Sur quelques problèmes de géométrie différentielle liés à la théorie de l'élasticité

Sorin Mardare

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Paris 6

1$^{\text{ère}}$ **partie** : Élasticité linéaire :

- inégalité de Korn sur une surface :
  conséquence de l'inégalité de Korn tridimensionnelle
- inégalité de Korn sur des surfaces compactes sans bord

2$^{\text{ème}}$ **partie** : Géométrie différentielle :

- Immersions isométriques d'un espace de Riemann
- Théorème fondamental de la théorie des surfaces

I Élasticité linéaire :

I.1. Inégalité de Korn sur une surface : conséquence de l'inégalité de Korn tridimensionnelle

Travail en collaboration avec Philippe G. Ciarlet.

Inégalité de Korn classique

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine borné et Lipschitzien.

$\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ de mesure relative non nulle.

L'inégalité de Korn :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq C\|\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)}.$$

pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega;\mathbb{R}^3) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega;\mathbb{R}^3);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_0\}$.

(Duvaut et Lions[1976], Ciarlet[1988], Taylor[1996], ...)

Remarque. Changement de métrique entre $\boldsymbol{id}(\Omega)$ et $\{\boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}\}(\Omega)$:

$$\underbrace{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T}_{\text{partie linéaire}} + (\nabla\boldsymbol{u})^T(\nabla\boldsymbol{u})$$

Inégalité de Korn en coordonnées curvilignes

$\Theta : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ immersion injective de classe C^2

$\Longrightarrow \{\Theta(\Omega), (\nabla\Theta)^T \nabla\Theta\}$ variété Riemannienne

$\Phi = \Theta + \boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \{\Phi(\Omega), (\nabla\Phi)^T \nabla\Phi\}$

Changement de métrique :

$$(\nabla\Phi)^T \nabla\Phi - (\nabla\Theta)^T \nabla\Theta = \underbrace{(\nabla\Theta)^T \nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T \nabla\Theta}_{2e(\boldsymbol{u})} + (\nabla\boldsymbol{u})^T \nabla\boldsymbol{u}$$

L'inégalité de Korn sur $M := \Theta(\Omega)$ en coordonnées curvilignes :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(M)} \leq C \|e(\boldsymbol{u})\|_{L^2(M)}$$

$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(M; \mathbb{R}^3)$, où $\Gamma_0 \subset \partial M$ de mesure relative > 0.

Inégalité de Korn sur une surface

$\boldsymbol{\theta} : \overline{\omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ immersion injective de classe C^3

$$\Longrightarrow \{\boldsymbol{\theta}(\omega), a(\boldsymbol{\theta}), b(\boldsymbol{\theta})\} \text{ surface plongée dans } \mathbb{R}^3$$

$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta} : \omega \to \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \{\boldsymbol{\phi}(\omega), a(\boldsymbol{\phi}), b(\boldsymbol{\phi})\}$

Changement de métrique : $a(\boldsymbol{\phi}) - a(\boldsymbol{\theta}) = 2\gamma(\boldsymbol{\eta}) + ...$

Changement de courbure : $b(\boldsymbol{\phi}) - b(\boldsymbol{\theta}) = \rho(\boldsymbol{\eta}) + ...$

Les tenseurs $\gamma(\boldsymbol{\eta})$ et $\rho(\boldsymbol{\eta})$ sont définis par leurs composantes covariantes :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{a}_\alpha + \partial_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{a}_\beta)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = (\partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{a}_3$$

où $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$.

L'inégalité de Korn sur la surface $S := \boldsymbol{\theta}(\omega)$:

$$\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|_{\boldsymbol{H}^1(S)} + \|\boldsymbol{\eta}_\nu\|_{\boldsymbol{H}^2(S)} \leq C\left(\|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{L^2(S)} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{L^2(S)}\right)$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\tau + \boldsymbol{\eta}_\nu \in \boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0}(S; \mathbb{R}^3)$.

Bernadou & Ciarlet[1976], Ciarlet & Miara[1992], Blouza & Le Dret[1999]

Résultat principal du premier chapitre :

Théorème 1 *L'inégalité de Korn sur une surface,*

$$\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|_{\boldsymbol{H}^1(S)} + \|\boldsymbol{\eta}_\nu\|_{\boldsymbol{H}^2(S)} \leq C\left(\|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{L^2(S)} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{L^2(S)}\right)$$
$$\forall\ \boldsymbol{\eta} \in (\boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0})(S;\mathbb{R}^3),$$

est une conséquence de l'inégalité de Korn sur une variété tridimensionnelle,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(M)} \leq C\|e(\boldsymbol{u})\|_{L^2(M)} \quad \forall\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(M;\mathbb{R}^3).$$

Preuve :

1. Relèvement de la surface

$$S = \boldsymbol{\theta}(\omega)$$

à une variété tridimensionnelle

$$M_\varepsilon := \Theta(\Omega_\varepsilon),$$

où $\quad \Omega_\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[,$

$$\Theta(\cdot, x_3) := \boldsymbol{\theta} + x_3 \boldsymbol{a}_3 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{a}_3 := \frac{\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2|}.$$

Remarques :

$\boldsymbol{a}_\alpha(y) := \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{\theta}(y))$, $\alpha = 1, 2$, forment la base covariante de $T_{\boldsymbol{\theta}(y)} S$ associée à la carte $\boldsymbol{\theta}$.
Si ε est suffisament petit $\Longrightarrow$ Θ immersion injective.

Preuve (suite) :

2. Relèvement des champs de déplacements bidimensionnels

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\tau + \boldsymbol{\eta}_\nu \in \boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0}(S;\mathbb{R}^3)$$

à des champs de déplacements tridimensionnels :

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(M_\varepsilon;\mathbb{R}^3)\ ;\ \Gamma_0 := \Theta(\boldsymbol{\theta}^{-1}(\gamma_0) \times [-\varepsilon, \varepsilon])$$

par l'application $F : \boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{u}$, où

$$\boldsymbol{u}(\cdot, x_3) = \boldsymbol{\eta} - x_3(\partial_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}^\alpha.$$

Remarques 1. On pose $\boldsymbol{\eta}(y) = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}(y)), \quad \boldsymbol{u}(y, x_3) = \boldsymbol{u}(\Theta(y, x_3))$.

2. Les relèvements ci-dessus sont tels que

$$(e_{i\|j}(\boldsymbol{u})) := (e(\boldsymbol{u})_{ij}) = \begin{pmatrix} f^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta}) + g^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve (suite) :

3. Si ε est suffisamment petit, l'application $F : \boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{u}$ est un isomorphisme entre les espaces

$$\boldsymbol{V}_K(S) := \boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0}(S;\mathbb{R}^3)$$

et

$$\boldsymbol{V}_{KL}(M_\varepsilon) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(M_\varepsilon;\mathbb{R}^3);\ (e(\boldsymbol{v}))_{i3} = 0\}.$$

En effet : F est continue et injective,

$$F(\boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0}(S;\mathbb{R}^3)) = \boldsymbol{V}_{KL}(M_\varepsilon),$$

F^{-1} continue (Théorème du graphe fermé).

Preuve (fin) :

4. L'inégalité inverse + l'inégalité de Korn tridimensionnelle en coordonnées curvilignes

$$\Longrightarrow \text{l'inégalité de Korn sur une surface.} \qquad \square$$

Remarque. L'isomorphisme F entre les espaces

$$\boldsymbol{V}_K(S) := \boldsymbol{H}^1_{\gamma_0} \oplus \boldsymbol{H}^2_{\gamma_0}(S;\mathbb{R}^3) \text{ et}$$
$$\boldsymbol{V}_{KL}(M_\varepsilon) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1_{\Gamma_0}(M_\varepsilon;\mathbb{R}^3);\ (e(\boldsymbol{v}))_{i3} = 0\}$$

avait déjà été mis en évidence par Destuynder[1985] par une autre démonstration et pour des raisons différentes.

I Élasticité linéaire :

I.2. Inégalité de Korn sur des surfaces compactes sans bord

Rappel. Inégalité de Korn sur une surface définie par une seule carte :

$$\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|_{\boldsymbol{H}^1(S)} + \|\boldsymbol{\eta}_\nu\|_{\boldsymbol{H}^2(S)} \leq C\left(\|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2(S)} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|\boldsymbol{L}^2(S)\right)$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\tau + \boldsymbol{\eta}_\nu : S \to \mathbb{R}^3$, où

$\boldsymbol{\eta}_\tau \in \boldsymbol{H}^1(S)$ est la composante tangentielle de $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}_\tau = 0$ sur $\Gamma_0 \subset \partial S$;

$\boldsymbol{\eta}_\nu \in \boldsymbol{H}^2(S)$ est la composante normale de $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}_\nu = \partial_\nu \boldsymbol{\eta}_\nu = 0$ sur Γ_0 ;

$S := \boldsymbol{\theta}(\omega)$ est une surface définie par $\boldsymbol{\theta} : \omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^3(\overline{\omega})$;

$\gamma(\boldsymbol{\eta})$ et $\rho(\boldsymbol{\eta})$ sont respectivement les tenseurs linéarisés de changement de métrique et de courbure entre $\boldsymbol{\theta}(\omega)$ et $(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta})(\omega)$.

Remarque. Les hypothèses faites sur $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\theta}$ assurent que $\gamma(\boldsymbol{\eta}), \rho(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(S)$.

But : Montrer une inégalité de type Korn pour les surfaces sans bord (sphère, tore, ...), qui sont forcément définies par plusieurs cartes locales.

Résultat principal du second chapitre :

Théorème 2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|_{(\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2)/\boldsymbol{F}} \leq C \left(\|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2} \right),$$

pour tout $\hat{\boldsymbol{\eta}} \in (\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2)/\boldsymbol{F}$, où

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2 \,;\, \gamma(\boldsymbol{\eta}) = \rho(\boldsymbol{\eta}) = 0\}.$$

Convention : $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^m \oplus \boldsymbol{H}^n$ ssi $\boldsymbol{\eta}_\tau \in \boldsymbol{H}^m(S)$ et $\boldsymbol{\eta}_\nu \in \boldsymbol{H}^n(S)$.

- On utilise l'espace quotient pour remplacer l'absence des conditions au bord. Le modèle de Koiter est alors bien posé sur cet espace quotient.

Preuve (en 4 étapes)

Point de départ :

Lemme 1 *Soit S une surface compacte de classe C^k, $k \geq 1$. Alors il existe un nombre fini de cartes $(\boldsymbol{\theta}_t, \omega_t)_{t=1}^N$ tel que*

$$S = \bigcup_{t=1}^{N} \boldsymbol{\theta}_t(\omega_t),$$

où, pour tout $t \in \{1, \ldots, N\}$,

- $\omega_t \subset \mathbb{R}^2$ *est un ouvert borné, de frontière lipschitzienne,*
- $\boldsymbol{\theta}_t : \overline{\omega}_t \to \mathbb{R}^3$ *est une immersion injective de classe C^k,*
- $\boldsymbol{\theta}_t(\omega_t)$ *est ouvert dans S.*

Preuve – étape 1

Pour chaque "petite" surface $S_t = \boldsymbol{\theta}_t(\omega_t)$ donnée par le Théorème précédent, on établit l'*inégalité de Korn sans conditions au bord :*

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{(\boldsymbol{H}^1\oplus\boldsymbol{H}^2)(S_t)} \leq C\left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{(\boldsymbol{L}^2\oplus\boldsymbol{H}^1)(S_t)} + \|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2(S_t)} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2(S_t)}\right)$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2$ (sans conditions au bord).

Pour ce faire, on utilise :

• l'inégalité analogue pour les surfaces définies par une seule carte

• l'équivalence des normes (pour une surface définie par une carte fixée de classe C^3) :

$$\|f\|_{H^m(S_t)} \sim \|f \circ \boldsymbol{\theta}_t\|_{H^m(\omega_t)}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{(\boldsymbol{H}^m\oplus\boldsymbol{H}^n)(S_t)} \sim \|(\eta_\alpha)\|_{(H^m\times H^m)(\omega_t)} + \|\eta_3\|_{H^n(\omega_t)}$$

où $\boldsymbol{\eta}(p) = \eta_i(x)\boldsymbol{a}^i(p)$ et $p = \boldsymbol{\theta}_t(x) \in S$.

Preuve – étape 2

La somme (finie) des inégalités de l'étape 1

$+$

$$\|\boldsymbol{f}\|_{H^m} \sim \sum_{t=1}^{N} \|\boldsymbol{f}\|_{H^m(S_t)}$$

$\Downarrow$

l'*inégalité de Korn "faible"* sur S :

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2} \leq C\left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{L}^2 \oplus \boldsymbol{H}^1} + \|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2}\right)$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\tau + \boldsymbol{\eta}_\nu \in \boldsymbol{H}^1(S) \oplus \boldsymbol{H}^2(S)$.

Preuve – étape 3

On établit (en raisonnant par l'absurde) l'inégalité de type Korn abstraite :

Lemme 2

On se donne deux espaces de Banach $(E, \|\cdot\|) \subset (\tilde{E}, \|\cdot\|_0)$
et une seminorme $|\cdot|$ *sur* E *tels que :*

- $(E, \|\cdot\|) \hookrightarrow (\tilde{E}, \|\cdot\|_0)$ *avec inclusion compacte,*
- $c|x| \leq \|x\| \leq c_0(\|x\|_0 + |x|)$, $\forall\ x \in E$.

Alors il existe $C > 0$ *tel que*

$$\|\hat{x}\|_{E/F} \leq C|\hat{x}|_{E/F} \quad \forall \hat{x} \in E/F,$$

où

$$F := \{x \in E\,;\, |x| = 0\},$$
$$\|\hat{x}\|_{E/F} := \inf\{\|x\|\,;\, x \in \hat{x}\},$$
$$|\hat{x}|_{E/F} := \inf\{|x|\,;\, x \in \hat{x}\}.$$

Preuve – étape 4

On applique le Théorème précédent au cas suivant :

$$E := \boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2 \subset \widetilde{E} := \boldsymbol{L}^2 \oplus \boldsymbol{H}^1,$$
$$|\boldsymbol{\eta}| = \left(\|\gamma(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2} + \|\rho(\boldsymbol{\eta})\|_{\boldsymbol{L}^2}\right).$$

Les hypothèses de ce Théorème sont satisfaites :

$\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2 \subset \boldsymbol{L}^2 \oplus \boldsymbol{H}^1$ compacte (classique),

$|\boldsymbol{\eta}| \leq c\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2}$, (facile à vérifier),

$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2} \leq c_0(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{L}^2 \oplus \boldsymbol{H}^1} + |\boldsymbol{\eta}|)$ (Korn “faible” – étape 2).

On obtient ainsi l’inégalité de Korn pour les surfaces compactes sans bord :

$$\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|_{(\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2)/\boldsymbol{F}} \leq C\Big(|\hat{\boldsymbol{\eta}}|_{(\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2)/\boldsymbol{F}}\Big) \quad \forall \hat{\boldsymbol{\eta}} \in (\boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2)/\boldsymbol{F}. \quad \square$$

Lemme du mouvement rigide infinitésimal

L'espace

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^1 \oplus \boldsymbol{H}^2 \; ; \; \gamma(\boldsymbol{\eta}) = \rho(\boldsymbol{\eta}) = 0\}$$

(qui apparaît dans l'espace quotient) est de dimension 6 :

Lemme. *Soit S une surface régulière de classe C^3. Alors*

$$\boldsymbol{F} = \{p \in S \mapsto \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \wedge \overrightarrow{Op} \; ; \; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Preuve : $S = \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcup_{i \in I} \boldsymbol{\theta}_i(\omega_i)$.

1. Soit $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{F}$. Lemme du mouvement rigide infinitésimal sur chaque S_i

$$\Rightarrow \boldsymbol{\eta}_{|_{S_i}} = \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{d}_i \wedge \boldsymbol{p}.$$

2. Par un argument de dimension, on montre que

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{c}_j \text{ et } \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{d}_j \text{ sur } S_i \cap S_j.$$

3. S connexe $\Rightarrow$ $\boldsymbol{c}_i$ et $\boldsymbol{d}_i$ ne dépendent pas de i. $\square$

Remarques : Le lemme du mouvement rigide infinitésimal

– reste valable pour des surfaces régulières générales (pas forcément compactes) ;

– reste valable pour des surfaces de classe $W^{2,\infty}$. Il suffit d'utiliser localement (pour chaque S_i) le lemme du mouvement rigide infinitésimal de Blouza-Le Dret[1994].

II Géométrie différentielle

II.1. Immersions isométriques d'un espace de Riemann sous des hypothèses faibles de régularité

Position du problème :

Définition 1 *Une application différentiable $F : (M, g) \to (N, h)$ entre deux espaces de Riemann est isométrique si pour tout $p \in M$, l'application linéaire tangente $T_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ conserve le produit scalaire, i.e.*

$$h(F(p))\big(T_pF(u), T_pF(v)\big) = g(p)(u, v) \quad \forall\ u, v \in T_pM\,.$$

Remarque : F isométrie $\Longrightarrow$ F immersion.

Dans ce qui suit :

- (N, h) est l'espace euclidien d-dimensionnel identifié à $\mathbb{R}^d$.
- $M = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et la métrique g est donnée par ses composantes covariantes (g_{ij}) dans la base canonique.

Dans ce cas, $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie ssi

$$\partial_i\Theta(x) \cdot \partial_j\Theta(x) = g_{ij}(x) \quad \forall\ x \in \Omega\,.$$

Conditions suffisantes pour l'existence (locale ou globale) d'une immersion isométrique $F : (\Omega, g) \to \mathbb{R}^d$?

1. Le tenseur de courbure de Riemann s'annule (cond. necéssaire).

2. Conditions sur la régularité de la métrique.

• Si $(g_{ij}) \in C^2(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$ le résultat est classique (Cartan[1928], Spivak[1979],...). Le résultat est global lorsque Ω est connexe et simplement connexe (Klingenberg[1973], Ciarlet et Larsonneur[2002],...)

• Si $(g_{ij}) \in C^1(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$ le résultat reste vrai (Hartman & Wintner[1950], C. Mardare[2003]).

Objectif : affaiblir davantage l'hypothèse sur la régularité de la métrique : $(g_{ij}) \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$.

Motivation : en élasticité non-linéaire, prendre la métrique comme inconnue, au lieu de l'immersion (déformation en élasticité). C'est une idée qui remonte à Antman[1976].

Le résultat principal du troisième chapitre :

Théorème 3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et simplement connexe. On considère une métrique définie sur Ω par un champ de matrices $(g_{ij}) \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$ dont le tenseur de courbure de Riemann s'annule au sens des distributions.*

Alors il existe une application $\Theta \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, unique aux isométries de $\mathbb{R}^d$ près, telle que

$$\partial_i \Theta \cdot \partial_j \Theta = g_{ij} \ \textit{dans } \Omega.$$

Corollaire. *Si de plus $(g_{ij}) \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$, $(g_{ij})^{-1} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}^d)$, et le diamètre géodésique de l'ouvert Ω est fini, alors $\Theta \in W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.*

Un résultat intermédiaire :

Lemme. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert connexe et simplement connexe, soit* $x^0 \in \Omega$, *et soit* $Y^0 \in \mathbb{M}^{q,l}$. *On se donne des champs de matrices* $A_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}^l)$ *et* $B_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}^{q,l})$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, d\}$, *tels que*

$$\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta = \partial_\beta A_\alpha + A_\beta A_\alpha \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{M}^l),$$

$$\partial_\alpha B_\beta + B_\alpha A_\beta = \partial_\beta B_\alpha + B_\beta A_\alpha \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{M}^{q,l}).$$

(i) Alors il existe une solution unique $Y \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}^{q,l})$ *du système*

$$\partial_\alpha Y = Y A_\alpha + B_\alpha \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{M}^{q,l}),$$

$$Y(x^0) = Y^0.$$

(ii) Si de plus le diamètre géodésique de l'ensemble Ω *est fini et* $A_\alpha \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}^l)$, $B_\alpha \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}^{q,l})$, *alors la solution* Y *du système ci-dessus appartient à l'espace* $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{M}^{q,l})$.

Preuve

(i) *Soit* $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. *Alors il existe un ensemble* $X_d \subset \mathbb{R}$ *de mesure nulle tel que*

$$f(\cdot, \overline{x}_d) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}) \ \textit{et} \ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\overline{x}_d - \varepsilon}^{\overline{x}_d + \varepsilon} \int_{\omega'} |f(x', x_d) - f(x', \overline{x}_d)| \, dx = 0$$

pout tout ouvert borné $\omega' \subset \mathbb{R}^{d-1}$ *et tout* $\overline{x}_d \in \mathbb{R} \setminus X_d$.

(ii) On construit un ensemble $\mathcal{A}$, dense dans Ω, tel que $\forall \, \overline{x} \in \mathcal{A}$, $\forall \, \tau \geq 2$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\overline{x}_\tau - \varepsilon}^{\overline{x}_\tau + \varepsilon} \int_{\omega_{\tau-1}} |A_\alpha(x_{\dots}, x_\tau, \overline{x}_{\dots}) - A_\alpha(x_{\dots}, \overline{x}_\tau, \overline{x}_{\dots})| \, dx_{1\dots\tau} = 0 \,,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\overline{x}_\tau - \varepsilon}^{\overline{x}_\tau + \varepsilon} \int_{\omega_{\tau-1}} |B_\alpha(x_{\dots}, x_\tau, \overline{x}_{\dots}) - B_\alpha(x_{\dots}, \overline{x}_\tau, \overline{x}_{\dots})| \, dx_{1\dots\tau} = 0,$$

où $\omega_\tau := \prod_{i=1}^{\tau} (\overline{x}_i - \varepsilon_i, \overline{x}_i + \varepsilon_i)$ et $\overline{\omega}_\tau \subset \Omega$.

Preuve (suite)

(iii) Pour $\beta = 1, 2, \dots, d$, on construit $Y_\beta \in W^{1,\infty}(\omega_\beta; \mathbb{M}^{q,l})$ t. q.

$$\partial_\alpha Y_\beta = Y_\beta \tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha \quad \forall\ \alpha \in \{1, 2, ..., \beta\},$$
$$Y_\beta(\overline{x}) = \overline{Y}.$$

où $\tilde{A}_\alpha := A_{\alpha|_{\omega_\beta}}$, $\tilde{B}_\alpha := B_{\alpha|_{\omega_\beta}}$ et $\overline{Y} \in \mathbb{M}^{q,l}$.

La solution sur $\omega := \omega_d$ sera alors $Y = Y_d$.

Soit β fixé. On construit Y_β à l'aide d'une suite de solutions approchées, définie par récurrence (par convention $Y_0 := \overline{Y}$) :

$$Y_\beta^0 := 0,$$
$$Y_\beta^{n+1}(x_1, \dots, x_\beta) := Y_{\beta-1}(x_1, \dots, x_{\beta-1}) + \int_{\overline{x}_\beta}^{x_\beta} (Y_\beta^n \tilde{A}_\beta + \tilde{B}_\beta)(x_1, \dots, x_{\beta-1}, t_\beta) dt_\beta.$$

Preuve (suite)

On montre par récurrence que $Y_\beta^n \in W^{1,\infty}(\omega_\beta)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, et que $\forall\ n \geq 2$, l'on a :

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha Y_\beta^n(x_{1\dots\beta}) = (Y_\beta^{n-1}\widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_\alpha)(x_{1\dots\beta}),& \\
+ \int_{\overline{x}_\beta}^{x_\beta} \left\{(\partial_\alpha Y_\beta^{n-1} - Y_\beta^{n-2}\widetilde{A}_\alpha - \widetilde{B}_\alpha)\widetilde{A}_\beta\right\}(x_{\dots}, t_\beta)dt_\beta& \\
+ \int_{\overline{x}_\beta}^{x_\beta} \left\{(Y_\beta^{n-1} - Y_\beta^{n-2})\left(\widetilde{A}_\beta\widetilde{A}_\alpha - \widetilde{A}_\alpha\widetilde{A}_\beta\right)\right\}(x_{\dots}, t_\beta)dt_\beta,& \\
\partial_\beta Y_\beta^n(x_{1\dots\beta}) = (Y_\beta^{n-1}\widetilde{A}_\beta + \widetilde{B}_\beta)(x_{1\dots\beta}).&
\end{aligned}
$$

où $\alpha \in \{1, 2, \dots, \beta - 1\}$.

La solution Y_β sera alors la limite de Y_β^n dans la norme L^∞.

Preuve (fin)

(iv) On a trouvé ainsi une solution locale avec la condition “initiale” dans un point de $\mathcal{A}$ (étape (ii)). Par un argument de passage à la limite, on montre que l’on peut trouver une solution locale avec la condition “initiale” dans un point arbitraire de Ω.

(v) Pour définir une solution globale, on “colle” les solutions locales le long des chemins qui unissent les points x^0 aux autres points de Ω. Grâce au résultat d’unicité (démontré auparavant) et au fait que Ω est simplement connexe, on montre que la définition ne dépend pas du chemin. $\square$

Le lemme précédent permet de montrer le résultat annoncé, à savoir :

Théorème. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert connexe et simplement connexe. On considère une métrique définie sur* Ω *par un champ de matrices* $(g_{ij}) \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{S}^d_>)$ *dont le tenseur de courbure de Riemann s'annule au sens des distributions.*

Alors il existe une application $\Theta \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, *unique aux isométries de* $\mathbb{R}^d$ *près, telle que*

$$\partial_i \Theta \cdot \partial_j \Theta = g_{ij} \ \textit{dans}\ \Omega.$$

Rappel : Le tenseur de courbure de Riemann est donné par ses composantes

$$R^p_{\cdot ijk} := \partial_j \Gamma^p_{ik} - \partial_k \Gamma^p_{ij} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^p_{kl}\,,$$

où Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel.

Preuve :

Soit $\Gamma_i : \Omega \to \mathbb{M}^d$ défini par $\Gamma_i = \left(\Gamma_{ij}^k\right)$.

(i) On résout d'abord le système de Pfaff

$$\begin{aligned} &\partial_i F = F\Gamma_i \text{ dans } \Omega, \\ &F(x^0) = F^0, \end{aligned} \tag{II.1}$$

où $F^0 \in \mathbb{M}^d$ est une matrice qui satisfait $(F^0)^T F^0 = \left(g_{ij}(x^0)\right)$.

Pour ce faire, on applique le Lemme précédent (avec $A_\alpha = \Gamma_i$ et $B_\alpha = 0$). En effet, les hypothèses du théorème assurent que $\Gamma_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ et que les conditions de compatibilité sont satisfaites (car $R^p_{\cdot ijk} = 0$).

(ii) On résout ensuite le système

$$\begin{aligned} &\partial_i \Theta = \boldsymbol{g}_i \text{ dans } \Omega, \quad \text{où } \boldsymbol{g}_i \text{ est la } i\text{-ème colonne de } F, \\ &\Theta(x^0) = \Theta^0. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Preuve (suite)

Comme F est solution du système de Pfaff (cf. étape (i)), on a :

$$\boldsymbol{g}_i \in W^{1,\infty}_{\text{loc}} \subset L^{\infty}_{loc},$$

$$\partial_j \boldsymbol{g}_i = \Gamma^k_{ji} \boldsymbol{g}_k = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{g}_k = \partial_i \boldsymbol{g}_j \,.$$

L'existence et l'unicité de la solution Θ est donc assurée par le Lemme précédent (avec $A_\alpha = 0$ et $B_\alpha = \boldsymbol{g}_i$).

(iii) On montre enfin que l'application Θ est bien une isométrie : les champs de matrices $(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j)$ et (g_{ij}) satisfont tous les deux le système :

$$\partial_k X = X \Gamma_k + \Gamma_k^T X \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{M}^d),$$

$$X(x^0) = \big(g_{ij}(x^0)\big) \text{ dans } \mathbb{M}^d.$$

L'unicité de la solution de ce système montre que Θ est une isométrie.

II Géométrie différentielle

II.2. Théorème fondamental de la théorie des surfaces sous des hypothèses faibles de régularité

Le résultat principal du quatrième chapitre est le suivant :

Théorème 4 *Soit* $\omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ouvert connexe et simplement connexe. On se donne deux champs de matrices* $(a_{\alpha\beta}) \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\omega; \mathbb{S}^2_>)$ *et* $(b_{\alpha\beta}) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\omega; \mathbb{S}^2)$ *satisfaisant ensemble les équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi au sens des distributions.*

Alors il existe une immersion $\boldsymbol{\theta} \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\omega, \mathbb{R}^3)$, *unique aux isométries propres de* $\mathbb{R}^3$ *près, telle que les champs de matrices* $(a_{\alpha\beta})$ *et* $(b_{\alpha\beta})$ *sont respectivement les composantes covariantes de la première et de la deuxième forme fondamentale de la surface immergée* $S = \boldsymbol{\theta}(\omega)$.

Corollaire. *Si de plus le diamètre géodésique de l'ouvert* ω *est fini,* $a_{\alpha\beta} \in W^{1,\infty}(\omega)$, $b_{\alpha\beta} \in L^\infty(\omega)$, *et* $(a_{\alpha\beta})^{-1} \in L^\infty(\omega, \mathbb{M}^2)$, *alors l'application* $\boldsymbol{\theta}$ *appartient à l'espace* $W^{2,\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$.

– Dans le cas où $(a_{\alpha\beta})$ est de classe C^2 et $(b_{\alpha\beta})$ est de classe C^1, le résultat est classique (Stoker[1969], Klingenberg[1973], do Carmo[1976], ...)

– Hartman et Wintner[1950] ont montré que le résultat reste vrai si les régularités sont C^1, respectivement C^0. Les équations de Gauss et Codazzi-Mainardi sont alors écrites sous une forme intégrale.

Rappel : Les équations de Gauss :

$$\partial_\gamma \Gamma^\tau_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\tau_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\Gamma^\tau_{\sigma\beta} = b_{\alpha\beta} b^\tau_\gamma - b_{\alpha\gamma} b^\tau_\beta \text{ in } \omega,$$
$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma, \tau \in \{1, 2\}.$$

Les équations de Codazzi-Mainardi :

$$\partial_\gamma b_{\alpha\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} b_{\sigma\beta} = \partial_\beta b_{\alpha\gamma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} b_{\sigma\gamma} \text{ in } \omega,$$
$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}.$$

Preuve (mêmes techniques que celles du chapitre précédent)

1. On définit les champs de matrices $\Gamma_\alpha : \omega \to \mathbb{M}^3$ par

$$\Gamma_\alpha := \begin{pmatrix} \Gamma^1_{\alpha 1} & \Gamma^1_{\alpha 2} & -b^1_\alpha \\ \Gamma^2_{\alpha 1} & \Gamma^2_{\alpha 2} & -b^2_\alpha \\ b_{\alpha 1} & b_{\alpha 2} & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on montre que le système d'équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi est équivalent à l'équation matricielle :

$$\partial_\alpha \Gamma_\beta + \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = \partial_\beta \Gamma_\alpha + \Gamma_\beta \Gamma_\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{M}^3).$$

On se donne également un point $y^0 \in \omega$, un vecteur $\boldsymbol{\theta}^0 \in \mathbb{R}^3$ et une matrice F^0 dont les colonnes $\boldsymbol{a}^0_i$ sont telles que

$$\boldsymbol{a}^0_\alpha \cdot \boldsymbol{a}^0_\beta = a_{\alpha\beta}(y^0), \qquad \boldsymbol{a}^0_3 := \frac{\boldsymbol{a}^0_1 \wedge \boldsymbol{a}^0_2}{|\boldsymbol{a}^0_1 \wedge \boldsymbol{a}^0_2|}.$$

Preuve (suite)

2. On résout d'abord le système

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha F = F\,\Gamma_\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega; \mathbb{M}^3), \\ &F(y^0) = F^0, \end{aligned} \tag{II.1}$$

(les coefficients $\Gamma_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\omega, \mathbb{M}^3)$ satisfont les hypothèses du Lemme sur les systèmes de Pfaff grâce à l'étape 1), puis le système

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}_\alpha \text{ dans } \omega, \\ &\boldsymbol{\theta}(y^0) = \boldsymbol{\theta}^0 \end{aligned} \tag{II.2}$$

(les coefficients $\boldsymbol{a}_\alpha \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\omega, \mathbb{M}^3)$ satisfont les hypothèses du même Lemme car

$$\partial_\alpha \boldsymbol{a}_\beta = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \boldsymbol{a}_\sigma + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{a}_3 = \partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha = \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \boldsymbol{a}_\sigma + b_{\beta\alpha} \boldsymbol{a}_3 = \partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha.$$

Preuve (fin)

3. Par les mêmes techniques que celles utilisées dans le chapitre précédent, on montre que les champs $(a_{\alpha\beta})$ et $(b_{\alpha\beta})$ sont respectivement les composantes covariantes de la première et de la deuxième forme fondamentale de la surface immergée $S := \boldsymbol{\theta}(\omega)$.

4. L'unicité de $\boldsymbol{\theta}$ aux isométries de $\mathbb{R}^3$ près est une conséquence de l'unicité des solutions des systèmes (II.1) et (II.2). $\square$

Remarque. Le résultat de Hartman et Wintner[1950] (pour $(a_{\alpha\beta}) \in C^1$ et $(b_{\alpha\beta}) \in C^0$) est une conséquence du Théorème précédent car les équations de Gauss et Codazzi-Mainardi (comprises au sens des distributions) sont équivalentes aux équations intégrales proposées par Hartman et Wintner, à savoir :

$$\int_J (\Gamma^\tau_{\alpha 1} dy_1 + \Gamma^\tau_{\alpha 2} dy_2) = \int_{\mathrm{dom} J} (\Gamma^\sigma_{\alpha 1}\Gamma^\tau_{\sigma 2} - \Gamma^\sigma_{\alpha 2}\Gamma^\tau_{\sigma 1} - b_{\alpha 1} b^\tau_2 + b_{\alpha 2} b^\tau_1)\, dy$$

et

$$\int_J (b_{\alpha 1} dy_1 + b_{\alpha 2} dy_2) = \int_{\mathrm{dom} J} (\Gamma^\sigma_{\alpha 1} b_{\sigma 2} - \Gamma^\sigma_{\alpha 2} b_{\sigma 1})\, dy$$

pour toute courbe Jordan J de classe C^2 incluse dans ω. Ici, $\mathrm{dom} J$ désigne l'ouvert borné qui a comme frontière la courbe J.