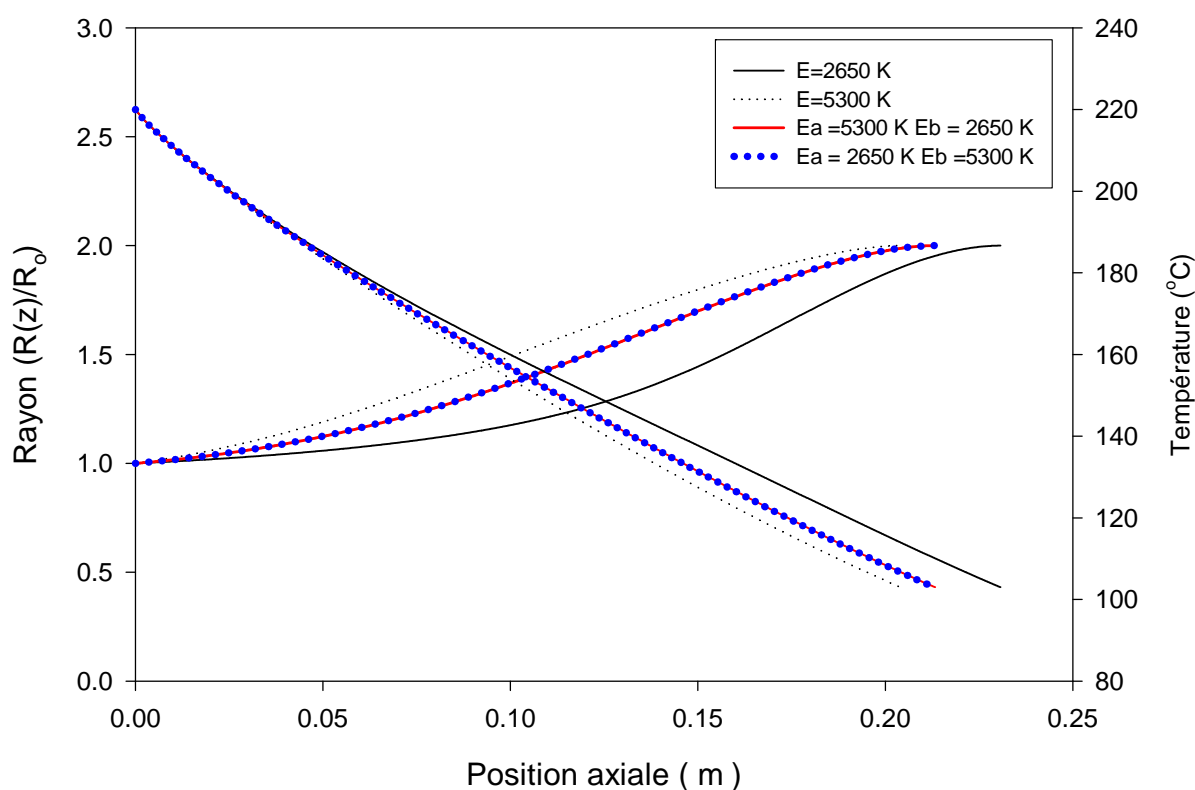


d) Évolution de la différence de température entre la paroi externe et la paroi interne  
 Figure 3.20 : Évolution de la température. Effet de la méthode de calcul.

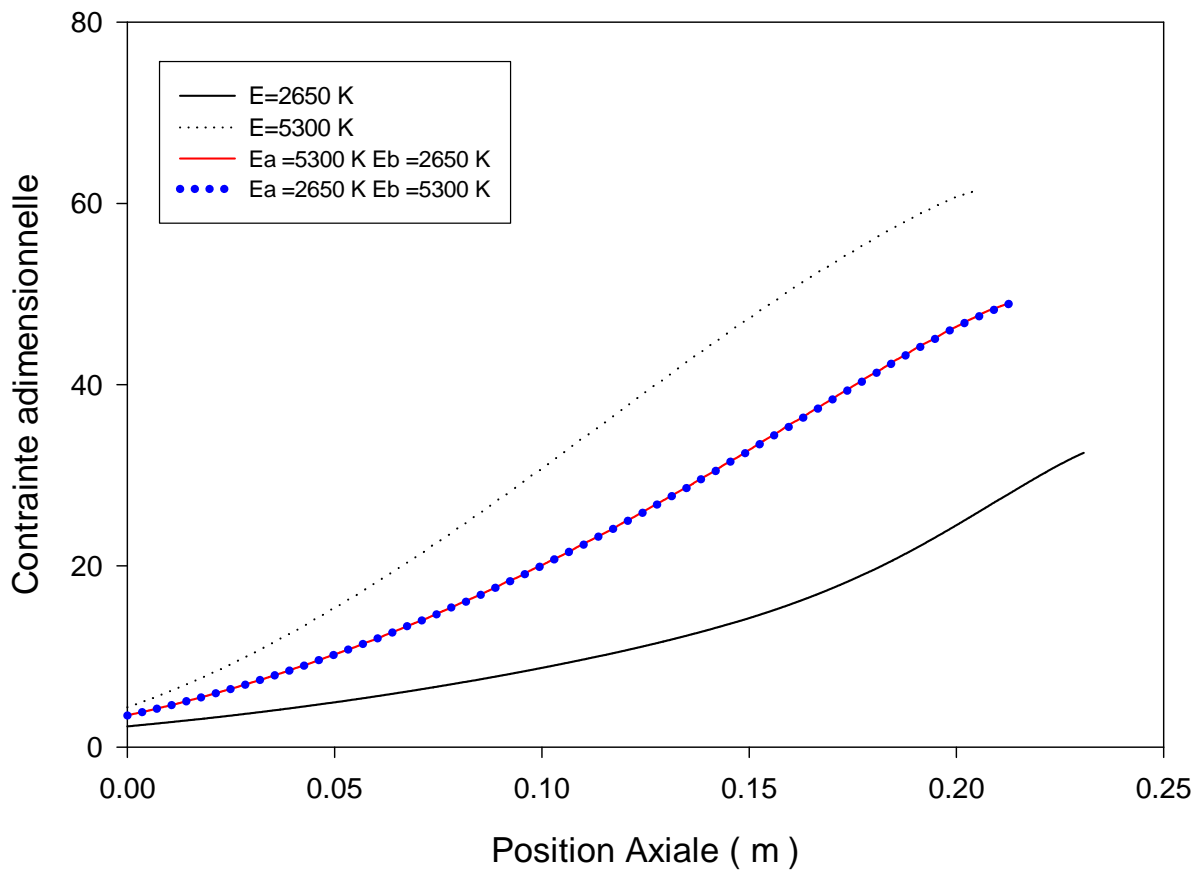
### 3.7.2 Films multicouches multimatières

Le tout premier aspect que nous aborderons est l'effet de l'agencement des couches sur le profil géométrique, le profil thermique et sur les contraintes développées pendant la formation du film. Pour toutes les figures qui suivent l'indice "a" correspond à la couche interne du fluide et l'indice "b" à la couche externe. Nous avons réalisé deux simulations sur des films multicouches monomatières possédant une énergie d'activation respective de 2650 et 5300 K et une chaleur spécifique de 2200 J/(kg °C). Nous avons ensuite effectué une simulation en combinant ces deux matériaux afin de reproduire la fabrication d'un film multimatières. Une simulation finale a été réalisée en inversant le positionnement des deux matériaux. La figure 3.21a nous permet de constater que l'agencement des deux matériaux n'a absolument aucun effet sur les profils thermique et géométrique calculés. Ceci est peu surprenant car nos calculs sont basés sur l'hypothèse d'une température moyenne. Il est aussi possible de constater que notre film multimatière n'est pas parfaitement positionné au centre de l'enveloppe formée par les deux films monomatières. De manière générale il semble que cet effet est attribuable à l'évolution de la différence de viscosité entre les deux couches en fonction de la position axiale. En effet, plus la différence d'énergie d'activation et de viscosité entre les deux matériaux sera grande plus la déviation par rapport au centre sera importante.

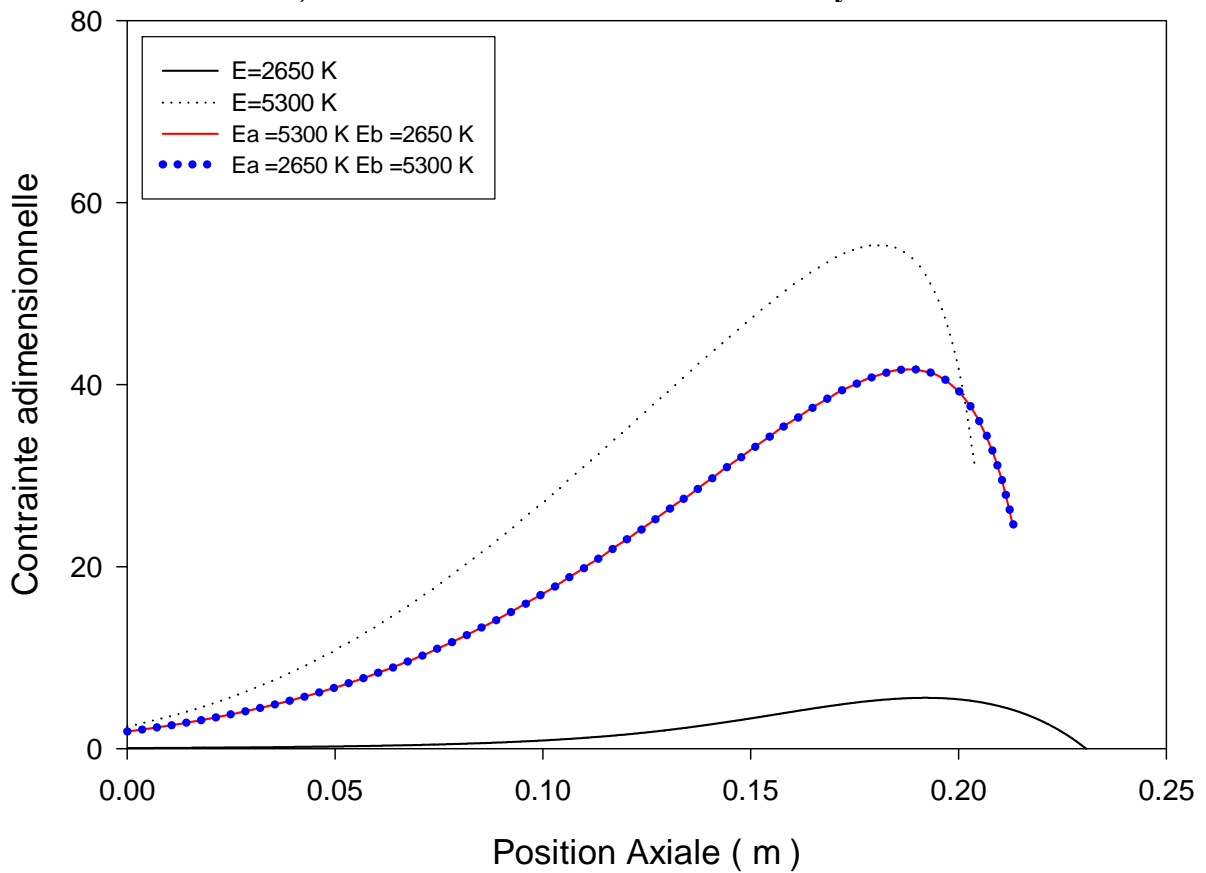
Il est aussi possible de constater aux figures 3.21b et 3.21c que les profils de contraintes moyennes dans le film ne dépendent pas de l'agencement des couches. Ceci est cohérent avec les résultats expérimentaux observés au chapitre précédent à la figure 2.20.



a) Profil thermique et géométrique



**b) Contrainte adimensionnelle axiale moyenne**

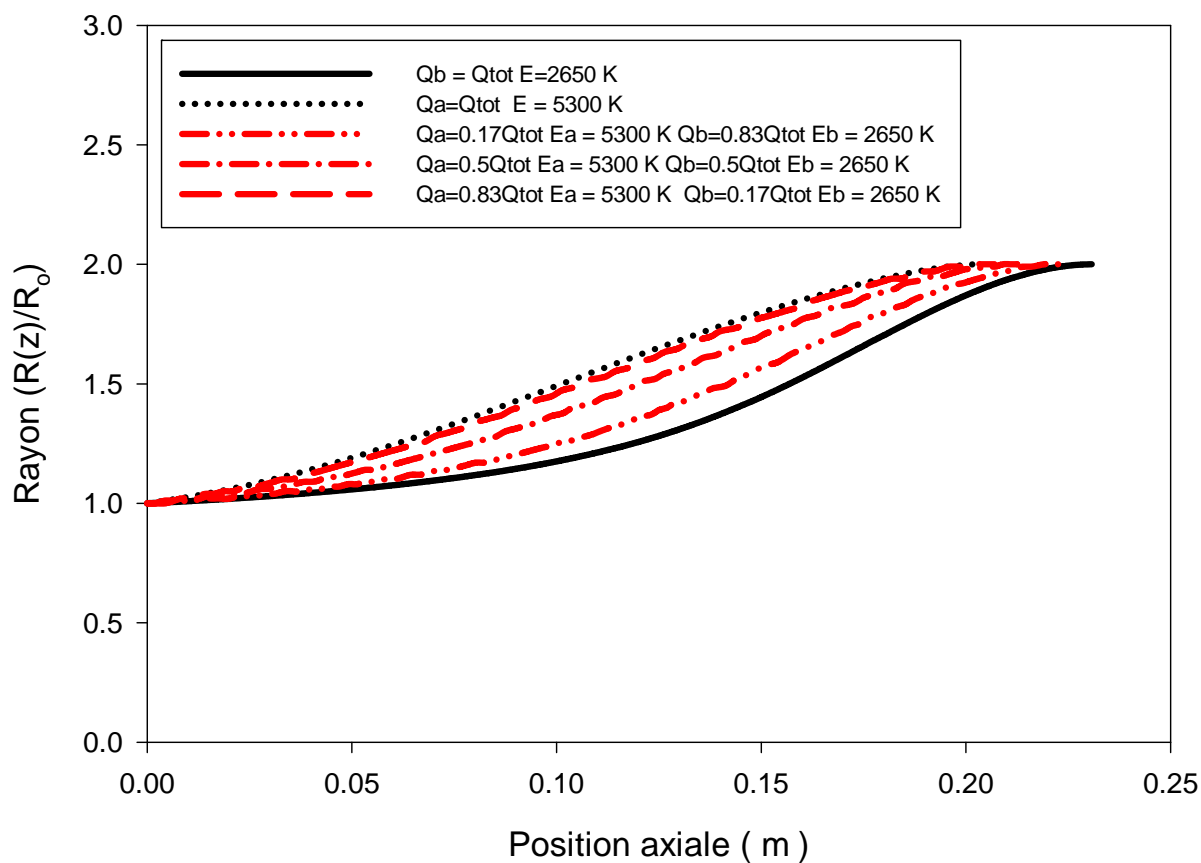


**c) Contrainte adimensionnelle transversale moyenne**

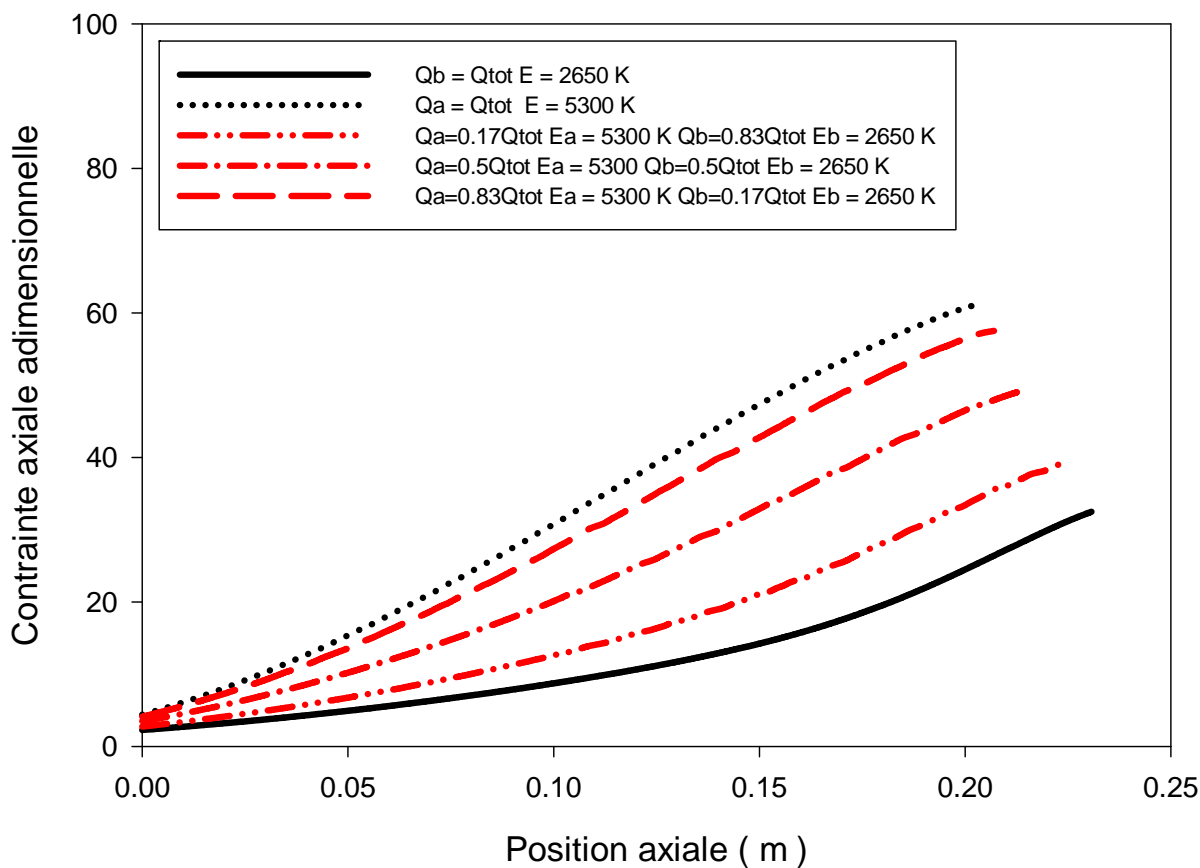
**Figure 3.21 : Effet de l'agencement sur l'évolution de la température, des contraintes et du rayon de bulles multicouches**



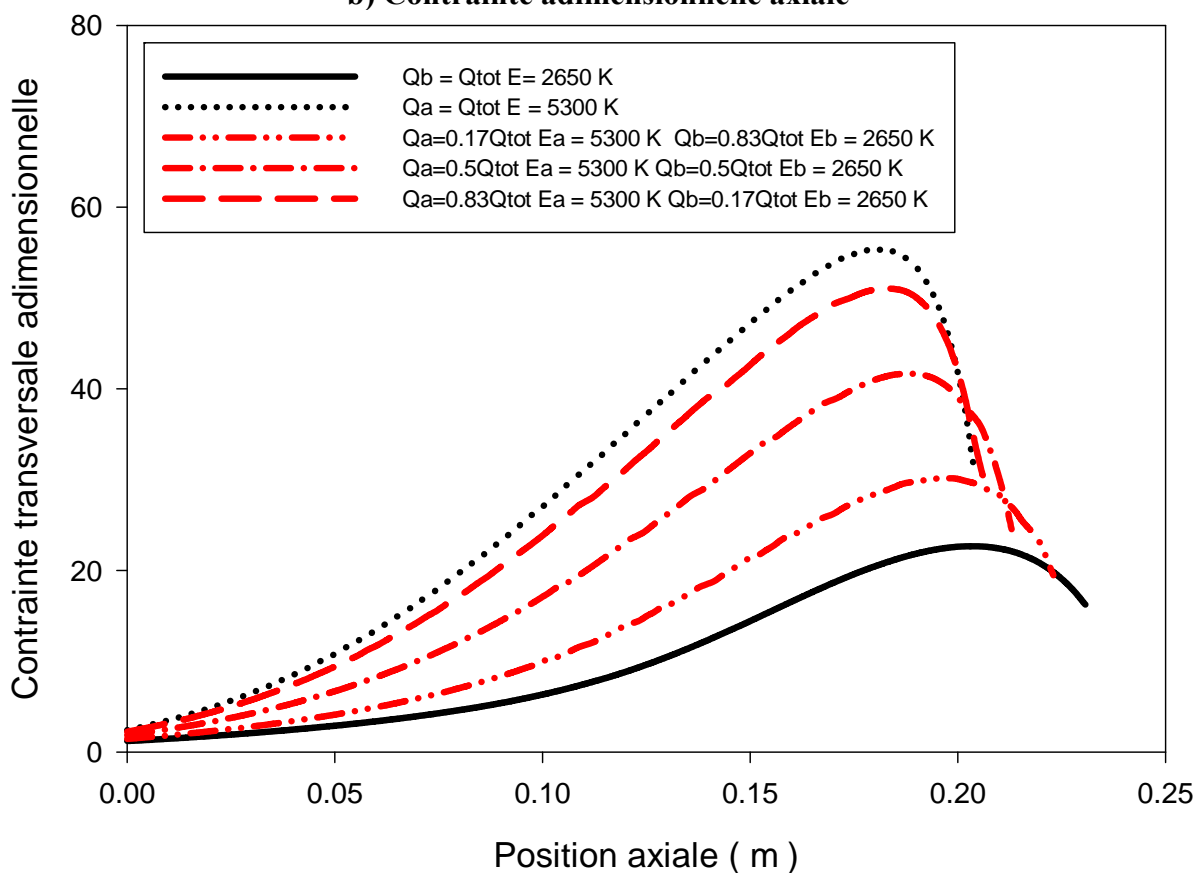
Il nous est possible d'observer à la figure 3.22a que le débit relatif des matériaux influence fortement le profil géométrique des bulles multimatières. Comme nous le supposons, plus la quantité d'un matériau augmente dans un film multimatières plus son profil géométrique se rapproche du profil du film monomatière. Les figures 3.22b et 3.22c nous montrent que les contraintes axiales et transversales moyennes, obtenues par pondération par rapport à l'épaisseur relative de chaque couche, augmentent proportionnellement avec l'importance du débit du fluide A, qui est le polymère ayant l'énergie d'activation la plus élevée. Ceci correspond aussi qualitativement à nos observations expérimentales issues de la biréfringence que nous avons illustrées à la figure 2.21b.



a) Profil thermique et géométrique



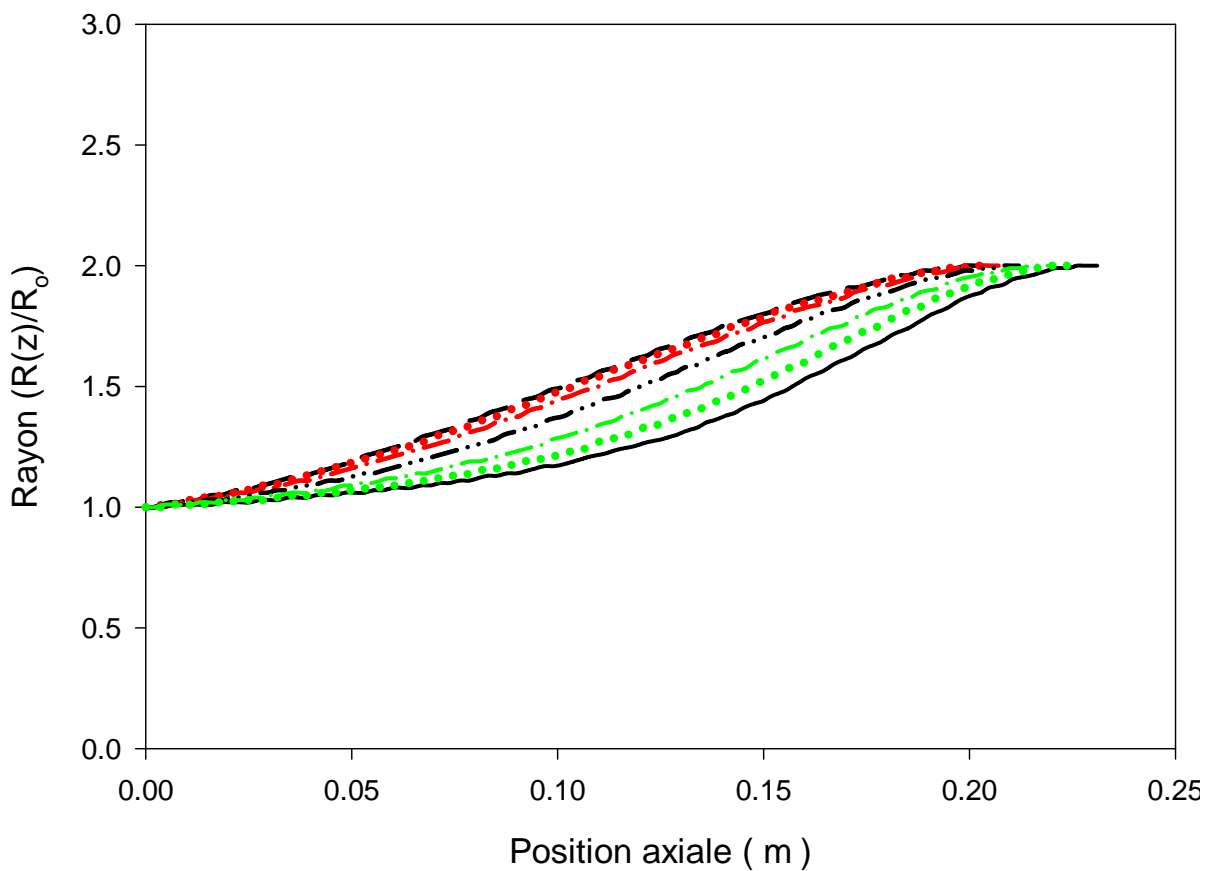
b) Contraite adimensionnelle axiale



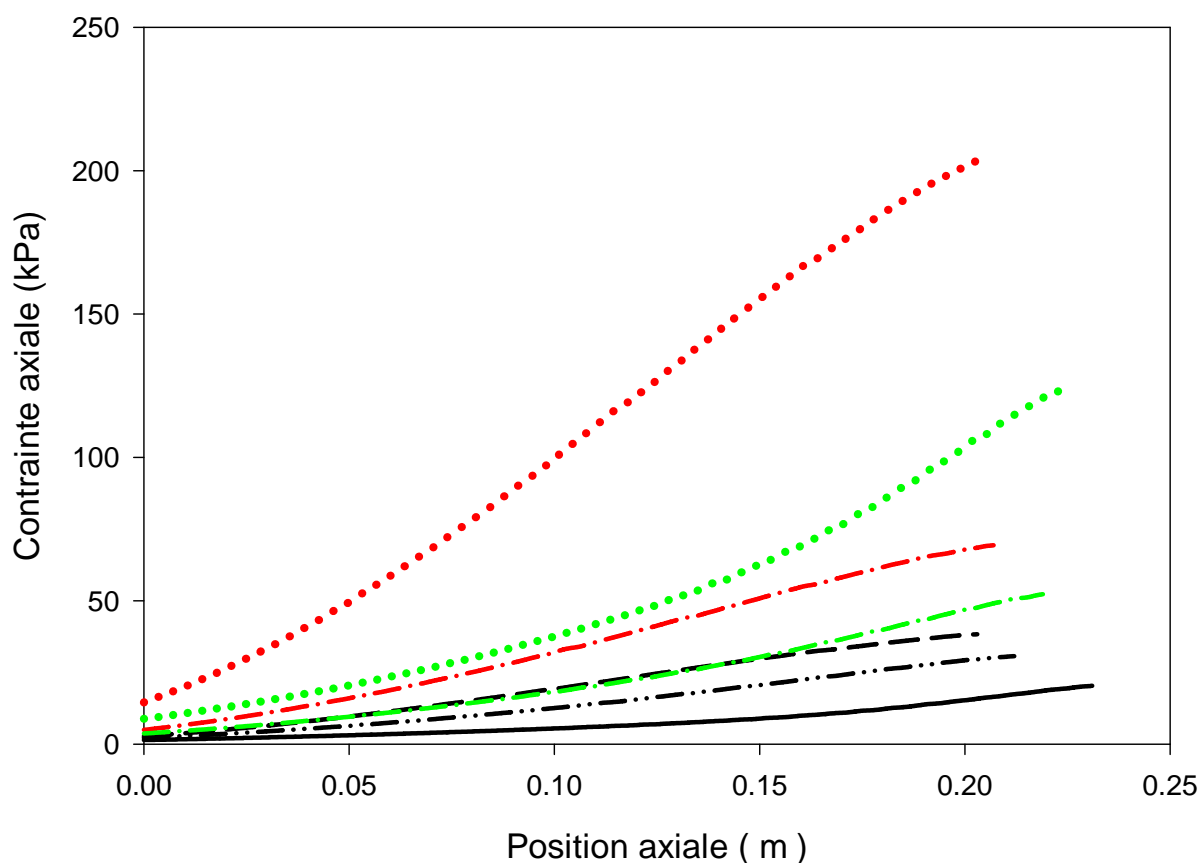
c) Contraite adimensionnelle transversale

Figure 3.22 : Effet de la répartition des couches sur l'évolution de la température, des contraintes et du rayon de bulles multicouches

La figure 3.23 nous permet d'observer l'effet de la viscosité initiale sur le profil géométrique et sur la contrainte axiale moyenne de film composé à 50% de la couche A et à 50% de la couche B. En effet, l'ensemble des figures présentées jusqu'à maintenant ont été réalisées en supposant que la viscosité initiale des deux matériaux était identique. Lorsque l'on augmente la viscosité d'un des matériaux par rapport à l'autre il est possible de constater à la figure 3.23a que la forme de la bulle multicouche se rapproche de la forme de la bulle monocouche possédant une viscosité élevée. En somme, la viscosité a un effet similaire à la quantité de matériaux présent dans le film multicouche sur le profil géométrique de la bulle. Il semble donc que la forme d'une bulle multicouche sera toujours comprise entre les bulles monocouches lorsque la capacité calorifique des matériaux est identique. Il est aussi possible de constater à la figure 3.23b que la présence d'un matériau visqueux a pour effet de générer des contraintes axiales moyennes pouvant surpasser de beaucoup les valeurs obtenues lors de la production de films monocouche de faible viscosité. Ceci est différent du comportement observé aux figures 3.22b et 3.22c qui illustre une règle d'additivité proportionnelle à la quantité de chacun des matériaux dans le film.



**a) Profil géométrique.**



**b) Profil de contrainte axiale moyenne dans le film**

Légende

—	$E_a = E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = \eta_b = 5000$
- - -	$E_a = E_b = 5300 \text{ K}$ $\eta_a = \eta_b = 5000$
•••••	$E_a = 5300 \text{ K}$ $E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = 10\eta_b$ $\eta_b = 5000$
- . - . - .	$E_a = 5300 \text{ K}$ $E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = 3\eta_b$ $\eta_b = 5000$
- . . - . . - . .	$E_a = 5300 \text{ K}$ $E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = \eta_b$ $\eta_b = 5000$
- . - . - . - . - .	$E_a = 5300 \text{ K}$ $E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = 5000$ $\eta_b = 3\eta_a$
•••••	$E_a = 5300 \text{ K}$ $E_b = 2650 \text{ K}$ $\eta_a = 5000$ $\eta_b = 10\eta_a$

**Figure 3.23 : Effet de la viscosité initiale des matériaux sur l'évolution des contraintes axiales et du rayon de bulles multicouches**

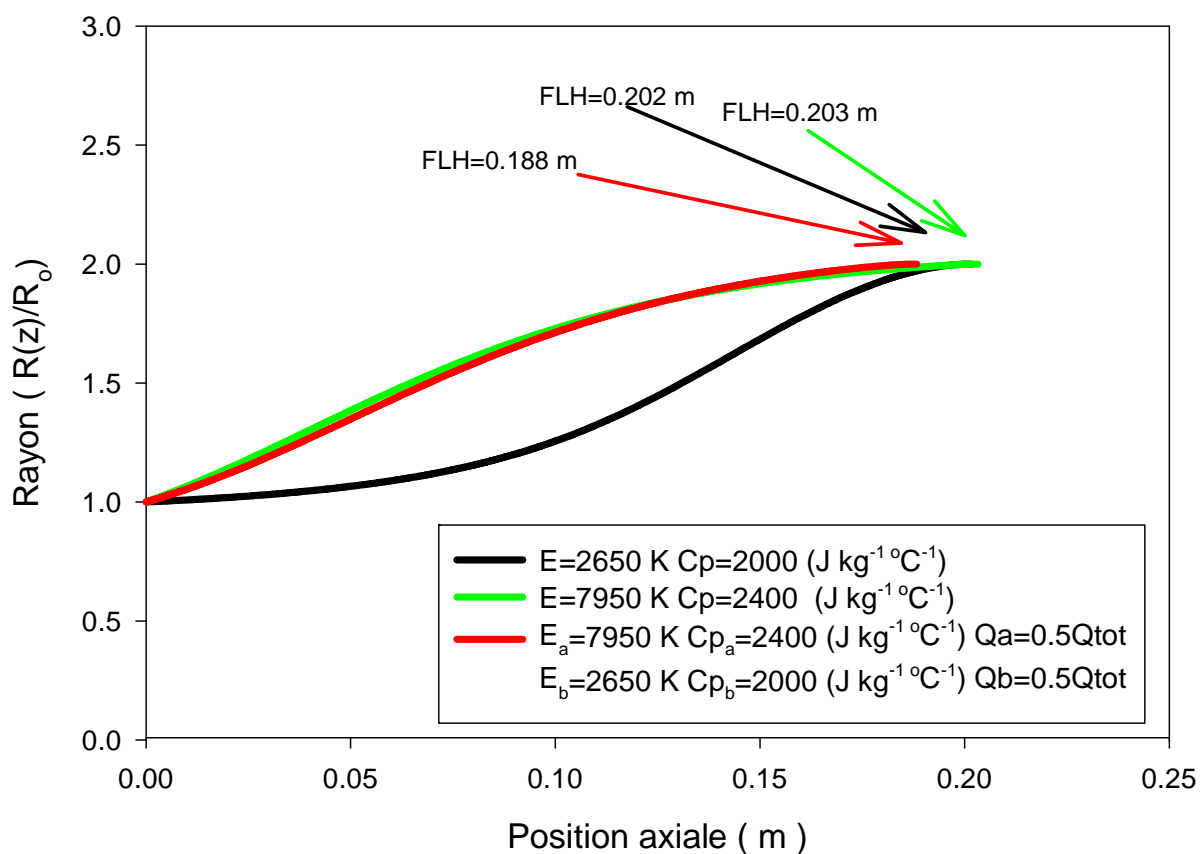
L'utilisation d'une chaleur spécifique unique pour nos deux matériaux nous a donné la possibilité de dégager l'effet de l'agencement et du ratio des débits sur la géométrie de la bulle indépendamment des effets thermiques pouvant être associés à la combinaison de deux matériaux possédant des propriétés thermiques différentes. Les figures 3.24a et 3.24b nous permettent de prendre en compte cet aspect.

La figure 3.24a nous permet de constater qu'en dépit d'un profil géométrique très différent les deux bulles monomatières possèdent la même hauteur de figeage. Ceci est causé par les effets

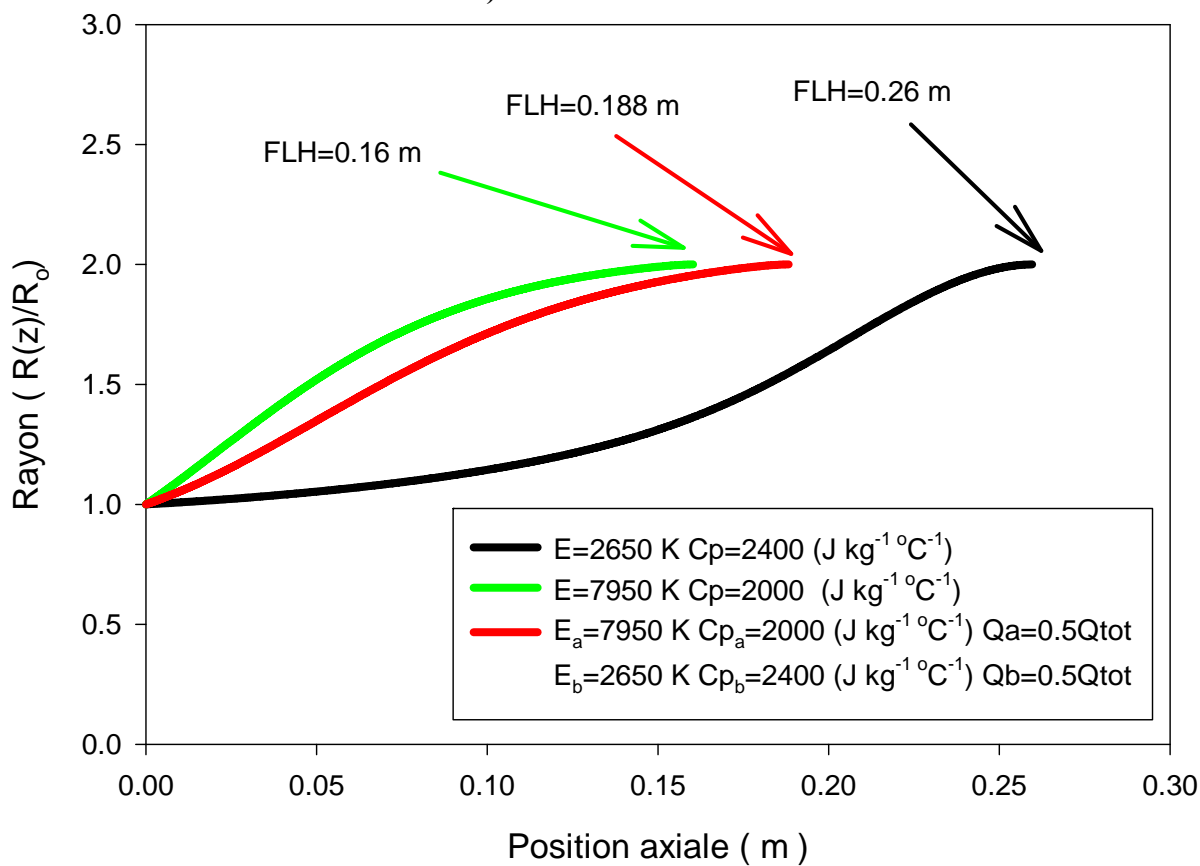
antagonistes de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique. En effet une forte énergie d'activation donnera naissance à une bulle gonflant rapidement alors qu'une chaleur calorifique élevée donnera naissance à une bulle gonflant lentement.

La bulle multimatière composée de ces deux matériaux possède un profil géométrique semblable à la bulle monocouche obtenue avec une énergie d'activation élevée et elle atteint sa température de solidification 1.5 cm avant les bulles monocouches. En combinant les deux matériaux la chaleur spécifique moyenne du film multicouche devient  $2200 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$  ce qui entraîne que la quantité de chaleur qui doit être retirée de ce film est plus faible que la quantité de chaleur devant être retiré du film monocouche possédant une énergie d'activation de  $7650 \text{ K}$ . Ceci entraîne donc un gonflement plus rapide. Un phénomène similaire, bien que plus marqué, avait été observé lors de la production des bulles multicouches de LDPE-A/mMDPE. Il faut noter que ces figures ont été obtenues en supposant, que dans tout les cas, la température de cristallisation était égale à  $103 \text{ Celsius}$ . Il est facilement possible d'imaginer que si la température de cristallisation du fluide possédant une énergie d'activation de  $2650 \text{ K}$  était de  $110 \text{ Celsius}$ , le film multicouche aurait atteint cette température encore plus rapidement et la différence entre les films monocouches et le film multicouche aurait été encore plus marquée.

La figure 3.24b nous permet de voir que dans une configuration d'énergie d'activation et de chaleur spécifique différente le film multimatières est situé dans ce cas, dans l'enveloppe comprise entre les deux films monocouches. Ceci est très intéressant car cela indique que la combinaison de deux matériaux peut avoir un effet important sur la forme finale de la bulle et donc sur le champ de contraintes généré à l'intérieur du film.



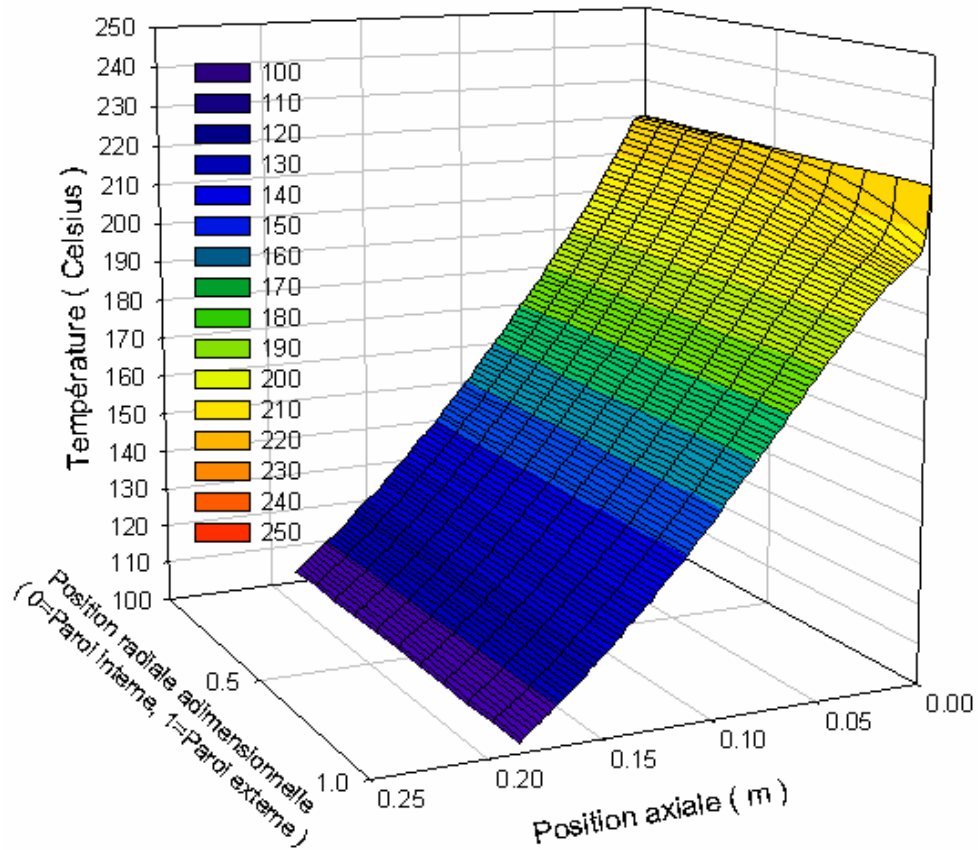
a) Effet combiné A



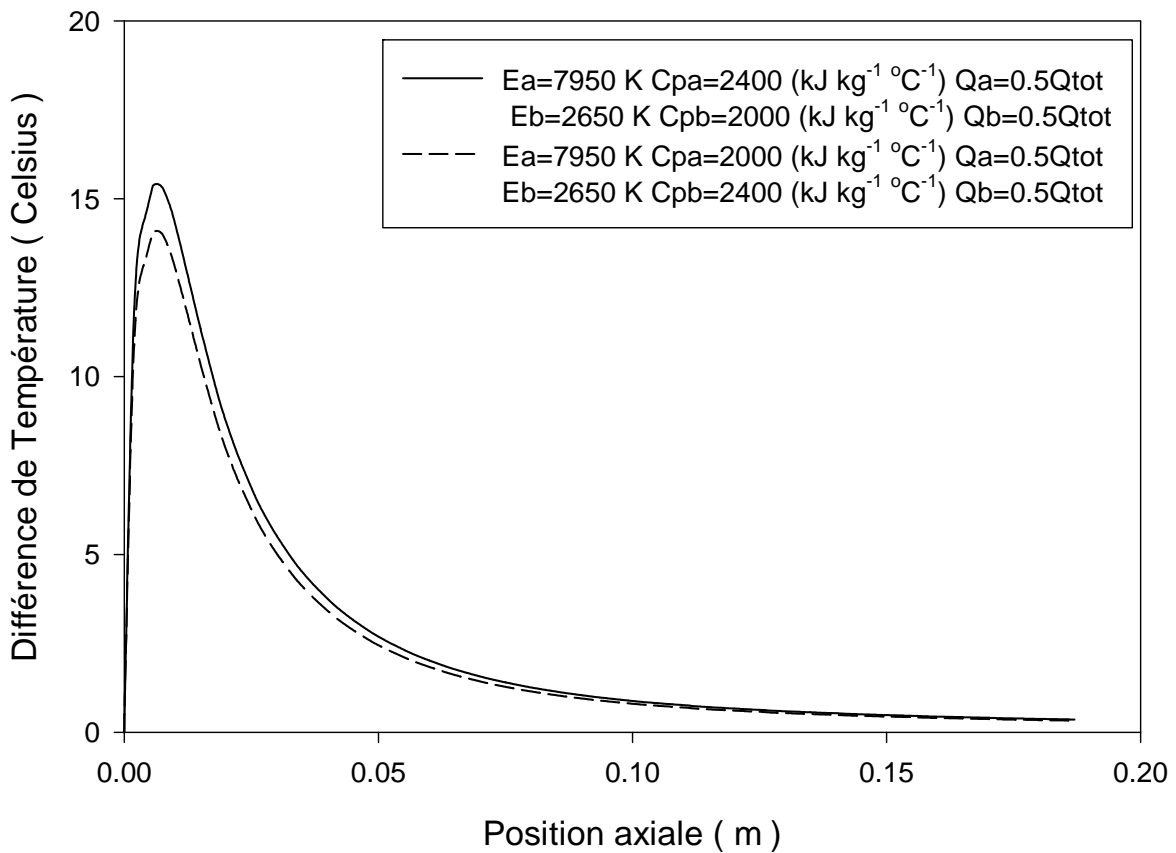
b) Effet combiné B

Figure 3.24 : Effets combinés de l'énergie d'activation et de la chaleur spécifique sur les profils géométrique de bulles multicouches.

Enfin, la figure 3.25a illustre le profil thermique radial et axial réalisé sur la bulle multicouche présentée à la figure 3.24a. Il est possible de constater que cette figure est similaire aux profils thermiques bidirectionnels calculés sur une bulle monocouche présentés à la figure 3.20. La raison principale qui explique cette ressemblance est liée au fait que la capacité calorifique moyenne du film multicouche est égale à la capacité calorifique utilisée pour réaliser le calcul monocouche ( $2200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). La quantité de chaleur à retirer du film est donc globalement la même dans les deux cas. C'est pour cette raison qu'un profil thermique semblable a aussi été obtenu en réalisant un calcul thermique sur la bulle multicouche présentée à la figure 3.24b. Par contre il faut noter, que si globalement le profil thermique semble identique, il existe de légères variations locales. En effet, la figure 3.25b nous permet d'observer que la différence de température entre les deux parois des deux films multicouches est légèrement différente au début de la formation de la bulle. Lorsque le matériau possédant la plus forte chaleur spécifique est positionné sur la paroi extérieure de la bulle la différence de température entre les deux parois est inférieure à celle calculée lorsque le matériau possédant la faible chaleur spécifique est positionné sur la paroi externe. En effet un matériau possédant une chaleur spécifique élevée a pour conséquence de diminuer l'intensité de la variation de la température par rapport à la position radiale. Cette valeur étant plus faible, le transfert d'énergie à l'intérieur du film sera aussi plus faible. Ceci entraînera que l'écart thermique entre les deux parois sera plus faible. Par contre cet effet sera atténué par le fait que la température de la paroi extérieure de la bulle diminuera plus lentement. Le transfert de chaleur par convection sera alors légèrement plus élevé que dans le cas où la couche externe est occupée par le matériau possédant une faible chaleur spécifique. Les résultats observés à la figure 3.25b sont donc une combinaison de ces deux effets antagonistes. Pour les conditions utilisées il semble que la réduction du gradient thermique soit prédominante face à l'augmentation du refroidissement par convection. Mais il demeure que l'effet de la chaleur spécifique sur le profil thermique bidirectionnel demeure relativement faible en comparaison de son influence sur la position de la ligne de figeage.



a) Profil thermique :  $E_a=7950 \text{ K}$   $C_{pa}=2400 \text{ (J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$   $E_b=2650 \text{ K}$   $C_{pb}=2000 \text{ (J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$   $Q_a=0.5Q_{tot}$ .



b) Différence de température entre les deux parois du film multicouche. Effet de l'agencement  
**Figure 3.25 : Évolution de la température de films multicouches en fonction de la position axiale et radiale**



### 3.8 Conclusion

Nous venons de développer un modèle permettant d'évaluer la cinématique la dynamique et la thermique du procédé de soufflage de gaine multicouche dans un repère fixe. Le modèle a été obtenu en analysant les équations mécaniques et thermique aux différents ordres de grandeur du ratio de l'entrefer de la filière sur le rayon interne de la filière. L'analyse des équations que nous obtenons nous permet de valider les hypothèses originales qui étaient faites lors de l'élaboration des modèles monocouches et multicouches basés sur l'approche de Pearson (1970a, 1970b). De plus cette analyse permet de valider l'hypothèse de température moyenne dans l'épaisseur à l'ordre 0. Nous avons mis en évidence l'importance de réaliser un calcul thermique plutôt que d'utiliser un profil thermique mesuré afin d'évaluer les propriétés rhéologiques. En effet, malgré un très forte similarité entre les profils géométriques obtenus, le calcul de la température génère un champ de contrainte plus élevé que dans le cas où nous imposons un profil thermique.

Par la suite nous avons développé deux approches permettant d'évaluer le gradient de température dans l'épaisseur du film. La première méthode consiste à utiliser l'équation de la chaleur à l'ordre 1. Ceci nous permet suite à une légère approximation d'obtenir l'ordre de grandeur du profil de température bidimensionnel. La seconde approche consiste à discrétiser la géométrie de la bulle calculée grâce à la température à l'ordre 0 pour ensuite effectuer une résolution numérique par différences finies centrées. Dans les deux cas il est possible d'illustrer la présence d'un gradient thermique important en sortie de filière. Il nous a aussi été possible de démontrer que ce gradient thermique disparaissait très rapidement pour ne plus être que de 0.3 °C à la position de figeage.

Finalement une étude de sensibilité a été réalisée afin de déterminer les effets des différents paramètres sur les profils géométriques et thermiques de bulles monocouches et multicouches. Il nous a été possible de déterminer que l'agencement des couches avait peu d'effet sur ces profils. Ceci avait été observé expérimentalement. Nous avons aussi été en mesure de démontrer que l'agencement de certains matériaux pouvait donner naissance à des bulles multicouches gonflant plus rapidement que les bulles monocouches de ces matériaux. Cet effet est attribuable au couplage viscosité - chaleur spécifique. L'effet du ratio des débits a aussi été étudié. Dans ce cas, les calculs nous montrent que lorsque l'on augmente la quantité d'un matériau, le bulle multicouche approche le comportement d'une bulle monocouche composé de ce matériau. Le même résultat était observable expérimentalement. Nous avons aussi démontré que notre système d'équations pouvait nous permettre, très simplement de décrire des cas plus complexes que le soufflage de gaines bicouche.

Le modèle que nous avons développé est un outil intéressant qui nous permet d'obtenir des informations sur le procédé de soufflage de gaines multicouches. En effet il nous permet d'identifier clairement : les effets du couplage de différents matériaux, l'effet des conditions opératoires et du taux de refroidissement sur la forme, la température et le profil de contraintes de la bulle.

Au prochain chapitre nous allons comparer nos résultats expérimentaux obtenus en France et à l'IMI à nos résultats de calculs. Nous utiliserons une de nos conditions expérimentales afin de déterminer la fonction décrivant le coefficient de convection thermique. Comme nous avons utilisé un débit d'air de refroidissement constant, il nous sera alors possible d'appliquer cette fonction aux autres essais. Nous pourrons alors comparer les profils thermiques et géométriques calculés aux profils expérimentaux. Par la suite nous comparerons les champs de contraintes déterminées par biréfringence aux valeurs calculées.

## CHAPITRE 4- Validation

Dans ce chapitre, nous allons comparer nos résultats de calculs aux résultats expérimentaux. Ceci nous permettra de vérifier si le modèle que nous venons de développer permet de représenter adéquatement le procédé de soufflage de gaine. Dans un premier temps nous allons décrire la procédure nous permettant de déduire le coefficient de convection qui sera utilisé dans les calculs sur la filière de petite taille. Nous pourrons alors calculer l'évolution du rayon et de la température des bulles monocouches et multicouches obtenus grâce à cette filière avec le système LDPE-A/mMDPE. En second lieu nous comparerons les rayons et les contraintes calculées aux résultats obtenus (rayon et biréfringence) grâce à la filière semi industrielle avec le système LDPE-B/ULDPE en utilisant un coefficient de convection différent du premier.

## 4.1 Films réalisés grâce à la petite filière

### 4.1.1 Films monocouches

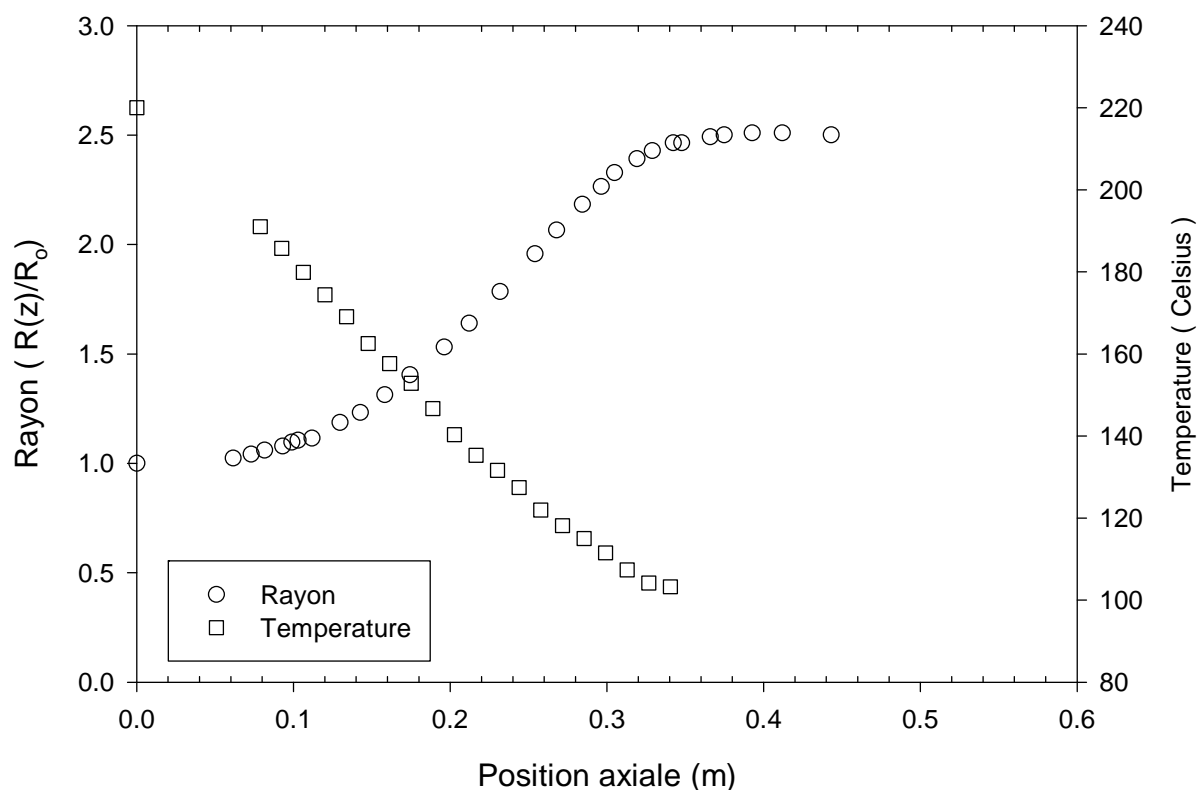
Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, une des difficultés associées à l'introduction du transfert thermique dans le calcul du soufflage de gaine multicouche réside dans la détermination du coefficient de convection en fonction de la position axiale. Afin de tenter de contourner ce problème Petrie (1974) ainsi que Laffargue (2003) utilisaient un profil thermique expérimental. Han et Park (1975b) ainsi que Luo et Tanner (1985) utilisaient un coefficient de convection qui était modifié à chaque calcul de façon à pouvoir représenter adéquatement les bulles expérimentales. Finalement Kanai et White (1985) ont déterminé des relations permettant de décrire l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale pour des matériaux et des niveaux de refroidissement donnés. Mais ici encore, la très forte cohérence entre les résultats expérimentaux et les résultats de calculs découlait du lissage du coefficient de convection sur les résultats expérimentaux.

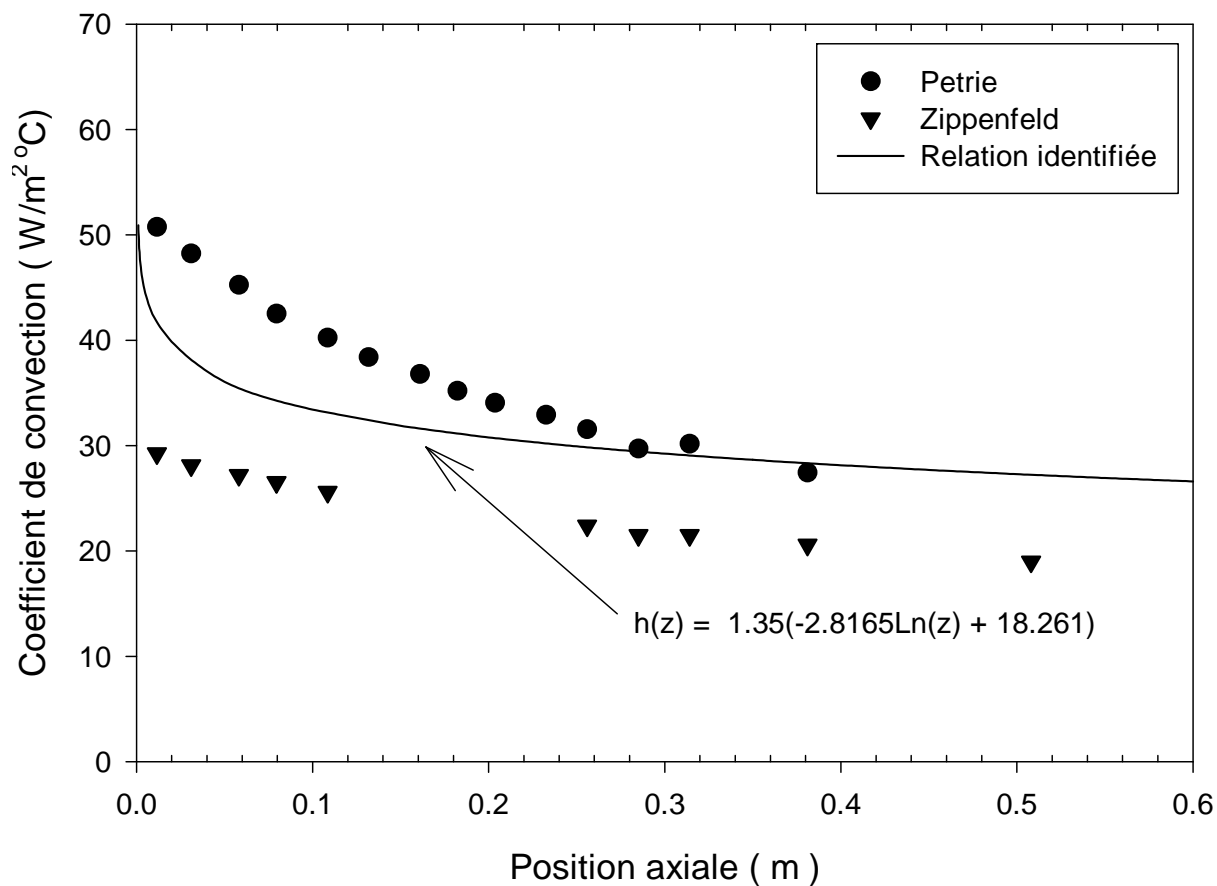
Afin de déterminer le coefficient de convection nous allons utiliser les données expérimentales de l'évolution du rayon et de la température d'un film monocouche de LDPE-A dans les conditions correspondant au point central de notre plan expérimental (figure 4.1a). Il nous suffit alors de modifier le coefficient de transfert jusqu'à ce que le rayon et la température calculés approchent les résultats expérimentaux illustrés à la figure 4.1a. Les valeurs utilisées pour ces calculs sont présentées au tableau 4.1.

Comme l'ensemble de nos essais expérimentaux ont été réalisés en utilisant un débit d'air de refroidissement constant pour une filière donnée il nous sera alors possible d'appliquer ce coefficient de transfert à tout les autres calculs. La figure 4.1b illustre l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale nous permettant d'obtenir les résultats de calculs illustrés à la figure 4.1c. Il est possible de constater que le taux de refroidissement généré par l'anneau de refroidissement de la filière de petite taille est situé entre les valeurs rapportées par Petrie et Zippenfeld. Le coefficient de convection forcée passe de  $50 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  à  $35 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  sur une distance d'approximativement 8 cm, qui correspond à la distance entre la sortie de la filière et le haut de l'anneau de refroidissement. Au dessus le coefficient de convection diminue progressivement pour atteindre une valeur quasi uniforme d'environ  $30 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  à une distance de 60 cm de la sortie de la filière. La figure 4.1c nous permet de constater que les résultats de calculs représentent adéquatement les résultats expérimentaux. Ceci n'est guère surprenant car ces calculs résultent de l'ajustement approprié de la fonction du coefficient de convection.

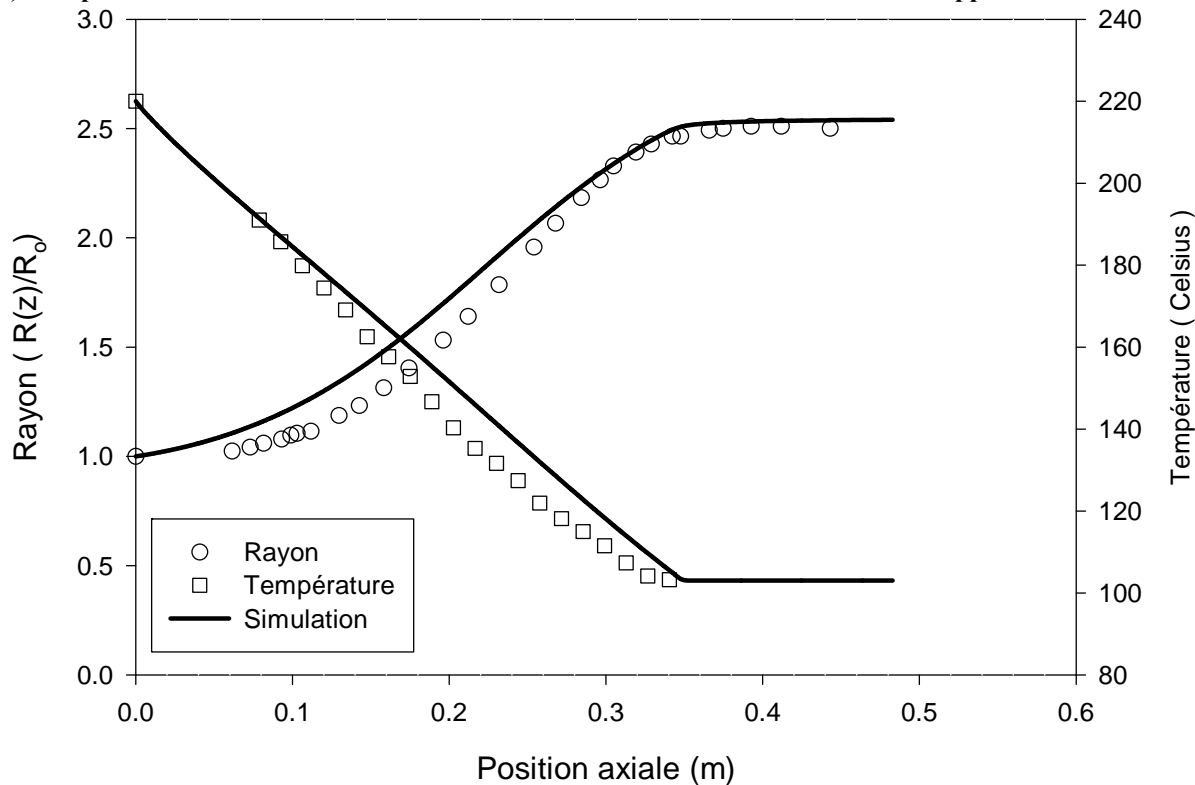
**Tableau 4.1 : Valeurs utilisées lors des simulations pour la filière de petite taille**

	Matériaux		Unités
	LDPE-A	mMDPE	
<b>PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES</b>			
Énergie d'activation	6000	4000	K
<b>PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX</b>			
Chaleur spécifique	2300	1800	J/(kg °C)
Conductivité thermique	0.33	0.33	W/(m °C)
Densité	818	818	kg/m <sup>3</sup>
Température de cristallisation	103	113	oC
<b>PROPRIÉTÉS NÉCESSAIRES POUR LE CALCUL AVEC LE MODULE DE CRISTALLISATION</b>			
Pourcentage de cristallinité du film	30	40	%
Paramètre $\beta$	4.65	0.4	---
Paramètre $\alpha$	5.95	0.4	---
Chaleur de cristallisation	286	286	kJ/kgf
<b>DIMENSIONS DE LA FILIÈRE</b>			
Diamètre externe de la filière	51.6		mm
Entrefer de la filière	1.2		mm
<b>CONDITIONS OPÉRATOIRES</b>			
BUR	Voir tableau 2.4		
TUR	Voir tableau 2.4		
Débit	Voir tableau 2.4 pour un total de 5 kg/hr		
Température de l'air de refroidissement	20 °C		

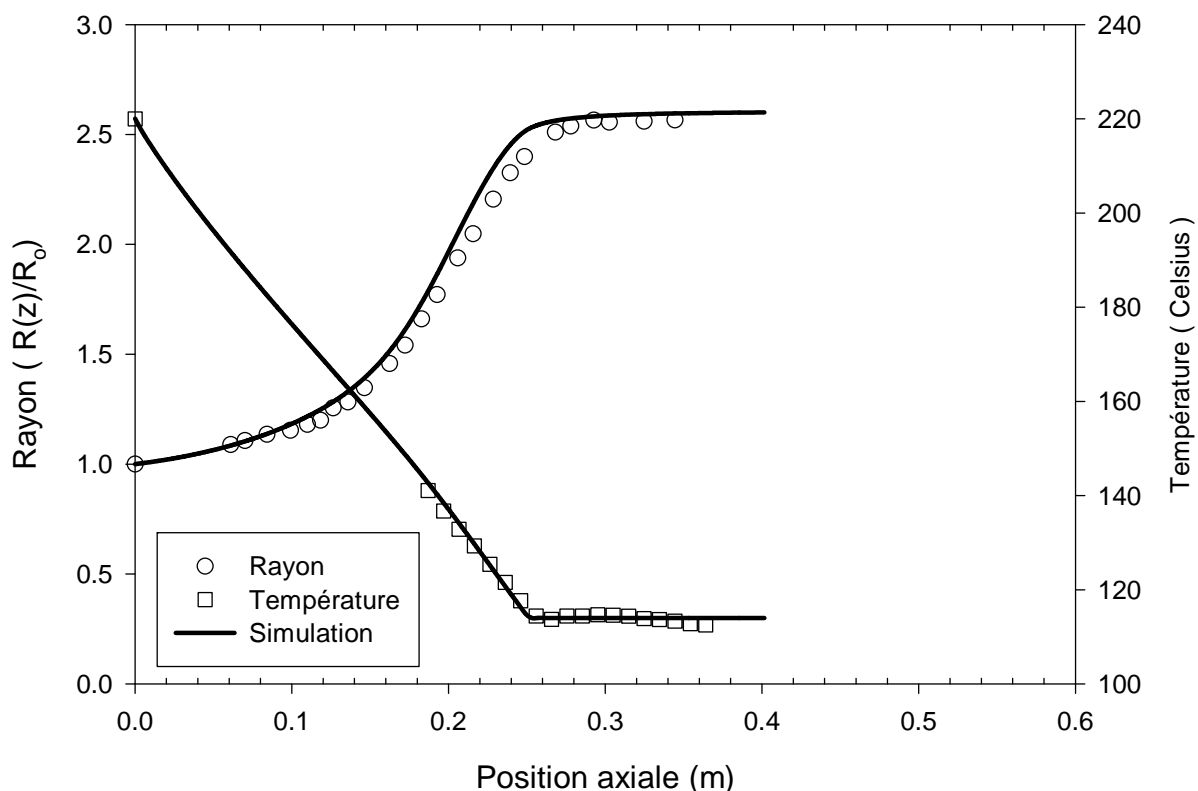
**a) Film monocouche de LDPE-A BUR=2.54 TUR=9.2. Résultats expérimentaux.**



b) Comparaison entre la relation de convection utilisée et les relations de Petrie et Zippenfeld



c) Film monocouche de LDPE-A BUR=2.54 TUR=9.2. Résultats de calculs



d) Film monocouche de mMDPE BUR=2.6 TUR=9.4. Résultats de calculs.

**Figure 4.1 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de LDPE-A et mMDPE.**

Il nous est maintenant possible de vérifier si la fonction illustrée à la figure 4.1b nous permet de représenter adéquatement le soufflage de gaine d'un film monocouche réalisé avec le mMDPE dans des conditions opératoires similaires. Nous constatons à la figure 4.1d que les résultats des calculs sont en accord avec les résultats expérimentaux. Il est aussi intéressant de noter que la longueur du plateau de cristallisation calculé est approximativement identique au plateau mesuré grâce au pyromètre infrarouge. La loi de convection déterminée à la figure 4.1b nous permet donc de décrire adéquatement le soufflage des gaines monocouches de LDPE-A et de mMDPE. Nous pouvons maintenant effectuer les calculs à des taux de gonflement et d'étirage différents.

La figure 4.2a illustre l'évolution du rayon de films de LDPE-A produits à un taux d'étirage de 6.5 et des taux de gonflement de 2.04 et 3.08. Lorsque le taux de gonflement est faible, 2.04, le calcul recoupe efficacement les résultats expérimentaux. Par contre, lorsque le taux de gonflement est de 3.08 le calcul produit une bulle gonflant beaucoup moins rapidement que la bulle observée expérimentalement. Il est possible de constater à la figure 4.2b que la température calculée est toujours supérieure aux valeurs expérimentales. Il semble donc que la relation illustrée à la figure 4.1b ne puisse pas être appliquée universellement à toutes nos conditions expérimentales en dépit du fait que nous ayons maintenu le débit d'air de refroidissement constant. Que se passe-t'il ?

L'observation des valeurs expérimentales aux figures 4.1a, 4.1d et 4.2a nous permet de constater que le rayon de la bulle à la sortie de l'anneau de refroidissement (premier point expérimental à une position axiale d'environ 7 cm) est d'approximativement 1.05 lorsque le taux de gonflement est de 2.04 ou 2.54. Par contre le rayon en sortie d'anneau de refroidissement est approximativement de 1.3 lorsque le taux de gonflement est de 3.08. Ce gonflement rapide signifie que la bulle occupera un volume plus important dans l'anneau de refroidissement. Comme le débit d'air de refroidissement est maintenu constant cette

augmentation du volume de la bulle a pour conséquence de diminuer la section traversée par l'air de refroidissement. Ceci entraînera une augmentation de la vitesse de l'air dans l'anneau de refroidissement. Ceci illustre l'importance de traiter conjointement l'aérodynamisme et la thermo mécanique de la bulle. En effet, la géométrie de la bulle affecte l'écoulement de l'air dans l'anneau de refroidissement et ce dernier influence le gonflement de la bulle. Comme nous l'avons montré au tableau 3.1, le coefficient de convection est une fonction de la vitesse de l'air élevée à la puissance 0.8 ou 1.5. Pour la filière de petite taille nous avons utilisé une valeur de 0.8 qui nous permet de représenter adéquatement nos résultats expérimentaux. Il nous est possible en utilisant la relation suivante de prendre en considération l'augmentation de la vitesse dans l'anneau de refroidissement afin d'obtenir un coefficient de convection corrigé pour les cas où la bulle gonflera plus rapidement ou moins rapidement que notre bulle de référence.

$$h_{corrigé}(z) = h(z) \left( \frac{V_a}{V_{Ref}} \right)^{0.8} \quad \mathbf{4.1}$$

Avec  $V_{ref}$ , la vitesse de l'air de refroidissement permettant d'obtenir le coefficient de convection illustré à la figure 4.1b et  $V_a$  la vitesse de l'air de refroidissement lorsque la bulle gonfle plus rapidement ou moins rapidement que la bulle illustré à la figure 4.1a. Or, nous ne connaissons pas ces valeurs par contre nous connaissons les dimensions de la bulle et de l'anneau de refroidissement. De plus le débit d'air de refroidissement est connu. En réalisant un bilan volumique sur l'air de refroidissement entre le cas de référence et le cas à corriger il est possible de lier la vitesse de l'air à la géométrie de la bulle et de l'anneau de refroidissement grâce à la relation suivante :

$$\frac{V_a}{V_{Ref}} = \left( \frac{\pi R_{ar}^2 - \pi R_{bac}^2}{\pi R_{ar}^2 - \pi R_{ref}^2} \right) \quad \mathbf{4.2}$$

$R_{ar}$  : Rayon interne de l'anneau de refroidissement (6.25 cm)

$R_{bac}$  : Rayon de la bulle à corriger à la sortie de l'anneau de refroidissement.

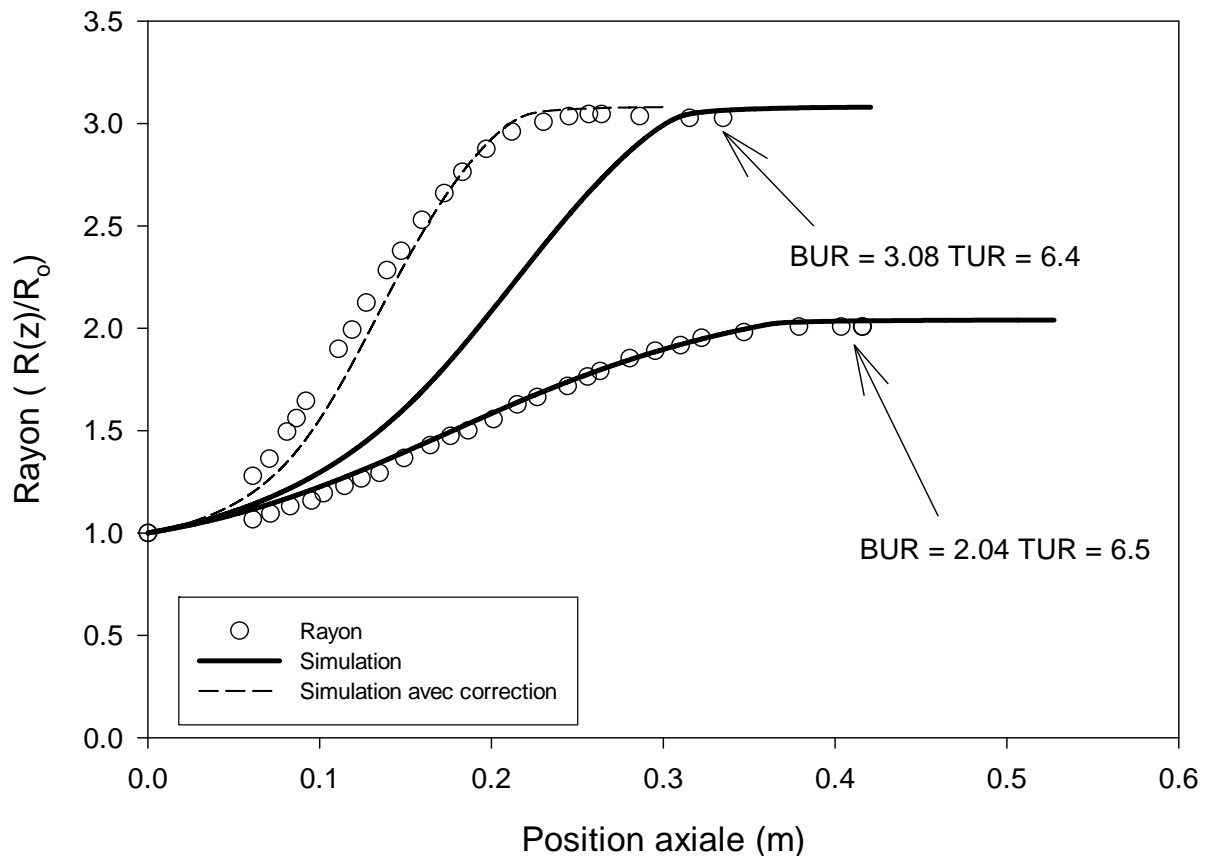
$R_{ref}$  : Rayon de la bulle de référence à la sortie de l'anneau de refroidissement

En utilisant cette relation pour corriger le cas que nous venons de mentionner l'augmentation du volume de la bulle aura pour effet de d'augmenter le coefficient de convection par un facteur 1.1. Un schéma de l'anneau de refroidissement est illustré en annexe C.

En appliquant cette correction au coefficient de convection on obtient la simulation corrigée illustrée aux figures 4.2a et 4.2b. Il est possible de constater que cette simulation corrigée permet de recouper beaucoup plus efficacement les résultats expérimentaux lorsque la bulle gonfle rapidement. La figure 4.2c nous permet constater la même amélioration pour les films de mMDPE.

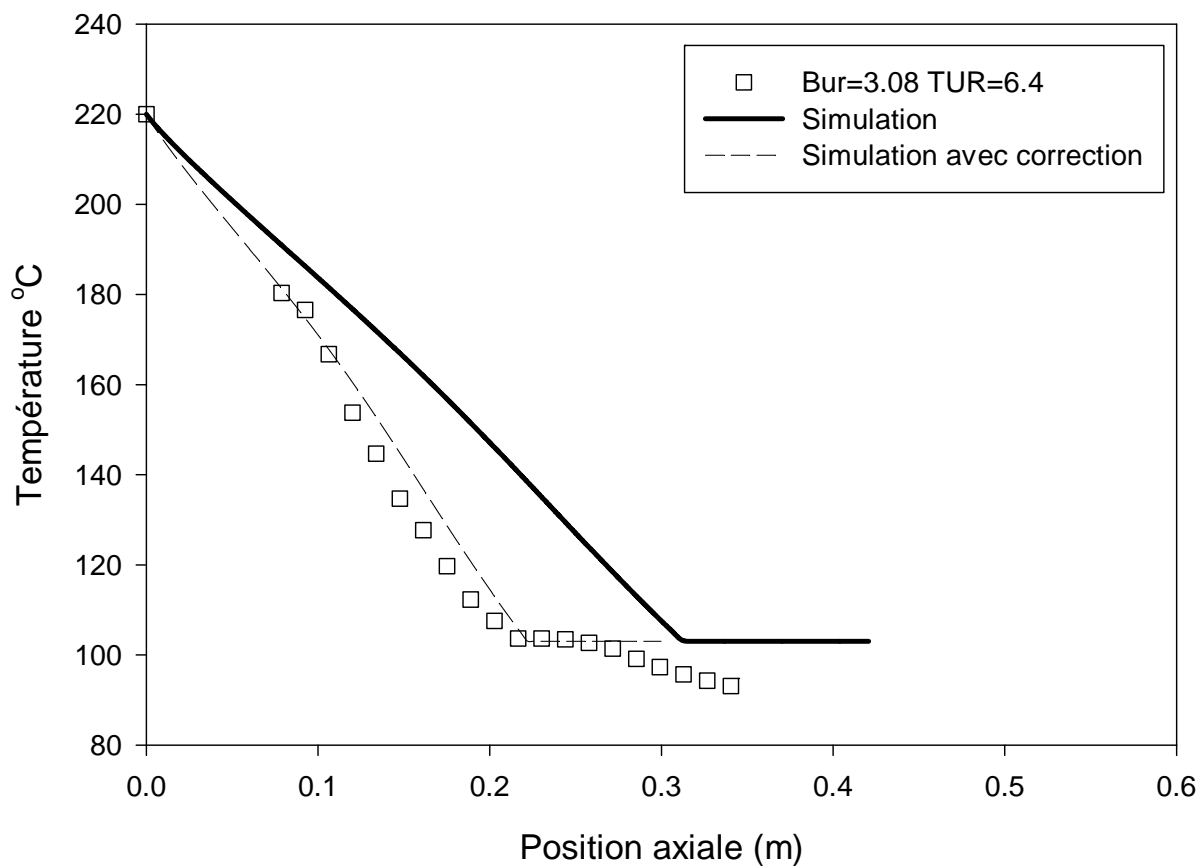
Dans la majorité des cas les calculs monomatériaux permettent de recouper presque parfaitement les profils géométriques et thermique expérimentaux observés sur la filière de petite taille lorsque la correction est appliquée. Les cas où l'écart entre le calcul et les valeurs expérimentales est important surviennent surtout pour les taux d'étirage élevés. Un exemple de calcul moins représentatif est illustré à la figure 4.2d. Ceci est peut être lié aux effets élastiques qui ne sont pas pris en considération dans notre modèle. Par contre cette piste est nuancée par les travaux de André (1999) qui avait réalisé des calculs newtoniens et viscoélastiques. Il avait démontré que l'emploi du modèle de Maxwell était délicat à cause de l'apparition d'une multiplicité de solutions et de la disparition de certaines des ces dernières à certaines conditions opératoires. André (1999) avait posé l'hypothèse que ces problèmes

étaient similaires au problème de zone inatteignable qui est rencontré lors de la simulation du procédé de filage textile. Ceci avait pour conséquence que les valeurs de nombre de Deborah permettant d'obtenir une solution étaient situées en dessous des valeurs réelles des matériaux utilisés. A cause de ces limitations, le calcul viscoélastique donnait naissance à des bulles qui n'étaient que très légèrement améliorées comparativement aux bulles newtoniennes. Selon André, l'inclusion de la viscoélasticité passe par un modèle viscoélastique qui limiterait l'évolution de la viscosité élongationnelle lorsque la température du film approche de sa température de cristallisation. Il faut par contre réaliser que l'utilisation d'un modèle viscoélastique non isotherme afin de décrire le comportement de plusieurs matériaux dans le cadre de la modélisation du soufflage de gaine multicouche dans un repère fixe représente un défi assez intéressant.

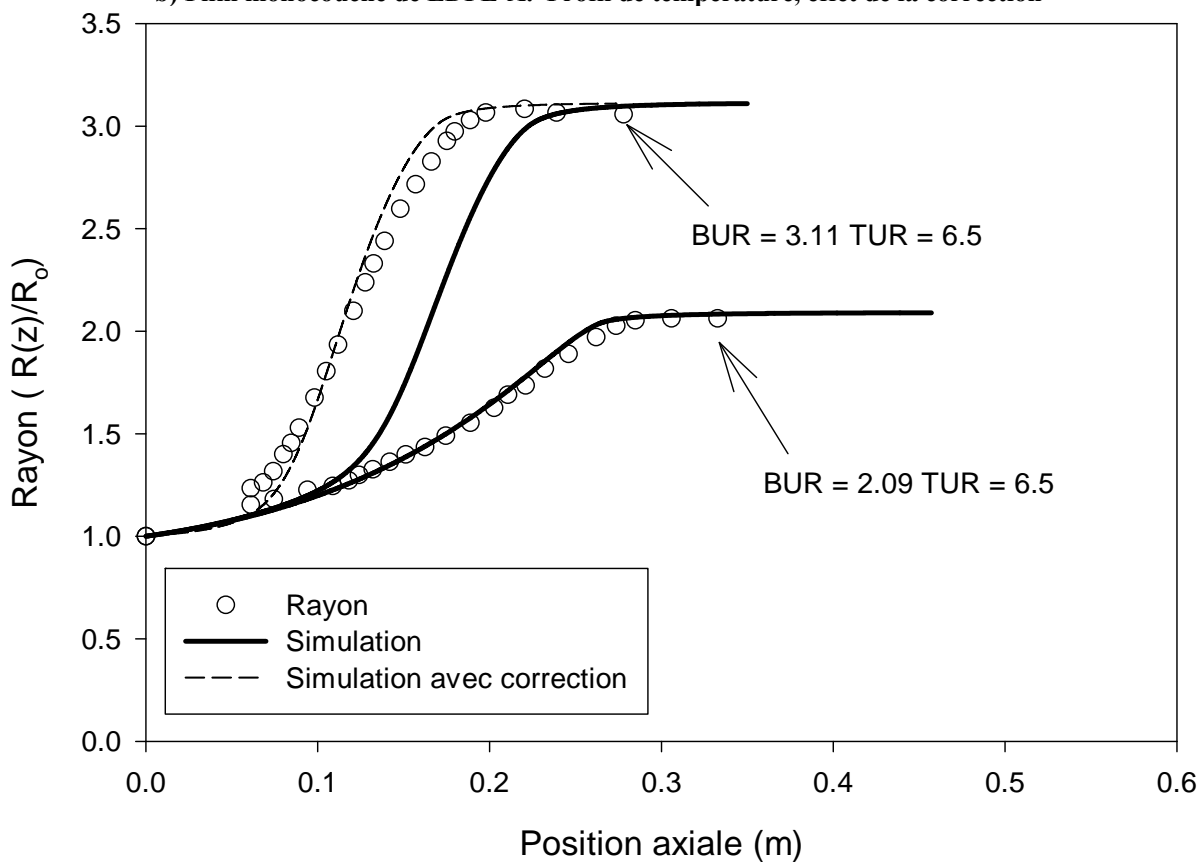


a) Films monocouches de LDPE-A. Effet de la correction du coefficient de convection

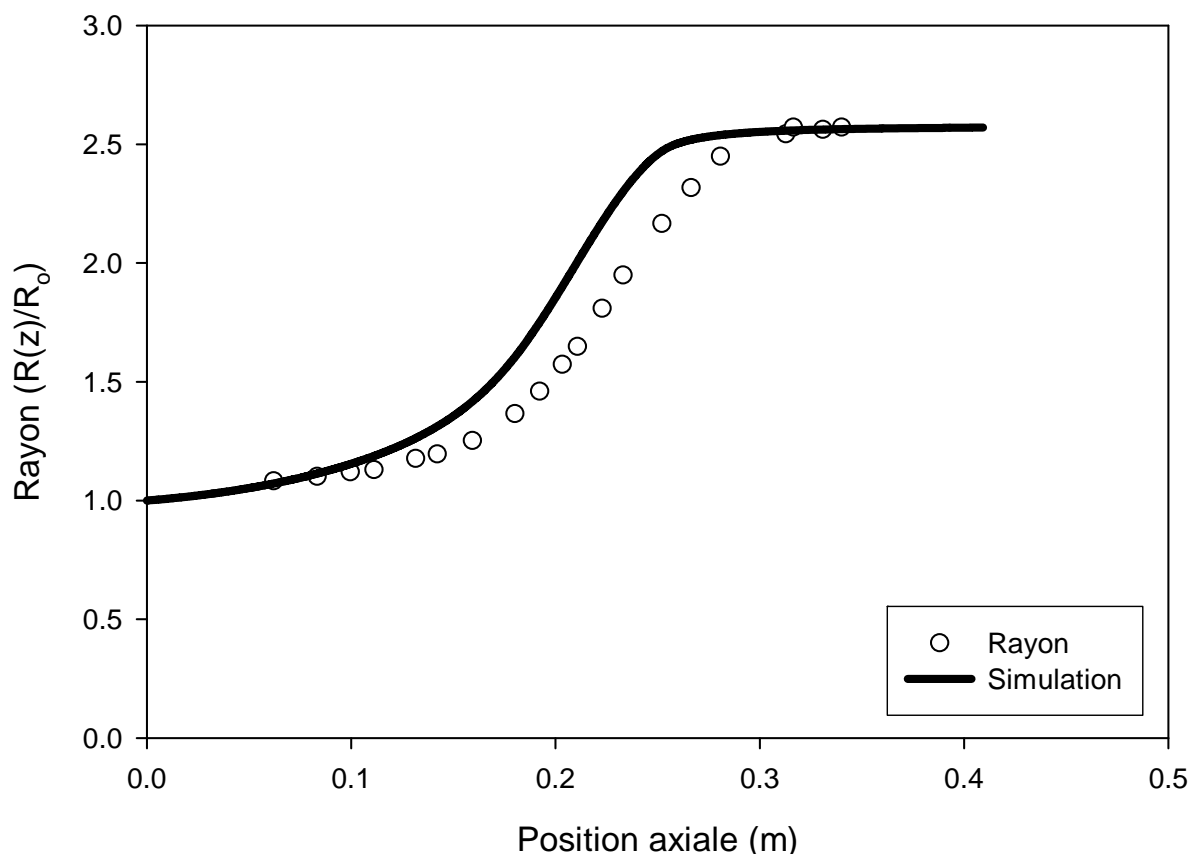




b) Film monocouche de LDPE-A. Profil de température, effet de la correction



c) Films monocouches de mMDPE. Effet de la correction du coefficient de convection

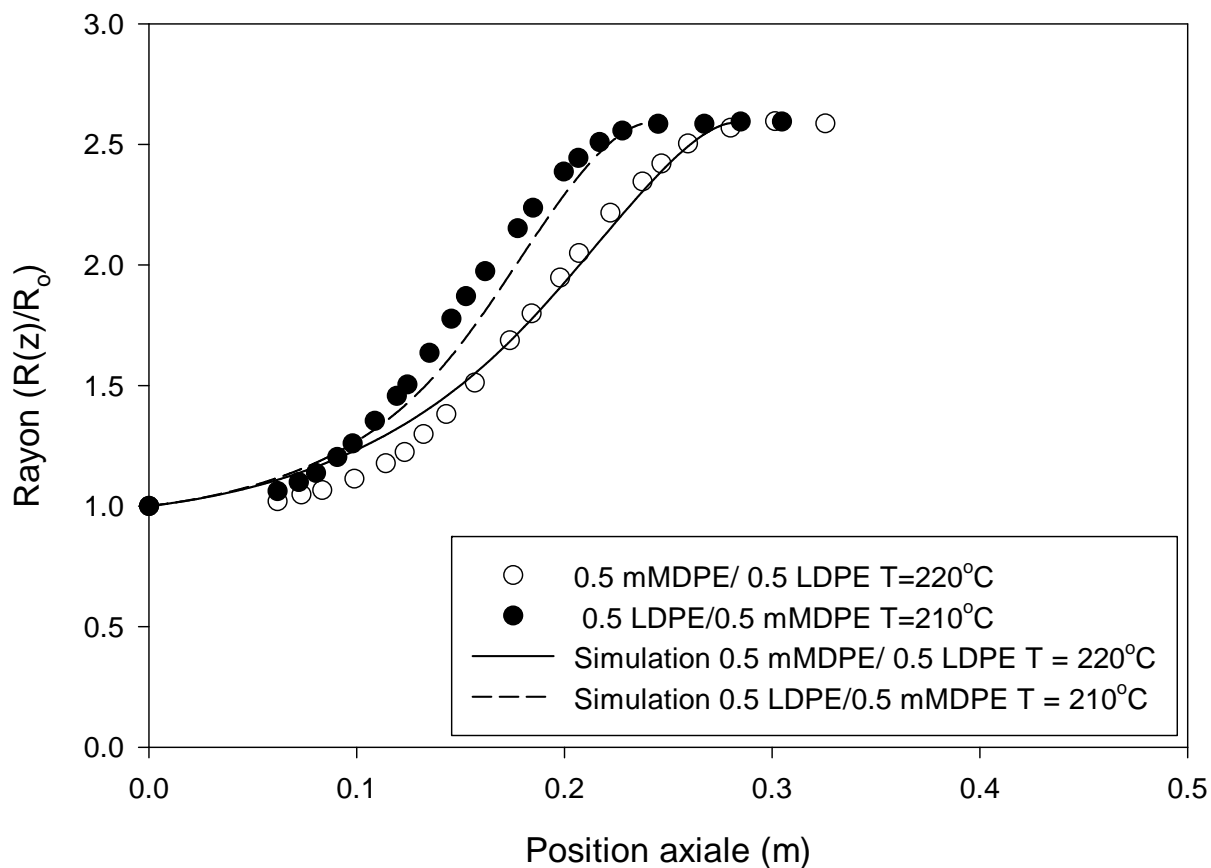


d) Films monocouches de mMDPE. TUR=12.15, BUR=2.59

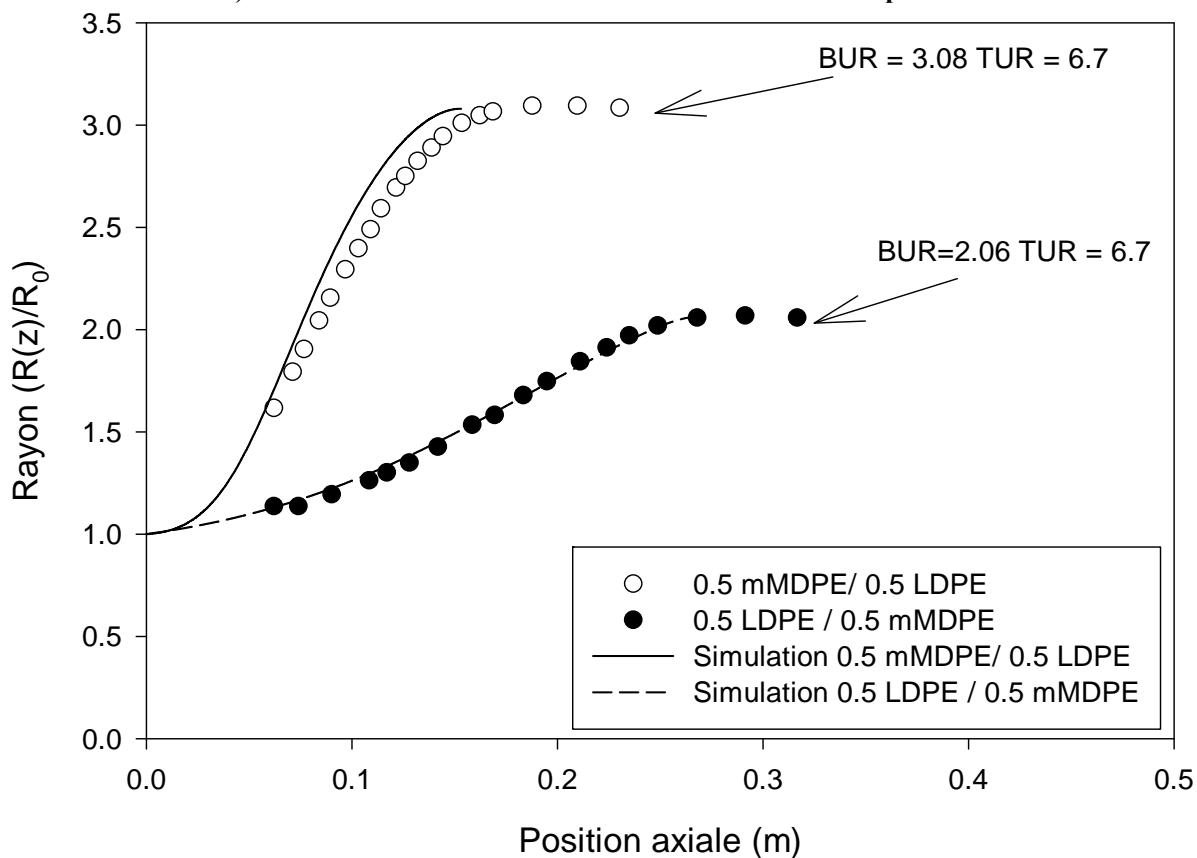
**Figure 4.2 : Comparaison entre les calculs et les résultats expérimentaux. Effet du taux de gonflement et de la correction du coefficient de convection.**

#### 4.1.2 Films multicouches

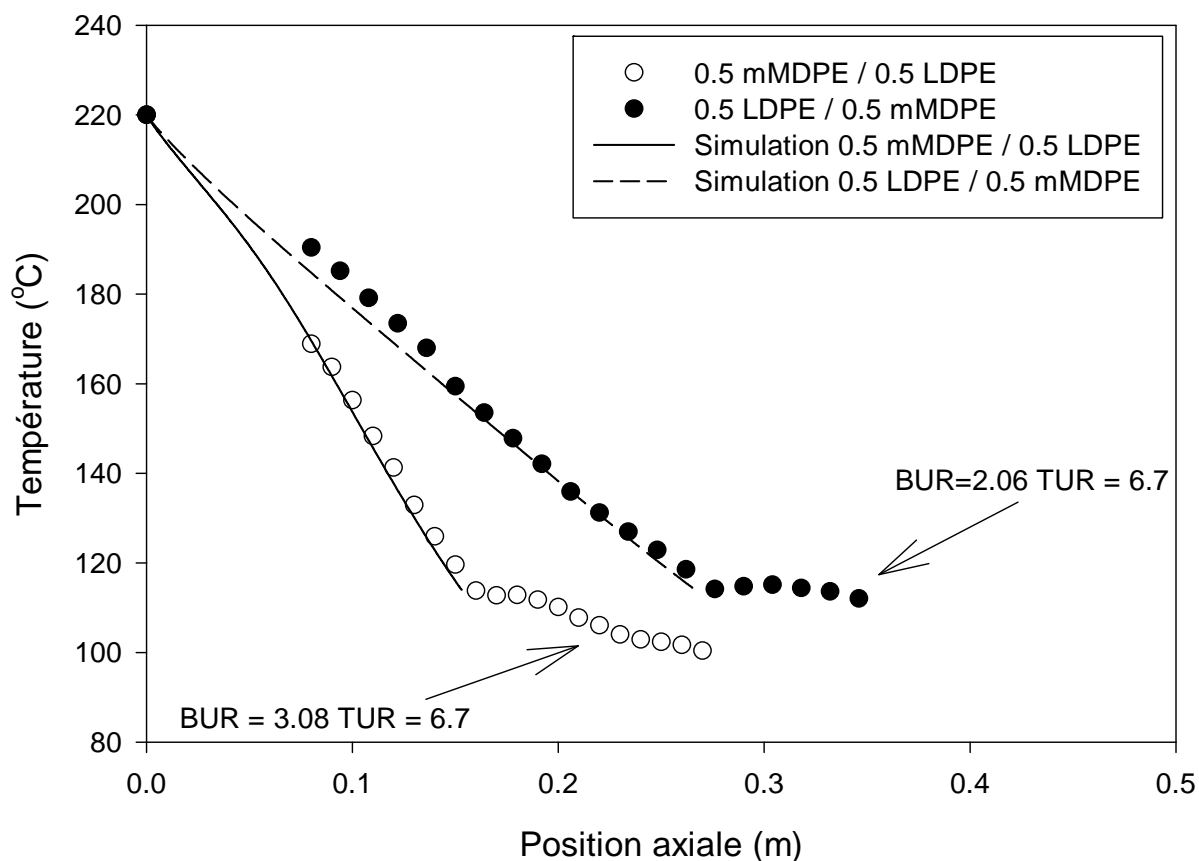
Il nous est maintenant possible de valider notre calcul multicouche. Pour l'ensemble des courbes qui suivent, la correction du coefficient de convection a été réalisée en utilisant la relation 4.1 lorsque cela était nécessaire. La figure 4.3a nous permet d'illustrer l'effet de l'agencement des matériaux sur la forme de la bulle. Il est possible de constater, comme nous le remarquons au chapitre 2 (Figure 2.14d), que les courbes ne sont pas parfaitement superposées contrairement aux résultats obtenus lors de l'analyse de sensibilité (figure 3.21). Nous avons attribué cette non superposition des courbes expérimentales à la différence de température d'extrusion de 10 ° Celsius. Lorsque le calcul est réalisé en utilisant la température d'extrusion appropriée, les calculs permettent de représenter efficacement les résultats expérimentaux. En combinant ce résultat aux calculs illustrés à la figure 3.21 il nous est possible d'affirmer que la différence de profil observée à la figure 4.3 est uniquement causée par la différence de température de mise en forme; l'agencement des couches n'a donc aucun effet sur la géométrie des bulles produites. Les figures 4.3b et 4.3c nous permettent de constater que le calcul du rayon et de la température sur les films multicouches est fiable pour d'autres conditions opératoires.



a) Films multicouches. BUR= 2.59 TUR=9.35. Effet de la position



b) Films multicouches. Évolution du rayon.



c) Films multicouches. Évolution de la température.

**Figure 4.3 : Comparaison entre les calculs et les résultats expérimentaux. Effet du taux de gonflement et de l'agencement des couches sur les films multicouches.**

## 4.2 Films réalisés grâce à la filière semi industrielle

### 4.2.1 Films monocouches

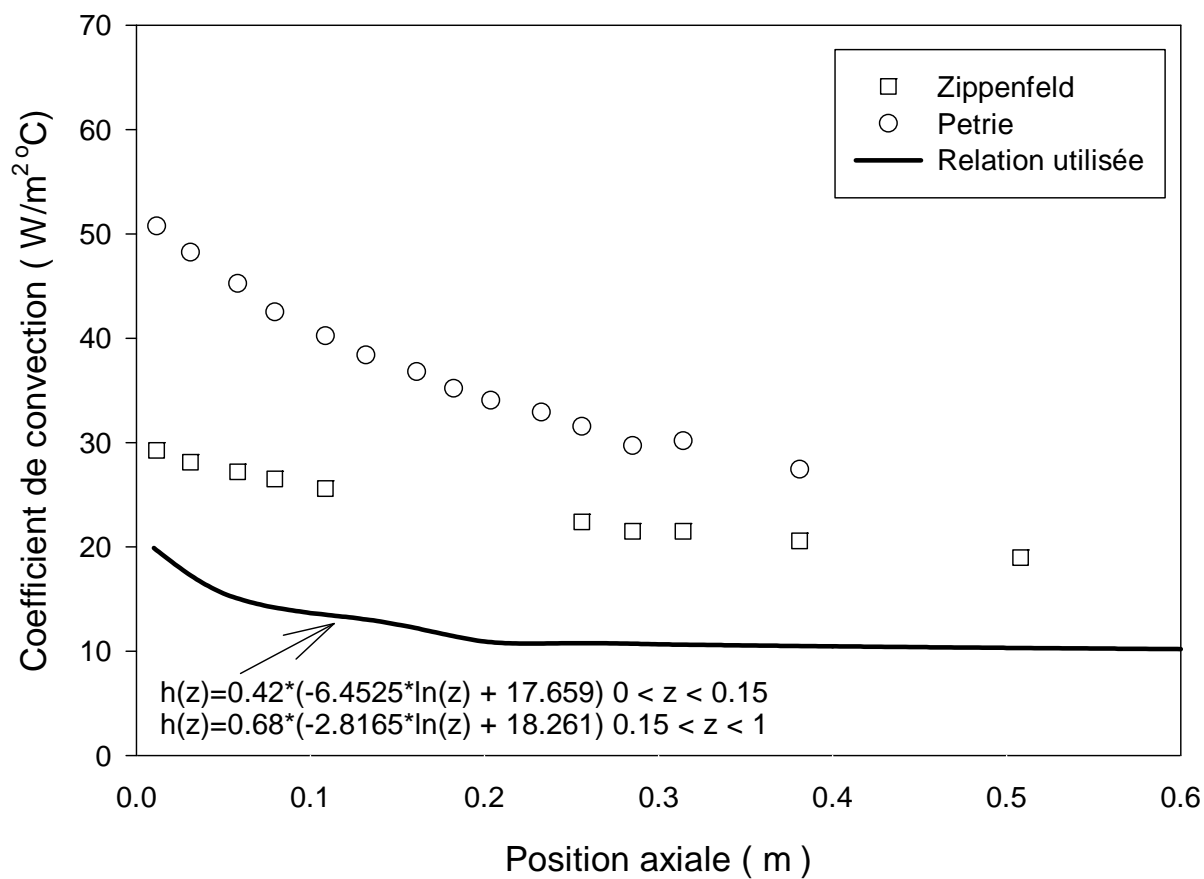
La relation décrivant l'évolution du coefficient de convection que nous avons obtenu à la section précédente ne peut pas être utilisée afin de décrire les bulles obtenues grâce à la filière industrielle. En effet, l'anneau de refroidissement et le débit d'air utilisé sont différents dans les deux cas. Tout comme lors du paragraphe précédent l'étape préalable consiste à évaluer le coefficient de convection en fonction de la position axiale à partir d'une courbe expérimentale de l'évolution du rayon en fonction de la position axiale. Afin de déterminer cette relation nous avons utilisé les données expérimentales illustrant l'évolution du rayon et de la température d'un film monocouche de LDPE-B réalisés aux conditions expérimentales correspondant au point central de notre plan expérimental. Les valeurs utilisées afin de réaliser les calculs qui suivent sont présentées au tableau 4.2.

La figure 4.4a illustre l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale que nous utiliserons pour faire nos calculs. Il est possible de constater que le coefficient de convection est très faible comparativement à celui que nous avons obtenu précédemment. En effet nous sommes aux limites entre la convection naturelle et la convection forcée. Ceci n'est guère surprenant car les essais expérimentaux réalisés sur cette filière étaient effectués en utilisant un très faible taux de refroidissement afin de pouvoir obtenir la position de figeage la plus élevée possible.

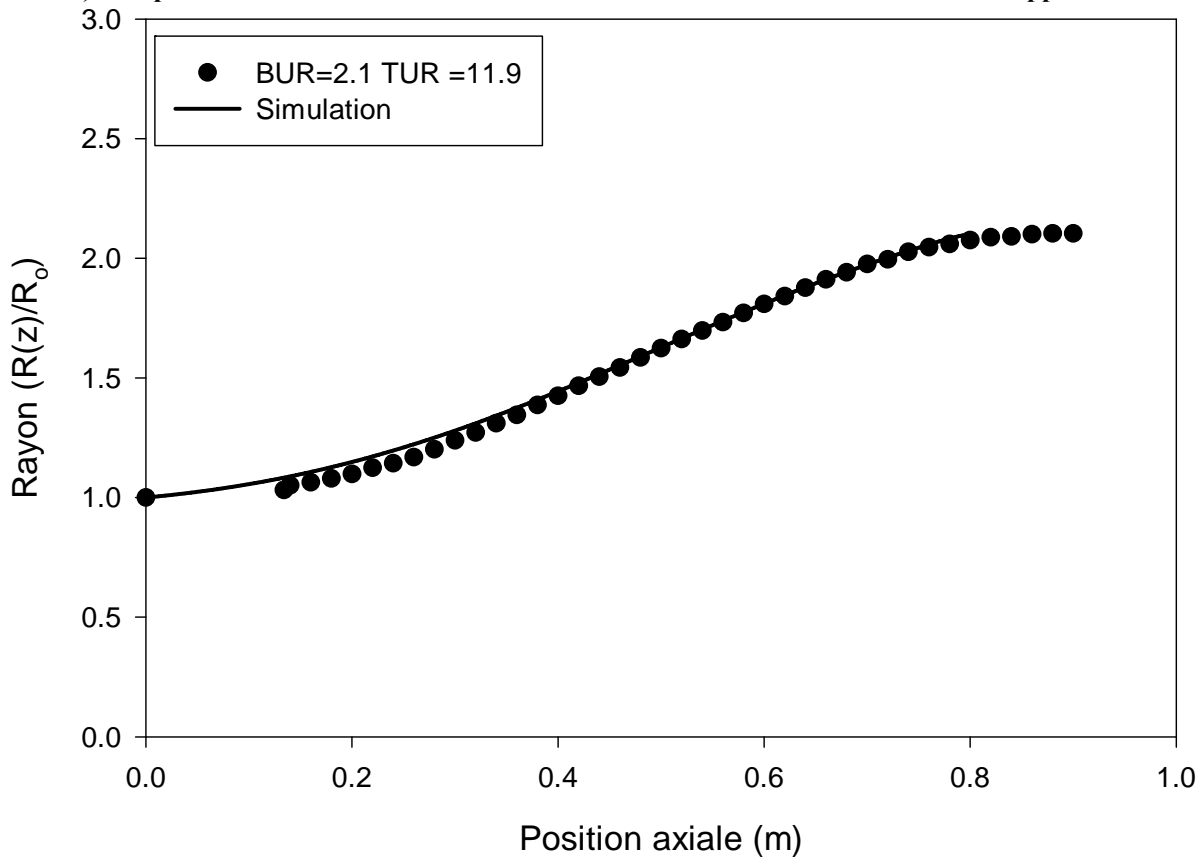
La figure 4.4b illustre l'évolution du rayon expérimental ainsi que le rayon calculé en utilisant la relation illustrée à la figure 4.4a. Les figures 4.4c et 4.4d sont intéressantes, elles comparent les profils de contraintes axiales et transversales déterminées expérimentalement et calculées. Nous constatons sur ces figures que les contraintes calculées sont approximativement du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales. Pour ce cas particulier le calcul semble mieux représenter les contraintes axiales que les contraintes transversales. En effet la pente calculée du profil de contraintes axiales est identique aux résultats expérimentaux. En revanche notre calcul semble surévaluer fortement les contraintes transversales dans le film monocouche. De façon générale, les calculs semblent surestimer l'intensité des contraintes axiales et transversales développées dans les films de LDPE-B

**Tableau 4.2 : Valeurs utilisées lors des simulations pour la filière semi industrielle**

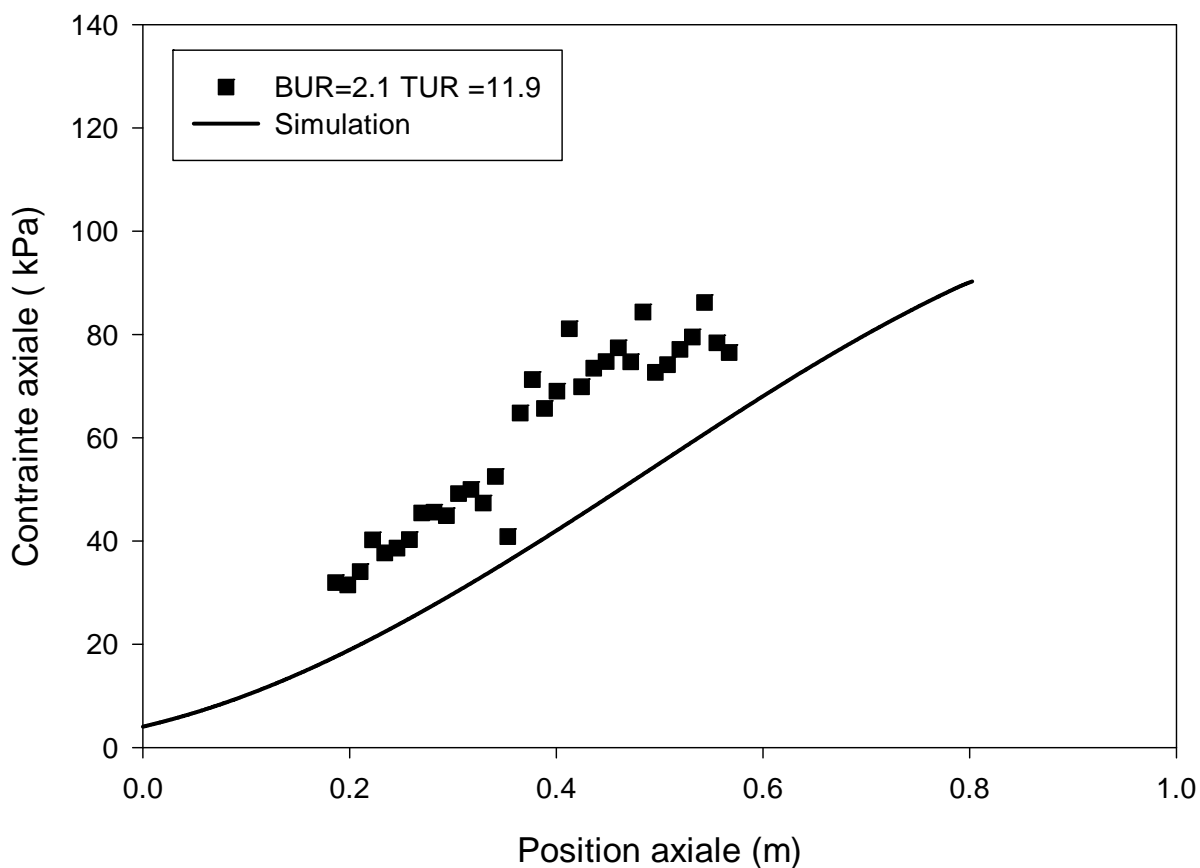
	Matériaux		Unités
	LDPE-B	ULDPE	
<b>PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES</b>			
Énergie d'activation	5300	3100	K
Viscosité au plateau	13800	5390	Pa
<b>PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX</b>			
Chaleur spécifique	2300	2300	J/(kg °C)
Conductivité thermique	0.33	0.33	W/(m °C)
Densité	818	818	kg/m <sup>3</sup>
Température de cristallisation	103	103	oC
<b>DIMENSIONS DE LA FILIÈRE</b>			
Diamètre externe de la filière	101.6		mm
Entrefer de la filière	1.1		mm
<b>CONDITIONS OPÉRATOIRES</b>			
BUR	Voir tableau 2.5		
TUR	Voir tableau 2.5		
Débit	Voir tableau 2.5 pour un total de 7 kg/hr		
Température de l'air de refroidissement	20 °C		



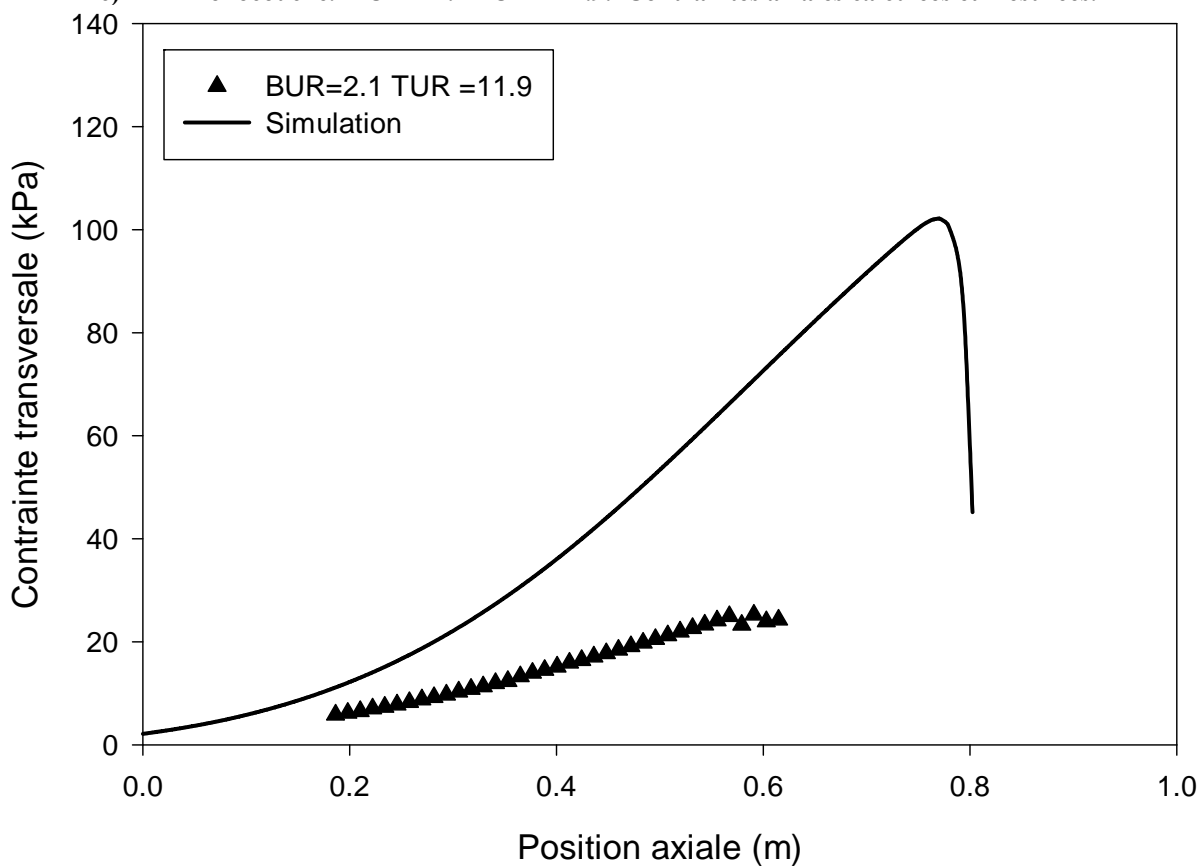
a) Comparaison entre la relation de convection utilisée et les relations de Petrie et Zippenfeld



b) Film monocouche. BUR = 2.1 TUR = 11.9. Résultats de calculs.



c) Film monocouche. BUR = 2.1 TUR = 11.9. Contraintes axiales calculées et mesurées.



d) Film monocouche. BUR = 2.1 TUR = 11.9. Contraintes transversales calculées et mesurées.

**Figure 4.4 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de LDPE-B. Profil géométrique et profils de contraintes.**

Tout comme à la section précédente il s'avère parfois nécessaire de corriger notre coefficient de convection afin de prendre en considération l'effet de la géométrie de la bulle sur la vitesse de l'air dans l'anneau de refroidissement. Pour ce faire la relation 4.1 a été modifiée légèrement de façon à obtenir la relation suivante :

$$h_{\text{corrigé}}(z) = h(z) \left( \frac{\pi R_{ar}^2 - \pi R_{bac}^2}{\pi R_{ar}^2 - \pi R_{ref}^2} \right)^{1.5} \quad 4.3$$

Rar : Rayon interne de l'anneau de refroidissement (21.6 cm)

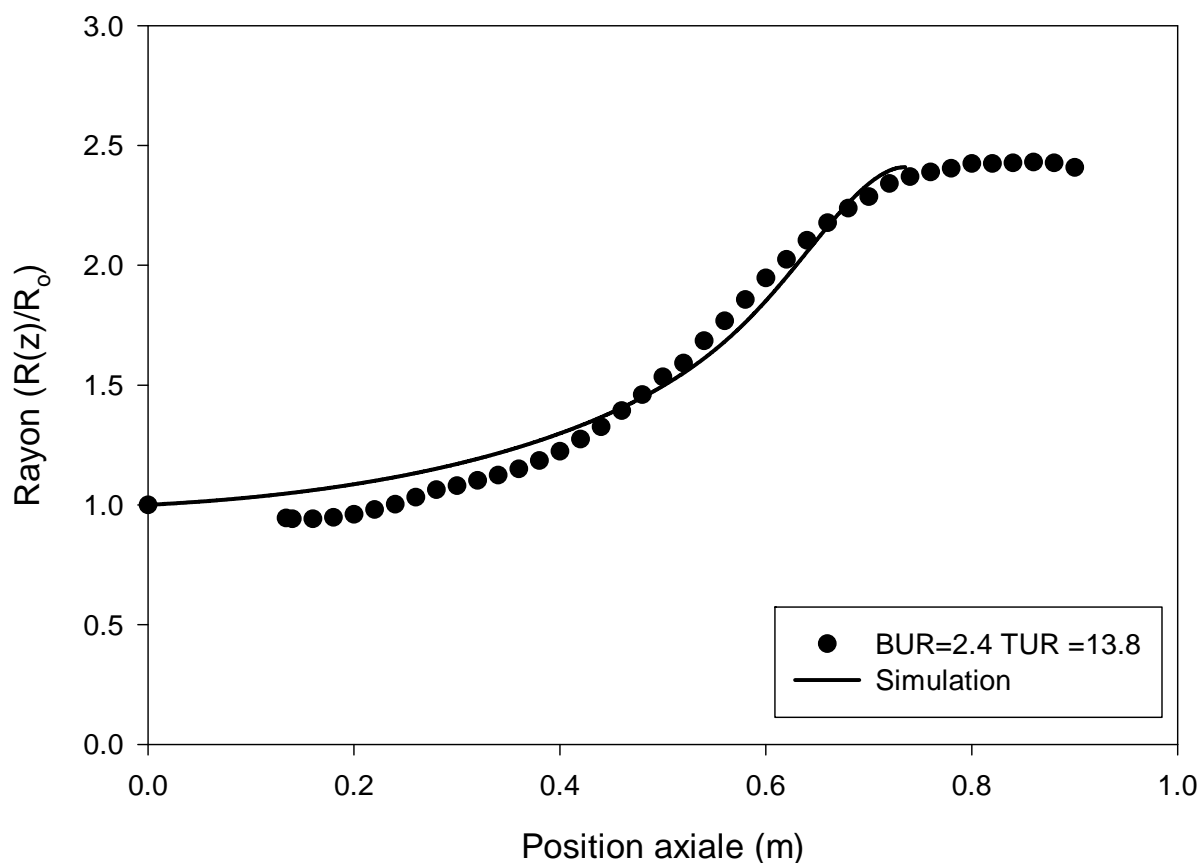
Rbac : Rayon de la bulle à corriger à la sortie de l'anneau de refroidissement.

Rref : Rayon de la bulle de référence à la sortie de l'anneau de refroidissement

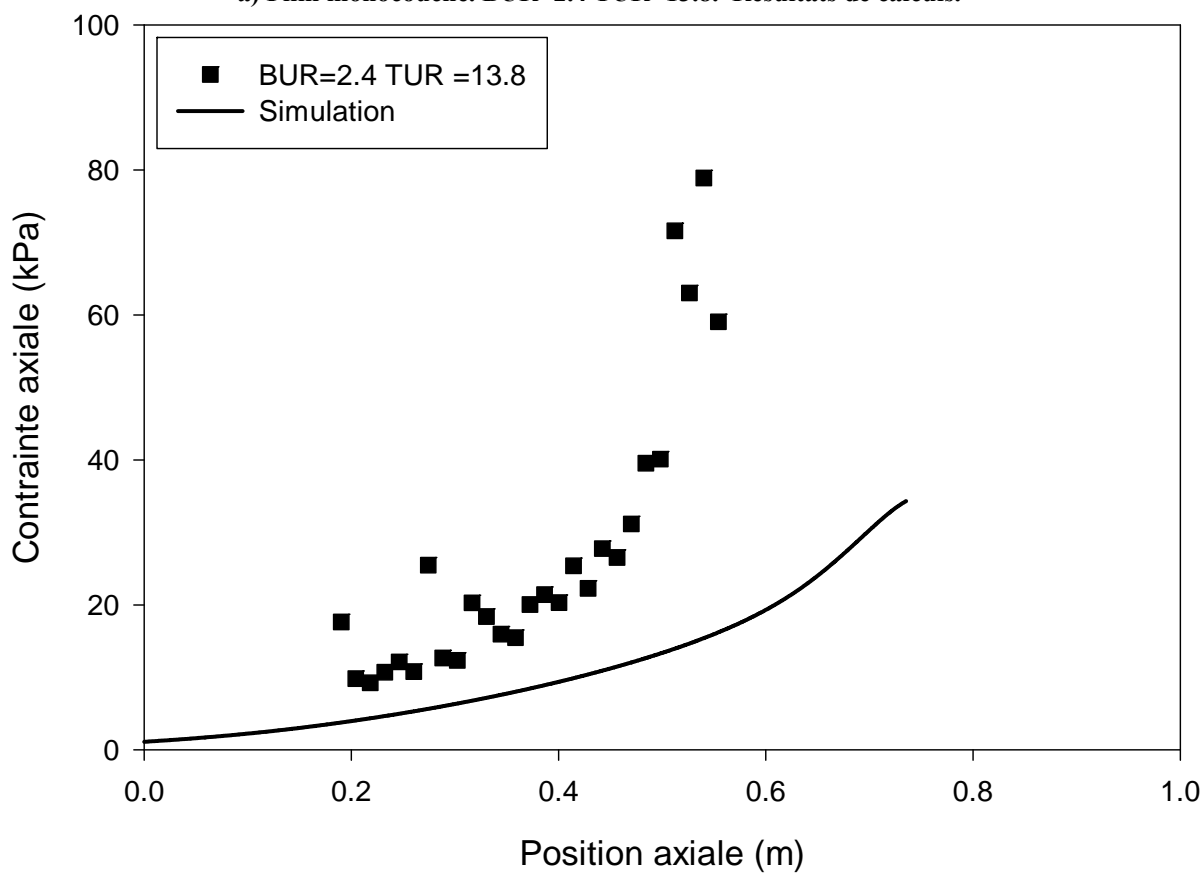
Les dimensions détaillées de l'anneau de refroidissement sont présentées schématiquement en annexe. Dans ce cas il faut noter que l'exposant utilisé est 1.5 au lieu de 0.8 car cette valeur ne permettait pas de modifier suffisamment le coefficient de convection. Ceci est peut être lié à l'efficacité de l'anneau de refroidissement. En effet l'anneau de refroidissement de la filière de petite taille était un anneau simple flux peu performant alors que l'anneau de refroidissement de la filière semi industrielle est un anneau a double flux hautement performant. Les calculs qui suivent ont donc été réalisés avec cette correction lorsque le taux de gonflement en sortie de filière était supérieur à la valeur observée à la figure 4.4b.

La figure 4.5a nous permet de comparer le profil géométrique face aux résultats expérimentaux pour un film de ULDPE. Tout comme précédemment le calcul permet de représenter adéquatement le soufflage de la gaine. De plus les profils de contraintes (figure 4.5b et 4.5c) calculés sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus expérimentalement. De façon générale, contrairement aux résultats de calculs obtenus avec le LDPE-B, les calculs tentant de décrire le comportement de ULDPE semblent sous-estimés les résultats expérimentaux. Le calcul nous permet néanmoins d'évaluer, à tout le moins de façon qualitative les contraintes axiales et transversales générées dans le film lors du soufflage. Il faut tout de même souligner que les résultats des calculs réalisés pour les films monocouches sur cette filière sont moins représentatifs des résultats expérimentaux que ceux que nous avons obtenus pour la filière de petite taille. Ceci est peut être du au fait, comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, que certaines des bulles monocouches produites étaient légèrement instables.

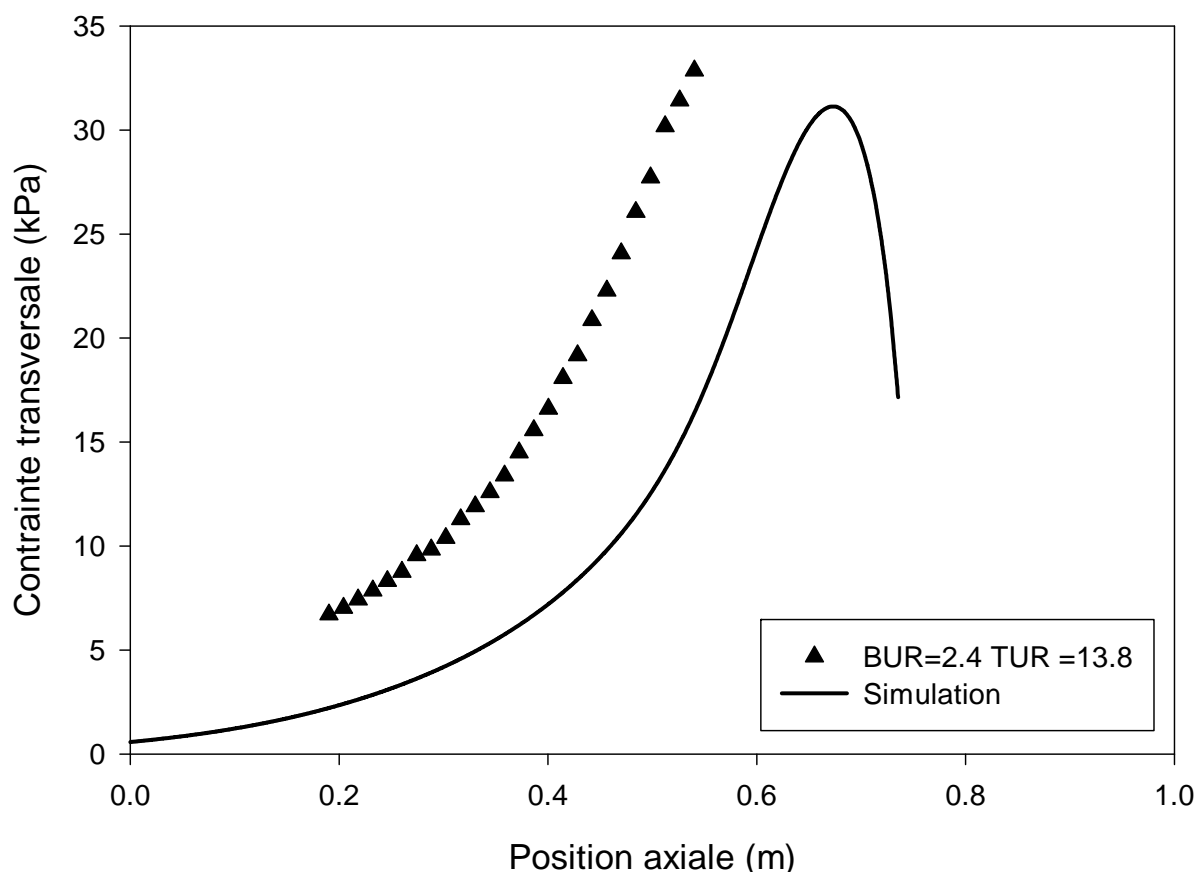




a) Film monocouche. BUR=2.4 TUR=13.8. Résultats de calculs.



b) Film monocouche. BUR = 2.4 TUR = 13.8. Contraintes axiales calculées et mesurées.



c) Film monocouche. BUR = 2.4 TUR = 13.8. Contraintes transversales calculées et mesurées.

**Figure 4.5 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films monocouches de ULDPE. Profil géométrique et profils de contraintes.**

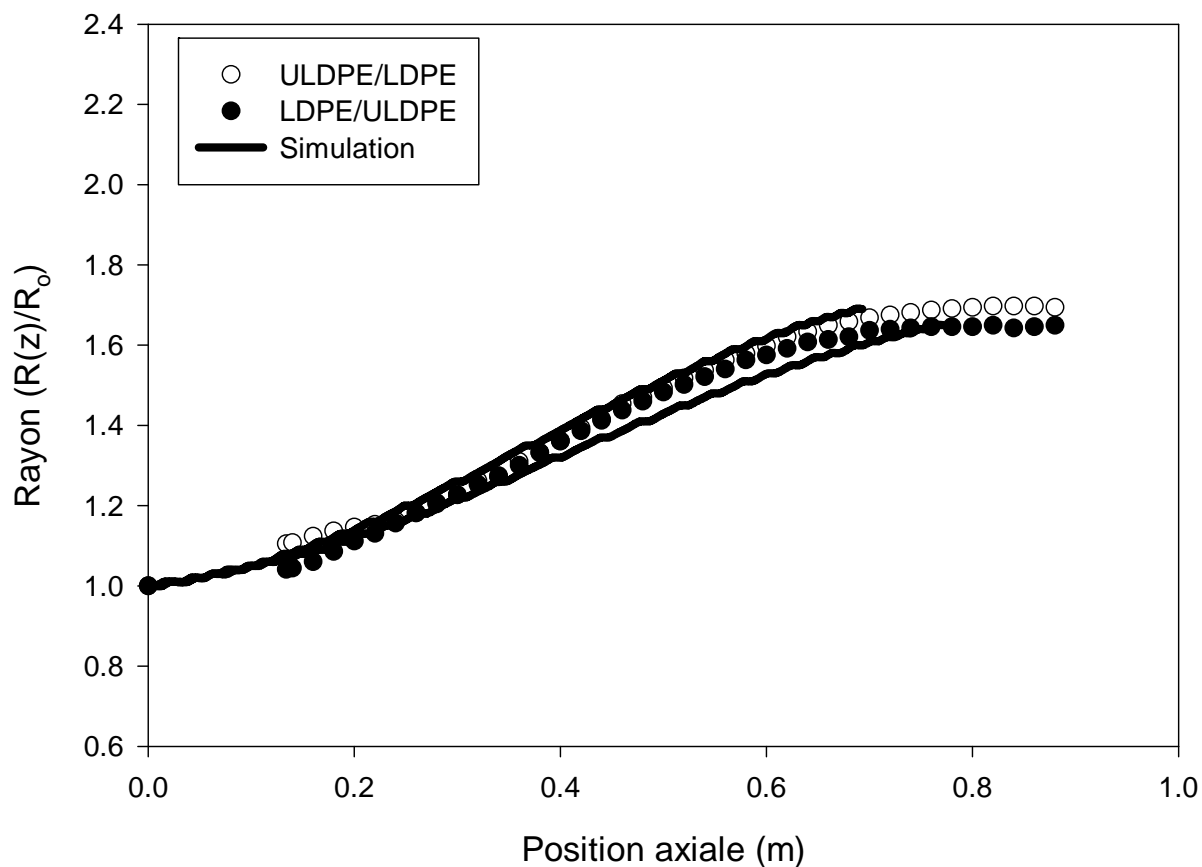
#### 4.2.2 Films multicouches

Tout comme pour la petite filière il nous est maintenant possible d'utiliser nos résultats expérimentaux afin de valider nos calculs. La première étape consiste donc à évaluer l'effet de l'agencement des couches sur le profil géométrique et sur les profils de contraintes axiales et transversales. La figure 4.6a nous permet de constater que les calculs représentent assez fidèlement l'évolution du rayon des bulles multicouches. Dans les deux cas illustrés, les films étaient composés de 50% de LDPE-B et de 50 % de ULDPE. Dans ce cas particulier les courbes ne sont pas parfaitement superposées car le taux d'étirage et le taux de gonflement sont légèrement plus élevés lorsque la couche de ULDPE est située à l'intérieur de la bulle.

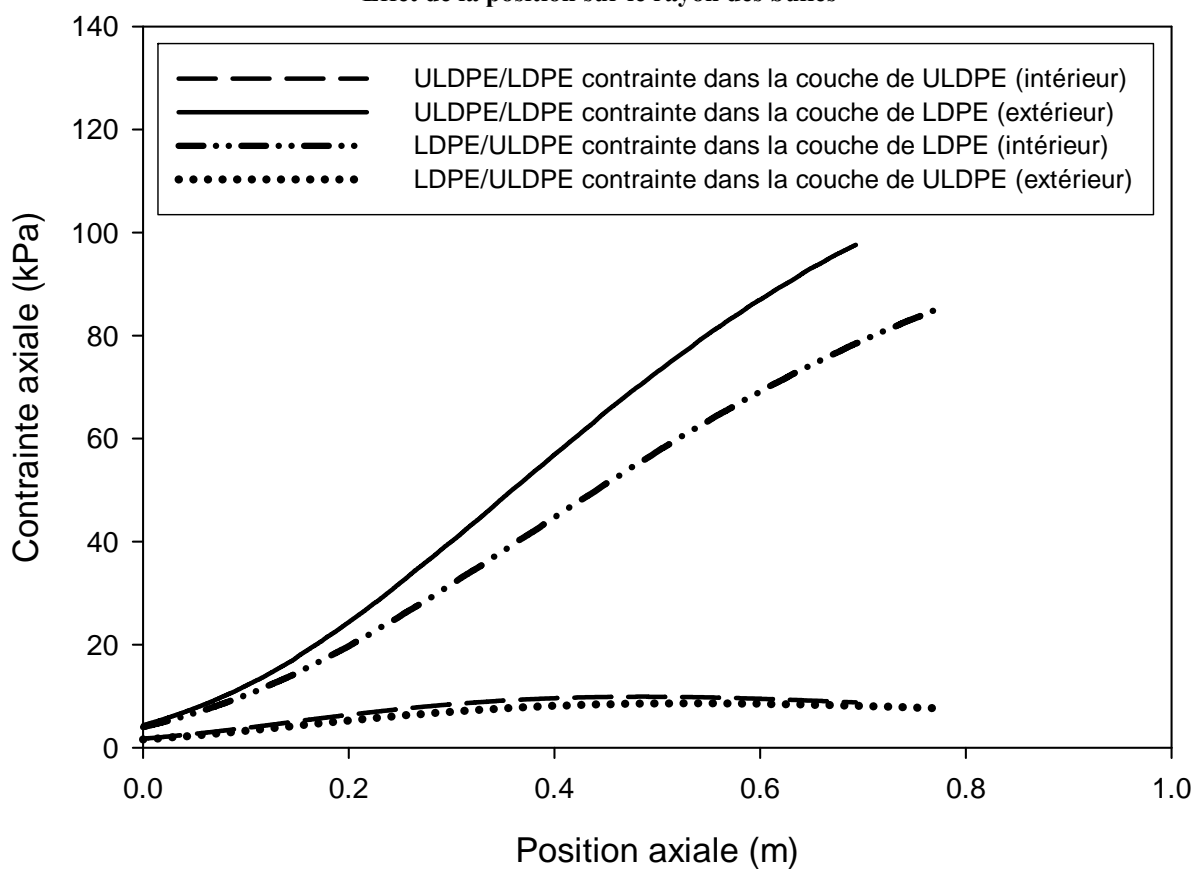
Lorsqu'on observe les contraintes axiales calculées dans chacune des couches qui sont illustrées à la figure 4.6b il est possible de constater que les contraintes développées dans le LDPE-B sont toujours supérieures aux contraintes générées dans le ULDPE. Ceci est attribuable au fait que la viscosité du LDPE-B est approximativement 2 fois plus élevée que celle du ULDPE. De plus l'énergie d'activation du LDPE-B est aussi plus élevée que celle de l'ULDPE. Les contraintes développées dans la couche de LDPE-B sont donc beaucoup plus élevées que les contraintes développées dans la couche de ULDPE. Même si les résultats de biréfringence ne nous donnent que des informations sur les contraintes moyennes, il nous avait été possible de faire cette observation lors de la production des films. En effet en découpant un échantillon de film dans le rouleau lors de la fabrication nous avons constaté que lorsque la couche de LDPE-B était située à la paroi interne du film, ce dernier devenait convexe. Nous observions l'effet inverse lorsque le LDPE-B était situé à la paroi externe.

Afin de pouvoir comparer les contraintes déterminées expérimentalement aux contraintes calculées. Il nous est nécessaire de normaliser les contraintes dans chacune des couches par rapport à leur épaisseur relative. Lorsque cette opération est réalisée, nous obtenons les résultats présentés aux figures 4.6c et 4.6d. Les contraintes axiales et transversales moyennes calculées sont similaires aux valeurs obtenues expérimentalement. Ceci nous indique donc que notre calcul nous permet de décrire de adéquatement l'évolution du rayon et des contraintes à l'intérieur du film multicouche. Ceci peut paraître étrange car les calculs de contraintes réalisés sur les films monocouches représentent moins efficacement les résultats expérimentaux que les calculs multicouches. En réalité il faut se souvenir que dans un cas (LDPE-B) les contraintes calculées surestimait les valeurs expérimentales et dans l'autre (ULDPE) elles les sous évaluaient. Le calcul multicouche qui est réalisé en combinant ces deux matériaux a donc pour effet d'écraser ses déviations. La source des divergences entre les contraintes calculées et les contraintes expérimentales est certainement liée à la viscosité au plateau newtonien des deux matériaux. En effet l'allure générale des contraintes calculées est similaire aux valeurs expérimentales, c'est l'amplitude des contraintes qui cause problème. Or la valeur des contraintes est directement liée à la viscosité des matériaux.

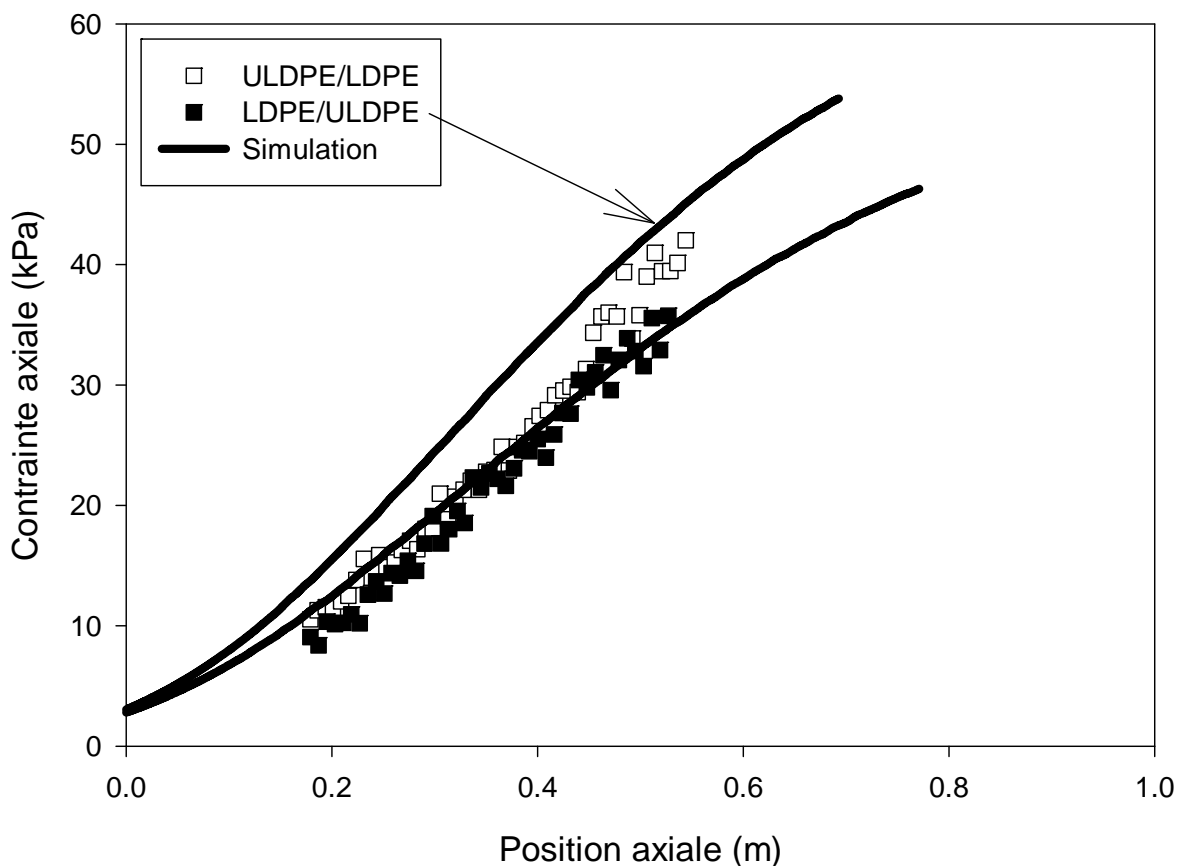
La figure 4.7 nous permet de constater que notre calcul nous permet aussi de prendre en compte efficacement l'effet d'une augmentation du taux de gonflement. En effet, les résultats expérimentaux sont bien représentés à l'exception du profil de contraintes transversales à taux de gonflement élevé.



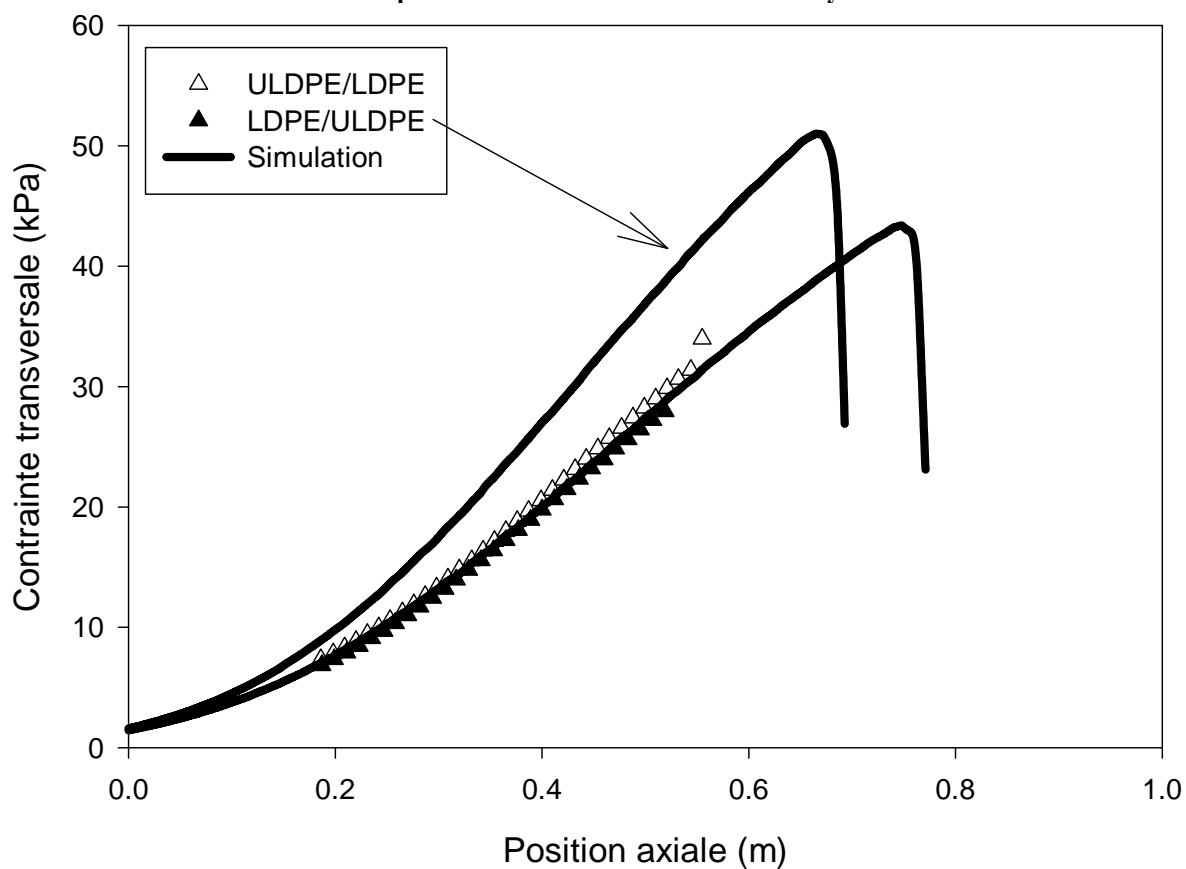
a) Films multicouches. ULDPE/LDPE-B BUR=1.7 TUR=11.8, LDPE-B/ULDPE BUR = 1.7 TUR = 11.5.  
Effet de la position sur le rayon des bulles



b) Films multicouches. ULDPE/LDPE-B BUR=1.7 TUR=11.8, LDPE-B/ULDPE BUR = 1.7 TUR = 11.5.  
Effet de la position sur les contraintes axiales développées dans chacune des couches

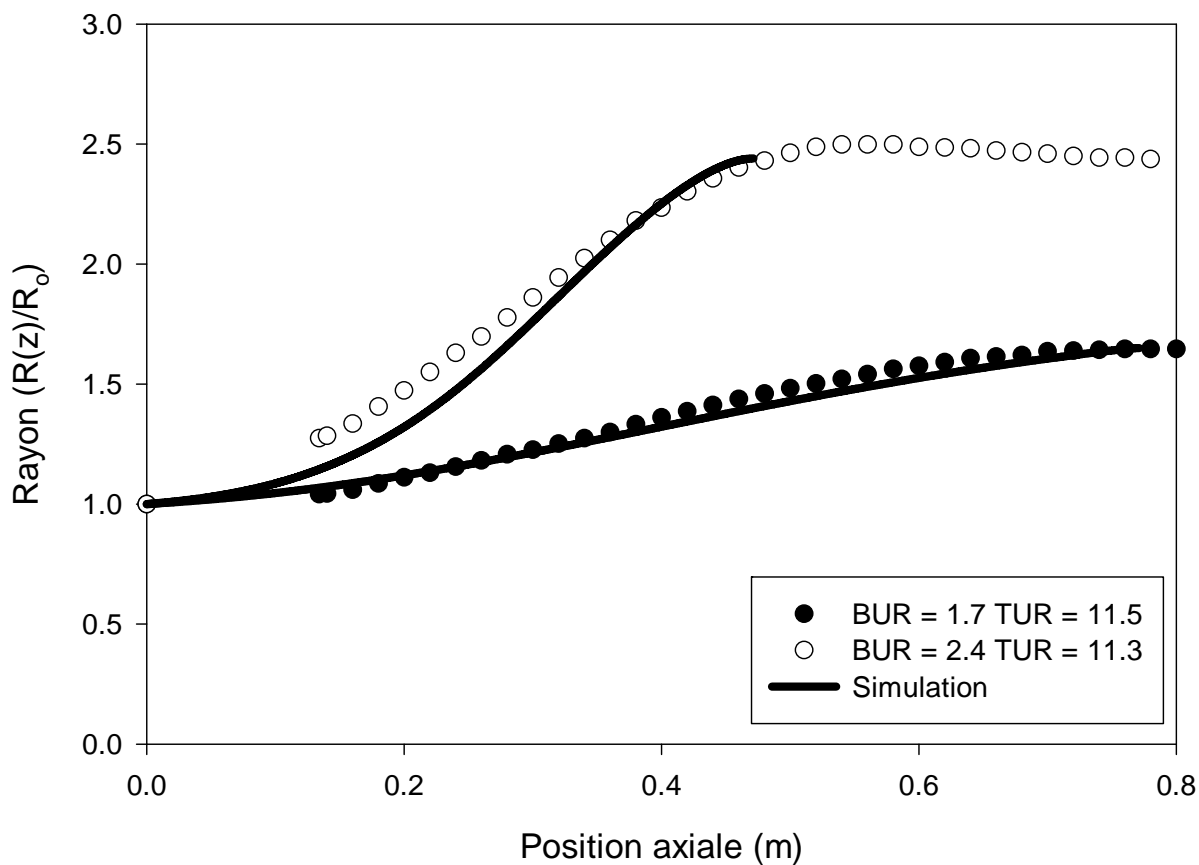


c) Films multicouches. ULDPE/LDPE-B BUR= 1.7 TUR=11.8, LDPE-B/ULDPE BUR = 1.7 TUR = 11.5.  
Effet de la position sur les contraintes axiales moyennes.

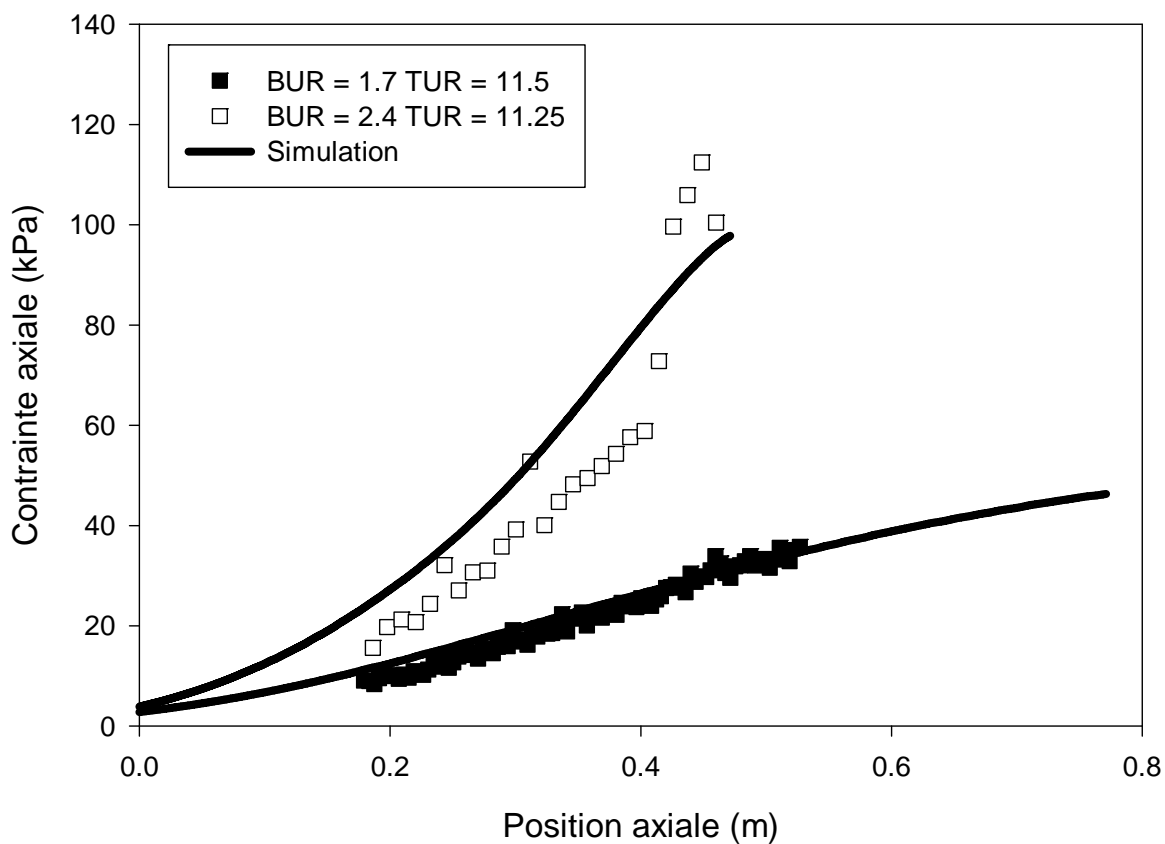


d) Films multicouches. ULDPE/LDPE-B BUR= 1.7 TUR=11.8, LDPE-B/ULDPE BUR = 1.7 TUR = 11.5.  
Effet de la position sur les contraintes transversales moyennes.

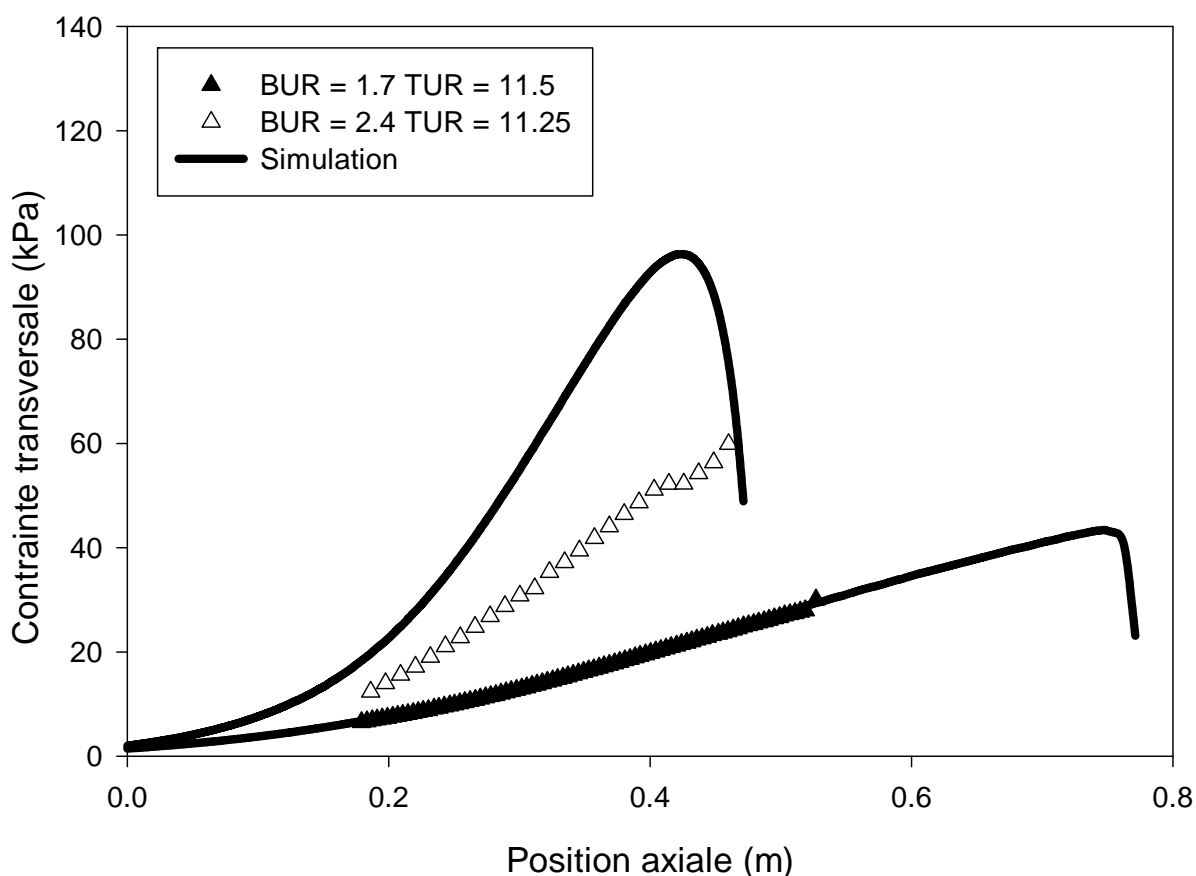
**Figure 4.6 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches. Profil géométrique et de contraintes. Effet de l'agencement.**



a) Films multicouches. Effet du taux de gonflement sur le rayon des bulles



b) Films multicouches. Effet du taux de gonflement sur les contraintes axiales moyennes

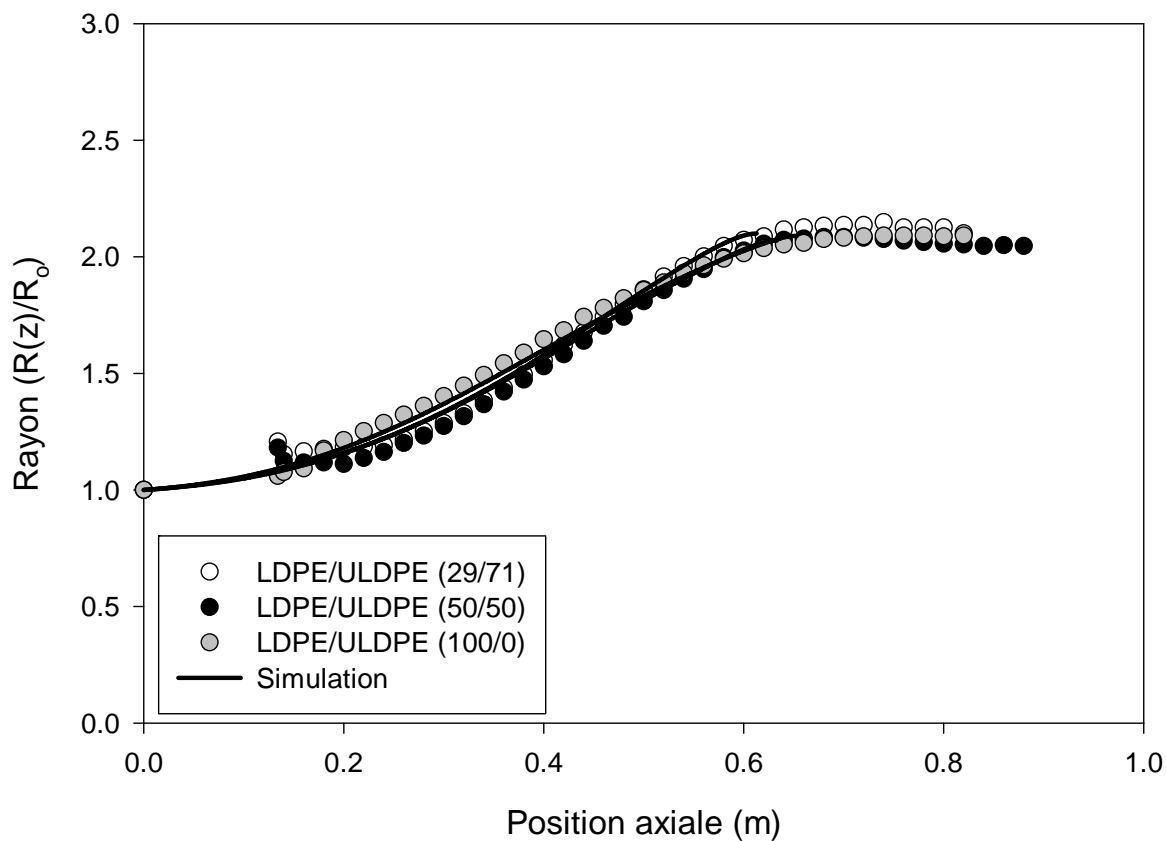


c) Films multicouches. Effet du taux de gonflement sur les contraintes transversales moyennes

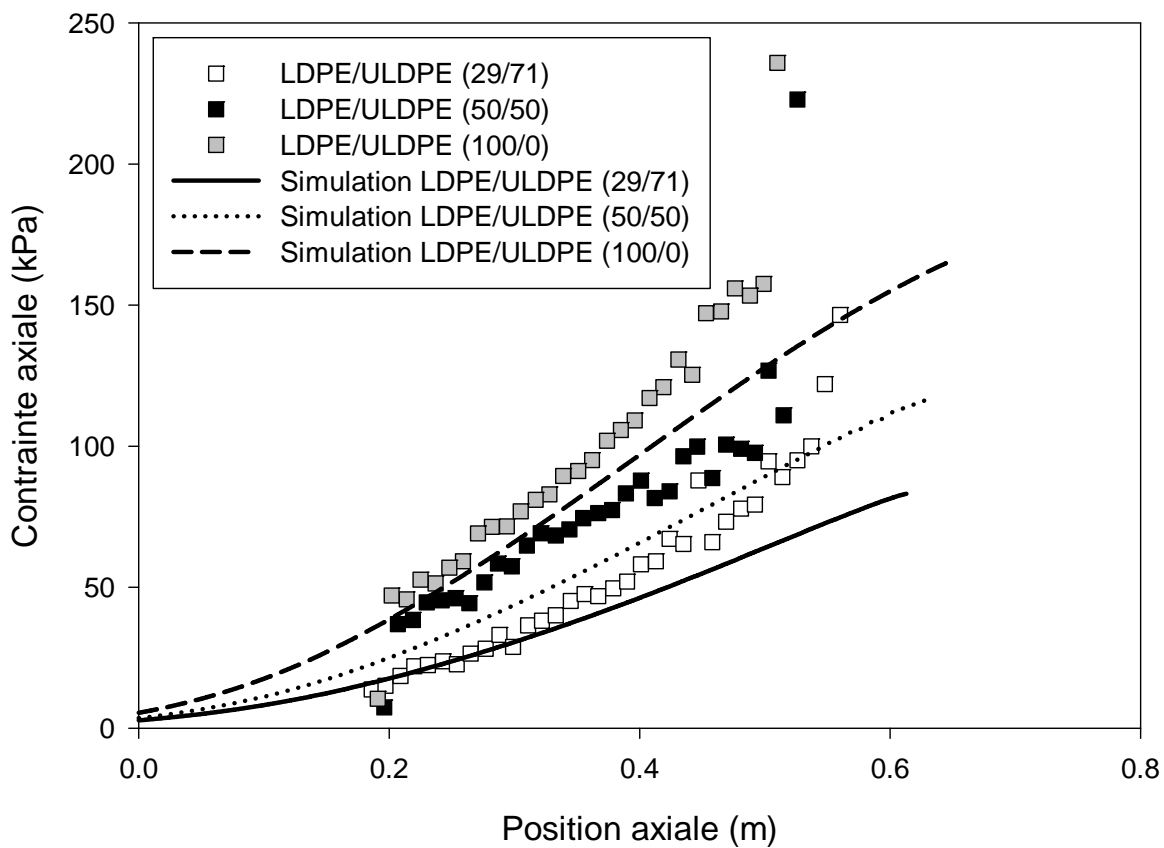
**Figure 4.7 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches de LDPE-B/ULDPE. Profil géométrique et de contraintes. Effet du taux de gonflement**

Finalement nous pouvons observer à la figure 4.8a que le calcul permet de représenter de façon qualitative l'effet de la quantité de LDPE-B dans le film sur le profil géométrique (4.8a) et sur le profil de contraintes axiales moyenne (4.8b). Une augmentation de la quantité de LDPE-B dans le film a pour effet de générer un profil de contraintes axiales moyennes plus élevé. Ceci est lié au fait que le LDPE-B est plus visqueux que le ULDPE. Nous obtenons un effet similaire en ce qui a trait aux profils de contraintes transversales calculées.

De manière générale le rayon ainsi que les contraintes calculées sont très similaires aux valeurs mesurées expérimentalement lors de la production de films multicouches avec la filière semi industrielle. Il faut mentionner que dans les cas où le calcul ne permet pas de reproduire avec précision les valeurs expérimentales il permet d'identifier adéquatement l'effet des différents paramètres opératoires sur les variables mesurées. Par exemple, même si le calcul réalisé à un taux de gonflement élevé illustré à la figure 4.7c ne permet pas de recouvrir parfaitement les résultats expérimentaux, il nous permet de constater qu'une augmentation du BUR entraîne une augmentation des contraintes transversales.

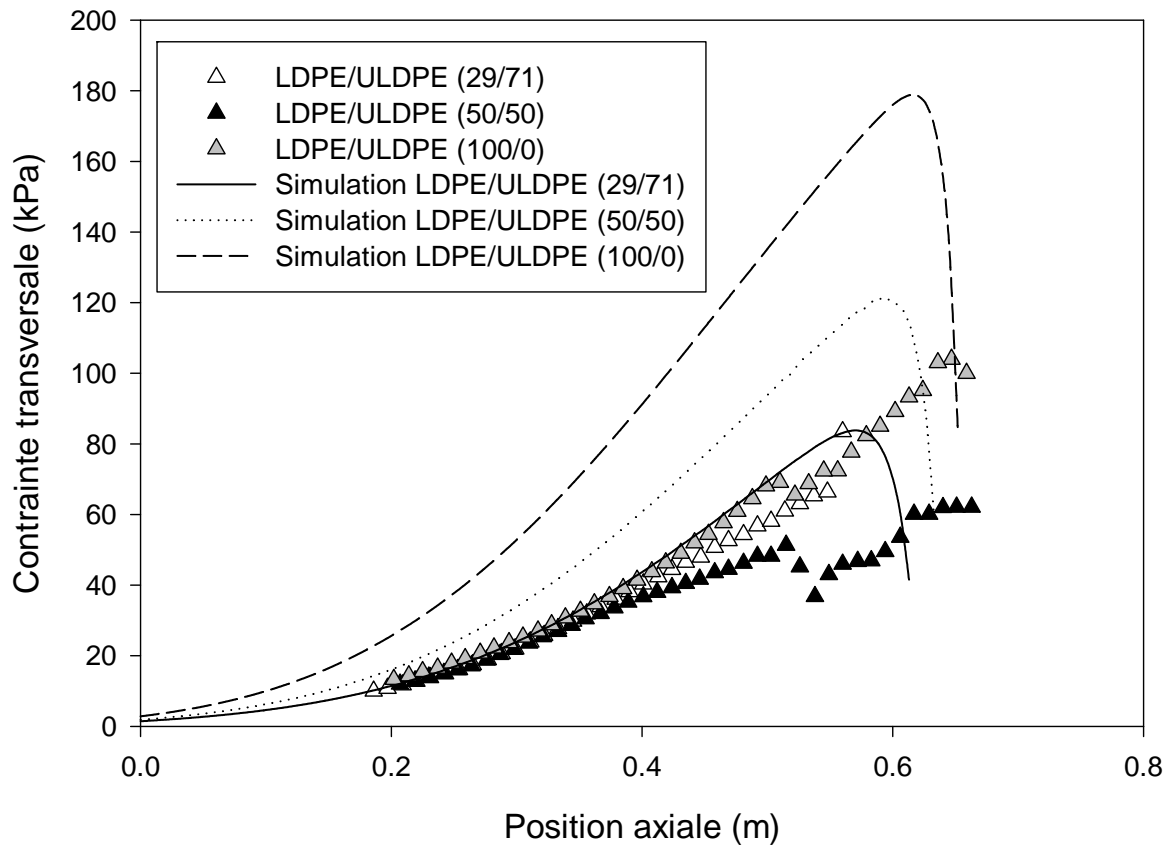


a) Films multicouches. Effet de la quantité de LDPE-B sur le rayon de la bulle



b) Films multicouches. Effet de la quantité de LDPE-B sur les contraintes axiales moyennes





c) Films multicouches. Effet de la quantité de LDPE-B sur les contraintes transversales moyennes  
**Figure 4.8 : Comparaison entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sur des films multicouches de LDPE-B/ULDPE. Profil géométrique et de contraintes. Effet de la quantité de LDPE-B**

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode simple permettant d'obtenir une relation décrivant l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale en couplant les résultats expérimentaux aux résultats de calculs. Ceci nous a donné la possibilité d'utiliser cette relation pour comparer nos calculs à nos résultats expérimentaux. Il ne nous a pas été possible d'obtenir une relation totalement indépendante des résultats expérimentaux. En effet il est nécessaire d'ajuster le coefficient de convection en fonction du gonflement de la bulle à la sortie de l'anneau de refroidissement. Cette méthode d'ajustement est beaucoup plus licite que les lissages systématiques (Petrie (1974), Han et Park (1975b), Luo et Tanner (1985) et Kanai et White (1985)) qui sont traditionnellement réalisés. Ceci nous a permis de calculer l'évolution du rayon et des contraintes et de les comparer aux résultats expérimentaux.

De manière générale, les résultats de calculs représentent assez fidèlement l'évolution du rayon et de la température pour des films monocouches et multicouches produits grâce à une filière de faibles dimensions. Le rayon des bulles produites grâce à la filière semi industrielle est aussi fidèlement représenté par les calculs. Les profils de contraintes calculés sont en général moins représentatifs des résultats expérimentaux que les profils géométriques. Les profils de contraintes calculés sur les films multicouches sont plus représentatifs des résultats expérimentaux que les profils de contraintes calculées sur les films monocouches.

Les explications pouvant justifier les écarts entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux sont multiples. Premièrement, comme nous l'avons souligné nous ne considérons pas le caractère viscoélastique des polymères fondus. L'inclusion d'un modèle viscoélastique dans notre calcul pourrait potentiellement nous apporter quelques améliorations. Par contre nous avons déjà souligné certaines des contraintes associées à cet ajout en particulier pour les écoulements multicouches. Deuxièmement le transfert thermique est un des facteurs dominants du procédé de soufflage de gaine qui à ce jour demeure occulté. Il nous semble vital d'inclure un modèle permettant de décrire, en parallèle avec le modèle de soufflage de gaine, l'aérodynamique de l'anneau de refroidissement. En effet, la forme de la bulle affecte l'écoulement de l'air de refroidissement, ce qui a pour effet de modifier la vitesse de l'air et donc de modifier le taux de refroidissement qui lui a un effet sur la forme de la bulle. A ce jour les efforts de modélisation de l'anneau de refroidissement tout comme les efforts de modélisation du soufflage de gaine ont été réalisés indépendamment l'un de l'autre. Ceci est une lacune qu'il faut réparer. Il faut aussi souligner que l'anneau de refroidissement joue un autre rôle lors du soufflage de gaine. En effet, lors de nos calculs nous avons supposé que la différence de pression entre l'intérieur de la bulle et l'extérieur de la bulle était uniforme. Or comme l'a démontré André (1999) nous savons que le jet d'air de refroidissement cause une variation locale de la pression à l'extérieur de la bulle pouvant fortement influencer la forme de la bulle. Cet aspect n'a pas été abordé lors de nos travaux. Le couplage de ces effets liés à l'anneau de refroidissement au calcul thermomécanique non isotherme du soufflage de gaine multicouche pourrait nous amener à obtenir de meilleurs résultats.

## CHAPITRE 5 Conclusion

Nous avons réalisé la première étude d'envergure portant sur le procédé de soufflage de gaines multicouches en combinant la biréfringence en ligne et la modélisation.

Dans un premier temps nous avons réalisé deux campagnes expérimentales qui nous ont permis d'identifier l'effet des conditions opératoires (BUR, TUR, matériaux utilisés) sur la forme de la bulle, le profil de température et les profils de contraintes. Les profils de contraintes ont été déterminés en mesurant la biréfringence en fonction de la position axiale lors de la production des bulles monocouches et multicouches. Ces manipulations nous ont permis d'illustrer les points suivants :

- La combinaison de LDPE-B et ULDPE pour la production de bulles multicouches engendrait des bulles gonflant entre les bulles monocouches de ces deux matériaux.
- Par contre la combinaison de LDPE-A et mMDPE pour la production de bulles multicouches pouvait engendrer des bulles gonflant plus rapidement que les bulles monocouches de ces deux matériaux. Ceci signifie que la forme des bulles multicouches n'est pas forcément une pondération de la forme des bulles monocouches. Le gonflement des bulles multicouches semble être lié au couple propriétés rhéologiques / propriétés thermiques des deux matériaux.
- Nous avons constaté que le positionnement des couches n'affectait pas le soufflage de gaines multicouches (forme, rayon et contraintes).
- Nous avons aussi été en mesure d'observer deux plateaux de cristallisation lors de la production de films multicouches correspondant aux températures de cristallisation successives des deux matériaux utilisés.
- L'augmentation du taux de gonflement et la diminution du taux d'étirage avaient pour effet de diminuer la position de figeage des bulles monocouches et multicouches. Ce résultat est classique pour le soufflage de gaine monocouche
- La mesure des contraintes nous a permis de constater que la quantité de LDPE-B affectait de façon significative les profils de contraintes des films multicouches. Cette augmentation est liée au fait que le LDPE-B est plus visqueux que le ULDPE.
- Une augmentation du taux de gonflement et du taux d'étirage entraînait une augmentation des profils de contraintes.

Une des principales constatations découlant de l'analyse expérimentale est que l'interprétation des résultats est rendue ardue par la difficulté de reproduire dans des conditions exactement identiques les différents essais. Le calcul semble donc être une solution appropriée nous permettant de nous libérer de l'incertitude expérimentale.

Nous avons donc développé un modèle mécanique non isotherme Newtonien permettant de décrire le soufflage de gaine multicouche. Afin d'établir notre système d'équations, nous avons repris une approche novatrice utilisée précédemment par Laffargue (2003) plutôt que d'utiliser l'approche classique originellement développée par Pearson et Petrie (1970) qui est basée sur l'utilisation d'un repère local mobile tangent à la paroi de la bulle. Grâce à cette approche versatile nous avons été capable de:

- Valider certaines des hypothèses qui étaient faites précédemment. Par exemple, nous avons démontré que le profil thermique radial était d'un ordre de grandeur inférieur au profil thermique axial. Auparavant ce résultat était supposé.
- Démontrer que notre modèle bicouche pouvait être utilisé afin de décrire les écoulements monocouche.

- Prouver que le modèle peut aussi être aisément étendu afin de décrire la production de gaines possédant de nombreuses couches.
- D'obtenir un modèle qui nous permet de calculer la forme de la bulle, sa température, le profil des contraintes et les champs de vitesse.

Les calculs effectués lors d'une analyse de sensibilité nous ont permis de mettre en évidence les faits suivants :

- L'importance du taux de refroidissement, de l'énergie d'activation, de la chaleur spécifique et de nombreux autres facteurs sur le gonflement de bulles monocouches et multicouches.
- Comme nous l'avons constaté lors des campagnes expérimentales certaines combinaisons de matériaux vont donner naissance à des bulles multicouches calculées gonflant plus rapidement que les bulles monocouches calculées. Il est aussi possible d'obtenir des bulles multicouches dont la forme est située entre les deux bulles monocouche en utilisant une autre combinaison de matériaux. Il semble que la combinaison de la chaleur spécifique et de l'énergie d'activation soit un des paramètres majeurs gérant le gonflement des bulles multicouches.
- Comme nous l'avons constaté lors des campagnes expérimentales l'agencement des couches n'affecte pas le procédé de soufflage de gaines.
- Nous avons aussi démontré que le profil thermique radial disparaissait très rapidement pour devenir quasi inexistant à la position de figeage. Ceci vient invalider certains travaux réalisés précédemment qui présupposaient l'existence d'un profil thermique important à la température de cristallisation du film.

L'étape de validation a mis en évidence certaines limitations du calcul. En effet, il est nécessaire de connaître l'évolution du coefficient de convection en fonction de la position axiale afin de pouvoir réaliser le calcul thermique. Nous avons néanmoins été capables de déduire cette relation grâce à une de nos courbes expérimentales. Ceci illustre l'importance de développer un modèle permettant de décrire l'écoulement de l'air dans l'anneau de refroidissement et à la surface de la bulle. De façon générale, nos résultats permettent de reproduire adéquatement l'évolution du rayon, de la température et des contraintes survenant lors de la production de gaines monocouches et multicouches.

Nous avons donc développé un modèle multicouche non isotherme présentant une grande versatilité nous permettant d'obtenir des résultats de calculs similaires aux résultats expérimentaux pour une grande variété de conditions opératoires. Par contre, il reste encore énormément de travaux à réaliser avant de pouvoir maîtriser parfaitement le procédé de soufflage de gaine multicouche.

Le premier ajout évident qu'il serait nécessaire d'apporter au modèle que nous avons développé serait d'utiliser une loi de comportement plus réaliste afin de décrire adéquatement le comportement viscoélastique des polymères. Ceci permettrait probablement de corriger certaines des divergences entre le calcul et les résultats expérimentaux que nous avons rencontrés pour des taux d'étirage élevés. Mais c'est un problème délicat car l'introduction de lois viscoélastiques dans les modèles monocouches a fait apparaître des problèmes de bifurcation de solution qui sont typiques des procédés d'étirage. Une autre amélioration au développement des modèles décrivant le procédé de soufflage de gaines multicouches pourrait se situer dans l'élaboration d'un modèle tridimensionnel complet. Ceci serait nécessaire lorsque les hypothèses utilisées afin de réaliser le développement en série de  $\varepsilon$  sont violées. En effet nous avons mentionné lors du développement des équations thermiques qu'un taux

de refroidissement très élevé pourrait rendre le développement en série localement invalide. Un modèle 3D pourrait nous permettre de nous libérer de ces contraintes.

Un second aspect qui mérite d'être étudié est la réalisation d'un modèle efficace permettant de prédire la vitesse de l'air en fonction de la position axiale en fonction de la géométrie de l'anneau de refroidissement du débit d'air et de la forme de la bulle. Mais ceci ne serait qu'une étape préliminaire à un modèle intégrant à la fois l'aspect aérodynamique et l'aspect thermomécanique. Il est possible d'imaginer un modèle permettant de tenir compte de l'effet de couplage entre l'air de refroidissement et la bulle. En effet, lorsque la bulle gonfle elle affecte la vitesse de l'air de refroidissement qui en retour affecte le gonflement de la bulle. À ce jour, peu d'approches sérieuses ont été réalisées afin de décrire ce processus complexe.

Il faut aussi mentionner que des travaux expérimentaux et de modélisation portant sur la cristallisation lors de la production de films multicouches pourraient s'avérer très intéressants. En effet, même si nos résultats expérimentaux n'illustrent pas une variation du taux de cristallisation en fonction des conditions opératoires, il est fort possible que la structure des cristaux soit affectée. Ceci a été démontré par André (1999) qui a illustré l'influence des conditions opératoires sur l'orientation des cristaux lors de la production de films monocouche grâce à des figures des pôles obtenues par diffraction des rayons X. Il est aussi possible d'imaginer que lors de la production d'un film multicouche l'un des deux matériaux cristallisera en premier. Il est alors probable que la structure cristalline du second matériau se développe selon l'orientation préexistante du premier matériau. Ceci est en particulier important pour les films nécessitant d'excellentes propriétés optiques, en particulier dans le secteur de l'emballage. L'étude du développement de la structure cristalline lors de l'élaboration de films multicouches pourrait être la base de travaux intéressants.

Un autre aspect qui offre des possibilités de travaux réside dans la coextrusion de matériaux possédant des températures de mise en forme drastiquement différentes. Nous avons abordé de façon exploratoire ce sujet. Nous avons en effet tenté de produire des films monocouches et multicouches composés de nylon 6 et de polyéthylène basse densité en utilisant des conditions opératoires identiques. Ceci nous a permis de constater qu'il était presque impossible de produire ces films en utilisant un taux de refroidissement constant. Cette variation du taux de refroidissement d'une manipulation à l'autre rend l'interprétation des résultats expérimentaux presque impossible.

Finalement même si les travaux que nous venons d'accomplir permettent de faire progresser notre compréhension du procédé de soufflage de gaines multicouches nous sommes encore loin de comprendre parfaitement l'ensemble des facteurs affectant le procédé de soufflage de gaine multicouche.

## RÉFÉRENCES

ANDRÉ, J.-M., AGASSANT, J.-F., DEMAY, Y., HAUDIN, J.-M., MONASSE, B., (1998). Numerical Modeling of the Polymer Film Blowing Process. International Journal of Forming Process. 1, p197-210.

ANDRÉ J.-M., (1999). Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylène, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 194p.

ASHIZAWA, H., SPRUIELL, J.E., WHITE, J.L., (1984). An Investigation of Optical Clarity and Crystalline Orientation in Polyethylene Tubular Film. Polymer Engineering and Science. Vol 24, no 13, p035-1042.

ASHOK, B.K., CAMPBELL, G.A., (1992). Two Phase Simulation of tubular Film Blowing of Crystalline Polymers. International Polymer Processing. Vol VII, 3, p240-247.

BABEL, A.K., CAMPBELL, G.A., (1993). Correlating the Plastic Strain with the Properties of the Low and Linear Low Density Polyethylene Blown Films. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 9 July p246-258.

BABEL, A.K., CAMPBELL, G.A., (1995). A Model Linking Process Variables to the Strength of Blown Film Produced from LDPE and LLDEPE. Tappi Journal. Vol 78, 5, p199-204.

BAIN, D.R., GILES, G.A., (2000). Technical and commercial considerations. Materials and Development of Plastics Packaging for the Consumer Market. 1 ed. Sheffield: Sheffield Academic Press Ltd., 229p.

BEAGAN C.M., McNALLY G.M., MURPHY, W.R., (1999). The Blending and Coextrusion of Metallocene Catalysed Polyethylene in Blown Film Applications. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 15, October, p329-340.

BECKER. J., KLASON, C., KUBAT, J., SAHA, P., (1990). Melt Strength and Rupture Frequency in LDPE Film Blowing. Plastics and Rubber Processing and Applications. Vol 14, 1, p23-28.

BILLMEYER F.W. Jr., (1971). Textbook of Polymer Science. New York: Interscience 598p.

CAIN, J.J., DENN, M.M., (1988). Multiplicities and Instabilities in Film Blowing. Polymer Engineering and Science. Vol 28, 23, p1527-1541.

CAKMAK, M., HASSAN, M., (2003). A Real Time True Stress-True Strain-Birefringence Measurement System to Follow Rapid Structural Changes during Biaxial Deformation. Polymer Processing Society Annual Meeting, Athens, Greece.

CAMPBELL, G.A., CAO, B., (1987). The Interaction of Crystallinity, Elastoplasticity, and a Two Phase Model on Blown Film Bubble Shape. Journal of Plastics Film & Sheeting. Vol 3, July, p158-169.

- CAMPBELL, G.A., OBOT, N.T., CAO, B., (1992). Aerodynamics in the Blown Film Process. Polymer Engineering Science. Vol 32, 11, p751-759.
- CANTOR, K.M., HARRISON, I.R., (1990). Optimizing Blown Film Polyethylene Using a Merit Function. Polymer Engineering and Science. Vol 30, 19, p1205-1208.
- CAO, B., CAMPBELL, G.A., (1989). Air Ring Effect on Blown Film Dynamics. International Polymer Processing. Vol IV, p114-118.
- CAO, B., CAMPBELL, G.A., (1990). Viscoplastic-Elastic Modeling of Tubular Blown Film Processing. AIChE Journal. Vol 36, 3, p420-430.
- CHOI, K.J., WHITE, J.L., SPRUIELL, J.E., (1980). Orientation Development in Tubular Film Extrusion of Polystyrene. Journal of Applied Polymer Science. Vol 25, p2777-2788.
- DEALY, J.M., WISSBRUN, K. F., (1990). Melt Rheology and its Role in Plastics Processing Theory and Application, New York: Van Nostrand Reinhold.
- DOUFAS, A. K., McHUGH A.J., MILLER, C., (2000). Simulation of melt spinning including flow-induced crystallization, part I: Model development and predictions. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 92:p27-66.
- DOUFAS A.K, McHUGH A.J., (2001). Simulation of film blowing including flow-induced crystallization, J. Rheol., vol. 45, n° 5, p1085-1104.
- FLEISSNER, M., (1988). Elongational Flow of HDPE Samples and Bubble Instability in Film Blowing, International Polymer Processing. Vol 2, 3, p229-233.
- FULLER G.G., (1995). Optical Rheometry of Complex Fluids. New York: Oxford University Press 268p.
- GHANEH-FARD A., CARREAU P.J., LAFLEUR P.G., (1996a). Study of Instabilities in Film Blowing. AIChE Journal. Vol 42, 5, p1388-1396.
- GHANEH-FARD A., CARREAU P.J., LAFLEUR P.G., (1996b). Application of Birefringence to Film Blowing. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 12, p68-86.
- GHANEH-FARD A., CARREAU P.J., LAFLEUR P.G., (1997a). On-Line Birefringence Measurement in Film Blowing of a Linear Low Density Polyethylene. Intern. Polymer Processing. Vol XII, 2, p136-146.
- GHANEH-FARD A., CARREAU P.J., LAFLEUR P.G., (1997b). Study of Kinematics and Dynamics of Film Blowing of Different Polyethylenes. Polymer Engineering and Science. Vol 37, 7, p1148-1165.
- GHANEH-FARD A., (1999). Effects of Film Blowing Condition on Molecular Orientation and Mechanical Properties of Polyethylene Films. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 15, p194-218.
- GUPTA, R.K., METZNER, A.B., WISSBRUN, K.F., (1982). Modeling of Polymeric Film Blowing Process. Polymer Engineering and Science. Vol 22, 3, p172-181.

GUPTA, A., SIMPSON, D.M., HARRISON, I.R., (1993). A morphological Study of HDPE Blown Film Using Small Angle X-Ray Scattering. Journal of Applied Polymer Science. Vol 50, p2085-2093.

HAN, C.D., PARK, J.Y., (1975a). Studies on Blown Film Extrusion. I. Experimental Determination of Elongational Viscosity. Journal of Applied Polymer Science. Vol 19, p3257-3276.

HAN, C.D., PARK, J.Y., (1975b). Studies on Blown Film Extrusion. II. Analysis of the Deformation and Heat Transfer Processes. Journal of Applied Polymer Science. Vol 19, p3277-3290.

HAN, C.D., PARK, J.Y., (1975c). Studies on Blown Film Extrusion. III. Bubble Instability. Journal of Applied Polymer Science. Vol 19, p3291-3297.

HAUDIN, J.M., PIANA, A., MONASSE, B., GOURDON, B., (2000). Étude des Relations entre Mise en Forme, Orientation et Rétraction dans des Films de Polyéthylène Basse Densité Réalisés par Soufflage de Gaine. III. Orientation de la Phase Amorphe. Ann. Chim. Sci. Mat. Vol 25, p53-64.

HERNANDEZ, R.J., SELKE, S.E.M., CULTER, J.D., (2000). Plastics Packaging: Properties, Processing, Applications, and Regulations. Munich: Hanser Publishers, 425p.

HOUSIADAS K., TSAMOPOULOS J., (2000a). Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. I. General model and its numerical solution, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol 88, p229-259.

HOUSIADAS K., TSAMOPOULOS J., (2000b). Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. II. Linearized model and its numerical solution, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol 88, p303-325.

IMMERGUT, E.H., McDOWELL, W., BRANDRUP, J., (1975). Polymer Handbook. New York Wiley.

JANESCHITZ-KRIEGL H. (1983). Polymer Melt Rheology and Flow Birefringence. Berlin Springer. 652p.

KAMYKOWSKI, G.W., GOTO, S., (1997). The Effect of Layer Geometry on the Layer Adhesion of Coextruded Films. Tappi Journal. Vol 80, 5, p227-231.

KANAI, T., WHITE, J.L., (1984). Kinematics, Dynamics and Stability of the Tubular Film Extrusion of Various Polyethylenes. Polymer Engineering and Science. Vol 24, 15, p1185-1201.

KANAI, T., WHITE, J.L., (1985). Kinematics, Dynamics Heat Transfer and Structure Development in Tubular Film Extrusion of Polymer Melts : A Mathematical Model and Predictions. Journal of Polymer Engineering. Vol 5, p135-157.

KANAI, T., (1987). Theoretical Analysis of Tubular Film Extrusion and its Application for HMW-HDPE. International of Polymer Processing. Vol 1, 3, p137-143.



- KUIJK, E.W., TAS, P.P., NEUTEBOOM, P., (1998). A Rheological Model for the Prediction of Polyethylene Blown Film Properties. Antec 98, p30-34.
- LAFFARGUE J., PARENT L., LAFLEUR P.G., CARREAU P.J., DEMAY Y., AGASSANT J.F., (2002). Investigations of Bubble Instabilities in Film Blowing Process, Intern. Polymer Processing, XVII, 4, p347-353.
- LAFFARGUE J., (2003). Étude et modélisation des instabilités du procédé de soufflage de soufflage de gaine, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 169p.
- LODGE A.S., (1955). A Network Theory of Flow Birefringence and Stress in Concentrated Polymer Solutions. Trans. Faraday Soc. Vol 52 p120-130.
- LUO, X.L., TANNER, R.I., (1985). A Computer Study of Film Blowing, Polymer Engineering and Science. Vol 25, 10, p620-629.
- MENDEZ-PRIETO, A., SANCHEZ-VALDEZ, S., (1998). Multilayer Structures Using Reprocessed Coextruded LLDPE/TIE/PA-6 Films. Journal of Polymer Engineering. Vol 18, 3, p221-234.
- MENGES, G. PREDOHL, W.O., Polymers, 12 p259 1972
- MINOSHIMA, W., WHITE, J.L., (1986). Instability Phenomena in Tubular Film and Melt Spinning of Rheologically Characterized HDPE, LDPE, LLDPE. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Vol 19, p275-302.
- MORRIS B.A., (1999). The Effect of Coextrusion on Bubble Kinematics, Temperature Distribution and Property Development in the Blown Film Process. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 15, January, p25-36.
- MORRIS, B.A., (1996). The Effect of Processing Variables on Peel Strength Performance in Coextrusion Blown Film. Antec 96. p116-120.
- MUSLET I.A., KAMAL M.R., (2004). Computer Simulation of the Film Blowing Process Incorporating Crystallization and Viscoelasticity. J. Rheology. May/June p525-550.
- NAGARAJAN, G., CAMPBELL, G.A., (1995). Experimental Determination of Heat Transfer Coefficient in Blown Film Process. Antec 95. p162-166.
- PEARSON, J.R.A., PETRIE, J.S., (1970a). The Flow of a Tubular Film. Part 1. Formal Mathematical Representation. J. Fluid Mech. Vol 40, part 1, p1-19.
- PEARSON, J.R.A., PETRIE, J.S., (1970b). The Flow of a Tubular Film. Part 2. Interpretation of the model and discussion of solutions. J. Fluid Mech. Vol 42, part 3, p609-625.
- PERDIKOULIAS, J., VLCEK, J., VLACHOPOULOS, (1990). An Experimental Evaluation of Flow Distribution Models for Spiral Mandrel Dies. Advances in Polymer Technology. Vol. 10, 2, p111-123.
- PERDIKOULIAS, J., TZOGANAKIS, C., (1995). Interfacial Instability Phenomena in Blown Film Coextrusion of Polyethylene Resins. Antec 95. p176-180.

PERDIKOULIAS, J., TZOGANAKIS, C., (1996). Interfacial Instability in Blown-Film Coextrusion of Polyethylenes. Plastics Engineering. April, p41-43.

PETRIE C.J.S., (1973). Memory effect in a non-uniform flow a study of the behaviour of a tubular film of viscoelastic fluid. Rheol.Acta, 12 p92.

PETRIE C.J.S., (1974). Mathematical modeling of heat transfer in film blowing : a case study, Plastics and Polymers, vol. 42, p259-264.

PETRIE, C.J.S., (1975a). Mathematical Modeling and the Systems Approach in Plastics Processing: The Blown Film Process. Polymer Engineering and Science. Vol 15 10.

PETRIE, C.J.S., (1975b). A Comparison of Theoretical Predictions with Published Experimental Measurements on the Blown Film Process. AIChE Journal. Vol 21 2.

RAKOS, R., SEBASTIAN, D., (1990). Design and Optimization of Extrusion Dies Using Computer Based Simulations. Advances in Polymer Technology. Vol. 10, 4, 297-307.

RYU, D.S., INOUE, T., OSAKI K., (1998). A Birefringence Study of Polymer Crystallization in the Process of Elongation of Films. Polymer. Vol 39, No 12, p2515-2520.

SANCHEZ-VALDEZ S., YANEZ-FLORES, I., GUERRERO-SALAZAR, C., LOPEZ-QUINTANILLA, M., ORONA-VILLAREAL, F., RAMIREZ-VARGAS, R., (1997). Study of the Adhesion Between Layers Using Modified LLDPE Blends. Antec 97. p1149-1153.

SIDIROPOULOS, V., TIAN, J.J., VLACHOPOULOS, J., (1996). Computer Simulation of Film Blowing. Journal of Plastic Film & Sheeting. Vol 12, April, p107-129.

SIDIROPOULOS, V., WOOD, P.E., VLACHOPOULOS, J., (1998). The Aerodynamics of Cooling of Blown Film Bubbles. Antec 98. p108-112.

SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS, J., (2000a). An investigation of Venturi and Coanda effects in blown film cooling, Intern. Polym. Process., vol. 15, n°1, p40-45

SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS, J., (2000b). The effects of dual-orifice air-ring design on blown film cooling, Polym. Eng. Sci., vol. 40, n°7, p1611-1618.

SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS, J., (2001). Numerical study of internal bubble cooling (IBC) in film blowing, Intern. Polym. Process., vol. 16, n°1, p48-53.

STASIEK, J., (2000). Review of a Mathematical Treatment of the Heat Transfer in Multi-layer Film Blowing. Progress in Rubber and Plastics Technology. Vol. 16, 3, p183-192.

SUKHADIA, A.M., (1994). The Use of Bubble Kinematics in the Scale Up and Processing Property Analysis of the Blown Film Process. Antec 94. p202-210.

SUKHADIA, A. M., (1998). The effects of Molecular Structure, Rheology, Morphology and Orientation on Polyethylene Blown Film Properties. Antec 98. p161-168.

SWEENEY, P.A., CAMPBELL, G.A., FEENEY, F.A., (1992). Real Time Video Techniques in the Analysis of Blown Film Instability. International Polymer Processing. Vol 7, 3, p229-239.

YEOW, Y.L., (1975). Stability of Tubular Film Flow a Model of the Film Flow Process. J. Fluid Mech. Vol 75, part 3, p577-591.

YOON, K.S., PARK, C.W., (1991). A Study on Two-Layer Blown Film Coextrusion. ANTEC 91. p2315-2317.

YOON, K.S., PARK, C.W., (1992). Analysis of Isothermal Two-Layer Blown Film Coextrusion. Polymer Engineering and Science Vol 32, 23, p1771-1777.

YOON, K.S., PARK, C.W., (2000). Stability of a Two-Layer Blown Film Coextrusion. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 89, p97-116.

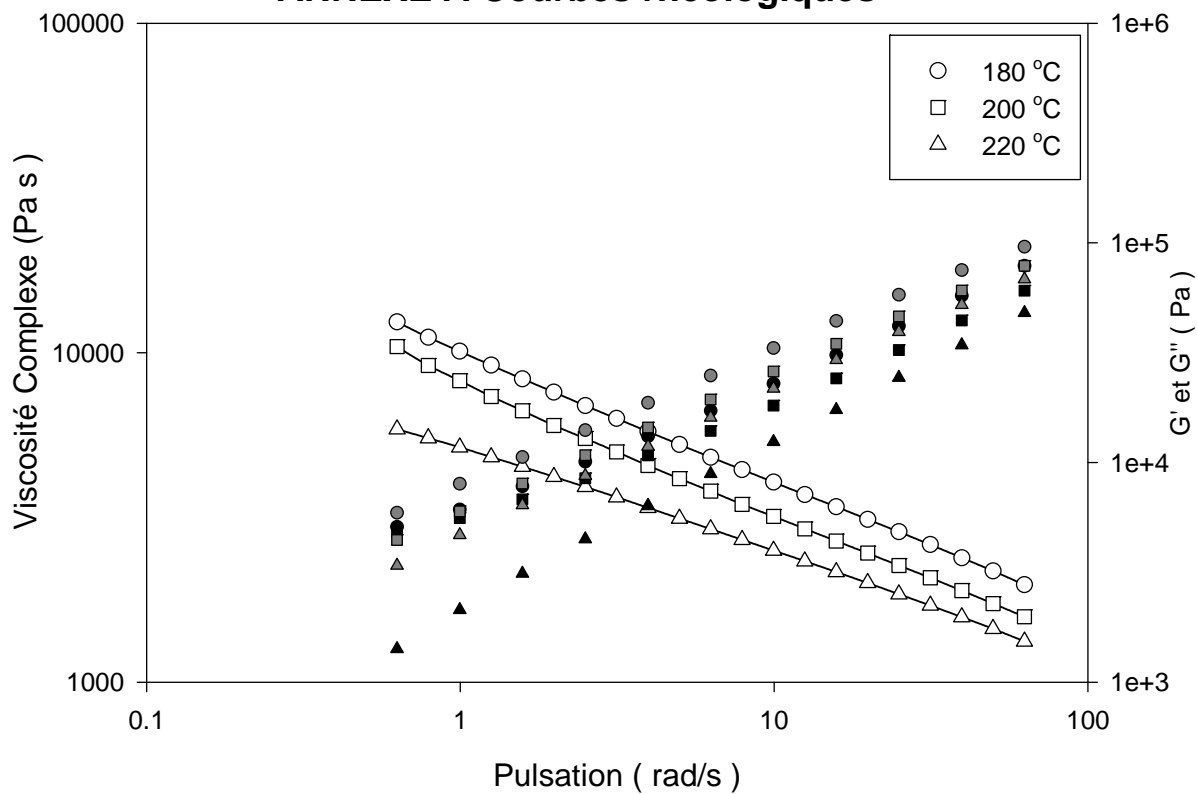
YU Ta-Hua, WILKES Garth L., (1996). Influence of Molecular Weight Distribution on the Melt Extrusion of High Density Polyethylene. Effects of Melt Relaxation Behavior on Morphology and Orientation in EIDPE Extruded Tubular Films. Journal of Rheology, Volume 40, 6, p1079-1093.

ZHANG, X., AJJI, A., VERILHAC, J.M., (2001). Processing-Structure-Properties Relationship of Multilayer Films. I Structure Characterization. Polymer. Vol 42, p8179-8195.

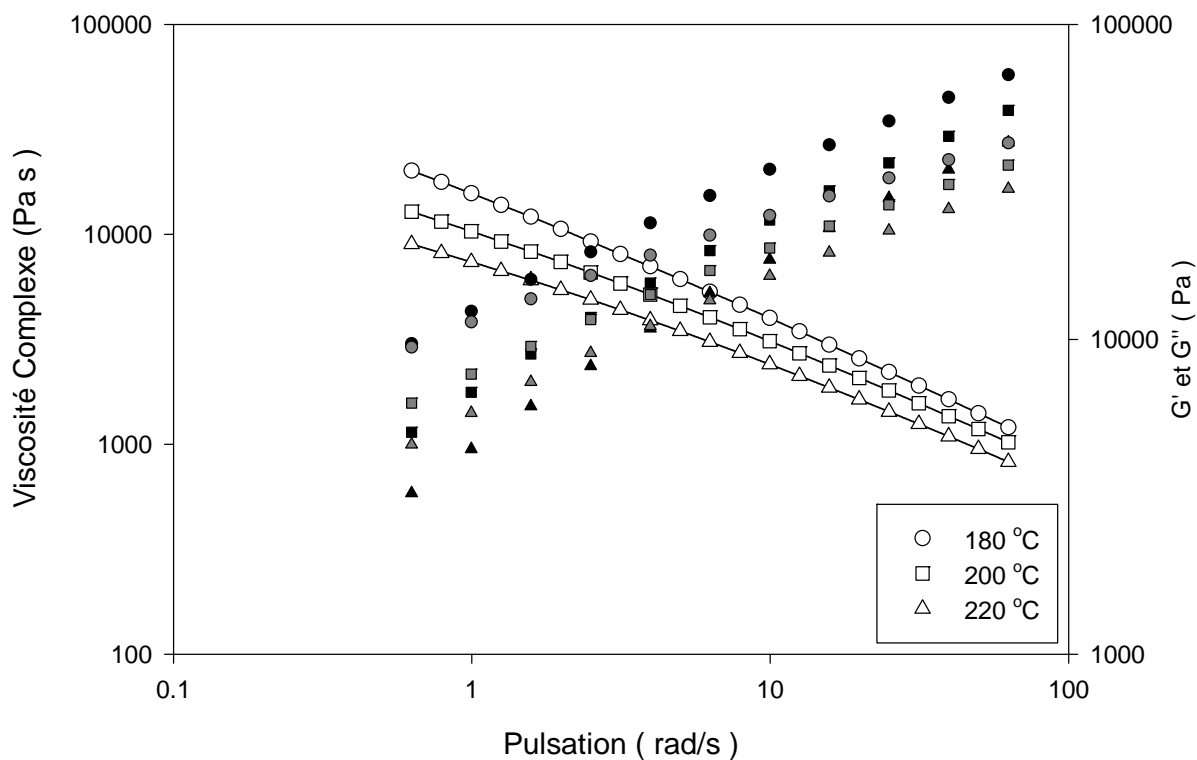
ZIPPFELD, T., (1971). Kunststoffe, 16 p147

**ANNEXES**

## ANNEXE A Courbes rhéologiques



A) mMDPE



A) LDPE-A

## ANNEXE B Développement des équations mécaniques

### Incompressibilité à l'ordre minimal ( $\varepsilon^0$ ).

En prenant la relation **3.35** qui est l'équation d'incompressibilité et en tenant compte uniquement des termes à l'ordre 0 on a :

- Pour le fluide A

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{V}_{r_a}^0(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{V}_{z_A}^0(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.1}$$

Les conditions frontières en vitesse sont:

$$\bar{v}_{r_a}^0(0, \bar{z}) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_a}^0(0, \bar{z}) = 0 \quad \text{Eq.2}$$

$$\bar{v}_{r_a}^0 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \bar{v}_{z_a}^0 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})}, \bar{z} \right) = 0 \quad \text{Eq.3}$$

Il est possible de déduire de ces relations que

$$\boxed{\bar{V}_{r_a}^0(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{V}_{z_A}^0(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.4}$$

- Pour la couche B on obtient le résultat suivant :

$$\boxed{\bar{V}_{r_b}^0(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{V}_{z_b}^0(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.5}$$

En dérivant les équations **Eq-4** et **Eq-5** par rapport à  $\bar{r}$  on obtient :

$$\frac{\partial \bar{v}_{r_a}^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}_{z_a}^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.6}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{r_b}^0(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}_{z_b}^0(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.7}$$

### Équilibre dynamique à l'ordre minimal ( $\varepsilon^{-1}$ )

Effectuons dans un premier temps l'analyse des équations sur la couche A. Les équations **3.36** à **3.39** permettant de décrire la loi de comportement pour le fluide A nous donnent à l'ordre -1 :

$$\bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) = \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{V}_{r_a}^0(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \quad \text{Eq.8}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) &= \bar{\eta}_a(\bar{z}) \\ \left( \frac{\partial \bar{V}^0_{z_a}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r \bar{H}(\bar{z})} - \frac{\partial \bar{V}^0_{r_a}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{1}{\bar{H}(\bar{z})} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq.9}$$

$$\bar{\sigma}^{-1}_{z_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = - \frac{\partial \bar{V}^0_{z_a}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial r} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \quad \text{Eq.10}$$

$$\bar{\sigma}^{-1}_{\phi\phi_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = 0 \quad \text{Eq.11}$$

Les conditions frontières en contraintes à la paroi interne (relation **3.46**) à cet ordre de grandeur nous donnent :

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rr_a}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.12}$$

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{z_a}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.13}$$

Les équations **3.40** et **3.41** représentant l'équilibre dynamique pour le fluide A nous donnent les relations suivantes lorsqu'elles sont évaluées à l'ordre -1 :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{\sigma}^{-1}_{rr_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{z_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.15}$$

L'intégration des équations **Eq.14** et **Eq.15** en combinaison avec les relations **Eq.12** et **Eq.13**, afin de déterminer les constantes d'intégration, nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rr_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.16}$$

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{z_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.17}$$

En substituant les relations **Eq.8**, **Eq.9** et **Eq.11** dans les deux relations précédentes on obtient :

$$\left[ \frac{\partial \bar{V}^0_{ra}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( 2 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) - \frac{\partial \bar{V}^0_{za}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = 0 \quad \text{Eq.18}$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{V}^0_{za}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( 1 + 2 \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) - \frac{\partial \bar{V}^0_{ra}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = 0 \quad \text{Eq.19}$$

Il est alors possible de remplacer l'équation **Eq.6** dans les deux relations précédentes on a alors :

$$\left[ \frac{\partial \bar{V}^0_{ra}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( 1 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad \text{Eq.20}$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{V}^0_{za}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \left( 1 + \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad \text{Eq.21}$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\frac{\partial \bar{V}^0_{ra}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{V}^0_{za}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{Eq.22}$$

Il nous est alors possible de faire le même raisonnement pour la couche B en utilisant les conditions frontières à la paroi externe afin de démontrer que :

$$\left( \bar{\sigma}^{-1}_{rr_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{rz_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.23}$$

$$\left( \bar{\sigma}^{-1}_{rz_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{\sigma}^{-1}_{zz_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.24}$$

$$\frac{\partial \bar{V}^0_{rb}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{V}^0_{zb}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{Eq.25}$$

Comme à l'interface entre les deux fluides nous avons continuité de la vitesse (pas de glissement), les résultats précédents nous permettent de déduire que :

$$\begin{aligned} \bar{V}^0_{ra}(\bar{r}_a, \bar{z}) &= \bar{V}^0_{ra}(\bar{z}) = \bar{V}^0_{rb}(\bar{r}_b, \bar{z}) = \bar{V}^0_{rb}(\bar{z}) = \bar{V}^0_r(\bar{z}) \\ \bar{V}^0_{za}(\bar{r}_a, \bar{z}) &= \bar{V}^0_{za}(\bar{z}) = \bar{V}^0_{zb}(\bar{r}_b, \bar{z}) = \bar{V}^0_{zb}(\bar{z}) = \bar{V}^0_z(\bar{z}) \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rr_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{rz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{\phi\phi_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{zz_a}(\bar{r}_a, \bar{z}) = 0$$

et

$$\bar{\sigma}^{-1}_{rr_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{rz_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{\phi\phi_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) = \bar{\sigma}^{-1}_{zz_b}(\bar{r}_b, \bar{z}) = 0$$



### Incompressibilité à l'ordre suivant ( $\epsilon^1$ )

Il nous est maintenant possible d'analyser l'équation d'incompressibilité (3.35) de la couche A à l'ordre supérieur (1) en utilisant les résultats obtenus précédemment.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{V}_{r_a}^1(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{V}_{z_A}^1(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = - \left[ \bar{H}(\bar{z}) \frac{\partial \bar{V}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \bar{V}_r^0(\bar{z}) \right] \quad \text{Eq.26}$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$\left( \bar{V}_{a_r}^1(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{V}_{a_z}^1(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{r} \left[ \bar{H}(\bar{z}) \frac{d\bar{V}_z^0(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \bar{V}_r^0(\bar{z}) \right] + C_1(\bar{z}) \quad \text{Eq.27}$$

De même on obtient pour la couche B :

$$\left( \bar{V}_{b_r}^1(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{V}_{z_b}^1(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{r} \left[ \bar{H}(\bar{z}) \frac{d\bar{V}_z^0(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \bar{V}_r^0(\bar{z}) \right] + C_2(\bar{z}) \quad \text{Eq.28}$$

L'équation frontière en vitesse à la paroi interne à l'ordre 1 (3.42) nous donne:

$$\bar{v}_{r_a}^1(0, \bar{z}) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{-1} \bar{v}_{z_a}^1(0, \bar{z}) = 0 \quad \text{Eq.29}$$

Ce qui nous permet en liaison avec l'équation **Eq.27** de déterminer que  $C_1(\bar{z}) = 0$

Évaluons maintenant l'équation **Eq.27** à  $\bar{r} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}$  en tenant compte du résultat précédent :

$$\left( \bar{V}_{r_a}^1 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{V}_{z_A}^1 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{V}_z^0(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{V}_r^0(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \quad \text{Eq.30}$$

L'équation frontière à cette position (3.43) à l'ordre 1 nous donne:

$$\bar{v}_{r_a}^1 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{-1} \bar{v}_{z_a}^1 \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) = \left( \bar{v}_{z_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.31}$$

Qu'il est possible de substituer dans l'équation **Eq.30** de façon à obtenir :

$$\left( \bar{v}_{z_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{V}_z^0(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{V}_r^0(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \quad \text{Eq.32}$$

Laissons cette relation de coté pour le moment et passons à l'analyse de la couche B. En évaluant les conditions frontières en vitesse pour le fluide B à l'interface entre les deux fluides (3.44) et à la paroi externe (3.45) à l'ordre 1 on a :

$$\bar{v}_{r_b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{-1} \bar{v}_{z_b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) = \left( \bar{v}_{z(z)}^{-0} \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.33}$$

$$\bar{v}_{r_b}^{-1} (1, \bar{z}) - \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{-1} \bar{v}_{z_b}^{-1} (1, \bar{z}) = \left( \bar{v}_{z(z)}^{-0} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.34}$$

Évaluons maintenant l'équation **Eq.28** à  $\bar{r} = \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}$  et à  $\bar{r} = 1$  on obtient respectivement :

$$\left( \bar{V}_{r_b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{V}_{z_b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{V}_{z(z)}^{-0}}{d\bar{z}} + \frac{\bar{V}_{r(z)}^{-0}}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + C_2(\bar{z}) \quad \text{Eq.35}$$

$$\left( \bar{V}_{r_b}^{-1} (1, \bar{z}) - \bar{V}_{z_b}^{-1} (1, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\left[ \bar{H}(\bar{z}) \frac{d\bar{V}_{z(z)}^{-0}}{d\bar{z}} + \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \bar{V}_{r(z)}^{-0} \right] + C_2(\bar{z}) \quad \text{Eq.36}$$

En combinant l'équation **Eq.36** à l'équation **Eq.32** en tenant compte de la continuité de la vitesse à l'interface on obtient  $C_2(\bar{z}) = 0$ . En utilisant ce résultat il est possible d'incorporer l'équation **Eq.34** dans l'équation précédente de façon à obtenir :

$$\left( \bar{v}_{z(z)}^{-0} \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\left[ \bar{H}(\bar{z}) \frac{d\bar{V}_{z(z)}^{-0}}{d\bar{z}} + \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \bar{V}_{r(z)}^{-0} \right] \quad \text{Eq.37}$$

Il est alors possible de remplacer le terme de vitesse radiale en insérant l'équation **Eq.4** ou **Eq.5** en tenant compte des relations **Eq.22** ou **Eq.25** dans la relation précédente. Il suffit alors de multiplier l'équation obtenue par  $\bar{R}(\bar{z})$  afin d'obtenir la relation suivante :

$$\boxed{\frac{d}{d\bar{z}} \left( \bar{H}(\bar{z}) \bar{V}_{z(z)}^{-0} \bar{R}(\bar{z}) \right) = 0} \quad \text{Eq.38}$$

Il est possible de réaliser une opération similaire sur l'équation **Eq.35** combinée à l'équation **Eq.33** de façon à obtenir :

$$\boxed{\frac{d}{d\bar{z}} \left( \bar{H}_a(\bar{z}) \bar{V}_{z(z)}^{-0} \bar{R}(\bar{z}) \right) = 0} \quad \text{Eq.39}$$

Ces deux relations représentent la conservation du débit volumique total et la conservation du débit volumique du fluide A. Il est possible de déduire la conservation du débit du fluide B en soustrayant la relation **Eq.39** de la relation **Eq.38** on a alors :

$$\boxed{\frac{d}{d\bar{z}} \left( \left[ \bar{H}(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z}) \right] \bar{V}_{z(z)}^{-0} \bar{R}(\bar{z}) \right) = 0} \quad \text{Eq.40}$$

## Équilibre dynamique à l'ordre 0

Prenons maintenant les équations d'équilibre dynamique (3.27 et 3.28) à l'ordre 0 pour le fluide A

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r r_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.41}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.42}$$

Dérivons maintenant les équations 3.36, 3.37, 3.38 et 3.39 à l'ordre 0,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r r_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} + \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \quad \text{Eq.43}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.44}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\phi \phi_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} + \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})\bar{V}_{r a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \quad \text{Eq.45}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} - \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \quad \text{Eq.46}$$

En insérant les équations Eq.43, Eq.44 et Eq.47 dans les équations Eq.41 et Eq.42 on obtient les deux relations suivantes :

$$-\frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} + \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.47}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) + \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \\ & + \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq.48}$$

En multipliant l'équation Eq.47 par  $\frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}$  et en additionnant l'équation Eq.48 obtient après avoir divisé par  $\frac{\bar{\eta}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}$  la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{z a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = -\frac{\partial^2 \bar{V}_{r a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.49}$$

Il est possible d'appliquer les mêmes opérations sur la couche B de façon à obtenir :

$$-\frac{\partial^2 \bar{V}_{zb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = +\frac{\partial^2 \bar{V}_{rb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.50}$$

En dérivant par rapport à  $\bar{r}$  l'équation d'incompressibilité à l'ordre 1 (**Eq.26**) pour la couche A obtenue précédemment on trouve :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{ra}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_{za}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.51}$$

Cette équation est compatible avec l'équation **Eq.48** si et seulement si :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{ra}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{V}_{za}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.52}$$

De même en dérivant par rapport à  $\bar{r}$  l'équation d'incompressibilité à l'ordre 1 (**Eq.28**) pour la couche B obtenue précédemment on trouve :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{rb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_{zb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.53}$$

Cette équation est compatible avec l'équation **Eq.50** si et seulement si :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{rb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{V}_{zb}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}^2} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.54}$$

Ce qui nous permet d'écrire grâce à la continuité de la vitesse à l'interface entre les deux fluides :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{ra}^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} &= \frac{\partial \bar{V}_{rb}^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial \bar{V}_{za}^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} &= \frac{\partial \bar{V}_{zb}^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(\bar{z})}{\partial \bar{r}} \end{aligned} \quad \text{Eq.55}$$

En utilisant l'équation **Eq.52** en combinaison avec les relations **Eq.43** à **Eq.46** il est possible de déterminer que :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{\phi\phi_a}^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{p}_a^{-0}(\bar{r}_a, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{Eq.56}$$

Il est possible d'appliquer le même raisonnement sur la couche B afin de trouver :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr_b}^{-0}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz_b}^{-0}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{\phi\phi_b}^{-0}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{p}_b^{-0}(\bar{r}_b, \bar{z})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{Eq.57}$$

En intégrant les équations **Eq.41** et **Eq.42** on obtient les relations suivantes pour la couche A

$$\bar{\sigma}_{rr_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = C3(\bar{z}) \quad \text{Eq.58}$$

$$\bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = C4(\bar{z}) \quad \text{Eq.59}$$

En faisant la même opération pour la couche B on obtient :

$$\bar{\sigma}_{rr_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = C5(\bar{z}) \quad \text{Eq.60}$$

$$\bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_b}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = C6(\bar{z}) \quad \text{Eq.61}$$

Les conditions frontières en contraintes à l'ordre 0 pour les deux matériaux sont obtenues grâce aux équations **3.46** à **3.48**

$$\bar{\sigma}_{rr_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = -\Delta P^0 \quad \text{Eq.62}$$

$$\bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_a}^0(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = +\Delta P^0 \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.63}$$

$$\bar{\sigma}_{rr_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.64}$$

$$\bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_b}^0(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = 0 \quad \text{Eq.65}$$

$$\text{avec } \bar{\eta}_o = \frac{\eta_{o_b}}{\eta_{o_a}} \quad \text{Eq.66}$$

$$\bar{\sigma}_{rr_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{rr_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right]$$

$$\bar{\sigma}_{rz_a}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_a}^0(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{rz_b}^0(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{zz_b}^0(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right] \quad \text{Eq.67}$$

On trouve alors en combinant les relations **Eq.58**, **Eq.59**, **Eq.60** et **Eq.61** avec les relations précédentes on a :

$$C5(\bar{z}) = 0 = \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_z}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.68}$$

$$C6(\bar{z}) = 0 = \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \quad \text{Eq.69}$$

$$C3(\bar{z}) = -\Delta\bar{P}^0 = \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_z}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right] = 0 \quad \text{Eq.70}$$

$$C4(\bar{z}) = \Delta\bar{P}^0 \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) \right] = 0 \quad \text{Eq.71}$$

Donc  $\Delta\bar{P}$  est composé essentiellement de  $\Delta\bar{P}^1$   
Finalement

$$\boxed{\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.72}$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.73}$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.74}$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0} \quad \text{Eq.75}$$

En combinant ces relations on obtient :

$$\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) = \bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) = \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \quad \text{Eq.76}$$

En substituant ces relations dans la loi de comportement à l'ordre 0 (3.36) pour les deux fluides

$$\bar{p}_a^{-0}(\bar{z}) = \frac{2\bar{\eta}_a(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}}{\partial r}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \quad \text{Eq.77}$$

$$\bar{p}_b^{-0}(\bar{z}) = \frac{2\bar{\eta}_b(\bar{z})}{H(\bar{z})} \frac{\partial \bar{V}_r^{-1}}{\partial r}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \left( \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^2 \quad \text{Eq.78}$$

De même en isolant le terme dérivatif de la vitesse axiale dans l'équation de la loi de comportement (3.39) à l'ordre 0 pour les deux fluides on trouve :

$$\frac{\bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z})}{2\bar{\eta}_a(\bar{z})} + \frac{\bar{p}_a^{-0}(\bar{z})}{2\bar{\eta}_a(\bar{z})} + \frac{1}{H(\bar{z})} \left[ \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}}{\partial r}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] = \frac{d\bar{V}_z^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.79}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z})}{2\eta_b(\bar{z})} + \frac{\bar{p}_b^{-0}(\bar{z})}{2\eta_b(\bar{z})} + \frac{1}{H(\bar{z})} \left[ \frac{\partial \bar{V}_z^{-1}(\bar{z})}{\partial r} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right] = \frac{d\bar{V}_z^{-0}(\bar{z})}{dz} \quad \text{Eq.80}$$

Il est alors possible d'égaliser les deux relations précédentes de façon à obtenir :

$$\bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z}) + \bar{p}_b^{-0}(\bar{z}) = \frac{\bar{\eta}_b(\bar{z})}{\bar{\eta}_a(\bar{z})} \left( \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z}) + \bar{p}_a^{-0}(\bar{z}) \right) \quad \text{Eq.81}$$

Il nous est alors possible de substituer les relations **Eq.77** et **Eq.78** dans la relation suivante de façon à obtenir :

$$\boxed{\bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z}) = \frac{\bar{\eta}_b(\bar{z})}{\bar{\eta}_a(\bar{z})} \left( \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z}) \right)} \quad \text{Eq.82}$$

Qu'il est possible de dériver pour obtenir :

$$\boxed{\bar{\eta}_a(\bar{z}) \frac{d\bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{d\bar{\eta}_a(\bar{z})}{dz} \bar{\sigma}_{zz_b}^{-0}(\bar{z}) = \bar{\eta}_b(\bar{z}) \frac{d\bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{d\bar{\eta}_b(\bar{z})}{dz} \bar{\sigma}_{zz_a}^{-0}(\bar{z})} \quad \text{Eq.83}$$

### 3.8.5 Équilibre dynamique à l'ordre 1

Prenons maintenant l'intégrale des équations d'équilibre dynamique à l'ordre 1 (**3.40**, **3.41**)

$$\left( \bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\left( \bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi_a}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C7}(\bar{z}) \quad \text{Eq.84}$$

$$\left( \bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z_a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C8}(\bar{z}) \quad \text{Eq.85}$$

$$\left( \bar{\sigma}_{r_b}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_b}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z})}{\partial z} + \frac{\left( \bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi_b}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C9}(\bar{z}) \quad \text{Eq.86}$$

$$\left( \bar{\sigma}_{r_b}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z_b}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z_b}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C10}(\bar{z}) \quad \text{Eq.87}$$

Les conditions frontières en contrainte à la surface interne à l'ordre 1 (**3.46**) sont

$$\bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r_a}^{-1}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} = -\Delta \bar{P} \quad \text{Eq.88}$$

$$\bar{\sigma}_{r z_a}^{-1}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_a}^{-1}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = +\Delta\bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.89}$$

En évaluant les équations **Eq.84** et **Eq.85** à  $\bar{r} = 0$  en combinaisons avec les relations **Eq.88** et **Eq.89** on a :

$$\bar{\sigma}_{r z_a}^{-1}(0, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_a}^{-1}(0, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = +\Delta\bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.90}$$

$$\bar{C7}(\bar{z}) = -\Delta\bar{P} \quad \text{Eq.91} \quad \text{et} \quad \bar{C8}(\bar{z}) = \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \Delta\bar{P} \quad \text{Eq.92}$$

On aura alors

$$\left( \bar{\sigma}_{r r_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r z_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r r_a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi_a}^{-0}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] - \Delta\bar{P} \quad \text{Eq.93}$$

Et

$$\left( \bar{\sigma}_{r z_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_a}^{-1}(\bar{r}_a, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \bar{r} \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z z_a}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_{r z_a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \Delta\bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.94}$$

Les conditions frontières en contrainte à la surface externe à l'ordre 1 (3.48) sont

$$\bar{\sigma}_{r r_b}^{-1}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r z_b}^{-1}(1, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.95}$$

$$\bar{\sigma}_{r z_b}^{-1}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_b}^{-1}(1, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{Eq.96}$$

À  $\bar{r} = 1$  les équations **Eq.86** et **Eq.87** deviennent:

$$\left( \bar{\sigma}_{r r_b}^{-1}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{r z_b}^{-1}(1, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{(\bar{\sigma}_{r r_b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi_b}^{-0}(\bar{z}))}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C9}(\bar{z}) \quad \text{Eq.97}$$

$$\left( \bar{\sigma}_{r z_b}^{-1}(1, \bar{z}) - \bar{\sigma}_{z z_b}^{-1}(1, \bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z z_b}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_{r z_b}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] + \bar{C10}(\bar{z}) \quad \text{Eq.98}$$

En remplaçant **Eq.95** et **Eq.96** dans les deux équations précédentes on a :



$$\overline{C9}(\bar{z}) = \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\left( \overline{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \overline{\sigma}_{\phi_b}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\overline{R}(\bar{z})} \right] \quad \text{Eq.99}$$

$$\overline{C10}(\bar{z}) = \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})} \right] \quad \text{Eq.100}$$

Les équations **Eq.86** et **Eq.87** deviennent alors

$$\left( \overline{\sigma}_{r_b}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) = \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{\partial \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\left( \overline{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \overline{\sigma}_{\phi_b}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\overline{R}(\bar{z})} \right] (1 - \bar{r}) \quad \text{Eq.101}$$

$$\left( \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) - \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-1}(\bar{r}_b, \bar{z}) \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) = \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{\partial \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})} \right] (1 - \bar{r}) \quad \text{Eq.102}$$

Il faut maintenant lier les équations **Eq.93**, **Eq.94**, **Eq.101** et **Eq.102** afin d'éliminer les termes à l'ordre 1. Pour ce faire évaluons ces équations à  $\bar{r} = \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}$  :

$$\left( \overline{\sigma}_{r_a}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\overline{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\left( \overline{\sigma}_{r_a}^{-0}(\bar{z}) - \overline{\sigma}_{\phi_a}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\overline{R}(\bar{z})} \right] - \Delta \bar{P} \quad \text{Eq.103}$$

$$\left( \overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{z_{z_a}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = -\overline{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{z_{z_a}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-0}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})} \right] + \Delta \bar{P} \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.104}$$

$$\left( \overline{\sigma}_{r_b}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\left( \overline{\sigma}_{r_b}^{-0}(\bar{z}) - \overline{\sigma}_{\phi_b}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\overline{R}(\bar{z})} \right] \left( 1 - \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})} \right) \quad \text{Eq.105}$$

$$\left( \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = \overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\overline{\sigma}_{z_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{\overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})} \right] \left( 1 - \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})} \right) \quad \text{Eq.106}$$

A cette position et ordre de grandeur les conditions frontières en contraintes **(3.47)** sont :

$$\begin{aligned} & \overline{\sigma}_{r_a}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \overline{\sigma}_{r_{z_a}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} = \\ & \overline{\eta}_o \left[ \overline{\sigma}_{r_b}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-1} \left( \frac{\overline{H}_a(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \overline{\sigma}_{r_{z_b}}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\overline{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.107}$$

Et

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{r_z a}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{z z a}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} - \bar{\sigma}_{z z a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} = \\ & \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{z z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} - \bar{\sigma}_{z z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.108}$$

En combinant **Eq.103** et **Eq.107** on obtient

$$\begin{aligned} & -\bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\left( \bar{\sigma}_{r_r a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\bar{R}(\bar{z})} \right] - \Delta\bar{P} \\ & = \bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} + \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{r_z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} - \bar{\sigma}_{r_z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{dz} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.109}$$

En remplaçant les termes du premier ordre de l'équation **Eq.109** par l'équation **Eq.105** on a :

$$\begin{aligned} & -\Delta\bar{P} = \bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} + \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{dz} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_z b}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\left( \bar{\sigma}_{r_r b}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right) - \bar{\sigma}_{r_z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} \right] \\ & + \bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\left( \bar{\sigma}_{r_r a}^{-0}(\bar{z}) - \bar{\sigma}_{\phi\phi}^{-0}(\bar{z}) \right)}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.110}$$

De même en combinant **Eq.104** et **Eq.108** on obtient

$$\begin{aligned} & -\bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z z a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z}, t)} \right] + \Delta\bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} = \\ & \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{r_z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) - \bar{\sigma}_{z z b}^{-1} \left( \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})}, \bar{z} \right) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} + \bar{\sigma}_{z z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} \right] + \bar{\sigma}_{z z a}^{-0}(\bar{z}, t) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} \end{aligned} \quad \text{Eq.111}$$

En remplaçant les termes du premier ordre de l'équation **Eq.111** par l'équation **Eq.106** on a :

$$\begin{aligned} & \Delta\bar{P} \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{dz} = \bar{\sigma}_{z z a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} + \bar{\eta}_o \left[ \bar{\sigma}_{z z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{dz} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z z b}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r_z b}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right) - \bar{\sigma}_{z z b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{dz} \right] \\ & + \bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{z z a}^{-0}(\bar{z})}{dz} + \frac{\bar{\sigma}_{r_z a}^{-0}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.112}$$

En multipliant cette relation par  $\bar{R}(\bar{z})$  et en substituant les termes de contraintes de cisaillement par leur équivalent donné par les relation **Eq.73** et **Eq.75** on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{P} \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = & \sigma_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}_a(\bar{z}) \left[ \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\sigma_{z_a}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \sigma_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \\ + \eta_o \left[ & \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \bar{H}(\bar{z}) \left[ \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z})}{d\bar{z}} + \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \left( 1 - \frac{\bar{H}_a(\bar{z})}{\bar{H}(\bar{z})} \right) - \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\bar{H}_a(\bar{z})}{d\bar{z}} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.113}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\Delta \bar{P} \bar{R}(\bar{z}) \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{d\left(\bar{H}_a(\bar{z}) \sigma_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z})\right)}{d\bar{z}} + \frac{d\left(\eta_o \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \bar{H}(\bar{z})\right)}{d\bar{z}} - \frac{d\left(\eta_o \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \bar{H}_a(\bar{z})\right)}{d\bar{z}} \quad \text{Eq.114}$$

Qu'il est possible d'intégrer z et L/Ro de façon à obtenir :

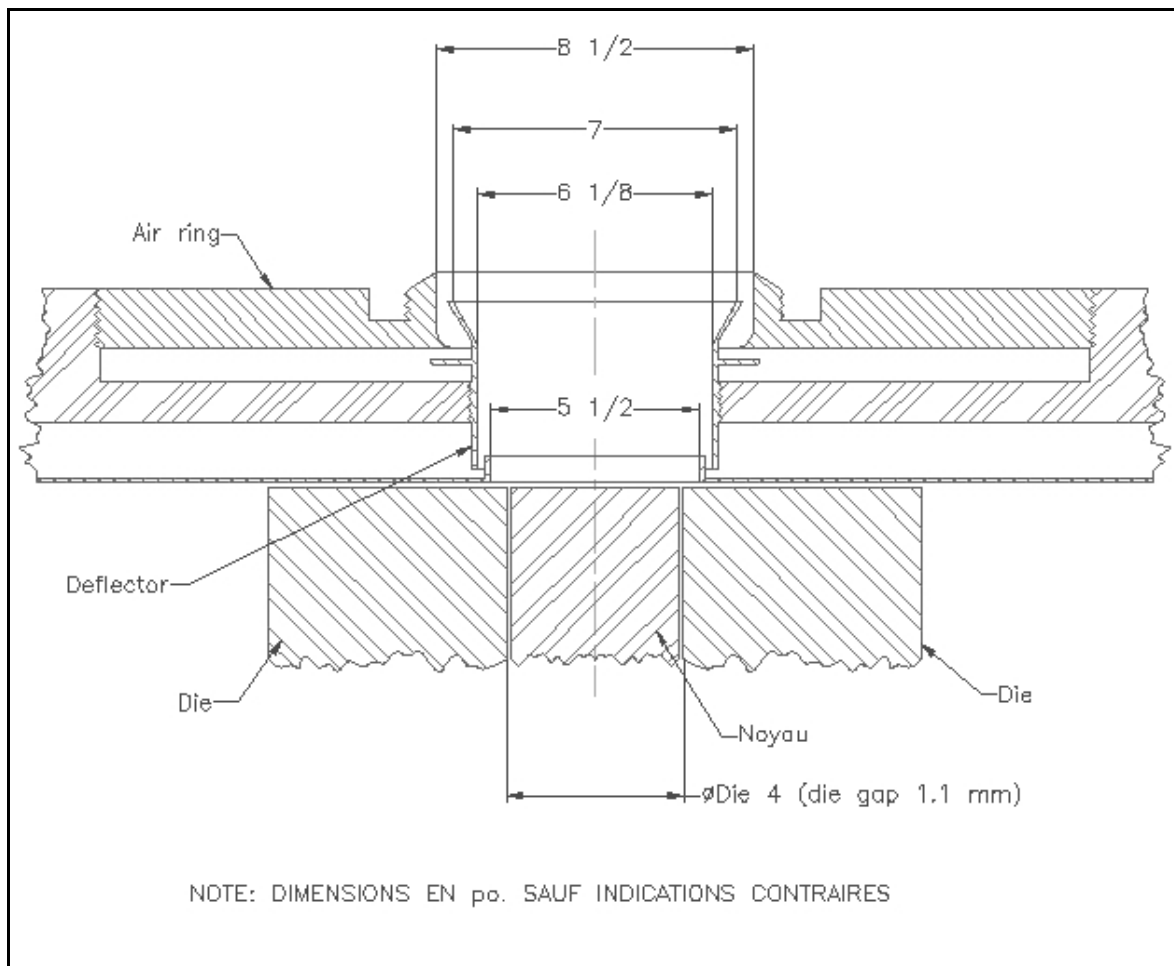
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{P}}{2} \left( \bar{R}^2 \left( \frac{L}{R_o} \right) - \bar{R}^2(\bar{z}) \right) + \bar{H}_a(\bar{z}) \sigma_{z_a}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) + \eta_o \sigma_{z_b}^{-0}(\bar{z}) \bar{R}(\bar{z}) \left( \bar{H}(\bar{z}) - \bar{H}_a(\bar{z}) \right) = \bar{F}_{tirage} = \\ \bar{H}_a \left( \frac{L}{R_o} \right) \sigma_{z_a}^{-0} \left( \frac{L}{R_o} \right) \bar{R} \left( \frac{L}{R_o} \right) + \eta_o \sigma_{z_b}^{-0} \left( \frac{L}{R_o} \right) \bar{R} \left( \frac{L}{R_o} \right) \left( \bar{H} \left( \frac{L}{R_o} \right) - \bar{H}_a \left( \frac{L}{R_o} \right) \right) \end{aligned}} \quad \text{Eq.115}$$

Notre système d'équations est maintenant complet.

## ANNEXE C Anneaux de refroidissement



Anneau de refroidissement utilisé avec la filière de petite taille.  
Diamètre interne de l'anneau de refroidissement = 125 mm  
Profondeur = 40 mm



Anneau de refroidissement utilisé avec la filière semi industrielle