



HAL
open science

MODELISATION ET SIMULATION DE STRICTION ET DE PLISSEMENT EN EMBOUTISSAGE DE TOLES MINCES ET HYDROFORMAGE DE TUBES MINCES

Arnaud Lejeune

► **To cite this version:**

Arnaud Lejeune. MODELISATION ET SIMULATION DE STRICTION ET DE PLISSEMENT EN EMBOUTISSAGE DE TOLES MINCES ET HYDROFORMAGE DE TUBES MINCES. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Franche-Comté, 2002. Français. NNT: . tel-00267597

HAL Id: tel-00267597

<https://theses.hal.science/tel-00267597>

Submitted on 27 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE
FRANCHE-COMTÉ
Spécialité Sciences pour l'Ingénieur

MODÉLISATION ET SIMULATION
DE STRICTION ET DE PLISSEMENT
EN EMBOUTISSAGE DE TÔLES MINCES ET
HYDROFORMAGE DE TUBES MINCES

par

Arnaud LEJEUNE

Soutenue le 20 décembre 2002 devant la Commission d'Examen

Rapporteurs	D. Banabic	Professeur à l'Université de Cluj-Napoca (Roumanie)
	M. Brunet	Professeur à l'I.N.S.A. de Lyon
Examineur	F. Moussy	Chef de Groupe, Direction de la Recherche, Renault, Rueil-Malmaison (Hauts de Seine)
Président	P. Picart	Professeur à l'Université de Franche-Comté
Directeur de thèse	J. C. Gelin	Professeur, directeur de l'E.N.S.M.M. à Besançon
Co-directrice	N. Boudeau	Maître de Conférence à l'E.N.S.M.M. de Besançon

*A la mémoire
de mon frère
et de mon père*

Remerciements

J'adresse mes remerciements :

À Monsieur Dorel Banabic, Professeur à l'Université de Cluj-Napoca (Roumanie), pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire,

À Monsieur Michel Brunet, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, qui a également accepté d'être rapporteur de ce mémoire,

À Monsieur François Moussy, Chef de Groupe à la Direction de la Recherche de Renault, pour avoir participé au jury,

À Monsieur Philippe Picart, Professeur à l'Université de Franche-Comté, qui m'initia aux joies de la mécanique en maîtrise d'Ingénierie Mathématique à l'Université de Franche-Comté. La perspective de travailler dans la même équipe que lui fut pour beaucoup dans l'acceptation du sujet proposé dans l'équipe Modélisation en Mise en Forme des Matériaux. Ce fut donc un grand honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président du jury,

À Monsieur Jean-Claude Gelin, Professeur à l'École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques de Besançon, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour l'aide fournie lorsque les lenteurs administratives me privèrent de salaire durant quelques mois,

À Nathalie Boudeau, Maître de Conférence à l'École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques de Besançon, qui a co-encadré avec J. C. Gelin les travaux de thèse et sans qui ce mémoire n'aurait très certainement jamais vu le jour. Que derrière ces quelques mots transparissent toute ma gratitude pour les trois années passées ensemble.

À Monsieur Ken-Ichiro Mori, Professeur à l'Université de Toyohashi (Japon), pour m'avoir accueilli durant deux mois au sein de son laboratoire, au Ministère de l'Education et de la Recherche japonais pour avoir financé ce séjour qui fut une formidable expérience humaine et scientifique, et à toutes les personnes rencontrées lors de ce séjour,

À Monsieur Jean-Marie Crolet, Professeur à l'Université de Franche-Comté, qui me mit en relation avec J. C. Gelin, simultanément avec P. Picart, mais également à tous les enseignants-chercheurs du Laboratoire de Calcul Scientifique de Franche-Comté pour m'avoir permis de réaliser cette thèse,

À l'ensemble du personnel du LMARC, permanents ou non, qu'il m'ait été donné de cotoyer durant ces trois années,

Je tiens plus particulièrement à remercier l'ensemble des thésards du LMARC rencontrés ; ayant peur d'en oublier, je ne citerai personne en particulier.

Au chirurgien et aux kinés qui ont fait un remarquable travail sur mon genou me permettant de reprendre mes activités sportives.

Aux Bleuets de Beurepaire-en-Bresse et à l'Union Sportive de Saillenard.

Je remercie également mes amis beurepairois et des environs qui ne liront certainement jamais cette thèse.

Que Choupinet, Patounet, Superdardar, Choucroute, Johnny, Le Tos (et Sev), Yannick et Kiki soient également remerciés pour leur amitié et en espérant que nous continuerons de nous retrouver pour raconter nos fantastiques aventures. Grâce à eux ma santé mentale fut, si ce n'est saine, en tout cas pas altérée par ces trois dernières années.

Je veux également remercier fortement ma famille pour son soutien depuis mon entrée à l'Université de Franche-Comté.

Je tiens à remercier ma douce et tendre Muriel qui a bien du mérite de me supporter et qui égaye chaque journée passée en sa compagnie.

Pour finir, je remercie ma petite maman pour tout et plus encore.

Table des matières

1	Introduction	1
2	À la recherche de la striction localisée	7
2.1	Introduction : De la réalité vers la simulation	7
2.2	Modélisations de l'apparition de striction localisée	11
2.2.1	Les critères de force maximum	12
2.2.2	L'analyse en bifurcation	20
2.2.3	La méthode d'introduction d'un défaut	22
2.2.4	La méthode de perturbation	27
2.2.5	Discussion	28
2.3	Analyse linéaire de stabilité	30
2.3.1	Définition de l'équilibre mécanique	31
2.3.2	Perturbation de l'équilibre	36
2.3.3	Détermination du seuil et condition de localisation	39
2.4	Applications de l'analyse linéaire de stabilité	40
2.4.1	Construction de Courbes Limites de Formage	41
2.4.2	Recherche d'instabilité dans le cas de la flexion d'une bande large	48
2.5	Conclusion	57
3	Prédiction de l'apparition de plis	67
3.1	Introduction	67

3.2	Analyse en bifurcation	72
3.2.1	Définition de la fonctionnelle de bifurcation	72
3.2.2	Lois de comportement	75
3.2.3	Analyse simplifiée pour le plissement en emboutissage	77
3.2.4	Validité et résultats de l'analyse simplifiée	80
3.3	La méthode de l'énergie	82
3.3.1	Les fondements de la méthode de l'énergie	83
3.3.2	Application au cas plastique	83
3.3.3	Autres travaux basés sur l'observation d'énergie	84
3.4	La méthode de Nordlund et Häggblad	85
3.4.1	Définition du critère de plissement	85
3.4.2	Application à l'élément coque utilisé dans le code Polyform [®]	91
3.4.3	Calcul des valeurs requises	91
3.5	Une méthode de perturbation	94
3.5.1	Introduction	94
3.5.2	Équilibre de la plaque considérée	94
3.5.3	Perturbation	97
3.6	Conclusion	104
4	Prédiction numérique des défauts	107
4.1	Test de gonflement hydraulique	107
4.2	Test de Yoshida	109
4.2.1	Prédiction de plis	109
4.2.2	Effet de l'endommagement sur le critère de plissement	111
4.3	Hydroformage de tubes	114
4.3.1	Prédiction de l'éclatement de tube	114
4.3.2	Analyse de flambage	116
4.3.3	Simulation d'une pièce en T	119
4.3.4	Influence de paramètres procédés sur l'apparition de plis.	126

4.4	Mise en forme de tôles	128
4.4.1	Prédiction de striction localisée	128
4.4.2	Influence du maillage sur le critère de plissement	130
4.5	Discussion	133
5	Confrontation de critères de défauts avec l'expérience	135
5.1	Un nouveau procédé d'hydroformage de tubes : Le procédé hammering .	136
5.2	Définition du procédé réalisé	138
5.3	Comparaison expérience/simulation	138
5.3.1	Validation de la géométrie numérique	139
5.3.2	Observation qualitative de l'effet du chemin oscillant sur la déformée du tube	143
5.3.3	Comparaison entre chemin linéaire et chemin oscillant	145
5.3.4	Influence du nombre de cycles sur l'apparition de défauts	154
5.3.5	Influence de l'amplitude sur l'apparition de défauts	158
5.3.6	Influence de la vitesse de procédé sur l'apparition de défauts . . .	160
5.4	Discussion	164
6	Conclusions et Perspectives	167
A	Obtention du critère de Considère	189
B	Recherche d'instabilité dans le cadre du critère de charge Hill93	191
B.1	Détermination de la loi de comportement : expression du multiplicateur plastique	191
B.2	Recherche d'instabilité : perturbation et linéarisation de l'équilibre	195
B.2.1	Perturbation	196
B.2.2	Application au cas isotrope	212
C	Recherche d'instabilité avec prise en compte de l'endommagement	215

C.1	Définition de l'équilibre :	215
C.2	Perturbation de l'équilibre	216
D	Obtention d'un critère de plissement par analyse de stabilité du flux de matière	221
D.1	Définition de l'équilibre mécanique	222
D.1.1	Loi d'écroutissage	223
D.1.2	La théorie de l'écoulement : Définition de surfaces de charges . . .	223
D.1.3	Les équations d'équilibre	225
D.1.4	Les équations de compatibilité des taux de déformations	226
D.1.5	L'équation d'incompressibilité	226
D.2	Perturbation de l'équilibre	226
D.2.1	Principe	226
D.2.2	Définition de la fonction de perturbation	227
D.2.3	Équations perturbées	228
D.2.4	Recherche d'instabilité	238

Chapitre 1

Introduction

L'emboutissage de tôles minces et l'hydroformage de tubes minces sont deux procédés largement utilisés pour la mise en forme de pièces dans les domaines nucléaire, aérospatial, aéronautique et automobile.

L'emboutissage d'une tôle mince consiste à déformer la pièce, qui peut être préformée, à l'aide d'un poinçon, d'une matrice, qui fixe la géométrie de la pièce après déformation, et éventuellement d'un serre-flan qui permet le contrôle de l'écoulement de matière. Le jonc de retenue, servant à freiner le glissement de la pièce sur une partie du serre-flan, vient parfois s'ajouter à ces trois composants de base. Ce procédé permet d'obtenir des pièces de carrosserie ou mécanique en grande série (figure 1-1).

Parallèlement à ce procédé, le procédé d'hydroformage de tubes a été développé depuis la seconde guerre mondiale. Mais, ce n'est que récemment (aux alentours des années 1990) que de nombreux efforts se sont portés sur ce procédé dans le secteur automobile. Le principe de base de ce procédé consiste en la déformation d'un tube dans une cavité, définie par une matrice, sous l'action d'une pression interne et de pistons axiaux. Parfois, la cavité est elle-même contrôlée par un piston, appelé contre-piston, afin d'autoriser de plus grandes déformations.

Les pièces produites par les procédés d'emboutissage et d'hydroformage se doivent de

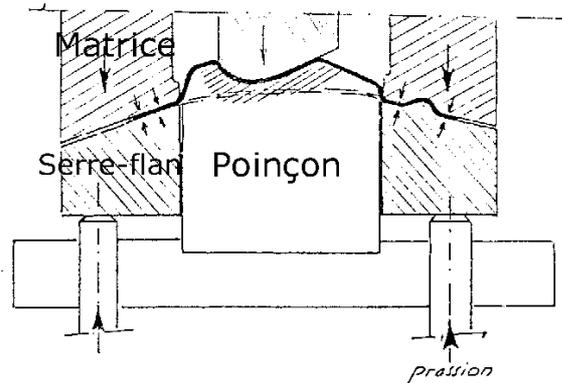


FIG. 1-1: Schéma de principe d'un outil d'emboutissage de carrosserie automobile (d'après [Rault 75])

répondre à des besoins en terme de qualité d'aspect et/ou structurelle. Parmi les défauts pouvant apparaître lors de tels procédés, les plus importants sont les procédés de striction localisée et de plissement.

Jusque dans les années 1990, les principales méthodes de caractérisation de ces défauts étaient expérimentales. Malheureusement, les méthodes proposées se devant d'être simples et rapides, nombre de conditions matérielles, géométriques et/ou procédés sont fixées ce qui limite le champ d'utilisation des résultats lors de déformations de pièces complexes. De plus, les méthodes de caractérisation expérimentale nécessitent l'utilisation de matière et d'outillage.

La tendance actuelle du secteur automobile à réduire au maximum les délais de conception d'un véhicule et l'avancée technologique impressionnante du domaine informatique ont donc entraîné l'utilisation d'outils numériques basés sur la méthode des éléments finis, pour la simulation informatique des procédés d'emboutissage et d'hydroformage. Sans être exhaustif, on peut nommer parmi les logiciels commerciaux de simulation, OP-TRIS, LS-DYNA, STAMPFORM, AUTOFORM, ... Cependant, si ces logiciels présentent un intérêt certain pour la simulation de la mise en forme de pièces par emboutissage et hydroformage, de nombreux efforts restent à produire en terme de caractérisation numérique des défauts. Ce sujet a d'ailleurs fait l'objet d'un projet européen (Brite-Euram III,

Computer Aided Engineering Platform for Stamping Process and Die Design - Stamping Toolbox) et commence à attirer l'attention de certains constructeurs et développeurs de logiciels.

On se propose, dans ce mémoire de thèse, de contribuer à la caractérisation numérique des défauts de striction localisée et de plissement lors des procédés d'emboutissage de tôles minces et d'hydroformage de tubes minces.

Le premier chapitre est dédié à la modélisation de la striction localisée. Un rappel des travaux existants est effectué. Sur la base de ce rappel, l'analyse linéaire de stabilité par une méthode de perturbation a été étendue à une modélisation tridimensionnelle de l'équilibre mécanique. On autorise ainsi de nouveaux modes d'instabilité, et par conséquent de striction localisée. On a également proposé une méthode afin de lever l'indétermination liée à la différence entre instabilité effective et absolue lors de la recherche de striction localisée. Le critère d'instabilité ainsi développé permet la construction de courbes limites de formage servant à mettre en évidence de facteurs influençant l'apparition de striction localisée. En notant que, lors de procédés de mise en forme par emboutissage et hydroformage, les déformations ne sont pas que membranaires, on a souhaité conclure le chapitre par une recherche d'instabilité lors d'un procédé de flexion pure.

Le second chapitre présente les différentes modélisations du plissement. On retrouve parfois ce terme sous la dénomination de flambage localisé. Parmi les modélisations existantes, l'analyse mécanique de Nordlund et Häggblad a retenu notre attention. Cette méthode est basée sur l'observation des variations de rotations. L'intégration de cette méthode dans le code de simulation éléments finis d'emboutissage et d'hydroformage, développé au LMARC dans l'équipe Modélisation et Mise en Forme, est présentée. Ces travaux ont également servi de base au développement d'un nouveau critère de plissement. Il a été appliqué au cas d'une plaque en compression. En l'absence de données expérimentales, une comparaison avec un critère basé sur une méthode de l'énergie est

donnée. Le critère de Nordlund et Häggblad souligne l'importance des termes de flexion intervenants dans la définition de la déformation. On souhaite alors, en conclusion de ce chapitre, ne plus découpler les termes membranaires et de flexion. Pour cela, une analyse linéaire de stabilité par méthode de perturbation dans le cas d'une modélisation du comportement matériel par une loi d'Illyushin est proposée en annexe. On constate alors rapidement l'augmentation de la dimension du problème à résoudre. En l'absence, pour l'instant, d'une méthode simple et rapide de résolution de ce problème, seul le développement analytique est présenté.

Les critères de striction localisée, par analyse linéaire de stabilité, et de plissement, par la méthode de Nordlund et Häggblad, ont été utilisés au cours de simulations éléments finis des procédés d'emboutissage et d'hydroformage. Les résultats obtenus font l'objet du troisième chapitre. Dans un premier temps, l'application des critères de défauts lors de simulations numériques de tests simples permet de vérifier le bon comportement de ces critères par rapport à la réalité mais aussi en comparaison avec des critères plus usuellement utilisés. Par la suite, l'application de ces critères sur des simulations d'hydroformage de tubes en T et sur un procédé axisymétrique d'hydroformage de tubes permet de montrer l'influence du chemin de procédé sur l'apparition de défauts. L'influence d'instabilités numériques a conduit à la définition d'un nouveau critère de striction localisée. Lors de simulation d'emboutissage de tôles, l'amélioration de la profondeur d'emboutissage d'un procédé d'hydroformage de flans par rapport à un procédé traditionnel est montrée numériquement à l'aide du critère de striction localisée. L'influence de l'effort serre-flan sur l'apparition de défauts est également observée.

Le quatrième chapitre est consacré à un nouveau procédé d'hydroformage de tubes. Les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre d'un stage de deux mois proposé par le Ministère de l'Éducation et de la Recherche Japonais (MEXT) sont présentés. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Messieurs Maneo et Patwari, étudiants en Master, sous la direction du Professeur Mori de l'Université Technologique de Toyohashi

(Japon). L'influence de certains paramètres de procédés sur l'apparition de défauts est présentée. La comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats numériques montrent la précision des critères de défauts développés.

La conclusion générale de ce mémoire ainsi que les travaux ultérieurs pouvant en découler sont abordés dans le dernier chapitre.



Chapitre 2

À la recherche de la striction localisée

2.1 Introduction : De la réalité vers la simulation

Le phénomène de striction apparaît de manière assez naturelle. En effet, un simple test de traction sur une éprouvette plane permet de constater la formation, dans le domaine plastique, à partir d'une certaine limite de déformation, d'une bande étroite appelée "bande de striction" (figure 2-1).

Bien que le terme de striction soit communément admis pour caractériser cet effet, on trouve plusieurs définitions de ce phénomène. Ainsi le terme de striction est tantôt représentatif de l'amincissement localisé [Fromentin 98], et plus souvent associé à l'apparition de bandes de cisaillement [Molinari 85], [Bai 82].

Toutefois, derrière le terme de striction se cachent deux phénomènes distincts. Il convient en effet de séparer la striction diffuse de la striction localisée.

Si la première correspond à une variation assez douce de la section, la seconde se traduit par l'apparition d'une bande étroite où se concentre la déformation [Dudzinski 90] et correspond à la dernière étape avant la rupture du matériau.

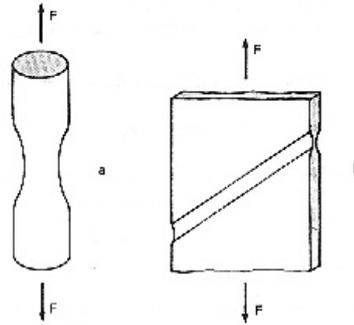


FIG. 2-1: (a) Striction diffuse lors de la traction d'une barre à section circulaire : la variation de section s'effectue sur une zone étendue (b) Striction localisée dans le cas d'une plaque en traction : une bande étroite de localisation apparaît. D'après [Dudzinski 90].

Les premiers travaux concernant la striction localisée furent expérimentaux. Il s'agissait alors de déterminer la formabilité d'un matériau donné, c'est-à-dire la déformation limite avant l'apparition de striction. La notion de Courbe Limite de Formage (C.L.F.) fut alors introduite. L'objectif est de déterminer, pour un matériau donné, la limite en dessous de laquelle on peut réaliser un embouti sans rupture ou sans striction.

Les premiers travaux relatifs aux Courbes Limites de Formage sont attribués de manière générale ([Boudeau 95], [Fromentin 98], [Col 00], [Cao 00]) à Keeler [Keeler 65]. En réalité, il semblerait que Gensamer [Gensamer 46] construisit la première Courbe Limite de Formage [Col 00], mais celle-ci passa inaperçue.

Il faut en effet attendre les travaux de Keeler [Keeler 65], en 1965, pour que les C.L.F. soient réellement utilisées pour caractériser la formabilité des matériaux. Il traça sur un diagramme les déformations principales, dans le domaine de l'expansion, pour lesquelles une bande de striction apparaissait très nettement. Par la suite, Goodwin [Goodwin 68] compléta le diagramme de Keeler en traçant la limite de formabilité dans le domaine du rétreint. Une liste non-exhaustive de tests et de méthodes de mesure utilisés pour définir les courbes limites de formage est donnée dans [Boudeau 95].

Si ces courbes furent longtemps déterminées de manière expérimentale, les modélisations du phénomène de striction (diffuse et localisée) autorisèrent par la suite la construction

de courbes dites théoriques. Il est ainsi possible de construire à moindre coût les limites de formabilité d'un matériau. De plus, les Courbes Limites de Formage théoriques et expérimentales ont permis de montrer l'influence des paramètres de comportement matériel et de procédé sur l'apparition de striction localisée. Les effets microscopiques (c'est-à-dire l'influence de la structure polycristalline) sont mis en évidence par Parnière et Sanz [Parnière 75]; ils ont fait l'objet de travaux sur la prédiction de striction localisée dans le cas d'une loi polycristalline [Boudeau 95]. Concernant les paramètres macroscopiques influençant l'apparition de striction, on peut citer à titre d'exemple les exposants n et m de la loi d'écroutissage de type Hollomon avec dépendance à la vitesse de déformation ($\bar{\sigma} = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m$) [Dudzinski 90], la prédéformation ε_0 [Rees 01], les coefficients d'anisotropie [Zhu 98] et de manière plus générale la forme de la surface de plasticité ([Lestriez 00], [Banabic 99], [Cao 00], ...). Les Courbes Limites de Formage étant influencées par la surface de charge considérée et par conséquent par les coefficients matériaux intervenants dans les lois de plasticité, Cao et al. [Cao 00] proposent une méthode originale d'identification de ces coefficients. Il s'agit d'ajuster les C.L.F. et les contraintes limites initiales calculées aux données expérimentales. Cette méthode d'identification a été appliquée à une loi de Karafillis&Boyce93 et semble fournir des résultats corrects dans le cas d'un aluminium.

Les paramètres de procédé influençant l'apparition de striction sont le frottement entre la tôle et l'outil, l'épaisseur initiale de la tôle considérée et d'autres paramètres tel l'effort serre-flan.

La striction est également dépendante du chemin de déformation ($\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$) (voir par exemple [Barata Da Rocha 84b], [Fromentin 98], [Mesrar 98b]). Or les Courbes Limites de Formage sont construites pour des trajets de déformation constants. Lors de la réalisation d'un embouti quelconque, cette hypothèse sur le trajet de déformation n'est plus valable. L'utilisation des Courbes Limites de Formage doit donc être limitée à la comparaison de formabilité de différents matériaux ou à la mise en évidence de l'influence de paramètres intervenants dans les procédés de mise en forme. La comparaison

entre un couple de déformation $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ obtenu par simulation numérique d'un procédé de mise en forme et la Courbe Limite de Formage correspondant au matériau considéré, ne peut être effectuée qu'à titre indicatif. Rien n'assure, en effet, qu'une pièce supposée saine, en utilisant cette méthode, le soit réellement puisque les chemins de déformation suivis par un point lors d'un procédé de mise en forme sont des chemins complexes.

Afin d'éviter la dépendance au chemin déformation, des Courbes Limites de Formage en déformation équivalente ont été introduites par Mesrar [Mesrar 98a]. Les résultats présentés tendent à montrer le caractère intrinsèque de la courbe ainsi tracée. Fromentin [Fromentin 98] a repris cette représentation et a confirmé le caractère intrinsèque de la représentation de la déformation équivalente critique en fonction du rapport des vitesses de déformation.

Les travaux expérimentaux et théoriques sur les Courbes Limites de Formage ont permis une grande avancée dans la connaissance du phénomène de la striction localisée. Cependant, les Courbes Limites de Formage se révèlent insuffisantes pour prédire l'apparition de striction lors de procédés complexes d'emboutissage ou d'hydroformage de structures minces. On souhaite donc pouvoir prédire numériquement l'apparition de ce défaut afin de pouvoir l'éviter. Pour ce faire, il a été proposé de post-traiter les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis [Boudeau 95] par un critère de striction localisée. Bien évidemment, le critère considéré dépend fortement de la modélisation choisie.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, les différentes modélisations de la striction diffuse et localisée sont rappelées. Partant du constat que la striction localisée correspond à une instabilité du flux de matière, l'analyse linéaire de stabilité, déjà développée au LMARC [Boudeau 95], a été choisie dans la troisième partie de ce chapitre pour modéliser la prédiction de ce défaut. Dans une quatrième partie, la méthode d'analyse linéaire de stabilité a été appliquée pour la construction de Courbes Limites de Formage dans le cas d'un état de contraintes tridimensionnelles ainsi que pour la prédiction de striction

localisée dans le cas d'un modèle de comportement couplé à l'endommagement et dans le cas d'une plaque en flexion pure.

2.2 Modélisations de l'apparition de striction localisée

S'il est vrai que le terme de striction est un terme communément admis, on trouve dans la littérature différentes définitions "mathématiques" de ce phénomène. A titre d'exemple, Cordebois et Mikkelsen ne semblent pas être d'accord sur la modélisation de ce défaut :

- [Cordebois 86] : en emboutissage, apparition aux points les plus déformés d'un phénomène de localisation incompatible avec la réalisation de la forme désirée. Ce phénomène est appelé striction et il est considéré comme une instabilité de la structure emboutie ;
- [Mikkelsen 99] : la striction localisée d'un tube élastoplastique sous pression interne correspond au premier mode de bifurcation non-axisymétrique.

S'il est vrai que les critères de striction diffèrent suivant le procédé de mise en forme des matériaux considéré (par exemple Swift [Swift 52] propose un critère de striction diffuse pour un procédé d'emboutissage et un autre critère dans le cas d'un tube sous pression), la base de la modélisation se doit de rester la même. Or les deux citations précédentes montrent que deux grandes approches s'affrontent. En effet pour certains auteurs, l'instant d'apparition de la striction (localisée ou non) correspond à un point de bifurcation d'un équilibre qu'il reste à préciser. Pour d'autres, il s'agit plutôt d'un phénomène d'instabilité. Or en mise en forme des matériaux, le comportement est élasto-plastique, et par conséquent cela entraîne une non-équivalence entre les problèmes de stabilité et de bifurcation [Hill 58]. Toutefois, on se rassurera en constatant que les équilibres étudiés diffèrent suivant l'analyse choisie (bifurcation ou stabilité). Ainsi dans le cas d'un tube sous pression interne, Chu [Chu 79] indique que l'apparition de défaut apparaîtra via

un mode cylindrique au point de pression maximum avant l'apparition d'une bifurcation quelconque si le procédé est contrôlé en pression. Si le procédé est contrôlé en volume interne du tube, les déformations symétriques cylindriquement peuvent se développer de manière stable au-delà du point de pression maximum jusqu'à ce qu'un point de bifurcation soit atteint.

2.2.1 Les critères de force maximum

Ces critères sont tous basés sur les travaux de Considère en 1885 [Considère 85].

Le critère de Considère est un critère unidimensionnel puisqu'il a été établi dans le cas de la traction uniaxiale. Il est donc inutilisable dans le cas de la prédiction de striction en mise en forme des matériaux. Ainsi, par la suite, ce critère a été étendu à des états de contraintes plus proches de ceux obtenus lors de procédés d'emboutissage [Swift 52].

De par leur définition, les critères de force maximum ne permettent malheureusement pas de prédire l'apparition de striction localisée mais uniquement l'apparition de striction diffuse. Toutefois, les fondements de ces critères sont relativement simples et leurs expressions analytiques s'obtiennent aisément. Bien que peu utilisables pour la détermination de formabilité en mise en forme des matériaux, ces critères font toujours l'objet de développements [Knockaert 00].

Le critère de Considère : critère unidimensionnel

Ce critère établi en 1885 est basé sur l'observation de la représentation de la force F de traction en fonction de l'allongement relatif $\frac{\Delta l}{l}$ dans le cas d'une éprouvette soumise à un état de traction uniaxiale (figure 2-2).

On constate alors que la courbe $F\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$ passe par un maximum qui est un point de perte de stabilité de l'équilibre. Mais, l'expérience montre que cette singularité correspond à l'apparition de striction diffuse et non pas à l'apparition de striction localisée.

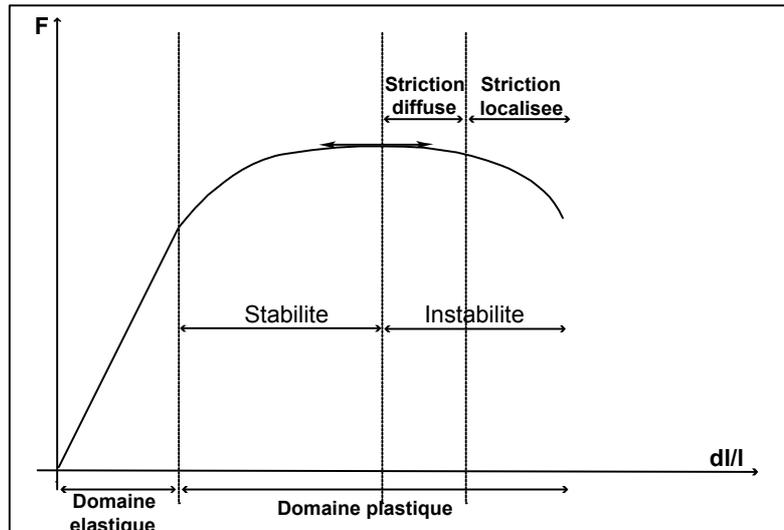


FIG. 2-2: Définition des domaines d'instabilité à partir de la courbe de traction uniaxiale pour un matériau standard

La force F passe par un extrémum lorsque :

$$dF = 0 \quad (2.1)$$

On montre aisément (voir annexe A) que cette condition entraîne :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sigma = 0 \quad (2.2)$$

Cette dernière équation est appelée **critère de force maximum** ou **critère de Considère**.

Le critère de Swift : vers un état bidimensionnel

En 1952, Swift [Swift 52] proposa une extension du critère de Considère à des cas bidimensionnels de contraintes planes ou biaxées. Il a défini alors les premiers critères de prédiction de striction appliqués à des cas simples d'emboutissage et d'hydroformage :

- traction biaxée,

2.2. Modélisations de l'apparition de striction localisée

- cylindre sous pression,
- gonflement hydrostatique,
- emboutissage de flan avec un poinçon cylindrique.

On explicite ici une formulation générale du critère de Swift dans le cas de la traction biaxée.

Soit une plaque soumise à 2 efforts de traction F_1 et F_2 .

Notation 1 *Sous l'effet d'un incrément de déformation, on note $d\sigma_y$ un incrément de la contrainte d'écroutissage σ_y et $d\bar{\sigma}$ un incrément de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$.*

Le critère de stabilité de Swift est alors formulée sous la forme suivante :

$$\text{Si } d\sigma_y > d\bar{\sigma} \text{ alors l'équilibre est stable} \quad (2.3)$$

$$\text{sinon, si } d\sigma_y < d\bar{\sigma} \text{ alors l'équilibre est instable} \quad (2.4)$$

En traction biaxée, l'état de contrainte exprimé par ses contraintes principales est déterminé par :

$$\sigma_1 \neq 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_2 = \alpha \sigma_1 \quad (2.6)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (2.7)$$

Swift émet l'hypothèse qu'un incrément de déformation appliqué localement n'affecte pas les forces de traction F_1 et F_2 . Cela se traduit par :

$$dF_1 = 0 \quad (2.8)$$

$$dF_2 = 0 \quad (2.9)$$

Selon Swift, les deux forces de traction s'exerçant sur les bords de la plaque passent par un maximum. Ainsi, on retrouve l'analyse de Considère [Considère 85] appliquée au

cas bidimensionnel.

Les efforts de traction sont donnés par :

$$F_1 = \sigma_1 S_1 \quad (2.10)$$

$$F_2 = \sigma_2 S_2 \quad (2.11)$$

D'après les notations fournies sur la figure 2-3, les surfaces sont définies par $S_1 = l_1 t$ et $S_2 = l_2 t$.

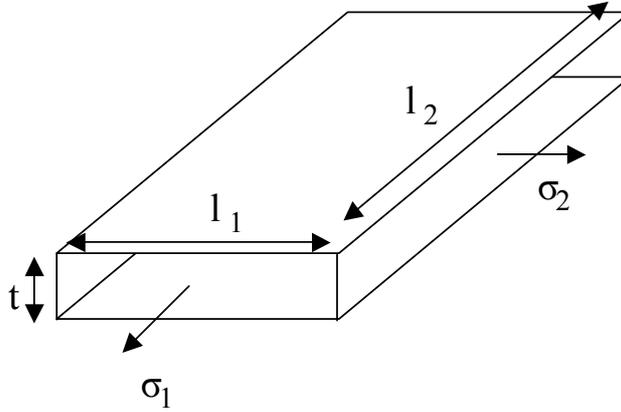


FIG. 2-3: La plaque subit un effort de traction sur chaque bord.

On déduit alors de 2.8 et 2.9 avec la définition des efforts de traction 2.10 et 2.11 :

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} - d\varepsilon_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - d\varepsilon_2 = 0 \quad (2.13)$$

où les incréments de déformation sont définis par $d\varepsilon_1 = \frac{dl_2}{l_2}$, $d\varepsilon_2 = \frac{dl_1}{l_1}$, $d\varepsilon_3 = \frac{dt}{t}$ et où le matériau est supposé incompressible (i.e. $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0$).

2.2. Modélisations de l'apparition de striction localisée

La contrainte équivalente exprimée en terme de contrainte principale est différenciée de la manière suivante :

$$d\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 \quad (2.14)$$

Soit f la surface de charge telle que $f(\bar{\sigma}, \sigma_y) = 0$, cette surface est fonction de la définition de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ et de la contrainte d'écroutissage σ_y . Elle se différencie de la manière suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \quad (2.15)$$

En utilisant 2.14 et 2.15 on peut montrer que

$$\frac{df}{d\sigma_1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \quad (2.16)$$

$$\frac{df}{d\sigma_2} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \quad (2.17)$$

Les équations d'écoulement permettent d'écrire :

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} = \frac{d\varepsilon_1}{\frac{df}{d\sigma_1}} = \frac{d\varepsilon_2}{\frac{df}{d\sigma_2}} = d\lambda \quad (2.18)$$

On trouve alors en utilisant 2.12, 2.13, 2.16, 2.17 et 2.18 que 2.14 devient :

$$d\bar{\sigma} = \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \right] d\bar{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Par analogie avec le critère de Swift formulé dans le cas isotrope, on souhaite faire apparaître la contrainte équivalente.

L'équation du travail incrémental équivalent est :

$$\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 \quad (2.20)$$

L'équation 2.19 couplée avec l'équation 2.20 fournit alors :

$$d\bar{\sigma} = \frac{\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\sigma_1 + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\sigma_2} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} \quad (2.21)$$

D'après 2.4 et 2.21, il y aura alors instabilité des déformations lorsque

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}} < \frac{\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\sigma_1 + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\sigma_2} \quad (2.22)$$

L'analyse de Swift suppose l'annulation des incréments des deux efforts. Cette hypothèse semble être trop restrictive dans le cas d'un chargement proportionnel en contraintes, ainsi une nouvelle formulation du critère a été proposée par [Hora 96].

Le critère de Hill : un critère bidimensionnel de localisation

En 1952, Hill [Hill 52] a repris le critère de contrainte maximum afin de déterminer l'apparition de striction. Mais une condition de localisation a été rajoutée. En effet, ce critère est basé sur l'observation expérimentale montrant que la striction localisée se développe suivant une bande d'extension nulle. La déformation s'effectue alors au détriment de l'épaisseur. On ne développera pas ici ce critère puisque les travaux de Hora [Hora 96] développés dans la partie suivante reprennent la condition de localisation formulée par Hill.

Le critère de Hora : un critère de force maximum modifié

Hora et al. [Hora 96] se proposent de modifier le critère de contrainte maximum en observant que l'état de déformation dans la bande de localisation tend vers un état de déformation plane. On retrouve dans cette étude la condition de localisation formulée par Hill [Hill 52].

Hora émet l'hypothèse que la striction apparaît lorsque l'une des forces de traction exprimée dans le repère principal des contraintes est maximale. On admet que la force F_1

2.2. Modélisations de l'apparition de striction localisée

de traction est la force atteignant la première un maximum. L'expression de la condition d'instabilité est alors la même que dans [Considère 85] :

$$dF_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (2.24)$$

Notation 2 Soit $\rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}$ le chemin de déformation incrémental.

L'état de déformation se doit d'évoluer vers un état de déformation plane. Cette transformation de l'état de déformation s'obtient par un changement de l'état de contrainte. Il y a alors un effet d'érouissage additionnel pour lequel Hora [Hora 96] propose que la contrainte σ_1 dépende du chemin de déformation incrémental ρ et de la déformation principale ε_1 (i.e. $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \rho)$). Le critère 2.24 devient alors :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (2.25)$$

Brunet et al. [Brunet 98] proposent d'améliorer la condition de localisation en considérant la loi d'endommagement de Gurson-Tvergaard dans les équations de comportement dans le cas de matériaux orthotropes et sous l'hypothèse des contraintes planes. Nous n'allons pas ici rappeler ce modèle d'endommagement, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Gurson 77], [Brunet 98], [Brunet 96], ...

Notation 3 Soit σ_y la contrainte d'écoulement du matériau vierge et soit q la contrainte effective selon Gurson.

Remarque 4 On reviendra par la suite sur la notion de contrainte effective pour le couplage d'une méthode de détection de striction localisée avec le modèle d'endommagement de Lemaître.

Remarque 5 Dans le cas d'un matériau non-endommagé, on a égalité entre contrainte

effective et contrainte d'écoulement :

$$\sigma_y = q$$

En prenant en compte l'endommagement selon Gurson-Tvergaard, le critère de striction 2.25 s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\varepsilon_1} - \sigma_1 \frac{\sigma_y}{q} = 0 \quad (2.26)$$

À partir des équations de comportement et d'endommagement, de la loi d'écroutissage et des définitions de la contrainte équivalente et de la déformation équivalente, il est alors possible d'exprimer de manière analytique le critère de prédiction de striction localisée.

Dans le cas d'un matériau de type aluminium obéissant à la loi de comportement orthotrope quadratique de Hill48, les Courbes Limites de Formage calculées sans prise en compte de l'endommagement semblent surestimer la formabilité du matériau (figure 2-4).

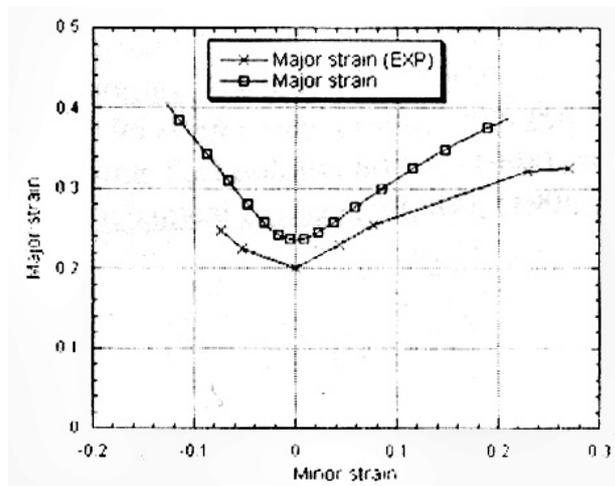


FIG. 2-4: Comparaison théorique et expérimentale de la prédiction de formabilité dans le cas d'un acier mi-dur [Knockaert 00]

Ce résultat est confirmé par les travaux de Brunet et al. [Brunet 96] bien que la

prise en compte de l'endommagement diminue fortement la limite de formabilité (figure 2-5). Toutefois dans le cas d'un acier doux (figure 2-6), la comparaison entre les Courbes Limites de Formage expérimentales et théoriques avec et sans endommagement tend à prouver l'efficacité du critère de Hora couplé à la surface de charge proposée par Hill en 1948 (ce modèle est référencé sous le nom de Hill48) [Brunet 97a].

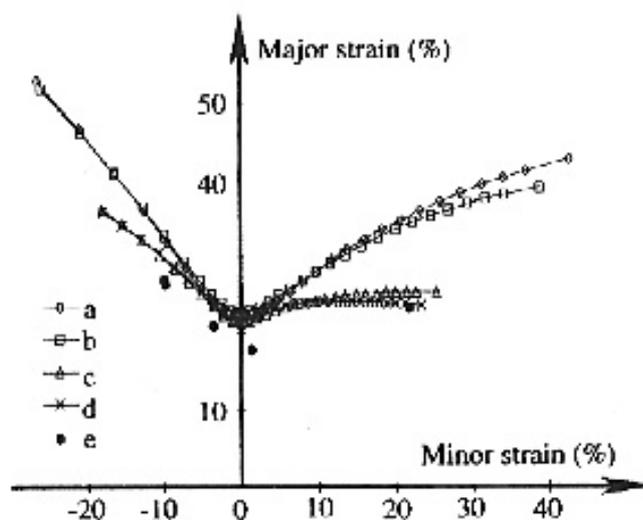


FIG. 2-5: Comparaison de Courbes Limites de Formage théoriques et expérimentales pour un aluminium [Brunet 96] (a : Hill48 sans endommagement ; b : Barlat89 sans endommagement ; c : Hill48 avec endommagement ; d : Barlat89 avec endommagement ; e : expérimental).

L'utilisation du critère de Hora a également été appliqué dans le cadre d'une étude analytique d'un procédé d'hydroformage de tubes [Thibaud 01].

2.2.2 L'analyse en bifurcation

Cette modélisation suppose que la striction localisée apparaît lorsqu'une bande, limitée par deux surfaces singulières, se forme. Ces surfaces peuvent se déplacer dans le solide, on parle alors d'ondes.

Les premiers travaux concernant les ondes d'accélération (ondes pour lesquelles certaines dérivées d'ordre 2 sont discontinues à travers la surface singulière) sont dues à

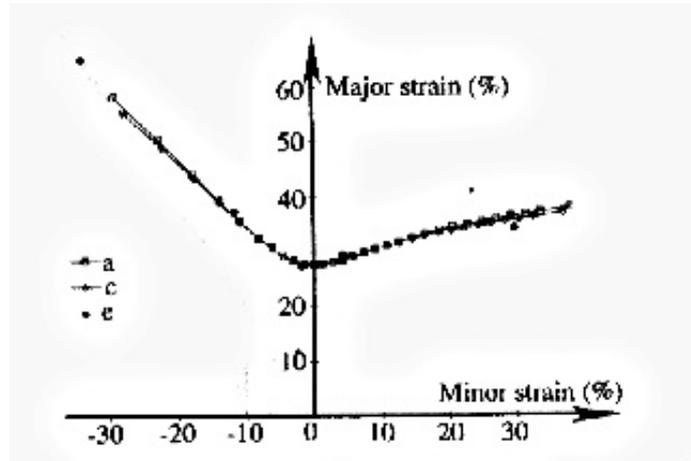


FIG. 2-6: Comparaison de Courbes Limites de Formage théoriques et expérimentales dans le cas d'un acier [Brunet 96] (a : Hill48 sans endommagement ; c : Hill48 avec endommagement ; e : expérimental).

Hadamard [Hadamard 03] dans le cas d'un comportement élastique. Par la suite [Hill 62] et [Rice 76] étendirent cette approche aux solides élastoplastiques.

Sur cette base, Stören et Rice [Stören 75] proposèrent alors une analyse prenant en compte l'influence des grandes rotations sur la perte d'unicité. La striction localisée est alors considérée comme un problème de bifurcation du mode de déformation homogène. Afin que les modes de déformation puissent être associés au phénomène de striction localisée, il faut rajouter un plan de singularité, appelé plan de bifurcation, à travers lequel le champ des vitesses est discontinu. Il a alors été montré par Stören et Rice [Stören 75] puis Hutchinson et al. [Hutchinson 78a] que les résultats obtenus semblent meilleurs en utilisant la théorie de la déformation plutôt que la théorie de l'écoulement. Cependant, dans le domaine du rétreint, la prédiction de formabilité utilisant le modèle de Stören et Rice (ou modèle-SR) paraît irréaliste [Dudzinski 90]. La validité dans le cas bi-dimensionnel de l'analyse de bifurcation pour la recherche de striction localisée dans le domaine de l'expansion α , quant à elle, été discutée dans [Dudzinski 90].

Si la plupart des travaux utilisant le modèle-SR sont utilisés pour la construction de Courbes Limites de Formage, Tvergaard [Tvergaard 90] a proposé l'application de

l'analyse de bifurcation pour des tubes élastoplastiques (minces ou épais) sous pression interne. Il y est montré que, même lorsque le paramètre de contrôle est le volume interne, il peut y avoir apparition d'un mode axisymétrique critique. Ce mode peut précéder les modes plans non-axisymétriques suivant le rapport entre la longueur du tube et le rayon du tube. Cette analyse a par la suite été reprise et couplée à une loi de comportement avec gradient de plasticité [Benallal 95], [Tvergaard 90]. La considération d'une telle loi semble être un bon compromis entre une loi bidimensionnelle trop imprécise et une loi tridimensionnelle trop coûteuse en temps de calcul [Mikkelsen 99].

Dans [Xu 98b], une comparaison de l'analyse en bifurcation appliquée à une loi de comportement de Hill93 avec les résultats expérimentaux de Graf et Hosford [Graf 94] montre que la forme de la Courbe Limite de Formage théorique, dans le domaine de l'expansion, diffère de la forme expérimentale, même si la courbe obtenue approche les points expérimentaux. Cette différence entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par l'analyse de bifurcation est d'ailleurs soulignée dans [Ito 01]. Traditionnellement, la différence observée est attribuée à une mauvaise modélisation des propriétés matérielles, à l'inefficacité des mesures ou à des conditions expérimentales incomplètes. Ito et al. [Ito 01] ont quant à eux émis l'hypothèse qu'une partie de cette différence s'explique par l'oubli de certains modes de déformation. En effet, le modèle-SR considère un état de contrainte plane avant l'apparition de striction localisée. Or comme cela a été montré dans [Runesson 91], l'hypothèse de contraintes planes influence les résultats de l'analyse en bifurcation. Tvergaard [Tvergaard 99] souligne également le fait que la striction localisée est un problème tridimensionnel. Ainsi Ito et al. [Ito 01] ont étudié la prédiction de striction localisée via une analyse de bifurcation tridimensionnelle.

Notation 6 *On note Γ la surface singulière et on note \vec{n} le vecteur unité normal à cette surface (figure 2-7)*

Notation 7 *Soit X une variable, le saut de cette variable à travers la surface Γ est noté $[X]$.*

Notation 8 Soit \vec{m} le vecteur unité parallèle au champ de vitesse discontinu (figure 2-7) et soit λ un scalaire tel que :

$$[v] = \lambda \vec{m}$$

Le vecteur \vec{m} définit les modes de déformations. Il peut s'exprimer en fonction de 3 modes fondamentaux (figure 2-8).

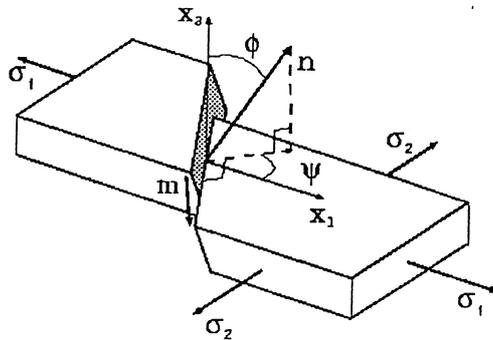


FIG. 2-7: Définition du plan de bifurcation et du mode de bifurcation [Ito 01]

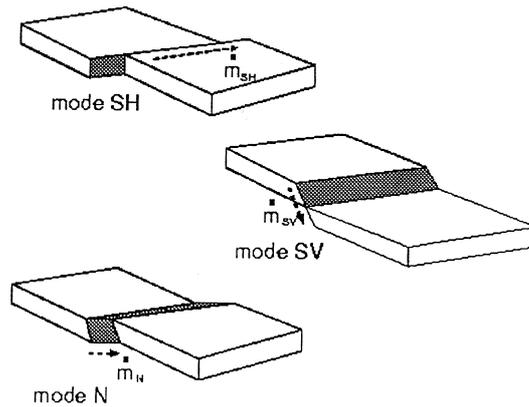


FIG. 2-8: Définition des 3 modes fondamentaux de bifurcation [Ito 01]

En utilisant la fonctionnelle d'unicité de Hill [Hill 58], Ito et al. [Ito 01] montrent qu'il y a apparition de striction localisée lorsque :

$$\min (\vec{m} \cdot (\vec{n} \cdot A^L \cdot \vec{n}) \vec{m}) = 0 \quad (2.27)$$

où A^L est le tenseur reliant la vitesse du tenseur de contrainte nominale au tenseur du gradient des vitesses pour le solide linéaire de comparaison.

L'analyse effectuée par Ito et al. [Ito 01] a alors permis de relier les différents modes de bifurcation aux directions de chargement $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Le mode obtenu est différent suivant le signe de α . De plus la prise en compte de nouveaux modes de bifurcation modifie la prédiction de striction localisée par rapport au modèle de Stören et Rice. En effet, une comparaison de Courbes Limites de Formage d'après les approches de Stören et Rice et de Ito et al. montre que l'approche tri-dimensionnelle prédit des déformations limites plus importantes. Par contre, la décroissance de la Courbe Limite de Formage dans le domaine de l'expansion ($\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 0$) pour un exposant d'écroutissage de la loi de Hollomon $n = 0.24$ (donc $n < 0.3$) semble en contradiction avec certaines observations expérimentales ([Jalinier 81]). Ito et al. considèrent que le critère de Stören et Rice constitue la limite inférieure tandis que le critère 3D constitue la limite supérieure de l'apparition de striction localisée.

2.2.3 La méthode d'introduction d'un défaut

Cette méthode se rapproche de l'analyse linéaire discutée dans la section suivante puisqu'il s'agit d'observer l'évolution d'un défaut introduit volontairement. Dans le cas de la recherche de striction localisée, on considère un amincissement de la tôle. Si au cours de la déformation cet amincissement s'accroît de manière considérable, alors on considère qu'il y a apparition de striction localisée.

Hutchinson et al. [Hutchinson 78c] ont utilisé cette méthode afin de montrer que

l'hypothèse de contraintes planes n'est valable que dans le cas de variation d'épaisseur de grande longueur d'onde.

Sous l'hypothèse de contraintes planes, la méthode d'introduction d'un défaut a été développée dans le domaine de l'expansion par Marciniak et Kuczynski [Marciniak 67] puis étendue par Hutchinson et Neale [Hutchinson 78b].

Dans cette partie, on rappelle la base des travaux de Hutchinson et Neale [Hutchinson 78b]; le modèle MK est alors un cas particulier de ces travaux. On appelle modèle MK modifié, le modèle proposé par Hutchinson et Neale [Hutchinson 78b].

Marciniak et Kuczynski [Marciniak 67] ont proposé l'introduction d'une imperfection initiale sous la forme d'une sous-épaisseur. Cette imperfection est considérée le long d'une bande. Ainsi l'élément considéré est composé de deux zones; l'une a pour épaisseur celle initiale de l'élément; la deuxième zone a une épaisseur inférieure. Marciniak et Kuczynski [Marciniak 67] étudient alors l'évolution de la bande d'imperfection dans le cas d'un chargement proportionnel appliqué dans la partie homogène de la pièce.

L'équilibre des forces garantit que les déformations vont se développer plus rapidement à l'intérieur de la bande, jusqu'à ce que l'état de déformations planes soit atteint dans la bande [Sowerby 71]. Il y a alors apparition de striction localisée.

Le modèle M-K original considère que la bande d'imperfection est normale à la direction de la contrainte principale maximale. Hutchinson et al. ([Hutchinson 78a], [Hutchinson 78b]) ont étendu cette analyse au cas d'une bande d'imperfection orientée par un angle θ déterminé par rapport aux directions principales des contraintes (voir figure 2-9). Ils ont en effet montré qu'à chaque chemin de déformation dans le domaine du rétreint (partie gauche des Courbes Limites de Formage $\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < 0$) correspond un angle θ fournissant la déformation critique minimale. Le modèle de Hutchinson et Neale permet alors de construire entièrement les Courbes Limites de Formage contrairement au modèle MK qui se limitait au domaine de l'expansion ($\rho > 0$).

Notation 9 Soient \vec{n} et \vec{t} les directions normale et tangentielle à la bande d'imperfection.

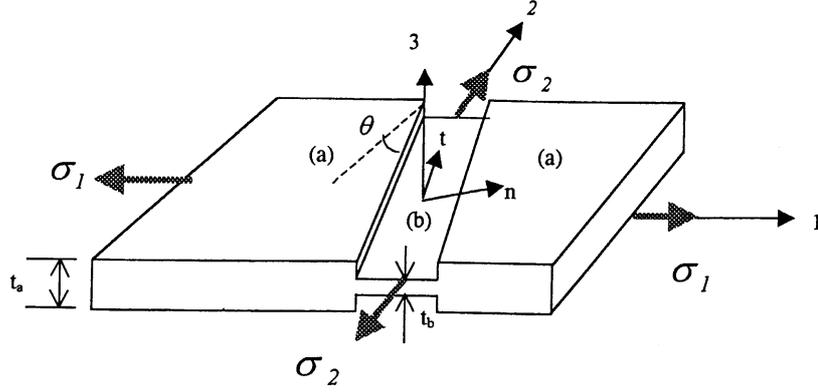


FIG. 2-9: Tôle mince présentant un défaut géométrique initial sous la forme d'une sous-épaisseur orientée par un angle θ (d'après [Cao 00])

Notation 10 Soit X une grandeur mécanique, on note X^a cette grandeur si elle est relative à la partie "saine" de l'élément et on note X^b si la grandeur est considérée dans la zone de sous-épaisseur.

Notation 11 Soit f_0 l'imperfection initiale définie par $f_0 = \frac{h_0^b}{h_0^a}$ où h_0^a et h_0^b sont respectivement les épaisseurs initiales de la zone "saine" et de la zone perturbée.

Hypothèse 12 Les grandeurs mécaniques sont supposées uniformes dans l'épaisseur.

L'équilibre sur la frontière entre la zone non perturbée et la zone perturbée s'exprime par :

$$h^a \sigma_{nn}^a = h^b \sigma_{nn}^b \quad (2.28a)$$

$$h^a \sigma_{nt}^a = h^b \sigma_{nt}^b \quad (2.28b)$$

De plus la compatibilité des déformations des deux zones implique :

$$D_{tt}^a = D_{tt}^b \quad (2.29)$$

Au cours du procédé de déformation, l'angle θ entre la bande d'hétérogénéité et une

direction principale des contraintes va évoluer. On trouve dans la littérature deux moyens de recalculer l'angle en cours de procédé. Soit on incrémente l'angle θ en fonction des incréments de déformation plastique de la manière suivante [Cao 00], [Boudeau 95] :

$$\tan(\theta + d\theta) = \tan(\theta) \frac{1 + d\varepsilon_1^a}{1 + d\varepsilon_2^a} \quad (2.30)$$

Soit on redéfinit l'angle en fonction de la déformation totale [Fromentin 98], [Dudzinski 90], [Kuroda 00], [Mesrar 98b] :

$$\tan(\theta) = \exp(\varepsilon_1^a - \varepsilon_2^a) \tan(\theta_0) \quad (2.31)$$

En utilisant les relations de comportement et les équations 2.28, 2.29, 2.30 (ou 2.31), en se fixant la valeur du taux de déformation dans une direction principale et en se donnant le rapport de déformation $\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, il est alors possible de calculer les contraintes et les déformations dans les deux zones. On trouvera des algorithmes de calcul dans [Boudeau 95], [Fromentin 98], [Xu 98a], [Kuroda 00], ...

Il convient alors de déterminer la condition d'apparition de striction. De manière générale, il y a apparition de striction lorsque $f > seuil$ où f peut être une fonction des épaisseurs dans les deux zones, un rapport des vitesses de déformation...

Dans [Marciniak 67], le paramètre de défaut était choisi tel que $f = \frac{h^b}{h^a}$ et le seuil tel que $f > seuil$ est une valeur arbitraire.

Dans [Barata Da Rocha 84a], la fonction f dépend de l'incrément de déformation effective dans la zone perturbée et dans la zone initiale : $f = \frac{\Delta\varepsilon_e^b}{\Delta\varepsilon_e^a}$. Le seuil est quant à lui choisi égal à 10.

Une méthode analogue est utilisée dans [Fromentin 98] : $f = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^b}{\Delta\bar{\varepsilon}^a} > 50$ est le critère de détermination de la déformation critique.

Dans [Xu 98a], $f = \frac{\Delta\varepsilon_1^a}{\Delta\varepsilon_1^b} < 0.15$

Dans [Narasimhan 91], le critère d'apparition de striction est choisi tel que $f = \frac{\varepsilon_1^b}{\varepsilon_1^a} =$

10.

Dans [Cao 00], la localisation des déformations apparaît lorsque $\max(f_{nn}, f_{nt}) > 10$ avec $f_{nn} = \frac{d\varepsilon_{nn}^b}{d\varepsilon_{nn}^a}$ et $f_{nt} = \frac{d\varepsilon_{nt}^b}{d\varepsilon_{nt}^a}$

Enfin, pour finir, bien que la liste des critères donnée ici soit non-exhaustive, dans [Dudzinski 90], le critère de localisation est déterminé par $\frac{\dot{\varepsilon}^b}{\dot{\varepsilon}^a} \rightarrow +\infty$. Ce critère fait suite à la condition de localisation L_∞ formulée par [Molinari 85].

Ainsi il semblerait qu'il existe autant de manière de déterminer la déformation critique qu'il existe de travaux sur le modèle MK et sur les modèles dérivés.

Le modèle MK (ou sa version modifiée) a été largement utilisé pour étudier la formabilité dans le cas d'une surface de charge de type von Mises (isotrope) ou de type Hill48 (orthotrope). Or, il a été montré dans [Sowerby 71] que dans le cas d'une loi anisotrope de Hill48, la formabilité était sous-estimée principalement dans le cas de matériau type aluminium. Les modèles MK ont alors été couplés à de nombreux modèles de plasticité : Fromentin [Fromentin 98] a appliqué ce modèle à la loi de Ferron et al. [Ferron 94]; Cao et al [Cao 00] ont réalisé des prédictions de formabilité pour la loi de Karafillis&Boyce93; Kuroda et Tvergaard [Kuroda 00] ont construit des Courbes Limites de Formage pour les lois de Hill48, Gotoh77, Barlat&Lian89 et Hill90; ...

Il est intéressant de noter que dans le cas d'un matériau anisotrope, les déformations critiques calculées dans le domaine de l'expansion sont sensibles aux variations de l'angle d'imperfection initial θ_0 [Barata Da Rocha 84a], [Kuroda 00]. Notamment, lorsque les axes d'orthotropie correspondent aux axes du repère cartésien de référence, Kuroda et Tvergaard [Kuroda 00] montrent que l'angle initial prédit dans le cas des lois de plasticité de Gotoh77 et de Hill48 passe de $\theta_0 = 0^\circ$ à $\theta_0 = 90^\circ$ lorsque le chemin de déformation s'approche de la déformation équibiaxée ($\rho = 1$). Toutefois, pour les lois de Hill90 et Barlat&Lian89, la bande d'imperfection reste normale à la direction principale de la contrainte maximale. Mais, lorsque les axes d'orthotropie ne coïncident plus avec le système de coordonnées cartésien de référence alors l'hypothèse initiale de normalité

entre la bande d'imperfection et la direction de la contrainte principale maximale n'a plus de sens quelque soit la loi de plasticité considérée (parmi les lois de Hill48, Gotoh77, Barlat&Lian89, Hill90).

Le modèle MK initial continue cependant à être appliqué à de nouvelles lois de comportement pour déterminer l'influence des paramètres matériaux à partir de Courbes Limites de Formage [Xu 98a], [Banabic 01]. Ces études ont permis de montrer l'influence de la forme de la surface de charge dans le cas d'une loi de Hill93 sur la déformation critique. Ainsi une augmentation du rapport entre la contrainte limite uniaxiale et la contrainte limite biaxiale permet d'augmenter la formabilité du matériau [Banabic 01] dans le domaine de l'expansion. L'influence des autres paramètres de la loi de Hill93 est montrée dans [Xu 98a].

Si l'utilisation du modèle MK continue de faire l'objet de travaux sur l'influence des surfaces de charge, l'imperfection initiale f_0 est un paramètre qui est peu discuté bien que son influence ait été mise en évidence dans de nombreux travaux [Boudeau 95], [Fromentin 98], Par exemple, [Tvergaard 80] a déjà montré qu'une analyse en bifurcation ($f_0 = \frac{h_0^b}{h_0^a} = 1$) ne donne pas de résultats satisfaisants dans le cas de l'expansion. De nombreux travaux ont tenté de relier ce défaut à l'épaisseur initiale, à la taille des grains,... Dans la pratique, il semblerait que face à la difficulté rencontrée pour évaluer cette quantité, il soit courant d'ajuster ce paramètre afin que la limite de formage prédite par la méthode M-K corresponde aux données expérimentales sous l'hypothèse de déformations planes [Xu 98b].

2.2.4 La méthode de perturbation

L'apparition de striction peut être considérée comme une instabilité du flux de matière [Dudzinski 90]. La technique, choisie ici pour analyser la stabilité de l'équilibre considéré, consiste à perturber le système puis à observer l'évolution de cette perturbation. On étudie alors la stabilité asymptotique du système. Lorsque la perturbation croît de manière suffisamment importante, l'équilibre est instable. La notion de croissance "suff-

isamment importante” se traduit de manière analytique par l’introduction d’une variable appelée seuil d’instabilité. Ce seuil d’instabilité représente le taux de croissance du mode d’instabilité le plus rapide [Dudzinski 91]. Dans le cas où ce seuil est nul, on parle d’**instabilité absolue**.

Clifton [Clifton 78] et Bai [Bai 82] ont utilisé la technique des perturbations linéarisées afin de déterminer les conditions critiques de localisation en cisaillement. Bai [Bai 82] a montré qu’il existe deux modes d’instabilité du comportement thermoplastique en cisaillement simple : l’instabilité thermique liée à un échauffement adiabatique et l’instabilité liée à un écrouissage négatif isotherme. Cette approche a été étendue à l’étude d’instabilité thermoviscoplastique en cisaillement simple [Molinari 85]. Dans ce cadre, les effets stabilisants de la conduction thermique et des forces d’inertie pour une loi de comportement particulière sont étudiés. Et surtout, la validité de l’analyse linéarisée de la stabilité est discutée.

En effet, si une telle analyse fournit des indications sur la croissance ou la décroissance d’une perturbation, elle n’implique pas de conclusion générale quant à la localisation des déformations. Cependant, lorsque l’évolution du taux de croissance de la perturbation est plus importante que celle du taux de croissance de la solution homogène, il est montré que l’analyse linéarisée de la stabilité peut être utilisée pour définir un critère de localisation des déformations. Fressengeas et al. [Fressengeas 87] proposent alors d’utiliser une théorie de perturbation relative plutôt que la théorie de perturbation classique. Il s’agit alors d’observer l’évolution du rapport entre la perturbation d’une grandeur et la valeur de cette grandeur. Ainsi, la solution homogène à perturber devient constante ce qui n’était pas le cas lors de l’analyse classique. On retrouve alors la différence entre le critère de localisation obtenu dans [Molinari 83] et le critère de stabilité.

La méthode de perturbation relative linéarisée a été utilisée pour prédire l’apparition de striction localisée en emboutissage d’après la construction de Courbes Limites de Formage [Dudzinski 91], [Dudzinski 90] dans le cas d’un matériau viscoplastique.

L’un des points importants de la technique de perturbation linéarisée est l’influence du

seuil d'instabilité sur les Courbes Limites de Formage. En effet, le mode de déformation (c'est à dire l'orientation de la bande de striction prédite) est dépendant de la valeur du seuil [Dudzinski 91]. De plus, on observe des courbes de formabilité très différentes dans le domaine de l'expansion suivant la valeur du seuil d'instabilité [Boudeau 95].

Malgré cet inconvénient majeur, la technique de perturbation linéarisée (appelée également analyse linéaire de stabilité) a été introduite pour la prédiction de striction localisée en post-traitement de résultats de simulation numérique de procédés d'emboutissage [Boudeau 95] et d'hydroformage de tubes [Boudeau 01b]. Les résultats obtenus tendent à conforter l'efficacité de cette analyse.

On peut noter que cette technique a également été appliquée à des lois de comportement microscopiques [Boudeau 98], [Tóth 96]. L'implantation de tels critères pour la prédiction de striction localisée lors d'un procédé complexe de mise en forme nécessite l'utilisation d'un code de simulation considérant la modélisation microscopique du matériau. Les temps de calcul se trouvent alors augmentés de manière considérable.

2.2.5 Discussion

Initialement, toutes les modélisations présentées ont des défauts :

- les critères de force maximum (à l'exception du critère de Hora) ne détectent que la striction diffuse et sont donc d'intérêt moindre pour la prédiction de striction localisée ;
- les analyses en bifurcation ne semblent fournir qu'une plage dans laquelle la striction localisée peut apparaître ;
- les modèles avec imperfection initiale dépendent de cette dernière ;
- l'analyse linéaire de stabilité dépend d'un seuil.

On constate néanmoins que ces critères couplent une recherche de singularité avec une condition de localisation ;

- le critère de Hora est un critère de striction diffuse couplé à la condition de localisation formulée par Hill ;
- le modèle M-K (et les modèles hétérogènes) est une méthode d'introduction locale, c'est à dire le long d'un plan, d'un défaut ;
- le modèle S-R est un modèle qui associe l'analyse de bifurcation de Hill avec un plan local de singularité ;
- l'analyse linéaire de stabilité étudie la stabilité du flux de matière à travers un plan de localisation.

Les études de Hora, Brunet et Ito montrent bien l'importance de la condition de localisation. Devant autant de modélisations diverses et variées, il est naturel de se demander s'il existe une méthode rigoureusement correcte. A priori, seule la méthode qui permet d'ajuster au mieux les résultats expérimentaux est correcte.

Dans la suite de ce chapitre, l'analyse linéaire de stabilité a été choisie afin d'étudier l'apparition de striction localisée. En effet, cette analyse qui a déjà fait l'objet d'études au LMARC [Boudeau 95] possède l'unique inconvénient d'être dépendante du seuil d'instabilité. On proposera par la suite une méthode originale de détermination de ce seuil de manière rigoureuse.

De nombreux efforts ont été effectués afin d'augmenter la précision des Courbes Limites de Formage calculées à l'aide des modélisations présentées dans ce chapitre. La plupart des travaux récents ont notamment porté sur la prise en compte de nouvelles lois de comportement. Ces travaux sont bien évidemment dus à l'intérêt croissant de l'industrie automobile pour l'utilisation de matériaux tels que l'aluminium ou les aciers à haute limite d'élasticité qui présentent des caractéristiques différentes des aciers traditionnels.

2.3 Analyse linéaire de stabilité

Les travaux récents, traitant de la prédiction de striction localisée par une analyse linéaire de stabilité, se sont attachés à étudier des équilibres avec un état de contraintes

planes. On a rappelé précédemment que, dans le cas d'une analyse en bifurcation, cette hypothèse influence le comportement du critère de prédiction de striction. On peut justement supposer que ce fait reste vrai dans le cas d'une analyse de stabilité. De plus, en vue de l'utilisation de ce critère lors de simulations de procédés d'emboutissage de tôles et d'hydroformage de tubes, on va étendre les précédents résultats à des états de contraintes et de déformations tridimensionnels, c'est-à-dire quelconques. Au-delà de l'augmentation de la dimension du système d'équilibre à traiter, la prise en compte d'états tridimensionnels autorise à redéfinir le plan d'instabilité. En effet, comme cela a été précisé, Ito et al. [Ito 01] ont montré l'influence de nouveaux modes de bifurcation sur la prédiction de striction. Le plan d'instabilité sera donc par la suite défini dans un espace tridimensionnel au lieu de l'espace bidimensionnel usuel. Cela se traduit par la détermination de la normal au plan d'instabilité en fonction de deux angles au lieu d'un seul.

Dans un premier temps, on s'attache à déterminer les équations définissant l'équilibre que l'on perturbera dans la deuxième partie de cette section. La troisième partie présente l'un des points les plus importants pour la détermination du critère de striction localisée puisqu'elle indique comment on a choisi de définir le seuil d'instabilité de manière automatique. Ceci autorise la construction de Courbes Limites de Formage théoriques d'après la seule connaissance des paramètres de comportement matériel. Ces courbes sont utilisées dans la cinquième partie afin de montrer l'influence de la modélisation tridimensionnelle et de la modélisation du comportement matériel sur la prédiction de striction localisée.

Toutes ces études intéressent la caractérisation de la déformation critique d'un matériau soumis à des efforts de traction. Mais, à notre connaissance il n'existe aucun résultat sur l'apparition de striction localisée lors d'un procédé de flexion pure et plus particulièrement sur les paramètres influents au cours d'un tel procédé. Cette étude conclura alors cette partie sur la prédiction de striction localisée par analyse linéaire de stabilité.

2.3.1 Définition de l'équilibre mécanique

Afin de pouvoir prédire l'apparition de striction localisée au cours des procédés d'emboutissage de tôles et d'hydroformage de flans, on va donc étendre les résultats existants sur l'analyse linéaire de stabilité par la technique de perturbation à des états de contraintes et de déformations quelconques. L'expression matricielle des tenseurs des vitesses de déformation $\underline{\underline{D}}$ et des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est alors la suivante

Tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Remarque 13 *On a souligné dans la présentation des modélisations existantes l'importance de la théorie de comportement choisie. La théorie utilisée ici se rapproche de la théorie de l'écoulement plastique.*

Hypothèse 14 *On considère ces grandeurs constantes dans l'épaisseur le long d'un plan Γ défini par sa normale \vec{n} et de longueur l (figure 2-10), c'est-à-dire que l'on néglige les effets dus à la flexion.*

Hypothèse 15 *Les déformations élastiques sont négligées.*

Hypothèse 16 *Soit p la pression sur le plan de la plaque. En tout point de la surface soumise à ce chargement, on a $\sigma_{33} = -p$. On suppose que cette condition reste vérifiée en tout point de la plaque.*

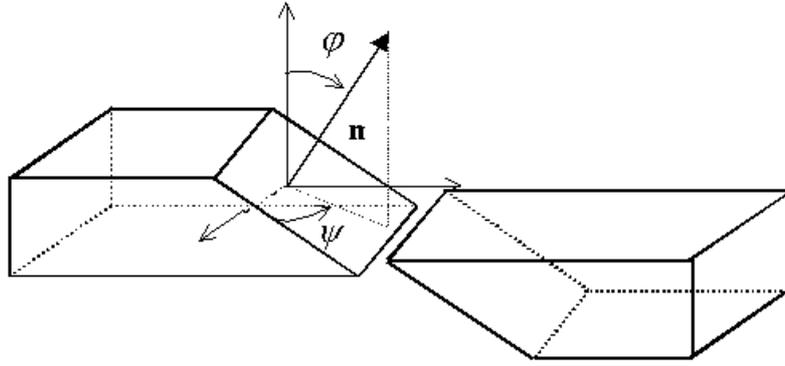


FIG. 2-10: description du plan de striction (ou plan d'instabilité)

Les équations gouvernant l'équilibre local d'un point matériel sont données dans les sous-sections suivantes.

Loi d'érouissage

L'érouissage d'un matériau entraîne une résistance de plus en plus importante à l'écoulement plastique. On simplifie le problème en considérant un matériau rigide plastique (i.e. on ne considère pas les déformations élastiques). La loi d'érouissage choisie est une loi de Swift avec sensibilité à la vitesse de déformation :

$$\sigma_y = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^{\cdot m} \quad (2.34)$$

Il est évident que d'autres lois d'érouissage peuvent être choisies. Mais la dépendance à la vitesse de déformation équivalente est nécessaire afin de développer l'analyse linéaire de stabilité.

La théorie de l'écoulement : définitions de surfaces de charges

Soit ϕ la surface de charge définie par :

$$\phi(\underline{\sigma}, \sigma_y) = \bar{\sigma}(\underline{\sigma}) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (2.35)$$

2.3. Analyse linéaire de stabilité

La loi de normalité permet de relier le tenseur des taux de déformation au tenseur des contraintes par la relation :

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.36)$$

Le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est obtenu en utilisant la condition de consistance. Suivant le critère de charge utilisé, il est possible ou non de déterminer le multiplicateur plastique de manière analytique.

Traditionnellement en mise en forme par déformations plastiques des tôles, le comportement du matériau est supposé orthotrope et la surface de charge utilisée est une surface de type quadratique due à Hill en 1948 (ce modèle est référencé sous le nom de Hill48) :

$$2\phi^2 = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + N\sigma_{12}^2 - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p) \quad (2.37)$$

Cette expression de la fonction de charge permet d'identifier le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, et l'équation (2.36) devient :

$$\underline{\underline{D}}^p = \frac{3\bar{\sigma}}{2\bar{\varepsilon}} \mathbb{H} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.38)$$

où \mathbb{H} est le tenseur orthotrope de Hill. On exprime le tenseur des taux de déformations

et des contraintes sous forme vectorielle selon la convention de Voigt, on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} D_{11}^p \\ D_{22}^p \\ D_{33}^p \\ D_{12}^p \\ D_{23}^p \\ D_{31}^p \end{pmatrix} = \frac{3\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{2\overline{\underline{\underline{\sigma}}}} \begin{pmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Les composantes du tenseur d'orthotropie sont données en fonction des coefficients de Lankford par :

$$F = \frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)} \quad (2.40)$$

$$G = 1 - H \quad (2.41)$$

$$H = \frac{r_0}{1+r_0} \quad (2.42)$$

$$L = M = N = \frac{(r_0 + r_{90})(2r_{45} + 1)}{2r_{90}(1+r_0)} \quad (2.43)$$

La contrainte équivalente s'exprime dans le cas de la loi de Hill48 sous la forme :

$$\overline{\underline{\underline{\sigma}}}^2 = \mathbb{H} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.44)$$

Pour certains matériaux, la surface de charge n'est plus convexe, on ne peut alors plus utiliser la loi de Hill48 qui est quadratique. De plus, la structure cristalline influence la forme de la surface de charge, ce qui n'est pas considéré par la modélisation de Hill48. De nouveaux critères quadratiques et/ou non-quadratiques, exprimés sous l'hypothèse de contraintes planes, ont alors été introduits. On peut citer à titre d'exemple :

2.3. Analyse linéaire de stabilité

– Hill93 :

$$2\phi^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} - c \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_0 \sigma_{90}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{90}^2} + \left[(p+q) - \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\sigma_b} \right] \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_0 \sigma_{90}} - 1 \quad (2.45)$$

– Banabic 2000 :

$$\phi = \frac{\left(|m\sigma_1 + n\sigma_2|^{2k} + |p\sigma_1 + q\sigma_2|^{2k} + |r\sigma_1 + s\sigma_2|^{2k} \right)^{\frac{1}{2k}}}{2^{\frac{1}{2k}}} - \bar{\sigma} \quad (2.46)$$

Un autre problème apparaît lorsque l'on souhaite considérer les structures de très faible épaisseur (< 1 mm). Il faut alors prendre en compte les effets d'échelle. Pour cela, on peut par exemple introduire le gradient des déformations dans la loi d'érouissage et par conséquent dans le critère de charge :

$$\tilde{\sigma}_y = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^m + c \nabla \bar{\varepsilon} \quad (2.47)$$

$$\phi(\underline{\sigma}, \tilde{\sigma}_y) = \bar{\sigma}(\underline{\sigma}) - \tilde{\sigma}_y(\bar{\varepsilon}^p, \nabla \bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\underline{\sigma}) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) - c \nabla \bar{\varepsilon} = 0 \quad (2.48)$$

Cette méthode a été utilisée par Mikkelsen pour contourner la dépendance au maillage de la localisation des déformations.

Les équations d'équilibre

Les contraintes sont supposées constantes le long du plan d'instabilité Γ de longueur l (voir l'hypothèse 14 et la figure 2-10). Par conséquent les composantes du tenseur de contraintes doivent vérifier :

$$\text{div}(l\underline{\sigma}) = 0 \quad (2.49)$$

Les équations de compatibilités

Les taux de déformations vérifient les équations de compatibilité suivantes :

$$\text{rot}(\text{rot}(\underline{D})) = 0 \quad (2.50)$$

L'équation d'incompressibilité

Le matériau est supposé rigide plastique, les taux de déformations doivent vérifier l'équation d'incompressibilité suivante :

$$\text{trace}(D) = 0 \quad (2.51)$$

Récapitulatif

Pour un matériau dont le comportement est modélisé par une loi de Hill48, l'équilibre est défini par le système d'équations (2.34, 2.39, 2.44, 2.49, 2.50, 2.51). Ce système est non-linéaire, on le note :

$$A(U) = 0 \quad (2.52)$$

où $U = \left(\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \bar{\sigma} \ D_{11} \ D_{22} \ D_{33} \ D_{12} \ D_{23} \ D_{31} \ \dot{\bar{\epsilon}} \right)^T$ représente l'ensemble des variables locales et $A(.)$ est un opérateur non-linéaire.

2.3.2 Perturbation de l'équilibre

Principe

Ainsi que cela a été précisé précédemment, il existe plusieurs définitions de la stabilité. On se propose ici de rechercher la stabilité asymptotique selon Lyapounov de l'équilibre donné par (2.52).

Pour définir une condition nécessaire de stabilité, on se propose d'introduire un per-

2.3. Analyse linéaire de stabilité

turbation $\delta U = \delta U_0 f(x, t)$ avec δU_0 l'amplitude de la perturbation et $f(x, t)$ une fonction comprenant les parties spatiale et temporelle de la perturbation. La solution perturbée de l'équilibre (2.52) vérifie :

$$A(U_0 + \delta U) = 0 \quad (2.53)$$

Hypothèse 17 *L'amplitude des perturbations est supposée suffisamment petite pour pouvoir négliger les perturbations du second ordre.*

Ainsi le système non-linéaire perturbé (2.53) devient :

$$A(U_0) + M\delta U_0 = 0 \quad (2.54)$$

avec M une matrice qui dépend des variables locales à l'équilibre U_0 mais également des paramètres en espace \vec{n} et en temps η de la perturbation.

En utilisant le fait que U_0 vérifie (2.52), on obtient alors l'équation d'instabilité suivante :

$$M\delta U_0 = 0 \quad (2.55)$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $\delta U_0 \neq 0$ si et seulement si $\det(M) = 0$. Si $\delta U_0 \equiv 0$ cela revient à dire que l'équilibre n'a pas été perturbé.

Définition de la fonction de perturbation

Il convient désormais de définir la fonction d'instabilité $f(x, t)$. Cette fonction est choisie dans l'espace des complexes. Elle est définie par :

$$f(\vec{x}, t) = e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}} \quad (2.56)$$

où $\eta \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}$ et \vec{n} est la normale au plan d'instabilité Γ recherché (figure 2-

11). On définit cette normale à l'aide de deux angles ψ et φ de la manière suivante :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

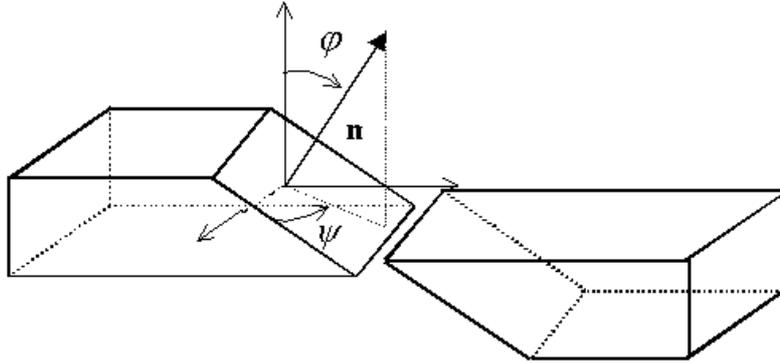


FIG. 2-11: description du plan de striction (ou plan d'instabilité)

Recherche du plan d'instabilité

On utilise la définition de la fonction de perturbation (2.56) pour perturber l'équilibre (2.52). Dans ce cas, la matrice M de l'équation d'instabilité (2.55) est dépendante des angles ψ , φ définissant le plan d'instabilité et du paramètre temporel η . Du fait que l'amplitude de la perturbation doit être non-nulle, on a vu que l'équation (2.55) se ramène à :

$$\det (M (\psi, \varphi, \eta, U_0)) = 0 \quad (2.57)$$

Remarque 18 *Par rapport à l'analyse usuelle en contraintes planes, la prise en compte de tenseurs pleins augmente la dimension de la matrice M dont on cherche la singularité. De plus, par analyse tridimensionnelle, on entend la considération de nouveaux modes d'instabilité. Ceci se traduit par la redéfinition du plan d'instabilité qui se trouve cette fois-ci déterminé par deux angles au lieu d'un seul. On augmente donc le nombre de plans d'instabilité probables.*

2.3. Analyse linéaire de stabilité

On peut montrer que dans le cas où l'équilibre est donné par (2.52), avec des tenseurs de contraintes et de taux de déformations de la forme (2.33), (2.32), l'équation (2.57) peut s'écrire comme un polynôme en η :

$$T(\eta) = \eta^2 (A\eta^2 + B\eta + C) = 0 \quad (2.58)$$

où les coefficients A , B , C dépendent de U_0 , ψ , φ .

Ce polynôme admet au plus deux racines que l'on note :

$$\begin{aligned} \eta^+ &= \max(\eta / A\eta^2 + B\eta + C = 0) \\ \eta^- &= \min(\eta / A\eta^2 + B\eta + C = 0) \end{aligned}$$

Remarque 19 *Il est intéressant de noter que l'on se ramène à nouveau à la résolution d'un polynôme du second ordre en η . Cela était déjà le cas pour l'analyse en contraintes planes (voir [Boudeau 95]). Simplement, l'augmentation de la dimension du problème entraîne une solution double $\eta = 0$ alors que celle-ci était simple dans l'analyse en contraintes planes.*

Remarque 20 *Les coefficients A , B et C dépendent de U_0 , ψ , φ . Par conséquent, pour évaluer le paramètre d'instabilité η , on doit rechercher l'ensemble des plans de striction probables en variant les angles ψ , φ alors que le balayage de l'espace avec un seul angle était effectué lors de l'analyse bidimensionnelle. C'est en ce sens que l'on augmente le nombre de modes d'instabilité.*

La résolution de (2.58) permet d'obtenir les différentes racines η du polynôme T . En utilisant la fonction f définie par (2.56) pour perturber l'équilibre initial, on constate rapidement que :

$$\delta U = \delta U_0 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \infty \text{ lorsque } \operatorname{Re}(\eta) > 0 \quad (2.59)$$

$$\delta U = \delta U_0 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ lorsque } \operatorname{Re}(\eta) < 0 \quad (2.60)$$

L'équilibre (2.52) est asymptotiquement instable et donc instable si $\text{Re}(\eta) > 0$.

Ainsi que cela a été précisé précédemment, ce critère d'instabilité, appelé critère d'instabilité absolue, n'est pas généralement équivalent à un critère de localisation des déformations. En effet, l'utilisation d'un tel critère peut conduire aussi bien à une détection de striction diffuse que localisée. Ainsi le critère généralement utilisé pour prédire le phénomène de striction localisée est le critère d'instabilité effective [Dudzinski 90] :

$$\text{Re}(\eta) > e \tag{2.61}$$

où e est le seuil d'instabilité.

2.3.3 Détermination du seuil et condition de localisation

L'un des problèmes majeurs de l'analyse linéaire de stabilité consiste en la détermination du passage de l'instabilité absolue à l'instabilité effective. En effet, cette méthode semble peu utilisable lors de la simulation numérique d'un procédé de mise en forme sans la connaissance a priori du seuil d'instabilité e . On ne trouve dans la littérature que peu de méthodes permettant de définir ce seuil. Toutefois, ainsi que cela est mentionné dans [Molinari 85] et [Hanus 99], pour que l'analyse linéaire de stabilité soit valide, il faut que la perturbation évolue plus vite que la solution homogène instationnaire. D'un point de vue analytique, comme l'on s'intéresse à la localisation des déformations, le critère d'instabilité va être défini par le rapport entre la vitesse d'évolution de l'instabilité représentée par le paramètre $\dot{\eta}$ et la vitesse de déformation $\dot{\bar{\epsilon}}$. On suppose que la vitesse d'évolution de l'instabilité est reliée à la vitesse de déformation équivalente par :

$$\dot{\eta} = B(t) \dot{\bar{\epsilon}} \tag{2.62}$$

où $B(t)$ est une fonction du temps. La condition nécessaire de striction localisée devient alors :

$$\operatorname{Re}(\eta) > 0 \text{ et } B(t) > 1 \quad (2.63)$$

$$\text{soit encore } \operatorname{Re}(\eta) > 0 \text{ et } \frac{\dot{\eta}}{\dot{\varepsilon}} > 1 \quad (2.64)$$

Nous verrons par la suite que cette condition est utilisée pour déterminer le seuil d'instabilité de manière automatique dans le cas de la construction de Courbes Limites de Formage.

De plus, dans le cas de simulation numérique de procédés de mise en forme par la méthode des éléments finis, cette condition sera utilisée pour définir la stabilité de l'état d'équilibre indépendamment du seuil d'instabilité.

2.4 Applications de l'analyse linéaire de stabilité

Les premiers travaux sur la formabilité des matériaux ont été expérimentaux [Col 00]. Il était alors proposé de déterminer les déformations critiques (avant rupture) par la construction de Courbes Limites de Formage. Si ces courbes sont d'une grande utilité dans le cas d'un processus de déformation impliquant un chemin de déformation constant, il a été montré que les Courbes Limites de Formage dépendent du chemin de déformation [Barata Da Rocha 84b], [Boudeau 95], ...

2.4.1 Construction de Courbes Limites de Formage

On souhaite construire les Courbes Limites de Formage associées à un matériau déterminé par les paramètres de sa loi d'érouissage et par ses coefficients d'anisotropie. Pour cela, on calcule pour différents chemins de déformation, les déformations critiques ε_1^c , ε_2^c . Ces déformations critiques sont définies d'après le paramètre d'instabilité η et le seuil d'instabilité e .

Approximation des grandeurs mécaniques

Pour des raisons de simplifications évidentes, on se place dans les repères principaux des déformations et des contraintes.

Par la suite, étant donné que seule la valeur maximale du seuil nous intéresse, on ne regarde plus que la racine notée précédemment η^+ et on notera η à la place de η^+ .

Connaissant les paramètres de comportement matériel de la loi d'écouissage n , k , m , ε_0 , le chemin de déformation ρ , le taux de déformation effectif $\dot{\varepsilon}$, l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon_1$, les grandeurs représentatives de l'équilibre mécanique local sont calculées à l'aide de l'algorithme présenté dans la figure 2-12. Ainsi pour un chemin de déformation et un incrément de déformation donnés, le paramètre de striction localisé η est évalué.

Détermination du seuil

La figure (2-13) représente l'évolution du paramètre de striction η en fonction de la déformation plastique longitudinale ε_1 pour différents chemins de déformation.

On constate sur cette figure que les courbes $\eta(\varepsilon_1)$ se coupent pour deux chemins de déformation différents. Ainsi, pour $\eta = \eta^*$ fixé, l'allure de la Courbe Limite de Formage $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$ est fonction de la position de η^* par rapport au point d'intersection des deux courbes. On constate également que la valeur du paramètre de striction η reste très proche de l'origine jusqu'à une valeur de déformation critique ε_1^c . Cette déformation critique ε_1^c semble dépendante du chemin de déformation choisi. Pour un chemin de déformation fixé et pour des valeurs de déformations $\varepsilon_1 > \varepsilon_1^c$, on observe alors de forts accroissements du paramètre d'instabilité η . On peut approcher le rapport $\frac{\dot{\eta}}{\dot{\varepsilon}}$ par $\frac{\dot{\eta}}{\dot{\varepsilon}} \simeq \frac{d\eta}{d\varepsilon}$, on estime alors qu'il y a instabilité et donc apparition de striction localisée lorsque :

$$\eta > 0 \quad (2.65)$$

$$\text{et } \frac{d\eta}{d\varepsilon} > 1 \quad (2.66)$$

Données: loi d'écroutissement ($k, n, m, \bar{\varepsilon}_0$)
 coefficients d'anisotropie (r_0, r_{45}, r_{90})
 incrément de déformation $\Delta\varepsilon_1$
 limite de déformation imposée ε_1^{lim}
 données du procédé: pression $P, \rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{D_1}$

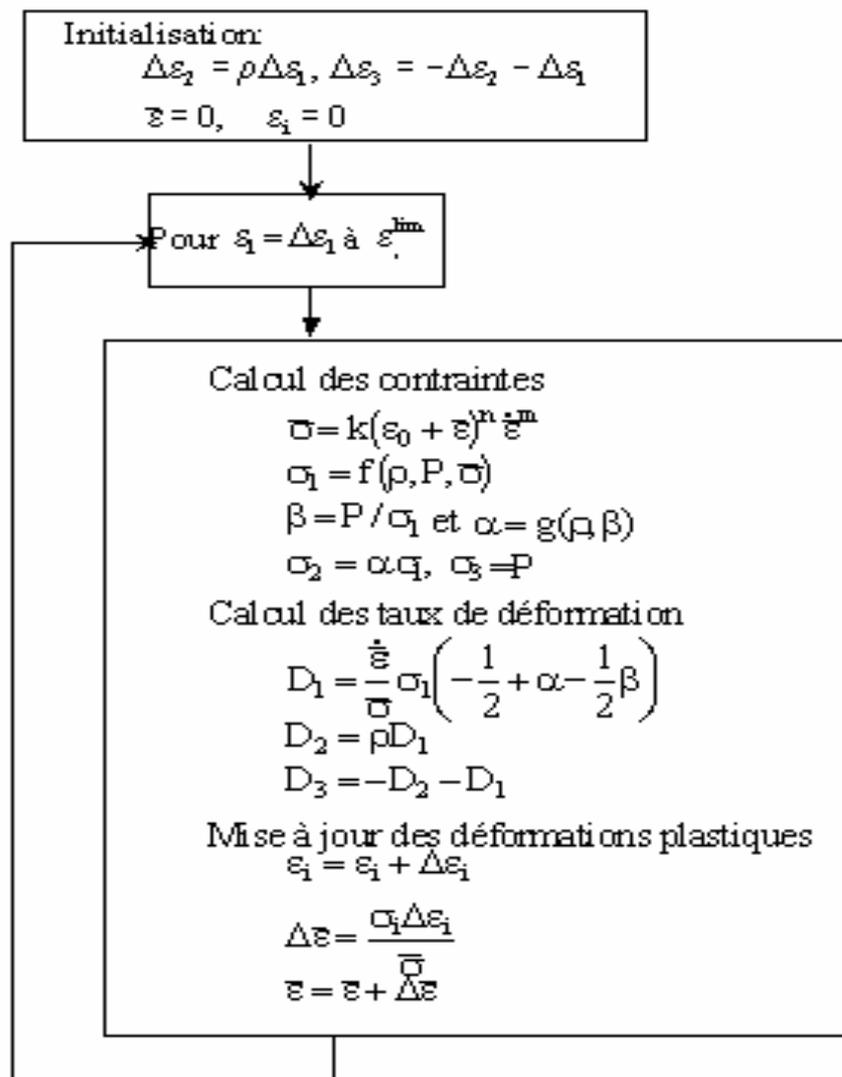


FIG. 2-12: algorithme de calcul des grandeurs mécaniques

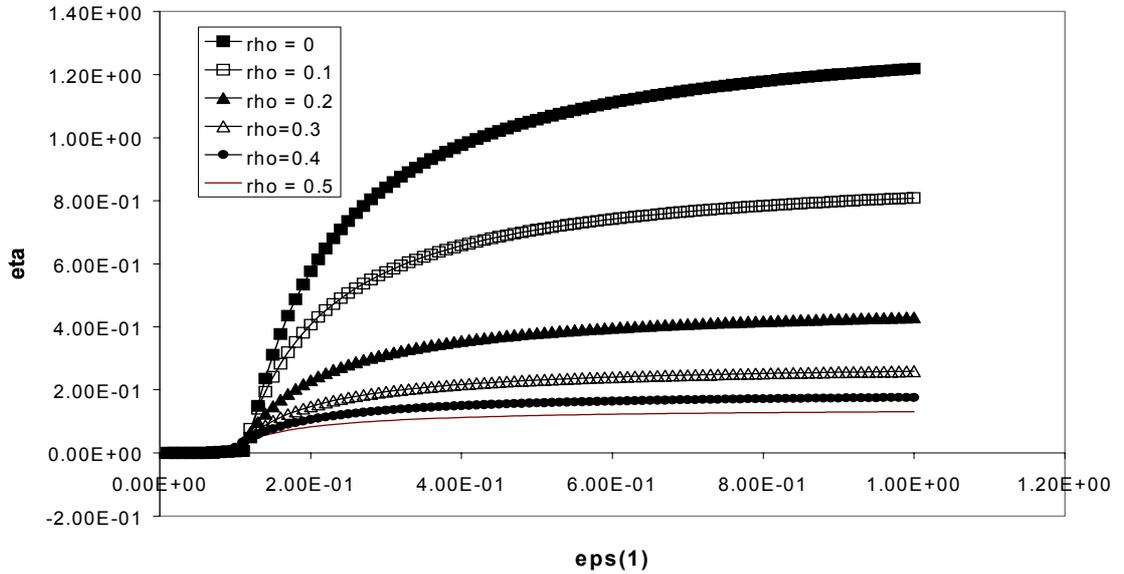


FIG. 2-13: Évolution du paramètre d'instabilité η , en fonction de la déformation longitudinale ε_1 pour différents chemins de déformation

L'équation (2.65) détermine l'instabilité de l'équilibre tandis que l'équation (2.66) assure la localisation de l'instabilité.

On illustre la discussion en se plaçant à $\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0$. Dans ce cas, en utilisant la loi d'incompressibilité, on obtient $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$ (avec $\varepsilon_1 > 0$), on constate alors que les relations 2.65 et 2.66 sont vérifiées pour $\varepsilon_1 \simeq n$. On retrouve ainsi la valeur de la déformation critique en traction uniaxiale [Zhu 98].

Ce critère de striction localisée permet alors de définir la valeur du seuil déterminant l'instabilité effective. On constate, sur la figure 2-14, que l'exposant d'écroutissage n influence le seuil d'instabilité effective et également la formabilité des matériaux. Le comportement obtenu sur la figure 2-14 est en accord avec les résultats obtenus par [Jalinier 81] et reportés dans [Col 00].

En effet, dans le domaine de l'expansion ($\rho > 0$), on observe bien une décroissance (respectivement une croissance) de la courbe de formabilité pour une valeur de n supérieure à 0.33 (respectivement inférieure à 0.33). De ce point de vue, les courbes théoriques con-

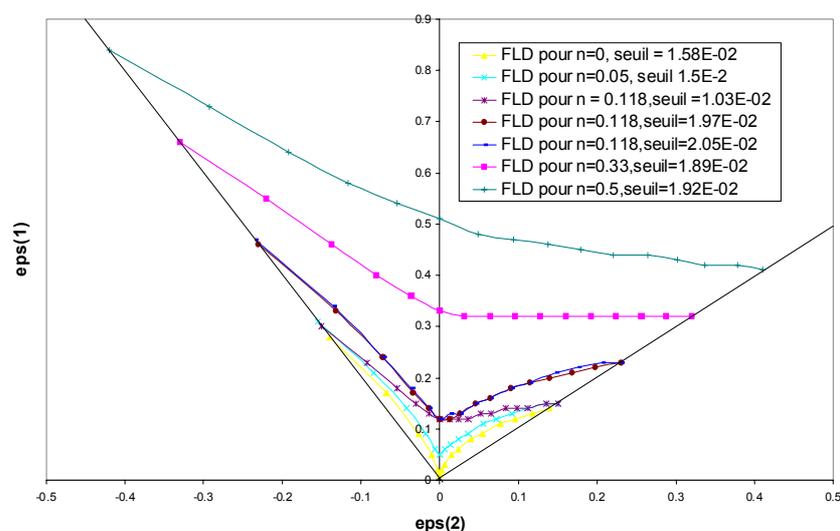


FIG. 2-14: Influence de l'exposant d'écroutissement n sur la prédiction de formabilité

struites à partir de la condition nécessaire de striction composée des inégalités 2.65 et 2.66 semblent en accord avec l'expérience. De plus, le seuil déterminé de manière automatique est différent suivant la valeur du coefficient n mais il reste de l'ordre de 10^{-2} . Cet ordre de grandeur était déjà observé dans le cas bidimensionnel. Enfin, on a souhaité montrer l'influence du seuil sur la prédiction de formabilité. Pour cela, on a varié la valeur du seuil lors de la construction de Courbes Limites de Formage pour un coefficient $n = 0.118$ (figure 2-14). On remarque alors que pour une valeur de seuil fortement inférieure (seuil=1.03E-02) au seuil détecté de manière automatique (seuil=1.97E-02), la forme obtenue dans le domaine de l'expansion ne correspond pas à ce que l'on pourrait obtenir expérimentalement.

Applications des Courbes Limites de Formage

Comparaison des modèles 2D/3D La figure 2-15 représente la construction de

Courbes Limites de Formage avec ou sans prise en compte de l'hypothèse de contraintes planes pour l'analyse linéaire de stabilité. On parle alors de critère de striction localisée

2D et 3D. Afin de comparer ces deux critères, on impose $\sigma_{33} = P = 0$ pour l'état homogène (c'est-à-dire avant perturbation) lors de l'utilisation de l'analyse 3D.

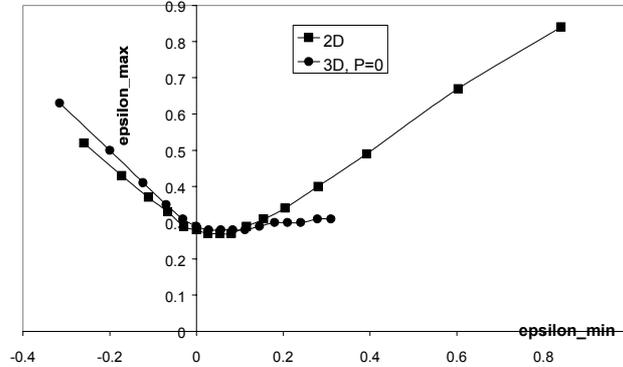


FIG. 2-15: Comparaison entre des Courbes Limites de Formage construites d'après l'analyse linéaire de stabilité sous hypothèse de contraintes planes (2D) ou sans hypothèses sur la forme du tenseur des contraintes (3D) mais avec $\sigma_{33} = 0$.

L'exposant d'écroûissage est choisi égal à 0.29. D'après l'observation effectuée dans la partie précédente, on doit donc s'attendre à avoir une Courbe Limite de Formage aplatie dans le domaine de l'expansion. Or, lorsque l'état de contraintes planes est supposé, on constate dans le domaine de l'expansion (partie droite de la courbe notée 2D sur la figure 2-15) que la courbe Limite de Formage est croissante, tendant vers une déformation critique très importante (d'environ 80%) pour des déformations équi-biaxées. On en déduit bien évidemment que la formabilité est surestimée dans le domaine de l'expansion par le critère 2D de striction localisée. La prise en compte de nouveaux modes de striction par l'analyse 3D diminue alors la formabilité prédite, on obtient alors la tendance espérée dans le domaine de l'expansion avec le critère de striction localisée 3D, à savoir une courbe presque aplatie.

La prise en compte de nouveaux modes de striction alliée avec la perturbation de toutes les composantes des tenseurs de vitesses de déformation et de contraintes améliore donc le modèle initial (c'est-à-dire avec hypothèse de contraintes planes) de prédiction de striction localisée et semble plus en accord avec la réalité.

Influence de la loi de comportement Traditionnellement en mise en forme des matériaux, la loi la plus couramment utilisée pour les matériaux à comportement orthotrope est la loi de Hill48. Cette loi imposait la relation entre la contrainte limite en traction uniaxée et la contrainte limite en traction biaxée en fonction du coefficient de Lankford. Cette relation entraîne que la contrainte limite en traction biaxée est inférieure à la contrainte limite en traction uniaxée pour des matériaux tels que l'aluminium. Or il a été montré expérimentalement que l'inverse se produit [Woodthrope 70]. Il s'avère alors que la loi de Hill48 n'est plus à même de modéliser correctement le comportement du matériau. Ainsi de nouveaux critères de plasticité ont été introduits [Gotoh 77], [Barlat 91], [Hill 93], [Karafillis 93], [Banabic 99],...

Une étude a été réalisée au sein du LMARC sur la prédiction d'instabilité pour un critère de charge de Banabic [Lestriez 00]. Ce critère, basé sur les travaux d'Hosford, permet de différencier les matériaux en fonction de leur nature cristalline (Cubique Faces Centrées ou Cubique Centré). En effet, la nature cristalline est considérée par un paramètre k qui vaut 3 pour les matériaux Cubiques Centrés et 4 pour les matériaux Cubique Faces Centrées. Il a été montré que pour les chemins de déformation proches de -0.5 et 0.5 , la courbe de prédiction de formabilité $\bar{\varepsilon}(\rho)$ pour un aluminium est sous-estimée lorsque le comportement est modélisé par une loi de Hill48 (figure 2-16).

Parmi les critères de charge les plus utilisés pour la modélisation du comportement des aluminiums se trouve le modèle non-quadratique Hill93. Ce critère nécessite l'identification par des tests de traction uniaxée et biaxée de cinq paramètres indépendants. Il a été introduit afin de modéliser le comportement d'un grand nombre de matériaux et notamment les matériaux de type aluminium et les aciers à forte limite d'élasticité. Il est montré dans [Xu 98b] que la prédiction de formabilité par les méthodes de Marciniak&Kuczynski et Stören&Rice dans le cas de la loi de Hill48 est surestimée par rapport à une prédiction couplée à la loi Hill93. L'application, non-validée à l'heure actuelle, de l'analyse linéaire de stabilité à cette loi de comportement est donnée en Annexe B.

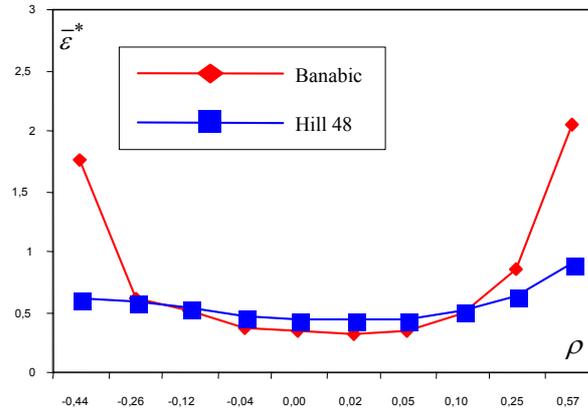


FIG. 2-16: Prédiction de striction localisée pour le critère de Hill48 et le critère de Banabic dans le cas d'un matériau Cubique Faces Centrées

Prise en compte de l'endommagement Il ne s'agit pas ici de rentrer dans les détails des modèles d'endommagement ductile mais de montrer l'influence de la prise en compte de l'un de ces modèles sur la formabilité des matériaux.

Le couplage entre l'endommagement ductile et l'analyse linéaire de stabilité a déjà été appliqué par le passé au modèle d'endommagement proposé par Gelin et Predeleanu [Boudeau 01b]. Traditionnellement, les modèles d'endommagement les plus utilisés en mise en forme sont les modèles de Gurson et de Lemaitre. Des travaux récents dans l'équipe Mise en Forme au LMARC portent sur la décroissance du module d'Young. Le modèle d'endommagement choisi pour ces travaux est par conséquent le modèle de Lemaitre. On se contentera ici de réaliser le couplage entre l'analyse linéaire de stabilité et le modèle d'endommagement ductile de Lemaitre [Lemaitre 85]. Ce nouveau critère permet ainsi de prédire la limite de fracture du matériau lors d'un procédé de mise en forme.

Hypothèse 21 *Pour des raisons de simplicité, on se place sous l'hypothèse des contraintes planes. L'extension au cas tridimensionnel est facilement réalisable moyennant un coût de calcul supplémentaire.*

Hypothèse 22 *Le matériau est supposé orthotrope. Le comportement du matériau est*

modélisé par le critère de Hill48.

Hypothèse 23 *On travaille sous les hypothèses d'endommagement isotrope et d'écroutissage isotrope.*

Le modèle de Lemaitre induit peu de changements dans la définition de l'équilibre mécanique d'après le principe d'équivalence en déformations :

Citation 24 *"Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective" .*

Notation 25 *Soit d la variable d'endommagement, \dot{d} la vitesse d'évolution de l'endommagement et Y la variable d'endommagement associée.*

Dans le cas de l'endommagement isotrope, le tenseur des contraintes effectives est relié au tenseur des contraintes du matériau vierge par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (2.67)$$

Ainsi dans le cas d'un matériau orthotrope obéissant au critère de Hill48, la loi de comportement du matériau endommagé s'exprime par :

$$D^p = \frac{3}{2} \frac{1}{1-d} \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}}{\tilde{\sigma}} \mathbb{H} : \sigma \quad (2.68)$$

où \mathbb{H} est le tenseur d'orthotropie de Hill.

D'après le principe d'équivalence en déformations, la contrainte équivalente se résume à :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|1-d|} \sqrt{\sigma : H : \sigma} \quad (2.69)$$

Il reste à définir les variables liées à l'endommagement :

$$Y = -\frac{\bar{\sigma}}{2(1-d)^2 E} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{\text{trace}(\sigma)}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right) \quad (2.70)$$

$$d = \int_0^T \dot{d} dt \quad (2.71)$$

$$\dot{d} = \left(-\frac{Y}{a_0} \right)^{s_0} \dot{\bar{\epsilon}} \quad (2.72)$$

où a_0 et s_0 sont des paramètres de comportement matériel à identifier expérimentalement. Cependant, suite à l'étude de Rice et Tracey sur la croissance d'un vide sphérique, l'approximation $s_0 \simeq 1$ est satisfaisante pour les matériaux métalliques [Habracken 01].

Notation 26 ν est le coefficient de Poisson et E est le module d'Young.

Pour l'analyse de stabilité, les équations (2.34, 2.49, 2.50, 2.51) restent inchangées. L'équilibre local est donc désormais défini par les équations (2.34, 2.49, 2.50, 2.51, 2.68, 2.69, 2.70, 2.71, 2.72).

La fonction de perturbation reste inchangée et définie par (2.56).

En perturbant l'équation (2.71), on trouve alors l'équation suivante :

$$\eta \delta d_0 e^{\eta t} = \delta \dot{d}_0 (e^{\eta T} - 1) \quad (2.73)$$

En faisant tendre la variable de temps t à l'infini, on montre que cette équation conduit à :

$$\delta d_0 = 0 \quad (2.74)$$

Le système perturbé linéarisé obtenu est donc un système (11×11) dépendant des perturbations de la vitesse d'endommagement $\delta \dot{d}$ et de la variable d'endommagement

δY :

$$M(\psi, \varphi, \eta, \tilde{U}_0) \delta \tilde{U}_0 = 0 \quad (2.75)$$

où \tilde{U}_0 représente l'ensemble des variables locales incluant la prise en compte de l'endommagement.

On cherche alors à résoudre :

$$\det M(\psi, \varphi, \eta, \tilde{U}_0) = 0 \quad (2.76)$$

On montre aisément en Annexe C que la solution de (2.76) ne fait pas intervenir explicitement la variable associée Y_0 ni la vitesse d'endommagement \dot{d}_0 du système homogène. Elles n'interviennent que pour le calcul de d_0 . Ainsi l'équation à résoudre est quasiment la même que dans le cas d'un matériau vierge. Il suffit juste de remplacer la contrainte par la contrainte effective. Ainsi on retrouve le principe d'équivalence en déformations. On résout donc :

$$\det \tilde{M}(\psi, \varphi, \eta, U_0, d_0) = 0 \quad (2.77)$$

où \tilde{M} est une matrice (9×9) et où U_0 représente les variables locales correspondant à un matériau vierge.

Il convient désormais de calculer les grandeurs mécaniques. Il faut calculer en plus des variables locales d'un matériau vierge $(\underline{\underline{\sigma}}, \bar{\sigma}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \bar{\varepsilon}^p, \underline{\underline{D}}^p, \dot{\bar{\varepsilon}})$, les variables liées à l'endommagement (Y, d, \dot{d}) . L'algorithme de calcul de ces grandeurs est une version modifiée de l'algorithme 2-12.

Connaissant les variables locales du matériau vierge et liées à l'endommagement, on peut alors construire des Courbes Limites de Formage. Sur la figure 2-17, on constate l'effet de l'endommagement sur la prédiction de formabilité sous hypothèse de contraintes planes. On constate que la forme de la courbe obtenue dans le domaine de l'expansion est

améliorée. Cependant, la déformation critique est diminuée. En effet, les Courbes Limites de Formage ont été construites pour un exposant de la loi d'écroutissage n égal à 0.29. Or en traction uniaxiale, la déformation critique prédite vaut 0.25 soit inférieure à la valeur de n et donc aux résultats de Hill.

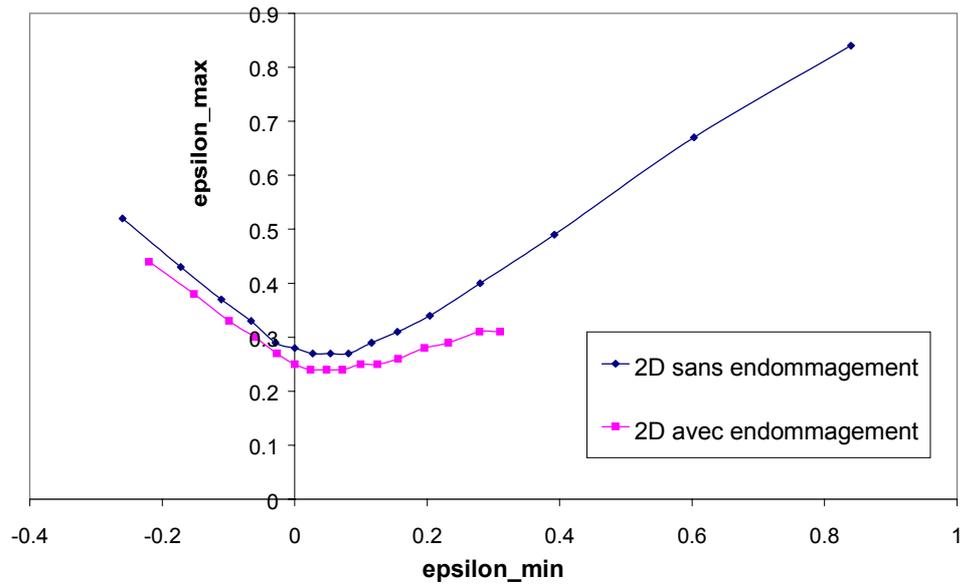


FIG. 2-17: Influence de la prise en compte de l'endommagement sur les Courbes Limites de Formage théoriques

2.4.2 Recherche d'instabilité dans le cas de la flexion d'une bande large

L'équilibre considéré dans les parties précédentes pour la construction de Courbes Limites de Formage modélise une plaque soumise à des efforts de traction. Cependant, en emboutissage de tôles ou hydroformage de tubes, cet équilibre ne concerne qu'une partie infime de la pièce déformée. De plus, en hydroformage de tubes, on réalise parfois des opérations de préformage consistant à déformer le tube par un effort de flexion. On peut s'interroger légitimement sur l'influence de tels efforts sur l'apparition de striction localisée. Le peu de travaux analytiques de striction localisée sur une pièce soumise à un

effort de flexion conduit donc à une première étude simplifiée. On s'attache à caractériser l'apparition de striction localisée sur une plaque large soumise à un simple effort de flexion.

Rappel de l'équilibre en flexion

Hypothèse 27 *On travaille avec un rayon de courbure suffisamment grand par rapport à l'épaisseur (5 à 6 fois plus grand). De plus on ne s'intéresse ici qu'à un procédé de flexion pure.*

Hypothèse 28 *On utilise la théorie des plaques.*

Hypothèse 29 *Le matériau est soumis à un effort en flexion tel que le matériau est élastique pour tout $z \in [-\frac{s}{2}, \frac{s}{2}]$ et il est plastique pour tout $z \in [-\frac{h}{2}, -\frac{s}{2}] \cup [\frac{s}{2}, \frac{h}{2}]$*

Hypothèse 30 *La forme des tenseurs des contraintes, des déformations et des taux de déformations sont les suivantes :*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équilibre d'une plaque est donné par :

$$\overline{\text{div}} \underline{\underline{M}} - \vec{Q} + (\vec{m} \wedge \vec{z}) = \vec{O}$$

$$\text{div} \vec{Q} + p = 0$$

avec

– M est le tenseur des moments :

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz \quad (2.78)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz \quad (2.79)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \quad (2.80)$$

– \vec{Q} est le vecteur des efforts tranchants généralisés :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (2.81)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.82)$$

- p représente la densité d'effort surfacique s'exerçant perpendiculairement au plan de la plaque,
- \vec{m} est la densité surfacique des moments s'exerçant dans le plan de la plaque,
- \vec{z} est le vecteur direction dans l'épaisseur de la plaque.

En isotropie transverse, l'état de flexion est donné par [Joannic 98] :

$$\sigma_{yy} = \frac{r}{1+r} \sigma_{xx} \quad (2.83)$$

où $r = \frac{d\varepsilon_{yy}}{d\varepsilon_{xx}}$ ($r = 1$ dans le cas isotrope).

La déformation équivalente et la contrainte équivalente sont définies par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \left(\frac{2r}{1+r} \right) \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \right)^{1/2} \quad (2.84)$$

$$\bar{\sigma} = \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \left(\frac{2r}{1+r} \right) \sigma_{xx} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \quad (2.85)$$

En utilisant (2.83) dans (2.85), on obtient alors l'expression suivante pour la contrainte équivalente :

$$\bar{\sigma} = |\sigma_{xx}| \frac{(1+2r)^{1/2}}{1+r} \quad (2.86)$$

De plus, on suppose que le matériau obéit à une loi d'érouissage de Hollomon avec dépendance à la vitesse de déformation :

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m \quad (2.87)$$

Remarque 31 On considère une dépendance à la vitesse de déformation pour des raisons calculatoires lors de la recherche d'instabilité. Pour la définition de l'équilibre en flexion on impose $m = 0$.

En imposant $\varepsilon_{yy} = 0$, la contrainte équivalente devient :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} |\varepsilon_{xx}| \quad (2.88)$$

Les équations (2.86), (2.87) (avec $m = 0$), (2.88) entraînent :

$$|\sigma_{xx}| = K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} |\varepsilon_{xx}|^n \quad (2.89)$$

On souhaite exprimer les moments :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \, dz = \int_{-h/2}^{-s/2} \sigma_{xx} z \, dz + \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_{xx} z \, dz + \int_{s/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \, dz$$

avec

$$\int_{-h/2}^{-s/2} \sigma_{xx} z \, dz = \int_{-h/2}^{-s/2} \operatorname{sgn}(\sigma_{xx}) K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} |\varepsilon_{xx}|^n z \, dz \quad (2.90)$$

$$\int_{-s/2}^{s/2} \sigma_{xx} z \, dz = \int_{-s/2}^{s/2} \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} z \, dz \quad (2.91)$$

$$\int_{s/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \, dz = \int_{s/2}^{h/2} \operatorname{sgn}(\sigma_{xx}) K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} |\varepsilon_{xx}|^n z \, dz \quad (2.92)$$

La déformation axiale peut être approchée par :

$$\varepsilon_{xx} \simeq \frac{z}{R} \quad (2.93)$$

où R est le rayon de courbure.

De plus, on sait que $\text{sgn}(\sigma_{xx}) = \text{sgn}(\varepsilon_{xx}) = \text{sgn}(z)$. Et on a $\varepsilon_{xx}(z = s) = \frac{s}{R} = \varepsilon_0 \Rightarrow s = R\varepsilon_0$. On en déduit alors :

$$M_{xx} = \frac{K}{R^n} \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} (h^{n+2} - R^{n+2} \varepsilon_0^{n+2}) + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R^2 \varepsilon_0^3}{12} \quad (2.94)$$

$$M_{yy} = \frac{r}{1+r} M_{xx} \quad (2.95)$$

Équations d'équilibre

On impose $\sigma_{xy} = 0$. L'équilibre local est donné par :

$$\overline{\text{div}} \underline{\underline{M}} = \overline{Q} \quad (2.96)$$

$$\text{div} \overline{Q} = 0 \quad (2.97)$$

ou encore dans notre cas :

$$\overline{\text{div}} \underline{\underline{M}} = 0 \quad (2.98)$$

$$\text{div} \overline{\text{div}} \underline{\underline{M}} = 0 \quad (2.99)$$

Le taux de déformation D_{xx} est relié à la contrainte σ_{xx} par la relation :

$$D_{xx} = \frac{1+2r}{(1+r)^2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma_{xx} \quad (2.100)$$

De plus, les taux de déformations doivent vérifier les équations de compatibilité :

$$D_{xx,zz} + D_{zz,xx} = 2D_{xz,xz} \quad (2.101)$$

Perturbation

Les variables à perturber sont R, h et les variables locales de l'équilibre. La fonction de perturbation $f(x, t)$ est la même que dans la partie 2.3.2, à savoir :

$$f(\vec{x}, t) = e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}} \quad (2.102)$$

où $\eta \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$. On en déduit donc :

$$f(x, t)_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}}) = \sin \varphi \cos \psi f(x, t) \quad (2.103)$$

$$f(x, t)_{,y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}}) = \sin \varphi \sin \psi f(x, t) \quad (2.104)$$

$$f(x, t)_{,xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}}) = (\sin \varphi \cos \psi)^2 f(x, t) \quad (2.105)$$

$$f(x, t)_{,zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}}) = \cos^2 \varphi f(x, t) \quad (2.106)$$

Après perturbation et linéarisation, les équations 2.86, 2.87, 2.93, 2.100, 2.101 s'écrivent :

$$\sigma_{xx} \frac{1+2r}{(1+r)^2} \delta \sigma_{xx}^0 - \bar{\sigma} \delta \bar{\sigma}^0 = 0 \quad (2.107a)$$

$$-\eta \delta \bar{\sigma}^0 + \left(\frac{n\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} + \eta \frac{m\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} \right) \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^0 = 0 \quad (2.107b)$$

$$R^2 \delta D_{xx}^0 + z\eta \delta R^0 = 0 \quad (2.107c)$$

$$\frac{1+2r}{(1+r)^2} \dot{\bar{\varepsilon}} \delta \sigma_{xx}^0 - D_{xx} \delta \bar{\sigma}^0 - \bar{\sigma} \delta D_{xx}^0 + \frac{1+2r}{(1+r)^2} \sigma_{xx} \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^0 = 0 \quad (2.107d)$$

$$\cos^2 \varphi \delta D_{xx}^0 + (\sin \varphi \cos \psi)^2 \delta D_{zz}^0 = 0 \quad (2.107e)$$

On remarque que pour la perturbation de l'équation de compatibilité 2.101, on néglige la perturbation δD_{xz} . De plus, de par la forme de cette équation, on exclut le couple

d'angles $(\varphi, \psi) = (\pi/2, \pi/2)$ des couples définissant le plan d'instabilité.

On s'intéresse désormais à la perturbation de l'équation de définition des moments suivant x 2.94 :

$$M_{xx}^0 + \delta M_{xx} = \frac{K}{(R^0 + \delta R)^n} \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} \left((h^0 + \delta h)^{n+2} - (R^0 + \delta R)^{n+2} \varepsilon_0^{n+2} \right) + \frac{E}{1-v^2} \frac{(R^0 + \delta R)^2 \varepsilon_0^3}{12} \quad (2.108)$$

Cela peut se réécrire :

$$\begin{aligned} -\delta M_{xx}^0 + K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(h^0)^{n+1}}{(R^0)^n} \delta h^0 + \\ \left(-\frac{nK}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{(h^0)^{n+2}}{(R^0)^{n+1}} + \right. \\ \left. \frac{E}{1-v^2} \frac{\varepsilon_0^3}{6} R^0 - K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{R^0}{2^n} \varepsilon_0^{n+2} \right) \delta R^0 = 0 \quad (2.109) \end{aligned}$$

On simplifie cette écriture en la remplaçant par :

$$-\delta M_{xx}^0 + K_1 \delta h^0 + K_2 \delta R^0 = 0 \quad (2.110)$$

avec

$$\begin{aligned} -K_1 &= K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(h^0)^{n+1}}{(R^0)^n} \\ -K_2 &= -\frac{nK}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{(h^0)^{n+2}}{(R^0)^{n+1}} + \frac{E}{1-v^2} \frac{\varepsilon_0^3}{6} R^0 - K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{R^0}{2^n} \varepsilon_0^{n+2} \end{aligned}$$

La perturbation des moments suivant y 2.95 s'obtient rapidement :

$$M_{yy}^0 + \delta M_{yy} = \frac{r}{1+r} (M_{xx}^0 + \delta M_{xx}) \quad (2.111)$$

Soit encore :

$$\delta M_{yy}^0 = \frac{r}{1+r} \delta M_{xx}^0 \quad (2.112)$$

On perturbe cette fois les équations 2.98 et 2.99 :

$$\overrightarrow{\text{div}} (\underline{\underline{M}}^0 + \delta \underline{\underline{M}}^0 f(x, t)) = 0 \quad (2.113)$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{div}} (\underline{\underline{M}}^0 + \delta \underline{\underline{M}}^0 f(x, t)) = 0 \quad (2.114)$$

Comme M^0 est solution de 2.98 et 2.99, on a :

$$\overrightarrow{\text{div}} (\delta \underline{\underline{M}}^0 f(x, t)) = 0 \quad (2.115)$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{div}} (\delta \underline{\underline{M}}^0 f(x, t)) = 0 \quad (2.116)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\delta M_{xx}^0 f(x, t)_{,x} = 0 \quad (2.117)$$

$$\delta M_{yy}^0 f(x, t)_{,y} = 0 \quad (2.118)$$

$$\delta M_{xx}^0 f(x, t)_{,xx} + \delta M_{yy}^0 f(x, t)_{,yy} = 0 \quad (2.119)$$

En utilisant la définition de la fonction de perturbation, on obtient :

$$\sin \varphi \cos \psi \delta M_{xx}^0 = 0 \quad (2.120)$$

$$\sin \varphi \sin \psi \delta M_{yy}^0 = 0 \quad (2.121)$$

$$\sin^2 \varphi (\cos^2 \psi \delta M_{xx}^0 + \sin^2 \psi \delta M_{yy}^0) = 0 \quad (2.122)$$

L'équation (2.122) est linéairement dépendante des équations (2.120) et (2.121). De plus,

en utilisant (2.112), l'équation (2.121) devient :

$$\frac{r}{1+r} \sin \varphi \sin \psi \delta M_{xx}^0 = 0 \quad (2.123)$$

On utilise le fait que :

$$\delta D_{xx}^0 = \eta \delta \varepsilon_{xx}^0 \quad (2.124)$$

$$\delta \dot{\bar{\varepsilon}}^0 = \eta \delta \bar{\varepsilon}^0 \quad (2.125)$$

$$h \delta D_{zz}^0 = \eta \delta h^0 \quad (2.126)$$

D'après les équations 2.107, 2.110 et 2.123 le système perturbé et linéarisé s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \frac{1+2r}{(1+r)^2} & -\bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & \frac{n\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} + \eta \frac{m\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 & 0 & \eta z & 0 \\ \frac{1+2r}{(1+r)^2} \dot{\bar{\varepsilon}} & -D_{xx} & -\bar{\sigma} & \frac{1+2r}{(1+r)^2} \sigma_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \varphi & 0 & (\sin \varphi \cos \psi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & hK_1 & \eta K_2 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{1+r} \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \sigma_{xx}^0 \\ \delta \bar{\sigma}^0 \\ \delta D_{xx}^0 \\ \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \\ \delta D_{zz}^0 \\ \delta R^0 \\ \delta M_{xx}^0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (2.127)$$

Avec

$$- K_1 = K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} (h^0)^{n+1},$$

$$- K_2 = -M_{xx}^0 - K \left(\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{1}{2^{n+1}} (R^0)^{n+1} \varepsilon_0^{n+2} + \frac{E}{1-v^2} \frac{R^0 \varepsilon_0^3}{12}$$

En écrivant ce système sous la forme $M\delta U^0 = 0$, on cherche $\eta / \det(M) = 0$. Le

2.5. Conclusion

déterminant de la matrice précédemment définie est donné par :

$$\det(M) = -\eta \left(\eta \sigma_x^2 \frac{1+2r}{(1+r)^2} - \left(\frac{n\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} + \eta K \frac{m\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \right) \left(\sigma_x D_x - \bar{\sigma}^* \dot{\bar{\varepsilon}} \right) \right) \frac{(1+2r)r}{(1+r)^3} \sin \varphi \sin \psi \det A_{111} \quad (2.128)$$

$$\text{où } \det(A_{111}) = \det \begin{pmatrix} R^2 & 0 & z \\ \cos^2 \varphi & (\sin \varphi \cos \psi)^2 & 0 \\ 0 & hK_1 & K_2 \end{pmatrix} = R^2 (\sin \varphi \cos \psi)^2 K_2 + z \cos^2 \varphi hK_1.$$

Remarque 32 *On constate que le déterminant de la matrice M s'annule pour des couples d'angles (φ, ψ) appartenant à l'ensemble $\{(0, \psi), (\varphi, 0), (\pi/2, \pi/2)\}$. Si les deux premiers couples ne correspondent pas à un plan d'instabilité cohérent physiquement, le dernier couple est un plan d'instabilité probable. Dans ce cas précis, cela revient à considérer que l'on n'a pas perturbé l'équation de compatibilité 2.101.*

On vérifie aisément que, pour $m = 0$ et pour des angles φ et $\psi \in]0; \pi/2[$ quelconques, la solution est donnée par :

$$\eta = \frac{n\bar{\sigma} (1+r)^2 \left(\sigma_{xx} D_{xx} - \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} \right)}{\sigma_{xx}^2 \bar{\varepsilon} (1+2r)} \quad (2.129)$$

En utilisant 2.86 et 2.100, on constate que l'on a

$$\left(\sigma_{xx} D_{xx} - \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (2.130)$$

Il semble donc qu'il ne puisse y avoir apparition de striction lors de la flexion pure d'une bande large.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les différentes modélisations de la striction localisée ont été présentées. Si le doute subsiste quant à la modélisation mathématique de la striction localisée en tant

que bifurcation ou instabilité d'équilibre, la recherche d'instabilité du flux de matière par une méthode de perturbation a été choisie. Cette modélisation semble en effet proche de la réalité mécanique du phénomène de striction localisée. De plus, cette méthode s'adapte aisément et rapidement aux différentes modélisations de l'équilibre mécanique. La modélisation de cet équilibre sous hypothèse de contraintes planes omet de considérer tous les modes d'instabilités possibles. Ainsi une recherche d'instabilité sous un état quelconque de contraintes et déformations est proposée. On dérive alors un critère d'instabilité absolue. En observant l'évolution de l'instabilité par rapport à la vitesse de déformation équivalente, ce critère se transforme alors en un critère d'instabilité effective autorisant la construction automatique de Courbes Limites de Formage. On a ainsi pu montrer l'influence de la modélisation de comportement matériel sur la formabilité d'un matériau. Mais la modélisation de la striction localisée telle qu'elle a été proposée se restreint à un cas de plaque sous tension, ainsi les déformations de flexion ne sont pas considérées. En l'absence de travaux sur ce sujet, on s'est concentré sur la recherche de striction localisée lors d'un procédé de flexion pure d'une bande large. Les résultats obtenus tendent à prouver qu'il ne peut y avoir instabilité lors d'un tel procédé. Le plissement, qui peut être associé à l'apparition de déformations de flexion, peut-il alors être modélisé par une analyse linéaire de stabilité ? La modélisation de ce défaut fait l'objet du chapitre suivant.

2.5. *Conclusion*

Chapitre 3

Prédiction de l'apparition de plis

3.1 Introduction

Le terme de plis (ou plissement) correspond à l'apparition d'ondulations ou cloques sur la pièce déformée lors de procédés de mise en forme. Il s'agit de défauts de forme dus à une ou plusieurs contraintes de compression. Les plis peuvent survenir dans le domaine élastique et dans le domaine plastique. En pratique, en mise en forme des matériaux, les plis se forment le plus souvent lorsque la pièce se déforme dans le domaine plastique. L'apparition de plis en emboutissage est observable très facilement à partir d'un simple essai d'emboutissage d'une coupelle conique. Il est désormais bien connu que lors d'un tel essai, l'effort serre-flan est un paramètre important pour réduire les plis qui se produisent en régulant le flux de matière (voir par exemple [Cao 95]). Mais les plis en emboutissage peuvent également apparaître sur le mur libre la pièce ; c'est-à-dire la partie de la pièce qui n'est en contact ni avec le poinçon ni avec la matrice (figure 3-1). De tels plis ne se résorbent pas toujours. Des plis peuvent également se former lors de la relaxation des contraintes après retour élastique.

En hydroformage, deux défauts en compression peuvent apparaître (figure 3-2). Le premier de ces défauts est le flambage de la structure qui se comporte alors comme une poutre en compression. Ce défaut est visible lorsque la contrainte de compression axiale

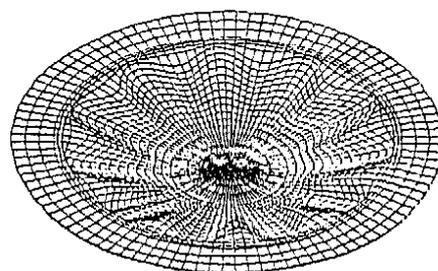


FIG. 3-1: Apparition de 11 vagues circumférencielles lors de l'emboutissage d'une coupelle conique.

d'une partie du tube dépasse la rigidité du matériau. Il se forme pour de faibles niveaux de déformation. Le deuxième défaut est le flambage du mur du tube. On retrouve quelques fois ce phénomène dans la littérature sous la dénomination de plissement [Koç 02]. Si les deux défauts sont dus à des contraintes de compression axiales trop élevées pour la structure, ils se distinguent par la géométrie sur laquelle on peut les observer. En effet, le flambage apparaît plutôt sur des tubes dont le rapport du diamètre sur l'épaisseur est petit, tandis que le plissement apparaît pour des structures minces relativement au diamètre du tube.

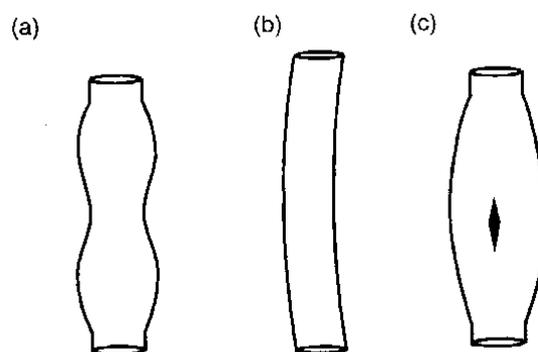


FIG. 3-2: Défauts pouvant apparaître lors d'un procédé d'hydroformage de tubes d'après [Koç 02]. (a) flambage du mur du tube : plissement, (b) flambage global, (c) éclatement

Le plissement/flambage est donc présent aussi bien lors de procédés d'emboutissage que d'hydroformage. Bien que la géométrie de la pièce intervenant dans ces deux procédés

diffère, la cause mécanique reste la même. Malheureusement, comme pour l'apparition de striction, il existe beaucoup de paramètres influençant l'apparition des défauts de compression. Des tests ont été proposés afin de définir la prédisposition d'un matériau au plissement. Parmi les tests les plus connus, on peut citer le test de flambage de Yoshida (Yoshida Buckling Test [Yoshida 83]) et le test d'emboutissage d'une coupelle. Ces tests feront l'objet de simulations numériques dans le chapitre suivant.

Le test de Yoshida est certainement le plus simple en théorie à réaliser. En effet, il consiste à exercer un effort de traction suivant l'une des diagonales d'une plaque carrée (figure 3-3). Des contraintes de compression se créent au centre de la pièce, ce qui entraîne

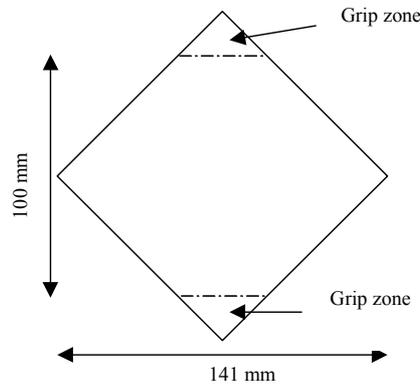


FIG. 3-3: Définition de la géométrie du Yoshida Buckling Test.

la formation de plis. Le test original a subi quelques transformations afin de contrer les glissements sous les mors et les risques de rupture. On trouve également ce test sous une forme biaxée : un effort de traction est exercé suivant les deux diagonales. La mise en œuvre expérimentale de ce test a notamment permis d'observer l'évolution de la hauteur et de la forme de pli en fonction de l'exposant de la loi d'écrouissage, de la contrainte limite de plasticité et du coefficient d'anisotropie normale [Szacinski 84]. Une approche par réseaux de neurones, utilisant les résultats expérimentaux du test de Yoshida, a permis la construction de courbes limites de plis en déformation [Di 97]. Ce test a également été simulé numériquement afin de vérifier les critères de prédiction de flambage ainsi que le

bon comportement des algorithmes de simulation [Nordlund 97], [Lejeune 02], [Kim 00b], [Tomita 88], [Wang 93], [PressesCNRS 90b]... Mais la simulation de ce test pose quelques problèmes dus au glissement de la partie sous les mors. Kim et al. [Kim 00b] semblent avoir contourné ce problème en adaptant les conditions limites pour ajuster les résultats expérimentaux.

Le test de Yoshida, de par sa définition, n'est malheureusement guère utilisable pour l'analyse du plissement intervenant lors de procédés de mise en forme (au même titre que le test de traction pour la recherche de striction localisée en emboutissage). Concernant l'analyse du plissement en emboutissage, le test de la coupelle a alors été défini. De même que pour le test de Yoshida, des études expérimentales et numériques ont été comparées [PressesCNRS 90a], [PressesCNRS 90b]. Suivant la géométrie, il est possible de constater la présence de plis dans le mur libre. Le nombre de plis dépend de la géométrie utilisée. Mais, si l'essai de coupelle est un test se rapprochant des conditions d'emboutissage d'une pièce, il n'empêche que la géométrie particulière de ce test n'autorise pas la généralisation des résultats à des procédés d'emboutissage suivant des formes quelconques. Le recours à la simulation numérique est alors un apport indéniable permettant la réduction des coûts et surtout permettant, via des algorithmes d'optimisation, d'obtenir les paramètres optimaux avec, par exemple, la réduction optimale de l'épaisseur. Encore faut-il définir correctement des critères de plissement !

Du point de vue de la modélisation, le plissement dans le domaine plastique est modélisé comme du flambage plastique localisé pour lequel la longueur d'onde des ondulations est très faible [Neale 89], [De Magalhaes 01], ... Les premiers travaux de modélisation du flambage semblent être dus à Euler, il y a environ 200 ans. Ces travaux sur le flambage élastique ne trouvèrent d'application qu'avec l'utilisation de structures en métal. Les résultats expérimentaux de l'apparition du flambage sur une poutre en compression ont montré que la structure pouvait flamber pour de faibles niveaux de contraintes. L'essentiel des travaux se porta alors sur l'analyse du flambage élastique [Timoshenko 61], [Singer 97a],...

Il est important de rappeler que, dans ce cas précis, le système régissant l'équilibre de la structure est conservatif. Cela entraîne une équivalence entre les notions de stabilité et d'unicité [Nguyen 95]. Ainsi, on se doit de rester prudent quant à l'extension à un matériau élastoplastique (on a alors un système dissipatif) de résultats théoriques sur le flambage élastique. À titre d'exemple, dans [Singer 97c], deux modélisations de flambage plastique d'une poutre en compression sont rappelées. La première modélisation est basée sur l'hypothèse que l'équilibre d'une poutre devient instable lorsque, sous la même condition de chargement axial, il existe des positions d'équilibre très proche de l'équilibre "droit". La seconde modélisation du flambage plastique est basée sur l'hypothèse que la flexion d'une poutre initialement droite débutera dès lors que le chargement associé au module tangent est dépassé. Suivant ces deux modélisations, il est possible d'obtenir le chargement axial critique. Le chargement critique calculé suivant la première hypothèse, respectivement la seconde hypothèse, constitue la borne supérieure, respectivement la borne inférieure, du chargement critique pour les poutres en compression. L'existence de ces deux valeurs extrêmes a d'ailleurs été prouvée par [Cimetière 96]. Sur cet exemple élémentaire, on constate de plus qu'il n'existe pas une valeur de chargement critique mais plutôt un intervalle continu dans lequel le flambage va apparaître (voir par exemple [Nguyen 99]). De manière générale, lorsque les non-linéarités du système sont géométriques et/ou matérielles, le point de bifurcation du système peut apparaître de manière stable. Le chargement correspondant à l'apparition du phénomène de bifurcation est plus faible que le chargement correspondant à la perte de stabilité de l'équilibre. Cette différence entre stabilité et bifurcation est démontrée dans le cas élastoplastique par Hill [Hill 58] et rappelée dans [Nguyen 84].

Il semble donc peu aisé de déterminer précisément l'instant d'apparition de flambage dans le domaine plastique. Ce point est d'ailleurs souligné dans [Bažant 91] où il est noté que "*l'étude de la stabilité est souvent confuse car la définition de la stabilité structurelle est elle-même instable*". La difficulté est également accrue par le fait que le flambage n'est pas seulement dépendant de la rigidité du matériau et/ou de la géométrie. En effet,

les conditions imposées aux bords de la structure influencent fortement le mode de flambage. Cela entraîne non seulement des difficultés quant à la modélisation de problèmes de mise en forme, mais également des difficultés lors de réalisations expérimentales. En effet, pour obtenir deux formes identiques, on se doit de contrôler parfaitement tous les paramètres du procédé. Afin de surmonter ces problèmes pour définir une modélisation la plus proche de la réalité physique, de nombreux travaux et ouvrages se sont multipliés ces dernières années sur l'étude du flambage pour des études intéressant les industries spatiales, aéronautiques, nucléaires, automobiles, ... Mais, actuellement, il n'existe pas de méthodes précises de prédiction du plissement lors de simulation d'hydroformage et d'emboutissage de structures minces. Par exemple, la comparaison récente de la prédiction de plis dans le cas de deux codes éléments finis avec les résultats expérimentaux [Kawka 01] montre bien que ce problème reste ouvert.

De cette multitude de travaux, quatre approches, relatives à l'analyse du plissement en mise en forme de structures minces, se dégagent. La plus utilisée pour les problèmes de mise en forme est très certainement la méthode de recherche d'unicité de Hill [Hill 58]. Il y est proposé de définir une fonctionnelle comme critère de bifurcation. La méthode de l'énergie a été appliquée par Yossifon et al. [Yossifon 84] pour l'analyse du flambage plastique lors d'un procédé d'hydroformage de flan. Cette étude a également été adaptée à la prédiction de plissement sur le mur dans un procédé d'emboutissage par Cao [Cao 99]. La troisième approche a été introduite par Nordlund et Häggblad [Nordlund 97]. Cette analyse est basée sur l'observation expérimentale de la caractérisation des plis. Partant de cette observation, un critère mécanique proche du critère de Hill [Hill 58] a été défini. La dernière approche que nous étudierons est une méthode de perturbation. Cette méthode qui a été utilisée pour l'analyse de bifurcation de différentes structures élastiques sera adaptée à un matériau élastoplastique. Cette méthode s'apparente à l'étude de structure avec imperfection.

3.2 Analyse en bifurcation

3.2.1 Définition de la fonctionnelle de bifurcation

La recherche de bifurcation de la solution de l'équilibre mécanique formulé en vitesse qui est décrite dans cette partie est la plus largement utilisée pour la recherche de plis et/ou flambage en mise en forme des matériaux. Traditionnellement utilisée dans le cadre de la mise en forme de tôles minces ([Dutilly 98], [Brunet 97b], [De Magalhaes 01], [Chu 01], [Kim 00c], ...), cette méthode a été dernièrement adaptée à l'analyse numérique du flambage en hydroformage de tubes [Nefussi 02]. L'unicité de la solution est étudiée d'après la méthode mathématique classique consistant à observer la coexistence de deux solutions. Afin de pouvoir résoudre ce problème non-linéaire, Hill [Hill 61] a introduit le solide linéaire de référence. Ainsi, la résolution du problème non-linéaire initial se ramène à l'étude d'un problème linéaire. Plus précisément, il s'agit de déterminer l'état mécanique conduisant à l'annulation d'une fonctionnelle. Celle-ci est appelée fonctionnelle de bifurcation de Hill dans la plupart des travaux utilisant cette méthode.

Hill a défini et utilisé cette méthode pour l'étude de bifurcation appliquée à des solides rigide-plastiques, élastoplastiques et d'une manière plus générale à des milieux continus non-linéaires [Hill 57], [Hill 58], [Hill 61]. Ces nombreux travaux ont permis de montrer la non-équivalence entre point de stabilité et point de bifurcation pour des milieux non-linéaires.

Par la suite, Hutchinson [Hutchinson 74] a utilisé les travaux de Hill. Il a alors étudié l'apparition de flambage plastique pour des coques de Donell-Mushrati-Vaslov. Hutchinson choisit de travailler dans la configuration lagrangienne ce qui permet de simplifier l'analyse.

Notation 33 *Un point matériel est repéré par les coordonnées x^1, x^2, x^3 telles que les deux premières sont les coordonnées dans le plan moyen de la coque et x^3 est la coordonnée normale à la surface moyenne non-déformée.*

Notation 34 *On définit les indices grecs α, β tels que $\alpha, \beta = 1, 2$ et les indices latins $i,$*

3.2. Analyse en bifurcation

j, k, l tels que $i, j, k, l = 1, \dots, 3$.

Le tenseur des déformations lagrangiennes, noté ε , se décompose alors en déformation de tension $\varepsilon_{\alpha\beta}^m$ et en déformation de flexion $\kappa_{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^m + x^3 \kappa_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

avec

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} U_3 + \frac{1}{2} U_{3,\alpha} U_{3,\beta} \quad (3.2)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -U_{3,\alpha\beta} \quad (3.3)$$

où U est le vecteur déplacement, avec $(U_\alpha)_{\alpha=1,2}$ et U_3 sont respectivement le vecteur des déplacements tangentiels et le déplacement normal à la surface moyenne et $b_{\alpha\beta}$ est le tenseur de courbure de la surface moyenne non déformée.

Soit T l'effort généralisé par unité d'aire s'exerçant sur la coque. Le principe des travaux virtuels exprimé en fonction des contraintes généralisées et des moments s'écrit :

$$\int_A (N^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^m + M^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}) dA = \int_A (T^i \delta U_i) dA + \text{termes de bord} \quad (3.4)$$

avec

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} (\delta U_{\alpha,\beta} + \delta U_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} \delta U_3 + \frac{1}{2} (U_{3,\beta} \delta U_{3,\alpha} + U_{3,\alpha} \delta U_{3,\beta}) \quad (3.5)$$

$$\delta\kappa_{\alpha\beta} = -\delta U_{3,\alpha\beta} \quad (3.6)$$

Les composantes contravariantes des contraintes généralisées et moments s'expriment en

fonction des composantes contravariantes du tenseur de Kirchoff τ par :

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{\alpha\beta} dx^3 \quad (3.7)$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{\alpha\beta} x^3 dx^3 \quad (3.8)$$

La forme incrémentale du principe des travaux virtuels est alors donnée par :

$$\int_A \left(\dot{N}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^m + N_0^{\alpha\beta} \dot{U}_{3,\alpha} \delta U_{3,\beta} + \dot{M}^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} \right) dA = \int_A \left(\dot{T}^i \delta U_i \right) dA \quad (3.9)$$

où $(N_0^{ij})_{i,j=1,3}$ représente les composantes du tenseur des contraintes généralisées de l'état courant, c'est-à-dire de l'état de prébifurcation.

La condition de bifurcation est obtenue d'après la technique usuelle de détermination d'unicité d'une solution. On s'intéresse ici à l'unicité en termes de vitesse des solutions de l'équation 3.9. Supposons qu'il existe deux états mécaniques satisfaisant l'équation 3.9.

Notation 35 On note X^a , respectivement X^b , les grandeurs mécaniques se rapportant au premier état, respectivement deuxième état.

Notation 36 On note $\tilde{X} = \dot{X}^a - \dot{X}^b$ la différence entre les incréments des grandeurs mécaniques des deux états. Ainsi, par exemple, on note $\tilde{U} = \dot{U}^a - \dot{U}^b$.

D'après 3.9, on prouve alors (voir [Hutchinson 74]), en utilisant le fait que les deux états sont des états d'équilibre, que :

$$\int_A \left(\tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^m + N_0^{\alpha\beta} \tilde{U}_{3,\alpha} \tilde{U}_{3,\beta} + \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \right) dA = \int_A \left(\tilde{T}^i \tilde{U}_i \right) dA \quad (3.10)$$

De par la construction du vecteur \tilde{T} et des conditions limites, si deux solutions en vitesse coexistent, alors :

$$\int_A \left(\tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^m + N_0^{\alpha\beta} \tilde{U}_{3,\alpha} \tilde{U}_{3,\beta} + \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \right) dA = 0 \quad (3.11)$$

Il en découle donc que la condition suffisante d'unicité est donnée par :

$$\int_A \left(\tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^m + N_0^{\alpha\beta} \tilde{U}_{3,\alpha} \tilde{U}_{3,\beta} + \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \right) dA > 0 \quad (3.12)$$

3.2.2 Lois de comportement

On considère que les tenseurs des taux de contraintes et de déformations sont reliés de la manière suivante :

$$\dot{\tau} = L : \dot{\varepsilon} \quad (3.13)$$

avec L un tenseur de comportement incrémental d'ordre 4. En utilisant le solide linéaire de comparaison de Hill [Hill 61], le tenseur de comparaison est défini par :

$$L = L^P \text{ dans le domaine plastique} \quad (3.14)$$

$$L = L^e \text{ dans le domaine élastique} \quad (3.15)$$

Hutchinson formule alors l'hypothèse de contraintes planes. Le tenseur de la loi de comportement s'exprime sous la forme :

$$\bar{L}^{\alpha\beta\kappa\gamma} = L^{\alpha\beta\kappa\gamma} - \frac{L^{\alpha\beta 33} L^{33\kappa\gamma}}{L^{3333}} \quad (3.16)$$

Il est alors possible de relier les taux de contraintes généralisées et de moments aux taux de déformations de traction-flexion :

$$\dot{N} = H_{(1)} : \dot{\varepsilon}^m + H_{(2)} : \dot{\kappa} \quad (3.17)$$

$$\dot{M} = H_{(2)} : \dot{\varepsilon}^m + H_{(3)} : \dot{\kappa} \quad (3.18)$$

avec

$$H_{(i)} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{L}^{\alpha\beta\kappa\gamma} (x^3)^{i-1} dx^3 \quad (3.19)$$

La fonctionnelle de bifurcation est alors donnée par :

$$\int_A \left(H_{(1)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{\varepsilon}_{\kappa\gamma}^m \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^m + 2H_{(2)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{\varepsilon}_{\kappa\gamma}^m \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}^m + H_{(1)\kappa\gamma}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{\kappa}_{\kappa\gamma} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} + N_0^{\alpha\beta} \tilde{U}_{3,\alpha} \tilde{U}_{3,\beta} \right) dA > 0 \quad (3.20)$$

La difficulté rencontrée consiste à choisir la bonne loi de comportement. Hutchinson, dans son analyse limitée à un état de contraintes planes, a clairement montré la différence de résultats obtenus suivant que l'on choisisse la théorie de déformation J2 ou la théorie de l'écoulement J2. Il semble en effet que la théorie de l'écoulement J2 surestime la limite avant bifurcation. Les conclusions de Hutchinson ont été confirmées entre autre par les travaux de Chu et Xu [Chu 01] qui retrouvent cette différence entre les deux théories (figure 3-4). Peek [Peek 00] propose une théorie de déformation incrémentale

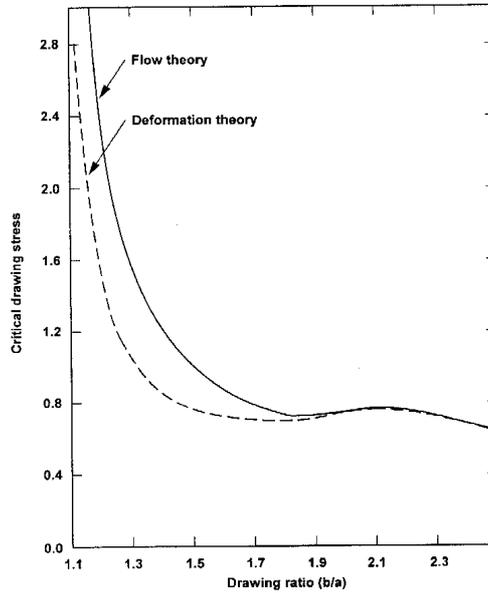


FIG. 3-4: Différence de contrainte critique entre la théorie de l'écoulement et de la déformation (d'après [Chu 01])

comme alternative à ces deux théories. Cette nouvelle théorie permet ainsi d'obtenir des prédictions de flambage proches de celles de la théorie de déformation J2 en conservant pour chaque incrément les avantages de la théorie de l'écoulement : continuité et bilinéarité. Il est intéressant de noter que Hutchinson a également posé les bases de l'analyse de post-bifurcation pour les solides élastoplastiques.

3.2.3 Analyse simplifiée pour le plissement en emboutissage

Les travaux Hutchinson sur le flambage plastique ont été utilisés pour détecter l'apparition de plis localisés pour des coques minces [Hutchinson 85]. On pourra se référer à [Wang 01] pour une analyse en bifurcation de plaque épaisse.

Notation 37 *On note t l'épaisseur de la coque supposée mince.*

Hypothèse 38 *Cette analyse est basée sur l'hypothèse que, pour des modes de plissement de courte longueur d'onde, l'amplitude des plis est faible.*

On considère que la différence entre la solution en vitesse que l'on aurait sans bifurcation et la solution bifurquée est donnée par le champ de déplacement incrémental \dot{u}_1 , \dot{u}_2 , \dot{w} associé au plissement. Il est imposé tel que :

$$\dot{w} = At \cos\left(\frac{\lambda_1 x_1}{l}\right) \cos\left(\frac{\lambda_2 x_2}{l}\right) \quad (3.21)$$

$$\dot{u}_1 = Bt \sin\left(\frac{\lambda_1 x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{\lambda_2 x_2}{l}\right) \quad (3.22)$$

$$\dot{u}_2 = Ct \cos\left(\frac{\lambda_1 x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{\lambda_2 x_2}{l}\right) \quad (3.23)$$

avec A , B et C les amplitudes associées aux trois composantes du champ de vitesse ; λ_1 et λ_2 les longueurs d'onde associées aux directions principales 1 et 2 et $l = \sqrt{Rt}$ où R vaut soit le rayon de courbure R_1 , soit le rayon de courbure R_2 .

Le choix du déplacement incrémental implique que l'on observe une partie de la pièce subissant de nombreux plis. On néglige alors les conditions de bord ou de continuité.

Hypothèse 39 *L'effet des taux de déformations en traction et en flexion sont supposés découplés :*

$$\dot{N} = H_{(11)} : \dot{\varepsilon}^m \quad (3.24)$$

$$\dot{M} = H_{(22)} : \dot{\kappa} \quad (3.25)$$

Hypothèse 40 *L'état de contraintes est supposé être un état de membrane uniforme dans l'épaisseur :*

$$\dot{N} = t \bar{L} : \dot{\varepsilon}^m \quad (3.26)$$

$$\dot{M} = \frac{t^3}{12} \bar{L} : \dot{\kappa} \quad (3.27)$$

Dans le cas simplifié, où la direction de plissement est alignée avec l'une des directions principales de courbure, un critère de plissement exprimé en contrainte peut être déduit [Hutchinson 85] :

$$\sigma_1^{cr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{R_2} \right) (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^{1/2} \quad (3.28)$$

où σ_1^{cr} représente la contrainte critique perpendiculaire à la direction 1 et $L_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de comportement exprimé sous forme matricielle. Cette expression suppose que les plis se développent uniquement suivant la direction 1. On peut noter dans cette expression l'importance du coefficient géométrique $\left(\frac{t}{R_2} \right)$. La longueur d'onde critique associée a pour expression :

$$\lambda_1^{cr} = \left[2\sqrt{3} \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Dans le cas du critère anisotrope de Hill 1950 qui définit la contrainte équivalente par :

$$\sigma_e = \left[\sigma_1^2 - \frac{2r}{1+r} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \right] \quad (3.30)$$

et sous l'hypothèse d'un chargement proportionnel, Neale [Neale 89] démontre, en utilisant la théorie de la déformation, que la déformation équivalente critique dans le cas de plis perpendiculaires à la direction 1 s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon_1^{cr} = \frac{\sqrt{(1+2r)n}}{\sqrt{3}[1+(1+\rho)r]} \left(\frac{t}{R_2} \right) \quad (3.31)$$

Dans ces expressions r est le coefficient d'anisotropie, ρ est le rapport des déformations principales et n représente l'exposant de la loi d'écroutissage qui est de type Hollomon dans cette analyse. De même que pour la contrainte critique, on voit apparaître dans 3.31 les différents paramètres géométriques et de comportement matériel influençant l'apparition de plissement localisé.

3.2.4 Validité et résultats de l'analyse simplifiée

Les critères venant d'être présentés semblent très pratiques et simples à mettre en œuvre. Mais, comme cela est précisé dans [Neale 89], du fait des nombreuses hypothèses formulées afin d'obtenir de tels critères, l'utilisation même de ces critères est limitée. Seules les influences de paramètres de comportement matériel et géométriques peuvent être étudiées par de tels critères. On retrouve pour le plissement localisé la limitation formulée lors de la prédiction de striction localisée.

Par analogie avec les C.L.F., permettant la mise en évidence des paramètres influençant l'apparition de striction, Neale et Tugçü [Neale 90] construisent des courbes limites, exprimées en contraintes, basées sur un critère de plissement. Ce critère est en fait l'extension de l'analyse simplifiée au cas où les rayons de courbure ne coïncident pas avec les directions principales du tenseur des contraintes. Malgré cette extension, le critère proposé reste toutefois limité et ne peut s'appliquer tel quel aux régions de la tôle en contact avec la matrice. Cela limite fortement l'utilisation de ce critère pour la prédiction de plis lors de procédés de mise en forme. Notamment, en emboutissage, seuls les éléments appartenant au mur libre peuvent être étudiés par une telle analyse.

Par contre, l'analyse de bifurcation et les critères de plis associés, tels qu'ils ont été définis par Neale et Tugçu [Neale 90], montrent l'influence de l'angle entre les directions de courbure et les directions principales de contraintes ainsi que l'influence des différents paramètres de comportement matériel et géométriques. On retrouve par cette méthode des niveaux de contraintes critiques plus faibles pour un comportement modélisé par la théorie de l'écoulement J2 que par la théorie de la déformation (figures 3-5 et 3-6).

En utilisant les courbes de contraintes critiques définies dans [Neale 90], Kim et. al [Kim 99] mettent en évidence l'influence plus forte de la contrainte équivalente σ_y , de l'exposant de la loi d'écroutissage n et de l'épaisseur t par rapport au coefficient d'anisotropie de la loi d'Hosford. La faible influence du coefficient d'anisotropie est retrouvée par [De Magalhaes 01] pour un coefficient d'anisotropie de Lankford. Tugçu et. al [Tuğcu 01] s'accordent également sur la faible influence de l'orientation des axes d'orthotropie pour des modélisations de comportement du matériau orthotrope de Barlat91 et Karafillis and Boyce93. Seuls [Kim 00a] et leur recherche de stabilité semblent montrer une large influence de l'anisotropie sur l'apparition de plis.

Bien que le critère de plissement tel qu'il a été défini par Neale et Tugçu ne soit pas réellement applicable pour la recherche de plis en mise en forme des matériaux, Brunet et al. [Brunet 97b] l'ont utilisé pour obtenir un critère de risque de plis. Ce critère n'assure pas la présence de plis mais permet toutefois de visualiser la distribution sur la pièce du risque de plissement. Une amélioration est proposée en ne calculant plus les modules sécants et tangents à partir des contraintes de préflambage mais à partir de la contrainte critique de plissement. Une analyse similaire a été développée par Dutilly et al. [Dutilly 98] et implantée pour définir des fonctions qualités. Ainsi que cela a été précisé dans [Brunet 97b], les résultats obtenus par l'implantation dans un code de simulation sont toutefois à analyser avec précaution.

L'inconvénient principal de cette méthode est donc l'impossibilité de considérer les parties en contact avec la matrice. Récemment, Selman et al. [Selman 02] ont décidé de simplifier le problème en considérant, pour les parties en contact, un critère basé

3.2. Analyse en bifurcation

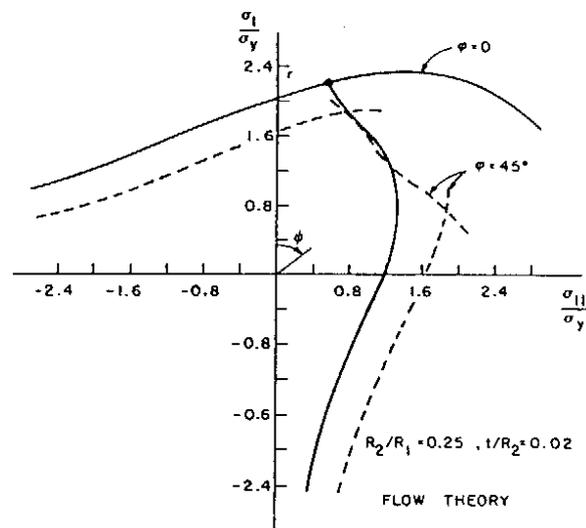


FIG. 3-5: État de contraintes critiques en utilisant la théorie de l'écoulement (d'après [Neale 90]).

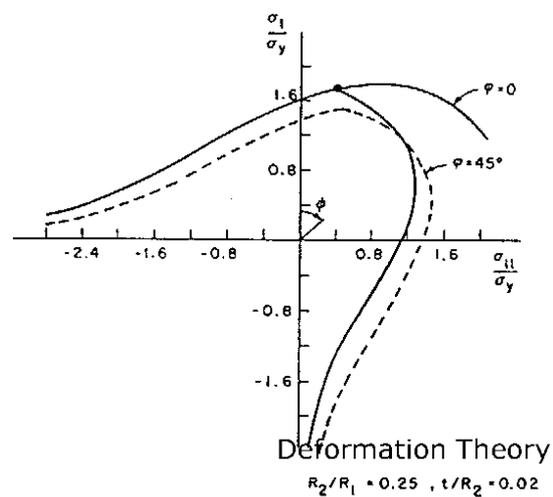


FIG. 3-6: État de contraintes critiques en utilisant la théorie de la déformation (d'après [Neale 90]).

sur une simple observation des rayons de courbure et en conservant l'analyse originiale de Neale et Tugçü [Neale 90] pour l'analyse du plissement sur le mur libre de la pièce. On retrouve alors l'esprit de l'étude de Cao [Cao 99] séparant les parties de la pièce en contact des parties libres. Une autre alternative a été proposée par Nefussi et Combescure [Nefussi 02]. Ils résolvent numériquement un problème aux valeurs propres dans le cas de l'hydroformage de tubes. Toutefois, l'analyse présentée ne semble pas tenir compte de la contrainte imposée par la condition de contact entre la pièce et la matrice.

3.3 La méthode de l'énergie

On ne peut parler de flambage de structures sans évoquer la méthode de l'énergie. En effet, cette méthode a été largement utilisée par [Timoshenko 61] pour l'étude de la stabilité des structures élastiques. Les fondements de cette méthode appliquée à la stabilité des structures élastiques sont basés sur l'observation de l'énergie interne du système. Par la suite, cette méthode a été étendue à la recherche de plis dans le domaine plastique en changeant les paramètres de comportement matériel.

3.3.1 Les fondements de la méthode de l'énergie

On considère ici que le flambage correspond à une perte de stabilité de la structure soumise à un état de contraintes de compression. Un équilibre peut être défini comme stable lorsque l'énergie du système est un minimum. Cette énergie sera un maximum dans le cas d'un équilibre instable. On notera qu'il se peut que l'équilibre soit ni stable ni instable, on parle alors d'équilibre indifférent. L'énergie est alors inchangée lors d'un déplacement quelconque.

Si l'on considère une structure soumise à un chargement et que l'on superpose un petit déplacement (latéral pour une poutre, transverse pour une coque ou une plaque), il y aura alors accroissement ΔU de l'énergie de déformation et création d'un travail ΔT dû aux efforts extérieurs. Le système non déformé est stable si $\Delta U > \Delta T$; il est instable

si $\Delta U < \Delta T$; le point d'échange de stabilité est quant à lui donné par $\Delta U = \Delta T$.

En d'autres termes, un état d'équilibre est dit stable si tout déplacement admissible produit un incrément d'énergie interne plus grand que le travail incrémental produit par le chargement externe. Les chargements critiques des systèmes de barre, des poutres, des plaques et coques sont donnés dans [Timoshenko 61] sous différentes conditions au bord et sous différents chargements.

3.3.2 Application au cas plastique

De nombreux auteurs ont tenté d'étendre la méthode de l'énergie à des matériaux plastiques (voir références dans [Brush 75]).

Yu et al [Yu 82] proposent de reprendre l'analyse de Timoshenko en remplaçant le coefficient de rigidité de flexion $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ par son équivalent plastique D^p . Pour cela, le coefficient de poisson ν est imposé par la condition d'incompressibilité : $\nu = 0.5$.

Yossifon et al [Yossifon 84] ont également proposé de remplacer le module d'Young E par le module de Karman E_0 défini par $E_0 = \frac{4EE_t}{(E^{1/2} + E_t^{1/2})^2}$ avec $E_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$ le module tangent.

Yossifon et al [Yossifon 84] ont utilisé cette analyse afin de déterminer la pression permettant la réduction des plis qui apparaissent au niveau du rayon matrice lors d'un procédé d'hydroformage de flan. Moyennant une hypothèse sur la forme du déplacement transverse (c'est-à-dire sur la forme des plis) en fonction des conditions au bord, ils obtiennent alors la pression critique de flambage en fonction du chemin parcouru par le poinçon. Cette méthode a été récemment reprise par Koç et Altan [Koç 02] pour dériver des conditions de flambage en hydroformage de tubes.

Cao [Cao 99] a également utilisé cette méthode pour analyser de manière formelle l'apparition de plis dans le domaine plastique pour une plaque ne subissant pas d'effort normal (c'est le cas par exemple du mur libre lors d'un procédé d'emboutissage). Le critère de plis ainsi obtenu a servi à l'optimisation de procédés de mise en forme [Cao 95].

Notamment, l'effort serre-flan est optimisé afin d'augmenter la profondeur de l'embouti. Ainsi, l'effort serre-flan à histoire variable (c'est-à-dire le trajet de l'effort en fonction du déplacement du poinçon n'est ni linéaire ni linéaire par morceaux) obtenu par la simulation a permis d'augmenter la profondeur de l'embouti de 31 mm à 36 mm.

3.3.3 Autres travaux basés sur l'observation d'énergie

Si la méthode précédente semble plutôt attractive par la simplicité de sa mise en œuvre et plutôt efficace sur des cas tests, on peut légitimement s'interroger quant à la validité des résultats obtenus dans le cas plastique et plus encore quant à l'utilisation de cette méthode pour prédire le flambage lors d'un procédé complexe de mise en forme. Au risque de paraître redondant, on rappelle que dans le cas de systèmes conservatifs, la minimisation de l'énergie potentielle totale indique le point d'échange de stabilité et de bifurcation. Ce principe de base en élasticité ne s'applique pas aux matériaux inélastiques. La notion d'énergie dépensée étend alors aux systèmes dissipatifs la notion d'énergie potentielle totale [Nguyen 98]. On trouvera dans [Bažant 91] une analyse d'énergie appliquée à un état d'équilibre gouverné par la deuxième loi de la thermodynamique. Mais, comme cela est précisé, cette analyse ne donne d'indication que sur la stabilité du système et non sur la bifurcation.

3.4 La méthode de Nordlund et Häggblad

Parallèlement aux modélisations traditionnelles du plissement que sont l'analyse de bifurcation et la méthode de l'énergie, Nordlund et Häggblad [Nordlund 97] considèrent que la formation de plis est caractérisée par l'apparition d'aires où la déformation est dominée par de fortes rotations locales hors du plan.

3.4.1 Définition du critère de plissement

Afin de prédire l'apparition de plis, il est proposé d'observer l'effet d'un accroissement incrémental du chargement sur un élément coque, sous les hypothèses et notations suivantes :

Hypothèse 41 *L'élément coque est exposé à un accroissement de chargement monotone avec le temps t comme paramètre du chargement.*

Hypothèse 42 *On travaille en formulation lagrangienne réactualisée.*

Notation 43 ${}^t{}^{+\Delta t}P_{ij}$ est le tenseur des contraintes nominales pour une configuration à l'instant $t + \Delta t$ avec comme configuration de référence celle à l'instant t .

Notation 44 δu_i est un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles vérifiant les conditions au bord.

Notation 45 ${}^t f_i^b$ et ${}^t f_i^s$ sont respectivement les forces externes volumiques et surfaciques.

Remarque 46 *Lorsque la configuration courante est la configuration de référence, les tenseurs des contraintes nominales et de Cauchy sont égales : ${}^t\sigma_{ij} = {}^tP_{ij}$.*

L'équilibre d'une configuration à l'instant t est donnée par le principe des travaux virtuels :

$$\int_{tV} {}^tP_{ij}\delta u_{j,i}dV = \int_{tV} {}^t f_i^b\delta u_idV + \int_{tS} {}^t f_i^s\delta u_idS \quad (3.32)$$

Partant de cet équilibre, on considère un incrément de chargement : ${}^t f_i^S \rightarrow {}^t f_i^S + \Delta f_i^S$,
 ${}^t f_i^b \rightarrow {}^t f_i^b + \Delta f_i^b$.

Notation 47 Δu_i représente le champ résultant de déplacement incrémental.

Hypothèse 48 *Le déplacement à l'instant $t + \Delta t$ est donné par $u^{t+\Delta t} = u^t + \Delta u$.*

On rappelle que le travail W^b de la force de volume entre l'instant t et $t + \Delta t$ est défini par :

$$W^b = \int_t^{t+\Delta t} \int_V f^b \frac{\partial u}{\partial t} dV dt \quad (3.33)$$

Hypothèse 49 On suppose que ${}^{t+\Delta t}V \sim {}^tV$.

Le travail se réécrit alors :

$$W^b = \int_V \int_t^{t+\Delta t} f^b \frac{\partial u}{\partial t} dt dV \quad (3.34)$$

On peut alors montrer, via une intégration par parties, que :

$$W^b = \int_V \left({}^t f_i^b + \frac{1}{2} \Delta f_i^b \right) \Delta u_i dV \quad (3.35)$$

De même :

$$W^s = \int_S \left({}^t f_i^s + \frac{1}{2} \Delta f_i^s \right) \Delta u_i dS \quad (3.36)$$

Le travail externe entre l'instant t et $t + \Delta t$ s'écrit alors :

$$W^{ext} \simeq \int_{{}^tV} \left({}^t f_i^b + \frac{1}{2} \Delta f_i^b \right) \Delta u_i dV + \int_{{}^tS} \left({}^t f_i^s + \frac{1}{2} \Delta f_i^s \right) \Delta u_i dS \quad (3.37)$$

Le travail interne est défini par :

$$W^{int} = \int_V \int_t^{t+\Delta t} {}^t P_{ij} \frac{\partial u_{j,i}}{\partial t} dt dV \quad (3.38)$$

Il s'obtient en approchant le tenseur nominal des contraintes par un développement du premier ordre :

$${}^{t+\Delta t}P \simeq {}^tP + \Delta t {}^t\dot{P} \quad (3.39)$$

avec

$${}^t\dot{P} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}P \right) \Big|_{\xi=0} \quad (3.40)$$

Or, les efforts de cohésion intérieurs sont donnés par :

$$df = {}^{t+\xi}P \vec{n}_0 dS_0 \quad (3.41)$$

$$\text{ou encore } df = {}^{t+\xi}\sigma \vec{n} dS \quad (3.42)$$

et on a

$$\vec{n} dS = {}^{t+\xi}J {}^{t+\xi}F^{-T} \vec{n}_0 dS_0 \quad (3.43)$$

avec ${}^{t+\xi}F$ le gradient de déformation incrémentale et ${}^{t+\xi}J = \det \left({}^{t+\xi}F \right)$ le rapport des volumes des deux configurations. On obtient avec les équations 3.41, 3.42 et 3.43 :

$${}^{t+\xi}P \vec{n}_0 dS_0 = {}^{t+\xi}\sigma {}^{t+\xi}J {}^{t+\xi}F^{-T} \vec{n}_0 dS_0 \quad (3.44)$$

d'où

$${}^{t+\xi}P = {}^{t+\xi}J {}^{t+\xi}\sigma {}^{t+\xi}F^{-T} \quad (3.45)$$

Par suite, avec 3.40 et 3.45, on a :

$${}^t\dot{P} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}J {}^{t+\xi}\sigma {}^{t+\xi}F^{-T} \right) \Big|_{\xi=0} \quad (3.46)$$

Soit encore

$${}^t\dot{P} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}J \right) {}^{t+\xi}\sigma \quad {}^{t+\xi}F^{-T} \right) \Big|_{\xi=0} + \left({}^{t+\xi}J \frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}\sigma \right) \quad {}^{t+\xi}F^{-T} \right) \Big|_{\xi=0} + \left({}^{t+\xi}J \quad {}^{t+\xi}\sigma \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}F^{-T} \right) \right) \Big|_{\xi=0}$$

On utilise le fait que :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}J \right) \Big|_{\xi=0} = {}^tJ \operatorname{div} {}^t\vec{v} = \operatorname{div} {}^t\vec{v} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}\sigma \right) \Big|_{\xi=0} = {}^t\dot{\sigma} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left({}^{t+\xi}F^{-1} \right) \Big|_{\xi=0} = -\frac{\partial {}^t\vec{v}}{\partial {}^t\vec{x}} \quad (3.49)$$

où ${}^t\vec{v}$ représente le vecteur vitesse. En remarquant que ${}^tF = I_d$ où I_d est le tenseur identité, on obtient alors :

$${}^t\dot{P} = \operatorname{div} {}^t\vec{v} \quad {}^t\sigma \quad I_d + {}^t\dot{\sigma} \quad I_d - {}^t\sigma \left(\frac{\partial {}^t\vec{v}}{\partial {}^t\vec{x}} \right)^T \quad (3.50)$$

En utilisant l'écriture indicielle avec la convention d'Einstein de sommation sur les indices, l'expression 3.50 devient :

$${}^t\dot{P}_{ij} = {}^tv_{k,k} {}^t\sigma_{ij} + {}^t\dot{\sigma}_{ij} - {}^t\sigma_{ik} {}^tv_{j,k} \quad (3.51)$$

Après intégration par parties, en considérant les propriétés de symétries de certains tenseurs, et en utilisant 3.39 et 3.51 dans 3.38, on obtient :

$$W^{int} = \int_V \left({}^tP_{ij} + \frac{1}{2} \left({}^t\dot{\sigma}_{ij} + {}^t\sigma_{ij} {}^tv_{k,k} - {}^t\sigma_{kj} {}^tv_{i,k} \right) \Delta t \right) \Delta u_{j,i} dV \quad (3.52)$$

Après calculs, en remplaçant le champ de déplacements virtuels par les incréments réels de déplacement dans l'équation 3.32, on déduit une relation entre incréments du

3.4. La méthode de Nordlund et Häggblad

second ordre du travail interne et celui du travail externe :

$$\Delta t \int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k}) \Delta u_{j,i} dV = \int_V \Delta f_i^b \Delta u_i dV + \int_S \Delta f_i^S \Delta u_i dS \quad (3.53)$$

Notation 50 $\dot{f}_i^b = \frac{\Delta f_i^b}{\Delta t}$ et $\dot{f}_i^S = \frac{\Delta f_i^S}{\Delta t}$.

Notation 51 $L = \text{grad}(v)$ est le tenseur gradient de vitesse.

L'équation 3.53 peut se réécrire sous forme matricielle :

$$I = \int_V \text{tr} \{ (\dot{\sigma} + \text{tr}(L) \sigma - L \sigma) L \} dV = \int_V \dot{f}^b v dV + \int_S \dot{f}^S v dS \quad (3.54)$$

Pour pouvoir comprendre ce que représente les quantités du travail interne du second ordre, Nordlund et Häggblad [Nordlund 97] proposent d'introduire la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Kirchoff notée $\overset{\circ}{\tau}$. On déduit de l'équation 3.54 une nouvelle expression du travail interne du second ordre :

$$I = \int_V \text{tr} \left\{ \overset{\circ}{\tau} D + \sigma (-DD^T + DW + W^T D + WW^T) \right\} dV \quad (3.55)$$

On décompose ce travail en 3 parties :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (3.56)$$

avec

$$I_1 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \overset{\circ}{\tau} D + \sigma (-DD^T) \right\} dV \quad (3.57)$$

$$I_2 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \sigma (DW + W^T D) \right\} dV \quad (3.58)$$

$$I_3 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \sigma WW^T \right\} dV \quad (3.59)$$

Remarque 52 Pour l'intégration dans le code de simulation, ces équations sont re-

maniées en utilisant le fait que W est antisymétrique tandis que D et σ sont symétriques.

Nordlund et Häggblad [Nordlund 97] définissent alors le critère de plissement suivant :

$$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{|I_1| + |I_2| + |I_3|} \quad (3.60)$$

Le critère \bar{I} ainsi défini a sa valeur comprise entre -1 et 1.

Lorsque le taux de rotation domine, on a :

$$\bar{I} \longrightarrow \frac{I_3}{|I_3|} = \pm 1 \quad (3.61)$$

Dans ce cas, le critère est négatif lorsque l'état des contraintes est un état de compression (évident). Lorsque le taux de déformation domine :

$$\bar{I} \longrightarrow \frac{I_1}{|I_1|} = 1 \quad (3.62)$$

Dans ce cas, la valeur du critère est positive. La valeur de \bar{I} nous fournit donc une mesure du risque de plissement. Le critère de plissement, appelé critère-NH est défini par :

$$\bar{I} \longrightarrow -1 \text{ alors risque d'apparition de plis} \quad (3.63)$$

$$\bar{I} \longrightarrow 1 \text{ pas de risque d'apparition de plis} \quad (3.64)$$

3.4.2 Application à l'élément coque utilisé dans le code Polyform[®]

Pour utiliser le critère-NH, il faut connaître le tenseur des contraintes de Cauchy σ , le tenseur des taux de contraintes $\dot{\sigma}$, les parties symétriques D et antisymétriques W du tenseur des vitesses de déformations L et donc les vitesses de déformations v .

Valeurs déjà calculées dans Polyform[®]

Le code utilise un élément coque à 5 degrés de liberté. Les vecteurs accélérations, vitesses et déplacements sont calculés au noeud de l'élément de la manière suivante :

$$a_{n+1} = \frac{-F^{int}(u_n) + F^{ext} - Cv_n}{M} \quad (3.65)$$

$$v_{n+1} = a_{n+1}\Delta t + v_n \quad (3.66)$$

$$u_{n+1} = v_{n+1}\Delta t + u_n \quad (3.67)$$

On connaît également l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy aux points de Gauss de l'élément. On effectue dans un premier temps une prévision élastique :

$$\Delta\sigma = C : \Delta\varepsilon \quad (3.68)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma \quad (3.69)$$

puis on regarde si on a dépassé la surface limite auquel cas il y a correction plastique par projection sur la surface de charge :

$$\sigma^{corrigé} = \Pi C^{e-1} \sigma^{prévision} \quad (3.70)$$

3.4.3 Calcul des valeurs requises

Le tenseur de Cauchy est déjà calculé en chaque point de Gauss. Par contre, le tenseur des taux de contraintes n'est calculé que dans le cas élastique. Dans le cas où il y a eu correction plastique, on a : $\Delta\sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$.

Remarque 53 *Le fait de travailler avec un repère tournant implique que la rotation est prise en compte "implicitement" dans le calcul de $\Delta\sigma$.*

Il reste donc à calculer le tenseur L gradient des vitesses de déformation. Comme nous travaillons avec un code explicite dynamique, il ne paraît pas nécessaire de calculer

ce tenseur en passant par une configuration intermédiaire. On va approcher D et W par :

$$\Delta t D_{ij}^n = \frac{1}{2} (v_{i,j}^n + v_{j,i}^n) \quad (3.71)$$

$$\Delta t W_{ij}^n = \frac{1}{2} (v_{i,j}^n - v_{j,i}^n) \quad (3.72)$$

Nous devons donc calculer $v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Pour pouvoir être "comparées" à σ , les grandeurs D et W doivent être exprimées dans le repère attaché à l'élément. Par conséquent, le gradient des vitesses de déformations sera calculé dans un premier temps dans le repère naturel puis ramené dans le repère au point d'intégration. Cela doit être fait pour tous les points d'intégration dans l'épaisseur afin de calculer l'intégrale sur le volume des quantités demandées. La vitesse est donnée par :

$$v^{n+1} = N_k \left[\bar{v}_k^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n)}{\Delta t} \right] \quad (3.73)$$

En effet, d'après l'équation 3.67, on a $\Delta t v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, or $u^n = N_k [\bar{u}_k + \zeta \tilde{u}_k^n]$ avec $\tilde{u}_k^n = h_k^n (V_1^{k^n} \beta^{k^n} - V_2^{k^n} \alpha^{k^n})$.

Par conséquent :

$$- \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \left[\bar{v}_k^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n)}{\Delta t} \right]$$

$$- \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \left[\bar{v}_k^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n)}{\Delta t} \right]$$

$$- \frac{\partial v}{\partial \zeta} = N_k \frac{(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n)}{\Delta t}$$

Dans le cas du triangle ($N_1 = 1 - \xi - \eta$; $N_2 = \xi$; $N_3 = \eta$), on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = - \left[\bar{v}_1^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_1^{n+1} - \tilde{u}_1^n)}{\Delta t} \right] + \left[\bar{v}_2^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_2^{n+1} - \tilde{u}_2^n)}{\Delta t} \right] \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = - \left[\bar{v}_1^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_1^{n+1} - \tilde{u}_1^n)}{\Delta t} \right] + \left[\bar{v}_3^{n+1} + \zeta \frac{(\tilde{u}_3^{n+1} - \tilde{u}_3^n)}{\Delta t} \right] \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = N_k \frac{(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n)}{\Delta t} \quad \forall k = 1, \dots, 3 \quad (3.76)$$

3.5. Une méthode de perturbation

On est donc capable de calculer D et W dans le repère naturel. Il faut maintenant l'exprimer dans le repère local à l'élément.

Notation 54 Soit D^{loc} les vitesses de déformation exprimées dans le repère local et D^{nat} les vitesses de déformation exprimées dans le repère naturel.

Ce repère est défini par 3 vecteurs directeurs (e_1, e_2, e_3) donnés par : $e_3 = \frac{g_1 \wedge g_2}{\|g_1 \wedge g_2\|}$, $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$, $e_2 = e_3 \wedge e_1$ avec $g_i = \frac{\partial x}{\partial r_i}$ où $r_1 = \xi; r_2 = \eta; r_3 = \zeta$. On a par conséquent : $D_{ij}^{loc} e^i e^j = D_{kl}^{nat} g^k g^l$. On déduit les relations suivantes :

$$D_{11}^{loc} = D_{11}^{nat} (g^1 e_1)^2 \quad (3.77)$$

$$D_{22}^{loc} = D_{11}^{nat} (g^1 e_2)^2 + 2D_{12}^{nat} (g^1 e_2)(g^2 e_2) \quad (3.78)$$

$$D_{12}^{loc} = D_{11}^{nat} (g^1 e_1)(g^1 e_2) + D_{12}^{nat} (g^1 e_1)(g^2 e_2) \quad (3.79)$$

$$D_{13}^{loc} = D_{11}^{nat} (g^1 e_1)(g^1 e_3) + D_{12}^{nat} (g^1 e_1)(g^2 e_3) + D_{13}^{nat} (g^1 e_1)(g^3 e_3) \quad (3.80)$$

$$D_{23}^{loc} = D_{11}^{nat} (g^1 e_2)(g^1 e_3) + D_{22}^{nat} (g^2 e_2)(g^2 e_3) + D_{12}^{nat} [(g^1 e_2)(g^2 e_3) + (g^1 e_3)(g^2 e_2)] + D_{13}^{nat} (g^1 e_2)(g^3 e_3) + D_{23}^{nat} (g^2 e_2)(g^3 e_3) \quad (3.81)$$

Remarque 55 Afin de réduire le nombre de calculs, il paraît plus logique de calculer le tenseur L dans le repère local à l'élément puis de calculer D et W par $D = 0.5 (L + L^T)$ et $W = 0.5 (L - L^T)$

Nous sommes donc capables d'exprimer la variable \bar{I} en chaque point de Gauss puis de l'intégrer dans l'épaisseur.

3.5 Une méthode de perturbation

3.5.1 Introduction

Alternativement à la désormais célèbre analyse en bifurcation de Hill, une quatrième méthode consiste à utiliser le principe des travaux virtuels pour exprimer l'équilibre de l'élément considéré en fonction de sa nature. Par exemple, l'équation d'équilibre

mécanique est différente pour un élément coque ou plaque. Certains auteurs proposent alors d'analyser la formulation forte de l'équilibre d'éléments plaques ou coques [Shrivastava], [Lu 01], [Singer 97a], [Wang 01], [Durban 99],... En faisant une synthèse des travaux utilisant cette analyse, on se rend compte de l'importance de la cinématique de l'élément (voir les nombreux exemples traités dans [Singer 97a]).

En se basant sur la méthodologie développée dans ces analyses, on souhaite définir un critère prenant en compte la modélisation de Nordlund et Häggblad [Nordlund 97] tout en restant sous l'hypothèse d'éléments minces. On ne va donc faire aucune hypothèse sur la relation existant entre les rotations et le déplacement normal à l'élément. Ainsi on souhaite caractériser le plissement par de fortes rotations.

3.5.2 Équilibre de la plaque considérée

Dans cette partie, on considère un élément plaque.

Hypothèse 56 *Cette analyse étant une analyse de faisabilité, on simplifie le problème en considérant un état de contraintes planes : $\sigma_{33} = 0$. De plus, les termes de cisaillement transverse sont considérés comme négligeables (on travaille avec un élément suffisamment mince).*

Notation 57 *On reprend les notations indicielles de la partie 3.2.1, à savoir, les indices grecs sont compris entre 1 et 2 tandis que les indices latins prennent des valeurs de 1 à 3.*

Notation 58 *Soient U_i les déplacements d'un point se situant sur le plan moyen de la plaque ($x^3 = 0$) et ϕ_α les composantes du vecteur rotation.*

Les déformations ε peuvent se décomposer en déformations membranaires ε^m et en déformation de flexion κ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^m + x^3 \kappa_{\alpha\beta} \quad (3.82)$$

3.5. Une méthode de perturbation

avec

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta \quad (3.83)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (3.84)$$

Notation 59 On note N le tenseur des contraintes généralisées, M le tenseur des moments et T l'effort généralisé par unité d'aire s'exerçant sur la coque.

Le principe des travaux virtuels exprimé en fonction des contraintes généralisées et des moments s'écrit :

$$\int_A (N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^m + M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) dA = \int_A (T^i \delta U_i) dA + \text{termes de bord} \quad (3.85)$$

Sous forme incrémentale, le principe des travaux virtuels est exprimé par :

$$\int_A \left(\dot{N}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^m + N_0^{\alpha\beta} \dot{\phi}_\alpha \delta \phi_\beta + \dot{M}^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} \right) dA = \int_A \left(\dot{T}^i \delta U_i \right) dA \quad (3.86)$$

où $(N_0^{ij})_{i,j=1,3}$ représente les composantes du tenseur des contraintes généralisées de l'état courant, c'est-à-dire de l'état de prébifurcation. Or, les variations $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^m$ et $\delta \kappa_{\alpha\beta}$ sont fonction des variations en déplacement et en rotation :

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} (\delta U_{\alpha,\beta} + \delta U_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2} (\phi_\alpha \delta \phi_\beta + \delta \phi_\alpha \phi_\beta) \quad (3.87)$$

$$\delta \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta \phi_{\alpha,\beta} + \delta \phi_{\beta,\alpha}) \quad (3.88)$$

Le principe des travaux virtuels incrémental 3.86 devient alors :

$$\int_A \left(\dot{N}^{\alpha\beta} \delta U_{\alpha,\beta} + \dot{N}^{\alpha\beta} \phi_\alpha \delta \phi_\beta + N_0^{\alpha\beta} \dot{\phi}_\alpha \delta \phi_\beta + \dot{M}^{\alpha\beta} \delta \phi_{\alpha,\beta} \right) dA = \int_A \left(\dot{T}^i \delta U_i \right) dA \quad (3.89)$$

Hypothèse 60 Les variations en déplacement δU_α et en rotation $\delta \phi_\alpha$ sont indépendantes.

On obtient alors l'équilibre suivant :

$$\dot{N}_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.90)$$

$$\dot{N}^{\alpha\beta}\phi_\beta + N_0^{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta - \dot{M}_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.91)$$

Hypothèse 61 *On suppose que les taux de déformations membranaires et de flexion sont reliés aux tenseurs des contraintes généralisées et aux moments par :*

$$\dot{N} = K : \dot{\varepsilon}^m \quad (3.92)$$

$$\dot{M} = G : \dot{\kappa} \quad (3.93)$$

Remarque 62 *On a choisi de ne pas considérer le couplage entre les termes de déformations membranaires et les termes de flexion. On simplifie ainsi grandement le problème.*

On montre, d'après l'équation 3.90, qu'il existe une fonction d'Airy f telle que :

$$\dot{N}^{11} = f_{,22} \quad (3.94)$$

$$\dot{N}^{22} = f_{,11} \quad (3.95)$$

$$\dot{N}^{12} = -f_{,12} \quad (3.96)$$

L'équation 3.91 se réécrit sous la forme :

$$f_{,\alpha\beta}\phi_\beta + N_0^{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta - G^{\alpha\beta\gamma\kappa}\dot{\kappa}_{\kappa\gamma,\beta} = 0 \quad (3.97)$$

En utilisant l'équation 3.84, on obtient alors :

$$f_{,\alpha\beta}\phi_\beta + N_0^{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta - G^{\alpha\beta\gamma\kappa}\dot{\phi}_{\gamma,\kappa\beta} = 0 \quad (3.98)$$

3.5.3 Perturbation

On vient de définir l'équation d'équilibre d'un élément plaque. On souhaite désormais observer la réaction de l'équilibre constitué des équations 3.98 à une perturbation du système. Pour cela, on perturbe les variables ϕ_α et f de la manière suivante :

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha^0 + \delta\phi_\alpha \quad (3.99)$$

$$f = f^0 + \delta f \quad (3.100)$$

où ϕ_α^0 et f correspondent à l'équilibre de préflambage. On néglige les perturbations d'ordre 2. Les équations perturbées deviennent alors :

$$f_{,\alpha\beta}\delta\phi_\beta + \delta f_{,\alpha\beta}\phi_\beta + N_0^{\alpha\beta}\delta\dot{\phi}_\beta - G^{\alpha\beta\gamma\kappa}\delta\dot{\phi}_{\gamma,\kappa\beta} = 0 \quad (3.101)$$

En l'absence d'indication sur la géométrie de la plaque et sur les conditions au bord, il est pour l'instant impossible d'identifier la forme des perturbations. Nous allons désormais traiter un cas simple afin de vérifier la justesse de la méthodologie développée.

Application : Cas d'une plaque en compression uniaxiale

On considère une plaque soumise à un chargement tel que :

$$N_{11}^0 = -P < 0 \quad (3.102)$$

$$N_{22}^0 = 0 \quad (3.103)$$

$$N_{12}^0 = 0 \quad (3.104)$$

On se place dans un cas sans décharge (i.e. $\dot{P} > 0$) :

$$f_{,22}^0 = \dot{N}_{11}^0 = -\dot{P} < 0 \quad (3.105)$$

$$f_{,11}^0 = \dot{N}_{22}^0 = 0 \quad (3.106)$$

$$-f_{,12}^0 = \dot{N}_{12}^0 = 0 \quad (3.107)$$

On considère que l'état de préflambage est tel que :

$$\phi_1^0 = \phi_2^0 = 0 \quad (3.108)$$

$$\dot{\phi}_1^0 = \dot{\phi}_2^0 = 0 \quad (3.109)$$

L'équation 3.101 se résume alors à :

$$N_{11}^0 \delta \dot{\phi}_1 - G^{1\beta\gamma\kappa} \delta \dot{\phi}_{\gamma,\kappa\beta} = 0 \quad (3.110)$$

$$f_{,22}^0 \delta \phi_2 - G^{2\beta\gamma\kappa} \delta \dot{\phi}_{\gamma,\kappa\beta} = 0 \quad (3.111)$$

Hypothèse 63 *On suppose que les perturbations sont constituées d'une partie temporelle et d'une partie spatiale de la forme $\delta X = \delta X^0 g_X(x^1, x^2) h(t)$.*

Hypothèse 64 *La partie temporelle de la perturbation est supposée exponentielle : $h(t) = e^{\eta t}$.*

Moyennant les hypothèses précédentes, la relation entre la perturbation en rotation et sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\delta \dot{\phi}_2 = \eta \delta \phi_2 \quad (3.112)$$

Hypothèse 65 *Le tenseur G est supposé symétrique tel que $G^{ijkl} = G^{klij} = G^{jikl} = G^{ijlk}$. Et de plus, on suppose que :*

$$G^{1112} = G^{1222} = 0 \quad (3.113)$$

3.5. Une méthode de perturbation

Ces hypothèses ne sont pas irréalistes puisque c'est la forme la plus couramment observée pour le tenseur G .

En utilisant les hypothèses formulées sur le tenseur G , les formules développées des équations 3.110 et 3.111 s'écrivent :

$$-N_{11}^0 \delta \dot{\phi}_1 + G^{1111} \delta \dot{\phi}_{1,11} + G^{1212} \delta \dot{\phi}_{1,22} + (G^{1221} + G^{1122}) \delta \dot{\phi}_{2,12} = 0 \quad (3.114)$$

$$-\frac{f_{,22}^0}{\eta} \delta \dot{\phi}_2 + (G^{2112} + G^{2211}) \delta \dot{\phi}_{1,12} + G^{2121} \delta \dot{\phi}_{2,11} + G^{2222} \delta \dot{\phi}_{2,22} = 0 \quad (3.115)$$

Notation 66 La plaque est de longueur a et de largeur b . Le repère est tel que tout point de la plaque vérifie $x^1 \in [0, a]$ et $x^2 \in [0, b]$.

On considère que les perturbations en moments (et par conséquent en vitesses de rotation) vérifient les conditions de bord suivantes :

$$\delta M_{22} (0, x^2) = 0 \quad (3.116)$$

$$\delta M_{11} (x^1, 0) = 0 \quad (3.117)$$

$$\delta M_{22} (a, x^2) = 0 \quad (3.118)$$

$$\delta M_{11} (x^1, b) = 0 \quad (3.119)$$

On déduit des conditions ci-dessus la forme des perturbations en rotation :

$$\delta \dot{\phi}_1 = \delta \dot{\phi}_1^0 \cos \left(\frac{2\pi m x^1}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi n x^2}{b} \right) h(t) \quad (3.120)$$

$$\delta \dot{\phi}_2 = \delta \dot{\phi}_2^0 \sin \left(\frac{2\pi m x^1}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi n x^2}{b} \right) h(t) \quad (3.121)$$

Notation 67 On note μ et ν les variables telles que $\mu = \frac{2\pi m}{a}$ et $\nu = \frac{2\pi n}{b}$.

Notation 68 On note $g_1^{mn} (x^1, x^2)$ et $g_2^{mn} (x^1, x^2)$ les fonctions définies par :

$$g_1^{mn} (x^1, x^2) = \cos (\mu x^1) \sin (\nu x^2) \quad (3.122)$$

$$g_2^{mn} (x^1, x^2) = \sin (\mu x^1) \cos (\nu x^2) \quad (3.123)$$

On injecte les perturbations 3.120 et 3.121 dans (3.114, 3.115), on obtient en simplifiant par $h(t)$:

$$g_1^{mn} \left[(-\mu^2 G^{1111} - \nu^2 G^{1212} + P) \delta \dot{\phi}_1^0 - \nu \mu (G^{1212} + G^{1122}) \delta \dot{\phi}_2^0 \right] = 0 \quad (3.124)$$

$$-g_2^{mn} \left[\mu \nu (G^{1212} + G^{1122}) \delta \dot{\phi}_1^0 + \left(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222} - \frac{\dot{P}}{\eta} \right) \delta \dot{\phi}_2^0 \right] = 0 \quad (3.125)$$

On recherche une solution non triviale de ce système. En l'écrivant sous forme matricielle, cela reviendrait à chercher la singularité de la matrice. On doit alors résoudre l'équation suivante :

$$\left(\eta (\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222}) - \dot{P} \right) (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212} - P) = \eta \nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2 \quad (3.126)$$

On peut en déduire la valeur du paramètre η :

$$\eta = \frac{\dot{P} (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212} - P)}{(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222}) (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212} - P) - \nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2} \quad (3.127)$$

Dans le cas d'un chargement statique, c'est-à-dire $\dot{P} = 0$, l'équation 3.126 indique que la contrainte généralisée critique vaut :

$$P_{stat}^{cr} = (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212}) - \frac{\nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2}{(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222})} \quad (3.128)$$

Dans le cas d'un chargement croissant, on cherche les valeurs de P telles que l'équilibre de la plaque soit instable. On rappelle qu'il y a instabilité absolue lorsque $\text{Re}(\eta) > 0$. Une première analyse du paramètre η indique qu'il est indéterminé en $P = P^\infty$ où P^∞ est solution de :

$$(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222}) (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212} - P) - \nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2 = 0 \quad (3.129)$$

3.5. Une méthode de perturbation

P^∞ est défini par :

$$P^\infty = (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212}) - \frac{\nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2}{(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222})} \quad (3.130)$$

Le paramètre η s'annule pour $P = P_0^{crit}$ où P_0^{crit} est défini par :

$$P_0^{crit} = \mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212} \quad (3.131)$$

On vérifie rapidement que, sous chargement croissant, c'est-à-dire pour $\dot{P} > 0$, η est strictement positif pour tout $P \in [0, P^\infty[\cup]P_0^{crit}, +\infty[$.

On remarque que $\eta \xrightarrow{P \leq P^\infty} +\infty$.

Le mode d'instabilité associé à la valeur P^∞ correspond au mode d'instabilité le plus rapide. Ce mode est appelé pour la suite mode d'instabilité infinie. La valeur P^∞ est choisie comme critère d'instabilité dans le cas d'un chargement croissant car, à l'approche de celle-ci, les perturbations atteignent leur vitesse d'évolution maximale. On retrouve alors la contrainte généralisée critique obtenue dans le cas d'un chargement statique. On résume les contraintes généralisées critiques obtenues dans le tableau suivant :

$\dot{P} = 0$		$P_{stat}^{cr} = (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212}) - \frac{\nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2}{(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222})}$
$\dot{P} \neq 0$	instabilité absolue $\text{Re}(\eta) > 0$	$P \in [0, P^\infty[\cup]P_0^{crit}, +\infty[$ avec $P_0^{crit} = \mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212}$
$\dot{P} \neq 0$	instabilité infinie $\eta \rightarrow \infty$	$P^\infty = (\mu^2 G^{1111} + \nu^2 G^{1212}) - \frac{\nu^2 \mu^2 (G^{1212} + G^{1122})^2}{(\mu^2 G^{1212} + \nu^2 G^{2222})}$

Par la suite, on s'intéresse uniquement à la contrainte généralisée critique P^∞ .

Afin de poursuivre l'analyse et de mieux comprendre la signification de ces critères, on va désormais introduire une loi de comportement.

Considérons la théorie de déformation appliquée au critère de Hill48 telle qu'elle a été utilisée par Neale [Neale 89], le tenseur G est alors défini par :

$$G^{1111} = G^{11} = \frac{t^3}{12} \left[\frac{(1+r)^2}{(1+2r)} E_S - (E_S - E_T) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e} \right)^2 \right] \quad (3.132)$$

$$G^{2222} = G^{22} = \frac{t^3}{12} \left[\frac{(1+r)^2}{(1+2r)} E_S - (E_S - E_T) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e} \right)^2 \right] \quad (3.133)$$

$$G^{1122} = G^{12} = \frac{t^3}{12} \left[\frac{r(1+r)}{(1+2r)} E_S - (E_S - E_T) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e} \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e} \right) \right] \quad (3.134)$$

$$G^{1212} = 0 \quad (3.135)$$

La contrainte effective est donnée par :

$$\sigma_e = \left(\sigma_1^2 - \frac{2r}{1+r} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \right)^{1/2} \quad (3.136)$$

D'après le tableau 3.5.3, les contraintes généralisées critiques deviennent alors :

$$P_{stat}^{cr} = P^\infty = \frac{\mu^2 \left[G^{11} G^{22} - (G^{12})^2 \right]}{G^{22}} \quad (3.137)$$

Soit encore :

$$P_{stat}^{cr} = P^\infty = \left(\frac{2\pi m}{a} \right)^2 \left(\frac{t^3}{12} \right)^2 \frac{(1+r)^2 E_S E_T}{(1+2r) G^{22}} \quad (3.138)$$

Dans le cas particulier où $\sigma_2 = 0$ et $r = 1$, on obtient :

$$P_{stat}^{cr} = P^\infty = \left(\frac{2\pi m}{a} \right)^2 \frac{t^3}{12} E_T \quad (3.139)$$

Validité du résultat

On trouve dans [Singer 97b] une estimation du chargement critique en mode simple d'une plaque en compression dans le cas élastique. Pour cela la méthode de Rayleigh-Ritz

3.5. Une méthode de perturbation

est utilisée. Par minimisation de l'énergie potentielle, Singer et al [Singer 97b] obtiennent la pression généralisée critique suivante :

$$P^{critique} = \left(i \frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{t^3}{3(1-\nu)^2} E \quad (3.140)$$

où i est un facteur supposé tel que $i = a/b$. On trouve avec 3.139 une expression analogue à 3.140 à un facteur près dépendant de i .

On retrouve une valeur analogue de la pression critique dans le cas élastique d'après les travaux de Timoshenko [Timoshenko 61], mais avec cette fois-ci une dépendance explicite au mode de flambage :

$$\sigma_{cr_m}^{Timoshenko} = m^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (3.141)$$

Pour un mode de flambage simple, on obtient

$$\sigma_{cr_1}^{Timoshenko} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (3.142)$$

En remarquant qu'avant apparition du flambage, la contrainte est constante dans l'épaisseur, on peut alors trouver la contrainte généralisée critique :

$$N_{cr_1}^{Timoshenko} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu)^2} \frac{t^3}{a^2} \quad (3.143)$$

En adaptant le coefficient i dans l'équation 3.140, on peut retrouver le résultat de Timoshenko donné par l'équation 3.143.

On souhaite comparer la pression critique obtenue par notre méthode avec le critère de Timoshenko. Pour cela, on va utiliser les travaux de Yossifon, Tirosh et Kochavi [Yossifon 84] qui étendent la méthode de Timoshenko au flambage plastique. Comme cela a été précisé précédemment, l'extension au domaine plastique consiste à remplacer le coefficient de Poisson par son équivalent incompressible ($\nu = 0.5$) et le module d'Young

par le module double $E_0 = \frac{4EE_T}{(E^{1/2} + E_T^{1/2})^2}$ dépendant du module d'Young E et du module tangent E_T . En appliquant cette technique à la pression généralisée critique de Timoshenko, on obtient en mode de flambage simple :

$$N_{cr_1}^{Timoshenko} = \frac{\pi^2 t^3}{3 a^2} E_0 \quad (3.144)$$

que l'on souhaite comparer à notre pression critique généralisée :

$$P^\infty = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{t^3}{3} E_T \quad (3.145)$$

Le rapport entre ces deux valeurs est donné par :

$$N_{cr_1}^{Timoshenko} = \frac{E_0}{E_T} P^\infty \quad (3.146)$$

La différence entre le critère de Timoshenko et notre critère dans ce cas particulier tient essentiellement de la loi de comportement choisie. Sachant que notre analyse est une étude de stabilité, on retrouve l'objection formulée pour le critère de Timoshenko, à savoir une surestimation de la contrainte critique. Pour approfondir la validation de notre critère, une comparaison avec l'expérience est à envisager.

3.6 Conclusion

On trouve dans la littérature de nombreux travaux autorisant la caractérisation du plissement/flambage en mise en forme de manière plus ou moins exacte. Parmi toutes ces méthodes se distingue la méthode de bifurcation de Hill qui permet d'obtenir dans des cas simples une expression analytique de la contrainte critique et également la longueur d'onde associée. Cette méthode présente toutefois l'inconvénient de ne pas pouvoir être exploitée pleinement dans des cas compliqués tels que lors de la présence de contact entre l'élément et la matrice. On peut alors utiliser cette méthode de manière numérique, cela

revient à calculer les mêmes termes que ceux intervenant dans la méthode de Nordlund et Häggblad [Nordlund 97]. Mais, cette fois, l'analyse est basée sur une étude qualitative du travail interne incrémental du second ordre. Cette étude est d'autant plus intéressante qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la forme du champ des vitesses après plissement. Par contre, elle ne donne aucune indication sur ce même champ et donc aucune indication sur le mode de plissement. Parmi les approches étudiées, il y a également la méthode de l'énergie. Les nombreuses remarques formulées lors du développement de cette méthode suffisent à elles seules pour justifier le non-emploi d'une telle méthode. On rappelle juste que Chu et Xu ([Chu 01] page 1426) émettent les mêmes réserves quand au simple remplacement de paramètres pour justifier le passage de l'analyse en élasticité à une analyse en plasticité.

Alternativement à toutes ces méthodes, nous avons souhaité développer une analyse s'inspirant des travaux de Nordlund et Häggblad [Nordlund 97] (en considérant l'apparition de plis comme liée à de fortes rotations) et des divers travaux sur l'étude de l'équilibre mécanique d'une structure. Les résultats obtenus sont validés en comparaison avec le critère de Timoshenko dans le cas d'une plaque en compression. La relation entre ces deux critères semble évidente puisque dans les deux cas une analyse de stabilité est effectuée.

Notre nouveau critère qui s'inspire des nombreux travaux réalisés auparavant présente l'inconvénient de se restreindre à un élément plaque sous hypothèse de contraintes planes. De plus, le mode de déformation est imposé par les conditions au bord supposées dans le cas d'une analyse simplifiée. On ne peut pas parler ici d'analyse locale. On note également que la loi de comportement ne considère pas le couplage entre les termes de déformations membranaires et les termes de flexion. Il serait donc intéressant d'observer l'influence de ces termes sur un critère de prédiction de plissement.

Le critère proposé ici semble trop restrictif et peu utilisable lors de simulations par la méthode des éléments finis. Mais il a initié de nouveaux travaux dont les résultats n'ont pas été validés. Il s'agit alors d'étendre l'analyse proposée pour la recherche de

striction localisée à la recherche de plissement dans le cas d'une loi de comportement de type Illyushin. Le plissement est à nouveau considéré comme une instabilité du flux de matière. Cette méthode de perturbation fait alors apparaître le mode de flambage dans la fonction de perturbation sans aucune hypothèse sur les conditions de bord. De plus, la loi de comportement choisie autorise le couplage entre les termes de déformations membranaires et les termes de flexion. On trouvera les développements de cette méthode en Annexe D. La dimension du problème n'a pour l'instant pas permis d'obtenir un critère de plissement simple.

Toutes les méthodes mentionnées et développées dans ce chapitre sont donc soit des analyses en bifurcation soit des analyses de stabilité, à l'exception de la méthode de Nordlund et Häggblad. Mais l'expérience montre que le point de bifurcation favorisant l'apparition du plissement semble souvent être le deuxième point [Singer 97a] tandis que la perte de stabilité apparaît après l'apparition du défaut. En fait, l'instant d'apparition de plis est fortement lié aux imperfections de l'élément considéré. Cette série de méthodes de résolution n'est pas mentionnée ici. Toutefois, la méthode est identique à celle présentée dans le chapitre sur la striction localisée. Elle présente donc le même inconvénient, à savoir la dépendance à l'imperfection initiale.

Aux vues de ces remarques, et en attendant la validation de nos nouveaux travaux, nous avons choisi d'utiliser le critère de Nordlund et Häggblad pour la prédiction du plissement lors de simulations en emboutissage et hydroformage de structures minces. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Prédiction numérique des défauts

Différents procédés de mise en forme sont considérés ici afin de prédire l'apparition de défauts. Les critères utilisés dans cette partie sont le critère basé sur la technique des perturbations linéarisées pour la striction/éclatement et sur la méthode de Nordlund et Häggblad pour le plissement/flambage. Concernant la striction ou l'éclatement, un premier exemple de gonflement d'une plaque sous pression permet de vérifier simplement la précision du critère d'instabilité. On vérifiera également le bon comportement du critère de plis à l'aide du célèbre test de Yoshida. Par la suite, les critères seront appliqués à des cas plus complexes d'hydroformage tels que l'hydroformage d'une forme en T et l'hydroformage dans une cavité cylindrique. L'application des critères de défauts se trouve alors complétée par l'analyse de procédés d'emboutissage.

4.1 Test de gonflement hydraulique

L'essai de gonflement consiste à déformer plastiquement une tôle mince sous l'effet d'un fluide sous pression. Le flan est retenu entre la matrice et le serre-flan (figure 4-1). Cet essai sert à caractériser des matériaux utilisés en mise en forme et soumis à des sollicitations biaxiales. Il permet également de déterminer les déformations critiques en vue de la construction de Courbes Limites de Formage. En effet, si pour une matrice

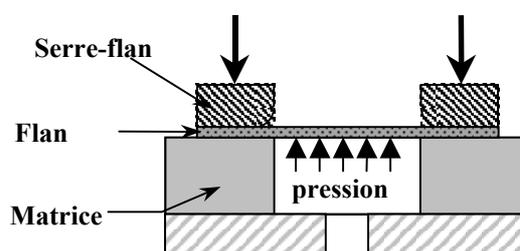


FIG. 4-1: Définition de l'essai de gonflement.

circulaire, le chemin de déformation est équi-biaxé, il peut être modifié en utilisant une matrice de forme ovoïdale.

Des expérimentations ont été réalisées par J.F. Michel au LMARC [Michel 00] sur des tôles en aluminium d'épaisseur 0.92 mm. Les caractéristiques de comportement matériel sont données dans le tableau suivant :

Module d'Young E	70 000 MPa
Coefficient de Poisson ν	0.33
Densité	2700 kg.m ⁻³
Limite élastique σ_0	180 MPa
Loi d'écrouissage	$\sigma_y = 533\bar{\epsilon}^{0.2837}$

Expérimentalement, l'éclatement est observé pour une hauteur de dôme de 15 mm. Il semble alors que le critère d'éclatement défini surestime l'apparition de ce défaut. En effet, le critère indique un défaut pour une hauteur de dôme valant 12 mm. Toutefois, dans les deux cas, l'éclatement est observé au sommet du dôme (figure 4-2). Les raisons de la différence constatée peuvent être multiples. Il convient, dans un premier temps, de noter que l'on travaille ici avec un aluminium dont le comportement est supposé isotrope. Or, on a montré dans le chapitre 2, que dans le cas d'un matériau de type aluminium, la loi de comportement influençait fortement la prédiction de formabilité pour un chemin de contrainte équi-biaxé. De nouvelles simulations utilisant les critères adaptés à ce type

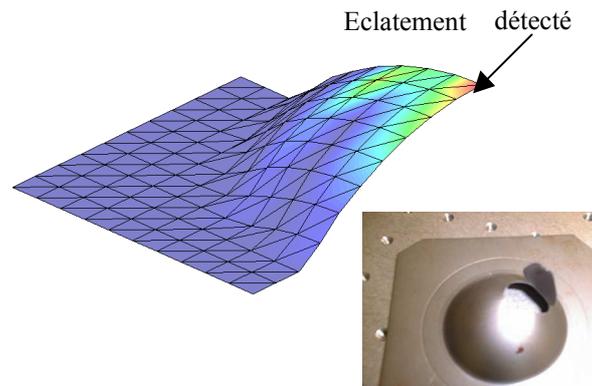


FIG. 4-2: Localisation de la zone éclatée obtenue numériquement et expérimentalement pour un essai de gonflement hydraulique.

de matériaux devraient permettre d'affiner la prédiction de l'éclatement dans le cas du gonflement hydraulique.

4.2 Test de Yoshida

Le test de Yoshida [Yoshida 83] permet de caractériser la formation de plis d'une tôle. Il s'agit d'étirer une tôle carrée suivant l'une de ses diagonales. Il en résulte une contrainte de compression dans le centre de la pièce qui entraîne l'apparition de plis. On se propose, dans cette partie, d'appliquer le critère de plissement de Nordlund et Häggblad afin de prédire numériquement l'apparition de plis au cours d'un test de Yoshida.

4.2.1 Prédiction de plis

Les caractéristiques géométriques et de comportement matériel du test simulé sont données dans la figure 4-3 et le tableau ci-dessous :

4.2. Test de Yoshida

Module d'Young E	196.7 MPa
Coefficient de Poisson ν	0.3
Densité	7900 kg.m ⁻³
Limite élastique σ_0	164.3 MPa
Loi d'écrouissage	$\sigma_y = 1453 (9.10^{-3} + \bar{\epsilon}^p)^{0.52836}$

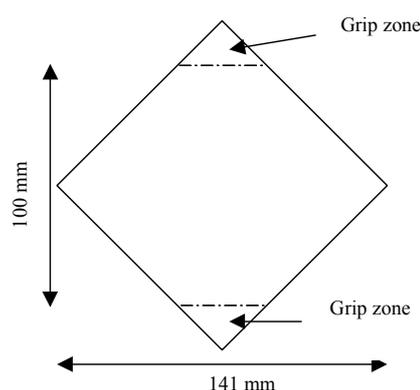


FIG. 4-3: Définition de la géométrie du Yoshida Buckling Test.

Le critère de Nordlund et Häggblad détecte une zone de plis pour un déplacement axial valant 22.25 mm (figure 4-4). L'un des autres critères utilisés lors de simulation éléments finis pour repérer les zones de plis est un critère basé sur l'analyse des normales en chaque élément du maillage. Ce critère possède l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et peu coûteux en temps de calcul. Cependant, l'analyse des normales en chaque élément du maillage tend à montrer, sur cet exemple, qu'un critère basé sur ces vecteurs ne serait pas assez prédictif. En utilisant une telle méthode, les plis sont détectés, mais non prédits, contrairement au critère de Nordlund et Häggblad.

Concernant la validité du critère de Nordlund et Häggblad, la comparaison entre les zones de plis détectés pour un déplacement axial de 22.25 mm (figure 4-4) et la forme finale de la tôle (figure 4-5) tend à indiquer que le critère est suffisamment précis pour repérer la formation de plis au cours de l'essai de flambage de Yoshida. Le critère de Nordlund et Häggblad pourrait alors être utilisé numériquement en vue de classer les

différents matériaux suivant leur prédisposition à flamber ou non.

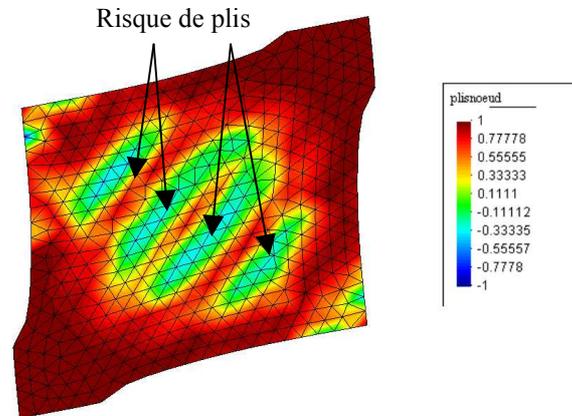


FIG. 4-4: Distribution du critère de Nordlund et Häggblad pour un déplacement axial de 22.5 mm.

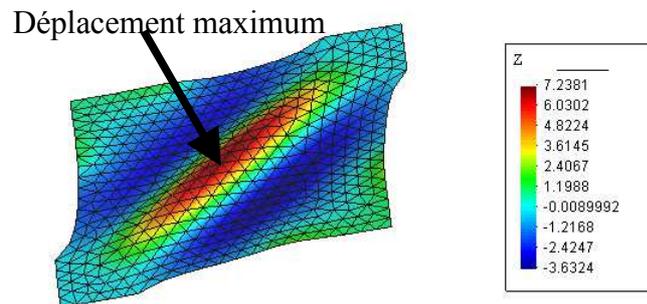


FIG. 4-5: Distribution du déplacement normal au plan de la tôle.

4.2.2 Effet de l'endommagement sur le critère de plissement

L'endommagement est considéré via le modèle de Lemaitre. Ce modèle dépend du paramètre de dimensionnement a_0 et de l'exposant s_0 valant respectivement pour notre exemple 3.1 MPa et 1. Les autres caractéristiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, ...) sont identiques à celles de la partie précédente.

4.2. Test de Yoshida

En comparant les formes finales obtenues par le test de Yoshida d'un matériau non-endommagé (figure 4-7) et d'un matériau endommagé (figure 4-6), on constate que l'amplitude des plis est modifiée.

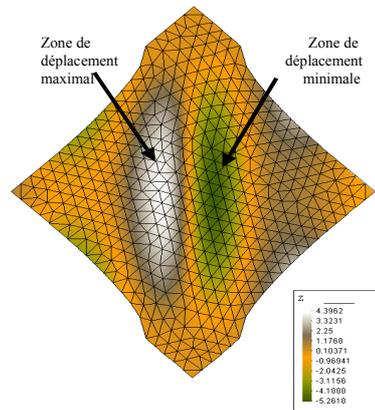


FIG. 4-6: Distribution du déplacement normal au plan de la pièce pour un matériau endommagé.

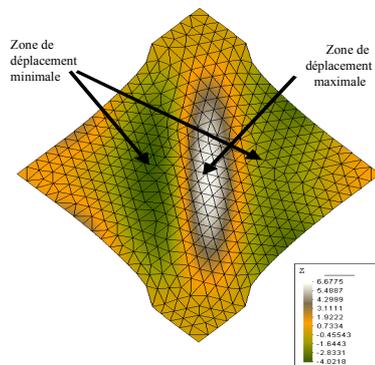


FIG. 4-7: Distribution du déplacement normal au plan de la pièce pour un matériau non-endommagé.

Dans le cas du matériau endommagé, l'amplitude vaut 10.5 mm tandis qu'elle est égale à 9.5 mm dans le cas du matériau non-endommagé. Le degré d'endommagement d'un matériau semble donc influencer l'apparition et la nature de plis durant l'essai de Yoshida.

On retrouve ce phénomène en observant l'évolution du critère de plissement dans le cas de matériau endommagé et sain. Si, dans le cas d'un matériau sain, le critère de plissement semble évoluer correctement, avec une bonne répartition des zones détectées (figure 4-9), la distribution du critère de plissement dans le cas d'un matériau endommagé paraît moins bien définie (figure 4-8). La prise en compte de l'endommagement semble entraîner des perturbations algorithmiques influençant le critère de Nordlund et Häggblad.

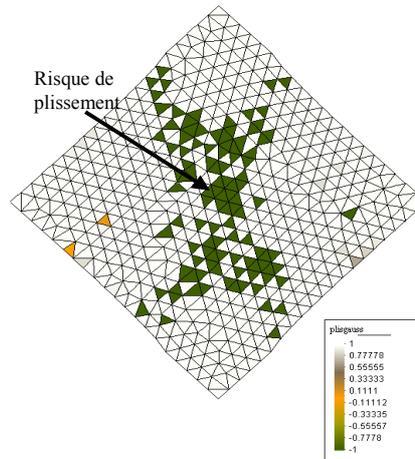


FIG. 4-8: Distribution élémentaire du critère de Nordlund et Häggblad du matériau endommagé pour un déplacement axial de 6.25 mm.

Ainsi, on constate l'apparition d'un risque de plissement dans le cas d'un matériau endommagé au tout début du procédé, c'est-à-dire pour un déplacement axial de 6.25 mm (figure 4-8). On remarque également que la zone détectée indique un risque de plissement à proximité de la partie de la tôle qui est serrée par les mors.

Le couplage du critère de Nordlund et Häggblad avec le code éléments finis du LMARC pour détecter des plis dans le cas d'un matériau endommagé semble pour l'instant peu précis. Une amélioration du calcul des contraintes pourrait résoudre une partie des problèmes rencontrés lors de la détection de plis dans le cas d'un matériau endommagé.

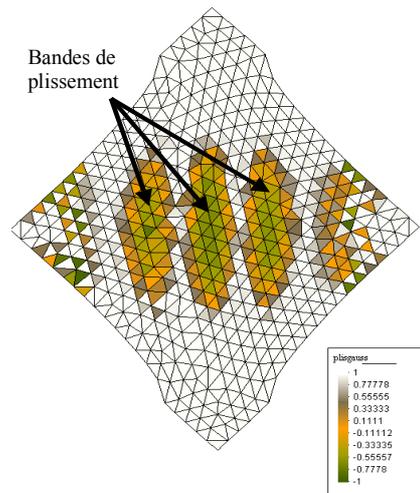


FIG. 4-9: Distribution élémentaire du critère de Nordlund et Häggblad du matériau non-endommagé pour un déplacement axial de 22.25 mm.

4.3 Hydroformage de tubes

L'hydroformage de tubes consiste à déformer plastiquement un tube dans une cavité sous l'effet d'un fluide sous pression et de pistons axiaux. On peut trouver différentes variantes de ce procédé (voir par exemple [Zhang 99]). Les défauts pouvant apparaître lors de tels procédés sont l'éclatement, le flambage et le plissement qui peut être considéré comme du flambage local ([Koç 02]).

Dans un premier temps, deux exemples simples ont été mis en œuvre numériquement afin de vérifier la précision des critères d'éclatement et de flambage. Par la suite, l'apparition de striction localisée lors d'un procédé d'hydroformage de forme en T et la prédiction de flambage lors de la simulation de l'hydroformage axisymétrique d'un tube sont étudiées.

4.3.1 Prédiction de l'éclatement de tube

On considère un tube en expansion libre. Le tube est soumis à une pression interne ; les bords sont supposés libres.

Les caractéristiques de comportement matériel du tube sont données par :

Module d'Young	210 000 MPa
Coefficient de Poisson	0.3
Limite élastique	374 MPa
Loi d'écrouissage	$618.29 (0.0141136 + \bar{\epsilon}^p)^{0.118}$

Le rayon du tube vaut 40 mm, son épaisseur mesure 2 mm et la longueur est égale à 100 mm.

Cet exemple permet de réduire au maximum les instabilités numériques dues, entre autre, à la prise en compte du contact.

L'application du critère d'instabilité à cet exemple indique l'apparition d'une zone d'éclatement pour une pression de 54 MPa (figure 4-10).

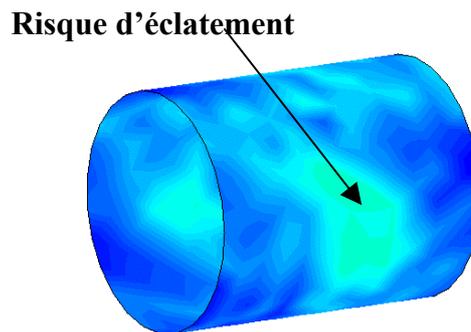


FIG. 4-10: Apparition d'une zone d'éclatement pour une pression de 54 MPa.

Le chemin de déformation étant uniaxial, on peut utiliser le critère de Hill qui indique alors que la pression critique vaut 52 MPa [Boudeau 01a]. La comparaison entre les résultats numériques et analytiques semblent concorder.

De plus, la comparaison entre l'évolution du critère d'éclatement pour un point situé au bord du tube et un point situé au centre du tube indique clairement que le risque d'éclatement se situe au centre du tube (figure 4-11).

Une comparaison, pour les mêmes points, de l'évolution de l'épaisseur semble moins

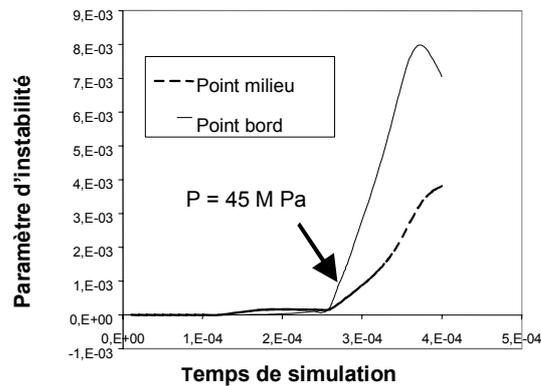


FIG. 4-11: Comparaison de l'évolution du critère d'instabilité pour un point situé au centre du tube et un point situé au bord du tube.

significative (figure 4-12). Sur ce cas élémentaire, l'efficacité de la méthode d'instabilité par rapport à une méthode basée sur l'épaisseur est évidente.

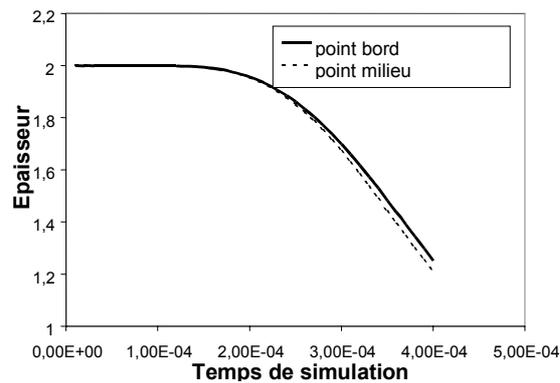


FIG. 4-12: Comparaison de l'évolution de l'épaisseur pour un point situé au centre du tube et un point situé au bord du tube.

4.3.2 Analyse de flambage

On regarde le comportement d'un tube subissant uniquement un effort axial à chacune de ses extrémités. De même que pour l'exemple précédent, afin d'éviter les instabilités numériques dues à la prise en compte du contact, on choisit de travailler sans matrice.

Afin de comprendre et d'observer l'apparition des plis, on s'intéresse à l'évolution de grandeurs pour deux points A et B situés respectivement dans une zone saine et dans une zone de plis (figure 4-13).

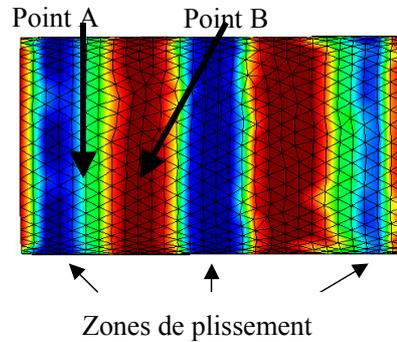


FIG. 4-13: Distribution du critère de Nordlund et Häggblad pour un temps de simulation égal à 0.08 ms.

Au début du procédé, c'est-à-dire lors de la phase de déformation élastique, plusieurs zones de plis sont détectées. Pour le point A, respectivement le point B, le passage dans le domaine plastique a lieu pour un temps de simulation valant 0.06 ms, respectivement 0.07 ms. On remarque que, durant la phase élastique, le calcul de la première composante du tenseur des taux de contraintes est fortement oscillant (figure 4-14). La valeur de cette composante tend à se stabiliser ensuite. Le critère de plissement de Nordlund et Häggblad étant fortement influencé par le tenseur des taux de contraintes, la prédiction de défaut durant la phase élastique (figure 4-13) s'explique alors par les variations observées sur la figure 4-15. Ces plis peuvent être négligés dans le cas de l'hydroformage de tube puisque seuls les plis apparaissant dans le domaine plastique limitent le procédé. On ne s'intéressera donc par la suite qu'aux plis prédits dans le domaine plastique. Le plissement est alors constaté pour un temps de procédé de 0.08 ms (figure 4-13). La contrainte de compression vaut à cet instant -134 MPa et le déplacement axial correspondant est égal à 1.74 mm. Pour cet exemple simple, on peut utiliser les travaux de Timoshenko qui prédisent l'apparition de plis pour une contrainte de compression valant -142 MPa correspondant à un temps de procédé de 0.09 ms. La contrainte critique obtenue par le

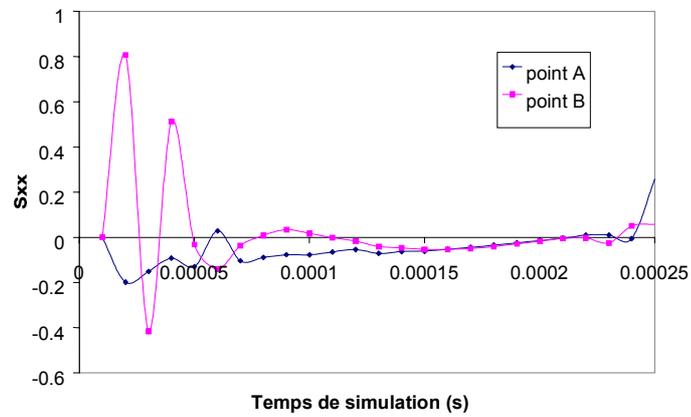


FIG. 4-14: Évolution de σ_{xx} en fonction du temps en 2 points A et B du tube.

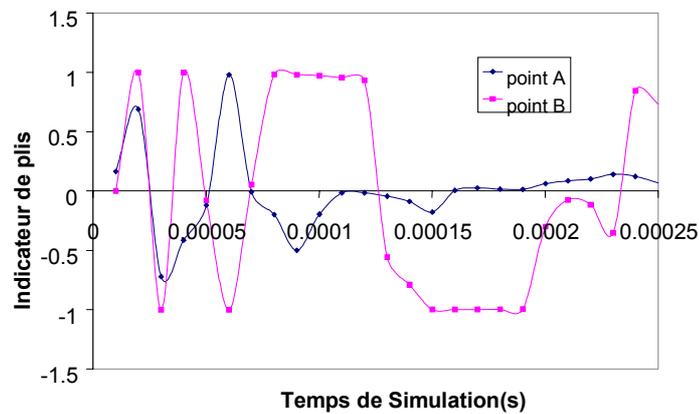


FIG. 4-15: Évolution du critère de plissement de Nordlund et Häggblad en fonction du temps pour deux points A et B du tube.

critère de Timoshenko étant la valeur maximale, car obtenue par une étude de stabilité, le critère de Nordlund et Häggblad semble donc suffisamment précis en comparaison avec ce critère.

4.3.3 Simulation d'une pièce en T

Définition du procédé

L'hydroformage en forme de T d'un tube consiste à déformer de manière non-axisymétrique le tube dans une matrice sous l'action de la pression interne créée par un fluide et de pistons axiaux s'exerçant à chaque extrémité du tube. La cavité de la matrice peut être fermée et fixe mais le tube risque d'éclater au sommet du dôme formé. Afin d'éviter ce problème, la hauteur de la cavité est mobile grâce à l'utilisation d'un contre-piston sur lequel vient se plaquer le sommet du dôme (figure 4-16).

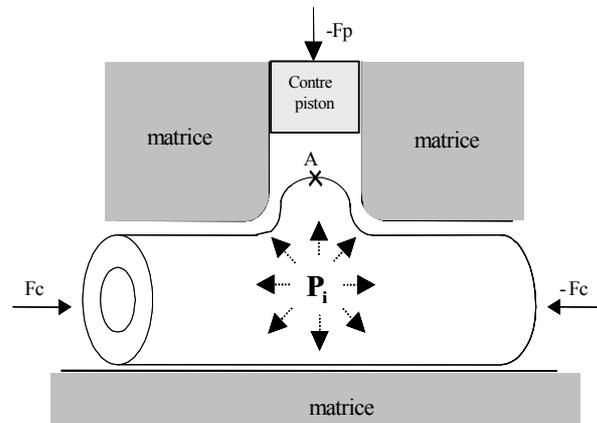


FIG. 4-16: Le tube soumis à un effort axial F_c , à une pression interne P_i et à un effort du contre-piston F_p est déformé dans la matrice.

Le tube utilisé a pour diamètre 40.8 mm, pour épaisseur 2.1 mm et pour longueur 150 mm. Les paramètres de comportement matériel du tube sont donnés par :

4.3. Hydroformage de tubes

Module d'Young	72 000 MPa
Coefficient de Poisson	0.32
Limite élastique	40.74 MPa
Loi d'écroutissage	$241.77(0.00383 + \bar{\varepsilon}^p)^{0.32}$

Le procédé est défini par le chemin de pression interne, le chemin du déplacement des pistons axiaux et éventuellement par le chemin du contre-piston. Par la suite, quatre chemins de pression en fonction du déplacement axial seront étudiés (voir figure 4-17)

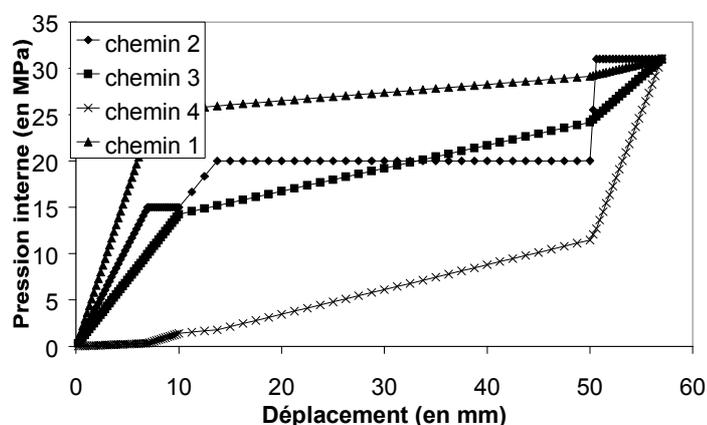


FIG. 4-17: Différents chemins de pression interne en fonction du déplacement axial.

Influence de la pression sur le critère de striction localisée.

Lors de simulations éléments finis, l'élément choisi est un élément coque. La composante σ_{33} du tenseur des contraintes n'est pas calculée puisque l'on travaille sous hypothèse de coques minces. Par contre, cette composante intervient analytiquement dans le calcul du critère de striction localisée. Ainsi, lorsque le tube est soumis à une pression interne p et que celui-ci entre en contact avec la matrice, il s'exerce la même force de chaque côté du tube. On impose alors $\sigma_{33} = -p$ afin de bien considérer l'effet de la pression interne. La contrainte σ_{33} est supposée uniforme dans l'épaisseur. La figure 4-18 représente la répartition du critère de striction localisée sur le tube lors d'un procédé

d'hydroformage sans imposer $\sigma_{33} = -p$. Les zones bleues sont les zones exemptes de risque d'apparition de striction ; les zones rouges sont les zones présentant un fort risque de striction ; les zones vertes sont les zones intermédiaires. La figure 4-19 représente la répartition du critère de striction localisée lors du même procédé d'hydroformage avec prise en compte de la pression, c'est-à-dire que l'on impose $\sigma_{33} = -p$. En comparant les figures 4-18 et 4-19, on constate immédiatement l'influence de la prise en compte de la pression sur le critère de striction localisée. Ce paramètre ne pourrait être considéré par une analyse sous hypothèse de contraintes planes.

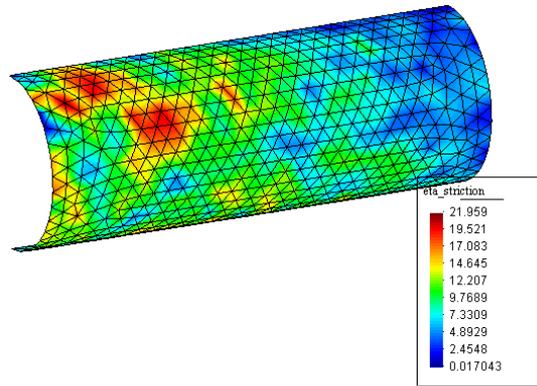


FIG. 4-18: Distribution du critère de striction d'après l'analyse en perturbation. La pression n'est pas prise en compte.

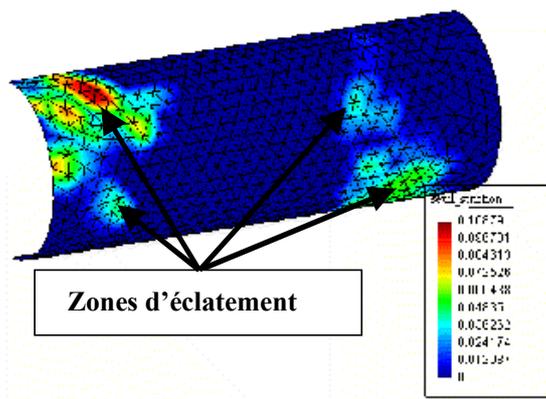


FIG. 4-19: Distribution du nouveau critère d'éclatement. La pression est prise en compte.

Influence des instabilités numériques sur le critère de striction localisée

La figure 4-20 représente l'évolution du critère de striction localisée en fonction du déplacement axial au sommet du dôme (point A sur la figure 4-16) pour les quatre chemins de pression en fonction du déplacement définis sur la figure 4-17. Pour ces qua-

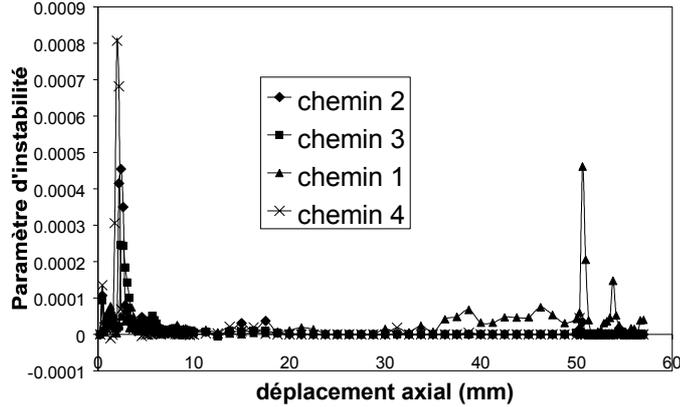


FIG. 4-20: Évolution du critère initial d'instabilité en fonction du déplacement axial pour les quatre chemins de pression interne en fonction du déplacement axial. Le procédé a été réalisé avec un contre-piston.

tre chemins, on constate de forts niveaux d'instabilité en début de procédé. Ces niveaux d'instabilité sont donc détectés pour de faibles déformations. Ils correspondent à des instabilités numériques dues au calcul des contraintes. Pour éviter la prédiction de telles instabilités, comme l'on s'intéresse principalement à la recherche dans le domaine plastique, on définit pour la suite le nouveau critère d'instabilité suivant :

$$\text{si } \text{Re}(\eta) > 0 \text{ et } \frac{\dot{\eta}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} > 1 \text{ alors}$$

$$\hat{\eta} = \bar{\varepsilon}\eta \quad (4.1)$$

avec η le critère d'instabilité obtenu par la méthode de perturbation appliquée à l'équilibre tridimensionnel.

Ainsi, pour détecter la striction, on ne s'intéresse qu'aux instabilités survenant pour

des déformations non négligeables.

Influence du contre-piston sur l'apparition d'éclatement

Dans le cas de l'hydroformage en forme de T, l'éclatement, s'il a lieu, apparaît au sommet du dôme, c'est-à-dire le point A sur la figure 4-16.

D'après la figure 4-21, il semble évident que le contre-piston permet de contrôler l'évolution de l'épaisseur au cours de la déformation pour le point A. De même, on voit clairement sur la figure 4-22 que l'introduction d'un contre-piston améliore la formabilité du tube au sommet du dôme.

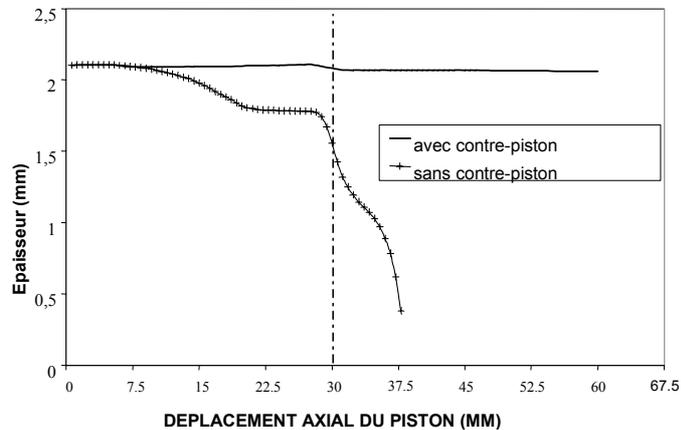


FIG. 4-21: Évolution de l'épaisseur en fonction du déplacement axial dans le cas de procédés d'hydroformage avec et sans contre-piston pour le point A au sommet du dôme.

Dans le cas d'un procédé sans contre-piston, l'éclatement du tube serait prédit pour un déplacement axial d'environ 30 mm. Cet instant correspond à une épaisseur d'environ 1,55 mm. On observe surtout une décroissance rapide de l'épaisseur. Ainsi, dans ce cas, un critère en taux d'épaisseur pourrait être utilisé pour caractériser l'instant de l'éclatement du tube. L'utilisation d'un tel critère dans ce cas tient au fait que la diminution d'épaisseur s'effectue localement au sommet du dôme. Comme cela a été précisé pour le procédé d'expansion libre de tube, la généralisation de l'utilisation d'un critère basé sur l'évolution de l'épaisseur ne semble pas fiable.

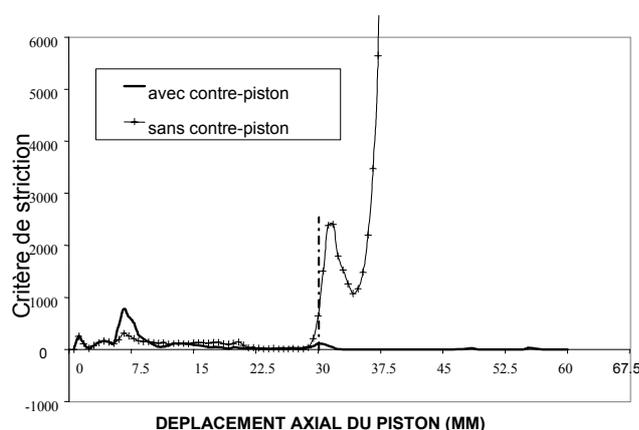


FIG. 4-22: Évolution du critère d'éclatement en fonction du déplacement axial au point A situé au sommet du dôme pour des procédés d'hydroformage avec et sans contre-piston.

Influence du couple pression interne-déplacement axial

Le chemin défini par la pression interne en fonction du déplacement axial est l'un des paramètres importants des procédés d'hydroformage. En effet, suivant ce chemin on peut avoir ou non apparition de défauts.

On observe l'influence de ce chemin sur l'apparition d'éclatement dans le cas d'un procédé d'hydroformage. Pour cela, plusieurs simulations avec différents chemins ont été réalisées dans le cadre du même procédé d'hydroformage d'une forme en T que précédemment (figure 4-17).

Dans un premier temps, on se place dans un cas sans contre-piston. On ne s'intéresse qu'au chemin 2 et 3 (figure 4-17). Le chemin 3 correspond à une évolution linéaire de la pression interne en fonction du temps contrairement au chemin 2 qui est non-linéaire.

Pour le chemin linéaire (chemin 3), l'évolution de l'épaisseur en fonction du déplacement axial (figure 4-23) semble plus régulière que pour le chemin non-linéaire (chemin 2). Ceci se trouve confirmé par le fait que l'on détecte l'apparition d'éclatement pour un déplacement axial de 16.25 mm dans le cas du chemin non-linéaire (figure 4-24). Ce déplacement axial correspond à une épaisseur de 1.56 mm pour le chemin non-linéaire, soit une diminution d'épaisseur de 25 %.

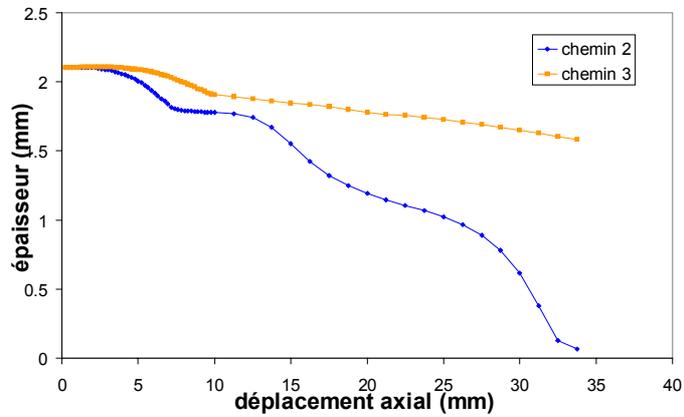


FIG. 4-23: Évolution de l'épaisseur en fonction du déplacement axial pour un point situé au sommet du dôme. Le procédé a été réalisé sans contre-piston et avec deux chemins de pression interne en fonction du déplacement axial différents.

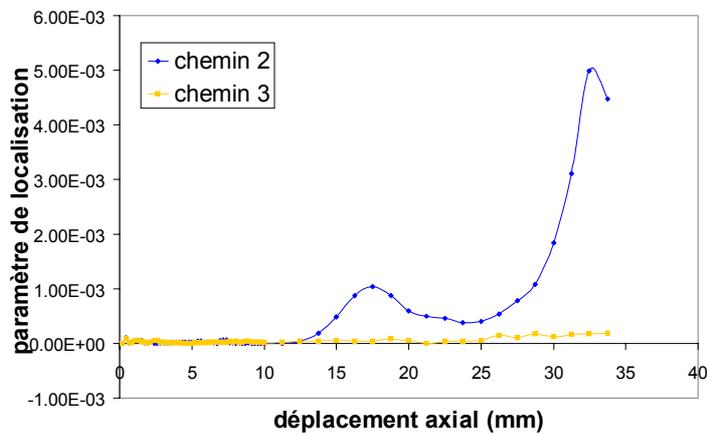


FIG. 4-24: Évolution du critère d'éclatement en fonction du déplacement axial pour un procédé d'hydroformage d'une forme en T sans contre-piston. Deux chemins en pression non-linéaire (chemin 2) et linéaire (chemin 3) sont comparés.

4.3.4 Influence de paramètres procédés sur l'apparition de plis.

On simule le procédé d'hydroformage (figure 4-25) proposé dans [Koç 02]. La longueur

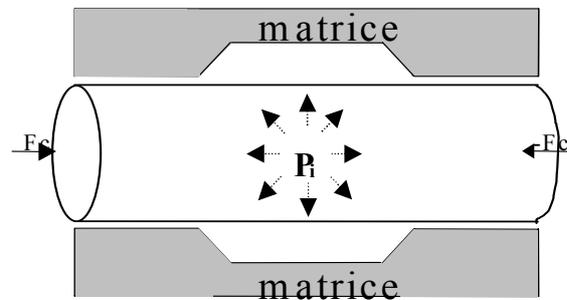


FIG. 4-25: Le tube soumis à une pression interne P_i et à un chargement axial F_c est formé dans la matrice.

du tube, le diamètre interne et l'épaisseur initiale valent respectivement 300 mm, 94 mm et 6 mm. Le matériau considéré est un acier SAE 1008. On considère ici deux chemins de pression interne en fonction du déplacement axial différents (figure 4-26) afin de mettre en évidence l'influence de ce chemin sur l'apparition du flambage. Le chemin nommé chemin 1 est un chemin sain expérimentalement.

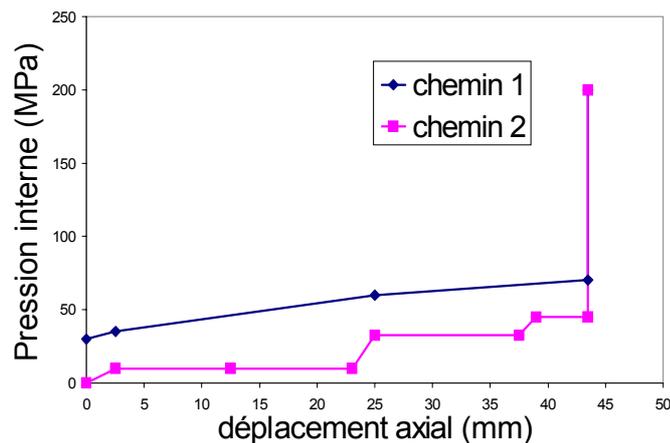


FIG. 4-26: Définition de deux chemins de pression interne en fonction du déplacement axial.

La prédiction du plissement par le critère de Nordlund et Häggblad indique une zone de plis dans la partie du tube en expansion pour le chemin 1. Ce défaut est détecté pour un temps de procédé égal à 1.20 ms. Ceci est dû à une variation importante de l'épaisseur. En effet, l'épaisseur, qui vaut 6 mm au début du procédé, décroît vers la valeur de 4.31 mm pour un temps de 1.05 ms. L'itération suivante est le siège d'un accroissement d'épaisseur dû au contact entre la matrice et le tube. Cette variation d'épaisseur produit une fluctuation du tenseur des taux de déformation; on détecte alors une bande de plissement.

La forme obtenue à partir du chemin numéro 2 n'est pas correcte. La pression est insuffisante pour compenser la force de compression axiale. Ainsi, deux bandes de flambage apparaissent durant le procédé d'hydroformage (figure 4-27). La première de ces bandes survient pour une pression interne de 10 MPa et un déplacement axial de 26 mm. Elle s'arrête ensuite de s'accroître; il y a alors formation de la deuxième bande pour une pression interne de 32.6 MPa.

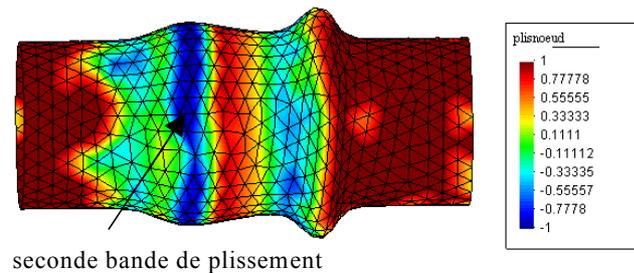


FIG. 4-27: Détection d'un pli d'après le critère de Nordlund et Häggblad pour une pression interne de 32.6 MPa.

On a bien retrouvé numériquement les a-priori expérimentaux, à savoir une forte dépendance de la formation de défauts au chemin de procédé utilisé.

4.4 Mise en forme de tôles

4.4.1 Prédiction de striction localisée

L'hydroformage de flan est une alternative à la mise en forme de tôles par emboutissage. Ce procédé permet d'améliorer la formabilité du matériau tout en offrant une meilleure répartition d'épaisseur sur la partie de la tôle en contact avec le poinçon. Le procédé consiste en la déformation de la tôle, sous serre-flan ou non, dans une cavité sous l'action d'un poinçon. Il s'exerce une pression sur le bord de la tôle qui n'est pas en contact avec le poinçon (figure 4-28).

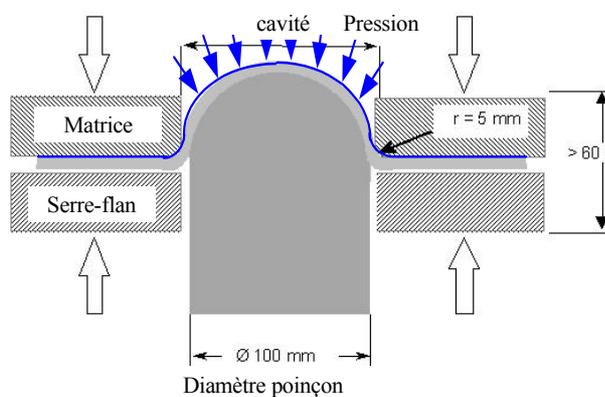


FIG. 4-28: La tôle est déformée dans une matrice par un poinçon. Une pression s'exerce sur la partie de la tôle qui n'est pas en contact avec le poinçon.

On propose dans cette partie de montrer l'amélioration de la formabilité par le procédé d'hydroformage de flan en comparaison avec un procédé d'emboutissage classique ainsi que l'effet de l'effort serre-flan sur l'apparition de striction.

La loi de pression expérimentale considérée a été choisie d'après [Benchmarks 99].

Afin de comparer le procédé d'hydroformage de flan avec le procédé d'emboutissage, on calcule la valeur du critère d'instabilité pour ces deux procédés (figure 4-29). Pour cela, un point dans le mur libre et un point au sommet de l'embouti sont observés.

On constate que la striction apparaît pour un déplacement du poinçon d'environ 60 mm dans le cas de l'hydroformage de flan. La formabilité semble diminuée dans le cas

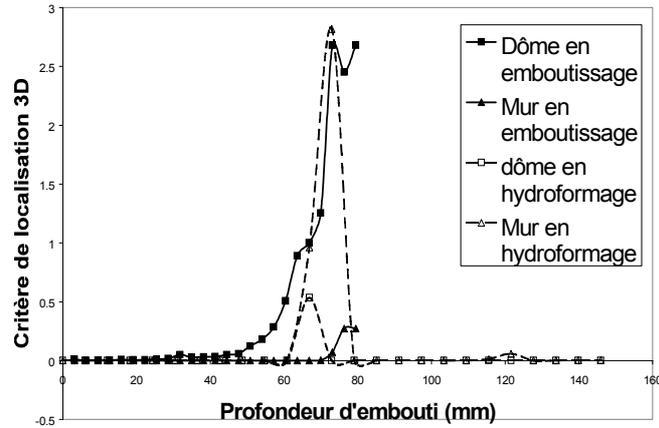


FIG. 4-29: Évolution du critère de striction pour les procédés d'emboutissage et d'hydroformage de flan en deux points de la tôle.

du procédé d'emboutissage puisque la striction est alors prédite pour un déplacement d'environ 50 mm. Ce résultat paraît en accord avec la réalité expérimentale. De plus, la striction n'apparaît pas au même endroit suivant le procédé. En effet, dans le cas de l'emboutissage, la striction se produit au sommet de l'embouti tandis que le mur libre est le lieu de localisation du défaut pour le procédé d'hydroformage de flan.

Si la prise en compte de la pression influence l'apparition de striction, l'effort serre-flan dans le cas de l'emboutissage est l'un des paramètres usuellement ajusté afin d'éviter de tels défauts. En effet, il est bien connu qu'un faible effort serre-flan entraîne un important avalement du flan ce qui permet d'éviter l'apparition de striction. Par opposition, un fort effort serre-flan conduit à un important étirement de la matière pouvant amener le phénomène de striction.

On propose de comparer la prédiction de striction pour deux efforts serre-flan opposés valant 5 kN et 80 kN (figure 4-30).

On observe qu'il n'y a pas apparition de striction localisée au niveau du mur libre quelque soit l'effort serre-flan. Par contre, au sommet de l'embouti, l'augmentation de l'effort serre-flan entraîne une diminution de la formabilité. En effet, un effort serre-flan valant 80 kN conduit à l'apparition de striction pour un déplacement d'environ 50 mm

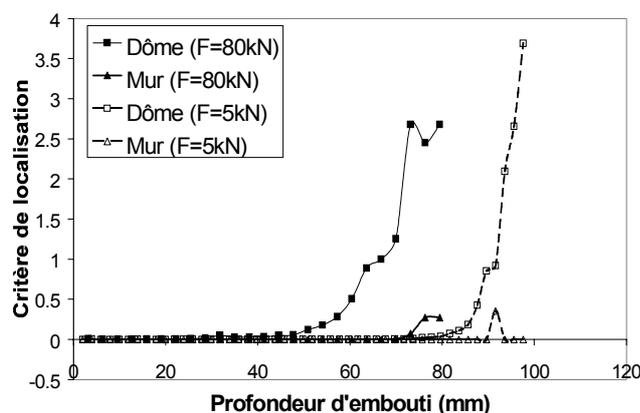


FIG. 4-30: Évolution du critère d’instabilité pour deux efforts serre-flan en deux points situés au sommet de l’embouti et dans le mur libre.

alors qu’un déplacement de 80 mm est nécessaire avant la formation du défaut pour un effort serre-flan valant 5 kN.

4.4.2 Influence du maillage sur le critère de plissement

On observe le même procédé d’emboutissage de tôles que précédemment.

Une première simulation a été réalisée avec un maillage grossier composé de 471 noeuds et 861 éléments. L’application du critère de Nordlund et Häggblad lors de cette simulation montre toute la difficulté de prédire des plis sur ce type de maillage. Dans un premier temps, un effort serre-flan de 5 kN est appliqué. Dès le début du procédé des zones de plis sont détectées (zones bleues sur la figure 4-31). Ces zones se localisent sous le serre-flan et au niveau du rayon matrice. Les zones de plis au niveau du rayon matrice s’expliquent aisément d’après la grossièreté du maillage. Par contre, la prédiction de zones de plis sous le serre-flan pour une faible profondeur d’emboutissage semble peu en accord avec la réalité du procédé. Pour une profondeur d’emboutissage de 79.3 mm, des zones de plis apparaissent naturellement (figure 4-32). Dans ce cas, le critère de plissement de Nordlund et Häggblad semble peu précis bien que certaines de ces zones soient correctement prédites.

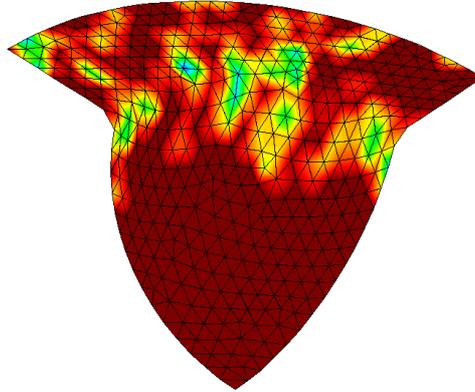


FIG. 4-31: Répartition du critère de plis pour un effort serre-flan de 5 KN en début de procédé.

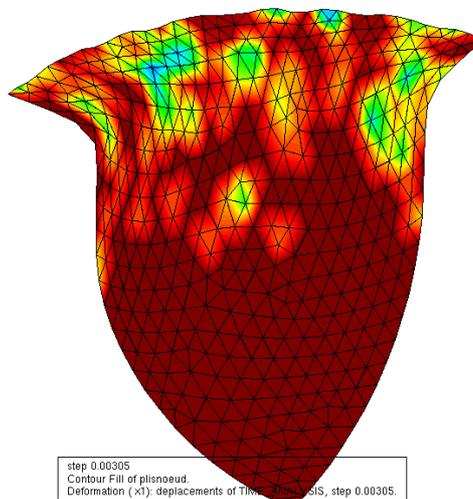


FIG. 4-32: Répartition du critère de plis pour un effort serre-flan de 5 KN et un déplacement poinçon de 79.3 mm.

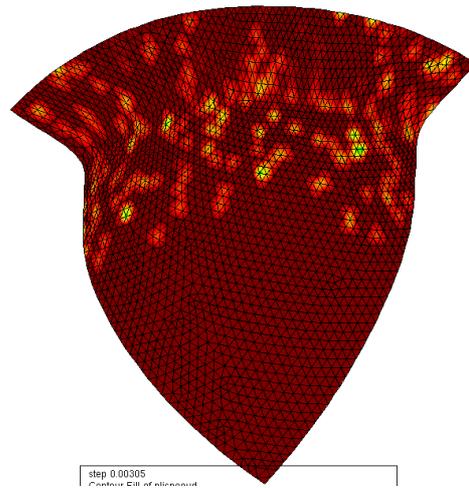


FIG. 4-33: Répartition du critère de plis pour un effort serre-flan de 5 KN et un déplacement poinçon de 79.3 mm.

Afin de vérifier l'influence du maillage sur l'apparition et la prédiction de plis, un maillage plus fin a été utilisé pour simuler ce procédé d'emboutissage. Il est composé de 4529 éléments et 2355 noeuds. On constate alors que les plis observés pour une profondeur d'emboutissage de 79.3 mm n'apparaissent plus (figure 4-33). De plus, des zones très localisées de plissement sont prédites avec le critère de Nordlund et Häggblad. Elles se situent essentiellement au niveau du rayon matrice, sous le serre-flan, mais également sur le mur libre. Toutefois, la répartition de ces zones tend à montrer l'importance jouée par le maillage sur l'apparition et la prédiction de plis en emboutissage de flan.

Pour insister sur le rôle du maillage sur la prédiction de plis, on a choisi un effort serre-flan égale à 80 kN. On s'attend à ne pas voir apparaître de plis sous le serre-flan. Or, avec le maillage grossier, des zones parfois importantes sont encore prédites sous le serre-flan pour de faibles profondeurs d'emboutissage (figure 4-34).

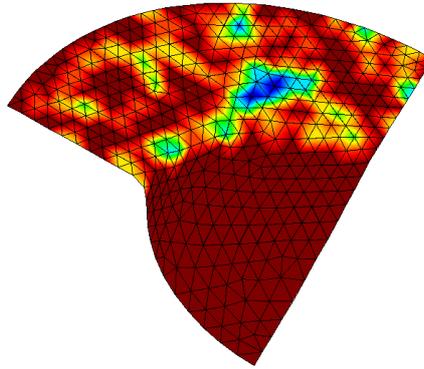


FIG. 4-34: Répartition du critère de plis pour un effort serre-flan de 80 KN et un déplacement poinçon d'environ 50 mm.

4.5 Discussion

Les critères de plissement et de striction ont été appliqués à des procédés d'hydroformage de tubes, de flans et d'emboutissage de flans. Le critère de striction utilisé est basé sur l'analyse linéaire de stabilité par méthode de perturbation. Le critère de plissement est basé sur les travaux de Nordlund et Häggblad.

L'application du critère de striction localisée à un procédé d'hydroformage de tubes a permis de définir un critère modifié permettant de rectifier l'influence des instabilités numériques. Toutefois, ce critère reste sensible à l'algorithme de contact qui engendre des perturbations des composantes du tenseur des contraintes. Ce problème devient omniprésent lors d'un procédé d'emboutissage puisqu'une partie importante du flan est en contact avec la matrice, le serre-flan ou le poinçon. Des améliorations sont donc à apporter au critère de striction localisée et à l'algorithme de contact.

Concernant le critère de plissement, il semble très bien adapté à la prédiction de plis en hydroformage. Par contre, une fois encore, le critère est sensible au contact entre le tube et la matrice. L'application du critère de plissement au procédé d'emboutissage semble très sensible au maillage. Les prédictions fournies pour un maillage grossier paraissent parfois surprenantes et peu réalistes.

4.5. Discussion

Si des améliorations restent à effectuer sur ces critères, leur utilisation a permis de montrer l'influence de paramètres procédés sur l'apparition de défauts.

Mais les résultats numériques obtenus ne peuvent servir de validation de ces critères. Seule la comparaison avec des résultats expérimentaux permettra de vérifier la précision des prédictions.

Chapitre 5

Confrontation de critères de défauts avec l'expérience

Parmi les critères de prédiction de défauts présentés dans les parties précédentes, deux d'entre eux ont fait l'objet d'une implantation dans un code de simulation numérique. Si le comportement des critères de striction localisée par analyse de stabilité et de plissement par l'analyse de Nordlund et Häggblad semble correct, cela ne prouve en rien la justesse de ces critères par rapport à la réalité physique des procédés de mise en forme.

Afin de valider ces critères, une étude expérimentale de procédé d'hydroformage a été menée à l'Université Technologique de Toyohashi sous la direction de Monsieur le Professeur Ken-Ichiro Mori. Les travaux et résultats ont été obtenus grâce à l'aide de M. Patwari et M. Maeno étudiants en Mastère dans ce même laboratoire. Le stage de recherche de 2 mois a été financé par le Ministère de l'Éducation et de la Recherche du gouvernement Japonais (MEXT) dans le cadre des bourses Monbusho.

5.1 Un nouveau procédé d'hydroformage de tubes : Le procédé hammering

De manière usuelle, l'un des moyens de contrôler un procédé d'hydroformage (c'est-à-dire d'éviter l'apparition de défauts) consiste à faire varier le chemin défini par la pression en fonction du déplacement axial. Il est bien connu que, pour augmenter la limite de formabilité d'un matériau, il est préférable d'utiliser un chemin en escalier plutôt qu'un chemin linéaire.

Mais, pour la mise en forme de certaines pièces complexes, les chemins en escalier s'avèrent parfois insuffisants et des défauts apparaissent. Dernièrement, il a été observé industriellement que le procédé de "hammering" permet d'améliorer la limite de formabilité du matériau sans avoir à modifier le déplacement axial. Ce nouveau procédé autorise la mise en forme de pièces difficiles à obtenir par les méthodes conventionnelles d'hydroformage de tubes.

Le procédé hammering consiste en l'utilisation d'un chemin oscillant au lieu d'une variation linéaire entre la pression interne et le déplacement axial. Pour illustrer la discussion, la figure 5-1 représente un chemin linéaire classique, tandis que la figure 5-2 représente le chemin utilisé pour un procédé hammering. Pour se référer à un procédé d'hydroformage de tubes utilisant ce type de chemin, on parlera tantôt de procédé hammering, tantôt de procédé oscillant.

Les paramètres importants de ce procédé, en dehors des paramètres traditionnels, sont le nombre de cycles et l'amplitude de l'oscillation. Il a été constaté expérimentalement que, pour un tube donné avec une géométrie donnée, il existait une fréquence optimale d'oscillations donnant la meilleure forme de tube, c'est-à-dire un tube avec le moins de plis et sans striction ou éclatement. Nous verrons également que la vitesse de déplacement axial du piston représente un paramètre important.

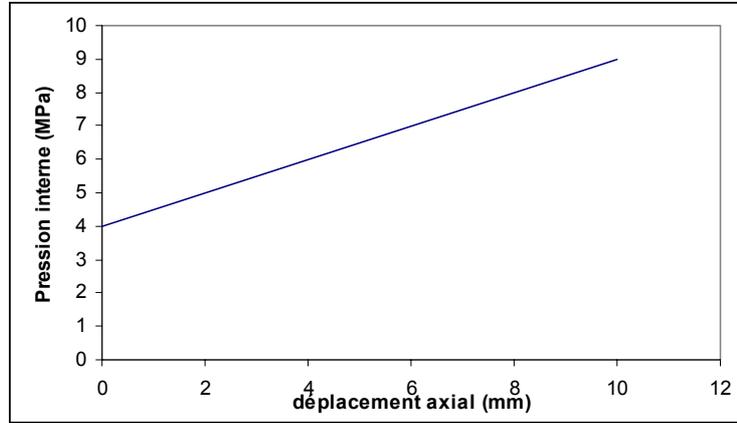


FIG. 5-1: Exemple de chemin linéaire traditionnel

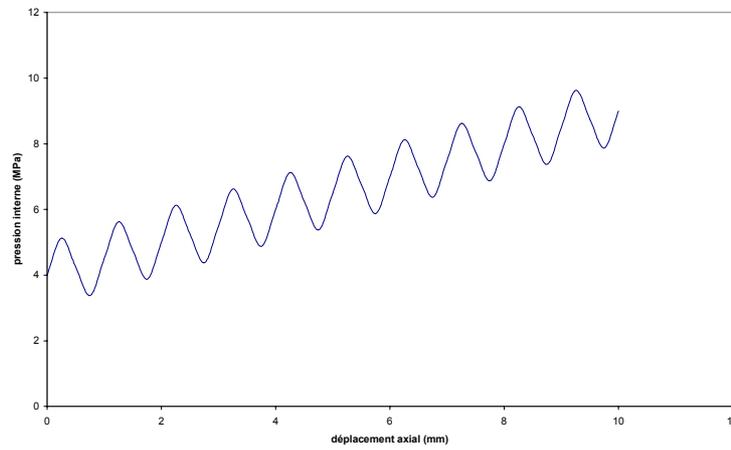


FIG. 5-2: Exemple de chemin utilisé pour le procédé de hammering

5.2 Définition du procédé réalisé

Il s'agit ici d'un procédé d'expansion libre. Pour cela, la hauteur de la cavité de la matrice a été choisie suffisamment grande par rapport aux dimensions du tube.

Le tube est inséré dans la matrice. Il comprend deux bouchons en caoutchouc, d'épaisseur 15 mm, à chacune de ses extrémités. Un liquide est contenu dans le tube entre ces deux bouchons en caoutchouc. La pression interne est créée par changement de volume dû au déplacement du bouchon se situant sur la partie inférieure du tube. Le tube est également soumis à un état de compression axial par un piston depuis le sommet. Les géométries du tube et de la matrice utilisés sont données dans la figure 5-3.

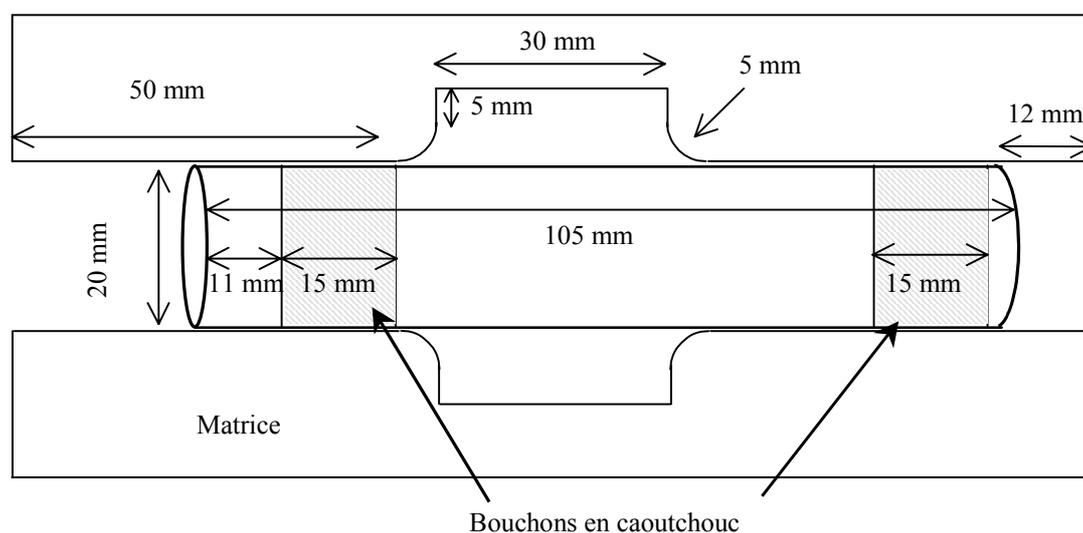


FIG. 5-3: Le fluide est contenu dans le tube entre deux bouchons en caoutchouc. Le tube est déformé à l'intérieur d'une matrice axisymétrique.

5.3 Comparaison expérience/simulation

On souhaite dans un premier temps comparer la géométrie du tube obtenue expérimentalement avec la géométrie prédite par la simulation.

La deuxième phase de cette étude consiste à observer l'influence des paramètres du

procédé hammering sur les critères de défauts. Les critères de défauts définis dans les précédents chapitres peuvent alors être confrontés à la réalité.

5.3.1 Validation de la géométrie numérique

Les tubes utilisés sont des tubes en aluminium A1070 de longueur 105 mm, de diamètre 20 mm et d'épaisseur 1 mm. Ces tubes ont été adoucis.

Les caractéristiques de comportement matériel sont :

coefficient k de la loi d'érouissage $\bar{\sigma} = k\varepsilon^n$ (en MPa)	108
exposant n de la loi d'érouissage $\bar{\sigma} = k\varepsilon^n$	0.2
contrainte limite σ_Y (MPa)	69
coefficient de Poisson ν	0.32
Module d'Young E (GPa)	72
Densité ρ (kg.m ⁻³)	2700

On regarde la géométrie obtenue à différents instants. Pour cette première validation, on n'utilise pas de piston axial. Il s'agit simplement de l'expansion d'un tube dans une matrice.

Pour ce type de procédé, la pression interne varie linéairement en fonction du temps. L'augmentation de la pression s'effectue de manière manuelle. Le contrôle de la pression est donc approximatif.

La pression initiale est d'environ 3 MPa. On a alors une augmentation supposée linéaire de la pression interne.

Pour une valeur de 6.3 ± 0.1 MPa, on constate l'éclatement du tube (figure 5-4)

On constate également que la déformation n'est pas axisymétrique (figure 5-5). Les raisons de ce défaut peuvent être multiples. Elles peuvent être associées à un défaut initial du matériau ou à des défauts provenant du procédé. Le matériau constituant le tube est très doux. Ainsi le tube se déforme facilement. Or, pour la mise en place du procédé, de nombreuses manipulations sont nécessaires, notamment pour insérer les bouchons en caoutchouc à l'intérieur du tube. Il est probable qu'au cours de ces manipulations des

5.3. Comparaison expérience/simulation



FIG. 5-4: Pour une pression de 6.3 MPa, on observe l'apparition du zone d'éclatement du tube au centre de la zone en expansion.



FIG. 5-5: On constate que la déformation du tube n'est pas axisymétrique.

imperfections soient introduites dans le tube.

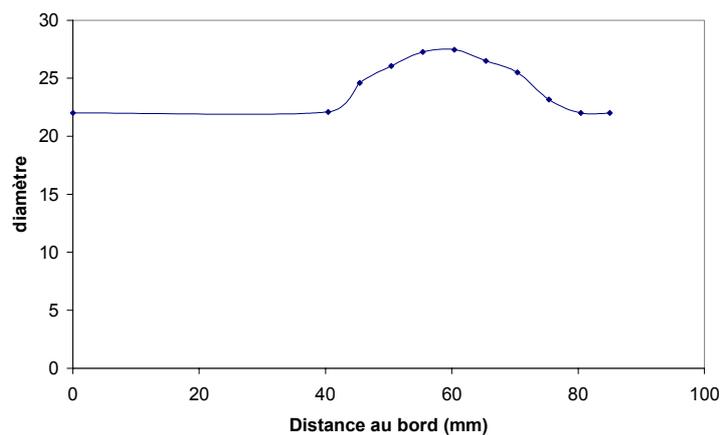


FIG. 5-6: Profil diamétral du tube pour une pression de 6.3 MPa

Le diamètre maximum correspondant à l'éclatement du tube vaut 27.5 mm soit une augmentation du diamètre de 5.5 mm (figure 5-6). On retrouve par la simulation une telle expansion pour une pression interne de 6.76 MPa. Aux vues des conditions de réalisation expérimentale, le résultat numérique semble satisfaisant.

Le paramètre de striction tel qu'il a été défini dans la partie précédente est également observé.

5.3. Comparaison expérience/simulation

Pour une pression de 6.24 MPa, le paramètre devient non-nul de faible amplitude. Cette pression correspond à la transition du domaine élastique au domaine plastique. La distribution des zones de striction est alors non-axisymétrique. La distribution devient axisymétrique pour une pression de 6.72 MPa. Cet état correspond à de fortes valeurs du paramètre de striction. Par contre, le diamètre maximal atteint 2.8 mm, ce qui est insuffisant pour obtenir la rupture du tube. Pour une pression de 6.76 MPa correspondant à la pression de rupture du tube, on constate que l'augmentation du paramètre de striction par rapport à sa valeur maximale devient significative (figure 5-7). On note alors avec intérêt que l'optimisation du procédé par minimisation du paramètre d'instabilité se révélerait efficace.

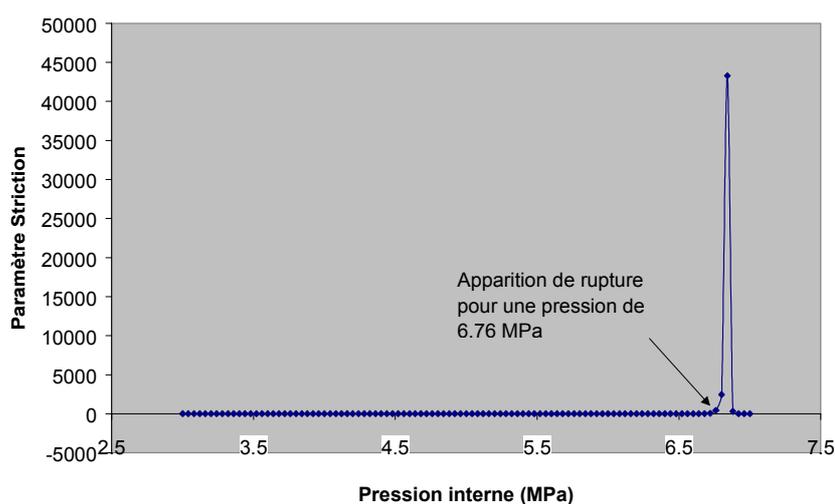


FIG. 5-7: Evolution du paramètre d'instabilité en fonction de la pression interne pour un point situé au sommet de la partie du tube en expansion.

Par contre, la distribution du paramètre d'instabilité prédite sur le tube (figure 5-8) ne semble pas être en adéquation avec le résultat expérimental. Toutefois, la distribution du paramètre d'instabilité n'est pas totalement axisymétrique, on constate en effet des zones plus ou moins larges sur la circonférence de la partie en expansion.

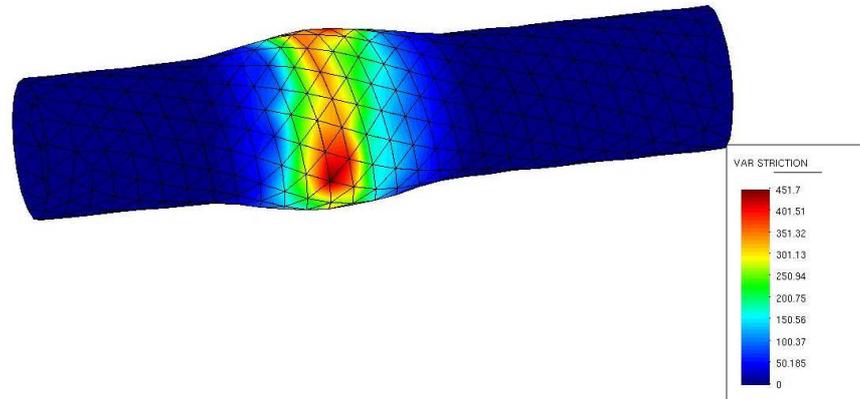


FIG. 5-8: Distribution du paramètre d'instabilité pour une pression interne de 6.76 MPa

5.3.2 Observation qualitative de l'effet du chemin oscillant sur la déformée du tube

On travaille avec des tubes en aluminium A1070 de longueur 105 mm, de diamètre 20 mm et d'épaisseur 1 mm. Ces tubes sont les mêmes que dans la section précédente sauf qu'ils n'ont pas été adoucis.

On réalise un procédé d'hydroformage oscillant et un procédé d'hydroformage linéaire.

Au cours du formage du tube avec le procédé hammering, on constate l'apparition de rupture (figure 5-9). Ceci est dû à l'amplitude de l'oscillation. En effet, il est normal que la rupture apparaisse plus rapidement dans le cas du procédé hammering que dans le cas d'un procédé linéaire puisqu'on rajoute l'amplitude à la valeur de la "pression linéaire". Ainsi, dans notre cas, pour pouvoir observer la différence entre les deux procédés, l'amplitude choisie est de 1 MPa, ce qui correspond à 20% d'augmentation pour une pression de 5 MPa.

Au cours du procédé linéaire on ne remarque aucune bande de striction ; le tube ayant alors une tendance au flambage (figure 5-9). L'évolution de la forme du tube au cours du procédé linéaire est donnée à titre indicatif sur la figure 5-10.

5.3. Comparaison expérience/simulation



FIG. 5-9: Apparition de rupture sur le tube lors du procédé de hammering (gauche). Apparition de flambage lors d'un procédé linéaire (droite)



FIG. 5-10: Évolution de la forme du tube au cours du procédé linéaire.

5.3.3 Comparaison entre chemin linéaire et chemin oscillant

Résultats expérimentaux

On considère désormais un matériau adouci dont les caractéristiques sont les mêmes que pour l'étude d'un tube en expansion simple. On rappelle donc que les tubes utilisés sont des tubes en aluminium A1070 de longueur 105 mm, de diamètre 20 mm et d'épaisseur 1 mm.

Les paramètres de comportement matériel nécessaires à la simulation numérique sont résumés dans le tableau suivant :

coefficient k de la loi d'écroutissage $\bar{\sigma} = k\varepsilon^n$ (en MPa)	108
exposant n de la loi d'écroutissage $\bar{\sigma} = k\varepsilon^n$	0.2
contrainte limite σ_Y (MPa)	69
coefficient de Poisson ν	0.32
Module d'Young E (GPa)	72
Densité ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	2700

On réalise deux procédés distincts : le premier est un procédé linéaire, le second est un procédé oscillant. Dans les deux cas, la pression minimale vaut 5 MPa et la pression maximale est égale à 7 MPa. Le chemin oscillant est défini par un nombre de cycles égale à 105, une vitesse de procédé de 16 mm/min et une amplitude valant 1 MPa.

On regarde l'évolution de la géométrie du tube déformé pour des déplacements axiaux valant 5 mm, 7 mm, 8 mm et 10 mm (figures 5-11 et 5-12). On peut se référer à la figure 5-13 pour obtenir la pression interne correspondante.

La comparaison de la géométrie des tubes déformés suivant les procédés linéaire et oscillant tend à montrer que le procédé linéaire, tel qu'il a été réalisé, favorise l'apparition de flambage du tube. La différence entre procédé oscillant et procédé linéaire se remarque particulièrement pour les déplacements en cours de procédés (Figures 5-14, 5-15, 5-16, 5-17).

Dans le cas du procédé linéaire, pour le déplacement axial final de 10 mm, on constate que le tube est flambé pour le profil haut, tandis que le profil bas est en expansion (figure

5.3. Comparaison expérience/simulation

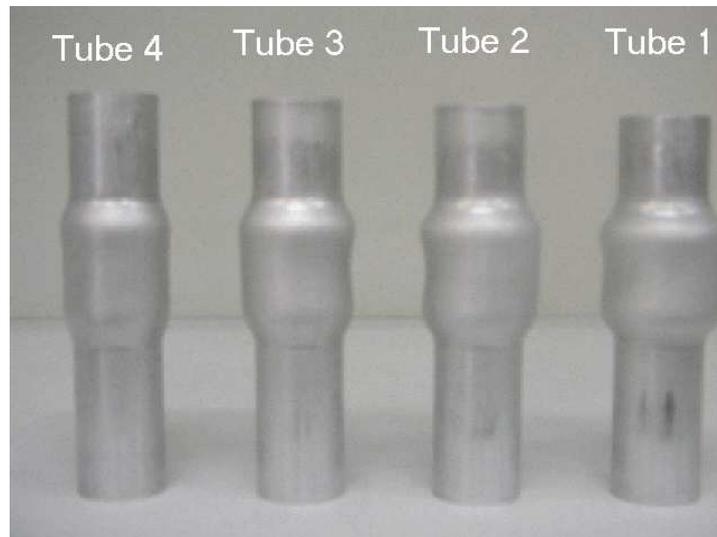


FIG. 5-11: Évolution de la géométrie du tube pour différents déplacements dans le cas d'un procédé oscillant : 5 mm (tube 4), 7 mm (tube 3), 8 mm (tube 2), 10 mm (tube 1)

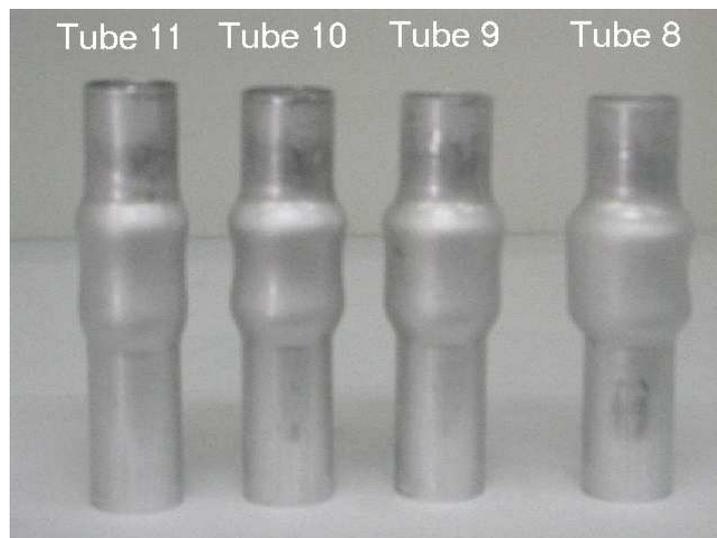


FIG. 5-12: Évolution de la géométrie du tube pour différents déplacements dans le cas d'un procédé linéaire : 5 mm (tube 11), 7 mm (tube 10), 8 mm (tube 9), 10 mm (tube 8)

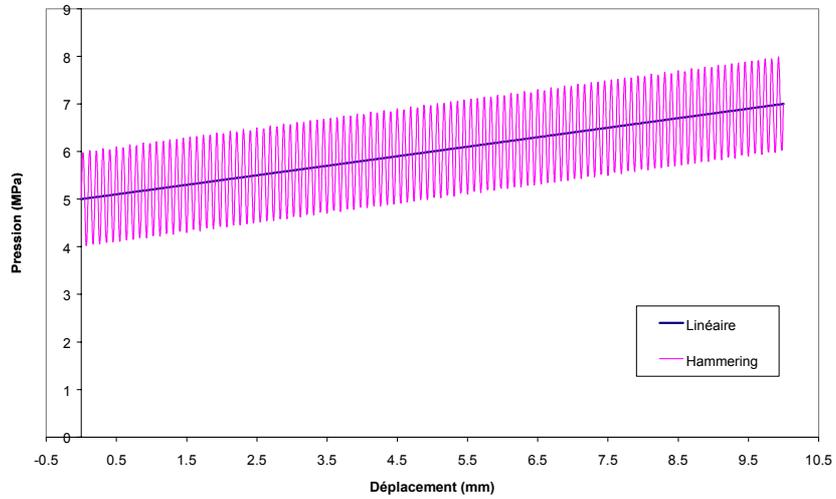


FIG. 5-13: Chemins linéaire et oscillant utilisés.

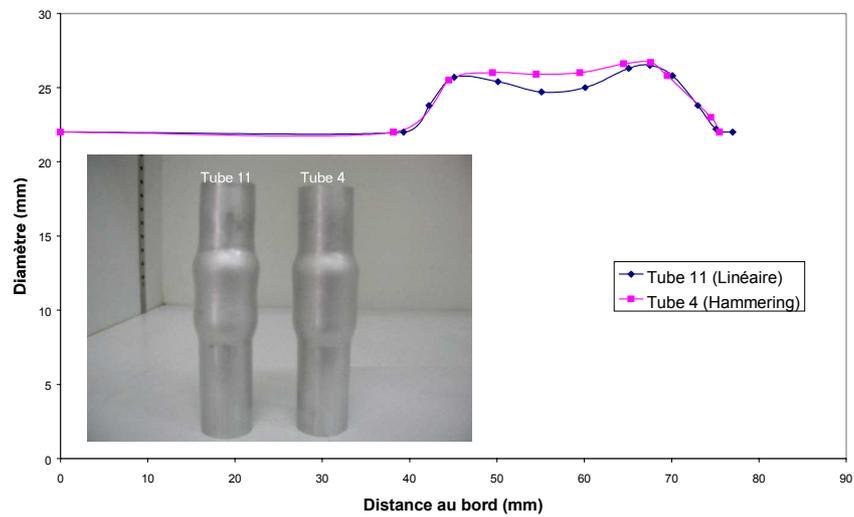


FIG. 5-14: Profil diamétral et tubes déformés pour un déplacement axial de 5 mm par un procédé linéaire (Tube 11) et un procédé oscillant (Tube 4).

5.3. Comparaison expérience/simulation

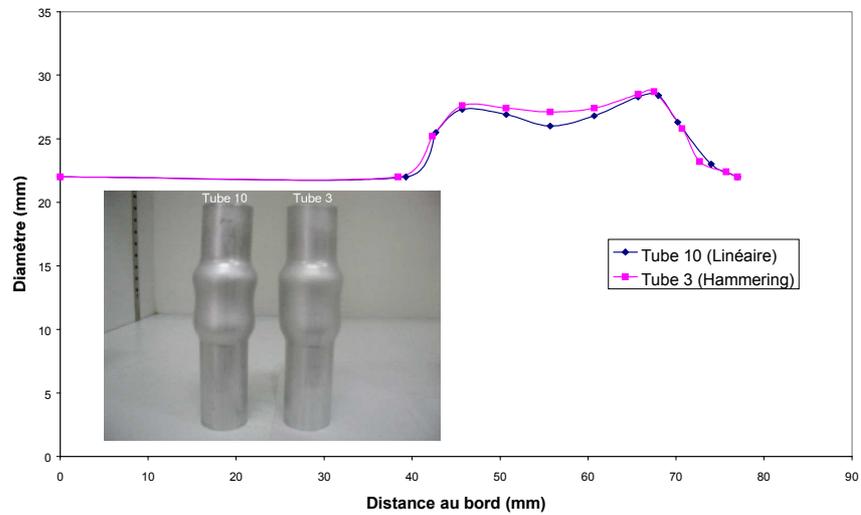


FIG. 5-15: Profil diamétral et tubes déformés pour un déplacement axial de 7 mm par un procédé linéaire (Tube 10) et un procédé oscillant (Tube 3).

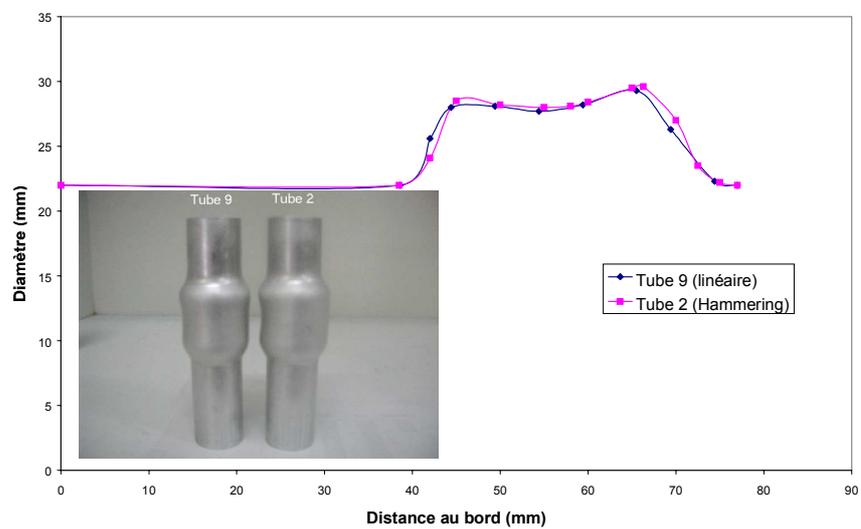


FIG. 5-16: Profil diamétral et tubes déformés pour un déplacement axial de 8 mm par un procédé linéaire (Tube 9) et un procédé oscillant (Tube 2).

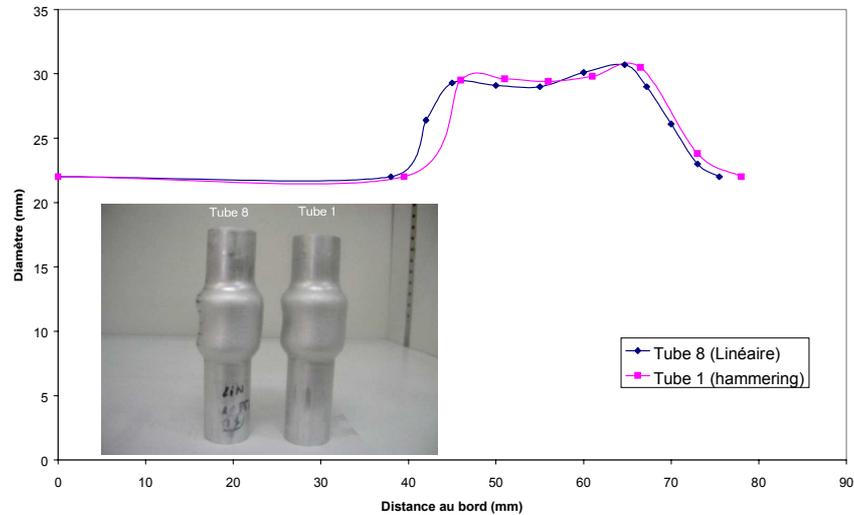


FIG. 5-17: Profil diamétral et tubes déformés pour un déplacement axial de 10 mm par un procédé linéaire (Tube 8) et un procédé oscillant (Tube 1).

5-18). On remarque d'ailleurs l'apparition d'une bande d'amincissement sur ce dernier. Cette dissymétrie est une fois de plus attribuée à la mise en place du procédé et plus précisément des bouchons dans le tube. On introduit alors une imperfection dans le tube qui devient dominante pour une déformation importante du tube. Ceci est confirmé par le fait que dans le cas du matériau original, c'est-à-dire non-adouci, on n'observe pas cette dissymétrie.

Remarque 69 *Dû aux limites technologiques, le chemin oscillant n'a pu être réalisé jusqu'au terme du déplacement axial. En effet, à partir d'un certain déplacement, le piston de pression ne pouvait plus générer d'augmentation de pression.*

La dissymétrie de déformation du tube entraîne alors une meilleure répartition d'épaisseur dans le cas du procédé oscillant (figure 5-19).

Comparaison numérique

Si l'on observe une différence entre procédé linéaire et oscillant de manière expérimentale, il convient de vérifier cette différence numériquement. La plupart des paramètres impor-

5.3. Comparaison expérience/simulation



FIG. 5-18: Comparaison entre les profils pour le procédé linéaire et le procédé oscillant.

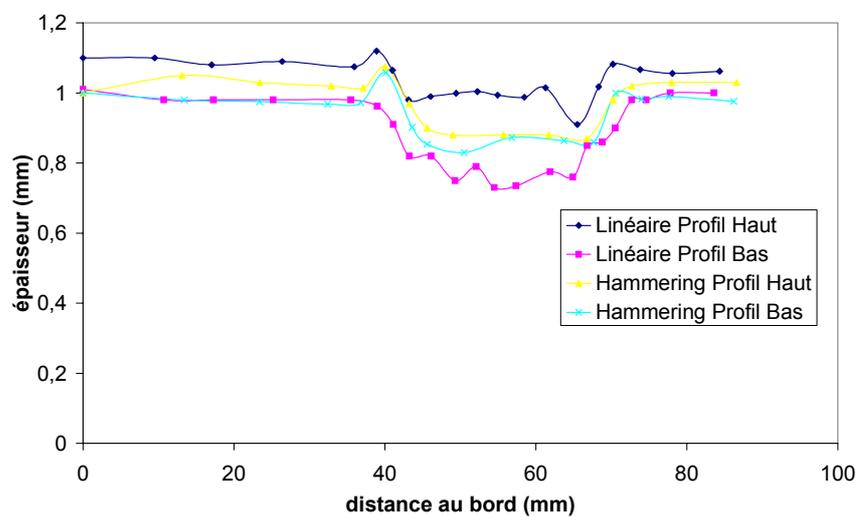


FIG. 5-19: Répartition d'épaisseur le long de tubes déformés par les procédés linéaire et oscillant.

tants des procédés et du comportement matériel sont connus, à l'exception du coefficient de frottement, de la déformation initiale ε_0 intervenant dans la loi d'écrouissage $\sigma_y = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n$ et de l'amplitude du défaut introduit par la mise en oeuvre expérimentale.

Il est également important de noter que la vitesse de procédé expérimentale vaut 16 mm.min⁻¹. Cette vitesse est très lente numériquement. Afin d'obtenir des temps de calcul raisonnables, la vitesse a été divisée d'un facteur 1000. Or, comme nous le verrons par la suite, la vitesse de procédé a une influence non-négligeable sur la forme obtenue.

Afin d'obtenir une bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux, il a fallu ajuster le paramètre ε_0 . Parmi les nombreuses simulations réalisées, seules celles utilisant un paramètre ε_0 valant 2.18E-04 et 1.07E-03 ont semblé être proches des résultats expérimentaux sans toutefois être parfaites.

En effet, pour des déplacements axiaux de 5 mm et 8 mm, la comparaison entre le profil diamétral expérimental et les profils numériques montrent que la simulation utilisant un paramètre ε_0 égale à 2.18E-04 fournissent une meilleure corrélation avec l'expérimentation (figures 5-20 et 5-21). Dans ces deux figures, le tube obtenu avec ε_0 valant 1.07E-03 semble trop peu gonflé.

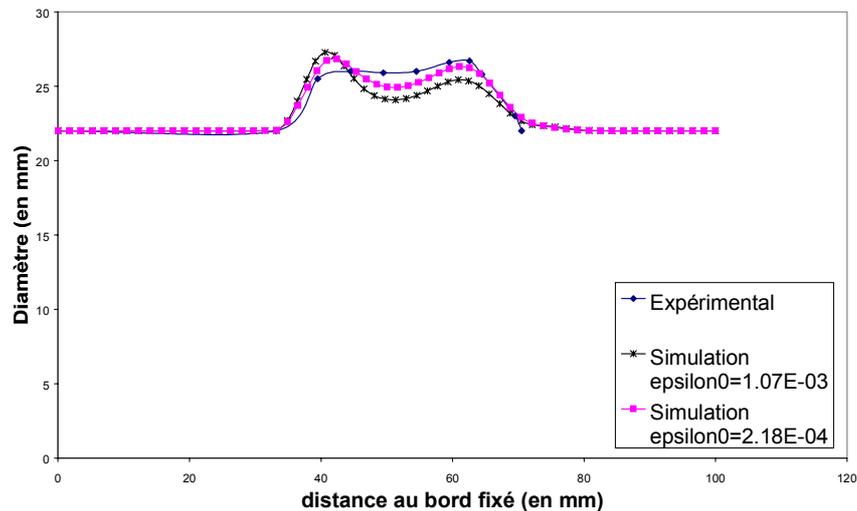


FIG. 5-20: Représentation du profil diamétral des tubes obtenus expérimentalement et numériquement pour un déplacement axial valant 5 mm

5.3. Comparaison expérience/simulation

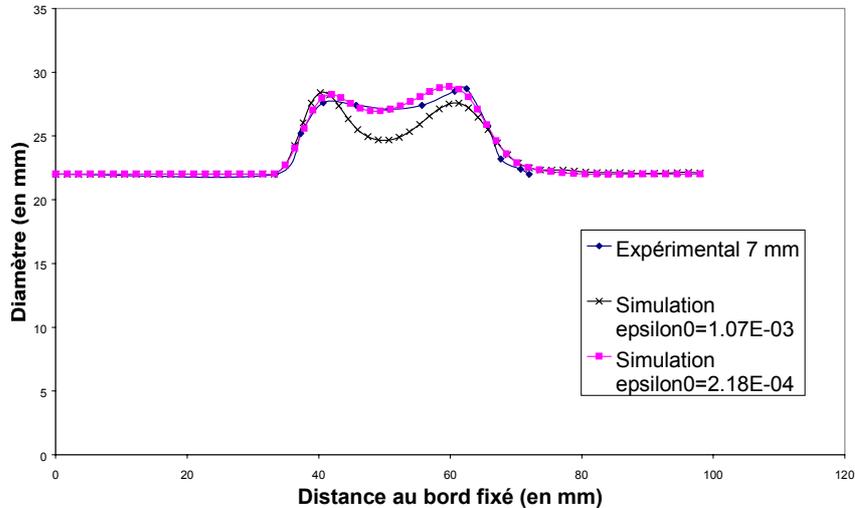


FIG. 5-21: Représentation du profil diamétral des tubes obtenus expérimentalement et numériquement pour un déplacement axial valant 7 mm

Pour un déplacement axial valant 8 mm, le tube obtenu numériquement pour $\varepsilon_0 = 2.18E - 04$ semble trop gonflé tandis que le tube obtenu pour $\varepsilon_0 = 1.07E - 03$ semble trop flambé (figure 5-22). On voit alors toute la difficulté d'obtenir une simulation approchant au mieux les résultats expérimentaux.

Par contre, pour un déplacement axial valant 10 mm, le profil diamétral et le profil en épaisseur obtenus numériquement pour ε_0 valant $2.18E-04$ sont très éloignés des profils expérimentaux tandis que les résultats numériques obtenus pour ε_0 valant $1.07E-03$ se rapprochent de la forme désirée (figures 5-23 et 5-24).

Remarque 70 *Pour la simulation avec $\varepsilon_0 = 2.18E - 04$, on a représenté le profil diamétral pour un déplacement axial de 9.4 mm. En effet, pour les déplacements axiaux plus importants, le tube ne reste pas en contact avec le piston axial. Ceci ne correspond bien évidemment pas à la réalité. Ceci est dû à un gonflement trop important du tube.*

Pour la suite de l'étude, on souhaite retrouver numériquement l'influence de paramètres de procédé sur l'apparition de défauts, on va donc uniquement regarder l'influence sur la simulation obtenue avec $\varepsilon_0 = 1.07E - 03$ puisque la forme finale simulée est la plus

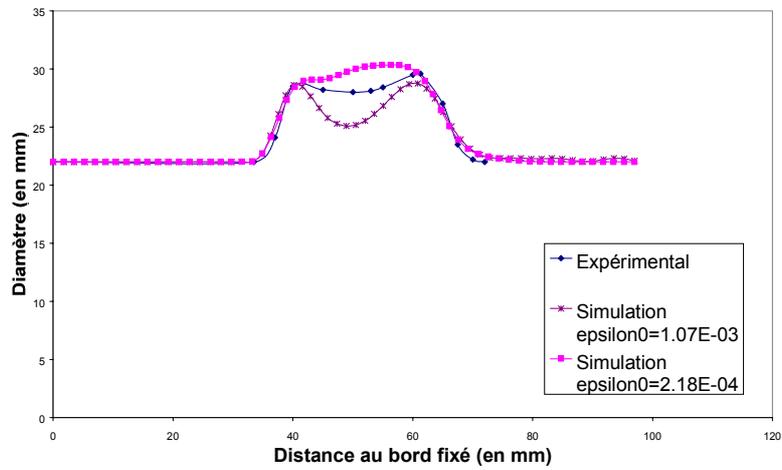


FIG. 5-22: Représentation du profil diamétral des tubes obtenus expérimentalement et numériquement pour un déplacement axial valant 8 mm

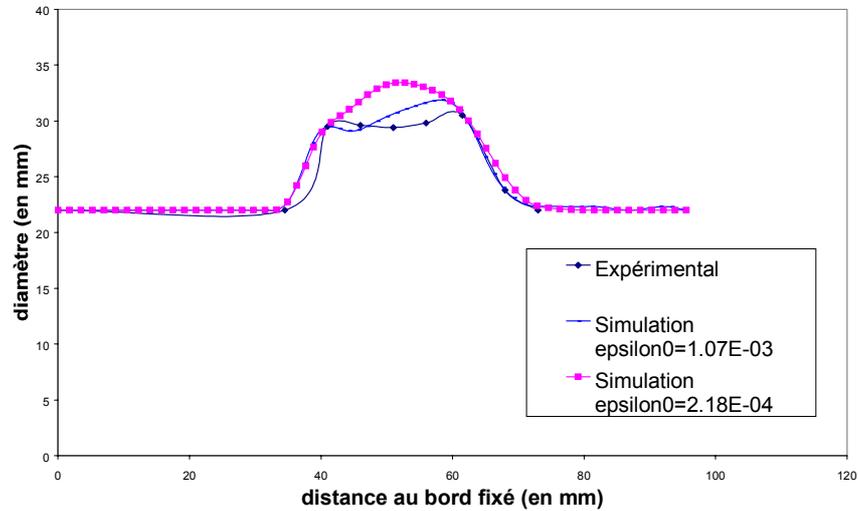


FIG. 5-23: Représentation du profil diamétral des tubes obtenus expérimentalement et numériquement pour un déplacement axial valant 10 mm (sauf pour la simulation avec $\varepsilon_0 = 2.18E - 04$ pour laquelle la représentation est réalisée pour un déplacement axial de 9.4 mm)

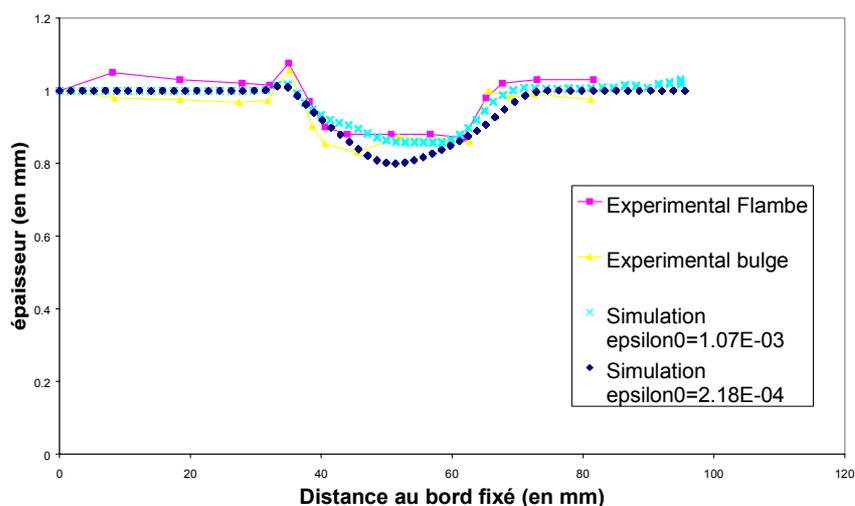


FIG. 5-24: Comparaison des profils en épaisseur obtenus numériquement et expérimentalement pour un déplacement de 10 mm (sauf pour la simulation réalisée avec $\varepsilon_0 = 2.18E - 04$ pour laquelle l'épaisseur est observée pour un déplacement de 9.4 mm).

proche de la forme finale expérimentale.

La comparaison entre la forme obtenue numériquement et expérimentalement dans le cas d'un procédé linéaire avec les mêmes paramètres de comportement matériel que dans le cas du chemin oscillant ne concordent pas. Cependant l'objectif est ici d'observer la différence entre procédé linéaire et procédé oscillant de manière numérique. Le profil diamétral obtenu dans le cas du chemin linéaire montre que ce chemin favorise l'apparition du flambage par rapport au chemin oscillant (figure 5-25). Dans le cas d'un chemin oscillant, la pression maximale peut atteindre 8 MPa alors que la pression maximale dans le cas du chemin linéaire vaut 7 MPa. Ceci induit naturellement un gonflement moindre du tube.

5.3.4 Influence du nombre de cycles sur l'apparition de défauts

Les données du procédé réalisé sont les suivantes :

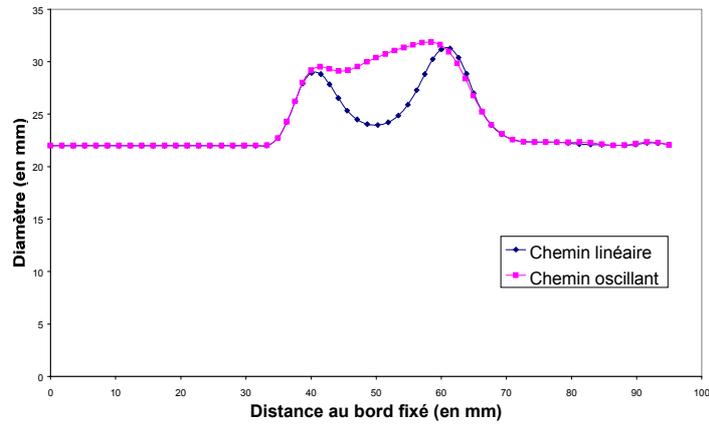


FIG. 5-25: Comparaison pour un déplacement axial de 10 mm entre un chemin linéaire et un chemin oscillant.

type de chemin	oscillant
Pression maximale (MPa)	7
Pression minimale (MPa)	5
vitesse (mm/min)	16
amplitude (MPa)	1

On compare les résultats obtenus pour un nombre de cycles égale à 105, un nombre de cycles égale à 75 et un nombre de cycles égale à 40 (Figure 5-26).

Remarque 71 Avec les paramètres de procédé tels qu'ils ont été définis ici, on ne peut pas choisir un nombre de cycles supérieur à 105 car on atteint alors les limites des appareils utilisés pour générer les oscillations.

Pour un nombre de cycle valant 40, le tube éclate pour un déplacement axial d'environ 7.7 mm. La pression interne avoisine alors 6.54 MPa. Une forte dissymétrie est observée entre la partie haute du tube (c'est-à-dire la partie la plus proche du piston axial) et la partie basse. Cette dissymétrie diminue lorsque l'on augmente le nombre de cycles. Ainsi elle semble plus importante pour un procédé avec 75 cycles que pour un procédé avec 105 cycles. Dans ces deux derniers cas, une bande de striction est observée visuellement. Les tubes semblent proches de l'éclatement.



FIG. 5-26: Comparaison de la géométrie obtenue pour des nombres de cycle valant 40 (Tube 5), 75 (Tube 6) et 105 (Tube 1).

Numériquement, on observe également la diminution de la dissymétrie avec l'accroissement du nombre de cycles mais de manière plus marquée (figure 5-27). En effet, on retrouve alors la remarque formulée précédemment, à savoir qu'il semble y avoir un manque de pression entre les résultats simulés et les résultats expérimentaux.

Cependant, le critère basé sur la méthode de perturbation indique qu'il y a apparition de striction, que l'on observe sous forme de bandes longitudinales, pour un déplacement axial de 9.6 mm (figure 5-28). Cette valeur de déplacement axial est largement supérieure à la valeur observée expérimentalement. Ceci est normal vu que le gonflement obtenu numériquement semble moins important que le gonflement expérimental.

De plus, pour cette valeur de déplacement, on commence à détecter des instabilités pour les simulations avec 75 et 105 cycles mais les niveaux d'instabilité sont inférieurs à ceux obtenus pour 40 cycles (figure 5-29).

Il semble alors que l'instant d'apparition de striction est retardé avec l'augmentation du nombre de cycles. On en déduit l'augmentation de la formabilité avec l'augmentation du nombre de cycles.

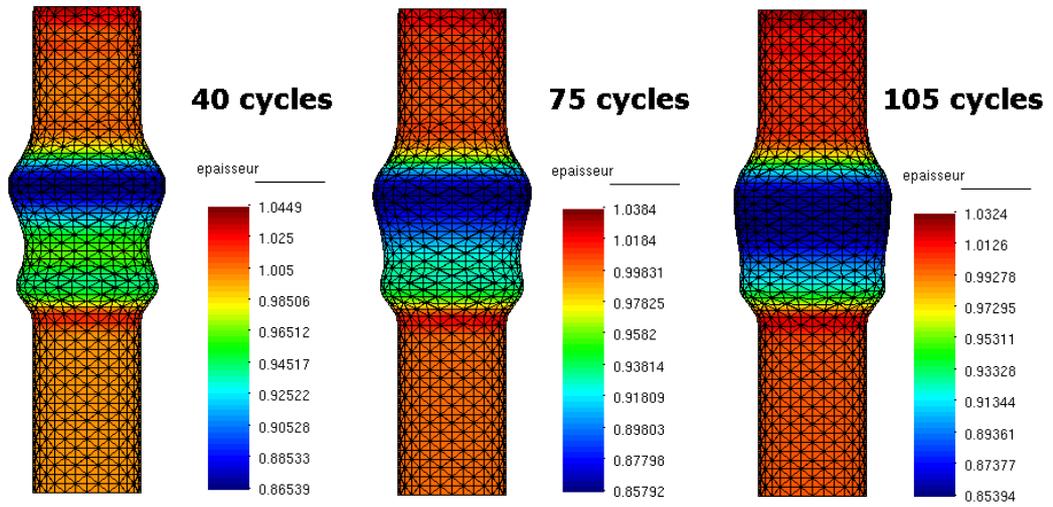


FIG. 5-27: Comparaison de la forme et l'épaisseur des tubes obtenus pour une déplacement de 10 mm.

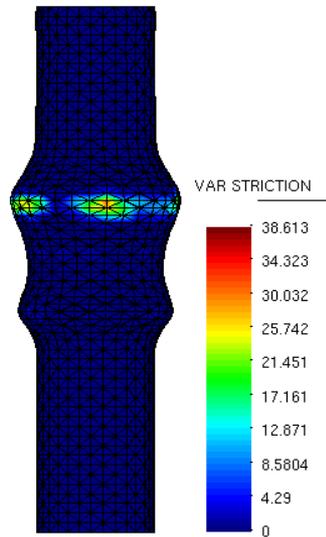


FIG. 5-28: Distribution du critère d'instabilité lors un procédé oscillant avec 40 cycles pour un déplacement axial de 9.6 mm.

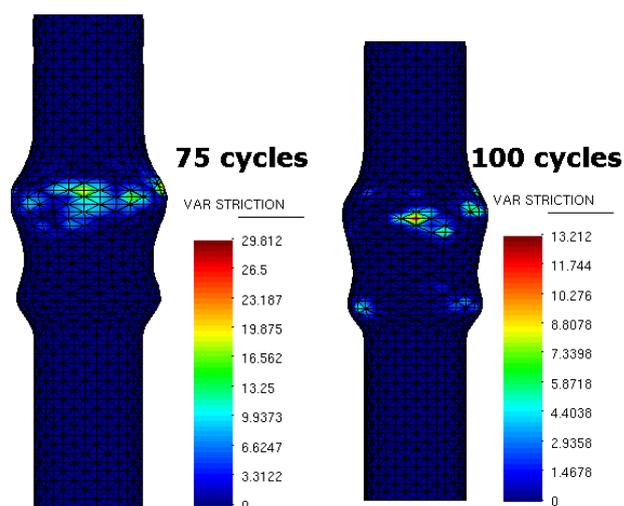


FIG. 5-29: Distribution du paramètre d'instabilité pour un déplacement de 9.6 mm avec un nombre de cycles égal à 75 et 105 cycles.

5.3.5 Influence de l'amplitude sur l'apparition de défauts

Les paramètres de procédé sont fixés de la manière suivante :

type de chemin	oscillant
Pression maximale (MPa)	7
Pression minimale (MPa)	5
vitesse (mm/min)	16
nombre de cycles	105

Il est évident que l'amplitude joue un rôle important puisqu'une forte amplitude entraînera un haut risque d'éclatement. On s'intéresse à une amplitude de 0.5 MPa et à une amplitude de 1 MPa. Bien que la pression finale soit identique dans les deux cas et égale à 7 MPa, la diminution de l'amplitude favorise l'apparition de flambage (figure 5-30).

On retrouve cette tendance numériquement. En effet, en comparant les formes finales des simulations de procédés oscillants d'amplitude 0.5 MPa et 1 MPa, on constate que l'augmentation de l'amplitude diminue le risque de flambage (figure 5-31).

De plus, une première zone de plis est prédite avec le critère de Nordlund et Häggblad



FIG. 5-30: Comparaison de la géométrie finale pour un procédé oscillant d'amplitude 0.5 MPa (Tube 7) et un procédé oscillant d'amplitude 1 MPa (Tube 1).

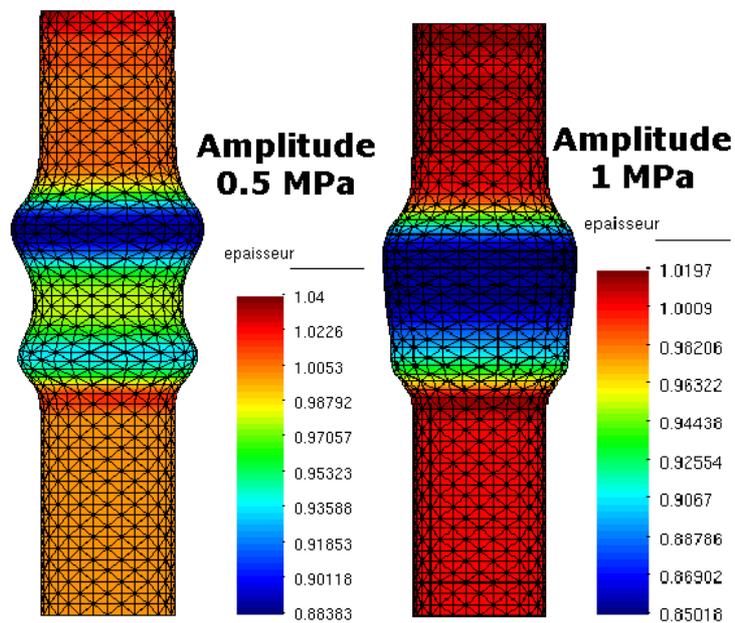


FIG. 5-31: Comparaison de la forme finale et de la distribution d'épaisseur pour des procédés oscillants avec des amplitudes égales à 0.5 MPa et 1 MPa.

5.3. Comparaison expérience/simulation

pour un déplacement axial de 5.3 mm avec une amplitude de 0.5 MPa alors qu'aucune zone de plis n'est prédite tout au long du procédé oscillant avec une amplitude de 1MPa (figure 5-32).

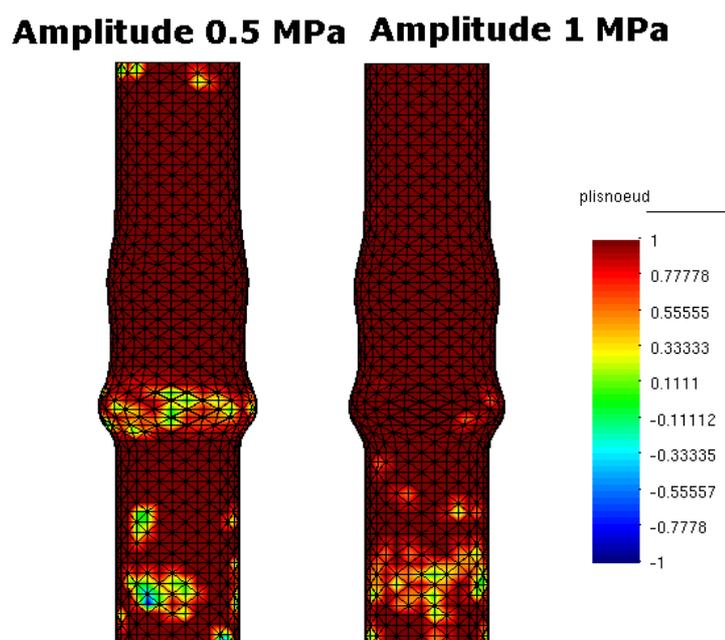


FIG. 5-32: Distribution du critère de plissement de Nordlund et Häggblad pour un déplacement axial de 5.3 mm avec des procédés oscillants d'amplitude 0.5 MPa et 1 MPa.

Remarque 72 *Des zones de plis sont prédites aux abords de la partie du tube qui reste fixée. Ceci est normal étant donné qu'aucune pression n'est imposée dans cette partie du tube lors des simulations numériques.*

5.3.6 Influence de la vitesse de procédé sur l'apparition de défauts

Les paramètres du procédé réalisé sont les suivants :

type de chemin	oscillant
Pression maximale (MPa)	7
Pression minimale (MPa)	5
nombre de cycles	105
amplitude (MPa)	1

On a réalisé trois expériences différentes, avec comme paramètre observé la vitesse de procédé. On constate alors que, pour de fortes vitesses de procédé (17 mm/min), il y a apparition de flambage (5-33). Par contre, en diminuant la vitesse (12 mm/min), on observe l'apparition de striction. Le flambage ainsi formé semble donc être du flambage dynamique. Il faut noter que pour les deux vitesses extrêmes, on a été obligé d'arrêter le procédé avant d'atteindre le déplacement axial de 10 mm en raison des limites des outils ou de l'apparition d'éclatement.

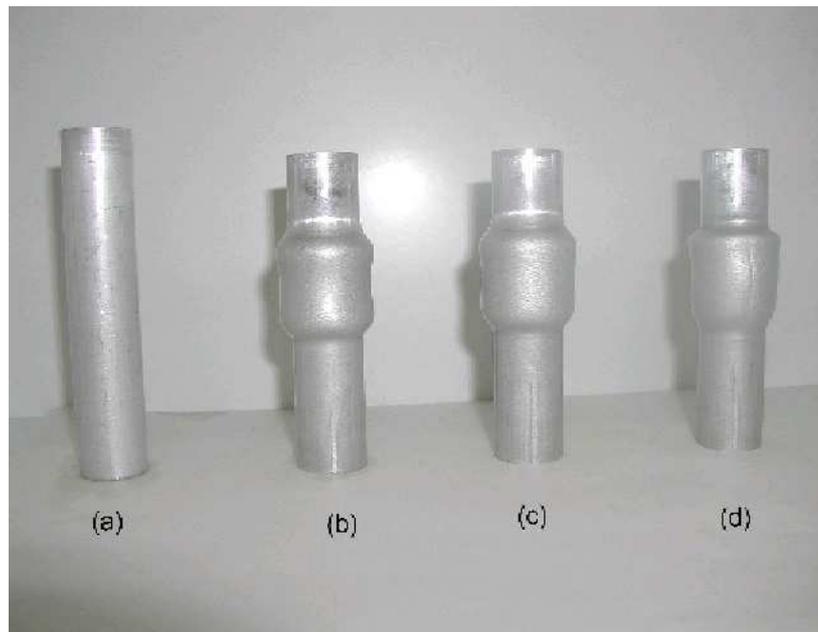


FIG. 5-33: tube (a) : tube initial ; tube(b) : vitesse de procédé valant 17 mm/min ; tube(c) : vitesse de procédé valant 16 mm/min ; tube(d) : vitesse de procédé valant 12mm/min.

En analysant le diamètre en différents points du tube, on constate qu'effectivement,

5.3. Comparaison expérience/simulation

une vitesse de 17 mm/min favorise l'apparition de flambage par rapport à une vitesse de 16 mm/min (figure 5-34).

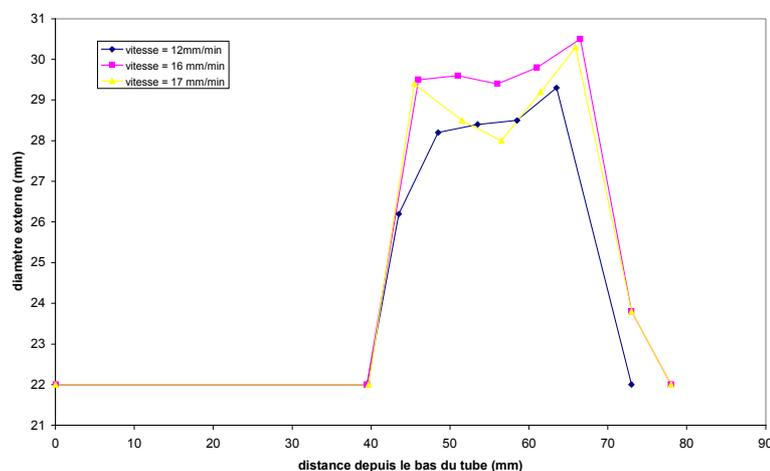


FIG. 5-34: Influence de la vitesse de procédé sur le profil du tube déformé.

Numériquement, l'observation des formes finales obtenues pour les trois procédés ne permet pas de tirer de conclusions claires quant à l'apparition de défauts (figure 5-35). On constate simplement que pour une vitesse supposée de 12 mm/min, le tube semble plus gonflé que pour une vitesse de 16 mm/min. Mais, la différence concernant ces deux vitesses n'est pas assez significative pour pouvoir conclure catégoriquement quant à l'influence de la vitesse sur l'apparition de défaut. Concernant la comparaison entre les vitesses de procédé de 16 mm/min et de 17 mm/min, il est évident que si l'on arrête l'un des procédés un peu avant l'autre, ce dernier subira une pression interne plus importante et sera donc moins sujet au phénomène de flambage. Dans la réalité, le procédé avec une vitesse de 17 mm/min a été arrêté pour un déplacement de 9 mm. La forme obtenue est alors bien une forme flambée par rapport au procédé avec une vitesse de 16 mm/min (figure 5-36).

L'utilisation des critères de plissement et de striction localisée ne permettent pas de retrouver les observations expérimentales. Cet échec des critères de prédiction et des observations de l'influence de la vitesse s'explique très aisément puisque l'on rappelle que les vitesses de procédé ont été divisées par 1000 afin d'obtenir un temps de calcul

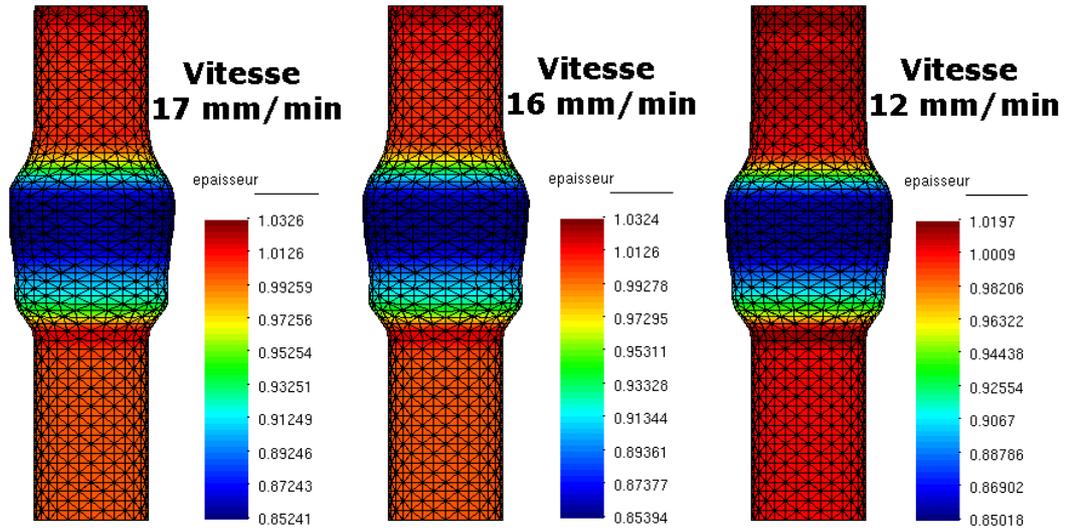


FIG. 5-35: Formes finales et répartition d'épaisseurs obtenues numériquement pour différentes vitesses de procédé.

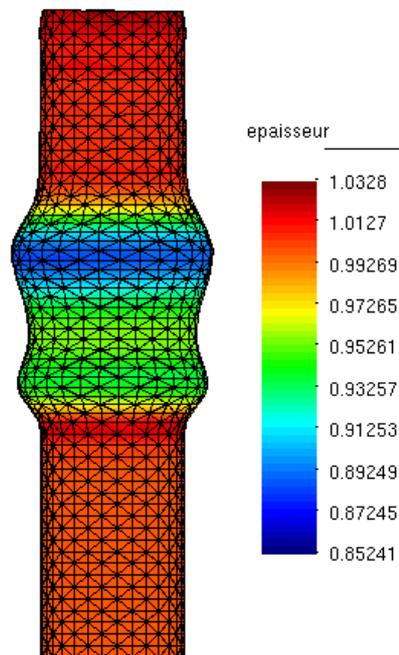


FIG. 5-36: Représentation de la forme obtenue et de la distribution d'épaisseur pour un procédé oscillant avec une vitesse de 17 mm/min et un déplacement axial valant 9 mm.

relativement raisonnable.

5.4 Discussion

Le procédé oscillant, ou procédé hammering, semble permettre de déformer la pièce plus rapidement en améliorant la répartition d'épaisseur. Industriellement, ce procédé est déjà utilisé et a permis de former des pièces infaisables par des procédés traditionnels. Par contre, ce procédé fait intervenir de nombreux paramètres dont l'influence a été mise en évidence dans cette partie.

Le procédé hammering a été utilisé pour valider la simulation éléments finis du LMARC. Afin d'obtenir un temps de calcul raisonnable, on a divisé le temps de procédé par 1000 pour réaliser les simulations. Or, la vitesse de procédé semble être un paramètre tout aussi important que l'amplitude du procédé ou le nombre de cycles. Par conséquent, en vue de comparaisons plus précises avec la réalité, il serait intéressant d'augmenter la rapidité du code de calcul. Une autre voie consiste à utiliser un code axisymétrique. Cette voie a été choisie par le Professeur Mori. Les simulations réalisées nécessitent peu de temps de calcul.

On retrouve numériquement l'importance des paramètres du procédé sur l'apparition des défauts. Toutefois, la simulation nécessite la connaissance exacte du coefficient de friction entre la matrice et le tube et de la déformation ε_0 . Ce dernier paramètre a été ajusté afin de retrouver des résultats numériques proches des résultats expérimentaux. De plus, le code, tel qu'il est conçu, n'autorise pas la prise en compte des bouchons intérieurs au tube. L'effet de ces bouchons sur la déformée est donc négligé.

L'imperfection introduite dans le tube lors de la mise en place du procédé est considérée par les imperfections numériques. On constate, par exemple, une non symétrie de l'amplitude d'expansion pour les résultats numériques. Cependant, rien n'assure que l'amplitude de l'imperfection coïncide avec l'imperfection numérique. Comme cela a déjà été précisé, les résultats de nombreux travaux sur l'introduction d'un défaut ont montré

l'importance de l'amplitude du défaut. Ce paramètre se trouve être un paramètre important introduit expérimentalement et non-contrôlé numériquement. L'utilisation d'un code axisymétrique ne permettrait alors pas d'introduire un défaut pour obtenir une pièce de forme quelconque.

La nouveauté du procédé oscillant ouvre un champ d'investigation afin de comprendre l'influence de chaque paramètre et de fournir une explication scientifique quant à l'amélioration de la formabilité. L'objectif à atteindre consiste à pouvoir définir les paramètres optimaux pour un procédé complexe.

On notera que les expériences réalisées à l'Université Technologique de Toyohashi débutent. Ainsi, très rapidement, le procédé devrait s'enrichir de nombreux capteurs permettant une meilleure compréhension de l'effet des oscillations sur la déformation du tube. De plus, l'amélioration des outils devrait permettre d'éviter les limites technologiques constatées au cours de la réalisation des expériences sus-citées et éventuellement de réaliser des procédés plus complexes.

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

La striction localisée et le plissement sont deux défauts principaux pouvant apparaître en emboutissage et hydroformage de structures minces.

Les différentes modélisations existantes de la striction ont été présentées. Parmi ces modélisations, on trouve les critères de force maximum qui ne distinguent pas la striction diffuse de la striction localisée; les analyses en bifurcation et notamment le modèle de Stören et Rice qui donnent une plage de valeurs pour lesquelles la striction peut apparaître; les méthodes d'introduction d'un défaut qui dépendent fortement du défaut choisi et enfin l'analyse linéaire de stabilité par une méthode de perturbation dont l'inconvénient est l'introduction d'un seuil d'instabilité. La plupart des travaux existants se sont concentrés sur des états de contraintes planes. Or, il est rappelé dans cet ouvrage que cette hypothèse influence les résultats de l'étude en bifurcation.

On a donc choisi de définir un nouveau critère de striction localisée basé sur une analyse d'instabilité tridimensionnelle. Cela se traduit par l'absence d'hypothèse sur l'état de contraintes et de déformations mais aussi par l'extension du nombre de modes d'instabilité recherchés. Pour cela, nous avons défini un plan d'instabilité à partir de sa normale déterminée par deux angles. Ainsi, notre critère s'applique aussi bien à des procédés d'emboutissage que d'hydroformage.

Au-delà de la création d'un critère tridimensionnel par l'analyse de stabilité, les

travaux effectués se sont également portés sur la définition rigoureuse d'un seuil de stabilité. Partant du constat que la perturbation doit évoluer plus vite que la solution à l'équilibre, nous avons obtenu un nouveau critère tridimensionnel indépendant du seuil d'instabilité choisi. Ainsi, il est désormais possible de construire des Courbes Limites de Formage théoriques de manière automatique, c'est-à-dire sans avoir à se préoccuper de la valeur du seuil d'instabilité. Nous avons donc levé le principal inconvénient de la méthode de perturbation utilisée.

Les Courbes Limites de Formage permettent uniquement l'analyse de l'influence de paramètres de comportement matériel. Dans ce cadre, nous avons retrouvé de manière théorique l'influence de l'exposant n de la loi d'écroutissage de Swift sur la formabilité des matériaux. De plus, il est montré qu'il est important de différencier les matériaux de structure Cubique Face Centrée des matériaux Cubique Centré. Pour cela, la méthode de perturbation a été appliquée à de nouvelles lois de comportement.

Les travaux développés jusqu'à présent, dans le cadre de ce mémoire, ne concernent que des matériaux non-endommagés. Or, l'influence de la prise en compte de l'endommagement sur l'apparition de striction est désormais admise. L'application de la méthode de perturbation nous a permis de démontrer que le critère d'instabilité d'un matériau endommagé ne se différencie d'un matériau non-endommagé que par le changement de la contrainte en contrainte effective. On retrouve ainsi le principe d'équivalence en déformation.

Enfin, l'analyse linéaire de stabilité a été appliquée à un procédé de flexion pure d'une bande large. Les résultats obtenus montrent qu'il ne peut y avoir instabilité de l'équilibre considéré.

Concernant l'apparition de plissement en emboutissage et hydroformage, on retrouve dans les modélisations existantes l'analyse en bifurcation. Cette méthode présente alors les mêmes inconvénients que pour l'analyse en striction, à savoir qu'il existe une plage de valeurs indiquant l'instant de bifurcation. Une deuxième méthode habituellement utilisée est basée sur la méthode de l'énergie étendue au cas élastoplastique. Cette méthode

s'avère justifiée sous certaines hypothèses. Cependant on peut s'interroger quant à l'utilisation d'un critère d'énergie pour la prédiction de plis dans des cas d'emboutissage ou d'hydroformage complexes. Les deux critères cités analysent la bifurcation ou la stabilité d'un équilibre donné. Parallèlement à ces approches mathématiques, une troisième méthode basée sur l'analyse qualitative du travail incrémental interne du second ordre permet de prédire l'apparition de plis, en considérant que ceux-ci correspondent à une rotation hors-plan de l'élément. Dans le cadre de ce mémoire, le critère obtenu par cette méthode, appelée méthode de Nordlund et Häggblad, a été implanté dans un code éléments finis. Il présente l'avantage de n'émettre aucune hypothèse quant à la loi de comportement ou d'érouissage choisie.

On utilise la modélisation de Nordlund et Häggblad pour définir un nouveau critère prenant en compte la formulation pour les coques de Donnell-Mushrati-Vaslov. On introduit alors une perturbation en espace et en temps. Afin de valider ce nouveau critère, on a proposé d'étudier l'équilibre d'une plaque en compression. On obtient alors la pression critique de flambage en fonction du mode de bifurcation et du module tangent. Ce résultat a été comparé à la pression critique obtenue par la méthode de Rayleigh-Ritz dans le cas élastique. Le nombre de mode correspondant au flambage est alors trouvé égale à 2. Une comparaison a également été réalisée par rapport au critère en énergie de Timoshenko étendu au cas plastique.

On a donc défini une méthode hybride, couplant analyse de Nordlund et Häggblad et analyse de stabilité. Pour donner plus d'importance aux termes de flexion, on a souhaité conclure le travail de modélisation du plissement en essayant d'effectuer une analyse de stabilité sur un équilibre avec une loi de comportement d'Illyushin. La théorie d'Illyushin relie les efforts généralisés aux déformations membranaires et de flexion. Cette approche totalement novatrice permet de prendre en compte l'effet des moments sur l'apparition de plis. La forme de la perturbation autorise la connaissance de la longueur d'onde sans se restreindre à une géométrie donnée. Cependant, en raison de la dimension du problème considéré, cette méthode semble trop lourde à résoudre analytiquement. En l'absence

actuelle d'une méthode rapide et efficace pour exprimer le paramètre d'instabilité, l'exploitation du développement analytique obtenu pourra faire l'objet de travaux ultérieurs.

Parmi les critères de défauts étudiés, l'analyse linéaire de stabilité pour la striction et la méthode de Nordlund et Häggblad pour le plissement ont été implantés dans les codes de simulation des procédés d'emboutissage et d'hydroformage de structures minces développés au LMARC. La comparaison des critères de striction et de plissement avec des résultats analytiques sur des cas simples d'expansion et de compression de tubes ont permis de vérifier la précision des critères étudiés. De plus, le critère de striction a été comparé à l'expérience lors d'un procédé de gonflement de flan. On retrouve alors une différence entre la hauteur du dôme critique observée et simulée. On suggère que cette différence provient de la loi de comportement utilisée. Par ailleurs, la simulation du test de Yoshida confirme la véracité des zones de plis prédites dans ce cas simple. Par contre, la prise en compte de l'endommagement sur le critère de plissement lors de ce même test laisse à penser que le critère de Nordlund et Häggblad est sensible à l'apparition de cisaillement.

Suite à cette première étape consistant à vérifier le bon comportement des critères de striction et de plis, ces mêmes critères ont été utilisés afin de montrer l'influence du chemin de chargement sur l'apparition de défauts lors de deux procédés d'hydroformage de tubes. Le critère de striction a également permis de montrer numériquement l'augmentation de la profondeur d'emboutissage en considérant un procédé d'hydroformage de flan au lieu d'un procédé d'emboutissage traditionnel. De plus, on a mis en évidence l'influence bien connue de l'effort serre-flan sur l'apparition de striction et notamment sur la zone d'apparition de la striction. Par contre, l'utilisation du critère de Nordlund et Häggblad lors de la simulation d'emboutissage semble moins évidente. En effet, contrairement à ce que l'on observe lors de la simulation d'hydroformage de tubes, les zones risquant l'apparition de plis se localisent plus difficilement. Ainsi, l'interprétation des résultats obtenus dans ce cadre se trouve compliquée.

Après avoir défini des critères de plis et de striction, après les avoir testés et ap-

pliqués numériquement, il convient de les confronter à la réalité expérimentale. Pour ce faire, on a hydroformé des tubes par un nouveau procédé d'hydroformage développé à l'Université Technologique de Toyohashi sous la responsabilité du Professeur Mori. Les résultats expérimentaux obtenus montrent l'amélioration de la formabilité grâce à un trajet de chargement oscillant en comparaison avec un trajet linéaire. De plus, l'influence des paramètres de l'oscillation, à savoir, amplitude et nombre de cycles, et de la vitesse de réalisation du procédé ont été observées expérimentalement. L'utilisation des critères de striction par méthode de perturbation et de plissement par la méthode de Nordlund et Häggblad a permis de retrouver l'influence de la forme du trajet de chargement, des paramètres d'oscillation et de la vitesse du procédé.

Si les résultats obtenus pour les critères étudiés semblent satisfaisants sur les exemples traités, il n'en reste pas moins que les développements réalisés au sujet de la striction localisée et du plissement ne tiennent pas compte de l'influence du frottement. Or, il a été observé numériquement que l'algorithme de projection dynamique utilisé pour le contact influençait les critères de défaut en créant des oscillations numériques. Pour pouvoir prendre en compte le frottement, il faudrait donc, dans un premier temps, améliorer l'algorithme de contact puis, dans un second temps, analyser un équilibre faisant intervenir la modélisation du frottement.

Les industriels tendant à utiliser des pièces de plus en plus minces, il serait également intéressant de coupler l'analyse à des modèles de comportement avec effet d'échelle. Ces lois de comportement mésoscopiques n'augmentent alors que peu la dimension du problème à traiter.

Lors de simulations numériques réalisées au LMARC, l'algorithme de résolution étant dynamique explicite, les imperfections initiales qui existent sur la pièce réelle apparaissent naturellement. Ainsi, dans les travaux réalisés jusqu'à aujourd'hui au LMARC, aucun ne porte sur l'influence de l'imperfection sur l'apparition de défaut et sur l'équilibre post-défaut. Une étude qualitative de l'imperfection numérique générée par l'algorithme permettrait de mieux comprendre l'apparition de défauts lors des simulations réalisées et

de pouvoir comparer la forme obtenue avec la forme réelle.

Enfin, l'utilisation des critères définis dans ce mémoire autorise la définition de zones à risque. Le couplage de ces critères avec un algorithme de remaillage permettrait d'obtenir une meilleure précision quant à la forme finale de la pièce.

Bibliographie

- [Bai 82] Y. L. Bai. *Thermo-plastic instability in simple shear*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 30, no. 4, pages 195–207, 1982.
- [Banabic 99] D. Banabic, T. Balan & K. Pohlandt. *Analytical and experimental investigation on anisotropic yield criteria*. In 6th Int. Conf. ICTP'99, pages 1411–1416, 1999.
- [Banabic 01] D. Banabic & E. Dannenmann. *Prediction of the influence of yield locus on the limit strains in sheet metals*. Journal of Material Processing Technology, vol. 109, pages 9–12, 2001.
- [Barata Da Rocha 84a] A. Barata Da Rocha, F. Barlat & J. M. Jalinier. *Prediction of forming limit diagrams of anisotropic sheets in linear and non-linear loading*. Material Science and Engineering, vol. 68, pages 151–164, 1984.
- [Barata Da Rocha 84b] A. Barata Da Rocha & J. M. Jalinier. *Plastic instability of sheet metals under simple and complex strain paths*. Transaction of the Iron and Steel Institute of Japan, vol. 24, no. 2, pages 132–140, 1984.
- [Barlat 91] F. Barlat, D.J. Lege & J.C. Brem. *A six-component yield function for anisotropic materials*. International Journal of Plasticity, vol. 7, pages 693–712, 1991.

- [Bažant 91] Z. P. Bažant & L. Cedolin. Stability of structures. elastic, inelastic, fracture and damage theories, page xxi. Oxford University Press, 1991.
- [Benallal 95] A. Benallal & V. Tvergaard. *Non-local continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 43, pages 741–770, 1995.
- [Benchmarks 99] Benchmarks. In Proceedings of NUMISHEET'99, 1999.
- [Boudeau 95] N. Boudeau. *Prédiction des instabilités élasto-plastiques locales. Application à l'emboutissage*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1995.
- [Boudeau 98] N. Boudeau, J. C. Gelin & S. Salhi. *Computational prediction of the localized necking in sheet forming based on microstructural material aspects*. Computational Materials Science, vol. 11, no. 1, pages 45–64, 1998.
- [Boudeau 01a] Gelin J. C. Boudeau N. & Lejeune A. *Analysis of necking and bursting in sheet forming and tube hydroforming. Influence of material properties and process conditions*. In Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes-NUMIFORM 2001, pages 849–854, 2001.
- [Boudeau 01b] N. Boudeau, A. Lejeune & J. C. Gelin. *Damage in sheet metal forming : prediction of necking phenomenon*. Revue européenne des éléments finis, vol. 10, no. 2, pages 295–310, 2001.
- [Brunet 96] M. Brunet, F. Sabourin & S. Mguil-Touchal. *The prediction of necking and failure in 3D sheet forming processes using damage variable*. Journal of Physics, vol. 6, pages 473–482, 1996.
- [Brunet 97a] M. Brunet, S. Mguil-Touchal & F. Morestin. *Numerical and*

-
- experimental analysis of necking in 3D sheet forming processe using damage variables.* In M. Predeleanu & P. Gilormini, editeurs, *Advanced Methods in Materials Processing defects*, pages 205–214, 1997.
- [Brunet 97b] S. Brunet, J. L. Batoz & S. Bouabdallah. *Sur l'évaluation des risques de plissement local de pièces industrielles obtenues par emboutissage.* In 3ème Colloque National en Calcul des Structures, pages 753–758, 1997.
- [Brunet 98] M. Brunet, S. Mguil & F Morestin. *Analytical and experimental studies of necking in sheet metal forming processes.* *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 80–81, pages 40–46, 1998.
- [Brush 75] D. O Brush & D. O. Almroth. 1975.
- [Cao 95] J. Cao & M. C. Boyce. *Optimization of sheet metal forming processes by instability analysis*, 1995.
- [Cao 99] J. Cao. *Prediction of plastic wrinkling using the energy method.* *Journal of Applied Mechanics*, vol. 66, pages 646–652, 1999.
- [Cao 00] J. Cao, H. Yao, A. Karafillis & M.C. Boyce. *Prediction of localized thinning in sheet metal using a general anisotropic yield criterion.* *International Journal of Plasticity*, vol. 16, pages 1105–1129, 2000.
- [Chu 79] C.-C. Chu. *Bifurcation of elastic-plastic circular cylindrical shells under internal pressure.* *Journal of Applied Mechanics*, vol. 46, pages 889–894, 1979.
- [Chu 01] E. Chu & Y. Xu. *An elastoplastic analysis of flange wrinkling in deep drawing process.* *International Journal of Mechanical Sciences*, no. 43, pages 1421–1440, 2001.
- [Cimetière 96] A. Cimetière & A. Léger. *Some problems about elastic-plastic*

- post-buckling*. International Journal of Solids and Structures, vol. 33, pages 1519–1533, 1996.
- [Clifton 78] R. Clifton, 1978.
- [Col 00] A. Col. *Forming limit diagrams : a survey*. In Proceedings of TPR 2000, pages 29–51, 2000.
- [Considère 85] A. Considère. *Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions*. Annales des Ponts et Chaussées, vol. 9, page 574, 1885.
- [Cordebois 86] J. P. Cordebois & P. Ladevèze. *Sur la prédiction des courbes limites d'emboutissage*. Journal de mécanique théorique et appliquée, vol. 5, no. 3, pages 341–370, 1986.
- [De Magalhaes 01] J. P. De Magalhaes & G. Ferron. *Etude analytique et numérique de l'apparition du plissement en emboutissage*. In XVme Congrès Français de Mécanique, pages 378–383, 2001.
- [Di 97] S. Di & P.F. Thomson. *Neural network approach for prediction of wrinkling limit in square metal sheet under diagonal tension*. Journal of Testing and Evaluation, no. 25, pages 74–81, 1997.
- [Dudzinski 90] D. Dudzinski & A. Molinari. *Modélisation et prévision des instabilités plastiques en emboutissage*. In F. Moussy & P. Franciosi, éditeurs, Physique et mécanique de la mise en forme des métaux, chapitre 7, pages 444–460. Presses du CNRS, 1990.
- [Dudzinski 91] D. Dudzinski & A. Molinari. *Perturbation analysis of thermo-viscoplastic instabilities in biaxial loading*. International Journal of Solids Structures, vol. 27, no. 5, pages 601–628, 1991.
- [Durban 99] D. Durban & Z. Zuckerman. *Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/tension*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 41, pages 751–765, 1999.

-
- [Dutilly 98] M. Dutilly, P. Paquier & J. C. Gelin. *Definition of Quality functions*. Brite-Euram contract BRPR-CT97-0445, Final report, 1998.
- [Ferron 94] G. Ferron, R. Makkouk & J. Morreale. *A parametric description of orthotropic plasticity in metal sheets*. International Journal of Plasticity, vol. 10, pages 431–449, 1994.
- [Fressengeas 87] C. Fressengeas & A. Molinari. *Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 35, no. 2, pages 185–211, 1987.
- [Fromentin 98] S. Fromentin. *Établissement d'un critère de striction intrinsèque des tôles et validation numérique par simulations d'emboutissage*. PhD thesis, Université de Metz, 1998.
- [Gensamer 46] M. Gensamer. *Strength and ductility*. Campbell lecture, Transaction of ASM, no. 361949, 1946.
- [Goodwin 68] G. M. Goodwin. *Application of the strain analysis to sheet metal forming in press shop*. La Metallurgia Italiana, vol. 8, pages 767–772, 1968.
- [Gotoh 77] M. Gotoh. *A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 19, pages 505–520, 1977.
- [Graf 94] A. Graf & W. Hosford. *The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of A1 6111 T4*. International Journal of Mechanical Science, vol. 36, pages 897–910, 1994.
- [Gurson 77] A. L. Gurson. *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth, Part I yield criteria and flow rules for porous ductile media*. Journal of Engineering and Material Technologies, vol. 99, pages 2–15, 1977.

- [Habraken 01] A. M. Habraken. *Damage models applied to metals*. In Contributions to constitutive laws of metal : Micro-macro and damage models, volume C, page 3.11, 2000-2001.
- [Hadamard 03] J. Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. 1903.
- [Hanus 99] J. L. Hanus. *Contribution à l'étude de la localisation des déformations dans les matériaux et structures élasto-(visco)-non-linéaires*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.
- [Hill 52] R. Hill. *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 1, pages 19–30, 1952.
- [Hill 57] R. Hill. *On the problem of uniqueness in the theory of rigid-plastic solid, III*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, no. 3, pages 153–161, 1957.
- [Hill 58] R. Hill. *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 6, pages 236–249, 1958.
- [Hill 61] R. Hill. *Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua*. Problems of continuum mechanics, pages 155–164, 1961.
- [Hill 62] R. Hill. *Acceleration waves in solids*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 10, pages 1–16, 1962.
- [Hill 93] R. Hill. *A User-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 15, pages 19–25, 1993.
- [Hora 96] P. Hora, L. Tong & Reissner J. *A prediction method for ductile sheet metal failure in FE simulation*. In Wagonner et al., editeur,

-
- Proceedings of Numisheet '96, volume Parts I, pages 252–256, 1996.
- [Hutchinson 74] J.W. Hutchinson. *Plastic buckling*. Advances in Applied Mechanics, pages 67–144, 1974.
- [Hutchinson 78a] J.W. Hutchinson & K.W. Neale. *sheet necking-II. Time independent behavior*. Mechanics of sheet metal forming, pages 127–153, 1978.
- [Hutchinson 78b] J.W. Hutchinson & K.W. Neale. *sheet necking-III. Strain-rate effects*. Mechanics of sheet metal forming, pages 269–285, 1978.
- [Hutchinson 78c] J.W. Hutchinson, K.W. Neale & Needleman A. *sheet necking-I. Validity of plane stress assumptions of the long-wavelength approximation*. Mechanics of sheet metal forming, pages 113–126, 1978.
- [Hutchinson 85] J. W. Hutchinson & K. W. Neale. *Wrinkling of curved thin sheet metal*. Plastic Instability, Paris, Presses ponts et chaussées, pages 71–78, 1985.
- [Ito 01] K. Ito, K. Satoh, Goya M. & Yoshida T. *Prediction of limit strain in sheet metal forming processes by 3-D analysis of localized necking*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 42, no. 11, pages 2233–2248, 2001.
- [Jalinier 81] J. M. Jalinier. *Mise en forme et endommagement*. PhD thesis, Université de Metz, 1981.
- [Joannic 98] D. Joannic. *Modélisation mécanique et simulation numérique du retour élastique en emboutissage des tôles minces et optimisation paramétrique*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1998.
- [Karafillis 93] A.P. Karafillis & M. C. Boyce. *A general anisotropic yield criterion using bounds and transformation weighting tensor*. Journal

- of mechanics and physics of solids, vol. 41, no. 12, pages 1859–1886, 1993.
- [Kawka 01] M. Kawka, L. Olejnik, A. Rosochowski, H. Sunaga & A. Maki-nouchi. *Simulation of wrinkling in sheet metal forming*. Journal of Materials Processing Technology, no. 109, pages 283–289, 2001.
- [Keeler 65] S. P. Keeler. *Determination of forming limits in automotive stampings*. Sheet Metal Industries, vol. 42, pages 683–691, 1965.
- [Kim 99] Y. Kim, Y. Son & K. Park. *Bifurcation analysis of wrinkling formation for anisotropic sheet metal in the press forming*. In Proceedings of NUMISHEET'99, pages 341–346, 1999.
- [Kim 00a] J. B. Kim, D. Y. Yang, J. W. Yoon & F. Barlat. *The effect of plastic anisotropy on compressive instability in sheet metal forming*. International journal of Plasticity, vol. 16, 2000.
- [Kim 00b] J. B. Kim, J. W. Yoon & D. Y. Yang. *Wrinkling initiation and growth in modified Yoshida buckling test : Finite element analysis and experimental comparison*. International journal of Mechanical Sciences, vol. 42, 2000.
- [Kim 00c] Y. Kim & Y. Son. *Study on wrinkling limit diagram of anisotropic sheet metals*. Journal of Materials Processing Technology, no. 97, pages 88–94, 2000.
- [Knockaert 00] R. Knockaert, E. Massoni & Y. Chastel. *Prediction of strain localization during sheet forming operations*. In 3rd ESAFORM Conference on Material Forming, pages II.7–II.10, 2000.
- [Koç 02] M. Koç & T. Altan. *Prediction of forming limits and parameter in the tube hydroforming process*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 42, pages 123–138, 2002.

-
- [Kuroda 00] M. Kuroda & V. Tvergaard. *Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria*. International Journal of Solids and Structures, vol. 37, pages 5037–5059, 2000.
- [Lejeune 02] A. Lejeune, N. Boudeau & J.C. Gelin. *Wrinkling predictions in metal forming*. In Proceedings of NUMISHEET'2002, page 549, 2002.
- [Lemaitre 85] J. Lemaitre & J. L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides, chapitre 7, page 404. Dunod, 1985.
- [Lestriez 00] P. Lestriez. *Prédiction de striction localisée par l'analyse linéaire de stabilité : application au critère de plasticité de Banabic*. Rapport de dea, Université de Franche-Comté-ENSMM, 2000.
- [Lu 01] G. Lu & R. Mao. *A study of the plastic buckling of axially compressed cylindrical shells with a thick-shell theory*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 43, pages 2319–2330, 2001.
- [Marciniak 67] Z. Marciniak & K. Kuczynski. *Limit strains in the processes of stretch forming sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 9, pages 609–620, 1967.
- [Mesrar 98a] R. Mesrar. *Influence des paramètres rhéologiques du matériau sur l'emboutissage et étude des courbes limites de formage*. PhD thesis, Université Ibnou Zohr-Agadir, 1998.
- [Mesrar 98b] R. Mesrar, S. Fromentin, R. Makkouk, M. Martiny & G. Ferron. *Limits to the ductility of metal sheets subjected to complex strain paths*. International Journal of Plasticity, vol. 14, no. 4-5, pages 391–411, 1998.
- [Michel 00] J. F. Michel & P. Picart. *Modelling of material behavior for small and thin parts : applications for sheet metal forming numerical*

- simulations*. In 29th Conference of Metallurgists (COM), 20-23 August 2000, volume 3, pages 1–15, 2000.
- [Mikkelsen 99] L. P. Mikkelsen & V. Tvergaard. *A nonlocal two-dimensional analysis of instabilities in tube under internal pressure*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 47, no. 4, pages 953–969, 1999.
- [Molinari 83] A. Molinari & R. J. Clifton. *Localisation de la Déformation Viscoplastique en Cisaillement Simple : Résultats Exactes en Théorie non linéaire*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences- série II, no. 296, pages 1–4, 1983.
- [Molinari 85] A. Molinari. *Instabilité thermoviscoplastique en cisaillement simple*. Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 4, no. 5, pages 659–684, 1985.
- [Narasimhan 91] K. Narasimhan & R. H. Wagoner. *Finite element modeling simulation of in plane forming limit diagrams of sheets containing finite defects*. Metallurgical Transaction A, vol. 22, no. 11, 1991.
- [Neale 89] K. W. Neale. *Numerical analysis of sheet metal wrinkling*. In Thompson et al., editeur, NUMIFORM 89, pages 501–505, 1989.
- [Neale 90] K. W. Neale & P. Tuğcu. *A numerical analysis of wrinkle formation tendencies in sheet metals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pages 1595–1608, 1990.
- [Nefussi 02] G. Nefussi & A. Combescure. *Coupled buckling and plasticity instability for tube hydroforming*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44, pages 899–914, 2002.
- [Nguyen 84] Q. S. Nguyen. *Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale*. Journal de Mécanique théorique et Appliquée, vol. 3, pages 41–61, 1984.

-
- [Nguyen 95] Q. S. Nguyen. Stabilité des structures élastiques. Springer-Verlag, mathématiques et applications edition, 1995.
- [Nguyen 98] Q. S. Nguyen. *Comparaison des énergies dépensées en flambage plastique*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences, Série II b, vol. 326, pages 353–358, 1998.
- [Nguyen 99] Q. S. Nguyen. Stabilité et mécanique non-linéaire, chapitre 11, pages 227–243. Hermès, 1999.
- [Nordlund 97] P. Nordlund & B. Hggblad. *Prediction of wrinkle tendencies in explicit sheet metal-forming simulations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pages 4079–4095, 1997.
- [Parnière 75] P. Parnière & G. Sanz. *Influence des caractéristiques des tôles minces polycristallines sur l'emboutissabilité*. In Presses du CNRS, editeur, Mise en Forme des Métaux et Alliages, École d'été de Villars-sur-Ollon (Suisse), pages 267–281. 1975.
- [Peek 00] R. Peek. *An incrementally continuous deformation theory of plasticity with unloading*. International Journal of Solids and Structures, no. 37, pages 5009–5032, 2000.
- [PressesCNRS 90a] PressesCNRS. *Le plissement en emboutissage : Approche phénoménologique et expérimentale*. In Presses du CNRS, pages 360–369, 1990.
- [PressesCNRS 90b] PressesCNRS. *Simulation numérique du plissement des tôles minces*. In Presses du CNRS, pages 436–443, 1990.
- [Rault 75] D. Rault. Description de l'emboutissage et problèmes posés, chapitre 18, pages 297–303. 1975.
- [Rees 01] D. W. A. Rees. *Factors influencing the FLD automotive sheet*

- metal*. Journal of Materials Processing Technology, vol. 118, pages 1–8, 2001.
- [Rice 76] J. R. Rice. *The localization of plastic deformation*. In W. Koiter (Eds), editeur, Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of IUTAM Congress, pages 207–220, 1976.
- [Runesson 91] K. Runesson, N. S. Ottosen & D. Peric. *Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain*. International Journal of Plasticity, vol. 7, pages 99–121, 1991.
- [Selman 02] A. Selman, T. Meinders, A. H. van den Boogaard & J. Huetink. *On adaptative mesh refinement in wrinkling prediction analysis*. In Proceedings of Esaform'2002, pages 551–554, 2002.
- [Shrivastava] S. C. Shrivastava. *Inelastic buckling of rectangular sandwich plates*. International Journal of Solids and Structures, vol. 32, no. 8/9.
- [Singer 97a] J. Singer, J. Arbocz & T. Weller. volume 1, page 50. J. Wiley and Sons, 1997.
- [Singer 97b] J. Singer, J. Arbocz & T. Weller. volume 1, page 105. J. Wiley and Sons, 1997.
- [Singer 97c] J. Singer, J. Arbocz & T. Weller. Buckling experiments, volume 1, chapitre 2, pages 89–92. J. Wiley and Sons, 1997.
- [Sowerby 71] R. Sowerby & Duncan J.L. *Failure in sheet metal in biaxial tension*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 13, pages 217–229, 1971.
- [Stören 75] S. Stören & J. R. Rice. *Localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 23, pages 421–441, 1975.

-
- [Swift 52] H. W. Swift. *Plastic instability under plane stress*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 1, pages 1–18, 1952.
- [Szacinski 84] A.M. Szacinski & P.F. Thomson. *The effect of mechanical properties on the wrinkling behavior of sheet materials in the Yoshida test*. Journal of Mechanical Working Technology, no. 10, pages 87–102, 1984.
- [Thibaud 01] S. Thibaud. *Étude analytique et numérique du procédé d'hydroformage d'un tube. Application à l'hydroformage d'une calotte sphérique*. Rapport de dea, Université de Franche-Comté-ENSMM, 2001.
- [Timoshenko 61] S.P. Timoshenko & Gere J. M. Theory of elastic stability. McGraw-Hill International eds, second edition, 1961.
- [Tomita 88] Y. Tomita & A. Shindo. *Onset and growth of wrinkling in thin square plate subjected to diagonal tension*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 30, pages 921–931, 1988.
- [Tóth 96] L. S. Tóth, D. Dudzinski & A. Molinari. *Forming limit prediction with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 38, no. 8-9, pages 805–824, 1996.
- [Tuğcu 01] P. Tuğcu, K. W. Neale, P. D. Wu & S. R. MacEwen. *Effect of planar anisotropy on wrinkle formation tendencies in curved sheets*. International Journal of Mechanical Sciences, no. 43, pages 2883–2897, 2001.
- [Tvergaard 80] V. Tvergaard. *Bifurcation and imperfection-sensitivity at necking instabilities*. ZAMM, vol. 60, pages T26–T34, 1980.
- [Tvergaard 90] V. Tvergaard. *Bifurcation in elastic-plastic tubes under internal*

- pressure*. European Journal of Mechanics, A/ Solids, vol. 9, no. 1, pages 21–35, 1990.
- [Tvergaard 99] V. Tvergaard. *Studies of elastic plastic instabilities*. Journal of Applied Mechanics, vol. 66, pages 3–9, 1999.
- [Wang 93] X. Wang & L. H. N. Lee. *Postbifurcation behavior of wrinkles in square metal sheet under Yoshida test*. International Journal of Plasticity, no. 9, pages 1–19, 1993.
- [Wang 01] C. M. Wang, Y. Xiang & Chakrabarty J. *Elastic/plastic buckling of thick plates*. International Journal of Solids and Structures, no. 38, pages 8617–8640, 2001.
- [Woodthrope 70] J. Woodthrope & R. Pearce. *The anomalous behavior of aluminium sheet under balanced biaxial tension*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 20, page 385, 1970.
- [Xu 98a] S. Xu & K.J. Weinmann. *Prediction of forming limit curves of sheet metals using Hill's 1993 user-friendly yield criterion of anisotropic materials*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 40, no. 9, pages 913–925, 1998.
- [Xu 98b] S. Xu, K.J. Weinmann & A. Chandra. *Analysis of forming limits using the Hill 1993 yield criterion*. Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 120, pages 236–241, 1998.
- [Yoshida 83] K. Yoshida. *Purpose and Feature of Yoshida buckling test (YBT)*. Journal of the Japan Society for Technology of Plasticity, no. 24, page 901, 1983.
- [Yossifon 84] S. Yossifon, J. Tirosh & E. Kochavi. *On suppression of plastic buckling in hydroforming processes*. International Journal of Mechanical Sciences, no. 6-8, pages 389–402, 1984.
- [Yu 82] T. X. Yu & W. Jonhson. *The buckling of Annular plates in*

- relation to the deep-drawing process.* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 24, pages 175–188, 1982.
- [Zeng 01] Q. Zeng, A. Combescure & F. Arnaudeau. *An efficient plasticity algorithm for shell elements : application to metal forming simulation.* Computers and Structures, vol. 79, no. 16, pages 1525–1540, 2001.
- [Zhang 99] S. H. Zhang. *Developments in hydroforming.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 91, pages 236–244, 1999.
- [Zhu 98] X. H. Zhu, S. A. Majlessi & E. C. Aifantis. *Predicting the forming limit diagram (FLD) for sheet metals with planar anisotropy.* Society of Automotive Engineers Transactions, vol. 107, no. 5, pages 56–64, 1998.

Annexe A

Obtention du critère de Considère

Notation 73 Soient F la force de traction, σ la contrainte de traction et soient L la longueur, S la section et $V = LS$ le volume utile de l'éprouvette de traction.

La force F passe par un extrémum lorsque :

$$dF = 0 \quad (\text{A.1})$$

D'après les notations, on a

$$F = \sigma S \quad (\text{A.2})$$

On obtient alors

$$dF = d\sigma S + \sigma dS \quad (\text{A.3})$$

Ou encore

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S} \quad (\text{A.4})$$

D'après la définition du volume utile, sa différentiation donne

$$\frac{dS}{S} = \frac{dV}{V} - \frac{dL}{L} \quad (\text{A.5})$$

Le matériau étant supposé incompressible, l'équation A.5 reportée dans A.4 fournit :

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{dL}{L} \quad (\text{A.6})$$

La force passant par un maximum, on utilise alors l'équation A.1 et l'on obtient :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} - d\varepsilon = 0 \quad (\text{A.7})$$

soit encore

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sigma = 0 \quad (\text{A.8})$$

Cette dernière équation est appelée **critère de force maximum** ou **critère de Considère**.

Annexe B

Recherche d'instabilité dans le cadre du critère de charge Hill93

B.1 Détermination de la loi de comportement : expression du multiplicateur plastique

La contrainte équivalente est définie de manière implicite :

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \alpha_{90}^2 \sigma_2^2 + \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{B.1})$$

La loi de comportement est de la forme :

$$D^p = \dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{B.2})$$

avec

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0$$

B.1. Détermination de la loi de comportement : expression du multiplicateur plastique

Ainsi, le tenseur des taux de déformations est relié au tenseur des contraintes par la loi de comportement suivante :

$$D^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (\text{B.3})$$

On exprime dans un premier temps les dérivées $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i}$. Pour cela, on utilise le théorème de dérivation des fonctions implicites. On note $F(\bar{\sigma}, \sigma_i)$ la fonction définie par

$$F(\bar{\sigma}, \sigma_i) = \bar{\sigma}^2 - \sigma_1^2 - \alpha_{90}^2 \sigma_2^2 - \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{B.4})$$

On a alors $F(\bar{\sigma}, \sigma_i) = 0$. Les dérivées de la contrainte équivalente par rapport aux composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent par la relation :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}} \quad (\text{B.5})$$

On calcule alors les dérivées de la fonction F :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = -2\sigma_1 - \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{2p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_2 \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = -2\alpha_{90}^2 \sigma_2 - \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + 2q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \quad (\text{B.6b})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = 2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{B.6c})$$

L'équation B.3, associée aux équations B.5 et aux dérivées B.6 permet d'écrire la loi de comportement sous la forme :

$$D_1^p = - \dot{\lambda} \frac{-2\sigma_1 - \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{2p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.7})$$

$$D_2^p = - \dot{\lambda} \frac{-2\alpha_{90}^2 \sigma_2 - \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + 2q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.8})$$

On utilise alors la relation :

$$\bar{\sigma} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} = \sigma_i D_i^p \quad (\text{B.9})$$

d'où

$$\bar{\sigma} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} = -\dot{\lambda} \frac{-2\sigma_1^2 - 2\alpha_{90}^2 \sigma_2^2 - \alpha_{90} \left[2(p+q-c) - \alpha_b \frac{3p\sigma_1+3q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.10})$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} = -\dot{\lambda} \frac{-2\bar{\sigma}^2 + \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \sigma_1 \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{\sigma} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} = \dot{\lambda} \bar{\sigma} \left(\frac{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\sigma} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} = \dot{\lambda} \bar{\sigma} \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \quad (\text{B.14})$$

Les équations de comportement reliant les déformations principales aux contraintes principales sont alors exprimées par :

$$D_1^p = -\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \frac{-2\sigma_1 - \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{2p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.15})$$

$$D_2^p = -\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \frac{-2\alpha_{90}^2 \sigma_2 - \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1+2q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.16})$$

Remarque 74 Dans le cas isotrope, on retrouve bien :

$$D_1^p = \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\sigma}} \quad (\text{B.17a})$$

$$D_2^p = \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\bar{\sigma}} \quad (\text{B.17b})$$

Pour pouvoir réaliser l'analyse linéaire de stabilité, on doit se placer dans le repère matériel pour les contraintes et les vitesses de déformations et non pas dans les repères

B.1. Détermination de la loi de comportement : expression du multiplicateur plastique

principaux. Les vitesses de déformations et contraintes principales sont exprimées en fonction des coordonnées matérielles par :

$$D_1 = \frac{1}{2} \left(D_{11} + D_{22} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \right) \quad (\text{B.18a})$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \left(D_{11} + D_{22} - \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \right) \quad (\text{B.18b})$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right) \quad (\text{B.18c})$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right) \quad (\text{B.18d})$$

On cherche alors à exprimer la relation entre la composante D_{12} du tenseur des vitesses de déformations et les composantes du tenseur des contraintes. On a :

$$D_{12}^p = \dot{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{12}} \quad (\text{B.19})$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} D_{12}^p &= \dot{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{12}} \right) \\ D_{12}^p &= -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{12}} \right) \\ D_{12}^p &= \left(D_1^0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{12}} + D_2^0 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{12}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Or on montre aisément avec B.18 que :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{12}} = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{12}} = \frac{-2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \quad (\text{B.22})$$

On en déduit alors avec B.20 et B.18 :

$$D_{12} = (D_1 - D_2) \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \quad (\text{B.23})$$

$$D_{12} = \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \quad (\text{B.24})$$

B.2 Recherche d'instabilité : perturbation et linéarisation de l'équilibre

Les équations à perturber sont les équations classiques de la mécanique :

$$\bar{\sigma} = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^m \quad (\text{B.25a})$$

$$\text{div} (h\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{B.25b})$$

$$D_{ij,kl} + D_{kl,ij} = D_{ik,jl} + D_{jl,ik} \quad (\text{B.25c})$$

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0 \quad (\text{B.25d})$$

et les équations liées à la loi de comportement de Hill93 exprimées dans les repères principaux des contraintes et vitesses de déformation :

$$D_1^p = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{-2\sigma_1 - \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{2p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.26a})$$

$$D_2^p = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{-2\alpha_{90}^2 \sigma_2 - \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + 2q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90} \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.26b})$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \alpha_{90}^2 \sigma_2^2 + \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{B.26c})$$

On ajoute à ces équations, l'équation B.24 :

$$D_{12}^2 = \frac{4(D_{11} - D_{22})^2}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - 12\sigma_{12}^2} \sigma_{12}^2 \quad (\text{B.27})$$

On rappelle que la fonction de perturbation est de la forme :

$$f(\vec{x}, t) = e^{\eta t} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}} \quad (\text{B.28})$$

$$\text{avec } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}.$$

B.2.1 Perturbation

Perturbation des équations de comportement

On remarque que d'après les relations B.18, on obtient :

$$\delta D_1 = \Delta_{11} \delta D_{11} + \Delta_{12} \delta D_{22} + \Delta_{13} \delta D_{12} \quad (\text{B.29a})$$

$$\delta D_2 = \Delta_{21} \delta D_{11} + \Delta_{22} \delta D_{22} + \Delta_{23} \delta D_{12} \quad (\text{B.29b})$$

$$\delta \sigma_1 = \varkappa_{11} \delta \sigma_{11} + \varkappa_{12} \delta \sigma_{22} + \varkappa_{13} \delta \sigma_{12} \quad (\text{B.29c})$$

$$\delta \sigma_2 = \varkappa_{21} \delta \sigma_{11} + \varkappa_{22} \delta \sigma_{22} + \varkappa_{23} \delta \sigma_{12} \quad (\text{B.29d})$$

avec :

$$- \Delta_{11} = \frac{D_1 - D_{22}}{2D_1 - D_{11} - D_{22}}, \Delta_{12} = \frac{D_1 - D_{11}}{2D_1 - D_{11} - D_{22}}, \Delta_{13} = \frac{4D_{12}}{2D_1 - D_{11} - D_{22}}$$

$$- \Delta_{21} = \frac{D_2 - D_{22}}{2D_2 - D_{11} - D_{22}}, \Delta_{22} = \frac{D_2 - D_{11}}{2D_2 - D_{11} - D_{22}}, \Delta_{23} = \frac{4D_{12}}{2D_2 - D_{11} - D_{22}}$$

$$- \varkappa_{11} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{22}}{2\sigma_1 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \varkappa_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{2\sigma_1 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \varkappa_{13} = \frac{4\sigma_{12}}{2\sigma_1 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

$$- \varkappa_{21} = \frac{\sigma_2 - \sigma_{22}}{2\sigma_2 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \varkappa_{22} = \frac{\sigma_2 - \sigma_{11}}{2\sigma_2 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \varkappa_{23} = \frac{4\sigma_{12}}{2\sigma_2 - \sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

Les coefficients Δ_{ij} et \varkappa_{ij} se réécrivent :

$$- \Delta_{11} = \frac{1}{2} \frac{D_{11} - D_{22} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}},$$

$$- \Delta_{12} = \frac{1}{2} \frac{-D_{11} + D_{22} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}},$$

$$\begin{aligned}
 -\Delta_{13} &= \frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 -\Delta_{21} &= -\frac{1}{2} \frac{D_{11} - D_{22} - \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}, \\
 -\Delta_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{-D_{11} + D_{22} - \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}, \\
 -\Delta_{23} &= -\frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 -\varkappa_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\
 -\varkappa_{12} &= \frac{1}{2} \frac{-\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\
 -\varkappa_{13} &= \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 -\varkappa_{21} &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\
 -\varkappa_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{-\sigma_{11} + \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\
 -\varkappa_{23} &= -\frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}
 \end{aligned}$$

Remarque 75 *On constate que :*

$$\Delta_{11} = \Delta_{22}$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}$$

$$\Delta_{13} = -\Delta_{23}$$

$$\varkappa_{11} = \varkappa_{22}$$

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{21}$$

$$\varkappa_{13} = -\varkappa_{23}$$

On considère désormais la perturbation du taux de déformation D_1^p :

$$D_1^p = -\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \frac{-2\sigma_1 - \alpha_{90} \left((p+q-c) - \alpha_b \frac{2p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right) \sigma_2}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90}\alpha_b \frac{p\sigma_1+q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1\sigma_2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_1^p [2\bar{\sigma}^3 - \alpha_{90}\alpha_b p\sigma_1^2\sigma_2 - \alpha_{90}\alpha_b q\sigma_1\sigma_2^2] + \\ \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \bar{\sigma} [-2\sigma_1\bar{\sigma} - \alpha_{90} (p+q-c) \bar{\sigma}\sigma_2 + \alpha_{90}\alpha_b\sigma_2 (2p\sigma_1 + q\sigma_2)] = 0 \quad (\text{B.30}) \end{aligned}$$

En négligeant les perturbations du second ordre, on perturbe les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^3 &= (\bar{\sigma}^0 + \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t))^3 = \bar{\sigma}^{0^3} + 3\bar{\sigma}^{0^2} \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \\ \sigma_1^2 \sigma_2 &= \sigma_1^{0^2} \sigma_2^0 + 2\sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^{0^2} \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \\ \sigma_1 \sigma_2^2 &= \sigma_1^0 \sigma_2^{0^2} + \sigma_2^{0^2} \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + 2\sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \\ \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \bar{\sigma} &= \frac{\dot{\varepsilon}^0}{\varepsilon} \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \delta^0 \frac{\dot{\varepsilon}^0}{\varepsilon} f(\vec{x}, t) + \frac{\dot{\varepsilon}^0}{\varepsilon} \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \\ \sigma_1 \bar{\sigma} &= \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^0 \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \\ \sigma_2 \bar{\sigma} &= \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) + \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma_1^0 \sigma_2^0 + \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \\ \sigma_2^2 &= \sigma_2^{0^2} + 2\sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

On obtient alors aisément les perturbations des produits suivants :

$$\begin{aligned}
 D_1^p \bar{\sigma}^3 &= D_1^0 \bar{\sigma}^{03} + 3D_1^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \bar{\sigma} f(\bar{x}, t) + \bar{\sigma}^{03} \delta^0 D_1 f(\bar{x}, t) \\
 D_1^p \sigma_1^2 \sigma_2 &= D_1^0 \sigma_1^{02} \sigma_2^0 + 2D_1^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\bar{x}, t) + D_1^0 \sigma_1^{02} \delta^0 \sigma_2 f(\bar{x}, t) + \sigma_1^{02} \sigma_2^0 \delta^0 D_1 f(\bar{x}, t) \\
 D_1^p \sigma_1 \sigma_2^2 &= D_1^0 \sigma_1^0 \sigma_2^{02} + D_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\bar{x}, t) + 2D_1^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\bar{x}, t) + \sigma_1^0 \sigma_2^{02} \delta^0 D_1 f(\bar{x}, t) \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma}^2 \sigma_1 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \sigma_1^0 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_1 f(\bar{x}, t) + 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \bar{\sigma} f(\bar{x}, t) + \bar{\sigma}^{02} \sigma_1^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} f(\bar{x}, t) \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma}^2 \sigma_2 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \sigma_2^0 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_2 f(\bar{x}, t) + 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} f(\bar{x}, t) + \bar{\sigma}^{02} \sigma_2^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} f(\bar{x}, t) \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma} \sigma_1 \sigma_2 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 + \left(\dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_1 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_2 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} \right) f(\bar{x}, t) \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma} \sigma_2^2 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^{02} + 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\bar{x}, t) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \bar{\sigma} f(\bar{x}, t) + \bar{\sigma}^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} f(\bar{x}, t)
 \end{aligned}$$

On reporte ces produits dans l'équation (B.30) et on simplifie cette équation en considérant que les grandeurs homogènes doivent vérifier (B.30). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 &6D_1^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \bar{\sigma} + 2\bar{\sigma}^{03} \delta^0 D_1 \\
 &\quad - \alpha_{90} \alpha_b p \left(2D_1^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 + D_1^0 \sigma_1^{02} \delta^0 \sigma_2 + \sigma_1^{02} \sigma_2^0 \delta^0 D_1 \right) \\
 &\quad - \alpha_{90} \alpha_b q \left(D_1^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \sigma_1 + 2D_1^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 + \sigma_1^0 \sigma_2^{02} \delta^0 D_1 \right) \\
 &\quad - 2 \left(\dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_1 + 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{02} \sigma_1^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} \right) \\
 &\quad - \alpha_{90} (p + q - c) \left(\dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_2 + 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{02} \sigma_2^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} \right) \\
 &+ 2\alpha_{90} \alpha_b p \left(\dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_1 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_2 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} \right) \\
 &\quad + \alpha_{90} \alpha_b q \left(2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

On regroupe les termes :

$$\begin{aligned}
 & \left[-\alpha_{90}\alpha_b D_1^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) - 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{0^2} + 2\alpha_{90}\alpha_b p \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \right] \delta^0 \sigma_1 \\
 & - \alpha_{90} \left[\alpha_b D_1^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)) \right] \delta^0 \sigma_2 \\
 & + 2 \left[3D_1^0 \bar{\sigma}^{0^2} - 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 - \alpha_{90} \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \left((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - \alpha_b \left(p\sigma_1^0 + \frac{q\sigma_2^0}{2} \right) \right) \right] \delta^0 \bar{\sigma} \\
 & \quad + \left[2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right] \delta^0 D_1 \\
 & \quad + \bar{\sigma}^0 \left[-2\bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 - \alpha_{90} \sigma_2^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - \alpha_b (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)) \right] \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.31})
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left[-\alpha_{90}\alpha_b D_1^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) - 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{0^2} + 2\alpha_{90}\alpha_b p \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \right]}{\left[2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right]} \delta^0 \sigma_1 \\
 & - \alpha_{90} \frac{\left[\alpha_b D_1^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)) \right]}{\left[2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right]} \delta^0 \sigma_2 \\
 & + 2\bar{\sigma}^0 \frac{\left[3D_1^0 \bar{\sigma}^0 - \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \left(2\sigma_1^0 + \alpha_{90} \sigma_2^0 \left((p+q-c) - \frac{\alpha_b}{2} \frac{2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0}{\bar{\sigma}^0} \right) \right) \right]}{2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \delta^0 \bar{\sigma} \\
 & \quad + \delta^0 D_1 - \frac{D_1^0}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0} \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.32})
 \end{aligned}$$

On réécrit cette équation sous la forme :

$$a_{11} \delta^0 \sigma_1 + a_{12} \delta^0 \sigma_2 + a_{13} \delta^0 \bar{\sigma} + a_{14} \delta^0 D_1 + a_{15} \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.33})$$

avec :

$$a_{11} = \frac{\left[-\alpha_{90}\alpha_b D_1^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) - 2 \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{0^2} + 2\alpha_{90}\alpha_b p \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \right]}{\left[2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right]}$$

$$\begin{aligned}
 - a_{12} &= -\alpha_{90} \frac{\left[\alpha_b D_1^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)) \right]}{\left[2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right]} \\
 - a_{13} &= 2\bar{\sigma}^0 \frac{\left[3D_1^0\bar{\sigma}^0 - \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \left(2\sigma_1^0 + \alpha_{90}\sigma_2^0 \left((p+q-c) - \frac{\alpha_b}{2} \frac{2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0}{\bar{\sigma}^0} \right) \right) \right]}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{14} &= 1 \\
 - a_{15} &= -\frac{D_1^0}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0}
 \end{aligned}$$

La deuxième composante du tenseur des taux de déformation D_2^p est donnée par :

$$D_2^p = -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0} \frac{-2\alpha_{90}^2\sigma_2 - \alpha_{90} \left[(p+q-c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + 2q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1}{2\bar{\sigma} - \alpha_{90}\alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}^2} \sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow D_2^p \left[2\bar{\sigma}^3 - \alpha_{90}\alpha_b p\sigma_1^2\sigma_2 - \alpha_{90}\alpha_b q\sigma_1\sigma_2^2 \right] + \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma} \left[-2\alpha_{90}^2\sigma_2\bar{\sigma} - \alpha_{90} (p+q-c)\bar{\sigma}\sigma_1 + \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1(p\sigma_1 + 2q\sigma_2) \right] = 0 \quad (\text{B.35})
 \end{aligned}$$

La perturbation de la première partie de cette équation est identique à celle de l'équation B.30. Le seul produit de grandeurs mécaniques qui ne soit pas déjà perturbé est le produit $\dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma}\sigma_1^2$:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p \bar{\sigma}\sigma_1^2 = \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0\sigma_1^{02} + 2\dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0\sigma_1^0\delta^0\sigma_1 f(\bar{x}, t) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^{02}\delta^0\bar{\sigma} f(\bar{x}, t) + \bar{\sigma}^0\sigma_1^{02}\delta^0\dot{\bar{\varepsilon}} f(\bar{x}, t)$$

La perturbation de l'équation B.35 est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
& 6D_2^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \bar{\sigma} + 2\bar{\sigma}^{03} \delta^0 D_2 \\
& - \alpha_{90} \alpha_b p \left(2D_2^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 + D_2^0 \sigma_1^{02} \delta^0 \sigma_2 + \sigma_1^{02} \sigma_2^0 \delta^0 D_2 \right) \\
& - \alpha_{90} \alpha_b q \left(D_2^0 \sigma_2^{02} \delta^0 \sigma_1 + 2D_2^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 + \sigma_1^0 \sigma_2^{02} \delta^0 D_2 \right) \\
& - 2\alpha_{90}^2 \left(\overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_2 + 2 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{02} \sigma_2^0 \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} \right) \\
& - \alpha_{90} (p + q - c) \left(\overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} \delta^0 \sigma_1 + 2 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{02} \sigma_1^0 \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} \right) \\
& + \alpha_{90} \alpha_b p \left(2 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \sigma_1 + \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^{02} \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^0 \sigma_1^{02} \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} \right) \\
& + 2\alpha_{90} \alpha_b q \left(\overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_1 + \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0 \delta^0 \sigma_2 + \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (\text{B.36})
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
& - \alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) + \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p + q - c) \bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0))}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \delta^0 \sigma_1 \\
& - \alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + 2\alpha_{90} \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} - 2\alpha_b q \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \delta^0 \sigma_2 \\
& + 2 \frac{3D_2^0 \bar{\sigma}^{02} - 2\alpha_{90}^2 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 - \alpha_{90} \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 ((p + q - c) \bar{\sigma}^0 - \frac{\alpha_b}{2} (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0))}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \delta^0 \bar{\sigma} \\
& + \delta^0 D_2 - \frac{D_2}{\overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0} \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.37})
\end{aligned}$$

On réécrit cette équation sous la forme :

$$a_{21} \delta^0 \sigma_1 + a_{22} \delta^0 \sigma_2 + a_{23} \delta^0 \bar{\sigma} + a_{24} \delta^0 D_2 + a_{25} \delta^0 \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.38})$$

avec :

$$- a_{21} = -\alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) + \overset{\cdot}{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p + q - c) \bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0))}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)}$$

$$\begin{aligned}
 - a_{22} &= -\alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + 2\alpha_{90} \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{0^2} - 2\alpha_b q \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0}{2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{23} &= 2 \frac{3D_2^0 \bar{\sigma}^{0^2} - \alpha_{90} \dot{\bar{\varepsilon}}^0 (2\alpha_{90} \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 + \sigma_1^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - \frac{\alpha_b}{2}(p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0)))}{2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90} \alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{24} &= 1 \\
 - a_{25} &= -\frac{D_2}{\dot{\bar{\varepsilon}}}
 \end{aligned}$$

Les équations de comportement s'écrivent donc :

$$a_{11}\delta^0\sigma_1 + a_{12}\delta^0\sigma_2 + a_{13}\delta^0\bar{\sigma} + a_{14}\delta^0 D_1 + a_{15}\delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$a_{21}\delta^0\sigma_1 + a_{22}\delta^0\sigma_2 + a_{23}\delta^0\bar{\sigma} + a_{24}\delta^0 D_2 + a_{25}\delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.40})$$

En utilisant ces équations et B.29, on a :

$$\begin{aligned}
 (a_{11}\varkappa_{11} + a_{12}\varkappa_{21})\delta^0\sigma_{11} + (a_{11}\varkappa_{12} + a_{12}\varkappa_{22})\delta^0\sigma_{22} + (a_{11}\varkappa_{13} + a_{12}\varkappa_{23})\delta^0\sigma_{12} + a_{13}\delta^0\bar{\sigma} + \\
 a_{14}\Delta_{11}\delta D_{11} + a_{14}\Delta_{12}\delta D_{22} + a_{14}\Delta_{13}\delta D_{12} + a_{15}\delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.41})
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (a_{21}\varkappa_{11} + a_{22}\varkappa_{21})\delta^0\sigma_{11} + (a_{21}\varkappa_{12} + a_{22}\varkappa_{22})\delta^0\sigma_{22} + (a_{21}\varkappa_{13} + a_{22}\varkappa_{23})\delta^0\sigma_{12} + a_{23}\delta^0\bar{\sigma} + \\
 a_{24}\Delta_{21}\delta D_{11} + a_{24}\Delta_{22}\delta D_{22} + a_{24}\Delta_{23}\delta D_{12} + a_{25}\delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.42})
 \end{aligned}$$

En négligeant les perturbations du second ordre, l'équation B.24 se perturbe de la manière suivante :

$$\delta D_{12} = 2 \frac{(\delta D_1 - \delta D_2)\sigma_{12} + (D_1 - D_2)\delta\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} - \frac{D_{12}((\sigma_{11} - \sigma_{22})(\delta\sigma_{11} - \delta\sigma_{22}) + 4\sigma_{12}\delta\sigma_{12})}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \quad (\text{B.43})$$

Soit encore avec B.29 :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - 2\sigma_{12}(\Delta_{13} - \Delta_{23})}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \delta D_{12} - 2\sigma_{12} \frac{(\Delta_{11} - \Delta_{21}) \delta D_{11} + (\Delta_{12} - \Delta_{22}) \delta D_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\ & + \frac{D_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) (\delta\sigma_{11} - \delta\sigma_{22}) \\ & - 2 \frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - 2D_{12}\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \delta\sigma_{12} = 0 \quad (\text{B.44}) \end{aligned}$$

Cela peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \left(1 - 2 \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \right) \delta D_{12} \\ & + \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} (D_{11} - D_{22}) (\delta D_{11} - \delta D_{22}) \\ & + \frac{D_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) (\delta\sigma_{11} - \delta\sigma_{22}) \\ & - 2 \frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - 2D_{12}\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \delta\sigma_{12} = 0 \quad (\text{B.45}) \end{aligned}$$

Pour la suite, on réécrit B.45 sous la forme :

$$\lambda_1 \delta\sigma_{11} - \lambda_1 \delta\sigma_{22} + \lambda_2 \delta\sigma_{12} + \lambda_3 \delta D_{11} - \lambda_3 \delta D_{22} + \lambda_4 \delta D_{12} = 0 \quad (\text{B.46})$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{D_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ \lambda_2 &= -2 \frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - 2D_{12}\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ \lambda_3 &= \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} (D_{11} - D_{22}) \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = 1 - 2 \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}$$

Perturbation de la contrainte équivalente

Pour finir, il reste à perturber l'équation de définition de la contrainte équivalente :

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \alpha_{90}^2 \sigma_2^2 + \alpha_{90} \left[(p + q - c) - \alpha_b \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\bar{\sigma}} \right] \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{B.47})$$

La perturbation de cette équation est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{0^3} + 3\bar{\sigma}^{0^2} \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) &= \sigma_1^{0^2} \bar{\sigma}^0 + 2\bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^{0^2} \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \\ &+ \alpha_{90}^2 \left(\sigma_2^{0^2} \bar{\sigma}^0 + 2\bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) + \sigma_2^{0^2} \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \right) \\ &+ \alpha_{90} (p + q - c) \left(\sigma_1^0 \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \bar{\sigma} f(\vec{x}, t) \right) \\ &- \alpha_{90} \alpha_b p \left(\sigma_1^{0^2} \sigma_2^0 + 2\sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + \sigma_1^{0^2} \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \right) \\ &- \alpha_{90} \alpha_b q \left(\sigma_1^0 \sigma_2^{0^2} + \sigma_2^{0^2} \delta^0 \sigma_1 f(\vec{x}, t) + 2\sigma_1^0 \sigma_2^0 \delta^0 \sigma_2 f(\vec{x}, t) \right) \quad (\text{B.48}) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} &\left[2\bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 + \alpha_{90} (p + q - c) \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 - 2\alpha_{90} \alpha_b p \sigma_1^0 \sigma_2^0 - \alpha_{90} \alpha_b q \sigma_2^{0^2} \right] \delta^0 \sigma_1 \\ &+ \left[2\alpha_{90}^2 \bar{\sigma}^0 \sigma_2^0 + \alpha_{90} (p + q - c) \bar{\sigma}^0 \sigma_1^0 - \alpha_{90} \alpha_b p \sigma_1^{0^2} - 2\alpha_{90} \alpha_b q \sigma_1^0 \sigma_2^0 \right] \delta^0 \sigma_2 \\ &+ \left[-3\bar{\sigma}^{0^2} + \sigma_1^{0^2} + \alpha_{90}^2 \sigma_2^{0^2} + \alpha_{90} (p + q - c) \sigma_1^0 \sigma_2^0 \right] \delta^0 \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{B.49}) \end{aligned}$$

On vérifie que cette équation se simplifie en utilisant les relations B.30, B.35 :

$$D_1^0 \delta^0 \sigma_1 + D_2^0 \delta^0 \sigma_2 - \dot{\bar{\varepsilon}} \delta^0 \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{B.50})$$

En utilisant B.29, on a alors :

$$(D_1^0 \chi_{11} + D_2^0 \chi_{21}) \delta \sigma_{11} + (D_1^0 \chi_{12} + D_2^0 \chi_{22}) \delta \sigma_{22} + (D_1^0 \chi_{13} + D_2^0 \chi_{23}) \delta \sigma_{12} - \frac{\cdot 0}{\bar{\varepsilon}} \delta^0 \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{B.51})$$

Rappels des équations perturbées

On rappelle dans cette partie les perturbations des équations restant inchangées par rapport à l'analyse de striction localisée dans le cas d'une loi de Hill48.

Loi d'érouissage

$$\bar{\sigma} = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^{\cdot m} \quad (\text{B.52})$$

La perturbation de cette équation entraîne :

$$-\eta \delta^0 \bar{\sigma} + (\eta \beta_1 + \beta_2) \delta^0 \frac{\cdot}{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{B.53})$$

avec $\beta_1 = \frac{m \bar{\sigma}^0}{\cdot 0}$ et $\beta_2 = \frac{n \bar{\sigma}^0}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p}$

Equilibre mécanique

$$\text{div} (h\sigma) = 0 \quad (\text{B.54})$$

La perturbation de ces équations entraîne :

$$\eta n_1 \delta^0 \sigma_1 + \sigma_1 n_1 \delta^0 D_3 = 0 \quad (\text{B.55a})$$

$$\eta n_2 \delta^0 \sigma_2 + \sigma_2 n_2 \delta^0 D_3 = 0 \quad (\text{B.55b})$$

Incompressibilité

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad (\text{B.56})$$

La perturbation de cette équation entraîne :

$$\delta^0 D_1 + \delta^0 D_2 + \delta^0 D_3 = 0 \quad (\text{B.57})$$

Compatibilité

$$D_{11,22} + D_{22,11} = 2D_{12,12} \quad (\text{B.58})$$

La perturbation de cette équation entraîne :

$$\cos^2 \psi \delta^0 D_{11} + \sin^2 \psi \delta^0 D_{22} - 2 \sin \psi \cos \psi \delta^0 D_{12} = 0 \quad (\text{B.59})$$

Écriture du système perturbé linéarisé

Les inconnues sont au nombre de 9. Soit $\delta^0 U$ le vecteur représentant les grandeurs mécaniques perturbées :

$$\delta^0 U^T = \left(\delta^0 \sigma_{11} \quad \delta^0 \sigma_{22} \quad \delta^0 \sigma_{12} \quad \delta^0 \bar{\sigma} \quad \delta^0 D_{11} \quad \delta^0 D_{22} \quad \delta^0 D_{33} \quad \delta^0 D_{12} \quad \delta^0 \dot{\varepsilon} \right) \quad (\text{B.60})$$

Le système des équations (B.53, B.55, B.41, B.42, B.46, B.50, B.57, B.59), représentant l'équilibre mécanique locale perturbé et linéarisé, peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$M \delta^0 U = \vec{0} \quad (\text{B.61})$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & (\eta\beta_1 + \beta_2) \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{1j}^0 n_j & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{2j}^0 n_j & 0 \\ \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & a_{13} & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & 0 & a_{15} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & a_{23} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & 0 & a_{25} \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & -\overset{\cdot}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.62})$$

avec

$$\begin{aligned} - \mu_{11} &= a_{11}\varkappa_{11} + a_{12}\varkappa_{21} \\ - \mu_{12} &= a_{11}\varkappa_{12} + a_{12}\varkappa_{22} \\ - \mu_{13} &= a_{11}\varkappa_{13} + a_{12}\varkappa_{23} \\ - \mu_{21} &= a_{21}\varkappa_{11} + a_{22}\varkappa_{21} \\ - \mu_{22} &= a_{21}\varkappa_{12} + a_{22}\varkappa_{22} \\ - \mu_{23} &= a_{21}\varkappa_{13} + a_{22}\varkappa_{23} \\ - \nu_1 &= D_1^0 \varkappa_{11} + D_2^0 \varkappa_{21} \\ - \nu_2 &= D_1^0 \varkappa_{12} + D_2^0 \varkappa_{22} \\ - \nu_3 &= D_1^0 \varkappa_{13} + D_2^0 \varkappa_{23} \end{aligned}$$

Les coefficients a_{ij} , \varkappa_{ij} , Δ_{ij} , λ_i et β_i valent :

$$- a_{11} = \frac{\left[-\alpha_{90}\alpha_b D_1^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) - 2 \overset{\cdot}{\varepsilon} \bar{\sigma}^{0^2} + 2\alpha_{90}\alpha_b p \overset{\cdot}{\varepsilon} \sigma_2^0 \bar{\sigma}^0 \right]}{\left[2\bar{\sigma}^{0^3} - \alpha_{90}\alpha_b \sigma_1^0 \sigma_2^0 (p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) \right]}$$

$$\begin{aligned}
 - a_{12} &= -\alpha_{90} \frac{\left[\alpha_b D_1^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)) \right]}{[2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)]} \\
 - a_{13} &= 2\bar{\sigma}^0 \frac{\left[3D_1^0\bar{\sigma}^0 - \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \left(2\sigma_1^0 + \alpha_{90}\sigma_2^0 \left((p+q-c) - \frac{\alpha_b}{2} \frac{2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0}{\bar{\sigma}^0} \right) \right) \right]}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{15} &= -\frac{D_1^0}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0} \\
 - a_{21} &= -\alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_2^0 (2p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0) + \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^0 ((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - 2\alpha_b(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0))}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{22} &= -\alpha_{90} \frac{\alpha_b D_2^0 \sigma_1^0 (p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0) + 2\alpha_{90} \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \bar{\sigma}^{02} - 2\alpha_b q \dot{\bar{\varepsilon}}^0 \sigma_1^0 \bar{\sigma}^0}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{23} &= 2 \frac{3D_2^0\bar{\sigma}^{02} - \alpha_{90} \dot{\bar{\varepsilon}}^0 (2\alpha_{90}\bar{\sigma}^0\sigma_2^0 + \sigma_1^0((p+q-c)\bar{\sigma}^0 - \frac{\alpha_b}{2}(p\sigma_1^0 + 2q\sigma_2^0)))}{2\bar{\sigma}^{03} - \alpha_{90}\alpha_b\sigma_1^0\sigma_2^0(p\sigma_1^0 + q\sigma_2^0)} \\
 - a_{25} &= -\frac{D_2}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0} \\
 - \Delta_{11} &= \frac{1}{2} \frac{D_{11} - D_{22} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \Delta_{12} &= \frac{1}{2} \frac{-D_{11} + D_{22} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \Delta_{13} &= \frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \Delta_{21} &= -\frac{1}{2} \frac{D_{11} - D_{22} - \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \Delta_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{-D_{11} + D_{22} - \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \Delta_{23} &= -\frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \varkappa_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \kappa_{12} &= \frac{1 - \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 - \kappa_{13} &= \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 - \kappa_{21} &= -\frac{1 - \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 - \kappa_{22} &= -\frac{1 - \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 - \kappa_{23} &= -\frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\
 - \lambda_1 &= \frac{D_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\
 - \lambda_2 &= -2\frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - 2D_{12}\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\
 - \lambda_3 &= \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} (D_{11} - D_{22}) \\
 - \lambda_4 &= 1 - 2\frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \frac{2D_{12}}{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}^2}} \\
 - \beta_1 &= \frac{m\bar{\sigma}^0}{\varepsilon_0} \\
 - \beta_2 &= \frac{n\bar{\sigma}^0}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p}
 \end{aligned}$$

Hypothèse 76 Pour la construction de courbes limites de formage, on suppose que l'état homogène est tel que le repère matériel est confondu avec les repères principaux. Cela se traduit par $D_{11} = D_1$, $D_{22} = D_2$, $D_{12} = 0$; $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$, $\sigma_{12} = 0$. La matrice M

devient:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & (\eta\beta_1 + \beta_2) \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^0 n_1 & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 n_2 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & a_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{11}^0 & D_{22}^0 & 0 & -\frac{\cdot}{\bar{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

On peut montrer que le déterminant de la matrice M peut se mettre sous la forme d'un polynôme du second ordre :

$$\det(M) = \eta (a\eta^2 + b\eta + c) \quad (\text{B.64})$$

B.2.2 Application au cas isotrope

On se place sous les conditions de l'hypothèse 76. On impose $m = 0$. De plus, dans le cas où $\alpha_{90} = \alpha_0 = 1$ et $r_{90} = r_0 = 1$ alors on a $p = q = 0$ et $c = 1$, la matrice M devient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^0 n_1 & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 n_2 & 0 \\ -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}} & \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{2\bar{\sigma}} & 0 & a_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_1^0}{\bar{\varepsilon}} \\ \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{2\bar{\sigma}} & -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}^0} & 0 & a_{23} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{D_2}{\bar{\varepsilon}} \\ 0 & 0 & -2\frac{(D_{11} - D_{22})}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{11}^0 & D_{22}^0 & 0 & -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.65})$$

$$- \text{ avec } \beta_2 = \frac{n\bar{\sigma}^0}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p}, a_{13} = \frac{3D_{11}^0\bar{\sigma} - \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\varepsilon}}(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{\bar{\sigma}^2}, a_{23} = \frac{3D_{22}^0\bar{\sigma}^0 - \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\varepsilon}}(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{\bar{\sigma}^{02}}$$

On rappelle que dans le cas isotrope, on a :

$$D_1^p = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\bar{\varepsilon}} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\sigma}} \quad (\text{B.66a})$$

$$D_2^p = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\bar{\varepsilon}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\bar{\sigma}} \quad (\text{B.66b})$$

La matrice M devient alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^0 n_1 & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 n_2 & 0 \\ -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} & \frac{\dot{\varepsilon}}{2} & 0 & D_{11}^0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\sigma} \frac{D_1^0}{\varepsilon} \\ \frac{\dot{\varepsilon}}{2} & -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} & 0 & D_{22}^0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\bar{\sigma} \frac{D_2^0}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & -3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{11}^0 & D_{22}^0 & 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.67})$$

La matrice ainsi obtenue est identique à l'application au cas isotrope de l'analyse linéaire de stabilité.

Annexe C

Recherche d'instabilité avec prise en compte de l'endommagement

C.1 Définition de l'équilibre :

Les équations d'équilibre dans le cas du comportement matériel modélisé par une loi de Hill48 avec prise en compte l'endommagement de Lemaître sont données par :

$$D^p = \frac{3}{2} \frac{1}{1-d} \frac{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\bar{\sigma}} \mathbb{H} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{C.1})$$

où \mathbb{H} est le tenseur d'orthotropie de Hill. D'après le principe d'équivalence en déformations, la contrainte équivalente se résume à :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|1-d|} \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{H} : \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{C.2})$$

Le matériau est supposé rigide-plastique. Les équation d'équilibre sont les suivantes :

$$\bar{\sigma} = \sigma_y = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^{\cdot m} \quad (\text{C.3})$$

$$\operatorname{div}(\underline{h\sigma}) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\underline{D})) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\operatorname{trace}(\underline{D}) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Les variables liées à l'endommagement sont définies par :

$$Y = -\frac{\bar{\sigma}}{2(1-d)^2 E} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{\operatorname{trace}(\underline{\sigma})}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right) \quad (\text{C.7})$$

$$d = \int_0^T \dot{d} dt \quad (\text{C.8})$$

$$\dot{d} = \left(-\frac{Y}{a_0} \right)^{s_0} \dot{\varepsilon} \quad (\text{C.9})$$

où a_0 et s_0 sont des paramètres de comportement matériel à identifier expérimentalement.

Hypothèse 77 *On suppose que l'état des contraintes est plan.*

C.2 Perturbation de l'équilibre

Notation 78 *Soit X une variable, on note δX la variable perturbée définie par :*

$$\delta X = \delta^0 X f(\vec{x}, t)$$

où $\delta^0 X$ est l'amplitude de la perturbation et $f(\vec{x}, t)$ est la fonction de perturbation telle que $f(x, t) = e^{nt} e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}}$ avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$

La perturbation des équations précédentes fournit les équations suivantes :

$$(D^p + \delta D^p) (\bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma}) - \frac{3}{2} \frac{1}{1 - (d + \delta d)} \left(\dot{\bar{\varepsilon}} + \delta \dot{\bar{\varepsilon}} \right) \mathbb{H} : (\underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{C.10a})$$

$$(1 - (d + \delta d))^2 (\bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma}) - (\underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}}) : \mathbb{H} : (\underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{C.10b})$$

$$(\bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma}) - k (\varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon}^p + \delta \bar{\varepsilon}^p))^n \left(\dot{\bar{\varepsilon}} + \delta \dot{\bar{\varepsilon}} \right)^m = 0 \quad (\text{C.10c})$$

$$\text{div} \left((h + \delta h) (\underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}}) \right) = 0 \quad (\text{C.10d})$$

$$(D + \delta D)_{11,22} + (D + \delta D)_{22,11} - 2 (D + \delta D)_{12,12} = 0 \quad (\text{C.10e})$$

$$\text{trace}(\underline{\underline{D}} + \delta \underline{\underline{D}}) = 0 \quad (\text{C.10f})$$

$$(Y + \delta Y) - \frac{(\bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma})}{2(1 - (d + \delta d))^2 E} \left(\frac{2(1 + \nu)}{3} + \frac{1 - 2\nu}{3} \left(\frac{\text{trace}(\underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}})}{(\bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma})} \right)^2 \right) = 0 \quad (\text{C.10g})$$

$$d + \delta d - \int_0^T (\dot{d} + \delta \dot{d}) dt = 0 \quad (\text{C.10h})$$

$$\dot{d} + \delta \dot{d} - \left(-\frac{Y + \delta Y}{a_0} \right)^{s_0} \left(\dot{\bar{\varepsilon}} + \delta \dot{\bar{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (\text{C.10i})$$

L'équation C.10h devient :

$$\delta^0 d e^{\eta t} e^{i\xi \bar{x} \cdot \bar{w}} - \delta^0 \dot{d} e^{i\xi \bar{x} \cdot \bar{w}} \int_0^T (e^{\eta t}) dt = 0 \quad (\text{C.11})$$

Soit encore :

$$\delta^0 d - \delta^0 \dot{d} \frac{e^{\eta(T-t)} - e^{-\eta t}}{\eta} = 0 \quad (\text{C.12})$$

On observe ici la stabilité asymptotique de l'équilibre. On va donc regarder le comportement de la perturbation lorsque le temps tend à l'infini. Or, on a, pour T fixé, $e^{\eta(T-t)} - e^{-\eta t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit alors $\delta^0 d = 0$. Le système d'équations C.10 peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M \delta^0 U = \vec{0} \quad (\text{C.13})$$

avec $\delta^0 U = \left(\delta^0 \sigma_{11}, \delta^0 \sigma_{22}, \delta^0 \sigma_{12}, \delta^0 \bar{\sigma}, \delta^0 D_{11}, \delta^0 D_{22}, \delta^0 D_{12}, \delta^0 D_{33}, \delta^0 \dot{\bar{\varepsilon}}, \delta^0 Y, \delta^0 \dot{d}, \delta^0 d \right)^T$ et

$$M = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{1-d} & \frac{D_{22}}{1-d} & \frac{2D_{12}}{1-d} & -\dot{\bar{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \eta + \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & -D_{11} & -\bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 & -D_{22} & 0 & -\bar{\sigma} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & -D_{12} & 0 & 0 & -\bar{\sigma} & 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_2^2 & n_1^2 & -n_1 n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_1 & 0 & \vartheta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Y}{a_0} & \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{a_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

où

$$- n_1 = \cos \psi$$

$$- n_2 = \sin \psi$$

$$- \beta_1 = n \frac{\bar{\sigma}}{(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)}$$

$$- \beta_2 = m \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}$$

$$- \alpha_{ij} = H_{ij} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{1-d}$$

$$- \gamma_{ij} = D_{ij} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}$$

$$- v_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$- \vartheta_1 = \frac{1-2\nu}{3E(1-d)^2}$$

$$- \vartheta_2 = \frac{2(1+\nu)}{3E(1-d)^2}$$

On recherche les solutions non-triviales de l'équation C.13, la matrice M doit vérifier :

$$\det(M) = 0 \tag{C.15}$$

On constate rapidement que :

$$\det(M) = \det(M_1) \tag{C.16}$$

où M_1 est définie par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{1-d} & \frac{D_{22}}{1-d} & \frac{2D_{12}}{1-d} & -\dot{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\eta + \beta_2 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & -D_{11} & -\bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{11} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 & -D_{22} & 0 & -\bar{\sigma} & 0 & 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & -D_{12} & 0 & 0 & -\bar{\sigma} & 0 & \gamma_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_2^2 & n_1^2 & -n_1n_2 & 0 & 0 \\ \eta n_1 & 0 & \eta n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 \\ 0 & \eta n_2 & \eta n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Cette matrice est la même que la matrice obtenue dans le cas sans endommagement à la seule différence que la contrainte doit être remplacée par la contrainte effective.

Annexe D

Obtention d'un critère de plissement par analyse de stabilité du flux de matière

Dans les précédents travaux concernant la recherche de striction localisée, il est remarqué que, parfois, lors de simulations, le critère de détection de ce défaut semble sensible à l'apparition de plis [Boudeau 95]. On est en droit de se demander naturellement si le plissement peut être assimilé à une instabilité du flux de matière. Mais comme cela a été précisé jusqu'à maintenant, le plissement semble plus dû à une bifurcation de l'équilibre mécanique qu'à une instabilité. En effet, le point d'instabilité apparaît après l'état de bifurcation. De plus, l'analyse en striction de par la forme de la perturbation ne peut donner d'indication sur l'influence de la forme de la structure ou sur le mode de flambement privilégié.

Toutefois, il semble que la technique de perturbation n'est pas inadaptée à la recherche de plis. En effet, considérons un élément en équilibre, on peut observer si sous une perturbation quelconque, notre élément va être sujet à l'apparition de plis ou non. On obtient alors non plus une analyse décrivant l'état actuel mais une analyse de prédiction. Le but poursuivi, par l'utilisation d'une telle méthode, est d'obtenir une méthode simple et

efficace. L'objectif de cette partie est de dériver un critère de plissement pour un élément plaque afin de vérifier la cohérence de l'approche proposée. Ainsi une nouvelle voie sera ouverte en vue de travaux ultérieurs.

D.1 Définition de l'équilibre mécanique

On travaille sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 79 *On suppose que l'élément considéré subit un état de contraintes planes.*

On reprend les notations de la partie 3.5.2, à savoir :

Notation 80 *Soient u_i les déplacements d'un point se situant sur le plan moyen de la plaque ($x^3 = 0$) et ϕ_α les composantes du vecteur rotation.*

On travaille sur une plaque soumise à des contraintes biaxiales dans le plan plus une pression normale au plan moyen de la plaque. Le tenseur des taux de déformations $\dot{\epsilon}$ est décomposé en taux de déformations de membrane $\dot{\epsilon}^m$ et taux de déformations de flexion $\dot{\kappa}$:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^m + x^3 \dot{\kappa}_{\alpha\beta} \quad (\text{D.1})$$

avec

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2} (\dot{\phi}_\alpha \phi_\beta + \phi_\alpha \dot{\phi}_\beta) \quad (\text{D.2})$$

$$\dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}_{\alpha,\beta} + \dot{\phi}_{\beta,\alpha}) \quad (\text{D.3})$$

Hypothèse 81 *Les déformations élastiques sont négligées.*

Hypothèse 82 *La théorie de plasticité utilisée est la théorie de l'écoulement plastique.*

On introduit désormais les équations définissant l'équilibre considéré.

D.1.1 Loi d'érouissage

La loi d'érouissage choisie est :

$$\bar{\sigma} = \sigma_y^0 + k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \bar{\varepsilon}^m \quad (\text{D.4})$$

D.1.2 La théorie de l'écoulement : Définition de surfaces de charges

On travaille avec les contraintes généralisées, pour cela on utilise le critère de charge de Ilyushin. Soit ϕ la surface de charge définie par :

$$\phi(\underline{\sigma}, \sigma_y) = \bar{\sigma}^2(\underline{\sigma}) - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (\text{D.5})$$

Dans le cas de contraintes généralisées, la surface de charge peut s'écrire de manière générale :

$$\phi(\underline{\sigma}, \sigma_y) = \{\sigma\}^g T [F] \{\sigma\}^g - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (\text{D.6})$$

La contrainte équivalente associée est donnée par

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\{\sigma\}^g T [F] \{\sigma\}^g} \quad (\text{D.7})$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} [H] & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} [H] \\ \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} [H] & \frac{1}{(\gamma/6)^2} [H] \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{où } s = \frac{|\{N\}^T [H] \{M\}|}{\{N\}^T [H] \{M\}}$$

Remarque 83 Le paramètre s est indéterminé pour $\{N\}^T [H] \{M\} = 0$. Pour lever cette

D.1. Définition de l'équilibre mécanique

indétermination, Zeng et al. [Zeng 01] proposent d'imposer $s = 0$ lorsque $\left| \{N\}^T [H] \{M\} \right| < \varepsilon$ avec $\varepsilon = 10^{-4} \max \left(\{N\}^T [H] \{N\}, \{N\}^T [H] \{M\} \right)$.

On choisit le tenseur d'orthotropie de Hill48 comme tenseur de comportement H . Sous forme matricielle, ce tenseur est fonction des coefficients de Lankford r_0, r_{45}, r_{90} :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} = 1 & H_{12} = -\frac{r_0}{1+r_0} & 0 \\ H_{21} = H_{12} & H_{22} = \frac{r_0}{1+r_0} \frac{1+r_{90}}{r_{90}} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} = \frac{(r_0+r_{90})(2r_{45}+1)}{r_{90}(1+r_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Le paramètre γ intervenant dans l'expression de F est déterminé par :

$$4\gamma = 1 - \frac{1}{3} \exp \left(-4 \frac{hE}{3\sigma_y^0} \bar{\kappa}^P \right) \quad (\text{D.10})$$

où $\bar{\kappa}^P$ est la courbure plastique équivalente telle que :

$$\bar{\kappa}^P = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\kappa_x^{p2} + \kappa_y^{p2} + \kappa_x^p \kappa_y^p + \frac{1}{4} \kappa_{xy}^{p2} \right)} \quad (\text{D.11})$$

La loi de normalité permet de relier le tenseur des taux de déformations généralisées au tenseur des contraintes généralisées par la relation :

$$\left\{ \dot{\varepsilon}^{\cdot p} \right\}^g = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \{\sigma\}^g} \quad (\text{D.12})$$

L'utilisation de l'équivalence en travaux permet de déduire le mutiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\cdot p}}{\sigma_y} \quad (\text{D.13})$$

On obtient alors

$$\left\{ \dot{\varepsilon}^{\cdot p} \right\}^g = \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\cdot p}}{\sigma_y} [F] \{\sigma\}^g \quad (\text{D.14})$$

Que l'on peut réécrire :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \varepsilon_{xy}^m \\ h \dot{\kappa}_{xx} \\ h \dot{\kappa}_{yy} \\ h \dot{\kappa}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\bar{\sigma}} [F] \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

La forme matricielle du tenseur F est alors donnée par

$$F = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{11} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{33} \\ \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{11} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{11} & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{12} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{22} & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{12} & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{33} & 0 & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Remarque 84 Dans le cas où $s = 0$, l'expression matricielle de F se simplifie en une matrice diagonale par blocs. Ce cas correspond à un découplage entre les contraintes généralisées et les moments, c'est à dire entre les effets dus aux déformations membranaires et aux déformations de flexion.

D.1.3 Les équations d'équilibre

L'équilibre d'une plaque soumise à une pression interne p est donné par

$$\overline{\text{div}} \vec{N} = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$\overline{\text{div}} (\vec{M}) = \vec{Q} \quad (\text{D.18})$$

$$\text{div} \text{div} \vec{Q} + N : \kappa = -p \quad (\text{D.19})$$

$$\text{avec } \vec{Q} = h \begin{pmatrix} H_{44} (\phi_1 + u_{3,1}) \\ H_{55} (\phi_2 + u_{3,2}) \end{pmatrix}$$

D.1.4 Les équations de compatibilité des taux de déformations

Les équations de compatibilité s'expriment sous la forme :

$$\text{rot}(\text{rot}(\dot{\varepsilon})) = 0 \quad (\text{D.20})$$

De par l'expression du tenseur des taux de déformations, on en déduit :

$$\text{rot}(\text{rot}(\dot{\varepsilon}^m)) = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\dot{\kappa})) = 0 \quad (\text{D.22})$$

D.1.5 L'équation d'incompressibilité

Cette équation s'exprime pour les taux de déformations sous la forme :

$$\text{trace}(\dot{\varepsilon}) = 0 \quad (\text{D.23})$$

On en déduit

$$\text{trace}(\dot{\varepsilon}^m) = 0 \quad (\text{D.24})$$

D.2 Perturbation de l'équilibre

D.2.1 Principe

Le principe est le même que dans la partie 3 du second chapitre. On introduit une perturbation $\delta U = \delta U_0 \vec{f}(x, t)$ avec δU_0 l'amplitude de la perturbation et $f(x, t)$ une fonction comprenant les parties spatiale et temporelle de la perturbation. La solution U^0

de l'équilibre, défini par les équations D.4, D.7, D.15, D.17, D.19, D.18, D.21, D.22, D.24, doit vérifier un système non linéaire que l'on note :

$$A(U^0) = 0 \quad (\text{D.25})$$

La solution perturbée de l'équilibre (D.25) vérifie :

$$A(U_0 + \delta U) = 0 \quad (\text{D.26})$$

Les perturbations du second ordre sont négligées. Ainsi le système non-linéaire perturbé (D.26) devient :

$$A(U_0) + M\delta U_0 = 0 \quad (\text{D.27})$$

avec M une matrice dépendant des variables internes U_0 mais également des paramètres en espace et en temps de la perturbation. En utilisant le fait que U_0 vérifie (D.25), on obtient alors l'équation d'instabilité suivante :

$$M\delta U_0 = 0 \quad (\text{D.28})$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $\delta U_0 \neq 0$ si et seulement si $\det(M) = 0$. Si $\delta U_0 \equiv 0$ cela revient à dire que l'équilibre n'a pas été perturbé.

D.2.2 Définition de la fonction de perturbation

Suivant le même raisonnement que Tóth et al. [Tóth 96] et Neale et Tugcu [Neale 90], on définit la perturbation sous la forme :

$$f(x, t) = e^{i\xi \vec{x} \cdot \vec{n}} e^{\eta t} \quad (\text{D.29})$$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\lambda}{l}(\cos(\alpha)x^1 + \sin(\alpha)x^2)\right) \end{pmatrix}$ où l est la longueur de la plaque considérée et λ est un nombre d'onde, α représente l'angle entre la direction 1 et la direction du pli, et où $\eta \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction de perturbation se résume alors à $f(x, t) = e^{i\xi x^3 \sin\left(\frac{\lambda}{l}(\cos(\alpha)x^1 + \sin(\alpha)x^2)\right)} e^{\eta t}$.

D.2.3 Équations perturbées

On perturbe les équations dans l'ordre indiqué précédemment. La fonction de perturbation $f(x, t)$ est telle que $f(x, t)_{,\alpha} = g_{,\alpha}(x, t) f(x, t)$. On notera les composantes $g_{,\alpha}(x, t)$, g_{α} par commodité. Ainsi on a $f(x, t)_{,\alpha} = g_{,\alpha} f(x, t)$.

Perturbation des taux de rotations

Pour éviter que le système soit indéterminé, on remarque que :

$$\dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}_{\alpha,\beta} + \dot{\phi}_{\beta,\alpha} \right) \quad (\text{D.30})$$

La perturbation de ces équations donne :

$$\delta\dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\delta\dot{\phi}_{\alpha} g_{,\beta} + \delta\dot{\phi}_{\beta} g_{,\alpha} \right) \quad (\text{D.31})$$

On en déduit :

$$\delta\dot{\phi}_1^0 g_{,1} = \delta\dot{\kappa}_{11}^0 \quad (\text{D.32})$$

$$\delta\dot{\phi}_2^0 g_{,2} = \delta\dot{\kappa}_{22}^0 \quad (\text{D.33})$$

$$\delta\dot{\phi}_2^0 g_{,1} + \delta\dot{\phi}_1^0 g_{,2} = 2\delta\dot{\kappa}_{12}^0 \quad (\text{D.34})$$

Loi d'érouissage

La loi d'érouissage après perturbation et linéarisation devient :

$$\bar{\sigma}^0 + \delta\bar{\sigma}^0 f(x, t) = k (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p{}^0 + \delta\bar{\varepsilon}^p{}^0 f(x, t))^n \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} + \delta \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} f(x, t) \right)^m \quad (\text{D.35})$$

On linéarise l'équation en négligeant les termes du second ordre :

$$\delta\bar{\sigma}^0 f(x, t) = k \left[n (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p{}^0)^{n-1} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}{}^{.0}{}^m \delta\bar{\varepsilon}^p{}^0 f(x, t) + m (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p{}^0)^n \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}{}^{.0}{}^{m-1} \delta \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} f(x, t) \right] \quad (\text{D.36})$$

soit encore :

$$\eta \delta\bar{\sigma}^0 - \bar{\sigma}^0 \left(\frac{n}{(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p{}^0)} + \eta \frac{m}{\bar{\varepsilon}} \right) \delta \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}{}^{.0} = 0 \quad (\text{D.37})$$

En notant que $\delta\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \delta \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}{}^{.0}$

Contrainte équivalente

La contrainte équivalente se perturbe sous la forme :

$$\bar{\sigma}^0 + \delta\bar{\sigma}^0 f(x, t) = \sqrt{(\{\sigma\}^g + \{\delta\sigma^0\}^g f(x, t))^T [F + \delta F^0 f(x, t)] \{\sigma\}^g + \{\delta\sigma^0\}^g f(x, t)} \quad (\text{D.38})$$

$$\text{avec } [F + \delta F] = [F^0] + \begin{bmatrix} [0] & [\delta F_{12}^0] \\ [\delta F_{12}^0] & [\delta F_{22}^0] \end{bmatrix} f(x, t)$$

$$\text{ou encore } [F + \delta F] = \begin{bmatrix} [H] & \frac{\sqrt{3}(s^0 + \delta s^0 f(x, t))}{\gamma^0 + \delta\gamma^0 f(x, t)} [H] \\ \frac{\sqrt{3}(s^0 + \delta s^0 f(x, t))}{\gamma^0 + \delta\gamma^0 f(x, t)} [H] & \frac{36}{\gamma^0 + \delta\gamma^0 f(x, t)} [H] \end{bmatrix}$$

Pour des commodités de calcul, on élève au carré :

$$(\bar{\sigma}^0 + \delta\bar{\sigma}^0 f(x, t))^2 = (\{\sigma\}^g + \{\delta\sigma^0\}^g f(x, t))^T [F + \delta F^0 f(x, t)] \{\sigma\}^g + \{\delta\sigma^0\}^g f(x, t) \quad (\text{D.39})$$

Après linéarisation, on obtient :

$$-2\bar{\sigma}^0 \delta\bar{\sigma}^0 + \{\sigma\}^{gT} [F^0] \{\delta\sigma^0\}^g + \{\delta\sigma^0\}^{gT} [F^0] \{\sigma^0\}^g + \{\sigma^0\}^{gT} [\delta F^0] \{\sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.40})$$

En utilisant la symétrie de la matrice F on a alors :

$$-2\bar{\sigma}^0 \delta\bar{\sigma}^0 + \frac{2\bar{\sigma}^0}{\bar{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}^0\}^{gT} \{\delta\sigma^0\}^g + \{\delta\sigma^0\}^{gT} \frac{2\bar{\sigma}^0}{\bar{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}^0\}^g + \{\sigma^0\}^{gT} [\delta F^0] \{\sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.41})$$

Soit encore

$$-2\bar{\sigma}^0 \delta\bar{\sigma}^0 + \frac{4\bar{\sigma}^0}{\bar{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}^0\}^{gT} \{\delta\sigma^0\}^g + \{\sigma^0\}^{gT} [\delta F^0] \{\sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.42})$$

En utilisant la valeur de $[\delta F^0]$ donnée plus bas, on se ramène à :

$$-2\bar{\sigma}^0 \delta\bar{\sigma}^0 + \frac{4\bar{\sigma}^0}{\bar{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}^0\}^{gT} \{\delta\sigma^0\}^g - \frac{\delta\gamma^0}{\gamma^0} \{\sigma^0\}^{gT} ([F] - [F^*]) \{\sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.43})$$

Ce qui donne

$$-2\bar{\sigma}^0 \delta\bar{\sigma}^0 + \frac{4\bar{\sigma}^0}{\bar{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}^0\}^{gT} \{\delta\sigma^0\}^g - \frac{\delta\gamma^0}{\gamma^0} (\bar{\sigma}^{02} - \bar{\sigma}^{*2}) = 0 \quad (\text{D.44})$$

où $\bar{\sigma}^{*2}$ est la définition de la contrainte équivalente usuelle : $\bar{\sigma}^{*2} = \{\sigma^0\}^{gT} ([F^*]) \{\sigma^0\}^g$

Tenseur de la loi de comportement

On a indiqué précédemment que le tenseur F sous sa forme matricielle se perturbe de la manière suivante :

$$[F^0] + \delta F = \begin{bmatrix} [H] & \frac{\sqrt{3}(s^0 + \delta s^0 f(x, t))}{\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t)} [H] \\ \frac{\sqrt{3}(s^0 + \delta s^0 f(x, t))}{\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t)} [H] & \frac{36}{\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t)} [H] \end{bmatrix} \quad (D.45)$$

On a :

$$[F_{12}^0] + [\delta F_{12}^0] f(x, t) = \frac{\sqrt{3}(s^0 + \delta s^0 f(x, t))}{\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t)} [H] \quad (D.46)$$

$$[F_{22}^0] + [\delta F_{22}^0] f(x, t) = \frac{36}{\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t)} [H] \quad (D.47)$$

D'où

$$\gamma^0 [\delta F_{12}^0] + [F_{12}^0] \delta \gamma^0 - \sqrt{3} [H] \delta s^0 = 0 \quad (D.48)$$

$$\gamma^0 [\delta F_{22}^0] + [F_{22}^0] \delta \gamma^0 = 0 \quad (D.49)$$

Les perturbations des coefficients s et γ sont quand à elles données par :

$$s^0 + \delta s^0 f(x, t) = \frac{|\{N^0 + \delta N^0 f(x, t)\}^T [H] \{M^0 + \delta M^0 f(x, t)\}|}{\{N^0 + \delta N^0 f(x, t)\}^T [H] \{M^0 + \delta M^0 f(x, t)\}} \quad (D.50)$$

$$\gamma^0 + \delta \gamma^0 f(x, t) = 1 - \frac{1}{3} \exp \left(- \frac{(h^0 + \delta h^0 f(x, t)) E}{3\sigma_y^0} (\bar{\kappa}^{P 0} + \delta \bar{\kappa}^{P 0} f(x, t)) \right) \quad (D.51)$$

Un problème apparaît pour la perturbation de s^0 . On constate rapidement que $s^0 + \delta s^0 f(x, t) = \pm 1$ lorsque $\{N^0 + \delta N^0 f(x, t)\}^T [H] \{M^0 + \delta M^0 f(x, t)\}$ est déterminé ($\neq 0$). Les perturbations étant très petites devant la solution homogène, la perturbation δs ne doit modifier que modérément s^0 , or il apparaît, d'après la définition de la solution homogène et de la solution perturbée, que δs ne peut prendre que 5 valeurs : $-2, -1, 0, 1, 2$.

D.2. Perturbation de l'équilibre

Parmi toutes ces valeurs, seule la solution nulle convient pour obtenir une petite perturbation devant la solution homogène. En choisissant de poser $\delta s = 0$, cela revient à considérer que le couplage entre la solution homogène et la solution perturbée n'est pas modifié, ce qui semble être une hypothèse acceptable.

On obtient alors :

$$\delta s^0 = 0 \quad (\text{D.52})$$

$$4\delta\gamma^0 f(x, t) = 1 - 4\gamma^0 - \frac{1}{3} e^{\left(-\frac{4E}{3\sigma_y^0} h^0 \bar{\kappa}^{P\ 0}\right)} e^{\left(-\frac{4E}{3\sigma_y^0} \bar{\kappa}^{P\ 0} \delta h^0 f(x, t)\right)} e^{\left(-\frac{4E}{3\sigma_y^0} h^0 \delta \bar{\kappa}^{P\ 0} f(x, t)\right)} \quad (\text{D.53})$$

Après linéarisation, on a :

$$\frac{3\sigma_y^0}{E(1-4\gamma^0)} \delta\gamma^0 - \bar{\kappa}^{P\ 0} \delta h^0 - h^0 \delta \bar{\kappa}^{P\ 0} = 0 \quad (\text{D.54})$$

Il reste à perturber le taux de courbure équivalent :

$$-3\bar{\kappa}^{P\ 0} \delta \bar{\kappa}^{P\ 0} + 2(2\kappa_{11}^{p\ 0} + \kappa_{22}^{p\ 0}) \delta \kappa_{11}^{p\ 0} + 2(\kappa_{11}^{p\ 0} + 2\kappa_{22}^{p\ 0}) \delta \kappa_{22}^{p\ 0} + \kappa_{12}^{p\ 0} \delta \kappa_{12}^{p\ 0} = 0 \quad (\text{D.55})$$

Les perturbations des composantes du tenseur de courbure s'expriment en fonction des perturbations des taux de courbures par :

$$\delta \kappa_{\alpha\beta}^{p\ 0} = \frac{1}{\eta} \delta \dot{\kappa}_{\alpha\beta}^{p\ 0} \quad (\text{D.56})$$

L'équation D.55 devient alors :

$$-3\eta \bar{\kappa}^{P\ 0} \delta \bar{\kappa}^{P\ 0} + 2(2\kappa_{11}^{p\ 0} + \kappa_{22}^{p\ 0}) \delta \dot{\kappa}_{11}^{p\ 0} + 2(\kappa_{11}^{p\ 0} + 2\kappa_{22}^{p\ 0}) \delta \dot{\kappa}_{22}^{p\ 0} + \kappa_{12}^{p\ 0} \delta \dot{\kappa}_{12}^{p\ 0} = 0 \quad (\text{D.57})$$

On exprime cette équation en fonction des taux de rotations :

$$-3\eta \bar{\kappa}^{P\ 0} \delta \bar{\kappa}^{P\ 0} + \left(2g_{,1}(2\kappa_{11}^{p\ 0} + \kappa_{22}^{p\ 0}) + \frac{\kappa_{12}^{p\ 0}}{2} g_{,2}\right) \delta \dot{\phi}_1^0 + \left(2g_{,2}(\kappa_{11}^{p\ 0} + 2\kappa_{22}^{p\ 0}) + \frac{\kappa_{12}^{p\ 0}}{2} g_{,1}\right) \delta \dot{\phi}_2^0 = 0 \quad (\text{D.58})$$

La perturbation de la matrice de comportement s'écrit alors en fonction de la perturbation de la variable γ :

$$\delta F^0 = -\frac{\delta\gamma^0}{\gamma^0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{11} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{33} \\ \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{11} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{11} & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{12} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{12} & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{22} & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{12} & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}s}{\gamma} H_{33} & 0 & 0 & \frac{1}{(\gamma/6)^2} H_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{D.59})$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\delta F^0 = -\frac{\delta\gamma^0}{\gamma^0} ([F] - [F^*]) \quad (\text{D.60})$$

$$\text{avec } [F^*] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.61})$$

Loi de comportement

Après perturbation et linéarisation, la loi de comportement devient :

$$2\{\dot{\varepsilon}\}^g \delta\bar{\sigma}^0 + 2\bar{\sigma}^0 \{\delta\dot{\varepsilon}^0\}^g - \delta \dot{\varepsilon}^{.p0} [F^0] \{\sigma^0\}^g - \dot{\varepsilon}^{.p0} [\delta F^0] \{\sigma^0\}^g - \dot{\varepsilon}^{.p0} [F^0] \{\delta\sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.62})$$

Soit encore

$$2 \{\dot{\varepsilon}\}^g \delta \bar{\sigma}^0 + 2 \bar{\sigma}^0 \{\delta \dot{\varepsilon}^0\}^g - \frac{2 \bar{\sigma}^0 \{\dot{\varepsilon}\}^g}{\dot{\varepsilon}^{.p0}} \delta \dot{\varepsilon}^{.p0} - \dot{\varepsilon}^{.p0} [\delta F^0] \{\sigma^0\}^g - \dot{\varepsilon}^{.p0} [F^0] \{\delta \sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.63})$$

En utilisant la simplification de la perturbation du tenseur de comportement, on a :

$$2 \{\dot{\varepsilon}\}^g \delta \bar{\sigma}^0 + 2 \bar{\sigma}^0 \{\delta \dot{\varepsilon}^0\}^g - \frac{2 \bar{\sigma}^0 \{\dot{\varepsilon}\}^g}{\dot{\varepsilon}^{.p0}} \delta \dot{\varepsilon}^{.p0} + \left(\frac{2 \bar{\sigma}^0}{\gamma^0} \{\dot{\varepsilon}\}^g - \frac{\dot{\varepsilon}^{.p0}}{\gamma^0} [F^*] \{\sigma^0\}^g \right) \delta \gamma^0 - \dot{\varepsilon}^{.p0} [F^0] \{\delta \sigma^0\}^g = 0 \quad (\text{D.64})$$

Équations d'équilibre, d'incompressibilité et de compatibilité

La perturbation des termes de membrane ne pose aucune difficulté et est immédiate.

Par contre, on remarque que pour les termes de flexion on a :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_4 \\ \dot{\varepsilon}_5 \\ \dot{\varepsilon}_6 \end{pmatrix}^g = \begin{pmatrix} (h^0 + \delta h^0 f(x, t)) (\dot{\kappa}_{11}^0 + \delta \dot{\kappa}_{11}^0 f(x, t)) \\ (h^0 + \delta h^0 f(x, t)) (\dot{\kappa}_{22}^0 + \delta \dot{\kappa}_{22}^0 f(x, t)) \\ (h^0 + \delta h^0 f(x, t)) (\dot{\kappa}_{12}^0 + \delta \dot{\kappa}_{12}^0 f(x, t)) \end{pmatrix} \quad (\text{D.65})$$

Ce qui donne après linéarisation :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\varepsilon}_4^0 \\ \delta \dot{\varepsilon}_5^0 \\ \delta \dot{\varepsilon}_6^0 \end{pmatrix}^g = h^0 \begin{pmatrix} \delta \dot{\kappa}_{11}^0 \\ \delta \dot{\kappa}_{22}^0 \\ \delta \dot{\kappa}_{12}^0 \end{pmatrix} + \delta h^0 \begin{pmatrix} \dot{\kappa}_{11}^0 \\ \dot{\kappa}_{22}^0 \\ \dot{\kappa}_{12}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.66})$$

Soit encore

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\varepsilon}_4^0 \\ \delta \dot{\varepsilon}_5^0 \\ \delta \dot{\varepsilon}_6^0 \end{pmatrix}^g = h^0 \begin{pmatrix} g_{,1} \delta \dot{\phi}_1^0 \\ g_{,2} \delta \dot{\phi}_2^0 \\ \frac{1}{2} (g_{,2} \delta \dot{\phi}_1^0 + g_{,1} \delta \dot{\phi}_2^0) \end{pmatrix} + \delta h^0 \begin{pmatrix} \dot{\kappa}_{11}^0 \\ \dot{\kappa}_{22}^0 \\ \dot{\kappa}_{12}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.67})$$

Les équations d'équilibre se perturbent aisément, on obtient alors :

$$\text{div}(\delta N) = \delta N_{\alpha\beta}^0 g_{,\beta} = 0 \quad (\text{D.68})$$

$$\text{div}(\delta M) = \delta M_{\alpha\beta}^0 g_{,\beta} = \frac{\delta h^0}{h^0} Q_\alpha^0 + h^0 L_{\alpha\beta} \delta \dot{\phi}_\beta^0 + h^0 L_{\alpha\beta} g_{,\beta} \delta \dot{u}_3^0 \quad (\text{D.69})$$

$$\text{divdiv}(\delta M) + \delta N \dot{\kappa} + N \delta \dot{\kappa} = \delta M_{\alpha\beta}^0 g_{\alpha,\beta} + \delta N_{\alpha\beta}^0 \dot{\kappa}_{\alpha\beta}^0 + N_{\alpha\beta}^0 \frac{1}{2} (\delta \dot{\phi}_{\alpha,\beta}^0 + \delta \dot{\phi}_{\beta,\alpha}^0) \quad (\text{D.70})$$

Étant donné que l'on néglige les taux de déformations transverses, les équations de compatibilité se réduisent à :

$$\dot{\varepsilon}_{11,22}^m + \dot{\varepsilon}_{22,11}^m = 2\dot{\varepsilon}_{12,12}^m \quad (\text{D.71})$$

$$\dot{\kappa}_{11,22} + \dot{\kappa}_{22,11} = 2\dot{\kappa}_{12,12} \quad (\text{D.72})$$

Ce qui après perturbation se traduit par :

$$\delta \dot{\varepsilon}_{11}^m g_{,22} + \delta \dot{\varepsilon}_{22}^m g_{,11} = 2\delta \dot{\varepsilon}_{12}^m g_{,12} \quad (\text{D.73})$$

$$\delta \dot{\kappa}_{11}^0 f(x,t)_{,22} + \delta \dot{\kappa}_{22}^0 f(x,t)_{,11} = 2\delta \dot{\kappa}_{12}^0 f(x,t)_{,12} \quad (\text{D.74})$$

L'équation de compatibilité des taux de courbure est redondante avec l'expression des taux de rotations, on ne se sert donc pas de cette dernière équation.

Dans le domaine plastique, le matériau est supposé incompressible :

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ii}^m = 0 \quad (\text{D.75})$$

D.2. Perturbation de l'équilibre

Ce qui s'écrit encore :

$$\delta\dot{\varepsilon}_{11}^{m0} + \delta\dot{\varepsilon}_{22}^{m0} + \frac{\eta}{h^0}\delta h^0 = 0 \quad (\text{D.76})$$

En remarquant que $\delta\varepsilon_{33}$ est approché par $\delta\varepsilon_{33} = \frac{\delta h^0}{h^0}$ et que l'on a $\eta\delta\varepsilon_{33} = \delta\dot{\varepsilon}_{33}$. La matrice M s'écrit alors :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{2} & \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}(\beta_1\eta + \beta_2)}{2\bar{\sigma}} & 0_{1 \times 7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 5} \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 5} \\ 0 & 0 & 0_{1 \times 7} & 0 & -3\eta\bar{\kappa} & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0_{1 \times 5} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 7} & M_{31} & 0_{3 \times 1} & M_{32} & M_{33} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & M_{34} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & M_{41} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 5} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & M_{51} & M_{52} & 0_{3 \times 1} & M_{53} & M_{54} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & M_{55} \\ 0 & 0 & 0_{1 \times 7} & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{,22} & g_{,11} & M_{61} \\ 0 & 0 & 0_{1 \times 7} & \frac{\eta}{h} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0_{1 \times 5} \end{bmatrix} \quad (\text{D.77})$$

où $0_{i \times j}$ est la matrice nulle de dimension $(i \times j)$ et où l'on a :

$$- M_{11} = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_{13} = \begin{pmatrix} \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_1 & \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_2 & \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_3 & \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_4 & \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_5 & \frac{4\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\bar{\varepsilon}}_6 & -\frac{\bar{\sigma}-\bar{\sigma}^*}{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sigma_y^0}{E(1-4\gamma)} \end{pmatrix},$$

$$M_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\kappa} \end{pmatrix}, M_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -M_{21} = M_{22} &= \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \\ \dot{\varepsilon}_4 \\ \dot{\varepsilon}_5 \\ \dot{\varepsilon}_6 \end{pmatrix}, \\
 -M_{23} &= \begin{pmatrix} -\dot{\varepsilon} F_{11} & -\dot{\varepsilon} F_{12} & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{14} & -\dot{\varepsilon} F_{15} & 0 & b_1 \\ -\dot{\varepsilon} F_{12} & -\dot{\varepsilon} F_{22} & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{15} & -\dot{\varepsilon} F_{24} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{33} & 0 & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{36} & b_3 \\ -\dot{\varepsilon} F_{14} & -\dot{\varepsilon} F_{15} & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{44} & -\dot{\varepsilon} F_{45} & 0 & b_4 \\ -\dot{\varepsilon} F_{15} & -\dot{\varepsilon} F_{24} & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{45} & -\dot{\varepsilon} F_{55} & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{36} & 0 & 0 & -\dot{\varepsilon} F_{66} & b_6 \end{pmatrix} \\
 -M_{24} &= \begin{pmatrix} 2\bar{\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_{25} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\bar{\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_{26} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\
 -M_{31} &= \begin{pmatrix} \dot{\kappa}_{11}^0 \\ \dot{\kappa}_{22}^0 \\ 2\dot{\kappa}_{12}^0 \end{pmatrix}, M_{32} = \begin{pmatrix} h^0 g_{,1} \\ 0 \\ h^0 g_{,2} \end{pmatrix}, M_{33} = \begin{pmatrix} 0 \\ h^0 g_{,2} \\ h^0 g_{,1} \end{pmatrix}, \\
 -M_{34} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 -M_{41} &= \begin{pmatrix} g_{,1} & 0 & g_{,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{,2} & g_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - M_{51} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{,1} & 0 & g_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{,2} & g_{,1} & 0 \\ \dot{\kappa}_{11}^0 & \dot{\kappa}_{22}^0 & 2\dot{\kappa}_{12}^0 & g_{,11} & g_{,22} & 2g_{,12} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{52} = \begin{pmatrix} -\frac{Q_1}{h} \\ -\frac{Q_2}{h} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 - M_{53} &= \begin{pmatrix} -hL_{11} \\ 0 \\ N_{11}^0 g_{,1} + N_{12}^0 g_{,2} \end{pmatrix} \\
 - M_{54} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -hL_{22} \\ N_{12}^0 g_{,1} + N_{22}^0 g_{,2} \end{pmatrix}, \quad M_{55} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -hL_{11}g_{,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -hL_{22}g_{,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 - M_{61} &= \begin{pmatrix} -2g_{,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 - \beta_1 &= \frac{m}{\varepsilon_0} \bar{\sigma} \\
 - \beta_2 &= \frac{n}{(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^0} \bar{\sigma} \\
 - a_1 &= 2g_{,1} (2\kappa_{11}^{p0} + \kappa_{22}^{p0}) + \frac{\kappa_{12}^{p0}}{2} g_{,2} \\
 - a_2 &= 2g_{,2} (\kappa_{11}^{p0} + 2\kappa_{22}^{p0}) + \frac{\kappa_{12}^{p0}}{2} g_{,1} \\
 - b_i &= \left(\frac{2\bar{\sigma}^0}{\gamma^0} \dot{\varepsilon}_i^g - \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma^0} F_{ij}^* \sigma_j^{0g} \right)
 \end{aligned}$$

D.2.4 Recherche d'instabilité

On utilise la définition de la fonction de perturbation (D.29) pour perturber l'équilibre (D.25). Dans ce cas, la matrice M de l'équation d'instabilité (D.28) est dépendante du nombre d'onde λ et de la longueur l et du paramètre η . Du fait que l'amplitude de la perturbation doit être non-nulle, on a vu que l'équation (D.28) se ramène à :

$$\det(M(\lambda, l, \eta, U_0)) = 0 \tag{D.78}$$

On peut montrer que dans le cas où l'équilibre est donné par (D.25), l'équation (D.78) peut s'écrire comme un polynôme en η :

$$A\eta^3 + B\eta^2 + C\eta + D = 0 \quad (\text{D.79})$$

où les coefficients A, B, C, D dépendent de U_0, λ, l et sont donnés par :

$$A = -3\frac{\bar{\kappa}}{h} \left(\det(N_1^0) - \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_1}{\bar{\sigma}} \det(N_1^{-\bar{\sigma}}) \right)$$

$$\begin{aligned} B = & 3\bar{\kappa} \det(N_2^0) - 3\bar{\kappa} \det(N_3^0) - \frac{a_1}{h} \det(O_1^0) + \frac{a_2}{h} \det(P_1^0) \\ & - \left(3\bar{\kappa} \det(N_2^{\bar{\sigma}}) - 3\bar{\kappa} \det(N_3^{\bar{\sigma}}) - \frac{a_1}{h} \det(O_1^{\bar{\sigma}}) + \frac{a_2}{h} \det(P_1^{\bar{\sigma}}) \right) \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_1}{\bar{\sigma}} \\ & + 3\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_2}{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\kappa}}{h} \det(N_1^{\bar{\sigma}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & a_1 \det(O_2^0) - a_1 \det(O_3^0) - a_2 \det(P_2^0) + a_2 \det(P_3^0) \\ & - (a_1 \det(O_2^{\bar{\sigma}}) - a_1 \det(O_3^{\bar{\sigma}}) - a_2 \det(P_2^{\bar{\sigma}}) + a_2 \det(P_3^{\bar{\sigma}})) \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_1}{\bar{\sigma}} \\ & - \left(3\bar{\kappa} \det(N_2^{\bar{\sigma}}) - 3\bar{\kappa} \det(N_3^{\bar{\sigma}}) - \frac{a_1}{h} \det(O_1^{\bar{\sigma}}) + \frac{a_2}{h} \det(P_1^{\bar{\sigma}}) \right) \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_2}{\bar{\sigma}} \end{aligned}$$

$$D = -\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\beta_2}{\bar{\sigma}} (a_1 \det(O_2^{\bar{\sigma}}) - a_1 \det(O_3^{\bar{\sigma}}) - a_2 \det(P_2^{\bar{\sigma}}) + a_2 \det(P_3^{\bar{\sigma}}))$$

$$\text{avec } N_1^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & 0 & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{32} & M_{33} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{53} & M_{54} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & g_{,22} & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$N_2^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$N_3^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,22} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$O_1^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & 0_{3x1} & M_{33} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & 0_{3x1} & M_{54} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & g_{,22} & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$O_2^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & 0_{3x1} & M_{33} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & 0_{3x1} & M_{54} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & 0_{3x1} & M_{33} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & 0_{3x1} & M_{54} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,22} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$P_1^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & 0_{3x1} & M_{32} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & 0_{3x1} & M_{53} & 0_{3x1} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & g_{,22} & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$P_2^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{25} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & 0_{3x1} & M_{32} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & 0_{3x1} & M_{53} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,11} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$P_3^\alpha = \begin{pmatrix} M_1^\alpha & M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ M_{22} & M_{23} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & 0_{6x1} & M_{24} & M_{26} \\ 0_{3x1} & 0_{3x7} & M_{31} & 0_{3x1} & M_{32} & 0_{3x1} & M_{34} \\ 0_{2x1} & M_{41} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x5} \\ 0_{3x1} & M_{51} & M_{52} & 0_{3x1} & M_{53} & 0_{3x1} & M_{55} \\ 0 & 0_{1x7} & 0 & 0 & 0 & g_{,22} & M_{61} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } M_1^\alpha = \begin{cases} M_{11} \text{ pour } \alpha = -\bar{\sigma} \\ M_{12} \text{ pour } \alpha = 0 \end{cases}$$

La résolution de (D.79) permet d'obtenir les différentes racines η du polynôme dans l'espace des complexes. En utilisant la fonction f définie par D.29 pour perturber l'équilibre initial, on constate rapidement que :

$$\delta U = \delta U_0 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \infty \text{ lorsque } \text{Re}(\eta) > 0 \quad (\text{D.80})$$

$$\delta U = \delta U_0 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ lorsque } \text{Re}(\eta) < 0 \quad (\text{D.81})$$

L'équilibre étudié est asymptotiquement instable et donc instable si $\text{Re}(\eta) > 0$.

L'obtention d'un critère analytique semble pour l'instant illusoire. Une validation sur un cas simple est donc à envisager.

Par contre, l'implantation de ce critère dans une simulation éléments finis peut être effectuée. Mais le calcul du critère tel qu'il est défini ici demande un temps de calcul non-négligeable. Des travaux ultérieurs devraient donc améliorer la partie calculatoire de ce critère en vue d'une implantation dans un code de simulation.

Résumé

Les travaux de recherche concernent le développement et la mise en œuvre de nouveaux critères de détection des défauts de striction localisée/éclatement et de plissement/flambage lors de procédés d'emboutissage et d'hydroformage de structures minces.

La striction est considérée comme une instabilité du flux de matière. Elle est modélisée via une Analyse Linéaire de Stabilité (ALS) par méthode de perturbation étendue à un état tridimensionnel. Ainsi, de nouveaux modes de striction sont repérés. De plus, le critère initial est amélioré par la détermination rigoureuse du seuil d'instabilité différenciant l'instabilité effective de l'instabilité absolue. Des Courbes Limites de Formage sont construites pour étudier l'influence de paramètres de comportement matériel sur l'apparition de la striction/éclatement. Enfin l'ALS appliquée à une plaque en flexion pure montre que les défauts observés ne sont pas dus à un phénomène de striction.

Concernant le plissement, ce défaut semble plus correspondre à un problème de bifurcation qu'à un problème d'instabilité. Dans cet ouvrage, une nouvelle analyse basée sur l'équilibre d'une plaque est développée. De plus, l'analyse qualitative de Nordlund et Häggblad est reprise. Enfin, un nouveau critère basé sur une méthode de perturbation est développé en annexe.

Les modélisations présentées pour la détection de striction/éclatement et de plissement/flambage ont été intégrées dans le code POLYFORM® de simulation par éléments finis des procédés d'emboutissage et d'hydroformage. L'influence des paramètres de procédés et de comportement matériel sur la prédiction des défauts lors de simulations est présentée. La validation expérimentale des prédictions est réalisée pour un procédé d'hydroformage oscillant. L'influence des paramètres de ce procédé sur l'apparition de défauts est également observée.

Mots Clés : Striction Localisée, Plissement, Eclatement, Flambage, Bifurcation, Stabilité, Hydroformage, Emboutissage.

Abstract

The work carried out the development of new criteria for the detection of necking/bursting and wrinkling/buckling defects during hydroforming and stamping of thin components.

Localised necking is looked as an instability of material flow. To predict such instability, a Linear Stability Analysis (LSA) by perturbation method is chosen. The initial 2D approach has been extended to a more realistic 3D modelling. This analysis allows considering new instability modes. Moreover, the developed criterion has been improved by the determination of the instability threshold that differentiates absolute instability and effective instability. Forming Limit Curves are built to look at the influence of some material parameters on tensile defects. The LSA applied to a pure bending test shows that necking can not occur on such a test.

About wrinkling, this defect does not seem to be an instability phenomenon but a bifurcation one. In this work, a new analysis based on plate equilibrium is developed. Moreover, the Nordlund & Häggblad qualitative analysis is considered. A third criterion has been developed in annex.

The necking/bursting and wrinkling/buckling analyses have been integrated in the simulation code POLYFOFORM®. The influence of stamping and hydroforming processes and material parameters on the defects prediction during simulation is shown. Experimental validation of the prediction has been realised on a tube hammering hydroforming process. The influence of the new process parameters on defects occurrence is looked at.

Keywords : Localised Necking, Wrinkling, Bursting, Buckling, Bifurcation, Stability, Hydroforming, Stamping