Courbure riemannienne: variations sur différentes notions de positivité

Mohammed Larbi Labbi

Université Montpellier II
Sciences et techniques du Languedoc

25e section Mathématiques

Mémoire présenté en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches

par Labbi Mohammed Larbi

Courbure riemannienne : variations sur différentes notions de positivité

Soutenue le 10 Juilliet 2006

Rapporteurs :

Berard Bergery Lionel	Université Nancy I
Gauduchon Paul	Ecole Polytechnique
Ilias Said	Université de Tours.

Jury :

Berard Bergery Lionel	Université Nancy I
Gauduchon Paul	Ecole Polytechnique
Herzlich Marc	Université Montpellier II
Ilias Said	Université de Tours
Lafontaine Jacques	Université Montpellier II.

Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je remercie Jacques Lafontaine qui a guidé mes premiers pas de recherches lors da ma thèse de doctorat. Son soutien continu, ses suggestions stimulantes, et accueils chaleureux pendant mes visites régulières au département de mathématiques de l'UMII ont été nécessaires et déterminants pour la réalisation de ce travail. Je profite de la présente occasion pour lui exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance. Sa participation à ce Jury m'honore grandement.

Je remercie vivement Lionel Berard Bergery, Paul Gauduchon et Ilias Said pour avoir accepter de se pencher sur mes travaux en tant que rapporteurs et de participer à ce Jury. J'en suis trés honoré.

Je remercie chaleureusement Marc Herzlich d'avoir accépté de faire partie du Jury.

Je remercie également Abdelghani Zeghib. Je suis sensible à l'attention qu'il prête à mon travail et à son enthousiasme.

Je voudrais aussi remercier toute l'équipe GTA du département de math de l'UMII pour leur accueil chaleureux.

Il aurait fallu écrire une histoire différente sans les encouragements continus et indispensables de ma femme, je tiens ici à lui exprimer toute ma reconnaissance. Je remercie également ma famille et ma belle famille pour leur précieux soutien.

Table des matières

Publications personnelles

Publications[1] dans des revues à comité de lecture

La1 : Labbi, M.-L., *Sur les nombres de Betti des variétés conforméments plates*, CRAS, t 319, série I, 77-80 (1994).

La2 : Labbi, M.-L., *Actions des groupes de Lie presques simples et positivité de la p-courbure*, Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, volume 5, Number 2, 263-276 (1997).

La3 : Labbi, M.-L., *Stability of the p-curvature positivity under surgeries and manifolds with positive Einstein tensor,* Annals of Global Analysis and Geometry, 15, 299-312 (1997).

La4 : Labbi, M.-L., *On compact manifolds with positive isotropic curvature*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 128, Number 5, Pages 1467-1474 (2000).

La5 : Labbi, M.-L., *On positive isotropic curvature and surgeries*, Journal of Differential Geometry and its applications, 17, 37-42 (2002).

La6 : Labbi, M.-L., *On compact manifolds with positive Einstein curvature*, Geometria Dedicata, 108, 205-217 (2004).

La7 : Labbi, M.-L., *Double forms, curvature structures and the (p, q)-curvatures*, Transactions of the American Mathematical Society, 357, n10, 3971-3992 (2005).

La8 : Labbi, M.-L., *Manifolds with positive second Gauss-Bonnet curvature*, Pacific Journal of Mathematics (2006), accepté pour publication.

Prépublications et travaux en cours

La9 : Labbi, M. L. *On a variational formula for the Gauss-Bonnet-Weyl curvatures*, prépublication.

La10 : Labbi, M. L. *Remarks on the geometry of tubes*, prépublication.

[1] Les publications [Lan], pour $4 \leq n \leq 11$, sont postérieures à la thèse.

La11 : Labbi, M. L. *On the Weitzenbök curvature operator*, en cours de rédaction.

Introduction

Mes recherches ont porté sur la géométrie et l'analyse sur les variétés riemanniennes compactes de dimension ≥ 4. Dans ce rapport[2], j'ai regroupé mes travaux suivant quatre thèmes principaux :

1. **Les formes doubles :** Notre objectif initial était l'étude du produit extérieur sur les formes doubles, dit produit de "Kulkarni-Nomizu", en vue de pouvoir manipuler des courbures d'ordre supérieur. En particulier, les courbures de Gauss-Bonnet-Weyl, les (p, q)-courbures et les opérateurs de courbure de Weitzenbök. Pour illustrer cette idée, signalons que l'intégrand de Gauss-Bonnet, qui a la réputation d'être une expression très compliquée, s'écrit tout simplement comme une puissance du tenseur de courbure (vue en tant qu'une forme double). Aussi, l'exemple de l'opérateur de courbure qui apparait dans la formule de Weitzenbök est significatif, voir chapitre 4.
   J'ai aussitôt constaté que cette étude a son intérêt propre. Les formes doubles se présentent naturellement comme une généralisation des formes différentielles. Il s'agit alors de généraliser toute la théorie classique aux formes doubles. C'est un domaine qui à mon avis reste encore largement inexploité.
2. **Courbures de Gauss-Bonnet-Weyl et généralisations :** Les courbures de Gauss-Bonnet-Weyl sont les invariants de courbure qui apparaîssent dans la célèbre formule des tubes de Weyl. Elles forment une interpolation entre la courbure scalaire usuelle et l'intégrand de Gauss-Bonnet.
   On a démontré que les courbures totales associées satisfont, comme pour le cas de la courbure scalaire totale, des formules de variation remarquables. Celles-ci donnent naissance à des tenseurs à divergences nulles du même type que le tenseur d'Einstein usuel. Ces résultats

[2] Dans tout ce texte, les références concernant mes travaux sont repérées par les lettres "**La**".

nous ont amené naturellement à des généralisations du problème de Yamabe pour la courbure scalaire et des variétés d'Einstein.
Par ailleurs, on a généralisé la formule d'Avez pour l'intégrand de Gauss-Bonnet en dimension 4 aux dimensions supérieures. On en a déduit en particulier, sous certaines hypothèses géométriques, la non-négativité des courbures de Gauss-Bonnet-Weyl. Ces hypothèses seront ensuite caractérisées géométriquement à l'aide des (p, q)-courbures. Ces dernières généralisent en même temps les p-courbures et les courbures de Gauss-Bonnet-Weyl. On a démontré également un théorème de Schur pour ces courbures et étudié leurs propriétés géométriques.

3. **Positivité de la seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl :** La seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl, notée h_4, est un invariant scalaire qui est quadratique en R : le tenseur de courbure de Riemann. Précisément,
$$h_4 = \|R\|^2 - \|cR\|^2 + \frac{1}{4}\|c^2R\|^2.$$
Une propriété importante de la seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl est qu'elle est non-négative pour les métriques d'Einstein. D'où l'intérêt majeur de classifier les variétés de dimension ≥ 4 admettant une métrique à seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl non-négative. Ceci est un grand projet de recherche et se présente comme la suite naturelle du problème similaire sur la courbure scalaire.
On a alors utilisé les techniques de chirurgies, submersions riemanniennes et des actions de groupe de Lie pour construire des classes de métriques à seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl positive. Aussi nous avons pu établir des liens avec la positivité de la courbure sectionnelle, de la courbure isotrope et de la p-courbure. Les résultats obtenus montrent une forte analogie entre le comportement de la positivité de la courbure scalaire et celle de h_4. Voici quelques exemples :
   (a) La classe des variétés compactes à $h_4 > 0$ est stable sous chirurgies en codimension > 4.
   (b) Pour les variétés compactes qui sont les espaces totaux pour des submersions riemanniennes, il suffit que les fibres soient à $h_4 > 0$ pour pouvoir construire une métrique à $h_4 > 0$ sur l'espace total.
   (c) Soit $n > 5$. Tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété de dimension n à $h_4 > 0$.

   En contre partie, il y a des différences subtiles entre la positivité de ces deux courbures. En effet, on sait qu'une variété compacte admettant une métrique à courbure sectionnelle négative ne peut pas porter de métriques à courbure scalaire positive (c'est un résultat de Gromov). En revanche, il n'y a pas de problème d'incompatibilité entre la négativité de la courbure sectionnelle et la positivité de h_4. Ceci est illustré tout simplement par l'exemple d'une variété à courbure constante négative arbitraire !.

4. **Courbure isotrope positive :** La courbure isotrope a été introduite par Micallef et Moore pour les variétés de dimension ≥ 4. Cette courbure joue le même rôle dans l'étude de la stabilité des 2-sphères harmoniques et dans celle des surfaces minimales, que celui exercée par la courbure sectionnelle dans l'étude de la stabilité des géodésiques.
   L'éxistence d'une métrique riemannienne à courbure isotrope positive sur une variété compacte entraîne l'annulation des groupes d'homotopies $\pi_i(M)$ pour $2 \leq i \leq [n/2]$.
   On a établi une relation étroite entre la courbure isotrope et la $(n-4)$-courbure, où n est la dimension de la variété en question. En effet, ces deux courbures se distinguent seulement par un terme en la courbure de Weyl, et par conséquent, elles coïncident dans le cas conformément plat. J'ai alors utilisé cette analogie pour adapter mes résultats de thèse sur la p-courbure au cas de la courbure isotrope.

Première partie

Formes doubles et courbures riemanniennes

Chapitre 1

Les formes doubles

Le tenseur covariant de courbure de Riemann est antisymétrique par rapport aux deux premiers variables ainsi que par rapport aux deux derniers. On pourra alors le considérer comme une forme bilinéaire sur l'espace des bivecteurs. C'est un exemple typique d'une forme double symétrique d'ordre (2,2).
Un deuxième exemple est le tenseur de Thorpe [44, 42]. C'est un tenseur de courbure d'ordre supérieur ayant pour courbure sectionnelle les courbures de Gauss-Kronecker. Celui-ci présente les mêmes propriétés d'antisymétrie par rapport aux p-premiers variables et par rapport aux p-derniers. C'est une forme double symétrique d'ordre (p, p). Un troisième exemple significatif de forme double symétrique est l'opérateur de courbure de Weitzenbök. Ce dernier sera étudié dans le chapitre 4.
D'autres exemples naturels de formes doubles en géométrie riemannienne sont la courbure de Ricci, le tenseur d'Einstein, le tenseur de courbure de Weyl, le tenseur de Schouten, la seconde forme fondamentale,....
Le produit extérieur usuel sur les formes se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit dit de "Kulkarni-Nomizu".
Ce produit a le mérite de rendre maniable des expressions naturelles, mais compliquées, en la courbure de Riemann. Un exemple signifiant est l'intégrand de Gauss-Bonnet. Il s'écrit tout simplement, à une constante près, comme une puissance du tenseur de courbure de Riemman. Un autre exemple est l'opérateur de courbure de la formule de Weitzenbök, voir chapitre 4.
Les formes doubles ont été introduites pour la première fois par De Rham, ensuite reprises et dévoloppées dans les années 70 par Kulkarni [20], Nomizu [35], Gray[13], Kowalski [19].... Elles sont aussi étudiées en physique mathématique, voir les travaux récents de Senovilla [39] et les références qui

y sont citées.
Dans ce chapitre, on se propose de présenter notre contribution dans ce sujet. Il s'agit essentiellement de résultats techniques mais d'utilité majeure pour la suite de notre étude.
Pour fixer les notations commençons par les définitions :
Soit (V, g) un espace vectoriel Euclidien (orienté) réel de dimension n. Dans la suite on identifiera, sans le signaler, les espaces vectoriels et leurs duaux via les structures Euclidiennes. Soit $\Lambda^* V = \bigoplus_{p\geq 0} \Lambda^{*p} V$ (resp. $\Lambda V = \bigoplus_{p\geq 0} \Lambda^p V$) l'algèbre des p-formes (resp. p-vectors) sur V. En prenant des produits tensoriels, on définit l'espace des formes doubles $\mathcal{D} = \Lambda^* V \otimes \Lambda^* V = \bigoplus_{p,q\geq 0} \mathcal{D}^{p,q}$ où $\mathcal{D}^{p,q} = \Lambda^{*p} V \otimes \Lambda^{*q} V$. C'est une algèbre bi-graduée associative, où la multiplication est notée par un point, celui ci sera omis dès que convenable. Rappelons que tout élément du produit tensoriel $\mathcal{D}^{p,q} = \Lambda^{*p} V \otimes \Lambda^{*q} V$ peut être canoniquement identifié à une forme bilinéaire $\Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \mathbf{R}$. Ceci étant une forme multilinéaire antisymétrique par rapport aux p-premiers arguments ainsi qu'aux q-derniers. Sous cette identification, le produit de $\omega_1 \in \mathcal{D}^{p,q}$ et $\omega_2 \in \mathcal{D}^{r,s}$ est donné par

$$\begin{aligned}
&\omega_1.\omega_2(x_1 \wedge ... \wedge x_{p+r}, y_1 \wedge ... \wedge y_{q+s}) \\
&= \frac{1}{p!r!s!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+r}, \rho \in S_{q+s}} \epsilon(\sigma)\epsilon(\rho)\omega_1(x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)}; y_{\rho(1)} \wedge ... \wedge y_{\rho(q)}) \\
&\qquad\qquad \omega_2(x_{\sigma(p+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p+r)}; y_{\rho(q+1)} \wedge ... \wedge y_{\rho(q+s)}).
\end{aligned}$$

En particulier, le produit du produit scalaire g avec lui même k-fois détermine le produit scalaire canonique sur $\Lambda^p V$. Précisément on a

$$g^k(x_1 \wedge ... \wedge x_k, y_1 \wedge ... \wedge y_k) = k! \det[g(x_i, y_j)].$$

1.1 L'application de multiplication par g^k

L'application de multiplication par g^k dans $\mathcal{D}$ joue un rôle fondamental dans l'étude des formes doubles. On a montré le résultat suivant qui généralise un lemme dû à Kulkarni [20] dans le cas $k = 1$:

Proposition 1.1.1 ([La7]) *L'application de multiplication par g^k est une application injective sur $D^{p,q}$ dès que $p + q + k < n + 1$.*

Ce résultat nous a permis d'une part de simplifier des calculs autrement très compliqués, voir chapitre 3 et d'autres exemples de calculs simplifiés dans [La7, La11], et d'autre part de mieux comprendre la structure de l'algèbre des formes doubles.

Une deuxième application fondamentale dans $\mathcal{D}$ est l'application de contraction c. Elle envoie $\mathcal{D}^{p,q}$ sur $\mathcal{D}^{p-1,q-1}$ et elle est l'adjointe de la multiplication par g comme on le verra dans la section ci-dessous.
Ces deux applications ne commutent pas en général. Dans [La7] on a établi après un calcul délicat, une formule explicite pour la différence $c^k g^l - g^l c^k$. Cette formule a été l'ingrédient principal dans l'élaboration de la proposition précédente.
Signalons au passage que, contrairement à toute impression spontanée, notre proposition ne peut pas être obtenue par de simples applications successives du lemme de Kulkarni.
Passons maintenant au produit scalaire sur $\mathcal{D}$. Le produit scalaire canonique sur $\Lambda^{*p}V$ induit naturellement un produit scalaire sur les espaces $D^{p,q} = \Lambda^{*p}V \otimes \Lambda^{*q}V$. On le notera par $<,>$.

On étend $<,>$ à $\mathcal{D}$ en posant $D^{p,q} \perp D^{r,s}$ si $p \neq r$ ou si $q \neq s$.
Dans la proposition suivante on a montré que la contraction dans $\mathcal{D}$ est l'adjointe de la multiplication par g :

Proposition 1.1.2 ([La7]) *Pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}$ on a*

$$< g\omega_1, \omega_2 >=< \omega_1, c\omega_2 > . \tag{1.1}$$

En particlier, pour tout $k \geq 1$, on a $< g^k\omega_1, \omega_2 >=< \omega_1, c^k\omega_2 >$.

1.2 L'opérateur de Hodge généralisé

On suppose que l'espace V est orienté. L'opérateur de Hodge $* : \Lambda^p V^* \to \Lambda^{n-p}V^*$ s'étend de manière naturelle pour donner un opérateur linéaire $* : D^{p,q} \to D^{n-p,n-q}$. Pour $\omega = \theta_1 \otimes \theta_2$ on pose

$$*\omega = *\theta_1 \otimes *\theta_2.$$

Notons que $*\omega(.,.) = \omega(*.,*.)$ en tant que forme bilinéaire. Plusieurs propriétés de l'opérateur de Hodge usuel se généralisent alors naturellement, voir [La7, La9].
L' opérateur de Hodge généralisé s'est révélé un outil très utile dans notre étude et nous a permis, en particulier, d' établir une deuxième formule simple reliant l'application de contraction c à la multiplication par g :

Proposition 1.2.1 ([La7]) *Pour tout $\omega \in \mathcal{D}$, on a*

$$g\omega = *c * \omega. \tag{1.2}$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$ et $\omega \in D^{p,p}$, on a $g^k\omega = *c^k * \omega$.

Mentionnons au passage que l'opérateur de Hodge peut être étendu aux formes doubles selon deux autres manières supplémentaires. Pour ω comme ci-dessus on pose $*_1\omega = *\theta_1 \otimes \theta_2$ et $*_2\omega = \theta_1 \otimes *\theta_2$. Les opérateurs ainsi obtenus ont l'inconvénient de ne pas conserver la symmétrie mais ils ont leurs intérêts propres. Voir les travaux récents de [39] pour des applications en physique mathématique de ces différentes extensions.

1.3 Décomposition orthogonale

Notre objectif ici est de généraliser, aux tenseurs de courbures d'ordre supérieur, la décomposition standard du tenseur de courbure de Riemann R, qui rappelons le affirme que :

$$R = W + \frac{1}{n-2}(c(R) - \frac{1}{n}g.c^2(R))g + \frac{1}{2n(n-1)}c^2(R).g^2.$$

Où W, cR et c^2R désignent réspectivement les courbures de Weyl, Ricci et la courbure scalaire.
On se place, comme on l'a fait jusqu'ici, dans le cadre algébrique. Remarquons que pour $\omega_1 \in \ker c$, $g\omega_2 \in gD^{p,q}$ et en utilisant (1.1), on a $< \omega_1, g\omega_2 >=< c\omega_1, \omega_2 >= 0$. On obtient alors (pour des raisons de dimension) la décomposition orthogonale $D^{p+1,q+1} = \mathrm{Ker}\, c \oplus gD^{p,q}$, et ceci pour tout $p, q \geq 0$ tels que $p+q \leq n-1$. Si on note par $E^{p,q}$ le noyau $\ker c \subset D^{p,q}$, on obtient par conséquent la décomposition orthogonale suivante de $D^{p,q}$:

$$D^{p,q} = E^{p,q} \oplus gE^{p-1,q-1} \oplus g^2E^{p-2,q-2} \oplus ... \oplus g^rE^{p-r,q-r}, \tag{1.3}$$

où $r = \min\{p, q\}$. Pour une forme double donnée, on a pu établir une formule explicite pour ses différentes composantes suivant la décomposition précédente comme suit :

Théorème 1.3.1 ([La7]) *Suivant la décomposition orthogonale (1.3), toute $\omega \in D^{p,p}$ se décompose comme suit*

$$\omega = \omega_p + g.\omega_{p-1} + ... + g^p.\omega_0,$$

où $\omega_0 = \frac{(n-p)!}{p!n!} c^p(\omega)$*, et pour* $1 \leq k \leq p$ *on a*

$$\omega_k = \frac{(n-p-k)!}{(p-k)!(n-2k)!} \left[c^{p-k}(\omega) + \sum_{r=1}^{k} \frac{(-1)^r}{\prod_{i=0}^{r-1}(n-2k+2+i)} \frac{g^r}{r!} c^{p-k+r}(\omega) \right].$$

On retrouve, en particulier, la décomposition standard citée ci-dessus du tenseur de courbure de Riemann pour $p = 2$ et $\omega = R$.

Notons par ailleurs que pour $\omega \in D^{p,p}$, la composante $\omega_p = \mathrm{con}\,\omega$ dépend seulement de la classe conforme de la métrique g. Elle généralise alors le tenseur de courbure de Weyl. Cette constatation a amené Nasu à étudier dans [32] une généralisation des variétés conformément plates : les variétés q-conformément plates. Celles-ci sont caractérisées par l'annulation de la composante ω_{2q} du tenseur de courbure de Gauss-Kronecker R^q.
Enfin, signalons que la décomposition précédente n'est pas en général irréductible sous l'action du groupe orthogonal. Ceci étant essentiellement dû au fait que les sous-espaces vérifiant la première identité de Bianchi sont invariants, voir [20].

1.4 L'algèbre des structures de courbure

Notons par $\mathcal{C}^p$ les éléments symétriques de $D^{p,p}$. Suivant Kulkarni, on définit l'algèbre des structures de courbure comme la sous-algèbre commutative $\mathcal{C} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{C}^p$.

Rappelons que la première somme de Bianchi, notée ici par $\mathcal{B}$, envoie $\mathcal{D}^{p,q}$ dans $\mathcal{D}^{p+1,q-1}$. Le noyau $\ker\mathcal{B}$ est stable par la multiplication dans $\mathcal{D}$. On appelera alors la sous-algèbre commutative $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap \ker\mathcal{B}$, l'algèbre des structures de courbure vérifiant la première identité de Bianchi.
Notons par E_1^p les éléments à trace nulle dans $\mathcal{C}_1^p$. Il est utile de mentionner ici que Kulkarni [20] a démontré que E_1^p est irréductible sous l'action du groupe orhogonal. Il en a par conséquent établi la décomposition orthogonale de $\mathcal{C}_1^p$ en composantes irréductibles comme suit :

$$\mathcal{C}_1^p = E_1^p \oplus g E_1^{p-1} \oplus g^2 E_1^{p-2} \oplus ... \oplus g^p E_1^0.$$

Comme pour le cas du tenseur de courbure de Riemann, toute structure de courbure $\omega \in \mathcal{C}_1$ est complètement déterminée à partir de sa courbure sectionnelle. De plus, une structure de courbure $\omega \in \mathcal{C}^p$ satisfait la première identité de Bianchi si et seulement s'il en est de même pour $*\omega$. Nous avons utilisé ces constatations pour établir une formule explicite pour l'opérateur de Hodge. Le résultat est :

Théorème 1.4.1 ([La7]) *Soit* $\omega \in \mathcal{C}_1^p$ *et* $1 \leq p \leq n$*, alors on a*

$$*\omega = \sum_{r=\max\{0,2p-n\}}^{p} \frac{(-1)^{r+p}}{r!} \frac{g^{n-2p+r}}{(n-2p+r)!} c^r \omega.$$

De plus, suivant la décomposition (1.3), pour $\omega = \sum_{i=0}^{p} g^{p-i}\omega_i$ *on a :*

$$*\omega = \sum_{i=0}^{\min\{p,n-p\}} (p-i)!(-1)^i \frac{1}{(n-p-i)!} g^{n-p-i}\omega_i.$$

Remarquons que pour $n = 2p$, l'opérateur de Hodge généralisé ne dépend que de la classe conforme de la métrique g. En effet, les termes $g^r c^r \omega$ restent inchangés après un changement conforme de la métrique.

1.5 La seconde somme de Bianchi et l'opérateur Hessien généralisé

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et T_mM son espace tangent au point $m \in M$. On notera aussi par $D^{p,q}, \mathcal{C}^p, \mathcal{C}_1^p$... les fibrés vectoriels sur M ayant pour fibres en m, les espaces $D^{p,q}(T_mM)$, $\mathcal{C}^p(T_mM)$, $\mathcal{C}_1^p(T_mM)$....
On remarque que tous les résultats algébriques précédents sont encore valables sur l'anneau des sections de ces fibrés. Le produit scalaire des sections étant bien évidemment le produit scalaire intégral.

La seconde somme de Bianchi D envoie $D^{p,q}$ dans $D^{p+1,q}$. Sa restriction à $\mathcal{D}^{p,0}$ coïncide avec $-d$, où d est l'opérateur de dérivation extérieur sur les p-formes. Une deuxième extension naturelle de d est l'opérateur $\tilde{D}$. Il est analogue à D mais en revanche envoie $D^{p,q}$ sur $D^{p,q+1}$. Précisément, pour $\omega \in \mathcal{D}^{p,q}$, on pose

$$(\tilde{D}\omega)(x_1\wedge...\wedge x_p, y_1\wedge...\wedge y_{q+1}) = \sum_{j=1}^{q+1}(-1)^j \nabla_{y_j}\omega(x_1\wedge...\wedge x_p, y_1\wedge...\wedge\hat{y_j}\wedge...\wedge y_{q+1}).$$

Notons qu'en général, contrairement à la dérivation extérieure ordinaire, on n'a ni $D^2 = 0$ ni $\tilde{D}^2 = 0$.

On introduit maintenant l'opérateur $\delta = c\tilde{D} + \tilde{D}c$ qui est défini sur les formes doubles et généralise l'opérateur δ classique sur les formes. Par un calcul direct on a montré que :

Proposition 1.5.1 ([La9]) *Soient (M,g) une variété riemannienne orientée, D sa seconde somme de Bianchi, et $*$ l'opérateur généralisé de Hodge. Alors, pour toute (p,q)-forme ω sur M telle que $p \geq 1$ on a*

$$\delta\omega = *D*\omega.$$

De plus, si M est compacte, l'opérateur $(-1)^{p+1+(p+q)(n-p-q)}\delta : D^{p+1,q} \to D^{p,q}$ est l'adjoint formel de l'opérateur D.

Cette dernière proposition étend aux formes doubles un résultat classique pour les formes différentielles.
D'une manière similaire, on introduit l'opérateur $\tilde{\delta} = cD + Dc$. Alors pour toute (p,q)-forme ω avec $q \geq 1$ on montre que $\tilde{\delta}\omega = *\tilde{D}*\omega$. Aussi, pour une variété compacte, l'adjoint formel de $\tilde{D}$ est l'opérateur $(-1)^{q+1+(p+q)(n-p-q)}\tilde{\delta} : D^{p,q+1} \to D^{p,q}$.

Finalement, en combinant les opérateurs précédents, on définit l'opérateur $D\tilde{D} + \tilde{D}D$ qui envoie, pour tout p, $\mathcal{C}^p$ dans $\mathcal{C}^{p+1}$. Il généralise l'opérateur Hessien usuel sur les fonctions ($p = 0$).
Il est remarquable que ce Hessien généralisé apparaît naturellement dans la première variation du tenseur de courbure de Riemann une fois considéré comme une forme double symétrique, voir chapitre 2. Son adjoint formel est donné, d'après ce qui précède, par

$$(-1)^{n-p-q-1}[\tilde{\delta}\delta + \delta\tilde{\delta}] = (-1)^{n(p+q)} * [\tilde{D}D + D\tilde{D}]* : \mathcal{C}^{p+1} \to \mathcal{C}^p. \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Les courbures de Gauss-Bonnet-Weyl

2.1 Introduction

Les fonctions symétriques paires sur les valeurs propres de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface de l'espace Euclidien sont intrinsèques. Elles peuvent alors être définies pour n'importe quelle variété riemannienne et on les appelle alors courbures de Gauss-Bonnet-Weyl. Elles forment une interpolation entre la courbure scalaire usuelle et l'intégrand de Gauss-Bonnet et apparaîssent toutes dans la célèbre formule des tubes de Weyl [45].

Ces courbures généralisent naturellement la courbure scalaire. De plus, elles ont le mérite de satisfaire une formule de variation semblable à celle satisfaite par la courbure scalaire. Cette formule donne naissance à des tenseurs d'Einstein généralisés, dits d'Einstein-Lovelock. Ils sont également, comme le tenseur d'Einstein usuel, à divergence nulle.

On va tout d'abord commencer par la définition précise des ces courbures, ensuite on donnera quelques exemples pour mieux situer ces invariants parmi les autres courbures bien connues.

Soit R le tenseur de courbure de Riemann d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n. On note par R^q le produit de R avec lui même q-fois dans l'anneau de courbure. Soulignons que les tenseurs R^q coïncident avec les tenseurs de courbure de Gauss-Kronecker.

Il n'est pas inutile de rappeler que R^q, ainsi que tous les tenseurs g^pR^q et $*g^pR^q$, satisfont la première identité de Bianchi.

Pour $1 \leq 2q \leq n$, la $(2q)$-ième coubure de Gauss-Bonnet-Weyl, notée par

h_{2q}, est la contraction complète du tenseur R^q. Précisément, on pose

$$h_{2q} = \frac{1}{(2q)!} c^{2q} R^q.$$

La dénomination de ces courbures est justifiée par les faits suivants :
Notons que $h_2 = \frac{1}{2}c^2 R$ est la moitié de la courbure scalaire. Pour n paire ($n = \dim M$), la courbure h_n coïncide, à un facteur constant près, avec l'intégrand de Gauss-Bonnet. De plus, pour tout k, $1 \leq 2k \leq n$, la courbure h_{2k} coïncide, à un facteur constant près, avec les invariants de courbures qui apparaîssent naturellement dans la formule des tubes de Weyl.
Signalons enfin qu'en utilisant la formule explicite de l'opérateur de Hodge généralisé, on peut réécrire ces courbures comme suit :

$$h_{2q} = *\frac{1}{(n-2q)!} g^{n-2q} R^q.$$

Voici, ci-dessous quelques exemples, pour plus de détailles voir [La7, La8] :

- Soit (M, g) une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante λ, alors pour tout q, la courbure h_{2q} est constante et égale à

$$h_{2q} = \frac{\lambda^q n!}{2^q (n-2q)!}.$$

- Soient (M, g) une hypersurface de l'espace Euclidien et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de sa seconde forme fondamentale B en un point donné. Alors en ce point on a,

$$h_{2q} = \frac{(2q)!}{2^q} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{2q} \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_{2q}}.$$

  Par conséquent, les courbures h_{2q} coïncident, à un facteur constant près, avec les fonctions symétriques s_{2q} des valeurs propres de B.
- Soit (M, g) une variété riemannienne conformément plate. Il est bien connu que son tenseur de courbure est alors déterminé par le tenseur de Schouten h, précisément $R = gh$.
  Un calcul direct montre que les courbures h_{2q} coïncident, à un facteur constant près, avec les fonctions symétriques des valeurs propres de h. Ces courbures ont été récemment étudiées par Gursky, Viaclovsky, Trudinger,..., voir [17, 41]. Ils ont, en particulier, prouvé une généralisation du problème de Yamabe pour ces courbures.

2.2 Les tenseurs d'Einstein-Lovelock

Après la métrique elle même, le tenseur d'Einstein est, à un facteur constant près, l'unique combinaison linéaire de la métrique et de sa courbure de Ricci à être à divergence nulle.
En remplaçant la courbure de Ricci cR par la courbure de Ricci généralisée $c^{2q-1}R^q$ et en imposant les mêmes conditions citées ci-dessus on obtient le tenseur d'Einstein-Lovelock d'ordre $2q$.
Ces tenseurs peuvent être introduits d'une autre manière, comme suit :
Rappelons d'abord qu'on obtient le tenseur d'Einstein, ou plus précisément sa courbure sectionnelle dans une direction v, en contractant complètement le tenseur de courbure de Riemann dans les directions orthogonales à v. D'une manière similaire, en remplaçant le tenseur de Riemann par le tenseur de Gauss-Kronecker on obtient les tenseurs d'Einstein-Lovelock.
La définition précise est comme suit :

Définition 2.2.1 *Le tenseur d'Einstein-Lovelock d'ordre $2q$, noté T_{2q}, est défini par*

$$T_{2q} = h_{2q}g - \frac{1}{(2q-1)!}c^{2q-1}R^q. \tag{2.1}$$

Le tenseur $\frac{1}{(2q-1)!}c^{2q-1}R^q$ est l'analogue du tenseur de Ricci pour le tenseur R^q. Remarquons alors l'analogie avec le tenseur d'Einstein. En particulier, pour $q = 1$, on retrouve ce dernier i.e. $T_2 = \frac{1}{2}c^2Rg - cR$.
Notons que ces tenseurs ne satisfont pas généralement la deuxième identité de Bianchi, en revanche ils sont à divergences nulles.
La nullité de la divergence pour les tenseurs d'Einstein-Lovelock est une conséquence du fait général suivant : si une fonctionnelle riemannienne admet un gradient L^2, ce gradient est à divergence nulle. Cette remarque est dûe à D. Bleecker et remonte en fait à Hilbert, voir le chapitre 4 de Besse [3].

2.3 Une formule de variation

Soit M une variété C^∞ (orientée) et compacte de dimension n, et soit $\mathcal{M}$ l'espace des métriques riemanniennes C^∞ sur M muni d'une L^2-norme naturelle de Sobolev. Celui-ci nous permettra de parler de fonctionnelles différentiables $\mathcal{M} \to \mathbf{R}$. Une fonctionnelle $F : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ est dite riemannienne si elle est invariante sous l'action du groupe des difféomorphismes. On dit que F a un gradient en g s'il existe un tenseur symétrique $a \in \mathcal{C}^1$ tel que pour tout tenseur symétrique $h \in \mathcal{C}^1$ on a

$$F'_g h = \frac{d}{dt} |_{t=0} F(g + th) =< a, h >,$$

où $\mathcal{C}^1$ représente l'espace des tenseurs symétriques dans $\Lambda^* M \otimes \Lambda^* M$ et $<, >$ le produit scalaire intégral.

Rappelons que la fonctionnelle classique de courbure scalaire totale est définie par

$$S(g) = \int_M c^2 R \mu_g,$$

où $c^2 R$ représente la courbure scalaire de g et μ_g l'élément de volume de g. Les points critiques de cette fonctionnelle, une fois restreinte à $\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} : \mathrm{vol}(g) = 1\}$, sont les métriques d'Einstein.
La fonctionnelle riemannienne suivante généralise d'une manière naturelle S :

$$H_{2k}(g) = \int_M h_{2k} \mu_g,$$

Remarquons que pour $k = 1$, $H_2 = S/2$ est la moitié de S. Aussi, si la dimension n de M est paire, alors H_n ne dépend plus de la métrique. Elle est, à un facteur constant près, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.
M. Berger a démontré, voir [2], que le gradient de H_4, comme le gradient de S, dépend seulement du tenseur de courbure de Riemann R et non pas de ses dérivées covariantes. Il a alors posé la question si ce phénomène reste vrai pour toutes les autres H_{2k}.
Le théorème suivant donne une réponse affirmative à cette question :

Théorème 2.3.1 ([La9]) *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour tout entier k, tel que $2 \leq 2k \leq n$, la fonctionnelle H_{2k} est différentiable, et en g on a*

$$H'_{2k} h = \frac{1}{2} < T_{2k}, h > .$$

Où T_{2k} est le tenseur d'Einstein-Lovelock d'ordre $2k$ défini ci-dessus.

Remarquons que pour $k = 1$, on a $H'_2 h = \frac{1}{2} < T_2, h >= \frac{1}{2} < \frac{\mathrm{scal}}{2} g - \mathrm{Ric}, h >$.

Ceci n'est autre que la formule classique pour la courbure scalaire totale. Aussi, pour $2k = n$, on obtient $H'_n h = \frac{1}{2} < T_n, h >= 0$. Ceci étant prévisible car H_n ne dépend plus de la métrique, comme l'affirme le théorème de Gauss-Bonnet.

Notons que ce résultat a été premièrement établi par Lovelock [27] en utilisant le calcul tensoriel classique. Cet article [27] reste très peu connu dans les milieux mathématiques.

Esquisse de la démonstration. On note tout d'abord que la dérivée directionnelle du tenseur de courbure de Riemann vu comme une forme double symétrique s'écrit :

$$R'h = \frac{-1}{4}(D\tilde{D} + \tilde{D}D)(h) + \frac{1}{4}F_h(R). \tag{2.2}$$

où $(D\tilde{D} + \tilde{D}D)$ est l'opérateur Hessien généralisé, voir chapitre 1, et pour tout $h \in \mathcal{C}^1$, $F_h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un opérateur auto-adjoint qui agit par dérivations sur $\mathcal{C}$. En particulier,

$$F_h(R) = h(R(x,y)z,u) - h(R(x,y)u,z) + h(R(z,u)x,y) - h(R(u,z)x,y).$$

Ensuite, on calcule la dérivée directionnelle de h_{2k} en g. On obtient,

$$h'_{2k}h = \frac{-1}{2} < \frac{c^{2k-1}}{(2k-1)!}R^k, h > +(-1)^n\frac{k}{4}(\delta\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\delta)\left(*(\frac{g^{n-2k}}{(n-2k)!}R^{k-1}h)\right).$$

Où $(\delta\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\delta)$ esl l'adjoint formel du Hessien $(D\tilde{D} + \tilde{D}D)$, voir chapitre 1. Enfin, la preuve s'achève en utilisant le théorème de Stockes comme suit

$$\begin{aligned} H'_{2k}.h &= \int_M \left(h'_{2k}.h + \frac{h_{2k}}{2}\mathrm{tr}_g h\right)\mu_g \\ &= -\frac{1}{2} < \frac{c^{2k-1}}{(2k-1)!}R^k, h > + \frac{h_{2k}}{2} < g, h > \\ &= \frac{1}{2} < h_{2k}g - \frac{c^{2k-1}}{(2k-1)!}R^k, h >= \frac{1}{2} < T_{2k}, h > . \end{aligned}$$

■

2.4 Le problème de Yamabe généralisé

Comme conséquence directe du théorème précédent, on a démontré que :

Proposition 2.4.1 ([La9]) *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2k$. La courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} est constante si et seulement si la métrique g est un point critique de la fonctionnelle H_{2k} restreinte à l'ensemble $\mathrm{Conf}_0(g)$ des métriques ponctuellement conformes à g et ayant le même volume total.*

Il est alors naturel de se poser la question si pour tout k on a :

Dans toute classe conforme d'une métrique riemannienne sur une variété compacte, il existe une métrique riemannienne à courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} constante.

Le problème suivant, dit σ_k-problème de Yamabe, est étroitement lié à la question précédente. Elle est actuellement l'objet de recherches intensives et on peut l'énoncer comme suit :

Notons par σ_k les fonctions symétriques des valeurs propres du tenseur de Schouten. Pour tout k, il existe dans chaque classe conforme d'une métrique donnée sur une variété compacte, une métrique riemannienne à courbure σ_k constante.

Ces deux problèmes coïncident dans le cas conformément plat si k est pair, puisque les deux courbures h_{2k} et σ_{2k} coïncident à un facteur constant près. Aussi, dans le cas $k = 1$, les deux problèmes coïncident avec le célèbre problème de Yamabe.
Le σ_k-problème de Yamabe a été récemment résolu pour $k > n/2$ par Gursky et Viaclovsky [17] en supposant que la métrique est "admissible". Ensuite Sheng, Trudinger et Wang [41] ont complété les cas où $2 \leq k \leq n/2$ en imposant en plus que l'équation en question soit variationnelle.
Notons toutefois qu'auparavant ce même problème a été résolu dans le cas conformément plat par Li et Li [25] et Guan et Wang [16].
Soulignons enfin que, contrairement à ce qu'on peut comprendre de [41], les fonctions h_{2k} sont en général différentes des fonctions symétriques des valeurs propres de l'opérateur de courbure. Ces dernières sont au nombre de $n(n-1)/2$ qui est nettement plus grand que $n/2$. Aussi, on peut se rendre compte de la différence entre ces courbures en considérant le cas d'une hypersurface de l'espace Euclidien ou même dans le cas conformément plat. Toutefois, il serait utile d'établir des relations algébriques entre ces invariants.

2.5 Variétés d'Einstein généralisées

Les métriques d'Einstein usuelles sont les points critiques de la fonctionnelle de la courbure scalaire totale, une fois restreinte aux métriques de

volume 1. Par analogie, en considérant les points critiques de la fonctionnelle de la courbure de Gauss-Bonnet-Weyl totale on obtient des variétés d'Einstein généralisées. Plus précisément :
Pour $2 \leq 2k \leq n$, on dira que (M, g) est une variété $(2k)$-Einstein si le tenseur d'Einstein-Lovelock d'ordre $2k$ est proportionel à la métrique, i.e.

$$T_{2k} = \lambda g.$$

Du fait que les tenseurs T_{2k} sont à divergence nulle, la fonction λ est alors constante. Remarquons aussi que les variétés 2-Einstein sont les variétés d'Einstein usuelles. De plus, pour $n = 2k$, on a $T_{2k} = 0$, alors toute métrique riemannienne sur une variété de dimension n est n-Einstein.

La classe des variétés d'Einstein généralisées d'ordre $2k$ contient les variétés à courbure sectionnelle constante et toutes les variétés homogènes à isotropie irréductible munies de leurs métriques riemanniennes naturelles.
Dans les lignes qui suivent, je vais présenter quelques remarques sur ces métriques. :

- Soit M une variété riemannienne de dimension n, le produit riemannien standard $M \times \mathbf{R}^q$ est tel que $T_{2k} = 0$ pour $2k \geq n$, mais T_2 n'est pas en général identiquement nulle. Cet exemple nous amène à penser naturellement que la condition pour une métrique d'être d'Einstein au sens usuel est plus forte. Cependant, ceci n'est pas toujours le cas comme le montre le contre exemple suivant :
- Soit M une variété riemannienne de dimension 4 Ricci-plate mais pas plate, par exemple une surface K3 munie de la métrique de Calabi-Yau. Si T^q est le tore plat, alors le produit riemannien $M \times T^q$ est d'Einstein au sens usuel. En revanche celui-ci n'est pas 4-Einstein.
- Rappelons que, voir chapitre 1, le tenseur de Gauss-Kronecker admet la décomposition suivante

  $$R^q = \omega_{2q} + g\omega_{2q-1} + ... + g^{2q-1}\omega_1 + g^{2q}\omega_0$$

  On montre [La7] qu'une métrique est $(2q)$-Einstein si et seulement si la composante ω_1 est identiquement nulle. Ceci généralise un résultat similaire pour les métriques d'Einstein usuelles.

Chapitre 3

Les (p, q)-courbures

3.1 Introduction

La métrique g et le tenseur de courbure de Riemann R satisfont la première et la deuxième identité de Bianchi, alors il en est de même pour tous les produits $g^p R^q$. Par dualité, les tenseurs $*(g^p R^q)$ satisfont eux aussi la première identité de Bianchi et sont tous à divergence nulle.
Ces tenseurs de (p, q)-courbure sont complètement déterminés à partir de leurs courbures sectionnelles. Ils englobent plusieurs courbures bien connues, y compris, les courbures : scalaire, sectionnelle, de Gauss-Kronecker, toutes les p-courbures, tous les invariants de courbure de la formule des tubes de Weyl, ainsi que les courbures d'Einstein-Lovelock ...
Commençons tout d'abord par la définition :

Définition 3.1.1 *La (p, q)-courbure, notée $s_{(p,q)}$, pour $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$ et $0 \leq p \leq n-2q$, est la courbure sectionnelle du (p, q)-tenseur de courbure suivant :*

$$R_{(p,q)} = \frac{1}{(n-2q-p)!} * \big(g^{n-2q-p} R^q\big). \tag{3.1}$$

Précisément, pour un p-plan tangent, $s_{(p,q)}(P)$ est la courbure sectionnelle du tenseur $\frac{1}{(n-2q-p)!} g^{n-2q-p} R^q$ dans la direction du $(n-p)$-plan supplémentaire et orthogonal à P.

Remarquons que les tenseurs $R_{(p,q)}$ satisfont la première identité de Bianchi mais en général pas la deuxième. En revanche, ils sont toujours à divergence nulle. En effet,

$$\delta R_{(p,q)} = \delta \frac{1}{(n-2q-p)!} * \big(g^{n-2q-p} R^q\big) = *D \frac{1}{(n-2q-p)!} \big(g^{n-2q-p} R^q\big) = 0.$$

En particulier, on a montré que :

Proposition 3.1.1 (Théorème de Schur [La9]) *Soit $p, q \geq 1$. Si en tout point $m \in M$, la (p,q)-courbure est constante, alors elle est constante.*

Ces courbures généralisent plusieurs notions de courbures bien connues. Notons que pour $q = 1$, on a $s_{(p,1)} = s_p$, où s_p est la p-courbure que j'avais étudié dans ma thèse, voir ci-dessous. En particulier, $s_{(0,1)}$ est la moitié de la courbure scalaire, et $s_{(n-2,1)}$ coïncide avec la courbure sectionnelle de (M, g). Aussi, pour $p = 0$ et $2q = n$, $s_{(0,\frac{n}{2})} = *R^{n/2}$ est, à un facteur constant près, la courbure de Killing-Lipschitz. Plus généralement, la courbure $s_{(n-2q,q)}(P)$ est, à un facteur constant près, la courbure de Killing-Lipschitz de $P^\perp$. Cette dernière n'est autre que la $(2p)$-courbure sectionnelle définie par Thorpe, voir [44].
Pour $p = 0$, $s_{(0,q)} = *\frac{1}{(n-2q)!}g^{n-2q}R^q = \frac{1}{(2q)!}c^{2q}R^q$ est la courbure de Gauss-Bonnet-Weyl introduite dans le chapitre 2.
Finalement, pour $p = 1$, $s_{(1,q)}$ est la courbure sectionnelle du tenseur d'Einstein-Lovelock étudiée aussi dans le chapitre 2.

3.2 La p-courbure

Dans cette section, on va s'intéresser au cas particulier $q = 1$. On retrouve alors la p-courbure.
Rappelons que la p-courbure, notée s_p, est définie pour $0 \leq p \leq n-2$ en étant la courbure sectionnelle du tenseur

$$\frac{1}{(n-2-p)!} * (g^{n-2-p}R).$$

Pour un p-plan tangent en $m \in M$, $s_p(P)$ est la moitié de la courbure scalaire en m de la sous variété totalement géodésique $\exp_m P^\perp$ de M. Pour $p = 0$, on retrouve la courbure scalaire usuelle, et pour $p = n-2$ elle coïncide avec la courbure sectionnelle.

En utilisant les résultats du chapitre 1, on a démontré aisément le théorème ci-dessous. Celui-ci établi une caractérisation géométrique des métriques à courbure sectionnelle constante, des métriques conformément plates à courbure scalaire constante et aussi des métriques d'Einstein. Signalons que des résultats semblables ont été d'abord démontrés dans ma thèse et ensuite par Chen-Dillen-Verstraelen-Vrancken dans [9] en utilisant des calculs assez longs !

Théorème 3.2.1 ([La7]) *1. Pour tout $2 \leq p \leq n-2$, la p-courbure est constante si et seulement si (M,g) est à courbure sectionnelle constante.*

2. Pour tout $1 \leq p \leq n-1$, (M,g) est une variété d'Einstein si et seulement si la fonction $P \to s_p(P) - s_{n-p}(P^\perp) = \lambda$ est constante. De plus, si tel est le cas on a $\lambda = \frac{n-2p}{2n} c^2 R$.

3. Pour tout $2 \leq p \leq n-2$ et $p \neq \frac{n}{2}$, la fonction $P \to s_p(P)+s_{n-p}(P^\perp) = \lambda$ est constante si et seulement si (M,g) est à courbure sectionnelle constante. De plus, si tel est le cas on a $\lambda = \frac{2p(p-1)+(n-2p)(n-1)}{2n(n-1)} c^2 R$.

4. Soit $n = 2p$, alors (M,g) est conformément plate à courbure scalaire constante si et seulement si la fonction $P \to s_p(P) + s_p(P^\perp) = \lambda$ est constante. De plus, dans ce cas on aura $\lambda = \frac{n-2}{4(n-1)} c^2 R$.

Idée de démonstration. Les conditions précédentes se lisent au niveau des tenseurs de courbure correspondants comme étant proportionnels à une certaine puissance de la métrique. On achève la démonstration, tout simplement, après une division des deux membres de l'équation obtenue (au niveau des tenseurs) par une puissance adéquate de la métrique g. Et ceci grâce à la proposition 1 du chapitre 1.

3.3 Propriétés des (p,q)-courbures

Dans cette section on présente les généralisations des résultats précédents au cas des (p,q)-courbures. Les démonstrations sont identiques au cas de la p-courbure.
Le résultat suivant caractérise les métriques à (p,q)-courbure constante.

Proposition 3.3.1 ([La7]) *1. Pour tout (p,q) tel que $2q \leq p \leq n-2q$, la (p,q)-courbure $s_{(p,q)} \equiv \lambda$ est constante si et seulement si la courbure sectionnelle du tenseur de Gauss-Kronecker R^q est constante et égale à $\frac{\lambda(2q)!(n-p-2q)!}{(n-p)!}$.*

2. Pour tout (p,q) tel que $p < 2q$, la (p,q)-courbure $s_{(p,q)} \equiv c$ est constante si et seulement si le tenseur $c^{2q-p}(R^q)$ est proportionel à la métrique, i.e. $c^{2q-p}(R^q) = \lambda g^p$.

Rappelons qu'une métrique est dite d'Einstein si son tenseur de Ricci cR lui est proportionnel. La condition 2 précédente peut être considérée alors comme une généralisation de la condition d'Einstein.
Le résultat suivant spécifie cette condition et généralise un résultat similaire pour les métriques d'Einstein :

Proposition 3.3.2 ([La7]) *Pour $1 \leq p < 2q$, le tenseur $c^{2q-p}(R^q)$ est proportionel à la métrique g^p si et seulement si*

$$\omega_i = 0 \ \ pour 1 \leq i \leq \min\{p, n-p\},$$

où les ω_i sont les composantes de R^q suivant la décomposition orthogonale 1.3 données par $R^q = \sum_{i=0}^{2q} g^{2q-i}\omega_i$.

Finalement, on a caractérisé géométriquement l'annulation des différentes composantes ω_i dans la décomposition orthogonale de R^q et ceci en utilisant les (p, q)-courbures.

Proposition 3.3.3 ([La7]) *Soit $2q \leq r \leq n-2q$, $n \neq 2r$ et $R^q = \sum_{i=0}^{2q} g^{2q-i}\omega_i$, alors*

1. *La fonction $P \to s_{(r,q)}(P) - s_{(n-r,q)}(P^\perp) \equiv \lambda$ est constante si et seulement si $\omega_i = 0$ pour $1 \leq i \leq 2q-1$ et $\big(\frac{(n-r)!}{(n-2q-r)!} - \frac{r!}{(r-2q)!}\big)\omega_0 = \lambda$.*
2. *La fonction $P \to s_{(r,q)}(P) + s_{(n-r,q)}(P^\perp) \equiv \lambda$ est constante si et seulement si $\omega_i = 0$ pour $1 \leq i \leq 2q$ et $\big(\frac{(n-r)!}{(n-2q-r)!} + \frac{r!}{(r-2q)!}\big)\omega_0 = \lambda$. Autrement dit, R^q est à courbure sectionnelle constante.*

Les cas restants sont discutés dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.4 ([La7]) *Soit $2q \leq r \leq n-2q$ et $n = 2r$, alors*

1. *La fonction $P \to s_{(r,q)}(P) - s_{(r,q)}(P^\perp) \equiv \lambda$ est constante si et seulement si $\omega_i = 0$ pour les i impairs tels que $1 \leq i \leq 2q-1$ et $\lambda = 0$.*
2. *La fonction $P \to s_{(r,q)}(P) + s_{(r,q)}(P^\perp) \equiv \lambda$ est constante si et seulement si $\omega_i = 0$ pour les i pairs tels que $2 \leq i \leq 2q$ et $2\frac{r!}{(r-2q)!}\omega_0 = \lambda$.*

3.4 Formule d'Avez généralisée

Rappelons que la formule d'Avez [1] montre que l'intégrand de Gauss-Bonnet en dimension 4 est donné par $h_4 = \sum_{r=0}^{2} \frac{(-1)^r}{(r!)^2}|c^r R|^2$. Cette formule a servi en particulier à démontrer que les variétés d'Einstein compactes et

de dimension 4 ont leurs caractéristiques d'Euler-Poincaré non-négative.
On a généralisé le résultat précédent aux dimensions supérieures comme suit :

Théorème 3.4.1 ([La7]) *Soit $n = 2p$ et $\omega, \theta \in \mathcal{C}_1^p$, alors*

$$*(\omega\theta) = \sum_{r=0}^{p} \frac{(-1)^{r+p}}{(r!)^2} < c^r\omega, c^r\theta > .$$

En particulier, si $n = 4q$, alors l'intégrand de Gauss-Bonnet est donné par

$$h_{4q} = \sum_{r=0}^{2q} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} |c^r R^q|^2.$$

Le résultat suivant est du même type :

Théorème 3.4.2 ([La7]) *Suivant la décomposition orthogonale 1.3, soit $\omega = \sum_{i=0}^{n-p} g^{n-p-i}\omega_i \in \mathcal{C}_1^{n-p}$ et $\theta = \sum_{i=0}^{p} g^{p-i}\theta_i \in \mathcal{C}_1^p$, alors*

$$*(\omega\theta) = \sum_{r=0}^{\min\{p,n-p\}} (-1)^r (n-2r)! < \omega_i, \theta_i > .$$

En particulier, pour tout q tel que $n \geq 4q$ on a

$$h_{4q} = \frac{1}{(n-4q)!} \sum_{i=0}^{2q} (-1)^i (n-2i)! < (R^q)_i, (R^q)_i > .$$

Le cas $q = 1$ est particulièrement intéressant. En effet, si $R = \omega_2 + g\omega_1 + g^2\omega_0$ est la décomposition standard du tenseur de courbure de Riemann. Le théorème précédent affirme qu'en dimension ≥ 4 on a

$$(n-4)!h_4 = n!|\omega_0|^2 - (n-2)!|\omega_1|^2 + (n-4)!|\omega_2|^2.$$

Par conséquent, on a pu démontrer que :

Théorème 3.4.3 ([La7, La8])
1. *Pour une variété d'Einstein (M, g) de dimension $n \geq 4$ on a $h_4 \geq 0$. De plus $h_4 \equiv 0$ si et seulement si (M, g) est plate.*
2. *Si une variété conformément plate (M, g) est à courbure scalaire nulle et de dimension $n \geq 4$, alors $h_4 \leq 0$. De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si (M, g) est plate.*

On en déduit alors une obstruction géométrique à l'existence des métriques d'Einstein ainsi que pour les métriques conformément plates à courbure scalaire nulle.
Rappelons qu'en dimension ≥ 5 on ne connait pas d'obstructions topologiques à l'existence de métriques d'Einstein. Jusqu'ici, les seules obstructions connues sont celles obtenues en imposant la condition supplémentaire de positivité de la constante d'Einstein. Celle-ci force la courbure scalaire et la courbure de Ricci d'êtres positives, et on sait qu'on a des réstrictions topologiques dans ces cas.
L'obstruction géométrique précédente à l'avantage d'être indépendante du signe de la constante d'Einstein. C'est d'ailleurs ce résultat qui a motivé notre étude de la positivité de la seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl.
Le théorème précédent se généralise naturellement pour les courbures supérieures comme suit :

Théorème 3.4.4 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 4q$ et telle que le tenseur $c(R^q)$ est proportionnel à la métrique g^{2q-1} alors $h_{4q} \geq 0$. De plus dans ce cas $h_{4q} \equiv 0$ si et seulement si (M, g) est q-plate. En particulier, une variété compacte de dimension $n = 4q$ telle que son tenseur $c(R^q)$ est proportionnel à la métrique g^{2q-1} est à caractéréstique d'Euler-Poincaré non-négative. De plus, Elle est nulle si et seulement si la variété est q-plate.*

Rappelons que q-plate veut dire que la courbure sectionnelle de R^q est identiquement nulle. Notons que ce résultat n'est pas publié dans mes travaux. Il se démontre directement à partir du théorème 3.4.2 et de la proposition 3.3.2.
Notons également que cette condition est plus forte que la condition $(2q)$-Einstein définie dans le chapitre 2.

Chapitre 4

Les courbures de Weitzenbök

L'opérateur de courbure de Weitzenbök, noté ici par $\mathcal{N}$, est le terme d'ordre zéro (i.e. dépendant linéairement de la courbure) dans la célèbre formule de Weitzenbök. Cette formule exprime le Laplacien Δ sur les formes différentielles en termes de la connexion de Levi civita ∇, précisément :

$$\Delta = \nabla^*\nabla + \mathcal{N}.$$

Cette formule est importante dans l'étude des intéractions entre la géométrie et la topologie d'une variété. En effet, il y a une méthode qui remonte à Bochner et connue sous le nom de théorèmes d'annulations, consistant à démontrer l'annulation des nombres de Betti d'une variété riemannienne ayant certaines positivités de courbure entraînant la positivité de $\mathcal{N}$. Cette méthode s'applique essentiellement sur les variétés compactes.
L'opérateur $\mathcal{N}$ envoie les p-formes sur elles mêmes et il est auto-adjoint. Ceci permet, par dualité, de le voir comme une forme double.
Le probléme avec $\mathcal{N}$ est qu'il s'est toujours imposé comme une expression compliquée de la courbure et donc difficilement manipulable. Différentes simplifications de cet opérateur existent. Je cite par exemple le formalisme de Clifford dans [23, La1], le travail de Gallot-Meyer dans [11],....
Dans notre contribution [La11], on montre une formule simple pour N qu'on utilise par la suite pour étudier des propriétés géométriques de cette courbure. Signalons que cette formule de $\mathcal{N}$ a été auparavant établie par Bourguignon dans [6], proposition 8.6. À ma connaissance cette formule reste malheureusement méconnue et pas utilisée. Pour ma part, je n'ai pris connaissance de celle-ci qu'une fois ma preuve achevée. Notre démonstration est complètement différente et est directe.

4.1 Courbures sectionnelles de Weitzenbök

Un calcul direct sans difficultés montre que la courbure sectionnelle du tenseur $\mathcal{N}$ est donnée par

$$\mathcal{N}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=p+1}^{n} K(e_{i_j}, e_{i_k}).$$

Où $(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$ est une base orthonormée de vecteurs tangents.
Si on désigne par $s_p(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$, la p-courbure du p-plan engendré par les vecteurs $e_{i_1}, ..., e_{i_p}$, qui rappelons le, est la moyenne de la courbure sectionnelle dans la direction du $(n-p)$-plan orthogonal à P.
Il est immédiat que

$$2\mathcal{N}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = c^2R - s_p(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) - s_{n-p}(e_{i_{p+1}}, ..., e_{i_n}).$$

Bien évidement, $\mathcal{N}(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$ désigne la courbure sectionnelle de $\mathcal{N}$ dans la direction du p-plan engendré par les vecteurs $e_{i_1}, ..., e_{i_p}$.
D'autre part, on sait que pour $2 \leq p \leq n-2$ [La1, La11] on a

$$s_p(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = c^2R + s_{n-p}(e_{i_{p+1}}, ..., e_{i_n}) - 2\sum_{j=1}^{p} cR(e_{i_j}, e_{i_j}).$$

Il en résulte alors immédiatement que la courbure sectionnelle de Weitzenbök est déterminée à partir de la p-courbure comme suit :

$$\mathcal{N}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} cR(e_{i_j}, e_{i_j}) - s_{n-p}(e_{i_{p+1}}, ..., e_{i_n}).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule (13) dans [La7], on peut reformuler les sommes précédentes en termes du produit de Kulkarni-Nomizu comme suit

$$\mathcal{N}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = \{\frac{g^{p-1}}{(p-1)!}cR - 2\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}R\}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e_{i_1}, ..., e_{i_p}).$$

Soit finalement,

$$\mathcal{N}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = \{\frac{gcR}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e_{i_1}, ..., e_{i_p}). \tag{4.1}$$

4.2 Structures de courbures de Weitzenbök

Notons que la forme double $\{\frac{gcR}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}$ satisfait la première identité de Bianchi, elle a en outre la même courbure sectionnelle que la structure de courbure de Weitzenbök. Il suffit alors de démontrer que cette structure satisfait elle aussi la première identité de Bianchi (voir [La11]) pour avoir une démonstration complète de la formule suivante :

Proposition 4.2.1 ([6, La11]) *Pour tout p tel que $2 \leq p \leq n-2$, le tenseur de courbure de la formule de Weitzenbök n'est autre que*

$$\mathcal{N} = \{\frac{gcR}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}. \tag{4.2}$$

Rappelons que pour $p = 1$, la forme double $\mathcal{N}$ n'est autre que le tenseur de Ricci.

4.3 Propriétés géométriques

Pour préciser le degré p de la forme double $\mathcal{N}$, on écrira $\mathcal{N}_p$.
Le résultat suivant peut être démontré aisément, soit en utilisant la formule explicite de l'opérateur de Hodge établie dans le premier chapitre soit tout simplement en remarquant que les deux formes doubles satisfont la première identité de Bianchi et ont la même courbure sectionnelle :

Proposition 4.3.1 ([La11]) *Pour tout p tel que $2 \leq p \leq n-2$, on a*

$$*\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_{n-p}.$$

En particulier, si $n = 2p$ on obtient $*\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p$.

Il est clair que $\mathcal{N}_p$ est divisible par g^{p-2} et donc sa décomposition orthogonale sera réduite comme suit :

Proposition 4.3.2 ([La11]) *Soit $R = \omega_2 + g\omega_1 + g^2\omega_0$ la décomposition standard du tenseur de courbure de Riemann, alors le tenseur $\mathcal{N}_p$ se décompose suivant 1.3 comme suit :*

$$\mathcal{N}_p = -g^{p-2}\omega_2 + g^{p-1}\{\frac{n-2p}{2(p-1)}\omega_1\} + g^p\{\frac{n-p}{p-1}\omega_0\}.$$

Ceci étant bien sûr pour tout $2 \leq p \leq n-2$.

Rappelons qu'une forme double (p, p) satisfaisant la première identité de Bianchi est à courbure sectionnelle constante si et seulement si elle est proportionelle à g^p. Le corollaire suivant est alors immédiat en utilisant soit la proposition précédente soit la proposition 1 du chapitre 1. :

Corollaire 4.3.3 ([La11]) *Pour $2 \leq p \leq n-2$, une variété riemannienne (M, g) de dimension n est à courbure sectionnelle de Weitzenbök d'ordre p constante si et seulement si elle est soit à courbure sectionnelle constante soit conformément plate de dimension $n = 2p$.*

Signalons qu'un résultat du même type a été démontré dans [31]. Les résultats précédents sont algébriques, i.e. valables en tout point de la variété. En particulier, on en déduit un théorème de Schur pour ces courbures.
Même si l'étude de la positivité des courbures sera discutée dans la deuxième partie de ce mémoire, je me permettrai, exceptionellement ici, de mentionner quelques remarques sur la positivité de $\mathcal{N}_p$.
La positivité de la forme double $\mathcal{N}_p$ est bien évidement très importante dans l'étude des intéractions entre topologie et géométrie. Il serait donc très intéressant de comprendre cette condition et en particulier, d'établir des liens avec la positivité des autres courbures.

Faut-il le rappeler ici que la positivité de $\mathcal{N}_p$ est strictement plus forte que celle da sa courbure sectionnelle (penser à la positivité de l'opérateur de courbure de Riemann et de sa courbure sectionnelle).
On sait déjà que la positivité de l'opérateur de courbure de Riemann entraîne celle de $\mathcal{N}_p$ pour tout p, c'est le théorème de Gallot-Meyer [11]. Voir aussi [23] pour une preuve simplifiée. Notons aussi qu'une autre démonstration simplifiée est possible à partir de la formule de $\mathcal{N}_p$ ci-dessus.
Dans [La11] on étudie les liens avec la positivité de la p-courbure et celle de la courbure isotrope. En particulier, on montre que :

Proposition 4.3.4 ([La11]) *Pour tout $2 \leq p \leq n-2$, la contraction complète de la forme double $\mathcal{N}_p$ est donnée par*

$$c^p(\mathcal{N}_p) = \frac{p(n-2)!}{(n-p-1)!} c^2 R$$

En particulier, la positivité de $\mathcal{N}_p$ entraîne la positivité de la courbure scalaire.

D'une manière similaire, en prenant des contractions jusqu'à l'ordre $p-1$, on montre que la positivité de $\mathcal{N}_p$ entraîne une condition de pincement sur

les valeurs propres de la courbure de Ricci.
Dans le cas conformément plat, on établit la relation suivante entre le tenseur de p-courbure et $\mathcal{N}_p$:

Proposition 4.3.5 ([La11]) *Soit (M, g) une variété conformément plate de dimension n, et $2 \leq p \leq n-2$. Alors le tenseur $\mathcal{N}_p$ est donné à partir du tenseur de p-courbure comme suit :*

$$\mathcal{N}_{\frac{n+p}{2}} = \frac{p!}{n-p-1} g^{\frac{n-p}{2}} \{*(\frac{1}{(n-p-2)!} g^{n-p-2} R)\}.$$

Rappelons que dans le conformément plat, la positivité de la p-courbure équivaut à celle de son tenseur de p-courbure. En particulier, la positivité de la p-courbure entraîne alors la positivité de $\mathcal{N}_{\frac{n+p}{2}}$. Par conséquent, on obtient une deuxième démonstration plus rapide de notre résultat sur l'annulation des nombres de Betti des variétés conformément plates à p-courbure positive [La1].

Deuxième partie

Variations sur différentes notions de positivité de courbures

Chapitre 5

Positivité de la p-courbure

L'étude de la positivité de la p-courbure a été le sujet auquel était consacré mon premier travail de recherche. Cette courbure est une extension de la courbure scalaire proposée par M. Gromov et coïncide avec la courbure p-vectorielle de É. Cartan, voir [7, 31]. Elle est une fonction définie sur la p-grassmannienne de la variété en question, qui associe à tout p-plan P, la moyenne de la courbure sectionnelle dans la direction du $(n-p)$-plan orthogonal. Pour $p = 0$, (resp. pour p=$n-2$), n étant la dimension de la variété en question, on retrouve la courbure scalaire (resp. la courbure sectionnelle). La positivité de la p-courbure entraîne celle de la $(p-1)$-courbure, pour tout $1 \leq p \leq n-2$. En particulier, la positivité de la p-courbure est intermédiaire entre la positivité des courbures scalaire et sectionnelle.
En ce qui concerne les problèmes portant sur la courbure scalaire positive, on a maintenant des réponses très satisfaisantes suite aux travaux de Gromov-Lawson [14], Schoen-Yau, Stolz, ... Ceci n'étant absolument pas le cas pour la courbure sectionnelle positive. On ignore toujours si par exemple, le produit $S^2 \times S^2$ possède ou non une métrique riemannienne à courbure sectionnelle positive (conjecture de Hopf).
Afin de mieux situer mes travaux sur la positivité, je commencerai tout d'abord par un rappel de mes résultats de thèse. Signalons toutefois que les résultats sur le groupe fondamental et ceux sur la courbure d'Einstein sont postérieurs à ma thèse. J'ai démontré les résultats suivants, qui généralisent des résultats dûs respectivement à Gromov-Lawson [14], Lawson-Yau [24], Bourguignon [6] et Lafontaine [21]. :

Théorème 5.0.6 ([La3]) *Si deux variétés compactes de dimension $n \geq p+3$ admettent des métriques à p-courbure positive, il en est de même de* *leur somme connexe. Plus généralement, si une variété compacte admet une métrique à p-courbure positive, alors il en est de même pour toute variété obtenue à partir de celle-ci par chirurgies de codimension $\geq p+3$.*

Comme conséquence de ce théorème et en utilisant des techniques de topologie algébrique, spécialement le cobordisme spinoriel de Gromov-Lawson, j'ai démontré des résultats d'existence pour la 1-courbure positive comme suit :

Théorème 5.0.7 ([La3])

1. *Une variété compacte 2-connexe de dimension ≥ 7 admet une métrique riemannienne à 1-courbure positive si et seulement si elle admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive. En particulier, toute variété compacte de dimension 7 admet une métrique à 1-courbure positive.*
2. *Toute variété compacte, simplement connexe, non-spinorielle de dimension ≥ 7 et telle que son second groupe d'homotopie satisfait $\pi_2(V) \cong Z_2$ admet une métrique riemannienne à 1-courbure positive.*

Ensuite, j'ai utilisé à la manière de Lawson-Yau [24] les actions des groupes de Lie pour faire apparaître de la p-courbure positive. Le résultat est le suivant :

Théorème 5.0.8 ([La2]) *Si une variété compacte admet une action effective d'un groupe de Lie compact simple de rang au moins $p+1$, alors cette variété porte une métrique à p-courbure positive.*

En ce qui concerne les obstructions, j'ai démontré un théorème d'annulation des nombres de Betti pour les variétés conformément plates comme suit :

Théorème 5.0.9 ([La1])

1. *Soit (M,g) une variété compacte conformément plate de dimension n à p-courbure positive alors les nombres de Betti sont nuls du degré $\frac{n-p}{2}$ au degré $\frac{n+p}{2}$.*
2. *Soit (M,g) une variété compacte conformément plate de dimension n à p-courbure non-négative et telle que la cohomologie réelle de degré $\frac{n\pm p}{2}$ est non nulle, alors (M,g) est soit plate soit isométrique à un quotient compact de $S^{\frac{n+p}{2}} \times H^{\frac{n-p}{2}}$.*

Pour démontrer ces derniers résultats, j'ai bien entendu utilisé la formule de Weitzenbök mais reformulée en termes des algèbres de Clifford selon les idées dévolopées par Lawson-Michelsohn [23].
Par ailleurs, du fait que le produit d'une sphère de dimension $\geq p+2$ avec une variété compacte quelconque admet une métrique à p-courbure positive,

on en déduit que tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété de dimension $\geq p+6$ et à p-courbure positive. En utilisant notre résultat précédent sur les chirurgies, on a pu dire mieux comme suit :

Théorème 5.0.10 ([La5]) *Soit G un groupe à présentation finie et $p \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq p+4$, il existe une variété compacte de dimension n à p-courbure positive et telle que $\pi_1(M) = G$.*

5.1 Courbure d'Einstein positive

La courbure d'Einstein est une fonction définie sur le fibré tangent unitaire de la variété en question. Elle est obtenue à partir du célèbre tenseur d'Einstein de la même manière que l'on définit la courbure de Ricci à partir du tenseur de Ricci. Elle coïncide avec la p-coubure pour $p = 1$.
Après la courbure scalaire et la courbure sectionnelle usuelles, la courbure d'Einstein, est la plus importante parmi toutes les autres p-courbures. Sa positivité a été précédemment étudiée mais seulement dans le cadre général des autres p-courbures. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on lui a consacré une étude à part dans [La6].
La positivité de la courbure d'Einstein entraîne celle de la courbure scalaire. A l'heure actuelle, on connait beaucoup de classes de variétés admettant des métriques à courbure d'Einstein positive. En revanche, il nous manque de trouver des exemples de variétés admettant des métriques à courbure scalaire positive mais ne portant aucune métrique à courbure d'Einstein positive. Les variétés candidates sont $S^2 \times T^n$, mais jusqu'à présent aucune démonstration complète n'a pu être établie !
Rappelons que de tels exemples doivent être cherchés en dehors de la classe des variétés compactes 2-connexe et de dimension ≥ 7, voir [La3, La6].
Dans [La6], on a utilisé les techniques des surfaces minimales de Schoen-Yau dans l'ultime but de trouver des obstructions topologiques à l'existence des métriques à courbure d'Einstein positive, en dehors des obstructions déjà connues pour la courbure scalaire positive.
Dans deux articles célèbres [36] et [37], Schoen et Yau ont utilisé les techniques des surfaces minimales pour obtenir des obstructions topologiques à l'éxistence d'une métrique à courbure scalaire positive. Le point clé de leur démarche est le résultat suivant :

Théorème 5.1.1 *Soit (M, g) une variété compacte admettant une métrique à courbure scalaire positive et telle que* $\dim M = m \geq 3$. *Soit V une sous-variété compacte, lisse, de dimension $(m-1)$, immergée dans M et à fibré* *normal trivial. Si de plus V est un minimum local de la $(m-1)$-volume, alors V admet aussi une métrique à courbure scalaire positive.*

Le résultat suivant est également postérieur à la thèse où on a généralisé le théorème précédent au cas de la courbure d'Einstein comme suit :

Théorème 5.1.2 ([La6]) *Soit (M, g) une variété compacte admettant une métrique à courbure d'Einstein positive et de dimension $m \geq 4$. Soit V une sous-variété compacte, lisse, de dimension $(m-2)$, immergée dans M et à fibré normal globalement plat. Si de plus V est un minimum local de la $(m-2)$-volume, alors V admet une métrique à courbure scalaire positive.*

Par "fibré normal globalement plat" on entend dire que le fibré normal de V possède deux sections globalement parallèles et partout orthonormales.

Pour compléter ce travail, il faudrait démontrer l'existence de telles immersions pour certaines variétés. En particulier, on ignore toujours si on peut immerger le tore T^2 comme dans le théorème dans la variété produit $S^2 \times T^2$.

Chapitre 6

Seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl positive

Dans toute la suite on écrira en abrégé **SCGBW** pour dire **seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl**. Rappelons, comme on vient de le voir dans le chapitre précédent, que les variétés d'Einstein ont leur *SCGBW* non-négative et non identiquement nulle à moins qu'elles soient plates.
Par ailleurs il nous semble plausible, comme dans le cas de la courbure scalaire, que toute variété portant une métrique riemannienne à *SCGBW* non-négative et non identiquement nulle admet aussi une métrique riemannienne à *SCGBW* strictement positive.
Motivé par ces faits, on a étudié dans [La8], en vue d'une ultime classification, les variétés admettant une métrique à *SCGBW* positive.
Dans ce chapitre, on expose notre contribution à ce sujet.

6.1 Liens avec la positivité des autres courbures

Le théorème suivant établi une relation entre la positivité de la p-courbure et celle de la *SCGBW*. :

Théorème 6.1.1 ([La8]) *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$ et à p-courbure non-nègative (resp. positive) telle que $p \geq \frac{n}{2}$. Alors, la SCGBW de (M, g) est non-négative (resp. positive). De plus, elle est identiquement nulle si et seulement si (M, g) est plate.*

Rappelons que la positivité de la courbure sectionnelle entraîne celle de la p-courbure pour $0 \leq p \leq n-2$. De même que la courbure isotrope positive entraîne la positivité de la p-courbure pour $p \leq n-4$, voir [La4].

Par conséquent, en dimensions supérieures, la positivité de la *SCGBW* est plus faible que celle de la courbure sectionnelle ou de la courbure isotrope. Précisément, on a

Corollaire 6.1.2 ([La8]) *1. Si une variété riemannienne de dimension ≥ 4 est à courbure sectionnelle non-négative (resp. positive) alors sa SCGBW est non-négative (resp. positive). De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si elle est plate.*

2. Si une variété riemannienne de dimension ≥ 8 est à courbure isotrope non-négative (resp. positive) alors sa SCGBW est non-négative (resp. positive). De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si elle est plate.

Notons que la première partie du corollaire précédent généralise un résultat de Milnor en dimension 4.

6.1.1 Conséquences

Il découle des résultats précédents que les groupes de Lie munis d'une métrique biinvariante et les variétés riemanniennes normales homogènes ont leurs *SCGBW* non-négative. De plus, en utilisant nos résultats sur la p-courbure [La2, La3] et le théorème précédent on a montré les conséquences suivantes :

Corollaire 6.1.3 ([La8]) *1. Soit G un groupe de Lie compact, connexe, de dimension ≥ 4 et de rang $r < [\frac{\dim G+1}{2}]$ muni d'une métrique biinvariante b. Alors, (G, b) est à SCGBW positive.*

2. Si G/H est une variété riemannienne normale homogène de dimension ≥ 4 telle que le rang r de G satisfait $r < [\frac{\dim(G/H)+1}{2}]$ alors elle est à SCGBW positive.

3. Si une variété compacte M de dimension ≥ 4 admet une action lisse d'un groupe de Lie compact, connexe et de rang $r > [\frac{\dim M+1}{2}]$, alors M admet une métrique riemannienne à SCGBW positive.

6.2 Conjecture de Hopf algébrique généralisée

Dans le cas où la dimension n de la variété M en question est paire, la conjecture de Hopf algébrique stipule que la positivité de la courbure sectionnelle entraîne la positivité de l'intégrand de Gauss-Bonnet, i.e. $h_n > 0$. Alors on peut se demander si plus généralement :

La positivité de la courbure sectionnelle entraîne la positivité de h_{2k}, pour tout k tel que $2 \leq 2k \leq n$?

Ou du moins dans le cas compact (mais éventuellement les deux problèmes sont équivalents !) :

La positivité de la courbure sectionnelle entraîne la positivité de la courbure totale $\int_M h_{2k}\mathrm{dvol}$, pour tout k tel que $2 \leq 2k \leq n$?

On sait maintenant que ceci est vrai pour $k = 1$ et $k = 2$. Le problème reste ouvert pour $k \geq 3$.

Il est opportun de mentionner que des contre-exemples purement algébriques à cette conjecture existent, voir [12, 5]. En revanche, on ignore toujours s'il existe une véritable variété riemannienne à courbure sectionnelle positive sans que son intégrand de Gauss Bonnet soit positive.

6.3 Submersions riemanniennes et $h_4 > 0$

On utilise ici la technique qui consiste à faire varier la métrique de l'espace total d'une submersion riemannienne pour faire apparaître la *SCGBW* positive. Signalons que cette technique a auparavant été utilisé par Cheeger, Lawson-Yau, Besse ... Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 6.3.1 ([La8]) *Soit M l'espace total d'une submersion riemannienne. Si M est compact et si les fibres (munis de la métrique induite) sont à SCGBW positive alors la variété M admet une métrique riemannienne à SCGBW positive.*

Ce résultat admet les conséquences directes suivantes :

Corollaire 6.3.2

1. *Le produit $S^p \times M$ d'une variété arbitraire M compacte avec la sphère $S^p, p \geq 4$ admet une métrique riemannienne à SCGBW positive.*
2. *Si une variété compacte M admet un feuilletage riemannien tel que les feuilles sont à SCGBW positive alors la variété admet une métrique riemannienne à SCGBW positive.*
3. *Si une variété compacte M de dimension ≥ 4 admet une action lisse et libre d'un groupe de Lie G compact, connexe et de rang r tel que $r < [\frac{\dim G+1}{2}]$, alors M admet une métrique riemannienne à SCGBW positive.*

Il résulte immédiatement de la première partie du corollaire précédent qu'il n'y a pas de restrictions sur le groupe fondamental d'une variété de dimension ≥ 8 pour porter une métrique riemannienne à *SCGBW* positive. On verra ultérieurement que le même résultat est vrai aussi pour les dimensions ≥ 6.

6.4 Chirurgies et $h_4 > 0$

La stabilité de la courbure scalaire positive sous chirurgies en codimensions ≥ 3 a été le point clé de la classification des variétés simplement connexes à courbure scalaire positive dû à Gromov-Lawson [14] et Schoen-Yau [36] et Stolz [43]. On a montré dans [La8] un résultat similaire pour la *SCGBW* :

Théorème 6.4.1 ([La8]) *Si une variété M est obtenue à partir d'une variété compacte X par chirurgies en codimension ≥ 5, et si X admet une métrique riemannienne à SCGBW positive, alors M admet aussi une métrique riemannienne à SCGBW positive.*
En particulier, la somme connexe de deux variétés compactes de dimensions ≥ 5 portant chacune une métrique riemannienne à SCGBW positive, porte aussi une métrique à SCGBW positive.

Comme conséquence de ce théorème, on a montré qu'il n'y a pas de restrictions sur le groupe fondamental d'une variété de dimension ≥ 6 à *SCGBW* positive. Précisément, on a

Corollaire 6.4.2 ([La8]) *Soit G un groupe à présentation finie. Alors pour tout $n \geq 6$, il existe une variété compacte de dimension n portant une métrique à SCGBW positive et telle que $\pi_1(M) = G$.*

Chapitre 7

Courbure isotrope positive

7.1 Introduction

La courbure isotrope a été introduite par Micallef et Moore [29] pour les variétés de dimension ≥ 4. Cette courbure joue le même rôle dans l'étude de la stabilité des 2-sphères harmoniques et des surfaces minimales, que celui exercée par la courbure sectionnelle dans l'étude de la stabilité des géodésiques.
L'existence d'une métrique riemannienne à courbure isotrope positive sur une variété compacte entraîne l'annulation des groupes d'homotopie $\pi_i(M)$ pour $2 \leq i \leq [n/2]$, voir [29]. En particulier, si la variété est en plus simplement connexe alors elle doit être homéomorphe à une sphère.
Il y a une similarité entre la courbure isotrope et la $(n-4)$-courbure, où n est la dimension de la variété en question. En effet, elles se distinguent seulement par un terme en la courbure de Weyl, et par conséquent, elles coïncident dans le cas conformément plat. Cette analogie entre ces deux courbures est le point de départ de notre contribution [La4, La5] dans l'étude de positivité de la courbure isotrope. Nous allons dans un premier temps rappeler la définition de la courbure isotrope.
Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Pour tout $m \in M$, le produit scalaire g sur l'espace tangent T_mM, peut s'étendre de deux manières au complexifié $T_mM \otimes \mathbf{C}$:

- En tant qu'une forme bilinéaire complexe, qu'on notera par $g(.,.)$.
- En tant qu'un produit scalaire Hermitien, qu'on notera par $< .,. >$.

Soit $R : \wedge^2 M \to \wedge^2 M$ l'opérateur de courbure de (M, g). On notera aussi par R son extension linéaire complexe à $\wedge^2 M \otimes \mathbf{C}$.

On associe à tout 2-plan complexe $P \subset T_mM \otimes \mathbf{C}$ sa courbure sectionnelle complexe $K_C(P)$ définie par

$$K_C(P) = \frac{< R(v \wedge w), v \wedge w >}{||v \wedge w||^2},$$

où $\{v, w\}$ est une base quelconque de P. On dit qu'un sous-espace vectoriel complexe $P \subset T_mM \otimes \mathbf{C}$ est isotrope si $g(v, v) = 0$ pour tous les vecteurs $v \in P$.

DEFINITION. On dit qu'une variété riemannienne (M, g) est à *courbure isotrope positive* au pont $m \in M$ si $K_C(P) > 0$ pour tout les 2-plans complexes et isotropes dans $T_mM \otimes \mathbf{C}$.

Cette définition est équivalente à la condition suivante sur le tenseur de courbure :

$$K(e_1, e_3) + K(e_1, e_4) + K(e_2, e_3) + K(e_2, e_4) > 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) \qquad (7.1)$$

Et ceci pour tout les vecteurs orthonormés $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dans l'espace tangent T_mM.
Une propriété importante de la courbure isotrope positive est qu'elle est conservé par le flot de Ricci. En effet, Hamilton [18] a utilisé le flot de Ricci pour classifier les variétés compactes de dimension 4 admettant une métrique à courbure isotrope positive et n'ayant pas d'"espaces formes essentiels et incompressibles". Précisément il a démontré que de telles variétés sont difféomorphes soit à S^4, RP^4, $S^1 \times S^3$, $S^1 \tilde{\times} S^3$ soit à une somme connexe des variétés précédentes.

7.2 Obstructions

L'existence d'une métrique riemannienne à courbure isotrope positive sur une variété compacte entraîne des restrictions importantes sur sa topologie. En effet, Micallef et Moore [29] ont démontré que :

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Si M est à courbure isotrope positive alors $\pi_i(M) = \{0\}$ pour $2 \leq i \leq [n/2]$. En particulier, si M est de plus simplement connexe, alors M est homéomorphe à une sphère.

D'autre part, Micallef et Wang [30], et Seaman [38] ont démontré l'annulation du second nombre de Betti dans le cas où la dimension de la variété est paire. On croit que tous les nombres de Betti $b_k : 2 \leq k \leq n-2$ devraient s'annuler, mais pour le moment on n'a pas de démonstration de cette conjecture. En revanche, on sait démontrer ce fait dans le cas conformément plat [La4]. Le résultat est le suivant :

Théorème 7.2.1 ([La4]) *1. Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n et portant une métrique à courbure isotrope positive alors $H^m(M, \mathbf{R}) = 0$ pour $2 \leq m \leq n - 2$.*

2. Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n à courbure isotrope non-négative et telle que $H^2(M, \mathbf{R}) \neq 0$ alors soit (M, g) est plate soit elle est revetue par $S^{n-2} \times H^2$.

Notons que des résultats du même type ont aussi été démontrés par Nayatani [34] et Mercuri-Noronha [28].
Finalement, l'exemple de $S^1 \times S^n$, $n \geq 3$, montre que le groupe fondamental d'une variété à courbure isotrope positive peut être infini. En plus, parce que la courbure isotrope positive est conservée par l'opération de sommes connexes, le groupe fondamental peut être assez grand. En contre partie, Fraser [10] a démontré, en utlisant les techniques de surfaces minimales, la réstriction suivante sur le groupe fondamental :
Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$ à courbure isotrope positive. Alors, le groupe fondamental de M ne contient pas de sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

7.3 Constructions

Par ailleurs, concernant les constructions de métriques à courbure isotrope positive, Micallef et Wang [30] ont démontré le résultat suivant :
La somme connexe de deux variétés de dimensions ≥ 4 et portant chacune une métrique à courbure isotrope positive, porte aussi une métrique à courbure isotrope positive.
En utilisant les techniques de submersions riemanniennes, on a démontré les constructions suivantes :

Théorème 7.3.1 ([La4]) *Soit $\pi : (M, g) \to S^1$ une submersion riemannienne sur le cercle, où M désigne une variété riemannienne compacte de dimension ≥ 4.*
Supposons que les fibres de π (munis de la métrique induite) satisfont la condition de positivité (A) ci-dessous, alors, M porte une métrique à courbure isotrope positive.

Où (A) désigne la condition suivante sur le tenseur de courbure :

$$K(e_j, e_k) + K(e_j, e_l) > \mid R(e_i, e_j, e_k, e_l) \mid, \qquad (A)$$

pour tous les vecteurs tangents orthonormés $\{e_i, e_j, e_k, e_l\}$.

Notons que, la célèbre condition de $\frac{1}{4}$-pincement stricte qui porte sur la courbure sectionnelle entraîne la condition de positivité (A). De plus, la condition (A) entraîne en même temps la positivité de la courbure isotrope et celui de la courbure de Ricci. Enfin, en dimension 3, la condition (A) est équivalente à la positivité de la courbure de Ricci. En particulier, on obtient :

Corollaire 7.3.2 ([La4]) *Soit $\pi : (M, g) \to S^1$ une submersion riemannienne sur le cercle, où M désigne une variété riemannienne compacte de dimension 4.*
Supposons que les fibres de π (munis de la métrique induite) sont à courbure de Ricci positive alors M porte une métrique à courbure isotrope positive.

Comme conséquence des résultats précédents on obtient les exemples suivants de variétés admettant des métriques à courbure isotrope positive :

1. Soit F une variété de dimension ≥ 3 portant une métrique riemannienne g qui satisfait la condition de positivité (A). Soit $\phi \in Isom(F, g)$ et soit $\rho : \mathbf{Z} \longrightarrow Isom(F \times \mathbf{R})$ définie par

   $$n \longrightarrow \phi_n(x, t) = (\phi^n(x), t + n).$$

   La variété $M = \frac{F \times \mathbf{R}}{\rho}$ est alors l'espace total d'une submersion riemannienne et satisfait les hypothèses du théorème. Elle admet donc une métrique à courbure isotrope positive.
2. Soit M une variété compacte de dimension ≥ 4 et admettant un feuilletage riemannien de codimension 1 tel que les feuilles, munis de la métrique induite, satisfont la condition (A), alors M admet une métrique à courbure isotrope positive.
3. Si une variété compacte de dimension 4 admet une action libre et lisse du groupe $SU(2)$ ou $SO(3)$ alors elle admet une métrique à courbure isotrope positive.

Remarquons que le dernier résultat ne se généralise pas au cas d'une action non libre. En effet, $S^2 \times S^2$ admet une action effective du groupe $SO(3)$, mais elle n'admet aucune métrique à courbure isotrope positive.

7.3.1 Chirurgies et courbure isotrope positive

Du fait de l'analogie existante entre courbure isotrope et $(n-4)$-courbure, on peut espérer que les résultats de chirurgies démontrés pour la p-courbure [La3] se généralisent au cas de la courbure isotrope positive. Précisément, on peut s'attendre à ce que la courbure isotrope positive soit stable sous chirurgies en codimension $\geq n-1$. D'autant plus qu'une telle stabilité a été annoncée, sans démonstration, dans [15]. Cette question a fait l'objet de l'article [La5]. Dans lequel on a démontré la stabilité de la courbure isotrope positive sous une chirurgie de codimension n, i.e. sous sommes connexes. Ce résultat a été premièrement démontré par Micallef-Wang en utilisant les techniques de Schoen-Yau [36]. Notre démonstration était à la manière de Gromov-Lawson [14].

Mais malheureusement, la stabilité sous une chirurgie en codimension $n-1$ n'a pas en général toujours lieu. En effet, on montre qu'un tel résultat entraînerai alors que tout groupe à présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété à courbure isotrope positive (de dimension suffisamment grande). Ce qui vient contredire le résultat de Fraser cité ci-dessus.

Troisième partie

Perspectives de recherches

Comme dans tout travail de recherche mathématiques, le point de départ est un problème soulevé au bout duquel se ramifient d'autres questions naturelles.
L'arbre porte un rêve au bout de chaque branche et le chercheur avance au gré des rameaux. Si l'on ignore le lieu et le temps où on atteindra le fruit, on a au moins la certitude de notre apport en oxygène à l'arbre ramifié de la recherche et aussi d'en être un élément.
Les ramifications naturelles à mes recherches sont les suivantes :

A. Obstructions topologiques pour $h_4 > 0$:

Un des problèmes de grande importance en géométrie contemporaine est l'étude des variétés d'Einstein. Ce projet se situe dans cette direction puisque les variétés d'Einstein ont leur seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl non-négative et non identiquement nulle à moins qu'elles soient plates. Et ceci, rappelons le, indépendement du signe de la constante d'Einstein.
Dans ce projet, il s'agit d'abord de démontrer qu'une variété compacte admettant une métrique à courbure $h_4 \geq 0$ non identiquement nulle porte aussi une métrique à $h_4 > 0$.
Ensuite, on doit chercher des obstructions topologiques (comme dans le cas de la courbure scalaire) à l'existence des métriques à $h_4 > 0$.
De tels résultats seraient très intéressants dans le sens où ils prouveraient l'existence de variétés en dimensions supérieures sans métriques d'Einstein.
Une autre voie possible de recherche pour ces obstructions, est de considérer l'analogue polyèdral de h_4. C'est une mesure portée par le squelette de co-dimension 4 du polyèdre en question. Pour des approximations polyèdrales convenables d'une variété riemannienne, ces mesures discrètes convergent en mesure vers l'intégrand $h_4$dvol. Voir les travaux de Cheeger, Müller et Schräder [8] et le compte-rendu de Lafontaine [22].
Il s'agit donc d'étudier les propriétés de positivité de ces analogues polyèdraux. En particulier, de voir si on peut avoir des théorèmes d'annulation des nombres de Betti.

B. Le problème de Yamabe généralisé :

Ce problème a déjà été abordé dans ce texte. Le lecteur de ces lignes est invité à se référer donc au chapitre 2 pour les motivations. Il s'agit ici d'étudier la conjecture suivante :

Dans toute classe conforme d'une métrique riemannienne sur une variété C^∞ compacte donnée, il existe une métrique riemannienne à courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} constante.

C. Théorème d'annulation pour la courbure isotrope positive

L'objectif ici est de démontrer que la positivité de la courbure isotrope sur une variété compacte de dimension $n \geq 4$ entraîne l'annulation des nombres de Betti b_i de la variété pour $2 \leq i \leq n-2$.
Ce problème est motivé d'une part par l'analogie existante entre courbure isotrope et $(n-4)$-courbure et d'autre part par le fait que le tenseur de p-courbure apparaît naturellement dans l'opérateur de courbure de Weitzenbök. Signalons qu'on a déjà démontré ce résultat pour une métrique conformément plate.

D. Conjecture de Hopf algébrique généralisée

Ce problème a déjà été abordé et motivé antérieurement dans ce projet. Je me contenterai ici du simple énoncé de cette perspective de recherche :
La positivité de la courbure sectionnelle entraîne t-elle la positivité de h_{2k}, pour tout k tel que $2 \leq 2k \leq n$? où n désigne la dimension de la variété en question.
Dans le cas compact, on espère démontré une version faible de ce problème (mais éventuellement les deux problèmes sont équivalents !) :
Pour une variété compacte, la positivité de la courbure sectionnelle entraîne la positivité de la courbure totale $\int_M h_{2k}\mathrm{dvol}$, pour tout k tel que $2 \leq 2k \leq n$?
Ceci étant vrai pour $k = 1$ et $k = 2$, voir chapitre 2. Le problème reste ouvert pour $k \geq 3$.

E. Variétés (p,q)-Einstein :

Le but de cette recherche serait d'étudier les généralisations naturelles suivantes des métriques d'Einstein.
Pour $1 \leq p < 2q$, on dira qu'une variété riemannienne de tenseur de courbure

R est (p, q)-Einstein si son tenseur de Ricci généralisé $c^{2q-p}R^q$ est proportionnel à la métrique g^p. On retrouve les variétés d'Einstein usuels pour $p = q = 1$ et les variétés $(2q)$-Einstein (discutées dans le chapitre 2) pour $p = 1$.
On connait déjà une caractérisation de cette condition :

Proposition 7.3.3 ([La7]) *Pour $1 \leq p < 2q$, une métrique riemannienne est (p, q)-Einstein si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq \min\{p, n-p\}$ on a $\omega_i = 0$. Où les ω_i sont les composantes de R^q suivant la décomposition $R^q = \sum_{i=0}^{2q} g^{2q-i}\omega_i$.*

Pour $p = q = 1$, on retrouve la caractérisation classique des variétés d'Einstein usuelles par l'annulation de la composante ω_1 du tenseur de courbure de Riemann.
Aussi, il en résulte immédiatement de notre étude que si une variété compacte de dimension $n = 4q$ est $(2q-1, q)$-Einstein alors sa caractéristique d'Euler-Poincarré est non-négative.
Ce dernier résultat généralise une propriété bien connue pour $q = 1$.
Remarquons que la condition (p, q)-Einstein entraine $(p-1, q)$-Einstein pour tout $p \geq 2$.
Pa ailleurs, si la dimension de la variété est telle que $n = 2q$, alors toute variété est (p, q)-Einstein. Donc, une telle condition n'est pas vide que si $2q < n$.
Une question qui me semble intéressante serait de trouver une classification des variétés qui sont (p, q)-Einstein pour tout $1 \leq q < n/2$ et tout $1 \leq p < 2q$ (il suffit de prendre $p = 2q - 1$).
Cette question généralise, aux dimensions supérieures, le problème de classification des variétés d'Einstein en dimension 4.
Notons finalement que les métriques en question ici ne sont pas, en général, critiques au sens de Bleecker [4].

F. Variétés conformément plates généralisées :

Comme dans la perspective de recherche précédente, là aussi les questions ne sont pas très précises. Il s'agit d'étudier une classe de métriques généralisant les métriques conformément plates.
Rappelons qu'une métrique est conformément plate (en dimension ≥ 4) si son tenseur de courbure de Riemann est divisible par la métrique. Elles sont caractérisées par l'annulation de la composante ω_2 dans la décomposition orthognale en composantes irréductibles de R. En particulier, une variété

d'Einstein conformément plate est nécessairement à courbure constante.
Par analogie, on dira qu'une variété riemannienne de dimension n est de classe $C(p,q)$ si son tenseur de Gauss-Kronecker R^q est divisible par g^p. Pour $p = q = 1$, on retrouve les métriques conformément plates usuelles. Pour $p = 1$ et $q \geq 1$, cette condition est invariante sous un changement conforme de la métrique. De telles métriques sont alors dites q-conformément plates et ont été partiellement étudiées par Nasu dans [32, 33].
Les métriques de classe $C(p,q)$ sont caractérisées par l'annulation des composantes ω_i dans la décomposition orthogonale en composantes irréductibles de $R^q = \sum_{i=0}^{2q} g^{2q-i}\omega_i$ pour $2q - p < i \leq 2q$.
On déduit alors que, pour tout q telle que $2q < n$, si une métrique est à la fois (q,q)-Einstein (voir la section ci-dessus) et de classe $C(q,q)$ alors elle est à q-courbure sectionnelle constante.

G. Obstructions pour la courbure d'Einstein positive

La question ici est de trouver des classes de variétés portant des métriques à courbure scalaire positive mais qui n'admettent aucune métrique à courbure d'Einstein positive. La variété produit $S^2 \times T^2$, et plus généralement le produit $S^2 \times T^n$, $n \geq 2$ sont des candidats naturels.

H. Multiformes

Cette perspective de recherche se présente comme la suite de mes travaux sur les formes doubles.
Rappelons qu'une forme double $\omega \in \Lambda^{*p}V \otimes \Lambda^{*q}V$ peut être considérée comme une p-forme ordinaire mais à valeurs vectorielles dans $\Lambda^{*q}V$. Cette considération permet d'étudier les doubles formes à partir des formes. Elle a été utilisée par de nombreux auteurs, je cite par exemple [3, 6] .
Par ailleurs, certains de nos résultats sur les formes doubles peuvent être généralisés au cas des formes doubles à valeurs vectorielles. Un exemple de telles formes doubles est la seconde forme fondamentale d'une sous-variété de codimension ≥ 2.
Ceci permettrait d'étudier les "formes triples". Ces derniers étant les éléments de l'espace $\Lambda^{*p}V \otimes \Lambda^{*q}V \otimes \Lambda^{*r}V$.
Il serait alors intéréssant d'étudier en toute généralité les multiformes i.e. les éléments des produits $\Lambda^{*p_1}V \otimes \Lambda^{*p_2}V \otimes ... \otimes \Lambda^{*p_r}V$. En particulier, l'opérateur

de Hodge peut être généralisé de $2^r - 1$ différentes manières aux multiformes d'ordre r (en le faisant opérer à chaque fois sur différents facteurs du produit tensoriel).
Notons que tout tenseur de rang arbitraire peut être vu comme une multiforme. Certains aspects de ces problèmes ont étè récemment étudiés par le physicien théoricien J. M. M. Senovilla dans une série d'articles. En particulier, il a utlisé des extensions du produit de Hodge et du produit intérieur aux multiformes pour définir, à partir d'un tenseur T donné, des tenseurs symétriques dites de super-énergie. Ces tenseurs sont quadratiques en T et généralisent les tenseurs dits de Bel et de Bel-Robinson, voir [39] et les reférences qui y sont citées.

I. Courbures négatives

Suite aux travaux de Lohkamp [26], on sait maintenant que toute variété compacte admet des métriques à courbure de Ricci négative et donc en particulier des métriques à courbure scalaire négative. Il serait alors intéressant de prouver la même propriété pour la seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl, courbure d'Einstein, p-courbures, courbure isotrope et pour les courbures sectionnelles de Weitzenbök.

Quatrième partie

Activités d'enseignement et de recherche

I Activités de Recherche

1. **Encadrement de jeunes chercheurs :** J'ai encadré (2001) le mémoire de DEA (Master Project) de Z. Safar de l'université de Bahrein sur les espaces de longueur.
2. **Groupes de travail :** J'ai organisé durant un semestre (1997) conjointement avec deux collègues du département de physique un groupe de travail sur la théorie de relativité générale (plus de dix participants). Où j'ai donné une série de cours sur le calcul tensoriel et les variétés riemanniennes.
   Aussi, j'ai participé à un groupe de travail sur les courbes elliptiques qui a duré trois semaines (Summer school on elliptic curves, ICTP, Trieste , Italie 1997).
3. **Visites de Recherche :** Dans la période 09/1995-09/1996, j'ai travaillé en tant que chercheur-visiteur (visiting-researcher) au centre international de physique théorique (ICTP) à Trieste en Italie.
   Par ailleurs, je visite annuellement , pendant deux mois (Juillet-Août) et ceci depuis 1997, le département de mathématiques de l'université Montpellier II.
4. **Travaux de referee :** J'ai rapporté sur des articles pour les journaux suivants :
   - Math Reviews.
   - Publicacions Matemàtiques.
   - Turkish Journal of Math.
   - Arab Journal of Science.
   - Proceedings de l'école CIMPA sur la géométrie riemannienne, Eloued (2005).
5. **Communications :**
   - Riemannian manifolds with positive Einstein tensor, First Beit Mery conference on Geometry , Université Américaine du Liban.
   - Actions de groupes de Lie et positivité de la p-courbure, Séminaire de rentrée du GETODIM, Montpellier.
   - Manifolds with positive Einstein tensor, ICTP, Trieste, Italy.
   - Variétés à p-courbure positive, Institut de Fourrier, Grenoble.
   - Variétés à p-courbure positive, département de mathématiques de l'UMII.
   - Sur les nombres de Betti des variétés conformément plates, département de mathématiques de l'UMII.

II Activités d'Enseignement

Je suis maître de conférence (assistant-professor) à l'université de Bahrein, depuis l'année scolaire 1996/1997. Pendant cette période, j'ai enseigné différents cours de Mathématiques :

- **En troixième cycle (Master)**, j'ai enseigné des cours de topologie (Math 515) et de la théorie de la mesure (Math 503).
- **En deuxième et premier cycles**, j'ai assumé la résponsabilité de cours très variés. Ainsi, j'ai enseigné à plusieurs reprises, pour les élèves en troixième et quatrième année universitaire, les cours de géométrie différentielle (Math 452), géométrie Euclidienne et non-Euclidienne (Math 451), Topologie (Math 415), Analyse fonctionnelle (Math 417), Analyse I (Math 303), Analyse II (Math 304) et un cours de calcul tensoriel (Math 388).
  Pour les première et deuxième années, j'ai donné des cours en algèbre linéaire (Math 211), équations différentielles (Math 205), théorie des ensembles et logique (Math 253) et des cours de calcul différentiel pour les étudiants de sciences, école de commerce et ingénieurs (Math 204, Math 203, Math 122, Math 102, Math 121, Math 101, Math 104, Math 103).
- **Direction de mémoires de Maîtrise :** Pendant les dix dernières années, j'ai dirigé une vingtaine de mémoires à l'université de Bahrein dans des thèmes variés en géométrie et en analyse.

III Divers

- Boursier conjointement du Gouvernement Français et Algérien pendant 4 ans (1990-1994). La bourse a été obtenue sur concours.
- A l'occasion de la journée portes ouvertes des sciences 2005, j'ai organisé à l'université de Bahrein des activités de vulgarisation de mathématiques. Ainsi, j'ai exposé les thèmes suivants : Les polyhèdres (3D) et leurs constructions, sur la quatrième dimension et sur des preuves algébriques expérimentales.

Annexe A

Remarques sur la géométrie des tubes

Durant une opération de chirurgie sur une variété riemannienne lelong d'une sous-variété plongée [14, La3, La8], on remplace la métrique (ancienne) induite par l'application exponentielle sur un voisinage tubulaire de la sous-variété plongée par la métrique de Sasaki. Dans cet appendice on présente les résultats de [La10] où on a étudié le comportement de ces deux métriques au voisinage de la section nulle du fibré normal.
Soit (X, g) une variété C^∞ riemannienne de dimension $n + p$ et M une sous-variété (compacte) plongée de dimesion n dans X. Soit

$$T_\epsilon = \{(x, v) : x \in M, v \in N_x M \quad \text{and} \quad g(v, v) < \epsilon^2\}$$

un tube de rayon ϵ autour de M. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\exp : T_\epsilon \to X$, est un difféomorphisme sur son image pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$. Soit $\exp^* g$ le pull-back de la métrique g sur X.

Le sous-fibré normal T_ϵ peut être aussi muni d'une deuxième métrique naturelle, à savoir celle de Sasaki. C'est la métrique h compatible avec la connexion normale telle que la projection naturelle $\pi : (T_\epsilon, h) \to (M, g)$ soit une submersion riemannienne.

Soit $(p, rn) \in T_\epsilon$, où $r < \epsilon_0$ et n un vecteur normal unitaire en p. Notons par A_n l'application de Weingarten de la sous-variété M définie dans la direction de n.

Le résultat suivant montre que ces deux métriques sont en générale tangentes que jusqu'à l'ordre 1. Elles le sont à l'ordre deux si et seulement si la sous-variété M est totalement géodésique dans (X, g).

Théorème A.0.4 ([La10]) *Soit R le tenseur de courbure de Riemann de (X, g). Alors pour tout $u_1, u_2 \in T_{(p,rn)}T_\epsilon$, on a*

$$\begin{aligned}\exp^* g(u_1, u_2) &= h(u_1, u_2) - 2g(A_n\pi_* u_1, \pi_* u_2)r \\ &\quad + \big\{g(A_n\pi_* u_1, A_n\pi_* u_2) + R(\pi_* u_1, n, \pi_* u_2, n) + \frac{2}{3}R(\pi_* u_1, n, Ku_2, n) \\ &\quad + \frac{2}{3}R(\pi_* u_2, n, Ku_1, n) + \frac{1}{3}R(Ku_1, n, Ku_2, n)\big\}r^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Où π_* et K représentent réspéctivement la différentielle de π et l'application de connexion.

Remarque. Notons que dans [14], au début de la preuve du lemme 2 page 430, il a été affirmé que les métriques $\exp^* g$ et h sont suffisamment proches dans la topologie C^2 quand $r \to 0$. La même erreur est dans [La3]. Ceci n'affecte pas les résultats correspondants dans les deux articles, voir [La8]. Une manière rapide pour ce rendre compte de cette propriété est comme suit : pour la métrique h, la section nulle $M \hookrightarrow T_\epsilon$ est totalement géodésique (car pour une submersion riemannienne le relevé horisontal d'une géodésique est une géodésique). D'autre part, la section nulle $M \hookrightarrow T_\epsilon$ est totalement géodésique pour la métrique $\exp^* g$ si et seulement si M est totalement géodésique dans (X, g).

Dans le cas où l'espace ambiant (X, g) est l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, on montre la relation simple suivante entre les deux métriques :

Théorème A.0.5 ([La10]) *Soit M une sous-variété plongée dans l'espace Euclidien, alors pour tout $u_1, u_2 \in T_{(p,rn)}T_\epsilon$, on a*

$$\exp^* g(u_1, u_2) = h(u_1, u_2) - 2g(A_n\pi_* u_1, \pi_* u_2)r + g(A_n\pi_* u_1, A_n\pi_* u_2)r^2.$$

On démontre des résultas similaires dans le cas où (X, g) est à courbure constante arbitraire, voir [La10].

Bibliographie

Publications personnelles

[La1] Labbi, M.-L., *Sur les nombres de Betti des variétés conforméments plates*, CRAS, t 319, série I, 77-80 (1994).

[La2] Labbi, M.-L., *Actions des groupes de Lie presques simples et positivité de la p-courbure*, Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, volume 5, Number 2, 263-276 (1997).

[La3] Labbi, M.-L., *Stability of the p-curvature positivity under surgeries and manifolds with positive Einstein tensor,* Annals of Global Analysis and Geometry, 15, 299-312 (1997).

[La4] Labbi, M.-L., *On compact manifolds with positive isotropic curvature*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 128, Number 5, Pages 1467-1474 (2000).

[La5] Labbi, M.-L., *On positive isotropic curvature and surgeries*, Journal of Differential Geometry and its applications, 17, 37-42 (2002).

[La6] Labbi, M.-L., *On compact manifolds with positive Einstein curvature*, Geometria Dedicata, 108, 205-217 (2004).

[La7] Labbi, M.-L., *Double forms, curvature structures and the (p,q)-curvatures*, Transactions of the American Mathematical Society, 357, n10, 3971-3992 (2005).

[La8] Labbi, M.-L., *Manifolds with positive second Gauss-Bonnet curvature*, Pacific Journal of Mathematics (2006), accepté pour publication.

[La9] Labbi, M. L. *On a variational formula for the Gauss-Bonnet-Weyl curvatures*, prépublication.

[La10] Labbi, M. L. *Remarks on the geometry of tubes*, prépublication.

[La11] Labbi, M. L. *On the Weitzenbök curvature operator*, en cours de rédaction.

Références

[1] Avez, A., *Applications de la formule de Gauss-Bonnet-Chern aux variétés de dimension 4*. CRAS 256 (1963) 5488-90.

[2] Berger, M. *Quelques formules de variation pour une structure riemannienne*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4 srie, t. 3, 1970, 285-294.

[3] Besse, A. L., *Einstein manifolds* Springer-Verlag (1987).

[4] Bleeker, D. D., *Critical riemannian manifolds*, J. Diffrential Geometry, 14, 599-608 (1979).

[5] Bourguignon, J. P., Karcher, H., *Curvature operators : pinching estimates and geometric examples*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris, 11, 71-92 (1978).

[6] Bourguignon, J. P. *Les variétés de dimension* 4 *à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein*, Invent. Math. 63, 263-286 (1981).

[7] Cartan, É., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1963).

[8] Cheeger, J., Müller, W., Schräder, R., *On the curvature of piecewise flat spaces*, Commun. Math. Phys., 92, 405-454 (1984).

[9] Chen, B.-Y., Dillen, F., Verstraelen, L., and Vrancken, L., *Characterizations of Riemannian space forms, Einstein spaces and conformally flat spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 128, Number 2, pages 589-598 (1999).

[10] Fraser, A. M., *Fundamental groups of manifolds with positive isotropic curvature*, Annals of Math, 158 (2003), 345-354.

[11] Gallot, S., Meyer, D. *Opérateur de courbure et Laplacien des formes différérentielles d'une variété riemannienne,* J. Math. pures et appl., 54, 259-284 (1975).

[12] Geroch, R., *Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand*, Proc. Am. Math. Soc. 54, 267-270 (1976).

[13] Gray, R. S., *Some relations between curvature and characteristic classes* Math. Ann. 184 (1970) 257-267.

[14] Gromov, M., Lawson, H. B. : *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann.of Math 111,423-434 (1980).

[15] Gromov, M., *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures*, Functional Analysis at the eve of the 21th century, vol.II, p.1-213, Birkhaüser.

[16] Guan, P., Wang, G. *A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds*, J. Reine Angew. Math. 557, 219-238 (2003).

[17] Gursky, M., Viaclovsky, J. *Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor*, preprint, arXiv :math.DG/0409187.

[18] Hamilton, R. S., *Four manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. 5, 1-92 (1997).

[19] Kowalski, R. S., *On the Gauss-Kronecker curvature tensors,* Math. Ann. 199 (1972), 175-204.

[20] Kulkarni, R. S., *On Bianchi Identities*, Math. Ann. 199, 175-204 (1972).

[21] Lafontaine, J., *Remarques sur les variétés conformément plates*, math. Ann., 259, 313-319 (1982).

[22] Lafontaine, J., *Mesures de courbure des variétés lisses et des polyèdres [d'après Cheeger, Müller et Schräder]*, Séminaire Bourbaki, 38ème année, 1985-86, n 664, (1986).

[23] Lawson, H. B., Michelsohn, M. L., *Spin Geometry*, Princeton University Press (1989).

[24] Lawson, H. B., Yau, S.T. *Scalar curvature, non abelian group actions and the degree of symmetry of exotic spheres,* Comment. Math. Helv., 49, 232-244 (1974).

[25] Li, A., Li, Y. Y. *On some conformally invariant fully nonlinear equations*, Comm. Pure Appl. Math. 56, 1416-1464 (2003).

[26] Lohkamp, J. *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 3, 655-683.

[27] Lovelock, D. *The Einstein tensor and its generalizations*, Journal of Mathematical Physics, vol. 12, n. 3, (1971).

[28] Mercuri, F., Noronha, M. H., *Low codimensional submanifolds of Euclidean space with nonnegative isotropic curvature*, Transactions of the American Mathematical Society, volume 348, n7, 2711-2724 (1996).

[29] Micallef, M., Moore, J. D., *Minimal two spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math 127, (1988), 199-227.

[30] Micallef, M. J., Wang, M. Y. *Metrics with nonegative isotropic curvature*, Duke Math Journal, vol 72, n3, (1993), 649-672.

[31] Nasu, T., *On a generalized p-vector curvature and its applications*, Math J. Okayama Univ. 17, 149-158 (1975).

[32] Nasu, T., *On conformal invariants of higher order*, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 43-60.

[33] Nasu, T., *A remark on q-conformally flat product riemannian manifolds*, Proc. Japan Acad., 50 N10, 793-796 (1974).

[34] Nayatani, S. *Kleinian groups and conformally flat metrics*, Proceedings of the First MSJ International Research Institute on Geometry and Global Analysis, July 12-23, (1993), Tohuku University, Sendai, Japan.

[35] Nomizu, K., *On the decomposition of generalized curvature tensor fields. Codazzi, Ricci, Bianchi and Weyl revisited*, Differential geometry (in honor of Kentaro Yano), 335–345. Kinokuniya, Tokyo, (1972).

[36] Schoen, R., Yau, S. T. *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta Math. 28 (1979), 159-183.

[37] Schoen, R., Yau, S. T. *Existence of incompresible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature*, Annals of Math. 110 (1979), 127-142.

[38] Seaman, W., *On manifolds with nonegative curvature on totally isotropic 2-planes*, Transactions of the American Mathematical Society, volume 338, n2, 843-855 (1993).

[39] Senovilla, J. M. M. *Superenergy tensors and their applications* arXiv :math-ph/0202029

[40] Sha, J. P., Yang, D. *Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Math. vol 54(1993), Part 3, 529-538.

[41] Sheng, W., Trudinger, N. S., Wang, X.-J. *The Yamabe problem for higher order curvatures*, preprint, arXiv :math.DG/0505463.

[42] Stehney, A., *Courbure d'ordre p et les classes de Pontrjagin*, J. Differential Geometry, 8, 125-134 (1973).

[43] Stolz, S. *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Annals of Math., 136, 511-540, (1992).

[44] Thorpe, J. A., *Some remarks on the Gauss-Bonnet integral*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 18, No. 8 (1969).

[45] Weyl, H., *On the volume of tubes*, Amer. J. Math., vol. 61, 461-472 (1939).