HDR-soutenance

Labbi Mohammed Larbi

Université Montpellier II

10 Juillet 2006

Courbure riemannienne: variations sur différentes notions de positivité

Tous les objets considérés ici (variétés, métriques, formes ...) sont de classe C^∞.

(M, g) désignera toujours une variété riemannienne compacte sans bord et de dimension $n \geq 4$.

On notera respectivement par $R, K, Ric, scal$ le tenseur covariant de courbure de Riemann, la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci et la courbure scalaire de (M, g).

La p-courbure

Définition

Pour tout p-plan tangent P à M, et pour $0 \leq p \leq n-2$, on pose

$$s_p(P) = \sum_{i,j=p+1}^{n} K(e_i, e_j)$$

où $\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ est une base orthonormée de $P^{\perp}$.

Définition

Pour tout p-plan tangent P à M, et pour $0 \leq p \leq n-2$, on pose

$$s_p(P) = \sum_{i,j=p+1}^{n} K(e_i, e_j)$$

où $\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ est une base orthonormée de $P^{\perp}$.
s_0 = la courbure scalaire.

Définition

Pour tout p-plan tangent P à M, et pour $0 \leq p \leq n-2$, on pose

$$s_p(P) = \sum_{i,j=p+1}^{n} K(e_i, e_j)$$

où $\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ est une base orthonormée de $P^\perp$.
s_0 = la courbure scalaire.
s_{n-2}= la courbure sectionnelle.

Positivité

Notons que

$$s_{n-2} > 0 \Rightarrow s_{n-3} > 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow s_0 > 0$$

En particulier, la positivité de la p-courbure est intermediaire entre la courbure sectionnelle positive et courbure scalaire positive.

Positivité

Notons que

$$s_{n-2} > 0 \Rightarrow s_{n-3} > 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow s_0 > 0$$

En particulier, la positivité de la p-courbure est intermediaire entre la courbure sectionnelle positive et courbure scalaire positive.

Question de départ: Généraliser les propriétés de la courbure scalaire positive aux p-courbures.

Stabilité sous chirurgies

Si deux variétés compactes de dimension $n \geq p+3$ admettent des métriques à p-courbure positive, il en est de même de leur somme connexe.
Plus généralement, si une variété compacte admet une métrique à p-courbure positive, alors il en est de même pour toute variété obtenue à partir de celle-ci par chirurgies de codimension $\geq p+3$.

Conséquences:

- Une variété compacte 2-connexe de dimension ≥ 7 admet une métrique riemannienne à 1-courbure positive si et seulement si elle admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive. En particulier, toute variété compacte 2-connexe de dimension 7 admet une métrique à 1-courbure positive.

Conséquences:

- Une variété compacte 2-connexe de dimension ≥ 7 admet une métrique riemannienne à 1-courbure positive si et seulement si elle admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive. En particulier, toute variété compacte 2-connexe de dimension 7 admet une métrique à 1-courbure positive.
- Soit G un groupe à présentation finie et $p \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq p + 4$, il existe une variété compacte de dimension n à p-courbure positive et telle que $\pi_1(M) = G$.

Obstructions:

- Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n à p-courbure positive alors les nombres de Betti sont nuls du degré $\frac{n-p}{2}$ au degré $\frac{n+p}{2}$.

Obstructions:

- Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n à p-courbure positive alors les nombres de Betti sont nuls du degré $\frac{n-p}{2}$ au degré $\frac{n+p}{2}$.
- Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n à p-courbure non-négative et telle que la cohomologie réelle de degré $\frac{n\pm p}{2}$ est non nulle, alors (M, g) est soit plate soit isométrique à un quotient compact de $S^{\frac{n+p}{2}} \times H^{\frac{n-p}{2}}$.

Courbure Isotrope Positive

Courbure isotrope

La courbure isotrope a été introduite par Micallef et Moore (1988) pour les variétés de dimension ≥ 4. Cette courbure joue le même rôle dans l'étude de la stabilité des 2-sphères harmoniques et dans celle des surfaces minimales, que celui exercé par la courbure sectionnelle dans l'étude de la stabilité des géodésiques.

Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Pour tout $m \in M$, le produit scalaire g sur l'espace tangent $T_m M$, s'étend en un produit scalaire Hermitien $< ., . >$ sur le complexifié $T_m M \otimes \mathbf{C}$

Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Pour tout $m \in M$, le produit scalaire g sur l'espace tangent $T_m M$, s'étend en un produit scalaire Hermitien $< ., . >$ sur le complexifié $T_m M \otimes \mathbf{C}$

Soit $R : \wedge^2 M \to \wedge^2 M$ l'opérateur de courbure de (M, g). On notera aussi par R son extension linéaire complexe à $\wedge^2 M \otimes \mathbf{C}$.

Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Pour tout $m \in M$, le produit scalaire g sur l'espace tangent $T_m M$, s'étend en un produit scalaire Hermitien $< ., . >$ sur le complexifié $T_m M \otimes \mathbf{C}$

Soit $R : \wedge^2 M \to \wedge^2 M$ l'opérateur de courbure de (M, g). On notera aussi par R son extension linéaire complexe à $\wedge^2 M \otimes \mathbf{C}$.

On associe à tout 2-plan complexe $P \subset T_m M \otimes \mathbf{C}$ sa courbure sectionnelle complexe $K_C(P)$ définie par

$$K_C(P) = \frac{< R(v \wedge w), v \wedge w >}{||v \wedge w||^2},$$

où $\{v, w\}$ est une base quelconque de P.

Courbure isotrope positive

On dit qu'une variété riemannienne (M, g) est à *courbure isotrope positive* au point $m \in M$ si $K_C(P) > 0$ pour tous les 2-plans complexes et g-isotropes dans $T_m M \otimes \mathbf{C}$.

L'existence d'une métrique riemannienne à courbure isotrope positive sur une variété compacte entraîne des restrictions importantes sur sa topologie. En effet, Micallef et Moore ont démontré que:

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Si M est à courbure isotrope positive alors $\pi_i(M) = \{0\}$ pour $2 \leq i \leq [n/2]$. En particulier, si M est de plus simplement connexe, alors M est homéomorphe à une sphère.

Notre contribution

- $CIP \Rightarrow s_{n-4} > o$.
  La reciproque n'a pas toujours lieu comme le montre l'exemple de $S^{n-2} \times T^2$.

Notre contribution

- $CIP \Rightarrow s_{n-4} > o$.
  La reciproque n'a pas toujours lieu comme le montre l'exemple de $S^{n-2} \times T^2$.
- Pour une métrique conformément plate, on a

$$CIP \Leftrightarrow (n-4)\text{-courbure positive}$$

Conséquences directes:

1. Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n et portant une métrique à courbure isotrope positive alors $H^m(M, \mathbf{R}) = 0$ pour $2 \leq m \leq n-2$.

Conséquences directes:

1. Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n et portant une métrique à courbure isotrope positive alors $H^m(M, \mathbf{R}) = 0$ pour $2 \leq m \leq n-2$.
2. Soit (M, g) une variété compacte conformément plate de dimension n à courbure isotrope non-négative et telle que $H^2(M, \mathbf{R}) \neq 0$ alors soit (M, g) est plate soit elle est revêtue par $S^{n-2} \times H^2$.

Constructions:
Rappelons que la $(n-4)$-courbure est stable sous chirurgies en codimension $\geq n-1$.

Constructions:
Rappelons que la $(n-4)$-courbure est stable sous chirurgies en codimension $\geq n-1$.
Question: Est-ce-que la même propriété est vraie pour la CIP?

Constructions:
Rappelons que la $(n-4)$-courbure est stable sous chirurgies en codimension $\geq n-1$.
Question: Est-ce-que la même propriété est vraie pour la CIP?

- En codimension n, la réponse est oui:
La somme connexe de deux variétés de dimension ≥ 4 et portant chacune une métrique à courbure isotrope positive, porte aussi une métrique à courbure isotrope positive.

Constructions:
Rappelons que la $(n-4)$-courbure est stable sous chirurgies en codimension $\geq n-1$.
Question: Est-ce-que la même propriété est vraie pour la CIP?

- En codimension n, la réponse est oui:
La somme connexe de deux variétés de dimension ≥ 4 et portant chacune une métrique à courbure isotrope positive, porte aussi une métrique à courbure isotrope positive.

- En codimension $n-1$, la réponse est non en général!

On a aussi utilisé les techniques de submersions riemanniennes pour construire des classes de métriques à CIP. On a par exemple obtenu:

On a aussi utilisé les techniques de submersions riemanniennes pour construire des classes de métriques à CIP. On a par exemple obtenu:

Soit $\pi : (M, g) \to S^1$ une submersion riemannienne sur le cercle, où M désigne une variété riemannienne compacte de dimension 4. Supposons que les fibres de π (munis de la métrique induite) sont à courbure de Ricci positive alors M porte une métrique à courbure isotrope positive.

Courbure d'Einstein Positive

Définition

La courbure d'Einstein est la fonction définie sur le fibré tangent unitaire de la variété à partir du célèbre tenseur d'Einstein comme suit:

$$e(v) = scal - 2Ric(v).$$

Définition

La courbure d'Einstein est la fonction définie sur le fibré tangent unitaire de la variété à partir du célèbre tenseur d'Einstein comme suit:

$$e(v) = scal - 2Ric(v).$$

Cette courbure coïncide avec la p-coubure pour $p = 1$.

Définition

La courbure d'Einstein est la fonction définie sur le fibré tangent unitaire de la variété à partir du célèbre tenseur d'Einstein comme suit:

$$e(v) = scal - 2Ric(v).$$

Cette courbure coïncide avec la p-coubure pour $p = 1$.
En particulier,

$$e > 0 \Longrightarrow scal > 0$$

Soit (M, g) une variété compacte admettant une métrique à courbure d'Einstein positive et de dimension $n \geq 4$. Soit V une sous-variété compacte, lisse, de dimension $(n-2)$, immergée dans M et à fibré normal globalement plat. Si de plus V est un minimum local de la $(n-2)$-volume, alors V admet une métrique à courbure scalaire positive.

Formes Doubles

Définition

Soit (M, g) une v.r. compacte de dimension n.

Définition

Soit (M, g) une v.r. compacte de dimension n.
$\Lambda^* M = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^{*p} M$ le fibré extérieur.

Définition

Soit (M, g) une v.r. compacte de dimension n.
$\Lambda^* M = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^{*p} M$ le fibré extérieur.
Une forme double est une section du fibré:

$$\mathcal{D} = \Lambda^* M \otimes \Lambda^* M = \bigoplus_{p,q \geq 0} \mathcal{D}^{p,q}$$

où $\mathcal{D}^{p,q} = \Lambda^{*p} M \otimes \Lambda^{*q} M$.

Exemples naturels en géométrie riemannienne:
Le tenseur de courbure de Riemann et le tenseur de courbure de Weyl sont antisymétriques par rapport aux deux premiers arguments ainsi que par rapport aux deux derniers. Ils sont alors naturellement (par dualité) des formes doubles symétriques d'ordre (2,2).
La métrique, la courbure de Ricci, le tenseur d'Einstein, le tenseur de Schouten et la seconde forme fondamentale d'une hypersurface sont formes doubles symétriques d'ordre (1,1).
Comme exemple de formes doubles d'ordre supérieur on a les tenseurs de Gauss-Kronecker et les opérateurs de courbures de Weitzenbök.

Le produit extérieur usuel sur les formes différentielles se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit parfois dit de "Kulkarni-Nomizu".
Ce produit a le mérite de simplifier des expressions compliquées.

Le produit extérieur usuel sur les formes différentielles se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit parfois dit de "Kulkarni-Nomizu".

Ce produit a le mérite de simplifier des expressions compliquées.

Exemples: 1. $R^q = R...R$ (q-fois où $n = 2q$) détermine l'intégrand de Gauss-Bonnet.

Le produit extérieur usuel sur les formes différentielles se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit parfois dit de "Kulkarni-Nomizu".
Ce produit a le mérite de simplifier des expressions compliquées.
Exemples: 1. $R^q = R...R$ (q-fois où $n = 2q$) détermine l'intégrand de Gauss-Bonnet.
2. L'opérateur de courbure de la formule classique de Weitzenbök est donné par

$$\{\frac{gRic}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}$$

Le produit extérieur usuel sur les formes différentielles se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit parfois dit de "Kulkarni-Nomizu".

Ce produit a le mérite de simplifier des expressions compliquées.

Exemples: 1. $R^q = R...R$ (q-fois où $n = 2q$) détermine l'intégrand de Gauss-Bonnet.

2. L'opérateur de courbure de la formule classique de Weitzenbök est donné par

$$\{\frac{gRic}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}$$

3. $g^k = g...g$ détermine le produit scalaire canonique sur $\Lambda^k M$.

Le produit extérieur usuel sur les formes différentielles se généralise naturellement aux formes doubles. On obtient alors le produit parfois dit de "Kulkarni-Nomizu".
Ce produit a le mérite de simplifier des expressions compliquées.
Exemples: 1. $R^q = R...R$ (q-fois où $n = 2q$) détermine l'intégrand de Gauss-Bonnet.
2. L'opérateur de courbure de la formule classique de Weitzenbök est donné par

$$\{\frac{gRic}{(p-1)} - 2R\}\frac{g^{p-2}}{(p-2)!}$$

3. $g^k = g...g$ détermine le produit scalaire canonique sur $\Lambda^k M$.
4. L'équation de Gauss s'ecrit $R = 1/2B^2$.

- L'application de multiplication par g^k est une application injective sur $D^{p,q}$ dès que $p + q + k < n + 1$.

- L'application de multiplication par g^k est une application injective sur $D^{p,q}$ dès que $p+q+k < n+1$.
-

$$< g^k\omega_1, \omega_2 > = < \omega_1, c^k\omega_2 >$$

- L'application de multiplication par g^k est une application injective sur $D^{p,q}$ dès que $p+q+k < n+1$.
- $$< g^k\omega_1, \omega_2 > = < \omega_1, c^k\omega_2 >$$
- $$g^k\omega = *c^k * \omega$$

Applications

Kulkarni: Une (p, p)-forme double symétrique (structure de courbure) qui satisfait la première identité de Bianchi est complètement dt́erminée par sa courbure sectionnelle:

$$K_\omega \equiv c \Leftrightarrow \omega = c\frac{g^p}{p!}$$

Applications

Kulkarni: Une (p, p)-forme double symétrique (structure de courbure) qui satisfait la première identité de Bianchi est complètement dt́erminée par sa courbure sectionnelle:

$$K_\omega \equiv c \Leftrightarrow \omega = c\frac{g^p}{p!}$$

La p-courbure est la courbure sectionnelle de la forme double

$$R_p = \frac{1}{(n-2-p)!} * (g^{n-2-p} R).$$

- $$cR_p = c\frac{1}{(n-2-p)!}*(g^{n-2-p}R) = *g\frac{1}{(n-2-p)!}(g^{n-2-p}R)$$
  $$= \frac{1}{(n-2-p)!} * (g^{n-1-p}R) = (n-p-1)R_{p-1}$$

- $$cR_p = c\frac{1}{(n-2-p)!}*(g^{n-2-p}R) = *g\frac{1}{(n-2-p)!}(g^{n-2-p}R)$$
$$= \frac{1}{(n-2-p)!}*(g^{n-1-p}R) = (n-p-1)R_{p-1}$$

- Soit $p > 1$,
s_p constante $\Leftrightarrow$R$_p$ proportionnelle à $g^p \Leftrightarrow \frac{g^{n-2-p}R}{(n-2-p)!} = \lambda\frac{g^{n-p}}{(n-p)!}$
$\Leftrightarrow R$ est proportionnelle à g^2 (car $2+2+n-2-p < n+1$ i.e. $p > 1$) $\Leftrightarrow$ la courbure sectionnelle de R est constante.

- La dérivation extérieur d sur les p-formes s'étend de deux manières naturelles aux formes doubles: D (la seconde somme de Bianchi) et $\tilde{D}$ (la seconde somme de Bianchi adjointe).

- La dérivation extérieur d sur les p-formes s'étend de deux manières naturelles aux formes doubles: D (la seconde somme de Bianchi) et $\tilde{D}$ (la seconde somme de Bianchi adjointe).
- L'opérateur $\delta = c\tilde{D} + \tilde{D}c$ généralise l'opérateur δ classique sur les formes.

- $\delta = *D*$.

- $\delta = *D*$.
- L'opérateur δ est l'adjoint formel de l'opérateur D.

- $\delta = *D*$.
- L'opérateur δ est l'adjoint formel de l'opérateur D.
- Application:

$$\delta R_p = \delta * \frac{(g^{n-2-p}R)}{(n-2-p)!} = *D\frac{(g^{n-2-p}R)}{(n-2-p)!} = 0.$$

Courbures de Gauss-Bonnet-Weyl

On note par R^q le produit de la double forme R avec lui même q-fois. Soulignons que les tenseurs R^q coïncident avec les tenseurs de courbure de Gauss-Kronecker.

On note par R^q le produit de la double forme R avec lui même q-fois. Soulignons que les tenseurs R^q coïncident avec les tenseurs de courbure de Gauss-Kronecker. Pour $1 \leq 2q \leq n$, la $(2q)$-ième

coubure de Gauss-Bonnet-Weyl, notée par h_{2q}, est

$$h_{2q} = \frac{1}{(2q)!} c^{2q} R^q.$$

On note par R^q le produit de la double forme R avec lui même q-fois. Soulignons que les tenseurs R^q coïncident avec les tenseurs de courbure de Gauss-Kronecker. Pour $1 \leq 2q \leq n$, la $(2q)$-ième

coubure de Gauss-Bonnet-Weyl, notée par h_{2q}, est

$$h_{2q} = \frac{1}{(2q)!} c^{2q} R^q.$$

Elle est aussi égale à:

$$h_{2q} = * \frac{1}{(n-2q)!} g^{n-2q} R^q.$$

Exemples

- Pour une hypersurface de l'espace Euclidien, les courbures h_{2q} coïncident avec les fonctions symétriques d'ordres paires des valeurs propres de la seconde forme fondamentale.

Exemples

- Pour une hypersurface de l'espace Euclidien, les courbures h_{2q} coïncident avec les fonctions symétriques d'ordres paires des valeurs propres de la seconde forme fondamentale.
- Pour une variété riemannienne conformément plate, le tenseur de courbure R est divisible par la métrique g: $R = gh$.
  Les h_{2q} coïncident avec les fonctions symétriques des valeurs propres du tenseur de Schouten h.

Formule de variation

La fonctionnelle classique de courbure scalaire totale:

$$S(g) = \int_M c^2 R \mu_g .$$

Les points critiques de cette fonctionnelle, une fois restreinte à $\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} : \mathrm{vol}(g) = 1\}$, sont les métriques d'Einstein.

Formule de variation

La fonctionnelle classique de courbure scalaire totale:

$$S(g) = \int_M c^2 R\mu_g.$$

Les points critiques de cette fonctionnelle, une fois restreinte à $\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} : \mathrm{vol}(g) = 1\}$, sont les métriques d'Einstein.

La fonctionnelle riemannienne suivante généralise d'une manière naturelle S:

$$H_{2k}(g) = \int_M h_{2k}\mu_g.$$

Marcel Berger a démontré que le gradient de H_4, $(k = 2)$, comme le gradient de S, $(k = 1)$, dépend seulement du tenseur de courbure de Riemann R et non pas de ses dérivés covariantes. Il a alors posé la question: si ce phénomène reste vrai pour toutes les autres H_{2k}.

Réponse:

Le résultat suivant donne une réponse affirmative à cette question:

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour tout entier k, tel que $2 \leq 2k \leq n$, la fonctionnelle H_{2k} est différentiable, et en g on a

$$H'_{2k}h = \frac{1}{2} < h_{2k}g - \frac{1}{(2k-1)!}c^{2k-1}R^k, h > .$$

Réponse:

Le résultat suivant donne une réponse affirmative à cette question:

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour tout entier k, tel que $2 \leq 2k \leq n$, la fonctionnelle H_{2k} est différentiable, et en g on a

$$H'_{2k}h = \frac{1}{2} < h_{2k}g - \frac{1}{(2k-1)!}c^{2k-1}R^k, h > .$$

Le tenseur ainsi obtenu $h_{2k}g - \frac{1}{(2k-1)!}c^{2k-1}R^k$ est dit d'Einstein-Lovelock d'ordre $2k$ et noté T_{2k}.

Corollaire:

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2k$. La courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} est constante si et seulement si la métrique g est un point critique de la fonctionnelle H_{2k} restreinte à l'ensemble $\mathrm{Conf}(g)$ des métriques conformes à g et ayant le même volume total.

Corollaire:

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2k$. La courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} est constante si et seulement si la métrique g est un point critique de la fonctionnelle H_{2k} restreinte à l'ensemble $\mathrm{Conf}(g)$ des métriques conformes à g et ayant le même volume total.

Conjecture de Yamabe généralisée:

Dans toute classe conforme d'une métrique riemannienne sur une variété compacte, il existe une métrique riemannienne à courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} constante.

Les (p, q)-courbures

Le tenseur de (p, q)-courbure: pour $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$ et $0 \leq p \leq n - 2q$, on pose:

$$R_{(p,q)} = \frac{1}{(n-2q-p)!} * \left(g^{n-2q-p} R^{q} \right).$$

Le tenseur de (p, q)-courbure: pour $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$ et $0 \leq p \leq n-2q$, on pose:

$$R_{(p,q)} = \frac{1}{(n-2q-p)!} * \left(g^{n-2q-p} R^q\right).$$

Les tenseurs $R_{(p,q)}$ satisfont la première identité de Bianchi et ils sont sans divergences.

La (p, q)-courbure, notée $s_{(p,q)}$, est la courbure sectionnelle du tenseur $R_{(p,q)}$.

La (p, q)-courbure, notée $s_{(p,q)}$, est la courbure sectionnelle du tenseur $R_{(p,q)}$.

- Pour $q = 1$: $s_{(p,1)} = s_p$ est la p-courbure. En particulier, $s_{(0,1)}$ est la moitié de la courbure scalaire, et $s_{(n-2,1)}$ coïncide avec la courbure sectionnelle.

La (p, q)-courbure, notée $s_{(p,q)}$, est la courbure sectionnelle du tenseur $R_{(p,q)}$.

- Pour $q = 1$: $s_{(p,1)} = s_p$ est la p-courbure. En particulier, $s_{(0,1)}$ est la moitié de la courbure scalaire, et $s_{(n-2,1)}$ coïncide avec la courbure sectionnelle.
- Pour $p = 0$ et $2q = n$, $s_{(0,\frac{n}{2})} = *R^{n/2}$ est la courbure de Killing-Lipschitz (l'intégrant de Gauss-Bonnet).

La (p,q)-courbure, notée $s_{(p,q)}$, est la courbure sectionnelle du tenseur $R_{(p,q)}$.

- Pour $q=1$: $s_{(p,1)} = s_p$ est la p-courbure. En particulier, $s_{(0,1)}$ est la moitié de la courbure scalaire, et $s_{(n-2,1)}$ coïncide avec la courbure sectionnelle.
- Pour $p=0$ et $2q=n$, $s_{(0,\frac{n}{2})} = *R^{n/2}$ est la courbure de Killing-Lipschitz (l'intégrant de Gauss-Bonnet).
- Plus généralement, la courbure $s_{(n-2q,q)}(P)$ est la courbure de Lipschitz-Killing. de $P^{\perp}$. Cette dernière n'est autre que la $(2p)$-courbure sectionnelle définie par Thorpe.

- Pour $p = 0$, $s_{(0,q)} = *\frac{1}{(n-2q)!}g^{n-2q}R^q = \frac{1}{(2q)!}c^{2q}R^q$ est la courbure de Gauss-Bonnet-Weyl.

- Pour $p = 0$, $s_{(0,q)} = *\frac{1}{(n-2q)!} g^{n-2q} R^q = \frac{1}{(2q)!} c^{2q} R^q$ est la courbure de Gauss-Bonnet-Weyl.
- Finalement, pour $p = 1$, $s_{(1,q)}$ est la courbure sectionnelle du tenseur d'Einstein-Lovelock T_{2q}.

- Pour tout (p, q) tel que $2q \leq p \leq n - 2q$, la (p, q)-courbure $s_{(p,q)} \equiv \lambda$ est constante si et seulement si la courbure sectionnelle du tenseur de Gauss-Kronecker R^q est constante et égale à $\frac{\lambda(2q)!(n-p-2q)!}{(n-p)!}$.
- Pour tout (p, q) tel que $p < 2q$, la (p, q)-courbure $s_{(p,q)} \equiv c$ est constante si et seulement si le tenseur $c^{2q-p}(R^q)$ est proportionel à la métrique, i.e. $c^{2q-p}(R^q) = \lambda g^p$.

Formule d'Avez généralisée

Formule d'Avez: l'intégrand de Gauss-Bonnet en dimension 4 est donné par $h_4 = \sum_{r=0}^{2} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} |c^r R|^2$.

Formule d'Avez généralisée

Formule d'Avez: l'intégrand de Gauss-Bonnet en dimension 4 est donné par $h_4 = \sum_{r=0}^{2} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} |c^r R|^2$.

Généralisation:

Pour $n = 4q$, l'intégrand de Gauss-Bonnet est donné par

$$h_{4q} = \sum_{r=0}^{2q} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} |c^r R^q|^2.$$

Conséquence:
Une variété compacte de dimension $n = 4q$ telle que le tenseur $c(R^q)$ est proportionnel à la métrique g^{2q-1} est à caractéréstique d'Euler-Poincaré non-négative. De plus, Elle est nulle si et seulement si la variété est q-plate.

La seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl Positive

Une variété d'Einstein (M, g) de dimension $n \geq 4$ est à $h_4 \geq 0$. De plus $h_4 \equiv 0$ si et seulement si (M, g) est plate.

En particulier,

Une variété qui n'admet pas de métriques à $h_4 \geq 0$ ne peut pas porter de métriques d'Einstein.

Liens avec la positivité des autres courbures

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$ et à p-courbure non-négative (resp. positive) telle que $p \geq \frac{n}{2}$. Alors, la *SCGBW* de (M, g) est non-négative (resp. positive). De plus, elle est identiquement nulle si et seulement si (M, g) est plate.

Corollaire:

- Si une variété riemannienne de dimension ≥ 4 est à courbure sectionnelle non-négative (resp. positive) alors sa *SCGBW* est non-négative (resp. positive). De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si elle est plate.

Corollaire:

- Si une variété riemannienne de dimension ≥ 4 est à courbure sectionnelle non-négative (resp. positive) alors sa *SCGBW* est non-négative (resp. positive). De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si elle est plate.
- Si une variété riemannienne de dimension ≥ 8 est à courbure isotrope non-négative (resp. positive) alors sa *SCGBW* est non-négative (resp. positive). De plus, $h_4 \equiv 0$ si et seulement si elle est plate.

Les résultats qu'on a obtenus montrent une forte analogie entre le comportement de la positivité de la courbure scalaire et celle de h_4. Voici quelques exemples:

Les résultats qu'on a obtenus montrent une forte analogie entre le comportement de la positivité de la courbure scalaire et celle de h_4. Voici quelques exemples:

- La classe des variétés compactes à $h_4 > 0$ est stable sous chirurgies en codimension > 4.

Les résultats qu'on a obtenus montrent une forte analogie entre le comportement de la positivité de la courbure scalaire et celle de h_4. Voici quelques exemples:

- La classe des variétés compactes à $h_4 > 0$ est stable sous chirurgies en codimension > 4.
- Pour les variétés compactes qui sont les espaces totaux pour des submersions riemanniennes, il suffit que les fibres soient à $h_4 > 0$ pour pouvoir construire une métrique à $h_4 > 0$ sur l'espace total.

Les résultats qu'on a obtenus montrent une forte analogie entre le comportement de la positivité de la courbure scalaire et celle de h_4. Voici quelques exemples:

- La classe des variétés compactes à $h_4 > 0$ est stable sous chirurgies en codimension > 4.
- Pour les variétés compactes qui sont les espaces totaux pour des submersions riemanniennes, il suffit que les fibres soient à $h_4 > 0$ pour pouvoir construire une métrique à $h_4 > 0$ sur l'espace total.
- Soit $n > 5$. Tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété compacte de dimension n à $h_4 > 0$.

Projets De Recherches

Obstructions topologiques pour la SCGBWP

Chercher des variétés n'admettant pas de métriques à SCGBW non-négative

Un des problèmes de grande importance en géométrie contemporaine est l'étude des variétés d'Einstein. Ce projet se situe dans cette direction puisque les variétés d'Einstein ont leur seconde courbure de Gauss-Bonnet-Weyl non-négative et non identiquement nulle à moins qu'elles soient plates. Et ceci, rappelons le, indépendement du signe de la constante d'Einstein.
Dans ce projet, il s'agit d'abord de démontrer qu'une variété compacte admettant une métrique à courbure $h_4 \geq 0$ non identiquement nulle porte aussi une métrique à $h_4 > 0$.
Ensuite, on doit chercher des obstructions topologiques (comme dans le cas de la courbure scalaire) à l'existence des métriques à $h_4 > 0$.
De tels résultats seraient très intéressants dans le sens où ils prouveraient l'existence de variétés en dimensions supérieures sans métriques d'Einstein.

Une autre voie possible de recherche pour ces obstructions, est de considérer l'analogue polyhèdrale de h_4, selon les idées dévoloppées par Cheeger, Müller et Schräder. Ceci étant une mesure portée par le squelette de codimension 4 du polyèdre en question. Pour des approximations polyhèdrales convenables d'une variété riemannienne, ces mesures discrètes convergent en mesure vers l'intégrand $h_4 \mathrm{dvol}$.
Il s'agit donc d'étudier les propriétés de positivité de ces analogues polyèdraux. En particulier, de voir si on peut obtenir des restrictions sur les nombres de Betti.

Le problème de Yamabe généralisé

Dans toute classe conforme d'une métrique riemannienne sur une variété C^∞ compacte donnée de dimension $n \geq 2k$, il existe une métrique riemannienne à courbure de Gauss-Bonnet-Weyl h_{2k} constante.

Théorème d'annulation pour la CIP

L'objectif ici est de démontrer que:

la positivité de la courbure isotrope sur une variété compacte de dimension $n \geq 4$ entraîne l'annulation des nombres de Betti b_i de la variété pour $2 \leq i \leq n-2$.

Théorème d'annulation pour la CIP

L'objectif ici est de démontrer que:

la positivité de la courbure isotrope sur une variété compacte de dimension $n \geq 4$ entraîne l'annulation des nombres de Betti b_i de la variété pour $2 \leq i \leq n-2$.

Ce problème est motivé d'une part par l'analogie existante entre courbure isotrope et $(n-4)$-courbure et d'autre part par le fait que le tenseur de p-courbure apparaît naturellement dans l'opérateur de courbure de Weitzenbök. Signalons qu'on a déjà démontré ce résultat pour une métrique conformément plate.

Fin de l'exposé,

Merci pour votre attention ...