



**HAL**  
open science

# Classification de la surface de Mars par imagerie hyperspectrale OMEGA. Suivi spatio-temporel et étude des dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>O.

Schmidt Frédéric

## ► To cite this version:

Schmidt Frédéric. Classification de la surface de Mars par imagerie hyperspectrale OMEGA. Suivi spatio-temporel et étude des dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>O.. Astrophysique [astro-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00192298v2

**HAL Id: tel-00192298**

**<https://theses.hal.science/tel-00192298v2>**

Submitted on 7 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**  
pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**  
École Doctorale Terre-Univers-Environnement  
spécialité : Planétologie  
préparée au **LABORATOIRE DE PLANÉTOLOGIE DE GRENOBLE**

par

Frédéric Schmidt

---

**CLASSIFICATION DE LA SURFACE DE MARS PAR  
IMAGERIE HYPERSPECTRALE OMEGA.  
SUIVI SPATIO-TEMPOREL ET ÉTUDE DES DÉPÔTS  
SAISONNIERS DE CO<sub>2</sub> ET H<sub>2</sub>O.**

---

présentée et soutenue publiquement

le 25 octobre 2007

devant le jury composé de :

M. Michel Fily	Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement - Grenoble	Président du jury
M. Christophe Collet	Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection - Strasbourg	Rapporteur
M. François Forget	Laboratoire de Météorologie Dynamique - Paris	Rapporteur
M. Olivier Forni	Centre d'Etude Spatiale des Rayonnements - Toulouse	Examineur
M. Nicolas Thomas	Planetary Image Group - Berne	Examineur
M. Bernard Schmitt	Laboratoire de Planétologie de Grenoble	Directeur de thèse
M. Sylvain Douté	Laboratoire de Planétologie de Grenoble	Co-directeur de thèse



Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Planétologie de Grenoble (UMR 5109)



#### ADRESSE POSTALE

Laboratoire de Planétologie de Grenoble  
BP 53  
38041 Grenoble Cedex 9 France

#### COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

3<sup>ème</sup> étage du bâtiment D de Physique  
122 rue de la piscine  
Domaine Universitaire Saint Martin d'Hères France

#### SITE WEB

<http://lpg.obs.ujf-grenoble.fr/>

#### INFORMATION SUR LE PRÉSENT DOCUMENT

Ce tapuscrit a été produit sous Lyx et contient des liens internes.  
Il est disponible en ligne à l'adresse suivante : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00192298/fr/>





**RÉSUMÉ :** L'étude des surfaces planétaires a été profondément modifiée par la dernière génération d'instruments spatiaux : les spectro-imageurs. Ces détecteurs produisent de nombreuses images hyperspectrales, pour lesquelles chaque pixel est associé à un spectre. Ils permettent un suivi spatial et temporel des propriétés optiques des sols. Le premier objectif de cette thèse est de proposer des outils permettant de traiter la grande quantité d'images et de spectres afin d'aborder des problématiques planétologiques. Deux types d'analyse des images produites par l'instrument OMEGA (Mars Express/ESA) sont avancés : (i) WAVANGLET, une méthode rapide de détection des corps chimiques au sol, (ii) JADE+BPSS, une séparation de source en aveugle qui détecte des corps chimiques sans a priori.

Les régions polaires de Mars sont le siège d'un cycle climatique annuel d'échange de CO<sub>2</sub> entre atmosphère et surface. Pendant la nuit polaire, le CO<sub>2</sub> atmosphérique se condense au sol, tandis qu'il se sublime à nouveau, dès les premiers rayons du soleil. Ce cycle a été mis à jour depuis les années 60 mais aujourd'hui encore, la microphysique d'interaction surface/atmosphère demeure inconnue. Le second objectif de cette thèse est d'établir un modèle de sublimation des dépôts saisonniers. Le bilan de masse est simulé par un bilan radiatif sur une surface rugueuse. La confrontation de ce modèle avec différents jeux de données spatiales a permis de montrer que la sublimation de la calotte saisonnière sud de Mars est contrôlée majoritairement par son albédo. Des études ultérieures seront nécessaires pour saisir les mécanismes à l'origine des variabilités d'albédo (métamorphisme, contamination en poussière, ...).

**MOTS CLEFS :** Mars, pôle, glace de CO<sub>2</sub>, glace d'H<sub>2</sub>O, eau, télédétection, hyperspectral, spectroscopie, OMEGA, Mars Express, grande base de données, classification, détection, supervisée, non-supervisée, séparation de source en aveugle, climat, cycle saisonnier, dépôts saisonniers, récession de la calotte saisonnière sud, bilan de masse, ombre.

**SUMMARY :** Imaging spectrometer, the last generation of space instruments, strongly modify the study of planetary surfaces. Those detectors record manifold hyperspectral images (an image for which each pixel is associated with a spectrum). Such instrument allows us to follow the soil optical properties through space and time. The first objective of my thesis is to propose some tools to analyse a huge amount of images and spectra in planetological perspectives. Two types of methods are introduced to examine the data acquired by the OMEGA instrument (Mars Express/ESA) : (i) WAVANGLET, a fast detection algorithm to identify the presence of chemical species at the ground, (ii) JADE+BPSS, a blind source separation method that is able to detect chemical species without a priori.

The Martian annual cycle of CO<sub>2</sub> consist of an exchange between surface and atmosphere, which is particularly relevant in Polar Regions. During the polar night, atmospherical CO<sub>2</sub> condensate at the ground, whereas it starts to sublime again during the spring, when the solar light heat up the surface. This major climatic cycle has been revealed in the 1960th but even today, the microphysic of interaction between surface and atmosphere is still unknown. The second objective of this thesis is to build a model of the seasonal deposit sublimation. The mass balance is simulated by a radiative balance on a rough surface. The confrontation of this model with various dataset shows that the seasonal south polar cap sublimation is mainly controlled by its albedo. Further studies must determine the exact mechanisms in the origin of this albedo variability (metamorphism, dust contamination, ...).

**KEY WORD :** Mars, pole, CO<sub>2</sub> ice, H<sub>2</sub>O ice, water, remote sensing, hyperspectral, spectroscopy, OMEGA, Mars Express, mass data, classification, detection, supervised, unsupervised, blind source separation, climate, seasonal cycle, seasonal south polar cap recession, mass balance, shadowing function.

# *J*e souhaite remercier ...

⊙ Les membres du jury de cette thèse :

MICHEL FILY, CHRISTOPHE COLLET, FRANÇOIS FORGET, OLIVIER FORNI et NICOLAS THOMAS pour avoir accepté sans hésitation cette invitation, pour avoir lu cette thèse et pour avoir éclairé mon avenir.

⊙ Mon duo de directeurs grenoblois :

SYLVAIN DOUTÉ et BERNARD SCHMITT pour leur confiance dès le stage de Master 2, pour leur disponibilité et leur partage, aussi pour m'avoir permis de voyager afin d'assister à un nombre exceptionnel de congrès.

⊙ L'équipe de séparation de source :

CHRISTIAN JUTTEN pour ses discussions ressourçantes. HAFRÚN HAUKSDÓTTIR pour un an de travail laborieux. SAÏD MOUSSAOUI pour avoir partagé ses compétences. JOCELYN CHANUSSOT pour m'avoir invité à faire un séminaire !

⊙ L'équipe OMEGA :

JEAN-PIERRE BIBRING, YVES LANGEVIN et bien d'autres pour de nombreuses discussions autour de ce magnifique instrument.

⊙ Les membres du LPG :

ODILE DUTUIT pour son écoute. WLODEK KOFMAN pour ses remarques tonitruantes et toujours pertinentes. PIERRE VOLCKE pour son support informatique et bicyclique. MATHIEU BARTHÉLÉMY pour ses découvertes musicales et ses expériences de chanteur-percussionniste qui résonnent encore dans toutes les oreilles du laboratoire. JEAN LILENSTEN pour m'avoir fait confiance dans l'expertise de la traduction de l'"Atlas Univers". BÉATRICE PIBARET pour sa bonne humeur expansible. AKILA MOKTARI toujours prête à partager un gâteau au chocolat (miam, miam...). ERIC QUIRICO, grand apôtre du Mac. Un grand merci aussi à FRÉDÉRIC PITOU, ROLAND THISSEN, CHANTAL LATHUILLERE, ALAIN HÉRIQUE, OLIVIER BRISSAUD, PIERRE BECK et ALAIN ROUX.

⊙ Les relecteurs, graphiste et imprimeur de ma thèse :

SYLVAIN DOUTÉ qui, grâce à ses conseils avisés, m'a aidé à améliorer le contenu de cette thèse ! BERNARD SCHMITT qui n'a pas hésité à finir son stylo rose pour proposer ses corrections. AURÉLIE, qui m'a supporté, soutenu et surtout beaucoup aidé pendant toute la période éprouvante de rédaction. LYDIE BONAL, qui m'a donné son fond de thèse Lyx. J'avais juste à poser quelques graphes et un peu de texte. MES PARENTS, qui se sont occupés de la mise en forme et de l'impression.

⊙ Les personnes qui m'ont aiguillé dans le Vercors :

MES PARENTS et MON FRÈRE qui m'ont charpenté. MES GRANDS-PARENTS, MA MARRAINE et MA FAMILLE qui ont tourné mes yeux vers le ciel grâce aux nombreux livres d'images, d'émissions télévisées et d'ouvrages de vulgarisation. M. JULLIEN, mon professeur de Mathématique de la 6<sup>me</sup> à la 3<sup>me</sup> qui m'a enseigné les bases et m'a initié à la beauté formelle. Bien d'autres guides encore que je ne peux citer...

⊙ Les stagiaires/doctorants/post-doctorants de passage au LPG :

ANTOINE POMMEROL, mon compagnon de congrès et le vilain petit canard des "Thésards Méchants", JÉRÉMIE MOUGINOT mon *compapagnon* de congrès alias "Mr. IDL". CYRIL SIMON pour ses grosses chaussures, ses photos et ses crêpes glacées. LYDIE BONAL grande prêtresse du CAF. DONIA BAKLOUTI pour m'avoir laissé les clefs de son bureau dans l'"Aile des Chefs". ROGER OLIVA le conducteur de BMW de l'East-Coast espagnol. NOURREDINE ABOUTABIT intraitable sur le signal. MATTHIEU LONJARET mon prêtre convertisseur à LINUX. FREDERICK HEURIEPEAU le batteur spécialiste en cochon et en course de radar-youpala dans le couloir. CYRIL GRIMA alias "Mr. Moustache 2007". D'autres encore qui génèrent cette chaude ambiance du Laboratoire : PHILIPPO BUCCI, GUILLAUME GRONOFF, SYHEM PERRIOT, FRANCOIS-REGIS ORTHOUS-DAUNAY, CHRISTELLE EYRAUD, NICOLAS FRAY,...

⊙ Les étudiants que j'ai rencontrés à Grenoble et ailleurs :

L'association LAITUE pour m'avoir obligé de porter la moustache. HÉLÈNE CASTEBRUNET, pour ses soirées "Palette à la Diable". NICOLAS JOURDAIN pour ses discussions tango/rhum sur la glace antarctique. JONATHAN AUMONT, pour ses chemises d'une blancheur lisse dès portons-minets. SÉBASTIEN HOK pour tous les coups trinqués au 70s cours Berriat. LAURENT STEHLY pour sa bonhomie communicative. LOUIS DE BARROS pour ses rhums dérangés. JEAN MEYER qui a fait exploser la cafetière le matin de ma soutenance de Master 2 ce qui m'a permis de changer de chemise et de décrocher la bourse ministérielle ! JULES GRUCKER qui a animé le service "Allô thèse en galère". Bien d'autres encore qui se reconnaîtront : la KIEN'S BAND, la PROMO LYONNAISE et les GRENOBLOIS CHANTANT, les GRENOBLOIS FOOTANT,....

⊙ Vous, étudiants francophones, lecteurs de remerciements :

Parce que cette thèse est écrite pour VOUS, je vous remercie de la lire (même une toute petite partie !), de la commenter, de la critiquer, de la dépasser... J'espère aussi que vous pourriez expérimenter le bonheur d'enseigner. Aussi celui de suggérer devant une assemblée d'élèves : "Quel beau métier professeur !". Sachez enfin qu'il existe un scoop concernant la vie martienne dans cette thèse. Cette information est publiée, il paraîtrait même que les martiens ont montrés leurs bizarres phalanges aux russes. Maintenant que vous savez tout, bonne lecture !



# Table des matières

<b>Adresse du LPG</b>	<b>1</b>
<b>Résumé / Summary</b>	<b>3</b>
<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Traitement du signal en télédétection</b>	<b>15</b>
<b>1 Introduction sur l'imagerie hyperspectrale de télédétection spatiale et l'analyse des données</b>	<b>17</b>
1.1 Télédétection . . . . .	18
1.2 Images hyperspectrales et acquisition . . . . .	18
1.2.1 Images hyperspectrales . . . . .	18
1.2.2 Spectro-imageurs . . . . .	19
1.2.2.1 OMEGA . . . . .	20
1.2.2.2 Base de données OMEGA du LPG . . . . .	21
1.3 Transfert radiatif . . . . .	21
1.3.1 Spectres en réflectance d'une planète . . . . .	22
1.3.2 Extinction particulière . . . . .	24
1.3.2.1 Absorption . . . . .	24
1.3.2.2 Diffusion . . . . .	25
1.3.3 Équation du transfert radiatif (ETR) . . . . .	26
1.3.4 Modélisations de la réflectance des surfaces planétaires . . . . .	28
1.3.4.1 Modèles empiriques . . . . .	28
1.3.4.2 Modèles analytiques physiques . . . . .	29
1.3.4.3 Modèles numériques . . . . .	30
1.3.5 Modélisation du couplage surface-atmosphère . . . . .	30
1.4 Schéma général d'analyse des images hyperspectrales . . . . .	31
1.4.1 Analyse de premier ordre : réduction de dimensionnalité, classification, séparation de sources . . . . .	31
1.4.1.1 Informations planétologiques : assemblage, mélange et représentation de terrain . . . . .	31
1.4.1.2 Qu'est ce qu'une classe ? . . . . .	33
1.4.1.3 Qu'est-ce qu'une source ? . . . . .	33
1.4.2 Analyse physique complète : inversion des modèles de transfert radiatif . . . . .	34

<b>2</b>	<b>Réduction des dimensions spectrales</b>	<b>37</b>
2.1	Réduction manuelle : choix des “lignes spectrales” et rapport de bande . . . . .	39
2.2	Base de référence . . . . .	41
2.2.1	Origine des spectres de références . . . . .	41
2.2.1.1	Spectres issus de mesures de références . . . . .	41
2.2.1.2	Spectres synthétiques . . . . .	42
2.2.1.3	Observations de référence déjà classifiées . . . . .	42
2.2.1.4	Spectre de référence issus de l’observation à classer . . . . .	42
2.2.2	Formalisme des <i>distributions spectrales de référence</i> . . . . .	43
2.3	Réduction automatique supervisée . . . . .	43
2.3.1	Sélection de canaux . . . . .	44
2.3.2	Méthode de Fisher : AFD . . . . .	44
2.3.3	Méthodes utilisant la transformée en ondelette . . . . .	45
2.3.4	Méthodes à noyau . . . . .	46
2.3.5	Assemblage de méthodes successives . . . . .	46
2.4	Réduction automatique non-supervisée . . . . .	47
2.4.1	Élimination du continuum . . . . .	47
2.4.2	ACP : Analyse en composante principale . . . . .	47
2.4.3	MNF : Minimum Noise Fraction . . . . .	51
2.4.4	ACI : Analyse en composante indépendante . . . . .	52
2.4.5	PP : “Projection poursuit” . . . . .	52
2.4.6	Transformée en ondelette . . . . .	52
2.4.7	Méthodes non-linéaires . . . . .	53
2.5	Bilan et perspectives . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Classification d’images hyperspectrales de télédétection</b>	<b>59</b>
3.1	Classifications manuelles . . . . .	61
3.1.1	Classification manuelle spectrale : “scatterplot” . . . . .	61
3.1.2	Classification manuelle spatiale : image . . . . .	63
3.1.3	Classification manuelle spectro-spatiale : “scatterplot” et image . . . . .	64
3.2	Classifications spectrales automatiques . . . . .	64
3.2.1	Base de référence . . . . .	64
3.2.2	Classification supervisée qui nécessite une base spectrale de référence . . . . .	65
3.2.2.1	Classification à seuil dans l’espace réduit . . . . .	65
3.2.2.2	Distance . . . . .	66
3.2.2.3	Angle ou corrélation . . . . .	66
3.2.2.4	SFF <sup>TM</sup> : Spectral Feature Fitting . . . . .	67
3.2.2.5	Utilisation conjointe de plusieurs classifieurs . . . . .	67
3.2.3	Classification supervisée qui nécessite une base de distribution spectrale de référence . . . . .	67
3.2.3.1	Méthode statistique paramétrique . . . . .	67
3.2.3.2	Méthode statistique non-paramétrique . . . . .	68
3.2.3.3	Support Vector Machine : SVM . . . . .	68
3.2.3.4	Réseau de neurones . . . . .	69
3.2.4	Classification spectrale non-supervisée . . . . .	69
3.2.4.1	Classification hiérarchique - Arborescence . . . . .	69
3.2.4.2	Mélange de processus gaussiens : K-mean et améliorations . . . . .	69
3.2.4.3	Mélange de processus laplacien : K-median . . . . .	70
3.3	Classification spatiale automatique . . . . .	71
3.4	Classification spectro-spatiale automatique . . . . .	71
3.4.1	Méthodes supervisées . . . . .	71
3.4.2	Méthodes non-supervisées : la segmentation . . . . .	71

3.5	Bilan et perspectives	72
<b>4</b>	<b>“Wavanglet” : une méthode de détection automatique supervisée</b>	<b>77</b>
4.1	Présentation de la méthode “Wavanglet”	78
4.1.1	Bases spectrales de référence	78
4.1.1.1	Détection de glace d’eau et de CO <sub>2</sub> au sol de Mars	78
4.1.1.2	Détection de gypse et de glace d’eau au sol dans la zone polaire nord de Mars	79
4.1.2	Réduction de dimensionnalité spectrale	79
4.1.3	Optimisation des seuils de détections	82
4.1.4	Classification de la base de données	82
4.2	Tests synthétiques : validation de Wavanglet, comparaison avec des méthodes usuelles de classification	82
4.2.1	Caractéristiques physiques	83
4.2.1.1	Caractéristiques au sol	83
4.2.1.2	Caractéristiques de l’atmosphère	84
4.2.1.3	Simulation du bruit instrumental	84
4.2.2	Test des méthodes de classification	84
4.2.3	Résultats des tests	85
4.3	Détection de gypse dans les plaines polaire du Nord	87
4.4	Bilan et perspectives	89
<b>5</b>	<b>Séparation de source appliquée aux images hyperspectrales de télédétection</b>	<b>91</b>
5.1	Mélange linéaire : quelles hypothèses ?	92
5.2	Séparation de source supervisée	93
5.2.1	Profondeur de bande	93
5.2.2	Mélange linéaire	95
5.2.3	Mélange non-linéaire	96
5.3	Séparation de source en aveugle	97
5.3.1	Extraction d’endmember et mélange linéaire	97
5.3.2	Mélange linéaire et décorrélation	98
5.3.2.1	Décorrélation et mélange linéaire	98
5.3.2.2	Décorrélation spatiale ou spectrale	99
5.3.2.3	Indétermination d’ordre et de signe	100
5.3.2.4	Résultat sur des données réelles	100
5.3.3	Mélange linéaire et indépendance	102
5.3.3.1	Non-gaussianité, indépendance et information mutuelle	103
5.3.3.2	Indépendance spatiale, spectrale, spectro-spatiale	104
5.3.3.3	Indétermination d’ordre et d’échelle	104
5.3.3.4	Différentes méthodes d’ACI	105
5.3.3.5	Résultats sur des données réelles	106
5.3.4	Mélanges non-linéaires et indépendance	107
5.3.5	Mélange linéaire, positivité et indépendance spectrale	109
5.3.5.1	Inférence bayésienne, positivité et indépendance	109
5.3.5.2	Algorithme de résolution	110
5.4	Bilan et Perspectives	110
<b>6</b>	<b>Séparation de source en aveugle, en mélange positif, appliquée aux images hyperspectrales</b>	<b>115</b>
6.1	Méthode : JADE + BPSS	116
6.1.1	Sélection des spectres représentatifs	116
6.1.2	Méthode JADE+BPSS	117
6.2	Résultats sur des données réelles, comparaison avec d’autres classifications	117



6.2.1	Résultats	117
6.2.2	Dépendance du nombre de pixels dans la classe	118
6.3	Conclusion et perspectives	122

## **II Les calottes saisonnières martiennes** **123**

### **7 Le cycle saisonnier martien** **125**

7.1	Perspectives historiques du cycle saisonnier martien	126
7.2	Paradigme actuel	128
7.2.1	Bilan d'énergie radiative	129
7.2.1.1	Phase d'accumulation	130
7.2.1.2	Phase d'ablation	131
7.2.2	Observables	133
7.2.2.1	Progression et récession des dépôts saisonniers	133
7.2.2.2	Pression au sol	135
7.2.2.3	Points froids : zones à faible température de brillance	136
7.2.2.4	Masse totale	137
7.3	Incomplétudes : avancées et interrogations	138
7.3.1	Asymétrie de la calotte saisonnière sud	138
7.3.1.1	Asymétrie de la récession	139
7.3.1.2	La région cryptique	139
7.3.2	Dichotomie de la persistance estivale de glace de CO <sub>2</sub>	141
7.3.2.1	Pourquoi une calotte permanente de CO <sub>2</sub> au Sud ?	142
7.3.2.2	Gruyère suisse	143
7.3.2.3	Implications pour le climat passé	143
7.3.3	Dichotomie d'abondance en eau de la calotte saisonnière	145
7.3.3.1	Pourquoi une couronne saisonnière de glace d'eau au Nord ?	145
7.3.3.2	Liens entre cycle saisonnier de CO <sub>2</sub> et d'eau	146
7.3.3.3	Implications géologiques	146
7.4	Conclusion	147

### **8 Calotte saisonnière à haute résolution spatiale** **149**

8.1	Asymétrie de la récession de la calotte saisonnière sud à l'échelle régionale	150
8.1.1	Observations OMEGA	150
8.1.2	Asymétrie d'accumulation et/ou de sublimation à l'échelle régionale ?	156
8.1.3	Modèle de sublimation	156
8.1.3.1	Paramètres	157
8.1.3.2	Conduction d'énergie dans le sous-sol	158
8.1.4	Résultats	159
8.1.5	Conclusion	163
8.2	Récession de la calotte saisonnière sud à l'échelle locale	163
8.2.1	Observations OMEGA de la bordure de la calotte saisonnière	163
8.2.2	Variabilité d'accumulation et/ou de sublimation à l'échelle locale ?	164
8.2.3	Modèle de sublimation à l'échelle locale	165
8.2.3.1	Hypsométrie	165
8.2.3.2	Fonction d'ombre	167
8.2.3.3	Modélisation du bilan d'énergie radiative	167
8.2.4	Résultats	167
8.2.4.1	Indicateur statistique	168
8.2.4.2	Effet d'ombre à albédo homogène	169
8.2.4.3	Effet d'albédo	169

8.2.5	Conclusion	182
8.3	Conclusion et perspectives	183
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>185</b>
 <b>III Annexes</b>		 <b>189</b>
<b>9</b>	<b>Glossaire</b>	<b>191</b>
<b>10</b>	<b>Principales notations mathématiques</b>	<b>195</b>
<b>11</b>	<b>Sigles et acronymes</b>	<b>197</b>
<b>12</b>	<b>Rappels de Mathématiques</b>	<b>199</b>
12.1	Distance et norme	199
12.1.1	Axiomatique de la distance	199
12.1.1.1	Définition	199
12.1.1.2	Exemples	199
12.1.2	Distance dans un espace vectoriel	200
12.1.2.1	Espace vectoriel	200
12.1.2.2	Produit scalaire et norme	200
12.1.2.3	Un angle est une distance sur une hypersphère	201
12.2	Espace vectoriel de dimension infinie	202
12.2.1	Ensemble de fonctions intégrables	202
12.2.2	Espace des fonctions intégrables	202
12.2.2.1	Espace de Banach	202
12.2.2.2	Espace de Hilbert	203
12.2.3	Propriétés des espaces hilbertiens	203
12.2.3.1	Base	203
12.2.3.2	Opérateur linéaire	203
12.2.3.3	Isométrie	204
12.3	Transformée en ondelette	204
12.4	Probabilité et statistique	205
12.4.1	Probabilité d'une variable aléatoire	205
12.4.1.1	Axiomatiques	205
12.4.1.2	Espérance et moment	206
12.4.1.3	Fonctions caractéristiques	207
12.4.2	Opérations sur deux variables aléatoires	207
12.4.2.1	Distribution jointe et indépendance	207
12.4.2.2	Somme de deux variables aléatoires	208
12.4.2.3	Produit de deux variables aléatoires	208
12.4.2.4	Cumul de deux états de probabilités	208
12.4.2.5	Conjonction de deux états de probabilités	208
12.4.2.6	Distribution conditionnelle et théorème de Bayes	209
12.4.2.7	Moments de deux variables aléatoires	209
12.4.2.8	Fonctions caractéristiques de deux variables aléatoires	210
12.4.3	Moment et cumulant	210
12.4.3.1	Fonctions caractéristiques de plusieurs variables aléatoires	210
12.4.3.2	Somme de variables aléatoires indépendantes	211
12.4.4	Statistique et estimation	212
12.4.5	Distance entre variables aléatoires	212

12.4.6	Entropie, négentropie et information mutuelle . . . . .	213
12.5	Malédiction de la dimensionnalité . . . . .	214
12.5.1	Complexité de la mesure en grande dimension . . . . .	214
12.5.2	Classification en grande dimension . . . . .	214
12.5.3	Phénomène de Hughes . . . . .	215
12.6	Les fractales . . . . .	216
<b>13</b>	<b>Article présentant la méthode Wavanglet dans IEEE Transaction in Geoscience and Remote Sensing</b>	<b>219</b>
<b>14</b>	<b>Article présentant la méthode BPSS appliquée aux données OMEGA dans Neurocomputing</b>	<b>221</b>
<b>15</b>	<b>Article présentant le modèle de la récession de la calotte saisonnière Sud de Mars</b>	<b>223</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>225</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>245</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>250</b>
	<b>Liste des publications et communications</b>	<b>252</b>

# Introduction

Le premier objectif de cette thèse est de produire de nouveaux outils d'analyse appropriés aux dernières générations d'images hyperspectrales. Les images, produites par les instruments actuels, forment des bases de données très volumineuses. Par exemple, le spectro-imageur OMEGA à bord de Mars Express (ESA) a produit plus de 1000 observations de Mars, contenant en moyenne 100000 spectres chacune. Le nombre total de spectres s'approche désormais du milliard.

Dès lors, l'analyse pose un véritable défi à la fois mathématique et informatique. Comment traiter les données ? Comment les représenter ? Comment automatiser l'extraction pertinente d'information d'une telle base de données ?

Aussi, un autre défi consiste à tirer partie de cette grande collection de données, notamment d'un point de vue statistique. Quelles informations supplémentaires sont introduites du fait de la grande taille de ces bases de données ? Comment les utiliser ?

Cette thèse propose de répondre à ces questionnements à l'aide des Sciences de la Terre d'une part, et les Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC). Les domaines d'application qui nous concernent sont la Planétologie et les Sciences de la Terre.

Les problématiques d'intérêt planétologique sont de plus en plus complexes et requièrent des détecteurs permettant des mesures et des outils toujours plus pointus. Les méthodologies récentes d'analyse du signal spectroscopique de télédétection, par une approche du type transfert radiatif, permettent d'extraire des informations quantitatives sur les matériaux en surfaces (taille de grains, abondance, ...). L'extraction de ces informations, pour un seul spectre, demande la mise en oeuvre d'outils complexes.

Le domaine des STIC s'intéresse aux objets mathématiques, leurs manipulations et leurs applications. L'explosion des recherches en STIC a permis de développer des algorithmes puissants, valides notamment pour des grandes bases de données. Aussi, ce domaine de recherche emploie fréquemment le formalisme statistique permettant des inférences sur de grandes collections de spectres.

A l'heure actuelle, les STICS peuvent enrichir l'analyse des images hyperspectrales de télédétection.

Le second objectif de cette thèse est l'étude des dépôts saisonniers des glaces de  $\text{CO}_2$  et d' $\text{H}_2\text{O}$  sur Mars, à partir des données du spectro-imageur OMEGA. Les dépôts saisonniers martiens sont issus de différents processus d'échange avec l'atmosphère. En particulier, le phénomène de condensation/sublimation du  $\text{CO}_2$  atmosphérique est majoritaire dans les régions polaires. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur l'étude de la récession de la calotte saisonnière sud.

L'objectif est donc double :

- (i) Extraction d'informations spectroscopiques d'intérêt planétologique (détection de corps chimiques, type de mélange, abondance, taille de grains, ...). Il s'agit donc d'appliquer les outils, issus du premier objectif de la thèse, à une problématique planétologique particulière. Cette application permet à la fois de valider les outils et aussi de proposer des nouvelles analyses planétologiques.
- (ii) Interprétation de ces informations en terme de processus planétologiques. La finalité de cette analyse est l'étude de la sublimation des dépôts saisonniers sud, à l'échelle régionale et à l'échelle locale. Cette

---

discussion a des implications sur le cycle des volatiles (CO<sub>2</sub> et eau) mais aussi sur le cycle des poussières pour le climat actuel et passé de Mars.

Ce manuscrit s'articule naturellement autour de deux parties.

La première partie, intitulée : traitement du signal en télédétection, porte sur l'analyse des images hyperspectrales de télédétection dans le but d'extraire des informations d'intérêts planétologiques.

Le premier chapitre introduit diverses notions de télédétection : détecteur, chaîne de télédétection et signal physique, information planétologique associée et analyse pratique.

Les deux chapitres suivants sont focalisés sur des méthodes d'analyses particulières : la réduction de dimensionnalité (chapitre 2) et la classification (chapitre 3). La classification consiste au regroupement de spectres ayant des caractéristiques communes (présence de corps, taille de grain, abondances, ...). La réduction de dimensionnalité est une étape préliminaire qui permet la classification. Ces chapitres exposent le fondement mathématique de ces méthodes, les hypothèses auxquelles elles sont assujetties et leur domaine de validité dans le cadre de la télédétection hyperspectrale. Des tableaux récapitulatifs sont disponibles en fin de chaque chapitre.

Le chapitre quatre présente "Wavanglet", la méthode de détection supervisée, développée au cours de cette thèse. "Wavanglet" a été conçue pour détecter de façon automatique des composants d'intérêt planétologique dans de grands volumes de données de télédétection. De plus, ce chapitre présente également les résultats d'un test comparatif entre certaines méthodes de classification, sur des spectres synthétiques réalistes.

Le chapitre cinquième est une synthèse bibliographique de la séparation de source, à la fois supervisée et non-supervisée, dans le domaine de la télédétection. Contrairement à la classification, qui se borne à un aspect qualitatif, la séparation de source consiste à établir une analyse quantitative des signaux.

Pour clore la première partie, le chapitre six présente la méthode "JADE+BPSS" de séparation de source en aveugle (non-supervisée), établie au cours d'une collaboration née lors de cette thèse. Cette méthode est basée sur la notion statistique d'indépendance. Elle utilise un formalisme statistique qui permet de respecter les contraintes physiques du problème de télédétection, notamment la positivité du signal. Ce chapitre montre aussi les avancées et les limitations inhérentes à cette nouvelle méthode.

La seconde partie de cette thèse est nommée : les calottes saisonnières martiennes. Nous y menons le suivi de la calotte sud durant sa récession entre le début de l'année 2005 et le milieu de l'année 2006. D'autre part, nous y développons un modèle physique complet du bilan de masse de la glace de CO<sub>2</sub> aux échelles régionale et locale. Ce modèle nous permet d'identifier les facteurs majeurs qui conditionnent la récession.

Le chapitre sept présente un historique des observations du cycle saisonnier martien depuis le XVII<sup>ème</sup> siècle. Le paradigme actuel de condensation/sublimation du CO<sub>2</sub> est exposé, ainsi que ses incomplétudes et limitations. Ce cycle saisonnier est mis en relation avec d'autres processus martiens aux temps actuel (cycle de l'eau, cycle des poussières, ...) et passé (formation de glaciers, écoulement d'eau liquide, ...).

Le huitième chapitre se concentre sur la récession de la calotte saisonnière sud de Mars. Il relate des travaux effectués au cours de cette thèse à partir des détections de glaces de CO<sub>2</sub> et de H<sub>2</sub>O par la méthode Wavanglet. Aussi, il expose le modèle de sublimation de la glace de CO<sub>2</sub> développé lors de cette thèse. Ce modèle tient compte de différents facteurs : émission thermique, absorption dans le visible et l'infrarouge, conduction de chaleur dans le sous-sol. A l'échelle locale, une attention particulière a été portée aux effets de pentes et d'ombres portées dus à la rugosité de surface. Cette étude détermine les importances relatives des différents facteurs du modèle aux échelles globale et locale, utilisant différents argumentaires dont la confrontation entre modèle et observations.

Les trois articles correspondant à cette thèse sont disponibles en annexe.

Pour une plus grande facilité de lecture, les termes notés en *italique* sont une entrée du glossaire (voir annexe 9 page 191), tandis que les termes entre "guillemets" sont des termes particuliers, présents et expliqués dans le texte de façon locale.

## **Première partie**

# **Traitement du signal en télédétection**



Chapitre **1**

# Introduction sur l'imagerie hyperspectrale de télédétection spatiale et l'analyse des données



Photographie du Pentagone par le satellite espion “Corona” (Crédit : USGS).



Dans un premier temps, la télédétection, les images hyperspectrales ainsi que les détecteurs associés sont introduits (voir sections 1.1 et 1.2). Ensuite, la physique du transfert radiatif est développée dans le cadre de l'imagerie des surfaces planétaires (voir section 1.3). La dernière section a pour objet le schéma d'analyse de ces images (voir section 1.4).

## 1.1 Télédétection

La “télédétection” ici désigne uniquement la télédétection spatiale (en orbite) ou embarquée (sur des moyens aéroportés) bien que des problèmes similaires puissent se trouver dans la télédétection au sol, voire dans l'imagerie médicale ou la microscopie de laboratoire.

Nous nous intéressons uniquement à la télédétection passive qui consiste à enregistrer de la lumière solaire arrivant sur le détecteur après s'être propagée dans les milieux planétaires. Ce type de télédétection concerne principalement le domaine visible et proche infrarouge. Plus particulièrement, nous allons nous focaliser sur la télédétection des surfaces : les phénomènes atmosphériques sont développés ici de façon secondaire, dans l'unique but de s'en affranchir et non de les étudier.

La télédétection spatiale en orbite est un domaine relativement récent qui trouve son origine à la fin des années 50, lorsque la Guerre Froide prit la forme d'une course à l'espace. “Corona”, la première mission américaine dédiée à l'espionnage, a été couronnée de succès en 1960. Au cours d'une multitude de missions de quelques jours, ce satellite a pris plus de 800 000 photographies argentiques depuis l'espace, avec une résolution de 8 à 2 m au sol (voir la photographie du Pentagone page précédente). A la fin de chaque mission, un petit module contenant les pellicules se détachait pour redescendre sur Terre. Celui-ci était ensuite récupéré dans l'atmosphère par un avion pour être analysé au sol. Depuis, les développements scientifiques et techniques ont permis de construire des détecteurs plus performants, notamment numériques, ayant une résolution spatiale et spectrale de plus en plus fine.

L'ère actuelle de la télédétection autorise une analyse fine des processus physiques à l'origine du signal enregistré par les capteurs. Dès lors, il ne s'agit plus seulement d'observer les structures morphologiques des objets au sol, mais de sonder les milieux planétaires à distance. Ainsi, la surface et l'atmosphère peuvent être analysées à partir de la propagation de la lumière dans ces milieux. Le cadre général des phénomènes de propagations des ondes lumineuses dans des milieux complexes a été introduit notamment par Chandrasekhar (43). Ce physicien d'origine indienne a développé la “théorie du transfert radiatif” qui consiste en deux points : l'établissement d'une équation de conservation de l'énergie radiative et la résolution de cette équation. Cette équation est basée sur un formalisme classique mais une description des processus aux échelles quantiques peut y être incorporée. L'étude des spectres en réflectance à l'aide de la théorie du transfert radiatif permet de déterminer les propriétés physiques de la surface et de l'atmosphère.

Les images hyperspectrales comportent un compromis de résolutions spatiales et spectrales. Elles permettent à la fois de s'intéresser aux propriétés physiques des milieux sondés (aspect spectral) et aussi à des problématiques de Planétologie impliquant de fortes variabilités locales (aspect spatial), comme par exemple le cycle saisonnier martien, l'origine du volcanisme martien mais aussi la structure atmosphérique de Vénus, les lacs de Titan, ...

## 1.2 Images hyperspectrales et acquisition

### 1.2.1 Images hyperspectrales

Nous allons nous focaliser sur des données de télédétection hyperspectrale, c'est à dire sur des données agencées en cubes : un tenseur d'ordre 3 dont 2 directions spatiales : la direction de défilement du point de visée au dessus de la planète notée  $x$ , et la direction orthogonale notée  $y$ , alignée avec la *fauchée*. Un élément du plan spatial est appelé *pixel* de coordonnées  $(x, y)$ . Un ensemble de pixels forme un *canal* ou *canal spectral*. La troisième est la direction spectrale, notée  $\lambda$ , qui correspond à la décomposition de la lumière à des longueurs d'onde précises. Un élément de la direction spectrale est appelé *spectel*. Un

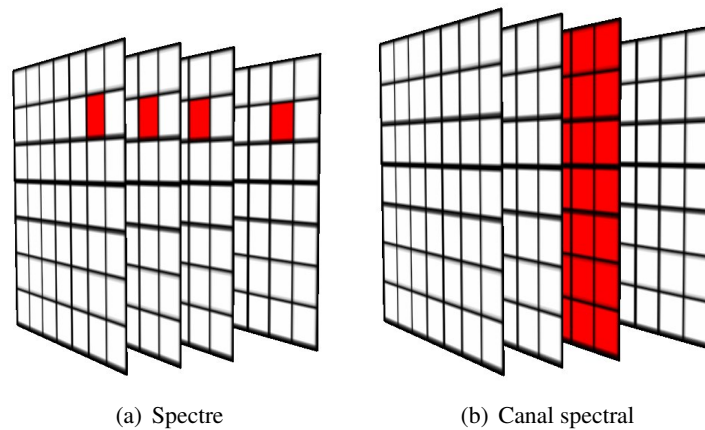


FIG. 1.1 – Schéma d'un cube hyperspectral.

ensemble de spectels forme un *spectre* (voir figure 1.1). Les données sont donc agencées en cube noté  $C_{x,y,\lambda}$ .

Chaque direction du tenseur a une dimension, c'est à dire un nombre de pixel/spectel associé. Le nombre de pixel dans la direction  $x$ , respectivement  $y$ , est noté  $N_x$ , respectivement  $N_y$ . Le nombre de spectel total dans la direction  $\lambda$  est noté  $N_\lambda$ .

L'imagerie "multi-spectrale" se contente d'une dizaine de canaux ( $N_\lambda \simeq 10$ ) tandis que l'imagerie "hyperspectrale" dépasse la centaine de canaux ( $N_\lambda > 100$ ).

Les nouvelles générations d'instruments incorporent un aspect d'échantillonnage "multi-angulaire", qui consiste à observer un même site à une dizaine de géométries différentes. Notamment, l'instrument CRISM de la mission Mars Reconnaissance Orbiter (NASA) cumule l'aspect hyperspectral et multi-angulaire. Dans ce cas, les données forment un tenseur d'ordre 4.

### 1.2.2 Spectro-imageurs

Un capteur produisant des images hyperspectrales est qualifié de spectro-imageur. Il comporte un système optique, un dispositif de sélection des longueurs d'onde qui peut être un prisme par exemple, un dispositif d'enregistrement numérique du flux lumineux en général de type CCD.

Les spectro-imageurs embarqués fonctionnent de deux façons différentes : "push-broom" ou "whisk-broom" qui sont deux types de balais ! Le principe est quasi similaire et consiste en l'acquisition des données le long de la trace au sol du satellite ou de l'avion.

Le mode le plus récent est le push-broom qui consiste à enregistrer une ligne au sol dans la direction perpendiculaire à la fauchée (voir figure 1.2). Par analogie avec un balai à pousser, l'image se construit par juxtaposition des lignes acquises successivement.

Le mode whisk-broom est un mode de fonctionnement ancien. Il est à l'oeuvre lorsque les matrices de CCD sont peu sensibles et l'acquisition de plusieurs spectres à la fois est impossible. Il s'agit alors de balayer avec un système optique la direction perpendiculaire à la trace au sol par un mouvement oscillant similaire à celui d'un utilisateur de balai pendulaire.

Les détecteurs convertissent le flux lumineux en signal numérique qui est stocké puis envoyé sur Terre. L'étalonnage des données hyperspectrales se fait en corrigeant le signal des différentes réponses instrumentales.

La réponse en intensité de l'instrument est fortement dépendante de la fréquence, il faut donc étalonner radiométriquement les données. Le niveau de bruit du détecteur est différent pour chaque spectel. De plus, la détérioration du détecteur dans l'espace, essentiellement par des rayons cosmiques, peut produire une altération ou une destruction de certains spectels. Ces spectels inutilisables sont dit *spectels chauds* (plus bruités) ou *spectels morts*, respectivement.

La connaissance de la fonction de transfert spectrale de l'instrument est essentielle pour la modélisa-

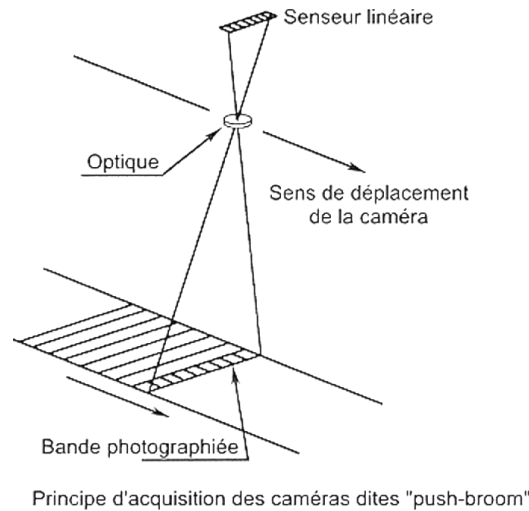


FIG. 1.2 – Principe du push-broom

tion, en particulier en cas de sous-échantillonnage spectral comme pour les glaces d'eau et de CO<sub>2</sub> avec OMEGA. La fonction de transfert spectral permet de reproduire les signaux observés grâce à une convolution, malgré une modélisation qui se fait à une résolution spectrale très supérieure avant convolution. La réponse de l'instrument dans le domaine spatial est importante pour déterminer l'étendue exacte au sol de la zone associée à chaque pixel. Cette correction est spécifique au mode d'acquisition bush-broom ou whisk-broom.

Connaître ces fonctions de réponse instrumentale est d'autant plus important qu'elles peuvent changer au cours du temps.

Voici quelques exemples de spectro-imageurs actuels dans le domaine visible et proche infra-rouge :

- OMEGA à bord de Mars Express (ESA). Ce détecteur est présenté dans la section 1.2.2.1.
- VIRTIS à bord de Vénus Express (ESA).
- CRISM à bord de Mars Reconnaissance Orbiter (NASA) qui comporte aussi l'aspect multi-angulaire.
- AVIRIS à bord d'un avion (NASA).
- Hyperion à bord de Earth Observing 1 (NASA).
- ARES/APEX prévus respectivement pour 2007 et 2008, et qui seront embarqués sur des avions (ESA).

Il existe aussi des spectro-imageurs au sol fixés à des télescopes, comme par exemple TIGER, ...

### 1.2.2.1 OMEGA

Le seul spectro-imageur concerné par cette thèse est OMEGA à bord de la plateforme Mars Express (ESA). C'est un instrument développé par l'IAS (Institut d'Astrophysique Spatiale, Orsay) en collaboration avec le LESIA (Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique, Paris/Meudon), IFSI (Istituto di Fisica dello Spazio Interplanetario, Rome) et IKI (Institute for Space Research, Moscou) (26). Il contient trois voies distinctes : V dans le visible en mode push-broom ; C dans les "courtes" longueurs d'onde de l'infra-rouge proche en mode whisk-broom ; L dans les "larges" ou grandes longueurs d'onde de l'infra-rouge proche en mode whisk-broom. Les caractéristiques spectrales des trois détecteurs sont détaillées dans le tableau 1.1. Dans la suite de cette thèse, nous allons uniquement utiliser la partie infra-rouge proche (voies C et L) d'une part, parce que l'étalonnage radio dans le visible a mis du temps à être convaincante, d'autre part, parce que les glaces martiennes comportent des signatures spectrales univoques essentiellement dans le proche infra-rouge. La résolution spatiale d'OMEGA, entre 350 m et 4 km, dépend fortement de l'altitude de la plateforme Mars Express qui gravite sur une orbite très elliptique.

TAB. 1.1 – Caractéristiques spectrales de l'instrument OMEGA à bord de Mars Express.

	Voie V	Voie C	Voie L
Domaine spectral ( $\mu m$ )	0,38 à 1,05	0,93 à 2,73	2,55 à 5,1
Nombre de spectels	96 ou 144	128	128
Résolution spectrale ( $\mu m$ )	0,007 ou 0,0045	0,013	0,020

### 1.2.2.2 Base de données OMEGA du LPG

Il existe plusieurs produits pour chacune des observations infra-rouge proche OMEGA dans la base de données du Laboratoire de Planétologie de Grenoble. Pour chaque observation, un étalonnage est proposé, puis un assemblage des voies C et L. Tous ces produits sont indexés par des noms du type ORBXXXX\_Y\_V##.AAA avec : XXXX le numéro de l'orbite, Y l'index de la session sur l'orbite, ## le numéro de version de l'étalonnage, AAA le produit en question spatialement conforme à l'observation. Les versions de l'étalonnage incorporent la correction de différents effets :

- V01 : réponse instrumentale initiale
- V02 : réponse instrumentale améliorée
- V03 : réponse instrumentale améliorée et correction du décalage spatiale entre la voie C et L.

Exposons ici brièvement les différents produits :

- CUB : cube hyperspectral en facteur de radiance, noté  $\mathbf{L}(\lambda)$  dans cette thèse.
- GEO : cube de données auxiliaires contenant les informations géographiques déterminées grâce à la position et à l'orientation de Mars Express sur son orbite lors de l'acquisition (coordonnées géographiques des pixels, angles d'incidence et d'émergence, topographie MOLA rééchantillonnée, ...)
- REF : cube hyperspectral en réflectance, noté  $\mathbf{R}(\lambda)$  dans cette thèse. On divise simplement le CUB par l'angle d'incidence inclus dans le GEO. Si la position du satellite est mal connue et si la surface a une pente, le facteur de réflectance REF est incorrect.
- ATM : cube hyperspectral de transmission atmosphérique calculé en utilisant un modèle de transfert radiatif uniquement pour les gaz. La méthodologie utilisée au LPG peut être qualifiée d'ab initio, c'est à dire qu'elle est basée uniquement sur des données d'état atmosphérique issues du GCM Mars Climate Database (63).
- RAC : cube hyperspectral de la réflectance au sol, corrigée des absorptions atmosphériques des gaz du produit ATM.
- ???\_GLT : cube d'aide à la projection géographique généré par ENVI. Les caractères "???" peuvent être SOUTH, NORTH ou EQUA selon le type de projections stéréographiques polaires sud, nord ou Mercator Transverse.

## 1.3 Transfert radiatif

Le transfert de lumière dans un gaz optiquement inactif est simple et très bien connu : c'est la loi de Beer-Lambert. Il s'agit simplement d'une atténuation exponentielle du flux de lumière relevant uniquement des processus d'absorption et de diffusion Rayleigh (quelquefois négligeable). Les atmosphères planétaires sont plus complexes car elles comportent des nuages d'aérosol. Outre la contribution des gaz, les particules réfléchissent, réfractent, diffractent et absorbent la lumière. De nombreux paramètres, comme l'hétérogénéité du nuage, les tailles et formes des grains, peuvent avoir des effets importants. Néanmoins, le transfert radiatif dans les atmosphères planétaires peut être examiné à l'aide de la théorie du transfert radiatif.

Les surfaces planétaires peuvent être composées de différents corps chimiques : silicates (minéraux ferro-magnésien, argiles, ...), solides moléculaires (glaces, soufres, sulfates, ...), carbonates, ... Ces corps chimiques sont assemblés sous forme de grains, par exemple : un feldspath dans un granite, un grain de

sable dans le régolithe, un grain de glace dans une neige, un grain de poussière dans une couche de glace compacte, ...

La majorité des surfaces planétaires sont des *milieux granulaires*, i.e. des agrégats de grains plus ou moins jointifs dans une matrice (de vide ou d'air dans le cas du régolithe, de glace d'eau dans une neige fortement métamorphisée, ...). Les grains naturels ont des caractéristiques particulières : une grande variabilité de taille, des formes complexes, des imperfections cristallines (défaut, inclusion, fissure,...). Contrairement aux nuages d'aérosols, les surfaces ont une densité de grains si forte que les grains peuvent être en contact. Il est possible que ces grains aient une "fabrique de forme", c'est à dire une organisation, par exemple : en couche dans la neige accumulée au cours de l'année, sous forme de linéation d'étirement dans les roches métamorphiques, ...

L'interface entre le milieu granulaire et l'atmosphère a une géométrie complexe appelée "rugosité". La rugosité intervient de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique à la surface d'un grain.

Le transfert de lumière dans les surfaces planétaires est plus complexe que dans l'atmosphère à cause de ces trois points : la faible distance de séparation entre grains, la perte d'isotropie des propriétés statistiques et l'interface complexe. Il existe donc des effets particuliers spécifiques aux surfaces : effet de champs proches, réflexion spéculaire, effet d'opposition, diffusion multiple due au relief macroscopique, ...

Malgré de fortes différences, les transferts radiatifs dans les atmosphères et surfaces planétaires sont souvent traités avec le même formalisme, exposés brièvement dans les pages qui suivent. Mais, des dispositions particulières d'adaptation de la théorie du transfert radiatif aux surfaces planétaires sont nécessaires pour atteindre un degré de réalisme physique suffisant.

### 1.3.1 Spectres en réflectance d'une planète

Les images hyperspectrales mesurées par OMEGA sont constituées de *spectres*. Chaque spectre  $\mathbf{I}(\lambda)$  est une mesure du "flux" d'énergie lumineuse (i.e. énergie par unité de temps) décomposée en fréquence. L'unité est la radiance [ $\text{W} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ ], c'est à dire une puissance par unité de longueur d'onde.

Afin d'éliminer le spectre de la source, il est en général plus intéressant d'analyser les spectres en facteur de radiance  $\mathbf{L}(\lambda) = \mathbf{I}(\lambda) / \mathbf{F}_{sun}(\lambda)$ , avec  $\mathbf{F}_{sun}(\lambda)$  la puissance de la source solaire au sommet de l'atmosphère. Dans ce cas, le spectre est sans unité.

Définissons les angles et la géométrie du problème de télédétection des surfaces planétaires. La figure 1.3, représente un schéma simple de la géométrie d'acquisition.

Les angles zénithaux d'incidence solaire (ou angle d'éclairement)  $\theta_i$  et d'émergence (ou angle d'observation du capteur)  $\theta_r$ , sont définis par rapport à la normale à la surface moyenne à une échelle donnée.

Les angles azimutaux d'incidence (ou d'éclairement)  $\Phi_i$  et d'émergence (ou d'observation)  $\Phi_r$ , sont définis dans le plan orthogonal à la normale. L'angle  $\Phi$  est appelé azimut relatif. Ces deux directions sont le support des angles solides  $d\omega_i$  et  $d\omega_r$ . L'angle de phase entre les deux directions  $g$  admet comme supplémentaire à  $\pi$ , l'angle de diffusion  $\Theta$ . La surface éclairée admet un élément de surface  $dS$ . On définit aussi les quantités suivantes  $\mu_{i/r} = |\cos(\theta_{i/r})|$ .

Pour chaque pixel, la *géométrie d'acquisition* est l'ensemble des directions d'incidence solaire et d'émergence vers le capteur. Le *nadir* est le point à la surface, à la verticale d'un satellite.

Nous pouvons maintenant définir des flux d'énergie au sol.

La "luminance" est la puissance émise/reçue dans la direction d'incidence/émergence par unité de surface, par unité d'angle solide et pour unité de longueur d'onde. Son unité est [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ ].

L' "éclairement" est la puissance reçue par une surface  $dS$  depuis toutes les directions du demi-espace supérieur pour unité de longueur d'onde. Son unité est [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ ]. Il s'agit d'une intégration de la luminance reçue sur toutes les directions du demi-espace supérieur.

Afin de s'affranchir de l'effet géométrique au sol, il est d'usage d'utiliser le spectre en réflectance  $\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{I}(\lambda) / (\mathbf{F}_{sun}(\lambda) \cdot \cos(\theta_i))$ , normalisé par la luminance solaire éclairant la surface. Cette quantité est bidirectionnelle car elle dépend à la fois de la direction d'incidence et de la direction d'émergence. Elle est appelée BRDF pour "Bidirectional Reflectance Distribution Function" et notée  $R(\theta_i, \theta_r, \Phi_i, \Phi_r, \lambda)$ . Dans le cas de la télédétection spatiale, la BRDF ne peut pas être déterminée. La

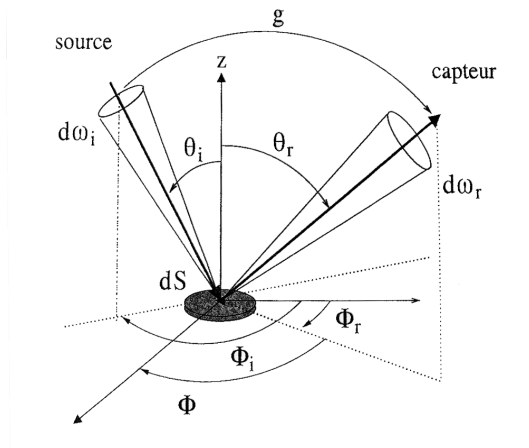


FIG. 1.3 – Schéma de la géométrie d'acquisition en télédétection des surfaces planétaires (figure d'après (29)).

direction d'incidence solaire est déterminée par la direction solaire à la surface au moment du passage du satellite. La direction d'émergence, en général proche de la verticale, est imposée par la position du satellite au moment de l'acquisition. La BRDF est donc échantillonnée dans deux directions. Les instruments multi-angulaires, comme CRISM, permettent d'échantillonner les angles d'émergence.

Il existe plusieurs définitions d'*albédo* dans la littérature (110), toujours une quantité intégrée de la BRDF.

Nous utilisons l'“albédo sphérique” ou “albédo de Bond” que nous notons simplement *albédo*  $A(\lambda)$  par la suite. Il s'agit de la puissance totale réfléchiée par une surface dans toutes les directions, rapportée à la puissance totale interceptée provenant de toutes les directions.

L'“albédo directionnel-hémisphérique”  $A_{dh}(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$  est le rapport entre la luminance diffusée dans toutes les directions sur l'éclaircissement incident collimaté.

Dans le visible/proche infrarouge, l'*albédo bolométrique*  $A_{vis}$  est l'intégrale spectrale de l'albédo pondéré du spectre solaire. Dans le domaine infrarouge thermique, l'albédo  $A_{IR}$  correspond à l'intégration de l'albédo pondéré du spectre d'émission thermique (en général un corps noir).

L'“albédo bolométrique directionnel-hémisphérique” dans le visible, noté  $A_{dh,vis}(\theta_i, \Phi_i)$ , est l'intégrale spectrale de l'albédo directionnel-hémisphérique  $A_{dh}(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$  pondéré du spectre solaire.

L'“albédo bolométrique hémisphérique-hémisphérique” dans le visible, noté  $A_{vis}$ , est l'intégrale spectrale et hémisphérique de  $A_{dh}(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$  pondéré du spectre solaire. Cette quantité est donc intégrée sur toutes les directions incidentes. Il est possible de pondérer cette intégrale par une fonction directionnelle de flux à la surface.

Présentons maintenant un spectre en réflectance  $\mathbf{R}(\lambda)$  typique acquis par OMEGA dans l'infra-rouge proche (voir fig. 1.4).

Le “continuum” est défini comme le niveau de réflectance moyen passant par tous les sommets du spectre en réflectance. Le niveau de continuum d'un spectre dépend du niveau d'absorption (constantes optiques) du matériau, des propriétés de diffusion du milieu et de la géométrie d'acquisition. L'effet de la géométrie d'acquisition est étudié numériquement à la section 4.2 page 82 (voir fig. 4.4).

Les “bandes d'absorption” sont les creux du spectre sous le continuum, localisées en longueurs d'onde. Ces creux ont une origine à l'échelle quantique dans l'indice imaginaire des constantes optiques. Les effets de transfert radiatif dans les milieux planétaires, aux échelles classiques, modifient fortement la forme des raies d'absorption quantique. L'intensité et la forme des bandes d'absorption dépendent de la composition chimique, de l'assemblage des corps chimiques (*représentation de surface*), des paramètres physiques (taille, forme et orientation des grains), de la quantité de corps chimiques présents.

Le continuum et les bandes d'absorption ne sont pas des concepts de transfert radiatif très précis. Il n'existe pas de définition ni de signification physique poussées. Afin d'analyser les processus à l'ori-

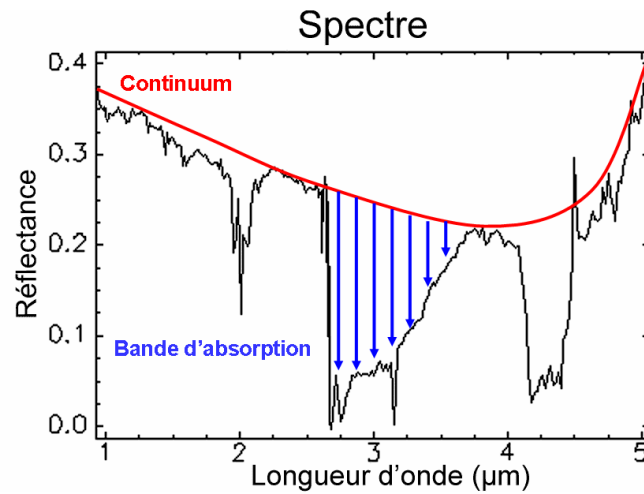


FIG. 1.4 – Exemple d'un spectre OMEGA en réflectance.

gine des spectres en réflectance, présentons les concepts fondamentaux de la théorie du transfert radiatif adaptés aux milieux planétaires.

### 1.3.2 Extinction particulière

L'“extinction” définit la perturbation que subit une onde électro-magnétique plane qui se propage dans un milieu. Le phénomène d'extinction est plus qu'une simple atténuation par absorption, il comporte une multitude d'interactions physiques. La traduction mathématique de l'extinction se fait en terme de “section efficace”, somme des sections efficaces de diffusion et d'absorption :

$$\sigma_{ext} = \sigma_{diff} + \sigma_{abs} \quad (1.1)$$

On note  $\sigma_{diff}^i, \sigma_{abs}^i$  les sections efficaces de diffusion et d'absorption du corps “i”. On peut définir l'albédo de diffusion simple  $\bar{\omega} = \sigma_{diff} / \sigma_{ext}$  qui compare les termes de diffusion et d'absorption.

#### 1.3.2.1 Absorption

**Fondement quantique** L'approche quantique d'interaction entre une molécule et un rayonnement électromagnétique réside dans la résolution de l'équation de Schrödinger qui comporte des solutions à des niveaux discrets d'énergie.

Dans la gamme UV-visible, les énergies en jeu permettent des transitions électroniques - changement d'orbitale d'un électron - qui correspondent à l'absorption d'un photon à une fréquence discrète.

Dans la gamme infra-rouge proche, l'absorption est due aux vibrations et rotations des molécules. Le découplage entre la rotation et la vibration, mettant en jeux des fréquences différentes, permet de résoudre l'équation de Schrödinger de manière approchée. Cependant, l'addition d'un terme correctif autorise une solution plus précise pour la prise en compte du couplage vibro-rotationnel.

A l'état gazeux, chaque molécule est un oscillateur harmonique en première approximation. Les modes fondamentaux, leurs harmoniques ainsi que des combinaisons sont donc à l'origine des absorptions. Ces niveaux sont perturbés par une rotation rigide qui ajoute une structure fine de raie. La solution, en tenant compte du terme correctif de rotation non-rigide et du couplage vibro-rotationnel, s'approche de la solution exacte.

Dans le cadre des solides moléculaires cristallins (assemblage de molécules dans un réseau cristallin), par exemple les glaces de H<sub>2</sub>O et de CO<sub>2</sub>, une complexité s'ajoute, dues aux interactions dans le réseau (phonons, liaisons hydrogènes...)

**Description électromagnétique et optique classique** Les propriétés optiques des matériaux sont caractérisées dans le formalisme de Maxwell par leur conductivité électrique  $\sigma_{opt}$ , leur constante diélectrique  $\epsilon_{opt}$  et leur perméabilité magnétique  $\mu_{opt}$ . Le champ électrique d'une onde plane ou sphérique électromagnétique qui se propage dans ce matériau, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\frac{\omega}{c})(n_{re} + i.n_{im})x - c.t] \quad (1.2)$$

La variable  $\omega$  dénote la fréquence angulaire,  $c$  la célérité,  $x$  la variable d'espace,  $t$  le temps. Les variables  $n_{re}$  et  $n_{im}$  désignent les indices optiques réels et imaginaires responsables respectivement de la propagation et de l'absorption dans le milieu (104). Ces deux paramètres sont reliés aux propriétés optiques des matériaux. Tous ces termes dépendent de la longueur d'onde de la lumière  $\lambda$  mais aussi des conditions de température et de pression, du niveau de défaut dans les cristaux, de l'histoire de ces paramètres. De plus, lors de mélanges à l'échelle atomique entre différentes molécules, la contribution spectrale de chacune s'additionne de façon très non-linéaire, perturbant les propriétés propres à chaque corps pur (264). Un autre élément de complexité intervient dans le cas des matériaux optiquement anisotropes. Si les propriétés optiques dépendent de la direction de propagation ( $\sigma_{opt}$ ,  $\epsilon_{opt}$  et  $\mu_{opt}$  sont des quantités tensorielles), il est souvent pratique d'utiliser des quantités équivalentes isotropes moyennées sur toutes les directions de l'espace.

De plus, il est difficile, en utilisant des méthodes ab initio basées uniquement sur la mécanique quantique, d'obtenir théoriquement des valeurs pour les trois paramètres optiques suffisamment réalistes ( $\sigma_{opt}$ ,  $\epsilon_{opt}$  et  $\mu_{opt}$ ). L'approche communément admise pour répondre à ce problème réside dans des mesures spectroscopiques de laboratoire effectuées en transmission à travers les matériaux préparés sous forme de cristaux translucides. Ces spectres mesurés permettent d'estimer les indices optiques des matériaux à l'aide d'une inversion de la physique de transmission. Citons par exemple celles effectuées au LPG sur les glaces (300; 264).

L'obtention par le calcul de la section efficace d'absorption à partir des indices optiques n'est pas aisée. La théorie de Mie (210) (exposée notamment dans le livre suivant (104)) donne une expression analytique pour des particules sphériques.

### 1.3.2.2 Diffusion

Dans un milieu comportant des diffuseurs, la diffusion peut être découpée en "diffusion simple" - interaction avec une seule particule - et la "diffusion multiple" - interactions avec plusieurs particules à la suite.

Après une présentation de la diffusion simple, traitons succinctement la diffusion par des diffuseurs idéaux puis pour des diffuseurs complexes.

**Diffusion simple** Un champ électromagnétique est défini par quatre paramètres libres parmi les cinq (luminance totale, amplitude et direction de la polarisation linéaire, amplitude et ellipticité de la polarisation circulaire). Le phénomène de diffusion peut être modélisé par une matrice de passage de taille  $4 \times 4$  sur les quatre paramètres libres. Tous les termes de cette matrice sont dépendants de l'angle de diffusion  $\Theta$ .

Compte tenu des possibilités instrumentales actuelles dans le visible/proche infra-rouge, l'unique paramètre mesurable qui nous intéresse en télédétection spatiale est la luminance totale. Nous allons donc garder qu'un seul paramètre et cette hypothèse simplificatrice va occulter les phénomènes de polarisation et d'interférence. La matrice est donc réduite à un seul élément : la "fonction de phase de diffusion simple"  $p$  que l'on exprime en général en fonction de l'angle de phase  $g = \pi - \Theta$ . Cette fonction est normalisée à 1, ce qui permet son interprétation en tant que probabilité de répartition angulaire des photons issus d'un rayonnement collimaté après diffusion par une particule :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(g) d\omega = 1 \quad (1.3)$$



Au premier ordre, la définition du coefficient d'anisotropie  $\xi$  permet de décrire la tendance de la particule à diffuser vers l'avant ( $\xi > 0$ ) ou vers l'arrière ( $\xi < 0$ ) :

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(g) \cos(g) d\omega \quad (1.4)$$

Pour les milieux granulaires compacts, la solution proposée par Hapke (110) est de prétendre que la section efficace d'extinction vaut la section efficace géométrique  $\sigma_{ext} = \sigma_{geom}$ .

**Diffusion par des diffuseurs idéaux** La diffusion de la lumière par des particules ponctuelles ou sphériques suit différents régimes :

“Régime de Rayleigh” : les particules sont bien plus petites que la longueur d'onde de la lumière incidente. Le paramètre clef qui détermine les sections efficaces de la particule est ici la polarisabilité. La fonction de phase est  $p(\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2(\Theta))$ .

“Régime de l'optique géométrique” : les particules sont bien plus grandes que la longueur d'onde de la lumière incidente. Il existe une solution analytique de la fonction de phase si les diffuseurs sont sphériques.

“Régime de Mie” : des sphères homogènes de taille quelconque peuvent être traitées en utilisant le formalisme de Maxwell avec des conditions aux limites appropriées (210) (exposé notamment dans le livre suivant (104)). Cette théorie permet de faire la relation entre les indices optiques des matériaux et les sections efficaces de diffusion et d'absorption.

**Diffusion par des particules complexes** Dans les milieux naturels, la connaissance de  $\sigma_{diff}$ ,  $\sigma_{abs}$  et de  $p(g)$  n'est pas aisée car la complexité des formes des diffuseurs rend impossible un traitement analytique exact. Hapke (110) propose une expression semi-empirique de la section efficace de diffusion pour des particules à distribution isotrope des facettes (particules quasi-sphériques). En ce qui concerne la fonction de phase, il est utile d'avoir recours soit à des fonctions paramétriques simplifiées a priori, comme la fonction de Henyey-Greenstein (simple ou double), soit à une décomposition sur des polynômes de Legendre. Ces fonctions peuvent être calibrées sur des données réelles (209) ou numériques (99; 214). L'approche numérique consiste à faire une étude par tracé de rayon pour différentes incidences, forme de grains, indices optiques et d'établir les paramètres libres de la fonction de phase. Dans le cadre de l'optique géométrique, les particules naturelles tendent à diffuser vers l'avant.

### 1.3.3 Équation du transfert radiatif (ETR)

L'équation du transfert radiatif (ETR) a été formalisée par Chandrasekhar en 1960 (43). Il s'agit de l'équation de conservation de l'énergie radiative exprimée le long d'une ligne de visée. Elle comporte l'absorption et la diffusion, incluant la diffusion simple et la diffusion multiple, c'est à dire à plusieurs diffusions simples successives. Dans un problème à symétrie plan-parallèle, il s'agit de la relation suivante, valable pour toutes les longueurs d'onde  $\lambda$  dans un système continûment absorbant et diffusant, optiquement inactif :

$$\mu_r \frac{\partial I(\tau, \mu_r, \Phi)}{\partial \tau} = I(\tau, \mu_r, \Phi) - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \omega p(g) I(\tau', \mu_r', \Phi') d\mu_r' d\Phi' - \frac{F}{4} e^{-\frac{\tau}{\mu_i}} p(g_i) \quad (1.5)$$

Elle traduit la conservation de l'énergie électromagnétique dans un milieu. Le terme de gauche correspond à la variation de la luminance le long de la direction d'émergence pour une variation d'épaisseur optique  $d\tau$ . Cette dernière quantité est définie par la relation suivante :

$$d\tau = - \sum_{i=1}^N \rho^i(z, \lambda) \sigma_{ext}^i(z, \lambda) dz \quad (1.6)$$

Les termes  $\rho^i$  et  $\sigma_{ext}^i$  correspondent aux densités et sections efficaces d'extinction propre au corps  $i$ . En cas de mélange,  $N$  est le nombre de corps en présence.

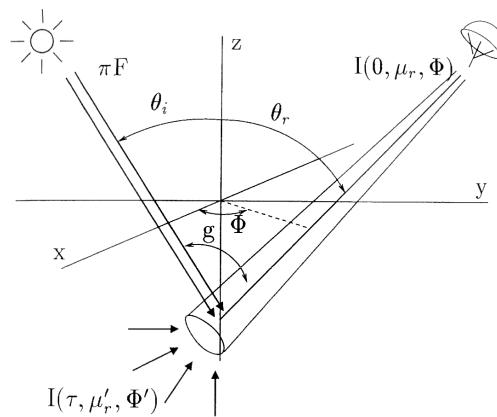


FIG. 1.5 – Schéma de l'équation du transfert radiatif. C'est une équation de conservation de l'énergie le long de la ligne de visée (figure d'après (29)).

Le premier terme du membre de droite dans l'équation 1.5 correspond à la perte par atténuation, le second terme au gain par diffusion multiple. Le dernier terme correspond au gain par la diffusion simple du rayonnement solaire incident collimaté. La figure 1.5 illustre ce bilan.

La solution de cette équation en terme de champ de luminance a été donnée par Chandrasekhar en 1960 pour un empilement de couches homogènes plan-parallèles. Les propriétés radiatives telles que les albédos de diffusion simple, l'épaisseur optique des couches et les fonctions de phase sont des propriétés radiatives du milieu continu.

La théorie de l'électromagnétisme statistique développée par Twersky (301) a permis de faire le lien entre les propriétés du milieu continu et les propriétés des particules. Dans un milieu où les diffuseurs ont des caractéristiques de positions, de formes et d'orientation indépendante les unes des autres, cette théorie démontre que le champ cohérent, c'est à dire de la valeur moyenne (moment d'ordre 1) du champ aléatoire "microscopique", est soumis à la même équation ETR que celle déterminée par Chandrasekhar (équation 1.5). Les propriétés radiatives locales, telles que les sections efficaces, sont confondues avec leurs valeurs moyennes sur la distribution des caractéristiques des diffuseurs (moment d'ordre 1). De plus, l'ETR est valable uniquement si la contribution des chaînes multiples de diffusion comprenant le même diffuseur est négligeable - la diffusion vers l'avant doit dominer. L'hypothèse du "champ lointain" est également nécessaire - les événements de diffusion sont suffisamment loin les uns des autres pour que l'onde diffusée puisse être toujours supposée localement comme plane.

Enfin, l'hypothèse du "milieu ténu" - la taille des diffuseurs est petite par rapport à leur distance caractéristique de séparation, comme c'est le cas des aérosols dans l'atmosphère. **Aucune de ces deux dernières hypothèses ne sont valables dans le cas des surfaces planétaires.**

Aucune équation tenant compte rigoureusement de l'effet du champ proche dans le cas de diffuseurs en contact n'existe. Deux alternatives s'offrent pour estimer la *réflectance bidirectionnelle* des surfaces : (i) l'utilisation de modèles complexes de tracé de rayon en trois dimensions ou (ii) l'établissement de solutions semi-empiriques approchées en champ proche.

La première approche consiste à faire des expériences numériques simulant des interactions physiques réalistes photons-matière. Mais elle interdit l'analyse poussée des données de télédétection par inversion du modèle, compte tenu du nombre de paramètres et de l'ampleur des calculs mis en jeu.

La seconde, bien que moins satisfaisante en terme de physique, permet de conserver le formalisme théorique de l'ETR moyennant quelques aménagements sur les propriétés radiatives locales et sur la solution.

Dans le cadre de l'ETR modifiée, l'ajout de certains effets supplémentaires vient compléter la modélisation de la diffusion multiple de volume de manière ad hoc : la réflexion spéculaire, l'effet d'opposition et la rugosité de surface à petite échelle.

La "réflexion spéculaire" - réflexion simple à l'interface entre deux milieux de propriétés optiques

distinctes - n'est introduite que de façon moyennée sur toutes les orientations de facettes dans l'ETR.

L' "effet d'opposition" a lieu pour les géométries où l'incidence et l'émergence sont presque ou strictement confondues.

Il s'agit premièrement de la "rétro-diffusion cohérente" (CBOE pour "Coherent Backscattering Opposition Effect") qui correspond aux interférences constructives de trajets d'ondes électromagnétiques de sens opposés à corrélation de phase (165; 109). Ce phénomène d'interférence est ignoré dans l'ETR car les chaînes de diffusion sont supposées indépendantes les unes des autres. Des expériences de laboratoires montrent que ce phénomène apparaît quand la taille des grains est similaire à la longueur d'onde (227).

Deuxièmement, l'effet d' "occultation par ombrage" (SHOE pour "Shadow Hiding Opposition Effect") correspond à l'ombre projetée de la micro-rugosité de la surface (283). Dans une géométrie à angle de phase faible, il existe une augmentation non-linéaire de la luminance émergente due à cet effet SHOE. Plus généralement, les conditions aux limites entre les interfaces n'étant pas planes, la solution à l'ETR nécessite l'ajout d'un modèle de rugosité de la surface à différentes échelles spatiales.

Enfin, l'adaptation de l'équation 1.6 à des milieux denses est nécessaire. L'approche de Hapke (110) réside dans la reformulation suivante :

$$d\tau = - \sum_{i=1}^N \rho^i(z, \lambda) \frac{\ln(1-\gamma)}{\gamma} \sigma_{ext}^i(z, \lambda) dz \quad (1.7)$$

faisant intervenir un nouveau paramètre : la compacité  $\gamma = V_{mat}/V_{tot}$  qui est la fraction remplie de matière dans un volume unité. Dans ce cas, les densités  $\rho^i$  sont des densités en nombre de particules. Pour une texture de glace compacte comportant des inclusions, Douté propose la formulation suivante (66) :

$$d\tau = - \sum_{i=1}^N \left( \zeta(\lambda) + \rho^i(z, \lambda) \frac{\ln(1-\gamma)}{\gamma} \sigma_{ext}^i(z, \lambda) \right) dz \quad (1.8)$$

en ajoutant le coefficient d'absorption  $\zeta(\lambda) = \frac{4\pi n_{im}(\lambda)}{\lambda}$ , avec  $n_{im}(\lambda)$  l'indice imaginaire de la matrice glacée.

### 1.3.4 Modélisations de la réflectance des surfaces planétaires

Les propriétés de réflexion diffuse des surfaces planétaires sont décrites par la réflectance bidirectionnelle  $R(\theta_i, \theta_r, \Phi_i, \Phi_r, \lambda)$  (BRDF : Bidirectional Reflectance Distribution Function) qui correspond au rapport entre la luminance réfléchiée dans la direction d'émergence (définie par les angles  $\theta_r$  et  $\Phi_r$ ) sur l'éclairement arrivant à la surface, provenant de la direction d'incidence (définie par les angles  $\theta_i$  et  $\Phi_i$ ). Pour étalonner et évaluer les approches théoriques, des mesures sur le terrain (239), des mesures en laboratoire (29), voire des expériences numériques (99; 274) sont nécessaires. Nous allons faire ici une présentation non exhaustive des efforts en matière de modélisation de la BRDF : depuis des modèles empiriques très basiques, en progressant vers des modèles physiques analytiques, en concluant par des modèles numériques plus sophistiqués. Nous allons écarter d'emblée la présentation des expérimentations numériques de type lancé de rayon car elles ne sont pas utiles dans le cadre d'une analyse massive de signaux spectraux de télédétection.

#### 1.3.4.1 Modèles empiriques

Avant l'établissement de l'ETR en 1960, des formulations empiriques de la réflectance de la surface ont été proposées. Exposons les deux lois les plus utilisées.

**Lambert** La plus connue est sans doute la "loi de Lambert" :

$$R(\theta_i, \theta_r, \lambda) = A(\lambda) \quad (1.9)$$

Le coefficient  $A$  est parfois dénommé albédo lambertien de la surface. Cette loi reproduit partiellement le comportement de certains matériaux clairs mais beaucoup moins bien celui des matériaux sombres. Le transfert radiatif pour la surface et l'atmosphère d'une planète peuvent néanmoins être paramétrés avec ce modèle (289)

**Minnaert** La "loi de Minnaert" (212), est basée sur la réciprocité de Helmholtz :

$$R(\theta_i, \theta_e, \lambda) = A(\lambda) \cos^\kappa(\theta_i) \cos^{\kappa-1}(\theta_e) \quad (1.10)$$

La constante  $\kappa$  est appelée constante de Minnaert. Cette loi a le mérite d'avoir un comportement angulaire mais perd son réalisme physique à mesure que la direction d'émergence se rapproche de l'horizontal. Il existe des modélisations analytiques de la spectro-photométrie de la surface et de l'atmosphère de Mars qui utilisent ce modèle (72).

### 1.3.4.2 Modèles analytiques physiques

Nous allons décrire ici trois approches de solutions analytiques à l'ETR. La première consiste à établir des solutions simples, nécessitant des approximations peu réalistes. La seconde permet d'affiner la description, en ajoutant notamment la notion de taille de grains et en utilisant des relations empiriques déterminées à partir d'expériences numériques sur des objets fractaux. Enfin, la troisième inclut les effets CBOE et SHOE.

**Kubelka et Munk** Une solution pour un milieu optiquement semi-infini, diffusant de manière isotrope et éclairée de manière diffuse, a été établie par Kubelka et Munk (164). Cette solution est valide si la diffusion domine par rapport à l'absorption (albédo de diffusion simple proche de 1). Elle a l'avantage d'être linéaire, moyennant quelques transformations. Son expression est la suivante :

$$R(\lambda) = \exp \left\{ \arg \cosh \left( \frac{\sum_{i=1}^N \rho^i \cdot \sigma_{abs}^i(\lambda)}{s(\lambda)} + 1 \right) \right\} \quad (1.11)$$

Les paramètres ont les significations suivantes :  $\rho^i / \sigma_{abs}^i$  densité/section efficace d'absorption du corps "i" (voir section 1.1) ;  $s(\lambda)$  coefficient empirique de diffusion parfois approximé par  $A + B\lambda$ .

Une généralisation de cette théorie à des milieux plus absorbants, prenant mieux en compte le trajet effectif des photons, a été proposée très récemment (308; 309; 310) pour des applications de papeterie et implique la non-linéarité. Malgré tout, cette théorie est utilisée dans des domaines très variés, en biologie comme le montre cette étude des tissus humains (117). Dans le domaine des surfaces planétaires, cette théorie est peu utilisée mais mentionnons tout de même une étude de 1982 (218).

**Approximate Asymptotic Theory : AAT** Une approche paramétrique proposée récemment Approximate Asymptotic Theory (AAT) (159) se base sur des considérations semi-empiriques pour décrire la réflectance de milieux semi-infinis composés de particules irrégulières. Cette étude a été menée sur des glaces terrestres décrites par des figures fractales. L'expression de la réflectance de surface proposée est la suivante :

$$R(\theta_i, \theta_r, \Phi, \lambda) = R_0(\theta_i, \theta_r, \Phi, \lambda) \exp \left\{ \frac{-0,66(1 + \mu_i)(1 + \mu_r)}{R_0(\theta_i, \theta_r, \Phi, \lambda)} \sqrt{\gamma d} \right\} \quad (1.12)$$

avec le coefficient d'absorption  $\gamma(\lambda) = 4\pi n_{im}(\lambda) / \lambda$ ,  $n_{im}(\lambda)$  est l'indice optique imaginaire,  $d = 6\langle V \rangle / \langle S \rangle$  est la taille de grains effective,  $\langle V \rangle$  est le volume moyen des particules,  $\langle S \rangle$  est la surface moyenne des particules. La fonction de réflectance d'un milieu semi-infini non-absorbant constitué de particules fractales, suit l'expression suivante :

$$R_0(\theta_i, \theta_r, \Phi, \lambda) = \frac{1,247 + 1,186(\mu_i + \mu_r) + 5,157\mu_i\mu_r + p(\Theta)}{4(\mu_i + \mu_r)} \quad (1.13)$$

Pour des cristaux de glace irréguliers, la fonction de phase peut s'approximer par (158) :

$$p(\Theta) = 11,1 \exp(-0,087\Theta) + \exp(-0,014\Theta) \quad (1.14)$$

**Hapke** L'approche semi-empirique de Hapke est sans doute la plus connue dans le domaine des surfaces planétaires. Après une adaptation de l'ETR, en particulier de l'équation 1.6 pour des milieux denses (voir la section 1.3.3) l'expression de la réflectance bidirectionnelle est la suivante :

$$R(\theta_i, \theta_r, g, \lambda) = \frac{\varpi(\lambda) S(\theta_i, \theta_r, g, \Xi)}{4} \frac{S(\theta_i, \theta_r, g, \Xi)}{\mu_i + \mu_r} [(1 + B_S(g, \lambda)) p(g, \lambda) + (1 + B_C(\mu_i, \mu_r, g, \lambda)) M(\mu_i, \mu_r, g, \lambda)] \quad (1.15)$$

Le terme  $B_S(g, \lambda)$  correspond à l'effet SHOE (108).

Le terme  $M(\theta_i, \theta_r, g, \lambda)$  correspond à une diffusion multiple de volume isotrope (110).

Le terme  $B_C(\theta_i, \theta_r, g, \lambda)$  correspond à la rétrodiffusion cohérente CBOE (109; 110).

Le terme  $S(\theta_i, \theta_r, g, \Xi)$  correspond à l'effet de rugosité macroscopique (107; 110). Le paramètre  $\Xi$  est la pente moyenne et les angles  $\theta_i$  et  $\theta_r$  sont redéfinis.

Cette solution reproduit correctement le comportement des surfaces planétaires mais viole les lois de conservation de l'énergie (214).

### 1.3.4.3 Modèles numériques

La solution développée au Laboratoire de Planétologie de Grenoble (62) s'applique aux milieux stratifiés plans parallèles. De plus, elle est semi-analytique, ce qui permet des calculs en temps raisonnable. Les diffusions simples et doubles sont traitées de manière exacte tandis que les ordres supérieurs de diffusion multiple utilisent une fonction de phase tronquée à l'ordre 1 des polynômes de Legendre selon Chandrasekhar. Cette méthode a été utilisée lors de cette thèse.

D'autres modélisations sont proposées (214) et (46) pour des milieux faiblement absorbants. De plus, Shkuratov propose une représentation fractale de la surface pour tenir compte au mieux des effets de SHOE et CBOE (275).

Toutes ces solutions approchées permettent l'inversion massive de spectres en réflexion car elles résolvent efficacement l'équation du transfert radiatif avec un nombre limité de paramètres (proportion en corps pur, taille des grains).

### 1.3.5 Modélisation du couplage surface-atmosphère

L'ETR exprimée dans la section 1.3.3 est valable pour l'atmosphère. Il existe donc un fondement théorique cohérent sur lequel s'appuyer pour estimer l'effet de l'atmosphère. Cependant, le niveau de complexité du couplage entre surface et atmosphère est élevé, à cause des diffusions multiples. En effet, dans certaines situations, la diffusion permet à un même photon de se propager plusieurs fois de suite dans la surface et l'atmosphère. Cette situation permet au photon d'échantillonner plusieurs endroits de la surface. La modélisation de tels trajets nécessite une résolution de l'ETR en trois dimensions.

Pour s'affranchir de cette complexité, des simplifications, pas toujours justifiées, du couplage radiatif entre surface et atmosphère sont parfois nécessaires.

Citons une première étude tenant compte d'une couche homogène d'atmosphère diffusante et une réflectance de surface lambertienne (289).

Une autre, construite pour Mars et l'instrument OMEGA, utilise une surface ayant la loi de Minnaert, une couche d'aérosols dans la moitié la plus basse de l'atmosphère (72).

Une étude plus générale, sans hypothèses sur la réflectance bidirectionnelle de la surface, ni sur la diffusion par les aérosols, a été menée (289). Ce modèle montre qu'un couplage surface/atmosphère réaliste est incompatible avec un mélange linéaire de la réflectance de surface même en présence d'un *mélange géographique subpixel*.

Une étude similaire propose d'améliorer ce dernier point en estimant la fonction de mélange en utilisant

un méthode Monte-Carlo (211).

Cependant, une étape supplémentaire a été franchie récemment en donnant une formulation explicite de l'effet radiatif d'une atmosphère sur la réflectance de surface en utilisant le formalisme des fonctions de Green à une dimension (196) puis à trois dimensions (197).

Dans le cadre général de la télédétection, il faut donc associer une modélisation du transfert radiatif dans les surfaces avec une modélisation de l'effet atmosphérique pour estimer correctement les paramètres physiques de la surface.

## 1.4 Schéma général d'analyse des images hyperspectrales

Les signaux spectroscopiques des images hyperspectrales sont générés par le transfert radiatif complexe dans les milieux planétaires (surface et atmosphère). De fait, seule l'inversion d'un modèle physique réaliste permet une analyse correcte de ces signaux. Or, l'inversion est une étape lourde et complexe, impossible à mettre en place sans analyse préalable. Le schéma d'analyse des images hyperspectrales se fait donc graduellement : de l'extraction des informations de premier ordre, vers une analyse physique fine.

### 1.4.1 Analyse de premier ordre : réduction de dimensionnalité, classification, séparation de sources

La première étape d'analyse concerne la détection, l'identification et l'extraction primaire de deux types d'objets intelligibles : les classes et les sources. Avant de les présenter, il s'agit d'abord d'énoncer le type d'informations physiques pouvant être extrait des images hyperspectrales.

#### 1.4.1.1 Informations planétologiques : assemblage, mélange et représentation de terrain

Les surfaces planétaires sont composées de milieux granulaires (ou granulaire compact) au sein desquels différents corps chimiques peuvent être assemblés. L' "assemblage" des corps chimiques peut se faire de différentes manières selon les échelles spatiales : au sein d'un même grain, par coexistence de grains hétérogènes au sein du même milieu granulaire, en strates optiquement minces superposées, en juxtaposition de milieux granulaires au sein d'un même pixel, en milieux granulaires juxtaposés et résolus. A chacun des types d'assemblage correspond un "mélange spectral". L'opération d'assemblage altère les signaux spectroscopiques des corps chimiques purs. Ils sont mélangés pour produire le nouveau signal spectroscopique correspondant à l'assemblage. Détaillons les différents types de mélange associés aux assemblages précédents :

- *Mélange intime chimique*. Il s'agit d'un mélange spectral induit par un assemblage de corps chimiques à une échelle plus petite que celle d'un grain.  
Un assemblage sous forme d'inclusion intra-grain produit un changement non-linéaire des sections efficaces d'absorption et de diffusion du grain.  
Dans le cas d'un assemblage chimique cristallin de plusieurs molécules, les constantes optiques du matériau sont généralement très différentes des constantes optiques propres à chaque corps chimique pur, dû aux effets quantiques sur les vibrations et les rotations des molécules (voir section 1.3.2.1). Dans les cas étudiés lors de cette thèse, le mélange intime chimique n'a pas été utilisé. Il est cependant possible que des mélanges chimiques cristallins d'H<sub>2</sub>O et CO<sub>2</sub>, sous forme de clathrates par exemple, soient présents sur Mars (voir section 7.3.2.3 page 143).
- *Mélange intime granulaire*. Il s'agit d'un mélange spectral induit par un assemblage de grains de propriétés physiques différentes (composition chimique, taille, forme et des grains) au sein d'un même milieu granulaire. Ce mélange spectral est possible car un même photon peut rencontrer sur son parcours des grains de propriétés physiques différentes (voir fig. 1.6). Les hétérogénéités du milieu granulaire interviennent entre l'échelle de la taille des grains et celle du libre parcours

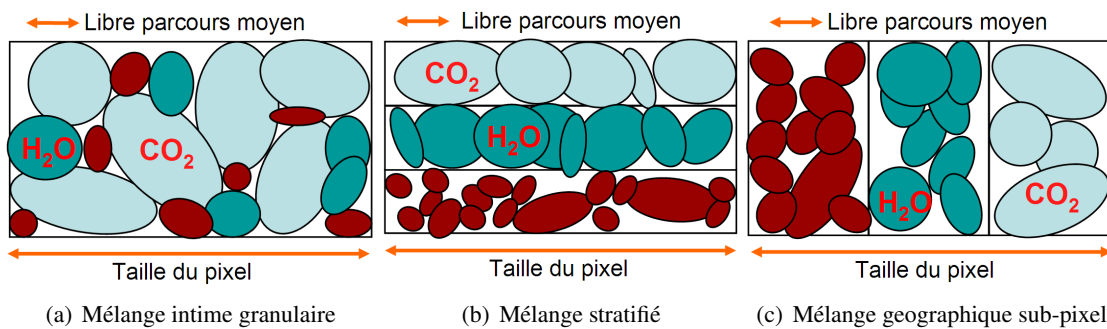


FIG. 1.6 – Schéma des types d'assemblage. A chaque type d'assemblage est associé un mélange spectral.

moyen optique. La théorie du transfert radiatif montre que la BRDF du milieu granulaire hétérogène n'est pas reliée linéairement aux BRDF des milieux homogènes. Cependant, dans un milieu granulaire hétérogène à distribution uniforme des paramètres physiques (taille, forme, orientation des grains), la profondeur optique est une combinaison linéaire des densités de grains pondérées par les sections efficaces d'extinction (voir équation 1.6 page 26). C'est aussi valable, moyennant quelques aménagement pour les textures granulaires denses (voir équation 1.7 page 28) et compactes (voir équation 1.8 page 28).

- *Mélange intime stratifié*. Il s'agit d'un mélange spectral induit par un assemblage de strates, en général horizontales. Chaque strate est un milieu granulaire, à une échelle plus fine que celle du libre parcours moyen optique. De cette manière, un même photon peut traverser l'ensemble des couches (voir fig. 1.6). La BRDF d'un milieu stratifié est une fonction non-linéaire des BRDF et de la transmission de chaque strate. Ce mélange intervient dans la dépendance à la profondeur  $z$  de la densité des grains du corps  $i$  (voir équation. 1.6 page 26).
- *Mélange géographique subpixel*. Il s'agit d'un mélange spectral induit par une juxtaposition horizontale de milieux granulaires à une échelle intermédiaire entre la taille du pixel et le libre parcours moyen optique dans la direction horizontale (voir fig. 1.6). Les différents milieux granulaires ne sont pas en contact optique et leurs BRDF sont donc indépendantes. Dans l'hypothèse d'une atmosphère non diffusante, la BRDF du pixel est une combinaison linéaire des BRDF des milieux granulaires pondérés des proportions de surface intra-pixel. Chaque zone "z" a un spectre noté  $S_z$  et une proportion de surface associée noté  $\alpha_z$ .
- *Mélange géographique résolu*. Il s'agit d'un mélange spectral à dimension planétaire induit par un assemblage de milieux granulaires à une échelle plus grande que la taille du pixel. Ce type de mélange spectral est résolu par l'instrument et ne constitue pas à proprement parlé un mélange mais plutôt un assemblage géographique résolu. Cet assemblage peut être étudié notamment par la cohérence spatiale des propriétés physiques déduites.

Les quatre types d'assemblages des corps non-résolus par l'instrument (i.e. : assemblage intime chimique, assemblage intime granulaire, assemblage intime stratifié et assemblage géographique subpixel) peuvent être combinés de diverses manières et constituent ainsi la *représentation de terrain*. Une *unité de terrain* est l'ensemble des spectres/pixels qui ont une représentation de terrain identique et des paramètres physiques similaires (composition, abondance, taille de grain,...). Le concept d'unité de terrain a un caractère quelque peu caricatural car en réalité, il existe des transitions continues entre les différentes unités de terrain, par exemple : une couche supérieure passant progressivement d'une épaisseur optique très élevée à nulle. Chaque spectre a une représentation de terrain qui lui est propre.

Les informations physiques, concernant les surfaces planétaires, pouvant être déduites des images hyperspectrales, découlent de cette typologie des mélanges :

1. Les corps chimiques en présence, leur nombre
2. Les types de mélange/assemblage présents ou absents de la scène
3. La représentation de terrain la plus pertinente, son unicité

4. Les paramètres physiques de chacun des éléments de la représentation de terrain : abondances (moléculaires, granulaires, surfaciques), tailles, propriétés des grains (forme, texture et distribution), densité, compacité et épaisseur des couches, rugosité de la surface ...

### 1.4.1.2 Qu'est ce qu'une classe ?

De manière générale, on peut définir une classe comme un ensemble de spectres ayant des caractéristiques similaires. Dans le cadre de la télédétection des surfaces planétaires qui est au centre de cette thèse, nous allons nous concentrer sur certaines classes particulières des images hyperspectrales :

1. Classe de présence au sol du corps chimique "i" : ensemble des spectres comportant la signature de présence au sol du corps chimique "i".
2. Classe de présence au sol de plusieurs corps chimiques à la fois : ensemble des spectres comportant la signature conjointe de plusieurs corps chimiques.
3. Classe de présence au sol du corps chimique "i" ayant des propriétés physiques particulières : ensemble des spectres comportant la signature de présence au sol du corps chimique i avec des paramètres physiques similaires (abondance, taille de grains, densité) compris dans une gamme définie.
4. Classe d'*unité de terrain* : ensemble des spectres comportant la signature de présence au sol d'un assemblage de corps chimiques de représentation de surface identique et de paramètres physiques similaires (abondance, taille de grain, densité).

Il faut noter que certains paramètres physiques sont absents de ces classes d'intérêt pour l'étude des surfaces planétaires : la rugosité de surface et les paramètres atmosphériques. Aussi la *géométrie d'acquisition*, qui influence le spectre, n'est pas intéressante pour l'étude des surfaces planétaires. Au cours de ma thèse, une méthode de classification supervisée "Wavanglet" qui établit des classes de type 1 et 2 a été développée. Elle pourrait aussi produire des classes de type 3 car elle est relativement sensible à la taille de grain.

Il est toujours possible de multiplier les exemples de classes en fonction des problématiques planétologiques particulières, par exemple celles impliquant conjointement les paramètres atmosphériques et de surface.

La classification, bien qu'étant une étape préliminaire d'analyse, permet déjà de comprendre certains phénomènes physiques en jeu comme le montre l'analyse effectuée lors de cette thèse à propos de la récession des dépôts saisonniers sud (voir chapitre 8 page 149).

### 1.4.1.3 Qu'est-ce qu'une source ?

Une source est paramètre physique à valeur réelle qui est à l'origine des images hyperspectrales. Il s'agit d'une tentative de quantification mais il existe une distinction entre source et paramètre physique obtenu après inversion du transfert radiatif. La source est déterminée grâce à un modèle approché très simplifié. Tandis que le paramètre physique est déterminé avec un modèle plus adéquat. Une définition plus précise est donnée dans le chapitre 5 page 91.

Dans le cadre de la télédétection des surfaces planétaires, il existe plusieurs types de sources et de simplifications associées :

1. Pour une même unité de terrain, chaque paramètre physique est une source (abondance, taille de grain, proportion de surface,...). Par exemple, en faisant l'hypothèse que toute l'image est uniquement en mélange géographique subpixel de corps purs : les sources sont les proportions de surface.
2. En supposant que la diffusion dans l'atmosphère est absente, la transmission atmosphérique est une source.



J'ai développé au cours de ma thèse une méthode de séparation de source non-supervisée qui permet d'estimer les sources de type 1 (voir chapitre 6 page 115).

Ici aussi, certains paramètres physiques sont absents des sources d'intérêt pour l'étude des surfaces planétaires : la géométrie d'acquisition, la rugosité de surface, les paramètres atmosphériques. Ils peuvent néanmoins être intéressants pour des problématiques particulières. Les méthodes de séparation de sources permettent aussi de déterminer des unités de terrain en appliquant des seuils sur les abondances par exemple.

#### 1.4.2 Analyse physique complète : inversion des modèles de transfert radiatif

**Méthode d'inversion** Les "méthodes d'inversion" s'opposent aux "méthodes directes". Dans le sens direct, il s'agit de modéliser un processus physique et de calculer une ou plusieurs observables en fonction de paramètres physiques. Par exemple, la réflectance de surface en fonction de la géométrie d'observation, des corps en présence, de la taille des grains, etc ... Dans le sens inverse, il s'agit d'estimer les paramètres physiques à partir des observables.

Le processus d'inversion consiste à rechercher de l'information à la fois nouvelle et pertinente. Il s'agit de mettre en commun l'état d'information contenu dans un modèle physique (par exemple celui du transfert radiatif) et l'état d'information de la mesure. En effet, un modèle interdit des situations qui ne sont pas "physiques", gardant uniquement certaines combinaisons de paramètres possibles. Quant aux données, bien que comportant des incertitudes, les mesures contiennent de l'information sur les observables. La conjonction de ces deux états d'information est la solution robuste du problème d'inversion (291). Cette solution n'est pas forcément unique, c'est un état d'information sur les paramètres physiques.

Il existe une grande quantité de méthodes qui permettent de résoudre ce problème. Dans le cadre d'un problème linéaire avec des erreurs gaussiennes, la solution est analytique et consiste en une inversion de matrice (291). Dans le cadre général non-linéaire, la solution peut être estimée par des méthodes de type Monte-Carlo (290; 219).

**Objectifs de l'analyse physique en télédétection** L'inversion de la physique du transfert radiatif est très certainement l'étape la plus aboutie dans l'analyse de données. Cependant, dans le domaine de la télédétection depuis l'espace, l'inversion est une opération lourde car, déjà dans le sens direct, le transfert radiatif résolu de manière rigoureuse est très complexe (voir section 1.3). Seule l'utilisation de la solution de l'ETR en ignorant les effets de champ proche, peut permettre pratiquement une inversion massive de spectres.

La détermination d'une représentation de terrain constitue le premier objectif (voir section 1.4.1.1). Le nombre de représentations de surface possibles, c'est à dire le nombre d'assemblages possibles des corps est infini. Il est donc impossible de tester toutes les possibilités. On peut réduire ce nombre si on se restreint aux cas les plus simples :

Soit  $N$  corps en présence et seulement trois types de mélange : mélange intime granulaire, mélange intime stratifié et mélange géographique subpixel. Il existe donc un espace des paramètres de dimension  $N^3$ . Le nombre d'arrangements possibles des types de mélanges dans cet espace est  $(N^3)!$  Pour trois corps, il existe de l'ordre de  $10^{28}$  possibilités.

De plus, les informations spectroscopiques ne sont pas forcément suffisantes pour inverser la représentation de terrain. La représentation de terrain ne peut pas être considérée comme un paramètre libre pour chacun des spectres à analyser.

Il est néanmoins possible, par une approche d'essais successifs, d'estimer la meilleure représentation de terrain par l'analyse de quelques spectres représentatifs d'une même unité de terrain. Certaines méthodes de classification tentent de déterminer l'ensemble des spectres d'une même unité de terrain (voir section 1.4.1.2). Elles sont exposées au chapitre 3 page 59.

Afin de déterminer les spectres représentatifs, plusieurs stratégies sont possibles : la moyenne des spectres au sein de chaque unité de terrain, les spectres les plus extrêmes de la classe. Une autre approche consiste à utiliser une source (voir chapitre 5 page 91).

L'étape d'inversion utilise les résultats de la réduction de données, de la classification et de la séparation de source afin de circonscrire des unités de terrains pour lesquelles nous devons déterminer les représentations de surface. L'ultime étape de l'inversion en télédétection consiste à inverser l'ensemble des spectres d'une image, voire d'une grande collection d'images afin de pouvoir effectuer des interprétations planétologiques de détail.

Plusieurs études d'inversion en télédétection ont eu lieu. En particulier, l'inversion du modèle de Hapke a été effectuée sur les données lunaires de la sonde Clementine (NASA) en utilisant une méthode Monte-Carlo (241).

Aussi, dans le domaine des glaces du système solaire, citons une étude menée sur Io, utilisant le modèle de réflectance du LPG par Douté et al. (65).

Enfin, sur Mars, une inversion au plus proche voisin de quelques spectres de réflectance représentatifs de la calotte permanente sud a été menée sur trois images OMEGA (64). L'étape suivante consiste à faire une inversion sur tous les spectres d'une image (63).



## Réduction des dimensions spectrales



Un astre rouge observé au télescope depuis la Terre (Crédit : Johannes Schedler, Panther Observatory)

La réduction des dimensions spectrales consiste à trouver une représentation des données dans un espace à moindre dimension mais qui conserve au mieux les informations de l'image. L'espace d'arrivée est plus petit (au maximum tenseur d'ordre 3, avec une dimension spectrale  $N_\lambda \approx 3$ ) que celui de départ (tenseur d'ordre 3, avec des dimensions spectrales  $N_\lambda \gg 3$ ). Ces transformations peuvent ne pas avoir de justifications physiques, en revanche, leur représentation doit permettre des analyses physiques !

La réduction de dimensionnalité spectrale est possible car l'information spectrale est redondante - plusieurs canaux spectraux sont dans des bandes d'absorption du même corps chimique. La réduction de dimensionnalité spatiale est permise s'il existe une certaine redondance spatiale, par exemple tous les spectres au sein d'une *unité de terrain* comportent la même représentation de terrain. Cependant, la redondance d'information spectrale apparaît comme plus importante que la redondance spatiale. Nous allons nous concentrer uniquement sur la réduction de dimensionnalité spectrale.

Souvent, les méthodes de réduction de dimensionnalité spectrale ignorent la répartition spatiale des spectres. Une permutation de tous les spectres de l'image ne changerait pas le résultat. Les dimensionnalités spatiales sont donc considérées simplement comme des occurrences de spectre.

Le but de la réduction de données est double dans notre cas : la représentation et la classification des données. La "représentation" des cubes de données hyperspectrales est impossible sur un écran à deux dimensions. Il faut soit privilégier les informations spatiales en regardant image par image, des coupes à une longueur d'onde donnée. Dans ce cas, la représentation peut être une vidéo, c'est à dire une animation temporelle des canaux. Soit, en privilégiant les informations spectrales, il est possible de représenter une collection de spectres résultant de coupes selon une dimension de l'espace. Quelle que soit la stratégie suivie, il est très difficile de discerner des structures spectro-spatiales. La réduction des données spectrales en trois composantes permet d'utiliser la représentation dans l'espace classique des *écrans couleurs* (RVB, ...).

La *classification* des données brutes est difficile car elle est une opération lourde en temps de calcul. Elle a été développée originellement pour des images couleurs à trois dimensions spectrales (rouge, vert, bleu) et donc nécessite une adaptation algorithmique aux grandes dimensions. Or, les données peuvent comporter des redondances d'informations, par exemple s'il existe plusieurs bandes d'absorption caractéristiques d'un même corps. La réduction de dimension spectrale est possible sans perte d'information. Cependant, la *malédiction de la dimensionnalité* règne sur les données à grandes dimensions. Plus la dimension est élevée, plus l'espace est vide et plus il est difficile de faire des estimations statistiques et des classifications. Ce fait, retranscrit dans le domaine de la classification supervisée, est connu sous le nom de *phénomène de Hughes* (125) (voir annexe 12.5). Le résultat majeur de cette étude est qu'il existe une dimension optimale pour la classification. Si la dimension est trop petite, il n'existe pas assez de différences entre les classes. Si la dimension est trop grande, l'espace est trop vide et il manque des échantillons d'apprentissage. Cette étude a été effectuée pour deux classes, un échantillon d'apprentissage et un classifieur statistique de type Bayésien.

Les méthodes de réduction de données spectrales que nous allons décrire par la suite sont utilisables de façon supervisée et/ou non-supervisée. Il s'agit de les appliquer :

1. en utilisant des connaissances préalables, par exemple en utilisant une *base de référence* (voir section 2.2). Dans ce cas, on parle de méthode de "réduction supervisée".
2. sur l'ensemble des données (à l'échelle de l'image entière, voire de la base de données entière) sans information a priori de nature planétologique. Dans ce cas, on parle de "réduction non-supervisée".

Toutes les méthodes de réduction peuvent s'appliquer de façon supervisée. Il suffit d'utiliser une base d'apprentissage représentative des images à réduire, d'appliquer une méthode de réduction sur cette base d'apprentissage puis, d'utiliser les résultats sur toutes les images.

Certaines méthodes de réduction supervisée nécessitent un opérateur humain, nous les qualifions de manuelles (voir section 2.1). D'autres sont automatiques (voir section 2.3). Les méthodes de réduction non-supervisée sont automatiques (voir section 2.4).

Il s'agit ici d'exposer quelques méthodes courantes de réduction de dimensionnalité spectrale, leurs contraintes mathématiques, leurs adéquations avec la physique du transfert radiatif et leur intégration dans le schéma d'analyse des images hyperspectrales (voir section 1.4).

Canaux	Longueurs d’onde	Corps
36	1,429	glace CO <sub>2</sub>
41-43	1,500/1,530	glace H <sub>2</sub> O
51	1,644	CO <sub>2</sub> gaz
97	2,287	glace CO <sub>2</sub>
101	2,341	glace CO <sub>2</sub>
114	2,514	glace H <sub>2</sub> O

TAB. 2.1 – Canaux spectraux purs

## 2.1 Réduction manuelle : choix des “lignes spectrales” et rapport de bande

La méthode de loin la plus usitée en Astrophysique/Planétologie est celle du choix “manuel” des “lignes spectrales”. C’est à dire du choix en fonction des connaissances spectroscopiques a priori de certains canaux spectraux pour lesquels une contribution a été clairement identifiée. Par exemple, pour OMEGA, le canal à 1,429 microns est dû essentiellement à l’absorption du CO<sub>2</sub> solide. Mais, ces canaux de contribution “pure” ne sont pas toujours disponibles :

- si la résolution spectrale ne le permet pas
- si différents corps en présence comportent des bandes d’absorptions qui se recoupent (ce qui est plus susceptible d’advenir pour des solides qui ont des bandes larges)
- si ces canaux sont fortement bruités, voire endommagés
- si certains corps sont inattendus

Sur OMEGA, nous pouvons estimer que seuls quelques canaux spectroscopiquement “purs” peuvent être déterminés, dans l’état des connaissances actuelles (voir tableau 2.1).

La méthodologie traditionnelle adoptée en spectroscopie se focalise sur ces quelques canaux intéressants. Pour s’affranchir des effets du “continuum” et diminuer l’influence des défauts d’étalonnage, la méthodologie usuelle est de définir la “profondeur de bande”, notée B basée sur un “rapport de bandes” noté R. Le rapport R est un rapport entre la réflectance au creux d’une bande d’absorption divisée par la réflectance du continuum si la bande était absente (voir section 1.3.1 page 22). Souvent la valeur de la réflectance du continuum si la bande était absente est estimée en prenant la valeur du continuum juste à côté de la bande d’absorption.

Par exemple, pour la bande à 2,5 $\mu$ m de la glace d’eau, on peut définir les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} R'_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{R(2,5140\mu\text{m})}{R(2,2188\mu\text{m})} \\ B_{\text{H}_2\text{O}}(2,5\mu\text{m}) = 1 - (R'_{\text{H}_2\text{O}}) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Afin d’améliorer le rapport signal sur bruit, il est possible d’utiliser plusieurs canaux spectraux contigus :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{R(2,5009\mu\text{m})+R(2,5140\mu\text{m})+R(2,5271\mu\text{m})}{R(2,2188\mu\text{m})+R(2,2324\mu\text{m})+R(2,2461\mu\text{m})} \\ B_{\text{H}_2\text{O}}(2,5\mu\text{m}) = 1 - (R_{\text{H}_2\text{O}}) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Nous labélisons “LPG” cette profondeur de bande  $B_{\text{H}_2\text{O}}(2,5\mu\text{m})$  dans la suite de notre étude.

Introduisons un autre rapport qui permet de faire une classification exclusive des glaces martiennes : soit glace de H<sub>2</sub>O, soit glace de CO<sub>2</sub>. Ce rapport est basé sur une pente dans le spectre, qui est favorable soit à une glace, soit à l’autre. Il a été utilisé comme méthode de référence pour l’article de Wavanglet (voir en annexe 13 page 219).

$$R_{\text{CO}_2/\text{H}_2\text{O}} = \frac{R(1,5004\mu\text{m})}{R(1,4286\mu\text{m})} \left( 1 - \frac{R(1,7860\mu\text{m})}{R(1,9973\mu\text{m})} \right) \quad (2.3)$$

Une autre approche de détection de la glace d'eau, proposée par Langevin et al., se concentre dans la région à  $1,5\mu m$  (172). La glace d'eau peut être détectée par la profondeur de bande  $B_{H_2O}$  associée au ratio  $R_{H_2O}$  suivant :

$$\begin{cases} R_{H_2O} = \frac{R(1,500\mu m)}{(R(1,385\mu m))^{0.7} \cdot (R(1,770\mu m))^{0.3}} \\ B_{H_2O}(1,5\mu m) = 1 - (R_{H_2O}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous allons labéliser "IAS" cette profondeur de bande dans notre étude.

Lors de recouvrement partiel de signatures caractéristiques de corps différents, il est nécessaire de les séparer. Une approche délicate consiste à appliquer une transformation mathématique ad hoc. Pour illustrer cette méthodologie, décrivons la méthodologie adoptée par Langevin et al., pour la détection de la glace de  $CO_2$ , observée par OMEGA (172).

Dans le cas où le  $CO_2$  n'est pas mélangé avec de la glace d'eau, la profondeur de bande  $B_{CO_2\text{pur}}$  du  $CO_2$  peut être estimée par le ratio  $R_{CO_2\text{pur}}$  suivant :

$$\begin{cases} R_{CO_2\text{pur}} = \frac{R(1,429\mu m)}{\sqrt{R(1,385\mu m)} \cdot \sqrt{R(1,486\mu m)}} \\ B_{CO_2\text{pur}}(1,43\mu m) = 1 - (R_{CO_2\text{pur}}) \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans le cas où la glace d'eau est présente, le spectel  $R(1,486\mu m)$  est pollué par la glace d'eau, il faut donc lui substituer un autre. Le spectel  $R(1,443\mu m)$  contient une faible contribution d'eau, ainsi qu'une faible contribution de  $CO_2$  atmosphérique. Un nouveau ratio  $R_{CO_2}$  est proposé. Afin de réduire l'effet de la glace d'eau et de l'atmosphère, la profondeur de bande  $B_{CO_2\text{pur}}$  est définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} R_{CO_2} = \frac{R(1,429\mu m)}{\sqrt{R(1,385\mu m)} \cdot \sqrt{R(1,443\mu m)}} \\ B_{CO_2}(1,43\mu m) = 1,16[1 - (R_{CO_2})]^{0.96} \end{cases} \quad (2.6)$$

Cette relation a été calibrée en comparant des zones de glace de  $CO_2$  pure à des zones proches de même altitude comportant à la fois de la glace d'eau et du  $CO_2$ , en faisant l'hypothèse que les profondeurs de bandes  $B_{CO_2\text{pur}}$  et  $B_{CO_2}$  sont identiques.

Les méthodes manuelles de réduction ont trois caractéristiques limitantes importantes :

1. le choix des spectels intéressants ne se fait pas toujours avec des critères explicites et rationnels. Il n'existe pas de formalisation de ce choix.
2. la focalisation sur seulement quelques canaux occulte potentiellement une partie majeure de l'information présente dans les autres canaux. Les dangers sont alors multiples : la pollution par un fort niveau de bruit (spectel chaud) ; le risque d'être tributaire d'une destruction totale d'un spectel clef (spectel mort) ; l'élimination a priori d'informations intéressantes.
3. la nécessité d'une connaissance a priori des comportements spectraux des corps en présence. Ce qui est en général possible en utilisant d'autres jeux de données précédemment acquis mais toutes les informations ne sont pas forcément disponibles, en particulier les spectres de corps purs de référence.

Pour résoudre ces trois problèmes, des méthodes de réduction de données automatiques ont vu le jour. Elles sont issues d'une formalisation mathématique de réduction de dimensionnalité, répondant au point No 1 ci-dessus. Elles s'effectuent en transformant tout l'espace, n'écartant aucun canal, répondant au point No 2. Les méthodes de sélection de canaux (voir chapitre 2.3.1) sont particulières car elles permettent de sélectionner un nombre restreint de canaux, ne répondant que partiellement au point No 2. Les méthodes supervisées nécessitent un échantillon d'apprentissage appelé *base de référence*, qui peut être d'origine diverse (voir section 2.2). Ces méthodes sont développées dans la section 2.3. Les limitations du point No 3 sont contournées par les méthodes non-supervisées qui ne nécessitent pas de *base de référence*, ni d'informations spectrales sur les classes. Elles sont exposées dans la section 2.4.

## 2.2 Base de référence

Le propre de toute méthode automatique supervisée est d'imposer l'usage d'une base de données d'apprentissage appelée : *base de référence*. Les bases de références composées d'un seul spectre par classe sont notées : *base spectrale de référence*. Les bases comportant plusieurs occurrences de spectre par classe sont dénommées *base de distribution spectrale de référence*.

Les bases de références peuvent avoir différentes origines, que nous décrivons successivement dans les paragraphes suivants : spectres issus de mesures de référence, spectres synthétiques générés par une modélisation physique, observation munie de données additionnelles, sélection manuelle/automatique des spectres de références issus de l'observation à classer. Ce dernier type de méthode n'est pas toujours très satisfaisant pour comparer les classifications de plusieurs observations entre-elles, car la référence n'est pas commune à toutes les images à classer.

Le choix de la base référence est essentiel dans un processus de classification supervisée, car il s'agit du socle sur lequel repose la classification. Dans le cas où cette base n'est pas suffisamment bien ajustée à la situation à classer, le problème de classification d'un point de vue mathématique, est mal posé (18). De surcroît, l'adéquation entre les résultats d'une classification et la vérité sur le terrain, diminue fortement si la base n'est pas en accord avec l'observation. Par exemple, si une observation comporte de la glace d'eau et s'il manque un spectre de référence de glace d'eau, il est impossible d'avoir une classe de glace d'eau et l'interprétation se trouve donc faussée.

Il existe trois typologies d'objet constituant la base de référence associée à la classe "i" : le spectre de référence, le spectre de référence extrême (endmember en anglais) et la distribution spectrale de référence.

Le *spectre de référence*, noté  $\mathbf{M}_i(\lambda)$ , est un spectre représentatif d'une classe de spectre (voir section 1.4.1.2) situé (ou supposé être situé) au centre de la classe, par exemple : la moyenne de la population de spectres de sa classe.

Le *spectre de référence extrême* (ou *endmember* en anglais), noté  $\mathbf{E}_i(\lambda)$ , est un spectre de référence représentatif d'un pixel situé à un extrême de la population de sa classe. Il provient d'une analyse préalable de données observées (voir les sections 2.2.1.3 et 2.2.1.4).

Pour saisir la signification d'un spectre de référence extrême, posons l'hypothèse que tous les spectres observés  $\mathbf{S}$  ont une *représentation de terrain* uniquement en couches granulaires juxtaposées au sein d'un pixel (voir section 1.4.1.1 page 31). Ils sont formés d'un *mélange géographique subpixel*, c'est à dire d'une combinaison linéaire des spectres  $\mathbf{S}_z$  de chaque zone "z", avec un poids de proportion de surface variable. Dans ce cas, le spectre de référence extrême  $\mathbf{E}_i(\lambda)$  est le spectre au sein de la classe où le spectre  $\mathbf{R}_z(\lambda)$  d'une zone domine. Autrement dit, le spectre où la proportion de surface d'une zone est la plus dominante. Dans le cas de représentation de surface complexe, la signification du spectre de référence extrême s'effrite.

La *distribution spectrale de référence* est un objet qui touche à la variabilité intra-classe. Elle peut être soit une collection de  $N_i$  spectres  $\{\mathbf{S}_i^1(\lambda), \mathbf{S}_i^2(\lambda), \dots, \mathbf{S}_i^{N_i}(\lambda)\}$ , noté  $\mathbf{S}_i(\lambda)$  appartenant tous à la classe  $i$ , soit une densité de probabilité  $\mathbf{f}_i(\lambda)$ .

### 2.2.1 Origine des spectres de références

#### 2.2.1.1 Spectres issus de mesures de références

Il s'agit d'une collection de spectres acquis dans un laboratoire ou sur le terrain à l'aide de dispositifs de mesure. Ces mesures correspondent à des matériaux de surface uniquement, car elles n'incluent pas la contribution atmosphérique. Ces spectres peuvent être issus de situations d'acquisition différentes : des réflectances bidirectionnelles (la glace finlandaise mesurée in-situ (239)) ; les mesures effectuées au LPG grâce au spectro-photo-goniomètre (29) ; des spectres en réflectance à une géométrie donnée (par exemple en laboratoire (49)). Il existe des bases de données de ces spectres de références disponibles sur



Internet à l'USGS (49) ou au LPG <sup>1</sup>. Ces bases de données sont utilisées très couramment en télédétection.

Cependant, la bidirectionnalité de la réflectance des surfaces est très souvent ignorée, ce qui peut poser des problèmes dans le cas d'observations qui s'éloignent des conditions géométriques d'acquisition. De plus, l'effet de taille des grains et des mélanges intimes sont souvent aussi ignorés, ce qui pose la question de validité de la base de référence.

Les *spectres de référence* sont soit des spectres individuels représentatifs, soit une moyenne sur un grand nombre de mesures pour augmenter le rapport signal sur bruit. Ils sont assimilés à des spectres de référence extrêmes. Les *distributions spectrales de référence* ne sont généralement pas générées par des mesures de référence car il est difficile de faire varier en laboratoire les paramètres selon des distributions de probabilités réalistes (géométrie locale, la taille des grains, les proportions de mélanges, le type de mélange et la représentation de terrain).

Les effets atmosphériques sont complètement négligés car ils ne sont pas incorporés dans la mesure. Il y a donc deux possibilités : effectuer la classification en incorporant l'effet atmosphérique ou effectuer la classification sur des observations corrigées des effets atmosphériques.

### 2.2.1.2 Spectres synthétiques

Ensemble de spectres générés à l'aide d'un modèle physique et de jeux de paramètres libres d'entrée (voir section 1.3.4.3 page 30) . La donnée de paramètres d'entrée qualitatifs comme la nature chimique des corps présents, leur texture, leur mode de mélange, la représentation de terrain, permettent de définir aisément des classes. Les *spectres de référence* peuvent être soit des spectres représentatifs, soit une moyenne sur un grand nombre de modélisations pour augmenter la représentativité. Malgré l'avantage, dans la facilité de production de spectres de référence, de la modélisation par rapport à l'observation , il n'est pas possible d'estimer correctement des *distributions spectrales de référence*. En effet, la représentation de terrain, ou les distributions statistiques a priori des valeurs de paramètres quantitatifs (taille des grains, proportions de mélanges, rugosité de surface), sont en général peu contraintes.

### 2.2.1.3 Observations de référence déjà classifiées

Si la classification est une cartographie de référence déterminée au sol, elle est nommée "vérité terrain". Elle peut être établie par des hommes parcourant l'espace au sol, par des robots comme sur Mars, ou par d'autres instruments embarqués considérés comme des références de confiance. Le *spectre de référence* d'une classe peut être choisi comme le spectre moyen ou médian. Il est possible d'établir un *spectre de référence extrême* (ou *endmember* en anglais), en utilisant une méthode manuelle (voir section 3.1) ou automatique (voir section 3.2). Les *distributions spectrales de référence* sont estimées à partir de cette classification (266), en particulier dans le cas gaussien (voir le paragraphe 2.2.2). Cependant, n'oublions pas l'hypothèse forte et nécessaire dans cette approche : la distribution des spectres d'une classe dans l'image de référence doit être représentative de celle des autres images !

### 2.2.1.4 Spectre de référence issus de l'observation à classer

**Sélection manuelle de spectres de référence issus d'observations** Issus d'une classification manuelle préalable (voir section 3.1), le *spectre de référence* et le *spectre de référence extrême* sont sélectionnés dans un espace représentable sur un écran, par exemple après une réduction de dimensionnalité comme l'ACP (19). Les *distributions spectrales de référence* peuvent être estimées, par exemple en adoptant la méthodologie de Bateson (20). Cette dernière étude propose une méthode de détermination d'une collection de spectres pour une seule classe de référence (voir le paragraphe 2.2.2).

---

<sup>1</sup>Spectroscopy of solid materials of Planetary and Astrophysical interest & Spectroscopy & Physical properties of ices and molecular solids (en développement) [<http://stsp.obs.ujf-grenoble.fr/>]

**Sélection automatique de spectres de référence issus d’observation** Il existe des algorithmes qui permettent d’extraire automatiquement des *spectres de référence extrême* comme “Pixel Purity Index” PPI (28). Ces méthodes ne fonctionnent que dans un espace de dimension spectrale réduite, d’où la nécessité de faire une réduction de dimensionnalité avant d’utiliser ce genre d’algorithme. Les *distributions spectrales de référence* aussi peuvent être estimées à partir d’image (266), en particulier dans le cas gaussien (voir le paragraphe 2.2.2). En présence de bruit, surtout de type “outliers”, ces méthodes ne sont pas très efficaces car la détection d’un spectre de référence extrême n’est que très peu robuste.

### 2.2.2 Formalisme des *distributions spectrales de référence*

Chaque spectre de référence associé à une classe  $i$  est un vecteur  $\mathbf{S}_i(\lambda)$ .

Les *distributions spectrales de référence* sont des distributions statistiques. Elles peuvent être définies de deux manières : de façon brute comme  $N_i$  occurrences du vecteur aléatoire  $\mathbf{S}_i(\lambda)$ , spectre de la classe “ $i$ ”. Cette collection de spectres de référence  $\{\mathbf{S}_i^1(\lambda), \mathbf{S}_i^2(\lambda), \dots, \mathbf{S}_i^{N_i}(\lambda)\}$ , produite par toutes les méthodologies d’obtention de spectre de référence exposées précédemment, forme une réalisation du vecteur aléatoire “spectre de la classe  $i$ ” de densité de probabilité  $\mathbf{f}_i(\lambda)$ . De façon plus élaborée, la description des *distributions spectrales de référence* peut être directement en terme de densité de probabilité  $\mathbf{f}_i(\lambda)$ . Dans ce cas, ce n’est plus une collection de spectres qui définit la classe, mais directement une fonction de densité de probabilité. Ces densités de probabilité sont décrites par des fonctions “paramétriques”, comme par exemple la gaussienne à deux paramètres (moyenne et écart-type). Le type de fonction - gaussienne, khi, gamma, ... - est déterminé de façon a priori car actuellement, il n’existe aucun cadre théorique qui permette de la choisir rationnellement. Généralement, les paramètres associés sont ajustés à la collection d’occurrences mais parfois ils sont simplement posés sans raisons physiques. Des descriptions *non-paramétriques* des distributions sont aussi possibles. Bien que plus générales, elles sont peu utilisées car plus complexes.

## 2.3 Réduction automatique supervisée

La réduction de dimensionnalité supervisée pour la classification est une problématique fondamentale en sciences cognitives et pour l’intelligence artificielle. Un bilan de ces méthodes dans le domaine des sciences cognitives est donnée par Kohavi et John (157). L’explosion de l’informatique et des technologies numériques produit des données en grande dimension de nature diverse. Actuellement, la réduction de dimensionnalité concerne donc une multitude de domaines.

La réduction automatique supervisée, aussi appelée “wrappers” (179), nécessite un ensemble d’apprentissage ou *base de référence* (voir chapitre 2.2). Il s’agit de réduire la dimensionnalité des données dans un sous-espace qui permet la meilleure classification possible.

La réduction de données automatiques est le siège du paradoxe de Cover (55; 284) qui s’exprime comme tel :

Soit deux classes dans un espace à  $N_\lambda$  dimensions. Soit  $N_1$ , le meilleur canal pour identifier la classe 1 et  $N_2$ , le meilleur canal pour identifier la classe 2. Les deux meilleurs canaux pour distinguer la classe 1 et 2 ne sont pas forcément la paire formée de  $N_1$  et  $N_2$ . Ils peuvent même être les pires lors de la classification des deux classes simultanées !

Ce qui implique de tester toutes les combinaisons possibles ou d’utiliser un algorithme qui permette de converger vers l’optimum. Le nombre de choix possibles de  $k$  canaux parmi les  $N_\lambda$  disponibles est :  $N_\lambda! / (k!(N_\lambda - k)!)$ . Par exemple, pour 10 canaux parmi 256, il existe 2, 78845.10<sup>17</sup> possibilités ! Mais il existe aussi un nombre  $k$  optimum. Il faut donc tester un nombre de possibilité énorme.

Certaines méthodes choisissent simplement un ensemble de canaux existant pour effectuer la classification (sélection de canaux, “band selection” en anglais), tandis que d’autres appliquent des opérations mathématiques sur les canaux pour créer le meilleur espace pour la classification. Les nouveaux canaux construits sont désignés sous le nom de “features” en anglais. La meilleure sélection est celle qui permet d’avoir des distances entre les distributions des classes dans les canaux/features les plus élevés possibles,

tout en gardant le minimum de canaux/features ! En principe, il faut tester toutes les combinaisons de canaux/features possibles, ce qui est très long au vue des possibilités, mais plusieurs méthodes, souvent sans fondement théorique, permettent de faire une sélection en s’approchant d’un optimum.

Si les “features” (nouveaux canaux construits) sont issus d’une combinaison linéaire des anciens canaux, et si les canaux sont indépendants entre-eux, alors l’application du théorème central limite montre que la densité de probabilité des données dans l’espace réduit tend vers une gaussienne (voir annexe 12.4.3.2 page 211). Cette propriété justifie l’utilisation des classifieurs déterministes et des classifieurs statistiques d’ordre 1 et 2, à la suite d’une telle réduction de dimensionnalité.

### 2.3.1 Sélection de canaux

Faisons l’hypothèse que les canaux discriminant le mieux les classes, sont ceux pour lesquels la redondance d’information est la plus faible. La non-redondance d’information, dans le cas de spectre de référence ou de spectre de référence extrême peut être estimée simplement par une distance. Dans un canal donné, plus la distance entre spectres est grande, plus ils sont dissemblables. On peut mesurer la dissemblance dans un paradigme statistique avec des distances entre distributions comme la distance de Mahalonobis, de Jeffries-Matusita (129), ou encore la divergence de Kullback-Liebler (voir annexe 12.4.5).

L’information est une quantité mesurée sur une distribution, ce type de méthode requiert donc une *base de distribution spectrale de référence*.

Nous allons très succinctement présenter trois types de méthodes de sélection de canaux : une méthode manuelle, la méthode de Stearns et une méthode utilisant le classifieur SVM. Ces méthodes de sélection de canaux ne sont pas très utilisées car elles produisent un sous-espace plus bruité que les méthodes avec une transformation de l’espace. De plus, elles sont moins efficaces car elles ne cumulent pas l’information redondante.

**Nécessitant un utilisateur** Certaines méthodes permettent de faire une sélection de canaux spectraux sur des critères manuels basés sur une distance de distribution (129). Un calcul de distance au sens des distributions est effectué pour toutes les combinaisons possibles de 4 canaux parmi  $N_\lambda$ . Les résultats sont présentés sous forme d’histogramme du nombre de fois qu’un canal est choisi. Une inspection visuelle de ces histogrammes permet d’extraire les canaux les plus intéressants. D’autres méthodes, basées sur l’information mutuelle permettent d’effectuer cette sélection de canaux spectraux (100).

**Méthode de Stearns** Proposée par Stearns (284), cette méthode est appelée “(m, n) feature selection”. Elle permet de choisir les canaux les plus intéressants sans choisir parmi toutes les combinaisons possibles en adoptant une sélection récursive.

**SVM-Recursive Feature Elimination** Certains auteurs ont proposé une série qui permet d’utiliser un classifieur SVM (voir paragraphe 3.2.3.3), couplé à une méthodologie heuristique qui sélectionne les meilleurs features (101).

### 2.3.2 Méthode de Fisher : AFD

L’analyse discriminante linéaire de Fisher (77), développée pour des problèmes particuliers de classification taxonomique a vu sa première application dans la différenciation des iris. Cette méthode, parfois aussi appelée : Analyse Factorielle Discriminante (AFD) est très populaire aux vues de sa simplicité et de sa facilité d’utilisation. Une présentation en est faite notamment dans le livre de Sapura (259). Cette méthode supervisée permet de trouver la meilleure transformation linéaire qui, à la fois, sépare au mieux les classes entre elles et aussi regroupe au maximum les individus au sein d’une même classe. L’idée est de maximiser les variances inter-classes et de minimiser les variances intra-classes.

Les variances intra-classes ne sont estimables que si l'échantillon de référence est du type : *base de distribution spectrale de référence*. Soit une base de distribution spectrale de référence qui est un ensemble de spectres agencés sous forme de matrice  $\mathbf{S}_{\lambda,z}$ . Chacun des spectres appartient une des  $N_s$  classe  $i$ . Notons  $\mathbf{S}_{i\lambda,z}$ , l'ensemble des  $N_{z_i}$  spectres de la classe  $i$ , agencé sous forme de matrice.

La matrice de l'estimateur de la covariance intra-classe  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}$  s'écrit de la façon suivante, avec  $\bar{\mathbf{S}}_{i\lambda,z}$  les données centrées des spectres de la classe  $i$  (voir annexe 12.4 page 205) :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} = \frac{(\bar{\mathbf{S}}_{i\lambda,z}) \cdot (\bar{\mathbf{S}}_{i\lambda,z})^T}{N_{z_i} - 1} \quad (2.7)$$

Soit  $\widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda$ , l'estimateur du spectre moyen de la classe " $i$ ". Agençons sous forme de matrice  $\widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda = \langle \mathbf{S} \rangle_{\lambda,i}$ . On peut calculer le spectre moyen global  $\langle \langle \mathbf{S} \rangle_{\lambda,i} \rangle = \langle \langle \mathbf{S} \rangle \rangle_\lambda$  sur tous les spectres moyens de classe. De la même manière, la matrice de l'estimateur de covariance inter-classe s'écrit de la façon suivante, avec  $\overline{\langle \mathbf{S} \rangle}_{\lambda,i}$  les données de chaque classe  $i$ , centrées sur le spectre moyen global :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'} = \frac{(\overline{\langle \mathbf{S} \rangle}_{\lambda,i}) \cdot (\overline{\langle \mathbf{S} \rangle}_{\lambda,i})^T}{N_s - 1} \quad (2.8)$$

L'estimateur de la covariance  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{S}$  s'écrit :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} = \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'} + \sum_{i=1}^{N_s} \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} \quad (2.9)$$

La variance portée par un axe quelconque, de vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  est :

$$\mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u} \quad (2.10)$$

L'AFD revient à déterminer  $\mathbf{u}$  tel que les variances intraclasses soient nulles  $\mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u} = 0$ . C'est à dire que la variance totale soit portée au maximum par la variance inter-classe. L'AFD consiste à maximiser la fonction  $f(\mathbf{u})$  suivante :

$$f(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u}} \quad (2.11)$$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, il est possible de montrer que la solution est :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'} \cdot \mathbf{u} = \Lambda \cdot \mathbf{u} \quad (2.12)$$

L'axe porté par  $\mathbf{u}$  est donc une direction propre de matrice  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda,\lambda'}$ . Il suffit donc de diagonaliser cette matrice, toujours diagonalisable car composition de deux matrices diagonalisables.

L'AFD revient à une ACP sur le nuage de points entier avec une métrique de Mahalanobis.

La méthode de classification associée généralement à l'AFD est très simple. Un spectre quelconque est attribué à la classe  $i$  du spectre moyen  $\langle \mathbf{S}_i \rangle_\lambda$ , le plus proche au sens de la norme  $L^2$ . Dans cette configuration, cette méthode est optimale pour traiter un problème de classification supervisée avec des distributions normales ayant des moyennes différentes mais des matrices de covariances égales.

### 2.3.3 Méthodes utilisant la transformée en ondelette

La "transformée en ondelette" est une transformée temps-fréquence qui permet de décomposer le signal sur des fonctions concentrées à la fois à une position et une échelle donnée. L'annexe 12.3 page 204 présente plus en détail la transformée en ondelette. En général, ce type de transformation est plus adapté

qu'une sélection dans l'espace usuel ou dans l'espace de Fourier, car les spectres comportent des structures d'intérêt - les bandes d'absorption - qui ont une position et une largeur particulières (voir section 1.3.1 page 22). De plus, la superposition de bandes est possible. Les ondelettes sont adaptées aux données spectrales car elles permettent d'extraire des informations, à la fois, sur la position des bandes d'absorption (position du centre) et sur leur échelle (largeur de bande). Dans le cas d'une superposition de bandes d'échelle ou position différentes, la transformée permet aussi leur séparation.

Il existe plusieurs types de transformées en ondelette : continue (Morlet, ...) ou discrète (Haar, ...). Elles sont plus rapides que les convolutions (34). Cependant, la transformée en ondelette de Debauchie est la plus intéressante et certainement la plus utilisée car elle permet d'avoir une base : toutes les ondelettes sont orthogonales entre-elles. Il s'agit donc d'une rotation de l'espace de la base canonique vers une autre base orthonormale !

Les avantages de la base sont aussi quelques fois un inconvénient. Certaines méthodes, comme l'ACP, donnent des résultats similaires indépendamment d'une rotation sur les données initiales. Effectuer une transformation de Debauchie (sans sélection d'un sous espace d'ondelettes), avant l'application d'une méthode de ce type, n'apporte donc rien de plus.

Voici deux méthodes qui utilisent la transformée en ondelette dans le cadre de la réduction de dimensionnalité automatique supervisée :

**Local discriminant Base** Le but de cette méthode est de garder les ondelettes les plus intéressantes pour classer notre signal en créant une base orthonormale qui maximise la discrimination pour une *base de distribution spectrale de référence*. Le nombre de possibilités de sous espace d'ondelettes à tester est énorme et revient au même pour les algorithmes de "band selection" (voir 2.3.1 page 44). Saito (258) propose une solution rapide optimale qui nécessite une mesure de la distance interclasse additive, par exemple : la distance euclidienne usuelle, l'entropie croisée ou encore l'entropie croisée symétrisée. Une version, tenant compte d'une estimation empirique de la densité de probabilité a priori, a été produite (257).

**Sélection utilisant une base de distribution spectrale gaussienne** Une étude (285) propose l'hypothèse de la densité de probabilité gaussienne à chaque spectre de référence. Tous les spectres sont donc définis comme une moyenne et un écart-type en fonction de la longueur d'onde. Il s'agit de trouver le sous-espace d'ondelettes qui discrimine au mieux les spectres. La solution impliquant juste deux classes est analytique. Il reste plusieurs choix pour déterminer le sous-espace, quand l'ensemble des classes doit être pris en compte : union des solutions deux à deux, la meilleure moyenne des solutions deux à deux, une solution suboptimale itérative, solution complète souvent incalculable.

### 2.3.4 Méthodes à noyau

Les méthodes à noyau consistent en une transformation non-linéaire suivie d'une méthode de classification. La transformation non-linéaire préalable est choisie de telle manière à ce que le problème de classification soit plus simple dans le nouvel espace. Un compte rendu de ce type de méthode en imagerie hyperspectrale est donné dans l'article de Camps-Valls et al. (40). En pratique, les transformations non-linéaires qui pourraient faciliter la classification, sont difficilement contraintes par la physique du transfert radiatif.

### 2.3.5 Assemblage de méthodes successives

Toutes ces méthodes de réductions supervisées peuvent être mises en réseau. Ainsi, des chaînes de traitements plus ou moins complexes sont possibles. Citons par exemple une étude qui cumule sélection manuelle et automatique : Koger et al. proposent d'effectuer une sélection manuelle de 10 canaux les plus discriminants sur 2151 initialement (156). Ces 10 canaux sont suivis d'une AFD pour encore réduire la dimensionnalité !

La complexification de ces méthodes de réduction de dimensionnalité permet en général d'augmenter la qualité de la classification. Cependant, si aucune justification par des phénomènes physiques ne vient l'appuyer, la complexification peut être un moyen de s'approcher d'une solution valable pour un échantillon d'apprentissage particulier, mais pas dans un cadre général du problème de télédétection. Une certaine universalité des méthodes est pourtant nécessaire pour leur application aux jeux de données réelles. Les conditions atmosphériques ou d'acquisition (directions d'éclairement et d'observation) sont nécessairement différentes d'une observation à l'autre.

## 2.4 Réduction automatique non-supervisée

Une réduction automatique non-supervisée ne nécessite pas de base de donnée d'apprentissage et s'applique donc directement aux données ! Ce type de méthode est appelé "filters" (179). Il s'agit de réduire la dimensionnalité des données dans un sous-espace tout en conservant le maximum d'information. Il n'y a pas d'optimisation de ce sous-espace spécifiquement pour la classification.

### 2.4.1 Élimination du continuum

Cette méthode n'est pas une méthode de réduction de dimensionnalité car elle ne réduit pas la dimension du spectre. Néanmoins, c'est une transformation qui permet de réduire l'effet du continuum dans la classification. En effet, le continuum est contrôlé par la géométrie d'acquisition, la quantité et la qualité des diffuseurs et le niveau moyen d'absorption (voir section 1.3.1 page 22). En général, l'utilisateur ne s'intéresse pas à ces paramètres lors de la classification, il peut donc être judicieux d'appliquer ce type de méthode sur le spectre.

Il existe plusieurs types de méthodes. Citons simplement celle qui est disponible sous l'environnement IDL/ENVI : "Continuum Removal" qui ajuste une enveloppe convexe au dessus du spectre en se basant sur des points d'appui et des portions linéaires entre ces points d'appui (1; 48). Il s'agit donc d'appliquer une transformation non-linéaire spécifique pour chaque spectre de l'image et de la base de référence.

### 2.4.2 ACP : Analyse en composante principale

Cette méthode est très ancienne. Ses objectifs sont l'élimination du bruit et la réduction de données, voire la classification. Une présentation plus détaillée se trouve dans le livre de Sapora (259).

**Définition et propriétés** Soit la matrice du cube hyperspectral aplatie  $\mathbf{C}_{\lambda,z}$  de  $N_\lambda$  lignes et  $N_z$  colonnes. L'ACP spectrale considère l'indice  $z$  comme un index d'occurrence du vecteur aléatoire des spectres  $\mathbf{S}$ . La cohérence spatiale est entièrement ignorée : intervertir l'ordre des spectres ne changerait pas le résultat !

L'ACP consiste à modéliser le spectre observé  $\mathbf{S}(\lambda)$ , par une relation linéaire à  $N_p$  composantes principales  $P_i$ , axes de mélange  $\mathbf{A}_i(\lambda)$  ainsi que du bruit  $\mathbf{B}(\lambda)$ . La quantité  $P_i$  est une variable aléatoire et  $\mathbf{B}$  est un vecteur aléatoire. La relation linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{A}_i(\lambda) \cdot P_i + \mathbf{B}(\lambda) \quad (2.13)$$

La spécificité de l'ACP est de supposer que les composantes principales  $P_i$  sont non corrélées entre elles. Cette hypothèse est suffisante pour déterminer  $P_i$  et  $\mathbf{A}_i(\lambda)$ . Notons que  $N_p$  et  $\mathbf{B}(\lambda)$  sont liés et qu'il n'existe pas de méthodologie convaincante pour les déterminer.

En écriture matricielle pour tout le cube hyperspectral, avec "i" comme l'index des composantes principales, la relation devient :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} = \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z} + \mathbf{B}_{\lambda,z} \sim \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z} \quad (2.14)$$

Au maximum le nombre de composantes principales est  $N_p = N_\lambda$ . Dans ce cas, il est possible de remplacer l'indice "i" par l'indice "λ".

L'analyse en composante principale consiste à chercher la transformation  $\mathbf{A}_{\lambda,\lambda'}^{-1}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{\lambda',z} = \mathbf{A}_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\lambda',\lambda} \cdot \mathbf{P}_{\lambda',z} = \mathbf{P}_{\lambda,z} \\ \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{P})_{\lambda,\lambda'} = \text{diag} \end{cases} \quad (2.15)$$

La contrainte de covariance nulle pour les termes non-diagonaux implique que les différentes variables aléatoires  $P_i$  sont non corrélées (voir annexe mathématique 12.4.2.7 page 209)

L'estimateur de la moyenne  $\langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_\lambda$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{S}(\lambda)$  s'écrit (voir annexe mathématique 12.4.4 page 212) :

$$\langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_\lambda = \sum_{z=1}^{N_z} \frac{\mathbf{C}_{\lambda,z}}{N_z} = \frac{1}{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{1}_{N_z} \quad (2.16)$$

L'estimateur de la covariance  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{S}$  s'écrit :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} = \frac{(\mathbf{C}_{\lambda,z} - \langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_\lambda \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T) \cdot (\mathbf{C}_{\lambda',z} - \langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_{\lambda'} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T)^T}{N_z - 1} \quad (2.17)$$

Sur ces termes diagonaux :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} = \widehat{\mathcal{V}ar}(\mathbf{S})_\lambda = \sum_{z=1}^{N_z} \frac{(\mathbf{C}_{\lambda,z} - \langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_\lambda)^2}{N_z - 1} \quad (2.18)$$

La matrice de variance/covariance est carrée et symétrique, elle est donc diagonalisable. On peut donc écrire :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda^m,\lambda} = \mathbf{U}_{\lambda^m,\lambda} \cdot \Lambda_{\lambda^m,\lambda} \cdot \mathbf{U}_{\lambda',\lambda}^T \quad (2.19)$$

Avec la matrice diagonale  $\Lambda$  que l'on classe par ordre décroissant des  $N_\lambda$  valeurs propres. La matrice  $\mathbf{U}$  est la matrice de passage, elle contient  $N_\lambda$  vecteurs propres positionnés lignes par lignes. Ils sont tous orthogonaux entre eux, on a donc la relation suivante  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_{N_\lambda}$ , avec  $\mathbf{I}_{N_\lambda}$  la matrice identité.

Soit le vecteur aléatoire  $\bar{\mathbf{S}}$  définit par  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{S}$ . La matrice des occurrences de  $\bar{\mathbf{S}}$  est la suivante :

$$\bar{\mathbf{C}}_{\lambda',z} = \mathbf{U}_{\lambda',\lambda}^T \cdot \mathbf{C}_{\lambda,z} \quad (2.20)$$

$$\langle \widehat{\bar{\mathbf{S}}} \rangle_\lambda = \sum_{z=1}^{N_z} \frac{\mathbf{U}_{\lambda,\lambda'}^T \cdot \mathbf{C}_{\lambda',z}}{N_z} = \frac{1}{N_z} \mathbf{U}_{\lambda,\lambda'}^T \cdot \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{1}_{N_z} = \mathbf{U}_{\lambda',\lambda}^T \cdot \langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_\lambda \quad (2.21)$$

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\bar{\mathbf{S}})_{\lambda^m,\lambda} = \frac{\mathbf{U}_{\lambda^m,\lambda}^T \cdot (\mathbf{C}_{\lambda^m,z} - \langle \widehat{\bar{\mathbf{S}}} \rangle_{\lambda^m} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T) \cdot (\mathbf{C}_{\lambda,z} - \langle \widehat{\mathbf{S}} \rangle_{\lambda'} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T)^T \cdot \mathbf{U}_{\lambda',\lambda}}{N_\lambda - 1} \quad (2.22)$$

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\bar{\mathbf{S}})_{\lambda^m,\lambda} = \mathbf{U}_{\lambda^m,\lambda}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda^m,\lambda} \cdot \mathbf{U}_{\lambda',\lambda} = \Lambda_{\lambda^m,\lambda} \quad (2.23)$$

Ainsi, l'opération  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{S}$  satisfait aux exigences de l'équation de l'ACP (voir équation 2.15) et  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^T$  ou encore  $\mathbf{A} = \mathbf{U}$ .

Récapitulons les propriétés de l'ACP. Il s'agit d'une transformation linéaire d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{S}$  en un vecteur aléatoire  $\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{S}$ . Cette transformation est une rotation de l'espace  $\mathbb{R}^{N_\lambda}$ , car  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ . C'est donc une isométrie qui conserve la norme  $L^2$  usuelle.

L'ACP est indépendante à une isométrie près.

Appliquons, une isométrie  $\mathbf{V}$  au vecteur aléatoire  $\mathbf{S}$ . Le nouveau vecteur aléatoire s'écrit  $\mathbf{S}' = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{S}$ . Reprenons les étapes de l'ACP pour  $\mathbf{S}'$ . La matrice de covariance s'écrit maintenant :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}') = \mathbf{V}^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}) \cdot \mathbf{V} \quad (2.24)$$

Il est possible de la diagonaliser :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}') = \mathbf{W}^T \cdot \Lambda \cdot \mathbf{W} \quad (2.25)$$

La diagonalisation est identique à la précédente (voir équation 2.19) car  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ , d'où  $\mathbf{W}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{U}$ . Dans la nouvelle base, elle s'écrit bien :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\tilde{\mathbf{S}}') = \mathbf{W} \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}') \cdot \mathbf{W}^T = \Lambda \quad (2.26)$$

Dans ce cas, le nouveau vecteur aléatoire de l'ACP s'écrit  $\mathbf{P} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{S}' = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}' = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{S}$ .

La rotation dans les axes propres de l'ACP étant une isométrie, il est donc inutile d'opérer deux ACP successives. De la même manière, l'application d'une transformée en ondelette isométrique (Debauchie) préalable à une ACP n'a pas d'effet. Les nouvelles variables aléatoires  $P_i$  sont décorrélatées et sont portées par des axes orthogonaux (les directions propres de la matrice de covariance).

Les  $N_\lambda$  valeurs propres de la matrice  $\Lambda$  correspondent aux variances des  $N_\lambda$  variables aléatoires  $P_i$ .

Il existe deux ACP. Celle présentée ici, sur les données observées, consiste en la diagonalisation de la matrice de covariance. La seconde s'intéresse aux données blanchies, c'est à dire normalisées pour que toutes les variances soient égales à 1 dans l'espace de départ. Il s'agit alors de la diagonalisation de la matrice de corrélation.

Parfois, l'ACP est aussi présentée par une Décomposition en Valeur Singulière (SVD pour "Singular Decomposition Value" en Anglais). On présente alors la relation matricielle sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Lambda^{1/2} \cdot \mathbf{V}^T$  avec  $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ . C'est aussi la transformation de Karhunen-Loeve (259).

L'ACP en présentation géométrique, se résumerait à ajuster un ellipsoïde à  $N_\lambda$  dimension à la population de spectres, au sens de la norme  $L^2$  dans l'espace des données  $\mathbb{R}^{N_\lambda}$ . Chaque axe propre est un axe propre de l'ellipsoïde.

Une présentation probabiliste consiste à prétendre que l'ACP est un ajustement d'une densité de probabilité gaussienne aux données et de ce fait, ignorant les moments d'ordres supérieurs à 2.

**Filtrage du bruit** Si le bruit est gaussien, indépendant du signal et de variance plus faible que le signal, il est possible de séparer le signal du bruit en appliquant un seuil sur les valeurs propres. Il existe deux stratégies.

La première consiste à forcer le nombre de variables aléatoires  $N_p$ . Cette approche peut être conduite si la dimension de l'espace réduit est contraint par des considérations extérieures. Par exemple la représentation dans un "scatterplot" impose deux dimensions (voir section 3.1.1 page 61).

La seconde consiste à éliminer les variables aléatoires  $P_i$  ayant des variances plus faibles qu'un seuil. La distinction entre sous-espace signal et sous-espace bruit peut s'écrire comme la somme suivante, avec  $1 \leq i \leq N_p$  comme indice de l'espace signal et  $N_p + 1 \leq j \leq N_\lambda$  comme indice de l'espace bruit :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} = \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z} + \mathbf{A}_{\lambda,j} \cdot \mathbf{P}_{j,z} \quad (2.27)$$

En pratique, on néglige le deuxième terme de la somme (le sous-espace bruit). Il n'est donc pas nécessaire de calculer les projections dans l'espace bruit !

**ACP itérative** "ACP itérative" : Il est possible d'écrire l'ACP pour l'appliquer de façon itérative (voir (259)). En écrivant l'opération de centrage des données comme :

$$\check{\mathbf{C}}_{\lambda,z} = \mathbf{C}_{\lambda,z} - \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T = \mathbf{C}_{\lambda,z} - \frac{1}{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{1}_{N_z} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T = \mathbf{C}_{\lambda,z} \left( \mathbf{I}_{N_z} - \frac{1}{N_z} \mathbf{1}_{N_z} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T \right) \quad (2.28)$$

Introduisant  $\mathbf{O}_{z',z} = \mathbf{I}_{N_z} - \frac{1}{N_z} \mathbf{1}_{N_z} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T$ , on peut donc écrire la relation suivante :

$$\check{\mathbf{C}}_{\lambda,z} = \mathbf{C}_{\lambda,z'} \cdot \mathbf{O}_{z',z} \quad (2.29)$$



On peut montrer que la matrice  $\mathbf{O}_{z',z}$  a la propriété suivante :

$$\mathbf{O}_{z,z'} \cdot \mathbf{O}_{z',z}^T = \mathbf{I}_{N_z} - \frac{1}{N_z} \mathbf{1}_{N_z} \cdot \mathbf{1}_{N_z}^T = \mathbf{O}_{z,z} \quad (2.30)$$

La matrice de variance/covariance devient :

$$\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda,\lambda'} = \frac{1}{(N_z - 1)} \check{\mathbf{C}}_{\lambda,z} \cdot \check{\mathbf{C}}_{z,\lambda'}^T = \frac{1}{(N_z - 1)} \left( \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{C}_{z,\lambda'}^T - \frac{1}{N_z} \left( N_z \cdot \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda \cdot N_z \cdot \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_{\lambda'}^T \right) \right) \quad (2.31)$$

Les deux matrices  $\mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{C}_{z,\lambda'}^T$  et  $N_z \cdot \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda \cdot N_z \cdot \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_{\lambda'}^T$  peuvent être calculées itérativement en ajoutant spectre par spectre pour compléter la dimension  $z$  de  $\mathbf{C}_{\lambda,z}$ .

Pour le premier facteur matriciel, la matrice  $\mathbf{C}_{\lambda,z}$  peut être scindée en deux pour tout  $N'_z$  avec  $1 < N'_z < N_z$  et la relation matricielle devient :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{C}_{z,\lambda'}^T = \sum_{z=1}^{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{C}_{z,\lambda'}^T = \sum_{z=1}^{N'_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} \cdot \mathbf{C}_{z,\lambda'}^T + \sum_{z'=N'_z}^{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z'} \cdot \mathbf{C}_{z',\lambda'}^T \quad (2.32)$$

En répétant cette opération de fractionnement autant de fois que nécessaire, il est possible de calculer la matrice pour n'importe quel jeu de données.

Pour le second facteur matriciel, composé de l'estimateur de la moyenne  $\widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda$  (équation 2.16), il suffit d'ajouter les deux parties de la matrice  $\mathbf{C}_{\lambda,z}$  pour tout  $N'_z$  avec  $1 < N'_z < N_z$  et la moyenne matricielle devient :

$$N_z \cdot \widehat{\langle \mathbf{S} \rangle}_\lambda = \sum_{z=1}^{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} = \left( \sum_{z=1}^{N'_z} \mathbf{C}_{\lambda,z} + \sum_{z'=N'_z}^{N_z} \mathbf{C}_{\lambda,z'} \right) \quad (2.33)$$

Le nombre de  $N_z$  est mis à jour itérativement et la division se fait à la fin.

**Interprétation physique** Résumons les hypothèses mathématiques sur le signal :

1. Le signal est un mélange linéaire de composantes principales et d'un bruit gaussien.
2. Les composantes principales sont non corrélées entre elles.
3. Le bruit gaussien est de plus faible variance que le signal.

Dans le cadre de l'analyse des données OMEGA, ces trois hypothèses sont en pratique non valides :

- Le signal est un mélange non-linéaire de sources (mélange intime optique et intime chimique) et le bruit des détecteurs peut être non-gaussien. Les composantes principales ne peuvent pas être des sources.
- Les sources peuvent être corrélées entre elles. Par exemple, la présence de glace de CO<sub>2</sub>, piège froid atmosphérique, entraîne une condensation de glace d'eau associée. Les composantes principales ne sont donc pas des sources.
- Le bruit gaussien est en général de plus faible variance que celle du signal moyen. Cependant, certaines bandes spectrales, notamment du CO<sub>2</sub> solide, sont très peu absorbantes et pourtant, elles sont porteuses d'informations très intéressantes. Elles peuvent avoir une variance plus faible que dans certains canaux très bruités.

Néanmoins, il est possible d'utiliser et d'interpréter les résultats issus de l'ACP dans le cadre de l'imagerie hyperspectrale. L'interprétation peut être poussée plus ou moins loin :

- **Interprétation faible** : L'ACP compare tous les spectres observés au spectre moyen. Les composantes principales sont portées par les axes propres. Au fur et à mesure que la valeur propre décroît, l'écart au spectre moyen est de moins en moins fort sur l'axe propre. Ces axes correspondent à des tendances spectrales présentes dans l'image. Dans le cadre de la réduction de données, il n'est pas forcément nécessaire d'avoir une interprétation physique des composantes principales. Il suffit de représenter le nuage de points dans un espace à plus faible dimension, ce que réalise l'ACP. Les

hypothèses 1 et 2, ci-dessus, sont donc totalement ignorées pour la réduction de dimensionnalité. Par contre, dans un cadre de séparation de source, l'ACP n'est pas une méthode satisfaisante (voir section 5.3.2).

Les axes portants le plus de variance sont considérés comme les plus intéressants. Les axes portant le moins de variance sont les axes comportant du bruit. Cette interprétation est suffisante pour la réduction de données, puisqu'il suffit dans ce cas d'éliminer les axes de faibles variances. En pratique, pour les observations OMEGA, certains spectels sont très bruités et leur niveau de bruit dépasse largement la variance des petites structures spectrales très intéressantes. Dans le cadre des images hyperspectrales, la variance n'est donc pas un critère suffisant pour discriminer l'information intéressante du bruit. Une façon de résoudre ce problème est d'éliminer le bruit "manuellement", en retirant de l'analyse les spectels les plus bruités que l'on considère comme sans information.

- **Interprétation forte** : En plus de l'interprétation faible, il existe une interprétation plus forte qui consiste en l'attribution d'un ou plusieurs paramètres physiques à chaque composante principale parmi l'albédo, l'angle d'incidence, la composition, la granulométrie, etc .... Certains paramètres étant reliés théoriquement, par exemple l'albédo, la composition et la granulométrie, il est impossible de les séparer. En pratique, cette attribution est très difficile car le problème physique est non-linéaire et les hypothèses 1 et 2 sont clairement violées. Il est néanmoins possible d'observer des tendances en comparant avec d'autres analyses de l'image. Ces interprétations ad hoc peuvent être utiles lors d'une classification manuelle (voir section 3.1 page 61). Cependant, l'expérience montre qu'aucun des axes n'est vraiment clairement interprétable en terme de paramètre physique. Les composantes principales ne sont pas des sources !

L'ACP est un mauvais candidat pour une classification automatique non-supervisée car il ne permet pas d'extraire automatiquement des classes et/ou spectres de référence !

Une propriété intéressante de l'ACP est qu'elle est complètement non supervisée. Le seul paramètre à connaître est le nombre de composantes principales ou de manière équivalente la précision de la reconstruction. Une autre propriété intéressante est la possibilité d'un calcul itératif. Ce qui en fait en pratique, un outil intéressant pour la réduction d'une image individuelle mais aussi pour la réduction cohérente d'une suite d'images.

L'ACP a été utilisée sur les données OMEGA pour effectuer des classifications de la calotte polaire permanente sud de Mars (64) et de la calotte saisonnière nord de Mars (263).

### 2.4.3 MNF : Minimum Noise Fraction

La méthode MNF (98) consiste en trois étapes : une ACP à interprétation faible, suivie d'une élimination de bruit pour finir avec une ACP à interprétation faible ou forte.

1. ACP à interprétation faible : Il s'agit simplement d'estimer le sous espace bruit pour se focaliser sur le signal. C'est une réduction de dimensionnalité des données.
2. Élimination de bruit : Avec un critère sur la variance expliquée, ou sur le nombre de source, il est possible d'éliminer le bruit estimé.
3. ACP à interprétation faible ou forte : Dans un cas idéal, la seconde ACP s'effectue sur des données non-bruitées comportant toute l'information utile. Il s'agit à ce moment d'interpréter de façon faible ou forte le résultat de la nouvelle ACP (voir section précédente).

La succession des deux ACP ne donne pas le même résultat qu'une seule ACP car l'étape de filtrage du bruit est une opération non-linéaire de perte d'informations. Ainsi, les axes de la deuxième MNF sont sensiblement différents de ceux de la première car ils ne sont plus pollués par le bruit.

En pratique, pour les données OMEGA, la MNF offre de meilleurs résultats. Mais pour les raisons discutées précédemment (voir paragraphe sur l'interprétation forte de l'ACP dans la section précédente), la MNF n'est pas une méthode adaptée au problème de séparation de sources sur les images hyperspectrales. L'ACP est un mauvais candidat pour une classification automatique non-supervisée car il ne permet pas d'extraire automatiquement des classes et/ou spectres de référence !

#### 2.4.4 ACI : Analyse en composante indépendante

**Présentation générale des méthodes** L’ACI (170; 127) est une méthode plus récente qui corrige une limitation importante de l’ACP en cas d’interprétation forte : l’orthogonalité des axes. Dans le cadre de l’ACI, les axes sont toujours linéaires mais une opération de rotation s’effectue individuellement pour chaque axe, afin d’obtenir un maximum de dispersion des données.

L’idée majeure est de trouver les axes portant une distribution la moins gaussienne possible. En effet, d’après le théorème central limite, la distribution gaussienne est la distribution limite quand on mélange linéairement une grande quantité de variables aléatoires indépendantes quelles que soient leurs densités de distributions propres (si les distributions ont des moyennes et écart-type convergents) (voir annexe 12.4.3.1 page 210). Ceci indique que plus un axe porte une distribution non-gaussienne, plus il a la chance de s’approcher d’une seule source “pure” indépendante.

Le vecteur aléatoire des spectres  $\mathbf{S}(\lambda)$  est décomposé en  $N_p$  variables aléatoires des composantes indépendantes  $P_i$  :

$$\mathbf{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{A}_i(\lambda) \cdot P_i + \mathbf{B}(\lambda) \quad (2.34)$$

$\mathbf{S}(\lambda)$  : vecteur aléatoire des spectres (dans l’unité choisie)

$\mathbf{A}_i(\lambda)$  : i-ème ligne de la matrice de mélanges qui forme l’axe portant la source “i”

$P_i$  : variable aléatoire de la source “i”

$\mathbf{B}(\lambda)$  : vecteur aléatoire de bruit. Le bruit est supposé en général comme gaussien.

En écriture matricielle pour tout le cube hyperspectral, avec “i” comme l’index des sources, la relation devient :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} = \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot P_{i,z} + \mathbf{B}_{\lambda,z} \quad (2.35)$$

L’ACI est développée plus en détail dans le chapitre consacré à la séparation de source en aveugle (voir chapitre 5 page 91). Les aptitudes de cette méthode dépassent largement la réduction de dimensionnalité.

#### 2.4.5 PP : “Projection poursuit”

La poursuite de projection ou “projection poursuit” (PP) est la vision plus générale des méthodes précédentes (186). Elle a été développée par Friedman et Tuckey en 1974 (90). Il s’agit de déterminer le sous espace utile de dimension réduite, en projetant les données sur des axes choisis itérativement. Le choix se fait par maximisation d’une fonction coût appelée “indice de projection”. Cet indice de projection est déterminé a priori par l’utilisateur (variance élevée, non-gaussianité,...). L’axe est choisi s’il porte un optimum de l’indice de projection.

En ce sens, la poursuite de projection permet de généraliser la méthode d’ACP (variance élevée), ICA (non-gaussianité élevée), à n’importe quel indice de projection ! Arzuaga-Cruz et al. proposent la “distance” de Kullback-Liebler symétrisée (11). Jimenez propose la distance de Bhattacharyya (141). L’autre point majeur qui diffère des ACP/MNF/ACI est le fait que la PP cherche chaque axe itérativement. Il s’agit de trouver le meilleur premier axe, le retirer et recommencer la procédure entière. La limitation majeure de cette méthodologie réside dans l’itérativité : si un certain axe est mal estimé, tous les suivants sont pollués par la contribution résiduelle.

#### 2.4.6 Transformée en ondelette

La transformée en ondelette a été présentée à la section 2.3.3 page 45. Dans le cadre des méthodes non-supervisée, la transformation en ondelette peut être utilisée de différentes façons :

**Méthode de reconstruction par ondelette** Le nombre d'ondelettes nécessaires dans la reconstruction de chaque spectre de l'image est déterminé par la ressemblance entre le spectre reconstruit et le spectre original. En général, le critère de ressemblance est une distance euclidienne. Un simple seuil sur cette distance permet de dire que le spectre est bien reconstruit. Le sous espace intéressant est alors constitué de l'union des ondelettes choisies pour chaque spectre.

En pratique, cette méthode ne semble pas intéressante pour la classification des images OMEGA, car certaines structures spectrales sont de faible énergie, mais sont pourtant très intéressantes. Le danger du simple critère seuil d'énergie est : s'il est trop haut, d'ignorer de l'information très pertinente, s'il est trop faible, de ne pas éliminer le bruit. Ce problème est le même pour les méthodes de types ACP, MNF, ACI dans leur interprétation faible (voir paragraphe sur les interprétations faibles et fortes de l'ACP à la section 2.4.2).

**Best basis algorithm** Le but de cette méthode est de garder les ondelettes les plus intéressantes pour notre signal : élimination du bruit et reconnaissance de forme. L'idée est de garder le sous-espace en ondelette qui comporte le plus d'informations au sens de la néguentropie. Le nombre de possibilités de sous espace d'ondelettes à tester est énorme (voir section 2.3) et la néguentropie est complexe à estimer.

Il existe néanmoins une solution pour la représentation d'un seul spectre (50). Le but est de créer une base orthonormale dans laquelle l'information d'un spectre a le minimum de coût, c'est à dire qui peut être stocké seulement sur un nombre réduit de variables ! Il faut uniquement définir une fonction coût, qui doit être concave et additive (203), par exemple l'entropie. Coifman et al. ont utilisé les propriétés d'arbre des ondelettes pour définir une méthode rapide de détermination de cette base, sans tester l'ensemble des bases possibles (50).

**Réduction pour classification** Une autre méthode originale propose de combiner les approches de réduction et de classification dans le cas non-supervisé. Il s'agit à la fois de classer au mieux les données et de trouver le sous-espace contenant le plus d'informations (179). Il utilise le concept de "Feature saliency" qui est une estimation de la validité du canal dans le but de la classification.

### 2.4.7 Méthodes non-linéaires

Les méthodes de réduction de dimensionnalité non-linéaires sont très mal contraintes car la non-linéarité fait exploser l'unicité des solutions. Ce type de méthode n'est pas très robuste. Néanmoins, certains algorithmes, comme des ACP non-linéaires (195), ou encore des réseaux de neurones (23), s'y attaquent. Une autre approche du type Kernel-ACP suppose une certaine forme de non-linéarité a priori et permet de réduire le nombre de paramètres libres (254; 255) ! Le dilemme de la non-linéarité réside dans le fait que la robustesse diminue mais que ces analyses sont potentiellement plus proches d'une physique réaliste.

Durant cette thèse, j'ai décidé de ne pas aborder ce type de réduction de dimensionnalité à cause du manque de robustesse. Le temps de développement, de calcul, d'ajustement des paramètres clefs et d'interprétation est probablement très long pour reproduire statistiquement la physique. Dans ce cas, ne vaut-il mieux pas une inversion généralisée des spectres sur la base d'un modèle physique ?

## 2.5 Bilan et perspectives

Dressons un bilan sous forme de tableaux comparatifs de toutes ces méthodes de réduction de dimensionnalité et de leurs propriétés relatives à l'analyse des images hyperspectrales, incluant la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Le tableau 2.3 porte sur les méthodes manuelles et supervisées, tandis que le tableau 2.5 se concentre sur les méthodes non-supervisées.

Différents critères sont utilisés pour comparer les méthodes de réduction de dimensionnalité. Ces critères se focalisent surtout dans les propriétés de la transformation de l'espace initial à l'espace réduit :

- (i) la conservation des classes (voir section 1.4.1.2). En effet, les classes doivent être identifiables dans l'espace réduit. Nous allons nous intéresser spécifiquement aux suivantes : classe de présence de corps chimiques, classe d'unité de terrain.
- (ii) l'élimination d'effets indésirables (géométrie d'acquisition, absorption par les gaz atmosphériques, niveau de bruit, recouvrements de bandes d'absorption)
- (iii) des considérations pratiques (type d'échantillon d'apprentissage, temps de calcul).

Décrivons les différents critères d'évaluation et les qualificatifs associées (champ du tableau) :

Le comportement de la "conservation des classes de présence des corps chimiques" dépend fortement de la méthode de réduction.

(a) Toutes les méthodes supervisées supposent que les corps en présence sont connus "(a) a priori". Les corps chimiques a priori exclus, sont donc éliminés.

Alors que, les méthodes non-supervisées ne nécessitent pas cette hypothèse et sont qualifiées d'"(a) a posteriori".

(b) En cas de recouvrement de bandes d'absorption entre corps chimiques différents, les aptitudes des méthodes diffèrent. Le champ "(b) ?" signifie que la méthode de réduction de dimensionnalité n'a pas de disposition particulière.

Le champ "(b) transformation ad hoc" correspond à une transformation mathématique ad hoc opérée sur les canaux afin de séparer les contributions du recouvrement.

Les méthodes, notées "(b) oui", opérant une transformation linéaire ou non-linéaire permettent potentiellement de retirer les contributions du recouvrement.

La "conservation des classes d'unité de terrain" est identique à celle des classes de présence des corps chimiques. Une subtilité vient s'ajouter : les *unités de terrains* ont des caractéristiques de forme des bandes d'absorption similaire.

Le champ "transformation ad hoc difficile", réservé à la sélection manuelle, signifie qu'il est possible d'appliquer une transformation mathématique ad hoc, qui s'intéresse à la forme des bandes. Mais la détermination de cette transformation est délicate.

Pour les autres méthodes, cette propriété de conservation est qualifiée d'"improbable" à "probable", mais il n'existe aucun travail théorique sur cette question. Les méthodes qui opèrent une transformation sur tous les canaux spectraux, ont plus de chance de comporter cette propriété que les méthodes de sélection de canaux.

L'"effet de la géométrie d'acquisition" sur les spectres porte essentiellement sur le continuum (voir section 1.3.1 page 22) mais aussi sur les formes relatives des bandes d'absorption (voir fig. 4.4 page 83). L'élimination au "premier ordre" consiste à s'affranchir du continuum.

Le point d'interrogation "?" signifie que la méthode de réduction de dimensionnalité n'a pas de disposition particulière pour retirer ces effets. Ces méthodes sont potentiellement capables d'éliminer cet effet. Le champ "non" est réservé à la sélection de canaux qui n'opère aucune transformation et donc est incapable de retirer cet effet.

Les "absorptions atmosphériques" sont dues aux absorptions par les gaz. Il est possible pour toutes les méthodes de réduction de dimensionnalité de retirer les spectels pour lesquels la contribution des bandes atmosphériques est dominante. Les méthodes diffèrent en cas de recouvrement de bandes d'absorption atmosphériques et de surface.

Le point d'interrogation "?" signifie que la méthode de réduction de dimensionnalité n'a pas de disposition particulière pour retirer ces effets. Il faudrait des études complémentaires pour déterminer leurs aptitudes.

Le champ "transformation ad hoc" correspond à une transformation ad hoc opérée sur les canaux afin de séparer les contributions des recouvrements.

Le champ "au premier ordre" est attribué à la méthode Wavanglet car des tests synthétiques montrent qu'elle permet de faire une classification indépendante des absorptions atmosphériques (voir annexe 13 page 219). L'effet des aérosols atmosphériques ne peut pas être retiré facilement, il est donc toujours présent dans l'espace réduit pour toutes les méthodes.

Le "niveau de bruit" du sous-espace réduit dépend de l'espace initial (image hyperspectrale pour les

méthodes manuelles et non-supervisées ; base de référence pour les méthodes supervisées). Il est possible pour toutes les méthodes de réduction de dimensionnalité de retirer les spectels fortement bruités et morts.

Un niveau de bruit “faible” est garanti par une sommation ou une transformation non-linéaire impliquant tous les canaux.

Le niveau “moyen” est attribué aux méthodes qui n’appliquent pas de sommation.

Le champ “fort” est réservé à la sélection manuelle qui est basée sur seulement quelques canaux et n’applique pas de sommation. Le niveau de bruit peut aussi être compris comme une sensibilité à la détérioration de certains canaux particuliers.

L’“échantillon d’apprentissage” est la base de données de référence sur laquelle s’opère la réduction de dimensionnalité.

Le champ “image hyperspectrale à traiter” signifie que l’algorithme n’a pas besoin de échantillon d’apprentissage. Attention, des a priori mathématiques et/ou planétologiques sont introduits dans toutes les méthodes.

Le champ “image voire collection d’images hyperspectrales à traiter” est réservé à l’ACP qui peut être appliquée de façon itérative sur un grand nombre d’observations (voir section 2.4.2 page 47).

Les champs “*base spectrale de référence*” et “*base de distribution spectrale de référence*” sont présentées à la section 2.2 page 41.

Le “temps de calcul” est déterminé en fonction d’un nombre d’opérations à effectuer.

Un temps de calcul “rapide” (en moins de quelques secondes sur une machine de bureau pour une observation OMEGA) correspond à un algorithme consistant en quelques opérations très simples (addition, division).

Un temps de calcul “moyen” (en moins de quelques minutes) correspond aux algorithmes statistiques relativement simples.

Les temps “longs” (au delà d’une demi heure) correspondent aux méthodes statistiques les plus complexes. Ces temps de calcul ont été estimés en fonction de la complexité algorithmique de la méthode, il ne s’agit pas de véritable temps de calcul.

Méthodes	Sélection manuelle : rapport de bande	Sélection de canaux	AFD	Ondulette	Noyau	Wavanglet
Conservation des classes d'unité de terrain	transformation ad hoc difficile	improbable	probable	probable	probable	probable
Conservation des classes de présence des corps chimique	(a) a priori (b) transformation ad hoc	(a) a priori (b) ?	(a) a priori (b) oui	(a) a priori (b) oui	(a) a priori (b) oui	(a) a priori (b) oui
Élimination des effets de la géométrie d'acquisition	premier ordre	non	?	?	?	premier ordre
Élimination des absorptions atmosphériques	transformation ad hoc	non	?	?	?	oui
Niveau de bruit par rapport à l'espace initial (image hyperspectrale ou échantillon d'apprentissage)	potentiellement fort car basée sur un très petit nombre de canaux	moyen car basé sur des canaux en petit nombre	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux
Échantillon d'apprentissage	image hyperspectrale à traiter	base spectrale de référence	base de distribution spectrale de référence	base spectrale de référence ou base de distribution spectrale de référence	base de distribution spectrale de référence	base spectrale de référence
Temps de calcul	court	moyen	moyen	moyen	moyen	moyen

TAB. 2.3 – Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de réduction de dimensionnalité manuelles et automatiques supervisées.

Méthodes	Élimination du continuum	ACP/MNF	ACI	PP	Ondelette	Méthodes non-linéaires
Conservation des classes d'unité de terrain	probable	probable	probable	probable	probable	probable
Conservation des classes de présence des corps chimiques	(a) a posteriori (b) ?	(a) a posteriori (b) oui	(a) a posteriori (b) oui	(a) a posteriori (b) oui	(a) a posteriori (b) oui	(a) a posteriori (b) oui
Élimination des effets de la géométrie d'acquisition	premier ordre	?	?	?	?	?
Élimination des absorptions atmosphériques	?	?	?	?	?	?
Espace réduit : niveau de bruit par rapport à l'espace initial (image hyperspectrale ou échantillon d'apprentissage)	moyen car quasi identique à l'image hyperspectrale initiale	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux	faible car sommation de plusieurs canaux
Échantillon d'apprentissage	image hyperspectrale à traiter	image voire collection d'images hyperspectrales à traiter	image hyperspectrale à traiter	image hyperspectrale à traiter	image hyperspectrale à traiter	image hyperspectrale à traiter
Temps de calcul	moyen	moyen	moyen à long	moyen à long	long	moyen

TAB. 2.5 – Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de réduction de dimensionnalité automatiques non-supervisées.



Dans l'étude des surfaces planétaires, certains effets comme la géométrie d'acquisition, ou encore les effets atmosphériques, constituent plutôt des perturbations qu'une source d'information. Il est donc utile dans ces études de réduire voire d'éliminer ces effets, directement dans la réduction de dimensionnalité. Entre autre, la méthode "Wavanglet" développée au cours de cette thèse (voir chapitre 4 page 77), montre bien qu'il est possible de réduire l'effet de ces paramètres. Il serait intéressant d'ajouter une étape à "Wavanglet" qui consisterait à retirer complètement les ondelettes comportant un signal atmosphérique fort. De plus, aucune optimisation de la famille d'ondelettes n'a été opérée, une amélioration significative est attendue pour une famille d'ondelettes qui ressemble fortement aux bandes d'absorption.

Les perspectives de l'approche non-supervisée concernent la réduction de dimensionnalité spectrale, avec la prise en compte des cohérences spatiales, ce qui pourrait permettre d'améliorer encore l'élimination des effets insignifiants. Assurément, les échelles spatiales de variation des effets atmosphériques et géométriques sont différentes de celles des propriétés de surface.



Nous allons uniquement présenter dans ce manuscrit quelques unes des méthodes mathématiques et informatiques qui permettent de faire ce travail de classification sur des données d'images hyperspectrales de télédétection. Dans ce chapitre, nous allons nous limiter aux méthodes d'identification en excluant les méthodes de quantification, objet du chapitre 5 page 91.

La définition de classes, dans le cadre de la télédétection des surfaces planétaires, est décrite dans la section 1.4.1.2 page 33. Il s'agit de spectres acquis ayant des caractéristiques données en commun : présence d'un même corps chimique, même *représentation de surface*, même paramètres physiques au sein de la représentation de surface (taille des grains, abondances, ...). La définition mathématique d'une classe est double : (i) l'ensemble des spectres considérés comme similaires, (ii) un *spectre de référence* muni d'une similitude (en général, définie mathématiquement). Il existe différents types de spectre de référence, décrit dans la section 3.2.1 page 64.

Les méthodes de classifications *manuelles* (section 3.1) laissent à l'utilisateur une entière liberté lors de la création de classes. Il s'agit de sélectionner manuellement les spectres observés qui définissent une classe. Cette sélection par agglomération se fait sur toute une image hyperspectrale, et peut être facilitée grâce à des traitements mathématiques qui permettent la représentation des données dans l'espace de l'*écran couleur*. Ce type de méthode n'impose pas de mathématisation de la similitude. Les classifications manuelles peuvent s'effectuer dans les dimensions spectrales et/ou spatiales.

Les méthodes de classifications *automatiques* ne nécessitent pas la participation d'un utilisateur pour fonctionner, du moins au cours de la phase opérationnelle. Elles fonctionnent grâce à une définition mathématique de la similitude, en général une norme. Les classifications automatiques peuvent s'effectuer dans les dimensions spectrales (voir section 3.2), spatiales (voir section 3.3), voire une combinaison des deux (voir section 3.4).

Les méthodes de classifications automatiques *supervisées* nécessitent un échantillon d'apprentissage, nommé *base spectrale de référence* ou encore *base de distribution spectrale de référence*. L'effet de l'échantillon d'apprentissage est à double tranchant : il permet d'imposer à la solution d'être dans le cadre des possibles compréhensibles, en revanche, il omet des solutions correctes inattendues !

Enfin, les méthodes de classifications automatiques *non-supervisées* ne nécessitent pas d'échantillon d'apprentissage. Ce type de méthode détermine à la fois les groupes et les similitudes. Néanmoins, les similitudes sont toujours définies dans un cadre mathématique bien précis (une distance, par exemple la norme  $L^2$ ). En général, ces méthodes nécessitent un unique a priori difficile à estimer : le nombre de classes ou une distance caractéristique inter-classes qui joue un rôle prépondérant sur les solutions. Si la chaîne complète de réduction et la classification s'opèrent sans aucune information a priori, aucune base de connaissance, on parle alors de *réduction/classification non-supervisée*.

Dans le cas "déterministe", l'indice de classification est binaire : 0 pour la non appartenance du pixel à la classe, 1 pour l'appartenance. Le produit de la classification d'une image hyperspectrale est une suite d'images binaires, une par classe de référence. La *classification déterministe non-exclusive* permet à un seul point d'appartenir à plusieurs classes. Une *classification déterministe exclusive* permet de réduire la suite d'images binaires à une seule, chaque pixel étant labélisé avec un entier naturel constituant un indice de classe. Dans ce cas, chaque pixel n'appartient qu'à une seule classe.

Les deux méthodes sont valables pour la télédétection mais dépendent du problème posé : y-a-t'il des indications a priori pour que les classes soient disjointes ? Dans le cas des surfaces planétaires, si on s'intéresse à la présence de corps chimiques, il s'agit de savoir si un mélange autre que le *mélange géographique résolu* intervient (voir section 1.4.1.1 page 31). Si tel est le cas, les signatures des différents corps chimiques constitutifs sont mélangées et les classes sont non-exclusives.

Si on s'intéresse aux unités de terrains, les classes sont exclusives car un pixel ne peut avoir plus d'une représentation de surface.

Dans le cas "statistique" ou "flou", l'indice de classification est une valeur entre 0 et 1 dans  $\mathbb{R}$  qui exprime la probabilité d'appartenance à une certaine classe. Le produit final de la classification d'une image hyperspectrale est une suite d'images de cet indice pour chaque classe. Certaines méthodes produisent une variable de classification dans  $\mathbb{R}$  qui ne peut pas être interprétée comme une probabilité, comme la distance  $L^2$  à un spectre de référence. Il est possible de se ramener au cas déterministe en

appliquant un seuil.

La classification des données hyperspectrales ne se fait qu'après une réduction de la dimensionnalité spectrale pour contrecarrer le phénomène de Hughes (voir annexe 12.5 page 214) face aux problèmes de représentation des résultats. Cette section présente uniquement la partie de classification, la réduction étant présentée au chapitre précédent.

### 3.1 Classifications manuelles

Les méthodes suivantes sont dites “manuelles” car l'utilisateur crée lui même des paquets qui correspondent aux classes, à partir de l'ensemble des données disponibles. Il n'y a pas de médiation par une fonction mathématique, l'opérateur humain a la liberté de choisir, spectre par spectre, sa classification. La réduction de dimensionnalité préalable n'est utilisée que comme un moyen de représenter l'image hyperspectrale à  $N_\lambda$  dimensions sur un *écran couleur* à deux dimensions. L'utilisateur peut effectuer une classification spectrale, spatiale ou une combinaison des deux approches.

#### 3.1.1 Classification manuelle spectrale : “scatterplot”

Après une réduction de dimensionnalité quelconque (choix manuel des lignes spectrales, ACP, MNF, ACI, PP, K-ACP, ...), la classification s'opère dans un diagramme de dispersion ou “scatterplot” en anglais. Ce diagramme représente un nuage des spectres de l'image dans deux directions de l'espace réduit (il y a une correspondance entre un point, un spectre et un pixel). La représentation du cube est maintenant possible sur un écran couleur. La classification consiste à identifier des groupes de pixels dans cette représentation.

Par exemple, une étude de la calotte permanente sud par Douté et al. utilise cette méthodologie (64). Il s'agit d'interpréter de façon faible (voir section 2.4.2) le résultat d'une MNF (voir section 2.4.3 page 51). Après cette réduction de dimensionnalité spectrale, les deux premiers axes de plus forte variance permettent une nouvelle représentation du jeu de données. L'étape de classification manuelle des spectres s'effectue en regroupant les spectres situés dans des régions considérées comme similaires par l'utilisateur (voir figure 3.1). L'identification des *spectres de référence extrêmes* ou “endmembers” consiste à identifier les quelques spectres aux extrémités du nuage de points (voir figure 3.1).

Citons aussi une étude similaire des condensâts saisonniers au Nord qui présente un nuage de points particuliers (263) (voir fig. 3.2). Cette étude montre que la forme du nuage de points peut être complexe pour certaines observations.

Le sous-espace réduit peut avoir une dimension supérieure à deux. Dans ce cas, cette approche de “scatterplot” n'est plus applicable. Deux alternatives s'offrent à l'utilisateur.

La première consiste à classer les spectres dans tous les “scatterplot” possibles (toutes les combinaisons deux à deux des dimensions de l'espace réduit).

La seconde consiste à produire un “scatterplot” unique avec pour axe, une combinaison des dimensions réduites. Cette approche est produite notamment par nD-Visualiser sous l'environnement IDL/ENVI (1). Ces deux approches sont inutilisables dans le cas où la dimension est très supérieure à 2, d'où la nécessité de réduire la dimensionnalité.

La cohérence des résultats d'une classification manuelle dans l'espace spectral réduit peut être vérifiée en représentant les classes dans l'espace. En effet, si les spectres de surface d'une même classe forment un petit nombre d'unités spatialement connexes, comme on l'attend en Planétologie, la classification semble correcte.

Par exemple, l'étude de Schmitt et al. des condensâts nord de Mars montre que malgré une forme complexe de nuage de points, les classes comportent bien une cohérence spatiale (263) (voir fig. 3.3).

La représentation et l'identification dans un “scatterplot” sont liées à une notion de proximité qui s'apparente à une distance euclidienne de norme  $L^2$  usuelle. Dans un espace sans réduction de dimensionnalité, nous allons voir que cette distance est très fortement dépendante des conditions géométriques

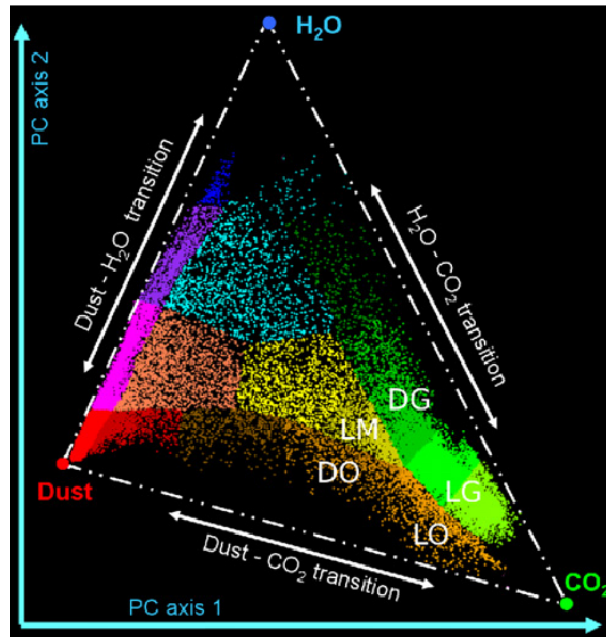


FIG. 3.1 – Classification manuelle spectrale par Douté et al. (64). La phase de réduction de dimensionnalité spectrale MNF produit les deux axes PC 1 et 2. La classification consiste à identifier une collection de points similaires, représentée en couleur sur ces graphes. Les endmembers sont les spectres correspondants aux points les plus proches des pôles de poussière (dust - rouge), d'eau (bleu) et de  $\text{CO}_2$  (vert). Ces pôles, représentés par des points, sont les estimations des spectres  $S_z$  de chaque zone "z" si l'image est uniquement en *mélange géographique subpixel*. La figure 6.4 page 120 représente ces classes sous forme de carte.

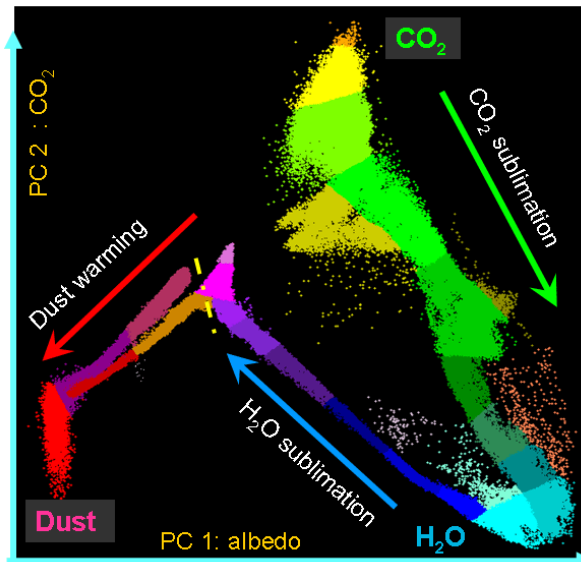


FIG. 3.2 – Classification manuelle spectrale par Schmitt et al. (263). La phase de réduction de dimensionnalité spectrale ACP produit les deux axes PC 1 et 2 interprétés ici de manière forte. La classification consiste à segmenter la collection de points en groupe considéré comme similaire. Ces classes sont interprétées comme des classes d'abondance de corps, représentées en couleur sur ces graphes. Les changements de direction du nuage de points, notées par les flèches, sont interprétées comme des changements de représentation de terrain. La figure 3.3 présente ces classes sous forme de carte.

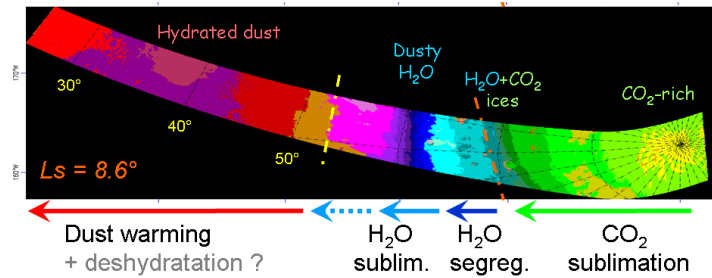


FIG. 3.3 – Représentation en carte des classes déterminées de la classification manuelle spectrale opérée dans un espace réduit (voir fig. 3.2). Cette classification a été réalisée par Schmitt et al. (263).

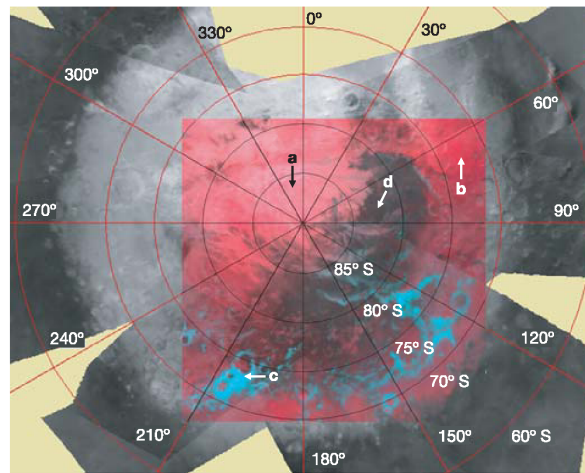


FIG. 3.4 – Classification manuelle spatiale de la calotte saisonnière sud (175). Mosaïque de 10 images OMEGA en projection stéréographique polaire sud. Les points en noir et blanc indiquent l'albédo du continuum  $R(1,07\mu m)$ . Seul l'encadré coloré ne représente pas l'albédo. La couleur rouge correspond à la profondeur de bande  $B_{CO_2}(1,43\mu m)$ . Les couleurs bleue et verte correspondent à  $B_{H_2O}(1,5\mu m)$ . La classification spatiale consiste à identifier visuellement les quatre types de terrains a, b, c et d.

d'acquisition (voir section 4.2 page 82). L'identification manuelle, peut imprimer des biais sur les classes due à la notion de proximité du sens commun.

### 3.1.2 Classification manuelle spatiale : image

Après la réduction de dimensionnalité spectrale, il s'agit de représenter les données spatialement puis, de les classer. Une image est produite, il suffit d'en identifier des régions particulières. Cette méthodologie est proposée, entre autre, par Langevin et al. pour classer la calotte saisonnière sud (175) et l'évolution de la calotte permanente nord (174).

Détaillons la classification de la calotte saisonnière sud de cet article (175). La première étape consiste à faire un choix manuel de lignes spectrales : albédo dans le continuum  $R(1,07\mu m)$  ; profondeur de bande  $B_{H_2O}(1,5\mu m)$  (équation 2.4) ; profondeur de bande  $B_{CO_2}(1,43\mu m)$  (équation 2.6). L'espace réduit de dimension 3 est maintenant représentable sur une image (voir figure 3.4). La seconde étape de classification consiste ici à identifier visuellement quatre régions spécifiques a, b, c et d.

Le sous-espace réduit peut avoir une dimension supérieure à trois axes, ce qui ne permet plus d'appliquer cette approche de représentation en image couleur. Deux alternatives s'offrent à l'utilisateur. La première consiste à classer les spectres dans toutes les images possibles (toutes les combinaisons de trois indicateurs de l'espace réduit). La seconde consiste à produire une "image" unique avec une combinaison linéaire des dimensions ré-

duites. Ces deux approches sont inutilisables dans le cas où la dimension est très supérieure à 3.

La cohérence des résultats peut être vérifiée en représentant la classification spectrale. En effet, si dans un “scatterplot” par exemple, les spectres des terrains d’une même classe sont connexes spectralement, comme on l’attend en Planétologie, la classification semble correcte.

Néanmoins, la cohérence spatiale n’est pas forcément valide, par exemple si des terrains martiens sont en *mélange géographique résolu* en échiquier, de variations spatiales à haute fréquence. C’est le cas pour la région cryptique, composée de terrain de glace de CO<sub>2</sub> et de poussière. Si la cohérence spatiale n’est pas vérifiée, la vérification par cette méthodologie n’est plus valide.

### 3.1.3 Classification manuelle spectro-spatiale : “scatterplot” et image

Dans le cas d’une représentation simultanée des diagrammes de dispersion (“scatterplot”) et de l’image correspondante, l’utilisateur peut effectuer une classification spectro/spatiale rudimentaire. Il peut ainsi imposer des conditions spatiales et spectrales dans l’identification des classes. Cette méthodologie est utilisée grâce à de nombreux logiciels, comme ENVI entre autre. Cependant, comme présenté à la section précédente, la cohérence spatiale n’est pas forcément valide dans toutes les situations des surfaces planétaires. Il faut tenir compte de ce fait dans l’établissement des classes.

Ce domaine d’étude, dont l’objet est la visualisation et la manipulation en temps réel des données en grande dimension, est un domaine encore très actif en ce moment (306). Il existe de nombreux logiciels qui permettent de traiter ce type de problème :

MANET, un logiciel de traitement graphique développé à l’Université d’Augsburg, Allemagne <sup>1</sup>.

ExplorN qui peut gérer jusqu’à 30 dimensions et qui trouve ses origines sur Atari <sup>2</sup>.

XGobi, un logiciel libre de droit <sup>3</sup>.

## 3.2 Classifications spectrales automatiques

Ces méthodes automatiques ne nécessitent pas l’intervention d’un utilisateur pour opérer. Cependant, il faut très souvent ajuster quelques paramètres pour optimiser la classification à un problème spécifique. L’ajustement se fait sur quelques observations clefs (la base de référence, voir section 3.2.1), c’est le stade d’“apprentissage”. Certaines méthodes nécessitent des bases spectrales de référence (voir section 3.2.2), voire des bases de distribution spectrales de référence (voir section 3.2.3). Au stade “opérationnel”, ces méthodes automatiques ne nécessitent plus l’intervention d’un opérateur.

Les méthodes de classification non supervisées sont présentées à la section (voir section 3.2.4).

Il est possible pour améliorer la classification de mettre en série et/ou en parallèle ces différentes méthodes. En général, il n’existe pas de raison théorique profonde à ces assemblages. Simplement, l’idée principale est de procéder par tâtonnements pour produire un algorithme qui classe au mieux les données.

### 3.2.1 Base de référence

Le propre de toute méthode automatique est la base de données d’apprentissage appelée : *base de référence*. Les bases de références composées d’un seul spectre par classe sont notées : *bases spectrales de référence*. Les bases comportant plusieurs occurrences de spectre par classe sont dénommées *bases de distribution spectrale de référence*. Les spectres peuvent avoir quatre origines différentes :

1. un ensemble de mesures de référence (spectres de laboratoire ou sur le terrain au sol)
2. un ensemble de spectres synthétiques générés par un modèle
3. une image caractéristique avec une “vérité terrain” dont on dispose de manière indépendante des données observées,

---

<sup>1</sup><http://stats.math.uni-augsburg.de/Manet/odds.html>

<sup>2</sup><http://science.gmu.edu/~rmoustaf/explorN.html>

<sup>3</sup><http://lib.stat.cmu.edu/general/XGobi/index.html>

4. un ensemble de spectres représentatifs extraits manuellement ou automatiquement à partir des données observées à classer.

Ce dernier type de méthode n'est pas toujours très satisfaisant pour comparer les classifications de plusieurs observations entre elles, car la référence change d'image en image.

Ces dernières sont décrites en détail dans la section 2.2 page 41.

### 3.2.2 Classification supervisée qui nécessite une base spectrale de référence

Un seul spectre caractéristique par classe est nécessaire pour effectuer la classification. Deux types méthodologies utilisant un indicateur de similitude entre spectres caractéristiques et spectres de l'image existent.

La "classification à seuil" permet, à l'aide de seuils définis sur des échantillons d'apprentissage, d'établir le critère de ressemblance minimum entre le spectre observé et le spectre de référence. Cette méthodologie peut être relativement lourde s'il faut établir des seuils pour toutes les classes de l'image, surtout si le nombre de classes est grand. C'est une classification déterministe non-exclusive qui ne classe pas forcément tous les spectres mais dont la fiabilité est élevée.

En revanche, la "classification au plus proche" ne nécessite pas de seuil puisqu'elle classe un spectre observé dans la classe du spectre de référence le plus proche, au sens de la distance ou de la pseudo-distance choisie. C'est une classification déterministe exclusive car tous les spectres sont classés dans une unique classe dont la fiabilité est faible.

Dans les présentations suivantes, nous ne déclinons pas ces deux méthodologies mais nous insistons plutôt sur la définition de l'indicateur de similitude, choix primordial dans ce type de méthode.

#### 3.2.2.1 Classification à seuil dans l'espace réduit

La méthode la plus simple de classification est d'établir un seuil directement sur une ou plusieurs des dimensions du sous-espace réduit. Il s'agit d'ajuster manuellement le seuil lors de la phase d'apprentissage puis, de l'utiliser pour une classification. Plus généralement, on peut segmenter le sous-espace réduit en autant d'intervalles que de classes. Citons quelques exemples de classification à seuil :

Le seuil de détection de la glace de CO<sub>2</sub> déterminé par Langevin et al. sur les observations OMEGA est de 0,99 sur le ratio  $R_{CO_2}$  (172) (voir équation 2.6). Si le ratio est inférieur à 0,99, il y a détection de CO<sub>2</sub>.

La méthode des parallélépipèdes consiste à segmenter l'espace réduit en parallélépipèdes. Chacun correspond à une classe. La phase d'apprentissage consiste à définir les seuils des bords du parallélépipède dans l'espace réduit. En phase d'application, il s'agit d'attribuer tous les spectres contenus dans le parallélépipède (1; 251).

Les difficultés des méthodes à seuils résident dans deux problèmes : la détermination des seuils, la dépendance de l'espace réduit aux effets gênants (conditions géométriques d'acquisition, absorptions atmosphériques).

La détermination des seuils est trop délicate pour que la classification soit applicable sur des données réelles, puisqu'il faut déterminer des seuils valables pour la collection entière d'images à traiter. Dans une étude de la cryosphère terrestre, à l'aide des données du spectro-imageur Hyperion à bord de Earth Observing 1 (NASA), Doggett et al. s'intéressent à cinq classes : eau liquide, neige, glace compacte, nuage et sol. Ils proposent une méthodologie pour déterminer ces classes à partir de 18 seuils sur des rapports de bandes impliquant seulement 7 canaux parmi les 242 de l'instrument. Ils ont optimisé ces 18 seuils à partir d'une base de distribution spectrale de référence de 134 scènes naturelles typiques associées de vérités terrain.

Les propriétés de la réduction de dimensionnalité, concernant l'élimination des effets des conditions géométriques, sont très importantes. Le ratio  $R_{CO_2/H_2O}$  illustre bien ce problème (voir équation 2.3). Il a été utilisé comme méthode de référence de détection de glace d'eau et de CO<sub>2</sub> pour la méthode Wavanglet (262) (voir annexe 13 page 219). Ce ratio dépend très fortement des conditions d'illumination. Au point qu'il n'est pas possible d'appliquer un même seuil de détection pour la collection d'images



OMEGA. Appliquer un seuil sur ce ratio  $R_{CO_2/H_2O}$  n'est pas une méthodologie de classification qui peut être généralisée sur une collection d'images.

### 3.2.2.2 Distance

La notion de distance est la traduction symbolique en mathématique du concept de comparaison et de ressemblance (voir annexe 12.1 page 199). La classification incorpore naturellement la notion de distance. En pratique, dans l'espace usuel des fonctions mesurables, il s'agit fréquemment de la distance en norme  $L^2$  mais toutes les distances sont possibles !

Par exemple, la norme  $L^2$  entre un point de coordonnées  $\mathbf{x}$  et un spectre de référence  $\mathbf{E}_i$  :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{E}_i\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{E}_i)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{E}_i)} \quad (3.1)$$

Cette méthode est très courante (171; 147). Elle peut être appliquée après une réduction de dimensionnalité, dans un espace où la classification est plus facile (156). La distance  $L^2$  est disséquée par Keshava (147) qui montre qu'elle est invariante par permutation d'axe, additive et monotone.

On peut choisir de pondérer l'espace par une métrique  $\mathbf{M}$  quelconque, la distance devient alors :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{E}_i)^T \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{E}_i)} \quad (3.2)$$

Par exemple, la métrique de Mahalanobis est intéressante parce que certains canaux spectraux sont aussi pertinents que d'autres mais leur variabilité peut être plus faibles. Dans ce cas,  $\mathbf{M} = \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda, \lambda'}^{-1}$ .

Soit l'opération en deux étapes : (i) réduction de dimensionnalité supervisée de Fisher, aussi appelée Analyse Factorielle Discriminante (chapitre 2.3.2 page 44), (ii) suivie d'une classification en norme  $L^2$ . Cette opération peut aussi s'écrire comme une classification munie d'une distance avec la métrique  $\mathbf{M} = \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S})_{\lambda, \lambda'}^{-1} \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\langle \mathbf{S} \rangle)_{\lambda, \lambda'}$ .

Dans un espace sans réduction de dimensionnalité, nous allons voir que la distance euclidienne  $L^2$  est très fortement dépendante des conditions géométriques d'acquisition (voir section 4.2 page 82). Le choix d'une distance n'est pas anodin : il influence donc les résultats de manière non négligeable, notamment sur l'effet du continuum dans la classification.

D'un point de vue théorique, la distance  $L^2$  n'est pas satisfaisante en grande dimension (voir annexe 12.5.2 page 214).

### 3.2.2.3 Angle ou corrélation

Le coefficient de corrélation indique la ressemblance entre deux vecteurs normalisés (171).

$$corr(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{E}_i \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{E}_i\|} = \frac{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_i}{\sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{E}_i^T \cdot \mathbf{E}_i}} \quad (3.3)$$

Un coefficient de 0 indique une décorrélation, +1 une corrélation parfaite et -1 une anticorrélation. Le coefficient de corrélation n'est pas une distance au sens mathématique. Les méthodes de classification les plus courantes utilisent plutôt son interprétation géométrique, c'est à dire l'angle  $\Delta$  défini comme :

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) = \arccos(corr(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i)) \quad (3.4)$$

L'angle est une distance sur l'hémisphère des spectres normalisés (voir annexe 12.1.2.3 page 201). La méthode est alors plus connue sous le nom de SAM (Spectral Angle Mapper) disponible notamment sous le logiciel ENVI® (1). Cette méthode donne de très bons résultats de classification car elle est indépendante du niveau moyen du spectre, comme le confirme une étude en agriculture portant sur 293 points de "vérité terrain" (281). Cette distance est analysée par Keshava (147) qui montre que l'angle est invariant par un facteur multiplicatif près, non-additif et non-monotone.

Dans un espace sans réduction de dimensionnalité, nous allons voir que l'angle SAM est très peu dépendant des conditions géométriques d'acquisition (voir chapitre 4.2 page 82). Néanmoins, cette méthode

dépend fortement de l'adéquation entre les tailles de grains des spectres de références et des spectres observés. L'angle est donc intéressant pour la classification automatique car il affiche une indépendance au niveau moyen du spectre, dans le sous-espace réduit. En revanche, en cas de recouvrement de bandes d'absorption de différents corps, l'angle ne semble pas satisfaisant.

### 3.2.2.4 SFF<sup>TM</sup> : Spectral Feature Fitting

La méthode SFF<sup>TM</sup> (Spectral Feature Fitting) est incluse dans le logiciel IDL/ENVI (1; 47). Il s'agit d'une mise à l'échelle du spectre de référence pour coller au mieux au spectre observé, en prenant soin au préalable que les continuum de tous les spectres soient retirés. La méthode d'élimination du continuum a déjà été présentée au chapitre précédent (2.4.1 page 47).

L'indicateur de présence est le facteur d'échelle. En appliquant un simple seuil sur cet indicateur, cette méthodologie produit une classification. De plus, ce facteur lui permet de prétendre à la quantification du spectre en présence. Nous allons discuter ce point dans le chapitre concernant la séparation de sources (voir section 5.2.3 page 97).

Nous montrons, à l'aide de tests sur des observations synthétiques, que la méthode SFF<sup>TM</sup> est en fait très dépendante des conditions géométriques et de l'adéquation des tailles de grains entre les spectres de références et les spectres observés (voir section 4.2 page 82). Elle n'est donc pas pertinente dans la classification des surfaces planétaires.

### 3.2.2.5 Utilisation conjointe de plusieurs classifieurs

Une utilisation simultanée de deux ou plusieurs classifieurs est possible. Citons par exemple un assemblage de la corrélation et la distance proposée par Lennon (186). La règle de décision d'appartenance à la classe  $i$  est basée sur l'indicateur de ressemblance suivant :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) = \sqrt{(N_1 \cdot \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i))^2 - (N_2 \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i))^2} \quad (3.5)$$

Les paramètres  $N_1$  et  $N_2$  sont déterminés par l'utilisateur. Aucun fondement théorique ne permet de prétendre qu'ils sont constants pour tous les spectres de références, ni même pour des conditions géométriques d'illuminations différentes.

L'utilisation conjointe de plusieurs classifieurs n'a aucun fondement dans le transfert radiatif des milieux planétaires. La complexification ad hoc des méthodes de classification ne semble pas être pertinente. De plus, elle introduit des paramètres additionnels dont la valeur optimale varie potentiellement d'une image à l'autre.

## 3.2.3 Classification supervisée qui nécessite une base de distribution spectrale de référence

Un échantillon de spectres statistiquement représentatifs pour chaque classe est nécessaire pour effectuer la classification. Il faut donc une base de spectres de référence beaucoup plus fournie qu'avec les méthodes précédentes. Elle peut être constituée pour chaque classe par un ensemble de spectres : un ensemble de mesures de référence, un ensemble de spectres synthétiques, une "vérité terrain" ou un ensemble de spectres représentatifs extraits de l'observation (voir section 3.2.1 page 64).

Il n'existe aucune considération théorique d'une distribution de classe. Pour répondre à ce problème, il existe deux alternatives : soit poser une densité de probabilité a priori (méthode paramétrique), soit s'en affranchir (méthode non-paramétrique).

### 3.2.3.1 Méthode statistique paramétrique

Dans le cas "paramétrique", on associe une densité de probabilité paramétrique à chaque classe. La première étape consiste à déterminer les paramètres de la distribution statistique (moyenne, variance,

covariance pour une gaussienne). Il faut s'assurer que les estimateurs de ces paramètres soient convergents, non-biaisés et le plus efficace possible (voir annexe 12.4.4).

La seconde étape consiste à déterminer la règle de décision d'appartenance à une classe. La règle la plus simple est l'attribution à la classe la plus probable (classification exclusive). Aussi, il est possible d'utiliser une approche de contour d'isoprobabilité (classification non-exclusive). Dans ce cas, tous les spectres, situés dans la portion d'espace de probabilité d'appartenance plus forte que X% (X déterminé par l'utilisateur), appartiennent à la classe.

Dans le cas d'une distribution gaussienne, il est possible de déterminer la probabilité d'appartenance à partir d'une distance. Considérons une *base de distribution spectrale de référence* comme une distribution gaussienne d'estimateur de moyenne  $\langle \widehat{\mathbf{S}_i} \rangle_\lambda$  et de matrice de variance/covariance intraclasse  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}$ . La probabilité d'appartenance à la classe  $i$  en un point  $\mathbf{x}$  de l'espace ne dépend que de la distance suivante (171) :

$$d(\mathbf{x}, \langle \widehat{\mathbf{S}_i} \rangle_\lambda)^2 = -\frac{1}{2} \ln \left| \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} \right| - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \langle \widehat{\mathbf{S}_i} \rangle_\lambda)^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \langle \widehat{\mathbf{S}_i} \rangle_\lambda) \quad (3.6)$$

Cette distance est une distance euclidienne, avec la métrique  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}^{-1}$  propre à chaque espèce de référence, avec un terme additionnel (voir Annexe 12.1 page 199).

La classification dans un espace à grande dimension semble être grandement améliorée avec la statistique d'ordre 2 (voir annexe 12.5.2 page 214).

### 3.2.3.2 Méthode statistique non-paramétrique

Il existe des méthodes qui ne supposent aucune distribution spectrale de référence. Il s'agit des méthodes non-paramétriques. Elles sont basées uniquement sur l'ensemble des spectres de référence. L'utilisation d'une méthode non-paramétrique paraît intéressante dans le cadre des surfaces planétaires car il n'existe pas d'argument théorique sur une fonction de densité de probabilité de classe.

La classification K-NN pour K-Nearest Neighbor est un exemple de méthode non paramétrique. Il s'agit de classer un point dans la classe de la majorité de ses K spectres de référence les plus proches voisins au sens d'une norme, euclidienne par exemple (171). Il est possible d'utiliser toutes les distances possibles (voir annexe 12.1 page 199). C'est une classification exclusive uniquement.

La distance choisie influence fortement le résultat de la classification et il n'existe aucun argument pour choisir une distance plutôt qu'une autre.

### 3.2.3.3 Support Vector Machine : SVM

La méthode du Support Vector Machine (SVM) consiste à séparer l'espace en portions, chacune étant associée à une classe. Une brève exposition de cette méthode peut être trouvée dans le livre de Saporta (259). Cette méthode particulière n'est pas sensible au phénomène de Hughes (voir annexe 12.5 page 214), propriété intéressante pour toutes les données à grande dimension. Ce qui explique son utilisation dans des champs très vastes, comme en biologie pour la classification de gènes (101).

En phase d'apprentissage, un algorithme détermine les meilleurs hyperplans qui séparent les différentes classes deux à deux. Ensuite, il suffit de calculer le positionnement des nouvelles données par rapport aux différents hyperplans de séparation de l'espace pour effectuer une classification.

Soit un hyperplan séparant les classes  $i$  et  $i'$ . Il est défini par le vecteur orthogonal  $\mathbf{w}_{i,i'}$  (Support Vector) et l'ordonnée à l'origine  $\mathbf{b}_{i,i'}$ . L'équation de hyperplan est définie par  $\mathbf{w}_{i,i'} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_{i,i'} = 0$ , avec  $\mathbf{x}$  la variable d'espace. La fonction  $sign(\mathbf{w}_{i,i'} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_{i,i'})$  détermine si on est d'un côté ou de l'autre de l'hyperplan.

Soit les paires  $(\mathbf{S}_i^j, y_j)$  qui correspondent aux spectres d'apprentissage  $\mathbf{S}_i^j$  et à leur classification  $y_j$  (+1=appartenance : -1=non-appartenance). L'équation fondamentale consiste à trouver les paramètres  $(\mathbf{w}_{i,i'}, \mathbf{b}_{i,i'})$  tels que :

$$y_j(\mathbf{w}_{i,i'} \cdot \mathbf{S}_i^j + \mathbf{b}_{i,i'}) - 1 \geq 0 \quad (3.7)$$

La solution classique utilise les multiplicateurs de Lagrange, mais d'autres méthodes de résolution sont possibles, par exemple un algorithme génétique (234).

Très souvent cette méthode de classification, à cause de la non-linéarité du problème de télédétection, est appliquée après un changement d'espace. Citons par exemple, des études utilisant une transformée en ondelette préalable (17), ou une transformation à noyau (184), voir des noyaux spectro-spatiaux (41).

La fonction discriminante entre classes est un hyperplan. Cette approximation n'a aucun fondement théorique et semble même quelque peu réductrice aux vues des non-linéarités du transfert radiatif. De plus, cette méthode de classification est exclusive : chaque spectre appartient à une seule classe. Cette propriété n'est pas intéressante pour la classification des glaces d'eau et de CO<sub>2</sub> qui coexistent sur Mars.

### 3.2.3.4 Réseau de neurones

Ce genre de méthode, simplement mentionnée ici, correspond à une approche neuro-mimétique. Il s'agit de créer un modèle synthétique non-linéaire qui s'approche au mieux du modèle physique via l'échantillon d'apprentissage. Une fois le modèle construit, en phase d'utilisation, la méthode classe les spectres observés. Plusieurs types de réseaux de neurones sont possibles (22). Par ailleurs, leur efficacité dans la reconnaissance de forme a été démontrée (71). De nombreuses études ont été conduites en imagerie hyperspectrale, comme une étude comparative de différentes méthodes sur une image en Espagne (235), au Japon (231).

Il n'existe aucun argument qui montre qu'un réseau de neurones puisse mimer correctement la physique du transfert radiatif dans les milieux planétaires, ni même qu'il puisse converger vers une solution unique.

## 3.2.4 Classification spectrale non-supervisée

Ces méthodes sont connues sous le nom de "clustering" en anglais. Il s'agit de classer automatiquement les données sans échantillon d'apprentissage, ni même de connaissances a priori sur les ressemblances. Il existe deux grandes familles : les classifications hiérarchiques qui découpent les données en arbre et les classifications partitionnantes (parmi lesquelles les classifications dites paramétriques qui supposent une fonction de densité de probabilité pour chaque classe).

Le problème majeur de ces méthodes de clustering est l'indétermination sur le nombre de classes (ou la distance maximale intra-classe pour la classification hiérarchique) qui doit pourtant être déterminée a priori.

### 3.2.4.1 Classification hiérarchique - Arborescence

La façon la plus simple de classer, mais certainement la plus coûteuse, est de comparer tous les spectres entre eux munis d'une distance. L'étape suivante consiste à représenter les individus sous forme d'une arborescence qui permet de mettre en correspondance les spectres de l'image les plus proches (259). La comparaison la plus simple est la distance euclidienne entre spectres mais toute autre distance est possible (voir annexe 12.1 page 199). L'étape de classification consiste à appliquer une distance maximale entre spectres au sein d'une même classe. Plus cette distance limite est grande, plus le nombre de classes est réduit.

Pour une observation comportant un grand nombre de spectres, les méthodes hiérarchiques comparant tous les spectres entre eux paraissent peu utilisables, car très gourmandes en temps de calcul. De plus la méthode dépend fortement des propriétés de la distance choisie. Il n'existe aucune raison théorique qui montre qu'une seule distance puisse effectuer toutes les classifications d'intérêt planétologique.

### 3.2.4.2 Mélange de processus gaussiens : K-mean et améliorations

Il n'existe pas de fondement théorique d'appréciation des densités de probabilités d'une classe, la distribution gaussienne n'a donc pas de justification. Néanmoins, d'après le théorème central limite, si le vecteur aléatoire d'appartenance est une somme de processus aléatoires indépendants, la densité de

probabilité gaussienne peut être justifiée (voir annexe 12.4.3.2 page 211). Cependant, le transfert radiatif est fortement non-linéaire, il n'y a donc pas d'argument pour valider cette distribution.

La classe  $i$  est modélisée par un processus aléatoire de densité de probabilité gaussien  $f_{\mu_i, \Sigma_i}(\lambda)$ , de moyenne  $\mu_i$  et de matrice de covariance  $\Sigma_i$ . La densité de probabilité totale est l'union des densités de probabilité de chaque classe :

$$f_{\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i \cdot f_{\mu_i, \Sigma_i}(\lambda) \quad (3.8)$$

avec  $\alpha_i$  la proportion de mélange telle que :

$$\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i = 1 \quad (3.9)$$

L'approche classique de résolution de ce système est de chercher le maximum de vraisemblance avec un algorithme d'Expectation/Maximisation (16) (voir annexe 12.4.2.6 page 209). Une approche plus récente propose de chercher le maximum de la probabilité espérée a posteriori (161).

Sans réduction de dimensionnalité préalable, ces méthodes sont sujettes à la malédiction de la dimensionnalité. En effet, les paramètres à estimer sont  $\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i$  pour toutes les classes. On peut montrer facilement que le nombre de paramètres devient vite très grand devant le nombre de spectres quand la dimensionnalité augmente. Charles Bouveyron propose la méthode HDDC (High Dimensional Data Clustering) adaptée aux données à grande dimension (31). Il s'agit de supposer que la matrice de covariance intra-classe  $\Sigma_i$  a une dimension  $N < N_\lambda$ . Autrement dit, la matrice  $\Sigma_i$  a un certain nombre de valeurs propres nulles, dans sa propre base. Cette approche réduit le nombre de paramètres à estimer et donc réduit la malédiction de la dimensionnalité.

L'automatisation de ces méthodes pour de larges collections d'images n'est possible que si ces méthodes sont relativement indépendantes des effets indésirables : des conditions géométriques ou la superposition des bandes d'absorption de corps différents... Dans un espace sans réduction de dimensionnalité, nous allons voir que la distance euclidienne, sur laquelle est basée ces méthodes à densité de probabilité gaussienne, est très fortement dépendante des conditions géométriques et de l'adéquation entre les tailles de grains des spectres de références et des spectres observés (voir chapitre 4.2 page 82). La densité de probabilité gaussienne et la distance euclidienne influencent donc les résultats de manière non négligeable, notamment sur sa dépendance au niveau moyen du spectre dans le sous-espace réduit. De plus, il est possible que les matrices de covariance intra-classe varient en fonction des conditions géométriques ce qui rend cette méthode peu utilisable dans le cadre de l'imagerie hyperspectrale de télédétection sans correction particulière. Cet effet est visible notamment sur les résultats avec une observation OMEGA, présentés dans l'article de Bouveyron et al. (31).

Enfin, le problème majeur de ces méthodes de clustering est l'indétermination sur le nombre de classes qui devrait être déterminée a priori.

### 3.2.4.3 Mélange de processus laplacien : K-median

En reprenant la méthodologie du mélange de processus gaussiens (voir équation 3.8) mais en substituant la densité de probabilité de Laplace à celle de Gauss, l'algorithme prend le nom de K-median. Il est cette fois-ci basé sur la distance  $L^1$  qui est plus robuste face aux événements extrêmes. Ainsi, les spectels chauds qui ont des événements extrêmes assez fréquents n'influencent que de manière réduite le résultat. Cette méthode a été notamment développée par Cord et al. (54). De plus, cette étude montre que la convergence vers l'optimum s'effectue en moins d'itérations que pour la méthode K-mean. En revanche, le temps d'estimation du médian est plus long que celui de la moyenne.

### 3.3 Classification spatiale automatique

De manière identique aux classifications spectrales, nous pouvons décliner les mêmes typologies de classification aux méthodes spatiales, à savoir les méthodes automatiques supervisées et automatiques non-supervisées.

La transposition du domaine spectral au domaine spatial n'est pas directe. En effet, les spectres sont des tenseurs d'ordre 1, c'est à dire des vecteurs, tandis que les images sont des tenseurs d'ordre 2, c'est à dire des matrices. Les méthodes associées sont donc quelques peu différentes mais l'analyse de l'information spatiale, appelée "texture", permet des classifications. Différentes techniques d'estimation de paramètres définissant la texture, utilisant les fractales entre autre (238), sont possibles.

Citons une autre étude récente de Kolaczyk et al. qui propose une classification utilisant une hiérarchie de classe (160). Dans le cadre de la télédétection des surfaces planétaires, l'aspect hiérarchique est pertinent dans la suite de classes suivante : classe de présence d'un corps chimique, d'une association de corps chimiques, d'une représentation de terrain puis d'une *unité de terrain* (voir 1.4.1.2 page 33).

Nous n'allons pas présenter en détail les méthodes de classification spatiales car elles occultent l'aspect spectral qui est la partie essentielle de l'apport de l'imagerie hyperspectrale. Néanmoins, lorsque ces méthodes sont utilisées après une réduction de dimensionnalité spectrale (voir chapitre 2 page 37), elles sont intéressantes pour la classification d'imagerie hyperspectrale. Cette méthodologie a été approfondie dans la thèse de Robin Girard de l'IMAG (Grenoble).

### 3.4 Classification spectro-spatiale automatique

La classification spectro-spatiale permet de faire une classification en utilisant à la fois la cohérence spatiale et spectrale pour permettre des classifications plus précises. L'exposition de ces méthodes n'est pas exhaustive car aucune n'a été utilisée durant cette thèse. Il s'agit simplement de mentionner leur existence.

#### 3.4.1 Méthodes supervisées

Ce type de classifications repose sur l'idée de cohérence spatiale des observations. Une classification en mélange géographique résolu en échiquier est très improbable tandis qu'une classification homogène apparaît comme plus raisonnable physiquement. Il s'agit en fait d'ajouter la contrainte supplémentaire de cohérence spatiale, afin de converger vers la bonne classification.

Les méthodes de classifications spectrales exposées précédemment (au chapitre 3.2 page 64) sont étendues au domaine spectro-spatial en utilisant une distance de comparaison entre spectres appropriés.

Cet ensemble de méthodes n'est pas très utilisé en Planétologie en ce moment. Citons néanmoins le travail de Gendrin et al. (94) qui tient compte des voisins dans la détection d'oxydes ferriques et ferreux. Cette méthode utilise des seuils sur le nombre de voisins comportant une détection significative pour confirmer une possible détection, elle utilise donc la cohérence spatiale.

#### 3.4.2 Méthodes non-supervisées : la segmentation

Les méthodes non-supervisées de segmentation utilisent à la fois les informations spatiales et spectrales.

Notamment, il est possible de se munir d'une distance particulière afin d'effectuer des classifications spectro-spatiales. L'étude de Marçal et al. propose une distance entre classes qui est une combinaison linéaire de distances spectrales et spatiales (207). Ces auteurs proposent ensuite d'utiliser cette distance à l'aide d'une méthode hiérarchique.

Citons aussi la segmentation par champs de Markov, développée notamment dans la thèse de Farid Flitti (78).

### 3.5 Bilan et perspectives

Résumons sous forme de tableaux les propriétés des méthodes de classification spectrale et leur intérêt dans l'analyse des surfaces planétaires au sein d'images hyperspectrales (voir tableaux 3.1, 3.2 et 3.3).

Différents critères sont utilisés pour comparer les méthodes de classification :

- (i) aptitude à former des classes d'intérêt planétologique (voir section 1.4.1.2). Nous allons nous intéresser spécifiquement aux suivantes : classe de présence de corps chimiques, classe d'unité de terrain.
- (ii) principe de fonctionnement (indicateur de similitude entre spectres de même classe, règle de décision).
- (iii) considérations pratiques (classification exclusive/non-exclusive, nombre de seuils, type de base de référence, sensibilité au bruit, temps de calcul).

Décrivons les différents critères d'évaluation et les qualificatifs associées (champ du tableau) :

La classification correcte des "classes de corps chimique" est "à étudier" pour toutes les méthodes car il n'existe pas de travaux théoriques. L'aptitude à classer dépend fortement de la réduction de dimensionnalité. Les méthodes de seuil, distance, SAM et SFF<sup>TM</sup> sans réduction de dimensionnalité préalable, ont été testées au cours de cette thèse sur des échantillons synthétiques (voir section 4.2 page 82). Dans ces conditions, aucune de ces méthodes ne permet une classification correcte. La méthode SVM, qui sépare les classes avec un hyperplan, sans réduction de dimensionnalité préalable, semble inadéquate aux vues des non-linéarités du transfert radiatif.

La classification correcte des "classes d'unité de terrain" est "à étudier" pour toutes les méthodes car il n'existe pas de travaux théoriques.

La "réduction de dimensionnalité est "nécessaire" pour certaines méthodes de classification, car elles ne peuvent pas procéder autrement. En effet, il est impossible de représenter un cube hyperspectral sur un plan.

Pour d'autres, elles sont "statistiquement nécessaires" à cause du phénomène de Hughes.

Parfois, certaines méthodes de réduction de dimension sont naturellement associées à une méthode de classification. Elles sont notées entre parenthèses dans le tableau.

Pour d'autres elles sont seulement "contingente".

Pour les méthode SVM et HDDC, la réduction de dimensionnalité est "inutile" car elle n'est pas sujette au phénomène de Hughes.

La "ressemblance" est l'indicateur de similitude défini mathématiquement.

La "règle de décision" est "manuelle" lorsqu'un utilisateur sélectionne manuellement les spectres. Elle est "explicite" si une formulation mathématique peut être donnée. Dans ce cas, la forme de la classe dans l'espace spectral, lors d'une classification non-exclusive, est notée entre parenthèses.

Elle est "implicite" s'il n'existe pas de formulation mathématique.

La classification peut être "exclusive" ou "non-exclusive".

En cas de classification non-exclusive, il faut établir des seuils pour classer. Le "nombre de seuils" par classe est noté dans le champ correspondant. Ces seuils peuvent être déterminés à partir de la base spectrale de référence. Pour plus de fiabilité, ils sont souvent établis à partir d'observations réelles typiques de la collection d'images à traiter, munis d'une "vérité terrain".

La méthodologie de classification non-exclusive nécessite un "nombre de seuil".

Les méthodes supervisées nécessitent une "base de référence" qui peut être une "*base spectrale de référence*" ou une "*base de distribution spectrale de référence*".

La "sensibilité au bruit" exprime la sensibilité de la méthode au niveau de bruit dans l'espace réduit. La classification a une sensibilité potentiellement "forte" si elle est basée seulement sur un petit nombre de dimensions (2 dans le cas des "scatterplot" et 1 dans le cas des seuils). La sensibilité est "faible" si la classification s'opère sur un index moyennant les signaux du sous-espace réduit (distance, ...). Elle est "très faible" pour la méthode K-median, car elle est insensible aux "outliers" (norme  $L^1$  robuste).

Le "temps de calcul" lors de la classification (en écartant la phase d'apprentissage) est déterminé en

Méthode de Classification	Manuelle : "Scatterplot"	Seuil	Distance	SAM	SFF <sup>TM</sup>
Classe de corps chimiques	à étudier	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)
Classe d'unité de terrain	à étudier	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)	à étudier (impossible sans réduction)
Réduction de dimension	nécessaire	contingente	contingente (AFD)	contingente	contingente (continuum removal)
Ressemblance	distance visuelle	distance à seuil	distance mathématique	corrélation	facteur d'échelle
Règle de décision	manuelle	explicite (parallélépipède)	explicite (boule si $L^2$ )	explicite (cône)	explicite
Exclusif / non-exclusif	les deux	les deux	les deux	les deux	les deux
Nombre de seuils	-	potentiellement grand	1 par classe	1 par classe	1 par classe
Base de référence	-	aucune	base spectrale de référence	base spectrale de référence	base spectrale de référence
Sensibilité au bruit	fort	fort	faible	faible	faible
Temps de calcul	court	court	court	court	court

TAB. 3.1 – Tableau récapitulatif des méthodes manuelles et automatiques nécessitant une *base spectrale de référence*.

fonction d'un nombre d'opérations à effectuer.

Un temps de calcul "court" (en moins d'une seconde sur une machine de bureau pour une observation OMEGA) correspond à un algorithme consistant en quelques opérations très simples (addition, division). Un temps de calcul "moyen" (en moins de quelques minutes) correspond aux algorithmes statistiques relativement simples.

Les temps "longs" (au delà d'une demi heure) correspondent aux méthodes statistiques les plus complexes. Ces temps de calcul sont estimés en fonction de la complexité de la méthode, il ne s'agit pas de véritables temps de calcul.



Méthode de Classification	Paramétrique	K-NN	SVM	réseaux de neurones
Classe de corps chimiques	à étudier	à étudier	à étudier (improbable sans réduction)	à étudier
Classe d'unité de terrain	à étudier	à étudier	à étudier (improbable sans réduction)	à étudier
Réduction de dimension	statistiquement nécessaire	contingente	inutile	contingente
Ressemblance	densité de probabilité	distance mathématique	même côté de l'hyperplan	implicite
Règle de décision	explicite (ellipsoïde si gaussienne)	implicite	explicite hyperplan	implicite
Exclusif / non-exclusif	les deux	exclusif	exclusif	les deux
Nombre de seuils	1 par classe	-	-	aucun
Base de référence	base de distribution spectrale de référence	base de distribution spectrale de référence	base de distribution spectrale de référence	base de distribution spectrale de référence
Sensibilité au bruit	faible	faible	faible	faible
Temps de calcul	long	long	moyen	long

TAB. 3.2 – Tableau récapitulatif des méthodes automatiques supervisées nécessitant une *base de distribution spectrale de référence*.

Méthode de Classification	Hiérarchique	K-mean	HDDC	K-median
Classe de corps chimiques	à étudier	à étudier	à étudier	à étudier
Classe d'unité de terrain	à étudier	à étudier	à étudier	à étudier
Réduction de dimension	statistiquement nécessaire	statistiquement nécessaire	inutile	statistiquement nécessaire
Ressemblance	distance mathématique	distance de Mahalanobis	distance de Mahalanobis	distance $L^1$
Règle de décision	explicite (boule si $L^2$ )	explicite (ellipsoïde)	explicite (ellipsoïde)	explicite (ellipsoïde)
Exclusif / non-exclusif	exclusif	les deux	les deux	les deux
Nombre de seuils	-	1 par classe	1 par classe	1 par classe
Base de référence	-	-	-	-
Sensibilité au bruit	faible	faible	faible	très faible
Temps de calcul	long	long	long	long

TAB. 3.3 – Tableau récapitulatif des méthodes automatiques non-supervisées.

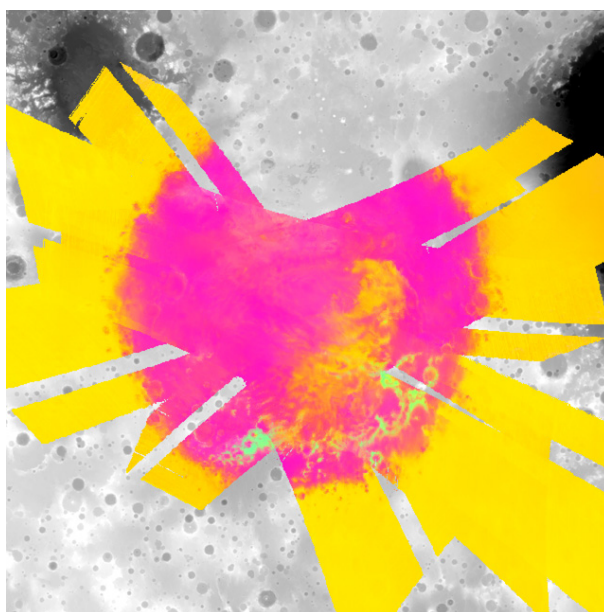
Les méthodes de classification manuelles permettent de maîtriser les aspects spectraux et spatiaux. Cependant, la classification d'une large collection d'images n'est pas possible avec ce type de méthodes. Il faut forcément recourir aux méthodes automatiques.

Les méthodes de réduction/classification non-supervisées n'ont pas été utilisées lors de cette thèse, laissant place aux méthodes de séparation de source non-supervisées qui semblent plus prometteuses. En effet, la classification ne s'intéresse qu'à l'appartenance à une classe, tandis que la séparation de source tente une quantification. Ainsi, d'une simple opération de détection, nous pouvons espérer passer à l'évaluation de paramètres physiques la composition des terrains martiens (composition, abondance, taille de grains...).

Les perspectives à plus long terme résident dans l'usage des méthodes spectro-spatiales, très peu utilisées pour l'instant dans le domaine de la Planétologie. Elles permettent d'utiliser toute l'information réellement contenue dans une image hyperspectrale, à la différence des méthodes spectrales qui sont indépendantes d'une permutation de position de spectres. Cependant, leur mise en place est coûteuse en temps de calcul et nécessite encore quelques développements théoriques, entre autre, à propos de la corrélation spatiale au sein d'une classe.



## “Wavanglet” : une méthode de détection automatique supervisée



Mosaïque des images OMEGA entre  $L_s=220^\circ$  et  $230^\circ$  créée à partir de la méthode Wavanglet (voir section 8.1.1 page 150)

La première section de ce chapitre est consacrée à la présentation de la méthode Wavanglet (voir section 4.1). La seconde section montre les résultats d’un test synthétique (voir section 4.2). La troisième section étend la validité de la méthode à la détection de gypse (voir section 4.3).

## 4.1 Présentation de la méthode “Wavanglet”

La méthode Wavanglet a été développée lors de cette thèse. Elle a fait l’objet d’un article dans le journal IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing (262), disponible en annexe du manuscrit (voir section 13 page 219).

Cette méthode est basée sur quatre étapes :

Étape A : détermination de la base spectrale de référence

Étape B : réduction de dimensionnalité spectrale

Étape C : optimisation des seuils de détection

Étape D : classification d’une base de données d’images hyperspectrales

Nous allons présenter brièvement ces étapes dans ce chapitre, ainsi que quelques améliorations par rapport à la version de l’article.

### 4.1.1 Bases spectrales de référence

La méthode “Wavanglet”, nécessite une *base spectrale de référence* (voir section 2.2 page 41). Détaillons les différents spectres présents dans les bases spectrales de référence utilisées lors de cette thèse.

La première base a été utilisée pour la détection de glace d’eau et de CO<sub>2</sub>, au sol de Mars, dans la base de données des observations OMEGA. La seconde base a été utilisée pour la détection du gypse et de la glace pour les observations de la zone polaire nord de Mars.

#### 4.1.1.1 Détection de glace d’eau et de CO<sub>2</sub> au sol de Mars

La motivation de la base spectrale suivante est la détection au sol, de glace d’eau et de CO<sub>2</sub>. Il s’agit de spectres de référence des classes des corps chimiques : glace d’eau et glace de CO<sub>2</sub>. De plus, deux spectres de référence relatifs aux effets atmosphériques ont été nécessaires.

Les résultats de la classification, appliqués sur toute la base de données OMEGA, sont analysés notamment dans la section 8.1.1 page 150.

**Glace d’eau, glace de CO<sub>2</sub> au sol** J’ai choisi d’utiliser deux spectres de référence représentatifs de glace de CO<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>O. Il s’agit de spectres synthétiques à des tailles de grains extrêmes, typiques de la calotte permanente sud de Mars, produit par la méthode de calcul de transfert radiatif de Douté et al. (62). Les spectres en réflectance obtenus sont convolués à la résolution de OMEGA pour être comparables aux spectres acquis par l’instrument. Ces spectres de référence sont tous deux exempts des effets atmosphériques, pour être des “endmembers” représentatifs des tendances au sol.

Les deux spectres de référence sont exposés dans la figure 4.1. Les paramètres physiques (taille de grain, géométrie d’acquisition), entrés dans le modèle de transfert radiatif, sont listés sur le tableau 4.1.

Spectre synthétique	Glace d’eau pure	Glace de CO <sub>2</sub> pure
taille de grain (microns)	10	100000
angle d’incidence (°)	85	85
angle d’émergence (°)	0	0

TAB. 4.1 – Caractéristiques physiques des spectres de référence synthétiques.

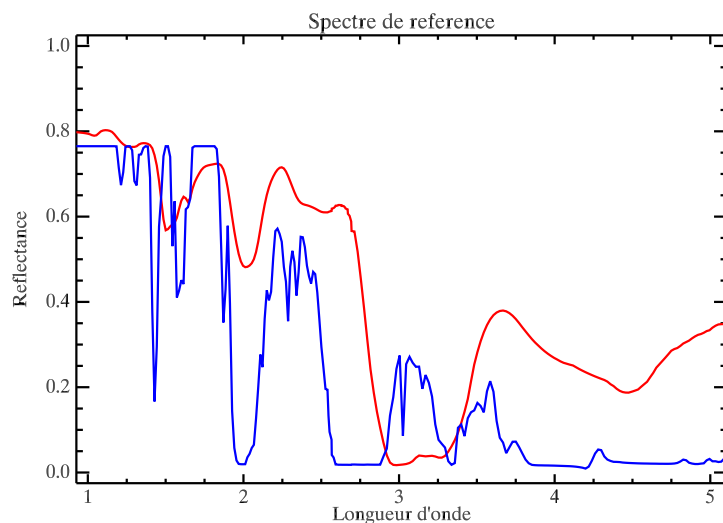


FIG. 4.1 – Spectres de référence de surface issus de simulation. Les longueurs d’ondes sont exprimées en microns. La glace d’eau est en rouge. La glace de  $\text{CO}_2$  est en bleu.

**Effets atmosphériques** J’ai choisi d’ajouter deux autres spectres de références : régolithe martien et nuages d’eau, supposés représentatifs de toutes les situations martiennes (voir fig. 4.2). Ces deux spectres comportent les bandes d’absorption des gaz atmosphériques, intéressant pour la réduction de dimensionnalité de Wavanglet, car ces bandes d’absorption sont présentes pour tous les spectres OMEGA. La méthode de réduction de dimensionnalité de Wavanglet peut donc potentiellement extraire la contribution du sol.

Le premier spectre est une moyenne de spectres sélectionnés manuellement dans un “scatterplot” d’ACP (voir section 3.1.1 page 61) d’une observation dans la région du pôle sud de Mars (ORB0041\_1). Ce spectre est supposé représentatif du régolithe sur toute la planète.

Le second spectre est aussi une moyenne de spectres sélectionnés manuellement dans un “scatterplot” d’une observation dans la région du cratère d’impact géant “Hellas” (ORB1241\_5). Ce spectre a été introduit pour distinguer la glace d’eau à très faible taille de grains qui est dans l’atmosphère. Il n’a pas été utilisé lors des tests présentés dans l’article Wavanglet (262), ni même ceux présentés dans la section 4.2.

#### 4.1.1.2 Détection de gypse et de glace d’eau au sol dans la zone polaire nord de Mars

La scène présente trois types de terrain : du gypse, du régolithe et de la glace d’eau de la calotte permanente. La base spectrale de référence utilisée, contient ces trois espèces. Il s’agit du spectre de glace d’eau modélisé précédemment (voir section précédente) que précédemment. Les spectres du gypse et de basalte (analogue du régolithe) sont des spectres en réflectance mesurés en laboratoire, sur des poudres, au LPG par Antoine Pommerol (voir fig. 4.3).

Les contraintes instrumentales du laboratoire n’ont pas permis d’effectuer la mesure au delà de 4 microns. Nous avons donc considéré cette partie comme du bruit (voir section suivante).

### 4.1.2 Réduction de dimensionnalité spectrale

La méthode Wavanglet, développée dans cette thèse, utilise une *base spectrale de référence* des corps chimiques, supposés présents dans l’image. Elle utilise la transformée en ondelette (voir section 2.3.3 page 45). Après une transformée en ondelette de Debauchie (voir annexe 12.3 page 204), la réduction de dimensionnalité se fait en trois étapes : (i) élimination du continuum ; (ii) élimination des effets indésirables ; (iii) détermination du sous-espace le plus discriminant.

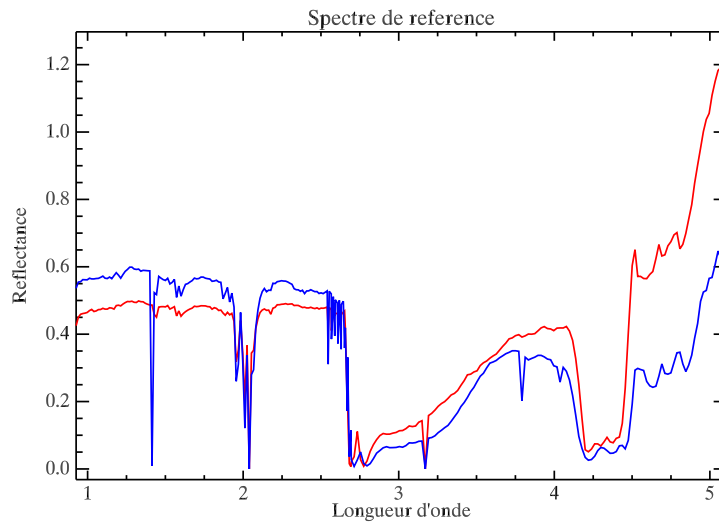


FIG. 4.2 – Spectres de référence issus d’observations OMEGA. Les longueurs d’ondes sont exprimées en microns. En rouge le spectre de référence de la poussière martienne prise dans la région polaire sud. En bleu, le spectre de nuage de glace d’eau dans la région de Hellas.

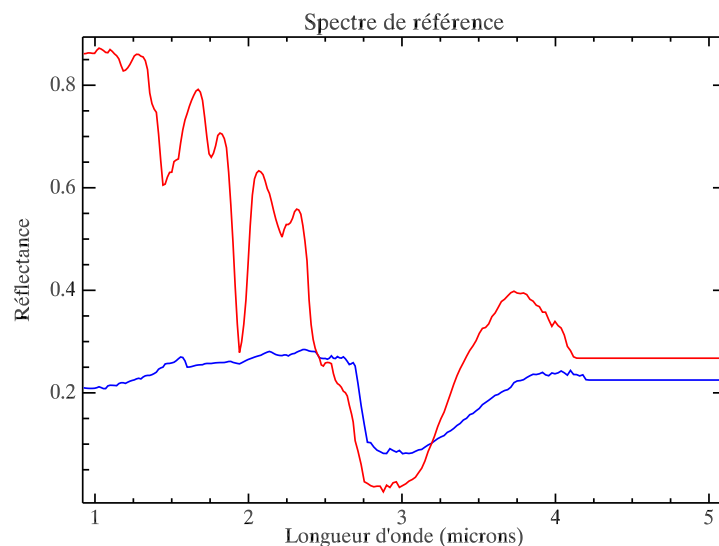


FIG. 4.3 – Spectres de référence, issus de mesures de laboratoire, en réflectance. Matériaux granulaires de gypse en rouge et de basalte en bleu. Le domaine entre 4 et 5 microns n’a pas été mesuré mais simplement prolongé. (Acquisition au LPG par Antoine Pommerol)

Diverses améliorations ont été apportées par rapport à la version de l’algorithme décrite dans l’article (262). La version, au moment de l’écriture de la thèse, consiste en ces étapes successives (l’étape 3 n’étant qu’une extension de la 2) :

1. Filtrage des grandes échelles, pour éliminer l’effet de l’albédo global ainsi que l’effet de la géométrie d’observation. Nous allons conserver uniquement les échelles  $s \in [5 - 8]$ .
2. Élimination du bruit. Élimination des ondelettes à petites échelles polluées par des spectels mort, chaud ou bruité d’OMEGA. Il faut connaître la liste des spectels d’OMEGA à éliminer. Pour chaque spectel à éliminer, les ondelettes les plus polluées sont écartées de la sélection. Comment estimer les ondelettes comportant une fraction de signal majeure due à un seul spectel incorrect ? Voici la méthodologie adoptée :
  - (a) Construction d’un vecteur nul de taille  $N_\lambda$  (256 pour OMEGA)
  - (b) Spectels incorrects mis à 1 pour simuler un bruit d’énergie normalisé à 1 sur un signal mis à 0
  - (c) Transformée en ondelette directe du signal “dirac” noté  $D_i(s, p)$
  - (d) Les ondelettes comportant une énergie supérieure à 50% sont majoritairement polluées par le signal “dirac”. Il faut donc éliminer les ondelettes  $\Psi_{s,p}$  tel que  $D_i(s, p) > 0,5$
3. La version Wavanglet de l’article ne tient pas compte du fait que les spectels à problème peuvent être situés à côté les uns des autres. Une amélioration notable de l’élimination du bruit peut être faite en reprenant l’étape 32, sur un signal “dirac” ayant **tous** les spectels incorrects à un, et en utilisant un seuil d’élimination à 25%. Cette seconde élimination des ondelettes polluées est complémentaire de la première car elle sélectionne les ondelettes aux échelles moyennes, ignorées à l’étape 2.
4. Sélection du meilleur sous-espace pour tous les couples de spectres de référence. L’idée majeure est de comparer les spectres de référence deux à deux, dans une base d’ondelettes. Seules les ondelettes maximisant la différence entre ces spectres sont conservées. La base d’ondelettes conservée est simplement l’union des ondelettes conservées pour chaque couple. Les spectres de références n’ont pas été normalisés dans la version Wavanglet de l’article. Mais, il semble qu’une normalisation, en utilisant uniquement les spectels corrects d’OMEGA, apporte une amélioration notable des résultats. Soit  $WE_i(s, p)$ , la projection du  $i^{eme}$  spectre de référence de la base sur l’ondelette  $\Psi_{s,p}$  à l’échelle  $s$  et la position  $p$ . Voici trois types d’algorithme simples de sélection :

- (a) Seuil unique pour un spectre de référence :

Choix de  $\Psi_{s,p}$  si  $\exists i$  tel que :

$$\|WE_i(s, p)\| > thres(s) \quad (4.1)$$

- (b) Différents seuils pour une base de spectre de référence :

Choix  $\Psi_{s,p}$  si  $\exists (i, j)$  tels que :

$$\|WE_i(s, p) - WE_j(s, p)\| > thres(s, i, j) \quad (4.2)$$

avec :

$$thres(s, i, j) = const \quad (4.3)$$

- (c) Notons  $WE_i(s, p) - WE_j(s, p) = DWE_{i,j}(s, p)$ . Ces seuils peuvent être déterminés automatiquement, pour chaque échelle  $s$ , et chaque couple de spectre de référence  $(i, j)$ , grâce à la méthode suivante :

$$thres(s, i, j) = \langle \|\widehat{DWE_{i,j}(s, p)}\| \rangle + k_{select} \cdot \sqrt{\mathcal{V}ar(\|\widehat{DWE_{i,j}(s, p)}\|)} \quad (4.4)$$



Les moyennes et variances sont calculées sur la variable  $p$  position. Ces calculs sont effectués pour toutes les combinaisons de  $i$  et  $j$ , à toutes les échelles  $s$ , pour les ondelettes  $\Psi_{s,p}$  non polluées par des spectels défailants. Le coefficient “ $k_{select}$ ” est déterminé par l'utilisateur. Cette dernière étape est choisie dans le cadre de toutes les classifications de cette thèse, car elle ne comporte qu'un seul paramètre libre “ $k_{select}$ ”, indépendamment du nombre de spectres dans la base spectrale de référence.

Dans les données OMEGA, l'information intéressante pour la classification est en premier lieu la composition chimique. L'apport majeur de Wavanglet, par rapport aux autres méthodes de réduction de dimensionnalité utilisant les ondelettes, est de garder les ondelettes aux petites échelles, pour ne pas être pollué par les effets géométriques des angles d'incidence et d'émergence. Il s'agit d'un a priori d'origine spectroscopique que l'on rajoute à la réduction.

Il existe un paramètre de sélection  $k_{select}$  qui doit être ajusté à la base spectrale de référence afin de sélectionner une dizaine d'ondelettes discriminantes pour atteindre l'optimum de Hughes (voir annexe 12.5.3 page 215). Pour la base spectrale de référence de détection de glace d'eau et de  $\text{CO}_2$ , la valeur optimale est  $k_{select} = 2,5$ . Pour la base spectrale de référence de détection du gypse au Nord, la valeur optimale est  $k_{select} = 1,2$ .

### 4.1.3 Optimisation des seuils de détections

Dans le cadre de la classification Wavanglet, j'ai fait le choix d'utiliser la méthode de corrélation ou angle (SAM), présenté à la section 3.2.2.3 page 66, qui comporte l'avantage d'être insensible à un facteur multiplicatif.

Le seuil sur la règle de détection dépend fortement de la présence de bandes atmosphériques dans le spectre de référence. En effet, il existe une forte corrélation entre les spectres de corps chimiques différents acquis par OMEGA, simplement à cause des absorptions atmosphériques présentes partout. J'utilise une base spectrale de référence contenant certains spectres comportant des bandes d'absorption atmosphériques et d'autres spectres ne comportant pas cette contribution. L'usage de telles bases, interdit l'approche exclusive de type : classification au plus proche spectre de référence au sens de l'angle. De plus, sur Mars, un pixel peut comporter à la fois les signatures de glaces de  $\text{CO}_2$  et d'eau.

La méthodologie de la “classification à seuil” est nécessaire (voir section 3.2.2.1 page 65). Il faut donc déterminer un seuil spécifique par classe : l'angle maximum d'appartenance à la classe, défini autour du spectre de référence. Ces angles maxima doivent être optimisés en phase d'apprentissage sur des images représentatives de la base de données. J'ai optimisé ces angles maxima en utilisant, à la fois des données synthétiques, et quelques observations clefs d'OMEGA.

### 4.1.4 Classification de la base de données

La dernière étape consiste à appliquer la classification à toutes les images hyperspectrales présentes dans la base de données. La première phase consiste à appliquer la réduction de données pour se placer dans le sous-espace le plus discriminant entre les classes d'intérêt. La seconde phase est la classification utilisant les angles maxima déterminés dans la phase d'apprentissage.

## 4.2 Tests synthétiques : validation de Wavanglet, comparaison avec des méthodes usuelles de classification

Testons maintenant quelques méthodes de classification sur des simulations de spectres de réflectance de surface. Nous avons choisi de simuler des conditions représentatives de la calotte permanente sud de Mars (ou Permanent South Polar Cap : PSPC), d'après les premières études de Sylvain Douté (64). Nous nous intéressons uniquement à la classe de présence des corps chimiques (voir section 1.4.1.2 page 33).

Détaillons les caractéristiques physiques des données synthétiques utilisées, la description des méthodes de classification testées et les résultats.

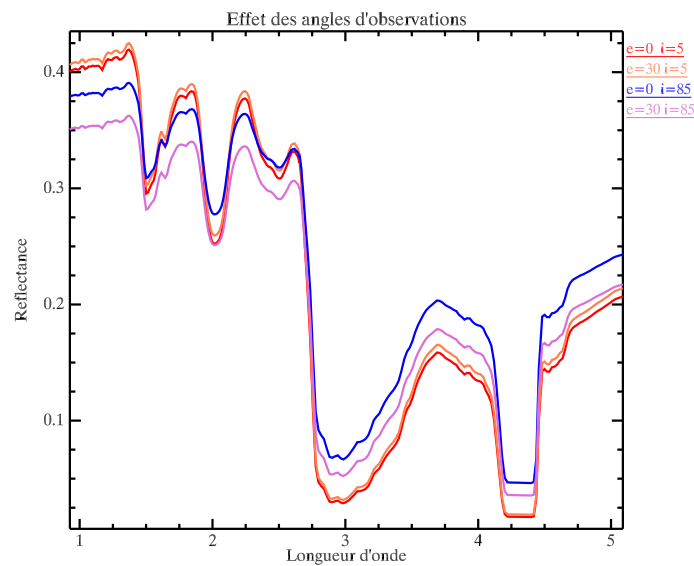


Figure 4.4: Effet des angles d'observation pour un mélange intime de glace d'eau et poussière à 50% en masse, issu de l'expérience 1 (e : angle d'émergence / i : angle d'incidence).

## 4.2.1 Caractéristiques physiques

### 4.2.1.1 Caractéristiques au sol

Les conditions de *géométrie d'acquisition* au pôle sont telles que l'angle d'incidence (pour une surface horizontale) ne peut être plus petit que le complémentaire de l'obliquité. L'incidence minimale au pôle est de  $65^\circ$ . Même dans un intervalle d'incidence réduit à  $[60^\circ, 90^\circ]$ , la variation des effets géométriques est importante. En ce qui concerne l'angle d'émergence, il doit être proche de  $0^\circ$ , car la plupart des observations se font au *nadir*. Cependant, la plateforme Mars Express ayant une orbite très elliptique, l'émergence maximale varie avec la distance à la planète. Pour l'observation ORB1849\_1, lorsque Mars Express est loin de Mars, l'angle d'émergence atteint  $30^\circ$  sur les régions polaires.

A l'équateur, les conditions géométriques d'acquisition sont telles que l'angle d'incidence peut être proche de  $0^\circ$  et l'angle d'émergence est toujours quasiment au *nadir*.

Pour tester les différents algorithmes dans les conditions polaires et équatoriales, nous avons choisi d'échantillonner les conditions géométriques de la manière suivante : incidence  $[5^\circ / 65^\circ / 85^\circ]$  et émergence  $[0^\circ / 30^\circ]$ .

La fonction de phase des matériaux de surface est supposée isotrope. Pour des fonctions de phases piquées vers l'avant, comme c'est le cas pour les glaces, des effets géométriques plus importants sont attendus (voir 1.3.2.2 page 26). Néanmoins, la fonction de phase étant un paramètre mal contraint, nous avons supposé l'isotropie.

La rugosité de surface ainsi que la pente locale sont supposées nulles. Les effets géométriques peuvent être plus importants si ces paramètres sont ajustés à des valeurs réalistes.

Pour illustrer les variations spectrales dues simplement aux conditions géométriques, quelques spectres extrêmes sont représentés sur la figure 4.4.

La *représentation de terrain* est un mélange granulaire intime. Il existe deux expériences test :

- Expérience 1 : Simulation d'affleurements de glace d'eau sur la calotte permanente sud, d'après les terrains de type B de l'étude de Douté et al. (64). Il s'agit d'un mélange de grains de :
  - poussières (taille de grain : 10 microns), entre 0 et 100% en masse par pas de 5%
  - glace d'eau (taille de grain : 100 microns), entre 0 et 100% en masse par pas de 5%.
- Expérience 2 : Simulation de la calotte permanente de glace de  $\text{CO}_2$ , d'après les terrains de type D et E de l'étude de Douté et al. (64). Il s'agit d'un mélange de grains de :
  - poussières (taille de grain : 10 microns), entre 0 et 0,5% en masse par pas de 0,05%

- glace d’eau (taille de grain : 100 microns), entre 0 et 0,5% en masse par pas de 0,05%
- glace de CO<sub>2</sub> (taille de grain : 50000 microns), entre 99,5 et 100% en masse par pas de 0,05%.

Bien que le mélange de cette deuxième expérience soit dominé en masse par la glace de CO<sub>2</sub>, tous les composants ont une grande influence spectrale. En effet, à cause de leur taille bien plus petite, les grains de poussière et d’eau sont bien plus nombreux que ceux du CO<sub>2</sub>.

Les glaces de CO<sub>2</sub> et d’H<sub>2</sub>O comportent des bandes d’absorptions qui se recouvrent. Les deux ensembles de test décrits ci-dessus, permettent de déterminer les différences de comportement des classificateurs vis à vis de l’effet de recouvrement des bandes.

#### 4.2.1.2 Caractéristiques de l’atmosphère

Les “effets atmosphériques” sont très simplifiés. Il s’agit simplement d’un spectre en transmission des gaz correspondant à une altitude typique de la région polaire sud (4000 m). Ce spectre est multiplié au spectre de réflectance de la surface, pour modéliser ce que mesure le capteur depuis l’espace. Nous ne tenons pas compte de la géométrie d’acquisition, ni de diffusion par les aérosols qui modifient le parcours des photons dans l’atmosphère.

#### 4.2.1.3 Simulation du bruit instrumental

Le bruit instrumental est simulé par un bruit gaussien additionnel. Les variances sont issues du “dark” de l’instrument OMEGA à l’observation ORB0041\_1.

### 4.2.2 Test des méthodes de classification

Les méthodes de classifications testées consistent toutes à appliquer un seuil sur une variable scalaire appelée “indicateur”. Elles sont toutes supervisées et nécessitent une *base spectrale de référence*. Ces méthodes utilisent toutes la même base spectrale de référence composée des spectres suivants (voir section 4.1.1) :

1. un spectre de glace d’eau pure de taille de grain 10 microns,
2. un spectre de glace de CO<sub>2</sub> pur de taille 100000 microns,
3. un spectre de régolithe issu de l’observation OMEGA ORB0041\_1.

Il existe donc des différences de taille de grains entre la base spectrale de référence et les expériences synthétiques. Voici les méthodes de classification testées ici :

- Distance  $L^2$  : Distance entre le spectre observé et le spectre de référence (voir chapitre 3.2.2.2 page 66). Un indicateur faible indique une forte ressemblance.
- SFF<sup>TM</sup> : Il s’agit de retirer le continuum au spectre puis, d’ajuster le spectre de référence au spectre mesuré par un facteur d’échelle (voir chapitre 3.2.2.4 page 67). Il n’y a pas de réduction de dimensionnalité dans cette classification. Un indicateur fort indique une forte ressemblance.
- SAM : Il s’agit d’un coefficient de corrélation modifié entre les spectres de références et observés, tel que présenté à la section 3.2.2.3 page 66. Il n’y a pas de réduction de dimensionnalité dans cette classification. Un indicateur faible indique une forte ressemblance.
- Ratio LPG : C’est une profondeur de bande B<sub>H<sub>2</sub>O</sub>(2,5 $\mu$ m) de la glace d’eau (voir équation 2.2 page 39). Un indicateur fort indique une forte présence.
- Ratio IAS : C’est une profondeur de bande B<sub>H<sub>2</sub>O</sub>(1,5 $\mu$ m) de la glace d’eau (voir équation 2.4 page 40). Un indicateur fort indique une forte présence.
- Wavanglet : Il s’agit de choisir le sous-espace le plus discriminant (voir section 4.1), en prenant soin d’éliminer les grandes échelles pour retirer le continuum. Puis, de calculer à l’intérieur de ce sous-espace, l’angle entre le spectre observé et le spectre de référence. Le paramètre de sélection  $k_{select}$  est fixé à 2,5, exactement comme la version de Wavanglet utilisée pour la détection des glaces martiennes. Un indicateur faible indique une forte ressemblance.

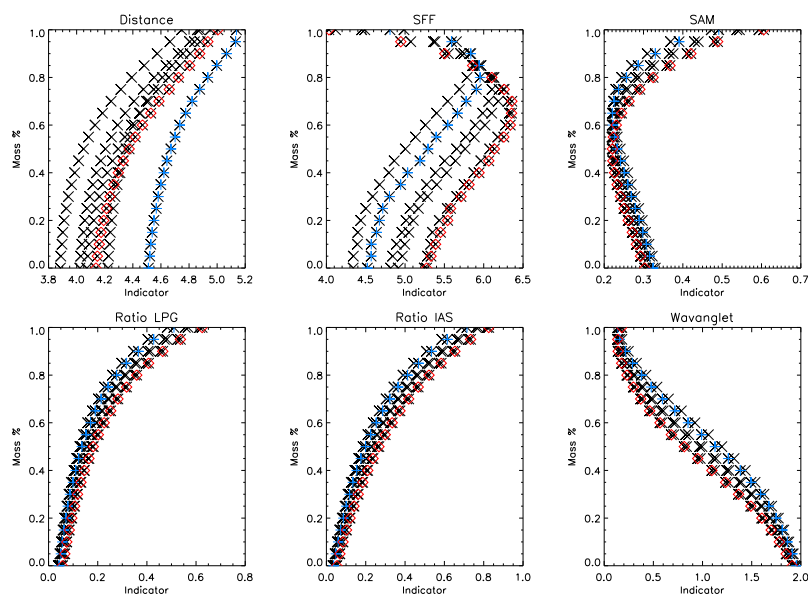


FIG. 4.5 – Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la *géométrie d'acquisition* sur la détection d' $H_2O$  dans l'expérience 1 (glace d'eau et poussières) avec atmosphère. Chaque graphe représente la fraction en masse d'eau en fonction de l'indicateur de présence d'eau. En rouge, pour des angles d'incidence de  $85^\circ$  et d'émergence de  $30^\circ$  (angle de phase le plus grand). En bleu, pour des angles d'incidence de  $5^\circ$  et d'émergence de  $0^\circ$  (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d'angle.

### 4.2.3 Résultats des tests

Les résultats sont représentés sur les figures 4.5, 4.6 et 4.7.

Les résultats de l'expérience 1 (fig 4.5) montrent que les angles n'ont pas trop d'effets sur SAM, Ratio LPG, Ratio IAS et Wavanglet.

Par contre, les indicateurs des méthodes distance et  $SFF^{TM}$  sont très fortement dépendants de la géométrie, car les points sont très dispersés.

Les méthodes SAM (respectivement  $SFF^{TM}$ ) ont un comportement qui s'inverse : l'indicateur est d'abord bien une fonction décroissante (respectivement croissante) de l'abondance de glace d'eau jusqu'à un seuil de 60% en masse, puis l'indicateur se met à croître (respect. décroître). Ce comportement pose de sérieux problèmes lors de la classification à seuil, car il ne permet pas de faire la différence entre des spectres sans glace d'eau avec des spectres à 100% d'eau !

La méthode distance présente un dysfonctionnement puisque l'indicateur augmente alors que le mélange se rapproche du pôle d'eau pure de référence. Cela prouve que la disparité de taille de grains entre la référence et l'observation perturbe la classification basée sur le critère de la composition chimique.

Les résultats de l'expérience 1 sans absorption atmosphérique (fig 4.6) montrent que les effets atmosphériques sont en partie à l'origine de la dispersion des points des indicateurs de la méthode distance et  $SFF^{TM}$  mais que malgré tout, la dépendance à la géométrie est non négligeable. L'effet de l'atmosphère est négligeable pour les méthodes Ratio LPG, Ratio IAS et Wavanglet. La méthode SAM est affectée par l'atmosphère car la courbe est un peu décalée.

Les résultats de l'expérience 2 avec mélange de glace de  $CO_2$ , d'eau et de poussière (fig 4.7) montrent que les méthodes distance,  $SFF^{TM}$ , SAM et Ratio LPG ne permettent pas de classer correctement les mélanges de glaces. Ces méthodes ne sont pas robustes vis à vis des effets du recouvrement de bande d'absorption. Elles ne permettent pas d'extraire l'information lorsque les bandes d'absorption sont superposées. Effectivement, la variabilité de l'indicateur en absence d'eau (0 % en masse) par rapport à la variabilité totale (0 à 0,5 % en masse) quantifie l'effet des paramètres perturbateurs (géométrie, part massique de poussière et de glace de  $CO_2$ ) sur la détection de l'eau.

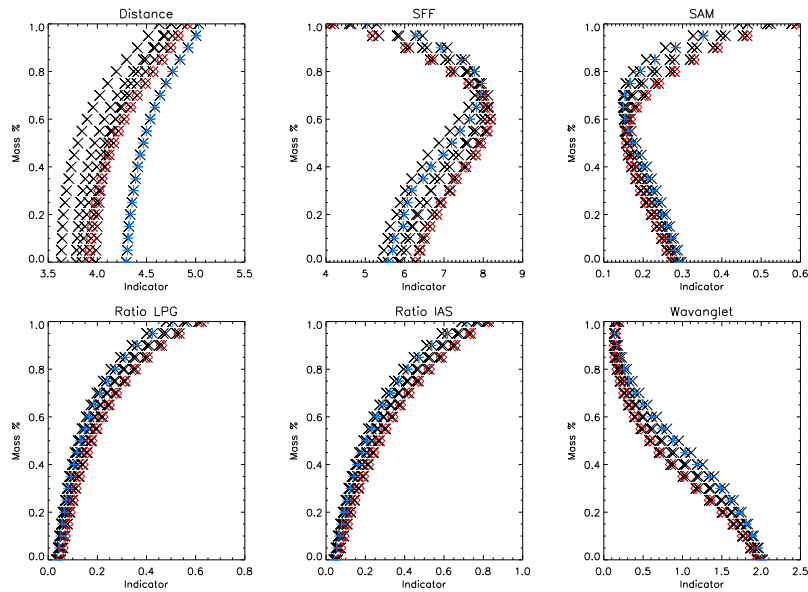


FIG. 4.6 – Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la géométrie d’acquisition pour la détection d’ $H_2O$  dans l’expérience 1 (glace d’eau et poussières) **sans atmosphère**. Chaque graphe représente la fraction en masse d’eau en fonction de l’indicateur de présence d’eau. En rouge pour des angles d’incidence de  $85^\circ$  et d’émergence de  $30^\circ$  (angle de phase le plus grand). En bleu pour des angles d’incidence de  $5^\circ$  et d’émergence de  $0^\circ$  (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d’angle.

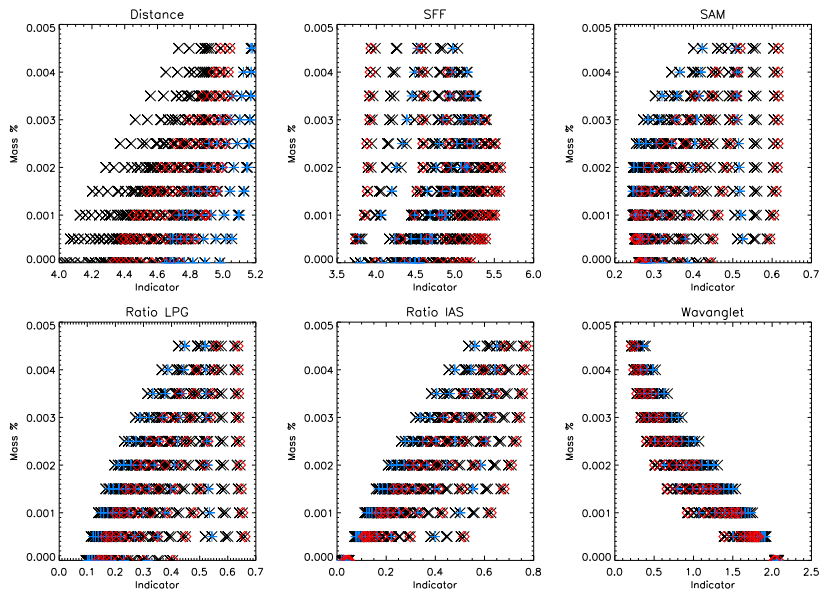


FIG. 4.7 – Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la géométrie d’acquisition sur la détection d’ $H_2O$  dans l’expérience 2 (glace d’eau,  $CO_2$  et poussières) avec atmosphère. Chaque graphe représente la fraction en masse d’eau en fonction de l’indicateur de présence d’eau. En rouge, pour des angles d’incidence de  $85^\circ$  et d’émergence de  $30^\circ$  (angle de phase le plus grand). En bleu, pour des angles d’incidence de  $5^\circ$  et d’émergence de  $0^\circ$  (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d’angle.

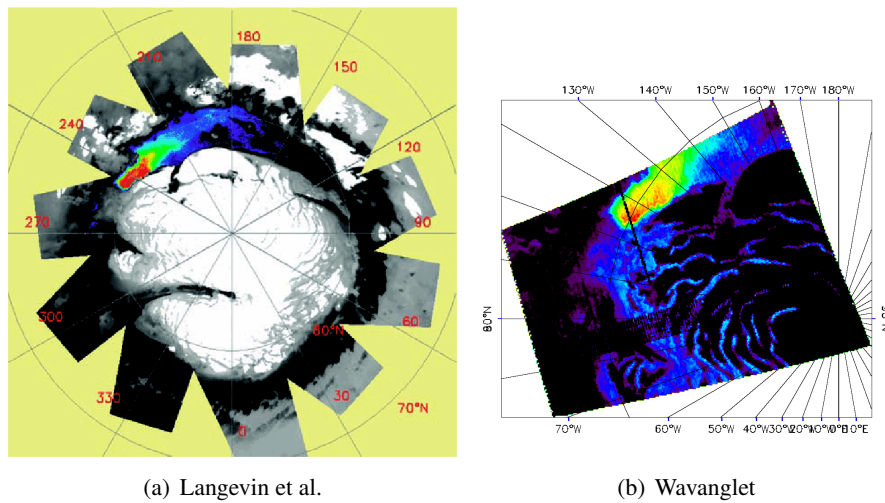


FIG. 4.8 – A gauche : carte de détection de sulfates et estimation d’“abondance” d’après Langevin et al. (173). A droite : carte de l’angle de la méthode Wavanglet associée au pôle de Gypse pour l’observation ORB0898\_1.

Seuls Ratio IAS et Wavanglet permettent de faire une distinction correcte entre les spectres comportant de l’eau et les autres.

La relative résistance des méthodes de Ratio, SAM et Wavanglet face aux conditions géométriques réside dans le fait qu’elles sont indépendantes d’un facteur multiplicatif du continuum du spectre mesuré. La non adéquation entre les tailles de grains observées et de référence semble jouer un rôle très important pour la méthode distance mais aussi pour  $SFF^{TM}$  et SAM, ce qui est plus étonnant. En cas de recouvrement de bande, les méthodes doivent tenir compte des recouvrements (ce qui n’est pas le cas de Ratio LPG qui n’a pas été bâti dans ce but !).

En conclusion, vu l’analyse que nous avons faite de ces tests synthétiques, seules deux méthodes permettent d’effectuer une classification de composition dans de bonnes conditions : Ratio IAS et Wavanglet.

Un tableau récapitulatif reprend le canevas de comparaison des méthodes de classification, de la section 3.5 page 72. Les propriétés de bonne détermination des classes de corps chimiques sont synthétisées dans l’index “classe de corps chimiques”. Un “+” est attribué pour chacune des propriétés suivantes : non-exclusivité, faible dépendance à la géométrie d’acquisition, faible dépendance à la superposition des bandes, faible sensibilité aux absorptions atmosphériques, faible sensibilité au bruit.

### 4.3 Détection de gypse dans les plaines polaire du Nord

Afin de tester Wavanglet sur des types de terrains martiens autres que les glaces, validons la méthode Wavanglet pour la détection de gypse dans les plaines du Nord.

Cette détection a été faite par Langevin et al. (173) en analysant les données OMEGA. La figure 4.8 (à gauche) présente la carte d’“abondance” de cette étude. Il s’agit d’un rapport de bande après correction empirique des bandes d’absorption atmosphériques.

La méthode Wavanglet, après une correction des absorptions atmosphériques (63), permet aussi de détecter le gypse, confirmant ainsi sa présence de manière indépendante. La base spectrale de référence utilisée pour cette étude est détaillée dans la section 4.1.1.2. Ces résultats sont représentés sur la figure 4.8 (à droite). Il s’agit de l’angle associé au spectre de référence de gypse. Cet angle mesure la ressemblance entre le spectre de référence et les spectres observés.

Il existe un très bon accord entre la distribution spatiale des détections des deux méthodes, des études plus détaillées permettront de montrer éventuellement quelques différences.

Méthode de Classification	Wavanglet pour la glace d'eau	Rapport LPG pour la glace d'eau	Rapport IAS pour la glace d'eau	Distance $L^2$ pour la glace d'eau	SFF <sup>TM</sup> pour la glace d'eau	SAM pour la glace d'eau
Classe de corps chimiques	+++++	++	++++	++	++	+++
Classe d'unité de terrain	?	?	?	?	?	?
Sensibilité à la géométrie d'acquisition	faible	faible	faible	fort	fort	moyen
Sensibilité à la superposition de bande	faible	fort	faible	fort	fort	fort
Sensibilité aux absorptions atmosphérique	faible	fort	faible	fort	fort	faible
Réduction de dimension	Méthodes deux à deux + ondellettes	sélection manuelle + 1 rapport	sélection manuelle + 1 rapport	aucune	“continuum removal”	aucune
Ressemblance	corrélation	distance	distance	distance $L^2$	ajustement	corrélation
Exclusif / non-exclusif	les deux	les deux	les deux	les deux	les deux	les deux
Temps de calcul	court	court	court	court	court	court
Nombre de seuils	1/classe +1 dans la réduction	1/classe	1/classe	1/classe	1/classe	1/classe
Base de référence	base de spectre de référence	base de spectre de référence	base de spectre de référence	base de spectre de référence	base de spectre de référence	base de spectre de référence
Sensibilité au bruit	faible	potentiellement fort	potentiellement fort	faible	faible	faible
Règle de décision	explicite / cône	explicite / parallélépipède	explicite / parallélépipède	explicite / boule	explicite	explicite / cône

TAB. 4.2 – Tableau récapitulatif des méthodes de classification spatiales

## 4.4 Bilan et perspectives

Dans l'étude des surfaces planétaires, certains effets comme la géométrie d'acquisition, ou encore les effets atmosphériques, constituent plus des perturbations qu'une source d'information. Il est donc utile dans ces études, d'éliminer ces effets directement dans la réduction de dimensionnalité. La méthode de réduction de dimensionnalité développée ici montre bien qu'il est possible de réduire l'effet de ces paramètres.

Des améliorations de la méthodes Wavanglet sont encore possibles :

Pour tenir compte des effets de taille de grains variables, il serait judicieux d'utiliser des spectres de référence de 2 ou 3 tailles de grains différentes dans la *base spectrale de référence*.

Il serait intéressant d'ajouter une étape à la méthodologie de réduction de dimensionnalité qui consiste à retirer complètement les ondelettes comportant un signal atmosphérique fort. Dans ce cas, aucun spectre de référence comportant les absorptions atmosphériques n'est nécessaire dans la *base spectrale de référence*.

Une amélioration de l'estimation du sous-espace le plus discriminant peut être souhaitable, notamment en utilisant un algorithme itératif pseudo-optimal (voir section 2.3.3 page 45). Aussi, une approche utilisant des bases de distributions spectrales peut être employée.

De plus, aucune optimisation de la famille d'ondelettes n'a été opérée, une amélioration significative est attendue pour une famille d'ondelettes qui ressemble fortement aux bandes d'absorption, ce qui n'est pas le cas des ondelettes de Debauchie.







La séparation de source consiste à retirer une information plus élaborée que l'appartenance ou la non-appartenance à une classe : la quantité d'une classe ! Cette notion de quantité de classe peut apparaître quelque peu déroutante, appelons-la plutôt la proportion de mélange d'une source. Il s'agit donc de "quantifier" alors que la classification se limite à "qualifier".

En argumentant sur le fait qu'une observation se fait à une certaine résolution spatiale par nature limitée, la séparation de source apparaît plus clairement. Si un objet géologique a une structure spatiale plus fine que la résolution de l'instrument, le spectre en réflectance, associé à un pixel, est un mélange des réflectances entre plusieurs types d'objets.

Dans le cadre d'un *mélange géographique subpixel* (défini dans la section 1.4.1.1 page 31) - pour des étendues caractéristiques d'objet comprises entre le libre parcours moyen horizontal des photons et la résolution spatiale de l'instrument - les réflectances sont en mélanges linéaires.

Dans le cadre d'un *mélange intime* - pour des étendues caractéristiques d'objet inférieures au libre parcours moyen horizontal des photons - le mélange des réflectances est non-linéaire. Il apparaît donc naturel que chaque spectre soit potentiellement un mélange, que la notion d'appartenance exclusive à une classe n'est pas pertinente et que l'information intéressante réside dans la notion d'appartenance multiple avec proportion de mélange.

La séparation de source peut se faire de façon supervisée ou non-supervisée - dans ce dernier cas, on parle de séparation de source en aveugle (BSS pour Blind Source Separation en anglais).

La séparation de source est, en général, définie dans un cadre de mélange linéaire . Les non-linéarités peuvent être résolues éventuellement si la séparation est supervisée. Dans le cas non-supervisée, il est extrêmement difficile de traiter un problème non-linéaire car il existe un ensemble infini de solutions (142).

Dans un premier temps, sont explicitées les hypothèses associées au problème linéaire (voir section 5.1). Suivront les méthodes supervisées (voir section 5.2) et non-supervisées (voir section 5.3).

## 5.1 Mélange linéaire : quelles hypothèses ?

Certaines méthodes de séparation de source ne traitent que des mélanges linéaires. L'objet de cette section est de détailler les hypothèses sous-jacentes à cette situation.

En appliquant certaines hypothèses sur le transfert radiatif, il est possible d'écrire une équation linéaire sur le spectre observé en facteur de radiance. :

$$\mathbf{L}(\lambda) = \Phi(\lambda) \cdot \cos(\theta_i) \cdot \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \cdot \mathbf{R}_i(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) \quad (5.1)$$

En introduisant les coefficients  $\alpha'_i = \alpha_i \cdot \cos(\theta_i)$ , l'équation s'écrit :

$$\mathbf{L}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha'_i \cdot \Phi(\lambda) \mathbf{R}_i(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) \quad (5.2)$$

Ou encore sur le spectre en facteur de réflectance :

$$\mathbf{R}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \cdot \Phi(\lambda) \cdot \mathbf{R}_i(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) \quad (5.3)$$

Avec :

$\lambda$  : longueur d'onde de la lumière

$\mathbf{L}(\lambda)$  : spectre mesuré en facteur de radiance

$\mathbf{R}(\lambda)$  : spectre mesuré en facteur de réflectance

$\Phi(\lambda)$  : spectre atmosphérique en transmission

$\theta_i$  : angle d'incidence entre la direction solaire et la normale locale à la surface

$\bar{\theta}_i$  : angle d'incidence entre la direction solaire et la normale locale au géoïde planétaire

$\alpha_i$  : coefficient de mélange ou proportion de mélange de la source “i”

$\mathbf{R}_i(\lambda)$  : spectre en réflectance associé à la source “i”

$N_s$  : nombre de sources

$\mathbf{B}(\lambda)$  : vecteur aléatoire de bruit (occurrence de la variable aléatoire bruit pour l’observation en question)

Les hypothèses suivantes sont effectuées :

1. Surface lambertienne :  $\mathbf{L}(\theta_i, \theta_e, \lambda) = \mathbf{L}(\lambda)$   
Les propriétés de réflectance de toutes les surfaces sont supposées isotropes. Comme cela n’est pas le cas en général, les variations spatiales des coefficients de mélange traduisent également les différences de comportement photométrique entre types de terrain.
2. Mélange géographique subpixel uniquement. Si des mélanges, à une échelle plus petite que le libre parcours moyen, sont présents dans l’image, alors ils sont compris dans la signature de chaque source “i” (voir section 1.4.1.1 page 31). Cette hypothèse permet d’écrire la réflectance de surface comme somme linéaire :  $\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \cdot \mathbf{R}_i(\lambda)$ . Si cette hypothèse est vérifiée, nous pouvons remplacer l’indice “i” par l’indice “z”. Dans ce cas  $\alpha_z$  correspond à la proportion de surface couverte.
3. Diffusion dans l’atmosphère négligeable. Cette hypothèse permet de réduire la complexité du couplage surface/atmosphère à un simple facteur multiplicatif correspondant à la transmission atmosphérique :  $\Phi(h, \theta_i, \theta_e, \lambda)$  (voir section 1.3.5 page 30).
4. Transmission atmosphérique constante. Cette hypothèse simplifie la contribution atmosphérique, pour tous les spectres de l’image pour écrire  $\Phi(h, \theta_i, \theta_e, \lambda) = \Phi(\lambda)$ , avec  $h$  l’altitude. Cette hypothèse est valide si les variations d’altitude et d’angles d’incidence et d’émergence à l’intérieur de l’image, produisent de faibles variations spectrales. Si la transmission spectrale peut être calculée avec précision, on peut aisément s’abstraire de cette hypothèse en divisant les spectres de l’image par  $\Phi(h, \theta_i, \theta_e, \lambda)$ , préalablement à la séparation de source.
5. L’équation 5.3 en facteur de réflectance est accessible si l’angle d’incidence  $\theta_i$  est connu (pour OMEGA, il est estimé grâce à la topographie MOLA). Sinon, il peut être approximé par  $\theta_i = \bar{\theta}_i$  (pas de rugosité de surface) comme c’est le cas pour notre utilisation des observations OMEGA. Nous avons choisi cette solution approximée car le positionnement spatial d’OMEGA n’est pas assez précis.

Notons les hypothèses ML1 à ML5 (ML pour mélange linéaire). Ces différentes hypothèses ML sont toutes invalidées dans une situation planétologique réelle. L’interprétation des résultats doit tenir compte de cette évidence. Cependant, l’ensemble des hypothèses conduit à une approximation valide si on s’intéresse à une évaluation grossière du poids de chaque source (classe ou type de terrain) pour un pixel donné.

L’utilisation de ces équations linéaires consiste à projeter la complexité du transfert radiatif dans un système simple. Il est toujours possible d’obtenir des résultats, parfois même avec une grande qualité de reproduction du spectre initial (faible erreur RMS) mais la complexité réelle du transfert radiatif ne doit jamais être perdue de vue.

## 5.2 Séparation de source supervisée

La séparation de source supervisée peut être effectuée à l’aide de trois ensembles de méthodes détaillées ci-après : la profondeur de bande, les méthodes linéaires, les méthodes non-linéaires.

Un historique des méthodes de séparation de source est proposé par Keshava et Mustard (148).

### 5.2.1 Profondeur de bande

Pour s’affranchir des effets du continuum et s’affranchir d’une éventuelle mauvaise calibration, la méthode usuelle des astronomes est basée sur la *profondeur de bande*, notée B basée sur un *rapport de bande* noté R. Cette méthode a fait l’objet de la section 2.1 page 39 pour ses qualités concernant la réduction de dimensionnalité. Cependant, ce type de méthode dépasse la réduction de dimensionnalité

et la classification, car elle produit un indicateur d' "abondance". Ces interprétations ont été entre autre faites par Langevin et al. sur les glaces martiennes (172).

Les études numériques produites au chapitre 4.2 page 82 et notamment les résultats des figures 4.5, 4.6 et 4.7 donnent des indications sur les limites de cette méthode . Deux définitions de profondeur de bande sont étudiées :

- Ratio LPG : C'est une profondeur de bande  $B_{H_2O}(2,5\mu m)$  de la glace d'eau (voir équation 2.2 page 39)
- Ratio IAS : C'est une profondeur de bande  $B_{H_2O}(1,5\mu m)$  de la glace d'eau (voir équation 2.4 page 40).

Est-ce que ces profondeurs de bande indiquent bien une abondance ? Quels sont les effets des conditions géométriques, des absorptions par les gaz atmosphériques ? Quels sont les effets des mélanges entre différents corps ? Pour répondre à ces questions, analysons les études numériques précédentes :

1. Cas d'un mélange intime poussière/glace d'eau (expérience 1).

- En étudiant la relation entre la profondeur de bande et l'abondance massique réelle, il est possible d'estimer la qualité de l'estimation. La première expérience numérique (voir figure 4.5) montre qu'il existe une relation bijective proche de l'égalité entre les rapports IAS et LPG d'une part, et l'abondance. Cette relation est valable indépendamment des conditions géométriques. Le contraste de taille de grain de poussière et d'eau, d'un ordre de grandeur seulement, ne malmène pas la bijectivité.
- En comparant les résultats avec l'atmosphère (voir figure 4.5) et sans (voir figure 4.6), il paraît évident que les gaz atmosphériques n'ont pas d'effets significatifs sur l'estimation de l'abondance pour aucun des deux rapports. La contribution des absorptions des gaz atmosphériques étant quasi nulle sur les canaux utilisés.

2. Cas d'un mélange intime poussière / glace d'eau / glace de  $CO_2$  (expérience 2).

- En étudiant la relation entre la profondeur de bande et l'abondance massique réelle, il est possible d'estimer la qualité de l'estimation. La seconde expérience numérique (voir figure 4.7) montre que la relation bijective n'existe plus. Un mélange intime comportant des tailles de grains différents (plus de trois ordres de grandeur de différence) conduit à une mauvaise estimation des abondances.
- Les effets géométriques peuvent être estimés grâce à l'écart entre les points de couleur rouge par rapport aux points de couleur bleue, correspondant à deux situations géométriques extrêmes. Les deux expériences (voir figure 4.5 et 4.7) montrent que les points sont toujours relativement proches. Ces effets ne sont donc pas prépondérants pour les ratios. Notons tout de même que l'expérience 2 semble assujettir plus fortement les ratios aux effets géométriques.
- Le recouvrement des bandes de glace d'eau et  $CO_2$ , présent pour le Ratio LPG dans l'expérience 2, produit un effet d'éclatement du nuage de points (voir figure 4.7) plus important que pour le Ratio IAS. Le Ratio IAS est construit pour répondre à ce problème de recouvrement tandis que Ratio LPG n'a pas été produit dans ce but. La poussière est un corps spectralement neutre, sans bande d'absorption, qui ne produit pas d'altération du signal de profondeur optique. Il n'y a donc pas de différences entre les deux Ratios pour l'expérience 1 (voir figure 4.5). En revanche, la glace de  $CO_2$  est un corps optiquement absorbant qui modifie fortement l'indicateur de profondeur de bande. L'expérience 2 met en évidence ce fait, car l'éclatement du nuage de points est plus important pour le Ratio LPG, notamment quand la proportion massique d'eau est de 0%.

Les trois caractéristiques limitantes, exposées à la section 2.1 page 39, sont toujours valides. Ces expériences numériques montrent que le recouvrement de bande d'absorption induit des effets non négligeables sur les spectres, illustrant la dernière caractéristique limitante.

### 5.2.2 Mélange linéaire

Cette méthode consiste à prétendre que chaque spectre mesuré est une combinaison linéaire de spectres de référence. Les différents types de spectre de référence sont détaillés au chapitre de réduction de dimensionnalité (voir section 2.2 page 41). Les coefficients de mélange linéaire entre pôles sont interprétés comme des abondances. L'équation linéaire sur des spectres en réflectance devient :

$$\mathbf{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \cdot \mathbf{S}_i(\lambda) + \varepsilon(\lambda) \quad (5.4)$$

Avec :

$\mathbf{S}(\lambda)$  : spectre (en général mesuré en facteur de réflectance).

$\alpha_i$  : coefficient de mélange ou proportion de mélange de la source "i"

$\mathbf{S}_i(\lambda)$  : spectre associé à la source "i" (en général mesuré en facteur de réflectance)

$N_s$  : nombre de sources

$\varepsilon(\lambda)$  : erreur à minimiser (bruit + incohérences du modèle)

Dans un cube hyperspectral, il existe  $N_z$  spectre, noté d'un indice "z" :  $\mathbf{S}_z(\lambda) = \mathbf{C}_{\lambda,z}$ , l'équation linéaire s'écrit en notation matricielle :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} = \mathbf{S}_{\lambda,i} \cdot \alpha_{i,z} + \varepsilon_{\lambda,z} \quad (5.5)$$

Cette équation linéaire est valable uniquement en effectuant les hypothèses ML détaillées au chapitre 5.1. Conjointement à ces hypothèses, la séparation de source linéaire se fait en général sans contribution atmosphérique. Le terme  $\Phi(\lambda)$  des absorptions atmosphériques est soit négligé, soit incorporé dans un des pôles de la combinaison linéaire, soit éliminé grâce à une correction atmosphérique plus ou moins simple. La première pratique est satisfaisante uniquement si les canaux, ayant une contribution atmosphérique significative, sont retirés avant séparation. La seconde n'est pas justifiée du point de vue du transfert radiatif mais permet néanmoins une certaine correction. La troisième semble être la plus appropriée.

En principe, la séparation linéaire de source supervisée donne une valeur indicatrice de l'abondance à la surface mais le choix des spectres de référence ne permet pas toujours de faire cette séparation de sources pour plusieurs raisons :

1. Si une des hypothèses du mélange linéaire est invalide (voir section 5.1 page 92) :
  - (a) Pour l'hypothèse ML 1 invalidée, les surfaces sont non-lambertiennes. C'est à dire que leurs spectres en réflectance sont contrôlés en partie par la géométrie d'acquisition et par la taille des grains. Cependant, une estimation correcte de l'abondance est tout de même possible à la condition suivante : les spectres de références doivent être pris dans les mêmes conditions géométriques que le spectre observé.
  - (b) Pour l'hypothèse ML 2 invalidée, les mélanges sont non-linéaires. En revanche, si une partie du mélange est linéaire, les fractions de surface ont un sens et peuvent être estimées aux conditions suivantes : chaque spectre de zone  $\mathbf{S}_z$  doit être représenté dans la base de référence (voir section 1.4.1.1 page 31).
2. Les spectres étant non-orthogonaux et surtout potentiellement linéairement dépendants, la solution de l'équation 5.4 n'est pas unique pour une collection de spectres de référence  $\mathbf{S}_i(\lambda)$ . Plusieurs approches sont possibles, la plus simple étant la détermination des coefficients de mélange pour tous les spectres d'une large base spectrale, même pour ceux qui ne sont pas présents dans la scène. Or, les coefficients de mélange issus du calcul, dépendent de tous les spectres présents dans la base. Ils sont mal estimés avec cette approche simple, à cause des spectres de référence non présents dans la scène. La solution pseudo-idéale (car l'incomplétude de la base est toujours vérifiée) est de conserver uniquement les spectres de référence présents dans la scène mais, sans vérité terrain (cas fréquent en Planétologie), il est difficile de les connaître a priori.

Néanmoins, la séparation de source supervisée en mélange linéaire est appliquée dans le domaine de la télédétection spatiale. Détaillons quelques utilisations des *bases spectrales de référence* et des *bases de distribution spectrale de référence*.

**Base spectrale de référence** La méthode la plus simple consiste simplement à ajuster les  $\alpha_i$  tel que  $\|\varepsilon(\lambda)\|$  soit minimisé. Elle est utilisée par exemple sur les données TES sur Mars Global Surveyor/NASA (279; 15; 253).

Pour répondre au problème n°2 de la non-unicité des solutions, il apparaît comme naturel d'ajouter la contrainte mathématique  $\alpha_i \geq 0$ , car une abondance négative n'a pas de sens.

La proposition de la thèse de Jean-Philippe Combe, est de garantir la positivité d'une façon originale : en éliminant itérativement les spectres ayant des coefficients négatifs (53). L'idée de base repose sur le fait que l'affectation d'un coefficient négatif est improbable si le spectre de référence est présent dans le mélange. Cette hypothèse peut être invalidée dans un mélange linéaire en cas de recouvrements.

Exhibons un contre-exemple : soit un spectre **S** comportant glace d'eau et hydrates. La similarité des formes spectrales de ces composants (glace, hydrates) ne permet pas de les distinguer facilement. De ce fait, il est possible de reconstruire le spectre **S** avec un coefficient positif fort pour un composant et un coefficient négatif pour l'autre. Ce coefficient négatif ne signifie pas pour autant une absence du composant. Pour répondre à ce problème, Jean-Philippe Combe propose un retrait aléatoire et itératif des spectres de référence à coefficient négatif qui permettrait d'optimiser la solution.

La méthode "non negatively constrained least squares" propose d'intégrer le fait que les coefficients sont positifs ou nuls. Elle est basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Elle semble efficace dans l'estimation de l'abondance de certains composants chimiques par spectroscopie (169).

En imposant à la fois la positivité de façon mathématique et la somme des proportions égale à un, le problème est connu sous le nom de "Fully Constrained Least Squares". Il a été résolu par Lawson et Hanson (180) et a été utilisé dans le domaine de la télédétection dans la thèse de Cécile Gomez (96).

**Base de distribution spectrale de référence** Le passage du mélange linéaire avec des spectres de références déterministes au mélange linéaire avec des distributions spectrales de référence est discuté dans l'article de Settle (266). Cette étude donne lieu à une méthode qui permet d'estimer la distribution des spectres de références sous forme de distributions gaussiennes. La positivité des solutions n'est pas imposée mathématiquement mais l'article montre que certains algorithmes de sélections des "endmembers" ont des propriétés telles que la solution sur les  $\alpha_i$  soit toujours positive (56).

### 5.2.3 Mélange non-linéaire

Afin de tenir compte des non-linéarités de la physique de transfert radiatif qui interviennent si l'une des hypothèses explicitées au chapitre 5.1 n'est pas valable, il est possible d'avoir deux attitudes. La première consiste en l'application d'une transformation mathématique de telle manière à rendre le problème linéaire. Ce type de méthode requiert des hypothèses simplificatrices à l'égard du transfert radiatif. La seconde est d'ordre semi-empirique et propose d'incorporer des relations empiriques non-linéaires dans l'interprétation des sources.

**Méthode de linéarisation** Il s'agit de faire une inversion de la physique du transfert radiatif de telle manière que le problème soit linéarisé.

Par exemple, dans la formulation de Hapke (voir 1.3.4.2 page 29), un mélange intime granulaire se traduit par une combinaison linéaire des albédos de diffusion simple moyens de chaque famille de grains. Cette combinaison est alors transformée en réflectance en utilisant la solution (non linéaire) de l'équation de transfert radiatif. Mustard et al. proposent d'inverser cette transformation afin de s'abstraire au maximum de l'influence de la géométrie d'acquisition et de réaliser la séparation de source dans un espace où le mélange est linéaire (225). Cette linéarisation est possible en albédo de diffusion simple. La linéa-

risation, appliquée à des mers lunaires, montre que les prises en compte des non-linéarités des mélanges intimes et de la photométrie des surfaces, améliorent l'interprétation planétologique des résultats.

**Méthodes semi-empiriques** La méthode SFF<sup>TM</sup> (Spectral Feature Fitting) déjà présentée au chapitre 3.2.2.4 page 67, incluse dans le logiciel IDL/ENVI (1; 47), appartient à cette catégorie de méthode semi-empirique. Il s'agit de mettre à l'échelle le spectre de référence pour coller au mieux au spectre observé, en prenant soin au préalable de retirer le continuum de tous les spectres. La méthode d'élimination du continuum est décrite au chapitre 2.4.1 page 47.

L'élimination du continuum paraît intéressant pour réduire les effets des conditions géométriques d'observations. L'automatisation de ces méthodes pour de larges collections d'images hyperspectrales n'est possible que si ces méthodes sont relativement indépendantes des effets indésirables : des conditions géométriques ou la superposition des bandes d'absorption de corps différents, .... En principe, la méthode SFF<sup>TM</sup> doit comporter toutes ces propriétés. Mais des tests sur des observations synthétiques montrent que la méthode SFF<sup>TM</sup> est en fait très dépendante des conditions géométriques et de l'adéquation des tailles de grains entre les spectres de référence et les spectres observés (voir section 4.2 page 82).

Une autre méthode, appelée Modified Gaussian Model (MGM), est basée sur une décomposition des bandes d'absorption en différentes gaussiennes (286). Elle est surtout utilisée pour des terrains en assemblages de minéraux ferro-magnésiens.

Il s'agit d'ajuster au mieux une somme de gaussiennes, à un spectre observé, en incorporant des informations spectroscopiques sur les bandes d'absorption et leurs relations mutuelles. Ces informations spectroscopiques a priori sont déterminées d'après des considérations théoriques et des observations de laboratoire. Cet ajustement utilise une inversion généralisée (290) pour tenir compte à la fois des informations a priori et des données observées. L'état d'information final réside sur les moyennes (position des bandes) et les écarts-types des gaussiennes (largeur des bandes) qui renseignent sur la nature des minéraux.

En effet, des études de laboratoire sur les olivines ont permis de calibrer ces paramètres spectraux avec les proportions de mélange physique des matériaux (287).

Ce type de méthode est utilisé sur des données réelles, par exemple pour OMEGA par Pinet et al. (240), ou sur des données lunaires (230).

## 5.3 Séparation de source en aveugle

La séparation de source en aveugle désigne l'ensemble des méthodes qui déterminent les sources et les abondances de manière non-supervisée. La première partie est consacrée aux méthodes par extraction automatique d'endmember, les parties suivantes sont basées sur des méthodes statistiques de plus en plus évoluées.

### 5.3.1 Extraction d'endmember et mélange linéaire

Ce type de méthode procède en deux étapes majeures. La première consiste à extraire des spectres de référence extrêmes ou "endmember" de l'image hyperspectrale (voir section 2.2 page 41), avec par exemple l'algorithme PPI (Pixel Purity Index) (28). La seconde consiste à déterminer les abondances de mélange de ces pôles purs qui permettent de reconstruire chaque spectre de l'image. Mentionnons quelques études appartenant à cette catégorie.

Les travaux de thèse de Cécile Gomez (96) sont structurés en trois étapes : les deux étapes ci-dessus, ainsi qu'une étape intermédiaire qui consistent en l'identification des composants présents dans chaque pôle. Ainsi, se succèdent : (i) la détermination des *spectres de référence extrêmes* de l'image en utilisant la méthode N-FINDR ou ACI ; (ii) l'identification des corps purs présents dans chaque endmember à l'aide de la méthode SAM et d'une base de données de laboratoire (voir 3.2.2.3 page 66) ; (iii) l'estimation de l'abondance avec un algorithme de mélange sous contrainte "Fully Constrained Least Squares" (180).



Citons une autre étude (237) qui propose une première étape de sélection itérative des endmembers de l'image - gardés uniquement s'ils sont différents entre eux et s'ils ressemblent à des spectres de références. La deuxième étape est une classification à seuil utilisant une ACP.

Une autre étude propose un mélange linéaire utilisant une base de distribution spectrale de référence (20). Cette base de référence est déterminée de façon non-supervisée sous forme de distributions spectrales pour chaque spectre extrême : les "bundles".

Aussi complexe que soit la *représentation de terrain*, si elle comporte un *mélange géographique subpixel*, il existe un mélange linéaire de spectres, issus de zones différentes. A chaque zone "z" en mélange géographique subpixel est associé un spectre  $\mathbf{S}_z$ , qui peut avoir une représentation de surface particulière en mélange intime .

L'approche non-supervisée avec extraction des spectres de référence extrêmes permet de dépasser l'approche supervisée (voir chapitre 5.2.2 page 95) car elle permet d'estimer l'ensemble exhaustif des pôles spectraux  $\mathbf{S}_z$  de l'image. Toutefois, l'estimation du spectre  $\mathbf{S}_z$  est approchée car il s'agit simplement d'un spectre référence extrême de l'image le plus proche de  $\mathbf{S}_z$  (voir section 2.2 page 41). Cette différence est illustrée sur la figure 3.1.

### 5.3.2 Mélange linéaire et décorrélation

Les parties suivantes concernent la séparation de source en aveugle en se basant sur des méthodes statistiques. Chaque titre de chapitre explicite les hypothèses statistiques faites sur les sources.

#### 5.3.2.1 Décorrélation et mélange linéaire

Cette sous-section porte sur la séparation de sources en effectuant deux hypothèses : les sources sont en mélange linéaires et les sources sont décorrélées entre elles. C'est à dire qu'elles ont une covariance nulle. L'Analyse en Composante Principale (ACP) réalise cette séparation de source non supervisée puisque les nouvelles variables aléatoires sont décorrélées, comme souligné dans le chapitre de l'ACP concernant la réduction de dimensionnalité (voir chapitre 2.4.2 page 47). Le problème de séparation de source linéaire s'écrit :

$$\mathbf{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i(\lambda) \cdot P_i + \varepsilon(\lambda) \quad (5.6)$$

En écriture matricielle pour tout le cube hyperspectral, cette relation devient :

$$\mathbf{C}_{\lambda,z} = \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z} + \varepsilon_{\lambda,z} \quad (5.7)$$

En comparant ces équations avec les équations du mélange linéaire en séparation de source supervisée (équation 5.4 et 5.5), il apparaît que :  $\mathbf{S}_i(\lambda) = \mathbf{A}_i(\lambda)$  et  $\alpha_i = P_i$ . En notation matricielle :  $\mathbf{S}_{\lambda,i} = \mathbf{A}_{\lambda,i}$  et  $\alpha_{i,z} = \mathbf{P}_{i,z}$ .

Deux descriptions, utilisant deux type de vocabulaires différents, sont possibles. D'une part, la communauté des planétologues utilise les termes suivants : "signature spectrale" et "composantes". Les signatures spectrales sont des spectres. Les spectres observés forment un mélange de signatures spectrales, à proportion des composantes qui sont des images. Ce vocabulaire est attaché à la dimensionnalité (spatiale ou spectrale).

D'autre part, la communauté des statisticiens utilisent les termes suivants : "source" et "matrice de mélange". Les sources sont des variables aléatoires (dans la dimension spectrale ou spatiale !). Les signaux observés (dans la dimension spectrale ou spatiale !) sont issus d'un mélange de sources en proportion d'une ligne de la matrice de mélange (dans la dimension spectrale ou spatiale !).

Afin de réduire les ambiguïtés, considérons le "mélange spatial" : il faut absolument noter que le vecteur de la "matrice de mélange" correspondant à la source "i", noté  $\mathbf{A}_i(\lambda)$ , est un spectre. On parle parfois aussi d'"axe" portant la source "i". Le "coefficient de mélange" ou "proportion de mélange" de la source "i", noté  $\alpha_i$ , est un scalaire. De la même manière, il faut distinguer le terme  $\mathbf{S}_i(\lambda)$  qui est le

*spectre* associé à la source “ $i$ ”, du terme  $P_i$  qui est l’occurrence de la source “ $i$ ”. Ces termes et leurs noms associés sont usuels dans la littérature de la séparation de source et des mélanges supervisés, j’ai choisi de les conserver pour cette thèse. L’expression “mélange spatial” est ambiguë car la matrice de mélange est constituée de spectres et les sources sont des proportions de surfaces. Nous allons donc éliminer cette terminologie. De la même manière, le problème transposé dit de “mélange spectral” (voir ci-après) porte à confusion.

En identifiant chacun des termes de la séparation de sources à l’équation linéaire de la réflectance 5.1 exprimée en facteur de radiance, on obtient les relations suivantes :

$$\mathbf{A}_i(\lambda) = \Phi(\lambda) \cdot \mathbf{R}_i(\lambda) \quad (5.8)$$

$$P_i = \alpha_i \cdot \cos(\theta_i) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}(\lambda) \quad (5.10)$$

L’identification sur l’équation exprimée en facteur de réflectance (voir équation 5.3) est similaire à celle-ci, en utilisant le facteur  $\cos(\theta_i) = 1$ .

En introduisant une renormalisation des sources, il est possible d’éliminer le facteur  $\cos(\theta_i)$  pour des données en facteur de radiance :

$$P'_i = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^{N_s} P_i} = \frac{\alpha_i \cdot \cos(\theta_i)}{\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \cdot \cos(\theta_i)} = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i} = \alpha'_i \quad (5.11)$$

L’équation 5.6 s’écrit alors :

$$\mathbf{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i(\lambda) \cdot P'_i + \mathbf{B}(\lambda) \quad (5.12)$$

Cette équation est valable uniquement si les hypothèses ML sont toutes valides (voir section 5.1).

### 5.3.2.2 Décorrélacion spatiale ou spectrale

Les données sont organisées sous forme de matrice  $\mathbf{C}_{z,\lambda}$  dans laquelle les dimensionnalités spatiales ont été aplaties. Le nombre de pixels total est  $N_z$ . Le nombre de spectels total est  $N_\lambda$ . Il est possible d’appliquer une ACP de deux manières différentes suivant l’hypothèse de décorrélacion spatiale ou spectrale. Les deux problèmes, liés par une simple transposition, ne sont pas équivalents. Le tableau 5.1 compare les propriétés des deux approches.

- “Décorrélacion spatiale” : La décorrélacion spatiale est l’hypothèse sous-jacente à l’identification précédente (voir équations 5.8, 5.9 et 5.10). L’approche spectroscopique classique, telle que présentée au chapitre 2.4.2 page 47, considère une décorrélacion spatiale. Cette approche est liée à l’écriture de la réflectance en mélange linéaire, présentée au chapitre 5.1 page 92, supposant un mélange entre spectres. C’est un problème bien contraint car, dans le cas des images hyperspectrales, le nombre de sources est en général bien inférieur à la dimension spectrale  $N_\lambda$ . De plus, l’évaluation statistique est bien posée, car le nombre  $N_z$  d’occurrence des variables aléatoires de travail est très grand (de l’ordre de la centaine de milliers). Enfin, le bruit est correctement modélisé par cette approche puisque le nombre d’occurrences du bruit est la dimension spatiale  $N_z$ . Néanmoins, l’hypothèse statistique de décorrélacion spatiale des sources n’est pas valide car la somme des occurrences des sources égale à un quand elles sont interprétées comme des proportions de surface.
- “Décorrélacion spectrale” : Dans l’identification précédente, il suffirait d’échanger les termes  $\mathbf{A}_i(\lambda)$  en  $P_i(\lambda)$  et  $P_i$  en  $\mathbf{A}_i$  pour obtenir un mélange qui sous-tend la décorrélacion spectrale. La décorrélacion spectrale est une hypothèse correcte si les corps purs en présence ont des spectres décorrélés, ce qui semble valable d’un point de vue spectroscopique. Cependant, certaines portions de spectres peuvent parfois être corrélées. Par exemple, certaines liaisons chimiques, comme la

TAB. 5.1 – Comparaison entre l’ACP spatiale et l’ACP spectrale

Méthode	décorrélation spectrale	décorrélation spatiale
<i>Matrice de données</i>	$\mathbf{C}_{z,\lambda} \sim \mathbf{A}_{z,i} \cdot \mathbf{P}_{i,\lambda}$	$\mathbf{C}_{\lambda,z}^T \sim \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z}$
Dimension des signaux	$N_z \sim 100000$	$N_\lambda \sim 200$
Nombre d’occurrences de signaux	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Matrice de mélange</i>	$\mathbf{A}_{z,i}$	$\mathbf{A}_{\lambda,i}$
Nombre de sources	$N_p \sim 5$	$N_p \sim 5$
Nombre d’éléments	$N_z \cdot N_p \sim 500000$	$N_\lambda \cdot N_p \sim 1000$
<i>Matrice des sources</i>	$\mathbf{P}_{i,\lambda}$	$\mathbf{P}_{i,z}$
Nombre d’occurrences	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Matrice de bruit</i>	$\mathbf{B}_{j,\lambda}$	$\mathbf{B}_{j,z}$
Dimensionnalité d’occurrence	spectrale	spatiale
Nombre d’occurrences	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Estimation statistique</i>	mauvaise	bonne
<i>Hypothèse statistique de décorrélation</i>	moyenne	mauvaise

liaison O-H qui forme la bande à 3 microns, sont présentes dans de nombreux matériaux martiens. L’hypothèse de décorrélation spectrale est donc mise à mal. De plus, elle est associée à un problème sous-contraint. Enfin, le bruit est mal modélisé puisque le nombre d’occurrences est égal à la dimension spectrale, c’est à dire de l’ordre de la centaine seulement.

En conclusion, l’ACP en décorrélation spatiale est la plus utilisée, car la robustesse semble être le critère essentiel.

### 5.3.2.3 Indétermination d’ordre et de signe

L’ACP permet d’estimer des sources mais, deux indéterminations majeures, intrinsèques à la méthode, persistent :

**Indétermination d’ordre** : on peut échanger l’ordre des sources sans changer le résultat tant que la somme  $\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i \cdot P_i$  reste inchangée.

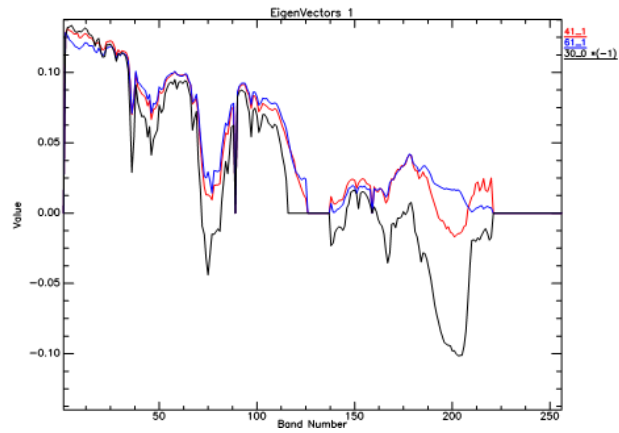
**Indétermination de signe** : il est toujours possible de multiplier la source par -1 et de multiplier la matrice de mélange aussi par -1 sans changer le résultat de la somme  $\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i \cdot P_i$ , ni la variance, ni la covariance (qui est nulle). Les sources sont donc définies à un signe près.

### 5.3.2.4 Résultat sur des données réelles

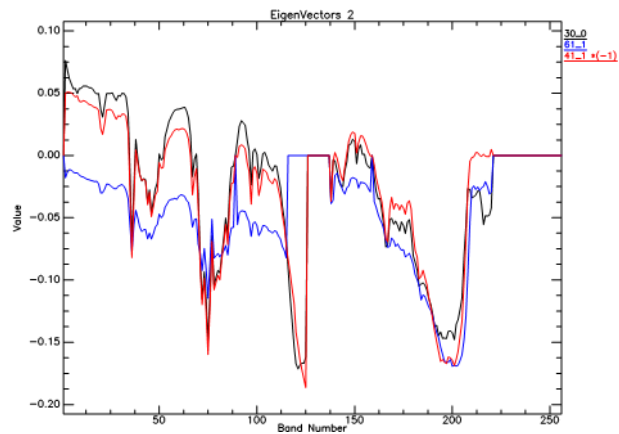
Montrons maintenant que l’ACP en décorrélation spatiale ne produit pas de résultat interprétable en terme de propriétés de surface. Appliquons cette méthode sur des données en réflectance d’une observation particulière d’OMEGA de la calotte permanente sud de Mars (ORB0030\_0, ORB0041\_1 et ORB0061\_1), nettoyée des spectels pollués par du bruit. Les trois premières lignes de la matrice de mélange, associée aux trois sources de variances les plus élevées, ont été représentées sur la figure 5.1. Bien que ces axes soient assez stables d’une image à une autre, il est impossible de les interpréter comme des spectres sources physiques, notamment à cause de la possible négativité. Il est par ailleurs impossible de les associer à un phénomène photométrique ou instrumental particulier.

L’application de l’ACP pour la séparation de source sur des données OMEGA a été développée au cours de mon stage de Master 2 (261) et prolongé au cours de cette thèse.

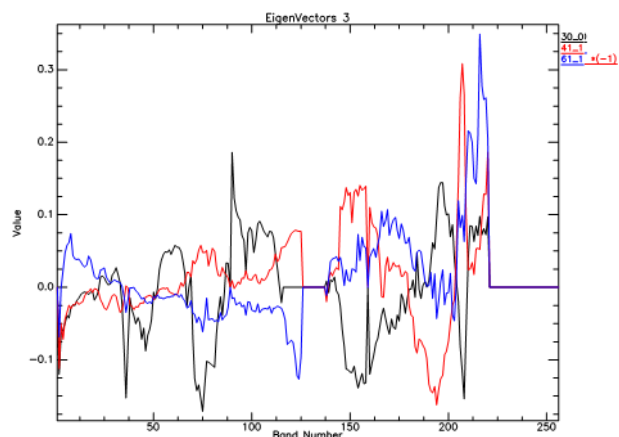
L’hypothèse de décorrélation des sources a une signification géométrique : les axes portant les sources doivent être orthogonaux. En reprenant, l’étude de Douté et al. sur la calotte permanente sud (64), présentée au chapitre 3.1.1 page 61, il est possible de tracer grossièrement, dans le sous espace des deux premières composantes ACP, un diagramme triangulaire dont les sommets expriment les sources



(a) ACP Axe 1



(b) ACP Axe 2



(c) ACP Axe 3

FIG. 5.1 – Matrice de mélange associée aux sources de variance la plus élevée (Axe 1), la seconde plus grande (Axe 2) et la troisième (Axe 3). Trois observations de la calotte permanente sud sont mises en correspondances (noir : ORB0030\_0 / rouge : ORB0041\_1 / bleu : ORB0061\_1). Parfois ces axes ont été multipliés par -1.

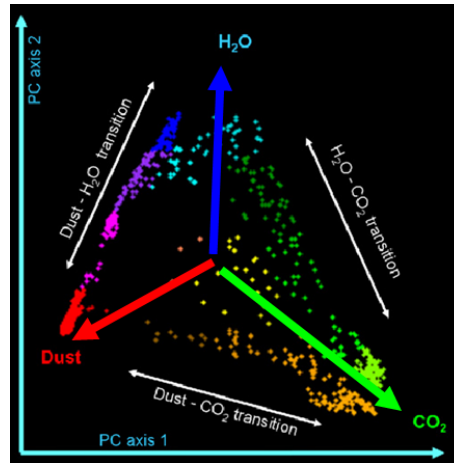


FIG. 5.2 – Classification manuelle spectrale utilisant la MNF par Douté et al. (64) (voir figure 3.1 page 62). Les endmembers sont les spectres correspondants aux points les plus proches des pôles de poussière (dust - rouge), d'eau (bleu) et de CO<sub>2</sub> (vert). Les axes de couleurs superposés à la classification représentent les trois axes supposés de poussière (rouge), d'eau (bleu) et de CO<sub>2</sub> (vert). Ces axes sont non-orthogonaux.

de glace d'eau, glace de CO<sub>2</sub> et poussière (voir figure 5.2).

Les côtés du triangle sont non-orthogonaux entre-eux, donc l'hypothèse de décorrélation entre ces trois sources potentielles ne semble donc pas correcte. Néanmoins, il est tout de même possible que ces axes soient orthogonaux, dans un sous espace plus grand que celui des deux premières composantes de l'ACP.

La méthode supervisée Wavanglet développée au cours de cette thèse (voir annexes 13 page 219 et 4.1.1 page 78) et appliquée à l'observation ORB0041\_1, permet de tester l'hypothèse de décorrélation des sources dans le domaine spatial ou spectral. Il suffit de mesurer la corrélation des masques de détection et des spectres de références, pour tester cette hypothèse.

Corrélations spatiales des masques de détection :

$$C_{spatial}(\text{poussiere}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}) = \begin{pmatrix} 1 & -0,61 & -0,24 \\ -0,61 & 1 & -0,25 \\ -0,24 & -0,25 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Corrélations spectrales des spectres de références (voir annexe 4.1.1 page 78) :

$$C_{spectral}(\text{poussiere}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}) = \begin{pmatrix} 1 & 0,15 & 0,31 \\ 0,15 & 1 & 0,73 \\ 0,31 & 0,73 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Dans le domaine spatial, il existe une très forte anti-corrélation entre la présence de glace de CO<sub>2</sub> et de poussière. L'explication la plus simple consiste à prétendre que la glace de CO<sub>2</sub> masque complètement le substrat minéral. Dans une autre mesure, la poussière étant spectralement neutre, il peut y avoir un biais de détection de l'algorithme de détection Wavanglet, détectant uniquement les formes spectrales. Dans le domaine spectral, les glaces d'eau et de CO<sub>2</sub> à l'échantillonnage spectral d'OMEGA présentent une très forte corrélation. Cette corrélation est fortuite, elle devrait disparaître si la fenêtre spectrale grandit ou l'échantillonnage augmente.

### 5.3.3 Mélange linéaire et indépendance

La séparation de source en aveugle, dans le cadre d'un mélange linéaire et d'une hypothèse statistique d'indépendance des sources, est plus connue sous le nom d'Analyse en Composante Indépendante ou ACI (170; 127). C'est une méthode récente qui corrige une limitation de l'ACP utilisée pour faire de

la séparation de source. Il s'agit d'éliminer l'hypothèse mathématique très contraignante de l'ACP : l'orthogonalité des axes. Dans le cadre de l'ACI, les axes sont toujours linéaires - ce sont des axes ! - mais une opération de rotation s'effectue pour maximiser un indicateur pertinent de la distribution qui vient remplacer la variance (moment d'ordre 2). Il existe plusieurs indicateurs qui ont comme point commun d'exprimer l'indépendance des sources en terme de moments ou cumulants d'ordre supérieur à deux. On parle alors de "statistique d'ordre supérieur". En général, les données sont centrées et réduites avant une ACI, la communauté de traitement du signal désigne cette étape par le terme de "standardisation".

La séparation de source en aveugle est liée au problème du "cocktail party" : tout le monde parle en même temps et on veut retrouver chacune des voix pures, chacune des sources (voir illustration de Gotlieb 91). Pour une présentation historique du problème, j'invite le lecteur à lire les thèse de Sophie Achard (3) et Saïd Moussaoui (222). Pour une présentation mathématique des méthodes d'ACI, les deux livres suivants sont extrêmement enrichissants (170; 127). Si les hypothèses d'indépendance et de mélange linéaire sont vérifiées, il est possible de résoudre ce problème. L'ACI est donc utilisée dans un grand nombre de domaine : par exemple en cosmologie, il est possible de séparer le fond diffus cosmologique des contributions galactiques, au sein des observations du ciel dans le domaine micro-onde (13).

L'écriture du problème linéaire de séparation de source s'écrit de la même manière que pour l'hypothèse de décorrélation (voir équation 5.6 au chapitre 5.3.2 page 98). Les équations 5.8, 5.9 et 5.10 d'identification sont toujours valides. Il est encore possible d'effectuer la renormalisation de l'équation 5.11 dans le cas de l'ETR en facteur de radiance pour la ramener à l'équation 5.12. En bref, tous les éléments de la section 5.3.2.1 restent valables. Notamment, les hypothèses ML doivent être respectées (voir section 5.1)

### 5.3.3.1 Non-gaussianité, indépendance et information mutuelle

Quels peuvent être les indicateurs statistiques de l'indépendance des sources ? Il existe deux approches pour répondre à cette question.

**Non gaussianité** La non-gaussianité est un critère pertinent d'après le théorème central limite (voir annexe 12.4.3.2 page 211). En effet, d'après ce théorème, la distribution gaussienne est la distribution limite quand on mélange linéairement une grande quantité de variables aléatoires indépendantes quelles que soient leurs distributions propres (si les distributions ont des moyennes et écart-type convergentes). Dans ce cas, plus un axe porte une distribution non-gaussienne, plus il a la chance d'être porteur d'un nombre restreint de paramètres physiques. L'idée majeure est donc de trouver des axes portant une distribution la moins gaussienne possible.

Comment estimer l'écart entre la distribution portée par l'axe et la distribution gaussienne ? Il faut se munir d'une distance entre les deux densités de probabilité ( 12.4.5 page 212). Par exemple, la distance de Kullback-Liebler entre d'une part, la densité de probabilité gaussienne de même moyenne et de même variance que la distribution portée par l'axe et, d'autre part, la distribution portée par l'axe. On peut montrer que cette définition revient à la néguentropie ou encore au déficit d'information au sens de Shannon (voir l'annexe 12.4.6 page 213).

**Indépendance et information mutuelle** Pour dépasser l'utilisation d'un indicateur statistique défini sur chaque source séparément, comme la non-gaussianité, il est possible de décrire directement l'état concernant toutes les sources à la fois. L'hypothèse statistique est l'indépendance de toutes les sources entre-elles. La probabilité du vecteur aléatoire de la distribution jointe de plusieurs variables aléatoires indépendantes s'écrit simplement comme le produit des probabilités. Par exemple, pour deux variables aléatoires indépendantes :  $d\mathcal{P}_{X,Y} = d\mathcal{P}_X d\mathcal{P}_Y$  (voir en annexe 12.4.2.1 page 207).

L'indépendance des sources est très souvent estimée grâce à l'information mutuelle (voir l'annexe 12.4.6 page 213) qui est la distance au sens de Kullback-Liebler entre d'une part, la densité de probabilité du vecteur aléatoire total, et d'autre part, la densité de probabilité du produit des variables aléatoires. Si cette distance est nulle, l'indépendance est vérifiée. On peut montrer que dans le cas du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  centré réduit, l'information mutuelle  $I(\cdot)$  s'écrit comme :

TAB. 5.2 – Comparaison entre l’ACI spatiale et l’ACI spectrale

Méthode	indépendance spectrale	indépendance spatiale
<i>Matrice de données</i>	$\mathbf{C}_{z,\lambda} \sim \mathbf{A}_{z,i} \cdot \mathbf{P}_{i,\lambda}$	$\mathbf{C}_{\lambda,z}^T \sim \mathbf{A}_{\lambda,i} \cdot \mathbf{P}_{i,z}$
Dimension des signaux	$N_z \sim 100000$	$N_\lambda \sim 200$
Nombre d’occurrences de signaux	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Matrice de mélange</i>	$\mathbf{A}_{z,i}$	$\mathbf{A}_{\lambda,i}$
Nombre de sources	$N_p \sim 5$	$N_p \sim 5$
Nombre d’éléments	$N_z \cdot N_p \sim 500000$	$N_\lambda \cdot N_p \sim 1000$
<i>Matrice des sources</i>	$\mathbf{P}_{i,\lambda}$	$\mathbf{P}_{i,z}$
Nombre d’occurrences	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Matrice de bruit</i>	$\mathbf{B}_{j,\lambda}$	$\mathbf{B}_{j,z}$
Dimensionnalité d’occurrence	spectrale	spatiale
Nombre d’occurrences	$N_\lambda \sim 200$	$N_z \sim 100000$
<i>Estimation statistique</i>	mauvaise	bonne
<i>Hypothèse d’indépendance statistique</i>	bonne	mauvaise

$$I(f_{\mathbf{X}}(\lambda)) = J(f_{\mathbf{X}}(\lambda)) + \sum_{i=1}^{N_z} J(f_{X_i}(\lambda_i)) \quad (5.15)$$

Avec  $J(\cdot)$ , la négentropie. Elle ne dépend que des moments et des cumulants d’ordre supérieur à 2 (voir en annexe 12.4.6 page 213).

### 5.3.3.2 Indépendance spatiale, spectrale, spectro-spatiale

De la même manière que pour l’hypothèse de décorrélation, il est possible de proposer une indépendance spectrale ou spatiale, les deux problèmes étant liés par une simple transposition (voir section 5.3.2.2 page 99). Le tableau 5.2 compare les propriétés de ces deux approches. Une combinaison des indépendances spectrale et spatiale existe aussi. Détaillons ces trois approches :

- “Indépendance spatiale” : L’hypothèse d’indépendance spatiale n’est pas valide car la somme des occurrences des sources égale à un (car elles sont interprétées comme des proportions de surface). Cependant, c’est la méthode la plus usuellement utilisée en télédétection (226; 88).
- “Indépendance spectrale” : L’indépendance spectrale est une hypothèse correcte d’un point de vue spectroscopique sur des corps purs. Cependant, certaines liaisons chimiques, comme la liaison O-H qui forme la bande à 3 microns, sont présentes dans de nombreux matériaux martiens. Cette hypothèse est donc mise à mal dans certains domaines spectraux.
- “Indépendance spectro-spatiale” : Il existe aussi une façon de faire une décomposition spectro-spatiale ou les composantes indépendantes sont cherchées à la fois dans la dimension spectrale et spatiale (292). Cette approche nécessite un paramètre qui compare les indépendances spatiale et spectrale. Ce coefficient d’ajustement n’a pas de raison théorique et aucune méthodologie ne permet de l’optimiser a priori. Cette méthode n’est donc pas intéressante dans le cadre des images hyperspectrales de télédétection.

### 5.3.3.3 Indétermination d’ordre et d’échelle

L’ACI permet d’estimer des sources mais deux indéterminations majeures persistent, intrinsèques à la méthode :

#### Indétermination d’ordre

On peut échanger l'ordre des sources sans changer le résultat tant que la somme  $\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i \cdot P_i$  reste inchangée.

#### Indétermination d'échelle

Il est toujours possible de multiplier la source par un facteur et de diviser la matrice de mélange par le même facteur sans changer le résultat de la somme  $\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_i \cdot P_i$ , ni la néguentropie, ni l'indépendance. Les sources sont donc définies à un facteur près.

#### 5.3.3.4 Différentes méthodes d'ACI

Il existe plusieurs façons de réaliser une ACI. Voici trois méthodes particulières mais d'autres approches sont possibles :

- Fast ICA : C'est une méthode itérative d'estimation des sources. Elle appartient donc au "projection poursuit" (voir section 2.4.5 page 52). L'estimateur de la non-gaussianité de cette méthode (128) est la néguentropie réduite aux ordres trois et quatre :

$$J(P_i) = \frac{1}{12} (\mathbb{E}(P_i^3))^2 - \frac{1}{48} (\mathcal{C}um_4(P_i))^2 \quad (5.16)$$

Cependant, cette expression n'est pas robuste car le kurtosis, ou cumulants d'ordre quatre, n'a pas d'estimation robuste. Les auteurs proposent donc d'utiliser plutôt l'expression suivante :

$$J(P_i) \simeq [\mathbb{E}(g(P_i)) + \mathbb{E}(g(P_{gaus}))]^2 \quad (5.17)$$

Avec  $P_{gaus}$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance 1. La fonction  $g$  doit être de croissante lentement comme par exemple ces deux fonctions :

$$g(u) = \frac{1}{k} \log \cosh(k \cdot u) \mid 1 \leq k \leq 2 \quad (5.18)$$

$$g(u) = -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (5.19)$$

Cette méthode permet d'extraire itérativement chaque source  $P_i$  qui maximise la néguentropie  $J(P_i)$ .

- JADE : La méthode JADE ou "Joint Approximate Diagonalisation of Eigenmatrices" (42) est basée sur le tenseur des cumulants d'ordre quatre (voir annexe 12.4.3.1 page 210). Ce tenseur a la propriété suivante : les cumulants croisés sont nuls pour un vecteur aléatoire formé de variables aléatoires indépendantes. En définissant la matrice cumulante  $\mathbf{N}_{i,j}$  d'après le produit matricielle avec  $\mathbf{M}_{k,l}$  quelconque :

$$\mathbf{N}_{i,j} = \mathcal{Q}(\mathbf{M}_{k,l}) = \sum \sum \mathcal{C}um_{i,j,k,l} \mathbf{M}_{k,l} \quad (5.20)$$

La méthode JADE consiste alors à diagonaliser cette matrice cumulante pour un ensemble de matrice  $\mathbf{M}_{k,l}$  particulier : les matrices propres du tenseur des cumulants. Cette méthode permet d'estimer toutes les sources à la fois.

- IFA : Pour aller au delà de l'ordre 4, la méthode IFA ou "Independent Factor Analysis" (12) est basée sur l'approximation suivante : la densité de probabilité des sources est une somme de gaussienne. Cette approximation permet d'effectuer un calcul analytique. Les études en imagerie hyperspectrale montrent qu'il suffit de trois gaussiennes pour retrouver la matrice de mélange correcte mais dix gaussiennes sont nécessaires pour une bonne estimation de la matrice de mélange et de l'information mutuelle (226). Cette méthode n'a pas été utilisée lors de cette thèse.
- Approche bayésienne : Il s'agit d'écrire le problème en terme d'inférence bayésienne (voir annexe 12.4.2.6 page 209). La solution étant l'état de probabilité de la matrice de mélange et des sources, sachant l'occurrence des spectres :  $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P} | \mathbf{S})$ . D'après la relation de Bayes, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P} | \mathbf{S}) = \mathcal{P}(\mathbf{S} | \mathbf{A}, \mathbf{P}) \times \mathcal{P}(\mathbf{S}) \times \mathcal{P}(\mathbf{A}) \quad (5.21)$$



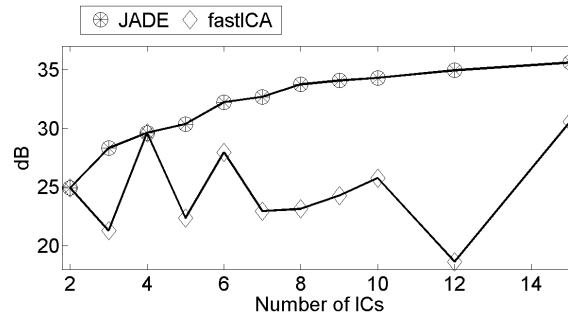


FIG. 5.3 – Rapport signal sur bruit de reconstruction (en dB) en fonction du nombre de sources estimé avec la méthode JADE (cercles) et Fast ICA (losanges).

L’avantage de cette méthode est qu’elle fait intervenir les probabilités a priori des sources et de la matrice de mélange. Il est donc possible d’y intégrer des contraintes mathématiques. Cette approche, notamment utilisée dans la thèse de Saïd Moussaoui (222), est développée plus en détail dans le chapitre 5.3.5.

### 5.3.3.5 Résultats sur des données réelles

Les résultats majeurs, issus des tests sur les données OMEGA effectués lors de cette thèse, sont présentés dans cette section. Ces tests ont été produits en appliquant l’hypothèse d’indépendance spatiale, afin de se placer dans les conditions les mieux contraintes.

Définissons la rapport signal sur bruit estimé : SNR pour “Signal to Noise Ratio”. C’est la quantité d’énergie dans le sous-espace signal par rapport au sous-espace bruit :

$$SNR(N_s) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \sum_{z=1}^{N_z} (\mathbf{C}_{\lambda,z})^2}{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \sum_{z=1}^{N_z} (\mathbf{C}_{\lambda,z} - \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_{\lambda,i} \mathbf{P}_{i,z})^2} \right) \quad (5.22)$$

**Robustesse** Testons maintenant la robustesse des algorithmes d’ICA, notamment vis à vis de l’initialisation. En effet, les algorithmes itératifs (Fast ICA) comportent une sensibilité aux conditions initiales. Nous avons généré une condition initiale aléatoire, comme l’usage en convient lorsque l’on a aucune information a priori.

Nous avons élaboré un test simple : estimer le rapport signal sur bruit de reconstruction (SNR) en fonction de  $N_s$ , le nombre estimé de sources. En principe, ce rapport doit augmenter continûment avec le nombre de sources puisque le signal mesuré doit être de mieux en mieux reconstruit.

Le graphique 5.3 représente les résultats de ce test pour les méthodes Fast ICA et JADE. La méthode Fast ICA n’est pas robuste car le SNR de reconstruction n’a pas une augmentation continue en fonction du nombre de sources. Par exemple, la plus mauvaise reconstruction se fait avec douze sources ! Cette caractéristique provient du fait que la méthode Fast ICA est très sensible à l’initialisation. La méthode JADE paraît plus robuste car le SNR augmente bien continûment avec le nombre de sources. Cette méthode estime toutes les sources à la fois.

De plus, le niveau de reconstruction des spectres avec la méthode JADE est toujours supérieur ou égal à la reconstruction de la méthode Fast ICA.

Pour ces trois raisons, la méthode JADE a été retenue comme méthode de référence d’ICA dans notre étude.

**Interprétation des résultats de JADE** Les différentes sources trouvées par JADE dans son application à l’observation ORB0041\_1.CUB en facteur de radiance sont interprétables comme ceux de l’ACP (261). La figure 5.4 montre les 7 premières sources, on retrouve : l’effet de l’incidence solaire couplée aux

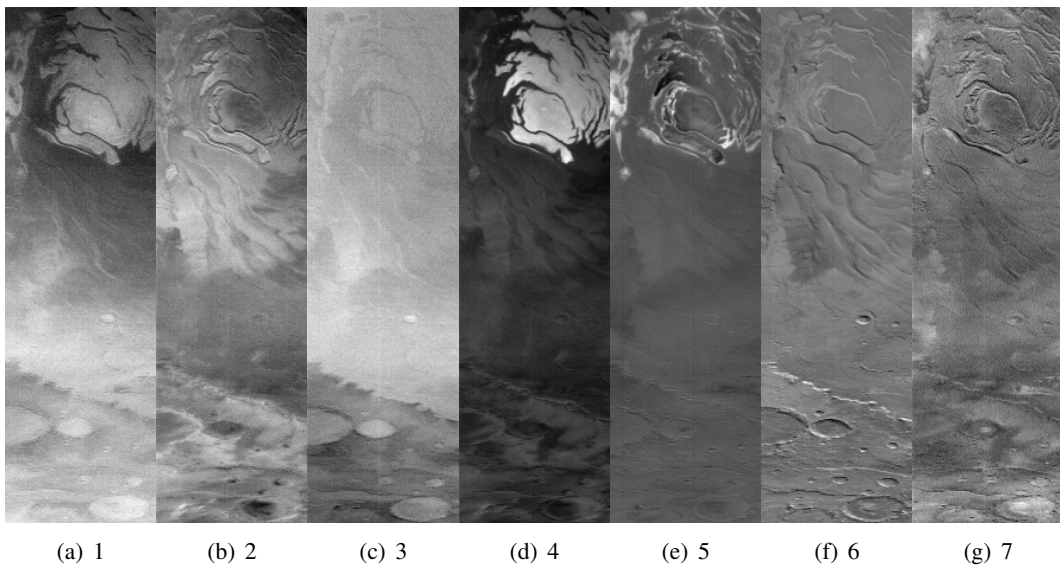


FIG. 5.4 – Estimation de 7 sources avec JADE sur l'observation ORB0041\_1.CUB

variations spatiales de l'albédo du continuum (source 1), la contribution de l'émission thermique (source 3), la présence de glace d'eau (source 5), de glace de CO<sub>2</sub> (source 4), les effets du décalage de canaux C et L (source 6). Les sources 2 et 7 sont difficilement interprétables et doivent correspondre à un mélange d'effet non-linéaire. La figure 5.5 expose les 7 axes ou 7 premières lignes de la matrice de mélange. Les interprétations en terme spectroscopique ne sont pas possibles même en mettant en correspondance un spectre de référence de glace d'eau et de CO<sub>2</sub> sur le même graphique (voir figure 5.6). Néanmoins, certaines ressemblances apparaissent.

La comparaison des méthodes Fast ICA et JADE, ainsi que leurs applications sur des observations OMEGA, ont été produites lors de cette thèse, notamment en collaboration avec Hafrún Hauksdóttir, du LIS, Christian Jutten et Jocelyn Chanussot du LIS. D'autres résultats sont disponibles dans le rapport de Master 2 d'Hafrún Hauksdóttir (111).

Les potentiels de l'ACI dans l'imagerie hyperspectrale ont été mis à jour depuis le début des années 90, comme en témoigne les nombreuses études (312; 89; 67; 45), notamment en utilisant la poursuite de projection (11; 185). Un historique récent de ces méthodes a été publié récemment (44).

Forni et al. ont utilisé la séparation de source de type ICA avec l'algorithme JADE sur les données OMEGA (88). Ils ont mis en évidence l'intérêt de cette méthode dans le débruitage ou encore l'identification spectrale.

L'hypothèse d'indépendance spatiale utilisant l'ACI sur les images hyperspectrales a fait l'objet d'une étude théorique et numérique. Celle-ci montre que l'indépendance spatiale est une mauvaise hypothèse statistique (226).

### 5.3.4 Mélanges non-linéaires et indépendance

La méthode de séparation de source non-linéaire est un problème mal contraint. L'ensemble des données ne suffit pas pour contraindre à la fois les sources et les non-linéarités. Il existe un ensemble de solutions (142).

Soit deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$ . Les nouvelles variables aléatoires  $X'$  et  $Y'$ , fonctions de ces deux variables aléatoires  $X' = f(X)$  et  $Y' = g(Y)$ , sont indépendantes quelles que soient les transformations  $f$  et  $g$ . Il n'est donc pas possible de discriminer la situation du couple  $X, Y$  de la situation du couple  $X', Y'$  en utilisant un argument d'indépendance. L'ensemble des solutions est donc infini.

Par conséquent, il n'est pas judicieux d'utiliser une séparation de source en aveugle non-linéaire.

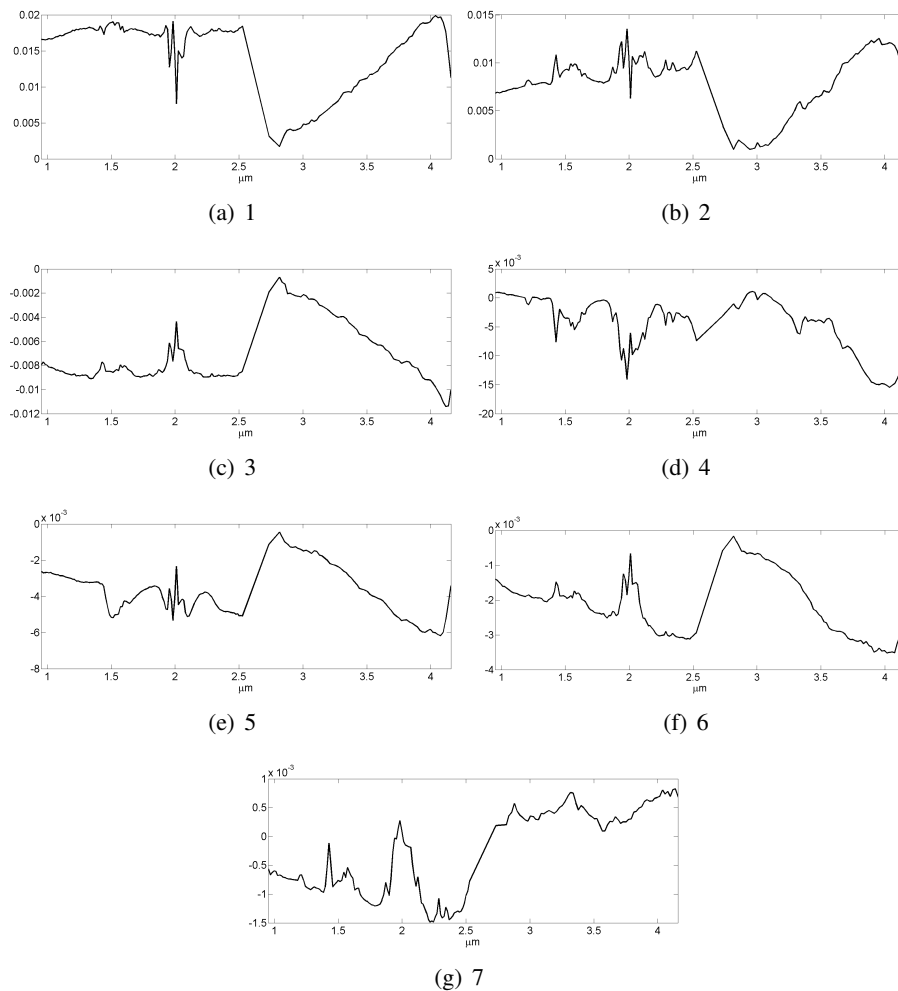


FIG. 5.5 – Estimation des 7 premiers axes de la matrice de mélange avec JADE sur l'observation ORB0041\_1.CUB

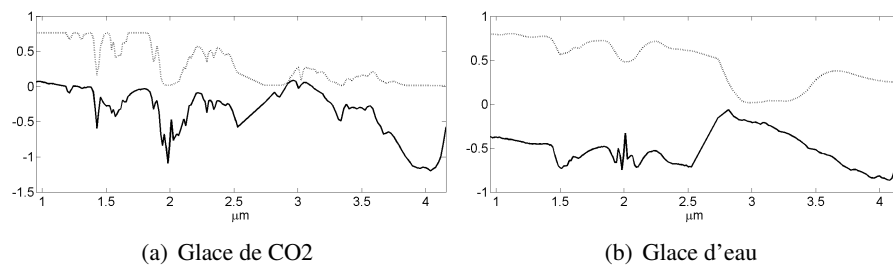


FIG. 5.6 – Identification spectrale de l'axe de la matrice de mélange associé à la glace d'eau et à la glace de CO<sub>2</sub> en utilisant la méthode JADE sur l'observation ORB0041\_1.CUB. Les spectres en pointillés sont les spectres de référence synthétiques utilisés pour la méthode Wavanglet (voir section 4.1.1 page 78)

### 5.3.5 Mélange linéaire, positivité et indépendance spectrale

Nous avons vu que l'indépendance spatiale n'est pas une bonne hypothèse pour séparer des sources en imagerie hyperspectrale. D'un autre côté, l'indépendance spectrale est mal contrainte car il n'existe qu'un petit nombre d'occurrences. L'ajout de contraintes mathématiques supplémentaires permet de s'approcher vers un état de solution unique.

D'après la section 5.3.3, le mélange linéaire et l'indépendance ne sont pas des hypothèses mathématiques et statistiques suffisantes pour permettre d'extraire des sources interprétables en terme de spectroscopie. Certaines contraintes mathématiques supplémentaires peuvent aider à la méthode : notamment la positivité des sources et de la matrice de mélange. En effet, un spectre est toujours positif. De même, une abondance ou une fraction de surface est toujours positive.

L'approche bayésienne semble être la méthodologie la plus intéressante pour ajouter des hypothèses mathématiques car elle permet de les traduire de manière rigoureuse.

#### 5.3.5.1 Inférence bayésienne, positivité et indépendance

Rappelons simplement l'écriture du problème linéaire d'ACI sous forme matricielle (voir équation 5.7 page 98) pour les indices en indépendance spectrale :

$$\mathbf{C}_{z,\lambda} = \mathbf{A}_{z,i} \cdot \mathbf{P}_{i,\lambda} + \varepsilon_{z,\lambda} \quad (5.23)$$

L'écriture du problème de séparation de source en utilisant le théorème de Bayes (voir annexe 12.4.2.6 page 209) se fait de la façon suivante (une présentation plus détaillée se trouve dans la thèse de Saïd Moussaoui (222)) :

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P} | \mathbf{S}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{S} | \mathbf{A}, \mathbf{P}) \times \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P})}{\mathcal{P}(\mathbf{S})} \quad (5.24)$$

La probabilité des spectres observés  $\mathcal{P}(\mathbf{S})$  est constante pour une image hyperspectrale donnée, elle peut être vue comme un facteur de normalisation.

Dans le cadre d'un *mélange géographique subpixel* (voir section 1.4.1.1 page 31), il est justifié de supposer que la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  et les sources  $\mathbf{P}$  soient indépendantes. Dans ce cas chaque source  $\mathbf{P}_i$  correspond à la proportion de surface  $\alpha_z$  d'une zone "z". La ligne correspondante de la matrice de mélange est le spectre associé  $\mathbf{S}_z$ . On peut donc écrire :

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P} | \mathbf{S}) \propto \mathcal{P}(\mathbf{S} | \mathbf{A}, \mathbf{P}) \times \mathcal{P}(\mathbf{A}) \times \mathcal{P}(\mathbf{P}) \quad (5.25)$$

Notons  $\theta = \{\theta_{\mathbf{B}}, \theta_{\mathbf{A}}, \theta_{\mathbf{P}}\}$  l'ensemble des hyperparamètres des densités de probabilités du bruit, matrices de mélange et sources. Le problème bayésien s'écrit finalement :

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \theta | \mathbf{S}) \propto \mathcal{P}(\mathbf{S} | \mathbf{A}, \mathbf{P}, \theta_{\mathbf{B}}) \times \mathcal{P}(\mathbf{P} | \theta_{\mathbf{P}}) \times \mathcal{P}(\mathbf{A} | \theta_{\mathbf{A}}) \times \mathcal{P}(\theta) \quad (5.26)$$

Détaillons maintenant ces quatre termes dans le cadre de la séparation de source bayésienne positive en mode d'indépendance spectrale (220). Cette résolution est aussi connue sous le nom de "Bayesian Positive Source Separation" ou BPSS.

Le premier terme concerne la reconstruction du signal. En supposant un bruit gaussien de moyenne nulle (voir annexe 12.4.1.1), on peut l'écrire comme :

$$\mathcal{P}(\mathbf{S} | \mathbf{A}, \mathbf{P}, \theta_{\mathbf{B}}) = \prod_{z=1}^{N_z} \prod_{k=1}^{N_\lambda} \mathcal{N} \left( \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_{z,i} \cdot P_i, \sigma_z^2 \right) \quad (5.27)$$

Chaque élément spectro-spatial de l'image est caractérisé statistiquement par une gaussienne. Tous les éléments sont indépendants entre eux.

Cette paramétrisation, originalement proposée pour des signaux spectroscopiques de laboratoire (220), ne semble pas tout à fait satisfaisant pour l'imagerie hyperspectrale en indépendance spectrale car la

variance  $\sigma_z$  ne dépend que de l'indice des pixels. Le comportement des spectro-imageurs serait modélisé de façon plus pertinente si la variance du bruit gaussien dépendait de la dimension spectrale. En revanche, en mode d'indépendance spatiale, c'est à dire en échangeant les indices  $z$  et  $k$ , cette écriture est tout à fait satisfaisante. La meilleure modélisation du bruit correspond à une variance  $\sigma_{z,k}$  qui dépend à la fois des dimensions spectrale et spatiales.

Le second terme concerne la densité de probabilité des signaux sources. La positivité est garantie grâce à une densité de probabilité à support positif. Suivant l'étude de Moussaoui et al., on utilise la fonction gamma à deux paramètres (voir annexe 12.4.1.1) qui reproduit bien plusieurs comportements de densité de probabilité. En supposant que les sources soient indépendantes entre elles, le second terme s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}|\boldsymbol{\theta}_\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{N_s} \prod_{k=1}^{N_\lambda} \mathcal{G}(\alpha_i, \beta_i) \quad (5.28)$$

Le troisième terme concerne la matrice de mélange. Chaque élément est supposé comme positif, la positivité étant garantie grâce à une densité de probabilité à support positif. Suivant (220), on utilise la fonction gamma à deux paramètres (voir annexe 12.4.1.1) qui reproduit bien plusieurs comportements de densité de probabilité. Nous supposons que la densité de probabilité de chaque pixel a une densité de probabilité indépendante des autres pixels. Cette hypothèse est bafouée dans le cadre des images hyperspectrales car il existe une certaine corrélation spatiale. Le troisième terme s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}|\boldsymbol{\theta}_\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{N_z} \prod_{k=1}^{N_\lambda} \mathcal{G}(\alpha_j, \beta_j) \quad (5.29)$$

Le quatrième terme correspond simplement à l'estimation des hyperparamètres.

### 5.3.5.2 Algorithme de résolution

La résolution du problème bayésien peut se faire par une méthode Monte Carlo (220). Après un tirage aléatoire d'initialisation, il s'agit d'estimer itérativement l'ensemble des paramètres :

1. Signaux sources

$$\hat{\mathbf{P}} = E(\mathbf{P}|\mathbf{S}) \quad (5.30)$$

2. Coefficient de mélange

$$\hat{\mathbf{A}} = E(\mathbf{A}|\mathbf{S}) \quad (5.31)$$

3. Hyperparamètres

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{S}) \quad (5.32)$$

Puis, de recommencer ces trois étapes jusqu'à convergence. Une itération pour une image de  $16 \times 16$  pixels met 0,58 s et pour une image  $128 \times 128$  met 39,85 s. Sachant qu'il faut de l'ordre de 10000 itérations pour un bon niveau d'estimation, ce type d'algorithme est relativement long et quasi inutilisable sur des images OMEGA entières.

Pour répondre à ce problème et adapter cette méthode prometteuse aux données hyperspectrales, j'ai contribué à développer la méthode notée "JADE+BPSS". Celle-ci fera l'objet du chapitre 6. L'article présentant cette méthode a été soumis dans le journal Neurocomputing (221), disponible à l'annexe 14 page 221.

## 5.4 Bilan et Perspectives

Résumons sous forme de tableau, les propriétés des méthodes de séparation de source, incluant la méthode "JADE+BPSS" qui est développée au chapitre 6. Le tableau 5.3 présente les méthodes de séparation de source supervisées. Le tableau 5.4, présente les méthodes non-supervisées.

Décrivons les différents critères d'évaluation et les qualificatifs associées (champ du tableau) :

Les “abondances en mélange géographique subpixel” sont des proportions de surface.

L’aptitude à estimer correctement ces abondances est “possible si les hypothèses ML sont vérifiées” (voir section 5.1 page 92).

Le champ “Qualitatif probable” est réservé à la méthode des ratios, car l’aptitude dépend du ratio, notamment en présence de recouvrement de corps.

Le champ “impossible” dénote que la méthode n’a pas été construite dans ce but.

L’aptitude à estimer correctement les “abondances en mélange intime granulaire” pur peut être “quantitative” si elle tient compte de effets de transfert radiatif,

Cette aptitude peut être “empirique”, “qualitative”, voire “impossible” si la méthode n’a pas été construite dans ce but.

L’aptitude à estimer correctement les “abondances pour toutes les représentations de surface” est “improbable” pour toutes les méthodes.

Seule une inversion permet d’estimer une abondance dans le cas de représentation de surface complexe.

Le champ “spectre  $S_z$  en mélange géographique subpixel” est réservé aux méthodes non-supervisée qui permettent potentiellement d’extraire les spectres  $S_z$  de toutes les zones d’un *mélange géographique subpixel* et leur proportion de surface associée.

La “sensibilité aux conditions géométriques” peut être “faible au premier ordre” si la méthode est indépendante du niveau du continuum.

Pour certaines méthodes, la sensibilité est “potentiellement forte”, notamment si la géométrie d’acquisition varie beaucoup sur l’image hyperspectrale.

Le champ “correction” dénote que la méthode inclue une correction des effets géométriques sur le transfert radiatif.

La “sensibilité aux absorptions atmosphériques”, en cas de superposition de bandes d’absorption des matériaux au sol et de non-corrrection atmosphérique, peut être :

“potentiellement forte” et dans ce cas, une correction préalable est nécessaire.

“négligeable”

“transformation ad hoc” si une estimation de l’effet atmosphérique peut se faire avec une opération mathématique.

La “sensibilité au bruit” exprime la sensibilité de la méthode, au niveau de bruit dans l’espace réduit. L’estimation des sources a une sensibilité potentiellement “forte” si elle est basée seulement sur un petit nombre de dimensions, comme c’est la cas pour la profondeur de bande.

La sensibilité est “faible” si la séparation de source s’opère sur tous les canaux.

Le “temps de calcul” lors de la séparation de source est déterminé en fonction d’un nombre d’opération à effectuer.

Un temps de calcul “court” (en moins d’une seconde sur une machine de bureau pour une observation OMEGA) correspond à un algorithme consistant en quelques opérations très simples (addition, division).

Un temps de calcul “moyen” (en moins de quelques minutes) correspond aux algorithmes relativement simples.

Les temps “longs” (au delà d’une demi heure) correspondent aux méthodes statistiques les plus complexes, aux méthodes d’inversions et aux méthodes de linéarisation. Ces temps de calcul sont estimés en fonction de la complexité de la méthode, il ne s’agit pas de véritables temps de calcul.

Méthodes	Profondeur de bande	Mélange linéaire	Mélange linéaire après linéarisation	Mélange non-linéaire semi-empirique
abondance en mélange géographique subpixel	qualitatif probable	possible si hypothèses ML correctes non-unicité	impossible	impossible
abondance en mélange intime granulaire	qualitatif (sauf recouvrement)	impossible	quantitatif	empirique
abondance pour toutes représentations de terrain	improbable	improbable	improbable	improbable
sensibilité aux conditions géométriques	faible au premier ordre	potentiellement fort	correction	potentiellement fort
sensibilité aux absorptions atmosphériques	transformation ad hoc	potentiellement forte	potentiellement forte	potentiellement forte
sensibilité au bruit	fort	faible	faible	faible
temps de calcul	court	moyen	long	long

TAB. 5.3 – Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de séparation de sources supervisée.

Méthodes	Extraction spectre de référence extrême	ACP, décorrélation spatiale	ACI, indépendance spatiale	JADE+BPSS, indépendance spatiale et positivité
abondance / spectre en mélange géographique subpixel	possible si hypothèses ML correctes non-unicité	impossible	impossible	possible si hypothèses ML correctes non-unicité
abondance / spectre en mélange intime granulaire	impossible	impossible	impossible	impossible
abondance / spectre pour toutes représentations de terrain	improbable (spectre $S_z$ en mélange géographique subpixel)	improbable	improbable	improbable (spectre $S_z$ en mélange géographique subpixel)
sensibilité aux conditions géométriques	potentiellement fort	potentiellement fort	faible au premier ordre	faible au premier ordre
sensibilité aux absorptions atmosphériques	potentiellement forte	potentiellement forte	potentiellement forte	potentiellement forte
sensibilité au bruit	faible	faible	faible	faible
temps de calcul	long	moyen	moyen à long	long

TAB. 5.4 – Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de séparation de sources non-supervisée.



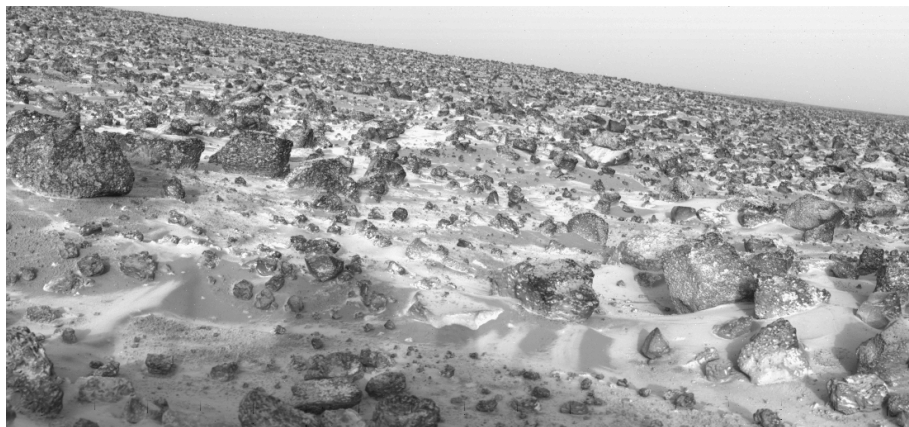
La séparation de source supervisée a pour but d'extraire de l'information quantitative des images hyperspectrales. Les différentes méthodes de séparation de sources linéaires permettent d'extraire cette information, dans certains cas simplistes seulement. Les méthodes non-linéaires permettent d'étendre le domaine de validité mais la méthode de référence reste l'inversion d'un modèle de transfert radiatif.

L'approche non supervisée dite de séparation de source en aveugle n'est possible qu'en mélange linéaire. Les hypothèses de décorrélation ou d'indépendance statistique entre les sources ne suffisent pas pour une estimation correcte des sources. En revanche, les hypothèses de positivité et d'indépendance semblent prometteuses pour extraire des spectres et des proportions de surfaces interprétables. Ces informations spatiales et spectrales sont sujettes à caution à cause de l'existence possible de mélanges intimes non linéaires. Aussi complexe que soit la *représentation de terrain*, si elle comporte un *mélange géographique subpixel*, il existe un mélange linéaire de spectres issus de zones différentes. A chaque zone "z" en mélange géographique subpixel est associé un spectre  $S_z$ , qui peut avoir une représentation de surface particulière en mélange intime particulière. L'approche non-supervisée de séparation de source en aveugle permet de dépasser l'approche "extraction des spectres de référence extrêmes" (voir chapitre 5.3.1 page 97) car elle permet d'estimer l'ensemble exhaustif des pôles spectraux  $S_z$  de l'image sans que celui-ci soit nécessairement dans l'image (voir section 2.2 page 41).

Répetons que seule une inversion utilisant un modèle complet de transfert radiatif permet d'estimer correctement les paramètres de surface.

# Chapitre 6

## Séparation de source en aveugle, en mélange positif, appliquée aux images hyperspectrales



Givre au sol de Mars, observé par Viking Lander 2 (Crédit : NASA)

La séparation de source en aveugle, appliquée aux images hyperspectrales est possible en supposant un mélange linéaire et des hypothèses statistiques. Le chapitre précédent montre que ni la décorrélation, ni l'indépendance seule ne permettent de résoudre le problème.

L'application de la séparation de source en aveugle sur les images hyperspectrales est possible de deux manières liées par une opération de transposition. Il s'agit de faire des hypothèses statistiques sur les dimensions spatiales ou spectrales. Nous avons vu que seule la formulation d'hypothèses dans la dimension spatiale permet un problème bien contraint. Néanmoins, cette formulation rend caduque les hypothèses statistiques (décorrélation et indépendance) car les abondances sont contraintes par leur somme égale à un.

La méthode bayésienne semble prometteuse pour répondre à ces deux difficultés (voir section 5.3.5.1 page 109). D'une part, elle permet d'ajouter des hypothèses supplémentaires, comme la positivité, pour mieux contraindre la solution. D'autre part, elle permet d'utiliser l'hypothèse d'indépendance spectrale.

La difficulté majeure de la méthode bayésienne est sa lenteur. Nous allons exposer ici une méthode qui permet de surmonter cette difficulté (voir section 6.1). Nous montrons qu'elle permet l'estimation d'une solution correcte (voir section 6.2.1), puis nous allons étudier sa robustesse (voir section 6.2.2).

## 6.1 Méthode : JADE + BPSS

La méthode JADE+BPSS permet de diminuer le temps de calcul, en réduisant le nombre de spectres à étudier. Nous proposons de sélectionner un nombre réduit de spectres représentatifs, d'appliquer la méthode BPSS puis d'étendre les résultats à toute l'image.

Il est possible de sélectionner des spectres représentatifs grâce à l'algorithme JADE. En effet, les images, représentant les "sources" de l'ACI en indépendance spatiale, opérées par l'algorithme JADE, sont interprétables et même correctes (5.3.3.5 page 106). Cependant, les spectres, représentant les lignes de la "matrice de mélange", de ce même algorithme ne sont pas corrects. Partant de ce constat en demi-teinte, nous proposons de sélectionner les spectres les plus extrêmes pour chaque source estimée par JADE en indépendance spatiale.

### 6.1.1 Sélection des spectres représentatifs

La sélection des spectres représentatifs est basée sur le rapport signal sur bruit de reconstruction ou SNR. Le rapport signal sur bruit total  $SNR(N_s)$  est défini à l'équation 5.22. Le SNR spatial est défini par :

$$SNR_{spatial}(z) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} (\mathbf{C}_{\lambda,z})^2}{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \left( \mathbf{C}_{\lambda,z} - \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_{\lambda,i} \mathbf{P}_{i,z} \right)^2} \right) \quad (6.1)$$

De la même manière, on peut définir le SNR spectral :

$$SNR_{spectral}(\lambda) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{z=1}^{N_z} (\mathbf{C}_{\lambda,z})^2}{\sum_{z=1}^{N_z} \left( \mathbf{C}_{\lambda,z} - \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{A}_{\lambda,i} \mathbf{P}_{i,z} \right)^2} \right) \quad (6.2)$$

La perte de SNR spatial, lorsque la source  $j$  est retirée, et estimée par :

$$SNR_{spatial,j}(z) = SNR_{spatial}(z) - 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} (\mathbf{C}_{\lambda,z})^2}{\sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \left( \mathbf{C}_{\lambda,z} - \sum_{i=1, i \neq j}^{N_s} \mathbf{A}_{\lambda,i} \mathbf{P}_{i,z} \right)^2} \right) \quad (6.3)$$

La perte de SNR spectral, lorsque la source  $j$  est retirée, et estimée par :

$$SNR_{spectral,j}(\lambda) = SNR_{spectral}(\lambda) - 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{z=1}^{N_z} (\mathbf{C}_{\lambda,z})^2}{\sum_{z=1}^{N_z} \left( \mathbf{C}_{\lambda,z} - \sum_{i=1, i \neq j}^{N_s} \mathbf{A}_{\lambda,i} \mathbf{P}_{i,z} \right)^2} \right) \quad (6.4)$$

Pour chaque source  $j$ , nous proposons la sélection des spectres représentatifs parmi ceux dont le  $SNR_{spatial,j}(z)$  est dans les 15% meilleurs. Cette première sélection est doublée d'une sélection aléatoire de 50 spectres.

En résumé, l'algorithme de choix des spectres représentatifs, est le suivant. Cet algorithme est effectué pour toutes les sources  $j$  de 1 à  $N_s$  :

1. Calcul de  $SNR_{spatial,j}(z)$  pour tous les pixels  $z$  de l'image.
2. Classement par ordre décroissant des valeurs de  $SNR_{spatial,j}(z)$ .
3. Sélection des pixels  $z$  ayant les 15% plus grands  $SNR_{spatial,j}(z)$ .
4. Tirage aléatoire de 50 pixels.

### 6.1.2 Méthode JADE+BPSS

La solution proposée réside en cinq étapes successives :

1. Standardisation des données. Il s'agit d'effectuer une ACP en décorrélation spatiale pour centrer et réduire les données. Estimation du nombre de source  $\widehat{N}_s^{ACP}$  d'après la décroissance des variances de l'ACP (voir section 2.4.2 page 47).
2. Réduction de données. ACI avec l'algorithme JADE en mode d'indépendance spatiale.  $\widehat{N}_s^{ACP}$  sources sont estimées (voir section 5.3.3.4 page 105).
3. Extraction de spectres représentatifs. Les spectres sont sélectionnés grâce à la méthode décrite à la section précédente. Ils sont au nombre de  $50 \times \widehat{N}_s^{ACP}$ .
4. Séparation de source en aveugle. Méthode BPSS en mode d'indépendance spectrale et utilisant la contrainte de positivité appliquée aux spectres représentatifs déterminés précédemment. Le nombre de sources  $\widehat{N}_s^{BPSS}$  est déterminé par l'utilisateur (voir section 5.3.5.1 page 109).
5. Identification et détermination d'échelle. Corrélation des sources présentes à une base de données spectrales, pour l'identification et la détermination de l'échelle de chaque source.
6. Résultat pour toute l'image hyperspectrale. Calcul de la matrice de mélange pour tous les spectres de l'image initiale. Éventuellement renormalisation de la matrice de mélange pour éliminer le facteur géométrique, en utilisant la relation 5.11.

Cette solution a été développée au cours de cette thèse, en collaboration avec Hafrún Hauksdóttir, qui a fait son stage de Master 2 au LIS, Christian Jutten et Jocelyn Chanussot du LIS ainsi que Saïd Mousaoui de IRCCN, de Nantes. D'autres résultats sont disponibles dans le rapport de Master 2 d'Hafrún Hauksdóttir (111). Cette méthode a fait l'objet d'un article présent en fin de manuscrit (voir annexe 14 page 221).

## 6.2 Résultats sur des données réelles, comparaison avec d'autres classifications

Présentons deux résultats majeurs de la méthode JADE+BPSS : la séparation de source en aveugle permet d'obtenir une estimation correcte aussi bien dans la dimension spectrale que spatiale ; néanmoins, cette estimation n'est plus très bonne si la proportion de spectres dans la classe diminue dans l'image.

### 6.2.1 Résultats

Le premier résultat majeur est présenté en détail dans l'article (221) (voir annexes 14 page 221). Présentons, ici les conditions de l'algorithme et quelques figures importantes.

L'image hyperspectrale utilisée est l'observation ORB0041\_1.CUB en facteur de radiance, sans correction de l'effet géométrique. L'image a été réduite aux 300 premières lignes qui se concentrent sur la

zone de la calotte permanente sud. Notons cette image ORB0041\_1.CUT. Il s'agit de la calotte permanente de CO<sub>2</sub> (voir section 7.3.2 page 141) et d'une partie des "South Polar Layered Deposits" (SPLD) composés de glace d'eau (voir section 7.3.3.3 page 146).

La méthode suivie est décrite au chapitre 6.1.

L'étape No 1 a permis d'estimer 7 sources pour 98,58% de la variance globale.

Suivent les étapes No 2 et 3.

L'étape No 4 de BPSS s'est effectuée en supposant 3 sources indépendantes.

L'étape No 5 de mise à l'échelle s'est faite avec les 3 spectres de références utilisés par Wavanglet (voir section 4.1.1 page 78).

Enfin, l'étape No 6 a nécessité une renormalisation pour éliminer les effets géométriques.

Tout d'abord, dans la dimensionnalité spectrale, les sources estimées renormalisées peuvent être comparées à des spectres de référence. La figure 6.1 représente les trois sources ainsi que leurs spectres de référence associés. La correspondance spectroscopique est très correcte, pour la glace d'eau et de CO<sub>2</sub>, sauf dans les régions spectrales où les absorptions atmosphériques perturbent les signatures de surface. En effet, les spectres de référence des glaces ne comportent pas de contribution atmosphérique tandis que les spectres de source en comportent (voir équation 5.8). Le spectre de référence de poussière contient la contribution atmosphérique, la correspondance avec la source est d'autant meilleure.

Le niveau de reconstruction spectrale avec ces trois sources est estimé grâce au SNR spectral (voir figure 6.1 - graphe (d)). Ce rapport est relativement bas pour la bande à 3 microns, présente partout et variant globalement peu. C'est une région spectrale où l'hypothèse d'indépendance spectrale est fautive. Le SNR est aussi bas vers 4 microns et plus, à cause d'une source supplémentaire, non prise en compte, qui est l'émission thermique des sols. Les régions spectrales des bandes d'absorptions atmosphériques sont aussi significativement moins bien reconstruites car l'hypothèse No 5 d'altitude constante (voir section 5.1 page 92), nécessaire pour la "linéarisation", n'est pas valide.

Dans la dimensionnalité spatiale, les lignes de la matrice de mélange sont représentées sous forme d'image (voir figure 6.2). La détection est tout à fait correcte pour les données non normalisées bien qu'un gradient sur l'image soit présent sur les trois images. La renormalisation par la somme permet bien de résoudre ce problème.

Comparons les résultats avec ceux obtenus avec des rapports de bandes utilisés par Langevin et al. (172). Ces rapports sont détaillés aux équations 2.4 page 40, pour la glace d'eau, et aux équations 2.6 page 40 pour la glace de CO<sub>2</sub>. L'étude de la figure 6.3, permet de conclure que les deux séparations de sources sont similaires en terme de détection. En revanche, elles ne sont pas équivalentes en terme d'abondances relatives : les niveaux d'abondances relatifs ne sont pas respectés sur la calotte permanente de CO<sub>2</sub>, où l'abondance d'eau est plus élevée pour la méthode des rapports de bande par rapport à "JADE+BPSS"

Cette exception est probablement due aux effets non-linéaires de recouvrement des bandes d'eau et de CO<sub>2</sub>. En effet, les premières inversions de Douté et al. montrent que l'abondance de glace d'eau sur la calotte permanente de CO<sub>2</sub> est de 0,06 % en masse au maximum, alors que l'abondance de glace d'eau sur les SPLD est de 75% en masse (64). La méthode des rapports de bandes surestime donc la quantité d'eau en présence de glace de CO<sub>2</sub>, en comparaison de la quantité d'eau sans glace de CO<sub>2</sub>.

Les résultats, en terme de quantité relative, sont tout à fait compatibles avec les données d'inversion sur quelques spectres (64), notamment dans deux régions particulières (voir fig. 6.4) : (i) la petite zone linéaire à gauche de l'image avec une présence de CO<sub>2</sub> et d'eau (bleu clair) ; (ii) la partie de la calotte permanente de CO<sub>2</sub> appauvrie en impuretés de glace d'eau (marron).

### 6.2.2 Dépendance du nombre de pixels dans la classe

Malgré ces résultats très encourageants, d'autres études sur plusieurs images de la calotte permanente sud montrent que ces résultats ne sont pas robustes (voir figure 6.5). Les estimations du spectre de CO<sub>2</sub> et de poussière sont correctes. En revanche, l'estimation du spectre de la glace d'eau est mauvaise pour l'observation ORB0030\_0, et dans une moindre mesure pour l'observation ORB0041\_1.

L'image ORB0030\_0 est fortement bruitée, ce qui pourrait expliquer la difficulté de l'algorithme. Cepen-

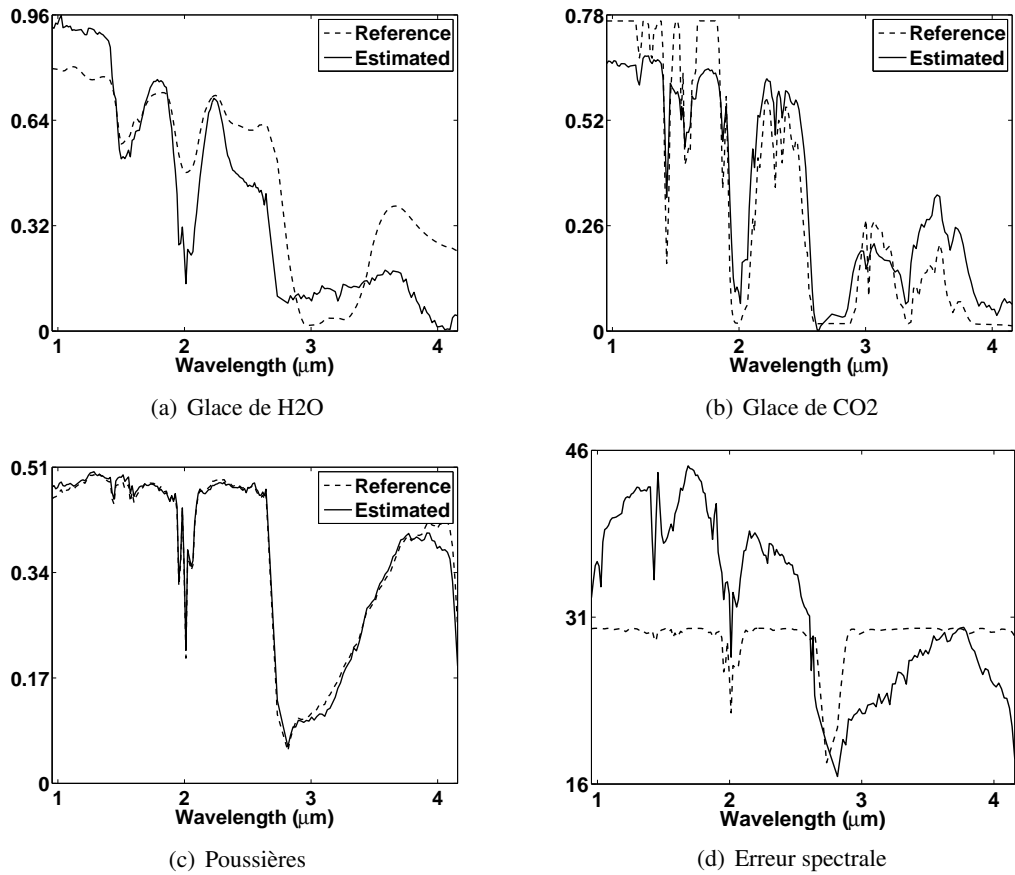


FIG. 6.1 – Sources estimées pour l'observation ORB0041\_1.CUT comparées aux spectres de références de glace d'eau, glace de CO<sub>2</sub> et de poussières (graphes (a) à (c)). Le graphe (d) représente la qualité de la reconstruction spectrale ou SNR spectral (en dB) en noir et un spectre de transmission atmosphérique en pointillé.

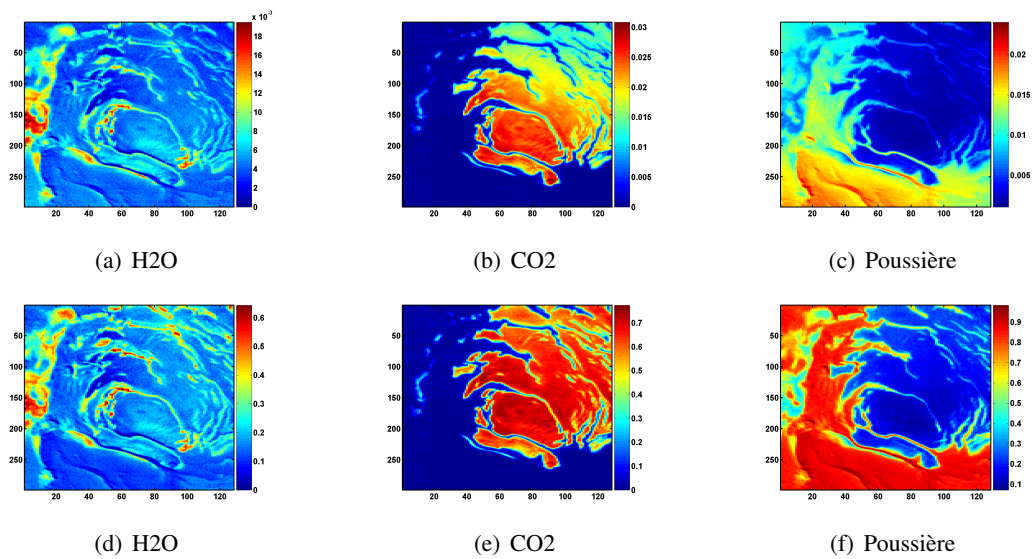


FIG. 6.2 – Matrice de mélange pour l'observation ORB0041\_1.CUT sans renormalisation (graphes (a) à (c)) et avec renormalisation (graphes (d) à (f)).

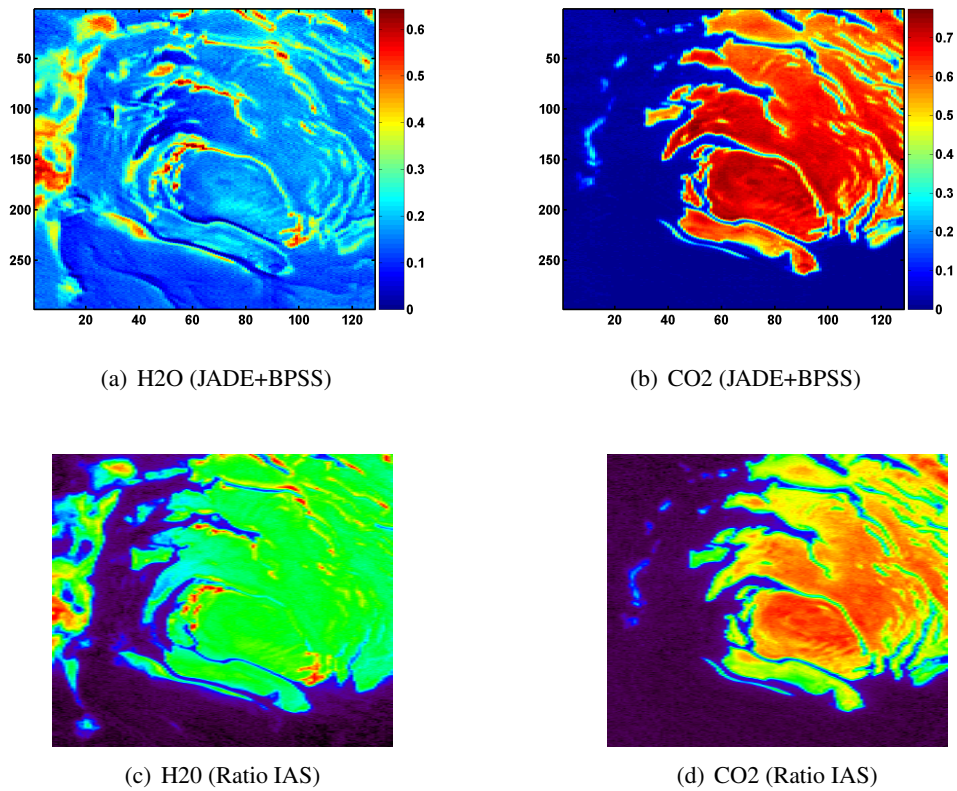


FIG. 6.3 – Comparaison cartes d'estimations d'abondances de glace d'eau et de CO<sub>2</sub> pour l'observation ORB0041\_1.CUT. En haut : la méthode JADE+BPSS décrite dans cette section. En bas : la méthode des rapports de bande, pour la glace d'eau (voir équation 2.4) et de CO<sub>2</sub> (voir équation 2.6).

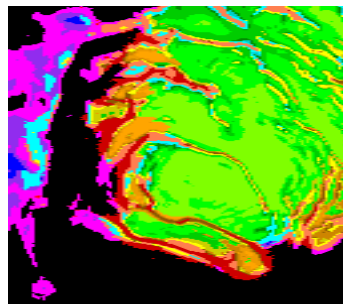


FIG. 6.4 – Classes de l'image ORB0041\_1.CUT d'après Douté et al. (64). En vert la glace de CO<sub>2</sub>, en marron la glace de CO<sub>2</sub> ayant le minimum d'impuretés en glace d'eau (0,02 % en masse), en violet la glace d'eau, en bleu clair la glace d'eau ayant des impuretés de CO<sub>2</sub>. La classification manuelle associée est présentée à la figure 3.1 page 62.

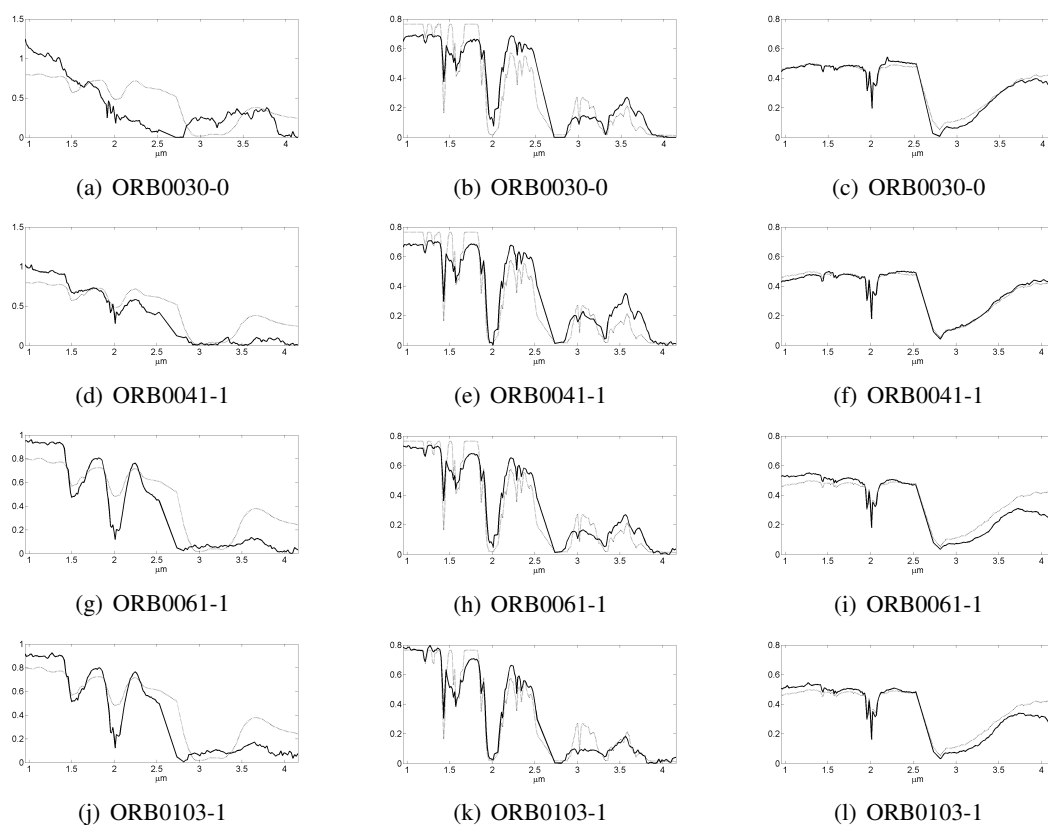


FIG. 6.5 – Sources identifiées aux trois composants : glace d'eau (a,d,g,j), glace de CO<sub>2</sub> (b,e,h,k) et poussière (c,f,i,l). Test sur des images hyperspectrales OMEGA complètes.

dant, l'image ORB0041\_1 a un niveau de bruit faible et pourtant l'estimation de la source est incorrecte. L'explication résiderait plutôt dans le nombre relatif de spectres dans la classe. Le tableau 6.1 compile les proportions de l'image contenant de la glace d'eau et de la glace de CO<sub>2</sub>. Clairement, ces deux images ont les fractions de pixels les plus faibles d'H<sub>2</sub>O (20,53% et 21,84%).

Si cette interprétation est correcte, il existe un seuil en terme de fraction d'image couverte par la glace d'eau pour pouvoir estimer son spectre convenablement. Ce seuil est d'environ 22% de l'image. En ce qui concerne la glace de CO<sub>2</sub>, l'estimation est correcte même à 15,50%. Cette dissymétrie est due vraisemblablement aux hypothèses d'indépendance spectrale. En effet, la corrélation entre les spectres de référence de poussière et de glace de CO<sub>2</sub> est de 0,15 tandis que la corrélation entre les spectres de référence de poussière et de glace de H<sub>2</sub>O est de à 0,31, à cause de la bande d'hydratation minérale à 3 microns (voir équation 5.14 page 102). Il est donc plus difficile d'estimer un spectre d'eau que de CO<sub>2</sub>.

Image	Eau (%)	CO <sub>2</sub> (%)
ORB0030_0	20,53	17,48
ORB0041_1	21,84	16,76
ORB0041_1.CUT	63,48	48,72
ORB0061_1	24,30	10,00
ORB0103_1	41,09	15,50

TAB. 6.1 – Proportion relative des spectres contenant de la glace d'eau et de CO<sub>2</sub> en utilisant l'algorithme supervisé Wavanglet. L'image ORB0041\_1.CUT correspond aux 300 premières lignes telle qu'utilisée à la section précédente et dans l'article (voir annexes 14 page 221).



### 6.3 Conclusion et perspectives

J'ai fait le choix durant ma thèse, de me focaliser sur les méthodes de séparation de sources en aveugle car elles ont des objectifs multiples dans l'analyse des images hyperspectrales :

- Exploration des images sans a priori : l'extraction de spectres représentatifs de certaines portions similaires de l'image (*unité de terrain*) est un problème essentiel dans l'analyse des images hyperspectrales. Chaque méthode permettant cette extraction influence les résultats par leurs hypothèses. Il est donc essentiel de bien connaître les hypothèses pour interpréter correctement les résultats. La méthodologie développée au cours de cette thèse (voir section 6.1) comporte des hypothèses simples mais explicites : elles peuvent donc être discutées. La méthode JADE+BPSS permet d'extraire des informations en cohérence avec une étude indépendante utilisant une inversion d'un modèle de transfert radiatif. Cette approche est considérée comme un moyen de rationaliser la découverte et l'identification des terrains martiens.
- Détermination de la représentation de surface : la représentation de surface n'est pas un paramètre qui peut être contraint dans une inversion massive sur tous les spectres d'une image. Éventuellement, l'inversion de certains spectres de référence peut donner des indications sur le mode de mélange des corps. Pour confirmer ces résultats, il serait pertinent de faire des études statistiques sur toute la population des spectres d'un même type de terrain martien. Pour l'instant, les modalités d'une telle analyse restent à déterminer, mais il est probable que la méthode BPSS permette d'extraire les spectres des zones en mélange géographique subpixel. Cette méthode pourrait aussi permettre de déterminer la distribution statistique des spectres associée à chaque zone, en cas de mélange intime à l'intérieur de la zone.
- Détermination des effets d'angles à la surface : les effets bidirectionnels à la surface sont de deux natures différentes : géométrique et de réflectance bidirectionnelle. Les effets géométriques sont simplement dus à la pente locale qui est différente pour tous les spectres d'une image hyperspectrale. Les effets de réflectance bidirectionnelles sont dus au transfert radiatif dans les matériaux granulaires. Pour l'instant, les modalités d'une éventuelle séparation des deux effets angulaires restent à déterminer.

Toutes les approches précédentes concernent la surface. Cependant, il est possible d'exploiter les approches de séparation de sources, dans un modèle plus complexe mêlant surface et atmosphère, pour extraire à la fois des signaux du sol et des signaux atmosphériques. Par exemple, il serait intéressant d'extraire la contribution de la diffusion atmosphérique par les aérosols avec ce type de méthode.

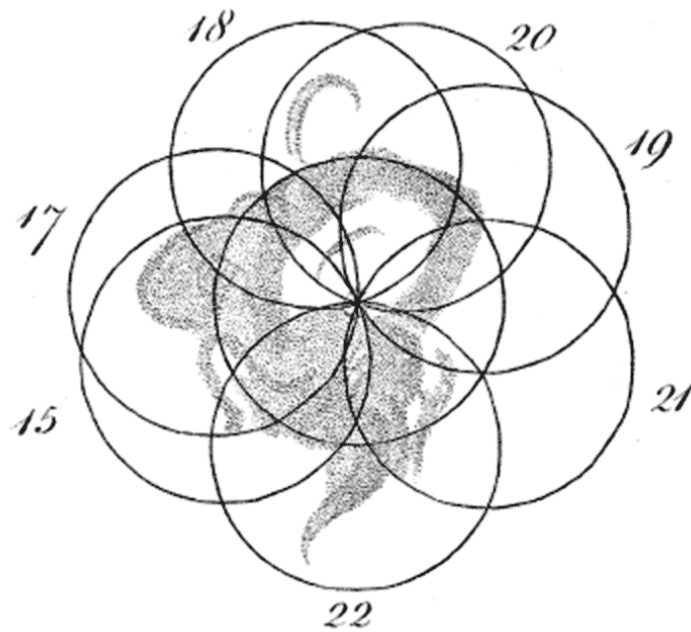
La difficulté majeure de l'approche de séparation de source en aveugle est l'estimation du nombre de sources. En effet, ni les estimateurs basés sur la décroissance des valeurs propres de l'ACP, ni les méthodes itératives ne sont robustes. Estimer correctement le nombre de sources est un problème ouvert actuellement.

## **Deuxième partie**

# **Les calottes saisonnières martiennes**



## Le cycle saisonnier martien



Première évidence de l'asymétrie de la calotte permanente sud (désaxée par rapport au pôle géographique) en 1784 par W. Herschel (115).

Les première et seconde sections présentent respectivement une introduction historique du cycle saisonnier martien (voir section 7.1) et le paradigme actuel communément accepté par la communauté des planétologues (voir section 7.2). Enfin, la dernière section insiste sur les incomplétudes, les questionnements et les améliorations que nous pouvons apporter à ce paradigme (voir section 7.3).

### 7.1 Perspectives historiques du cycle saisonnier martien

La première observation d'une calotte martienne, rendue possible grâce au principe du télescope de Galileo Galilei, dit Gallilée de 1609, a été faite par C. Huygens durant l'opposition de septembre 1672. Certains historiens, exhibant un dessin de 1666, proposent d'attribuer la découverte à J.D. Cassini. La polémique réside dans le fait que ce schéma fait apparaître la calotte de la même couleur blanche que le limbe.

Néanmoins, la première mise en évidence de la calotte saisonnière a été produite par G.F. Maraldi, le neveu de J.D. Cassini. Ses observations, à l'Observatoire de Paris, montrent que la calotte saisonnière a complètement disparu en août et septembre 1719. Il prouve que les conditions physiques de la région polaire changent au cours du temps. Cependant, il n'avance aucune interprétation.

Il faut attendre 1784 et l'émergence d'une nouvelle génération de télescope pour que W. Herschel, un allemand membre de la Royal Society of London, interprète ces observations comme étant de la neige d'eau au pôle (115).

The analogy between Mars and the earth is, perhaps, by far the greatest in the whole solar system. The diurnal motion is nearly the same ; the obliquity of their respective ecliptics, on which the seasons depend, not very different ; of all the superior planets the distance of Mars from the sun is by far the nearest alike to that of the earth : nor will the length of the martial year appear very different from that which we enjoy, when compared to the surprising duration of the years of Jupiter, Saturn, and the Georgium Sidus. If, then, we find that the globe we inhabit has its polar regions frozen and covered with mountains of ice and snow, that only partly melt when alternately exposed to the sun, I may well be permitted to surmise that the same causes may probably have the same effect on the globe of Mars ; that the bright polar spots are owing to the vivid reflection of light from frozen regions ; and that the reduction of those spots is to be ascribed to their being exposed to the sun.

Herschel observe pour la première fois que la calotte permanente sud est désaxée par rapport au pôle géographique (voir page précédente). En 1877, quelques années avant la photographie, G.V. Schiaparelli dresse sa célèbre carte de Mars, à l'Observatoire de Brera, en Italie. Il utilise un vocabulaire biblique et mythologique pour nommer les lieux martiens. De la même manière que pour la Lune, les zones sombres sont désignées par des noms appartenant au champ sémantique de l'eau, comme : Mare Sirenum (Mer des Sirènes), Mare Cimmerium (Mer des Cimmériens),.... Les zones claires sont nommées par des termes désignant la terre, comme : Ausonia (Italie), Hellas (Grèce), .... Il ne prétend pas la portée universelle de sa classification :

I do not ask that the [nomenclature] be approved by astronomers in general, nor do I request the honor of its universal acceptance. To the contrary, I am ready to accept as final whichever one is recognised by competent authority. Until then, however, grant me the chimera of these euphonic names, whose sounds awaken in the mind so many beautiful memories.

Utilisant une technique basée sur la persistance rétinienne, il parvient à dessiner des détails de la planète Mars. Malgré son daltonisme qui lui interdit de distinguer le rouge et le vert, il observe les détails photométriques avec une précision incomparable.

En 1877, Schiaparelli observe des formes linéaires sombres qu'il appelle *canali* ou canal. Cette nomenclature et les canaux vont induire une série d'interprétations qui paraissent aujourd'hui comme loufoques (voir illustration page 59).

Les premiers arguments spectroscopiques datent des années 1860-1870. Notamment, le français Jules Janssen, relate en 1867 la détection de vapeur d'eau, d'après ses observations effectuées au mont Etna. Cependant, à l'époque, la correction des effets atmosphériques terrestres sur les spectres n'est pas très bonne.

En 1892, la récession de la calotte sud de Mars est à nouveau apparente. Percival Lowell observe une bande noire autour de la calotte brillante qui disparaît peu à peu. Il interprète cette figure comme un océan polaire en anneau. Embrassant les visions de Schiaparelli sur les canaux formés d'eau et celle de la végétation de Liais et Pickering, Lowell astronome fondateur de l'Observatoire de Flagstaff, Arizona (USA), propose la théorie suivante. Mars serait une planète habitée en voie de désertification. La seule source d'eau liquide, nécessaire à ses habitants serait située au pôle, au moment où la glace fond. La forme de vie intelligente construit des canaux d'irrigation qui permettent de transporter la précieuse eau des pôles vers l'équateur. Le succès populaire de cette théorie lui vaut une renommée mondiale, et Lowell écrit beaucoup de livres grand public (194). L'astronome ira jusqu'à écrire que la température de Mars est "confortable comme le Sud de l'Angleterre".

À l'Observatoire Lick du mont Hamilton en Californie, W.W. Campbell propose des observations spectroscopiques de Mars en 1894 (38). Il montre que le comportement spectral de Mars est en tout point similaire à celui de la Lune. Il prétend que l'atmosphère martienne est très fine et que la détection d'eau n'est pas possible, car elle n'existe qu'en très petite quantité. Cependant, il ne doute pas que la calotte soit faite d'eau.

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, se développe une théorie alternative sous l'impulsion notamment de A. R. Wallace qui critique sans égards le raisonnement de Lowell à propos de la température de Mars (303). Dans la continuité A. C. Ranyard et G. J. Stoney proposent que les calottes saisonnières des Mars soient faites de CO<sub>2</sub>.

La première mesure quantitative de la température de Mars a été produite par deux équipes, à l'Observatoire Lowell à Flagstaff, avec D. H. Menzel, W. W. Coblentz, et C. O. Lampland, et d'autre part, au Mont Wilson en Californie du Sud avec E. Petit et S. B. Nicholson. Les deux équipes ont utilisé un thermocouple et ont conclu à une température maximale atteignant 20°C à 30°C dans les régions sombres et une température minimale au pôle sud de -50°C à -70°C. Ces observations de 1924 suggèrent que la neige carbonique de CO<sub>2</sub> ne se condense pas sur Mars, à cause de la faible pression atmosphérique. Il faudrait une température maximale de -100°C. Ces équipes ont donc conforté l'hypothèse de glace d'eau comme constituant des calottes polaires.

En 1958, des nouvelles mesures spectroscopiques par Kuiper (168) établissent une présence plus probable de glace d'eau que de glace de CO<sub>2</sub>.

Dans les années 1950-60, la conquête spatiale bat son plein. La première sonde à destination de Mars est russe : "Mars 1", lancée en 1962 et perdue en 1963. En 1965, la première sonde américaine s'appelle : "Mariner 3", perdue au lancement. En novembre 1965, la sonde "Mariner 4" est lancée par les Américains, suivi deux jours plus tard de la sonde russe "Zond 2". Seule la sonde américaine arrive à communiquer ces surprenants résultats : la surface de Mars est cratérisée et ancienne, semblable à celle de la Lune (182). La première mesure de pression atmosphérique au sol est faite par transmission radar : la pression est incroyablement faible entre 4 et 6 mbar. Après "Mariner 4", Leighton et Murray remettent à jour l'hypothèse de la condensation/sublimation de CO<sub>2</sub> (183).

Les sondes suivantes Mariners 6 and 7, lancées et arrivées en 1969, se font voler la vedette par l'arrivée des premiers hommes sur la Lune. Mariner 7 prouve que la température de la calotte saisonnière sud est de 145 K, proche de celle de la glace de CO<sub>2</sub> en équilibre avec son gaz pour ces faibles pressions atmosphériques (229; 228).

Herr et Pimentel confirment avec des arguments spectroscopiques à 3 microns que la calotte saisonnière est composée de glace de CO<sub>2</sub> (113). La même équipe montre la présence de nuage de CO<sub>2</sub> dans la haute atmosphère (114) avec la bande à 4,3 microns.

Dans la foulée, le premier GCM martien, adapté d'un modèle terrestre, voit le jour (187). Il comporte déjà le processus de condensation de CO<sub>2</sub>.

A la suite de toutes ces observations, Murray et al. proposent de différencier la calotte saisonnière composée de glace de CO<sub>2</sub> et la calotte permanente vraisemblablement composée de glace d'eau (224).

En 1976, les landers au sol Viking 1 et 2 mesurent un cycle semi-annuel de pression atmosphérique avec deux minima de pression, à la fin des hivers nord et sud, confirmant les travaux de Leighton et Murray (116). Les mesures thermiques confirment aussi que la calotte permanente nord est bien composée de glace d'eau (150).

Ce petit aperçu historique a été en partie établi d'après le livre suivant, disponible sur Internet (271).

### 7.2 Paradigme actuel

La notion de "paradigme" est introduite par Thomas Kuhn, dans "Structure des révolutions scientifiques" paru en 1962 (166). Ce physicien de l'Université Harvard, converti à l'histoire des sciences, à la sociologie et à l'épistémologie, désignait dans le concept de paradigme : l'ensemble de ce que partage l'ensemble des membres d'une communauté scientifique.

En 1977, en précisant sa pensée, il désigne un paradigme comme un problème accompagné de sa solution qui sert d'exemple, avec lequel il convient de poursuivre toute recherche ultérieure (167). Pour une lecture plus approfondie de la philosophie des Sciences au XX<sup>ème</sup> siècle, l'ouvrage suivant est très clair et synthétique (10). Il a aussi l'heureuse particularité d'être écrit en français !

Le paradigme du *cycle saisonnier martien* est donc constitué à la fois de la description du phénomène des dépôts saisonniers et de sa modélisation :

(i) Le *cycle saisonnier martien* se déroule dans chaque hémisphère successivement au cours d'une année martienne. La phase de *progression* de la calotte saisonnière a lieu pendant l'automne et l'hiver polaires. Il s'agit d'une augmentation de la surface totale couverte des dépôts, du pôle jusqu'à moins de 60° de latitude. Cette phase de progression est associée à une *accumulation* de dépôts en chaque point de la surface. La phase de *récession* de la calotte saisonnière a lieu pendant le printemps et l'été polaires. Il s'agit d'une diminution de la surface totale recouverte de dépôts en surface, associée à une *ablation* de la couche de glace superficielle.

(ii) Le phénomène de condensation et sublimation de CO<sub>2</sub> au pôle, remis à jour en 1966 par Leighton et Murray (183), est l'élément essentiel de la vision actuelle du cycle saisonnier de dépôts au sol sur Mars. La modélisation de ce phénomène se fait par le bilan d'énergie radiative à la surface, en général inclus dans un GCM "Glocal Climate Modeling". Un GCM est une simulation informatique du climat d'une planète à l'échelle globale, incluant les phénomènes physiques d'écoulement des masses d'air, du transfert radiatif, des changements d'état de l'eau et du CO<sub>2</sub> ainsi que d'autres phénomènes microphysiques.

Ce paradigme tient parce qu'il permet de résoudre la question de l'origine de plusieurs phénomènes a priori indépendants. De ce fait, il relie ces phénomènes entre-eux. Chaque phénomène est associé à une observable particulière : (i) la progression et la récession de la surface couverte de dépôts saisonniers, (ii) la pression au sol mesurée par Viking Lander 1 et 2, (iii) la présence de *points froids* (zones de la calotte saisonnière comportant une température de brillance anormalement faible), (iv) la répartition de masse autour de la planète (modifiant légèrement la forme de la planète). Les modélisations du cycle saisonnier martien par GCM permettent de reproduire quantitativement ces quatre types d'observables. Étonnamment, la surface recouverte par les dépôts saisonniers et son évolution au cours de l'année, ne sont reproduites que grossièrement.

Les modélisations actuelles des phénomènes atmosphériques martiens par GCM, développées par plusieurs équipes dans le monde, vont bien au delà du cycle saisonnier. Lewis propose un compte rendu des dernières avancées du domaine (189).

Je présente dans cette thèse uniquement les quelques phénomènes atmosphériques relatifs au cycle saisonnier de dépôts au sol. Il n'est pas question d'une présentation complète d'un GCM. En revanche,

la physique de la sublimation/condensation au sol est détaillée. Ce phénomène peut être appréhendé de façon indépendante d'un GCM. Dans la première section (7.2.1), il est exposé la physique du bilan radiatif en phase d'accumulation puis en phase d'ablation. La deuxième section (7.2.2) se concentre sur les quatre observables correctement reproduites par ce modèle du *cycle saisonnier martien*.

### 7.2.1 Bilan d'énergie radiative

Les phases d'accumulation et d'ablation des dépôts saisonniers martiens sont essentiellement contrôlées par le bilan d'énergie radiative contrôlant la condensation et la sublimation du CO<sub>2</sub>. Pour bien comprendre ce bilan à la surface de Mars, exprimons-le pour trois cas typiques simplifiés : sans glace à la surface, lors de la première condensation, avec de la glace à la surface. Ensuite, nous verrons en détail les phases d'accumulation et d'ablation.

**Bilan sans glace de CO<sub>2</sub>** Le bilan instantané d'énergie radiative à la surface d'une planète s'écrit de la façon suivante :

$$F^{in} = F_{therm}^{out} + F^{out} \quad (7.1)$$

Tous les termes sont exprimés en W.m<sup>-2</sup>. Le terme de gauche  $F^{in}$  représente les gains d'énergie. Tandis que les termes de droites forment les pertes :  $F_{therm}^{out} = \epsilon \sigma (T_{surf}^*)^4$  émission thermique de la surface,  $F^{out}$  autre perte d'énergie. Cette relation permet de calculer la température instantanée au sol  $T_{surf}^*$ . La température au sol est contrainte par ce bilan d'énergie.

**Première condensation de CO<sub>2</sub>** Dès qu'une surface non glacée atteint une température au sol  $T_{surf}^*$  identique à la température de condensation  $T_{cond}$  du gaz de CO<sub>2</sub> atmosphérique, le CO<sub>2</sub> se condense. Le gaz de CO<sub>2</sub> étant majoritaire (95%) dans l'atmosphère martienne, dans une première approximation, supposons qu'il soit en quantité suffisante pour être toujours abondant et rester majoritaire, même pendant la condensation. Dans ce cas, la température de la surface est tamponnée par la température de condensation :

$$T_{surf}^* = T_{cond} \quad (7.2)$$

Et le bilan d'énergie s'écrit :

$$F^{in} + F_{CO_2}^{in} = \epsilon \sigma T_{cond}^4 + F^{out} \quad (7.3)$$

Le terme additionnel de gain d'énergie de la surface  $F_{CO_2}^{in}$  correspond à la chaleur latente nécessaire pour effectuer la condensation de CO<sub>2</sub>. Cette énergie est stockée dans le CO<sub>2</sub> condensé, puis libérée par la sublimation.

L'hypothèse de la condensation spontanée est remise en question par certaines études expérimentales qui montrent que la nucléation au sol du givre dépend du type minéral en présence (97). Néanmoins, cette hypothèse est toujours utilisée couramment dans la littérature.

**Bilan en présence de glace de CO<sub>2</sub>** Lorsque la surface est recouverte de CO<sub>2</sub> solide à l'équilibre thermodynamique avec son gaz, la température au sol est tamponnée à la température de condensation  $T_{cond}$  du CO<sub>2</sub> atmosphérique. La perte ou le gain net d'énergie  $\epsilon \sigma T_{cond}^4 + F^{out} - F^{in}$  se traduit par respectivement la sublimation ou la condensation de solide avec respectivement libération ou absorption de chaleur latente pour assurer l'équilibre. Le bilan d'énergie s'exprime alors comme :

$$F_{CO_2} = \epsilon \sigma T_{cond}^4 + F^{out} - F^{in} \quad (7.4)$$

Avec  $F_{CO_2}$  le terme de gain (>0) lors de condensation, ou de perte (<0) lors de sublimation d'énergie sous forme de chaleur latente de CO<sub>2</sub>. Il s'écrit :

$$F_{CO_2} = L_{CO_2} \cdot \frac{\partial M_{CO_2}}{\partial t} \quad (7.5)$$



Avec  $L_{CO_2} = 590.10^3$  [J.kg<sup>-1</sup>] la chaleur latente de sublimation du CO<sub>2</sub>,  $M_{CO_2}$  [kg.m<sup>-2</sup>] la masse surfacique (intégrée sur l'épaisseur) de la couche de glace de CO<sub>2</sub>.

### 7.2.1.1 Phase d'accumulation

L'accumulation peut se faire par deux mécanismes majeurs : par condensation directe de CO<sub>2</sub> au sol ou par précipitation de neige de CO<sub>2</sub>. La majeure partie de la phase d'accumulation se produit pendant la nuit polaire quand la température est suffisamment basse pour atteindre la température de condensation  $T_{cond}$ . Néanmoins, lorsque le soleil est proche de l'horizon, une accumulation est possible. Pendant la période d'alternance de jour et de nuit, une condensation pendant la nuit suivie d'une sublimation pendant le jour, est possible.

La précipitation sous forme de neige a été incluse dans les GCM par Forget et al. (83). Cette modélisation permet au CO<sub>2</sub> atmosphérique de se condenser directement dans l'atmosphère sous forme de glace lorsque la température est plus faible que la température de condensation. Ces grains de glace de CO<sub>2</sub> perdent de l'altitude par gravité, se subliment éventuellement dans une masse d'air plus chaude, pour enfin se déposer au sol. Le détail microphysique de la formation de la neige martienne n'est pas très bien établi. Des expériences de laboratoire suggèrent que les conditions de nucléation atmosphérique martiennes formeraient plutôt de la neige à taille de grains plus grosse que celle observée dans les nuages par Pathfinder (95). Néanmoins, le processus de précipitation sous forme de neige semble être minoritaire, d'après les analyses de TES (299) et les GCM (51). Nous n'allons pas décrire ce phénomène atmosphérique avec plus de détails.

La modélisation de la masse de CO<sub>2</sub> condensée directement au sol, passe par une estimation du bilan d'énergie radiative à la surface (79). Afin d'améliorer la clarté, les notations utilisées ici sont les mêmes que dans l'article développé au cours de cette thèse et disponible en annexe 15. La quantité de masse de CO<sub>2</sub> qui se condense à la surface de Mars est déduite des équations 7.4 et 7.5, en explicitant les gains et les pertes d'énergie :

$$\frac{\partial M_{CO_2}}{\partial t} = (F_{therm}^{out} - F_{Adv}^{in} - F_{cond} - W_{sun}^{in}) \frac{1}{L_{CO_2}} \quad (7.6)$$

Avec  $F_{therm}^{out}$  la perte d'énergie par émission infrarouge thermique,  $F_{Adv}^{in}$  le gain d'énergie par advection atmosphérique,  $W_{sun}^{in}$  le gain d'énergie solaire,  $F_{cond}$  le bilan d'énergie échangé avec le sous-sol (ce terme peut être un gain ou une perte). Les termes d'énergie entre parenthèses sont classés par ordre décroissant de magnitude, en valeur absolue.

Détaillons maintenant chacun des termes de l'équation 7.6 :

**Émission en infrarouge thermique** Le flux  $F_{therm}^{out}$  d'émission en infrarouge thermique s'écrit comme :

$$F_{therm}^{out} = \varepsilon \sigma T_{surf}^4 \quad (7.7)$$

Avec  $\sigma = 5,67.10^{-8}$  [W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-4</sup>] la constante de Stefan Boltzmann.

L'émissivité  $\varepsilon(\theta_r, \Phi_r, \lambda)$  est un paramètre mesurant le rapport de flux thermique par rapport à une situation théorique du corps noir, pour une direction d'émergence et par unité de longueur d'onde. On se place dans l'approximation du corps gris, d'où  $\varepsilon(\theta_r, \Phi_r, \lambda) = \varepsilon$ . Le flux thermique d'un corps noir théorique a une émissivité  $\varepsilon = 1$ .

L'émissivité  $\varepsilon(\theta_r, \Phi_r, \lambda)$  est un paramètre qui exprime la capacité d'un composant à émettre ou à absorber de l'énergie radiative par des mécanismes quantiques, s'il existe des transitions de niveau d'énergie (diminution ou augmentation) permises. Un corps qui absorbe fortement ( $A_{IR} \ll 1$ ) dans une gamme de longueurs d'onde aura dans la même gamme un comportement proche de celui du corps noir ( $\varepsilon \simeq 1$ ).

Dans les matériaux granulaires (comme les dépôts saisonniers), il s'ajoute des phénomènes de transfert radiatif d'absorption et de diffusion de la lumière aux longueurs d'onde correspondantes à l'émission thermique. L'émissivité est liée à l'albédo directionnel-hémisphérique dans l'infrarouge

$A_{dh,IR}(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$  (voir section 1.3.1 page 22), via la loi de Kirchoff  $A_{dh,IR}(\theta_i, \Phi_i, \lambda) = 1 - \varepsilon(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$ . Cette loi est valide pour les matériaux des surfaces planétaires, en particulier pour les givres de  $\text{CO}_2$ , comme le montrent les études théoriques de transfert radiatif (305).

Lorsque le  $\text{CO}_2$  se condense, sa température  $T_{surf}$  est contrôlée par la pression atmosphérique via la loi de pression de vapeur saturante. La pression au sol à l'endroit considéré, est contrôlée par l'altitude, le cycle de pression atmosphérique et les effets météorologiques (voir section 7.2.2.2). Aujourd'hui, la topographie est très bien déterminée grâce à l'instrument MOLA. Le cycle de pression annuel au sol est estimé précisément grâce aux GCM. C'est une combinaison des variations de pression dues à la condensation/sublimation aux deux pôles, superposée à l'effet météorologique de redistribution par les vents (voir section 7.2.2.2). Cet effet météorologique est estimé par les GCM (121). Les écarts entre conditions moyennes et réelles ne jouent qu'un rôle très mineur sur la pression (à quelques % près).

Le terme d'émission thermique représente de l'ordre de 20 à 30  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

**Advection atmosphérique** L'énergie apportée à la surface par advection atmosphérique  $F_{Adv}^{in}$  peut être estimée par les GCM. Ce terme ralentit la condensation du  $\text{CO}_2$  sur le bord de la calotte saisonnière, et peut aller jusqu'à 20-30  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  (245; 87).

**Conduction de chaleur dans la subsurface** Les échanges de chaleur en mode conductif avec la subsurface sont de deux types : le flux géothermique et l'onde de chaleur annuelle.

1. Le flux géothermique est dû au chauffage par les éléments radioactifs essentiellement dans la croûte de la planète. Ce terme est très faible, de l'ordre de 15 à 45  $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}$  (270).
2. Onde de chaleur annuelle. Lorsque la surface est couverte de glace de  $\text{CO}_2$  en équilibre, sa température est contrôlée par la pression atmosphérique et demeure quasiment constante au cours de l'année à  $\simeq 150$  K. Lorsque les dépôts saisonniers sont absents, la surface peut atteindre une température très élevée de plus de 230K (en fonction de la latitude, de l'albédo et de la pente) provoquant une conduction de chaleur dans le sous-sol (onde de chaleur). Chaque niveau de la subsurface se comporte comme une source de chaleur, celle-ci se propageant aussi bien vers le haut que vers le bas. Par conséquent, pendant la nuit polaire, quand la surface est à nouveau recouverte de dépôts de  $\text{CO}_2$  à 150K, une onde de chaleur annuelle de "retour", avec un flux jusqu'à 25  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ , atteint la surface. Le flux dépend de l'inertie thermique du sol (4) et décroît avec le temps à partir de la date à laquelle la première glace de  $\text{CO}_2$  s'est condensée.

Le bilan annuel du flux total de chaleur de la subsurface est estimé par les données Viking à un gain de 20-30  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  (233).

**Flux solaire et atmosphérique** Le flux d'énergie solaire absorbé  $W_{sun}^{in}$  provient de différents sous termes : l'insolation directe transmise au travers de l'atmosphère, le flux solaire indirect diffusé par l'atmosphère, l'énergie thermique absorbée et réémise par l'atmosphère. En général, ce terme est très faible car la condensation se produit avec un soleil proche de l'horizon, voire pendant la nuit, lorsque l'atmosphère est froide.

### 7.2.1.2 Phase d'ablation

Le processus majeur d'ablation de la couche de dépôt est la sublimation. La majeure partie de la phase de sublimation se produit pendant le printemps et le début de l'été polaires. Durant la période d'alternance jour/nuit, une condensation pendant la nuit et une sublimation pendant le jour sont possibles.

L'ablation peut aussi se faire de façon mécanique sous l'action du vent. En Antarctique sur Terre, ce mécanisme est à l'origine des "Blue Ice Area" (27). A l'aval d'un mont, le vent est plus turbulent, l'érosion mécanique est plus efficace provoquant l'apparition d'une zone en ablation nette. A ces endroits spécifiques, la calotte terrestre composée de glace d'eau, mise à nue par ce processus, apparaît comme

bleue.

Sur Mars, une redistribution de la neige par les vents est suggérée par les observations de la sonde Mariner 9 (293) et TES à bord de MGS (299). Il est intéressant de noter que la présence de givre modifie localement l'écoulement (276).

De la même manière qu'en phase d'accumulation, la modélisation de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée au sol se fait grâce au bilan d'énergie radiative à la surface (79) :

$$\frac{\partial M_{CO_2}}{\partial t} = (-W_{sun}^{in} + F_{therm}^{out} - F_{cond} - F_{Adv}^{in}) \frac{1}{L_{CO_2}} \quad (7.8)$$

Cette équation est identique à l'équation 7.6 mais les ordres de magnitude relatifs entre les termes ont changé.

Détaillons chacun de ces termes :

**Flux solaire et atmosphérique** Le flux d'énergie solaire absorbé  $W_{sun}^{in}$  provient de différents sous termes : l'insolation directe absorbée au sol, le flux solaire indirect diffusé par l'atmosphère, l'énergie thermique émise par le ciel. Détaillons ces différentes contributions :

1. Flux solaire direct absorbé au sol : Il dépend du flux solaire arrivant au sommet de l'atmosphère et de différents facteurs :
  - (a) Flux solaire directe au sommet de l'atmosphère : Laskar et al. récapitulent de façon détaillée, l'estimation classique du flux solaire au sommet de l'atmosphère et de son intégration au cours de la journée (177). Il dépend de différents paramètres qui sont parfois reliés entre eux : flux solaire, latitude, distance entre Mars et le Soleil, position de la planète sur son orbite (longitude subsolaire :  $L_s$ ), obliquité et excentricité. C'est le paramètre clef à l'origine de la théorie astronomique des climats.
  - (b) Transmission atmosphérique : Cette quantité dépend de l'absorption par les gaz, de l'absorption et de la diffusion par les aérosols (atténuation atmosphérique).
  - (c) Pente locale : La quantité d'énergie interceptée par une surface unité dépend de sa pente locale. Cet effet géométrique de la pente est déterminé par l'angle entre la normale à la surface et la direction solaire. Il existe un effet d'ombrage des surfaces planétaires qui sont rugueuses. J'ai tenu compte de ces deux effets dans le modèle élaboré au cours de ma thèse.
  - (d) Facteur d'absorption : Il s'agit du complémentaire à un de l'albédo bolométrique directionnel-hémisphérique dans le visible  $A_{dh,vis}(\theta_i, \Phi_i)$  (voir section 1.3.1 page 22). Ce paramètre décrit la fraction effective du rayonnement, arrivant à la surface dans la direction d'incidence solaire, qui est absorbée par celle-ci. Cette variable dépend fortement du libre parcours moyen des photons dans la surface planétaire, elle-même contrôlée par la taille des grains et les indices imaginaires optiques des matériaux. Des estimations de l'albédo de la glace de CO<sub>2</sub>, utilisant une approche de transfert radiatif avec de la diffusion de Mie (voir chapitre 1), donnent des albédos dans le visible de 0,8/0,6/0,4 pour des tailles de grains de 0,1/0,5/2,0 mm (305). La quantité de poussière et dans une moindre mesure celle de l'eau, contrôlent aussi l'albédo. De plus, ce paramètre est directionnel, il dépend de la direction d'incidence (voir section 1.3 page 21).
2. Flux solaire diffusé par l'atmosphère et absorbé au sol : La lumière solaire arrivant au sommet de l'atmosphère (point 1 (a)) est diffusée et absorbée par les particules et gaz atmosphériques. A la surface, le flux résultant n'est pas toujours isotrope : il a une forte luminance dans la direction solaire. En général, il est dépendant du contenu en poussières. La pente locale a pour effet de réduire l'angle solide d'acceptation du flux solaire indirect, sur la surface. L'effet d'ombre portée dû à la rugosité est toujours présent. L'absorption dans le visible est similaire au point 1 (d) à la différence que le flux incident est cette fois-ci dans toutes les directions. Le facteur d'absorption est le complémentaire à un de l'albédo bolométrique hémisphérique-hémisphérique  $A_{vis}$  pondéré par la fonction directionnelle du flux diffusé.

3. L'énergie thermique émise par l'atmosphère et absorbée au sol : L'absorption de l'énergie solaire, par les gaz et aérosols atmosphériques, réchauffe l'atmosphère. En retour, elle émet un rayonnement en infrarouge thermique qui peut être absorbé par le sol. A la surface, le flux résultant n'est pas toujours isotrope. La pente locale a pour effet de réduire l'angle solide d'acceptation du flux thermique atmosphérique, sur la surface. L'effet d'ombre portée, dû à la rugosité, est toujours présent. L'absorption au sol s'écarte de celle exposée au point 1 (d) car le flux incident est cette fois dans toutes les directions et dans le domaine infrarouge. Le facteur d'absorption est le complémentaire à un de l'albédo bolométrique hémisphérique-hémisphérique  $A_{IR}$  pondéré par la fonction directionnelle du flux thermique en surface (voir section 1.3.1 page 22).

La contribution majeure de ces trois sous-termes provient du terme du flux solaire direct, absorbé au sol (point 1). J'ai estimé au cours de cette thèse que les autres sous-termes sont, au plus, 10 fois moins importants. La puissance surfacique totale absorbée par la surface peut atteindre  $250 \text{ W.m}^{-2}$  au pôle géographique. La situation orbitale actuelle privilégie une insolation maximale plus forte au Sud qu'au Nord mais un nombre de jours estivaux plus important au Nord qu'au Sud. Ces deux effets sont équilibrés : l'insolation totale reçue au cours d'une année est équivalente pour les deux pôles.

**Émission en infrarouge thermique** Le flux  $F_{therm}^{out}$  d'émission en infrarouge thermique, lorsque la glace de  $\text{CO}_2$  est présente au sol, est en tout point identique pour la phase de condensation et de sublimation (voir section 7.2.1.1). Le terme d'émission thermique représente  $20\text{-}30 \text{ W.m}^{-2}$  pour la phase de sublimation.

**Conduction de chaleur dans la subsurface** Les échanges de chaleur en mode conductif avec la subsurface sont identiques à la phase de condensation (voir section 7.2.1.1).

L'onde de chaleur annuelle décroît avec le temps, à partir de la date de la première condensation de la glace de  $\text{CO}_2$ . J'ai estimé que ce terme d'onde de chaleur, durant la phase de récession, ne dépasse pas en moyenne  $3 \text{ W.m}^{-2}$  (voir section 8.1.3.2 page 158).

Le bilan annuel du flux de chaleur totale de la subsurface est estimé par les données Viking à un gain de  $20\text{-}30 \text{ W.m}^{-2}$  (233) ce qui est compatible avec mon estimation.

**Advection atmosphérique** Contrairement à la phase de progression, nous pouvons nous affranchir du terme d'énergie apportée à la surface par advection atmosphérique  $F_{Adv}^{in}$  pendant la phase de récession. En effet, il est négligeable devant l'énergie solaire incidente lorsque la surface est éclairée (245; 121).

Le bilan d'énergie radiative en phase de condensation se fait entre des gains et des pertes qui peuvent être de même ordre de grandeur tandis que durant la phase de sublimation, les gains sont largement dominants à cause de la forte insolation et du tamponnage de la température des dépôts de  $\text{CO}_2$ . Cette différence permet d'expliquer pourquoi la phase de progression des calottes saisonnières est plus longue que la phase de récession.

## 7.2.2 Observables

Ce modèle de condensation et sublimation de  $\text{CO}_2$  permet de reproduire quatre observables : progression et récession de la surface couverte de dépôts saisonniers, la pression au sol mesurée par Viking Lander 1 et 2, la présence de *points froids* (zones à température de brillance anormalement basse), et la répartition des masses autour de la planète.

### 7.2.2.1 Progression et récession des dépôts saisonniers

L'extension spatiale des dépôts saisonniers et son évolution au cours du temps sont à l'origine du paradigme de condensation/sublimation de  $\text{CO}_2$ . Introduisons deux concepts qui permettent de décrire la récession : la *date* et la *ligne crocus*.

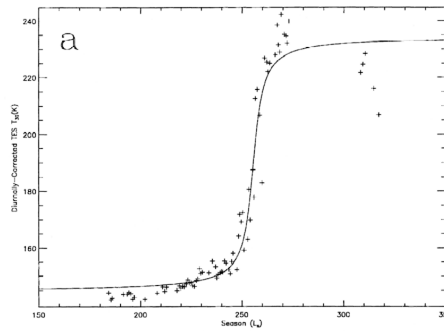


FIG. 7.1 – Définition de la *date crocus*. C’est le point d’inflexion dans le signal temporel de température de brillance (figure d’après (153)).

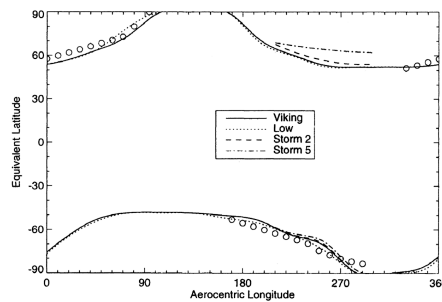


FIG. 7.2 – Comparaison de la surface couverte de dépôts saisonniers entre le GCM “Mars Climate Database” et les données Viking (138) (cercle). Les différentes lignes correspondent à la latitude équivalente pour plusieurs scénarii de profondeur optique de poussière (figure d’après (190)).

La *date crocus* pour un endroit donné, correspond à la date où la glace est en train de disparaître de la surface. Ce concept a été proposé par Kieffer et al. dans l’analyse des données TES (153) et correspond à la date pour laquelle le signal de température, en fonction du temps, a une inflexion (voir fig. 7.1). Cette forme est modélisée par une fonction arctan sans justification physique.

La *ligne crocus* à une date donnée, correspond à l’extension spatiale des dépôts saisonniers. C’est la ligne reliant tous les points ayant une *date crocus* similaire. Par exemple, l’illustration page 149 représente l’évolution de la ligne crocus au cours du temps (en °Ls).

Il est possible de comparer les lignes crocus modélisées par les GCM et observées sur Mars, en moyennant en longitude (190). La variable issue des GCM est la latitude équivalente, au delà de laquelle la surface est entièrement recouverte de dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub>. Elle est calculée pour des dépôts symétriques autour du pôle géographique, de manière à ce que la surface totale couverte de dépôts prédite par le GCM reste constante. La figure 7.2 montre l’adéquation entre les mesures de Viking (138) et le GCM développé en Europe (190).

L’extension spatiale des dépôts saisonniers forme une observable reproduite au premier ordre, en moyennant sur la longitude. L’asymétrie de la récession des dépôts au Sud, comme suggéré d’après les observations télescopiques de l’illustration page 149, n’est pas pris compte. De plus, les données disponibles à haute résolution spatiale sont écartées. Plusieurs raisons expliquent ces faits :

- Faible résolution spatiale des GCM. Les GCM prédisent l’extension des dépôts sur une grille avec une faible résolution spatiale (quelques degrés en latitude).
- Mauvaise prise en compte du cycle de l’eau. Seules les observations très récentes d’OMEGA (depuis 2004) en infrarouge proche permettent de faire une distinction claire entre glace d’eau et glace de CO<sub>2</sub> (voir section 7.3.3). De plus, les GCM n’ont incorporé que très récemment le cycle de l’eau associé (217).
- Mauvaise prise en compte des processus locaux. Certains effets locaux atmosphériques ou de sur-

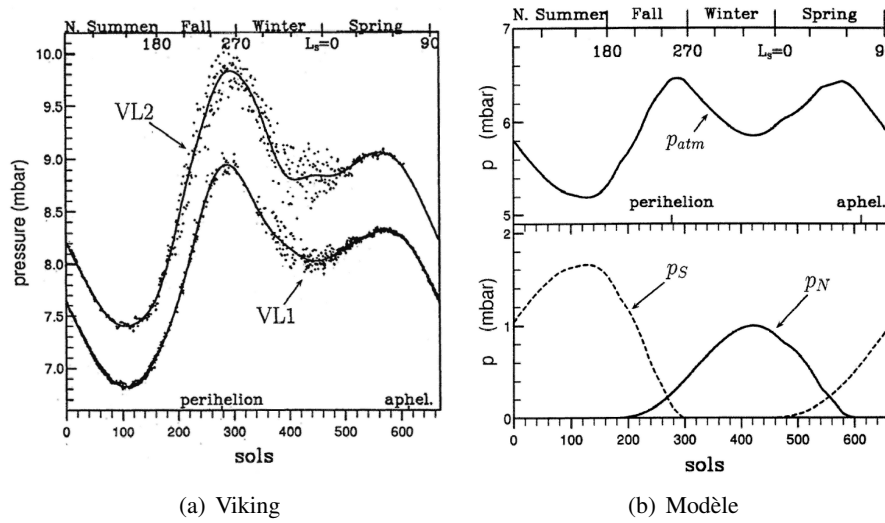


FIG. 7.3 – Pression atmosphérique martienne : (a) pression au sol mesurée par Viking Lander 1 et 2 ; (b) en bas : pression atmosphérique équivalente stockée dans les calottes saisonnières ; (b) en haut : pression atmosphérique à l’altitude 0 (voir eq. 7.9). Figure d’après Hourdin et al. (121).

face, peuvent modifier l’extension spatiale des dépôts saisonniers : les phénomènes d’écoulement en surface modifient l’accumulation par précipitation de neige (voir section 7.2.1.1) ; le contenu en aérosols atmosphériques qui est variable, modifie le bilan radiatif (voir section 7.2.1.2). De plus, les champs d’albédo ou d’émissivité peuvent varier très localement, comme c’est le cas pour la région cryptique à cause des geysers (voir section 7.3.1.2). Citons également les effets de pentes et d’ombrage qui sont dûs à la rugosité de surface et qui ne peuvent pas être pris en compte dans un GCM à l’échelle globale.

### 7.2.2.2 Pression au sol

Le signal de pression atmosphérique au sol, mesuré par Viking Lander 1 et 2, met en évidence plusieurs phénomènes à des échelles de temps différents (296; 121) (voir figure 7.3 a).

A l’échelle journalière, l’effet des marées thermiques domine le signal. A l’échelle de quelques jours martiens, les ondes planétaires transitoires impriment leur passage. L’échelle annuelle comporte plusieurs phénomènes saisonniers imbriqués. En décrivant le phénomène global, la composante de pression atmosphérique  $P_{atm}(t)$  est simplement déduite de la conservation de la masse totale de  $\text{CO}_2$ , exprimée en pression atmosphérique équivalente :

$$P_{atm}(t) = P_{tot} - P_N(t) - P_S(t) \quad (7.9)$$

Avec  $P_{tot}$  la pression équivalente à la totalité du réservoir de  $\text{CO}_2$  mobilisable,  $P_S(t)$  et  $P_N(t)$  les pressions atmosphériques équivalentes stockées dans les calottes saisonnières de  $\text{CO}_2$  sud et nord. Il existe peut-être d’autres réservoirs de  $\text{CO}_2$  sur Mars non impliqués dans le cycle climatique, mais ils doivent être isolés de l’atmosphère.

Localement, la pression mesurée au sol n’est pas directement  $P_{atm}(t)$  (voir figure 7.3 a et b) à cause de la redistribution des masses d’air (288; 122). La pression au sol  $P_{sol}(x, t)$ , telle que mesurée par Viking à la position géographique  $x$ , est définie par :

$$P_{sol}(x, t) = P_{atm}(t) \cdot \alpha(x, t) \quad (7.10)$$

Avec  $\alpha(x, t)$  le facteur météorologique qui dépend à la fois d’une composante orographique et d’une composante dynamique.

La composante orographique est une variation horizontale de pression due aux différences d'altitude entre les deux hémisphères martiens. Tandis que la composante dynamique est due à l'équilibre géostrophique, responsable des fortes variations de pression en latitude.

Plusieurs études utilisant des GCM reproduisent le cycle annuel de pression mesuré par Viking 1 et 2 mais avec des émissivités faibles pour les dépôts volatiles de CO<sub>2</sub> (307; 244). En 1995, une étude de sensibilité, laissant albédo et émissivité comme paramètres libres, confirme ce résultat (121). Pour reproduire le signal de pression saisonnier, il faut une émissivité de l'ordre de 0,65 et un albédo de 0,5 en supposant les mêmes pour les calottes nord et sud. En revanche, si une dissymétrie entre le Nord et le Sud est permise, l'albédo moyen au Nord est de 0,65 (contre 0,3 au Sud) tandis que l'émissivité au Nord est de 0,48 (contre 0,7 au Sud). Les mesures de l'instrument IRTM à bord de Viking ont montré que les valeurs d'émissivité sont plutôt proches de l'unité (233). La même étude montre que l'albédo varie pendant la saison de récession entre 0,4 et 0,7 au Nord et entre 0,5 et 0,75 au Sud.

L'ajout du processus de précipitation de neige de CO<sub>2</sub> (83) permet de reproduire le cycle de pression de Viking avec des émissivités correctes de l'ordre de 0,95 et un albédo constant de 0,5, tout en reproduisant correctement la distribution des *points froids* (voir section 7.2.2.3).

### 7.2.2.3 Points froids : zones à faible température de brillance

Certaines observations des pôles pendant la nuit permanente, avec l'instrument IRTM de Viking Orbiter, ont mis en évidence des points "froids". Il s'agit de zones très localisées dans l'espace et dans le temps ayant des *températures de brillance* inférieures à 135 K alors que la température de condensation de la glace de CO<sub>2</sub> est de l'ordre de 145-148 K à l'équilibre de pression saturante (151). Plusieurs explications coexistent actuellement :

1. Enrichissement en espèces chimiques non condensables : Localement, aux endroits où la condensation se produit intensément, les mouvements atmosphériques n'arrivent plus à compenser les pertes de CO<sub>2</sub>. Une baisse de la pression partielle de cette molécule et donc un enrichissement en espèces non condensables en résultent. Ceci pourrait induire une baisse de la température de la surface d'après la section 7.2.1. Cette hypothèse, déjà proposée en 1977 (151), a été éliminée par une étude de Hess montrant qu'une telle situation, avec de forts gradients verticaux et horizontaux est très improbable (116). Néanmoins, ce processus a été remis à l'ordre du jour très récemment, après la détection par GRS d'un enrichissement de l'atmosphère en Argon, pendant la nuit polaire (282). Une modélisation par GCM a aussi vu le jour (85).
2. Émissivité thermique plus faible qu'attendue : A cause de mauvaises estimations des constantes optiques ou du transfert radiatif, l'émissivité peut être mal estimée (59). Les constantes optiques du CO<sub>2</sub> mesurées en laboratoire (59; 105) et les modèles (305; 81), montrent qu'une faible taille des grains a un effet important. Elle baisse suffisamment l'émissivité pour que la température de brillance soit compatible avec les observations IRTM. Cependant, les fortes variabilités spatiales et temporelles des points froids suggèrent un métamorphisme très rapide au sol (quelques jours).
3. Présence de nuages de glace de CO<sub>2</sub> : Cette hypothèse est basée sur l'effet de la diffusion par les aérosols dans l'infrarouge thermique qui baisserait artificiellement la température de brillance (126).

Une étude du bilan radiatif a montré que si la densité optique des poussières atmosphériques passe de 0 à 5, on passe d'un régime de condensation au sol à un régime de condensation du CO<sub>2</sub> presque exclusivement dans l'atmosphère (245). Ce modèle démontre que la poussière augmente l'émissivité de l'atmosphère, donc son taux de refroidissement ainsi que son taux de condensation. Les observations de Viking corroborent ce résultat (245).

De plus, le transfert radiatif dans les particules de glace fait baisser la température de brillance, car les nuages agissent comme un filtre (81). C'est le cas pour des nuages précipitables de grains de CO<sub>2</sub> supérieur à 10 microns.

En revanche, les nuages non-précipitables de taille de grains submicroniques, n'ont pas cet effet.

Une étude détaillée a montré avec une modélisation par GCM que la distribution spatiale et temporelle de l'occurrence des points froids est compatible avec les données TES (83).

De plus, l'ajout de ce phénomène de neige de CO<sub>2</sub> permet de simuler le cycle de pression atmosphérique mesuré au sol par Viking Lander 1 avec une émissivité de 0,95 pour la calotte saisonnière compatible avec les données (voir section 7.2.2.2).

Les deux hypothèses les plus probables sont donc une faible émissivité thermique due à une faible taille de grains pour les dépôts de CO<sub>2</sub> au sol et/ou la présence de nuages de glace de CO<sub>2</sub>. Forget et al. montrent que le signal de température de brillance ne permet pas d'établir la différence entre un givre frais au sol et des nuages (81). L'hypothèse d'un givre de CO<sub>2</sub> à faible taille de grains est corroborée par TES et la réflectance mesurée par MOLA (106).

Des mesures du temps de retour avec l'altimètre laser MOLA ont permis de distinguer les deux phénomènes (130). En effet, un écho de surface est très différent d'un écho atmosphérique (temps de retour plus long et une dispersion moins grande). La conclusion de cette étude est que les *points froids* sont parfois dûs à des nuages mais aussi très fréquemment liés à des zones au sol couvertes de neige fraîche, donc à petits grains. Cette conclusion est appuyée par une étude plus complète, mêlant les données MOLA et des simulations de climat, étude qui explique l'occurrence de précipitations de cristaux de CO<sub>2</sub>, à cause d'effets dynamiques à grande échelle, liés à la topographie de l'hémisphère sud de Mars (52).

En conclusion, les deux hypothèses de la glace de CO<sub>2</sub> à faible taille de grains, soit à la surface, soit dans l'atmosphère produisent le même effet : un point froid, c'est à dire une zone de température de brillance anormalement basse. La distribution annuelle à l'échelle globale des points froids est correctement modélisée par les GCM.

#### 7.2.2.4 Masse totale

La masse totale impliquée dans le cycle saisonnier peut être estimée par plusieurs méthodes.

**Déformation du géoïde** La sonde MGS a permis de mesurer précisément les variations saisonnières de forme du géoïde martien, notamment le coefficient  $C_{2,0}$  du champ de gravité (277; 311). L'aplatissement du géoïde diminue lorsque le CO<sub>2</sub> atmosphérique se condense aux pôles et augmente quand le CO<sub>2</sub> se sublime à nouveau et qu'il est plus uniformément redistribué autour de la planète. Une étude plus récente utilisant aussi le coefficient  $C_{3,0}$  montre que les GCM modélisent correctement le cycle saisonnier martien (143).

**Épaisseur et densité des dépôts** L'instrument MOLA à bord de MGS est un laser altimètre qui permet de mesurer très précisément (à moins d'un mètre près), l'altitude locale de Mars. Les variations temporelles du signal d'altitude pour les hautes latitudes s'expliquent par la constitution puis le démantèlement de la calotte saisonnière (277). Cette première étude montre que l'amplitude des variations augmente linéairement avec la latitude entre 0 m à 60° de latitude et 1 m au pôle.

En combinant les informations de masse, déduites de la déformation du géoïde, cette étude propose une masse volumique pour les dépôts de  $0,910 \pm 0,230 \text{ g.cm}^{-3}$ . Une autre étude, basée sur la décomposition en série de Fourier du signal temporel, confirme que l'amplitude annuelle est d'un mètre (8). En comparant avec les données de masse déterminées par les mesures du flux de neutron, Aharonson propose une masse volumique plus réaliste de  $0,5 \text{ g.cm}^{-3}$  (8).

**Flux de neutron** La production de neutrons dans le sol est induite par le bombardement des rayons cosmiques galactiques. Le flux de neutron, qui s'échappe du sol, est fortement diminué par la présence d'hydrogène qui absorbe les neutrons. La spectroscopie neutron est donc sensible à la quantité d'eau en subsurface jusqu'à un voire deux mètres de profondeur.

L'instrument HEND à bord de Mars Odyssey mesure le flux des neutrons épithermiques et rapides en provenance du sol martien. Ces flux permettent d'estimer la masse d'élément H présente dans le sol.



Le résultat majeur de cet instrument est la détection dans les zones polaires jusqu'à 60° de latitude d'une subsurface enrichie en glace d'eau (32; 73). Lorsque la calotte saisonnière de CO<sub>2</sub> recouvre cette subsurface riche en eau, le flux de neutron augmente. En supposant un modèle de substrat, il est possible d'estimer la masse des dépôts de glace de CO<sub>2</sub> en surface à partir du signal saisonnier du flux de neutrons (193; 192). La taille du pixel de ce type d'instrument est de l'ordre de la centaine de kilomètres.

Le modèle proposé par Litvak et al. suppose un sol homogène comportant 10 à 15 % d'eau en masse à 60°N, augmentant jusqu'à 50 % au pôle nord. Pour la région polaire sud, un sol à deux couches est meilleur. La couche supérieure, de 10 à 12 cm d'épaisseur, est de la poussière sèche. La couche inférieure a les mêmes propriétés verticales et géographiques que le sol homogène de l'hémisphère nord.

Des comparaisons entre le GCM du NASA/Ames (103) et les mesures de masse de CO<sub>2</sub> ont été effectuées. Il existe une bonne correspondance entre la masse de CO<sub>2</sub> déterminée par les observations et le GCM au Nord et au Sud, pour des moyennes sur des bandes de latitude de 10° (192; 191).

**Flux de rayon gamma** Le principe de la spectroscopie gamma est identique à celui des neutrons. Le bombardement des rayons cosmiques galactiques produit des rayons gamma dans le sol qui sont absorbés par les neutrons, signant la présence d'eau. La profondeur de détection est d'un à deux mètres. Aux latitudes supérieures à 60°, la calotte saisonnière de CO<sub>2</sub> produit un signal saisonnier, dont peut être extrait la masse en surface. L'inversion par méthode Monte-Carlo des spectres gamma de GRS, à bord de Mars Odyssey, a pu montrer la bonne correspondance avec les simulations générées par le GCM du NASA/Ames (146). Cette étude confirme bien que 25% de la masse atmosphérique totale est impliquée dans le cycle saisonnier de condensation/sublimation. Aussi, les mesures indépendantes en spectroscopie gamma et neutron, sont toutes deux compatibles avec les GCM.

### 7.3 Incomplétudes : avancées et interrogations

Le paradigme du cycle saisonnier martien par condensation/sublimation est mis à l'épreuve par des observations de plus en plus nombreuses. A ce sujet, nous allons évoquer notamment la notion de symétrie centrale autour du pôle géographique. Lorsque cette symétrie est brisée, nous utilisons alors le terme d'*asymétrie*. De plus, quand il peut exister des différences entre les observations des hémisphères nord et sud, alors nous utilisons le terme de *dichotomie*, en référence à la dichotomie d'altitude.

Quelques incomplétudes persistent entre modèles et observations. Listons ici les majeures :

- l'asymétrie de la calotte saisonnière sud,
- la dichotomie de la persistance estivale de la glace de CO<sub>2</sub> au pôle
- la dichotomie de la présence de glace d'eau au sol dans le cycle saisonnier.

Certaines des incomplétudes ont une explication convaincante par un phénomène physique qui n'est pas incorporé dans les modèles de type GCM. D'autres restent des problèmes complètement ouverts.

De façon plus indirecte, le *cycle saisonnier martien* peut être impliqué dans la constitution ou la destruction des réservoirs de volatiles en subsurface et surface avec l'hydratation minérale. Les échanges avec ses réservoirs devraient aussi être pris en compte pour une compréhension fine du cycle saisonnier.

#### 7.3.1 Asymétrie de la calotte saisonnière sud

La calotte saisonnière, observée dans le domaine de la lumière visible, forme une unité de terrain d'albédo plus élevée que le régolithe sombre des hautes latitudes. Dès lors, l'observation de la calotte saisonnière est relativement aisée, permettant à Maraldi de l'apercevoir dès 1719 avec des télescopes de piètre qualité.

La calotte saisonnière nord a une récession quasi symétrique par rapport au pôle géographique nord, d'après les observations Viking (140), MOC (24), TES (152) et maintenant OMEGA (263; 265). Ce n'est pas le cas pour la calotte saisonnière sud à cause de la région cryptique.

### 7.3.1.1 Asymétrie de la récession

Les premières évidences de l'asymétrie de la récession de la calotte saisonnière sud apparaissent dès 1905 (75; 302) (voir illustration page 149). Malgré cette asymétrie, la récession est au premier ordre toujours identique d'une année martienne à une autre. Afin de comparer les différentes années et les différentes observations, James et al. proposent de modéliser l'extension géographique du dépôt saisonnier par un disque dans une projection stéréographique polaire sud (136). Il s'agit d'ajuster deux paramètres : le centre et le rayon du disque. Les observations Viking (136), au sol (137; 131) ou MOC (24) montrent toujours une asymétrie de récession qui commence vers  $L_s=220^\circ$ . Le méridien de longitude  $120^\circ E$  a une vitesse de récession plus rapide que le méridien opposé de longitude  $60^\circ W$ . Cette asymétrie a été confirmée par les observations TES (153) et OMEGA (172). Elle est liée à la région cryptique, introduite par Kieffer, en 2000, à partir des analyses des données TES (153) (voir section suivante).

Cette vision simpliste du disque ne décrit pas correctement le détail de la zone couverte par les dépôts saisonniers. Il existe des îlots clairs détachés du disque et des îlots sombres à l'intérieur du disque. De plus, le bord du disque a une géométrie complexe. Les montagnes de Mitchel forment l'îlot clair détaché le plus étendu et le plus connu. Il tient son nom du directeur de l'observatoire de Cincinatti qui l'a observé pendant l'opposition de 1845.

Lors de cette thèse, j'ai montré que l'hypothèse la plus vraisemblable pour expliquer cette asymétrie réside dans la phase d'ablation. Cette asymétrie de sublimation est due à une asymétrie d'albédo qui accélère la récession dans la zone la plus sombre (voir section 8.1 page 150).

### 7.3.1.2 La région cryptique

Le concept de région cryptique a été introduite par Kieffer et al. en 2000, en analysant la récession de la calotte saisonnière sud avec l'instrument TES à bord de MGS (153). Il s'agit d'une région qui comporte deux caractéristiques a priori contradictoires : un albédo faible (signant la présence de poussière) et une température proche de 140K (signant la présence de glace de  $CO_2$ ). La région cryptique apparaît comme un îlot sombre à l'intérieur du disque (voir section précédente).

Une étude plus récente a permis une définition plus précise de la région cryptique utilisant toujours les données TES (242). Il s'agit de l'ensemble des îlots d'albédo inférieur à 0,38 et comportant une signature en température de glace de  $CO_2$ . Cette définition permet de dessiner les contours de la région cryptique au cours du temps. La "région cryptique union" est l'ensemble des points qui présentent des caractéristiques de crypticité à un moment donné pendant la récession de la calotte saisonnière (SSPC). La "région cryptique intersection" est l'ensemble des points qui présentent des caractéristiques de crypticité pendant toute la récession de la SSPC. Introduisons aussi la "région anticryptique" qui est le complémentaire de la région cryptique union dans le domaine des hautes latitudes.

**Spiders et geysers** Afin d'expliquer la contradiction apparente albédo/température de cette zone cryptique, deux hypothèses majeures ont été avancées :

1. La plus simple invoque de la poussière en contact avec de la glace sous-jacente (153). La température de la couche de poussière superficielle serait contrôlée par le  $CO_2$  sous-jacent, mais l'albédo de la couche supérieure resterait sombre. Il faut donc que la couche superficielle soit à la fois optiquement épaisse et non isolante thermiquement.
2. La seconde explication est la présence d'une couche de glace à gros grains, très pure et suffisamment transparente pour que les photons visibles et proches infrarouges puissent atteindre le sol sous-jacent. Dans ce cas, la couche de glace de  $CO_2$  imposerait bien une température de 140 K tandis que l'albédo serait contrôlé par le substrat.

Un unique mécanisme permet de concilier ces deux explications : les geysers. Ce mécanisme consiste en un chauffage basal au travers d'une couche de  $CO_2$  transparente (153; 242). Ce chauffage entraîne une sublimation du  $CO_2$  sous la couche de glace. Le gaz ainsi produit monte en pression jusqu'à briser la couche de glace et se libérer, emportant avec lui la poussière présente dans le substratum. Ce modèle

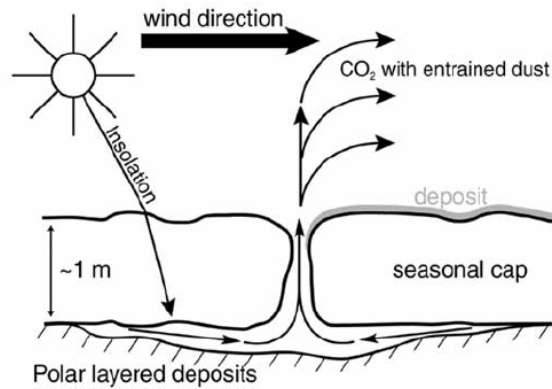


FIG. 7.4 – Schéma de la formation des geysers. D’après Piqueux et al. (242).

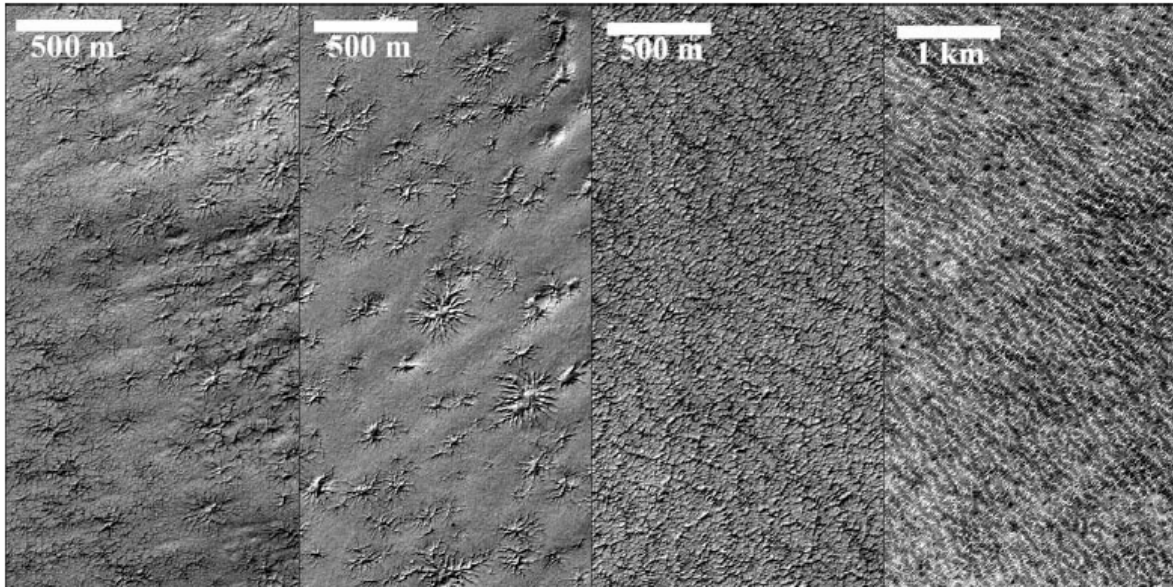


FIG. 7.5 – Observation MOC des Spiders. D’après Piqueux et al. (242).

est schématisé dans la figure 7.4 et explique comment les hypothèses 1 et 2 peuvent être réconciliées. La partie droite du schéma correspond à la situation de la première hypothèse, tandis que la partie gauche correspond à la situation de la seconde.

Ce modèle de geyser est conforté par l’observation de figures géomorphologiques très particulières : les “spiders” (242). Il s’agit de formes ressemblant à des araignées creusées dans le sol minéral à l’échelle de moins d’un kilomètre (voir figure 7.5). Au printemps, les “spiders” sont recouverts de traînées sombres, vraisemblablement composées de poussière (voir figure 7.6). Piqueux et al. interprètent ces traînées comme les traînées de poussières déposées par les geysers.

L’argument qui lie le modèle de geyser, les spiders et la région cryptique a été proposé toujours par la même équipe (242). Ils démontrent que tous les spiders sont situés dans des lieux appartenant à la fois à la région cryptique union et à une unité géologique de terrains contenant de la poussière. La glace y est translucide au printemps ce qui assure le chauffage du sol et donc la formation de gaz sous pression. Les geysers résultants peuvent être matérialisés en surface et causer une contamination.

Le mécanisme de geyser étant validé, il reste encore à montrer l’origine de l’asymétrie. Pourquoi la glace transparente est préférentiellement présente dans la région cryptique ? La réponse proposée par une étude climatique impliquant un GCM réside dans la compétition entre les deux phénomènes d’accumulation :

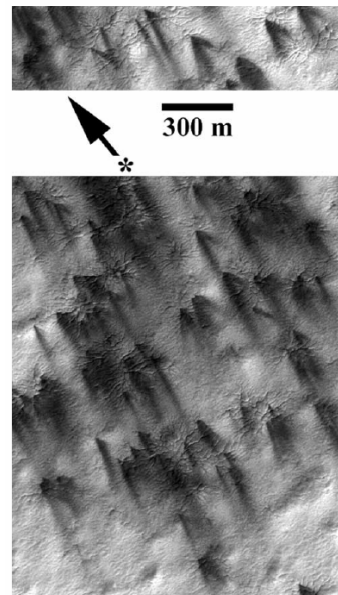


FIG. 7.6 – Observation MOC à  $L_s=208^\circ$  des liens entre les “spiders” et geysers. Les traînées sombres de dépôt de poussière ont comme point d’origine les centres des “spiders”. D’après Piqueux et al. (242).

condensation directe au sol et précipitation de neige (51). Les bassins d’Hellas et d’Argyre produisent une asymétrie dans l’écoulement atmosphérique qui induit une asymétrie dans la part d’accumulation faite par précipitation. La précipitation de neige, qui produit des glaces au sol à grain relativement fin, a lieu préférentiellement dans la région anticryptique. A l’inverse, la région cryptique est moins sujette à précipitation de neige, la glace transparente peut s’y développer plus aisément par condensation directe et le mécanisme de geysers aussi.

Des études récentes en infra-rouge thermique avec THEMIS (155) et infra-rouge proche avec OMEGA (175) confirment certains aspects de ce modèle. L’inversion des spectres OMEGA à l’aide d’un modèle de transfert radiatif permet de montrer que de la poussière est présente en surface d’une couche transparente de  $CO_2$  dès  $L_s=197^\circ$  pour la région cryptique. Dans ce cas, la contamination superficielle par la poussière doit inhiber le chauffage du substrat car le rayonnement solaire est absorbé en surface.

Néanmoins, le maximum de contamination est observé par MOC (248) et OMEGA (175) à  $L_s=230$ . D’autre part, la contamination vue par OMEGA est assez uniforme sur de grandes surfaces alors que la présence des spiders et des jets est assez localisée. Actuellement, les spiders et la région cryptique ne sont toujours pas bien compris.

**SCOOP :** Des analyses géomorphologiques indépendantes tendent à montrer que les spiders seraient plutôt associés à des “Dark Dune Spots” formés par des colonies de bactéries qui se seraient adaptées pour vivre à 140 K (118; 92) (voir figure 7.7).

### 7.3.2 Dichotomie de la persistance estivale de glace de $CO_2$

La calotte nord à la fin de l’été voit disparaître entièrement son dépôt saisonnier de glace de  $CO_2$ , comme suggéré par les mesures de température de Viking (150) et confirmé notamment avec les observations OMEGA dans l’infra-rouge proche (174). La glace de  $CO_2$  est présente de façon permanente au sommet de la calotte permanente sud, d’après les données en température de brillance de l’instrument IRTM de Viking (149). Cette observation a été confirmée depuis par OMEGA dans le domaine infrarouge proche (25). Sous la couche de  $CO_2$  permanente au Sud, il existe la calotte permanente d’eau, révélée par les mesures de température à haute résolution spatiale de THEMIS (298) ainsi que par OMEGA (25).

Dans un premier temps, nous présentons un état des lieux des explications à propos de la persistance estivale de la glace de  $CO_2$ , exclusivement au Sud. Suit une brève description de cette couche de  $CO_2$

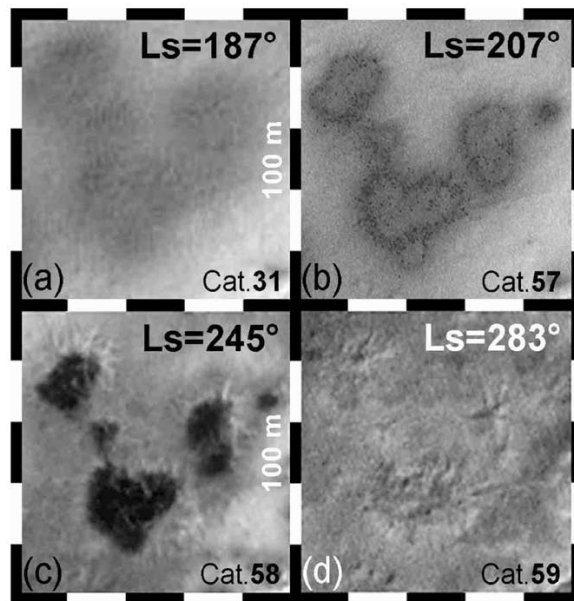


FIG. 7.7 – **SCOOP** : Série d’images MOC à haute résolution dans la région “Inca City” montrant l’évolution d’une colonie de bactéries. D’après (92).

permanente qui a une texture géomorphologique de type “gruyère suisse”. Enfin, la dernière section présente les implications de l’existence de cette couche permanente de CO<sub>2</sub> sur l’évolution de la région polaire à l’échelle des temps géologiques.

### 7.3.2.1 Pourquoi une calotte permanente de CO<sub>2</sub> au Sud ?

Au Sud, il existe une calotte permanente de CO<sub>2</sub> et pas au Nord. Or, le sommet de la calotte sud est 6,4 km plus haut que celui de la calotte nord. L’altitude détermine la pression partielle de CO<sub>2</sub> qui à son tour impose la température d’équilibre d’un dépôt de CO<sub>2</sub> solide à la surface (voir section 7.2.1). Le sommet de la calotte sud a donc une température d’équilibre plus faible que celui au Nord. L’effet de l’altitude impose donc une plus faible stabilité du CO<sub>2</sub> au Sud, ce qui est contradictoire avec les observations. Cet argumentaire a été proposé en 1973, d’après les observations Mariner (223).

Pour résoudre cette contradiction, l’hypothèse communément admise est la suivante : l’albédo est plus fort au Sud comme confirmé par les études Viking (233), cité aussi dans cet article (79). Cet effet d’albédo permet à la glace de CO<sub>2</sub> de ne pas absorber suffisamment d’énergie pour se sublimer entièrement. L’albédo dépend de la taille de grains (influence les domaines visible et infrarouge du spectre) mais aussi des impuretés en eau (surtout dans le domaine infrarouge) et poussière (dans les domaines visible et infrarouge). L’albédo est plus fort au Sud qu’au Nord car le processus de nettoyage des poussières y serait plus efficace. Plusieurs processus de nettoyage sont possibles : par sustentation de la poussière (153), par enfoncement des grains sombres (247). Mais, tous ont la même source d’énergie : le soleil. La quantité d’énergie disponible au sol dépend entre autres, des paramètres astronomiques tel que la distance au soleil (voir section 7.2.1.2). Or, cette distance est plus faible pendant l’été sud que pendant l’été nord. L’insolation maximale est donc plus forte au Sud. Cependant, l’été nord est plus long que l’été sud si bien que la quantité d’énergie radiative intégrée sur l’année est identique au Nord et Sud. Seul le paramètre d’insolation maximale semble pertinent.

De plus, vient s’ajouter une autre dichotomie : le fait que le flux de chaleur venant du sous-sol est quasi-nul au Sud car la présence de CO<sub>2</sub> à température tamponnée toute l’année interdit la progression d’une onde de chaleur. Au Nord en revanche, l’insolation estivale et la forte inertie thermique de la glace d’eau permettent de stocker une grande quantité d’énergie qui remonte à la surface en hiver (133). La présence d’une glace de CO<sub>2</sub> permanente sur le pôle sud y induit une forte boucle de rétroaction positive.

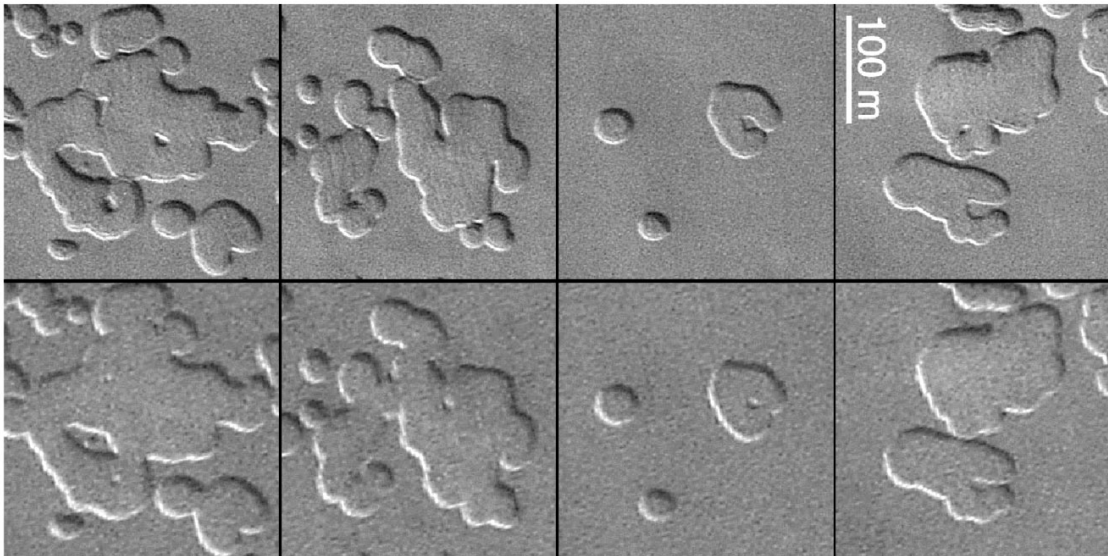


FIG. 7.8 – Progression des dépressions du Gruyère Suisse de la calotte saisonnière sud. En haut, image MOC prise le 19/10/1999 à  $L_s=227^\circ$ . En bas, image prise MOC le 23/08/2001 à  $L_s=219^\circ$ . Illumination d'en haut à gauche. D'après (201).

### 7.3.2.2 Gruyère suisse

La calotte permanente de  $\text{CO}_2$ , qui apparaît sur les images visibles à haute résolution de MOC, présente une texture très singulière dite de “Gruyère suisse” (ou “Swiss cheese” en anglais). Elle est composée d'une myriade de petites dépressions circulaires (294) percées à travers la couche de  $\text{CO}_2$  de quelques mètres d'épaisseur environ (295). Ces dépressions s'élargissent dans le temps preuve que le réservoir de  $\text{CO}_2$  au sommet de la calotte permanente sud n'est pas stable dans le temps (201) (voir figure 7.8).

De nouvelles estimations de l'épaisseur de la couche de  $\text{CO}_2$  donne une hauteur de huit mètres environ (35). Cette faible hauteur de  $\text{CO}_2$  est confirmée par un modèle de formation des dépressions quasi circulaires. Le modèle proposé fait l'hypothèse que la couche de glace de  $\text{CO}_2$  comporte un gradient d'albédo (0,7 en haut à 0,6 en bas) comme le suggèrent les observations MOC lorsque le dépôt saisonnier de  $\text{CO}_2$  s'est entièrement sublimé (35). Le  $\text{CO}_2$  est posé sur la calotte permanente de glace d'eau à plus fort albédo (0,7) visible au fond de la dépression. La température de brillance dans les dépressions, déterminée par les observations THEMIS, est supérieure à 170K, confirmant ainsi la présence de glace d'eau.

### 7.3.2.3 Implications pour le climat passé

Le fait qu'un réservoir de  $\text{CO}_2$  soit sans cesse au contact avec l'atmosphère a des implications sur l'histoire de l'atmosphère planétaire. Ce, d'autant plus que le  $\text{CO}_2$  est un important gaz à effet de serre qui a pu réchauffer Mars dans le passé au dessus de la température moyenne actuelle.

**Pression atmosphérique au cours des temps géologiques** La glace de  $\text{CO}_2$  permanente est un tampon de pression atmosphérique. Elle permet un contrôle permanent de la pression, qui est un paramètre crucial de l'histoire de l'atmosphère martienne. La pression atmosphérique détermine par exemple la possibilité de soulèvement de tempêtes de poussières globales. L'idée de tampon était déjà présente dans l'article pionnier du  $\text{CO}_2$  sur Mars de Leighton et Murray (183). Ils utilisaient alors un argument sur la stabilité de la calotte nord pour prouver leur théorie. Aujourd'hui, les mesures montrent que la calotte permanente de  $\text{CO}_2$  est située au Sud. Si une telle glace a été présente tout au long de l'existence de Mars, alors la

pression atmosphérique a été une fonction croissante de l'insolation moyenne au niveau des pôles (154).

L'insolation au niveau des pôles est contrôlée en partie par les paramètres orbitaux et notamment l'obliquité (voir section 7.2.1.2). En cas de faible obliquité, la quantité de CO<sub>2</sub> condensée est plus forte et la pression atmosphérique plus faible (304). En cas de relativement forte obliquité, situation très probable d'après des études récentes (176), le système atteint un équilibre annuel entre sublimation et condensation qui rend improbable la stabilité de deux calottes permanentes de CO<sub>2</sub>. En cas de très forte obliquité, le réservoir de CO<sub>2</sub> peut être sublimé entièrement, et dans ce cas, il n'y a plus d'effet tampon. Cette situation n'est possible que si la quantité de CO<sub>2</sub> est relativement faible. Il existe donc trois régimes bien distincts dépendant de l'obliquité.

Certaines considérations remettent en question l'effet tampon.

La quantification précise de la masse de la couche (de hauteur estimée à huit mètres et d'extension spatiale estimée à 88 000 km<sup>2</sup>) montre que l'effet tampon n'existerait pas à plus haute obliquité qu'actuellement car la masse de la couche estimée contribuerait à une augmentation de pression atmosphérique de 0,35 mbar, c'est à dire seulement 5% de la pression atmosphérique totale (35).

De plus, il y a encore un débat sur l'existence permanente de la glace de CO<sub>2</sub>, notamment sur des observations prises depuis la Terre en 1969 (132). Un modèle récent proposé par Byrne permet de s'affranchir de l'hypothèse de pérennité de la couche de glace de CO<sub>2</sub> au Sud (36). Ce modèle inclut les équations du bilan d'énergie radiative (voir section 7.2.1) et un modèle de rugosité de surface qui augmente avec la quantité de glace accumulée. Dès que la rugosité de surface est suffisamment importante, des petites cavités se forment et se creusent jusqu'au substratum de glace d'eau qui produit une dépression circulaire de morphologie identique au "gruyère suisse". Les dépressions s'élargissent au cours des années martiennes jusqu'à un stade limite où quelques îlots sont stables indéfiniment. Pour réinitialiser le processus, il suffit de remettre une fine couche de glace de CO<sub>2</sub> partout qui provoque une recondensation partout qui augmente la rugosité partout. La phase de réinitialisation est critique car la glace d'eau nue ne permet pas à la glace de CO<sub>2</sub> de se condenser à cause de la température trop élevée. Il est tout à fait possible que l'année de tempête de poussière de 1971 soit l'année de réinitialisation, car James fait état d'une couche de dépôts nouvelle (136). Cette tempête de poussière était localisée au Sud et pourrait donc expliquer pourquoi la calotte permanente est située au Sud uniquement.

D'autres réservoirs de CO<sub>2</sub> sont possibles sur Mars. Par exemple, une alternative à la couche superficielle réside dans un réservoir de clathrate hydrate de CO<sub>2</sub> enfoui à dix mètres de profondeur dans les calottes permanentes, qui serait stable, même pour une obliquité de 60° (134). Dans ce cas, l'effet tampon serait tout de même réalisé au cours des temps géologiques. Aussi, les carbonates forment une source potentielle de CO<sub>2</sub> mais ils n'ont pas été détectés jusqu'à présent.

**Effet de serre** La présence d'eau liquide dans le passé martien est suggérée par plusieurs types de terrains fossiles : vallées ramifiées, vallées de débâcle, paléodeltas, etc (208). Mais l'eau liquide n'est pas stable à la surface dans les conditions martiennes actuelles. La quantité de gaz de CO<sub>2</sub> atmosphérique est un paramètre important car il permet d'expliquer pourquoi le climat ancien de Mars aurait pu être beaucoup plus chaud, permettant notamment à l'eau d'être sous forme liquide. Pollack et al. proposent un modèle climatique à 1 dimension qui permet de montrer que l'effet de serre du gaz de CO<sub>2</sub> est suffisant pour que l'eau soit liquide avec une pression atmosphérique de quelques bars (246). Ils proposent aussi que la destruction des carbonates soit à l'origine de cette forte pression atmosphérique.

Néanmoins, une étude complémentaire montre que pour des pressions atmosphériques supérieures à quelques dizaines de mbar, la chaleur latente de condensation du CO<sub>2</sub> est telle qu'il est impossible que l'effet de serre soit suffisant pour créer les conditions propices à l'eau liquide (144).

Différents autres mécanismes ont été compilés dans l'article de Forget et Pierrehumbert (86) : chauffage géothermique, un soleil plus massif délivrant une quantité d'énergie plus importante, un effet de serre de méthane ou d'ammoniac. Cependant, aucun ne semble réaliste (145).

Un mécanisme original pour réchauffer Mars a été proposé par Forget et Pierrehumbert : la rétrodiffusion par les nuages de CO<sub>2</sub> du rayonnement thermique vers la surface (86). Ce processus d'effet de serre dû à la glace de CO<sub>2</sub> dans les nuages pourrait aussi avoir eu lieu sur Terre dans le passé. L'effet des nuages

dépend fortement de leur altitude.

En effet, une autre modélisation proposée par Mischna et al. prenant en compte l'effet thermique montre que des nuages optiquement épais situés bas en latitude aurait un effet inverse de refroidissement de la planète (213).

Des récentes observations confirment la présence de nuages de CO<sub>2</sub> actuellement sur Mars (21; 216).

### 7.3.3 Dichotomie d'abondance en eau de la calotte saisonnière

Des études récentes montrent que la glace d'eau est présente préférentiellement dans la calotte saisonnière nord (152; 263). Nous faisons dans une première section le point sur ce fait. Une seconde section met en exergue le lien possible entre le cycle saisonnier de glace d'eau et celui du CO<sub>2</sub>. La dernière section souligne le rôle qu'a pu jouer la calotte saisonnière d'eau au cours des temps géologiques.

#### 7.3.3.1 Pourquoi une couronne saisonnière de glace d'eau au Nord ?

Dans le visible, les comportements spectraux de la réflectance pour la glace d'eau et de CO<sub>2</sub> sont identiques. C'est pourquoi il a fallu attendre les années 70 pour les distinguer clairement, le temps que des détecteurs adéquats soient développés.

L'infrarouge thermique et l'infrarouge proche, ont d'abord été utilisés respectivement pour une mesure de la température de brillance (229; 228) et pour celle d'une bande d'absorption à 3 microns, caractéristique de l'eau (113).

Néanmoins, les observations du premier type, comme par exemple par les instruments IRTM à bord de Viking, TES à bord de MGS et THEMIS à bord de Mars Odyssey (NASA), peuvent être ambiguës en cas de *mélange géographique subpixel*. En effet, un mélange linéaire de flux thermiques venant de terrain à des températures différentes est dominé par le flux du terrain le plus chaud (à cause de la dépendance du flux à la puissance quatrième de la température).

De plus, contrairement au CO<sub>2</sub> solide, la glace d'eau n'a pas une température tamponnée dans un intervalle réduit, ce qui rend sa détection plus difficile. Les observations, telles celles acquises dans l'infrarouge proche par OMEGA, ne comportent pas ces problèmes. Elles ont tout de même un inconvénient majeur : elles ne peuvent pas être réalisées la nuit.

Les données TES de la calotte saisonnière nord ont mis en évidence un anneau de température intermédiaire (152) autour de la région dominée par la glace de CO<sub>2</sub>. Grâce aux données infrarouge proche du capteur OMEGA, cet anneau a été identifié à de l'eau sans ambiguïté (263). La calotte saisonnière sud n'implique elle, qu'une très faible quantité de glace d'eau présente uniquement à quelques endroits, à partir de  $L_s=220^\circ$  (172). La couronne nord est présente jusqu'à la fin de la récession (263). Le mécanisme proposé pour expliquer le comportement de la couronne d'eau est une recondensation successive sur la calotte saisonnière de CO<sub>2</sub> qui forme un piège froid (119; 252).

Une modélisation du cycle de l'eau par GCM, incorporant les nuages, reproduit bien cette dichotomie d'abondance de vapeur d'eau dans l'atmosphère déterminée par TES (217). Ce GCM suppose que la calotte nord est recouverte d'une couche semi-infinie de glace pour des latitudes supérieures à 80°N. Au Sud, le modèle suppose que la température est égale à la température de condensation du CO<sub>2</sub> durant toute l'année, pour des latitudes supérieures à 85°S. Cette étude de Montmessin et al. suggère que les nuages sont responsables du transport de la moitié du cycle de l'eau dans l'atmosphère. D'autre part, la mobilité de l'eau par les nuages au cours du cycle annuel n'est pas suffisante pour un échange important entre les deux hémisphères. Cet article montre aussi que la dichotomie de présence d'eau dans les dépôts saisonniers est très certainement due à la dichotomie d'eau atmosphérique.

Les observations de TES (280) et OMEGA (70) montrent que l'abondance en vapeur d'eau dans l'atmosphère pendant l'été local est supérieur au Nord par rapport au Sud. Cette dichotomie est très probablement due à la présence permanente de glace de CO<sub>2</sub> au sommet de la calotte permanente sud (voir chapitre 7.3.2). En effet, la couche de glace de CO<sub>2</sub> permanente empêche le réchauffement et la sublimation de la couche sous-jacente de glace d'eau (voir chapitre 7.3.2.2). Au contraire, la calotte permanente nord est composée de glace d'eau présente en surface pendant l'été, permettant son réchauffement, sa



sublimation et un enrichissement de l'atmosphère localement.

Les observations TES montrent que l'abondance en vapeur d'eau augmente au pôle nord vers  $Ls=60^\circ$ . Or les observations et les modélisations montrent que la glace de  $CO_2$  est présente au pôle nord jusqu'à  $LS=90^\circ$ . L'avance de  $30^\circ$  de  $Ls$  de l'enrichissement en vapeur d'eau est probablement due à l'absorption d'eau dans le régolithe ou à la sublimation de glace d'eau des dépôts saisonniers.

L'atmosphère au Sud est donc appauvrie en eau par rapport au Nord pendant l'été, les calottes saisonnières seraient donc le reflet de cette dichotomie d'état atmosphérique.

### 7.3.3.2 Liens entre cycle saisonnier de $CO_2$ et d'eau

Les conditions thermodynamiques de température et de pression influencent fortement la stabilité de l'eau liquide en surface (246; 144). La section 7.3.2 expose les implications du cycle saisonnier de  $CO_2$  dans l'histoire atmosphérique martienne : effet de serre et pression.

La mise en correspondance des sections 7.3.2 et 7.3.3.1 met en évidence une interaction possible entre les dépôts saisonniers de glace d'eau et de  $CO_2$ . La persistance estivale du  $CO_2$  au sommet de la calotte sud isole partiellement le glacier d'eau sous-jacent de l'atmosphère qui, par conséquent, est plus sèche en été qu'au Nord.

Un autre mécanisme d'interaction entre les cycles de l'eau et du  $CO_2$  consiste en une recondensation sur un piège froid. Ce mécanisme, proposé théoriquement par plusieurs équipes (119; 252), consiste en une sublimation de la couronne de glace d'eau, suivie d'une recondensation à plus haute latitude, sur la glace de  $CO_2$  qui constitue un piège froid. Ce processus est suggéré par les données TES (297) et OMEGA (263) pour la calotte saisonnière nord. La modélisation du cycle de l'eau par GCM, proposée par Montmessin et al., incorporant les nuages, montre que ce processus, qui implique des ondes baroclines, pourrait bien avoir lieu sur Mars (217). De plus, cette étude montre que le bilan global annuel d'eau sur la calotte est quasiment équilibré. Le piège froid permet de conserver dans la région polaire la quasi globalité de la masse d'eau sublimée durant l'été.

En ce qui concerne la calotte saisonnière sud, le dépôt printanier de glace d'eau prédit par le GCM, incluant le cycle de l'eau de Montmessin et al., se fait préférentiellement à l'est du bassin d'Hellas, au niveau de la région cryptique, à cause de l'injection de masses d'air relativement humides (84). Les observations OMEGA confirment bien la présence de glace d'eau à la surface dans cette région (172). Cependant, le modèle GCM prédit une accumulation tardive (après  $Ls=240^\circ$ ) qui est en contradiction avec les observations OMEGA. Aussi, le fonctionnement d'un piège froid est moins évident au Sud, probablement car l'abondance en eau y est moindre.

Un dernier exemple de processus d'interaction pourrait être un effet de couverture du permafrost martien et des minéraux hydratés (par adsorption notamment) de surface par le  $CO_2$ . L'adsorption de l'eau en surface pourrait être un mécanisme majeur du cycle de l'eau (30). Si tel est le cas, le recouvrement du sol par une calotte saisonnière de  $CO_2$  limiterait les échanges entre le réservoir atmosphérique et la surface.

D'autres interactions sont possibles (par exemple d'ordre microphysique lors de la condensation dans l'atmosphère ou au sol) et des avancées sont attendues à la fois d'ordre observationnel, expérimental et théorique .

### 7.3.3.3 Implications géologiques

Actuellement, il existe d'autres types de terrains riches en glace d'eau à part les calottes permanentes. Les cycles de glace d'eau et de  $CO_2$  interagissent fortement, il est tout à fait raisonnable de penser que le cycle saisonnier martien ait eu un rôle non négligeable dans l'origine ou l'évolution de ces terrains glacés, au cours des temps géologiques. Trois unités majeures pourraient être impliquées : les dépôts stratifiés polaires, le permafrost et les glaciers.

**Dépôts stratifiés polaires** Les dépôts stratifiés polaires ("Polar Layered Deposits" ou PLD en anglais) ont été observés pour la première fois par Mariner 7 (268). Les observations de Mariner 9 (224) ont

permis d'identifier des alternances de bancs sombres et clairs, c'est à dire des stratifications visibles sur certaines falaises. Dès cette première observation, les PLD ont été interprétés comme une archive géologique du climat passé, enregistrant notamment les changements climatiques liés à la variation des paramètres orbitaux sous forme de variation du contenu en poussière des couches de glace. Cette hypothèse est corroborée par un haut niveau de corrélation entre la signature d'albédo en fonction de l'altitude et l'insolation polaire en été en fonction du temps (178).

L'arrivée de l'imagerie à très haute résolution ( $\sim 30$  cm) (76) et des radars sur Mars (243) va certainement bouleverser les idées à propos des terrains stratifiés polaires.

**7.3.3.3.1 Permafrost** Le permafrost ou "mantle terrain" a été détecté grâce aux détecteurs à neutron et gamma (74; 32; 215) aux latitudes plus hautes que  $60^\circ$  dans les deux hémisphères. Ces zones sont notamment sujettes à des figures géomorphologiques particulières : les terrains polygonaux qui signent une forte abondance d'eau dans le sous-sol (206; 205). Trois théories s'affrontent actuellement sur l'origine de ce permafrost de haute latitude :

(i) La formation du permafrost se fait par diffusion d'eau vapeur depuis la surface vers les profondeurs, même à l'heure actuelle (5).

(ii) Le permafrost est constitué lors d'une période à faible obliquité. Lorsque toute la glace est présente près des pôles et l'obliquité est faible, les dépôts de glace s'accumulent préférentiellement dans les deux hémisphères à latitude plus haute que  $60^\circ$  (188).

(iii) La dernière alternative consiste en une formation aux conditions orbitales actuelles mais avec une abondance d'eau plus importante dans l'atmosphère (135). Cette situation est possible notamment si la couche permanente de glace de  $\text{CO}_2$  au Sud est absente (voir section 7.3.3.1). Ce modèle prédit qu'actuellement cette couche serait instable.

**Glaciers "tropicaux"** Un faisceau d'indices géomorphologiques laisse présager que de la glace a été présente, voire est encore présente actuellement à moyenne et haute latitude sous forme de glaciers (112). La formation de ces glaciers est probablement due à un dépôt de glace à haute obliquité (i.e.  $45^\circ$ ) ce qui est possible pour Mars car la planète n'a pas de Lune massive qui la stabilise, contrairement à la Terre). Le lien, entre une forte obliquité et la formation des glaciers tropicaux, est conforté par une étude de Forget et al. qui montre que le dépôt de glace d'eau, dans cette situation, est localisé dans deux régions : à l'est des volcans de Tharsis et au Nord du bassin d'Hellas (80). Ces deux régions comportent justement des traces de glaciers.

Des études préliminaires de la même équipe montrent que les années martiennes relativement chargées en poussière, permettent à la neige de s'accumuler préférentiellement aux latitudes moyennes nord, régions pour lesquelles d'autres traces de glaciers ont été suggérées (198).

## 7.4 Conclusion

La compréhension du phénomène climatique saisonnier martien a permis de le modéliser par un processus de condensation/sublimation quatre observables majeures : la progression et la récession de la surface couverte de dépôts saisonniers, le signal saisonnier de pression au sol mesuré par Viking, l'occurrence de la précipitation de particules fines de glace  $\text{CO}_2$  (*point froid*) et la quantité de masse impliquée dans le cycle saisonnier. Aussi, quelques incomplétudes et limitations sont toujours présentes dans notre appréhension du cycle saisonnier martien.

En résumé, les incomplétudes/limitations majeures actuelles des modèles du cycle saisonnier sont (notons IL1 à IL4) :

1. Hormis pour les *points froids*, les GCM appliquent l'hypothèse d'un albédo et d'une émissivité uniformes sur toute la calotte saisonnière et constants dans le temps, contrairement à ce qu'indiquent les observations, au moins pour la région cryptique au Sud (voir chapitre 7.3.1.1).

2. Les modèles ne rendent pas compte du détail de la couverture spatiale des dépôts saisonniers, notamment de l'asymétrie de la récession de la calotte saisonnière sud (voir chapitre 7.3.1.1).
3. Les observations montrent qu'il existe une calotte permanente de CO<sub>2</sub> au Sud alors que les GCM n'expliquent pas ce fait (voir chapitre 7.3.2).
4. Les observations montrent que la calotte saisonnière sud est très appauvrie en glace d'eau par rapport au Nord. Notamment après  $L_s=240^\circ$ , la glace d'eau est absente (172). Or, les GCM prédisent une stabilité de la glace plus longue dans la région polaire sud (voir chapitre 7.3.3).

Les GCM sont toujours perfectibles afin de reproduire les phénomènes physiques de façon plus précise et complète. La résolution spatiale est clairement contrainte par la puissance des machines. Comme les ordinateurs sont de plus en plus rapides, il est toujours possible de diminuer le pas d'échantillonnage spatial pour reproduire la réalité plus finement.

En résumé, les améliorations possibles de la description et de la modélisation du cycle saisonnier sont (notons A1 à A4) :

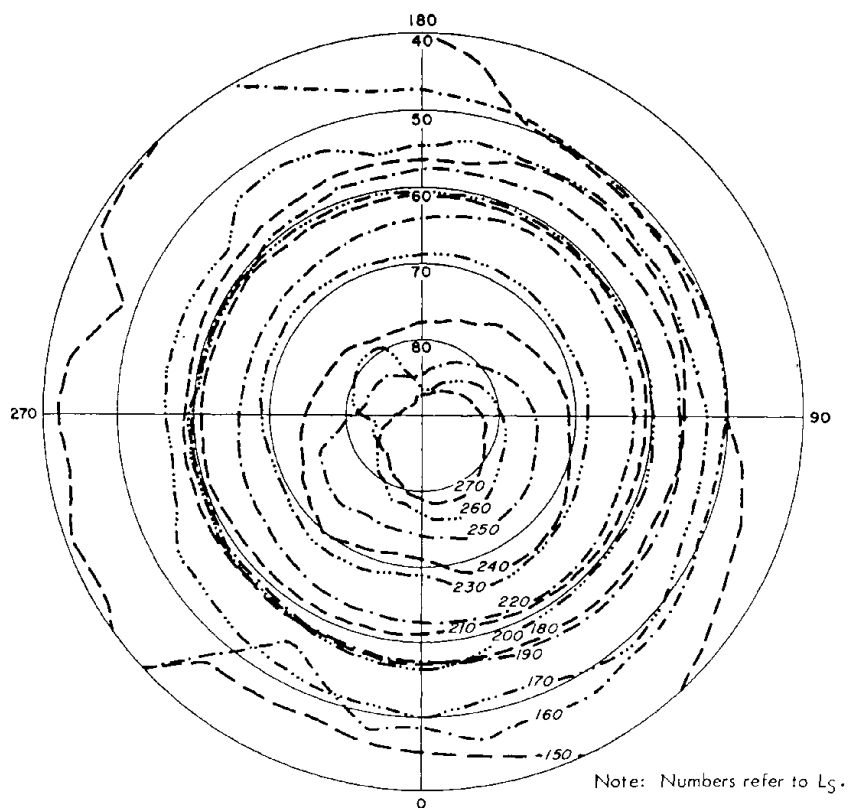
1. Meilleure description des effets de pentes locales. Le but de cette première amélioration est d'estimer le bilan de masse de dépôt saisonnier à haute résolution spatiale (voir chapitre 7.2.1.1 et 7.2.1.2).
2. Plus grande résolution spatiale des GCM, meilleure description des effets dynamiques aux échelles subgrilles (189). Ce point permettra de connaître les vents à l'échelle locale pour une prédiction des effets d'érosion mécanique, de précipitation (voir section 7.2.1.1) et de redistribution (voir section 7.2.1.2) de la neige (et de la poussière) par les vents .
3. Meilleure description microphysique des interactions dans l'atmosphère entre eau, poussière et CO<sub>2</sub> (189). Cette étape est nécessaire afin d'améliorer la compréhension de la condensation dans l'atmosphère, de prédire les modes et les lieux de condensation préférentiels avec plus de précision (voir section 7.3.3).
4. Meilleure description microphysique des processus au sol. Plusieurs phénomènes physiques entrent en jeu dans cette amélioration :
  - (a) au niveau de la calotte saisonnière : reconcondensation, métamorphisme, nettoyage et geysers. Ce point est nécessaire pour comprendre les processus de condensation/sublimation à petite échelle (voir chapitre 7.3.1.2).
  - (b) au niveau de la zone déglacée : adsorption d'eau avec les minéraux, diffusion dans le sol. Ce point est nécessaire pour établir le lien entre les réservoirs d'eau majeurs (dépôts stratifiés polaires, permafrost et glaciers) et les dépôts saisonniers (voir chapitre 7.3.3).

Le travail de ma thèse, développé au chapitre suivant, est concentré sur la phase de récession de la calotte saisonnière sud, observée par OMEGA. Je montre que la résolution des IL1 et IL2 ci-dessus sont liées. L'asymétrie de la récession de la calotte sud est entièrement due à un effet d'albédo en cohérence avec les observations. Ces deux incomplétudes ne remettent donc pas en question le paradigme de condensation/sublimation.

Je m'attaque aussi au point IL2 associé au point A1 d'amélioration du modèle : l'estimation du bilan de masse à haute résolution spatiale, en utilisant notamment une description fine des effets de pentes, afin d'étudier la zone couverte de dépôts saisonniers à haute résolution spatiale. Utilisant ce modèle amélioré et les observations OMEGA, je montre que les effets de pentes et d'altitude à haute résolution sont négligeables devant l'effet d'albédo. Ainsi, la modélisation à plus grande résolution spatiale doit préférentiellement s'attaquer aux points A2, A3 et A4 (a), pour rendre compte plus précisément de la couverture spatiale de la calotte saisonnière .

Ces points peuvent être améliorés en utilisant des informations issues de l'instrument OMEGA, notamment d'ordre spectroscopique. Des analyses fines du mélange des corps à la surface (représentation de surface), de leurs paramètres physiques (rugosité, taille de grains, abondance, épaisseur) permettront de contraindre la microphysique de la calotte saisonnière. Ces analyses pourront être effectuées notamment grâce aux méthodes développées au cours de cette thèse et exposées en première partie de ce manuscrit.

## Calotte saisonnière à haute résolution spatiale



Récession de la calotte saisonnière sud observée depuis la Terre entre 1905 et 1965. Chaque cercle est une *ligne crocus* à une date notée en °L<sub>S</sub> (d'après (75) repris dans (302)). Les longitudes sont notées en degrés croissants vers l'Ouest.

Ce chapitre traite de la phase de récession des calottes saisonnières martiennes, un phénomène dominé par le bilan d'énergie radiative à la surface (voir section 7.2.1 page 129). Plus particulièrement, mon travail s'est concentré sur la glace de CO<sub>2</sub> formant la calotte saisonnière sud. Cet hémisphère sud est relativement pauvre en eau (voir section 7.3.3 page 145), ce qui permet de se concentrer sur les processus impliquant uniquement la glace de CO<sub>2</sub>.

Cette étude propose de déterminer l'importance relative des principaux paramètres qui contrôlent le bilan de masse en mettant en correspondance un modèle et des observations. Deux échelles spatiales sont considérées : l'échelle régionale (la calotte dans son ensemble) et l'échelle locale (portions de surface de 10° de large en longitude et 0,3° en latitude). Les résultats exposés dans ce chapitre font l'objet d'un article disponible en annexe 15 page 223.

La première section présente la récession à l'échelle régionale, c'est à dire son asymétrie (voir section 8.1). La section suivante se concentre sur la récession à l'échelle locale (voir section 8.2).

## 8.1 Asymétrie de la récession de la calotte saisonnière sud à l'échelle régionale

La récession de la calotte saisonnière n'est pas symétrique autour du pôle géographique sud (voir section 7.3.1 page 138). Cette asymétrie peut être créée soit en phase d'accumulation à l'automne et en hiver, soit en phase d'ablation au printemps et en été. Nous allons montrer que la solution de l'asymétrie en phase de récession est la plus probable.

### 8.1.1 Observations OMEGA

Nous avons sélectionné toutes les observations de l'instrument OMEGA à bord de Mars Express (ESA) couvrant la récession sud. Différents critères de sélection des images OMEGA ont été utilisés :

- Détection de signatures de glace au sol, en utilisant la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77).
- Exception du mode d'observation UNK (Unknown).
- Observation entre  $L_s=110^\circ$  et  $320^\circ$  (*longitude subsolaire*) dans l'hémisphère sud.

La combinaison de tous ces critères permet de sélectionner 605 observations entre le début de l'année 2005 et le milieu de l'année 2006.

Les figures 8.1 à 8.4 montrent les angles de détection générés par la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Les observations sont regroupées par tranche de °L<sub>s</sub>, sous forme de mosaïques colorées, de telle manière à réaliser un compromis entre couverture spatiale et résolution temporelle.

L'analyse de ces mosaïques montre que la glace d'eau est présente sur de larges portions de la calotte saisonnière sud jusqu'à  $L_s=220^\circ$ . Entre cette date et  $L_s=248^\circ$ , il ne reste que quelques endroits où persistent la glace d'eau, très probablement au sol. A partir de  $L_s=248^\circ$  et jusqu'à la fin de la récession, aucune trace de glace d'eau est détectée. Les premières analyses de cette récession montrent que la majeure partie de la glace d'eau détectée avant  $L_s=220^\circ$  résulte très probablement de nuages atmosphériques (172) (voir section 7.3.3 page 145).

La plus grande partie de la récession de la calotte saisonnière sud ne fait donc intervenir que la glace de CO<sub>2</sub> dont nous allons étudier le bilan de masse.

Considérons séparément le secteur cryptique, entre les longitudes 60°E et 260°E, et le secteur anti-cryptique complémentaire, entre les longitudes 100°W et 60°E. Une discussion plus approfondie sur la région cryptique et les phénomènes associés est proposée à la section 7.3.1.2 page 139.

Afin de quantifier l'asymétrie de la récession, il est possible de déterminer l'évolution de la *ligne crocus* typique pour ces deux secteurs (voir 7.2.2.1 page 133). La figure 8.5 permet d'évaluer la date crocus (date de passage de la ligne crocus) pour quatre latitudes représentatives (55°S, 65°S, 75°S et 85°S), pour chacun des deux secteurs de référence. Les dates commencent à diverger à partir de  $L_s=220^\circ$  lorsque la ligne crocus atteint environ 65°S : l'asymétrie de récession de la calotte saisonnière est confirmée par OMEGA.

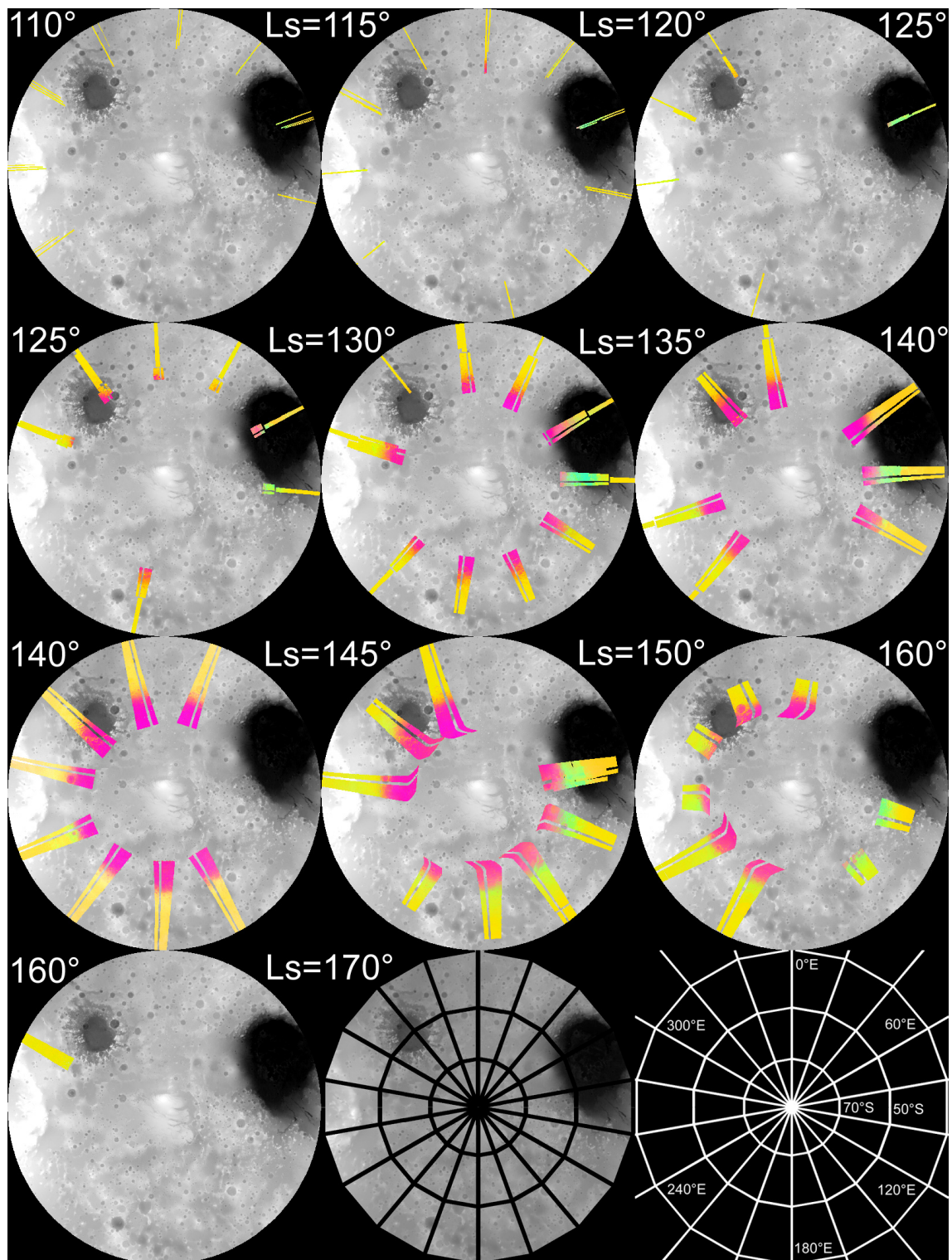


FIG. 8.1 – Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre  $L_s=110^\circ$  et  $L_s=170^\circ$ , observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Les canaux RVB correspondent respectivement aux angles de glace d'eau, de glace de  $\text{CO}_2$  et de poussière. La couleur rouge/rose résultante correspond à la glace de  $\text{CO}_2$ , la couleur bleu/verte correspond à la glace d'eau et la couleur jaune correspond à la poussière. Le fond en noir et blanc est la topographie MOLA, représentée seule sur l'avant dernière planche. La dernière planche représente la grille en latitude et longitude avec un pas de  $20^\circ$ .



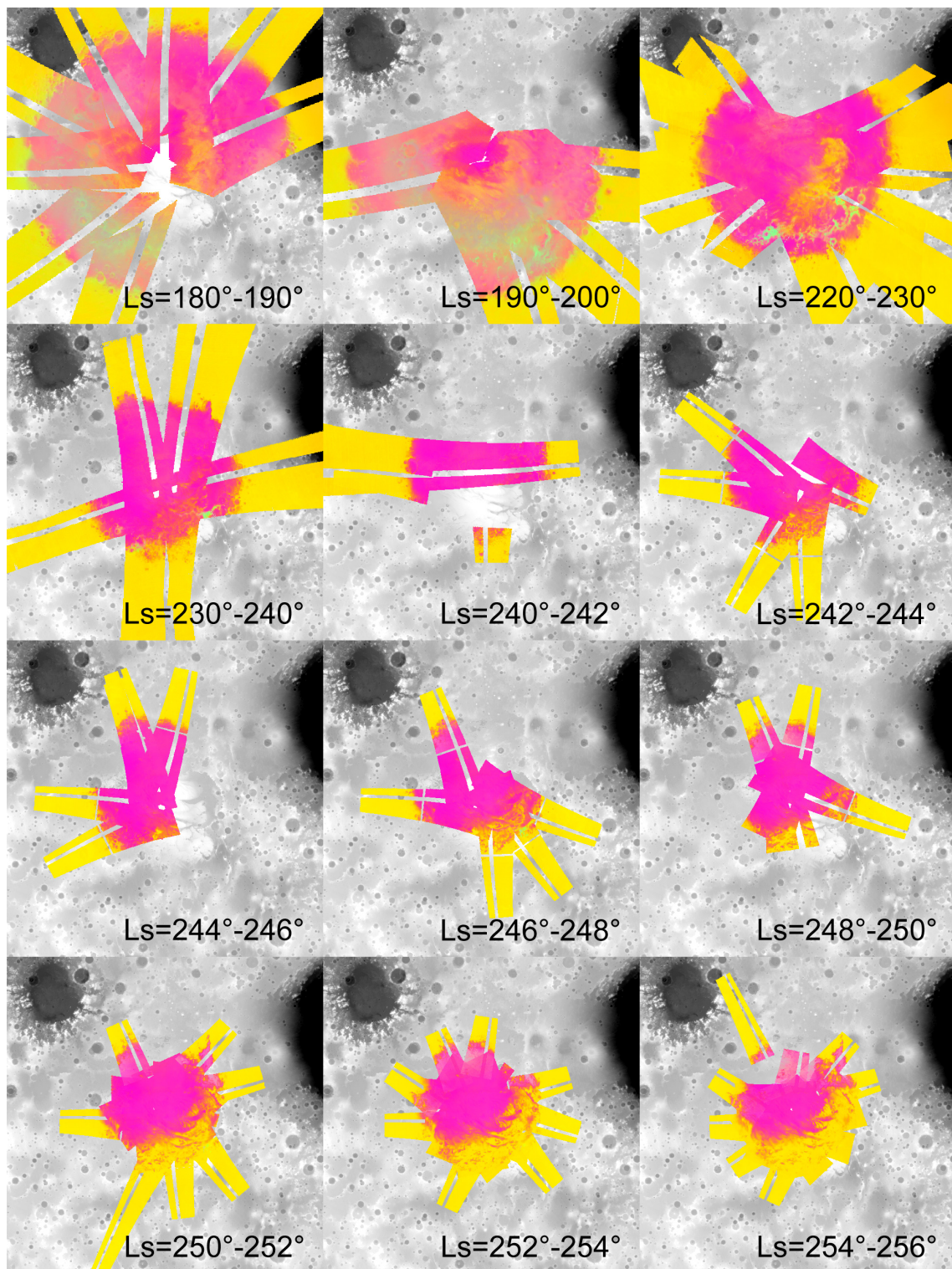


FIG. 8.2 – Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre  $Ls=180^\circ$  et  $Ls=256^\circ$ , observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt (voir échelle sur la figure 8.4).



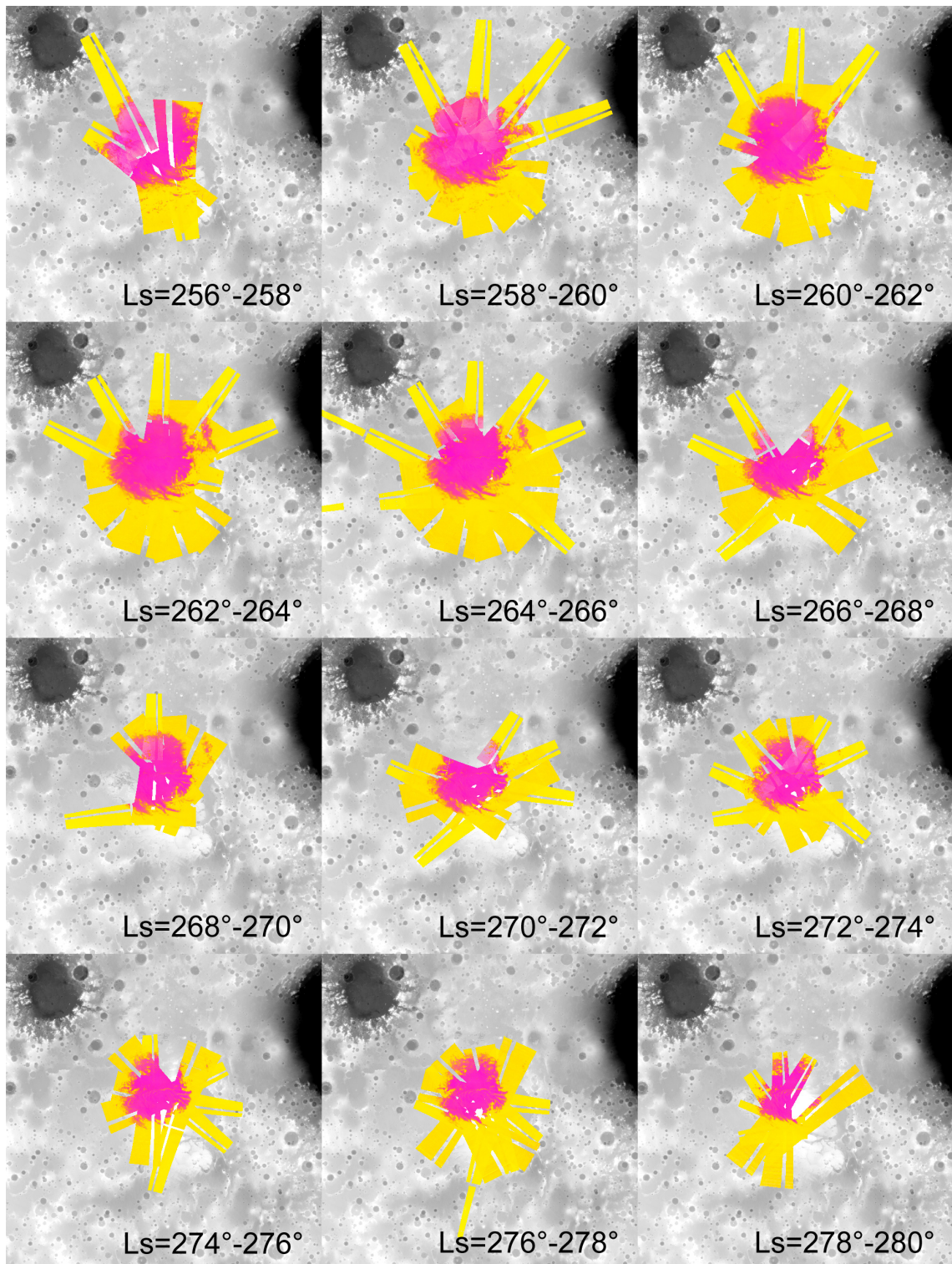


FIG. 8.3 – Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre Ls=256° et Ls=280°, observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt (voir échelle sur la figure 8.4).



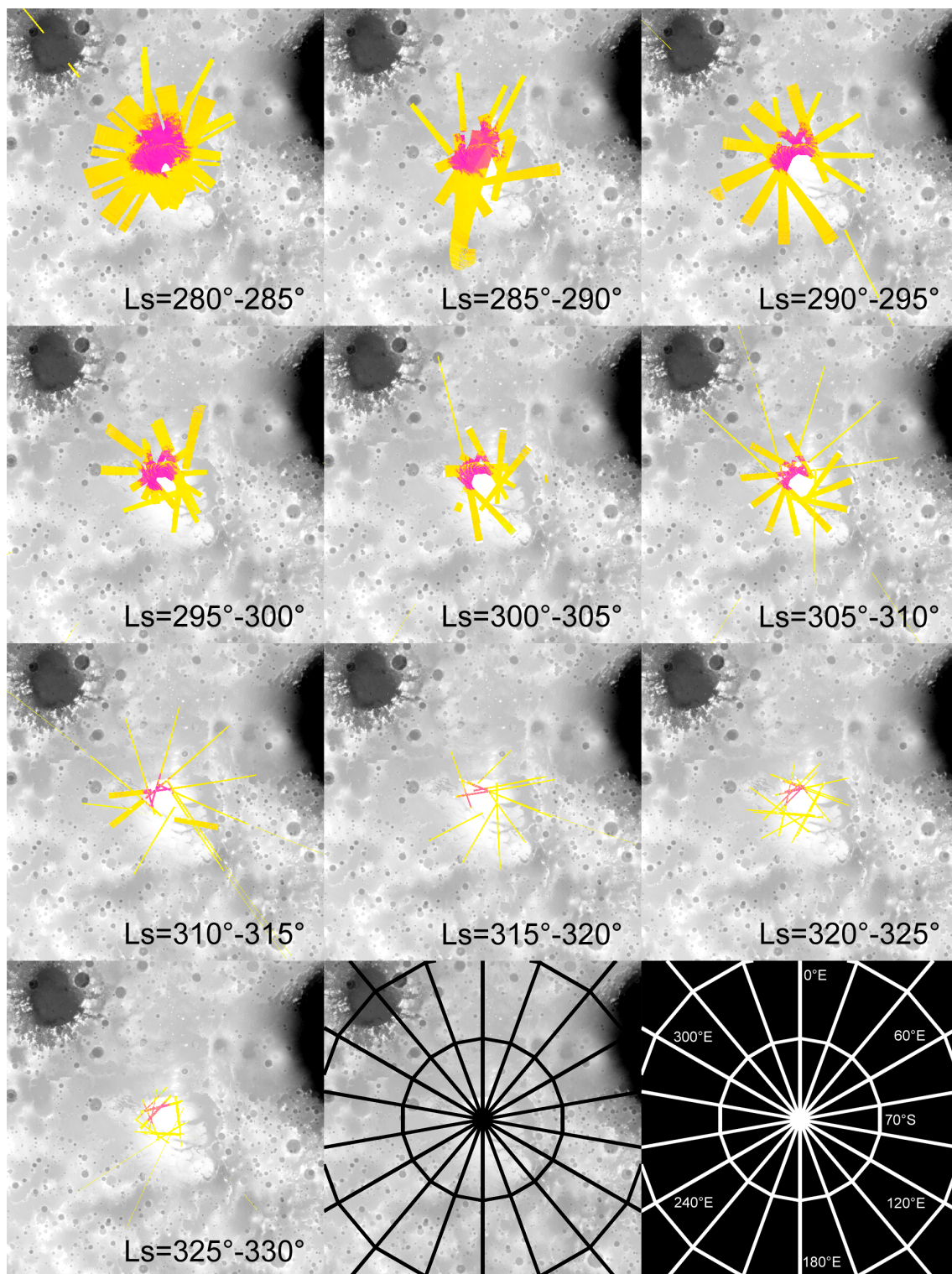


FIG. 8.4 – Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre  $L_s=280^\circ$  et  $L_s=330^\circ$ , observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt. Le fond en noir et blanc est la topographie MOLA, représentée seule sur l'avant dernière planche. La dernière planche représente la grille en latitude et longitude avec un pas de  $20^\circ$ .

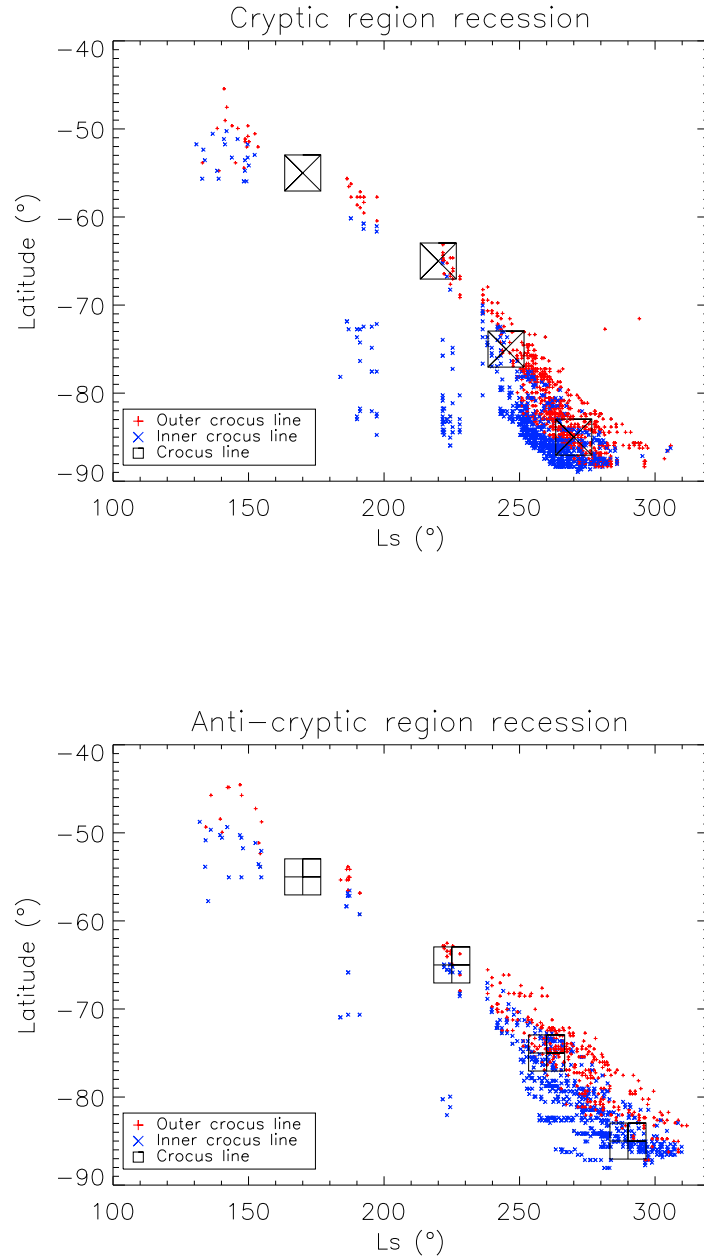


FIG. 8.5 – Caractérisation de l'asymétrie de la récession des dépôts de CO<sub>2</sub> au Sud. Détermination de l'évolution de la ligne crocus au cours du temps pour le secteur cryptique et le secteur anticryptique. Les lignes crocus interne et externe sont définies à la section 8.2.1 page 163. Les points de la lignes crocus interne du secteur cryptique, anormalement proche du pôle sud, entre Ls=180° et Ls=230°, sont dus à des absences de détection de glace de CO<sub>2</sub>. Il s'agit très probablement d'une couverture de la glace de CO<sub>2</sub> par une couche optiquement épaisse de régolithe (voir section 7.3.1.2 page 139). Ces points peuvent être ignorés.

### 8.1.2 Asymétrie d'accumulation et/ou de sublimation à l'échelle régionale ?

L'asymétrie de la ligne crocus est accompagnée d'une asymétrie en albédo, due notamment aux particularités du secteur cryptique (voir section 7.3.1.2 page 139). Son albédo plus faible entraîne une plus forte absorption d'énergie à la surface et donc une sublimation plus importante (voir section 7.2.1.2 page 131). La récession est donc plus rapide dans le secteur cryptique plus absorbant.

Il n'existe pas d'évidence d'une asymétrie en phase de *progression* (voir article en annexe 15 page 223), nous supposons par conséquent, une accumulation symétrique. La masse des dépôts saisonniers, en fonction de la latitude et du temps, a été déterminée à l'aide de mesures de flux de neutron par les instruments HEND (191) et GRS (146) (voir section 7.2.2.4 page 137). Nous supposons alors que la masse totale de CO<sub>2</sub> accumulée est simplement la masse maximale de CO<sub>2</sub> mesurée par HEND et GRS.

Nous allons montrer que l'asymétrie d'albédo, en phase de récession, explique quantitativement la différence de comportement de récession entre les secteurs cryptique et anticryptique.

### 8.1.3 Modèle de sublimation

Nous avons utilisé un modèle de sublimation, adapté de Aharonson et al. (5) qui permet d'évaluer la masse de CO<sub>2</sub> sublimée sur une *facette* par le bilan d'énergie au sol (voir section 7.2.1.2 page 131). Une facette est un élément de surface du modèle. Plus de détails sur cette modélisation sont disponibles dans l'article (voir annexe 15 page 223).

La formulation de ce bilan pour une facette est :

$$\frac{\partial M_{CO_2}}{\partial t} = (F_{therm}^{out} - W_{sun}^{in} - W_{scat}^{in} - W_{IR}^{in} - W_{floor}^{in} - F_{cond}^{in}) \frac{1}{L_{CO_2}} \quad (8.1)$$

Avec les quantités notées  $W$  qui sont des moyennes intégrées sur la journée.

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q dL \quad (8.2)$$

Tous les paramètres utilisés dans cette modélisation sont exposés à la section 8.1.3.1 page ci-contre. Les quantités directionnelles (albédo, facteur d'absorption et émissivité) sont supposées constantes pour toutes les géométries (voir section 1.3.1 page 22). Cette hypothèse s'écrit de la façon suivante dans le visible :

$$A_{dh,vis}(\theta_i, \Phi_i) = A_{vis} = const \quad (8.3)$$

et dans l'infrarouge :

$$A_{dh,IR}(\theta_i, \Phi_i) = A_{IR} = 1 - \varepsilon = const \quad (8.4)$$

Détaillons maintenant chacun des termes du bilan :

– Le premier terme correspond à la perte par émission thermique :

$$F_{therm}^{out} = \varepsilon \sigma T_{surf}^4 \quad (8.5)$$

La température de surface  $T_{surf}$  est déterminée en supposant que la glace de CO<sub>2</sub> est en équilibre thermodynamique avec le gaz de CO<sub>2</sub> atmosphérique à la pression  $P_{surf} = P_s(T_{surf})$ , pression de vapeur saturante. Nous avons utilisé la pression de surface estimée par un GCM qui fournit le champ de pression au sol en fonction de l'espace et du temps (exprimé en longitude solaire : °Ls) (82). Ce GCM tient compte à la fois de l'altitude et du cycle annuel de pression (voir section 7.2.2.2 page 135)

Nous utilisons une courbe de pression de saturation du CO<sub>2</sub> exprimée sous forme empirique paramétrée  $P_s(T)$ , proposée par Brown et Ziegler (33), afin de convertir  $P_{surf}$  en température  $T_{surf}$ .

– Le second terme correspond au gain par insolation directe :

$$Q_{sun}^{in} = \frac{S_{sun}}{r_{sun}^2} (1 - A_{vis}) (1 - f)^{1/\max((\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}), 0.04)} (\vec{n}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}) \quad (8.6)$$

L'effet d'atténuation atmosphérique est paramétré en fonction d'un unique paramètre  $f$ . Cette paramétrisation a été utilisée dans différents travaux de modélisations (151; 5).

- Le troisième terme correspond au gain par réception du flux indirect des photons diffusés dans l'atmosphère :

$$Q_{scat} = \frac{S_{sun}}{r_{sun}^2} (1 - A_{vis}) \frac{1}{2} f_{scat} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (8.7)$$

Nous considérons que le flux indirect est une fraction  $f_{scat}$  du flux solaire direct pris au sommet de l'atmosphère. Cette paramétrisation a été utilisée dans plusieurs travaux de modélisations (151; 5).

- Le quatrième terme correspond au gain par réception du flux infrarouge provenant de l'atmosphère :

$$Q_{IR} = \frac{S_{sun}}{r_{sun}^2} (1 - A_{IR}) f_{IR} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) (\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun})_{noon} \quad (8.8)$$

Nous supposons que ce flux est une fraction  $f_{IR}$  du flux solaire directe pris au sommet de l'atmosphère, à midi local. Le terme  $Q_{IR}$  est supposé comme constant pour la journée (phases diurne et nocturne). Cette paramétrisation a été proposée dans la modélisation de Kieffer et al. (151), avec  $f_{IR} = 0,02$ . Cette fraction a été discutée par Haberle et al. (102) qui proposent plutôt une valeur de  $f_{IR} = 0,04$ . Cette valeur corrigée a été incorporée dans les modélisations de Aharonson et al. (5).

- Le cinquième terme correspond au flux infrarouge émis par les facettes environnantes et réceptionné par la facette courante :

$$Q_{floor} = \varepsilon \sigma T^4 (1 - A_{IR}) \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (8.9)$$

Cette paramétrisation a été utilisée pour d'autres modélisations dans la littérature (151; 5).

- Le sixième terme  $F_{cond}^{in}$  correspond au flux géothermique conduit dans le sous-sol.

Nous le discutons plus en détails au cours de la section 8.1.3.2 page suivante.

### 8.1.3.1 Paramètres

Les paramètres du modèle sont listés ci-après. Certains paramètres peuvent varier pour chaque facette. L'unité est notée entre crochet ; "1" signifie sans unité.

$R = 3\,386\,200$  [m] : rayon de la planète

$(x, y)$  [m] : coordonnées sur la carte, dans le système cartographique choisi

$(L, \phi)$  [radian] : longitude (croissante vers l'est de 0 à  $2\pi$ ), latitude (de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$ )

$\gamma$  [1] : pente locale

$Q_{sun}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] : puissance instantanée absorbée par le sol provenant de l'insolation directe

$Q_{scat}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] : puissance instantanée absorbée par le sol provenant du flux indirect des photons diffusés par l'atmosphère

$Q_{IR}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] : puissance instantanée absorbée par le sol provenant du flux thermique de l'atmosphère

$Q_{floor}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] : puissance instantanée absorbée par le sol provenant des facettes voisines

$\vec{r}_{surf}(L, \phi)$  : rayon vecteur d'un point de la surface

$\vec{r}_{sun}(\alpha, \delta)$  : rayon vecteur de la direction solaire

$\vec{n}_{surf}(L_n, \phi_n)$  : rayon vecteur de la normale à la surface

$\Pi_{L_{min}}^{L_{max}}(L)$  : fonction porte

$r_{sun}$  [m] : distance entre Mars et le Soleil. Elle est estimée à J2000, en utilisant les mesures des éphémérides par Pathfinder (9).

$S_{sun} = 589$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] : constante solaire à la distance moyenne de la planète Mars ( $\langle r_{sun} \rangle$ )

$A_{vis}$  [1] : albédo de la facette dans le domaine visible

$A_{IR}$  [1] : albédo de la facette dans le domaine infrarouge thermique. Cette quantité est reliée à l'émissivité  $A_{IR} = 1 - \varepsilon$  (305).

$f = 0,06$  : fraction de la puissance solaire directe atténuée par l'atmosphère  $f \simeq f_{scat} + f_{IR}$

$f_{scat} = 0,02$  [1] : fraction de la puissance solaire directe diffusée par l'atmosphère

$f_{IR} = 0,04$  [1] : fraction équivalente de puissance solaire directe absorbée à midi, et réémission de façon constante durant la journée

$\varepsilon$  [1] : émissivité thermique de la facette (voir  $A_{IR}$ )

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  [W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-4</sup>] : constante de Stefan Boltzmann

$T$  [K] : température des facettes voisines. Nous supposons qu'elle est identique à celle de la facette en question.

$L_{CO_2} = 590 \cdot 10^3$  [J.kg<sup>-1</sup>] : chaleur latente de sublimation du CO<sub>2</sub>

$M_{CO_2}$  [kg.m<sup>-2</sup>] : masse de CO<sub>2</sub> sublimée par unité de surface

$t$  [s] : temps

### 8.1.3.2 Conduction d'énergie dans le sous-sol

Nous allons montrer par des tests numériques que ce terme est négligeable dans la phase de récession de la calotte saisonnière.

La chaleur d'origine solaire absorbée pendant la période estivale par le sol se propage par conduction dans le sous sol. Chaque niveau de la subsurface qui absorbe cette chaleur se comporte aussi comme une source. Nous avons utilisé le modèle 1D de condensation/sublimation en surface associée à la conduction de chaleur, développé par Forget et al. (82), pour estimer la quantité d'énergie qui revient vers la surface pendant l'automne et l'hiver.

Le modèle de condensation/sublimation de glace de CO<sub>2</sub> est basé sur le bilan d'énergie radiative au sol (voir section 7.2.1 page 129).

Le modèle de conduction de chaleur est basé sur une résolution numérique de l'équation de Fourier. Il suppose la subsurface comme homogène, sous forme de onze couches horizontales superposées.

Les paramètres du sol nu sont les suivants : albédo  $A_{vis} = 0,29$  et émissivité de  $\varepsilon = 0,99$  (4). Les paramètres de la glace de CO<sub>2</sub> sont identiques à ceux utilisés dans la modélisation ci-après. La puissance conduite par la subsurface est estimée pour deux situations extrêmes d'inertie thermique : un régolithe à  $20 \text{ J.m}^{-2}.\text{s}^{-1/2}.\text{K}^{-1}$  et  $1000 \text{ J.m}^{-2}.\text{s}^{-1/2}.\text{K}^{-1}$ . La valeur minimale correspond à un régolithe tandis que la valeur maximale correspond à un sol rocheux ou un sol granulaire riche en glace d'eau (l'inertie thermique de la glace d'eau est de  $2000 \text{ J.m}^{-2}.\text{s}^{-1/2}.\text{K}^{-1}$ ). Ce domaine de variation est suggéré par les inerties thermiques apparentes estimées par TES (250).

Le gradient de température, entre les deux couches les plus superficielles, est converti en flux de chaleur remontant puis en masse de CO<sub>2</sub> sublimée. La figure 8.6 représente cette puissance provenant du sous-sol (comptée négativement lorsqu'elle est un gain d'énergie en surface, impliquant une perte de masse de CO<sub>2</sub>).

Cette puissance est négative, sauf lorsque le sol n'est pas recouvert de glace de CO<sub>2</sub>. Dans cette situation, une partie de l'énergie disponible en surface est conduite vers la profondeur. En été (vers  $L_s=200^\circ$ ), la transition entre ces deux régimes, à la fin de la récession, est brutale car la puissance solaire directe est forte.

L'intégration de cette puissance sur la période de récession (toujours négative) est effectuée entre la date de maximum d'accumulation issue des observations HEND et GRS, et la date où le dépôt de CO<sub>2</sub> s'est entièrement sublimé. Les résultats sont représentés dans le tableau 8.1 pour le secteur cryptique et dans le tableau 8.2 pour le secteur anticryptique. Les bornes temporelles de l'intégration sont aussi explicitées dans ce tableau.

Au maximum, sur toute la période de récession, seulement 6% de la masse totale sublimée est due à l'onde de chaleur ce qui correspond à un décalage temporel de la ligne crocus de moins de 2°Ls. En comparaison, la ligne crocus est décalée de quelques 20°Ls à la latitude 85° entre les secteurs cryptique et anticryptique.

Alors qu'elle a un effet significatif en phase de progression, l'onde de chaleur annuelle influence peu la phase de récession, nous allons donc la négliger dans la suite de l'étude.

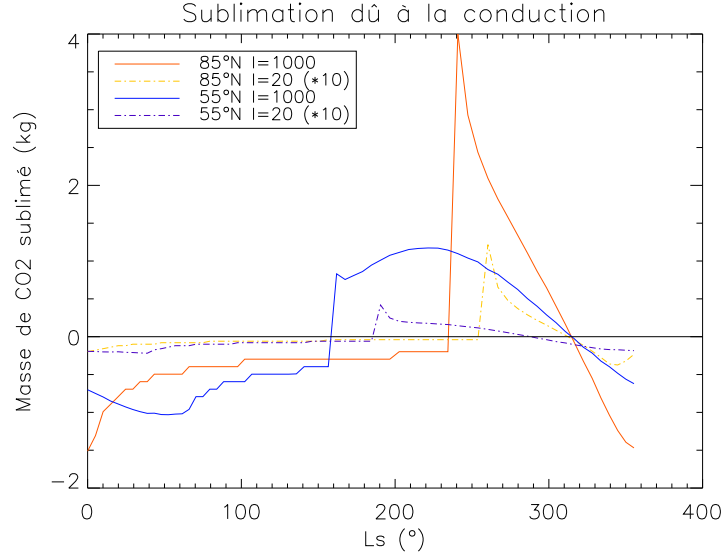


FIG. 8.6 – Conduction de chaleur dans le sous-sol en fonction du temps pour les latitudes 85°S et 55°S. La puissance est exprimée en équivalent de masse de CO<sub>2</sub> sublimée par jour et par m<sup>2</sup>. Les traits pleins, (respect. en pointillés) correspondent à des inerties thermiques de 1000 J.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1/2</sup>.K<sup>-1</sup> (respect. de 20 J.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1/2</sup>.K<sup>-1</sup>).

### 8.1.4 Résultats

Afin de tester quantitativement si l'asymétrie de la récession est due à l'asymétrie d'albédo, nous allons calculer les masses sublimées pour deux scénarii d'évolution temporelle d'albédo : les secteurs cryptique et anticryptique.

Nous proposons une loi empirique qui permet de reproduire l'évolution de l'albédo des dépôts de CO<sub>2</sub> au cours du temps. Supposons que le champ d'albédo  $A_{vis}$  soit uniquement fonction du temps (exprimé en  $Ls$ ) et du secteur cryptique/anticryptique  $A_{vis}(L, \phi, Ls) = A_{vis}(L', Ls)$ . La dépendance en latitude est donc éliminée.

Cette loi est déduite des observations de réflectance de la glace de CO<sub>2</sub>, mesurées par OMEGA dans le continuum à 1,07 microns, moyennant deux hypothèses : (i) les surfaces sont lambertiennes ; (ii) le continuum est représentatif de la valeur intégrée sur le spectre solaire. Cette deuxième hypothèse est correcte car le spectre de la glace de CO<sub>2</sub> est constitué de raies fines, d'absorption négligeable sur la quantité intégrée. Dans ce cas, l'albédo peut s'écrire de la façon suivante :

$$A_{vis} = \mathbf{R}(1,07\mu m) \quad (8.10)$$

Les points de la figure 8.7 représentent les albédos moyennés en latitude issus d'OMEGA.

Cette loi est la suivante pour le secteur cryptique :

$$A_{vis}(Ls) = \min \left( 0.35 + \frac{0.15}{60}(Ls - 175), 0.5 \right) \quad (8.11)$$

Pour le secteur anticryptique :

$$A_{vis}(Ls) = \min \left( 0.40 + \frac{0.22}{50}(Ls - 180), 0.63 \right) \quad (8.12)$$

Les lignes en pointillés de la figure 8.7 représentent cette loi, pour les deux secteurs. Notre loi empirique reproduit bien les albédos issus des observations pour chacun des deux secteurs.

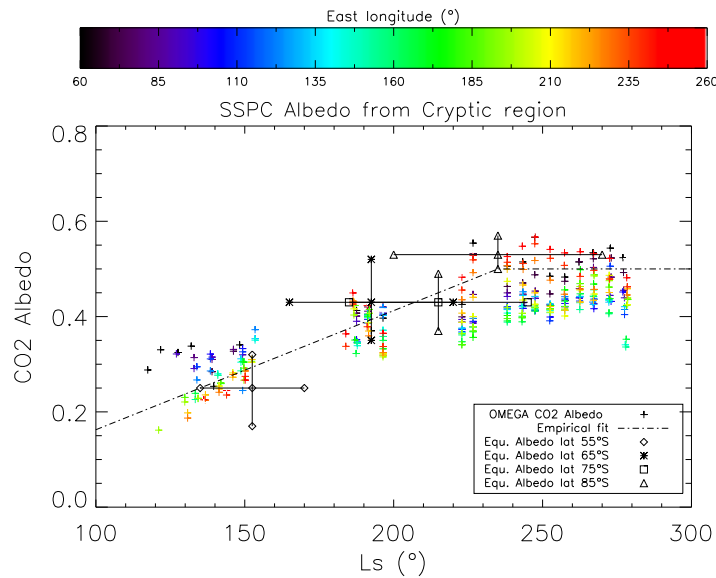
Latitude	55°S	65°S	75°S	85°S
Masse (HEND+GRS) [kg.m <sup>-2</sup> ]	180±40	450±80	750±100	1050±100
Temps de phase de récession (HEND+GRS) [°Ls]	140/ -	160/ -	170/ -	180/ -
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée estimée par le modèle [kg.m <sup>-2</sup> ]	154	482	687	1193
Bornes temporelles d'intégration [°Ls]	135/170	165/220	185/245	195/270
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée due à l'onde de chaleur (I=20) [kg.m <sup>-2</sup> ]	0,5	0,5	0,6	0,6
Bornes temporelles d'intégration (I=20) [°Ls]	140/185	160/235	170/260	180/280
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée due à l'onde de chaleur (I=1000) [kg.m <sup>-2</sup> ]	12	24	29	21
Bornes temporelles d'intégration (I=1000) [°Ls]	140/155	160/210	170/235	180/250

TAB. 8.1 – Tableau récapitulatif du bilan de masse sublimée lors de la récession de la calotte saisonnière sud dans le secteur cryptique. Les deux premières lignes correspondent aux mesures de HEND/GRS. Les deux lignes suivantes sont les estimations des masses de CO<sub>2</sub> sublimées en supposant la loi empirique d'augmentation de l'albédo. Les quatre dernières lignes correspondent à la contribution de l'onde de chaleur annuelle (section 8.1.3.2).

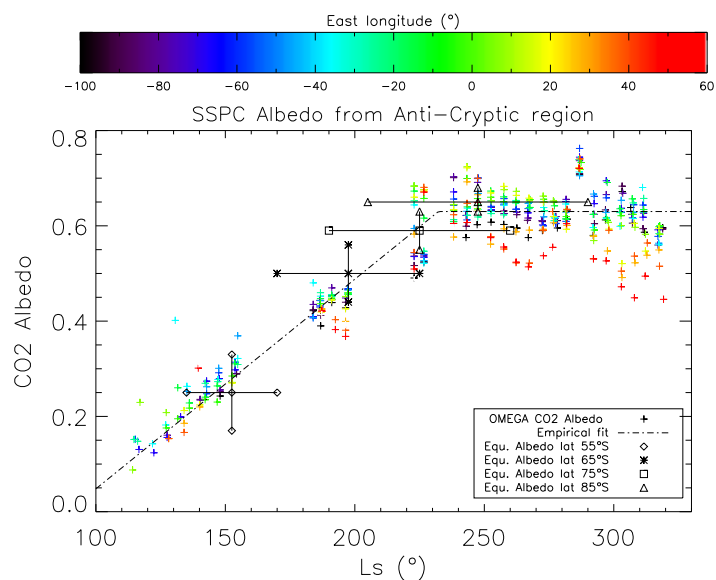
De plus, la variabilité des points de mesure autour de la loi empirique est relativement faible, validant l'hypothèse du moyennage en latitude.

Nous calculons les masses de CO<sub>2</sub> sublimées entre la date de maximum d'accumulation et le passage de la ligne crocus, à l'aide de notre modèle. Le modèle utilisé est décrit à la section 8.1.3. Nous supposons la surface parfaitement horizontale (pente nulle  $\gamma = 0$ ). L'émissivité de  $\varepsilon = 0,99$  (et l'albédo infrarouge  $A_{IR} = 0,01$  en conséquence) est choisie par excès afin d'estimer la masse sublimée maximale. Les autres paramètres utilisés sont décrits à la section 8.1.3.1 page 157. Les calculs sont effectués pour quatre facettes aux latitudes 55°S, 65°S, 75°S et 85°S et pour les deux secteurs (cryptique et anticryptique). Les résultats sont compilés dans le tableau 8.1 pour le secteur cryptique et le tableau 8.2 pour le secteur anticryptique.

Il existe un très bon accord entre les résultats de notre modèle alimenté par les données OMEGA, et d'autre part les mesures de masse HEND/GRS. Une seule exception notable : à 85°S dans le secteur cryptique. Cette différence ne semble pas significative mais elle pourrait néanmoins correspondre à un éventuel effet de mauvaise estimation d'albédo, voire de la non prise en compte d'une accumulation légèrement asymétrique.



(a) Région Cryptique



(b) Région anticryptique

FIG. 8.7 – Loi empirique d'évolution de l'albédo visible au cours du temps pour les secteurs cryptique et anticryptique. La ligne pointillée correspond à la loi empirique (voir eq. 8.11 et 8.12). Les points de couleurs correspondent aux albédos de CO<sub>2</sub> mesurés par OMEGA dans le continuum à 1,07 microns, et moyennés en latitude. Les albédos équivalents sont utilisés dans une argumentation disponible dans l'article (voir annexe 15 page 223).



Latitude	55°S	65°S	75°S	85°S
Masse (HEND+GRS) [kg.m <sup>-2</sup> ]	180±40	450±80	750±100	1050±100
Temps de phase de récession (HEND+GRS) [°Ls]	140/ -	160/ -	170/ -	180/ -
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée telle que calculée par le modèle [kg.m <sup>-2</sup> ]	159	449	743	947
Bornes temporelles d'intégration [°Ls]	135/170	165/225	185/260	205/290
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée due à l'onde de chaleur (I=20) [kg.m <sup>-2</sup> ]	0,5	0,6	0,7	0,5
Bornes temporelles d'intégration (I=20) [°Ls]	140/185	160/245	170/280	180/315
Masse de CO <sub>2</sub> sublimée due à l'onde de chaleur (I=1000) [kg.m <sup>-2</sup> ]	12	27	29	27
Bornes temporelles d'intégration (I=1000) [°Ls]	140/155	160/215	170/245	180/265

TAB. 8.2 – Tableau récapitulatif du bilan de masse sublimée lors de la récession de la calotte saisonnière sud dans le secteur anticyptique. Les deux premières lignes correspondent aux mesures de HEND/GRS. Les deux lignes suivantes sont les estimations des masses de CO<sub>2</sub> sublimées en supposant la loi empirique d'augmentation de l'albédo. Les quatre dernières lignes correspondent à la contribution de l'onde de chaleur annuelle (voir section 8.1.3.2).

### 8.1.5 Conclusion

A l'échelle régionale, dans le cadre fixé par les contraintes observationnelles apportées par OMEGA (passage de la ligne crocus et albédo à 1,07 microns) et par GRS/HEND (masse totale accumulée), il est possible de reproduire le bilan de sublimation pour deux secteurs différents (cryptique et anticryptique) et quatre latitudes. La seule hypothèse d'asymétrie effectuée est à propos de l'albédo :

L'albédo  $A_{vis}$  est supposé dépendant du temps et des secteurs cryptique ou anticryptique  $A_{vis}(L, \phi, Ls) = A_{vis}(L', Ls)$ . Une loi empirique d'augmentation d'albédo au cours du temps est utilisée, validée par les observations OMEGA.

Un modèle alternatif, étudié dans l'article (voir en annexe 15 page 223), utilise un albédo  $A_{vis}$  supposé dépendant de la latitude et du secteur cryptique/anticryptique mais indépendant du temps :  $A_{vis}(L, \phi, Ls) = A_{vis}(L', \phi)$ . Ce modèle alternatif est aussi correct mais il n'est pas retenu pour la suite car l'échantillonnage en latitude est très faible (quatre points seulement).

Un dernier modèle, celui d'un albédo homogène et invariable dans le temps  $A_{vis}(L, \phi, Ls) = A_{vis}$ , ne permet pas d'obtenir un résultat satisfaisant.

L'hypothèse d'estimation de l'albédo par la réflectance mesurée par OMEGA (voir équation 8.10) semble valable au premier ordre puisqu'il existe une certaine cohérence interne du modèle et des résultats. L'effet de moyenne sur la latitude permet peut-être de s'affranchir des effets directionnels, en moyennant indirectement sur l'angle d'incidence.

Les variations d'albédo des dépôts saisonniers à l'échelle globale sont très probablement dues au mode de dépôts (voir section 7.3.1.2 page 139). L'étude de Colaprete et al. montre que la précipitation de neige, qui produit des glaces au sol à grain relativement faible et d'albédo fort, a lieu préférentiellement dans le secteur anticryptique (51). A l'inverse, le secteur cryptique est moins sujet aux précipitations de neige, la glace transparente de faible albédo peut s'y développer plus aisément par condensation directe. De plus, la région cryptique est le siège du mécanisme de geysers ceux-ci enrichissant l'atmosphère en poussière qui précipitent localement et abaissent l'albédo.

## 8.2 Récession de la calotte saisonnière sud à l'échelle locale

En 1895, grâce à ses observations télescopiques, W.W. Campbell (39) s'intéresse au bord de la calotte saisonnière (voir perspectives historiques à la section 7.1 page 126).

“... the polar caps in waning do not preserve an exactly circular outline, and are not of equal intensity in all parts. The edges of the caps are sometimes exceedingly irregular, owing both to dark indentations and bright projections. Portions of the caps even become entirely detached, and remain as isolated bright points for several weeks. Moreover, dark regions and excessively bright regions within the caps are common facts of observation. It is certain that the melting of the caps is affected by local conditions ; and it is very important to know whether the local conditions at any point are such as to retard or accelerate the melting.”

### 8.2.1 Observations OMEGA de la bordure de la calotte saisonnière

Introduisons les observables caractérisant la zone recouverte de glace de  $\text{CO}_2$ . La *ligne crocus*, introduite par Kieffer et al. (153) (voir section 7.2.2.1 page 133), définit la position “moyenne” de la bordure de la calotte. Cependant, la bordure observée par les données OMEGA, est plutôt décrite par une zone de transition, mêlant des pixels avec détection de glace de  $\text{CO}_2$  et d'autres sans détection de glace (voir fig 8.2). Dès lors, une autre information paraît judicieuse : la taille caractéristique de la zone de transition.

Nous proposons de définir la *ligne crocus interne*, la *ligne crocus externe* et la *distance snowdrop* (“snowdrop” en anglais signifie perce-neige). Les lignes crocus interne et externe définissent la zone de transition à une certaine échelle de mesure. La distance snowdrop est simplement la distance entre ces deux lignes, le long d'un méridien (voir figure 8.8).

De façon plus précise, définissons ces objets pour les données OMEGA. Pour ce faire, découpons l'espace en une grille avec un pas de  $0,3^\circ$  en latitude et  $10^\circ$  en longitude. Un *profil méridien* est un profil

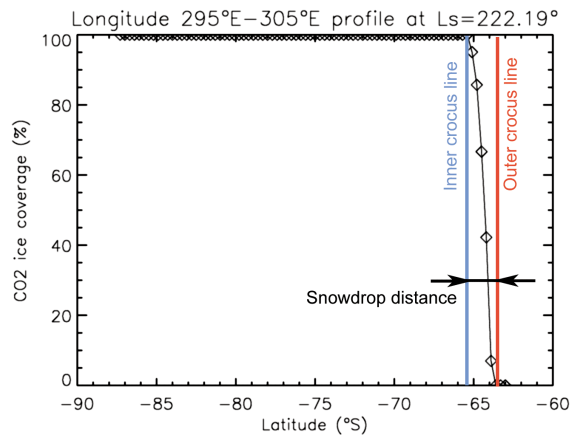


FIG. 8.8 – Description de la zone de transition par la distance snowdrop, définie entre la ligne crocus interne et la ligne crocus externe. Ces observables sont définies sur un *profil méridien* de la fraction de surface couverte de glace de CO<sub>2</sub>.

le long d'un méridien, c'est à dire une succession d'éléments de la grille à longitude constante. Pour chaque image OMEGA et pour chaque profil, nous posons les critères de définition suivants :

- ligne crocus externe : l'élément de la grille contenant une proportion de surface couverte de CO<sub>2</sub> supérieure à 1%, la plus proche de l'équateur. Il s'agit ici d'un *mélange géographique résolu* (voir section 1.4.1.1 page 31).
- ligne crocus interne : l'élément de la grille contenant une proportion de surface couverte de CO<sub>2</sub> inférieure à 99%, la plus proche du pôle. Il s'agit toujours d'un *mélange géographique résolu*.
- pour les lignes crocus interne et externe : l'élément de la grille est valide uniquement s'il ne contient pas de bord d'image ou de zone corrompue, mais également si son plus proche voisin ne contient pas de bord d'image ou de zone corrompue. Ces exceptions permettent de prévenir les biais de détections.

Le phénomène de récession intervient à la fois dans l'espace et dans le temps. Il est donc possible de définir des *dates crocus interne et externe* ainsi qu'un *temps snowdrop* pour un point précis à la surface. Ces quantités correspondent aux dates de passages des *lignes crocus interne et externe* en ce point.

Les observations OMEGA, analysées par la méthode Wavanglet, montrent que le temps snowdrop varie de 1 à 40°Ls, en fonction de la longitude et de la latitude atteinte par la bordure de la calotte. Ces variations peuvent être dues à des effets locaux, soit en phase d'accumulation, soit en phase de sublimation.

### 8.2.2 Variabilité d'accumulation et/ou de sublimation à l'échelle locale ?

Plusieurs effets à l'échelle locale peuvent être évoqués à propos du bilan de masse de la glace de CO<sub>2</sub> : l'accumulation, l'onde de chaleur annuelle, l'altitude, les effets des pentes et d'ombres portées, l'albédo et l'émissivité dans l'infra-rouge, l'albédo visible.

Actuellement, l'accumulation n'est pas mesurable à haute résolution spatiale. Les simulations à l'aide de modèles GCM, ne permettent pas non plus d'accéder à l'accumulation aux échelles en question. Ce paramètre ne peut donc pas être testé dans le cadre de cette thèse.

Une étude de sensibilité permet de montrer quantitativement que les effets d'onde de chaleur annuelle, d'altitude, d'émissivité et d'albédo infrarouge n'expliquent pas les variations du temps snowdrop jusqu'à 40°Ls (voir article disponible en annexe 15 page 223). Deux effets majeurs restent candidats potentiels : l'effet de la rugosité (pente et ombre portée) et l'effet d'albédo local.

L'importance relative de ces deux effets est difficile à établir quantitativement. La rugosité de surface intervient jusqu'aux échelles du libre parcours moyen optique mais aucune observation n'est disponible à une échelle inférieure à 100 m (résolution MOLA aux pôles). D'autre part, l'albédo hémisphérique de-

vrait être mesuré, pour tous les points de la surface et à tout instant. Deux impossibilités observationnelles qui nous imposent une étude statistique.

Les études statistiques sont effectuées sur un ensemble de *facettes* définies à partir d'un échantillonnage topographique MOLA à une résolution de 920 m (compatible avec la résolution d'OMEGA). Chaque facette est un élément de surface pour lequel il est possible de calculer la masse de CO<sub>2</sub>.

Chaque élément de la grille de 0,3° de latitude et 10° de longitude tel que défini pour la *distance snow-drop*, contient une population de facettes sur laquelle nous pouvons calculer des statistiques (voir section 8.2.1 page 163). Par exemple, la moyenne et la variance de la distribution des masses de CO<sub>2</sub> sublimées est estimée pour chaque élément de la grille.

Nous proposons d'évaluer l'importance relative de l'albédo (ou facteur d'absorption) et de la rugosité dans le processus de sublimation en déterminant la corrélation entre la largeur de leur distribution et le temps snowdrop. Il s'agit donc de tester la corrélation, dans l'espace et dans le temps, entre :

- le temps snowdrop observé par OMEGA. Ce paramètre est directement relié à la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée.
- la largeur de la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée, issue du modèle tenant compte de l'effet des pentes et des ombres (voir section suivante pour la modélisation) et des lois empiriques d'albédo pour les secteurs cryptique et anticryptique (voir section 8.1.3 page 156).
- la largeur de la distribution du facteur d'absorption  $1 - A_{vis}$  du CO<sub>2</sub>, observée par OMEGA. Cet indicateur n'est pas directement comparable avec une masse de CO<sub>2</sub> sublimée. Néanmoins, le facteur d'absorption est un facteur multiplicatif du terme d'insolation directe (voir équation 8.14). Ce terme est dominant dans le bilan radiatif en phase de sublimation (voir section 7.2.1.2 page 131). La largeur de la distribution du facteur d'absorption est donc reliée à la largeur de la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée.

Les résultats d'une telle étude sont présentés à la section 8.2.4.

### 8.2.3 Modèle de sublimation à l'échelle locale

L'effet de la pente  $\gamma$  est déjà décrit dans le modèle présenté à la section 8.1.3 page 156.

L'effet des ombres portées est plus complexe. Introduisons d'abord les différentes descriptions de la topographie, et décrivons ensuite sa modélisation. Puis, détaillons les implications sur le bilan d'énergie radiative.

#### 8.2.3.1 Hypsométrie

L'hypsométrie est l'étude des altitudes d'une planète dans le but de comprendre les mécanismes qui façonnent les surfaces planétaires. En Planétologie comparée, il s'agit de mettre à jour les différences entre les planètes (269). Sur Terre, l'hypsométrie permet de révéler l'impact de certains processus, par exemple la présence de vie sur la surface (58).

La topographie de la planète Mars est connue avec une précision verticale de 1m, depuis 1999, grâce à l'instrument MOLA à bord de MGS (278). On appelle "rugosité de surface", les variations d'altitude à une échelle fine.

Shepard et al. proposent une compilation de tous les indicateurs de rugosité qui peuvent être déterminés à partir de mesure de télédétection (273). Le plus souvent, ils découlent des pentes, c'est à dire de la dérivée de la topographie à une échelle spatiale donnée.

Par exemple, la rugosité peut être décrite comme une déviation à la moyenne des pentes, c'est à dire comme une variance (162; 7). Il existe une forte corrélation empirique entre cet indicateur et les estimations radar (6). Cependant, cet indicateur est pollué par la pente régionale à plus grande échelle. L'utilisation de l'indicateur de valeur médiane est plus robuste (163; 7), ou encore les interquartiles (7). Un autre indicateur peut être utilisé, la longueur de décorrélation qui est la largeur à mi-hauteur de la fonction d'autocorrélation de l'altitude pour une base spatiale donnée (7). Ou encore avec des fractales qui présentent l'avantage d'exprimer plusieurs échelles en même temps (voir l'annexe 12.6).

La modélisation de la rugosité peut se faire avec trois types de modèles (272) :

- déterministe : altitude mesurée.
- déterministe avec une distribution aléatoire des structures d'intérêt : par exemple des cratères de même forme, avec une distribution aléatoire de position et de taille.
- statistique : distributions d'altitude ou de pente, avec/sans autocorrélation.

La solution déterministe est très difficile à prendre en compte dans notre modèle de sublimation du CO<sub>2</sub> car elle est nécessairement associée à des algorithmes de types tracés de rayon qui sont très lents. Les modèles statistiques sont prometteurs mais se posent la question de leur validité, notamment pour les distributions fractales .

**La surface d'une planète est fractale** La surface d'une planète peut-être considérée comme ayant des propriétés statistiques proches d'une distribution fractale (260), voire multifractale (91). Il s'agit tout particulièrement d'une loi puissance à seuils. Cette loi est caractérisée par l'exposant de la décroissance, l'ordonnée à l'origine et les seuils hauts et bas correspondant aux échelles limites de l'étude (finitude de l'expérience, de la Nature).

L'estimation de ces paramètres n'est pas triviale. Il faut utiliser des estimateurs robustes non-biaisés (14). De plus, l'observation d'une loi puissance dans un phénomène naturel, ne montre pas forcément que la distribution est fractale (120).

De nombreuses études sur les lois d'échelles en géomorphologie ont été menées (60). L'utilisation des fractales et des lois d'échelles statistiques en topographie se font pour des processus particuliers touchant soit à un ensemble d'échelles réduites (érosion) soit à l'ensemble des échelles disponibles.

La première approche, touchant un ensemble d'échelles réduites, est déterministe et permet de suivre l'évolution d'une surface subissant des phénomènes particuliers. En revanche, il est quasiment impossible de rendre compte de la diversité d'une surface planétaire car les contextes sont multiples et tous complexes !

La seconde approche couvre une quantité incroyable de phénomènes. L'idée étant de réduire la complexité de la surface à un objet mathématique le plus simple possible. Dans le cas simple monofractal isotrope, il suffit d'un paramètre ! On passe à trois dans le cadre des multifractales universelles proposées par Schertzer et Lovejoy. Dans ce cadre, plusieurs modélisations sont possibles : multifractales et monofractales.

Gagnon et al. montrent que la distribution multifractale est un objet défini par seulement trois paramètres libres qui a une grande validité statistique (91). Ces auteurs mesurent par un indice de validité, que la reconstruction d'une topographie naturelle sur 6 ordres de grandeur est de  $\pm 45\%$  alors qu'une analyse monofractale simple a une validité de  $\pm 355\%$ . Cette approche montre que l'utilisation des multifractales anisotropes permet d'avoir un objet mathématique simple modélisant correctement la topographie, bien plus efficacement que l'approche monofractale usuelle.

De nombreuses études de la topographie terrestre supposent la monofractalité (123; 124; 57; 202). Concernant les surfaces planétaires, plusieurs travaux ont été effectués.

Des simulations numériques ont vu le jour, par exemple pour traiter le problème de l'ombrage des surfaces (272).

Également, des surfaces analogues matérielles ont été construites dans le cadre d'expériences en laboratoire (256).

Turcotte et al. ont réalisé une analyse qui utilise la transformée en ondelette de la topographie la calotte nord de Mars (199; 200).

D'autres analyses concernant la variance du périodogramme ont été menées (7) ou encore la loi puissance de la variance de la pente (93), ou encore sur la valeur médiane à une échelle donnée (5).

Sur Mars toujours, il manque des données à petite échelle. Des extrapolations des lois puissances ont été proposées (232) mais le biais et les processus ne permettent pas de faire ce pas (37). Cependant, certaines études utilisent cette approximation (5), car il est difficile d'avoir des données supplémentaires.

### 8.2.3.2 Fonction d'ombre

La théorie du transfert radiatif classique qui est utilisée pour le calcul de la réflectance bidirectionnelle des surfaces planétaires, ne prend pas en compte la rugosité. La fonction d'ombre est la fonction mathématique qui permet de corriger la réflectance "plate" pour tenir compte de la rugosité. Cette fonction détermine notamment la fraction de surface qui est ombragée, c'est à dire privée d'insolation directe, à cause de la topographie, surtout à petite échelle.

**Description de Hapke** La modélisation de Hapke propose pour tenir compte de l'effet de rugosité par l'ajout d'un "angle de rugosité". Cet angle modifie la réflectance de la surface de telle manière à la rendre équivalente à la réflectance prise pour une autre géométrie d'acquisition.

La réflectance avec un angle d'incidence  $\theta_i$ , d'émergence  $\theta_e$  et de rugosité  $\theta_r$  est équivalente à celle avec un angle d'incidence  $\theta_i$ , d'émergence  $\theta_e - \theta_r$ , modulé par un facteur  $S(\theta_i, \theta_r, g, \Xi)$ , calculable analytiquement d'après la théorie de Hapke (voir section 1.3.4.2 page 29).

Cette modélisation, qui a l'avantage d'être analytique, ne détermine pas d'échelle de mesure de l'angle de rugosité. Or, d'après le paragraphe précédent, la pente dépend fortement de l'échelle considérée.

Efford et al. montrent que le paramètre d'angle de rugosité  $\theta_r$  est une fonction croissante de la dimension fractale (68).

**Description fractale** Shepard et Campbell proposent une fonction empirique d'ombrage qui dépend de l'exposant de Hurst  $H$  (voir annexe 12.6 page 216) et de la pente moyenne à la plus petite échelle (272). Cette fonction, noté  $\Psi$ , a été calibrée sur des études numériques par tracé de rayon sur des surfaces fractales. Cette fonction a pour expression :

$$\Psi(\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}, H, \gamma) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^6 \frac{1}{2.3^{n-1}} \operatorname{erfc} \left( \frac{n^{1-H}}{\sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - (\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun})^2}}{(\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun})} \tan(\gamma)}} \right) \quad (8.13)$$

Nous avons choisi cette modélisation des effets de rugosité dans notre étude.

### 8.2.3.3 Modélisation du bilan d'énergie radiative

L'effet de l'ombrage est simplement une modification du modèle décrit à la section 8.1.3. Le terme du bilan d'énergie radiative le plus important, lors de la récession, est le flux solaire direct. Nous avons donc choisi d'appliquer la correction des ombres portées uniquement sur ce terme. L'équation 8.6 devient :

$$Q_{sun}^{in} = \frac{S_{sun}}{r_{sun}^2} (1 - A_{vis}) (1 - f)^{1/\max((\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}), 0.04)} (\vec{n}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}) \Psi(\vec{r}_{surf} \bullet \vec{r}_{sun}, H, \gamma) \quad (8.14)$$

L'exposant de Hurst est supposé constant pour la zone polaire sud de Mars et vaut  $H = 0,8$ . Cette approximation semble correcte d'après les estimations locales de  $H$  (5). De plus, l'exposant de Hurst moyen de Mars est  $H = 0,8$ .

## 8.2.4 Résultats

Afin de tester la validité des hypothèses de fonction d'ombre et d'albédo, il est nécessaire d'établir une argumentation statistique, exposée à la section 8.2.2 page 164. Définissons dans un premier temps l'indicateur statistique de largeur de la distribution, suivent les résultats.

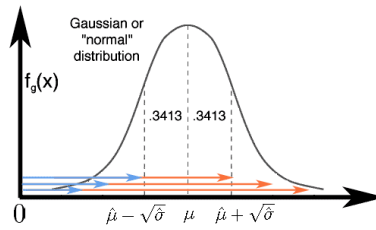


FIG. 8.9 – Illustration du rapport  $\hat{R}_{stat}$  qui définit les extrêmes de la distribution (voir texte).

$\hat{P}_{stat}$	0	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\hat{R}_{stat}$	1	1,02	1,22	1,5	1,86	2,33	3

TAB. 8.3 – Relation entre  $\hat{R}_{stat}$  et l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$

### 8.2.4.1 Indicateur statistique

Introduisons un indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  de la largeur de la distribution de la variable aléatoire  $X$ , ayant  $N$  occurrences, noté  $X_i$  tel que :

$$\hat{P}_{stat}(X) = \frac{\sqrt{\widehat{\mathcal{V}ar}(X)}}{\langle X \rangle} \quad (8.15)$$

Avec les estimateurs usuels de la moyenne et de la variance (voir annexe 12.4.4 page 212) :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (8.16)$$

$$\widehat{\mathcal{V}ar}(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \langle X \rangle)^2 \quad (8.17)$$

L'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}(X)$  décrit l'importance des ailes de la distribution de  $X$ . Supposons que  $X$  soit gaussien, 16 % de la population doit être dans le domaine extrême bas  $[-\infty, \hat{\mu} - \sqrt{\hat{\sigma}}]$ , tandis que 16 % doit être dans le domaine extrême haut  $[\hat{\mu} + \sqrt{\hat{\sigma}}, \infty]$ . Le rapport de la valeur de  $X$ , d'un point de la population extrême basse, divisée par la valeur d'un point de la population extrême haute est nécessairement plus grand que  $\hat{R}_{stat}$ . Le rapport  $\hat{R}_{stat}$  est défini par :

$$\hat{R}_{stat} = \frac{\hat{\mu} + \sqrt{\hat{\sigma}}}{\hat{\mu} - \sqrt{\hat{\sigma}}} = \frac{1 + \hat{P}_{stat}}{1 - \hat{P}_{stat}} \quad (8.18)$$

Ce rapport  $\hat{R}_{stat}$  définit la largeur de la distribution. La figure 8.9 illustre ce rapport entre les occurrences rouges ( $> \hat{\mu} + \sqrt{\hat{\sigma}}$ ) et les bleues ( $< \hat{\mu} - \sqrt{\hat{\sigma}}$ ).

Il existe une relation entre  $\hat{R}_{stat}$  et l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . La correspondance est indiquée dans le tableau 8.3.

Pour bien comprendre cette relation, considérons toujours le cas gaussien. Rappelons qu'une *facette* est un élément de la grille pour lequel il est possible de calculer la masse de  $\text{CO}_2$  sublimée.

Supposons une situation où l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ , de la distribution de masse de  $\text{CO}_2$  sublimée sur un ensemble de facettes, est de 0,4. Dans ce cas, 16% des facettes ont une masse de  $\text{CO}_2$  sublimée  $> \hat{\mu} + \sqrt{\hat{\sigma}}$  et 16% de facettes ont une masse de  $\text{CO}_2$  sublimée  $< \hat{\mu} - \sqrt{\hat{\sigma}}$ . Il existe donc un facteur  $> 2,33$  entre la masse sublimée de ces deux populations extrêmes de facettes. Si l'accumulation est homogène, 16% de la population va avoir un temps de sublimation moitié moindre que le temps de sublimation des 16 autres % de facettes extrêmes. Cette situation schématique ne tient pas compte des effets de l'émission thermique des voisins déjà déglacés (voir équation 8.9)

### 8.2.4.2 Effet d'ombre à albédo homogène

Cette section présente les résultats du modèle de sublimation, tenant compte des effets d'ombrage (voir section 8.2.3.3 page 167). La masse de CO<sub>2</sub> sublimée est estimée au cours du temps (pas de 5°Ls) pour toutes les facettes des données MOLA en projection cartographique à une échelle de 920 m. Le champ d'albédo dans le visible  $A_{vis}(L, \phi, Ls) = A_{vis}(L', Ls)$  est contraint par les équations empiriques 8.11 et 8.12 (voir section 8.1.4 page 159). Les champs d'émissivité et d'albédo infrarouge sont supposés homogènes et constants ( $\epsilon(L, \phi, Ls) = 0,99$  et  $A_{IR}(L, \phi, Ls) = 0,01$  en conséquence). Ces paramètres d'entrée ont permis de reproduire l'asymétrie de la récession à l'échelle régionale (voir section 8.1.4 page 159).

Les résultats sont exprimés dans un graphique, montrant l'évolution temporelle (avec un pas de 5°Ls) d'un profil méridien. Il existe 36 profils méridiens définis avec un pas de 10° (voir figure 8.10 à 8.15).

Il est possible d'estimer le temps snowdrop dans ce graphique. Il s'agit, à une latitude donnée, du temps entre la date crocus interne et externe.

La largeur de la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée est représentée grâce au code de couleur : blanc pour une distribution homogène, bleu foncé pour une distribution large.

Ces graphiques montrent que la corrélation entre la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée et le temps snowdrop est relativement mauvaise.

Par exemple, sur le profil entre les longitudes 320°E et 330°E (voir figure 8.15), la largeur de la distribution a un minimum local vers 79° de latitude qui est anticorrélée avec un temps snowdrop très large.

### 8.2.4.3 Effet d'albédo

De la même manière que pour tester les effets d'ombres (voir la section précédente), nous représentons chaque profil méridien au cours du temps. Les figures 8.16 à 8.21 représentent la largeur  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  de la distribution du facteur d'absorption  $1 - A_{vis}$ , évaluée à partir de la réflectance, mesurée par OMEGA dans le continuum à 1,07 microns. (voir équation 8.10).

Ce paramètre est représenté grâce à un code de couleur. Il implique une largeur de distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée au sol (voir section 8.2.2).

Il existe donc 36 graphiques, pour les profils méridiens espacés régulièrement en longitude tous les 10°.

Ces graphiques montrent que la corrélation entre la distribution de masse de CO<sub>2</sub> sublimée et le temps snowdrop est relativement correcte.

Par exemple, sur le profil entre les longitudes 320°E et 330°E, la largeur de la distribution de  $1 - A_{vis}$  a un maximum local vers 79° de latitude qui est corrélé avec un temps snowdrop très large pour ce point (voir figure 8.21). Il est intéressant de noter que la distribution de  $1 - A_{vis}$  est large, dès la date 220°Ls. Ainsi, pendant environ 80 jours (40°Ls), la distribution d'albédo du CO<sub>2</sub> est large malgré une couverture de CO<sub>2</sub> dans plus de 99% de la surface.



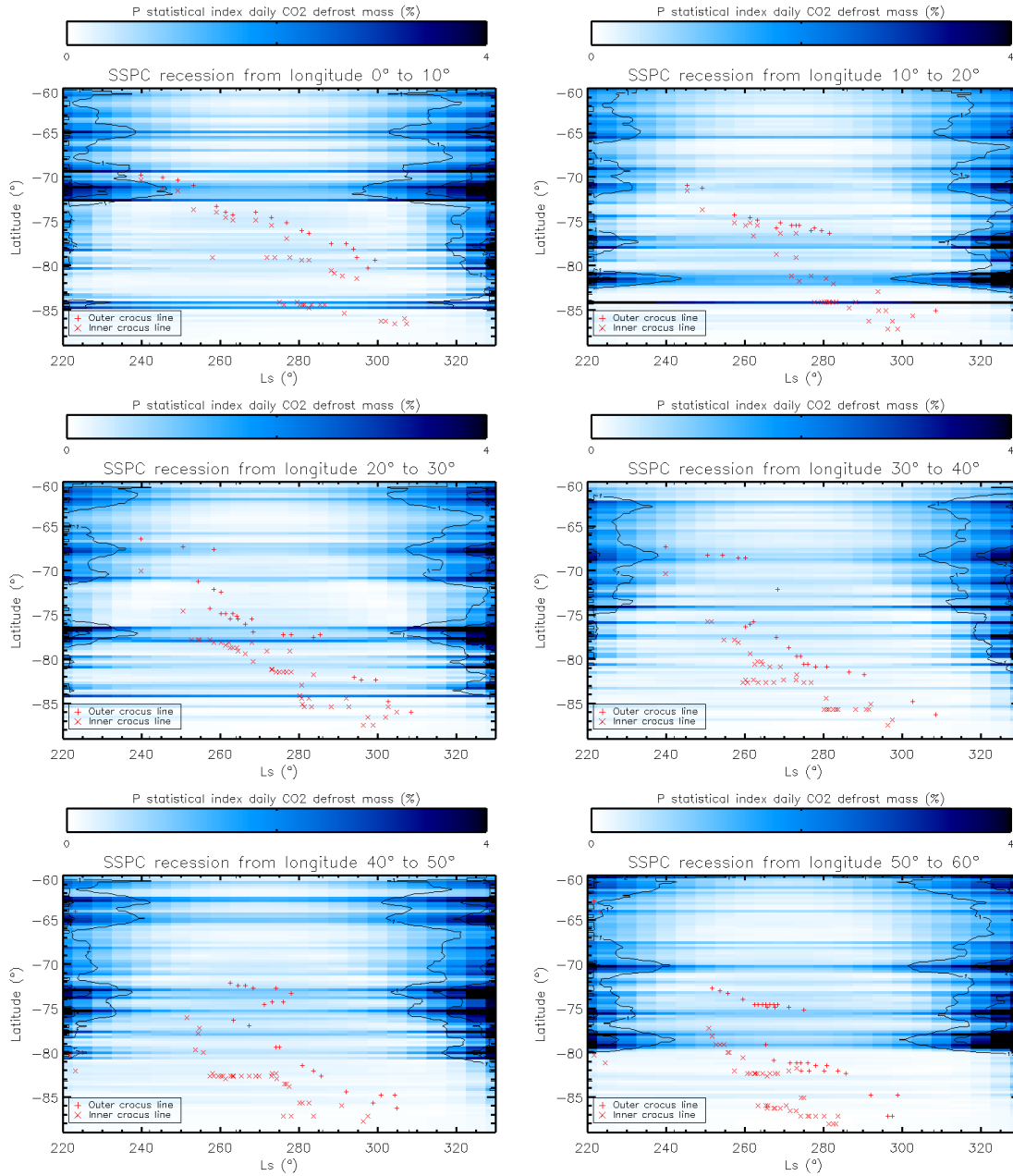


FIG. 8.10 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 0°E et 60°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

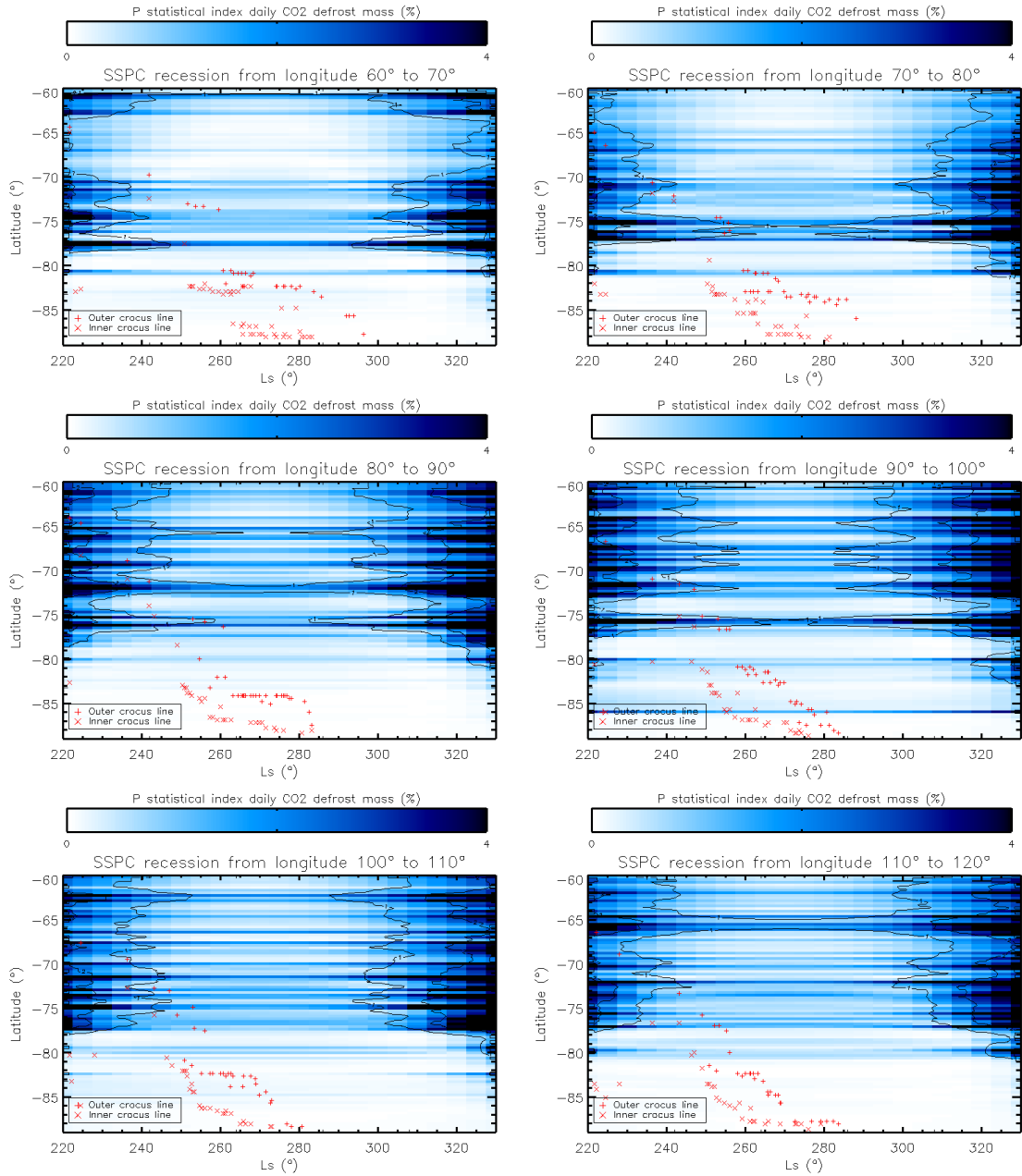


FIG. 8.11 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 60°E et 120°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

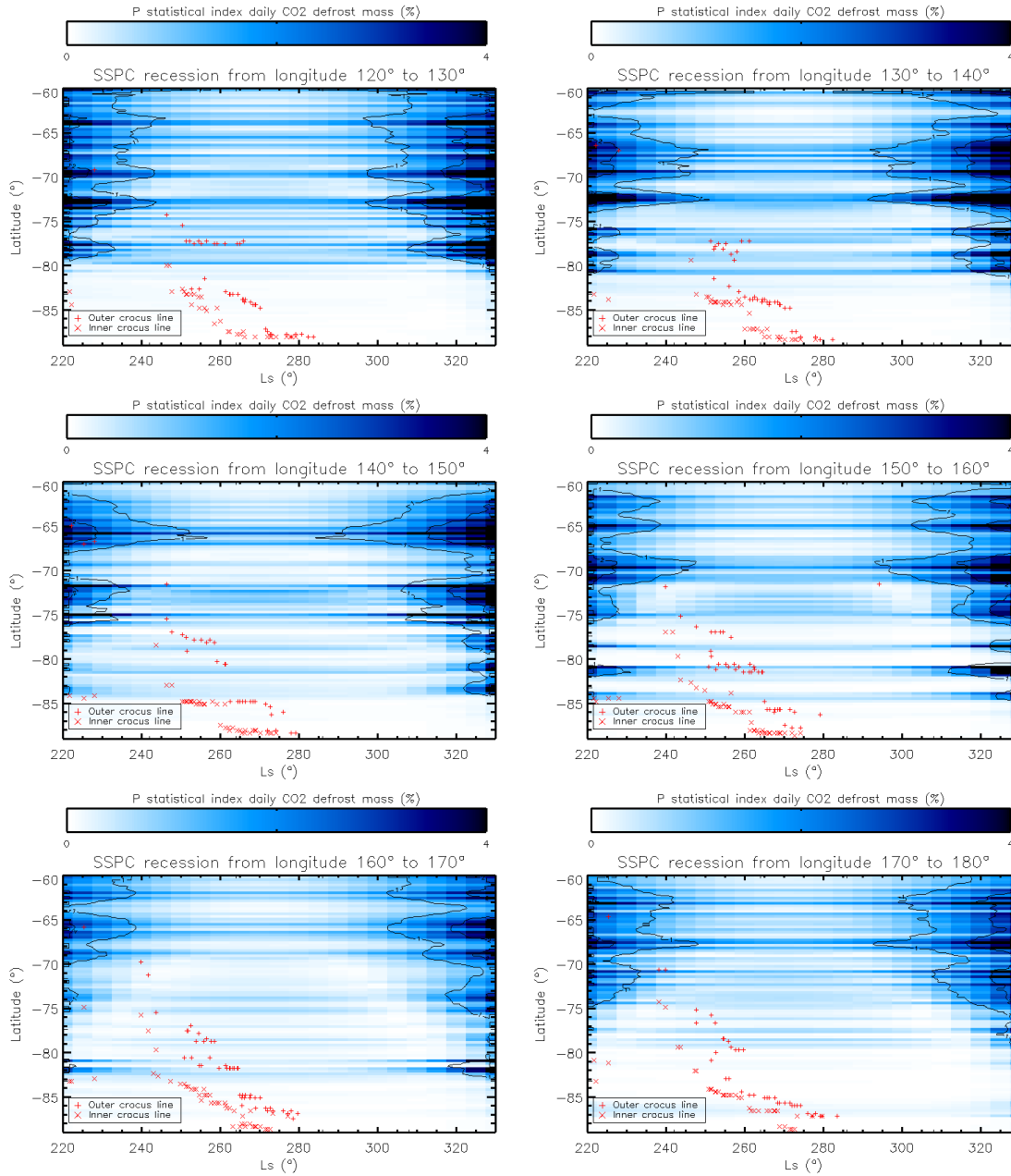


FIG. 8.12 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 120°E et 180°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

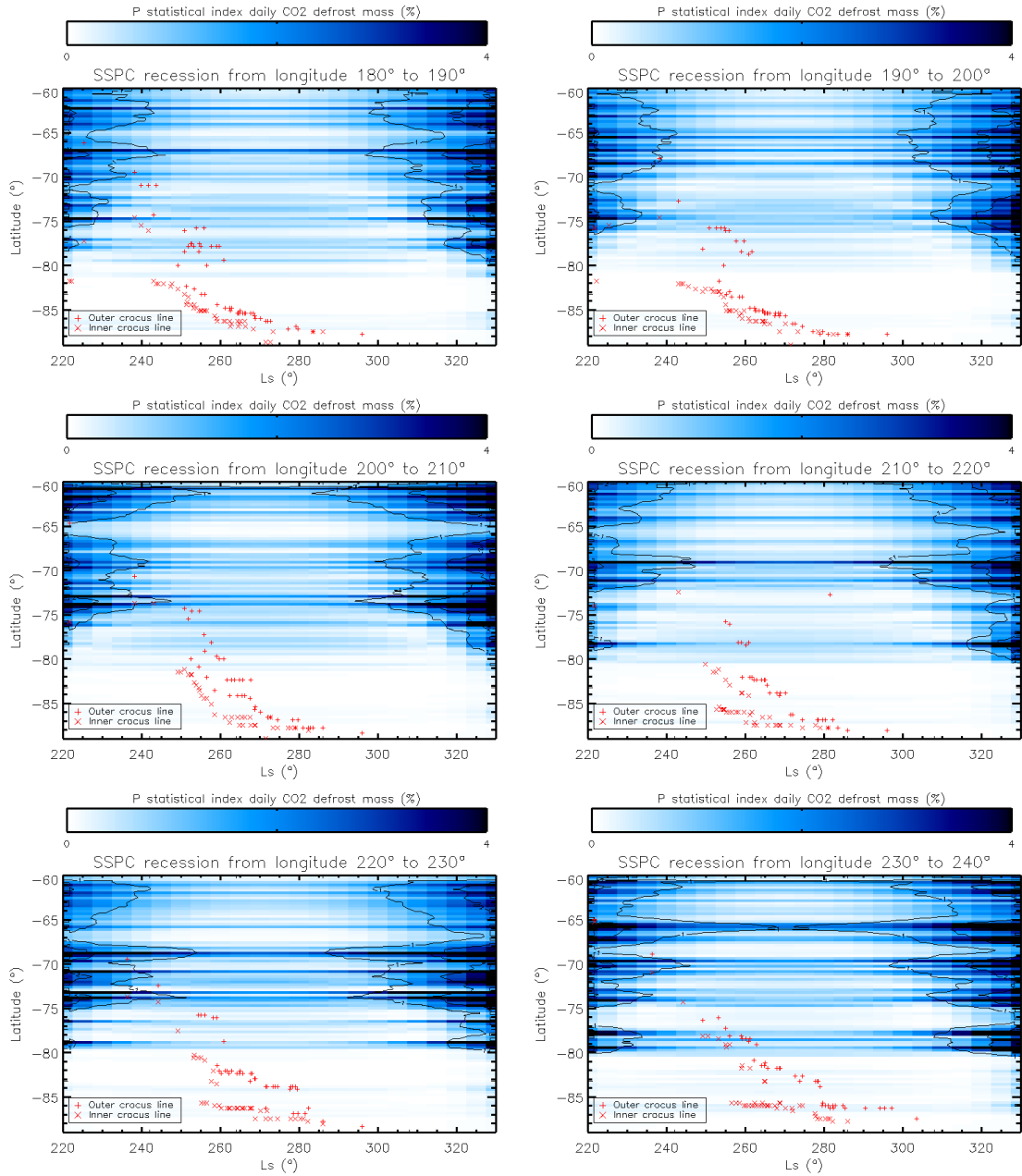


FIG. 8.13 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 180°E et 240°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

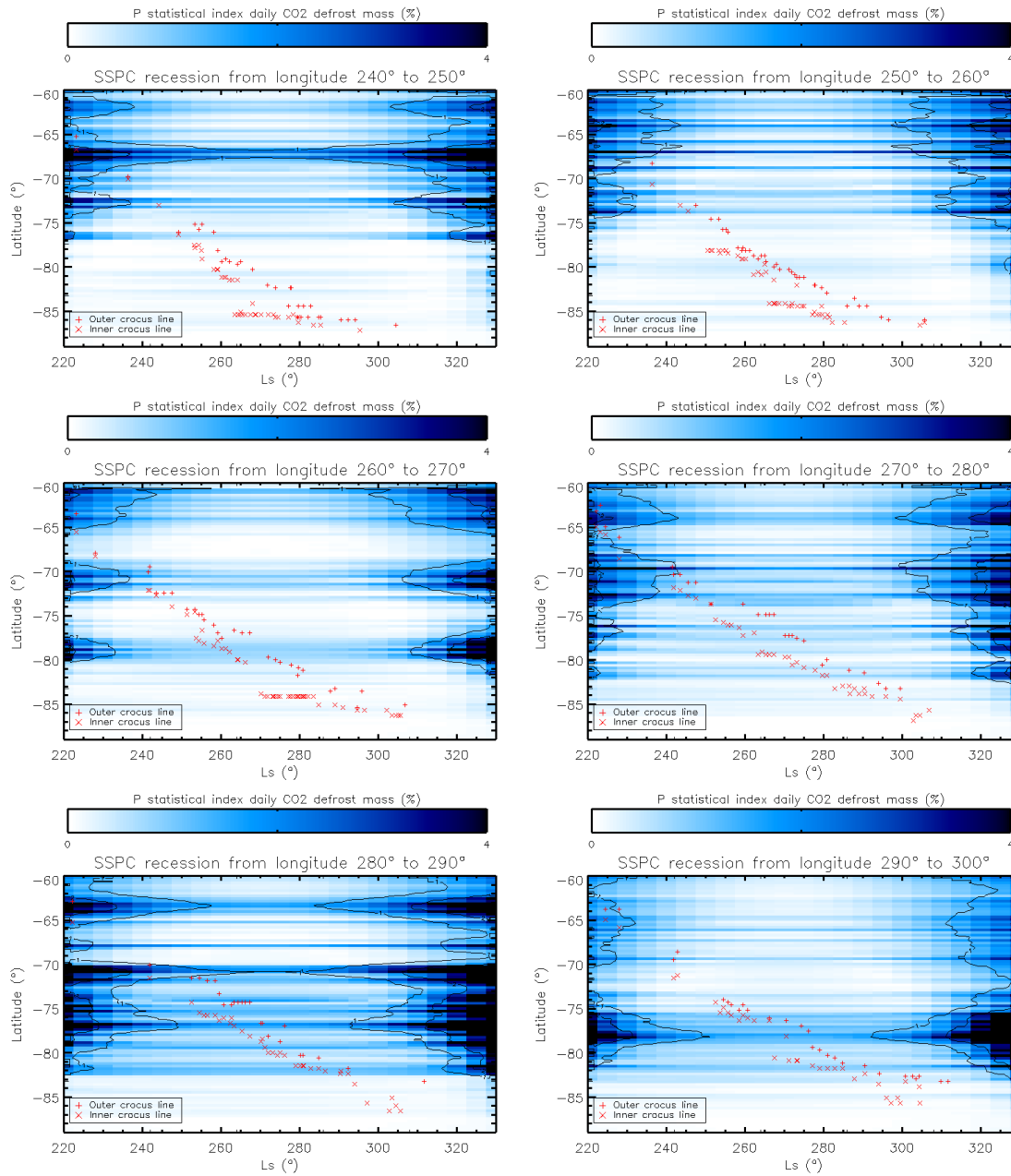


FIG. 8.14 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 240°E et 300°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

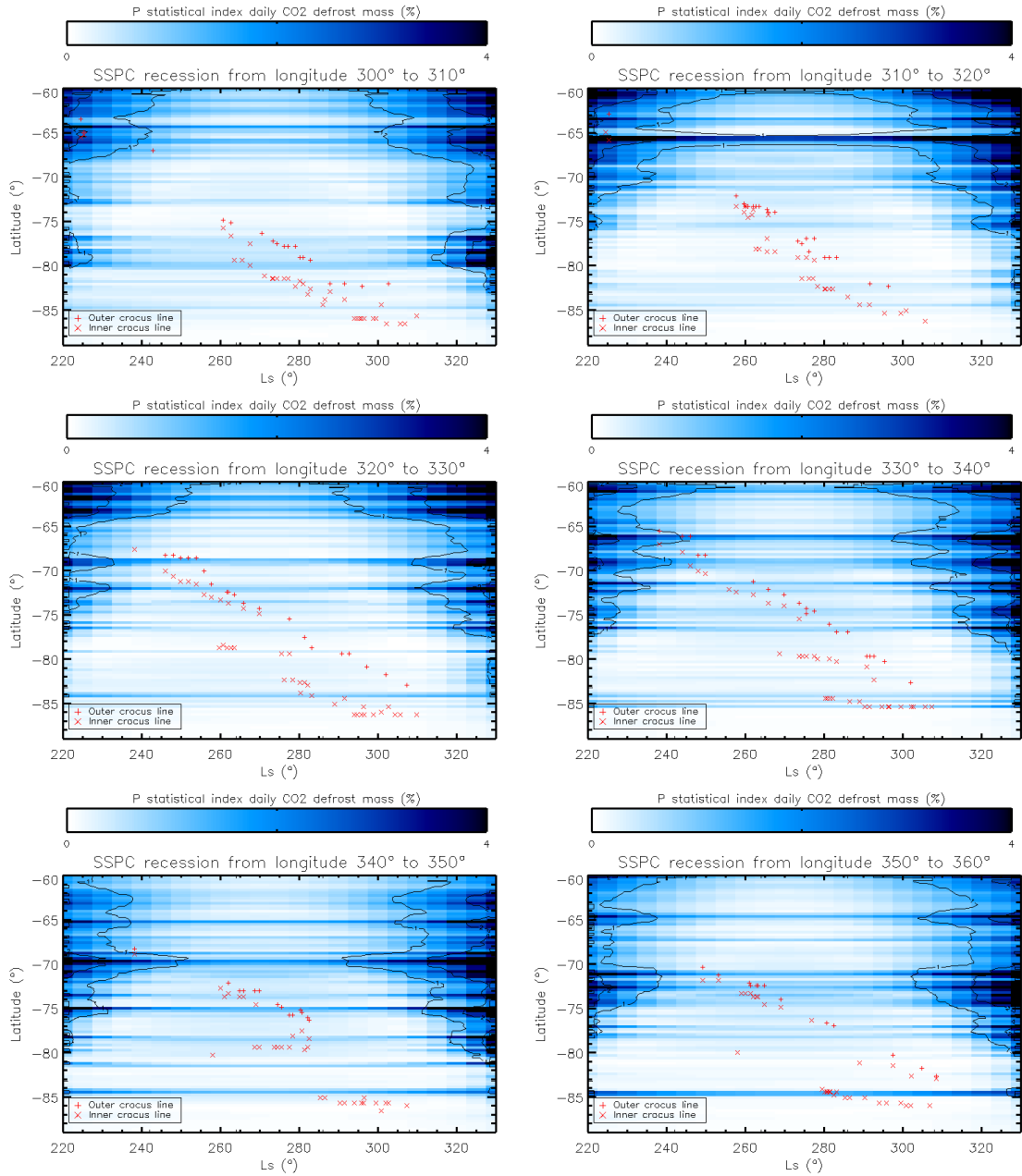


FIG. 8.15 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 300°E et 360°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ .

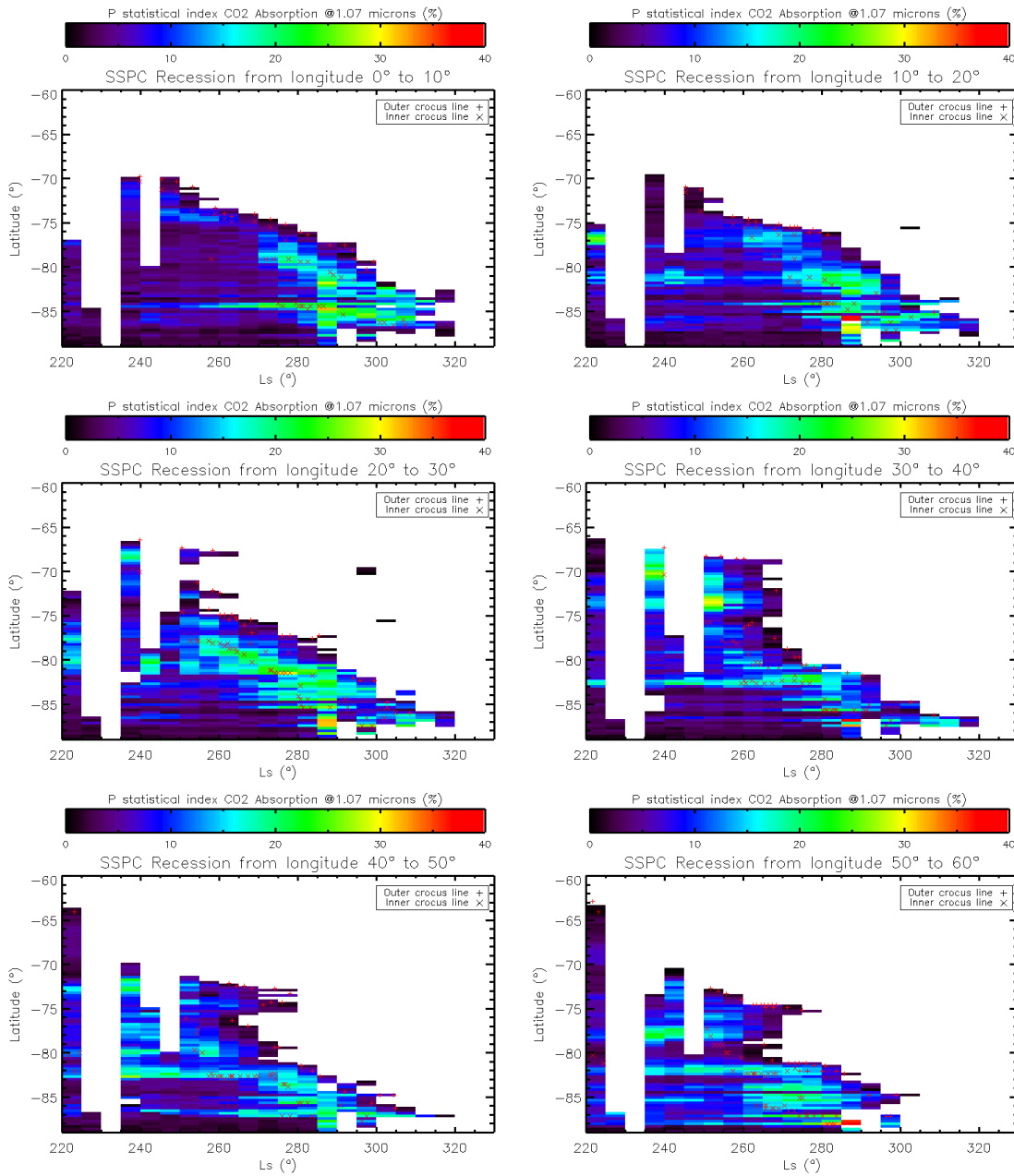


FIG. 8.16 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 0°E et 60°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.

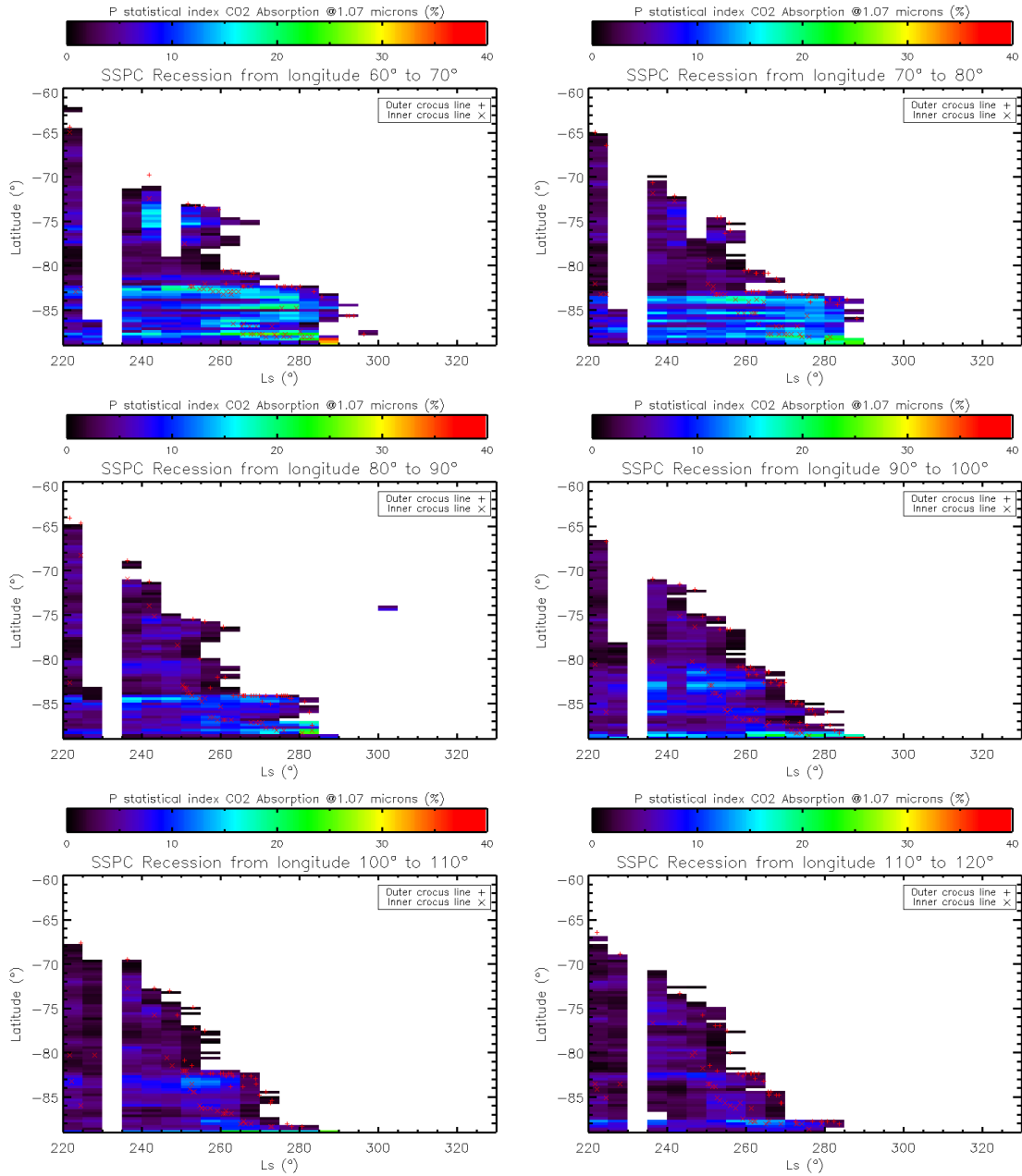


FIG. 8.17 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 60°E et 120°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.



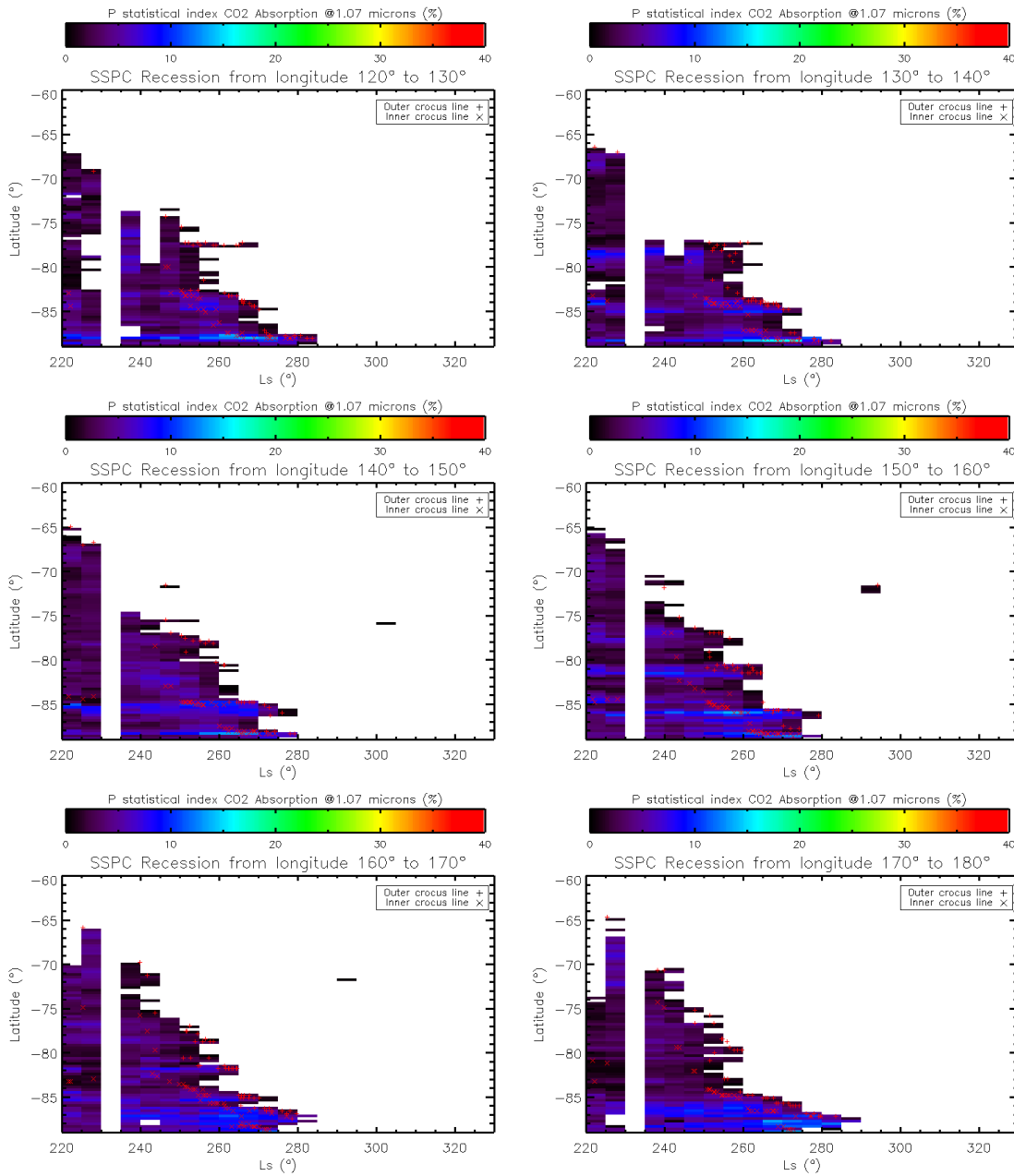


FIG. 8.18 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 120°E et 180°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.

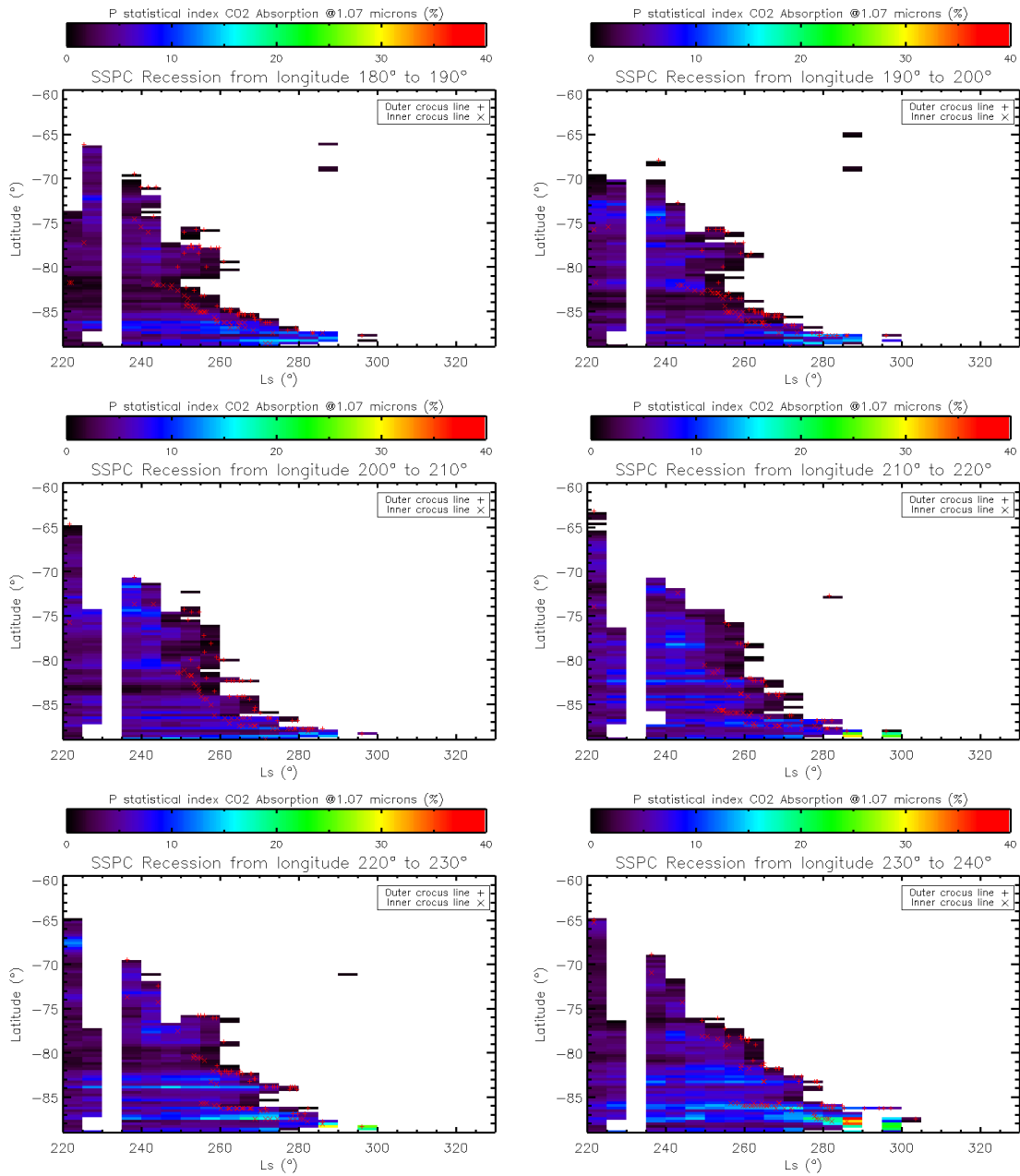


FIG. 8.19 – Évolution temporelle (en  $^{\circ}$ Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes  $180^{\circ}$ E et  $240^{\circ}$ E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du  $\text{CO}_2$  à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.

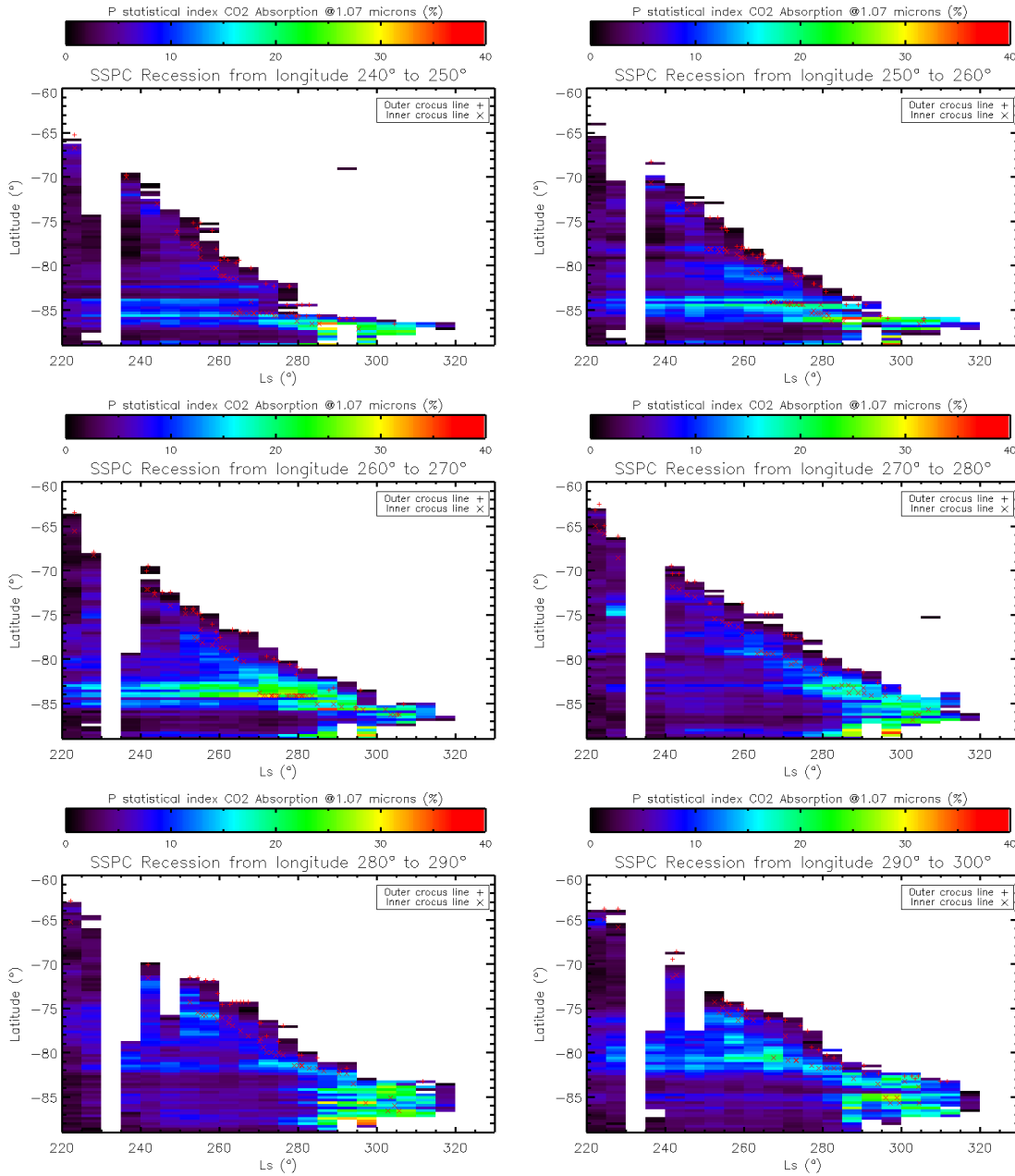


FIG. 8.20 – Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 240°E et 300°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.

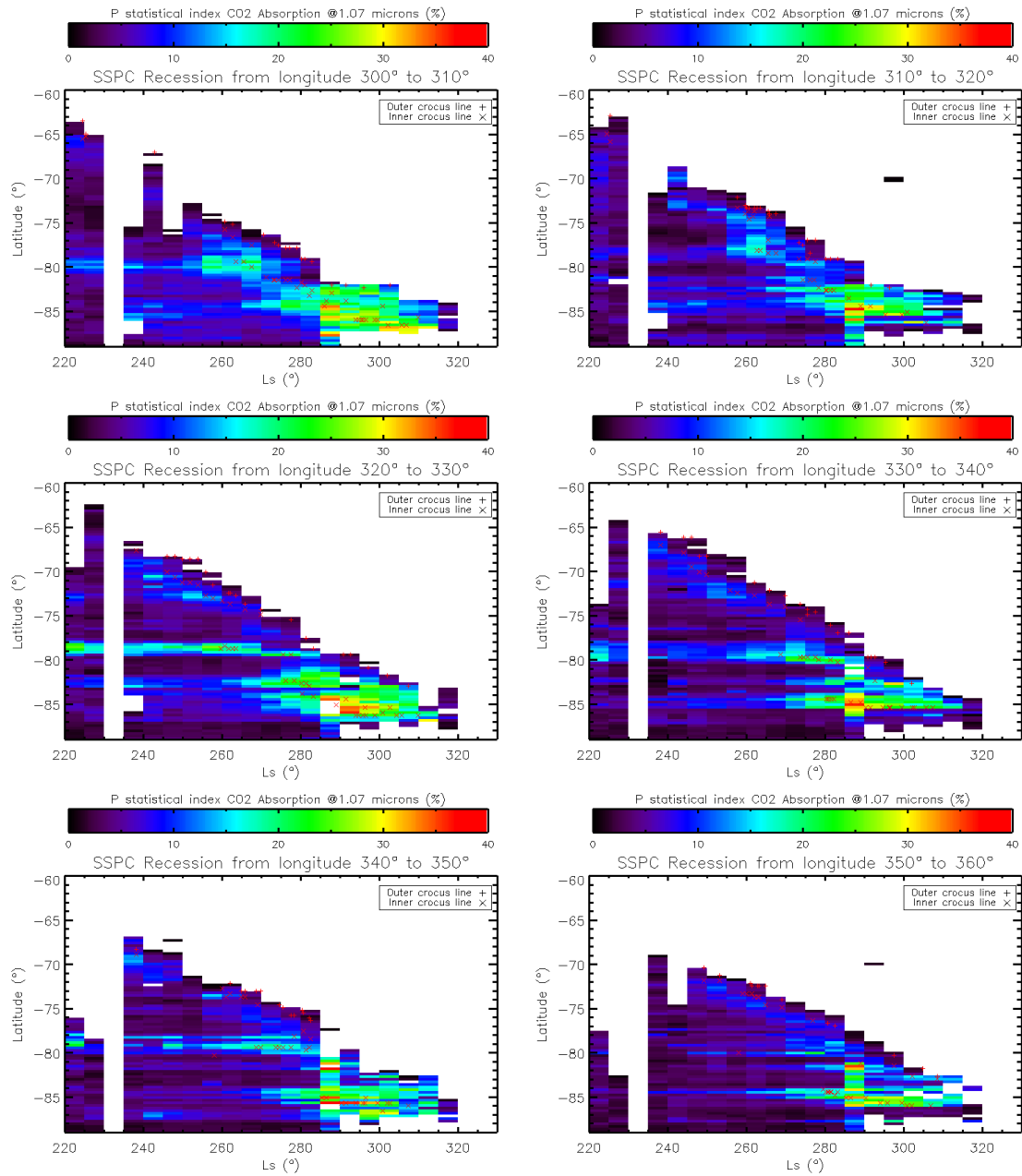


FIG. 8.21 – Évolution temporelle (en  $^{\circ}\text{Ls}$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes  $300^{\circ}\text{E}$  et  $360^{\circ}\text{E}$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du  $\text{CO}_2$  à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA.

### 8.2.5 Conclusion

Le *temps snowdrop* est corrélé avec la largeur de la distribution du facteur d'absorption  $1 - A_{vis}$  à l'échelle locale, quelques dizaines de °Ls avant la *date crocus interne*. Ainsi, pendant quelques semaines, la distribution d'albédo du CO<sub>2</sub> est large, bien que plus de 99% de la surface soit couverte de CO<sub>2</sub>.

L'hypothèse sur l'albédo, notée à l'équation 8.10, est encore valable à l'échelle locale, puisqu'il existe une certaine cohérence interne entre modèle, données et résultats. L'effet de moyennage sur plusieurs observations OMEGA à des temps locaux différents a peut-être permis de s'affranchir des effets directionnels, en moyennant indirectement sur l'angle d'incidence.

L'albédo est donc le paramètre majeur qui contrôle le temps snowdrop et la récession à l'échelle locale. L'albédo peut être contrôlé par plusieurs phénomènes potentiels qu'il faut discriminer. Voici quelques exemples :

- Mélange géographique subpixel (OMEGA) : En cas de tel mélange, l'albédo correspond à un mélange linéaire des albédos de neige et de poussières sombres au prorata des surfaces couvertes par l'un et l'autre des pôles. Cependant, cette explication ne semble pas convaincante car cette situation est très instable.

La température d'un terrain déglacé monte au delà de 200K, ce qui a pour effet d'augmenter fortement le flux thermique. Pour une facette encore couverte de glace, le terme d'émission thermique des facettes voisines augmente, ce qui accélère la sublimation. Ce phénomène apparaît pendant la période de transition, entre les lignes crocus interne et externe.

Le profil 320°-330°E montre que la situation est stable pendant plus de 40°Ls, ce qui rend ce phénomène improbable.

- Épaisseur de glace : Les études de Warren et al. (305) montrent que si la glace est optiquement fine, l'épaisseur de glace est corrélée à l'albédo. Différents processus peuvent produire des variabilités locales d'épaisseur de glace à la surface :

- Sublimation différentielle : comme indiqué dans la section 8.1.3. Ce processus forme une boucle de rétroaction positive, car plus de sublimation entraîne une épaisseur plus fine et donc un albédo plus faible qui augmente encore la sublimation. La stabilité de la variabilité d'albédo sur plus de 40°Ls montre que ce processus est peu probable.

Aussi, il n'y a pas de corrélation entre  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  d'une part, qui dans ce scénario serait à l'origine de la boucle de rétroaction, et  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  d'autre part.

- Ablation différentielle : forcée par l'atmosphère comme discutée à la section 7.2.1.2 page 131.

- Taille de grains : Les études de Warren et al. montrent que la taille des grains est anticorrélée avec l'albédo (305). A l'extrême, une taille de grains très grande correspond à un scénario de couche de glace transparente. Différents processus physiques peuvent produire des variabilités locales de taille de grains :

- Mode de dépôts : La section 7.2.1.1 page 130 expose les modes de dépôts possibles de la calotte saisonnière de CO<sub>2</sub>. Il s'agit de la condensation directe et de la précipitation de neige. La part relative de ces deux processus varie localement.

Le premier processus, dominant partout sur la calotte saisonnière produit des tailles de grains relativement fortes.

Le second processus est très dépendant de l'écoulement atmosphérique, lui-même en partie forcé par la topographie locale. La précipitation de neige au sol produit des dépôts, ayant des tailles de grains relativement faibles et un albédo plus fort.

- Métamorphisme différentiel : Le métamorphisme tend à faire augmenter la taille des grains de CO<sub>2</sub> (69). Des hétérogénéités physiques (contenu en poussière, en eau) ou des hétérogénéités d'énergie absorbée (moteur du métamorphisme) conduisent à un métamorphisme différentiel. La seconde possibilité est improbable car les variabilités locales d'insolation directe, source principale d'énergie, ne sont pas corrélées aux variabilités d'albédo (voir article 15 page 223).

- Abondance en poussière : Les études de Warren et al. montrent que l'abondance des impuretés de poussière, dans un matériau granulaire de glace de CO<sub>2</sub>, est anticorrélée avec l'albédo (305). Différents processus physiques peuvent produire des variabilités locales d'abondance en poussière :
  - Dépôts de poussière : lors de la formation des dépôts saisonniers par condensation ou précipitation de neige, une partie de la poussière atmosphérique locale peut être incorporée aux dépôts. Également, pendant la phase d'ablation, il est possible que de la poussière soit déposée par des jets (voir section 7.3.1.2 page 139). Dans ce scénario, la variabilité locale d'albédo serait liée à une variabilité locale du contenu en poussière dans l'atmosphère, elle-même pouvant être liée à une distribution spatiale hétérogène des jets.
  - Nettoyage différentiel. Différents processus de nettoyage sont proposés, chacun ayant l'énergie solaire comme moteur :
    - Nettoyage par enfoncement de la poussière : Ce processus correspond au chauffage préférentiel des grains de poussières incorporés dans le givre car leur albédo est plus faible (233; 137). Ces grains chauds vont faire sublimer préférentiellement la glace sous-jacente et du coup s'enfoncer dans la masse, faisant augmenter l'albédo. À une certaine profondeur d'équilibre, ils ne sont plus atteints par le rayonnement solaire et l'albédo atteint son maximum.
    - Nettoyage par expulsion des poussières, proposé par Kieffer (153) : Il s'agit du même processus que précédemment, appliqué aux poussières les plus fines. Celles-ci décolleraient sous la pression du CO<sub>2</sub> qui se sublime sous elles. Ces poussières sont incorporées dans l'atmosphère comme le montre la correspondance de taille entre les particules mesurées dans l'atmosphère et celles prévues par ce modèle de décollage.
    - Nettoyage par condensation préférentielle en surface : Ce processus est basé sur le fait que la glace de CO<sub>2</sub> peut être relativement transparente dans le visible en comparaison avec l'infrarouge thermique (305). Dans ce cas, la lumière solaire peut pénétrer en profondeur et réchauffer le sol sous-jacent, produisant une sublimation locale à la base du givre (139). Ce processus permet de produire une sublimation nette sur toute la couche de CO<sub>2</sub>. Localement, en base de la couche de CO<sub>2</sub> se produit une sublimation. Cependant, en surface, à l'endroit où le flux thermique est émis, une condensation se produit. Cette condensation de givre frais, à relativement faible taille de grains, recouvre les poussières et fait augmenter l'albédo global de la couche de CO<sub>2</sub>.

Le paroxysme de ce modèle a été repris en ajoutant une issue catastrophique à ce phénomène : une montée en pression du gaz de CO<sub>2</sub> sous la couche rigide de glace suivie d'une rupture. Lors de la rupture, le CO<sub>2</sub> s'éjecte violemment entraînant les poussières et forme des geysers. Il existe de rares observations comportant des geysers actifs (242). Dans ce cas, la poussière des jets qui retombent sur la glace fait à nouveau baisser violemment l'albédo.

Des hétérogénéités physiques (taille des grains, contenu en poussière, en eau) ou des hétérogénéités d'énergie solaire (moteur du nettoyage) conduisent à un nettoyage différentiel.

La seconde possibilité est peu convaincante car les variabilités locales d'insolation directe, source principale d'énergie, ne sont pas corrélées aux variabilités d'albédo (voir article 15 page 223).

### 8.3 Conclusion et perspectives

Nous avons pu montrer au cours de ce chapitre que le paramètre clef de la récession de la calotte saisonnière sud de Mars est l'albédo aux échelles régionale et locale.

L'albédo de la glace de CO<sub>2</sub> est une quantité hémisphérique intégrée spectralement. Il est estimé par la réflectance mesurée par OMEGA dans le continuum à 1,07 microns, à une géométrie d'acquisition donnée. Cette estimation semble correcte de façon quantitative, à l'échelle régionale. À l'échelle locale, la variabilité d'albédo semble correctement reproduite par notre estimation. Ces résultats suggèrent d'une part, que les effets atmosphériques ne sont pas prépondérants au premier ordre. D'autre part, que les effets spectraux et hémisphériques sont reproduits au premier ordre par notre estimation.

L'effet différentiel d'orientation et d'ombres portées lié à la rugosité a été écarté. Cependant, cet effet pourrait s'exprimer à une échelle plus fine que 920 m. Il pourrait être judicieux d'effectuer des calculs à plus haute résolution spatiale.

Les modélisations ultérieures peuvent tenir compte de l'effet d'albédo de deux manières différentes : La première solution réside dans la mesure de l'albédo en utilisant des données de type OMEGA. Cependant, il est impossible d'estimer le champ d'albédo complet et ses variations temporelles. Il faudrait donc extrapoler les mesures disponibles à la fois dans l'espace et dans le temps.

La seconde possibilité consiste à modéliser le comportement de l'albédo. Cette solution n'est possible que si le (les) processus qui gouverne(nt) l'albédo ont été mis en évidence.

# Conclusion et perspectives

## DEUX NOUVEAUX OUTILS D'ANALYSE D'IMAGE HYPERSPECTRALE DE TÉLÉDÉTECTION

Lors de cette thèse, deux outils complémentaires d'analyse des images hyperspectrales de télédétection ont été élaborés.

Le premier s'appelle "Wavanglet" (voir chapitre 4 page 77). Il s'agit d'une méthode de détection, supervisée et rapide, des formes spectrales. Cette méthode a été développée pour la détection d'un grand nombre de classes (par exemple de corps chimiques au sol), en réduisant les effets d'absorption atmosphérique et les effets de *géométrie d'acquisition*. L'ensemble de ces propriétés confère à la méthode Wavanglet, une place de choix dans le traitement de larges bases de données d'images hyperspectrales. Cette méthode permet de détecter la présence de glace sur la base de données complète du spectro-imageur OMEGA, en moins d'un jour de calcul.

Des tests synthétiques, dans des conditions réalistes de la calotte permanente sud, ont été effectués. Sur les quelques méthodes de classification sélectionnées, seules les méthodes Wavanglet et de rapports de bandes permettent de s'affranchir des effets d'absorption atmosphérique et des effets de la *géométrie d'acquisition*. En cas de recouvrement de bandes d'absorption de plusieurs corps chimiques, ou en cas de dégradation du signal de télédétection, la méthode Wavanglet permet une séparation des signaux plus aisée et plus sûre que la méthode des rapports de bandes.

Le deuxième outil développé lors de cette thèse est nommé "JADE+BPSS" (voir chapitre 6 page 115). Il s'agit d'une méthode non-supervisée dite de séparation de source en aveugle, contrairement à Wavanglet qui est une méthode supervisée. Elle permet d'extraire des informations d'intérêts planétologiques en effectuant un minimum d'hypothèses sur les données à traiter. En particulier, cette méthode ne suppose pas la présence a priori de corps chimiques. Les deux hypothèses nécessaires pour le bon déroulement de la séparation de sources sont : un mélange linéaire positif et une indépendance spectrale.

Cette méthode tente une quantification inédite et très intéressante dans le schéma d'analyse des images hyperspectrales. Elle permet à la fois d'extraire des spectres de corps purs, sans les supposer présents a priori, et de déterminer une abondance associée à chaque corps pur. Ces deux informations sont nécessaires à une inversion systématique de tous les spectres de l'image car elles permettent de sélectionner des spectres représentatifs de la scène. Les tests sur des observations OMEGA montrent que la méthode JADE+BPSS permet d'estimer des spectres purs de glaces d'eau et de CO<sub>2</sub> ainsi que des abondances relatives en accord avec les premières analyses par inversion d'un modèle de transfert radiatif.

## MODÉLISATION DE LA RÉCESSION DE LA CALOTTE SAISONNIÈRE SUD DE MARS : VERS L'ÉCHELLE LOCALE...

L'analyse des images OMEGA s'est traduite par la détection systématique de glace de CO<sub>2</sub> et d'eau avec Wavanglet (voir chapitre 8 page 149). A l'échelle régionale, ces analyses ont rendu compte de la diminution de la surface couverte de dépôts saisonniers au cours du temps, avec l'évolution de la *ligne crocus*. Afin de décrire la bordure de la calotte saisonnière à l'échelle locale, nous avons introduit les notions de *lignes crocus interne et externe*, ainsi que de *distance snowdrop*. Les équivalences dans le domaine temporel sont les suivantes : *date crocus interne et externe*, ainsi que de *temps snowdrop*.



Ces descriptions de la récession sud aux échelles locale et régionale constituent de nouvelles observables que nous avons interprétées grâce à un modèle de sublimation de CO<sub>2</sub>, établi lors de cette thèse (voir chapitre 8 page 149). Ce modèle tient compte de l'émission thermique et de différents termes d'absorptions dans le visible et l'infrarouge. Le terme de conduction de chaleur dans le sous-sol a été écarté sur des arguments quantitatifs.

A l'échelle régionale, l'asymétrie de la récession de la calotte saisonnière sud est compatible avec l'asymétrie d'albédo observée. Quantitativement, l'accélération relative de la récession dans la région cryp-tique est compatible avec un albédo relativement plus faible. Il n'existe donc probablement aucune asymétrie durant la période d'accumulation. Les effets d'altitude, d'émissivité et d'albédo dans l'infrarouge sont négligeables devant celui de l'albédo.

En utilisant notre modèle de sublimation de la glace de CO<sub>2</sub> à l'échelle locale, nous avons montré que les effets de pente et d'ombre portée, pourtant très importants aux pôles, sont négligeables sur la récession sud. Cette étude montre que l'albédo est le paramètre clef qui contrôle la récession à l'échelle locale. Le résultat majeur est la corrélation entre le *temps snowdrop* et la largeur de la distribution d'albédo quelques semaines avant la sublimation totale. Les effets d'altitude, d'émissivité et d'albédo dans l'infrarouge sont aussi négligeables à l'échelle locale. Quant à l'accumulation, elle n'a pas pu être testée quantitativement.

L'amélioration de la modélisation du bilan de masse de la glace de CO<sub>2</sub> dans les GCM nécessite des améliorations de la modélisation de l'albédo. Plusieurs processus physiques de contrôle d'albédo des dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub> sont possibles, impliquant au moins un des facteurs suivants : épaisseur, taille des grains, contenu en poussière. A l'échelle locale, la *distance snowdrop* forme une nouvelle observable permettant de contraindre les GCM.

### PERSPECTIVES GÉNÉRALES

Les deux outils de traitement du signal "Wavanglet" et "JADE+BPSS" permettent d'extraire des informations de composition de la surface. L'étape suivante d'analyse des images OMEGA de la calotte saisonnière sud, est l'inversion des spectres, en utilisant un modèle de transfert radiatif. Cette étape permet de contraindre les paramètres physiques tels que l'abondance, la taille des grains ou le type de mélange.

Ces paramètres physiques pourront discriminer les différents scénarii possibles des processus physiques contrôlant l'albédo et la récession de la calotte saisonnière sud de Mars.

Cette méthodologie d'analyse, couplant détection de glace et modélisation de la stabilité des dépôts saisonniers devrait à terme être aussi pratiquée au Nord. L'hémisphère nord martien étant plus riche en eau, il serait donc intéressant de mesurer l'effet de la glace d'eau sur la stabilité des dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub>. Les implications d'une telle étude portent sur la climatologie martienne à l'échelle actuelle et au cours des temps géologiques.

De façon plus générale, les outils que nous avons développés et validés montrent l'intérêt de l'alliance des domaines de la Planétologie et des Sciences de la Terre d'une part, et des STIC d'autre part. Ces outils permettent des analyses pointues de la large base de donnée OMEGA. Cette alliance a permis d'établir un algorithme rapide (Wavanglet), s'affranchissant de la grande taille de la base de donnée. Aussi, la méthode de séparation de source en aveugle (JADE+BPSS), conduit à l'extraction d'information contenue dans la masse des données.

D'autres outils restent à construire, en intégrant la cohérence spatiale au sein d'une image, voire au sein d'une collection d'observations. Pour l'étude des surfaces planétaires, le prochain objectif réside dans la détermination de la *représentation de terrain* et des modes de mélanges dominants.

Les méthodes "Wavanglet" et "JADE+BPSS" de traitement des images hyperspectrales peuvent être utilisés pour l'extraction d'informations planétologiques dans un contexte différent de celui des glaces martiennes.

Par exemple, la détection et la cartographie de glace peut s'effectuer sur d'autres corps du Système Solaire (Terre, comètes, satellites glacés, ...).

Aussi, ces méthodes peuvent extraire des informations planétologiques à propos des minéraux de la

surface, comme le montre l'étude préliminaire de détection du gypse par Wavanglet. Enfin, ces méthodes permettent potentiellement d'extraire des informations sur l'atmosphère car celles-ci impriment les spectres d'un signal particulier. Ce domaine reste encore à explorer !



## **Troisième partie**

### *Annexes*



## Glossaire

- **Accumulation** : mécanisme d’augmentation de la couche de dépôt saisonnier.
- **Albédo** : puissance totale réfléchi par une surface dans toutes les directions, rapportée à la puissance totale interceptée. D’autres définitions existent (voir section 1.3.1 page 22).
- **Albédo bolométrique** : dans le domaine visible/proche infrarouge, l’intégrale spectrale de l’albédo pondéré du spectre solaire (voir section 1.3.1 page 22).
- **Ablation** : mécanisme de diminution de la couche de dépôt saisonnier.
- **Asymétrie** : brisure de la symétrie centrale autour du pôle géographique.
- **Base de référence** : base de données de spectres de référence utilisée pour la classification supervisée. Elle peut être de deux types : *base spectrale de référence* ou *base de distribution spectrale de référence* (voir section 2.2 page 41).
- **Base de distribution spectrale de référence** : ensemble de distribution spectrale de référence qui permet une classification, et la compréhension d’une image ou d’un dataset donné (voir section 2.2 page 41).
- **Base spectrale de référence** : ensemble de spectres de référence qui permet une classification, et la compréhension d’une image ou d’un dataset donné (voir section 2.2 page 41).
- **Canal** : ensemble de tous pixels à une longueur d’onde donnée.
- **Classification déterministe exclusive** : classification dont le résultat est binaire et qui ne permet pas à un pixel d’appartenir à plus d’une seule classe.
- **Classification déterministe non-exclusive** : classification dont le résultat est binaire et qui permet à un pixel d’appartenir à plus d’une seule classe.
- **Classification non-supervisée** : qui ne nécessite pas d’autres informations que les données brutes, sans a priori autre que mathématique.
- **Classification statistique ou flou** : classification dont le résultat est une probabilité d’appartenance à une classe.
- **Classification spectro-spatiale** : classification qui porte à la fois sur des informations spatiale et spectrale.
- **Classification supervisée** : classification qui nécessite des connaissances préalables (connaissances spectroscopiques, base d’apprentissage sensée être représentative du jeu de données, ...).
- **Cycle saisonnier martien** : cycle saisonnier de dépôts sur les deux pôles martiens.
- **Date crocus** : à un endroit donné de Mars, date pour laquelle le dépôt saisonnier est sublimé (voir fig. 7.1 page 134).
- **Dichotomie** : brisure de symétrie entre les hémisphères nord et sud.
- **Distance** : ressemblance entre deux objets au sens mathématique (voir annexe 12.1 page 199).
- **Distance snowdrop** : taille caractéristique de la zone de transition en bordure de la calotte saisonnière. C’est la distance séparant la ligne crocus interne et la ligne crocus externe, le long des méridiens.
- **Distribution spectrale de référence** : spectre de référence défini statistiquement, comme une

- densité de probabilité du spectre. La définition la plus usuelle étant la densité de probabilité gaussienne, cette distribution est définie par un spectre, qui correspond à la valeur moyenne, et un écart type éventuellement différent à chaque longueur d'onde (voir section 2.2 page 41).
- **Écran couleur** : écran classique d'ordinateur comportant 2 dimensions spatiales (par exemple de dimension 1024\*768 pixels) et une dimension "couleur" (toujours en dimension 3, par exemple : Rouge, Vert, Bleu). C'est la dimension utilisée classique pour représenter des données. Un graphique sur une feuille a la même dimensionnalité.
  - **Facette** : élément de surface pour lequel la masse de CO<sub>2</sub> sublimée est estimée par un modèle.
  - **Fauchée** : trace au sol de la trajectoire du satellite.
  - **Géométrie d'acquisition** : pour chaque pixel, la géométrie d'acquisition est l'ensemble des directions d'incidence solaire et d'émergence vers le capteur.
  - **Ligne crocus** : ligne de délimitation de la zone recouverte de dépôts saisonniers. C'est la ligne reliant tous les points ayant une *date crocus* similaire.
  - **Ligne crocus externe** : ligne séparant deux domaines (voir figure 8.8 page 164) : (i) le domaine de la zone de transition (dans laquelle certaines facettes ne comportent pas de dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub>) ; (ii) le domaine où il n'existe plus de glace de CO<sub>2</sub>. C'est la ligne reliant tous les points ayant une *date crocus externe* similaire.
  - **Ligne crocus interne** : ligne séparant deux domaines (voir figure 8.8 page 164) : (i) le domaine entièrement recouvert de glace de CO<sub>2</sub> ; (ii) le domaine de la zone de transition (dans laquelle certaines facettes ne comportent pas de dépôts saisonniers de CO<sub>2</sub>). C'est la ligne reliant tous les points ayant une *date crocus interne* similaire.
  - **Longitude subsolaire (Ls)** : angle qui définit la position de la planète sur son orbite lors de sa rotation autour du Soleil. Cet angle est déterminé en °Ls, à partir de l'équinoxe de printemps nord. Pour l'hémisphère nord : l'équinoxe de printemps est à Ls=0°, le solstice d'été à Ls=90°, l'équinoxe de printemps à Ls=180° et le solstice d'été à Ls=270°. Pour l'hémisphère sud : l'équinoxe de printemps est à Ls=180°, le solstice d'été à Ls=270°, l'équinoxe de printemps à Ls=0° et le solstice d'été à Ls=90°. 1°Ls correspond à peu près à 2 jours martiens soit 2 jours terrestres.
  - **Malédiction de la dimensionnalité** : problème d'estimation statistique dans les espaces à grandes dimensions (voir annexe 12.5 page 214)
  - **Mélange géographique résolu** : "mélange" spectral induit par un assemblage de milieu granulaire à une échelle plus grande que la taille du pixel. C'est un mélange à l'échelle planétaire, résolu par l'instrument qui peut être étudié notamment par la cohérence spatiale (voir section 1.4.1.1 page 31).
  - **Mélange géographique subpixel** : mélange spectral induit par une juxtaposition horizontale de milieux granulaires à une échelle intermédiaire entre le pixel et le libre parcours moyen optique dans la direction horizontale. Dans l'hypothèse d'une atmosphère non diffusante, la BRDF du pixel est une combinaison linéaire des BRDF des milieux granulaires pondérés des proportions de surface intra-pixel (voir section 1.4.1.1 page 31).
  - **Mélange intime** : mélange spectral induit par un assemblage de matériau à une échelle plus fine que celle du libre parcours moyen optique horizontal. Il peut être de trois cas ou d'une combinaison de ces cas : *mélange intime chimique*, *mélange intime granulaire* et *mélange intime stratifié* (voir section 1.4.1.1 page 31).
  - **Mélange intime chimique** : mélange spectral induit par un assemblage de corps chimiques à une échelle plus fine que celle d'un grain. Un assemblage sous forme d'inclusion intra-grain produit un changement non-linéaire des sections efficaces d'absorption et de diffusion du grain. En cas d'un assemblage chimique cristallin, les constantes optiques du matériau ne sont pas fonctions des constantes optiques propres à chaque corps chimique pur (voir section 1.4.1.1 page 31).
  - **Mélange intime granulaire** : mélange spectral induit par un assemblage de grains de propriétés physiques différentes (composition chimique, taille et forme de grains) au sein d'un même milieu granulaire. Les hétérogénéités du milieu granulaire interviennent entre les échelles de tailles de grains et du libre parcours moyen optique. La théorie du transfert radiatif montre que la BRDF

---

du milieu granulaire hétérogène n'est pas relié aux BRDF des milieux homogènes (voir section 1.4.1.1 page 31).

- **Mélange intime stratifié** : mélange spectral induit par un assemblage de strates, en général horizontales. Chaque strate est un milieu granulaire, à une échelle plus fine que celle du libre parcours moyen optique. La BRDF du milieu stratifié est un mélange non-linéaire des BRDF et transmittance de chaque strate (voir section 1.4.1.1 page 31).
- **Nadir** : de l'arabe "nazir". C'est la direction opposée au zénith. Par extension, le point à la surface, à la verticale d'un satellite.
- **Phénomène de Hughes ou malédiction de la dimensionnalité** : malédiction de la dimensionnalité appliquée au problème de classification (voir annexe 12.5.3 page 215).
- **Pixel** : élément discret de la dimension spatiale.
- **Point froid** : zone de la calotte saisonnière de Mars comportant une température de brillance anormalement faible.
- **Profil méridien** : ensemble d'éléments de la grille (pas de  $0,3^\circ$  en latitude et  $10^\circ$  en longitude) à longitude constante qui forme un profil le long d'un méridien.
- **Progression (de la calotte saisonnière)** : phase d'augmentation de la surface couverte de dépôts saisonniers pendant l'automne et l'hiver local due à leur accumulation.
- **Réflectance bidirectionnelle** : rapport entre la luminance réfléchie dans la direction d'émergence sur l'éclairement arrivant à la surface, provenant de la direction d'incidence. Cette quantité dépend des directions d'incidence et d'émergence.
- **Récession (de la calotte de saisonnière)** : phase de retrait des dépôts saisonniers pendant le printemps et l'été local due à leur ablation.
- **Représentation de terrain** : agencement des corps chimiques à la surface. Elle est composée de trois types de mélange idéaux : en couches superposées, en couches juxtaposées (mélange géographique) ou au sein d'une couche (voir section 1.4.1.1 page 31).
- **Spectel** : élément discret de la dimension spectrale.
- **Spectel chaud** : spectel comportant un niveau anormalement haut de bruit.
- **Spectel mort** : spectel détruit.
- **Spectre** : flux d'énergie électro-magnétique décomposé en fréquence. Ce flux peut être normalisé par le flux de la source. Dans un cube hyperspectral, un spectre est un ensemble de spectels à un endroit donné.
- **Spectre de référence** : spectre représentatif d'un type de terrain (caractérisé par la présence d'une espèce chimique particulière ou d'un mélange particulier) ou plus généralement d'un type de spectre (incluant surface et atmosphère : présence de nuage, ...). Le spectre de référence est au centre de la distribution des possibles spectres de sa classe (voir section 2.2 page 41).
- **Spectre de référence extrême (ou "endmember" en anglais)** : spectre de référence représentatif d'un type de terrain, mais à la différence du spectre de référence, ce spectre est situé à un extrême de la distribution des possibles spectres de sa classe. Partant du principe que tous les spectres observés sont en fait un mélange de différents types de terrain, le spectre de référence extrême est le plus pur (voir section 2.2 page 41).
- **Température de brillance** : température équivalente à celle du corps noir de même flux à une longueur d'onde donnée en infrarouge proche.
- **Unité de terrain** : ensemble de spectres ayant une même représentation de terrain et des paramètres physiques quasi identiques. Une unité de terrain s'apparente à une unité géologique transposée à la spectroscopie des surfaces planétaires.





## Principales notations mathématiques

- Mathématique
  - $X$  : quantité scalaire
  - $X(\lambda, \theta, \dots)$  : fonction de  $\lambda, \theta, \dots$
  - $\mathbf{X}$  : quantité vectorielle/matricielle/tensorielle ayant pour élément  $\mathbf{X}_{i,j,k,\dots}$ . L'indice  $i$  correspond aux lignes,  $j$  aux colonnes, ...
  - $\mathbf{I}_d$  : matrice identité de dimension  $d$
  - $\mathbf{1}_d$  : vecteur unitaire en colonne ayant pour élément  $\mathbf{1}_i$  (l'indice  $i$  correspond aux lignes)
- Angles
  - $\theta_{i,r}$  : angle zénithal d'incidence/émergence par rapport à la normale locale à la surface
  - $\bar{\theta}_{i,r}$  : angle zénithal d'incidence/émergence par rapport à la normale locale du sphéroïde planétaire
  - $\Phi_{i,r}$  : angle azimutal d'incidence/émergence à la surface dans le plan de la surface locale
- Spectres (quantités physiques)
  - $R(\theta_i, \theta_r, \Phi_i, \Phi_r, \lambda)$  : fonction de réflectance bidirectionnelle (BRDF) d'une surface
  - $R_{dh}(\theta_i, \Phi_i, \lambda)$  : réflectance directionnelle-hémisphérique
  - $A(\lambda)$  : albédo d'une surface
  - $A_{vis}, A_{IR}$  : albédo bolométrique dans le domaine visible, infrarouge thermique
  - $\mathbf{I}(\lambda)$  : spectre d'une image hyperspectrale en radiance
  - $\mathbf{L}(\lambda)$  : spectre d'une image hyperspectrale en facteur de radiance. Correction de l'énergie solaire au sommet de l'atmosphère.  $\mathbf{L}(\lambda) = \mathbf{I}(\lambda) / \mathbf{F}_{sun}(\lambda)$
  - $\mathbf{R}(\lambda)$  : spectre d'une image hyperspectrale en réflectance. Correction de l'énergie solaire interceptant la surface d'une planète  $\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{I}(\lambda) / (\mathbf{F}_{sun}(\lambda) \cdot \cos(\bar{\theta}_i))$
- Spectre appartenant à une classe "i" (toutes les quantités physiques de spectre sont possibles). Si la classe représente une zone "z" en mélange géographique sub-pixel, elle sera notée par un indice "z" à la place de "i". Les indices "z" et "i" sont droit.
  - $\mathbf{M}_i(\lambda)$  : spectre de référence de la classe "i" ( $M$  pour la moyenne)
  - $\mathbf{E}_i(\lambda)$  : spectre de référence extrême de la classe "i" ( $E$  pour "endmember")
  - $\mathbf{S}_i(\lambda)$  : spectre quelconque appartenant à la classe "i"
  - $\mathbf{f}_i(\lambda)$  : une densité de probabilité de la classe "i"
- Cube hyperspectral (toutes les quantités physiques de spectre sont possibles)
  - $N_x$  : nombre de pixel dans le plan horizontal dans la direction de la trace au sol du détecteur (grande)
  - $N_y$  : nombre de pixel dans le plan horizontal dans la direction orthogonale à la trace au sol du détecteur (petite)
  - $N_z$  : nombre de pixel total  $N_z = N_x + N_y$ , c'est aussi le nombre de spectre total
  - $x, y$  : indices décrivant dans la dimension spatiale correspondante
  - $z$  : indice décrivant les deux dimensions spatiales

- $N_\lambda$  : nombre de spectel  
 $\lambda$  : indice décrivant la dimension spectrale  
 $\mathbf{C}_{x,y,\lambda}$  : cube hyperspectral  
 $\mathbf{C}_{z,\lambda}$  : matrice correspondant au cube hyperspectral aplati dans les dimensions spatiales, nous avons parfois utilisé sa transposée notée  $\mathbf{C}_{z,\lambda}^T = \mathbf{C}_{\lambda,z}$   
 $\mathbf{S}(\lambda)$  : vecteur aléatoire modélisant un spectre quelconque
- Mélange spectral linéaire, séparation de source
    - $\mathbf{P}_i(\lambda)$  : spectre source de référence de la classe  $i$  (du type  $\mathbf{M}_i(\lambda)$ ,  $\mathbf{E}_i(\lambda)$ ,  $\mathbf{f}_i(\lambda)$  ou quelconque)
    - $N_p$  : nombre de composante principale
    - $N_s$  : nombre de source
    - $\alpha_i$  : proportion de mélange du spectre
    - $\mathbf{A}_i(\lambda)$  : vecteur de la matrice de mélange correspondant à la source “ $i$ ”
  - Probabilité
    - $\mathcal{P}$  : probabilité
    - $\langle X \rangle$  : moyenne de la quantité “ $X$ ”
    - $\mathbb{E}(X)$  : espérance de la quantité “ $X$ ”
    - $\mathcal{M}_n(X)$  : moment d’ordre  $n$  de la quantité “ $X$ ” (parfois noté  $\mathcal{M}_n$  pour simplifier la notation)
    - $\mathcal{C}um_k(X)$  : cumulants d’ordre  $k$  de la quantité “ $X$ ” (parfois noté  $\mathcal{C}um_k$  pour simplifier la notation)
    - $\mathcal{M}\mathcal{C}_n(X)$  : moment centré d’ordre  $n$  de la quantité “ $X$ ” (parfois noté  $\mathcal{M}\mathcal{C}_n$  pour simplifier la notation).
    - $\mathcal{V}ar(X)$  : variance de la quantité “ $X$ ” (parfois notée  $\mathcal{V}ar$  pour simplifier la notation). C’est le moment centré d’ordre 2.
    - $\mathcal{M}_{p_1,p_2,\dots,p_N}(\mathbf{X})$  : tenseur des moments croisés d’ordre  $N$  du vecteur aléatoire “ $\mathbf{X}$ ”.
    - $\mathcal{C}ov(X,Y)$  : covariance des quantités “ $X$ ” et “ $Y$ ” (parfois notée  $\mathcal{C}ov$  pour simplifier la notation). C’est le moment centré d’ordre 2 croisé.
    - $\mathcal{C}um_{p_1,p_2,\dots,p_N}(\mathbf{X})$  : tenseur des cumulants croisés d’ordre  $N$  du vecteur aléatoire “ $\mathbf{X}$ ”.
  - Statistiques et estimation
    - Toutes les notations précédentes peuvent être des variables aléatoires
    - $\hat{X}$  : estimateur de la quantité “ $X$ ”
  - Distance et norme
    - $|a|$  : valeur absolue du scalaire “ $a$ ”
    - $\|\mathbf{A}\|$  : norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{A}$
    - $\Delta(\mathbf{A};\mathbf{B})$  : angle entre les vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$

## Sigles et acronymes

ACI : Analyse en Composante Indépendante  
ACP : Analyse en Composante Principale  
AFD : Analyse Factorielle Discriminante  
BPSS : Bayesian Prior Source Separation  
BRDF : Bidirectional Reflectance Distribution Function  
BSS : Blind Source Separation  
CBOE : Coherent Backscattering Opposition Effect  
CRISM : Compact Reconnaissance Imaging Spectrometer for Mars  
ESA : European Space Agency  
ETR : Equation du Transfert Radiatif  
GCM : Global Climate Model  
GRS : Gamma Ray Spectrometer  
HDDC : High Dimensional Data Clustering  
HEND : High Energy Neutron Detector  
IAS : Institut d'Astrophysique Spatiale  
IFA : Independent Factor Analysis  
JADE : Joint Approximate Diagonalisation of Eigenmatrices  
K-ACP : Kernel - Analyse en Composante Principale  
K-AFD : Kernel - Analyse Factorielle Discriminante  
LIS : Laboratoire Image et Signaux  
LMD : Laboratoire de Météorologie Dynamique  
LPG : Laboratoire de Planétologie de Grenoble  
MGM : Modified Gaussian Model  
MGS : Mars Global Surveyor  
MNF : Minimum Noise Fraction  
MOLA : Mars Orbiter Laser Altimeter  
MRO : Mars Reconnaissance Orbiter  
NASA : National Aeronautics and Space Administration  
NPLD : North Polar Layered Deposit  
OMEGA : Observatoire pour la Minéralogie, l'Eau, les Glaces et l'Activité  
PLD : Polar Layered Deposit  
PNPC : Permanent North Polar Cap  
PP : Projection Pursuit  
PPI : Pixel Purity Index  
PSPC : Permanent South Polar Cap  
SAM : Spectral Angle Mapper  
SFF<sup>TM</sup> : Spectral feature Fitting

SHOE : Shadow Hiding Opposition Effect  
SNPC : Seasonnal North Polar Cap  
SNR : Signal to Noise Ratio  
SPLD : South Polar Layered Deposit  
SSPC : Seasonnal South Polar Cap  
STIC : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication  
SVD : Singular Decomposition Value  
SVM : Support Vector Machine  
TES : Thermal Emission Spectrometer  
THEMIS : Thermal Emission Imaging System  
USGS : United States Geological Survey

# Chapitre 12

## Rappels de Mathématiques

Ces rappels de Mathématiques sont formulés ici pour aider à la compréhension de cette thèse. Il s'agit de rassembler diverses parties dispersées ici et là dans la littérature. Toutes les démonstrations ne sont pas détaillées ici. J'invite le lecteur qui souhaite une vision plus approfondie à se tourner vers des ouvrages communs. Le livre de Sapora en français est une très bonne introduction aux statistiques (259). En probabilité, le livre de Papoulis en anglais est très complet (236). Il en existe bien évidemment beaucoup d'autres.

### 12.1 Distance et norme

#### 12.1.1 Axiomatique de la distance

##### 12.1.1.1 Définition

Soit un ensemble  $M$ . Une distance  $d(A, B)$  est une application  $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes pour  $A, B, C$  dans  $M$  :

La positivité :

$$d(A, B) \geq 0 \quad (12.1)$$

La séparation :

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \quad (12.2)$$

La symétrie :

$$d(A, B) = d(B, A) \quad (12.3)$$

L'inégalité triangulaire :

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C) \quad (12.4)$$

L'ensemble  $M$  muni d'une distance  $d$  est un espace métrique.

##### 12.1.1.2 Exemples

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ , la distance usuelle est définie comme :

$$d(A, B) = |A - B| \quad (12.5)$$

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^N$ , la distance de Manhattan est la suivante :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^N |\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i| \quad (12.6)$$

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^N$ , la distance euclidienne est la suivante :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i)^2} \quad (12.7)$$

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^N$ , il est possible de généraliser les distances en introduisant la distance  $L^p$  suivante :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i)^p} \quad (12.8)$$

La distance  $L^1$  est la distance de Manhattan, la distance  $L^2$  est la distance euclidienne, la distance  $L^\infty$  est la distance  $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup |\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i|$ .

## 12.1.2 Distance dans un espace vectoriel

### 12.1.2.1 Espace vectoriel

Un  $K$  espace vectoriel est un ensemble  $M$  muni de deux opérations vérifiant un certain nombre de propriétés. Une opération interne  $M \times M \rightarrow M$ , notée  $+$  et appelée "addition". Une opération externe  $K \times M \rightarrow M$ , notée  $*$  et appelée "multiplication scalaire". En pratique  $K$  sera le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Ces opérations doivent vérifier les propriétés suivantes pour  $A, B, C$  dans  $M$  et  $k, l$  dans  $K$  :

$$(A + B) = B + A \quad (12.9)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (12.10)$$

$M$  possède un élément, noté  $0$  tel que

$$A + 0 = 0 + A = A \quad (12.11)$$

$$A + (-1) * A = 0 \quad (12.12)$$

$$(1) * A = A \quad (12.13)$$

$$(1) * A = A \quad (12.14)$$

$$k * (A + B) = k * A + k * B \quad (12.15)$$

$$(k + l) * A = k * A + l * A \quad (12.16)$$

$$k * (l * A) = (k * l) * A \quad (12.17)$$

Par exemple, l'ensemble  $\mathbb{R}^{256}$  des données OMEGA est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Pour condenser la notation, les parenthèses inutiles et le signe  $*$  sont parfois omises.

### 12.1.2.2 Produit scalaire et norme

Dans un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $M$ , un produit scalaire est une application  $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui vérifie les propriétés suivantes pour  $A, B, C$  dans  $M$  et  $k$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\langle A; B \rangle = \langle B; A \rangle \quad (12.18)$$

$$\langle A + B; C \rangle = \langle A; C \rangle + \langle B; C \rangle \quad (12.19)$$

$$\langle A; kB \rangle = k \langle B; A \rangle \quad (12.20)$$

$$\langle A; A \rangle = \|A\| \geq 0 \quad (12.21)$$

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad (12.22)$$

**Inégalité de Cauchy-Schwartz** Remarquons que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\langle A + kB; A + kB \rangle \geq 0 \quad (12.23)$$

En développant :

$$\langle A; A \rangle + 2k \langle A; B \rangle + k^2 \langle B; B \rangle \geq 0 \quad (12.24)$$

L'égalité n'intervient que si  $A + kB = 0$ . Or un polynôme de degré 2 de signe constant a un discriminant négatif d'où l'"inégalité de Cauchy-Schwartz" :

$$\langle A; B \rangle^2 \leq \langle A; A \rangle \langle B; B \rangle \quad (12.25)$$

Cette inégalité permet de définir un angle, noté  $\Delta$ , dans un espace à  $n$  dimensions, par son cosinus compris entre 1 et -1 :

$$-1 \leq \frac{\langle A; B \rangle}{\sqrt{\langle A; A \rangle} \sqrt{\langle B; B \rangle}} \leq 1 \quad (12.26)$$

**Exemple de norme** l'ensemble  $\mathbb{R}^N$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel dans lequel on peut définir naturellement le produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n A_i B_i = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (12.27)$$

La norme euclidienne suivante, associée à ce produit scalaire, vérifie bien tous les axiomes de la distance :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} = \sqrt{\langle \mathbf{A} - \mathbf{B}; \mathbf{A} - \mathbf{B} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (A_i - B_i)^2} = \sqrt{(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})} \quad (12.28)$$

**Métrique** Soit un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $M$ . Une "forme bilinéaire"  $B(\mathbf{A}; \mathbf{B})$  est une application  $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire à gauche et à droite qui peut s'écrire de la forme suivante :

$$B(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i M_{ij} B_j = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (12.29)$$

On peut montrer que l'ensemble des formes bilinéaires avec  $\mathbf{M}$  symétrique, définie ( $\text{rg}(\mathbf{M}) = \dim(M)$ ) et positive (valeurs propres toujours positives ou nulles) répondent aussi à la définition d'un produit scalaire. La matrice  $\mathbf{M}$  pondère l'espace, on appelle la "métrique".

Par exemple, la métrique  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$  correspond à l'espace euclidien usuel. La métrique de Mahalanobis en statistique permet une renormalisation par la variance  $\mathbf{M} = \widehat{\text{Cov}}(\mathbf{S})_{\lambda, \lambda'}^{-1}$ .

### 12.1.2.3 Un angle est une distance sur une hypersphère

Soit le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , noté  $E$ , tel que  $\|\mathbf{A}\| = 1$  pour tout  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Cet ensemble est souvent noté hypersphère de dimension  $n$  ou  $n$ -hypersphère. Nous pouvons définir l'angle  $\Delta$  pour  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  dans  $E$  :

$$\Delta(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = \arccos \left( \frac{\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|} \right) \quad (12.30)$$

Vérifions que l'angle  $\Delta$  est bien une distance :

- Positivité : l'angle  $\Delta$  est toujours positif car la fonction arccos a valeur dans  $\mathbb{R}^+$ .
- Séparation : Prouvons cet axiome :



$$\Delta(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = 0 \iff \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|}\right) = 0 \quad (12.31)$$

$$\iff \frac{\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|} = 1 \quad (12.32)$$

$$\iff \langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle = 1 \quad (12.33)$$

$$\iff \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| - 2\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle = 0 \quad (12.34)$$

Nous pouvons reconnaître l'équation 12.24 pour  $\Delta = -1$ . Dans ce cadre  $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{B} = 0$  implique :

$$\Delta(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (12.35)$$

- Symétrie : L'angle  $\Delta$  est bien symétrique il découle d'un produit scalaire  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  symétrique.
- Inégalité triangulaire :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + d(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \quad (12.36)$$

Cette inégalité n'a pas de démonstration courte. Dressons la méthodologie à suivre. Il faut d'abord montrer que le chemin le plus court entre deux points sur une sphère unitaire est bien celui porté par le produit vectoriel  $\langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle$ . En suite, il suffit de montrer que la distance sur une sphère unitaire est l'angle en radian.

## 12.2 Espace vectoriel de dimension infinie

### 12.2.1 Ensemble de fonctions intégrables

Une fonction  $A(x)$  est intégrable, au sens de Lebesgue, si elle a la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)| dx < +\infty \quad (12.37)$$

L'ensemble de fonctions intégrables, au sens de Lebesgue, est noté  $L^1(\mathbb{R})$ .

Dans cet ensemble  $L^1(\mathbb{R})$ , deux fonctions  $A(x)$  et  $B(x)$  sont égales si elles diffèrent seulement sur des points de mesure nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x) - B(x)| dx < 0 \quad (12.38)$$

De la même manière l'intégrabilité peut être défini pour tous les ordres  $p$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|^p dx < +\infty \quad (12.39)$$

Définissant ainsi les ensembles  $L^p(\mathbb{R})$ .

### 12.2.2 Espace des fonctions intégrables

#### 12.2.2.1 Espace de Banach

Un ensemble de fonctions intégrables  $M$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  est appelé espace de Banach.

Dans cet espace  $M$ , la convergence d'une suite de Cauchy  $\{A(x)\}_n$  s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{A(x)\}_n = A \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\{A(x)\}_n - A\| = 0 \quad (12.40)$$

Si toutes les suites de Cauchy convergent dans  $M$ , l'espace de Banach est dit "complet".

### 12.2.2.2 Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert, noté  $\mathbf{H}$ , est un espace de Banach  $M$  muni d'un produit interne, généralisation du produit scalaire (voir annexe 12.1.2.2).

Par exemple le produit interne usuel, pour  $A, B$  dans  $M$  :

$$\langle A; B \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)B^*(x)dx \quad (12.41)$$

L'espace de Banach  $L^2(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel  $\langle ; \rangle$  est un espace de Hilbert.

Les espaces de Hilbert sont la généralisation des espaces vectoriels en dimensions infinies. Ils permettent d'étendre la définition de l'angle  $\alpha$  (voir annexe 12.1.2.2).

### 12.2.3 Propriétés des espaces hilbertiens

Intéressons-nous à quelques propriétés des espaces hilbertiens réels (espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ ).

#### 12.2.3.1 Base

Une famille  $\{e_n\}$  de  $N$  éléments d'un espace hilbertien  $\mathbf{H}$  est dite orthogonale si pour  $n \neq p$  :

$$\langle e_n; e_p \rangle = 0 \quad (12.42)$$

Une famille  $\{e_n\}$  est une base orthogonale de l'espace  $\mathbf{H}$  s'il existe une série  $\lambda(n)$ , pour tout élément  $f$  de  $\mathbf{H}$  tel que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N \lambda(n) \cdot e_n \right\| = 0 \quad (12.43)$$

Un espace de Hilbert admettant une base orthogonale est dit "séparable". L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  est séparable. L'orthogonalité implique la formule de reconstruction suivante :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f; e_n \rangle}{\|e_n\|} \cdot e_n \quad (12.44)$$

La base est dite orthonormale si  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n$  de  $N$ .

Une base orthonormale admet la relation de Parseval :

$$\langle f; g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f; e_n \rangle \cdot \langle g; e_n \rangle \quad (12.45)$$

et la relation de Plancherel, à propos de la conservation de l'énergie :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f; e_n \rangle|^2 \quad (12.46)$$

#### 12.2.3.2 Opérateur linéaire

Un opérateur linéaire  $T$ , d'un espace  $\mathbf{H}_1$  dans  $\mathbf{H}_2$  a les propriétés suivantes, pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ , tout  $f$  dans  $\mathbf{H}_1$  et tout  $g$  dans  $\mathbf{H}_2$  :

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g) \quad (12.47)$$

L'opérateur  $T^*$  "adjoint" de  $T$ , d'un espace  $\mathbf{H}_2$  dans  $\mathbf{H}_1$  est défini de cette manière :

$$\langle Tf; g \rangle = \langle f; T^*g \rangle \quad (12.48)$$

Si  $T^*T = TT^*$ , l'opérateur  $T$  est dit “normal”. Si  $T^* = T$ , l'opérateur  $T$  est dit “auto-adjoint”.

Un vecteur  $f$  non-nul de  $\mathbf{H}_1$  est appelé vecteur propre, s'il existe une valeur propre  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que :

$$Tf = \lambda f \quad (12.49)$$

Dans le cadre d'un espace à dimension finie, un opérateur auto-adjoint est toujours diagonalisable dans une base orthogonale  $Te_n = \lambda_n e_n$ .

En utilisant la formule de reconstruction, on obtient :

$$Tf = \sum_{n=1}^N \langle Tf; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle f; e_n \rangle \cdot e_n \quad (12.50)$$

Dans le cadre général des espaces de Hilbert  $\mathbf{H}$ , ce résultat peut être généralisé en utilisant le spectre de l'opérateur, une notion à manipuler avec précaution.

**Projecteur** Soit  $\mathbf{V}$  un sous-espace de  $\mathbf{H}$ . Un projecteur  $P_V$  est un opérateur linéaire de  $\mathbf{H}$  vers  $\mathbf{V}$  tel que, pour tout  $f$  dans  $\mathbf{H}$  :

$$\forall P_V f \in \mathbf{V} \text{ et } \forall f \in \mathbf{V}, P_V f = f \quad (12.51)$$

Le projecteur est dit “orthogonal” si :

$$\forall f \in \mathbf{H} \text{ et } \forall g \in \mathbf{V}, \langle f - P_V f; g \rangle = 0 \quad (12.52)$$

### 12.2.3.3 Isométrie

L'opérateur quelconque  $P$  de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{H}$  est une isométrie s'il conserve le produit interne :

$$\forall f, g \in \mathbf{H}^2, \langle Pf; Pg \rangle = \langle f; g \rangle \quad (12.53)$$

et la norme :

$$\forall f \in \mathbf{H}, \|Pf\| = \|f\| \quad (12.54)$$

Un opérateur isométrique transforme une base orthogonale en une base orthogonale car :

$$\langle Pe_n; Pe_p \rangle = \langle e_n; e_p \rangle = 0 \quad (12.55)$$

Dans le cadre d'un opérateur linéaire normale, l'isométrie est équivalente à  $P^* = P^{-1}$ .

Un opérateur isométrique, ne change pas les angles :

$$\Delta(Pf; Pg) = \arccos \left( \frac{\langle Pf; Pg \rangle}{\|Pf\| \cdot \|Pg\|} \right) = \Delta(f; g) \quad (12.56)$$

## 12.3 Transformée en ondelette

Nos signaux sont modélisés par des fonctions d'énergie finie dans l'espace de Hilbert  $\mathbf{H}$  muni de la norme usuelle de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  de Banach et du produit scalaire usuel  $\langle ; \rangle$ . De la manière identique à la transformée de Fourier qui est une projection sur une base orthogonale construite à partir de sinus et de cosinus, la transformée en ondelette est une projection dans un nouvelle base faite d'ondelettes. Chaque ondelette est produite par une mise à l'échelle et un décalage d'une seule ondelette “mère” (203). En conséquence, une ondelette est uniquement définie par une échelle “s” et une position “p”.

L'ondelette mère est définie comme :

– une fonction de l'espace de Banach :

$$\Psi \in L^2(\mathbb{R}) \quad (12.57)$$

– de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0 \quad (12.58)$$

– centrée aux alentours de zéro  $t = 0$

– et normée :

$$\|\Psi\| = 1 \quad (12.59)$$

Elle est utilisée pour générer une famille de fonction :  $\Psi_{s,p}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{x-p}{s}\right)$

– qui peut être une base de  $L^2(\mathbb{R})$

– qui peut avoir la propriété d'orthonormalité :  $\forall (s, p, s', p'), \langle \Psi_{s,p}; \Psi_{s',p'} \rangle = \delta_{s,s'} \cdot \delta_{p,p'}$

L'originalité des ondelettes réside dans le fait que chaque fonction de base est localisée. Au contraire, une fonction sinus ou cosinus, définie par une période et une phase à l'origine, est non nulle sur le signal entier.

La transformée en ondelette  $WE(s,p)$  du signal  $E(x)$  est :

$$WE(s, p) = \langle E, \Psi_{s,p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^*\left(\frac{x-p}{s}\right) dx \quad (12.60)$$

Cette transformation est linéaire et peut être aussi écrite à l'aide du produit de convolution usuel :

$$WE(s, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^*\left(\frac{x-p}{s}\right) dx = f \star \Psi_s \quad (12.61)$$

avec  $\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^*\left(\frac{-x}{s}\right)$

Il existe différentes classes d'ondelettes mère, chacune ayant des propriétés particulières (notamment des non-bases et des non-orthogonalités).

J'ai choisi d'utiliser la famille d'ondelette orthonormale de Debauchie pour la méthode Wavanglet. Cette transformation a été pensée dans le but de bénéficier d'un algorithme rapide (249). Elle est plus rapide que les autres transformée en ondelette (34), ce qui lui confère un argument de taille pour la détection et la classification de formes spectrales dans le cadre d'une grande collection d'observations. De plus cette transformation est une isométrie, ce qui permet de calculer l'angle  $\alpha$ , directement dans l'espace des ondelettes  $WE(s, p)$ , sans passer par une transformation inverse.

## 12.4 Probabilité et statistique

### 12.4.1 Probabilité d'une variable aléatoire

#### 12.4.1.1 Axiomatiques

On définit un espace probabiliste comme une espace mesurable, la mesure de l'ensemble entier étant 1.

Soit une variable aléatoire  $X$  sur un espace support  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  d'élément noté  $\lambda$ . La densité de probabilité de  $X$  est  $f_X(\lambda)$  est définie à partir de la probabilité  $d\mathcal{P}$  d'occurrence de  $X$  dans la tranche d'espace  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ .

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda \leq X \leq \lambda + d\lambda) = f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.62)$$

La fonction densité de probabilité est normée car la probabilité sur tout l'espace support est 1.

Soit vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  sur un espace support  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  d'élément noté  $\lambda$ . De la même manière, la densité de probabilité de  $\mathbf{X}$ , notée  $f_{\mathbf{X}}(\lambda)$  est définie par :

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda \leq \mathbf{X} \leq \lambda + d\lambda) = f_{\mathbf{X}}(\lambda) d\lambda \quad (12.63)$$

**Exemples de densité de probabilités** Explicitons des densités de probabilités utilisées durant cette thèse :

- Variable aléatoire gaussienne dépendant de deux paramètres  $\mu, \sigma > 0$  :

$$f_{\text{gaussienne}}(\lambda) = \mathcal{N}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\lambda - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (12.64)$$

- Variable aléatoire de Laplace dépendant de deux paramètres  $\mu, \theta > 0$  :

$$f_{\text{Laplace}}(\lambda) = \mathcal{L}(\mu, \sigma) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|\lambda - \mu|}{\theta}\right) \quad (12.65)$$

- Vecteur aléatoire gaussien dépendant du vecteur de moyenne  $\mu$  et de la matrice de covariance  $\Sigma$  :

$$f_{\text{gaussienne}}(\lambda) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma) = (2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\lambda - \mu)\right) \quad (12.66)$$

- Gamma dépendant de deux paramètres  $\alpha \geq, \beta > 0$  :

$$f_{\text{gamma}}(\lambda) = \mathcal{G}(\mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) & \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12.67)$$

avec la fonction factorielle généralisée, notée gamma  $\Gamma(\alpha)$  :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (12.68)$$

### 12.4.1.2 Espérance et moment

La moyenne  $\langle X \rangle$  de la variable aléatoire  $X$  est l'intégration sur l'espace de la position affectée du poids probabiliste.

$$\langle X \rangle = \int_{\Omega} \lambda f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.69)$$

C'est l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  de la variable aléatoire  $X$  :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathcal{P} = \int_{\Omega} \lambda f_X(\lambda) d\lambda = \langle X \rangle \quad (12.70)$$

Soit  $g$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ . La variable aléatoire  $Y$ , définie comme  $Y = g(X)$ , a pour densité de probabilité  $f_Y(\lambda')$  avec  $\lambda' = g(\lambda)$  un élément de  $\Omega'$ . La quantité conservée est la probabilité dans la tranche d'espace (c'est la "consistance" propre à la théorie de la mesure et nécessaire pour l'inversion) :

$$d\mathcal{P} = f_X(\lambda) d\lambda = f_Y(\lambda') d\lambda' = f_Y(g^{-1}(\lambda)) g'(\lambda) d\lambda = \frac{f_X(g^{-1}(\lambda'))}{|g'(g^{-1}(\lambda'))|} d\lambda' \quad (12.71)$$

Attention, la transformation  $g$  n'est pas toujours dérivable ni inversible ! Dans ce dernier cas, il faut tenir compte de la duplicité des solutions. Le calcul de  $f_Y$  n'est pas toujours facile, cependant l'espérance  $\mathbb{E}(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$  est très facile à déterminer grâce à la formule suivante :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(Y) = \int_{\Omega} g(\lambda) f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.72)$$

Par extension de la moyenne  $\langle X \rangle$ , on définit ainsi l'espérance  $\mathbb{E}(g(X))$  de la variable aléatoire  $g(X)$  comme l'intégration sur l'espace, d'une fonction quelconque  $g(\lambda)$  affectée de son poids probabiliste.

En particulier, on peut définir l'espérance des fonctions puissance, que l'on appelle moment d'ordre  $n$ , noté  $\mathcal{M}_n(X)$  (ou  $\mathcal{M}_n$  pour simplifier la notation) comme :

$$\mathcal{M}_n = \mathbb{E}(X^n) = \int_{\Omega} X^n d\mathcal{P} = \int_{\Omega} \lambda^n f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.73)$$

Le moment  $\mathcal{M}_0$  d'ordre 0 vaut 1, le moment  $\mathcal{M}_1$  d'ordre 1 est la moyenne  $\langle X \rangle$ .

Les moments centrés  $\mathcal{M}\mathcal{C}_n$  d'ordre  $n$  sont :

$$\mathcal{M}\mathcal{C}_n = \mathbb{E}((X - \langle X \rangle)^n) = \int_{\Omega} (X - \langle X \rangle)^n d\mathcal{P} = \int_{\Omega} (\lambda - \langle X \rangle)^n f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.74)$$

Le moment centré  $\mathcal{M}\mathcal{C}_0$  d'ordre 0 vaut 1, le moment centré  $\mathcal{M}\mathcal{C}_2$  d'ordre 2 est la "variance", notée  $\mathcal{V}ar$ .

### 12.4.1.3 Fonctions caractéristiques

La fonction caractéristique  $\phi_X(\omega)$  de la variable aléatoire  $X$  est définie comme la transformée de Fourier de  $f_X(\lambda)$ , avec  $j^2 = -1$  :

$$\phi_X(\omega) = \mathbb{E}(\exp(j\omega X)) = \int_{\Omega} \exp(j\omega\lambda) f_X(\lambda) d\lambda = \mathcal{F}\{f_X(\lambda)\} \quad (12.75)$$

Ainsi la connaissance de  $\phi_X(\omega)$  est équivalente à celle de  $f_X(\lambda)$  ce qui peut être intéressant pour estimer les densités de probabilité lors de changement de variable. Si la variable aléatoire  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ , alors la fonction caractéristique  $\phi_X$  est  $k$  fois dérivable en zéro et on a la relation suivante :

$$\phi_X^{(k)}(\omega = 0) = \int_{\Omega} (j\lambda)^k f_X(\lambda) d\lambda = j^k \mathbb{E}(X^k) = j^k \mathcal{M}_k \quad (12.76)$$

On appelle  $\phi_X$  la "fonction génératrice de moment".

On peut définir aussi la fonction génératrice de cumulants  $\varphi_X$  de la variable aléatoire  $X$  par :

$$\varphi_X(\omega) = \ln(\phi_X) = \ln \left( \int_{\Omega} \exp(j\omega\lambda) f_X(\lambda) d\lambda \right) \quad (12.77)$$

$$\varphi_X^{(k)}(\omega = 0) = j^k \mathcal{C}um_k(X) \quad (12.78)$$

Souvent le cumulants  $\mathcal{C}um_k(X)$  d'ordre  $k$  sera noté  $\mathcal{C}um_k$  pour simplifier la notation.

## 12.4.2 Opérations sur deux variables aléatoires

### 12.4.2.1 Distribution jointe et indépendance

La "distribution jointe" est un vecteur aléatoire qui est la simple concaténation de plusieurs variables aléatoires. La densité de probabilité de la distribution jointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est notée  $f_{X,Y}(\lambda, \lambda')$  et s'écrit :

$$d\mathcal{P}_{X,Y} = f_{X,Y}(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda' \quad (12.79)$$

On peut montrer que la fonction densité de probabilité est bien normée, c'est à dire que la probabilité sur tout l'espace support est bien 1.

Les deux variables aléatoires sont dites "indépendantes" si la probabilité conjointe dans la tranche d'espace peut s'écrire sous la forme :

$$d\mathcal{P}_{X,Y} = d\mathcal{P}_X d\mathcal{P}_Y = f_X(\lambda) f_Y(\lambda') d\lambda d\lambda' \quad (12.80)$$

### 12.4.2.2 Somme de deux variables aléatoires

La variable aléatoire  $Z=X+Y$  somme de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  a pour densité de probabilité :

$$f_Z(\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} f_{X,Y}(\lambda - \lambda', \lambda')d\lambda'd\lambda \quad (12.81)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, nous pouvons écrire :

$$f_Z(\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} f_X(\lambda - \lambda')f_Y(\lambda')d\lambda'd\lambda = f_X(\lambda') \star f_Y(\lambda')d\lambda \quad (12.82)$$

Avec le produit de convolution noté “ $\star$ .”

### 12.4.2.3 Produit de deux variables aléatoires

La variable aléatoire  $Z=X.Y$  produit de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  a pour densité de probabilité :

$$f_Z(\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} \frac{1}{|\lambda'|} f_{X,Y}(\lambda', \frac{\lambda}{\lambda'})d\lambda'd\lambda \quad (12.83)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, nous pouvons écrire :

$$f_Z(\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} \frac{1}{|\lambda'|} f_X(\lambda')f_Y(\frac{\lambda}{\lambda'})d\lambda'd\lambda \quad (12.84)$$

### 12.4.2.4 Cumul de deux états de probabilités

Le cumul de deux états d’information représentés par deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dans espace support  $\Omega$  d’élément noté  $\lambda$  est l’union des deux variables aléatoires :

$$d\mathcal{P}_{X \cup Y} = d\mathcal{P}_X + d\mathcal{P}_Y = f_{X \cup Y}(\lambda)d\lambda = (f_X(\lambda) + f_Y(\lambda))d\lambda \quad (12.85)$$

L’opération de cumul d’état de probabilité est pratiqué par exemple quand toutes les variables aléatoires sont issues du même processus. Dans la construction classique d’un nuage de points, chaque occurrence est représentée d’un point. L’histogramme du nuage de points, c’est à dire la somme des occurrences dans une grille, décrit la variable aléatoire du processus.

Dans une construction plus avancée, chaque occurrence est une variable aléatoire qui représente un état d’information, tenant à la fois compte des incertitudes de mesures et de l’occurrence. L’histogramme dans ce cas-là deviendrait le cumul des états d’informations, c’est à dire la simple somme de chaque variable aléatoire d’occurrence.

### 12.4.2.5 Conjonction de deux états de probabilités

La conjonction de deux états d’information représentés par deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dans espace support  $\Omega$  d’élément noté  $\lambda$  est l’intersection entre deux variables aléatoires :

$$d\mathcal{P}_{X \cap Y} = \frac{d\mathcal{P}_X d\mathcal{P}_Y}{d\mathcal{P}_0} = f_{X \cap Y}(\lambda)d\lambda = \frac{f_X(\lambda)f_Y(\lambda)}{f_0(\lambda)}d\lambda \quad (12.86)$$

Le terme  $d\mathcal{P}_0$  correspond à l’état d’information nulle qui n’est pas forcément une densité de probabilité uniforme. L’état d’information nulle dépend de l’espace support.

### 12.4.2.6 Distribution conditionnelle et théorème de Bayes

La distribution d'une variable aléatoire, notée  $X \mid Y$ , de  $X$  à la condition exprimée par la variable aléatoire  $Y$  dans espace support  $\Omega$  d'élément noté  $\lambda$  est :

$$f_{X|Y}(\lambda)d\lambda = d\mathcal{P}_{X|Y} = \frac{d\mathcal{P}_{X,Y}}{d\mathcal{P}_Y} = \frac{f_{X,Y}(\lambda, \lambda')}{f_Y(\lambda')}d\lambda \quad (12.87)$$

Parfois le terme  $f_{X|Y}(\lambda)$  est noté  $f(\lambda|\lambda')$ .

Le théorème de Bayes, basé sur la définition de la distribution conditionnelle, est le suivant :

$$f_{X|Y}(\lambda) = \frac{f_{Y|X}(\lambda)f_X(\lambda)}{f_Y(\lambda)} \quad (12.88)$$

**Vraisemblance** La vraisemblance est introduite dans l'analyse de données. Il s'agit de  $\mathcal{P}(\mathbf{D}|\mathbf{M})$  l'état de probabilité des données  $\mathbf{D}$  sachant un modèle  $\mathbf{M}$  paramétrique statistique.

Souvent, les paramètres du modèles ne sont pas connus (moyenne, variance,...). L'approche du maximum de vraisemblance consiste à maximiser  $\mathcal{P}(\mathbf{D}|\mathbf{M})$  en ajustant les paramètres du modèle.

La solution explicite du maximum de vraisemblance pose des difficultés de calcul. L'algorithme itératif d'Expectation/Maximisation permet de d'atteindre la solution d'un maximum local de la vraisemblance.

La première étape est l'expectation, c'est à dire l'évaluation de l'espérance  $\mathbb{E}(\mathbf{D}|\mathbf{M})$  pour un ensemble de valeurs des paramètres du modèle  $\mathbf{M}$ .

La seconde étape est la maximisation de l'espérance  $\mathbb{E}(\mathbf{D}|\mathbf{M})$ .

### 12.4.2.7 Moments de deux variables aléatoires

On peut définir les moments, quantité tensorielle, dans le cadre de plusieurs variables aléatoires. En particulier, on peut définir l'espérance des fonctions puissance, que l'on appelle moment  $\mathcal{M}_{n,p}$  d'ordre  $n+p$ , comme :

$$\mathcal{M}_{n,p} = \mathbb{E}(X^n Y^p) = \int_{\Omega} \lambda^n \lambda'^p f_{X,Y}(\lambda, \lambda')d\lambda d\lambda' \quad (12.89)$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\mathcal{M}_{n,p} = \mathbb{E}(X^n Y^p) = \mathbb{E}(X^n) \mathbb{E}(Y^p) = \mathcal{M}_{n,0} \mathcal{M}_{0,p} \quad (12.90)$$

Les moments centrés  $\mathcal{M}\mathcal{C}_{n,p}$  d'ordre  $n+p$  sont :

$$\mathcal{M}\mathcal{C}_{n,p} = \mathbb{E}((X - \mathcal{M}_{1,0})^n (Y - \mathcal{M}_{0,1})^p) = \int_{\Omega} (\lambda - \mathcal{M}_{1,0})^n (\lambda' - \mathcal{M}_{0,1})^p f_{X,Y}(\lambda, \lambda')d\lambda d\lambda' \quad (12.91)$$

En particulier le moment centré  $\mathcal{M}\mathcal{C}_{1,1}$  est appelé covariance.

Si les variables aléatoires sont indépendantes, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\mathcal{M}\mathcal{C}_{n,p} = \mathbb{E}((X - \mathcal{M}_{1,0})^n (Y - \mathcal{M}_{0,1})^p) = \mathbb{E}((X - \mathcal{M}_{1,0})^n) \mathbb{E}((Y - \mathcal{M}_{0,1})^p) = \mathcal{M}\mathcal{C}_{n,0} \mathcal{M}\mathcal{C}_{0,p} \quad (12.92)$$

La covariance peut s'écrire de façon générale comme :

$$\mathcal{M}\mathcal{C}_{1,1} = \mathbb{E}((X - \mathcal{M}_{1,0})(Y - \mathcal{M}_{0,1})) = \mathbb{E}(X.Y) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) \quad (12.93)$$

Si la covariance est nulle, on dit que les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont "acorrélées" ou "décorrélées".

Si les deux variables aléatoires sont indépendantes, elles sont acorrélées mais la réciproque n'est pas vrai.

On dit que deux variables aléatoires sont "orthogonales" si  $\mathbb{E}(X.Y) = 0$ .



### 12.4.2.8 Fonctions caractéristiques de deux variables aléatoires

De la même manière que pour une variable aléatoire, on peut définir la fonction caractéristique génératrice des moments  $\phi_{X,Y}$  de la distribution jointe de densité de probabilité  $f_{X,Y}$  :

$$\phi_{X,Y}(\omega, \omega') = \mathbb{E}(\exp(j\omega X + j\omega' Y)) = \int_{\Omega} \exp(j\omega\lambda + j\omega'\lambda') f_{X,Y}(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda' = \mathcal{F} \{f_{X,Y}(\lambda, \lambda')\} \quad (12.94)$$

Les moments  $\mathcal{M}_{n,p}$  d'ordre  $n+p$  peuvent être retrouvés à partir de :

$$\frac{\partial^n \partial^p}{\partial \omega^n \partial \omega'^p} \phi_{X,Y}(0,0) = j^{(n+p)} \mathbb{E}(X^n Y^p) = j^{(n+p)} \mathcal{M}_{n,p} \quad (12.95)$$

De manière identique, la fonction génératrice de cumulant est :

$$\varphi_{X,Y}(\omega, \omega') = \ln(\phi_{X,Y}(\omega, \omega')) \quad (12.96)$$

Les cumulants  $\mathcal{C}um_{n,p}$  d'ordre  $n+p$  sont définis à partir de :

$$\frac{\partial^n \partial^p}{\partial \omega^n \partial \omega'^p} \varphi_{X,Y}(0,0) = j^{(n+p)} \mathcal{C}um_{n,p} \quad (12.97)$$

Pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes, nous pouvons écrire la fonction caractéristique de la distribution jointe :

$$\phi_{X,Y}(\omega, \omega') = \phi_X(\omega) \cdot \phi_Y(\omega') = \mathcal{F} \{f_{X,Y}(\lambda, \lambda')\} \quad (12.98)$$

Et la seconde fonction caractéristique :

$$\varphi_{X,Y}(\omega, \omega') = \varphi_X(\omega) + \varphi_Y(\omega') \quad (12.99)$$

Si les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, nous pouvons écrire la relation d'annulation des cumulants croisés :

$$\mathcal{C}um_{n,p} = 0 \mid n \neq 0 \text{ et } p \neq 0 \quad (12.100)$$

Cette propriété est toujours vraie pour cumulant, même d'ordre supérieur.

## 12.4.3 Moment et cumulant

### 12.4.3.1 Fonctions caractéristiques de plusieurs variables aléatoires

Pour des vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}$  de  $N$  variables aléatoires, il est possible de définir un ensemble de tenseurs d'ordre 0 à d'ordre  $N$  qui contiennent toutes les informations mutuelles jusqu'à l'ordre  $N$ .

Par exemple, à l'ordre 4, le "tenseur des moments croisés d'ordre 4" est défini comme :

$$\mathcal{M}_{n,p,q,r} = \mathbb{E}(X_1^n X_2^p X_3^q X_4^r) \quad (12.101)$$

La somme  $n+p+q+r=4$  est contrainte.

Il est possible de définir de tels tenseurs jusqu'à l'ordre  $N$ , la dimension du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ .

La fonction génératrice des moments est définie par :

$$\phi_{\mathbf{X}}(\omega) = \mathbb{E}(\exp(j\omega \cdot \mathbf{X}^T)) = \int_{\Omega} \exp(j\omega \cdot \mathbf{X}^T) f_{\mathbf{X}}(\lambda) d\lambda = \mathcal{F} \{f_{\mathbf{X}}(\lambda)\} \quad (12.102)$$

Le tenseur des moments  $\mathcal{M}_{p_1, p_2, \dots, p_N}$  d'ordre  $N$  associé à cette fonction est :

$$\frac{(\partial^{p_1}) (\partial^{p_2}) \dots (\partial^{p_N})}{(\partial \omega_1^{p_1}) (\partial \omega_1^{p_2}) \dots (\partial \omega_1^{p_N})} \phi_{\mathbf{X}}(0) = j^{(N)} \mathcal{M}_{p_1, p_2, \dots, p_N} \quad (12.103)$$

De manière identique, la fonction génératrice de cumulants est :

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\omega) = \ln(\phi_{\mathbf{X}}(\omega)) \quad (12.104)$$

Le tenseur des cumulants  $\mathcal{C}um_{p_1, p_2, \dots, p_N}$  d'ordre  $N$  est défini à partir de :

$$\frac{(\partial^{p_1}) (\partial^{p_2}) \dots (\partial^{p_N})}{(\partial \omega_1^{p_1}) (\partial \omega_1^{p_2}) \dots (\partial \omega_1^{p_N})} \varphi_{\mathbf{X}}(0) = j^{(N)} \mathcal{C}um_{p_1, p_2, \dots, p_N} \quad (12.105)$$

Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la densité de probabilité du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$f_{\mathbf{X}}(\lambda) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(\lambda_i) \quad (12.106)$$

La fonction génératrice de moment s'écrit :

$$\phi_{\mathbf{X}}(\omega) = \mathcal{F} \{f_{\mathbf{X}}(\lambda)\} = \prod_{i=1}^N \phi_{X_i}(\omega_i) \quad (12.107)$$

La fonction génératrice de cumulants s'écrit :

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\omega) = \ln(\phi_{\mathbf{X}}(\omega)) = \sum_{i=1}^N \varphi_{X_i}(\omega_i) \quad (12.108)$$

Le tenseur des cumulants  $\mathcal{C}um_{p_1, p_2, \dots, p_N}$ , quel que soit son ordre, a la propriété suivantes :

$$\mathcal{C}um_{p_1, p_2, \dots, p_N} = 0 \mid p_i \neq 0 \text{ pour tout } i \quad (12.109)$$

Les cumulants croisés sont nuls.

### 12.4.3.2 Somme de variables aléatoires indépendantes

**Somme de plusieurs variables aléatoires** Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur aléatoire de  $N$  variables aléatoires indépendantes, noté  $\mathbf{X}_i$ . La variable aléatoire  $Z = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i$  a pour densité de probabilité :

$$f_Z(\lambda) = f_{X_1}(\lambda_1) \star f_{X_2}(\lambda_2) \star \dots \star f_{X_N}(\lambda_N) \quad (12.110)$$

Avec le produit de convolution noté “ $\star$ ”.

La fonction caractéristique génératrice de moment de  $Z$  s'écrit :

$$\phi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^N \phi_{X_i}(\omega_i) \quad (12.111)$$

La fonction caractéristique génératrice de cumulants de  $Z$  s'écrit :

$$\varphi_Z(\omega) = \ln(\phi_Z(\omega)) = \sum_{i=1}^N \varphi_{X_i}(\omega_i) \quad (12.112)$$

**Théorème central limite** Le théorème central limite concerne la variable aléatoire  $\bar{X}$  somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sigma \sqrt{n}}$ . Il peut s'écrire de la façon suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{X}}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (12.113)$$

Quand le nombre de variables aléatoires tend vers l'infini, la variable aléatoire somme a une densité de probabilité qui tend vers une gaussienne.

Ce théorème est vrai pour les variables aléatoires  $X_n$  ayant des moyennes et variances convergentes. On parle alors de “bassin d'attractivité gaussien”.

### 12.4.4 Statistique et estimation

La densité de probabilité n'est pas mesurable directement dans la Nature, seul un ensemble d'occurrence de la variable est disponible. Pour avoir accès à des informations sur la densité de probabilité nous devons effectuer une estimation. Par exemple, la moyenne, qui est un indicateur de la densité de probabilité (moment d'ordre 1) doit être estimé à partir des données mesurées. Un estimateur de la quantité "Q" va être noté " $\widehat{Q}$ ", une occurrence particulière va être notée " $Q_i$ ". On considère que toutes les occurrences sont indépendantes.

L'estimateur  $\widehat{\langle X \rangle}$  usuel de la moyenne de la variable aléatoire X est défini comme :

$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad (12.114)$$

L'estimateur usuel de la covariance  $\widehat{\mathcal{C}ov}(X, Y)$  entre les variables aléatoires X et Y est défini comme :

$$\sigma(X, Y) = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \widehat{\langle X \rangle})(Y_i - \widehat{\langle Y \rangle})}{n-1} \quad (12.115)$$

**Propriétés des estimateurs** Un estimateur doit comporter les propriétés suivantes :

- Convergent : convergence vers la quantité probabiliste quand le nombre de mesure tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{Q} = \int_{\Omega} Q d\mathcal{P} = \mathbb{E}(Q) \quad (12.116)$$

Par exemple pour la moyenne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\langle Q \rangle} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{n} = \int_{\Omega} Q d\mathcal{P} = \mathbb{E}(Q) \quad (12.117)$$

- Non biaisé : Espérance mathématique de l'estimateur doit être convergente vers la quantité probabiliste indépendamment du nombre de mesure :

$$\mathbb{E}(\widehat{Q}) = Q \quad (12.118)$$

- Efficace : La convergence vers la quantité probabiliste doit être la plus rapide possible :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( (Q - \widehat{Q})^2 \right) = 0 \quad (12.119)$$

Les estimateurs  $\mu$  et  $\sigma$  comportent bien ces trois propriétés des estimateurs. Nous allons donc identifier  $\mu = \widehat{\langle X \rangle}$ ,  $\sigma(X, X) = \widehat{\mathcal{V}ar}(X)$  et  $\sigma(X, Y) = \widehat{\mathcal{C}ov}(X, Y)$ .

### 12.4.5 Distance entre variables aléatoires

La distance au sens mathématique pour comparer des distributions de probabilités  $f_X(\lambda)$  et  $f_Y(\lambda)$  des variables aléatoires X et Y. Il en existe plusieurs (171), détaillons ici les plus courantes :

La "divergence de Kullback-Liebler"  $K(f_X(\lambda), f_Y(\lambda))$  n'a pas toutes les propriétés d'une distance, notamment, elle n'est pas symétrique. Elle s'écrit :

$$K(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) = \int_{\Omega} f_X(\lambda) \ln \frac{f_X(\lambda)}{f_Y(\lambda)} d\lambda \quad (12.120)$$

La "divergence symétrisée de Kullback-Liebler"  $KS(f_X(\lambda), f_Y(\lambda))$  s'écrit :

$$KS(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) = K(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) + K(f_Y(\lambda), f_X(\lambda)) \quad (12.121)$$

La “distance de Bhattacharyya” s’écrit :

$$B(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) = -\ln \int_{\Omega} \sqrt{f_X(\lambda) \cdot f_Y(\lambda)} d\lambda \quad (12.122)$$

La “distance de Mahalanobis” s’écrit uniquement en fonction des moments d’ordre inférieurs à 2 :

$$M(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) = \sqrt{\frac{(\mathcal{V}ar(\mathbf{X}) - \mathcal{V}ar(\mathbf{Y}))^2}{\mathcal{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}} \quad (12.123)$$

La “distance de Jeffreys-Matusita” s’écrit :

$$JM(f_X(\lambda), f_Y(\lambda)) = \sqrt{\int_{\Omega} (\sqrt{f_Y(\lambda)} - \sqrt{f_X(\lambda)})^2 d\lambda} \quad (12.124)$$

### 12.4.6 Entropie, néguentropie et information mutuelle

**Entropie** L’entropie  $S(f_X(\lambda))$ , introduite par Shannon (267), est une mesure de la quantité d’information contenue dans une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  de densité de probabilité  $f_X(\lambda)$ . Elle s’écrit :

$$S(f_X(\lambda)) = -\int_{\Omega} f_X(\lambda) \ln f_X(\lambda) d\lambda \quad (12.125)$$

On peut montrer qu’un vecteur aléatoire, à moyenne et matrice de covariance fixée, maximisant l’entropie, est de forme gaussienne. La démonstration peut se faire par des multiplicateurs de Lagrange.

**Néguentropie** La néguentropie  $J(f_X(\lambda))$  est une mesure du déficit d’information par rapport à l’état maximum gaussien. Introduisons la variable aléatoire  $\mathbf{X}_g$  qui est le vecteur aléatoire gaussien de même moment d’ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) que la variable aléatoire  $\mathbf{X}$ . La néguentropie s’écrit comme suit :

$$J(f_X(\lambda)) = S(f_{\mathbf{X}_g}(\lambda)) - S(f_X(\lambda)) = K(f_X(\lambda), f_{\mathbf{X}_g}(\lambda)) \quad (12.126)$$

La seconde égalité indique qu’il est possible d’écrire la néguentropie à l’aide de la divergence de Kullback-Liebler qui s’approche d’une distance entre distribution. La néguentropie dépend uniquement des statistiques à l’ordre supérieur à 2.

**Information mutuelle** Soit un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de densité de probabilité  $f_X(\lambda)$  de dimension  $N_z$ . Si ce vecteur aléatoire est formé de variables aléatoires  $X_i$  de densité de probabilité  $f_{X_i}(\lambda_i)$  indépendantes, la densité de probabilité devrait s’écrire :

$$f_X(\lambda) = \prod_{i=1}^{N_z} f_{X_i}(\lambda_i) \quad (12.127)$$

On appelle information mutuelle  $I(f_X(\lambda))$ , la divergence de Kullback-Liebler entre la densité de probabilité  $f_X(\lambda)$  et celle que dans le cas indépendant.

$$I(f_X(\lambda)) = K\left(f_X(\lambda), \prod_{i=1}^{N_z} f_{X_i}(\lambda_i)\right) \quad (12.128)$$

L’information mutuelle est nulle si les variables sont indépendantes.

On peut écrire l’information mutuelle en fonction du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_g$  qui est le vecteur aléatoire gaussien de même moment d’ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) que la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  :

$$I(f_X(\lambda)) = I(f_{\mathbf{X}_g}(\lambda)) + J(f_X(\lambda)) + \sum_{i=1}^{N_z} J(f_{X_i}(\lambda_i)) \quad (12.129)$$

Le premier terme de la somme peut être calculé en fonction de la matrice de variance/covariance :

$$I(f_{\mathbf{X}_g}(\lambda)) = \frac{1}{2} \ln \frac{\prod_{i=1}^{N_z} \mathcal{C}ov(\mathbf{X})_{i,i}}{\det[\mathcal{C}ov(\mathbf{X})_{i,j}]} \quad (12.130)$$

Les autres termes sont issus de statistiques à l'ordre supérieur à 2.

## 12.5 Malédiction de la dimensionnalité

L'analyse des données en grande dimension est sujette à la malédiction de la dimensionnalité. Différents auteurs se sont penchés sur cette question, par exemple Donoho (61) (disponible en ligne<sup>1</sup>). Plus spécifiquement, la malédiction de la dimensionnalité a été étudiée dans le cadre des images hyperspectrales. Une partie de la thèse de Marc Lennon (186) traite de ce sujet. Aussi, quelques chapitres du livre de Landgrebe comportent des bonnes présentations du problème (171). Seuls quelques points clefs sont exposés dans cette section.

### 12.5.1 Complexité de la mesure en grande dimension

La "complexité de la mesure"  $C$  est le nombre de valeurs discrètes que peut prendre une variable dans un espace support. Pour un spectre d'une image hyperspectrale, la complexité de la mesure, est le nombre de spectres différents qu'il est possible d'enregistrer dans un cube  $\mathbf{C}_{z,\lambda}$ . La complexité est définie comme :

$$C = dyn^{N_\lambda} \quad (12.131)$$

Avec  $dyn$ , la dynamique des données pour chaque canal spectral et  $N_\lambda$  le nombre de canaux spectraux.

Voici des estimations de la complexité de la mesure pour deux cas extrêmes : une image scalaire codée en 8 bits a une dynamique de  $dyn = 2^8$  d'où  $C = 2^8 \simeq 10^2$ .

Une image OMEGA, codée en 16 bits, a une dynamique de  $dyn = 2^{16}$  d'où  $C = (2^{16})^{256} \simeq 10^{1233}$ .

La complexité de la mesure est à comparer avec les dimensions spatiales des images, c'est à dire le nombre total de pixels  $N_z$ .

Dans le cadre d'une image de fond d'écran de résolution  $1024 \times 768$ ,  $N_z \simeq 10^7$ . Une image OMEGA typique a une résolution de  $256 \times 1000$ ,  $N_z \simeq 10^6$ . L'ensemble de tous les spectres observés par OMEGA est de l'ordre de  $N_z \simeq 10^9$ .

La comparaison de la complexité de la mesure et de la taille réelle d'une image noir et blanc montre qu'il est possible d'échantillonner l'espace des possibles avec une seule image.

Une image hyperspectrale, voire d'une base de données complète d'imagerie hyperspectrale, a un espace profondément vide. Si tous les spectres de la base de données OMEGA étaient différents, il faudrait  $10^{1224}$  bases de données pour échantillonner toutes les valeurs possibles !

### 12.5.2 Classification en grande dimension

La classification statistique en grande dimension peut se faire d'après différents ordres.

Au premier ordre, on s'intéresse à la distance par rapport à la moyenne de la classe (voir section 3.2.2.2 page 66).

$$d(\mathbf{x}, \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda) = \left\| \mathbf{x} - \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda \right\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda)^T \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda)} \quad (12.132)$$

En ajoutant le second ordre, on s'intéresse aussi à la variabilité spectrale avec la matrice de covariance  $\widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}^{-1}$  (voir section 3.2.3.1 page 67). Dans ce cas, la distance s'écrit :

$$d\left(\mathbf{x}, \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda\right)^2 = -\frac{1}{2} \ln \left| \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'} \right| - \frac{1}{2} \left(\mathbf{x} - \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda\right)^T \cdot \widehat{\mathcal{C}ov}(\mathbf{S}_i)_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot \left(\mathbf{x} - \widehat{\langle \mathbf{S}_i \rangle}_\lambda\right) \quad (12.133)$$

<sup>1</sup><http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Lectures/AMS2000/AMS2000.html>

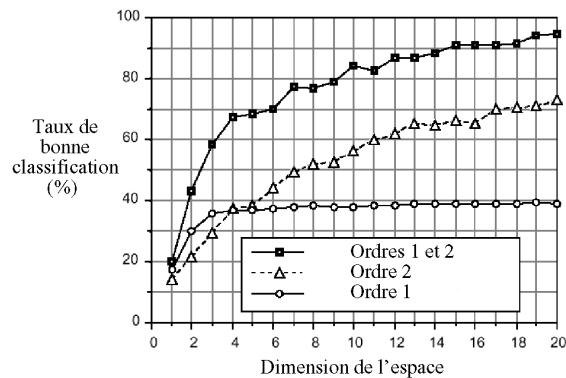


FIG. 12.1 – Comportement de la classification d'ordre 1 et 2 face à la malédiction de dimensionnalité (d'après (181)).

Pour étudier le comportement de ces deux classificateurs face à la malédiction de la dimensionnalité, une étude de cas a été effectuée par Lee et al. (181). L'échantillon des mesures consiste en 6660 spectres de terrains répartis en 12 classes parfaitement connues. L'échantillon d'apprentissage consiste en à un tirage aléatoire de 100 spectres par classe. La dimension spectrale est  $N_\lambda = 60$ .

Trois expériences ont été réalisées, pour les données en dimension spectrale évoluant de l'espace initial ( $N_\lambda = 60$ ) jusqu'à  $N_\lambda = 1$  en moyennant successivement les canaux adjacents :

1. Classification au premier ordre : avec le classifieur de l'équation 12.132.
2. Classification aux premier et second ordres : avec le classifieur de l'équation 12.133.
3. Classification au second ordre uniquement : avec le classifieur de l'équation 12.133. Pour éliminer le premier ordre, l'échantillon de test a été centré pour toutes les classes (la moyenne est nulle  $\langle \mathbf{S}_i \rangle_\lambda = 0_\lambda$ ).

Les résultats de ce test sont représentés dans le graphique 12.1 en terme de taux de classification correcte. Pour la méthode à l'ordre 1 uniquement, le taux de classification correcte sature à partir d'une certaine dimension.

Pour la méthode à l'ordre 1 et 2, le taux de classification correcte augmente avec la dimension.

Pour la méthode à l'ordre 2 uniquement, le taux de classification correcte augmente avec la dimension. Cette observation confirme que l'ordre 2 est bien seule responsable de l'augmentation du taux de classification correcte avec la dimension.

Cette étude montre que les classifications statistiques ont une dépendance à la dimension spectrale, fortement modulée par l'ordre de la méthode de classification. Les classifications déterministes (au premier ordre), c'est à dire les classifications manuelles (voir section 3.1 page 61) et les classifications automatiques qui nécessitent une base spectrale de référence (voir section 3.2.2 page 65), sont donc moins efficaces que les classifications statistiques utilisant les ordres supérieurs.

### 12.5.3 Phénomène de Hughes

Le phénomène de Hughes consiste en la transposition de la malédiction de dimensionnalité à un problème de classification statistique de type bayésien. Cette section ne présente pas les détails des travaux de Hughes mais se focalise sur les implications pour la classification d'images hyperspectrales.

L'étude de Hughes consiste à calculer la précision moyenne de la classification pour un problème à 2 classes en fonction de 3 paramètres : la complexité de la mesure  $C$  (voir annexe 12.5.1), le nombre d'échantillons d'apprentissage  $m$ , et la probabilité a priori  $p_i$  des classes  $i$  (125). La démonstration mathématique a été complétée par Abend et al. (2) mais ces améliorations ne changent pas les conclusions majeures.

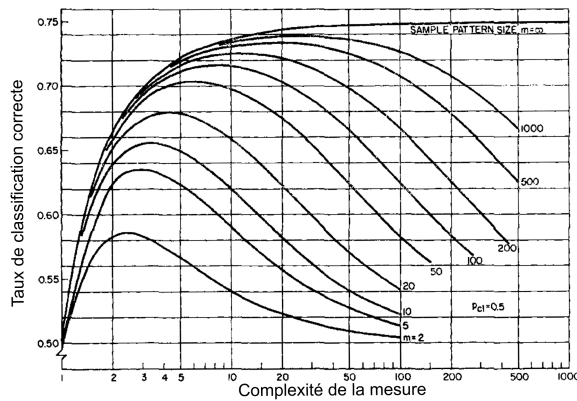


FIG. 12.2 – Phénomène de Hughes pour deux classes équiprobables (d’après (125)).

La figure 12.2 montre les résultats majeurs de l’étude pour deux classes équiprobables. Le taux de classification correcte dépend de la complexité de la mesure et comporte un optimum. Pour une complexité de la mesure plus faible ou plus forte que l’optimum (une dimension spectrale différente de l’optimum), le taux de bonne classification décroît.

L’optimum se fait à une complexité de la mesure (une dimension spectrale) qui est une fonction croissante de  $m$ , le nombre d’échantillon d’apprentissage.

Ces résultats sont interprétables de cette manière : à trop faible dimension  $C \ll m$ , la classification est mauvaise car la séparabilité des classes est faible. A trop grande dimension  $C \gg m$ , l’espace est vide et l’estimation statistique est mauvaise. Il existe donc un optimum du nombre de dimension pour la classification.

D’un point de vue statistique, l’objet des méthodes de réduction de dimensionnalité est d’atteindre l’optimum de la complexité de la mesure, ou du nombre de dimension spectrale, pour permettre la meilleure classification.

## 12.6 Les fractales

La symétrie d’échelle, introduite par Mandelbrot en 1967, étend la notion de symétrie aux objets fractaux (204).

Ces objets sont décrits par la loi d’échelle, qui relie une mesure  $M(\lambda)$  faite à l’échelle quelconque  $\lambda$ , à une mesure de référence  $M(\lambda_0)$  faite à l’échelle  $\lambda_0$ . Cette loi s’écrit :

$$M(\lambda) = M(\lambda_0) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^H \quad (12.134)$$

Avec  $H$  est l’exposant de Hurst ou dimension de Hausdorff.

Pour un profil, la dimension fractale est définie comme  $D = 2 - H$ . Pour une surface, respectivement un volume, la dimension fractale est définie comme  $D = 3 - H$ , respectivement  $D = 4 - H$ .

Dans son article célèbre, Mandelbrot montre que la côte bretonne suit une loi d’échelle et a une dimension entre 1 et 2 (204). Dans cet exemple géométrique, la mesure  $M(\lambda)$  est le nombre de disque de rayon  $\lambda$  nécessaire pour couvrir entièrement la figure de la côte. La côte bretonne, représentée sur une carte (2D), nécessite un nombre de disques pour recouvrir la surface augmentant exponentiellement avec l’échelle.

D’autres objets géométriques peuvent suivre des lois d’échelles, par exemple des figures géométriques que l’on peut construire mathématiquement sur un ordinateur.

Des objets non-géométriques peuvent aussi suivre des loi d’échelles, par exemple des distributions statistiques. Dans ce cas, la mesure  $M(\lambda)$  est une probabilité à une certaine échelle. Par exemple en économie, la distribution des salaires suit une loi d’échelle, avec  $M(\lambda)$  la probabilité de toucher un salaire

de  $\lambda$ . Ces lois statistiques sont des lois puissances dont aucun moment converge. On parle de “hasard sauvage” car les évènements extrêmes, c’est à dire les ailes de la distribution, sont dominants. La modélisation et l’usage de telles lois n’est pas pratique.

Dans certains cas, la probabilité n’est pas connue mais seulement la variance, ou un autre indicateur statistique. Ces indicateurs, calculés à une échelle particulière peuvent aussi suivre une symétrie d’échelle. On dira que la distribution est monofractale si tous les moments suivent la même loi d’échelle - avec le même exposant de Hurst  $H$  - ou multifractale si les moments d’ordre  $q$  suivent une loi d’échelle avec un exposant  $H(q)$  (91).





# Chapitre 13

Article présentant la méthode Wavanglet dans  
IEEE Transaction in Geoscience and Remote  
Sensing



Chapitre **14**

Article présentant la méthode BPSS  
appliquée aux données OMEGA dans  
Neurocomputing



Chapitre **15**

Article présentant le modèle de la récession  
de la calotte saisonnière Sud de Mars



# Bibliographie

- [1] *ENVI User's Guide*, ch. 9 : Spectral Tools, pp. 615–686, Research Systems, 2000.
- [2] K. Abend, T. Harley, B. Chandrasekaran, and G. Hughes, *Comments on 'on the mean accuracy of statistical pattern recognizers' by hughes, g. f.*, *Information Theory, IEEE Transactions on* **15** (1969), no. 3, 420–423.
- [3] Sophie Achard, *Mesures de dépendance pour la séparation aveugle de sources*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2003.
- [4] O. Aharonson, *Sublimation at the Base of a Seasonal CO<sub>2</sub> Slab on Mars*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts* (S. Mackwell and E. Stansbery, eds.), March 2004, pp. 1918–+.
- [5] O. Aharonson and N. Schorghofer, *Subsurface ice on Mars with rough topography*, *Journal of Geophysical Research (Planets)* **111** (2006), 11007–+.
- [6] O. Aharonson, M. T. Zuber, and G. A. Neumann, *Second Order Statistics of Topography of the Northern Hemisphere of Mars from MOLA*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, March 1999, pp. 1792–+.
- [7] O. Aharonson, M. T. Zuber, and D. H. Rothman, *Statistics of Mars' topography from the Mars Orbiter Laser Altimeter : Slopes, correlations, and physical models*, *Journal of Geophysical Research* **106** (2001), 23723–23736.
- [8] O. Aharonson, M. T. Zuber, D. E. Smith, G. A. Neumann, W. C. Feldman, and T. H. Prettyman, *Depth, distribution, and density of CO<sub>2</sub> deposition on Mars*, *Journal of Geophysical Research (Planets)* **109** (2004), 5004–+.
- [9] M. Allison and M. McEwen, *A post-Pathfinder evaluation of areocentric solar coordinates with improved timing recipes for Mars seasonal/diurnal climate studies*, *Planetary and Space Science* **48** (2000), 215–235.
- [10] Pascal Ludwig Anouk Barberousse, Max Kistler, *La philosophie des sciences au xxe siècle*, Champs Université - Flammarion, 2000.
- [11] E. Arzuaga-Cruz, L. O. Jiménez-Rodríguez, and M. Vélez-Reyes, *Unsupervised feature extraction and band subset selection techniques based on relative entropy criteria for hyperspectral data analysis*, *Algorithms and Technologies for Multispectral, Hyperspectral, and Ultraspectral Imagery IX*. Edited by Shen, Sylvia S. ; Lewis, Paul E. *Proceedings of the SPIE*, Volume 5093, pp. 462-473 (2003). (S. S. Shen and P. E. Lewis, eds.), September 2003, pp. 462–473.
- [12] H. Attias, *Independent factor analysis*, *Neural Computation* **11** (1999), no. 4, 803–851.



- [13] J. Aumont and J. F. Macías-Pérez, *Blind component separation for polarized observations of the cosmic microwave background*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **376** (2007), 739–758.
- [14] R.T. Austin, A.W. England, and G.H. Wakefield, *Special problems in the estimation of power-law spectra as applied to topographical modeling*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **32** (1994), no. 4, 928–939.
- [15] J. L. Bandfield, V. E. Hamilton, and P. R. Christensen, *A Global View of Martian Surface Compositions from MGS-TES*, Science **287** (2000), 1626–1630.
- [16] Jeffrey D. Banfield and Adrian E. Raftery, *Model-based gaussian and non-gaussian clustering*, Biometrics **49** (1993), 803–821.
- [17] A. Baraldi and L. Bruzzone, *Classification of high spatial resolution images by means of a Gabor wavelet decomposition and a support vector machine*, Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VII. Edited by Gonglewski, John D. ; Stein, Karin. Proceedings of the SPIE, Volume 5573, pp. 19-29 (2004). (L. Bruzzone, ed.), November 2004, pp. 19–29.
- [18] A. Baraldi, L. Bruzzone, P. Blonda, and L. Carlin, *Badly posed classification of remotely sensed images-an experimental comparison of existing data labeling systems*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **44** (2006), no. 1, 214–235.
- [19] Ann Bateson and Brian Curtiss, *A method for manual endmember selection and spectral unmixing*, Remote Sensing of Environment **55** (1996), no. 3, 229–243.
- [20] C.A. Bateson, G.P. Asner, and C.A. Wessman, *Endmember bundles : a new approach to incorporating endmember variability into spectral mixture analysis*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **38** (2000), no. 2, 1083–1094.
- [21] J. F. Bell, W. M. Calvin, M. E. Ockert-Bell, D. Crisp, J. B. Pollack, and J. Spencer, *Detection and monitoring of H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub> ice clouds on Mars*, Journal of Geophysical Research **101** (1996), 9227–9238.
- [22] J.A. Benediktsson, J.R. Sveinsson, and K. Amason, *Classification and feature extraction of aviris data*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **33** (1995), no. 5, 1194–1205.
- [23] J.A. Benediktsson, P.H. Swain, and O.K. Ersoy, *Neural network approaches versus statistical methods in classification of multisource remote sensing data*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **28** (1990), no. 4, 540–552.
- [24] J. L. Benson and P. B. James, *Yearly comparisons of the martian polar caps : 1999-2003 Mars Orbiter Camera observations*, Icarus **174** (2005), 513–523.
- [25] J. Bibring, Y. Langevin, F. Poulet, A. Gendrin, B. Gondet, M. Berthé, A. Soufflot, P. Drossart, M. Combes, G. Bellucci, V. Moroz, N. Mangold, B. Schmitt, and t. OMEGA team, *Perennial water ice identified in the south polar cap of Mars*, Nature **428** (2004), 627–630.
- [26] J.-P. Bibring, A. Soufflot, M. Berthé, Y. Langevin, B. Gondet, P. Drossart, M. Bouyé, M. Combes, P. Puget, A. Semery, G. Bellucci, V. Formisano, V. Moroz, V. Kottsov, G. Bonello, S. Erard, O. Forni, A. Gendrin, N. Manaud, F. Poulet, G. Poulleau, T. Encrenaz, T. Fouchet, R. Melchiori, F. Altieri, N. Ignatiev, D. Titov, L. Zasova, A. Coradini, F. Capaccioni, P. Cerroni, S. Fonti, N. Mangold, P. Pinet, B. Schmitt, C. Sotin, E. Hauber, H. Hoffmann, R. Jaumann, U. Keller, R. Arvidson, J. Mustard, and F. Forget, *OMEGA : Observatoire pour la Minéralogie, l'Eau, les Glaces et l'Activité*, pp. 37–49, ESA SP-1240 : Mars Express : the Scientific Payload, August 2004.

- 
- [27] R. Bintanja, *On the glaciological, meteorological, and climatological significance of antarctic blue ice areas*, *Reviews of Geophysics* **37** (1999), 337–360.
- [28] J.W. Boardman, F. A. Kruse, and R. O. Green, *Mapping target signatures via partial unmixing of AVIRIS data : in Summaries*, Fifth JPL Airborne Earth Science Workshop, JPL Publication 95-1, vol. 1, March 1995, pp. 23–26.
- [29] Nicolas Bonnefoy, *Développement d'un spectro-goniomètre pour l'étude de la réflectance bidirectionnelle de surfaces géophysiques. application au soufre et perspectives pour le satellite io.*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2001.
- [30] H. M. Böttger, S. R. Lewis, P. L. Read, and F. Forget, *The effects of the martian regolith on GCM water cycle simulations*, *Icarus* **177** (2005), 174–189.
- [31] C. Bouveyron, S. Girard, and C. Schmid, *High-Dimensional Data Clustering*, ArXiv Mathematics e-prints (2006).
- [32] W. V. Boynton, W. C. Feldman, S. W. Squyres, T. H. Prettyman, J. Brückner, L. G. Evans, R. C. Reedy, R. Starr, J. R. Arnold, D. M. Drake, P. A. J. Englert, A. E. Metzger, I. Mitrofanov, J. I. Trombka, C. d'Uston, H. Wänke, O. Gasnault, D. K. Hamara, D. M. Janes, R. L. Marcialis, S. Maurice, I. Mikheeva, G. J. Taylor, R. Tokar, and C. Shinohara, *Distribution of Hydrogen in the Near Surface of Mars : Evidence for Subsurface Ice Deposits*, *Science* **297** (2002), 81–85.
- [33] G. N. Jr. Brown and W. T. Ziegler, *Vapor pressure and heats of vaporization and sublimation of liquids and solids of interest in cryogenics below 1-atm pressure*, *Advances in Cryogenic Engineering* **25** (1979), 662–670.
- [34] L. M. Bruce and J. Li, *Fast wavelet-based algorithms for multiresolutional decomposition and feature extraction of hyperspectral signatures*, *Proc. SPIE Vol. 3717*, p. 72-81, *Algorithms for Multispectral and Hyperspectral Imagery V*, Sylvia S. Shen ; Michael R. Descour ; Eds., July 1999, pp. 72–81.
- [35] S. Byrne and A. P. Ingersoll, *A Sublimation Model for Martian South Polar Ice Features*, *Science* **299** (2003), 1051–1053.
- [36] S. Byrne and M. T. Zuber, *Landscape Evolution and the Reincarnation of the Southern Residual Ice Cap*, *LPI Contributions* **1323** (2006), 8035–+.
- [37] B. A. Campbell, R. R. Ghent, and M. K. Shepard, *Limits on inference of Mars small-scale topography from MOLA data*, *Geophysical Research Letters* **30** (2003), 15–1.
- [38] W. W. Campbell, *The Spectrum of Mars*, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **6** (1894), 228–+.
- [39] ———, *The Irregular Waning of the South Polar CAP of Mars*, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **7** (1895), 40–+.
- [40] G. Camps-Valls and L. Bruzzone, *Kernel-based methods for hyperspectral image classification*, *Geoscience and Remote Sensing*, *IEEE Transactions on* **43** (2005), no. 6, 1351–1362.
- [41] G. Camps-Valls, L. Gomez-Chova, J. Munoz-Mari, J. Vila-Frances, and J. Calpe-Maravilla, *Composite kernels for hyperspectral image classification*, *Geoscience and Remote Sensing Letters*, *IEEE* **3** (2006), no. 1, 93–97.
- [42] J.-F. Cardoso, *Infomax and maximum likelihood for blind source separation*, *Signal Processing Letters*, *IEEE* **4** (1997), no. 4, 112–114.
-

- [43] S. Chandrasekhar, *Radiative transfer*, New York : Dover, 1960, 1960.
- [44] C. H. Chen and Z. Wang, *An overview of ICA (independent component analysis) applications in remote sensed data*, Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VIII. Edited by Stein, Karin ; Kohnle, Anton. Proceedings of the SPIE, Volume 5982, pp. 176-190 (2005). (L. Bruzzone, ed.), October 2005, pp. 176–190.
- [45] C.-H. Chen and X. Zhang, *Independent component analysis for remote sensing study*, Proc. SPIE Vol. 3871, p. 150-158, Image and Signal Processing for Remote Sensing V, Sebastiano B. Serpico ; Ed. (S. B. Serpico, ed.), December 1999, pp. 150–158.
- [46] A. F. Cheng and D. L. Domingue, *Radiative transfer models for light scattering from planetary surfaces*, Journal of Geophysical Research **105** (2000), 9477–9482.
- [47] R. N. Clark, A. J. Gallagher, and G. A. Swayze, *Material absorption band depth mapping of imaging spectrometer data using the complete band shape leastsquares algorithm simultaneously fit to multiple spectral features from multiple materials*, Proceedings of the Third Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer (AVIRIS) Workshop, JPL Publication 90-54, 1990, pp. 176–186.
- [48] R. N. Clark and T. L. Roush, *Reflectance spectroscopy - Quantitative analysis techniques for remote sensing applications*, Journal of Geophysical Research **89** (1984), 6329–6340.
- [49] R. N. Clark, G. A. Swayze, R. Wise, K. E. Livo, T. M. Hoefen, R. F. Kokaly, and S. J. Sutley, *Usgs digital spectral library splib05a*, Tech. report, U.S. Geological Survey, 2003.
- [50] M. V. Coifman, R. R. and Wickerhauser, *Entropy-based algorithms for best basis selection*, IEEE Transactions on Information Theory **38** (1992), 713–718.
- [51] A. Colaprete, J. R. Barnes, R. M. Haberle, J. L. Hollingsworth, H. H. Kieffer, and T. N. Titus, *Albedo of the south pole on Mars determined by topographic forcing of atmosphere dynamics*, Nature **435** (2005), 184–188.
- [52] A. Colaprete and O. B. Toon, *Carbon dioxide snow storms during the polar night on Mars*, Journal of Geophysical Research (Planets) **107** (2002), 5–1.
- [53] Jean-Philippe Combe, *Études des surfaces planétaires par télédétection visible-infrarouge hyperspectrale*, Ph.D. thesis, UNIVERSITÉ DE NANTES ; FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES, 2005.
- [54] Aurelien Cord, Christophe Ambroise, and Jean-Pierre Cocquerez, *Feature selection in robust clustering based on laplace mixture*, Pattern Recognition Letters **27** (2006), no. 6, 627–635.
- [55] T. M. Cover, *The best two independent measurements are not the two best*, IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, **4** (1974), 116–117.
- [56] M.D. Craig, *Minimum-volume transforms for remotely sensed data*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **32** (1994), no. 3, 542–552.
- [57] Giovanni Dietler and Yi-Cheng Zhang, *Fractal aspects of the swiss landscape*, Physica A : Statistical and Theoretical Physics **191** (1992), no. 1-4, 213–219.
- [58] W. E. Dietrich and J. T. Perron, *The search for a topographic signature of life*, Nature **439** (2006), 411–418.
- [59] R. Dittéon and H. H. Kieffer, *Optical properties of solid CO<sub>2</sub> - Application to Mars*, Journal of Geophysical Research **84** (1979), 8294–8300.

- [60] P. S. Dodds and D. H. Rothman, *Scaling, Universality, and Geomorphology*, Annual Review of Earth and Planetary Sciences **28** (2000), 571–610.
- [61] David L. Donoho, *High-dimensional data analysis : The curses and blessings of dimensionality*, Lectures of the American Mathematical Society, 2000.
- [62] S. Douté and B. Schmitt, *A multilayer bidirectional reflectance model for the analysis of planetary surface hyperspectral images at visible and near-infrared wavelengths*, Journal of Geophysical Research **103** (1998), 31367–31390.
- [63] S. Douté, E. Deforas, F. Schmidt, R. Oliva, and B. Schmitt, *A Comprehensive Numerical Package for the Modeling of Mars Hyperspectral Images*, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, vol. 38, March 2007, pp. 1836–+.
- [64] S. Douté, B. Schmitt, Y. Langevin, J.-P. Bibring, F. Altieri, G. Bellucci, B. Gondet, F. Poulet, and the MEX OMEGA team, *South Pole of Mars : Nature and composition of the icy terrains from Mars Express OMEGA observations*, Planetary and Space Science **55** (2007), 113–133.
- [65] S. Douté, B. Schmitt, R. Lopes-Gautier, R. Carlson, L. Soderblom, J. Shirley, and T. G. N. T. The Galileo NIMS Team, *Mapping SO<sub>2</sub> Frost on Io by the Modeling of NIMS Hyperspectral Images*, Icarus **149** (2001), 107–132.
- [66] Sylvain Douté, *Modélisation numérique de la réflectance spectrale des surfaces glacées du système solaire. application à l'analyse de spectres de triton et pluton et au traitement d'images hyperspectrales nims de io.*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1998.
- [67] H. Du, H. Qi, and G. D. Peterson, *Parallel ICA and its hardware implementation in hyperspectral image analysis*, Independent Component Analyses, Wavelets, Unsupervised Smart Sensors, and Neural Networks II. Edited by Szu, Harold H. ; Wickerhauser, Mladen V. Proceedings of the SPIE, Volume 5439, pp. 74-83 (1899). (H. H. Szu, M. V. Wickerhauser, B. A. Pearlmutter, and W. Sweldens, eds.), April 2004, pp. 74–83.
- [68] N. D. Efford, *The Relationship Between Photometric Roughness and Fractal Dimension*, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, March 1990, pp. 319–+.
- [69] Janusz Eluszkiewicz, *On the microphysical state of the martian seasonal caps*, Icarus **103** (1993), no. 1, 43–48.
- [70] T. Encrenaz, R. Melchiorri, T. Fouchet, P. Drossart, E. Lellouch, B. Gondet, J.-P. Bibring, Y. Langevin, D. Titov, N. Ignatiev, and F. Forget, *A mapping of martian water sublimation during early northern summer using OMEGA/Mars Express*, Astronomy and Astrophysics **441** (2005), L9–L12.
- [71] Kie B. Eom, *Shape recognition using spectral features*, Pattern Recognition Letters **19** (1998), no. 2, 189–195.
- [72] S. Erard, *A spectro-photometric model of Mars in the near-infrared*, Geophysical Research Letters **28** (2001), 1291–1294.
- [73] W. C. Feldman, W. V. Boynton, R. L. Tokar, T. H. Prettyman, O. Gasnault, S. W. Squyres, R. C. Elphic, D. J. Lawrence, S. L. Lawson, S. Maurice, G. W. McKinney, K. R. Moore, and R. C. Reedy, *Global Distribution of Neutrons from Mars : Results from Mars Odyssey*, Science **297** (2002), 75–78.
- [74] W. C. Feldman, T. H. Prettyman, S. Maurice, J. J. Plaut, D. L. Bish, D. T. Vaniman, M. T. Mellon, A. E. Metzger, S. W. Squyres, S. Karunatillake, W. V. Boynton, R. C. Elphic, H. O. Funsten, D. J. Lawrence, and R. L. Tokar, *Global distribution of near-surface hydrogen on Mars*, Journal of Geophysical Research (Planets) **109** (2004), 9006–+.

- [75] G. E. Fischbacher, L. J. Martin, and W. A. Baum, *Seasonal behavior of the Martian polar caps.*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific **81** (1969), 538–+.
- [76] K. E. Fishbaugh, S. Byrne, K. Herkenhoff, N. Thomas, P. Russell, and Hirise Team, *The Martian North Polar Layered Deposits at High Resolution with the Mars Reconnaissance Orbiter HiRISE Camera*, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, vol. 38, March 2007, pp. 1542–+.
- [77] R. A. Fisher, *The use of multiple measurements in taxonomic problems*, Annals of Eugenics **7** (1936), 179–188.
- [78] Farid Flitti, *Techniques de réduction de données et analyse d'images multispectrales astronomiques par arbres de markov*, Ph.D. thesis, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2005.
- [79] F. Forget, *Mars CO<sub>2</sub> ice polar caps*, Solar System Ices (B. Schmitt, C. de Bergh, and M. Festou, eds.), Astrophysics and Space Science Library, vol. 227, Kluwer, 1998, pp. 477–507.
- [80] F. Forget, R. M. Haberle, F. Montmessin, B. Levrard, and J. W. Head, *Formation of Glaciers on Mars by Atmospheric Precipitation at High Obliquity*, Science **311** (2006), 368–371.
- [81] F. Forget, G. B. Hansen, and J. B. Pollack, *Low brightness temperatures of Martian polar caps : CO<sub>2</sub> clouds or low surface emissivity ?*, Journal of Geophysical Research **100** (1995), 21219–21234.
- [82] F. Forget, F. Hourdin, R. Fournier, C. Hourdin, O. Talagrand, M. Collins, S. R. Lewis, P. L. Read, and J.-P. Huot, *Improved general circulation models of the Martian atmosphere from the surface to above 80 km*, Journal of Geophysical Research **104** (1999), 24155–24176.
- [83] F. Forget, F. Hourdin, and O. Talagrand, *CO<sub>2</sub> Snowfall on Mars : Simulation with a General Circulation Model*, Icarus **131** (1998), 302–316.
- [84] F. Forget, B. Levrard, F. Montmessin, B. Schmitt, S. Douté, Y. Langevin, and J.-P. Bibring, *Mars Water Ice and Carbon Dioxide Seasonal Polar Caps : GCM Modeling and Comparison with Mars Express Omega Observations*, 36th Annual Lunar and Planetary Science Conference (S. Mackwell and E. Stansbery, eds.), March 2005, pp. 1605–+.
- [85] F. Forget, L. Montabone, and S. Lebonnois, *Modelling the non-condensable gas enrichment in the polar night*, Mars Atmosphere Modelling and Observations (F. Forget, M. A. Lopez-Valverde, M. C. Desjean, J. P. Huot, F. Lefevre, S. Lebonnois, S. R. Lewis, E. Millour, P. L. Read, and R. J. Wilson, eds.), February 2006, pp. 422–+.
- [86] F. Forget and R. T. Pierrehumbert, *Warming Early Mars with Carbon Dioxide Clouds That Scatter Infrared Radiation*, Science **278** (1997), 1273–1276.
- [87] F. Forget and J. B. Pollack, *Thermal infrared observations of the condensing Martian polar caps : CO<sub>2</sub> ice temperatures and radiative budget*, Journal of Geophysical Research **101** (1996), 16865–16880.
- [88] O. Forni, F. Poulet, J.-P. Bibring, S. Erard, C. Gomez, Y. Langevin, B. Gondet, and The Omega Science Team, *Component Separation of OMEGA Spectra with ICA*, 36th Annual Lunar and Planetary Science Conference (S. Mackwell and E. Stansbery, eds.), March 2005, pp. 1623–+.
- [89] B. R. Foy and J. Theiler, *Scene analysis and detection in thermal infrared remote sensing using independent component analysis*, Independent Component Analyses, Wavelets, Unsupervised Smart Sensors, and Neural Networks II. Edited by Szu, Harold H. ; Wickerhauser, Mladen V. Proceedings of the SPIE, Volume 5439, pp. 131-139 (1999). (H. H. Szu, M. V. Wickerhauser, B. A. Pearlmutter, and W. Sweldens, eds.), April 2004, pp. 131–139.

- 
- [90] Jerome H. Friedman and John W. Tukey, *A projection pursuit algorithm for exploratory data analysis.*, IEEE Trans. Comput. **23** (1974), 881–890 (English).
- [91] J.-S. Gagnon, S. Lovejoy, and D. Schertzer, *Multifractal earth topography*, Nonlinear Processes in Geophysics **13** (2006), 541–570.
- [92] T. Gánti, A. Horváth, S. Bérczi, A. Gesztesi, and E. Szathmáry, *Dark Dune Spots : Possible Biomarkers on Mars ?*, Origins of Life and Evolution of the Biosphere **33** (2003), 515–557.
- [93] S. Garneau and J. J. Plaut, *Topographic and Roughness Characteristics of the Vastitas Borealis Formation on Mars Described by Fractal Statistics*, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, March 2000, pp. 1115–+.
- [94] A. Gendrin, Y. Langevin, J.-P. Bibring, and O. Forni, *A new method to investigate hyperspectral image cubes : An application of the wavelet transform*, Journal of Geophysical Research (Planets) **111** (2006), 10004–+.
- [95] David L. Glandorf, Anthony Colaprete, Margaret A. Tolbert, and Owen B. Toon, *Co2 snow on mars and early earth : Experimental constraints*, Icarus **160** (2002), no. 1, 66–72.
- [96] Cécile Gomez, *Potentiels des données de télédétection multisources pour la cartographie géologique : Application à la région de rehoboth (namibie)*, Ph.D. thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1, 2004.
- [97] J. L. Gooding, *Martian dust particles as condensation nuclei - A preliminary assessment of mineralogical factors*, Icarus **66** (1986), 56–74.
- [98] A. Green, M. Berman, P. Switzer, and M.D. Craig, *A transformation for ordering multispectral data in terms of image quality with implications for noise removal*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing **26** (1988), no. 1, 65–74.
- [99] W. M. Grundy, S. Douté, and B. Schmitt, *A Monte Carlo ray-tracing model for scattering and polarization by large particles with complex shapes*, Journal of Geophysical Research **105** (2000), 29291–29314.
- [100] B. Guo, S.R. Gunn, R.I. Damper, and J.D.B. Nelson, *Band selection for hyperspectral image classification using mutual information*, Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE **3** (2006), no. 4, 522–526.
- [101] Isabelle Guyon, Jason Weston, Stephen Barnhill, and Vladimir Vapnik, *Gene selection for cancer classification using support vector machines*, Machine Learning **V46** (2002), no. 1, 389–422.
- [102] R. M. Haberle and B. M. Jakosky, *Atmospheric effects on the remote determination of thermal inertia on Mars*, Icarus **90** (1991), 187–204.
- [103] R. M. Haberle, M. M. Joshi, J. R. Murphy, J. R. Barnes, J. T. Schofield, G. Wilson, M. Lopez-Valverde, J. L. Hollingsworth, A. F. C. Bridger, and J. Schaeffer, *General circulation model simulations of the Mars Pathfinder atmospheric structure investigation/meteorology data*, Journal of Geophysical Research **104** (1999), 8957–8974.
- [104] R. A. Hanel, B. J. Conrath, D. E. Jennings, and R. E. Samuelson, *Exploration of the Solar System by Infrared Remote Sensing : Second Edition*, Exploration of the Solar System by Infrared Remote Sensing, by R. A. Hanel and B. J. Conrath and D. E. Jennings and R. E. Samuelson, pp. 534. ISBN 0521818974. Cambridge, UK : Cambridge University Press, April 2003., April 2003.
- [105] G. B. Hansen, *The infrared absorption spectrum of carbon dioxide ice from 1.8 to 333  $\mu\text{m}$* , Journal of Geophysical Research **102** (1997), 21569–21588.
-

- [106] ———, *Control of the radiative behavior of the Martian polar caps by surface CO<sub>2</sub> ice : Evidence from Mars Global Surveyor measurements*, *Journal of Geophysical Research* **104** (1999), 16471–16486.
- [107] B. Hapke, *Bidirectional reflectance spectroscopy. III - Correction for macroscopic roughness*, *Icarus* **59** (1984), 41–59.
- [108] ———, *Bidirectional reflectance spectroscopy. IV - The extinction coefficient and the opposition effect*, *Icarus* **67** (1986), 264–280.
- [109] ———, *Coherent backscatter and the radar characteristics of outer planet satellites*, *Icarus* **88** (1990), 407–417.
- [110] ———, *Theory of reflectance and emittance spectroscopy*, *Topics in Remote Sensing*, Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1993.
- [111] Hafrún Hauksdóttir, *Blind and semiblind source separation of hyperspectral data from the planet mars*, Master's thesis, University of Iceland Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2006.
- [112] J. W. Head, G. Neukum, R. Jaumann, H. Hiesinger, E. Hauber, M. Carr, P. Masson, B. Foing, H. Hoffmann, M. Kreslavsky, S. Werner, S. Milkovich, S. van Gasselt, and T. H. Co-Investigator Team, *Tropical to mid-latitude snow and ice accumulation, flow and glaciation on Mars*, *Nature* **434** (2005), 346–351.
- [113] K. C. Herr and G. C. Pimental, *Infrared absorptions near three microns recorded over the polar CAP of mars*, *Science* **166** (1969), 496–499.
- [114] K. C. Herr and G. C. Pimentel, *Evidence for Solid Carbon Dioxide in the Upper Atmosphere of Mars*, *Science* **167** (1970), 47–49.
- [115] W. Herschel, *On the remarkable appearances at the polar regions of the planet mars, the inclination of its axis, the position of its poles, and its spheroidal figure ; with a few hints relating to its real diameter and atmosphere. by william herschel, esq. f. r. s.*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1776-1886)* **74** (1784), 233–273.
- [116] S. L. Hess, R. M. Henry, and J. E. Tillman, *The seasonal variation of atmospheric pressure on Mars as affected by the south polar CAP*, *Journal of Geophysical Research* **84** (1979), 2923–2927.
- [117] J. Hoffmann, D. W. Lübbers, and H. M. Heise, *Applicability of the Kubelka-Munk theory for the evaluation of reflectance spectra demonstrated for haemoglobin-free perfused heart tissue*, *Physics in Medicine and Biology* **43** (1998), 3571–3587.
- [118] A. Horváth, T. Gánti, A. Gesztesi, S. Bérczi, and E. Szathmáry, *Probable Evidences of Recent Biological Activity on Mars : Appearance and Growing of Dark Dune Spots in the South Polar Region*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, vol. 32, March 2001, pp. 1543–+.
- [119] H. Houben, R. M. Haberle, R. E. Young, and A. P. Zent, *Modeling the Martian seasonal water cycle*, *Journal of Geophysical Research* **102** (1997), 9069–9084.
- [120] S. E. Hough, *On the use of spectral methods for the determination of fractal dimension*, *Geophysical Research Letters* **16** (1989), 673–676.
- [121] F. Hourdin, F. Forget, and O. Talagrand, *The sensitivity of the Martian surface pressure and atmospheric mass budget to various parameters : A comparison between numerical simulations and Viking observations*, *Journal of Geophysical Research* **100** (1995), 5501–5523.

- 
- [122] F. Hourdin, P. Le van, F. Forget, and O. Talagrand, *Meteorological variability and the annual surface pressure cycle on Mars*, *Journal of Atmospheric Sciences* **50** (1993), 3625–3640.
- [123] J. Huang and D. L. Turcotte, *Fractal mapping of digitized images - Application to the topography of Arizona and comparisons with synthetic images*, *Journal of Geophysical Research* **94** (1989), 7491–7495.
- [124] ———, *Fractal image analysis : application to the topography of Oregon and synthetic images*, *Journal of the Optical Society of America A* **7** (1990), 1124–1130.
- [125] G. Hughes, *On the mean accuracy of statistical pattern recognizers*, *Information Theory, IEEE Transactions on* **14** (1968), no. 1, 55–63.
- [126] G. E. Hunt, *On the infrared radiative properties of CO<sub>2</sub> ice clouds - Application to Mars*, *Geophysical Research Letters* **7** (1980), 481–484.
- [127] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent component analysis*, *Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control*, John Wiley, New York, 2001.
- [128] A. Hyvarinen and E. Oja, *Independent component analysis : algorithms and applications*, *Neural Networks* **13** (2000), no. 4-5, 411–430.
- [129] A. Ifarraguerri and M.W. Prairie, *Visual method for spectral band selection*, *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE* **1** (2004), no. 2, 101–106.
- [130] A. B. Ivanov and D. O. Muhleman, *Cloud Reflection Observations : Results from the Mars Orbiter Laser Altimeter*, *Icarus* **154** (2001), 190–206.
- [131] K. Iwasaki, Y. Saito, Y. Nakai, T. Akabane, and E. Panjaitan, *Martian south polar CAP 1988*, *Journal of Geophysical Research* **95** (1990), 14751–14754.
- [132] B. M. Jakosky and E. S. Barker, *Comparison of ground-based and Viking Orbiter measurements of Martian water vapor - Variability of the seasonal cycle*, *Icarus* **57** (1984), 322–334.
- [133] B. M. Jakosky and R. M. Haberle, *Year-to-year instability of the Mars south polar CAP*, *Journal of Geophysical Research* **95** (1990), 1359–1365.
- [134] B. M. Jakosky, B. G. Henderson, and M. T. Mellon, *Chaotic obliquity and the nature of the Martian climate*, *Journal of Geophysical Research* **100** (1995), 1579–1584.
- [135] B. M. Jakosky, M. T. Mellon, E. S. Varnes, W. C. Feldman, W. V. Boynton, and R. M. Haberle, *Mars low-latitude neutron distribution : Possible remnant near-surface water ice and a mechanism for its recent emplacement*, *Icarus* **175** (2005), 58–67.
- [136] P. B. James, G. Briggs, J. Barnes, and A. Spruck, *Seasonal recession of Mars' south polar CAP as seen by Viking*, *Journal of Geophysical Research* **84** (1979), 2889–2922.
- [137] P. B. James and K. Lumme, *Martian south polar CAP boundary - 1971 and 1973 data*, *Icarus* **50** (1982), 368–380.
- [138] P. B. James, K. M. Malolepszy, and L. J. Martin, *Interannual variability of Mars' south polar CAP*, *Icarus* **71** (1987), 298–305.
- [139] P. B. James, L. J. Martin, J. R. Henson, and P. V. Birch, *Seasonal recession of Mars' south polar CAP in 1986*, *Journal of Geophysical Research* **95** (1990), 1337–1341.
- [140] Philip B. James, *Recession of martian north polar cap : 1979-1980 viking observations*, *Icarus* **52** (1982), no. 3, 565–569.
-



- [141] L.O. Jimenez and D.A. Landgrebe, *Hyperspectral data analysis and supervised feature reduction via projection pursuit*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **37** (1999), no. 6, 2653–2667.
- [142] Christian Jutten and Juha Karhunen, *Advances in blind source separation (bss) and independent component analysis (ica) for nonlinear mixtures.*, Int. J. Neural Syst. **14** (2004), no. 5, 267–292.
- [143] Ö. Karatekin, T. Van Hoolst, and V. Dehant, *Martian global-scale CO<sub>2</sub> exchange from time-variable gravity measurements*, Journal of Geophysical Research (Planets) **111** (2006), 6003–+.
- [144] James F. Kasting, *Co<sub>2</sub> condensation and the climate of early mars*, Icarus **94** (1991), no. 1, 1–13.
- [145] ———, *Planetary atmospheres : Warming early earth and mars*, Science **276** (1997), no. 5316, 1213–1215.
- [146] N. J. Kelly, W. V. Boynton, K. Kerry, D. Hamara, D. Janes, R. C. Reedy, K. J. Kim, and R. M. Haberle, *Seasonal polar carbon dioxide frost on Mars : CO<sub>2</sub> mass and columnar thickness distribution*, Journal of Geophysical Research (Planets) **111** (2006), 3–+.
- [147] N. Keshava, *Distance metrics and band selection in hyperspectral processing with applications to material identification and spectral libraries*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **42** (2004), no. 7, 1552–1565.
- [148] N. Keshava and J.F. Mustard, *Spectral unmixing*, Signal Processing Magazine, IEEE **19** (2002), no. 1, 44–57.
- [149] H. H. Kieffer, *Mars south polar spring and summer temperatures - A residual CO<sub>2</sub> frost*, Journal of Geophysical Research **84** (1979), 8263–8288.
- [150] H. H. Kieffer, T. Z. Martin, S. C. Chase, Jr., E. D. Miner, and F. D. Palluconi, *Martian north pole summer temperatures - Dirty water ice*, Science **194** (1976), 1341–1344.
- [151] H. H. Kieffer, T. Z. Martin, A. R. Peterfreund, B. M. Jakosky, E. D. Miner, and F. D. Palluconi, *Thermal and albedo mapping of Mars during the Viking primary mission*, Journal of Geophysical Research **82** (1977), 4249–4291.
- [152] H. H. Kieffer and T. N. Titus, *TES Mapping of Mars' North Seasonal Cap*, Icarus **154** (2001), 162–180.
- [153] H. H. Kieffer, T. N. Titus, K. F. Mullins, and P. R. Christensen, *Mars south polar spring and summer behavior observed by TES : Seasonal cap evolution controlled by frost grain size*, Journal of Geophysical Research **105** (2000), 9653–9700.
- [154] H. H. Kieffer and A. P. Zent, *Mars*, ch. Quasi-periodic climate change on Mars, pp. 1180–1218, University of Arizona Press, 1992.
- [155] Hugh H. Kieffer, Philip R. Christensen, and Timothy N. Titus, *Co<sub>2</sub> jets formed by sublimation beneath translucent slab ice in mars' seasonal south polar ice cap*, Nature **442** (2006), no. 7104, 793–796.
- [156] Cliff H. Koger, Lori M. Bruce, David R. Shaw, and Krishna N. Reddy, *Wavelet analysis of hyperspectral reflectance data for detecting pitted morningglory (ipomoea lacunosa) in soybean (glycine max)*, Remote Sensing of Environment **86** (2003), no. 1, 108–119.
- [157] Ron Kohavi and George H. John, *Wrappers for feature subset selection*, Artificial Intelligence **97** (1997), no. 1-2, 273–324.

- [158] A.A. Kokhanovsky, *Reflection of light from particulate media with irregularly shaped particles*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **96** (2005), no. 1, 1–10.
- [159] A.A. Kokhanovsky, T. Aoki, A. Hachikubo, M. Hori, and E.P. Zege, *Reflective properties of natural snow : approximate asymptotic theory versus in situ measurements*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **43** (2005), no. 7, 1529–1535.
- [160] Eric D. Kolaczy, Ju J., and Gopal S., *Multiscale, multigranular statistical image segmentation*, Journal of the American Statistical Association **100** (2005), 1358–1369.
- [161] A. Koltunov, O. Crouvi, and E. Ben-Dor, *Geomorphologic mapping from hyperspectral data, using gaussian mixtures and lower confidence bounds*, International Journal of Remote Sensing **27** (2006), no. 20, 4545–4566.
- [162] M. A. Kreslavsky and J. W. Head, *Kilometer-scale slopes on Mars and their correlation with geologic units : Initial results from Mars Orbiter Laser Altimeter (MOLA) data*, Journal of Geophysical Research **104** (1999), 21911–21924.
- [163] ———, *Kilometer-scale roughness of Mars : Results from MOLA data analysis*, Journal of Geophysical Research **105** (2000), 26695–26712.
- [164] P. Kubelka, *New contributions to the optics of intensely light-scattering materials. Part I*, Journal of the Optical Society of America (1917-1983) **38** (1948), 448–+.
- [165] Y. Kuga and A. Ishimaru, *Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles*, Journal of the Optical Society of America A **1** (1984), 831–835.
- [166] Thomas Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, University of Chicago Press, 1962.
- [167] ———, *The essential tension*, University of Chicago Press, 1977.
- [168] G. P. Kuiper, *Visual Observations of Mars, 1956.*, Astrophysical Journal **125** (1957), 307–+.
- [169] C. Kwan, B. Ayhan, G. Chen, Jing Wang, Baohong Ji, and Chein-I Chang, *A novel approach for spectral unmixing, classification, and concentration estimation of chemical and biological agents*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **44** (2006), no. 2, 409–419.
- [170] J.L. Lacoume, P.O. Amblard, and P. Comon, *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Masson, 1997.
- [171] David A. Landgrebe, *Signal theory methods in multispectral remote sensing*, John Wiley and Sons, 2003.
- [172] Y. Langevin, F. Montmessin, F. Forget, M. Vincendon, S. Douté, F. Poulet, J.-P. Bibring, and B. Gondet, *Observations of the south seasonal cap of mars during retreat in 2004-2006 by the omega visible/nir imaging spectrometer on board mars express*, JGR Planet, submitted (2007).
- [173] Y. Langevin, F. Poulet, J.-P. Bibring, and B. Gondet, *Sulfates in the North Polar Region of Mars Detected by OMEGA/Mars Express*, Science **307** (2005), 1584–1586.
- [174] Y. Langevin, F. Poulet, J.-P. Bibring, B. Schmitt, S. Douté, and B. Gondet, *Summer Evolution of the North Polar Cap of Mars as Observed by OMEGA/Mars Express*, Science **307** (2005), 1581–1584.
- [175] Yves Langevin, Sylvain Douté, Mathieu Vincendon, Francois Poulet, Jean-Pierre Bibring, Brigitte Gondet, Bernard Schmitt, and F. Forget, *No signature of clear co2 ice from the 'cryptic' regions in mars' south seasonal polar cap*, Nature **442** (2006), no. 7104, 790–792.

- [176] J. Laskar, A. C. M. Correia, M. Gastineau, F. Joutel, B. Levrard, and P. Robutel, *Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars*, *Icarus* **170** (2004), 343–364.
- [177] J. Laskar, F. Joutel, and F. Boudin, *Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 MYR to +10 MYR*, *Astronomy and Astrophysics* **270** (1993), 522–533.
- [178] J. Laskar, B. Levrard, and J. F. Mustard, *Orbital forcing of the martian polar layered deposits*, *Nature* **419** (2002), 375–377.
- [179] M.H.C. Law, M.A.T. Figueiredo, and A.K. Jain, *Simultaneous feature selection and clustering using mixture models*, *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* **26** (2004), no. 9, 1154–1166.
- [180] Charles L. Lawson and Richard J. Hanson, *Solving least squares problems*, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), July 1995.
- [181] C. Lee and D.A. Landgrebe, *Analyzing high-dimensional multispectral data*, *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on* **31** (1993), no. 4, 792–800.
- [182] R. B. Leighton, B. C. Murray, R. P. Sharp, J. Denton Allen, and R. K. Sloan, *Mariner IV Photography of Mars : Initial Results*, *Science* **149** (1965), 627–630.
- [183] R. R. Leighton and B. C. Murray, *Behavior of carbon dioxide and other volatiles on Mars*, *Science* **153** (1966), 136–144.
- [184] M. Lennon, G. Mercier, and L. Hubert-Moy, *Classification of hyperspectral images with nonlinear filtering and support vector machines*, *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2002. IGARSS '02. 2002 IEEE International*, vol. 3, 2002, pp. 1670–1672 vol.3.
- [185] M. Lennon, G. Mercier, M.C. Mouchot, and L. Hubert-Moy, *Independent component analysis as a tool for the dimensionality reduction and the representation of hyperspectral images*, *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2001. IGARSS '01. IEEE 2001 International*, vol. 6, 2001, pp. 2893–2895 vol.6.
- [186] Mars Lennon, *Méthodes d'analyse d'images hyperspectrales. exploitation du capteur aéroporté casi pour des applications de cartographie agro-environnementale en bretagne.*, Ph.D. thesis, Université de Rennes - Rennes I, 2002.
- [187] C. Leovy and Y. Mintz, *Numerical simulation of atmospheric circulation and climate of mars*, *Journal of the Atmospheric Sciences* **26** (1969), no. 6, 1167–1190.
- [188] B. Levrard, F. Forget, F. Montmessin, and J. Laskar, *Recent ice-rich deposits formed at high latitudes on Mars by sublimation of unstable equatorial ice during low obliquity*, *Nature* **431** (2004), 1072–1075.
- [189] S. R. Lewis, *Mars : atmosphere : Modelling the martian atmosphere*, *Astronomy and Geophysics* **44** (2003), 6–+.
- [190] S. R. Lewis, M. Collins, P. L. Read, F. Forget, F. Hourdin, R. Fournier, C. Hourdin, O. Talagrand, and J.-P. Huot, *A climate database for Mars*, *Journal of Geophysical Research* **104** (1999), 24177–24194.
- [191] M. L. Litvak, I. G. Mitrofanov, A. S. Kozyrev, A. B. Sanin, V. I. Tretyakov, W. V. Boynton, N. J. Kelly, D. Hamara, and R. S. Saunders, *Long-term observations of southern winters on Mars : Estimations of column thickness, mass, and volume density of the seasonal CO<sub>2</sub> deposit from HEND/Odyssey data*, *Journal of Geophysical Research (Planets)* **112** (2007), 3–+.

- 
- [192] M. L. Litvak, I. G. Mitrofanov, A. S. Kozyrev, A. B. Sanin, V. I. Tret'yakov, W. V. Boynton, N. J. Kelly, D. Hamara, C. Shinohara, and R. S. Saunders, *Comparison between polar regions of Mars from HEND/Odyssey data*, *Icarus* **180** (2006), 23–37.
- [193] M. L. Litvak, I. G. Mitrofanov, A. S. Kozyrev, A. B. Sanin, V. I. Tret'yakov, W. V. Boynton, C. Shinohara, D. Hamara, S. Saunders, and D. M. Drake, *Seasonal Carbon Dioxide Depositions on the Martian Surface as Revealed from Neutron Measurements by the HEND Instrument Onboard the 2001 Mars Odyssey Spacecraft*, *Solar System Research* **38** (2004), 167–177.
- [194] P. Lowell, *Mars and its canals*, Macmillan, New York, 1906.
- [195] Beiwei Lu and W.W. Hsieh, *Simplified nonlinear principal component analysis*, *Neural Networks*, 2003. Proceedings of the International Joint Conference on, vol. 1, 2003, pp. 759–763 vol.1.
- [196] A. Lyapustin and Y. Knyazikhin, *Green's Function Method for the Radiative Transfer Problem. I. Homogeneous non-Lambertian Surface*, *Applied Optics* **40** (2001), 3495–3501.
- [197] ———, *Green's function method in the radiative transfer problem. II. Spatially heterogeneous anisotropic surface*, *Applied Optics* **41** (2002), 5600–5606.
- [198] J.-B. Madeleine, F. Forget, J. W. Head, B. Levrard, and F. Montmessin, *Mars : A Proposed Climatic Scenario for Northern Mid-Latitude Glaciation*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, vol. 38, March 2007, pp. 1778–+.
- [199] B. D. Malamud and D. L. Turcotte, *Wavelet Analysis of Mars MOLA Topography*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, March 2000, pp. 1016–+.
- [200] ———, *Wavelet analyses of Mars polar topography*, *Journal of Geophysical Research* **106** (2001), 17497–17504.
- [201] M. C. Malin, M. A. Caplinger, and S. D. Davis, *Observational Evidence for an Active Surface Reservoir of Solid Carbon Dioxide on Mars*, *Science* **294** (2001), 2146–2148.
- [202] A. Malinverno, *Segmentation of topographic profiles of the seafloor based on a self-affine model*, *Oceanic Engineering*, *IEEE Journal of* **14** (1989), no. 4, 348–359.
- [203] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, ch. 4, pp. 107–121, Academic Press, 1999.
- [204] B. Mandelbrot, *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, *Science* **156** (1967), 636–638.
- [205] N. Mangold, *High latitude patterned grounds on Mars : Classification, distribution and climatic control*, *Icarus* **174** (2005), 336–359.
- [206] N. Mangold, S. Maurice, W. C. Feldman, F. Costard, and F. Forget, *Spatial relationships between patterned ground and ground ice detected by the Neutron Spectrometer on Mars*, *Journal of Geophysical Research (Planets)* **109** (2004), 8001–+.
- [207] A.R.S. Marcal and L. Castro, *Hierarchical clustering of multispectral images using combined spectral and spatial criteria*, *Geoscience and Remote Sensing Letters*, *IEEE* **2** (2005), no. 1, 59–63.
- [208] Philippe Masson, Michael H. Carr, François Costard, Ronald Greeley, Ernst Hauber, and Ralf Jaumann, *Geomorphologic evidence for liquid water*, *Space Science Reviews* **96** (2001), no. 1, 333–364.
- [209] Audrey F. McGuire and Bruce W. Hapke, *An experimental study of light scattering by large, irregular particles*, *Icarus* **113** (1995), no. 1, 134–155.
-

- [210] G. Mie, *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*, Annalen der Physik **330** (1908), 377–445.
- [211] C. Miesch, L. Poutier, V. Achard, X. Briottet, X. Lenot, and Y. Boucher, *Direct and inverse radiative transfer solutions for visible and near-infrared hyperspectral imagery*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **43** (2005), no. 7, 1552–1562.
- [212] M. Minnaert, *The reciprocity principle in lunar photometry*, Astrophysical Journal **93** (1941), 403–410.
- [213] Michael A. Mischna, James F. Kasting, Alex Pavlov, and Richard Freedman, *Influence of carbon dioxide clouds on early martian climate*, Icarus **145** (2000), no. 2, 546–554.
- [214] M. I. Mishchenko and A. Macke, *Asymmetry parameters of the phase function for isolated and densely packed spherical particles with multiple internal inclusions in the geometric optics limit*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **57** (1997), 767–794.
- [215] I. Mitrofanov, D. Anfimov, A. Kozyrev, M. Litvak, A. Sanin, V. Tretyakov, A. Krylov, V. Shvetsov, W. Boynton, C. Shinohara, D. Hamara, and R. S. Saunders, *Maps of subsurface hydrogen from the high energy neutron detector, mars odyssey*, Science **297** (2002), no. 5578, 78–81.
- [216] F. Montmessin, J.-L. Bertaux, E. Quémerais, O. Korablev, P. Rannou, F. Forget, S. Perrier, D. Fusen, S. Lebonnois, A. Réberac, and E. Dimarellis, *Subvisible CO<sub>2</sub> ice clouds detected in the mesosphere of Mars*, Icarus **183** (2006), 403–410.
- [217] F. Montmessin, F. Forget, P. Rannou, M. Cabane, and R. M. Haberle, *Origin and role of water ice clouds in the Martian water cycle as inferred from a general circulation model*, Journal of Geophysical Research (Planets) **109** (2004), 10004–+.
- [218] R. V. Morris, W. W. Mendell, and S. C. Neely, *Application of Kubelka-Munk theory of diffuse reflectance to geologic problems - The role of scattering*, Geophysical Research Letters **9** (1982), 113–116.
- [219] K. Mosegaard and A. Tarantola, *Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems*, Journal of Geophysical Research **100** (1995), 12431–12448.
- [220] S. Moussaoui, D. Brie, A. Mohammad-Djafari, and C. Carteret, *Separation of non-negative mixture of non-negative sources using a bayesian approach and mcmc sampling*, Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on] **54** (2006), no. 11, 4133–4145.
- [221] S. Moussaoui, H. Hauksdóttir, F. Schmidt, C. Jutten, J. Chanussot, D. Brie, S. Douté, and J. A. Benediksson, *On the decomposition of mars hyperspectral data by ica and bayesian positive source separation*, Neurocomputing (submitted) (2007).
- [222] Saïd Moussaoui, *Séparation de sources non-négatives - application au traitement des signaux de spectroscopie*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2005.
- [223] B. C. Murray and M. C. Malin, *Polar Volatiles on Mars-Theory versus Observation*, Science **182** (1973), 437–443.
- [224] Bruce C. Murray, Laurence A. Soderblom, James A. Cutts, Robert P. Sharp, Daniel J. Milton, and Robert B. Leighton, *Geological framework of the south polar region of mars*, Icarus **17** (1972), no. 2, 328–345.
- [225] J. F. Mustard, L. Li, and G. He, *Nonlinear spectral mixture modeling of lunar multispectral data : Implications for lateral transport*, Journal of Geophysical Research **103** (1998), 19419–19426.

- 
- [226] J.M.P. Nascimento and J.M.B. Dias, *Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data ?*, *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on* **43** (2005), no. 1, 175–187.
- [227] R. M. Nelson, B. W. Hapke, W. D. Smythe, and L. J. Spilker, *The Opposition Effect in Simulated Planetary Regoliths. Reflectance and Circular Polarization Ratio Change at Small Phase Angle*, *Icarus* **147** (2000), 545–558.
- [228] G. Neugebauer, G. Miinch, H. Kieffer, S. C. Chase, Jr., and E. Miner, *Mariner 1969 Infrared Radiometer Results : Temperatures and Thermal Properties of the Martian Surface*, *Astronomical Journal* **76** (1971), 719–+.
- [229] G. Neugebauer, G. Munch, S. C. Chase, Jr., H. Hatzenbeler, E. Miner, and D. Schofield, *Mariner 1969 : Preliminary Results of the Infrared Radiometer Experiment*, *Science* **166** (1969), 98–99.
- [230] S. K. Noble, C. M. Pieters, T. Hiroi, and L. A. Taylor, *Using the modified Gaussian model to extract quantitative data from lunar soils*, *Journal of Geophysical Research (Planets)* **111** (2006), 11009–+.
- [231] Kazuo Oki, Lu Shan, Takuya Saruwatari, Tomoyuki Suhama, and Kenji Omasa, *Evaluation of supervised classification algorithms for identifying crops using airborne hyperspectral data*, *International Journal of Remote Sensing* **27** (2006), no. 10, 1993–2002.
- [232] R. Orosei, R. Bianchi, A. Coradini, S. Espinasse, C. Federico, and A. Ferriccioni, *Characterization of the Martian Surface Scattering at Decametric Wavelengths*, *Conference on the Geophysical Detection of Subsurface Water on Mars*, August 2001, pp. 7026–+.
- [233] D. A. Paige and A. P. Ingersoll, *Annual heat balance of Martian polar caps - Viking observations*, *Science* **228** (1985), 1160–1168.
- [234] M. Pal, *Support vector machine-based feature selection for land cover classification : a case study with dais hyperspectral data*, *International Journal of Remote Sensing* **27** (2006), no. 14, 2877–2894.
- [235] Mahesh Pal and P. M. Mather, *Some issues in the classification of dais hyperspectral data*, *International Journal of Remote Sensing* **27** (2006), no. 14, 2895–2916.
- [236] Athanasios Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes (second edition)*, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [237] M. Parente, J. L. Bishop, and J. F. Bell, *Spectral Unmixing for Sulfate Identification in Pancam Images*, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, vol. 38, March 2007, pp. 1934–+.
- [238] T. Parrinello and R. A. Vaughan, *On comparing multifractal and classical features in minimum distance classification of avhrr imagery*, *International Journal of Remote Sensing* **27** (2006), no. 18, 3943–3959.
- [239] J.I. Peltoniemi, S. Kaasalainen, J. Naranen, L. Matikainen, and J. Piironen, *Measurement of directional and spectral signatures of light reflectance by snow*, *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on* **43** (2005), no. 10, 2294–2304.
- [240] P. Pinet and Omega Team, *Detection and regional mapping of mafic minerals across Syrtis Major from OMEGA / Mars Express observations in the visible-near infrared domain by means of MGM deconvolution.*, (2006), 561–+.
-

- [241] P. C. Pinet, A. Cord, S. Chevrel, and Y. Daydou, *Optical Response and Surface Physical Properties of the Lunar Regolith at Reiner Gamma Formation from Clementine Orbital Photometry : Derivation of the Hapke Parameters at Local Scale*, Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts (S. Mackwell and E. Stansbery, eds.), March 2004, pp. 1660–+.
- [242] S. Piqueux, S. Byrne, and M. I. Richardson, *Sublimation of Mars's southern seasonal CO<sub>2</sub> ice cap and the formation of spiders*, Journal of Geophysical Research (Planets) **108** (2003), 3–1.
- [243] J. J. Plaut, G. Picardi, A. Safaeinili, A. B. Ivanov, S. M. Milkovich, A. Cicchetti, W. Kofman, J. Mouginot, W. M. Farrell, R. J. Phillips, S. M. Clifford, A. Frigeri, R. Orosei, C. Federico, I. P. Williams, D. A. Gurnett, E. Nielsen, T. Hagfors, E. Heggy, E. R. Stofan, D. Plettemeier, T. R. Watters, C. J. Leuschen, and P. Edenhofer, *Subsurface Radar Sounding of the South Polar Layered Deposits of Mars*, Science **316** (2007), 92–.
- [244] J. B. Pollack, R. M. Haberle, J. R. Murphy, J. Schaeffer, and H. Lee, *Simulations of the general circulation of the Martian atmosphere. II - Seasonal pressure variations*, Journal of Geophysical Research **98** (1993), 3149–3181.
- [245] J. B. Pollack, R. M. Haberle, J. Schaeffer, and H. Lee, *Simulations of the general circulation of the Martian atmosphere. I - Polar processes*, Journal of Geophysical Research **95** (1990), 1447–1473.
- [246] J.B. Pollack, J.F. Kasting, S.M. Richardson, and K. Poliakoff, *The case for a wet, warm climate on early mars*, Icarus **71** (1987), no. 2, 203–224.
- [247] G. Portyankina and W. J. Markiewicz, *Model for Formation of Spider Patterns in the Cryptic Region*, Third International Conference on Mars Polar Science and Exploration (S. Clifford, P. Doran, D. Fisher, and C. Herd, eds.), October 2003, pp. 8026–+.
- [248] G. Portyankina, W. J. Markiewicz, M. Garcia-Comas, H. U. Keller, J.-P. Bibring, and G. Neukum, *Simulations of Geyser-type Eruptions in Cryptic Region of Martian South Polar Cap*, LPI Contributions **1323** (2006), 8040–+.
- [249] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling, *Numerical Recipes in Fortran 77 : the art of scientific computing*, ch. 13.10, pp. 584–599, Cambridge University Press, 1986-1992.
- [250] N. E. Putzig, M. T. Mellon, K. A. Kretke, and R. E. Arvidson, *Global thermal inertia and surface properties of Mars from the MGS mapping mission*, Icarus **173** (2005), 325–341.
- [251] J.A. Richards, *Remote sensing digital image analysis*, Springer-Verlag, 1994.
- [252] M. I. Richardson, R. J. Wilson, and A. V. Rodin, *Water ice clouds in the Martian atmosphere : General circulation model experiments with a simple cloud scheme*, Journal of Geophysical Research (Planets) **107** (2002), 2–1.
- [253] A. D. Rogers, J. L. Bandfield, and P. R. Christensen, *Global spectral classification of Martian low-albedo regions with Mars Global Surveyor Thermal Emission Spectrometer (MGS-TES) data*, Journal of Geophysical Research (Planets) **112** (2007), 2004–+.
- [254] B. Romaniuk, M. Desvignes, M. Revenu, and M.J. Deshayes, *Linear and non-linear model for statistical localization of landmarks*, Pattern Recognition, 2002. Proceedings. 16th International Conference on, vol. 4, 2002, pp. 393–396 vol.4.
- [255] B. Romaniuk, V. Guilloux, M. Desvignes, and M.J. Deshayes, *Partially observed objects localization with pca and kpca models*, Image Analysis and Interpretation, 2004. 6th IEEE Southwest Symposium on, 2004, pp. 80–84.

- 
- [256] G. Ruello, P. Blanco-Sanchez, A. Iodice, J.J. Mallorqui, D. Riccio, A. Broquetas, and G. Franceschetti, *Synthesis, construction, and validation of a fractal surface*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **44** (2006), no. 6, 1403–1412.
- [257] N. Saito and R. Coifman, *Improved local discriminant bases using empirical probability density estimation*, Proceedings of Statistical Computing, 1996.
- [258] N. Saito and R.R. Coifman, *On local orthonormal bases for classification and regression*, Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on, vol. 3, 1995, pp. 1529–1532 vol.3.
- [259] Gilbert Saporta, *Probabilités, analyse de données et statistiques (seconde édition)*, TECHNIP, 2006.
- [260] R. S. Sayles and T. R. Thomas, *Surface topography as a nonstationary random process*, Nature **271** (1978), no. 5644, 431–434.
- [261] Frédéric Schmidt, *Spectroscopie des glaces martiennes*, Master’s thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2004.
- [262] Frédéric Schmidt, Sylvain Douté, and Bernard Schmitt, *Wavanglet : An efficient supervised classifier for hyperspectral images*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **45** (2007), no. 5, 1374–1385.
- [263] B. Schmitt, S. Douté, Y. Langevin, F. Forget, J.-P. Bibring, B. Gondet, and The Omega Team, *Northern Seasonal Condensates on Mars by OMEGA/Mars Express*, 36th Annual Lunar and Planetary Science Conference (S. Mackwell and E. Stansbery, eds.), Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts, vol. 36, March 2005, pp. 2326–+.
- [264] B. Schmitt, E. Quirico, F. Trotta, and W. M. Grundy, *Optical Properties of Ices from UV to Infrared*, Solar System Ices (B. Schmitt, C. de Bergh, and M. Festou, eds.), Astrophysics and Space Science Library, vol. 227, Kluwer, 1998, pp. 199–240.
- [265] B. Schmitt, F. Schmidt, S. Douté, Y. Langevin, F. Forget, J.-P. Bibring, B. Gondet, and Omega Team, *Recession of the Northern Seasonal Condensates on Mars by OMEGA/Mars Express*, LPI Contributions **1323** (2006), 8050–+.
- [266] J. Settle, *On the effect of variable endmember spectra in the linear mixture model*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **44** (2006), no. 2, 389–396.
- [267] C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal **27** (1948), 379–423.
- [268] R. P. Sharp, B. C. Murray, R. B. Leighton, L. A. Soderblom, and J. A. Cutts, *The surface of Mars. 4. South polar cap.*, Journal of Geophysical Research **76** (1971), 357–368.
- [269] V. L. Sharpton and J. W. Head, III, *A comparison of the regional slope characteristics of Venus and earth - Implications for geologic processes on Venus*, Journal of Geophysical Research **91** (1986), 7545–7554.
- [270] O. B. Shchuko, D. V. Kartashov, G. Picardi, and R. Orosei, *Martian underground water detection : Thermal model and simulations of radar signal propagation*, Journal of Geophysical Research (Planets) **108** (2003), 3–1.
- [271] William Sheehan, *The planet mars : A history of observation and discovery*, The University of Arizona Press, Tucson, 1996.
-



- [272] M. K. Shepard and B. A. Campbell, *Shadows on a Planetary Surface and Implications for Photometric Roughness*, *Icarus* **134** (1998), 279–291.
- [273] M. K. Shepard, B. A. Campbell, M. H. Bulmer, T. G. Farr, L. R. Gaddis, and J. J. Plaut, *The roughness of natural terrain : A planetary and remote sensing perspective*, *Journal of Geophysical Research* **106** (2001), 32777–32796.
- [274] Y. G. Shkuratov and Y. S. Grynko, *Light scattering by media composed of semitransparent particles of different shapes in ray optics approximation : consequences for spectroscopy, photometry, and polarimetry of planetary regoliths*, *Icarus* **173** (2005), 16–28.
- [275] Y. G. Shkuratov and P. Helfenstein, *The Opposition Effect and the Quasi-fractal Structure of Regolith : I. Theory*, *Icarus* **152** (2001), 96–116.
- [276] T. Siili, R. M. Haberle, J. R. Murphy, and H. Savijarvi, *Modelling of the combined late-winter ice cap edge and slope winds in Mars Hellas and Argyre regions*, *Planetary and Space Science* **47** (1999), 951–970.
- [277] D. E. Smith, M. T. Zuber, and G. A. Neumann, *Seasonal Variations of Snow Depth on Mars*, *Science* **294** (2001), 2141–2146.
- [278] D. E. Smith, M. T. Zuber, S. C. Solomon, R. J. Phillips, J. W. Head, J. B. Garvin, W. B. Banerdt, D. O. Muhleman, G. H. Pettengill, G. A. Neumann, F. G. Lemoine, J. B. Abshire, O. Aharonson, D. C. Brown, S. A. Hauck, A. B. Ivanov, P. J. McGovern, H. J. Zwally, and T. C. Duxbury, *The Global Topography of Mars and Implications for Surface Evolution*, *Science* **284** (1999), 1495–+.
- [279] M. D. Smith, J. L. Bandfield, and P. R. Christensen, *Separation of atmospheric and surface spectral features in Mars Global Surveyor Thermal Emission Spectrometer (TES) spectra*, *Journal of Geophysical Research* **105** (2000), 9589–9608.
- [280] Michael D. Smith, *Interannual variability in tes atmospheric observations of mars during 1999-2003*, *Icarus* **167** (2004), no. 1, 148–165.
- [281] Stephen South, Jiaguo Qi, and David P. Lusch, *Optimal classification methods for mapping agricultural tillage practices*, *Remote Sensing of Environment* **91** (2004), no. 1, 90–97.
- [282] A. L. Sprague, W. V. Boynton, K. E. Kerry, D. M. Janes, D. M. Hunten, K. J. Kim, R. C. Reedy, and A. E. Metzger, *Mars' South Polar Ar Enhancement : A Tracer for South Polar Seasonal Meridional Mixing*, *Science* **306** (2004), 1364–1367.
- [283] D. G. Stankevich, Yu. G. Shkuratov, and K. Muinonen, *Shadow-hiding effect in inhomogeneous layered particulate media*, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **63** (1999), no. 2-6, 445–458.
- [284] S. D. Stearns, B. E. Wilson, and J. R. Peterson, *Dimensionality reduction by optimal band selection for pixel classification of hyperspectral imagery*, *Proc. SPIE Vol. 2028*, p. 118-127, *Applications of Digital Image Processing XVI*, Andrew G. Tescher ; Ed. (A. G. Tescher, ed.), October 1993, pp. 118–127.
- [285] N. S. Subotic, J. D. Gorman, and B. J. Thelen, *Wavelet techniques for band selection and material classification from hyperspectral data*, *Proc. SPIE Vol. 2480*, p. 426-434, *Imaging Spectrometry*, Michael R. Descour ; Jonathan M. Mooney ; David L. Perry ; Luanna R. Illing ; Eds., June 1995, pp. 426–434.
- [286] J. M. Sunshine and C. M. Pieters, *Estimating modal abundances from the spectra of natural and laboratory pyroxene mixtures using the modified Gaussian model*, *Journal of Geophysical Research* **98** (1993), 9075–9087.

- [287] ———, *Determining the composition of olivine from reflectance spectroscopy*, *Journal of Geophysical Research* **103** (1998), 13675–13688.
- [288] O. Talagrand, F. Hourdin, and F. Forget, *The LMD Martian General Circulation Model : Results About the Annual Pressure Cycle*, *Bulletin of the American Astronomical Society*, *Bulletin of the American Astronomical Society*, vol. 23, June 1991, pp. 1217–+.
- [289] D. Tanre, M. Herman, P. Y. Deschamps, and A. de Lefte, *Atmospheric modeling for space measurements of ground reflectances, including bidirectional properties*, *Applied Optics* **18** (1979), 3587–3594.
- [290] A. Tarantola and B. Valette, *Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion*, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **20** (1982), 219–232.
- [291] ———, *Inverse Problems = Quest for Information*, *Journal of Geophysics* **50** (1982), 159–170.
- [292] and Gruber P. Theis, F., I. Keck, and L. Elmar, *Functional mri analysis by a novel spatiotemporal ica algorithm*, *Artificial Neural Networks : Biological Inspirations - ICANN 2005 : 15th International Conference* (W. Duch, J. Kacprzyk, E. Oja, and S. Zadrozny, eds.), 2005, pp. 677–682.
- [293] P. Thomas, J. Veverka, and R. Campos-Marquetti, *Frost streaks in the south polar CAP of Mars*, *Journal of Geophysical Research* **84** (1979), 4621–4633.
- [294] P. C. Thomas, M. C. Malin, K. S. Edgett, M. H. Carr, W. K. Hartmann, A. P. Ingersoll, P. B. James, L. A. Soderblom, J. Veverka, and R. Sullivan, *North-south geological differences between the residual polar caps on Mars*, *Nature* **404** (2000), 161–164.
- [295] P. C. Thomas, M. C. Malin, P. B. James, B. A. Cantor, R. M. E. Williams, and P. Gierasch, *South polar residual cap of Mars : Features, stratigraphy, and changes*, *Icarus* **174** (2005), 535–559.
- [296] J. E. Tillman, N. C. Johnson, P. Gutterp, and D. B. Percival, *The Martian annual atmospheric pressure cycle - Years without great dust storms*, *Journal of Geophysical Research* **98** (1993), 10963–+.
- [297] T. N. Titus and H. H. Kieffer, *Temporal and Spatial Distribution of Seasonal CO<sub>2</sub> Snow and Ice*, *Sixth International Conference on Mars* (A. Albee, ed.), July 2003, pp. 3273–+.
- [298] T. N. Titus, H. H. Kieffer, and P. R. Christensen, *Exposed Water Ice Discovered near the South Pole of Mars*, *Science* **299** (2003), 1048–1051.
- [299] T. N. Titus, H. H. Kieffer, K. F. Mullins, and P. R. Christensen, *TES premapping data : Slab ice and snow flurries in the Martian north polar night*, *Journal of Geophysical Research* **106** (2001), 23181–23196.
- [300] Frederic Trotta, *Détermination des constantes optiques de glaces dans l'infrarouge moyen et lointain. application aux grains du milieu interstellaire et des enveloppes circumstellaires.*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1996.
- [301] V. Twersky, *Multiple scattering of waves and optical phenomena*, *Journal of the Optical Society of America* (1917-1983) **52** (1962), 145–+.
- [302] J. Veverka and J. Goguen, *The Nonuniform Recession of the South Polar Cap of Mars*, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **67** (1973), 273–+.
- [303] A. R. Wallace, *Is mars habitable ?*, Macmillan, London, 1907.
- [304] W. R. Ward, B. C. Murray, and M. C. Malin, *Climatic variations on Mars. 2. Evolution of carbon dioxide atmosphere and polar caps.*, *Journal of Geophysical Research* **79** (1974), 3385–3395.

- [305] S. G. Warren, W. J. Wiscombe, and J. F. Firestone, *Spectral albedo and emissivity of CO<sub>2</sub> in Martian polar caps - Model results*, Journal of Geophysical Research **95** (1990), 14717–14741.
- [306] A. Wilhelm, E. Wegman, and J. Symanzik, *Visual clustering and classification : The oronsay particle size data set revisited*, Computational Statistics : Special Issue on Interactive Graphical Data Analysis 14 **2** (1999), 109–146.
- [307] Stephen E. Wood and David A. Paige, *Modeling the martian seasonal co<sub>2</sub> cycle 1. fitting the viking lander pressure curves*, Icarus **99** (1992), no. 1, 1–14.
- [308] L. Yang and B. Kruse, *Revised Kubelka-Munk theory. I. Theory and application*, Journal of the Optical Society of America A **21** (2004), 1933–1941.
- [309] L. Yang, B. Kruse, and S. J. Miklavcic, *Revised Kubelka-Munk theory. II. Unified framework for homogeneous and inhomogeneous optical media*, Journal of the Optical Society of America A **21** (2004), 1942–1952.
- [310] L. Yang and S. J. Miklavcic, *Revised Kubelka-Munk theory. III. A general theory of light propagation in scattering and absorptive media*, Journal of the Optical Society of America A **22** (2005), 1866–1873.
- [311] C. F. Yoder, A. S. Konopliv, D. N. Yuan, E. M. Standish, and W. M. Folkner, *Fluid Core Size of Mars from Detection of the Solar Tide*, Science **300** (2003), 299–303.
- [312] X. Zhang and C. H. Chen, *New independent component analysis (ICA) method and its application to remote sensing images*, Proc. SPIE Vol. 4541, p. 146-156, Image and Signal Processing for Remote Sensing VII, Sebastiano B. Serpico ; Ed. (S. B. Serpico, ed.), January 2002, pp. 146–156.

# Table des figures

1.1	Schéma d'un cube hyperspectral. . . . .	19
1.2	Principe du push-broom . . . . .	20
1.3	Schéma de la géométrie d'acquisition en télédétection des surfaces planétaires (figure d'après (29)). . . . .	23
1.4	Exemple d'un spectre OMEGA en réflectance. . . . .	24
1.5	Schéma de l'équation du transfert radiatif. C'est une équation de conservation de l'énergie le long de la ligne de visée (figure d'après (29)). . . . .	27
1.6	Schéma des types d'assemblage. A chaque type d'assemblage est associé un mélange spectral. . . . .	32
3.1	Classification manuelle spectrale par Douté et al. (64). La phase de réduction de dimensionnalité spectrale MNF produit les deux axes PC 1 et 2. La classification consiste à identifier une collection de points similaires, représentée en couleur sur ces graphes. Les endmembers sont les spectres correspondants aux points les plus proches des pôles de poussière (dust - rouge), d'eau (bleu) et de CO <sub>2</sub> (vert). Ces pôles, représentés par des points, sont les estimations des spectres $S_z$ de chaque zone "z" si l'image est uniquement en <i>mélange géographique subpixel</i> . La figure 6.4 page 120 représente ces classes sous forme de carte. . . . .	62
3.2	Classification manuelle spectrale par Schmitt et al. (263). La phase de réduction de dimensionnalité spectrale ACP produit les deux axes PC 1 et 2 interprétés ici de manière forte. La classification consiste à segmenter la collection de points en groupe considéré comme similaire. Ces classes sont interprétées comme des classes d'abondance de corps, représentées en couleur sur ces graphes. Les changements de direction du nuage de points, notées par les flèches, sont interprétées comme des changements de représentation de terrain. La figure 3.3 présente ces classes sous forme de carte. . . . .	62
3.3	Représentation en carte des classes déterminées de la classification manuelle spectrale opérée dans un espace réduit (voir fig. 3.2). Cette classification a été réalisée par Schmitt et al. (263). . . . .	63
3.4	Classification manuelle spatiale de la calotte saisonnière sud (175). Mosaïque de 10 images OMEGA en projection stéréographique polaire sud. Les points en noir et blanc indiquent l'albédo du continuum $R(1,07\mu m)$ . Seul l'encadré coloré ne représente pas l'albédo. La couleur rouge correspond à la profondeur de bande $B_{CO_2}(1,43\mu m)$ . Les couleurs bleue et verte correspondent à $B_{H_2O}(1,5\mu m)$ . La classification spatiale consiste à identifier visuellement les quatre types de terrains a, b, c et d. . . . .	63
4.1	Spectres de référence de surface issus de simulation. Les longueurs d'ondes sont exprimées en microns. La glace d'eau est en rouge. La glace de CO <sub>2</sub> est en bleu. . . . .	79

4.2	Spectres de référence issus d'observations OMEGA. Les longueurs d'ondes sont exprimées en microns. En rouge le spectre de référence de la poussière martienne prise dans la région polaire sud. En bleu, le spectre de nuage de glace d'eau dans la région de Hellas.	80
4.3	Spectres de référence, issus de mesures de laboratoire, en réflectance. Matériaux granulaires de gypse en rouge et de basalte en bleu. Le domaine entre 4 et 5 microns n'a pas été mesuré mais simplement prolongé. (Acquisition au LPG par Antoine Pommerol)	80
4.4	Effet des angles d'observation pour un mélange intime de glace d'eau et poussière à 50% en masse, issu de l'expérience 1 (e : angle d'émergence / i : angle d'incidence).	83
4.5	Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la <i>géométrie d'acquisition</i> sur la détection d'H <sub>2</sub> O dans l'expérience 1 (glace d'eau et poussières) avec atmosphère. Chaque graphe représente la fraction en masse d'eau en fonction de l'indicateur de présence d'eau. En rouge, pour des angles d'incidence de 85° et d'émergence de 30° (angle de phase le plus grand). En bleu, pour des angles d'incidence de 5° et d'émergence de 0° (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d'angle.	85
4.6	Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la géométrie d'acquisition pour la détection d' H <sub>2</sub> O dans l'expérience 1 (glace d'eau et poussières) <b>sans atmosphère</b> . Chaque graphe représente la fraction en masse d'eau en fonction de l'indicateur de présence d'eau. En rouge pour des angles d'incidence de 85° et d'émergence de 30° (angle de phase le plus grand). En bleu pour des angles d'incidence de 5° et d'émergence de 0° (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d'angle.	86
4.7	Comportement des indicateurs de classification vis à vis de la géométrie d'acquisition sur la détection d'H <sub>2</sub> O dans l'expérience 2 (glace d'eau, CO <sub>2</sub> et poussières) avec atmosphère. Chaque graphe représente la fraction en masse d'eau en fonction de l'indicateur de présence d'eau. En rouge, pour des angles d'incidence de 85° et d'émergence de 30° (angle de phase le plus grand). En bleu, pour des angles d'incidence de 5° et d'émergence de 0° (angle de phase le plus petit). Les croix noires sont les autres combinaisons d'angle.	86
4.8	A gauche : carte de détection de sulfates et estimation d'"abondance" d'après Langevin et al. (173). A droite : carte de l'angle de la méthode Wavanglet associée au pôle de Gypse pour l'observation ORB0898_1.	87
5.1	Matrice de mélange associée aux sources de variance la plus élevée (Axe 1), la seconde plus grande (Axe 2) et la troisième (Axe 3). Trois observations de la calotte permanente sud sont mises en correspondances (noir : ORB0030_0 / rouge : ORB0041_1 / bleu : ORB0061_1). Parfois ces axes ont été multipliés par -1.	101
5.2	Classification manuelle spectrale utilisant la MNF par Douté et al. (64) (voir figure 3.1 page 62). Les endmembers sont les spectres correspondants aux points les plus proches des pôles de poussière (dust - rouge), d'eau (bleu) et de CO <sub>2</sub> (vert). Les axes de couleurs superposés à la classification représentent les trois axes supposés de poussière (rouge), d'eau (bleu) et de CO <sub>2</sub> (vert). Ces axes sont non-orthogonaux.	102
5.3	Rapport signal sur bruit de reconstruction (en dB) en fonction du nombre de sources estimé avec la méthode JADE (cercles) et Fast ICA (losanges).	106
5.4	Estimation de 7 sources avec JADE sur l'observation ORB0041_1.CUB	107
5.5	Estimation des 7 premiers axes de la matrice de mélange avec JADE sur l'observation ORB0041_1.CUB	108
5.6	Identification spectrale de l'axe de la matrice de mélange associé à la glace d'eau et à la glace de CO <sub>2</sub> en utilisant la méthode JADE sur l'observation ORB0041_1.CUB. Les spectres en pointillés sont les spectres de référence synthétiques utilisés pour la méthode Wavanglet (voir section 4.1.1 page 78)	108

6.1	Sources estimées pour l'observation ORB0041_1.CUT comparées aux spectres de références de glace d'eau, glace de CO <sub>2</sub> et de poussières (graphes (a) à (c)). Le graphe (d) représente la qualité de la reconstruction spectrale ou SNR spectral (en dB) en noir et un spectre de transmission atmosphérique en pointillé. . . . .	119
6.2	Matrice de mélange pour l'observation ORB0041_1.CUT sans renormalisation (graphes (a) à (c)) et avec renormalisation (graphes (d) à (f)). . . . .	119
6.3	Comparaison cartes d'estimations d'abondances de glace d'eau et de CO <sub>2</sub> pour l'observation ORB0041_1.CUT. En haut : la méthode JADE+BPSS décrite dans cette section. En bas : la méthode des rapports de bande, pour la glace d'eau (voir équation 2.4) et de CO <sub>2</sub> (voir équation 2.6). . . . .	120
6.4	Classes de l'image ORB0041_1.CUT d'après Douté et al. (64). En vert la glace de CO <sub>2</sub> , en marron la glace de CO <sub>2</sub> ayant le minimum d'impuretés en glace d'eau (0,02 % en masse), en violet la glace d'eau, en bleu clair la glace d'eau ayant des impuretés de CO <sub>2</sub> . La classification manuelle associée est présentée à la figure 3.1 page 62. . . . .	120
6.5	Sources identifiées aux trois composants : glace d'eau (a,d,g,j), glace de CO <sub>2</sub> (b,e,h,k) et poussière (c,f,i,l). Test sur des images hyperspectrales OMEGA complètes. . . . .	121
7.1	Définition de la <i>date crocus</i> . C'est le point d'inflexion dans le signal temporel de température de brillance (figure d'après (153)). . . . .	134
7.2	Comparaison de la surface couverte de dépôts saisonniers entre le GCM "Mars Climate Database" et les données Viking (138) (cercle). Les différentes lignes correspondent à la latitude équivalente pour plusieurs scenarii de profondeur optique de poussière (figure d'après (190)). . . . .	134
7.3	Pression atmosphérique martienne : (a) pression au sol mesurée par Viking Lander 1 et 2 ; (b) en bas : pression atmosphérique équivalente stockée dans les calottes saisonnières ; (b) en haut : pression atmosphérique à l'altitude 0 (voir eq. 7.9). Figure d'après Hourdin et al. (121). . . . .	135
7.4	Schéma de la formation des geysers. D'après Piqueux et al. (242). . . . .	140
7.5	Observation MOC des Spiders. D'après Piqueux et al. (242). . . . .	140
7.6	Observation MOC à L <sub>s</sub> =208° des liens entre les "spiders" et geysers. Les traînées sombres de dépôt de poussière ont comme point d'origine les centres des "spiders". D'après Piqueux et al. (242). . . . .	141
7.7	<b>SCOOP</b> : Série d'images MOC à haute résolution dans la région "Inca City" montrant l'évolution d'une colonie de bactéries. D'après (92). . . . .	142
7.8	Progression des dépressions du Gruyère Suisse de la calotte saisonnière sud. En haut, image MOC prise le 19/10/1999 à L <sub>s</sub> =227°. En bas, image prise MOC le 23/08/2001 à L <sub>s</sub> =219°. Illumination d'en haut à gauche. D'après (201). . . . .	143
8.1	Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre L <sub>s</sub> =110° et L <sub>s</sub> =170°, observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Les canaux RVB correspondent respectivement aux angles de glace d'eau, de glace de CO <sub>2</sub> et de poussière. La couleur rouge/rose résultante correspond à la glace de CO <sub>2</sub> , la couleur bleue/verte correspond à la glace d'eau et la couleur jaune correspond à la poussière. Le fond en noir et blanc est la topographie MOLA, représentée seule sur l'avant dernière planche. La dernière planche représente la grille en latitude et longitude avec un pas de 20°. . . . .	151
8.2	Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre L <sub>s</sub> =180° et L <sub>s</sub> =256°, observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt (voir échelle sur la figure 8.4). . . . .	152

8.3 Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre  $L_s=256^\circ$  et  $L_s=280^\circ$ , observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt (voir échelle sur la figure 8.4). . . . . 153

8.4 Carte en projection stéréographique sud de la récession de la calotte saisonnière sud entre  $L_s=280^\circ$  et  $L_s=330^\circ$ , observée par OMEGA et analysée avec la méthode Wavanglet (voir chapitre 4 page 77). Idem figure 8.1 mais avec un zoom sur la portion d'intérêt. Le fond en noir et blanc est la topographie MOLA, représentée seule sur l'avant dernière planche. La dernière planche représente la grille en latitude et longitude avec un pas de  $20^\circ$ . . . . 154

8.5 Caractérisation de l'asymétrie de la récession des dépôts de  $CO_2$  au Sud. Détermination de l'évolution de la ligne crocus au cours du temps pour le secteur cryptique et le secteur anticryptique. Les lignes crocus interne et externe sont définies à la section 8.2.1 page 163. Les points de la lignes crocus interne du secteur cryptique, anormalement proche du pôle sud, entre  $L_s=180^\circ$  et  $L_s=230^\circ$ , sont dus à des absences de détection de glace de  $CO_2$ . Il s'agit très probablement d'une couverture de la glace de  $CO_2$  par une couche optiquement épaisse de régolithe (voir section 7.3.1.2 page 139). Ces points peuvent être ignorés. . . . . 155

8.6 Conduction de chaleur dans le sous-sol en fonction du temps pour les latitudes  $85^\circ S$  et  $55^\circ S$ . La puissance est exprimée en équivalent de masse de  $CO_2$  sublimée par jour et par  $m^2$ . Les traits pleins, (respect. en pointillés) correspondent à des inerties thermiques de  $1000 J.m^{-2}.s^{-1/2}.K^{-1}$  (respect. de  $20 J.m^{-2}.s^{-1/2}.K^{-1}$ ). . . . . 159

8.7 Loi empirique d'évolution de l'albédo visible au cours du temps pour les secteurs cryptique et anticryptique. La ligne pointillée correspond à la loi empirique (voir eq. 8.11 et 8.12). Les points de couleurs correspondent aux albédos de  $CO_2$  mesurés par OMEGA dans le continuum à 1,07 microns, et moyennés en latitude. Les albédos équivalents sont utilisés dans une argumentation disponible dans l'article (voir annexe 15 page 223). . . . 161

8.8 Description de la zone de transition par la distance snowdrop, définie entre la ligne crocus interne et la ligne crocus externe. Ces observables sont définies sur un *profil méridien* de la fraction de surface couverte de glace de  $CO_2$  . . . . . 164

8.9 Illustration du rapport  $\hat{R}_{stat}$  qui définit les extrêmes de la distribution (voir texte). . . . . 168

8.10 Évolution temporelle (en  $^\circ L_s$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes  $0^\circ E$  et  $60^\circ E$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de  $CO_2$  sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 170

8.11 Évolution temporelle (en  $^\circ L_s$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes  $60^\circ E$  et  $120^\circ E$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de  $CO_2$  sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 171

8.12 Évolution temporelle (en  $^\circ L_s$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes  $120^\circ E$  et  $180^\circ E$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de  $CO_2$  sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 172

8.13 Évolution temporelle (en  $^\circ L_s$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes  $180^\circ E$  et  $240^\circ E$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de  $CO_2$  sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 173

8.14 Évolution temporelle (en  $^\circ L_s$ ) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes  $240^\circ E$  et  $300^\circ E$ . Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de  $CO_2$  sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 174

8.15 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(M_{CO_2})$  répartis entre les longitudes 300°E et 360°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus internes et externes. Le fond de blanc à bleu foncé correspond à la largeur de la distribution de la masse de CO<sub>2</sub> sublimée mesurée par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$ . . . . . 175

8.16 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 0°E et 60°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. 176

8.17 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 60°E et 120°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. . . . . 177

8.18 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 120°E et 180°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. . . . . 178

8.19 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 180°E et 240°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. . . . . 179

8.20 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 240°E et 300°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. . . . . 180

8.21 Évolution temporelle (en °Ls) des profils méridiens de  $\hat{P}_{stat}(1 - A_{vis})$  répartis entre les longitudes 300°E et 360°E. Les croix rouges représentent les lignes crocus interne et externe. Le fond de couleur correspond à la largeur de la distribution du facteur d'absorption du CO<sub>2</sub> à 1,07 microns mesuré par l'indicateur statistique  $\hat{P}_{stat}$  sur les observations OMEGA. . . . . 181

12.1 Comportement de la classification d'ordre 1 et 2 face à la malédiction de dimensionnalité (d'après (181)). . . . . 215

12.2 Phénomène de Hughes pour deux classes équiprobables (d'après (125)). . . . . 216





# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques spectrales de l'instrument OMEGA à bord de Mars Express. . . . .	21
2.1	Canaux spectraux purs . . . . .	39
2.3	Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de réduction de dimensionnalité manuelles et automatiques supervisées. . . . .	56
2.5	Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de réduction de dimensionnalité automatiques non-supervisées. . . . .	57
3.1	Tableau récapitulatif des méthodes manuelles et automatiques nécessitant une <i>base spectrale de référence</i> . . . . .	73
3.2	Tableau récapitulatif des méthodes automatiques supervisées nécessitant une <i>base de distribution spectrale de référence</i> . . . . .	74
3.3	Tableau récapitulatif des méthodes automatiques non-supervisées. . . . .	75
4.1	Caractéristiques physiques des spectres de référence synthétiques. . . . .	78
4.2	Tableau récapitulatif des méthodes de classification spatiales . . . . .	88
5.1	Comparaison entre l'ACP spatiale et l'ACP spectrale . . . . .	100
5.2	Comparaison entre l'ACI spatiale et l'ACI spectrale . . . . .	104
5.3	Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de séparation de sources supervisée. . .	112
5.4	Tableau récapitulatif des propriétés des méthodes de séparation de sources non-supervisée. .	113
6.1	Proportion relative des spectres contenant de la glace d'eau et de CO <sub>2</sub> en utilisant l'algorithme supervisé Wavanglet. L'image ORB0041_1.CUT correspond aux 300 premières lignes telle qu'utilisée à la section précédente et dans l'article (voir annexes 14 page 221). . . . .	121
8.1	Tableau récapitulatif du bilan de masse sublimée lors de la récession de la calotte saisonnière sud dans le secteur cryptique. Les deux premières lignes correspondent aux mesures de HEND/GRS. Les deux lignes suivantes sont les estimations des masses de CO <sub>2</sub> sublimées en supposant la loi empirique d'augmentation de l'albédo. Les quatre dernières lignes correspondent à la contribution de l'onde de chaleur annuelle (section 8.1.3.2). . . . .	160
8.2	Tableau récapitulatif du bilan de masse sublimée lors de la récession de la calotte saisonnière sud dans le secteur anticryptique. Les deux premières lignes correspondent aux mesures de HEND/GRS. Les deux lignes suivantes sont les estimations des masses de CO <sub>2</sub> sublimées en supposant la loi empirique d'augmentation de l'albédo. Les quatre dernières lignes correspondent à la contribution de l'onde de chaleur annuelle (voir section 8.1.3.2). . . . .	162
8.3	Relation entre $\hat{R}_{stat}$ et l'indicateur statistique $\hat{P}_{stat}$ . . . . .	168



# Liste des publications et communications

## Publications dans des revues à comité de lecture

Schmidt, F. ; Douté, S. ; Schmitt, B. ; Langevin Y. ; Bibring J.-P. & Omega Team. Does albedo control predominantly the Seasonal South Polar Cap recession ?, *Icarus* (soumis), 2007

Moussaoui, S. ; Hauksdóttir, H. ; Schmidt, F. ; Jutten, C. ; Chanussot, J. ; Brie, D. ; Douté, S. & Benediksson, J. A. On the Decomposition of Mars Hyperspectral data by ICA and Bayesian positive source separation, *Neurocomputing* (accepted), 2007

Schmidt, F. ; Doute, S. & Schmitt, B. WAVANGLET : An Efficient Supervised Classifier for Hyperspectral Images, *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 2007, 45, 1374-1385

## Résumés soumis à des conférences internationales

Schmidt\*, F. ; Douté, S. ; Schmitt, B. ; Langevin, Y., Bibring J.-P. and the OMEGA Team. Effect of albedo and surface roughness on the seasonal south polar cap recession of Mars, *European Mars Science & Exploration Conference : Mars Express & ExoMars*, 2007 [oral]

Schmidt\*, F. ; Douté, S. ; Schmitt, B. ; Langevin, Y. & Bibring, J.-P. Is albedo the key parameter that controls the seasonal south polar cap recession of Mars ?, *European Planetary Science Congress*, 2007 [oral]

Schmidt\*, F. ; Douté, S. ; Schmitt, B. ; Langevin, Y. ; Bibring, J.-P. & Omega Team. Does Insolation Control the Seasonal South Cap Recession of Mars ?, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, 2007, 38, 1743-+ [oral]

Douté, S. ; Deforas, E. ; Schmidt, F. ; Oliva, R. & Schmitt, B. A Comprehensive Numerical Package for the Modeling of Mars Hyperspectral Images, *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, 2007, 38, 1836-+

Jutten\*, C. ; Moussaoui, S. & Schmidt, F. How to Apply ICA on Actual Data ? Example of Mars Hyperspectral Image Analysis, *15th International Conference on Digital Signal Processing*, 2007, 3-12

Douté, S. ; Langevin, Y. ; Schmidt\*, F. ; Schmitt, B. ; Vincendon, M. ; Bibring, J. P. ; Poulet, F. ; Deforas, E. & Gondet, B. Monitoring and Physical Characterization of the South Seasonal Cap of Mars from Omega Observations, *Fourth International Conference on Mars Polar Science and Exploration, LPI Contributions*, 2006, 1323, 8030-+ [poster]

Schmitt\*, B. ; Schmidt, F. ; Douté, S. ; Langevin, Y. ; Forget, F. ; Bibring, J.-P. ; Gondet, B. & Omega Team Recession of the Northern Seasonal Condensates on Mars by OMEGA/Mars Express, *Fourth International Conference on Mars Polar Science and Exploration, LPI Contributions*, 2006, 1323, 8050-+

Schmidt\*, F. ; Doute, S. & Schmitt, B. Following the south polar cap recession as viewed by OMEGA/MEX using automatic detection of H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub> ices. *European Planetary Science Congress* 2006, 2006, 159-+ [oral]

Douté\*, S. ; Langevin, Y. ; Schmidt, F. ; Schmitt, B. ; Vincendon, M. ; Bibring, J. P. ; Poulet, F. & Gondet, B. Physical characterization of the south seasonal cap of Mars during its recession from OMEGA observations, 36th COSPAR Scientific Assembly, 2006, 36, 2240-+

Hauksdóttir\*, H. ; Moussaoui, S. ; Schmidt, F. ; Jutten, C. ; Chanussot, J. & Brie, D. Mars Hyperspectral Data Processing using ICA and Bayesian Positive Source Separation, Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods In Science and Engineering, 2006, 872, 113-122

Hauksdóttir\*, H., Jutten, C., Schmidt, F., Chanussot, J., Benediktsson, J., & Douté, S. The Physical Meaning of Independent Components and Artifact Removal of Hyperspectral Data from Mars using ICA, 7th Nordic Signal Processing Symposium (NORSIG'2006), Reykjavik, Iceland, 2006 (student price award).

Schmidt\*, F. ; Douté, S. ; Schmitt, B. ; Bibring, J. & Langevin, Y. Automatic Detection of H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub> Ices in OMEGA/MEX Images for the Monitoring of the South Polar Cap Recession, 37th Annual Lunar and Planetary Science Conference, 2006, 37, 1979-+ [poster]

Schmidt\*, F. ; Doute, S. ; Schmitt, B. & OMEGA Team. Test of Statistical Methods for the Classification of Polar Terrains on Mars Observed by OMEGA, First Mars Express Conference, 2005 [poster]

#### **Résumés soumis à des conférences nationales**

Schmidt\*, F. ; Doute, S. ; Schmitt, B. ; Langevin, Y. & Bibring, J.-P. Quels sont les paramètres majeurs contrôlant la récession de la calotte saisonnière sud de Mars ?, Société Française d'Astronomie et d'Astrophysique, Grenoble, 2007 [oral]

Schmidt\*, F. ; Doute, S. ; Schmitt, B. & OMEGA Team. Récession de la calotte Sud de Mars vue par OMEGA, Programme National de Planétologie, Nancy, 2006 [oral]

#### **Conférence grand public**

Schmidt, F. ; Jourdain, N. & Hok, S. sous la direction de Auzas, N. ; Cohen, N. & Scarpa, S. Les frontières (géo)physiques, Les Frontières en Question, Presses Universitaires de Grenoble, 2007 Castebrunet,

H. ; Fain, X. & Schmidt, F. Climat sur Terre et Mars, Salon Naturissima, Grenoble, 2006

Brossard, D. & Schmidt, F. Sons d'ici et d'ailleurs, Festival de Terre, Grenoble, 2006



**RÉSUMÉ :** L'étude des surfaces planétaires a été profondément modifiée par la dernière génération d'instruments spatiaux : les spectro-imageurs. Ces détecteurs produisent de nombreuses images hyperspectrales, pour lesquelles chaque pixel est associé à un spectre. Ils permettent un suivi spatial et temporel des propriétés optiques des sols. Le premier objectif de cette thèse est de proposer des outils permettant de traiter la grande quantité d'images et de spectres afin d'aborder des problématiques planétologiques. Deux types d'analyse des images produites par l'instrument OMEGA (Mars Express/ESA) sont avancés : (i) WAVANGLET, une méthode rapide de détection des corps chimiques au sol, (ii) JADE+BPSS, une séparation de source en aveugle qui détecte des corps chimiques sans a priori.

Les régions polaires de Mars sont le siège d'un cycle climatique annuel d'échange de CO<sub>2</sub> entre atmosphère et surface. Pendant la nuit polaire, le CO<sub>2</sub> atmosphérique se condense au sol, tandis qu'il se sublime à nouveau, dès les premiers rayons du soleil. Ce cycle a été mis à jour depuis les années 60 mais aujourd'hui encore, la microphysique d'interaction surface/atmosphère demeure inconnue. Le second objectif de cette thèse est d'établir un modèle de sublimation des dépôts saisonniers. Le bilan de masse est simulé par un bilan radiatif sur une surface rugueuse. La confrontation de ce modèle avec différents jeux de données spatiales a permis de montrer que la sublimation de la calotte saisonnière sud de Mars est contrôlée majoritairement par son albédo. Des études ultérieures seront nécessaires pour saisir les mécanismes à l'origine des variabilités d'albédo (métamorphisme, contamination en poussière, ...).

**MOTS CLEFS :** Mars, pôle, glace de CO<sub>2</sub>, glace d'H<sub>2</sub>O, eau, télédétection, hyperspectral, spectroscopie, OMEGA, Mars Express, grande base de données, classification, détection, supervisée, non-supervisée, séparation de source en aveugle, climat, cycle saisonnier, dépôts saisonniers, récession de la calotte saisonnière sud, bilan de masse, ombre.

**SUMMARY :** Imaging spectrometer, the last generation of space instruments, strongly modify the study of planetary surfaces. Those detectors record manifold hyperspectral images (an image for which each pixel is associated with a spectrum). Such instrument allows us to follow the soil optical properties through space and time. The first objective of my thesis is to propose some tools to analyse a huge amount of images and spectra in planetological perspectives. Two types of methods are introduced to examine the data acquired by the OMEGA instrument (Mars Express/ESA) : (i) WAVANGLET, a fast detection algorithm to identify the presence of chemical species at the ground, (ii) JADE+BPSS, a blind source separation method that is able to detect chemical species without a priori.

The Martian annual cycle of CO<sub>2</sub> consist of an exchange between surface and atmosphere, which is particularly relevant in Polar Regions. During the polar night, atmospherical CO<sub>2</sub> condensate at the ground, whereas it starts to sublime again during the spring, when the solar light heat up the surface. This major climatic cycle has been revealed in the 1960th but even today, the microphysic of interaction between surface and atmosphere is still unknown. The second objective of this thesis is to build a model of the seasonal deposit sublimation. The mass balance is simulated by a radiative balance on a rough surface. The confrontation of this model with various dataset shows that the seasonal south polar cap sublimation is mainly controlled by its albedo. Further studies must determine the exact mechanisms in the origin of this albedo variability (metamorphism, dust contamination, ...).

**KEY WORD :** Mars, pole, CO<sub>2</sub> ice, H<sub>2</sub>O ice, water, remote sensing, hyperspectral, spectroscopy, OMEGA, Mars Express, mass data, classification, detection, supervised, unsupervised, blind source separation, climate, seasonal cycle, seasonal south polar cap recession, mass balance, shadowing function.