ACADÉMIE DE BORDEAUX |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ de PAU et des PAYS de l'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET DE LEURS APPLICATIONS

par

Julien JIMENEZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Modèles non linéaires de transport dans un milieu poreux hétérogène

Soutenue le 28 novembre 2007

Après avis des rapporteurs :

M.	**F. JAMES**	Professeur - Université d'Orléans
M.	**E. Yu. PANOV**	Professeur - Université de Novgorod

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de :

Mme.	**J. FLECKINGER**	Professeur - Université de Toulouse I - Examinatrice
M.	**G. GAGNEUX**	Professeur - Université de Pau - Président
M.	**J. HERNANDEZ ALONSO**	Professeur - Université autonome de Madrid - Examinateur
M.	**L. LEVI**	Maître de conférences - Université de Pau - Directeur de thèse
Mme.	**M. MADAUNE-TORT**	Professeur - Université de Pau - Directrice de thèse

-2007-

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse Monique Madaune-Tort et Laurent Lévi. Je les remercie de m'avoir orienté vers ce sujet lors de mon stage de DEA, et de m'avoir accompagné avec gentillesse, disponibilité mais également une très grande rigueur et précision durant ces trois années. J'espère qu'ils ont pris autant de plaisir que moi à cette aventure à la fois passionnante mais parfois délicate qu'est la réalisation d'une thèse.

Je suis très reconnaissant au Professeur Gérard Gagneux, lorsqu'il était en charge du DEA, d'avoir obtenu une bourse du ministère pour me permettre de mener cette thèse dans des conditions idéales. Je le remercie également de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement les Professeurs François James et Evgeny Panov pour la lecture attentive et très constructive de ce manuscrit, et également pour m'avoir donné des idées de développements possibles à mon travail.

Je remercie les Professeurs Jacqueline Fleckinger et Jesus Hernandez Alonso d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je remercie également tous les enseignants avec lesquels j'ai travaillé d'avoir toujours répondu à mes questions de jeune chargé de TD et d'avoir facilité au mieux mon travail de moniteur.

Je remercie les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau, et son directeur Mohamed Amara de m'avoir acceuilli durant ma thèse.

Un grand merci aussi à tous les camarades docteurs ou encore doctorants que j'ai cotoyés durant ma thèse, avec une pensée pour tous mes "collègues de bureau" et l'ambiance chaleureuse (enfin la plupart du temps !) et sympathique que nous avons fait régner dans ce fameux bureau. Je remercie plus particulièrement Fabien C., Patrick (pour leurs précieux conseils lorsque j'étais jeune thésard), Cédric (pour m'avoir servi de taxi entre la Côte Basque et Pau), Yves, Hoang (ah, ce voyage en Andalousie !) et Fabien D..

Et évidemment une pensée pour les deux "drôles de dames", Agnès et Anne-G. Un énorme merci pour m'avoir supporté tout au long de ma thèse (et il faut bien avouer que parfois ça devait être quasiment mission impossible !)...et pour les beaux cadeaux que vous m'avez trouvés pour la soutenance (surtout le bonnet ! !). En parlant des cadeaux de thèse, je remercie également tous ceux qui y ont participé !

Je remercie enfin mes parents pour la liberté de choix qu'ils m'ont toujours laissée et pour leur soutien autant moral que financier durant cette quasi-décennie d'études supérieures. J'associe également à ces remerciements mes grand-parents et toute ma famille.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a pour objet l'étude de lois de conservation scalaires dont le terme de convection est discontinu par rapport à la variable d'espace. Nous cherchons à obtenir des résultats d'existence et d'unicité d'une solution faible pour ce type de problème. Il s'agit d'étudier le problème du raccord le long d'une interface commune des solutions de deux équations quasi linéaires hyperboliques du premier ordre, posées dans deux ouverts disjoints. Nous présentons d'abord le problème modèle en dimension 1. Puis nous étendons l'étude au cas multidimensionnel en proposant deux types de généralisation.

Présentation du problème posé

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière notée Γ suffisamment régulière. Plus précisément, nous supposons que Ω admet une déformation lipschitzienne régulière (concept dont nous donnons la définition dans le paragraphe suivant).

Soit T un réel strictement positif fini. Nous notons Q l'ouvert $]0,T[\times\Omega$.

Nous supposons qu'il existe deux ouverts disjoints Ω_L et Ω_R, de frontières notées respectivement Γ_L et Γ_R, tels que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_L \cup \overline{\Omega}_R$ et $\overline{\Omega}_L \cap \overline{\Omega}_R = \Gamma_{L,R}$.

Nous notons $\Sigma =]0,T[\times\Gamma$.

Présentation du problème en dimension 1

Dans ce cas, Ω est un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et par normalisation on peut supposer que :

$$\Omega =]-1,1[, \quad \Omega_L =]-1,0[, \quad \Omega_R =]0,1[, \quad \Gamma_{L,R} = \{0\}.$$

Le problème modèle est décrit par :

Trouver une fonction mesurable u sur Q telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(b(x)f(u))+g(t,x,u) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma, \end{array}\right. \tag{1}$$

où la fonction b est définie sur $]-1,1[$ et discontinue en 0.

Les problèmes de type (1) apparaissent dans de nombreuses applications. Nous pouvons citer les modèles de l'industrie pétrolière et plus particulièrement la modélisation d'un écoulement diphasique dans un milieu poreux hétérogène ([23], [35], [51]). Ce modèle apparaît également dans des processus de sédimentation continue ([10], [12], [17], [18]) et dans des modèles de traffic routier ([25], [55]). L'écoulement sanguin après une reconstruction endovasculaire ([14]) ou les "radar shape-from-shading problems" ([41]) sont d'autres applications possibles. Enfin les équations de Hamilton-Jacobi associées à (1) sont étudiées dans [30] et [42].

Pour ce problème monodimensionnel, nous montrerons au chapitre 2 un résultat d'existence et d'unicité sous une hypothèse de non linéarité portant sur le terme de convection. Cette hypothèse permet de justifier l'existence d'une trace le long de la droite $\{x = 0\}$ et d'écrire une condition de raccord à l'interface.

Généralisation au cas multidimensionnel

L'hypothèse de non-linéarité utilisée pour traiter le problème en dimension 1 peut se généraliser au cas de termes de convection donnés par $\text{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u))$ où b est une fonction à valeurs réelles discontinue le long de $\Gamma_{L,R}$ et $\boldsymbol{f}$ une fonction à valeurs vectorielles. En revanche, elle n'est pas adaptable au cas de termes de convection du type $\text{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u))$ où $\boldsymbol{b}$ est une fonction à valeurs vectorielles discontinue le long de $\Gamma_{L,R}$ et f une fonction à valeurs scalaires. Or ce type de terme de transport apparaît dans les modèles de l'ingénierie pétrolière où la fonction $\boldsymbol{b}$ est généralement le gradient d'une pression et f une perméabilité. En conséquence, nous proposons deux types de généralisation.

Le problème couplé hyperbolique-hyperbolique

Au chapitre 3 de ce mémoire, nous menons l'analyse mathématique du problème de Dirichlet homogène suivant :

Trouver une fonction mesurable u telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u + \mathrm{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u)) + g(t,x,u) & = & 0 & \text{dans } \; Q, \\ u & = & 0 & \text{sur (une partie de) } \; \Sigma, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{sur } \; \Omega, \end{array}\right. \tag{2}$$

où la fonction b, définie sur $\overline{\Omega}$, est discontinue le long de $\Gamma_{L,R}$. Pour étudier le problème (2) nous pouvons suivre les idées mises en place au chapitre 2. Nous allons préciser les hypothèses principales sur les données de ce problème. Pour cela, nous donnons d'abord la définition (qui peut se trouver dans [16], [54]) d'un ouvert dont la frontière admet une déformation “lipschitzienne régulière”.

Définition 0.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. On dit que $\partial\Omega$ admet une déformation lipschitzienne régulière si :*

- *Pour tout $\overline{z} \in \partial\Omega$, il existe un réel strictement positif $r_{\overline{z}}$, une application lipschitzienne $\alpha_{\overline{z}}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$, une isométrie (pour la norme euclidienne) $\mathcal{R}_{\overline{z}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\mathcal{R}_{\overline{z}}(\overline{z}) = 0$$
$$\mathcal{R}_{\overline{z}}(\Omega) \cap]-r_{\overline{z}}, r_{\overline{z}}[^n = \{y \in]-r_{\overline{z}}, r_{\overline{z}}[^n, \alpha_{\overline{z}}(y_1,\ldots,y_{n-1}) < y_n\}$$

- *Il existe une application $\Psi : [0,1] \times \partial\Omega \to \overline{\Omega}$ telle que Ψ est un homéomorphisme bi-lipschitzien et $\Psi(0,.) \equiv I_{\partial\Omega}$ où $I_{\partial\Omega}$ est l'application identité sur $\partial\Omega$.*
- $\lim\limits_{s\to 0^+} \nabla\Psi(s,.) \circ \tilde{\alpha}_{\overline{z}} = \nabla\tilde{\alpha}_{\overline{z}}$ *dans* $L^1(]-r_{\overline{z}}, r_{\overline{z}}[^{n-1} \cap \mathcal{R}_{\overline{z}}(\partial\Omega))$,

où pour tout $\overline{z} \in \partial\Omega$, $\tilde{\alpha}_{\overline{z}}$ est la restriction à $]-r_{\overline{z}}, r_{\overline{z}}[^{n-1} \cap \mathcal{R}_{\overline{z}}(\partial\Omega)$ de l'application $(y_1,\ldots,y_{n-1}) \to \mathcal{R}_{\overline{z}}^{-1}(y_1,\ldots,y_{n-1},\alpha_{\overline{z}}(y_1,\ldots,y_{n-1}))$.

L'application Ψ est appelée déformation lipschitzienne de Ω.

Parmi les ouverts qui répondent à cette définition, nous pouvons citer les ouverts dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^2$. En effet il existe alors un vecteur normal unitaire extérieur $\boldsymbol{\nu}$ défini partout. Alors, pour ε assez petit, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & [0,1] \times \partial\Omega & \to & \overline{\Omega} \\ & (s,\overline{\sigma}) & \to & \overline{\sigma} - \varepsilon s \boldsymbol{\nu}(\overline{\sigma}), \end{array}$$

est une déformation lipschitzienne.

Les domaines étoilés par rapport à un point vérifient également les propriétés de la définition 0.1. Il existe un point x_0 de Ω tel que, pour tout $\overline{\sigma}$ de $\partial\Omega$, pour tout θ de $[0,1[$, $x_0 + \theta(x_0 - \overline{\sigma}) \in \Omega$. Alors, l'appication Ψ définie pour tout $(s,\overline{\sigma})$ de $[0,1] \times \partial\Omega$ par $\Psi(s,\overline{\sigma}) = \overline{\sigma} + \frac{1}{2}s(x_0 - \overline{\sigma})$ est une déformation lipschitzienne.

Les domaines dont la frontière satisfait la propriété du cône admettent également une déformation lipschitzienne.

Hypothèses principales

- Ω, Ω_L, Ω_R sont des ouverts lipschitziens admettant une déformation lipschitzienne et tels que, pour $i = L, R$, $\mathcal{H}^{n-1}(\overline{\Gamma_{L,R}} \cap (\overline{\Gamma_i \setminus \Gamma_{L,R}})) = 0$.
- La donnée initiale u_0 est une fonction mesurable et bornée sur Ω à valeurs dans $[m, M]$, m et M étant deux réels fixés, $m < M$.
- La fonction b est telle que :

$$b(x) = \begin{cases} b_L(x) & \text{si } x \in \Omega_L, \\ b_R(x) & \text{si } x \in \Omega_R, \end{cases}$$

  où b_L est un élément de $W^{1,\infty}(\Omega_L)$ et b_R un élément de $W^{1,\infty}(\Omega_R)$.
  Comme pour $i = L, R$, l'injection de $W^{1,\infty}(\Omega_i)$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}_i)$ est compacte (voir [11]), nous pouvons définir les traces respectives de b_L et b_R sur $\Gamma_{L,R}$ de telle sorte que, pour x dans Ω_i, pour tout $\overline{\sigma}$ de $\Gamma_{L,R}$, $i = L, R$,

$$\lim_{x \to \overline{\sigma}} b(x) = b_i(\overline{\sigma}).$$

- La fonction à valeurs vectorielles $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ses n composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. Nous notons, pour $i = 1, \ldots, n$, M_{f_i} la constante de Lipschitz de f_i et nous posons $M_{\boldsymbol{f}} = \max_{i=1,\ldots,n} M_{f_i}$.
- La fonction g est définie sur $[0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^0$, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ par rapport à sa troisième variable, uniformément en (t, x). Nous notons M_g la constante de Lipschitz associée à cette propriété.

Le problème couplé parabolique-hyperbolique

Au chapitre 4, nous nous intéressons au cas d'un terme de convection donné par $\mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u))$. Nous n'avons pas su étudier dans ce cas le couplage de deux lois de conservation hyperboliques. Nous avons en conséquence introduit un modèle perturbé par l'ajout sur l'un des deux ouverts d'un terme de diffusion et pour lequel nous donnons un résultat d'existence et d'unicité.

Le problème considéré s'écrit comme suit :

Trouver une fonction mesurable u sur Q telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u)) + g(t,x,u) & = & \mathrm{div}_x(\mathbb{I}_{\Omega_p}(x)\nabla_x \phi(u)) & \text{dans } Q, \\ u & = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma, \\ u(0,.) & = & u_0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

où

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_h \cup \overline{\Omega}_p \text{ et } \Omega_h \cap \Omega_p = \emptyset,$$

$$\boldsymbol{b}(x)f(u) = \boldsymbol{b}_h(x)f_h(u)\mathbb{I}_{\Omega_h} + \boldsymbol{b}_p(x)f_p(u)\mathbb{I}_{\Omega_p},$$

$$g(t,x,u) = g_p(t,x,u)\mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + g_h(t,x,u)\mathbb{I}_{\Omega_h}(x).$$

Le problème (3) a un caractère parabolique sur une partie du domaine fixée *a priori*. Nous préciserons les hypothèses sur les données du problème (3) au chapitre 4.

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une surface rigide, le transfert de chaleur (d'un fluide incompressible sur une plaque chauffée par exemple) ou le processus d'infiltration dans un milieu poreux stratifié à deux couches présentant des propriétés géologiques différentes sont quelques exemples de modélisation correspondant au problème (3).

Repères bibliographiques

Les premiers travaux sur les lois de conservation à flux discontinu sont dus à T. Gimse et N.H. Risebro en 1992 ([23]). Les auteurs utilisent la méthode de "front tracking" pour traiter le problème de Cauchy en dimension un d'espace. Depuis de nombreux travaux ont été développés. Les références fournies ici ne sont donc pas exhaustives. La première notion de solution faible entropique pour le problème (1) fut introduite par J.D. Towers dans [52] où la propriété d'existence est obtenue par un schéma aux différences finies (voir aussi [53] du même auteur). Des schémas aux différences finies de type Engquist-Osher sont également utilisés par R. Bürger, K.H Karlsen, N.H. Risebro et J.D. Towers dans [12] alors que dans [34], K.H. Karlsen et J.D Towers étudient la convergence d'un schéma de type Lax-Friedrichs. Les schémas de type Godunov ont également été étudiés par Adimurthi, J. Jaffré et G.D. Veerappa Gowda ([1]) et par Adimurthi, S. Mishra et G.D. Veerappa Gowda ([2], [3]).

Une autre méthode utilisée pour prouver des résultats d'existence consiste à régulariser la fonction flux et obtenir des estimations *a priori* pour pouvoir passer à la limite. Cette technique est employée par N. Seguin et J. Vovelle ([48] où des schémas de type volumes finis y sont aussi analysés) et F. Bachmann ([7]). Nous utiliserons ce procédé de régularisation dans le chapitre 1. De plus, un résultat d'unicité est présenté dans la plupart de ces articles soit par le concept de "solution entropique optimale"([1], [2], [3]) soit par des conditions "d'entropie" le long de l'interface de discontinuité ([12], [7], [48], [52]). Dans les deux cas, l'existence de traces de part et d'autre de la ligne de discontinuité est supposée ou justifiée par les travaux d'A. Vasseur ([54]). En introduisant le concept d'"entropie partielle de Kruzkov adaptée" ("partially adapted Kruzkov entropies") E. Audusse et B. Perthame ([6]) obtiennent une propriété d'unicité sans recourir à l'utilisation de traces le long de la discontinuité. De même, grâce au concept de solution cinétique, F. Bachmann et J. Vovelle ([8]) prouvent l'unicité d'une solution entropique (au sens de J.D. Towers) sans utiliser la notion de traces. Notons que tous les travaux précédemment cités considèrent le problème du type (1) i.e. uniquement la dimension 1 d'espace. Dans une série d'articles ([31], [32], [33]), K.H. Karlsen, N.H. Risebro et J.D Towers étudient un problème de diffusion-convection, en dimension 1 d'espace, dont le terme de transport est discontinu. L'existence d'une solution est obtenue soit par la méthode de compacité par compensation ([31]) soit par un schéma aux différences finies de type Engquist-Osher ([32], [33]).

En ce qui concerne l'étude de problèmes couplés de type hyperbolique-parabolique, avec une fonction flux continue par rapport à la variable d'espace, nous pouvons citer les travaux de G. Aguilar, F. Lisbona et M. Madaune-Tort ([4]) et G. Aguilar, L. Lévi et M. Madaune-Tort ([5]). Dans [22], F. Gastaldi et A. Quarteroni étudient également un problème couplé mais de type hyperbolique-elliptique.

Notations

Nous donnons ici les principales notations que nous allons utiliser dans la suite de ce mémoire.

– Pour q dans $[0, n]$, nous désignons par $\mathcal{H}^q$ la mesure de Hausdorff de dimension q sur $\mathbb{R}^n$.
– $\boldsymbol{\nu}$ représente le vecteur normal unitaire extérieur à Ω défini $\mathcal{H}^{n-1}$ presque partout sur Γ.
  Pour $i = \{L, R\}$ ou $i = \{h, p\}$,
– $\boldsymbol{\nu}_i$ représente le vecteur normal unitaire extérieur à Ω_i défini $\mathcal{H}^{n-1}$ presque partout sur Γ_i.
– $Q_i =]0, T[\times\Omega_i$, $\Sigma_i =]0, T[\times\Gamma_i$.
– $\Sigma_{L,R} = \Sigma_L \cap \Sigma_R$, $\Sigma_{hp} = \Sigma_h \cap \Sigma_p$.
  Suivant le contexte, afin de ne pas alourdir les notations,
– σ désigne un élément de Σ (ou de Σ_i) et $\overline{\sigma}$ désigne un élément de Γ (ou Γ_i). Ainsi $\sigma = (t, \overline{\sigma})$.
– $\mathcal{L}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
– Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A à support compact dans A.
– $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction caractéristique de A.
– La fonction sgn_η désigne l'approximation lipschitzienne de la fonction sgn donnée, pour tout réel strictement positif η et tout réel positif x, par

$$sgn_\eta(x) = \min(\frac{x}{\eta}, 1) \quad \text{et} \quad sgn_\eta(-x) = -sgn_\eta(x).$$

– div_x désigne l'opérateur de divergence au sens des distributions, $\mathrm{div}_x\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial h_i}{\partial x_i}$.
– Pour tous réels a, b, $I[a, b]$ (respectivement $I(a, b)$) désigne l'intervalle fermé (resp. ouvert) borné par a et b.

Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous introduisons dans ce paragraphe quelques espaces fonctionnels qui seront utiles au cours de ce mémoire. Nous supposons connues les notions d'espaces de Banach, de Hilbert, de Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 0.2. *Soient X un espace de Banach, $]a,b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et dt la mesure de Lebesgue sur $]a,b[$.*

- *On désigne par $L^p(a,b,X)$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions f de $]a,b[$ dans X telles que :*

$$\begin{cases} f \text{ est mesurable pour } dt, \\ \|f\|_{L^p(a,b,X)} = \left(\int_a^b \|f\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \end{cases}$$

- *On désigne par $\mathcal{C}([a,b],X)$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans X.*

Définition 0.3. *Soit X et Y deux espaces de Hilbert séparables tels que X est inclus dans Y. Soit $]a,b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors l'espace,*

$$W(a,b;X,Y) = \{u \in L^2(a,b;X) \ ; \ \partial_t u \in L^2(a,b;Y)\}$$

muni de la norme $\|u\|_W = (\|u\|^2_{L^2(a,b;X)} + \|\partial_t u\|^2_{L^2(a,b;Y)})^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert.

Dans la suite, on notera $W(0,T)$ l'espace $W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$.

Nous avons de plus le résultat suivant :

$$W(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T],L^2(\Omega)).$$

Définition 0.4. *Soit O un ouvert. Nous désignons par $BV(O)$ l'espace des fonctions localement intégrables sur O à variation bornée. Nous noterons $|\ .\ |_{BV(O)}$ la semi-norme définie, pour tout f dans $BV(O)$, par la variation totale de f, i.e.*

$$|f|_{BV(O)} = \sup\left\{\int_O f(x)\mathrm{div}\phi(x)dx,\ \ \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(O)^n, \|\phi\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Nous donnons également un résultat d'existence de trace pour une fonction intégrable de BV.

Proposition 0.5. *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe de frontière lipschitzienne. Nous notons $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire extérieur à O défini $\mathcal{H}^{n-1}$ presque partout sur ∂O. Il existe un unique opérateur de trace $\gamma : BV(O) \cap L^1(O) \mapsto L^1(\partial O)$ continu tel que :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \forall f \in BV(O) \cap L^1(O),$$

$$\int_O f(x)\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi} dx = \int_{\partial O} \gamma f \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_O \boldsymbol{\varphi} d[Df],$$

où $[Df]$ représente la mesure de Radon vectorielle associée aux dérivées distributions premières de f (voir [19] pour plus de détails).

Nous donnons maintenant la définition d'un point de Lebesgue.

Définition 0.6. *Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Alors x est un point de Lebesgue de f si :*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{mes(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0,$$

où $B(x,r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Lemme 0.7 (Lemme de Gronwall)**.** *Soient T un réel strictement positif fini, ϕ une fonction de $L^\infty(0,T)$, $\phi(t) \geq 0$ pour presque tout t de $]0,T[$, μ une fonction de $L^1(0,T)$, $\mu \geq 0$ presque partout sur $]0,T[$.*

- *On suppose qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :*

$$\text{pour presque tout } s \text{ dans }]0,T[,\ \phi(s) \leq \kappa + \int_0^s \mu(t)\phi(t)dt. \tag{4}$$

Alors, pour presque tout s de $]0,T[$, $\phi(s) \leq \kappa exp\left(\int_0^s \mu(t)dt\right)$.

- *Si la relation (4) est vérifiée avec $\kappa = 0$, alors $\phi = 0$ presque partout sur $]0,T[$.*

Lemme 0.8 (Lemme de F. Mignot- A. Bamberger)**.** *Soit V un espace de Hilbert, tel que*

$$V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V',$$

où les injections canoniques sont continues et à image dense.

Soit β une fonction de la variable réelle, à valeurs réelles, supposée continue et croissante, telle que :

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \frac{|\beta(\lambda)|}{|\lambda|} < +\infty.$$

Alors, quelle que soit la fonction u de $L^2(Q)$ telle que :

$$\partial_t u \in L^2(0,T;V') \ ,\ \beta(u) \in L^2(0,T;V),$$

on dispose de la formule, au sens de $\mathcal{D}'(]0,T[)$ et dans $L^1(0,T)$,

$$\langle \partial_t u, \beta(u)\rangle_{V',V} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\int_0^{u(.,x)} \beta(r)dr\right) dx.$$

Nous rappellons également l'inégalité de Young, souvent utile dans les majorations que nous avons à effectuer.

Propriété 0.9 (Inégalité de Young)**.** *$\forall\, a \in \mathbb{R}_+, \forall\, b \in \mathbb{R}_+$, pour tout p et p' dans $]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

En particulier, pour $p = p' = 2$,

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de ce mémoire le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff. Nous l'énonçons donc ici.

Théorème 0.10 (Schauder-Tychonoff). *Soit X un espace de Banach séparable et réflexif. On suppose que :*

- *K est un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X.*
- *L'application $T : K \to K$ est "faiblement-faiblement" séquentiellement continue, i.e. pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de K convergeant faiblement vers x, la suite $(T(x_n))_n$ converge faiblement vers $T(x)$.*

Alors, T admet au moins un point fixe dans K.

Nous rappelons enfin un résultat donné dans [20] sur la convergence de suite de fonctions bornée dans L^∞.

Théorème 0.11. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $(u_m)_{m>0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathcal{O}$ telle que :*

$$\exists M > 0, \forall m > 0, \|u_m\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leq M.$$

Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(m)})_{m>0}$ et une fonction mesurable π dans $L^\infty(]0,1[\times\mathcal{O})$ telles que, pour toute fonction continue et bornée f dans $\mathcal{O}\times]-M,M[$,

$$\forall \xi \in L^1(\mathcal{O}), \lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{O}} f(x,u_{\varphi(m)})\xi dx = \int_{]0,1[\times\mathcal{O}} f(x,\pi(\alpha,x))d\alpha\xi dx.$$

Ce théorème fut d'abord utilisé à l'approximation, par la méthode de viscosité artificielle, du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ pour des lois de conservation, lorsqu'on obtient seulement une estimation L^∞ de la suite des solutions approchées. Ce résultat a aussi été appliqué à l'analyse numérique des équations de transport. En effet la méthode des "volumes finis" donne uniquement une estimation L^∞ uniformément par rapport à la taille du maillage, de la solution numérique (voir [20]). Nous utiliserons principalement ce théorème au chapitre 4.

Chapitre 1

Rappels et présentation des résultats obtenus

La difficulté dans l'étude de problèmes du type (2) est due à la discontinuité de la fonction b dans le terme de convection. En effet, lorsque la fonction b est suffisamment régulière nous savons depuis les travaux de S.N. Kruzkov (voir [36]), que ce problème admet au moins une solution faible. De plus, parmi les solutions faibles il existe une unique solution dont les discontinuités vérifient une condition d'entropie. Cette unique solution est alors appelée solution faible entropique.

L'objectif de cette thèse est de mettre en lumière une condition de type entropique permettant d'assurer l'unicité d'une solution entropique lorsque la fonction b présente des discontinuités. Pour cela nous allons adapter les conditions d'entropie classiquement utilisées dans le cas d'un terme de convection régulier, afin d'y inclure les contraintes imposées aux discontinuités éventuelles de la solution le long de $\Sigma_{L,R} =]0, T[\times\Gamma_{L,R}$, en tenant compte de la discontinuité de b le long de $\Gamma_{L,R}$.

Au moyen de diverses techniques que nous développerons par la suite (régularisation de la fonction b, méthode de viscosité artificielle notamment), nous allons nous ramener à utiliser les propriétés connues pour un terme d'advection régulier. Nous commençons donc ce chapitre par un tour d'horizon des principaux résultats connus sur les équations hyperboliques quasi linéaires du premier ordre à coefficients continus, associées à une condition de bord Dirichlet homogène.

1.1 Rappels : le cadre régulier

L'objet de ce paragraphe est de rappeler la définition et les propriétés essentielles des solutions faibles entropiques de lois de conservation dont le terme de convection est régulier. Pour cela, nous considérons le problème :

Trouver une fonction mesurable u telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x \boldsymbol{h}(t,x,u) + g(t,x,u) = & 0 \quad \text{dans } Q, \\ u(0,x) = & u_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \\ u = & 0 \quad \text{sur (une partie de) } \Sigma, \end{cases} \tag{1.1}$$

où

– la fonction $\boldsymbol{h}$ est définie sur $[0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que, pour $i=1,\ldots,n$, $\partial_{x_i}h_i$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, par rapport à sa troisième variable, uniformément en (t,x).
  Nous notons M_{h_i} cette constante de Lipschitz et $M_{\boldsymbol{h}} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} M_{h_i}$.

Les hypothèses sur les fonctions g et u_0 sont celles données dans l'introduction.

Nous considérons également le problème de viscosité naturellement associé au problème (1.1), pour tout réel μ strictement positif fixé,

Trouver une fonction mesurable u_μ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\mu}{\partial t} + \operatorname{div}_x \boldsymbol{h}(t,x,u_\mu) + g(t,x,u_\mu) = & \mu\Delta u_\mu \quad \text{dans } Q=]0,T[\times\Omega, \\ u_\mu(0,x) = & u_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \\ u_\mu = & 0 \quad \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{1.2}$$

En effet, la suite des solutions $(u_\mu)_{\mu>0}$ des problèmes $(1.2)_{\mu>0}$ fournit, lorsque μ tend vers 0^+, une approximation de la solution faible entropique du problème (1.1) (nous préciserons en quel sens dans la section suivante).

Dans un premier temps, nous allons rappeler le concept de solution faible entropique dans le cas où la fonction flux est régulière. Il existe plusieurs écritures équivalentes des conditions d'entropie. Nous introduisons uniquement celles que nous utiliserons par la suite.

1.1.1 Formulations entropiques

1.1.1.1 Formulation de C. Bardos- A.Y. LeRoux- J.C. Nédélec

La notion de solution entropique du problème aux limites (1.1), introduite par C. Bardos, A.Y. LeRoux et J.C. Nédélec dans [9] suppose que la donnée initiale u_0 est dans $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Ceci permet de rechercher des solutions entropiques dans l'espace $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$. D'après les propriétés de l'espace BV rappelées dans l'introduction, une fonction u dans $BV(Q) \cap L^1(Q)$ admet une trace dans $L^1(\Sigma)$ que nous notons γu (cf. Proposition 0.5).

La formulation de C. Bardos, A.Y. LeRoux et J.C. Nédélec (que nous désignerons désormais par "formulation B.L.N.") est une adaptation au cas du problème aux limites de Dirichlet de la formulation entropique due à S.N. Kruzkhov [36] pour le problème de Cauchy. Elle s'appuie sur l'existence de traces d'une fonction de $BV(Q) \cap L^1(Q)$, pour traduire les conditions de bord.

Définition 1.1. *Soit u_0 un élément de $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Une fonction u de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ est une solution faible entropique du problème (1.1) si :*

– *pour tout k de $\mathbb{R}$, pour toute fonction à valeurs positives φ de $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$,*

$$\begin{aligned}&\int_Q \{|u-k|\partial_t\varphi + sgn(u-k)(\boldsymbol{h}(t,x,u)-\boldsymbol{h}(t,x,k))\cdot\nabla_x\varphi\}dxdt \\ &-\int_Q sgn(u-k)(g(t,x,u)+\mathrm{div}_x\boldsymbol{h}(t,x,k))\varphi dxdt \qquad\qquad \geq 0,\end{aligned} \tag{1.3}$$

– *p.p.t. t dans $[0,T]$, $\mathcal{H}^{n-1}$-p.p, $\forall k \in \mathbb{R}$,*

$$(sgn(\gamma u(\sigma)-k)+sgn(k))(\boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},\gamma u)-\boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},k))\cdot\boldsymbol{\nu}\geq 0, \tag{1.4}$$

– *$u(0,.) = u_0(.)$ p.p. sur Ω.*

Pour préciser les propriétés de u, nous introduisons la fonction à valeurs positives et croissante :

$$M : t\in[0,T] \longrightarrow M(t) = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}e^{N_1 t} + \frac{N_2}{N_1}(e^{N_1 t}-1),$$

avec $N_1 = M_g + \sum_{i=1}^n M_{h_i}$, $N_2 = \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0) + \mathrm{div}_x\boldsymbol{h}(t,x,0)|$.

Suite aux travaux de [9] et [37], nous disposons des résultats suivants :

Proposition 1.2.

– *Il existe une unique solution u, au sens de la définition 1.1 du problème (1.1).*
– *Pour tout $\mu > 0$, le problème (1.2) admet une unique solution u_μ telle que :*

$$u_\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega)) \text{ et } \partial_t u_\mu \in L^2(Q).$$

De plus,

$$\forall\ t\in]0,T[,\ |u_\mu(t,.)| \leq M(t),\ p.p.\ dans\ \Omega.$$

– *Lorsque μ tend vers 0^+, la suite $(u_\mu)_{\mu>0}$ converge vers u, la solution faible entropique du problème (1.1), dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$.*

1.1.1.2 Formulation de F. Otto

Comme nous pouvons le remarquer la formulation B.L.N. nécessite, pour être valide, que la solution entropique admette une trace sur le bord Σ. C'est pour cette raison que le cadre fonctionnel approprié de la formulation B.L.N. est l'espace des fonctions à variation bornée. Nous pouvons alors nous demander comment exprimer une condition entropique prenant en compte les conditions aux limites lorsque la solution recherchée est *a priori* dans $L^\infty(Q)$, et donc n'admet pas de traces au sens fort. C'est l'objet des travaux de F. Otto, présentés dans [43], et détaillés dans [40]. Avant d'exprimer la formulation donnée par F. Otto, nous avons besoin de quelques définitions. Nous donnons tout d'abord celle d'une paire d'entropie régulière. Dans notre travail, la fonction $\boldsymbol{h}$ sera telle que $\boldsymbol{h}(t,x,u) = b(x)\boldsymbol{f}(u)$ ou $\boldsymbol{h}(t,x,u) = \boldsymbol{b}(x)f(u)$. Il nous suffit donc de définir les notions de paire d'entropie lorsque $\boldsymbol{h}$ est indépendante de (t,x). Nous considérons donc ici que $\boldsymbol{h}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. *Soit η dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction convexe et $\mathbf{q} = (q_1, ...q_n)$, q_i dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$. Alors $(\eta, \mathbf{q})$ est une paire d'entropie régulière du problème* (1.1) *si, pour tout r de $\mathbb{R}$,*

$$q_i'(r) = h_i'(r)\eta'(r), \quad 1 \leq i \leq n,$$

Nous introduisons aussi le concept de “paire d'entropie de bord” (appelée dans [40] “boundary entropy-entropy flux pair”).

Définition 1.4. *Le couple $(H, \mathbf{Q})$, où H est un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, et $\mathbf{Q}$ un élément de $(\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2))^n$, est appelée paire d'entropie de bord si, pour tout réel w, $(H(w,.), \mathbf{Q}(w,.))$ est une paire d'entropie régulière au le sens de la définition 1.3 et si :*

$$H(w,w) = 0 \ , \quad \mathbf{Q}(w,w) = 0 \quad \textit{et} \quad \partial_1 H(w,w) = 0,$$

où ∂_1 désigne la dérivée partielle par rapport à la première variable.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une solution faible entropique de (1.1) présentée dans [40].

Définition 1.5. *Soient u_0 dans $L^\infty(\Omega)$. Une fonction u de $L^\infty(Q)$ est une solution faible entropique du problème* (1.1) *si :*

- *pour tout φ de $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$, pour toute paire d'entropie régulière $(\eta, \mathbf{q})$,*

$$\int_Q \{\eta(u)\partial_t\varphi + \mathbf{q}(u) \cdot \nabla\varphi - \eta'(u)g(t,x,u)\varphi\}dxdt \ \geq 0. \tag{1.5}$$

- *Pour tout φ dans $L^1(\Sigma)$, $\varphi \geq 0$, et toute paire d'entropie de bord $(H, \mathbf{Q})$,*

$$\operatorname{ess}\lim_{s\to 0^-} \int_\Sigma \boldsymbol{Q}(u(\sigma + s\boldsymbol{\nu}), 0) \cdot \boldsymbol{\nu}\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1} \geq 0. \tag{1.6}$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)|dx = 0.$$

Remarque 1.6. *La définition 1.5 généralise la définition 1.1 au cas d'une donnée initiale u_0 dans $L^\infty(\Omega)$. Si une fonction u de $L^\infty(Q)$ vérifie* (1.5) *alors u vérifie* (1.3). *En effet, pour tout réel k fixé et pour tout réel δ positif, nous considérons dans* (1.5) *la paire d'entropie régulière définie, pour tout réel z par :*

$$\eta_\delta(z) = ((z-k)^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} - \delta \quad et \quad q_{i,\delta}(z) = \int_k^z \eta'_\delta(r) h'_i(r)dr, \ 1 \le i \le n.$$

En faisant tendre δ vers 0^+, nous obtenons (1.3). *Réciproquement si un élément u de $L^\infty(Q)$ vérifie* (1.3) *alors u vérifie* (1.5) *(cf. [36]). De plus lorsque u appartient à $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$, la condition aux limites* (1.6) *équivaut à* (1.4).

Il est prouvé dans [40] la propriété suivante :

Proposition 1.7. *Lorsque μ tend vers 0^+, la suite des solutions des problèmes $(1.2)_{\mu>0}$, $(u_\mu)_{\mu>0}$ converge dans $C([0,T]; L^1(\Omega))$ vers l'unique solution entropique de* (1.1) *au sens de la définition 1.5.*

Nous utiliserons régulièrement dans la suite de ce mémoire l'exemple suivant de paire d'entropie de bord (cf. [40]).

Exemple 1.8. *Soit δ un réel strictement positif. On introduit les fonctions H_δ et $\mathbf{Q}_\delta$ définies sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$H_\delta(\tau,k) = \left((dist(\tau, I[0,k]))^2 + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} - \delta,$$

et

$$Q_{i,\delta}(\tau,k) = \int_k^\tau \partial_1 H_\delta(\lambda,k) h'_i(\lambda)d\lambda, \ 1 \le i \le n.$$

Alors $(H_\delta, \mathbf{Q}_\delta)$ est une paire d'entropie de bord.

De plus, lorsque δ tend vers 0, la suite $(H_\delta, \mathbf{Q}_\delta)_{\delta>0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vers

$$(dist(\tau, I[0,k])), \mathcal{F}_0(\tau,k))$$

où :

$$\mathcal{F}_0(\tau,k) = \frac{1}{2}(\mathbf{\Phi}(\tau,0) - \mathbf{\Phi}(k,0) + \mathbf{\Phi}(\tau,k)),$$

et

$$\mathbf{\Phi}(u,k) = (\Phi_1(u,k), \dots, \Phi_n(u,k)), \quad \Phi_i(u,k) = sgn(u-k)(h_i(u) - h_i(k)).$$

Remarque 1.9. *Si une fonction u de $L^\infty(Q)$ satisfait* (1.6) *alors :*

$\forall \beta \in L^1(\Sigma),\ \beta \ge 0,$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{s\to 0^-} \int_\Sigma \mathcal{F}_0(u(\sigma + s\boldsymbol{\nu}), k)\cdot \boldsymbol{\nu}\beta(\sigma)d\mathcal{H}^{n-1} \ge 0 \qquad (1.7)$$

1.1.2 Existence de traces

Lorsque la solution entropique est seulement un élément de $L^\infty(Q)$, elle n'admet pas *a priori* de trace forte. Cependant nous donnons dans ce paragraphe des conditions suffisantes sur la fonction flux $\boldsymbol{h}$ pour avoir l'existence d'une trace forte, atteinte par limite essentielle dans $L^1_{loc}(\Sigma)$, pour toute solution entropique dans $L^\infty(Q)$. Le premier résultat de ce type a été établi par A. Vasseur dans [54] dans le cas de fonctions flux régulières. Pour démontrer ce résultat A. Vasseur s'est basé sur la formulation cinétique des lois de conservations scalaires introduite dans [39].

Théorème 1.10. *Soit $\boldsymbol{h}$ dans $\mathcal{C}^3([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})^n$ telle que $\boldsymbol{h}$ vérifie la condition de non-linéarité :*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (\alpha,\beta)\neq(0,0),\ \mathcal{L}(\{\xi \mid \alpha+\beta.\partial_3\boldsymbol{h}(t,x,\xi)=0\})=0.$$

Si u est dans $L^\infty(Q)$ et vérifie (1.3), *alors il existe une unique fonction u^τ dans $L^\infty(\Sigma)$ telle que pour tout compact de K de Σ, et pour toute déformation lipschitzienne Ψ de Q,*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{s\to0^+}\int_K |u(\Psi(s,\sigma))-u^\tau(\sigma)|dtd\mathcal{H}^{n-1}=0. \tag{1.8}$$

Remarque 1.11. *Si u élément de $L^\infty(Q)$ vérifie* (1.8) *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u vérifie l'inégalité* (1.6).
2. *u vérifie l'inégalité* (1.7).
3. *Pour tout k de $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}^n$ p.p. sur Σ, u^τ vérifie l'inégalité* (1.4).

De plus, si u appartient à $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$, alors (1.8) *est vérifiée avec $u^\tau=\gamma u$*

E. Yu. Panov a démontré ce même résultat dans [45] en utilisant la technique dite des "H-measures" introduite par L. Tartar dans [49] sans ajout d'hypothèse de régularité sur la fonction flux et avec une condition de non-linéarité affaiblie. En effet dans [45], il est supposé que, pour presque tout (t,x) dans $[0,T]\times\Omega$, pour tout ξ de $\mathbb{R}^n$, $\xi\neq0$,

$$\text{la fonction } \lambda\longmapsto\xi\cdot\boldsymbol{h}(t,x,\lambda) \text{ n'est pas linéaire sur tout intervalle non dégénéré.} \tag{1.9}$$

Et nous avons :

Théorème 1.12. *Soit $\boldsymbol{h}$ dans $\mathcal{C}([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})^n$ et $\mathrm{div}_x\boldsymbol{h}$ dans $L^1_{loc}([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ satisfaisant* (1.9). *Si u est dans $L^\infty(Q)$ et vérifie* (1.3), *alors il existe une fonction $u^\tau\in L^\infty(\Sigma)$ telle que, pour tout compact de K de Σ, et pour toute déformation lipschitzienne ψ de Q, l'égalité* (1.8) *est vraie.*

1.1.3 Condition de Rankine-Hugoniot

La solution entropique u du problème (1.1) est une solution faible. Elle peut donc présenter des discontinuités. Nous pouvons préciser la contrainte imposée à la solution faible entropique le long d'une hypersurface de discontinuité Λ, lorsque u admet des traces de part et d'autre de Λ, que nous notons respectivement u_+ et u_-. En effet la solution entropique vérifie le long de toute hypersurface de discontinuité Λ une condition de saut, appelée condition de Rankine-Hugoniot.

Proposition 1.13. *Soit $\boldsymbol{\nu} = (\nu_t, \boldsymbol{\nu}_x)$ un vecteur normal orienté de l'hypersurface Λ. Alors la solution entropique u du problème* (1.1) *vérifie $\mathcal{H}^n$ p.p., pour tout k de $\mathbb{R}$,*

$$\{sgn(u_- - k)(\boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},u_-) - \boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},k)) - sgn(u_+ - k)(\boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},u_+) - \boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},k))\} \cdot \boldsymbol{\nu}_x$$
$$+ \{|u_- - k| - |u_+ - k|\}\nu_t \geq 0.$$

Cette condition entraîne la condition de Rankine-Hugoniot :

$$(u_+ - u_-)\nu_t + (\boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},u_+) - \boldsymbol{h}(t,\overline{\sigma},u_-)) \cdot \boldsymbol{\nu}_x = 0.$$

1.1.4 Convergence de solutions approchées dans L^1

La condition (1.9) ne permet pas uniquement de définir la trace forte d'une solution entropique u le long de Σ, ou de tout autre hypersurface. Elle nous permet également d'obtenir la convergence forte dans L^1 de suites de solutions de certains problèmes régularisés qui approchent le problème (1.1) et que nous allons préciser. Les deux théorèmes que nous allons énoncer sont une conséquence des travaux effectués par E. Yu Panov, dans [44] notamment, pour des solutions à valeurs mesure. Le résultat principal de [44] concerne la convergence forte (dans L^1_{loc}) de suites de solutions à valeurs mesure. Nous énonçons ci-dessous les résultats qui en découlent pour des suites de solutions fonctions qui sont des éléments de $L^\infty(Q)$.

Afin de présenter le premier théorème nous introduisons un réel ε strictement positif destiné à tendre vers 0^+. Nous considérons une suite $(\boldsymbol{h}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (respectivement $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) telle que $(\boldsymbol{h}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge partout vers $\boldsymbol{h}$ (resp. $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge partout vers g) et pour tout ε, $\boldsymbol{h}_\varepsilon$ (resp. g_ε) a au moins la régularité de $\boldsymbol{h}$ (resp. g). Nous notons u_ε une fonction de $L^\infty(Q)$ qui vérifie l'inégalité entropique :

$$\begin{aligned}&\int_Q \{|u_\varepsilon - k|\partial_t\varphi + sgn(u_\varepsilon - k)(\boldsymbol{h}_\varepsilon(t,x,u_\varepsilon) - \boldsymbol{h}_\varepsilon(t,x,k)) \cdot \nabla_x\varphi\}dxdt \\ &- \int_Q sgn(u_\varepsilon - k)(g_\varepsilon(t,x,u_\varepsilon) + \mathrm{div}_x\boldsymbol{h}_\varepsilon(t,x,k))\varphi dxdt \qquad \geq 0.\end{aligned} \tag{1.10}$$

En particulier :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathrm{div}_x\boldsymbol{h}_\varepsilon(t,x,u_\varepsilon) + g_\varepsilon(t,x,u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

Il ressort alors de [44] :

Théorème 1.14. *Soit* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de fonctions qui vérifient* (1.10). *Si* $\boldsymbol{h}$ *satisfait* (1.9) *et si la suite* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est bornée dans* $L^\infty(Q)$*, alors il existe une sous-suite de* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *qui converge dans* $L^1(Q)$.

Le second résultat est le suivant :

Théorème 1.15. *Nous supposons que* $\boldsymbol{h}$ *satisfait la condition* (1.9). *Pour tout réel* μ *strictement positif, nous notons* u_μ *une fonction qui vérifie :*

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \mathrm{div}_x \boldsymbol{h}(t,x,u_\mu) + g(t,x,u_\mu) = \mu \Delta u_\mu \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Alors toute suite $(u_\mu)_{\mu>0}$ *qui est bornée dans* $L^\infty(Q)$ *admet une sous-suite qui converge dans* $L^1(Q)$.

1.2 Problème hyperbolique à coefficient b discontinu

Dans ce paragraphe, la fonction flux $\boldsymbol{h}$ est définie par $\boldsymbol{h}(t,x,u) = b(x)\boldsymbol{f}(u)$ et nous étudions le problème (2) présenté dans l'introduction.

1.2.1 Notion de solution faible entropique.

Nous donnons tout d'abord la définition d'une solution faible entropique du problème (2). En dimension 1 d'espace, une définition de solution faible entropique a été introduite par J.D. Towers dans [52] pour le problème de Cauchy posé dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Nous généralisons cette définition en dimension d'espace quelconque et pour un ouvert borné. La formulation mathématique pour le problème (2) est donnée par une inégalité entropique sur l'ouvert Q, contenant un terme complémentaire dû à la discontinuité de la fonction b le long de $\Gamma_{L,R}$. Nous utilisons la fonction $\mathcal{F}_0$ définie dans l'exemple 1.8 pour traduire la condition de bord. Ainsi,

Définition 1.16. *Une fonction* u *de* $L^\infty(Q)$ *est une solution faible entropique de* (2) *si :*

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\int_Q \{|u-k|\partial_t\varphi + b(x)\boldsymbol{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x\varphi - sgn(u-k)(g(t,x,u) + \nabla_x b(x).\boldsymbol{f}(k))\varphi\}dxdt \\ &+ \int_{\Sigma_{L,R}} |(b_R(\overline{\sigma}) - b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k)\cdot\boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})|\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1} \qquad \geq 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où

$$\mathbf{\Phi}(u,k) = (\Phi_1(u,k),\ldots,\Phi_n(u,k)), \quad \Phi_i(u,k) = sgn(u-k)(f_i(u)-f_i(k)),$$

(ii)

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)|dx = 0, \tag{1.12}$$

(iii) $\forall\ \beta \in L^1(\Sigma)$, $\beta \geq 0$, $\forall\ k \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{s\to 0^-} \int_\Sigma \mathcal{F}_0(u(\sigma+s\boldsymbol{\nu}),k)\cdot\boldsymbol{\nu}\beta(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1} \geq 0. \tag{1.13}$$

Remarque 1.17. *Si u est une solution faible entropique au sens de la définition 1.16, alors :* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\int_Q \{|u-k|\partial_t\varphi + b(x)\mathbf{\Phi}(u,k).\nabla_x\varphi - sgn(u-k)(g(t,x,u)+\nabla_x b(x)\cdot\boldsymbol{f}(k)\varphi)\}dxdt\\ &+\int_{\Sigma_{L,R}} |(b_R(\overline{\sigma})-b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k)\cdot\boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})|\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1} + \int_\Omega |u_0-k|\varphi(0,x)dx \geq 0.\end{aligned} \tag{1.14}$$

En fait l'inégalité (1.14) *est équivalente à* (1.11) *et* (1.12).

Nous allons maintenant indiquer comment nous pouvons adapter tous les résultats présentés dans la section 1.1, notamment l'existence de traces fortes et la convergence de solutions "approchées" du problème (2) (nous préciserons ce que nous entendons par solutions approchées dans la suite de cette section). Pour cela, comme dans le cas régulier, nous utilisons l'hypothèse de non-linéarité sur la fonction flux (1.9), qui s'écrit ici de la manière suivante :

$$\begin{gathered}\text{pour presque tout } x \text{ de } \Omega,\text{ pour tout } \xi \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ non nul,}\\ \text{la fonction } \lambda \longmapsto \xi\cdot\boldsymbol{f}(\lambda)b(x) \text{ est non linéaire sur tout intervalle non-dégénéré.}\end{gathered} \tag{1.15}$$

Tout d'abord nous remarquons que, pour toute fonction positive φ de $\mathcal{C}_c^\infty(Q_i)$, $i = L, R$,

$$\int_{Q_i} \{|u-k|\partial_t\varphi + b(x)\mathbf{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x\varphi - sgn(u-k)(g(t,x,u)+\nabla_x b(x)\boldsymbol{f}(k))\varphi\}dxdt \geq 0.$$

Ceci entraîne que nous pouvons adapter le résultat du théorème 1.12 de la manière suivante :

Théorème 1.18. *Nous supposons la condition* (1.15) *satisfaite. Soit u une fonction de $L^\infty(Q)$ vérifiant* (1.11). *Alors, il existe une fonction u_L^τ de $L^\infty(\Sigma_L)$ (resp. u_R^τ de $L^\infty(\Sigma_R)$) telle que, pour tout compact K de Σ_L (resp. Σ_R), et toute déformation lipschitzienne Ψ de Ω_i,*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{s\to 0^+} \int_K |u(\Psi(s,\sigma))-u_L^\tau(\sigma)|dtd\mathcal{H}^{n-1} = 0. \tag{1.16}$$

Si (1.15) est vérifiée, une solution entropique du problème (2) admet ainsi des traces "fortes" sur Σ_i, $i = L, R$. En conséquence, nous pouvons donner une définition équivalente de solution faible entropique pour (2) qui reprend l'écriture de la condition de bord donnée par C. Bardos, A.Y. LeRoux et J.C. Nédélec (cf paragraphe 1.1.1.1).

Définition 1.19. *Nous supposons la condition* (1.15) *satisfaite. Alors une fonction u de $L^\infty(Q)$ est une solution faible entropique de* (2) *si et seulement si u vérifie l'inégalité d'entropie* (1.14) *et la condition de bord :*

p.p.t $t \in]0,T[$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$,

$$(sgn(u^\tau(\sigma) - k) + sgn(k))b(\overline{\sigma})(\boldsymbol{f}(u^\tau) - \boldsymbol{f}(k)).\boldsymbol{\nu} \geq 0, \ \mathcal{H}^n p.p. \ sur\ \Sigma, \tag{1.17}$$

où

$$u^\tau = \begin{cases} u_L^\tau & sur\ \Sigma_L \cap \Sigma, \\ u_R^\tau & sur\ \Sigma_R \cap \Sigma. \end{cases}$$

1.2.2 Présentation des techniques utilisées

Nous allons maintenant indiquer comment adapter les théorèmes 1.14 et 1.15 à la situation considérée ici. Nous présentons d'abord les deux problèmes approchés que nous considèrerons dans la suite de ce mémoire.

La première méthode consiste à approcher la fonction discontinue b par une suite de fonctions régulières. Soit $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge presque partout vers b dans Ω et $b_\varepsilon(x) = b(x)$ si $d(x, \Gamma_{L,R}) \geq \varepsilon$. Nous notons :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega,\ d(x, \Gamma_{L,R}) \geq \varepsilon\} \ \text{ et } Q_\varepsilon =]0,T[\times\Omega_\varepsilon,$$

de telle sorte que, pour tout x de Ω_ε, $b_\varepsilon(x) = b(x)$.

Etant donné u_0 dans $L^\infty(\Omega)$, nous introduisons alors le problème régularisé :

Trouver une fonction u_ε mesurable sur Q telle que formellement :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \mathrm{div}_x(b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(u_\varepsilon)) + g(t,x,u_\varepsilon) &= 0 & \text{dans } Q, \\ u_\varepsilon &= 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma, \\ u_\varepsilon(0,x) &= u_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

D'après les résultats rappelés à la section 1.1, ce problème admet une unique solution faible entropique au sens de la définition 1.5.

Théorème 1.20. *Nous supposons que la condition* (1.15) *est satisfaite. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la suite de solutions des problèmes $(1.18)_{\varepsilon>0}$. Si cette suite est bornée dans $L^\infty(Q)$, alors il existe une suite extraite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge fortement dans $L^1(Q)$.*

Démonstration. Tout d'abord, puisque par hypothèse $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée indépendemment de ε, il existe une sous-suite, toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que u_ε converge pour la topologie faible-$*$ dans $L^\infty(Q)$ vers une fonction χ. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, par définition de b_ε, nous avons $b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(u) = b(x)\boldsymbol{f}(u)$ sur $Q_{\varepsilon_0} \cap Q_L$ et sur $Q_{\varepsilon_0} \cap Q_R$. Sous l'hypothèse (1.15), nous pouvons alors appliquer le théorème 1.14. Nous en déduisons qu'il existe une sous-suite qui converge dans $L^1(Q_{\varepsilon_0} \cap Q_L)$ et dans $L^1(Q_{\varepsilon_0} \cap Q_R)$ vers une limite, notée u. La fonction u dépend *a priori* de ε_0 mais par unicité de la limite dans L^∞ faible-$*$, $u = \chi$. Par un procédé d'extraction diagonal, nous pouvons affirmer que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge fortement vers u dans $L^1(Q_L)$ et dans $L^1(Q_R)$, et donc dans $L^1(Q)$. □

Remarque 1.21. *D'après la proposition 1.2, si u_0 est dans $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, nous pouvons noter que u_ε est bornée par une constante qui dépend "a priori" de la norme infinie de $\nabla_x b_\varepsilon$, et donc de ε^{-1}. Une hypothèse supplémentaire sur la fonction flux sera introduite pour montrer que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ afin d'appliquer le théorème 1.20.*

La deuxième méthode qui sera utilisée consiste à ajouter "artificiellement" un terme de diffusion sur tout le domaine Q. Soit μ un réel strictement positif. Nous considérons le problème de viscosité associé au problème (2) :

Trouver une fonction u_μ mesurable sur Q telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u_\mu + \mathrm{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) & = & \mu\Delta u_\mu & \text{dans } Q, \\ u_\mu(0,x) & = & u_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_\mu & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{1.19}$$

Nous prouverons dans un premier temps un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.19). De sorte que :

Théorème 1.22. *Nous supposons la condition* (1.15) *satisfaite. Soit $(u_\mu)_{\mu>0}$ la suite de solutions des problèmes $(1.19)_{\mu>0}$. Si $(u_\mu)_{\mu>0}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$, alors il existe une sous-suite de $(u_\mu)_{\mu>0}$ convergente dans $L^1(Q)$.*

Démonstration. Nous pouvons appliquer le théorème 1.15 successivement sur Q_L et Q_R. Il existe ainsi une même sous-suite u_μ qui converge dans $L^1(Q_L)$ et dans $L^1(Q_R)$, et par conséquent dans $L^1(Q)$. □

Remarque 1.23. *Pour cette méthode de viscosité artificielle il faut établir que les bornes dans $L^\infty(Q)$ de la solution u_μ ne dépendent pas de μ, pour pouvoir appliquer le théorème 1.22. Une hypothèse supplémentaire sur $\boldsymbol{f}$ sera là aussi utilisée.*

Dans la dernière partie, nous étudions un problème modèle issu de l'industrie pétrolière. Dans ce cadre le terme de convection $\boldsymbol{h}$ est de la forme : $\boldsymbol{h}(x,u) = \boldsymbol{b}(x)f(u)$. Un tel flux ne vérifie pas la condition de non linéarité (1.15). Nous ne pouvons donc pas utiliser dans ce cas les travaux de E. Yu. Panov. En particulier nous ne savons plus répondre à la question de l'existence de traces fortes pour une solution faible entropique, ni prouver la convergence dans L^1 de suites de solutions des problèmes approchés. Afin d'obtenir un résultat d'existence dans cette situation nous nous sommes alors intéressés au problème couplé perturbé hyperbolique-parabolique (3). Pour étudier ce dernier nous avons mis en oeuvre une méthode de point fixe (théorème 0.10). Le passage à la limite s'effectue notamment en utilisant le théorème de convergence 0.11 sur la zone hyperbolique.

1.3 Présentation des résultats obtenus

Nous donnons ci-dessous un résumé de chaque chapitre dans le but de présenter les principaux résultats obtenus. Nous avons choisi de le rédiger en anglais et en conséquence d'y inclure un résumé de ce chapitre 1.

Chapter 1

In the first chapter we give some well known results about the regular hyperbolic problem (1.1). In particular, the entropy formulation of Problem (1.1) in the sense of C. Bardos-A.Y. LeRoux-J.C. Nédélec and in the sense of F. Otto are reminded.

We mention two results due to E. Yu. Panov when the flux satisfies a nonlinearity assumption. The first one ensures the existence of strong trace of an entropy solution u in $L^\infty(Q)$ and the second one provides the strong compactness in $L^1(Q)$ of sequence of "approximated" solutions to Problem (1.1).

Then we consider the Problem (2) with a discontinuous flux. We first give the definition of a weak entropy solution to (2) in Definition 1.16. We suppose that the flux function $b(x)\boldsymbol{f}(u)$ satisfies the nonlinear condition (1.15). Under this hypothesis we show how to adapt Panov's results concerning the existence of a strong trace and convergence of approximate solutions to (2). Especially this allows us to propose in Definition 1.19 an equivalent definition of a weak entropy solution to (2) in the sense of Definition 1.16.

Chapter 2

The second chapter is devoted to the study of Problem (1) i.e. the one-dimensional purely hyperbolic problem.

We set $\Omega =]-1,1[$, and we suppose that b is discontinuous at $x_0 = 0$. We define :

$$b_L = \lim_{x\to 0^-} b(x) \qquad \text{and} \qquad b_R = \lim_{x\to 0^+} b(x).$$

We suppose also that the flux function is nonlinear that is to say in that case:

$$f \text{ is nonlinear on any non-degenerate interval of } [M_2(T), M_1(T)],$$

where $[M_2(T), M_1(T)]$ is defined such as a weak entropy solution takes all its values in $[M_2(T), M_1(T)]$, and

$$\mathcal{L}\{x \in \Omega,\ b(x) = 0\} = 0.$$

Then we can define u_1^τ and u_{-1}^τ, the strong traces in $L^\infty(]0,T[)$ of a weak entropy solution u (in the sense of Definition 1.16), that are given, for every compact K of $]0,T[$ by:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{x\to\pm 1} \int_K |u(t,x) - u_{\pm 1}^\tau(t)|dt = 0.$$

We can also define strong traces γu^+ (resp. γu^-) along $\{x_0 = 0\}$ at right (resp. at left). It will be useful to obtain a uniqueness result. Indeed, along the interface, a weak entropy solution u fulfills an entropy condition. The effects of this condition depend on the type of characteristics. We focus on a case where the problem is really coupled at the interface. Therefore we work under a sign assumption on the function f and we show that a weak entropy solution u satisfies a Rankine-Hugoniot condition.

Lemma 1.24. *Suppose that :*

$$\begin{cases} \exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \le k_1 \quad \textit{such that } u \in [k_2, k_1], \ \textit{and} \\ \qquad f(k_1)(b_R - b_L) \ge 0, \\ \qquad f(k_2)(b_R - b_L) \le 0. \end{cases}$$

Then a weak entropy solution u to Problem (2) satisfies, for a.e. t in $]0,T[$, the equality:

$$b_L f(\gamma u^-(t)) = b_R f(\gamma u^+(t)) \ .$$

This is a key point to obtain a comparison result between two weak entropy solutions with respect to their initial conditions:

Theorem 1.25. *Let the assumptions of Lemma 1.24 be satisfied. We suppose also that the function f changes no more than once its monotonicity. Then, if u and v are two weak entropy solutions to Problem (2) associated with initial conditions u_0 and v_0 in $L^\infty(\Omega)$, for a.e. t in $]0,T[$,*

$$\int_{-1}^{1} |u(t,x) - v(t,x)|dxdt \le e^{M_g t} \int_{-1}^{1} |u_0(x) - v_0(x)|dx.$$

where M_g is a constant of Lipschitz associated to g (cf. Introduction).

Next we obtain an existence property that is based on a suitable regularisation of the discontinuous coefficient b. We introduce a sequence of smooth functions $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, such that $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ simply converges to b when ε goes to 0^+ and we consider the regularized problem:

Find a measurable function u_ε such that:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(b_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon)) + g(t,x,u_\varepsilon) = & 0 & \text{in } Q, \\ u_\varepsilon(0,x) = & u_0(x) & \text{on } \Omega, \\ u = & 0 & \text{on (a part of) }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

We know that this problem has a unique entropy solution u_ε that is bounded and we prove that, under a sign condition on f, the sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is uniformly bounded in $L^\infty(Q)$:

Lemma 1.26. *We suppose that:*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f(M_2(t)) \leq 0, \\ \forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f(M_1(t)) \geq 0 \end{cases}$$

where M_1 and M_2 are two specific functions depending on b, $\boldsymbol{f}$, g and u_0 but not on ε. Then, for a.e. t in $]0,T[$,

$$M_2(t) \leq u_\varepsilon(t,x) \leq M_1(t),\ \textit{a.e. on } \Omega.$$

So we refer to the arguments of E. Yu. Panov that are summarized in Chapter 1 to ensure that the sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges in $L^1(Q)$ to a function u and we prove that u is a weak entropy solution to Problem (1).

This work has been published in [27].

Chapter 3

This chapter deals with the existence and uniqueness properties for Problem (2) that is to say the coupled hyperbolic/hyperbolic problem in several space dimensions. Here again we suppose that the flux function satisfies the assumption of nonlinearity (1.15).

The reasoning to obtain a uniqueness result is the same as in Chapter 2. Once again, we focus on a case where the problem is really coupled at the interface. First we prove that a weak entropy solution fulfills a Rankine-Hugoniot condition along the interface of discontinuity. So, we introduce a sign condition about the flux at two points. Under a monotonicity condition on the function f, we show a comparison result between two entropy solutions.

To obtain the existence of a weak entropy solution we use a vanishing viscosity method. We introduce the viscous problem related to (2):

Find a measurable function u_μ on Q such that:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u_\mu + \mathrm{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) & = & \mu\Delta u_\mu & \text{in } Q, \\ u_\mu(0,x) & = & u_0(x) & \text{on } \Omega, \\ u_\mu & = & 0 & \text{on } \Sigma. \end{array}\right. \tag{1.20}$$

First we give the definition of a weak solution to the viscous Problem (1.20):

Definition 1.27. *A function u_μ in $W(0,T)$ is a weak solution to* (1.20) *if :*

$$u_\mu(0,.) = u_0 \quad a.e. \quad on\ \Omega,$$

and if, for all $v \in H_0^1(\Omega)$, for a.e. $t \in]0,T[$,

$$\langle \partial_t u_\mu, v\rangle + \int_\Omega ((\mu\nabla_x u_\mu - b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu)) \cdot \nabla_x v + g(t,x,u_\mu)v)dx = 0.$$

Lemma 1.28. *We suppose that :*

$$\forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L)\boldsymbol{f}(M_1(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma}) \geq 0,$$
$$\forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L)\boldsymbol{f}(M_2(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma}) \leq 0.$$

Then there is a unique weak solution u_μ to Problem (1.20) *such that :*

$$\forall t \in [0,T], M_2(t) \leq u_\mu(t,.) \leq M_1(t) \quad a.e.\ \ sur\ \Omega.$$

By using Panov's arguments, we make sure that the sequence $(u_\mu)_{\mu>0}$ strongly converges in $L^1(Q)$ towards a function u of $L^\infty(Q)$. Then we state that u is a weak entropy solution to Problem (2).

These results were exposed during the ICIAM 07 (in Zurich) and an article is in preparation.

Chapter 4

In the last chapter, we study the coupled Problem (3). For the sake of simplicity, we do not give in this part the assumptions made to obtain the uniqueness and existence properties. We set $\Gamma_{hp} = \overline{\Omega}_p \cap \overline{\Omega}_h$.

First we provide a definition of a weak entropy solution to (3).

Definition 1.29. *A measurable function u is a weak entropy solution to* (3) *if:*

- $u \in L^\infty(Q), \quad \phi(u) \in L^2(0,T;V)$,
- $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\forall \varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\int_Q (|u-k|\partial_t \varphi + \boldsymbol{b}(x)\Phi(u,k)\cdot\nabla_x\varphi)dxdt - \int_{Q_p} \nabla_x|\phi(u)-\phi(k)|\cdot\nabla_x\varphi dxdt$$
$$-\int_Q sgn(u-k)(g(t,x,u)+\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}(x)f(k))\varphi dxdt$$
$$+\int_{\Sigma_{hp}} \{\boldsymbol{b}_h f_h(k) - \boldsymbol{b}_p f_p(k)\}\cdot\boldsymbol{\nu}_h sgn(\phi(u)-\phi(k))\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1} \geq 0,$$

- $\forall \varphi \in L^1(\Sigma_h \setminus \Sigma_{hp})$, $\varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} \mathcal{F}_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h),0,k)\varphi d\sigma \geq 0,$$

- $$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)| = 0.$$

To obtain a uniqueness property we suppose that the interface is included in the set of outward characteristics for the first-order operator set in the hyperbolic domain. So we reason in two steps: first we prove the uniqueness of a weak entropy solution on the hyperbolic zone:

Theorem 1.30. *Let u_1 and u_2 be two entropy weak solutions to* (4.1) *for initial data $u_{0,1}$ and $u_{0,2}$ respectively. Then, for a.e. t in $]0,T[$,*

$$\int_{\Omega_h} |u_1(t,.)-u_2(t,.)|dx \leq e^{M_{g_h}t}\int_{\Omega_h}|u_{0,1}-u_{0,2}|dx.$$

Then we use the above theorem and a method of doubling the time variables only, to prove the uniqueness of a weak entropy solution on the parabolic area. It comes:

Theorem 1.31. *Problem* (3) *admits at most one weak entropy solution. Besides, if u_1 and u_2 are two weak entropy solutions corresponding to initial data $u_{0,1}$ and $u_{0,2}$ such that $u_{0,1} = u_{0,2}$ a.e. on Ω_h then, for a.e. t in $]0,T[$,*

$$\int_{\Omega} |u_1(t,.)-u_2(t,.)|dx \leq e^{M_{g_p}t}\int_{\Omega_p}|u_{0,1}-u_{0,2}|dx.$$

To prove the existence of an entropy weak solution, we use a "discontinuous " vanishing viscosity method. Indeed for any positive real μ, we introduce the following problem:

Find a measurable function u_μ on Q satisfying:

$$\begin{cases} \partial_t u_\mu + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) &= \mathrm{div}_x(\lambda_\mu \nabla_x \phi(u_\mu)) \quad \text{in } Q, \\ u_\mu &= 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ u_\mu(0,.) &= u_0 \quad \text{on } \Omega. \end{cases}$$

with

$$\lambda_\mu(x) = \mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + \mu \mathbb{I}_{\Omega_h}(x),$$

We use a Schauder-Tychonoff fixed point Theorem (see Theorem 0.10) to obtain:

Proposition 1.32. *There exists a unique function u_μ in $W(0,T) \cap L^\infty(Q)$ such that :*

$$\forall t \in [0,T], M_2(t) \leq u_\mu(t,.) \leq M_1(t) \text{ a.e. in } \Omega,$$

$$u_\mu(0,.) = u_0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

Moreover u_μ satisfies the variational equality for any v in $H_0^1(\Omega)$, and for a.e. t in $]0,T[$:

$$\langle \partial_t u_\mu, v\rangle + \int_\Omega ((\lambda_\mu(x)\nabla_x \phi_\mu(u_\mu) - \boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)).\nabla_x v + g(t,x,u_\mu)v)dx = 0.$$

Then we want to take the μ-limit. The *a priori* estimates collected (that will be specified in Chapter 4) allow us to state:

Proposition 1.33. *There exists a measurable function u in $L^\infty(Q)$ with $\phi(u)$ in $L^2(0,T;V)$ and such that up to a subsequence when μ goes to 0^+,*

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ in } L^\infty(Q) \text{ weak} - \star,$$
$$u_\mu \to u \text{ in } L^q(Q_p) \text{ strongly for any finite } q \text{ and a.e. on } Q_p.$$

Besides we also have

$$\nabla_x \phi(u_\mu) \rightharpoonup \nabla_x \phi(u) \text{ weakly in } L^2(Q_p)^n,$$
$$\mu \nabla_x \phi(u_\mu) \to 0, \lambda_\mu \mu \nabla_x u_\mu \to 0 \text{ strongly in } L^2(Q_h)^n.$$

Lastly we refer to the notion of *process* function and to the Theorem 0.11 to take the μ-limit in the hyperbolic zone. The existence result follows.

This work has been published in [28].

Chapitre 2

Cas de la dimension 1

2.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude du problème (2) en dimension un d'espace. Le domaine Ω est donc un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Le problème s'écrit alors de la manière suivante.

Trouver une fonction mesurable et bornée u sur $Q =]0,T[\times\Omega$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(b(x)f(u)) + g(t,x,u) = & 0 & \text{dans } Q, \\ u(0,x) = & u_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ u = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où la fonction b est discontinue en un point x_0 de Ω.

Par normalisation, nous pouvons poser $\Omega =]-1,1[$ et supposer que la fonction b est discontinue au point $x_0 = 0$. D'après les hypothèses sur b énoncées dans l'introduction, nous pouvons définir :

$$b_L = \lim_{x\to 0^-} b(x) \qquad \text{et} \qquad b_R = \lim_{x\to 0^+} b(x).$$

Nous introduisons également la fonction croissante M_1 et la fonction décroissante M_2 définies par :

$$M_1 : t \in [0,T] \longrightarrow M_1(t) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u_0^+ e^{Nt} + \frac{e^{Nt}-1}{N}(M_b|f(0)| + \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)|),$$

et

$$M_2 : t \in [0,T] \longrightarrow M_2(t) = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega}(-u_0^-)e^{Nt} - \frac{e^{Nt}-1}{N}(M_b|f(0)| + \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)|)$$

où

$$N = M_b M_f + M_g \quad \text{et} \quad M_b = \max(\|b'\|_{L^\infty(]-1,0[)}, \|b'\|_{L^\infty(]0,1[)}).$$

Dans ce chapitre nous nous plaçons dans la situation pour laquelle l'équation (2.1) est non dégénérée au sens de Panov, c'est à dire que la fonction flux satisfait la condition de non-linéarité (1.15). Dans le cas de la dimension 1, cette condition s'écrit sous la forme :

$$f \text{ est non linéaire sur tout intervalle non dégénéré inclus dans } [M_2(T), M_1(T)], \tag{2.2}$$

et

$$\mathcal{L}\{x \in \Omega,\ b(x) = 0\} = 0. \tag{2.3}$$

Afin de garantir l'unicité de la solution faible entropique, nous faisons une hypothèse supplémentaire sur la fonction f :

$$f \text{ change au plus une fois de monotonie dans l'intervalle } [M_2(T), M_1(T)]. \tag{2.4}$$

La formulation mathématique de (2.1) est rappelée dans la section 2.2. Nous explicitons dans la section 2.3 une condition de transmission le long de l'interface, implicitement incluse dans l'inégalité entropique (2.5), qui nous permet d'établir dans la section 2.4 le résultat d'unicité. La section 2.5 est consacrée au résultat d'existence, par régularisation de la fonction b.

2.2 Notion de solution faible entropique

Puisque nous supposons dans ce chapitre que la fonction flux satisfait l'hypothèse de non-linéarité (2.2)-(2.3), nous pouvons utiliser la définition 1.19 pour caractériser la solution faible entropique de (2.1). Ainsi,

Définition 2.1. *Une fonction u de $L^\infty(Q)$ est une solution faible entropique de* (2.1) *si :*

(i) $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Q (|u(t,x) - k|\partial_t \varphi(t,x) + b(x)\Phi(u,k)\partial_x \varphi(t,x))dxdt \\ \qquad \displaystyle - \int_Q sgn(u-k)(b'(x)f(k) + g(t,x,u))\varphi(t,x)dxdt \\ \displaystyle + \int_\Omega |u_0 - k|\varphi(0,x)dx + |(b_L - b_R)f(k)| \int_0^T \varphi(t,0)dt \quad \geq 0 \ , \end{array} \right. \tag{2.5}$$

où

$$\Phi(u,k) = sgn(u-k)(f(u) - f(k)),$$

(ii) pour p.p.t. t dans $]0, T[$, *pour tout réel k,*

$$b(1)(sgn(u_1^\tau(t) - k) + sgn(k))(f(u_1^\tau(t)) - f(k)) \geq 0, \tag{2.6}$$
$$b(-1)(sgn(u_{-1}^\tau(t) - k) + sgn(k))(f(u_{-1}^\tau(t)) - f(k)) \leq 0. \tag{2.7}$$

Dans cette définition u_1^τ et u_{-1}^τ sont deux fonctions de $L^\infty(]0, T[)$ qui représentent les traces de u respectivement en $(+1)^-$ et $(-1)^+$. Il résulte du théorème 1.18 (puisque l'interface $\Sigma_{L,R}$ est dans ce cas un hyperplan) que pour tout compact K de $]0, T[$,

$$\operatorname{ess}\lim_{x \to \pm 1} \int_K |u(t,x) - u_{\pm 1}^\tau(t)| dt = 0.$$

De même, nous notons γu^+ (respectivement γu^-) la trace à droite (resp. à gauche) de u le long de la ligne de discontinuité $\{x_0 = 0\}$.

2.3 Conditions à l'interface $\{x_0 = 0\}$

Nous allons montrer que la définition 2.1 garantit l'unicité de la solution faible entropique. Nous cherchons d'abord à établir une condition de type "Rankine-Hugoniot" le long de l'interface $\{x_0 = 0\}$. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent dans le cas d'une courbe de discontinuité de la solution d'un problème à données continues une telle condition donne une propriété vérifiée par les sauts éventuels de la solution faible entropique.

Lemme 2.2. *Soit u dans $L^\infty(Q)$ une solution faible entropique de* (2.1). *Alors, p.p.t. t dans* $]0, T[$, *pour tout réel k,*

$$b_L \Phi(\gamma u^-(t), k) - b_R \Phi(\gamma u^+(t), k) + |(b_L - b_R) f(k)| \geq 0 . \tag{2.8}$$

Démonstration. Soit φ une fonction positive de $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonction de "cut-off" ω_ε introduite dans [48] et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2\varepsilon < |x| \quad , \\ \dfrac{-|x| + 2\varepsilon}{\varepsilon} & \text{si} \quad \varepsilon \leq |x| \leq 2\varepsilon \quad , \\ 1 & \text{si} \quad |x| < \varepsilon \quad . \end{cases}$$

Il vient $\omega_\varepsilon(x) \to 0$ si $x \neq 0$, et pour tout ε, $\omega_\varepsilon(0) = 1$.

La fonction ω_ε est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et par un argument de densité, nous pouvons choisir $\varphi\omega_\varepsilon$ comme fonction-test dans (2.5). Nous faisons alors tendre ε vers 0^+. Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous pouvons affirmer que tous les termes tendent vers 0, excepté le terme $|(b_L - b_R)f(k)| \int_0^T \varphi(t,0)dt$, qui ne dépend pas de ε, et :

$$I_\varepsilon = \int_Q b(x)\Phi(u,k)\varphi\ \omega'_\varepsilon\ dxdt\ .$$

Il nous suffit de montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon = \int_0^T (b_L\Phi(\gamma u^-,k) - b_R\Phi(\gamma u^+,k))\varphi(t,0)dtdx.$$

En utilisant la définition de ω_ε, nous avons :

$$I_\varepsilon = \int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\int_{-2\varepsilon}^{-\varepsilon} b(x)\Phi(u,k)\varphi\ dxdt + \int_0^T -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} b(x)\Phi(u,k)\varphi\ dxdt.$$

Nous sommes donc amenés à étudier les limites respectives de K_ε et L_ε, où :

$$K_\varepsilon = \int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\int_{-2\varepsilon}^{-\varepsilon} |b(x)(\Phi(u,k)\varphi(t,x) - b_L\Phi(\gamma u^-,k)\varphi(t,0))|dtdx,$$

et,

$$L_\varepsilon = \int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\int_{-2\varepsilon}^{-\varepsilon} |b(x)(\Phi(u,k)\varphi(t,x) - b_L\Phi(\gamma u^-,k)\varphi(t,0))|dtdx.$$

Comme $\Phi(.,k)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, par définition de b_L et γu^-, nous pouvons affirmer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} K_\varepsilon = 0$. De même $\lim_{\varepsilon\to 0^+} L_\varepsilon = 0$, ce qui entraîne (2.8). □

Remarque 2.3. *Si pour tout* (k,l,s) *de* $[M_2(T), M_1(T)]^3$,

$$b_L\Phi(l,k) - b_R\Phi(s,k) \geq 0, \tag{2.9}$$

alors (2.8) *est satisfait quelles que soient les valeurs de* γu^- *et* γu^+. *Cette condition est vérifiée si et seulement si* f *est monotone croissante avec* $b_L \geq 0$ *et* $b_R \leq 0$, *ou* f *monotone décroissante avec* $b_L \leq 0$ *et* $b_R \geq 0$.

Pour pouvoir déduire une condition de type Rankine-Hugoniot à partir de l'inégalité (2.8) nous nous intéressons au cas où :

$$\left\{\begin{array}{c} \exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \leq k_1 \ \text{ tels que } u \in [k_2, k_1], \text{ et} \\ f(k_1)(b_R - b_L) \geq 0, \\ f(k_2)(b_R - b_L) \leq 0. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Remarque 2.4. *Si* f *est une fonction croissante admettant un zéro cette condition est vérifiée si* $b_R - b_L \geq 0$, *donc par exemple lorsque* $b_R \geq 0$ *et* $b_L \leq 0$. *Dans cette situation le problème est réellement couplé à l'interface puisque les caractéristiques issues de l'interface sont rentrantes dans les deux sous-domaines* Q_L *et* Q_R.

Ainsi nous pouvons démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.5. *Sous* (2.10)*, p.p.t. t dans* $]0,T[$*, la solution faible entropique u de* (2.1) *vérifie la condition de Rankine-Hugoniot :*

$$b_L f(\gamma u^-(t)) = b_R f(\gamma u^+(t)) \ . \tag{2.11}$$

Démonstration. Nous choisissons $k = k_1$ in (2.8) et nous obtenons :

$$b_R f(\gamma u^+) - b_L f(\gamma u^-) + f(k_1)(b_L - b_R) + |f(k_1)(b_R - b_L)| \geq 0$$

D'après (2.10), $|f(k_1)(b_L - b_R)| = f(k_1)(b_R - b_L)$, et nous en déduisons que $b_R f(\gamma u^+) \geq b_L f(\gamma u^-)$.

En choisissant $k = k_2$ dans (2.8), et en utilisant (2.10), nous obtenons l'inégalité inverse. □

2.4 Le résultat d'unicité

Nous rappelons tout d'abord une propriété de la solution faible entropique déjà énoncée au chapitre 1, dans le cas d'un terme de transport régulier, et qui reste vraie ici.

Lemme 2.6. *Si une fonction mesurable et bornée u satisfait (2.5), alors :*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)|dx = 0. \tag{2.12}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat d'unicité pour le problème (2.1) *via* une dépendance lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ des solutions faibles entropiques en fonction de leur condition initiale.

Théorème 2.7. *Soient u et v deux solutions faibles entropiques du problème (2.1) à valeurs dans* $[k_2, k_1]$ *associées aux conditions initiales u_0 et v_0 dans* $L^\infty(\Omega)$*. Alors, sous* (2.9) *ou* (2.10)*, p.p.t. t dans* $]0,T[$*,*

$$\int_{-1}^{1} |u(t,x) - v(t,x)|dx \leq e^{M_g t} \int_{-1}^{1} |u_0(x) - v_0(x)|dx. \tag{2.13}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la méthode de dédoublement des variables développée par S.N. Kruzkov (voir [36]) et raisonner en deux étapes. Nous considérons dans un premier temps des fonctions test s'annulant dans un voisinage de $\{x_0 = 0\}$, ce qui revient à obtenir une inégalité de type Kruzkov entre deux solutions faibles entropiques sur chacun des ouverts $]0,T[\times]-1,0[$ et $]0,T[\times]0,1[$. Puis, en utilisant (2.11), nous étendrons cette inégalité au cas de fonctions test quelconques.

Lemme 2.8. *Soient u et v deux solutions faibles entropiques dans $L^\infty(Q)$ du problème (2.1), de conditions initiales respectives u_0 et v_0 dans $L^\infty(]-1,1[)$. Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$ s'annulant sur un voisinage de $\{x_0=0\}$,*

$$\begin{aligned}&\int_Q (|u(t,x)-v(t,x)|\partial_t\varphi(t,x)+b(x)\Phi(u(t,x),v(t,x))\partial_x\varphi(t,x))dxdt\\&+\int_Q sgn(u(t,x)-v(t,x))(g(u(t,x)-g(v(t,x))\varphi(t,x)dxdt\\&+\int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|\varphi(0,x)dx\ \geq 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Démonstration. Soient $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante de $\mathbb{R}$, telle que $\rho_j(x)=\rho_j(-x)$, φ un élément de $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$ satisfaisant les hypothèses du Lemme 2.8. Soient $j\in\mathbb{N}^*$ et $(t,x,s,y)\in Q\times Q$, nous posons :

$$\psi_j(t,x,s,y)=\varphi(\frac{t+s}{2},\frac{x+y}{2})\rho_j(t-s)\rho_j(x-y).$$

Afin d'alléger les écritures, nous notons $w=\frac{t+s}{2}$, $z=\frac{x+y}{2}$, $u=u(t,x)$, $v=v(t,x)$, $\tilde{v}=v(s,y)$, $q=(t,x)$, $\tilde{q}=(s,y)$. En choisissant $k=\tilde{v}$ dans (2.5) écrite pour u (respectivement $k=u$ dans (2.5) écrite pour $\tilde{v}$) avec la fonction test ψ_j et en intégrant sur Q par rapport à $\tilde{q}$ (respectivement par rapport à q), il vient :

$$\begin{aligned}&\int_{Q\times Q}|u-\tilde{v}|\partial_t\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\rho_j(x-y)dqd\tilde{q}\\-\ &\int_{Q\times Q}sgn(u-\tilde{v})(b'(x)f(\tilde{v})-b'(y)f(u))\psi_j dqd\tilde{q}\\+\ &2\int_{Q\times\Omega}|u_0(x)-v_0(y)|\varphi(\tfrac{t}{2},z)\rho_j(x-y)\rho_j(t)dqdy\\+\ &\int_{Q\times\Omega}(|u-u_0|+|\tilde{v}-\tilde{v}_0|)\varphi(\tfrac{t}{2},z)\rho_j(x-y)\rho_j(t)dqdy\\+\ &\int_{Q\times Q}\Phi(u,\tilde{v})b(x)(\partial_x\varphi)(w,z)\rho_j(t-s)\rho_j(x-y)dqd\tilde{q}\\+\ &\int_{Q\times Q}\Phi(u,\tilde{v})(b(y)-b(x))\partial_y(\psi_j(q,\tilde{q}))\ dqd\tilde{q}\\-\ &\int_{Q\times Q}sgn(u-\tilde{v})(g(t,x,u)-g(t,x,\tilde{v}))\psi_j(q,\tilde{q})dqd\tilde{q}\ \geq 0\ .\end{aligned}\tag{2.15}$$

Nous allons étudier plus particulièrement les deuxième et sixième lignes. En effet il n'y a pas de difficultés à passer à la limite en j dans les autres lignes, en utilisant soit la notion de point de Lebesgue, rappelée dans l'introduction (définition 0.6), pour une fonction intégrable sur Q, soit pour traiter la quatrième ligne, la propriété de trace (2.12).

Nous allons d'abord étudier la sixième ligne, que nous notons I_j. Par définition de la fonction ψ_j, nous avons :

$$I_j=I_{1,j}+I_{2,j},$$

où :

$$I_{1,j} = \int_{Q\times Q} \Phi(u,\tilde{v})(b(y)-b(x))\partial_y(\varphi(w,z))\rho_j(t-s)\rho_j(x-y)dqd\tilde{q},$$

et

$$I_{2,j} = \int_{Q\times Q} \Phi(u,\tilde{v})(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}.$$

En utilisant la notion de point de Lebesgue, nous pouvons affirmer que :

$$\lim_{j\to+\infty} I_{1,j} = 0.$$

De plus, nous pouvons écrire $I_{2,j} = I_a + I_b$, avec :

$$I_a = \int_{Q\times Q} \{\Phi(u,\tilde{v}) - \Phi(u,v)\}(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}$$

et,

$$I_b = \int_{Q\times Q} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}.$$

Nous considérons d'abord le terme I_b. Nous notons :

$$Q_- =]0,T[\times]-1,0[\text{ et } Q_+ =]0,T[\times]0,1[,$$

$$\begin{aligned}
I_{b,1} &= \int_{Q_-\times Q_-} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q},\\
I_{b,2} &= \int_{Q_-\times Q_+} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q},\\
I_{b,3} &= \int_{Q_+\times Q_-} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}\\
\text{et } I_{b,4} &= \int_{Q_+\times Q_+} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q},
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$I_b = I_{b,1} + I_{b,2} + I_{b,3} + I_{b,4}.$$

Ainsi, il suffit d'étudier $I_{b,1}$ et $I_{b,2}$, les arguments pour l'étude de $I_{b,3}$ et $I_{b,4}$ étant similaires.

Tout d'abord nous intégrons par parties $I_{b,1}$ par rapport à y, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
I_{b,1} = & -\int_{Q_-\times Q_-} \Phi(u,v)b'(y)\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\rho_j(x-y)dqd\tilde{q} \\
& -\frac{1}{2}\int_{Q_-\times Q_-} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\partial_y(\varphi(w,z))\rho_j(t-s)\rho_j(x-y)dqd\tilde{q} \\
& +\int_{Q_-}\int_0^T \Phi(u,v)(b_L-b(x))\varphi(w,\frac{x}{2})\rho_j(t-s)\rho_j(x)dqds.
\end{aligned}
$$

En faisant tendre j vers l'infini, les deux derniers termes tendent vers 0, par continuité de b sur $]-1,0[$ et par définition de b_L. De plus, puisque b' est mesurable et bornée sur $[-1,0[$ et φ est continue, le premier terme a pour limite :

$$
-\int_{Q_-} \Phi(u(t,x),v(t,x))b'(x)\varphi(t,x)dq.
$$

De la même manière nous montrons que :

$$
\lim_{j\to+\infty} I_{b,4} = -\int_{Q_+} \Phi(u(t,x),v(t,x))b'(x)\varphi(t,x)dq.
$$

Nous allons maintenant étudier le terme $I_{b,2}$. Par définition de ρ_j, $I_{b,2}$ est égal à

$$
\int_0^T\int_{-\frac{1}{j}}^0\int_0^T\int_0^{\frac{1}{j}} \Phi(u,v)(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}.
$$

Or, par hypothèse, φ s'annule sur un voisinage de $\{x_0=0\}$. Donc, à partir d'un certain j_0, le terme $I_{b,2}$ s'annule ainsi que le terme $I_{b,3}$. Finalement, nous avons :

$$
\lim_{j\to+\infty} I_b = -\int_Q \Phi(u,v)b'(x)\varphi(t,x)dq.
$$

Etudions maintenant le terme I_a. En utilisant la même décomposition que I_b, nous faisons apparaître quatre intégrales, dont deux s'annulent pour j assez grand (puisque φ s'annule sur un voisinage de $\{x_0=0\}$). Nous sommes donc amenés à considérer uniquement le terme $I_{a,1}$:

$$
\int_{Q_-\times Q_-} \{\Phi(u,\tilde{v})-\Phi(u,v)\}(b(y)-b(x))\varphi(w,z)\rho_j(t-s)\partial_y(\rho_j(x-y))dqd\tilde{q}.
$$

Nous utilisons le caractère lipschitzien de Φ et de b (sur $[-1,0[$) pour exhiber une constante C_1, indépendante de j, telle que :

$$
|I_{a,1}| \le C_1\int_{Q_-\times Q_-} |v(s,y)-v(t,x)||x-y|\rho_j(t-s)|\partial_y(\rho_j(x-y))|dqd\tilde{q}.
$$

Nous en déduisons, par définition de la suite régularisante ρ_j, qu'il existe une constante C_2, telle que :

$$|I_{a,1}| \leq C_2 j^2 \int_{\{|t-s|\leq \frac{1}{j}, |x-y|\leq \frac{1}{j}\}} |v(t,x) - v(s,y)| dq d\tilde{q},$$

Par définition d'un point de Lebesgue de v, nous avons :

$$\lim_{j\to\infty} j^2 \int_{\{|t-s|\leq \frac{1}{j}, |x-y|\leq \frac{1}{j}\}} |v(t,x) - v(s,y)| dq = 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous pouvons affirmer que $\lim_{j\to+\infty} I_{a,1} = 0$, et ainsi :

$$\lim_{j\to+\infty} I_a = 0.$$

En résumé, nous avons :

$$\lim_{j\to+\infty} I_j = \lim_{j\to+\infty} (I_{1,j} + I_a + I_b) = -\int_Q \Phi(u(t,x), v(t,x)) b'(x) \varphi(t,x) dq.$$

Nous étudions maintenant la limite en j de la seconde ligne de (2.15), que nous notons L_j :

$$L_j = -\int_{Q\times Q} sgn(u - \tilde{v})(b'(x) f(\tilde{v}) - b'(y) f(u)) \psi_j dq d\tilde{q}.$$

Nous écrivons ce terme sous la forme :

$$L_j = L_{1,j} - L_{2,j}$$

avec :

$$L_{1,j} = \int_{Q\times Q} b'(x) \Phi(u, \tilde{v}) \psi_j dq d\tilde{q}$$

et

$$L_{2,j} = \int_{Q\times Q} f(u) sgn(u - \tilde{v})(b'(x) - b'(y)) \psi_j dq d\tilde{q}.$$

En premier lieu, il est clair que :

$$\lim_{j\to+\infty} L_{1,j} = \int_Q b'(x) \Phi(u(t,x), v(t,x)) \varphi(t,x) dq.$$

En second lieu, nous décomposons $L_{2,j}$, comme nous l'avons fait pour l'étude de I_a et I_b, en quatre intégrales dont deux s'annulent pour j assez grand (φ s'annulant sur un voisinage de $\{x_0 = 0\}$). Nous considérons donc uniquement les termes :

$$L_{2,a} = \int_{Q_-\times Q_-} f(u(t,x)) sgn(u(t,x) - v(s,y))(b'(x) - b'(y)) \psi_j dq d\tilde{q}$$

et,

$$L_{2,b} = \int_{Q_+ \times Q_+} f(u(t,x))sgn(u(t,x) - v(s,y))(b'(x) - b'(y))\psi_j dq d\tilde{q}.$$

Nous pouvons observer que :

$$|L_{2,a}| \leq C\|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{\Omega^- \times \Omega^-} |b'(x) - b'(y)|\rho_j(x-y)dxdy,$$

où $\Omega^- =]-1,0[$.

Ainsi, puisque b' est un élément de $L^\infty([-1,0[)$, $\lim\limits_{j\to+\infty} L_{2,a} = 0$ et de même $\lim\limits_{j\to+\infty} L_{2,b} = 0$

Finalement

$$\lim_{j\to+\infty} L_j = \int_Q b'(x)\Phi(u(t,x), v(t,x))\varphi(t,x)dq,$$

et (2.14) s'ensuit, ce qui achève la preuve du Lemme 2.8. □

Nous affirmons maintenant que l'inégalité de Kruzkov (2.14) est vérifiée pour une fonction φ positive quelconque de $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$.

Lemme 2.9. *Sous* (2.10)*, l'inégalité de Kruzkov* (2.14) *reste vérifiée pour toute fonction* φ *de* $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$*,* $\varphi \geq 0$*.*

Démonstration. Par un argument de densité, nous pouvons choisir comme fonction test dans (2.14), $\varphi(1-\omega_\varepsilon)$, où ω_ε est définie à la preuve du Lemme 2.2. Nous faisons tendre ε vers 0^+ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_Q (|u-v|\partial_t\varphi + b(x)\Phi(u,v)\partial_x\varphi)dxdt + \int_\Omega |u_0 - v_0|\varphi(0,x)dx \\ &-\int_Q sgn(u-v)((g(u)-g(v))\varphi dxdt \ \geq J,\end{aligned}$$

avec

$$J = \int_0^T (b_L\Phi(\gamma u^-, \gamma v^-) - b_R\Phi(\gamma u^+, \gamma v^+))\varphi(t,0)dt.$$

Sous (2.9), il vient immédiatement que J est positif.

Supposons (2.10) vraie. Nous allons montrer, grâce à l'inégalité (2.8), que le terme J est positif. En effet, étudions, pour presque tout t de $]0,T[$, le signe de :

$$I = b_L\Phi(\gamma u^-, \gamma v^-) - b_R\Phi(\gamma u^+, \gamma v^+)\ .$$

Si $sgn(\gamma u^+ - \gamma v^+) = sgn(\gamma u^- - \gamma v^-)$, en utilisant la condition de Rankine-Hugoniot (2.11), qui est satisfaite puisque nous supposons (2.10), nous avons $I = 0$.

Nous nous intéressons donc au cas où $\gamma u^+ - \gamma v^+$ et $\gamma u^- - \gamma v^-$ sont de signes opposés. Lorsque $sgn(\gamma u^+ - \gamma v^+) = -sgn(\gamma u^- - \gamma v^-) \neq 0$, en utilisant (2.11), nous obtenons :

$$I = 2b_L\Phi(\gamma u^-, \gamma v^-) = -2b_R\Phi(\gamma u^+, \gamma v^+).$$

Nous supposons, à partir de maintenant, pour fixer les idées, que $b_L - b_R > 0$, $\gamma v^+ < \gamma u^+$ and $\gamma u^- < \gamma v^-$, les autres cas se traitant de manière similaire. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$I = -2b_L(f(\gamma u^-) - f(\gamma v^-)) = -2b_R(f(\gamma u^+) - f(\gamma v^+)).$$

Nous allons raisonner pour presque tout t de $]0, T[$, si bien que, par commodité d'écriture, la variable t n'apparait pas dans les calculs qui suivent. Nous devons à présent distinguer plusieurs cas.

1. $\gamma u^- < \gamma v^- < \gamma v^+ < \gamma u^+$.
   Alors l'inégalité (2.8) peut être écrite, pour tout k de $[\gamma u^-, \gamma u^+]$,
   $$-b_L(f(\gamma u^-) - f(k)) - b_R(f(\gamma u^+) - f(k)) + (b_L - b_R)|f(k)| \geq 0. \qquad (2.16)$$
   . si $f(\gamma v^-) \geq 0$, en prenant $k = \gamma v^-$ dans (2.16), nous obtenons :
   $$-2b_L(f(\gamma u^-) - f(\gamma v^-)) \geq 0, \text{ donc } I \geq 0.$$
   . si $f(\gamma v^+) \leq 0$, en choisissant $k = \gamma v^+$ dans (2.16), nous avons :
   $$-2b_R(f(\gamma u^+) - f(\gamma v^+)) \geq 0, \text{ donc } I \geq 0.$$
   . si $f(\gamma v^-) < 0$ et $f(\gamma v^+) > 0$, nous déduisons de (2.11), comme $b_L - b_R > 0$, que $b_R < 0$ et $b_L > 0$.
   Supposons que $I < 0$. Alors $I = -2b_L(f(\gamma u^-) - f(\gamma v^-)) < 0$. Donc $f(\gamma u^-) > f(\gamma v^-)$. De plus, nous avons $I = -2b_R(f(\gamma u^+) - f(\gamma v^+))$, ce qui implique que $f(\gamma u^+) < f(\gamma v^+)$. Ceci entraîne que f change au moins deux fois de monotonie, ce qui contredit l'hypothèse (2.4). Ainsi $I \geq 0$.
2. $\gamma u^- < \gamma v^+ < \gamma v^- < \gamma u^+$.
   Comme dans le cas précédent, si $f(\gamma v^-) \geq 0$ ou $f(\gamma v^+) \leq 0$, nous pouvons conclure que $I \geq 0$.
   Si $f(\gamma v^-) < 0$ et $f(\gamma v^+) > 0$, il existe α dans $]\gamma v^+, \gamma v^-[$ tel que $f(\alpha) = 0$. En choisissant $k = \alpha$ dans (2.8) écrite respectivement pour u et v, nous obtenons que : $-2b_Rf(\gamma u^+) \geq 0$ et $2b_Rf(\gamma v^+) \geq 0$. Ainsi $I \geq 0$.
3. $\gamma u^- < \gamma v^+ < \gamma u^+ < \gamma v^-$.
   . si $f(\gamma v^+) \geq 0$ ou $f(\gamma u^+) \leq 0$, en utilisant (2.8), $I \geq 0$.
   . si $f(\gamma v^+) < 0$ et $f(\gamma u^+) > 0$, il existe β dans $]\gamma v^+, \gamma u^+[$, telle que $f(\beta) = 0$. En prenant $k = \beta$ dans (2.8), écrite pour u et v, nous montrons que $I \geq 0$.

Tous les autres cas peuvent ensuite se ramener à une de ces situations. □

Maintenant, afin de prouver (2.13) en utilisant le Lemme 2.9, nous pouvons choisir dans (2.14) la fonction-test φ telle que, pour tout (t, x) dans $[0, T[\times\Omega$,

$$\varphi(t, x) = \theta(t)\alpha_\varepsilon(x), \ \varepsilon > 0$$

où $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[)$ et α_ε est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tel que $\alpha_\varepsilon = 1$ sur $]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[$ et $|\alpha'_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Nous obtenons :

$$\int_Q \{|u-v|\theta'(t)\alpha_\varepsilon(x) + b(x)\Phi(u,v)\theta(t)\alpha'_\varepsilon(x)\}dxdt + \int_\Omega |u_0 - v_0|\theta(0)\alpha_\varepsilon(x)dx$$
$$-\int_Q sgn(u-v)(g(u)-g(v))\theta(t)\alpha_\varepsilon(x)dxdt \geq 0.$$

Nous pouvons alors passer à la limite en ε dans l'inégalité ci-dessus, sans difficultés. Nous faisons juste remarquer que, d'après les propriétés de la suite $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon$ et, par définition de $v^\tau_{\pm 1}$ et $u^\tau_{\pm 1}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_Q b(x)\Phi(u,v)\theta(t)\alpha'_\varepsilon(x)dq = \int_0^T \{b(-1)\Phi(u^\tau_{-1}, v^\tau_{-1}) - b(1)\Phi(u^\tau_1, v^\tau_1)\}\theta(t)dt.$$

Ceci nous donne alors :

$$\int_Q |u-v|\theta'(t)dxdt + \int_\Omega |u_0-v_0|\theta(0)dx - \int_Q sgn(u-v)(g(u)-g(v))\theta(t)dxdt$$
$$\geq \int_0^T b(1)\Phi(u^\tau_1, v^\tau_1)\theta(t)dt - \int_0^T b(-1)\Phi(u^\tau_{-1}, v^\tau_{-1})\theta(t)dt.$$

Nous allons maintenant montrer que :

$$\int_0^T b(1)\Phi(u^\tau_1, v^\tau_1)\theta(t)dt - \int_0^T b(-1)\Phi(u^\tau_{-1}, v^\tau_{-1})\theta(t)dt \ \geq \ 0 \ .$$

En revenant à la définition 2.1, nous savons que *p.p.t.* t dans $]0,T[$, pour tout réel k,

$$\begin{aligned} b(1)(sgn(u^\tau_1(t)-k) + sgn(k))(f(u^\tau_1(t)) - f(k)) &\geq 0, \\ b(1)(sgn(v^\tau_1(t)-k) + sgn(k))(f(v^\tau_1(t)) - f(k)) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, *p.p.* dans $]0,T[$,

- si $u^\tau_1(t)$ et $v^\tau_1(t)$ sont de même signe, nous choisissons $k = v^\tau_1$ dans la première inégalité (ou $k = u^\tau_1(t)$ dans la seconde) et nous obtenons :

$$b(1)\Phi(u^\tau_1(t), v^\tau_1(t)) \geq 0,$$

- si $u^\tau_1(t)$ et $v^\tau_1(t)$ sont de signes opposés, nous prenons $k = 0$ dans les deux inégalités pour avoir :

$$b(1)\Phi(u^\tau_1(t), v^\tau_1(t)) \geq 0.$$

Ainsi, *p.p.t.* t dans $]0,T[$,

$$b(1)\Phi(u^\tau_1(t), v^\tau_1(t))\theta(t) \geq 0.$$

Nous montrons de la même manière, pour *p.p.t.* t dans $]0,T[$,

$$b(-1)\Phi(u^{\tau}_{-1}, v^{\tau}_{-1})\theta(t) \leq 0.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_Q |u-v|\theta'(t)dxdt + \int_\Omega |u_0 - v_0|\theta(0)dx - \int_Q sgn(u-v)(g(u)-g(v))\theta(t)dxdt \geq 0.$$

Pour presque tout s de $]0,T[$, nous considérons alors une suite de fonctions test qui approche la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,s]$, ce qui nous amène à :

$$\int_\Omega |u(s,x)-v(s,x)|dx \leq \int_\Omega |u_0 - v_0|dx + M_g \int_0^s \int_\Omega |u(t,x)-v(t,x)|dtdx.$$

Nous pouvons alors conclure par utilisation du Lemme de Gronwall (lemme 0.7 dans l'introduction) ce qui achève la preuve du théorème 2.7. □

2.5 Le résultat d'existence

Nous allons maintenant démontrer l'existence d'une solution faible entropique du problème (2.1). La preuve de ce résultat est basée sur une régularisation adaptée b_ε, $\varepsilon > 0$, de la fonction b et utilise un argument de compacité dans $L^1(Q)$ (rappelé au chapitre 1) pour la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, où u_ε est la solution faible entropique du problème modifié correspondant.

Sous (2.9), nous obtenons la solution de (2.1) en considérant la fonction u telle que $u_{|Q_L}$ est la solution faible entropique du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(b_L(x)f(u)) + g(t,x,u) = & 0 & \text{dans } Q_L, \\ u(0,x) = & u_0(x) & \text{sur } \Omega_L, \\ u = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma_L, \end{array} \right.$$

et $u_{|Q_R}$ la solution faible entropique du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(b_R(x)f(u)) + g(t,x,u) = & 0 & \text{dans } Q_R, \\ u(0,x) = & u_0(x) & \text{sur } \Omega_R, \\ u = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma_R. \end{array} \right.$$

La fonction u ainsi obtenue vérifie bien l'inégalité entropique (2.5).

Nous considérerons maintenant des fonctions flux f telles que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f(M_2(t)) \leq 0, \\ \forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f(M_1(t)) \geq 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous allons également traiter le cas où les fonctions f et g vérifient :

$$\begin{cases} f(m) = f(M) = 0 \\ p.p.t.\ (t,x) \in Q, g(t,x,M) \geq 0, \\ p.p.t.\ (t,x) \in Q, g(t,x,m) \leq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Remarque 2.10. (2.17) *ou* (2.18) *implique* (2.10).

Remarque 2.11. *Parmi les fonctions vérifiant les conditions* (2.2), (2.4), (2.17) *ou* (2.18)*, nous pouvons trouver des fonctions f strictement convexes (ou strictement concaves) sur l'intervalle $[m,M]$, des fonctions f strictement monotones et s'annulant en un point.*

Remarque 2.12. *Lorsque l'équation* (2.1) *est homogène, i.e. $g \equiv 0$,* (2.18) *se réduit à :*

$$f(m) = f(M) = 0,$$

condition utilisée dans la plupart des travaux traitant d'une loi de conservation homogène à flux discontinu.

Nous établissons alors le théorème suivant :

Théorème 2.13. *Sous la condition* (2.17) *ou* (2.18)*, le problème* (2.1) *admet au moins une solution faible entropique u.*

Nous allons d'abord montrer l'existence d'une solution faible entropique lorsque la condition initiale est une fonction régulière. Puis, par un critère de Cauchy dans $L^1(Q)$, nous étudierons le cas où u_0 est dans $L^\infty(\Omega)$.

2.5.1 Première étape : $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Nous allons appliquer une technique utilisée dans [48] (aussi appliquée dans [7]) et que nous avons présenté au chapitre 1 qui consiste à considérer une approximation de la fonction b. Nous introduisons une suite de fonctions régulières $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que pour tout ε positif, $b_\varepsilon = b$ en dehors de $]-\varepsilon,\varepsilon[$. Nous supposons de plus b_ε monotone sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ (le sens de variation dépendant du signe de $b_R - b_L$). Ceci implique :

$$\forall\ x \in \Omega, x \neq 0, b_\varepsilon(x)\ \rightarrow\ b(x)\ \text{ et } |b_\varepsilon|_{BV(\Omega)} \leq |b|_{BV(\Omega)}.$$

Nous considérons alors le problème “régularisé” du premier ordre suivant :

Trouver une fonction u_ε mesurable et bornée :

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(b_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon)) + g(t,x,u_\varepsilon) = & 0 & \text{sur } Q, \\ u_\varepsilon(0,x) = & u_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ u = & 0 & \text{sur (une partie de) }]0,T[\times\partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

D'après les résultats rappelés au chapitre 1, ce problème admet une unique solution faible entropique u_ε dans $L^\infty(Q) \cap BV(Q) \cap \mathcal{C}([0,T], L^1(\Omega))$, au sens de la définition 1.1. Donc u_ε est bornée sur Q, d'après la proposition 1.2, mais cette borne dépend de ε. L'objet du lemme qui suit est donc de montrer que sous (2.17) ou sous (2.18) la fonction u_ε est bornée dans Q indépendamment de ε. Nous pourrons alors adapter les résultats de E. Yu. Panov, énoncés au théorème 1.20, pour déduire la convergence forte dans $L^1(Q)$ de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Lemme 2.14.
(i) *Sous* (2.17),

$$M_2(t) \le u_\varepsilon(t,x) \le M_1(t), \ \textit{p.p. sur } \Omega.$$

(ii) *Sous* (2.18), *pour tout t de* $]0,T[$,

$$m \le u_\varepsilon(t,x) \le M, \ \textit{p.p. sur } \Omega.$$

(iii) *Sous* (2.17) *ou sous* (2.18), *la suite* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est fortement précompacte dans* $L^1(Q)$.

Démonstration. **(i)** Soit $\mu > 0$. Nous introduisons le problème de viscosité associé à (2.19) :

Trouver $u_{\varepsilon,\mu}$ dans $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega))$, tel que $\partial_t u_{\varepsilon,\mu} \in L^2(Q)$, et :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u_{\varepsilon,\mu} + \partial_x(b_\varepsilon(x) f(u_{\varepsilon,\mu})) + g(t,x,u_\varepsilon) & = & \mu\partial_{xx}u_{\varepsilon,\mu} & \textit{p.p.} \text{ dans } Q, \\ u_{\varepsilon,\mu} & = & u_0 & \text{sur } \Omega, \\ u_{\varepsilon,\mu}(t,1) = u_{\varepsilon,\mu}(t,-1) & = & 0 & \text{pour tout } t \in [0,T]. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Comme nous l'avons rappelé au chapitre 1 dans la proposition 1.2, pour tout $\mu > 0$, le problème (2.20) admet une unique solution $u_{\varepsilon,\mu}$. La suite $(u_{\varepsilon,\mu})_{\mu>0}$ converge vers u_ε dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$ lorsque μ tend vers 0^+.

Nous multiplions (2.20) par $(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+$, et nous intégrons sur $Q_s =]0,s[\times\Omega$, $s \in]0,T[$. Le terme de viscosité est négatif puisque :

$$\mu \int_{Q_s} \partial_{xx}u_{\varepsilon,\mu}(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt = -\mu \int_{Q_s} [\partial_x(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+]^2,$$

Puisque $u_{\varepsilon,\mu}(0,.) = u_0 \le M_1(0)$, nous avons :

$$\int_{Q_s} \partial_t u_{\varepsilon,\mu}(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dtdx = \frac{1}{2}\|(u_{\varepsilon,\mu}(s,.) - M_1(s))^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{Q_s} M_1'(t)(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dtdx.$$

De plus,

$$\int_{Q_s} \partial_x(b_\varepsilon(x)f(u_{\varepsilon,\mu}))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx = \int_{Q_s} b'_\varepsilon(x)f(M_1(t))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx$$
$$+\int_{Q_s}\partial_x(b_\varepsilon(x)(f(u_{\varepsilon,\mu})-f(M_1(t)))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx$$

Nous intégrons alors par parties le dernier terme à droite de l'égalité, puis nous utilisons l'inégalité de Young. Nous obtenons alors la majoration suivante :

$$\left|\int_{Q_s}\partial_x(b_\varepsilon(x)(f(u_{\varepsilon,\mu})-f(M_1(t)))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx\right| \le \mu\int_{Q_s}[\partial_x(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+]^2dtdx$$
$$+\frac{1}{4\mu}\int_{Q_s}(b_\varepsilon M_f)^2((u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+)^2dtdx.$$

Nous écrivons le terme source sous la forme :

$$\int_Q (g(t,x,u)-g(t,x,M_1(t))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx + \int_Q g(t,x,M_1(t))(u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx.$$

En rassemblant tous les termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|(u_{\varepsilon,\mu}(s,.)-M_1(s))^+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & +\int_{Q_s}[M_1'(t)+b'_\varepsilon f(M_1(t))+g(t,x,M_1(t))](u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+dtdx \\ \le \quad & (M_g+\frac{(\|b\|_\infty M_f)^2}{4\mu})\int_{Q_s}((u_{\varepsilon,\mu}-M_1(t))^+)^2dxdt. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que le terme :

$$\Psi(t,x)=M_1'(t)+b'_\varepsilon(x)f(M_1(t))+g(t,x,M_1(t))$$

est positif sur Q. Ensuite, par utilisation du lemme de Gronwall, nous pourrons conclure.

Pour tout $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$,

si $b_L\le b_R$, $b'_\varepsilon(x)\ge 0$, et d'après (2.17), $f(M_1(t))\ge 0$. Donc $b'_\varepsilon(x)f(M_1(t))\ge 0$.

Si $b_R\le b_L$, $b'_\varepsilon(x)\le 0$, et d'après (2.17), $f(M_1(t))\le 0$. Donc $b'_\varepsilon(x)f(M_1(t))\ge 0$

De plus,

$$\begin{aligned} M_1'(t)+g(t,x,M_1(t)) \quad = \quad & M_bM_fM_1(t)+M_b|f(0)|+M_gM_1(t) \\ & +\max_{[0,T]\times\Omega}|g(t,x,0)|+g(t,x,M_1(t)), \end{aligned}$$

où $M_bM_fM_1(t)+M_b|f(0)|\ge 0$, et $g(t,x,M_1(t))\ge -M_gM_1(t)+g(t,x,0)$.

Donc $M_1'(t) + g(t,x,M_1(t)) \geq 0$, et ainsi $\Psi(t,x) \geq 0$.

Par ailleurs, pour x dans $]-1,\varepsilon[\cup[\varepsilon,1[$, $b_\varepsilon(x) = b(x)$. Or,

$$M_1'(t) = (M_f M_b + M_g)M_1(t) + M_b|f(0)| + \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)|,$$

$$\text{et } b'(x)f(M_1(t)) + g(t,x,M_1(t)) \geq -(M_b M_f + M_g)M_1(t) + b'(x)f(0) + g(t,x,0).$$

Donc

$$\Psi(t,x) \geq b'f(0) + M_k|f(0)| + g(t,x,0) + \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)| \geq 0.$$

Pour prouver que $u_\varepsilon(t,x) \geq M_2(t)$, nous multiplions (2.20) par $-(u_{\varepsilon,\mu} - M_2(t))^-$ et nous utilisons les même techniques que précédemment, et plus particulièrement la première ligne de (2.17).

(ii) La preuve se base sur celle de **(i)** et repose sur la condition (2.18). En fait, les arguments de la preuve du premier point restent valables en remplaçant $M_1(t)$ par M. Dans ce cas, $\Psi(t,x) = M' + b_\varepsilon' f(M) + g(t,x,M) = b_\varepsilon' f(M) + g(t,x,M)$. D'après (2.18), $b_\varepsilon' f(M) = 0$ et $g(.,.,M) \geq 0$ p.p. dans Q. Donc $\Psi(t,x)$ est positif et nous pouvons alors conclure. Pour prouver que $u_{\varepsilon,\mu} \geq m$, nous remplaçons $M_2(t)$ par m et nous utilisons (2.18), en particulier les hypothèses $f(m) = 0$ et $g(.,.,m) \leq 0$ p.p. sur Q.

(iii) C'est une application directe du théorème 1.20 énoncé dans le chapitre précédent. En effet, sous (2.17) ou (2.18), la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$. Et donc, d'après le théorème 1.20, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge fortement dans $L^1(Q)$. □

Remarque 2.15. *Une autre méthode, développée notamment dans [48], peut être utilisée afin de montrer* **(iii)**. *En effet, sous* (2.17) *ou* (2.18), *d'après le lemme 2.14, la suite* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est bornée dans* $L^\infty(Q)$. *En conséquence, les deux estimations suivantes sont vérifiées par la suite* $(u_{\varepsilon,\mu})_{\varepsilon,\mu>0}$ *:*

$$\mu \int_Q |(\partial_x u_{\varepsilon,\mu})^2| dxdt \leq C_1$$

et

$$\int_Q |\partial_t u_{\varepsilon,\mu}(t,x)| dxdt \leq C_2(|b_\varepsilon|_{BV(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}|u_0|_{BV(\Omega)} + \mu\|u_0''\|_{L^1(\Omega)}),$$

où C_1 *et* C_2 *sont deux constantes qui ne dépendent ni de* μ *ni de* ε.

Ceci entraîne alors l'estimation en semi-norme BV *du terme de convection :*

$$|b_\varepsilon(\Phi(u_\varepsilon,k))|_{BV(Q)} \ \leq \ C(|u_0|_{BV(\Omega)} + |b|_{BV(\Omega)}),$$

où C *est un réel positif.*

Ainsi, la condition (2.3) *et la compacité de l'injection de* $BV(Q)$ *dans* $L^1(Q)$ *assure l'existence d'une sous-suite de* $(\Phi(u_\varepsilon, k))_\varepsilon$ *convergeant p.p. dans* Q *vers une fonction bornée* χ *de* $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$. *Par ailleurs, les conditions* (2.2) *et* (2.4) *sur la fonction* f *assurent qu'il existe* k_0 *dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\Phi(., k_0)$ *est strictement monotone (donc inversible) sur l'intervalle* $[M_2(t), M_1(t)]$. *Ceci entraîne la convergence d'une sous-suite de* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *dans* $L^1(Q)$.

Nous notons u la limite dans $L^1(Q)$ d'une sous-suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. Nous allons maintenant établir que la fonction u est une solution faible entropique du problème (2.1). Montrons d'abord que u vérifie (2.5). A cet effet, nous introduisons la paire d'entropie régulière, pour tout k de $\mathbb{R}$ et pour tout réel τ :

$$I_\eta(\tau) = \int_k^\tau sgn_\eta(r-k)dr \quad \text{et} \quad F_\eta(\tau) = \int_k^\tau sgn_\eta(r-k) f'(r)dr.$$

D'après les rappels effectués au chapitre 1, en particulier l'inégalité (1.5) de la définition 1.5, nous pouvons affirmer qu'à ε fixé, u_ε vérifie l'inégalité d'entropie régularisée, pour toute fonction positive φ de $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$,

$$\begin{aligned} &\int_Q I_\eta(u_\varepsilon)\partial_t\varphi dxdt + \int_Q b_\varepsilon(x)F_\eta(u_\varepsilon)\partial_x\varphi dxdt - \int_Q I'_\eta(u_\varepsilon)g(t,x,u_\varepsilon)\varphi(t,x)dxdt \\ &+ \int_Q b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0)\varphi(0,x)dx \;\geq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nous allons maintenant passer à la limite dans (2.21), d'abord en ε puis ensuite en η. Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous pouvons faire tendre ε vers 0 dans tous les termes sans difficultés, excepté dans la première intégrale de la deuxième ligne. Nous écrivons alors ce terme sous la forme :

$$\begin{aligned} &\int_Q b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt = \int_0^T\int_{-1}^{-\varepsilon} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt \\ &+ \int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_0^T\int_{\varepsilon}^{1} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Or, par définition de b_ε,

$$\int_0^T\int_{-1}^{-\varepsilon} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi ddxdt = \int_0^T\int_{-1}^{-\varepsilon} b'(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt, \tag{2.23}$$

et

$$\int_0^T\int_{\varepsilon}^{1} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)b(u_\varepsilon))\varphi dq = \int_0^T\int_{\varepsilon}^{1} b'(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dq. \tag{2.24}$$

De plus, par définition de F_η de I_η,

$$\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt = -\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon f(k) sgn_\eta(u_\varepsilon - k)\varphi dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon \varphi(\int_k^{u_\varepsilon} sgn_\eta(\tau - k)f'(\tau)d\tau - (f(u_\varepsilon) - f(k))sgn_\eta(u_\varepsilon - k))dq.$$

Nous cherchons alors à majorer le dernier terme à droite de l'égalité. En premier lieu, nous avons :

$$\left|\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon f(k) sgn_\eta(u_\varepsilon - k)\varphi dxdt\right| \leq |f(k)| \int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |b'_\varepsilon|\varphi dq.$$

En second lieu, nous estimons le terme $|D(u_\varepsilon)|$ où :

$$D(u_\varepsilon) = \int_k^{u_\varepsilon} sgn_\eta(\tau - k)f'(\tau)d\tau - (f(u_\varepsilon) - f(k))sgn_\eta(u_\varepsilon - k).$$

Plus précisément nous montrons que :

$$|D(u_\varepsilon)| \leq C_f\eta, \tag{2.25}$$

où $C_f = 2M_f$.

En effet, pour η et k fixés, *p.p.* sur Q,

- si $u_\varepsilon \geq k + \eta$,

$$D(u_\varepsilon) = \int_k^{\eta+k} \frac{\tau - k}{\eta} f'(\tau)d\tau + \int_{k+\eta}^{u_\varepsilon} f'(\tau)d\tau - (f(u_\varepsilon) - f(k))$$

et

$$|D(u_\varepsilon)| \leq \eta M_f + |f(k+\eta) - f(k)|,$$

car $0 \leq \frac{\tau - k}{\eta} \leq 1$. Enfin on utilise le caractère lipschitzien de f pour conclure.

- si $k - \eta \leq u_\varepsilon \leq k + \eta$,

$$D(u_\varepsilon) = \int_k^{u_\varepsilon} \frac{\tau - k}{\eta} f'(\tau)d\tau - \frac{u_\varepsilon - k}{\eta}(f(u_\varepsilon) - f(k))$$

et

$$|D(u_\varepsilon)| \leq M_f|u_\varepsilon - k| + M_f\frac{|u_\varepsilon - k|^2}{\eta} \leq 2M_f\eta.$$

- si $u_\varepsilon \leq k - \eta$,

$$D(u_\varepsilon) = \int_{u_\varepsilon}^{k-\eta} f'(\tau)d\tau + \int_{k-\eta}^{k} \frac{\tau-k}{\eta} f'(\tau)d\tau + f(u_\varepsilon) - f(k),$$

et $|D(u_\varepsilon)| \leq C_f\eta$, de la même manière qu'au premier cas.

Par conséquent, nous pouvons en déduire que le terme

$$\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon\varphi(\int_k^{u_\varepsilon} sgn_\eta(\tau-k)f'(\tau)d\tau - (f(u_\varepsilon)-f(k))sgn_\eta(u_\varepsilon-k))dxdt$$

est borné par :

$$C_f\eta\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|b'_\varepsilon|\varphi dxdt,$$

et

$$\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt \leq (C_f\eta + |f(k)|)\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|b'_\varepsilon|\varphi dxdt. \tag{2.26}$$

Comme b_ε est monotone sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$, pour ε assez petit, $|b'_\varepsilon| = sgn(b_R - b_L)b'_\varepsilon$. Alors,

$$\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|b'_\varepsilon|\varphi dxdt = sgn(b_R - b_L)\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b'_\varepsilon\varphi dxdt$$

Nous intégrons alors par parties, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|b'_\varepsilon|\varphi dxdt &= -sgn(b_R-b_L)\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b_\varepsilon\varphi_x dxdt \\ &\quad + sgn(b_R-b_L)\int_0^T (b(\varepsilon)\varphi(t,\varepsilon) - b(-\varepsilon)\varphi(t,-\varepsilon))dt\ .\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ainsi, d'après (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.26) et (2.27), pour tout η et ε positifs, nous avons :

$$\begin{aligned}&-sgn(b_R-b_L)(C_f\eta + |f(k)|)\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b_\varepsilon\partial_x\varphi dxdt + \int_Q b_\varepsilon(x)F_\eta(u_\varepsilon)\varphi_x dxdt \\ &+ \int_0^T\int_{-1}^{-\varepsilon} b'(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0)\varphi(0,x)dx \\ &+ \int_0^T\int_{\varepsilon}^{1} b'(x)(F_\eta(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_Q I_\eta(u_\varepsilon)\partial_t\varphi dxdt - \int_Q I'_\eta(u_\varepsilon)g(t,x,u_\varepsilon)\varphi dxdt \\ &+ sgn(b_R-b_L)(C_f\eta + |f(k)|)\int_0^T (b(\varepsilon)\varphi(t,\varepsilon) - b(-\varepsilon)\varphi(t,-\varepsilon))dt\ \geq 0.\end{aligned}$$

Nous passons maintenant à la limite en ε. Puisque $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u dans $L^1(Q)$ et puisque I_η et F_η sont lipschitziennes, il est clair que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_Q (I_\eta(u_\varepsilon)\partial_t\varphi + b_\varepsilon(x)F_\eta(u_\varepsilon)\partial_x\varphi)dxdt = \int_Q (I_\eta(u)\partial_t\varphi + b(x)F_\eta(u)\partial_x\varphi)dxdt.$$

Par définition de b_L et b_R, et par continuité de φ,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^T (b(\varepsilon)\varphi(t,\varepsilon) - b(-\varepsilon)\varphi(t,-\varepsilon))dt = (b_R - b_L)\int_0^T \varphi(t,0)dt.$$

De plus, $b_\varepsilon\partial_x\varphi$ étant bornée, indépendamment de ε,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^T\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b_\varepsilon\partial_x\varphi dxdt = 0.$$

Ainsi, pour tout η positif, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\int_Q (I_\eta(u)\partial_t\varphi + b(x)F_\eta(u)\partial_x\varphi)dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0)\varphi(0,x)dx\\ &+\int_Q b'(x)(F_\eta(u) - I'_\eta(u)f(u))\varphi dxdt - \int_Q I'_\eta(u)g(t,x,u)\varphi dxdt\\ &+(|f(k)| + C_f\eta)|b_R - b_L|\int_0^T \varphi(t,0)dt \geq 0.\end{aligned} \tag{2.28}$$

En prenant la limite en η, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous pouvons conclure que u satisfait (2.5).

Il nous reste à montrer que u vérifie (2.6)-(2.7). Pour cela, pour tout réel δ positif, nous allons considérer la "paire d'entropies de bord" (H_δ, Q_δ) introduite dans le chapitre 1. Nous rappelons que pour tout réels k et τ,

$$H_\delta(\tau,k) = \left((\mathrm{dist}(\tau, I[0,k]))^2 + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} - \delta$$

et

$$Q_\delta(\tau,k) = \int_k^\tau \partial_1 H_\delta(\lambda,k)f'(\lambda)d\lambda$$

Nous considérons alors dans (2.20), pour tout élément positif φ de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\Omega)$, la fonction test $\partial_1 H_\delta(u_{\varepsilon,\mu},k)\varphi$. Nous passons à la limite en μ, et nous obtenons, pour tous δ et ε positifs, l'inégalité :

$$\begin{aligned}&\int_Q H_\delta(u_\varepsilon,k)\partial_t\varphi dxdt + \int_Q b_\varepsilon Q_\delta(u_\varepsilon,k)\partial_x\varphi dxdt - \int_Q \partial_1 H_\delta(u_\varepsilon,k)g(t,x,u_\varepsilon)\varphi dxdt\\ &+\int_Q b'_\varepsilon(x)(Q_\delta(u_\varepsilon,k) - \partial_1 H_\delta(u_\varepsilon,k)f(u_\varepsilon))\varphi dxdt \geq 0.\end{aligned}$$

Si nous considérons uniquement des fonctions φ nulles dans un voisinage de $\{x_0 = 0\}$ contenant $[-\varepsilon,\varepsilon]$ (ce qui ne sera pas restrictif dans la suite), nous pouvons passer à la limite en ε sans difficultés pour avoir :

$$\begin{aligned}&\int_Q H_\delta(u,k)\partial_t\varphi dxdt + \int_Q bQ_\delta(u,k)\partial_x\varphi dxdt - \int_Q \partial_1 H_\delta(u,k)g(t,x,u)\varphi dxdt\\ &+\int_Q b'(x)(Q_\delta(u,k) - \partial_1 H_\delta(u,k)f(u))\varphi dxdt \geq 0.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Pour (t,x) dans $]0,T[\times\overline{\Omega}$, nous choisissons dans (2.29) une suite de fonctions test, définie par $\varphi_n(t,x)=\beta(t)\alpha_n(x)$ où β est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $\beta\geq 0$, et α_n est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\alpha_n\geq 0$, $\alpha_n(x)=0$ sur $]-1,1-\frac{1}{n}[$, $\alpha_n(1)=1$ et $\|\alpha_n'\|_\infty\leq n$. En raisonnant de la même manière que dans [40], nous pouvons affirmer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\int_0^T\alpha_n'(x)k(x)Q_\delta(u,k)\beta(t)dtdx \text{ existe et est positive .}$$

De plus, par définition de u_1^τ,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\int_0^T\alpha_n'(x)b(x)Q_\delta(u,k)\beta(t)dtdx=\int_0^T b(1)Q_\delta(u_1^\tau(t),k)\beta(t)dt.$$

Ainsi, lorsque δ tend vers 0^+,

$$\int_0^T b(1)\mathcal{F}_0(u_1^\tau,k)\beta(t)dt\geq 0.$$

D'après la remarque 1.11 du chapitre 1, nous pouvons en conclure que (2.6) est vérifiée.

De la même manière, en choisissant $\varphi(t,x)=\beta(t)\delta_n(x)$ dans (2.29), avec $\beta\in\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $\beta\geq 0$, et $\delta_n\in\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\delta_n\geq 0$, $\delta_n(x)=0$ sur $]-1+\frac{1}{n},1[$, $\delta_n(-1)=1$ et $\|\delta_n'\|_\infty\leq n$, en utilisant la définition de u_{-1}^τ, nous établissons (2.7).

2.5.2 Deuxième étape : $u_0\in L^\infty(\Omega)$

Nous utilisons un procédé de régularisation de la donnée initiale pour exploiter le résultat de la première étape. Pour j dans $\mathbb{N}^*$, nous considérons donc une suite $(u_0^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers u_0 dans $L^1(\Omega)$ et telle que, pour chaque j, u_0^j appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et est à valeurs dans $[m,M]$. Nous notons u^j la solution faible entropique du problème (2.1) associée à la condition initiale u_0^j de sorte que, pour tout j, u^j satisfait (2.28) et (2.29). Le résultat (2.13) nous assure que la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $L^1(Q)$ et donc converge vers une limite, notée u. En passant à la limite en j dans (2.28) et (2.29), nous pouvons affirmer que u est une solution faible entropique du problème (2.1).

Pour conclure cette section, nous faisons remarquer que si (2.17) ou (2.18) est vérifiée, alors (2.10) l'est aussi, ce qui implique le corollaire suivant.

Corollaire 2.16. *Sous la condition* (2.17) *ou sous la condition* (2.18), *le problème* (2.1) *admet une et une seule solution faible entropique.*

2.6 Analyse de la condition d'interface dans un cas particulier

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier de fonctions flux croissantes. Plus précisément nous étudions la position relative des deux traces γu^+ et γu^- à l'interface. Tout d'abord nous notons, d'après la remarque 2.3, que si $b_L \geq 0$ et $b_R \leq 0$ la condition (2.8) est satisfaite quelles que soient les valeurs de γu^- et γu^+. Dans cette situation, le long de l'interface les caractéristiques sont sortantes de chacun des deux sous-domaines Q_L et Q_R. Le problème (2.1) est alors découplé. Nous nous focalisons donc sur l'analyse de la condition à l'interface (2.8) sous la condition (2.10).

2.6.1 cas 1 : f croissante, $b_L < 0$, $b_R > 0$

La condition (2.10) est alors satisfaite si et seulement si f s'annule en un point k_0. Par suite la condition de Rankine-Hugoniot (2.11) est satisfaite et, puisque $b_L b_R < 0$, nous avons $f(\gamma u^-)f(\gamma u^+) \leq 0$. Supposons $f(\gamma u^-) \leq 0$ et $f(\gamma u^+) \geq 0$. Alors, en choisisssant $k = k_0$ dans (2.8), nous obtenons :

$$-b_L f(\gamma u^-) - b_R f(\gamma u^+) \ \geq 0,$$

et d'après (2.11),

$$-2b_L f(\gamma u^-) \ \geq 0.$$

Or $b_L < 0$ et $f(\gamma u^-) \leq 0$. Ainsi

$$-2b_L f(\gamma u^-) = 0, \text{ et } f(\gamma u^-) = f(\gamma u^+) = 0.$$

Par un raisonnement analogue nous aboutissons à la même conclusion lorsque $f(\gamma u^-) \geq 0$ et $f(\gamma u^+) \leq 0$.

Finalement nous en déduisons que : $f(\gamma u^-) = f(\gamma u^+) = 0$. Ainsi, dans ce cas, la condition (2.8) équivaut à $f(\gamma u^-) = f(\gamma u^+) = 0$.

2.6.2 cas 2 : f croissante, $b_L > 0$, $b_R > 0$

La condition (2.10) est vérifiée si et seulement si f s'annule en un point k_0 et si $b_R > b_L$. Dans ce cas la condition d'interface (2.8) et la condition de Rankine-Hugoniot (2.11) sont équivalentes. En effet montrons que (2.11) entraine (2.8).

D'après (2.11), puisque $b_L b_R > 0$, nous avons : $f(\gamma u^-)f(\gamma u^+) \geq 0$.

– si $f(\gamma u^-) \geq 0$ et $f(\gamma u^+) \geq 0$, d'après (2.11) :

$$f(\gamma u^-) = \frac{b_R}{b_L} f(\gamma u^+) \geq f(\gamma u^+).$$

Comme f est croissante, nous aboutissons à :

$$\gamma u^+ \leq \gamma u^-.$$

Il faut alors montrer que, pour tout réel k, le terme :

$$I = b_L|f(\gamma u^-) - f(k)| - b_R|f(\gamma u^+) - f(k)| + (b_R - b_L)|f(k)|$$

est positif.
Pour k dans $]\gamma u^+, \gamma u^-[$,

$$I = b_L(f(\gamma u^-) - f(k)) + b_R f(\gamma u^+) - b_L f(k) = 2b_L(f(\gamma u^-) - f(k)) \geq 0.$$

Pour $k \notin]\gamma u^+, \gamma u^-[$, en utilisant (2.11),

$$I = (b_R - b_L)(|f(k)| + f(k)) \geq 0 \text{ ou } I = (b_R - b_L)(|f(k)| - f(k)) \geq 0.$$

Ainsi (2.8) est vérifiée.

– si $f(\gamma u^-) \leq 0$ et $f(\gamma u^+) \leq 0$, alors nous obtenons :

$$\gamma u^- \leq \gamma u^+.$$

Nous montrons de la même manière qu'à la situation précédente, que (2.8) est vrai.

2.6.3 Remarque sur la condition d'interface (2.8) lorsque f est croissante et $b_L > b_R > 0$

La condition (2.8) ne permet pas d'obtenir une propriété d'unicité. En effet, dans le cas d'une fonction f à valeurs positives sur un intervalle $[k_2, k_1]$ tel que u appartienne à $[k_2, k_1]$ (par exemple $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ pour l'équation de Bürgers homogène avec $u_0 \geq 0$), on peut montrer que la condition (2.8) est vérifiée si et seulement si $f(\gamma u^-)$ et $f(\gamma u^+)$ satisfont l'inégalité :

$$\frac{2b_R - b_L}{b_R} f(\gamma u^-) \leq f(\gamma u^+) \leq \frac{b_L}{b_R} f(\gamma u^-).$$

On peut alors construire plusieurs solutions. En effet, pour obtenir une solution de (2.1), il suffit de définir u sur Q_L par la solution faible entropique de condition aux limites nulle en $x = -1$ et de donnée initiale $u_0 \mid_{]-1,0[}$, puis de fixer une fonction a définie p.p. sur $]0, T[$ de sorte que :

$$\text{p.p. } t \in \mathbb{R},\ (2b_R - b_L) f(\gamma u^-(t)) \leq b_R\, a(t) \leq b_L f(\gamma u^-(t)),$$

et enfin de définir u sur Q_R par la solution faible entropique du problème de condition aux limites a en $x = 0$ et de donnée initiale $u_0 \,|_{]0,1[}$.

En conséquence, la formulation entropique retenue n'est pas adaptée à cette situation. Il convient d'en définir une nouvelle. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons choisi de travailler sous la condition (2.10), situation pour laquelle la condition (2.8) fournit effectivement un critère de sélection d'une unique solution parmi les solutions faibles.

2.7 Généralisation

Dans cette section, nous gardons les mêmes hypothèses sur f mais nous supposons que b admet un nombre fini de points de discontinuité.

Nous considérons n dans $\mathbb{N}^*$, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[-1, 1]$.

Nous notons $D = \{1, ..., n-1\}$, et nous supposons que :

$$b \text{ est discontinue en } x_i, i \in D, \tag{2.30}$$

et, pour $0 \leq i \leq n$, $b_{|]x_i,x_{i+1}[} \in W^{1,+\infty}(]x_i, x_{i+1}[)$.

Il nous faut bien sûr donner dans ce cas la définition de la solution faible entropique de sorte que la définition 2.1 corresponde au cas particulier pour lequel D est un singleton.

Définition 2.17. *Sous* (2.30)*, une fonction* u *de* $L^\infty(Q)$ *est une solution faible entropique du problème* (2.1) *si* u *satisfait* (2.6)-(2.7) *et si,* $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[\times\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_Q (|u(t,x) - k|\partial_t\varphi(t,x) + b(x)\Phi(u,k)\partial_x\varphi(t,x))dxdt \\ & \quad - \int_Q sgn(u-k)(b'(x)f(k) + g(t,x,u))\varphi(t,x)dxdt \\ & + \int_\Omega |u_0 - k|\varphi(0,x)dx + \sum_{i\in D} |(b_i^+ - b_i^-)f(k)| \int_0^T \varphi(t,x_i)dt \quad \geq 0 \ , \end{aligned} \right. \tag{2.31}$$

où

$$b_i^+ = \lim_{x\to x_i^+} b(x) \quad et \quad b_i^- = \lim_{x\to x_i^-} b(x)$$

Nous notons γu_i^+ et γu_i^- les traces fortes dans $L^\infty(]0, T[)$ de la solution faible entropique en $\{x = x_i\}$. En utilisant les mêmes techniques que précédemment, nous pouvons montrer le théorème suivant :

Théorème 2.18. *Sous* (2.18)*, il existe une unique solution faible entropique du problème* (2.1)*. De plus, en tout point x_i, $i \in D$, u vérifie la condition de Rankine-Hugoniot :*

$$b_i^+ f(\gamma u_i^+) = b_i^- f(\gamma u_i^-).$$

Par ailleurs nous pouvons généraliser la condition (2.17), de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } i, j \in D, i \neq j, sgn(b_i^+ - b_i^-) = sgn(b_j^+ - b_j^-), \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^-,\ \forall x \leq \alpha,\ (b_1^+ - b_1^-) f(x) \leq 0, \\ \exists \beta \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \geq \beta,\ (b_1^+ - b_1^-) f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Corollaire 2.19. *Supposons que* (2.32) *est vérifiée. Alors le problème* (2.1) *admet une unique solution faible entropique au sens de la définition 2.17.*

Chapitre 3

Etude du problème couplé hyperbolique/hyperbolique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous généralisons les résultats du chapitre précédent au cas d'un ouvert Ω de dimension quelconque. Ce problème a jusqu'alors fait l'objet de peu de travaux. Nous pouvons citer le travail de K.H Karlsen, M. Rascle et E. Tadmor dans [29]. Cependant la méthode de compacité par compensation (voir [50] pour plus de détails sur cette technique) qui y est utlisée ne permet d'obtenir un résultat d'existence qu'en dimension deux d'espace. Récemment dans [46], E. Yu Panov a obtenu un résultat d'existence, en utilisant la technique des "H-measures" (voir [49]) pour le problème de Cauchy. Ici nous nous intéressons aux propriétés d'existence et d'unicité pour le problème (2) posé dans le domaine hétérogène borné Ω de $\mathbb{R}^n$, tel qu'il a été défini dans l'introduction. Le problème est le suivant :

Trouver une fonction mesurable et bornée u sur $Q =]0,T[\times\Omega$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u + \mathrm{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u)) + g(t,x,u) & = & 0 & \text{dans } \ Q, \\ u & = & 0 & \text{sur (une partie de) } \ \Sigma, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{sur } \ \Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où la fonction b est discontinue le long de l'hypersurface $\Gamma_{L,R}$ de Ω. Plus précisément :

$$b(x) = \left\{\begin{array}{ll} b_L(x) & \text{si } x \in \Omega_L \\ b_R(x) & \text{si } x \in \Omega_R \end{array}\right.$$

où $b_L \in W^{1,+\infty}(\Omega_L)$ et $b_R \in W^{1,+\infty}(\Omega_R)$, de telle sorte que b_L (respectivement b_R) admet une trace sur Γ_L (resp. sur Γ_R).

Nous définissons également la fonction croissante M_1 et la fonction décroissante M_2 comme suit :

$$M_1 : t \in [0,T] \longrightarrow M_1(t) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u_0^+ e^{N_1 t} + \frac{N_2}{N_1}(e^{N_1 t} - 1),$$

et

$$M_2 : t \in [0,T] \longrightarrow M_2(t) = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega}(-u_0^-) e^{N_1 t} - \frac{N_2}{N_1}(e^{N_1 t} - 1),$$

avec :

$$N_1 = \max(\|\nabla_x b\|_{L^\infty(\Omega_L)}, \|\nabla_x b(x)\|_{L^\infty(\Omega_R)}) \sum_{i=1}^{n} M_{f_i} + M_g \ ,$$

$$\text{et } N_2 = \sum_{i=L,R} \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0) + \nabla_x b_i(x) \cdot \boldsymbol{f}(0)|.$$

Nous supposons également dans ce chapitre que le flux est véritablement “non linéaire” i.e., qu'il vérifie la condition (1.15) soit :

$$\begin{gathered} p.p.t.\ x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0, \text{ la fonction :} \\ \lambda \longmapsto \xi \cdot b(x)\boldsymbol{f}(\lambda) \text{ est non linéaire sur tout intervalle} \\ \text{non dégénéré inclus dans } [M_2(T), M_1(T)]. \end{gathered} \tag{3.2}$$

où $\cdot$ représente le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons tout d'abord rappeler la définition d'une solution faible entropique du problème (3.1) déjà énoncée au chapitre 1. D'après le théorème 1.18 du chapitre 1, la condition de non linéarité (3.2) nous permet de définir des traces fortes de la solution faible entropique sur Σ. Nous pouvons donc considérer la définition 1.19 :

Définition 3.1. *Une fonction u de $L^\infty(Q)$ est une solution faible entropique de* (3.1) *si :*

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\int_Q \{|u-k|\partial_t \varphi + b(x)\boldsymbol{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x\varphi - sgn(u-k)(g(t,x,u) + \nabla_x b(x)\cdot \boldsymbol{f}(k))\varphi\} dxdt \\ &+ \int_{\Sigma_{L,R}} |(b_R(\overline{\sigma}) - b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k)\cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})|\varphi(\sigma) dt d\mathcal{H}^{n-1} \ \geq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où

$$\boldsymbol{\Phi}(u,k) = (\Phi_1(u,k), \ldots, \Phi_n(u,k)), \quad \Phi_i(u,k) = sgn(u-k)(f_i(u) - f_i(k))$$

(ii)

$$\operatorname{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)| dx = 0, \tag{3.4}$$

(iii) p.p.t $t \in]0,T[$, $\mathcal{H}^{n-1}$*-p.p.*, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$(sgn(u^\tau(\sigma) - k) + sgn(k))b(\overline{\sigma})(\boldsymbol{f}(u^\tau) - \boldsymbol{f}(k)) \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0 \tag{3.5}$$

où

$$u^\tau = \begin{cases} u_L^\tau & sur\ \Sigma_L \cap \Sigma \\ u_R^\tau & sur\ \Sigma_R \cap \Sigma. \end{cases}$$

Nous rappelons que u_L^τ (respectivement u_R^τ) est une fonction de $L^\infty(\Sigma_L)$ (resp. de $L^\infty(\Sigma_R)$) telle que pour tout compact K de Σ_L (resp. de Σ_R), et toute déformation lipschitzienne Ψ de Ω,

$$\operatorname{ess} \lim_{s \to 0^+} \int_K |u(\Psi(s,\sigma)) - u_L^\tau(\sigma)| dt d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \tag{3.6}$$

3.2 Unicité de la solution entropique

3.2.1 Condition d'interface

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux informations implicitement contenues dans l'inégalité entropique (3.3) le long de l'hypersurface de discontinuité $\Gamma_{L,R}$. De la même manière qu'au chapitre 2, nous cherchons plus particulièrement à mettre en évidence une condition du type "Rankine-Hugoniot" le long de $\Gamma_{L,R}$. Avant cela, nous énonçons un lemme "technique" qui nous sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 3.2. *Soit* $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de fonctions telle que, pour tout* ε, $\omega_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *et :*

$$\begin{cases} 0 \leq \omega_\varepsilon \leq 1 & sur\ \Omega, \\ \omega_\varepsilon(x) = 1 & si\ x \in \Gamma_{L,R}, \\ \omega_\varepsilon(x) = 0 & si\ d(x, \Gamma_{L,R}) > \varepsilon. \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors, pour $i = L, R$, *pour tout* φ *de* $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{Q_i} b(x)\boldsymbol{\Phi}(u,k) \cdot \nabla_x \omega_\varepsilon \varphi dx dt = \int_{\Sigma_{L,R}} b_i \boldsymbol{\Phi}(u_i^\tau, k) \cdot \boldsymbol{\nu}_i \varphi dt d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Démonstration. Nous démontrons ce résultat lorsque Q_i est un demi-espace, i.e.,

$$\begin{aligned} &\Omega_i = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x_n < 0\}, \\ &\boldsymbol{\nu}_i = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n, \\ &\Sigma_{L,R} =]0,T[\times\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \equiv]0,T[\times\mathbb{R}^{n-1}, \quad r = (t,x) \in \Sigma_i, \\ &Q_i = \{p = (r, x_n);\ r \in \Sigma_i,\ x_n < 0\}. \end{aligned}$$

Pour traiter le cas général, nous pouvons utiliser une technique de recouvrement.

Dans ce cadre, une déformation lipschitzienne ψ peut se définir par :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & [0,1] \times \partial Q_i & \to & \overline{Q}_i \\ & (s,r) & \to & r - s \cdot \boldsymbol{\nu}_i, \end{array}$$

ce qui implique, par définition de u_i^τ, que :

$$\text{ess} \lim_{x_n \to 0^-} \int_{\Sigma_{L,R}} |u(r,x_n) - u_i^\tau(r)| dr = 0. \tag{3.8}$$

Nous pouvons également supposer (ce qui n'est pas restrictif) que :

$$\nabla \omega_\varepsilon(x) = (0, \ldots, \partial_{x_n} \omega_\varepsilon(x)) \quad \text{et} \quad \|\partial_{x_n} \omega_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nous sommes alors amenés à montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = 0,$$

où I_ε est défini par :

$$I_\varepsilon = \int_{\Sigma_{L,R}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 |b_i(x)\Phi_n(u,k)\varphi(r,x_n) - b_i(x')\Phi_n(u_i^\tau,k)\varphi(r,0)| dx_n dr.$$

Comme $\Phi_n(.,k)$ est lipschitzienne, nous pouvons utiliser les propriétés des fonctions b_i et φ, et l'égalite (3.8) pour conclure.

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir une inégalité à l'interface $\Gamma_{L,R}$.

Lemme 3.3. *Soit u une solution entropique de* (3.1). *Alors, pour tout réel k, $\mathcal{H}^{n-1}$-p.p. sur $\Gamma_{L,R}$, p.p. sur* $]0,T[$,

$$\{b_L \boldsymbol{\Phi}(u_L^\tau, k) - b_R \boldsymbol{\Phi}(u_R^\tau, k)\} \cdot \boldsymbol{\nu}_L + |(b_L - b_R)\boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L| \geq 0. \tag{3.9}$$

Démonstration. Nous considérons une suite de fonctions $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant la condition (3.7) du lemme 3.2. Pour tout réel ε strictement positif, en choisissant dans (3.3), pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$, la fonction test $\varphi\omega_\varepsilon$, nous avons, pour tout réel k,

$$\begin{aligned} &\int_Q \{|u-k|\partial_t \varphi \omega_\varepsilon + b(x)\boldsymbol{\Phi}(u,k) \cdot \nabla_x(\varphi \omega_\epsilon)\} dxdt \\ &- \int_Q sgn(u-k)(g(t,x,u) + \nabla_x b(x) \cdot \boldsymbol{f}(k))\varphi \omega_\epsilon dxdt \\ &+ \int_{\Sigma_{L,R}} |(b_R(\overline{\sigma}) - b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})| \varphi(\sigma) dt d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Nous faisons alors tendre ε vers 0^+. Nous remarquons, en utilisant le lemme 3.2, que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_Q b(x)\mathbf{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x(\varphi\omega_\varepsilon)dxdt = \int_{\Sigma_{L,R}}(b_L\mathbf{\Phi}(u_L^\tau,k)\cdot\boldsymbol{\nu}_L + b_R\mathbf{\Phi}(u_R^\tau,k)\cdot\boldsymbol{\nu}_R)dtd\mathcal{H}^{n-1}.$$

tandis que tous les autres termes de l'inégalité tendent vers 0, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (excepté le dernier qui ne dépend pas de ε). L'inégalité (3.9) s'ensuit. □

Nous pouvons alors, à partir de (3.9), obtenir une condition de type “Rankine-Hugoniot”. Nous considérons une solution entropique u au sens de la définition 3.1 et nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} \exists\ k_1, \exists\ k_2\in\mathbb{R}, k_2\le k_1 \text{ tels que } u\in[k_2,k_1], \text{ et }, p.p.t.\ \overline{\sigma} \text{ de } \Gamma_{L,R} \\ (b_R(\overline{\sigma})-b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k_1)\cdot\boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})\ge 0, \\ (b_R(\overline{\sigma})-b_L(\overline{\sigma}))\boldsymbol{f}(k_2)\cdot\boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})\le 0. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Lemme 3.4. *Soit u une solution entropique de* (3.1). *Alors, sous* (3.10), *p.p.t. σ de $\Sigma_{L,R}$,*

$$b_L\boldsymbol{f}(u_L^\tau)\cdot\boldsymbol{\nu}_L = b_R\boldsymbol{f}(u_R^\tau)\cdot\boldsymbol{\nu}_L. \tag{3.11}$$

Démonstration. On prend $k=k_1$ dans (3.9). On en déduit, en utilisant (3.10), que

$$b_L\boldsymbol{f}(u_L^\tau(\sigma))\cdot\boldsymbol{\nu}_L \le b_R\boldsymbol{f}(u_R^\tau(\sigma))\cdot\boldsymbol{\nu}_R.$$

En choisissant $k=k_2$ dans (3.9) nous obtenons l'inégalité inverse d'après (3.10). □

3.2.2 Le résultat d'unicité

Nous considérons dans cette partie deux solutions entropiques u et v de (3.1), pour les conditions initiales respectives u_0 et v_0. Nous établissons alors un résultat de dépendance lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ de deux solutions en fonction de leurs données initiales, sous la condition supplémentaire :

$$p.p.t.\ \overline{\sigma} \text{ de } \Gamma_{L,R}, \text{ la fonction :}$$

$$\lambda\longmapsto \boldsymbol{f}(\lambda)\cdot\boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma}) \text{ change au plus une fois de monotonie sur } [k_2,k_1] \tag{3.12}$$

Théorème 3.5. *Nous supposons* (3.10) *et* (3.12) *vérifiées. Soient u et v deux solutions faibles entropiques de* (3.1) *à valeurs dans* $[k_2,k_1]$ *associées aux conditions initiales u_0 et v_0 dans $L^\infty(\Omega)$. Alors, p.p.t. t de $]0,T[$,*

$$\int_\Omega |u(t,x)-v(t,x)|dx \le e^{M_g t}\int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|dx. \tag{3.13}$$

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, grâce à la technique de dédoublement des variables, due à S. Kruzkov [36], nous montrons :

Lemme 3.6. *Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$ s'annulant sur un voisinage de $\Sigma_{L,R}$, $\varphi \geq 0$,*

$$\int_Q \{|u-v|\partial_t\varphi + b(x)\mathbf{\Phi}(u,v)\cdot\nabla_x\varphi - G(u,v)\varphi\}dxdt \geq 0, \tag{3.14}$$

où

$$G(u,v) = sgn(u-k)(g(t,x,u) - g(t,x,v)).$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 2.8. □

Il s'agit maintenant d'obtenir l'inégalité (3.14) pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$ positive quelconque. Pour cela nous considérons, $\varepsilon > 0$ étant fixé, la fonction test $\varphi(1-\omega_\varepsilon)$ dans (3.14), la suite $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifiant les hypothèses du lemme 3.2. Nous faisons tendre ε vers 0^+. Nous observons tout d'abord que, d'après le lemme 3.2, pour $i = L, R$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_i} b_i\mathbf{\Phi}(u,v)\cdot\nabla_x(1-\omega_\varepsilon)\varphi dxdt = -\int_{\Sigma_{L,R}} b_i\mathbf{\Phi}(u_i^\tau, v_i^\tau)\cdot\boldsymbol{\nu}_i\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ainsi en prenant la limite en ε dans le terme de convection sur chaque sous domaine Q_i, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_Q \{|u-v|\varphi_t + b(x)\mathbf{\Phi}(u,v)\cdot\nabla_x\varphi - G(u,v)\varphi\}dxdt\\ &\geq \int_{\Sigma_{L,R}} \{b_L\mathbf{\Phi}(u_L^\tau, v_L^\tau) - b_R\mathbf{\Phi}(u_R^\tau, v_R^\tau)\}\cdot\boldsymbol{\nu}_L\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que le terme à droite de l'inégalité ci-dessus est positif. Plus précisément, nous étudions pour cela, *p.p.t.* σ appartenant à $\Sigma_{L,R}$, le signe de :

$$J = \{b_L(\overline{\sigma})\mathbf{\Phi}(u_L^\tau(\sigma), v_L^\tau(\sigma)) - b_R(\overline{\sigma})\mathbf{\Phi}(u_R^\tau(\sigma), v_R^\tau(\sigma)\}\cdot\boldsymbol{\nu}_L\ .$$

Comme nous raisonnons ponctuellement “presque partout”, la variable σ n'apparaît pas dans les calculs qui vont suivre. Le raisonnement utilisé est identique à celui présenté au chapitre 2 en dimension 1 d'espace : nous étudions le signe de J suivant les positions relatives des traces de u et v sur $\Sigma_{L,R}$.

Si $sgn(u_L^\tau - v_L^\tau) = sgn(u_R^\tau - v_R^\tau)$

$$J = sgn(u_L^\tau - v_L^\tau)\{b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) - b_R(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(v_R^\tau))\}\cdot\boldsymbol{\nu}_L = 0,$$

d'après la condition de Rankine-Hugoniot (3.11).

Si $sgn(u_L^\tau - v_L^\tau) = -sgn(u_R^\tau - v_R^\tau)$, en utilisant (3.11),

$J = 2sgn(u_L^\tau - v_L^\tau)b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L = 2sgn(u_L^\tau - v_L^\tau)b_R(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L$.

Nous étudions la situation où $sgn(u_L^\tau - v_L^\tau) = -1$ (donc $u_L^\tau < v_L^\tau$), $sgn(u_R^\tau - v_R^\tau) = 1$ (donc $u_R^\tau > v_R^\tau$), et $b_R < b_L$. Les autres situations se traitent de façon analogue. Nous allons alors distinguer plusieurs cas :

1. $u_L^\tau < v_L^\tau < v_R^\tau < u_R^\tau$
   D'après le lemme 3.3, pour tout $k \in [u_L^\tau, u_R^\tau]$,
   $$\{-b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(k)) - b_R(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(k))\} \cdot \boldsymbol{\nu}_L + (b_L - b_R)|\boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma})| \geq 0. \quad (3.15)$$
   Si $\boldsymbol{f}(v_L^\tau).\boldsymbol{\nu}_L \geq 0$, nous choisissons $k = v_L^\tau$ dans (3.15) pour avoir :
   $$\{-b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) - b_R\boldsymbol{f}(u_R^\tau) + b_L\boldsymbol{f}(v_L^\tau)\} \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0.$$
   En utilisant (3.11), nous en déduisons que :
   $$-2b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0 \text{ donc } J \geq 0.$$
   Si $\boldsymbol{f}(v_R^\tau).\boldsymbol{\nu}_L \leq 0$, nous choisissons $k = v_R^\tau$ dans (3.15) ce qui donne :
   $$-2b_R(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0 \text{ d'où } J \geq 0.$$
   Enfin, si $\boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L < 0$ et $\boldsymbol{f}(v_R^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L > 0$, alors, d'après (3.11), comme $b_L > b_R$, nous avons : $b_L > 0$ et $b_R < 0$.
   Supposons que $J < 0$. Alors $J = -2b_L(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L$ implique $(\boldsymbol{f}(u_L^\tau) - \boldsymbol{f}(v_L^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L > 0$.
   De même $J = -2b_R(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L$ implique $(\boldsymbol{f}(u_R^\tau) - \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L < 0$.
   En récapitulant, nous avons donc :
   $$\boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L < \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L,\ \boldsymbol{f}(u_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L > \boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \text{ et } \boldsymbol{f}(v_R^\tau)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L > \boldsymbol{f}(u_R^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L.$$
   Ceci entraîne que la fonction $\lambda \mapsto \boldsymbol{f}(\lambda).\boldsymbol{\nu}_L$ change au moins deux fois de monotonie, ce qui contredit (3.12). Donc $J \geq 0$.
2. $u_L^\tau < v_R^\tau < v_L^\tau < u_R^\tau$
   Si $\boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0$ ou $\boldsymbol{f}(v_R^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \leq 0$, alors nous pouvons adapter la technique utilisée dans les deux premiers cas de la situation précédente.
   Si $\boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L < 0$ et $\boldsymbol{f}(v_R^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L > 0$, il existe α dans $]v_R^\tau, v_L^\tau[$, tel que $\boldsymbol{f}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\nu}_L = 0$. En choisissant $k = \alpha$ dans (3.15), nous avons :
   $$-b_L\boldsymbol{f}(u_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L - b_R\boldsymbol{f}(u_R^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0.$$
   D'où, en utilisant (3.11),
   $$-2b_L\boldsymbol{f}(u_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0.$$
   De même, en choisissant $k = \alpha$ dans l'inégalité du lemme 3.3 écrite pour v, d'après (3.11), nous obtenons :
   $$2b_L\boldsymbol{f}(v_L^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}_L \geq 0.$$
   En additionnant ces deux inégalités, nous avons bien : $J \geq 0$.

Tous les autres cas se ramènent aux deux cas précédents. Ainsi (3.14) reste valable pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$.

Nous introduisons maintenant une suite de fonctions $(\beta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $\beta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $\beta_\varepsilon(x) = 1$ si $d(x, \partial\Omega) \geq \varepsilon$. Nous choisissons dans (3.14) la suite de fonctions test $(\alpha\beta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, où $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[)$.

Pour passer à la limite en ε dans le terme de convection, nous adaptons la preuve du lemme 3.2 (en prenant $\omega_\varepsilon = 1 - \beta_\varepsilon$), et nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_Q b(x)\mathbf{\Phi}(u, v) \cdot \nabla_x \beta_\varepsilon \alpha(t) dxdt = -\int_\Sigma b(\overline{\sigma})\mathbf{\Phi}(u^\tau, v^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}\alpha(t) dt d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ainsi d'après l'égalité ci-dessus, le passage à la limite en ε nous donne :

$$\int_Q \{|u - v|\alpha'(t) - G(u, v)\alpha(t)\} dxdt - \int_\Sigma b(\overline{\sigma})\mathbf{\Phi}(u^\tau, v^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}\alpha(t) dt d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0.$$

La condition de bord (3.5) nous assure, comme au chapitre 2 dans le cas monodimensionnel, en raisonnant pour presque tout point de Σ (voir [9]), que :

$$\int_\Sigma b(\overline{\sigma})\mathbf{\Phi}(u^\tau, v^\tau) \cdot \boldsymbol{\nu}\alpha(t) dt d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0.$$

Finalement, nous avons grâce à la condition de Lipschitz sur g,

$$-\int_Q \{|u - v|\alpha'(t) dxdt \leq M_g \int_Q |u - v|\alpha(t) dxdt.$$

Pour t en dehors d'un ensemble de mesure nulle de $]0, T[$, on considère alors une suite de fonctions $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T])$ qui approche la fonction caractéristique $\mathbb{I}_{[0,t]}$. En utilisant la condition initiale (3.4) pour u et v, on obtient (3.13) grâce au lemme de Gronwall.

3.3 Existence

Pour obtenir l'existence d'une solution faible entropique du problème (3.1), nous utilisons la méthode de viscosité artificielle. Pour cela, nous considérons l'espace $W(0, T)$ dont la définition et les principales propriétés sont données dans l'introduction. Nous rappelons cependant ici que :

$$W(0, T) = \{v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\},$$

Dans la suite nous noterons $\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Nous introduisons alors, pour tout réel μ strictement positif le problème de viscosité associé à (3.1),

Trouver une fonction u_μ mesurable et bornée sur Q telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_\mu + \mathrm{div}_x(b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) & = & \mu \Delta u_\mu & \text{dans } \ Q, \\ u_\mu(0,x) & = & u_0(x) & \text{sur } \ \Omega, \\ u_\mu & = & 0 & \text{sur } \ \Sigma. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Nous montrons tout d'abord que le problème (3.16) admet une unique solution faible qui satisfait au principe du maximum. Ensuite, le passage à la limite en μ nous donnera l'existence d'une fonction u vérifiant l'inégalité (3.3). Donnons tout d'abord la définition d'une solution faible du problème (3.16).

Définition 3.7. *Une fonction u_μ de $W(0,T)$ est une solution faible de* (3.16) *si :*

$$u_\mu(0,.) = u_0 \ \ \textit{p.p.} \ \ \textit{sur } \Omega, \tag{3.17}$$

et u_μ satisfait l'égalité variationnelle, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, pour p.p.t. $t \in]0,T[$:

$$\langle \partial_t u_\mu, v \rangle + \int_\Omega ((\mu \nabla_x u_\mu - b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu)) \cdot \nabla_x v + g(t,x,u_\mu)v)dx = 0. \tag{3.18}$$

Pour obtenir l'existence d'une solution u_μ, uniformément bornée, nous utiliserons l'hypothèse suivante portant sur la fonction flux :

$$\textit{p.p.t. } \overline{\sigma} \in \Gamma_{L,R}, \ \forall t \in [0,T], \ (b_R - b_L)\boldsymbol{f}(M_1(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma}) \geq 0 \tag{3.19}$$

$$\textit{p.p.t. } \overline{\sigma} \in \Gamma_{L,R}, \ \forall t \in [0,T], \ (b_R - b_L)\boldsymbol{f}(M_2(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L(\overline{\sigma}) \leq 0 \ \ . \tag{3.20}$$

Nous allons alors montrer le résultat suivant :

Théorème 3.8. *Sous* (3.19) *et* (3.20)*, il existe une unique solution faible u_μ du problème* (3.16)*, telle que :*

$$\forall t \in [0,T], M_2(t) \leq u_\mu(t,.) \leq M_1(t) \ \ \textit{p.p. sur } \Omega, \tag{3.21}$$

Démonstration. (**i**) Existence de la solution du problème (3.16)

L'existence d'une fonction u_μ qui satisfait (3.17), (3.18) et (3.21) est obtenue grâce au théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff (voir théorème 0.10). Tout d'abord nous utilisons un procédé de troncature. Ainsi, pour tous réels a, b, c, nous définissons $\mathcal{B}(a,b,c) = \max\{a, \min\{b,c\}\}$ et nous introduisons, pour $\mu > 0$ fixé, le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\mu \in W(0,T) \text{ tel que } p.p. \text{ sur }]0,T[\text{ et pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ \langle \partial_t u_\mu, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega ((\mu \nabla_x u_\mu - b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu^\star)) \cdot \nabla_x v + g(t,x,u_\mu^\star)v)dx = 0 \\ u_\mu(0,.) = u_0 \ p.p. \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

où $u_\mu^\star(t,x) = \mathcal{B}(M_2(t), u_\mu(t,x), M_1(t))$. Remarquons en effet que si u_μ est solution de (3.22) alors u_μ satisfait (3.21). Pour cela il est loisible de considérer dans (3.22) la fonction test $v_\eta = sgn_\eta(u_\mu - M_1(t))^+$ ($v_\eta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$). Nous intégrons sur $]0,s[$, pour tout s de $]0,T[$. Ceci nous donne :

$$\int_0^s \langle \partial_t u_\mu, v_\eta\rangle dt + \int_0^s \int_\Omega ((\mu \nabla_x u_\mu - b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu^\star)) \cdot \nabla_x v_\eta + g(t,x,u_\mu^\star)v_\eta)dxdt = 0.$$

Pour traiter le terme d'évolution, nous l'écrivons sous la forme :

$$\int_0^s \langle \partial_t u_\mu, v_\eta\rangle dt = \int_0^s \langle \partial_t (u_\mu - M_1(t)), v_\eta\rangle dt + \int_{Q_s} M_1'(t) v_\eta dxdt,$$

et, nous utilisons le lemme 0.8 (de Mignot-Bamberger) pour écrire :

$$\int_0^s \langle \partial_t (u_\mu - M_1(t)), v_\eta\rangle dt = \int_\Omega (\int_0^{u_\mu(s,x)-M_1(s)} sgn_\eta(r)^+ dr)dx.$$

Compte tenu de la définition de $u_\mu^\star$, le terme de convection peut s'écrire sous la forme :

$$-\int_{Q_s} b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu^\star) \cdot \nabla_x v_\eta dxdt = -\int_{Q_s} b(x)\boldsymbol{f}(M_1(t)) \cdot \nabla_x v_\eta dxdt.$$

En intégrant par parties séparément sur Ω_L et Ω_R, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\int_0^s \int_\Omega b(x)\boldsymbol{f}(M_1(t)) \cdot \nabla v_\eta dxdt \ &= \ \int_0^s \int_{\Gamma_{L,R}} (b_R - b_L)\boldsymbol{f}(M_1(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L v_\eta dtd\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=L,R} \int_{Q_{i,s}} \nabla_x b(x) \cdot \boldsymbol{f}(M_1(t)) v_\eta dxdt. \end{aligned}$$

Nous remarquons alors, d'après (3.19), que le terme d'interface est positif.

Le terme de diffusion s'écrit :

$$\int_0^s \int_\Omega \mu(\nabla_x u_\mu)^2 sgn_\eta'(u_\varepsilon - M_1(t))^+ dxdt,$$

et donc est positif.

De plus, par définition de $u_\mu^\star$, nous avons :

$$\int_0^s \int_\Omega g(t,x,u_\mu^\star)v_\eta dxdt = \int_{Q_{i,s}} g(t,x,M_1(t))v_\eta dxdt.$$

Lorsque nous passons à la limite en η, nous obtenons :

$$\int_\Omega (u_\mu(s,x) - M_1(s))^+ dx + \int_0^s \int_\Omega (M_1'(t) + g(t,x,M_1(t))sgn(u_\mu - M_1(t)))^+ dxdt$$
$$+ \sum_{i=L,R} \int_0^s \int_{\Omega_i} \nabla_x b(x) \cdot \boldsymbol{f}(M_1(t))sgn(u_\mu - M_1(t))^+ dxdt \leq 0.$$

Par définition de M_1, $M_1'(t) + g(t,x,M_1(t)) + \nabla_x b(x) \cdot \boldsymbol{f}(M_1(t)) \geq 0$, *p.p.* sur Q. Nous en déduisons alors la majoration de u_μ donnée dans (3.21). Pour obtenir la minoration de u_μ dans (3.21) le raisonnement est identique : il est loisible de choisir la fonction test $v_\eta = -sgn_\eta(u_\mu - M_2(t))^-$ dans (3.22). Nous utilisons (3.20) pour montrer que l'intégrale d'interface est positive. Ainsi, l'existence d'une solution faible de (3.16) est assurée dès lors que (3.22) admet une solution. Pour prouver que (3.22) a une solution, étant donné w dans $\in W(0,T)$, nous considérons le problème linéarisé :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \text{ dans } W(0,T) \text{ tel que pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega), p.p. \text{ dans }]0,T[, \\ \langle \partial_t U, v\rangle + \int_\Omega ((\mu \nabla_x U - b(x)\boldsymbol{f}(w^\star)) \cdot \nabla v + g(t,x,w^\star)v)dx = 0, \\ U(0,.) = u_0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Le problème (3.23) admettant une unique solution, nous pouvons définir l'opérateur :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{T}: & W(0,T) & \to & W(0,T) \\ & w & \to & U \equiv \mathcal{T}(w) \end{array}$$

où U désigne l'unique solution de (3.23). En prenant $v = U$ dans (3.23), comme $w^\star(t,x)$ est à valeurs dans $[M_2(t), M_1(t)]$, on a : $\|U\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_1$. Cette estimation implique, en utilisant la définition de la norme de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ que : $\|\partial_t U\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes dépendantes de ε (mais indépendantes de $w^\star$). Ainsi, en posant $C_3 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \{U \in W(0,T), \|U\|_{W(0,T)} \leq C_3,\ U(0,.) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega\},$$

est convexe, borné, faiblement compact dans $W(0,T)$ et tel que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Il reste à montrer que $\mathcal{T}$ est "faiblement-faiblement" séquentiellement continue. Soit $(w_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers w dans $W(0,T)$. Alors la suite $(U_n)_n = (\mathcal{T}(w_n))_n$ est bornée dans $W(0,T)$. Donc elle admet une sous-suite, encore notée $(U_n)_n$ qui converge vers une limite, notée U, faiblement dans $W(0,T)$, fortement dans $L^2(Q)$ et telle que $U_n(0,.)$ converge vers $U(0,.)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. Ainsi $U(0,.) = u_0$ *p.p.* sur Ω. En faisant tendre n vers l'infini dans (3.23) nous prouvons que : $U = \mathcal{T}(w)$. Par unicité de la solution de (3.23), nous en déduisons que $\mathcal{T}(w_n) \rightharpoonup \mathcal{T}(w)$, ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est "faiblement-faiblement" séquentiellement continue. D'après le théorème de Schauder-Tychonoff, l'application $\mathcal{T}$ admet donc un point fixe, noté u_μ, qui satisfait (3.22) et ainsi (3.17), (3.18), (3.21).

(ii) Unicité de la solution du problème (3.16)

Pour prouver l'unicité de la solution nous utilisons une méthode de changement d'espace pivot. Soient u et $\widehat{u}$ deux solutions faibles de (3.16). Afin d'alléger l'écriture nous ne faisons pas appaître l'indice μ. Pour tout t de $[0,T[$, on introduit $z(t,.)$ (resp. $\widehat{z}(t,.)$) l'élément de $H_0^1(\Omega)$ solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla z(t,.).\nabla v dx = \int_\Omega u(t,.) v dx \ (\text{ resp. } \int_\Omega \mu \nabla \widehat{z}(t,.) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \widehat{u}(t,.) v dx). \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Comme $\partial_t u$ et $\partial_t \widehat{u}$ sont dans $L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, nous remarquons que $\partial_t z$ (resp. $\partial_t \widehat{z}$) est un élément de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ tel que, *p.p.t.* $t \in]0,T[$: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \mu \nabla \partial_t z \cdot \nabla v dx = \langle \partial_t u, v\rangle \ (\text{ resp. } \int_\Omega \mu \nabla \partial_t \widehat{z} \cdot \nabla v dx = \langle \partial_t \widehat{u}, v\rangle). \tag{3.25}$$

En choisissant $v = z - \widehat{z}$ dans (3.18) écrit pour u et pour $\widehat{u}$, et en intégrant entre 0 et s, $s \in]0,T[$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\int_0^s \langle \partial_t(u-\widehat{u}), z-\widehat{z}\rangle dt + \int_0^s \int_\Omega \mu \nabla(u-\widehat{u}) \cdot \nabla(z-\widehat{z}) dx dt \\ &= \int_0^s \int_\Omega b(x)(\boldsymbol{f}(u) - \boldsymbol{f}(\widehat{u})) \cdot \nabla(z-\widehat{z}) dx dt - \int_0^s \int_\Omega (g(t,x,u) - g(t,x,\widehat{u}))(z-\widehat{z}) dx dt. \end{aligned}$$

Or, en prenant $v = u - \widehat{u}$ dans (3.24), nous avons :

$$\mu \int_0^s \int_\Omega \nabla(u-\widehat{u}) \cdot \nabla(z-\widehat{z}) dx dt = \int_0^s \int_\Omega (u-\widehat{u})^2 dx dt = \|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(]0,s[\times\Omega)}.$$

De même, en prenant $v = z - \widehat{z}$ dans (3.25), $\forall s \in]0,T[$,

$$\int_0^s \langle \partial_t(u-\widehat{u}), z-\widehat{z}\rangle dt = \int_0^s \int_\Omega \mu \nabla \partial_t(z-\widehat{z}) \cdot \nabla(z-\widehat{z}) dx dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu |\nabla(z-\widehat{z})|^2(s,.) dx dt.$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \mu |\nabla(z-\widehat{z})|^2(s,.) dx + \|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(]0,s[\times\Omega)} \leq \\ &\|u-\widehat{u}\|_{L^2(]0,s[\times\Omega)}(2\|b\|_\infty M_{\boldsymbol{f}})\|\nabla(z-\widehat{z})\|_{L^2(]0,s[\times\Omega)^n} + M_g\|z-\widehat{z}\|_{L^2(]0,s[\times\Omega)}). \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite l'inégalité de Poincaré pour majorer $\|z-\widehat{z}\|_{L^2(]0,s[\times\Omega)}$ en fonction de $\|\nabla(z-\widehat{z})\|_{L^2(]0,s[\times\Omega)^n}$, puis l'inégalité de Young pour affirmer qu'il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mu|\nabla(z-\widehat{z})|^2(s,.)dx \leq C\int_0^s \|\nabla(z-\widehat{z})\|^2_{L^2(\Omega)^n}dt.$$

Nous pouvons conclure grâce au lemme de Gronwall. □

L'estimation (3.21) permet de démontrer classiquement le lemme suivant, qui nous sera utile pour passer à la limite en μ.

Lemme 3.9. *Il existe une constante positive C, telle que :*

$$\mu\int_Q |\nabla_x u_\mu|^2 dxdt \leq C. \tag{3.26}$$

Démonstration. Il suffit de choisir $v = u_\mu$ dans (3.18), et d'utiliser l'estimation (3.21) (voir [9] pour plus de détails). □

Nous allons maintenant faire tendre μ vers 0^+. La convergence de la suite $(u_\mu)_\mu$ est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.10. *Sous* (3.2)*, la suite des solutions faibles $(u_\mu)_{\mu>0}$ des problèmes* $(3.16)_\mu$*, admet une sous-suite convergente dans $L^1(Q)$.*

Démonstration. D'après (3.21), la suite $(u_\mu)_{\mu>0}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1.22 du chapitre 1 qui nous donne le résultat souhaité. □

Nous notons u la limite d'une sous-suite $(u_\mu)_{\mu>0}$ convergente dans $L^1(Q)$. Nous allons maintenant montrer que u est une solution faible entropique du problème (3.1). Commençons par démontrer que u vérifie l'inégalité entropique (3.3). Pour cela nous revenons au problème de viscosité (3.16). Nous pouvons choisir alors dans (3.18) la fonction test $sgn_\eta(u_\mu-k)\varphi_1\varphi_2$ où k est un réel quelconque, φ_1 un élément de $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[)$, φ_2 un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\varphi_1,\varphi_2\geq 0$. Nous intégrons sur $[0,T]$. Cela nous donne :

$$\int_0^T\langle\partial_t u_\mu, sgn_\eta(u_\mu-k)\varphi_1\varphi_2\rangle dt + \int_Q(\mu\nabla_x u_\mu - b(x)\boldsymbol{f}(u_\mu))\cdot\nabla_x(sgn_\eta(u_\mu-k)\varphi_1\varphi_2)dxdt$$
$$+\int_Q g(t,x,u_\mu)sgn_\eta(u_\mu-k)\varphi_1\varphi_2 dxdt = 0. \tag{3.27}$$

Nous pouvons à nouveau utiliser le lemme 0.8 de F. Mignot-A. Bamberger pour traiter le terme d'évolution :

$$\int_0^T\langle\partial_t u_\mu, sgn_\eta(u_\mu-k)\varphi_2\rangle\varphi_1 dt = -\int_Q I_\eta(u_\mu)\varphi_2\partial_t\varphi_1 dxdt - \int_\Omega I_\eta(u_0)\varphi_2\varphi_1(0)dx$$

où

$$I_\eta(u_\mu) = \int_k^{u_\mu} sgn_\eta(\tau - k)d\tau.$$

Le terme de diffusion peut s'écrire sous la forme :

$$\int_Q \mu\nabla_x u_\mu \cdot \nabla_x(sgn_\eta(u_\mu - k)\varphi_1\varphi_2)dxdt = \int_Q \mu(\nabla u_\mu)^2 sgn'_\eta(u_\mu - k)\varphi_1\varphi_2 dxdt$$
$$+ \int_Q \mu\nabla u_\mu \cdot \nabla\varphi_2\varphi_1 sgn_\eta(u_\mu - k)dxdt.$$

Ainsi le premier terme à droite de l'égalité est positif.

Le terme d'advection est étudié séparément sur Q_L et Q_R. Nous l'écrivons sous la forme :

$$-\sum_{i\in\{L,R\}} \int_{Q_i} b_i(x)\boldsymbol{f}(u_\mu) \cdot \nabla u_\mu sgn'_\eta(u_\mu - k)\varphi_1\varphi_2 dxdt$$
$$-\sum_{i\in\{L,R\}} \int_{Q_i} b_i(x)\boldsymbol{f}(u_\mu) \cdot \nabla\varphi_2 sgn_\eta(u_\mu - k)\varphi_1 dxdt$$

Nous nous concentrons sur l'étude de la première intégrale pour $i = L$ (le raisonnement est identique pour $i = R$). Nous notons :

$$\begin{aligned} J_{\eta,\mu} &= -\int_{Q_L} b_L(x)\boldsymbol{f}(u_\mu).\nabla u_\mu sgn'_\eta(u_\mu - k)\varphi_1\varphi_2 dxdt \\ &= -\int_{Q_L} b_L(x)\mathrm{div}_x\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k)\varphi_1\varphi_2 dxdt, \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) = \int_k^{u_\mu} \boldsymbol{f}(\tau)sgn'_\eta(\tau - k)d\tau.$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons :

$$\begin{aligned} J_{\eta,\mu} = & \int_{Q_L}(b_L(x)\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) \cdot \nabla\varphi_2 + \nabla_x b_L(x).\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k)\varphi_2\varphi_1)dxdt \\ & -\int_{\Sigma_{L,R}} b_L(\overline{\sigma})\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L\varphi_1\varphi_2 dtd\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons alors à l'intégrale de surface que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{L,R}} b_L(\overline{\sigma})\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L\varphi_1\varphi_2 dtd\mathcal{H}^{n-1} \\ = & \int_{\Sigma_{L,R}} b_L(\overline{\sigma})(\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) - \boldsymbol{f}(k)sgn_\eta(u_\mu - k)) \cdot \boldsymbol{\nu}_L\varphi_1\varphi_2 dtd\mathcal{H}^{n-1} \\ & + \int_{\Sigma_{L,R}} b_L(\overline{\sigma})\boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L sgn_\eta(u_\mu - k)\varphi_1\varphi_2 dtd\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Nous remarquons, en intégrant par parties, que pour tout couple de réels (θ, k)

$$\mathbf{D}_\eta(\theta, k) = -\int_k^\theta \boldsymbol{f}'(\tau) sgn_\eta(\tau - k) d\tau + \boldsymbol{f}(\theta) sgn_\eta(\theta - k).$$

où $\boldsymbol{f}' = (f_1', \ldots, f_n')$.

En se référant aux calculs effectués au chapitre 2, et en utilisant en particulier l'inégalité (2.25), nous nous assurons que, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\left| -\int_k^{u_\mu} f_i'(\tau) sgn_\eta(\tau - k) d\tau + f_i(u_\mu) - f(k)) sgn_\eta(u_\mu - k) \right| \leq 2\eta M_{f_i}.$$

Nous en déduisons donc que :

$$|(\mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) - \boldsymbol{f}(k) sgn_\eta(u_\mu - k))| \leq 2n\eta M_{\boldsymbol{f}}.$$

Les calculs étant analogues lorsque nous étudions l'intégrale sur Q_R, nous arrivons à l'inégalité suivante, pour tout μ et tout η strictement positifs :

$$\begin{aligned}
&\int_Q I_\eta(u_\mu) \partial_t \varphi_1 \varphi_2 dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0) \varphi_1(0) \varphi_2 dx \\
&+ \sum_{i \in L,R} \int_{Q_i} \{ b_i (sgn_\eta(u_\mu - k) \boldsymbol{f}(u_\mu) - \mathbf{D}_\eta(u_\mu, k)) \cdot \nabla \varphi_2) - \nabla_x b_i(x) \cdot \mathbf{D}_\eta(u_\mu, k) \varphi_2 \} \varphi_1 dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{L,R}} ((b_L - b_R) \boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L sgn_\eta(u_\mu - k) + 2n\eta M_{\boldsymbol{f}} (|b_L| + |b_R|)) \varphi_1 \varphi_2 dt d\mathcal{H}^{n-1} \\
&- \int_Q g(t, x, u_\mu) sgn_\eta(u_\mu - k) \varphi_1 \varphi_2 dxdt - \int_Q \mu \nabla u_\mu . \nabla \varphi_2 \varphi_1 sgn_\eta(u_\mu - k) dxdt \ \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Or :

$$\int_{\Sigma_{L,R}} (b_L - b_R) \boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L sgn_\eta(u_\mu - k) \varphi_1 \varphi_2 dt d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\Sigma_{L,R}} |(b_L - b_R) \boldsymbol{f}(k) \cdot \boldsymbol{\nu}_L| \varphi_1 \varphi_2 dt d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Nous faisons alors tendre μ vers 0^+ dans l'inégalité (3.28). D'après l'estimation (3.26) du lemme 3.9,

$$\lim_{\mu \to 0^+} \int_Q \mu \nabla u_\mu \cdot \nabla \varphi_2 \varphi_1 sgn_\mu(u_\mu - k) dxdt = 0.$$

En utilisant les propriétés de convergence du lemme 3.10, et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous trouvons qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ telle que,

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[)$, $\forall \varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\forall \eta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_Q I_\eta(u)\partial_t\varphi_1\varphi_2 dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0)\varphi_1(0)\varphi_2 dx - \int_Q g(t,x,u)sgn_\eta(u-k)\varphi_1\varphi_2 dxdt \\
&+ \sum_{i\in L,R}\int_{Q_i}\{b_i(sgn_\eta(u-k)\boldsymbol{f}(u) - \mathbf{D}_\eta(u,k))\cdot\nabla\varphi_2 - \nabla_x b_i(x).\mathbf{D}_\eta(u,k)\varphi_2\}\varphi_1 dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{L,R}}(|(b_L-b_R)\boldsymbol{f}(k)\cdot\boldsymbol{\nu}_L| + 2n\eta M_{\boldsymbol{f}}(|b_L|+|b_R|)\varphi_1\varphi_2 dtd\mathcal{H}^{n-1} \qquad \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

En remarquant que $\lim_{\eta\to 0}\mathbf{D}_\eta(u,k) = sgn(u-k)\boldsymbol{f}(k)$, *p.p.* sur Q, le passage à la limite en η montre que u vérifie l'inégalité entropique (3.3), puisque $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)\otimes\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$.

Il nous reste à montrer que u vérifie la condition initiale (3.4) et la condition aux limites (3.5). Pour démontrer (3.4), nous partons de l'inégalité (3.29) dans laquelle nous considérons des fonctions φ_2 dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i)$, $i = \{L,R\}$, et φ_1 dans $\mathcal{C}_c^\infty([0,T[)$. Après passage à la limite en η, il vient :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_i}\{|u-k|\partial_t\varphi_1\varphi_2 + b_i(x)\mathbf{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x\varphi_2\varphi_1 - sgn(u-k)(g(t,x,u)\varphi_1\varphi_2\}dxdt \\
&-\int_{Q_i} sgn(u-k)\nabla_x b(x).\boldsymbol{f}(k)\varphi_1\varphi_2 dxdt \leq \int_{\Omega_i}|u_0-k|\varphi_1(0)\varphi_2(x)dx.
\end{aligned}$$

Ceci implique, d'après les travaux de F. Otto (voir [40]) que :

$$\operatorname*{esslim}_{t\to 0^+}\int_{\Omega_i}|u(t,x)-u_0(x)|dx = 0,$$

ce qui entraîne (3.4).

Afin de montrer (3.5), nous allons utiliser les fonctions H_δ et $\mathbf{Q}_\delta$, introduites dans [40] et dont les propriétés principales ont été rappelées au chapitre 1. Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et $(\mathbb{R}^2)^n$ par :

$$H_\delta(\tau,k) = \left((\operatorname{dist}(\tau, I[0,k]))^2 + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} - \delta,$$

et

$$\mathbf{Q}_\delta(\tau,k) = \int_k^\tau \partial_1 H_\delta(\lambda,k)\boldsymbol{f}'(\lambda)d\lambda.$$

Pour obtenir (3.5), nous pouvons choisir dans (3.18) la fonction test $\partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\varphi$, φ étant un élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\overline{\Omega})$ nulle sur $\Sigma_{L,R}$ (ce qui ne sera pas restrictif par la suite). Nous intégrons sur $[0,T]$. Nous reprenons alors les arguments utilisés pour passer de (3.27) à (3.28). En particulier, pour le terme de convection nous raisonnons séparément sur chaque sous-domaine Q_i, $i = L,R$, et nous utilisons des formules de Green qui ne font pas apparaître d'intégrales à l'interface $\Sigma_{L,R}$ puisque φ est nulle sur $\Sigma_{L,R}$. Nous aboutissons à :

$$\int_Q \{H_\delta(u_\mu,k)\partial_t\varphi + b(x)\mathbf{Q}_\delta(u_\mu,k)\cdot\nabla_x\varphi - g(t,x,u_\mu)\partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\varphi\}dxdt$$
$$+\int_Q \nabla_x b(x)(\mathbf{Q}_\delta(u_\mu,k) - \partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\boldsymbol{f}(u))dxdt \geq \mu\int_Q \partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\nabla u_\mu\cdot\nabla\varphi dxdt.$$

Nous passons alors à la limite en μ. D'après l'estimation (3.26), et le fait que $(u_\mu)_{\mu>0}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$, le terme à droite de l'inégalité tend vers 0. En utilisant le lemme 3.10, nous obtenons donc :

$$\int_Q \{H_\delta(u,k)\varphi_t + b(x)\mathbf{Q}_\delta(u,k)\cdot\nabla\varphi - g(t,x,u)\partial_1 H_\delta(u,k)\varphi\}dxdt$$
$$\int_Q \nabla_x b(x)\cdot(\mathbf{Q}_\delta(u,k) - \partial_1 H_\delta(u,k)\boldsymbol{f}(u))\varphi dxdt \ \geq 0.$$

Nous choisissons alors dans l'inégalité ci-dessus, une suite de fonctions test $(\varphi_n)_n$ telle que, $\varphi_n(t,x) = \beta(t)\alpha_n(x)$ où $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $\beta \geq 0$, et $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha_n \leq 1$,

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_{L,R} \text{ et } d(x,\Gamma_{L,R}) \geq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_{L,R} \text{ ou si } d(x,\partial\Omega) \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

D'après les travaux de F. Otto (voir [40]), il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q b(x)\mathbf{Q}_\delta(u,k)\cdot\nabla(\alpha_n(x))\beta(t)dxdt \text{ existe et est positive.}$$

De plus, par définition de u^τ, en adaptant la preuve du lemme 3.2, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q b(x)\mathbf{Q}_\delta(u,k).\nabla(\alpha_n(x))\beta(t)dxdt = \int_\Sigma b(\overline{\sigma})\mathbf{Q}_\delta(u^\tau,k)\cdot\boldsymbol{\nu}(\sigma)\beta(t)dtd\mathcal{H}^{n-1}.$$

Donc, lorsque δ tend vers 0, nous obtenons :

$$\int_\Sigma b(\overline{\sigma})\mathcal{F}_0(u^\tau,k)\beta(t)dtd\mathcal{H}^{n-1} \geq 0,$$

ce qui d'après la remarque 1.11 équivaut à la condition de bord (3.5). Nous avons donc montré que u est une solution faible entropique du problème (3.1).

3.4 Un cas particulier

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'en dimension 1 d'espace, l'existence d'une solution faible entropique peut s'obtenir à partir de la régularisation du coefficient b. Nous pouvons alors naturellement nous demander si cette méthode peut également s'employer en dimension n d'espace. Nous allons montrer dans cette section que dans certaines situations, c'est effectivement le cas. Nous considérons dans cette partie le cas particulier où l'hypersurface de discontinuité est un hyperplan. Nous montrons alors que l'existence d'une solution faible entropique du problème (3.1) peut-être également obtenue par la méthode présentée au chapitre 2.

Nous supposons dans cette partie $\Omega =]-1,1[^n$ et $\Gamma_{L,R} = \{0\}\times]-1,1[^{n-1}$.

Nous notons alors $\Omega_L =]-1,0[\times]-1,1[^{n-1}$ et $\Omega_R =]0,1[\times]-1,1[^n$. On a donc, sur $\Sigma_{L,R}$, $\boldsymbol{\nu}_L = (1,0,\ldots,0)$ et $\boldsymbol{\nu}_R = -\boldsymbol{\nu}_L$. Enfin, sur $\Sigma_{L,R}$, $\overline{\sigma} = (x_2,\ldots,x_n)$.

De plus, afin de faciliter les calculs, nous supposons que b est constante de part et d'autre de l'hyperplan de discontinuité $\Gamma_{L,R}$, i.e.

$$b(x) = \begin{cases} b_L & \text{si } x \in \Omega_L \\ b_R & \text{si } x \in \Omega_R. \end{cases}$$

Cependant les techniques utilisées par la suite peuvent être reprises lorsque les fonctions b_L et b_R dépendent de la variables x, à la condition que, pour tout $\overline{\sigma}$ de $\Gamma_{L,R}$, le signe de $b_L(\overline{\sigma}) - b_R(\overline{\sigma})$ soit constant.

Notons tout d'abord que l'inégalité entropique (3.3) qui caractérise la solution faible entropique dans l'ouvert Q s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q),\ \varphi \geq 0,\ \forall k \in \mathbb{R},\\
&\qquad \int_Q \{|u-k|\partial_t\varphi + b(x)\boldsymbol{\Phi}(u,k)\cdot\nabla_x\varphi - sgn(u-k)g(t,x,u)\varphi\}dxdt\\
&\qquad +|(b_R-b_L)f_1(k)|\int_0^T\int_{\Sigma_{L,R}} \varphi(t,\overline{\sigma})d\overline{\sigma}dt \ \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Nous faisons remarquer que, dans ce cas particulier, la condition de Rankine-Hugoniot s'écrit : *p.p.t.* σ de $\Sigma_{L,R}$,

$$b_L f_1(u_L^\tau(\sigma)) = b_R f_1(u_R^\tau(\sigma)).$$

De la même manière l'hypothèse (3.12) portant sur la monotonie de la fonction flux se réduit à :

$$f_1 \text{ change au plus une fois de monotonie.}$$

Nous reprenons ici les idées développées en dimension 1. Nous allons donc considérer dans cette partie, une suite de fonctions régulières $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

$$\forall x \in \Omega,\ b_\varepsilon(x) = \theta_\varepsilon(x_1),$$

avec :

$$\theta_\varepsilon(x_1) = \begin{cases} b_L \text{ si} & x_1 \leq -\varepsilon \\ b_R \text{ si} & x_1 \geq \varepsilon, \end{cases}$$

et telle que θ_ε soit monotone sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (la monotonie dépendant du signe de $(b_L - b_R)$). Ceci entraîne :

$$\forall x \in \Omega, x_1 \neq 0,\ b_\varepsilon(x) \to b(x).$$

Pour obtenir le théorème d'existence, nous utiliserons encore dans cette partie les hypothèses (3.19)-(3.20) qui nous permettent d'obtenir un principe du maximum uniforme en ε, et qui s'écrivent dans ce cadre :

$$\forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f_1(M_1(t)) \geq 0, \tag{3.31}$$
$$\forall t \in [0,T],\ (b_R - b_L) f_1(M_2(t)) \leq 0. \tag{3.32}$$

Puisque dans cette partie b est supposée constante de part et d'autre de $\Gamma_{L,R}$, nous avons :

$$M_1(t) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u_0^+ e^{M_g t} + \frac{e^{M_g t} - 1}{M_g} \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)|$$

et

$$M_2(t) = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} (-u_0^-) e^{M_g t} - \frac{e^{M_g t} - 1}{M_g} \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} |g(t,x,0)|.$$

Nous considérons également une suite de fonctions $(u_0^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ u_0^j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \text{ et } \lim_{j\to+\infty} u_0^j = u_0 \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et ε réel strictement positif fixés, nous introduisons le problème "régularisé" suivant :

Trouver une fonction u_ε mesurable et bornée telle que :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \operatorname{div}_x(b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(u_\varepsilon)) + g(t,x,u_\varepsilon) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u_0^j(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur (une partie de) } \Sigma. \end{cases} \tag{3.33}$$

D'après les résultats rappelés au chapitre 1, le problème (3.33) admet une unique solution faible entropique (au sens de la définition 1.1), $u_{\varepsilon,j}$ que nous noterons par la suite u_ε afin d'alléger les écritures. Nous savons également que u_ε est bornée sur Q *a priori* en fonction de ε. Nous cherchons alors à obtenir des estimations sur la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, indépendantes de ε afin de pouvoir passer à la limite en ε. Seul le principe du maximum nous suffit. Nous avons alors l'encadrement :

Lemme 3.11. *Sous les conditions* (3.31) *et* (3.32), *p.p.* $t \in [0,T]$,

$$M_2(t) \le u_\varepsilon(t,.) \le M_1(t) \text{ p.p. sur } \Omega. \tag{3.34}$$

Démonstration. Nous revenons au problème de viscosité associé à (3.33) :

Trouver une fonction mesurable et bornée $u_{\varepsilon,\mu}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u_{\varepsilon,\mu} + \operatorname{div}_x(b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(u_{\varepsilon,\mu})) + g(t,x,u_{\varepsilon,\mu}) & = & \mu\Delta u_{\varepsilon,\mu} & \text{dans } Q, \\ u_{\varepsilon,\mu}(0,x) & = & u_0^j(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_{\varepsilon,\mu} & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{3.35}$$

Pour $\mu > 0$ fixé, il est connu (voir chapitre 1) que (3.35) admet une unique solution $u_{\varepsilon,\mu}$ élément de $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega))$ et telle que $\partial_t u_{\varepsilon,\mu} \in L^2(Q)$. De plus la suite $(u_{\varepsilon,\mu})_\mu$ converge dans $L^1(Q)$ vers u_ε quand μ tend vers 0^+. Nous multiplions (3.35) par $(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+$, puis nous intégrons sur $]0,s[\times\Omega$, $s \in]0,T]$. Nous avons :

$$\mu\int_0^s\int_\Omega \Delta u_{\varepsilon,\mu}(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt = -\mu\int_0^s\int_\Omega [\nabla(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+]^2 dxdt \le 0$$

Le terme d'évolution se traite de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^s\int_\Omega \partial_t u_{\varepsilon,\mu}(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt & = & \displaystyle\frac{1}{2}\|(u_{\varepsilon,\mu}(s,.) - M_1(s))^+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + & \displaystyle\int_0^s\int_\Omega M_1'(t)(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt. \end{array}$$

Nous faisons apparaître dans le terme de convection le terme $\operatorname{div}(b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(M_1(t))$. Compte tenu de la définition de $b_\varepsilon(x)$, cela nous donne :

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^s\int_\Omega \operatorname{div}_x(b_\varepsilon(x)\boldsymbol{f}(u_{\varepsilon,\mu}))(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt = \int_0^s\int_\Omega \theta_\varepsilon'(x_1)f_1(M_1(t))(u_{\varepsilon,\mu}M_1(t))^+ dxdt \\ \displaystyle\qquad + \int_0^s\int_Q \operatorname{div}(b_\varepsilon(x)(\boldsymbol{f}(u_{\varepsilon,\mu}) - \boldsymbol{f}(M_1(t)))(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt. \end{array}$$

Enfin, pour le terme de réaction :

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^s\int_\Omega g(t,x,u_{\varepsilon,\mu})(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt = \int_0^s\int_\Omega g(t,x,M_1(t))(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt \\ \displaystyle\qquad + \int_s\int_\Omega [g(t,x,u_{\varepsilon,\mu}) - g(t,x,M_1(t))](u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt. \end{array}$$

En regroupant tous les termes nous obtenons :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\|(u_{\varepsilon,\mu}(s,.) - M_1(s))^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \displaystyle\int_s\int_\Omega \Psi(t,x)(u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+ dxdt \le \\ \qquad (M_g + \frac{\|b\|_\infty M_F}{4\mu})\displaystyle\int_s\int_\Omega ((u_{\varepsilon,\mu} - M_1(t))^+)^2 dxdt, \end{array}$$

où
$$\Psi(t,x) = \theta'_\varepsilon(x_1) f_1(M_1(t)) + M'_1(t) + g(t,x,M_1(t)).$$
Or, puisque $sgn(\theta'_\varepsilon(x_1)) = sgn(b_R - b_L)$, nous en déduisons d'après (3.31) que :
$$\theta'_\varepsilon(x_1) f_1(M_1(t)) \geq 0.$$
Comme par définition de $M_1(t)$, $M'_1(t)+g(t,x,M_1(t)) \geq 0$, nous en déduisons que $\Psi(t,x) \geq 0$.

Par utilisation du lemme de Gronwall, il s'ensuit que $(u_{\varepsilon,\mu}(t,.))_{\varepsilon,\mu}$ est majorée par $M_1(t)$. En faisant tendre μ vers 0, nous en déduisons la majoration de $u_\varepsilon(t,.)$ par $M_1(t)$.

Pour la minoration par $M_2(t)$ nous multiplions (3.35) par $-(u_{\varepsilon,\mu} - M_2(t))^-$ et nous utilisons les mêmes techniques que précédemment notamment la condition (3.32). □

La condition de non-linéarité (3.2) et le lemme 3.11 nous permettent d'appliquer le théorème 1.20 du chapitre 1. Nous avons donc :

Lemme 3.12. *Il existe une suite extraite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge dans $L^1(Q)$.*

Il nous reste à montrer que cette limite, notée u, ainsi obtenue est bien une solution entropique du problème (3.1).

D'après les rappels effectués au chapitre 1, nous savons que u_ε satisfait l'inégalité entropique :
$$\begin{aligned}&\int_Q \{I_\eta(u_\varepsilon)\partial_t\varphi + b_\varepsilon(x)\mathbf{\Phi}_\eta(u_\varepsilon,k)\cdot\nabla\varphi - sgn_\eta(u_\varepsilon - k)g(t,x,u_\varepsilon)\varphi\}dxdt \\ &\quad + \int_Q \theta'_\varepsilon(x_1)(\Phi_{1,\eta}(u_\varepsilon,k) - I'_\eta(u_\varepsilon)f_1(u_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_\Omega I_\eta(u_0^j)\varphi(0,x)dx \quad \geq 0,\end{aligned}$$
où $(I_\eta, \mathbf{\Phi}_\eta)$ est la paire d'entropie régulière définie, pour tout réel k par :
$$I_\eta(u_\varepsilon,k) = \int_k^{u_\varepsilon} sgn_\eta(\tau - k)d\tau \ \text{ et } \ \mathbf{\Phi}_\eta(u_\varepsilon,k) = \int_k^{u_\varepsilon} sgn_\eta(\tau-k)\boldsymbol{f}'(\tau)d\tau.$$
Nous cherchons maintenant à passer à la limite en ε. Par définition de b_ε,
$$\begin{aligned}&\int_Q \theta'_\varepsilon(x_1)(\Phi_{1,\eta}(u_\varepsilon,k) - I'_\eta(u_\varepsilon)f_1(u_\varepsilon))\varphi dxdt = \\ &-\int_{\Sigma_{L,R}}\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\theta'_\varepsilon(x_1)f_1(k)sgn_\eta(u_\varepsilon - k)\varphi dx_1\right)d\mathcal{H}^{n-1}dt \\ &+\int_{\Sigma_{L,R}}\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\theta'_\varepsilon(x_1)\{\Phi_{1,\eta}(u_\varepsilon,k) - I'_\eta(u_\varepsilon)(f_1(u_\varepsilon) - f_1(k))\}\varphi dx_1\right)d\mathcal{H}^{n-1}dt.\end{aligned}$$

Or $|\theta'_\varepsilon(x_1)| = sgn(b_R - b_L)\theta'_\varepsilon(x_1)$. D'où :

$$\left| -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta'_\varepsilon(x_1) f_1(k) sgn_\eta(u_\varepsilon - k)\varphi dx_1 \right| \leq sgn(b_R - b_L)|f_1(k)| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta'_\varepsilon(x_1)\varphi dx_1.$$

De plus, d'après les calculs effectués au chapitre précédent, nous avons :

$$|\Phi_{1,\eta}(u_\varepsilon) - I'_\eta(u_\varepsilon)(f_1(u_\varepsilon) - f_1(k))| \leq 2M_{f_1}\eta.$$

Ainsi :

$$\int_Q \theta'_\varepsilon(x_1)(\Phi_{1,\eta}(u_\varepsilon, k) - I'_\eta(u_\varepsilon) f_1(u_\varepsilon))\varphi dxdt \leq$$
$$sgn(b_R - b_L)(|f_1(k)| + 2M_{f_1}\eta) \int_{\Sigma_{L,R}} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta'_\varepsilon \varphi dx_1 \right) d\mathcal{H}^{n-1} dt.$$

Après une intégration par parties par rapport à x_1, nous passons à la limite en ε pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\int_Q \{I_\eta(u)\partial_t\varphi + b(x)\mathbf{\Phi}_\eta(u,k)\cdot\nabla\varphi - sgn_\eta(u-k)g(t,x,u)\varphi\}dxdt \\ &+(2M_{f_1}\eta + |f_1(k)|)(|b_R - b_L|)\int_{\Sigma_{L,R}} \varphi(t,0,x_2)dtdx_2 + \int_\Omega I_\eta(u_0^j)\varphi(0,x)dx \quad \geq 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

En se limitant à des fonctions φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$, lorsque η tend vers 0^+, nous établissons par convergence dominée de Lebesgue, l'inégalité entropique (3.30).

Par le même raisonnement qu'à la section précédente, nous montrons que u vérifie la condition initiale (3.4). Afin de montrer (3.5), nous considérons, pour tout réel positif δ, la paire d'entropie de bord $(H_\delta, \mathbf{Q}_\delta)$ introduite dans l'exemple 1.8, et d'après les rappels du chapitre 1, nous pouvons affirmer que u_ε satisfait l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_Q \{H_\delta(u_\varepsilon,k)\partial_t\varphi dxdt + b_\varepsilon(x)\mathbf{Q}_\delta(u_\varepsilon,k)\cdot\nabla\varphi - \partial_1 H_\delta(u_\varepsilon,k)g(t,x,u_\varepsilon)\varphi\}dxdt \\ &+\int_Q b'_\varepsilon(x)(\mathbf{Q}_\delta(u_\varepsilon,k) - \partial_1 H_\delta(u_\varepsilon,k)\boldsymbol{f}(u_\varepsilon))dxdt \ \geq 0. \end{aligned}$$

En considérant des fonctions φ nulles sur un voisinage de $\Sigma_{L,R}$, nous pouvons passer à la limite en ε sans difficultés pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\int_Q \{H_\delta(u,k)\varphi_t dxdt + b(x)\mathbf{Q}_\delta(u,k)\cdot\nabla\varphi - \partial_1 H_\delta(u,k)\varphi g(t,x,u)\}dxdt \\ &+\int_Q b'(x)(\mathbf{Q}_\delta(u,k) - \partial_1 H_\delta(u,k)\boldsymbol{f}(u))\varphi dxdt \ \geq 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Nous choisissons alors, dans l'inégalité ci-dessus, une suite de fonctions test, $\varphi_n(t,x) = \beta(t)\alpha_n(x)$ où $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $\beta \geq 0$, et $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha_n \leq 1$,

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_{L,R} \text{ et } d(x,\Gamma_{L,R}) \geq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } d(x,\Gamma_{L,R}) \leq \frac{1}{n} \text{ ou } d(x,\partial\Omega) \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

D'après les travaux de F. Otto (voir [40]), il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q b(x)\mathbf{Q}_\eta(u,k)\cdot\nabla(\alpha_n(x))\beta(t)dxdt \text{ existe et est positive .}$$

Nous concluons alors de la même manière qu'à la section précédente.

Il nous reste maintenant à passer à la limite en j. Nous notons u_j la solution entropique de (3.1) de condition initiale u_0^j. Pour $j'\neq j$, le résultat de comparaison (3.13) nous assure qu'il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\int_Q |u_j(t,x)-u_{j'}(t,x)| \leq C\int_\Omega |u_0^j-u_0^{j'}|dx.$$

Nous en déduisons que la suite $(u_j)_j$ est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$ (car la suite $(u_0^j)_j$ converge dans $L^1(\Omega)$), et donc converge vers une limite notée u. De plus, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, u_j vérifie (3.36) et (3.37). Ainsi, en passant à la limite en j dans (3.36) et (3.37), nous obtenons, que u est solution entropique de (3.1).

Chapitre 4

Etude d'un problème couplé hyperbolique/parabolique

4.1 Introduction

In this chapter our aim is to carry out the mathematical analysis of some petroleum engineering models i.e. models involving a convective term of the form $\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}(x) f(u)$. As pointed out in the introduction, we are not able to solve the purely hyperbolic problem. So we deal with a perturbed hyperbolic/parabolic one.

4.1.1 Mathematical setting

We consider now a simplified physical model of infiltration process in a stratified subsoil Ω - from a mathematical point of view a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ - such that $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_h \cup \overline{\Omega}_p$; Ω_h (*hyperbolic zone*) and Ω_p (*parabolic zone*) being two disjoint bounded domains with Lipschitz boundaries denoted by $\Gamma_l = \partial\Omega_l$, $l \in \{h, p\}$ and $\Gamma_{hp} = \Gamma_h \cap \Gamma_p$. This way we consider two areas with different geological characteristics and such that in the second one we take into account the effects of diffusivity. Let T be a finite positive real. We are interested in the uniqueness and existence of a measurable and bounded function u on $Q \equiv]0, T[\times\Omega$ satisfying

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x) f(u)) + g(t, x, u) & = & \mathrm{div}_x(\mathbb{I}_{\Omega_p}(x) \nabla\phi(u)) & \text{on } Q, \\ u & = & 0 & \text{on (a part of) }]0, T[\times\partial\Omega, \\ u(0, .) & = & u_0 & \text{on } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

with

$$\boldsymbol{b}(x) f(u) = \boldsymbol{b}_h(x) f_h(u) \mathbb{I}_{\Omega_h} + \boldsymbol{b}_p(x) f_p(u) \mathbb{I}_{\Omega_p},$$
$$g(t, x, u) = g_p(t, x, u) \mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + g_h(t, x, u) \mathbb{I}_{\Omega_h}(x).$$

For each $A \subset \Omega$, $\mathbb{I}_A$ is the characteristic function of A.

4.1.2 Main assumptions and functional spaces

As in this chapter we consider a pertubed problem we change our notations. We denote by a subscript h the hyperbolic zone and by a subscript p the parabolic one. Then we give the main assumptions with this notation.

- For $l \in \{h,p\}$, $\mathcal{H}^{n-1}(\overline{\Gamma_{hp}} \cap (\overline{\Gamma_l \setminus \Gamma_{hp}})) = 0$
- For $l \in \{h,p\}$, the vector fields $\boldsymbol{b}_l = (b_{l,1},..,b_{l,n})$ are elements of $W^{2,+\infty}(\Omega_l)^n$ and such that
$$\Gamma_{hp} \subset \{\bar{\sigma} \in \Gamma_h, \boldsymbol{b}_h(\overline{\sigma}).\boldsymbol{\nu}_h \geq 0\}. \tag{4.2}$$
- u_0 belongs to $L^\infty(\Omega)$.
- f_p is Lipschitz continuous on $\mathbb{R}$.
- f_h is a **nondecreasing** Lipschitz continuous function on $\mathbb{R}$.
- for $l \in \{h,p\}$, g_l is in $W^{1,+\infty}(]0,T[\times\Omega_i \times \mathbb{R})$.
- there exists $a \in \mathbb{R}^-$ and $b \in \mathbb{R}^+$ such that ϕ is a nondecreasing function of $W^{1,+\infty}([a,b])$. By normalisation, we suppose $\phi(0) = 0$.
- ϕ^{-1} exists on $[\phi(a), \phi(b)]$. This is in particular fulfilled when $\{x \in [a,b], \phi'(x) = 0\}$ has a zero Lebesgue measure.

We suppose that $\Gamma_p \setminus \Gamma_{hp}$ has a non zero $\mathcal{H}^{n-1}$-measure. So that we may consider the Hilbert space
$$V = \{v \in H^1(\Omega_p), v = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_p \setminus \Gamma_{hp}\},$$
used with the norm $\|v\|_V = \|\nabla_x v\|_{L^2(\Omega_p)^n}$, equivalent to the classical $H^1(\Omega_p)$-norm.

We denote $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ the pairing between V and V'.

Lasty we set, for any real τ, k,
$$\mathcal{F}_{0,h}(\tau,k) = \frac{1}{2}(|f_h(\tau) - f_h(0)| - |f_h(k) - f_h(0)| + |f_h(\tau) - f_h(k)|).$$

Remark 4.1. *The monotonicity of f_h and* (4.2) *ensure that the interface is included in the set of outward characteristics for the first-order operator in the hyperbolic domain. This is a key point that will guide us for the statement of uniqueness by considering first the behavior of a solution on the hyperbolic area and then on the parabolic one.*

4.2 Notion of weak entropy solution

We provide a definition to (4.1) by considering that the equation set in Q can be viewed as a quasilinear equation that strongly degenerates on a fixed subdomain. So we refer to [4], [5] to propose a weak formulation through a global entropy inequality on the whole Q. That is why it will be said that:

Definition 4.2. *A measurable function u is a weak entropy solution to (4.1) if:*

- $u \in L^\infty(Q), \quad \phi(u) \in L^2(0,T;V)$,
- $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$, $\forall \varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\int_Q (|u-k|\partial_t\varphi + \boldsymbol{b}(x)\Phi(u,k)\cdot\nabla_x\varphi)dxdt - \int_{Q_p} \nabla_x|\phi(u)-\phi(k)|\cdot\nabla_x\varphi dxdt\\ &-\int_Q sgn(u-k)(g(t,x,u)+\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}(x)f(k))\varphi dxdt\\ &+\int_{\Sigma_{hp}}\{\boldsymbol{b}_h f_h(k)-\boldsymbol{b}_p f_p(k)\}\cdot\boldsymbol{\nu}_h sgn(\phi(u)-\phi(k))\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}\geq 0,\end{aligned} \tag{4.3}$$

- $\forall \varphi \in L^1(\Sigma_h \setminus \Sigma_{hp})$, $\varphi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} \mathcal{F}_{0,h}(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h),k)\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi d\sigma \geq 0, \tag{4.4}$$

- $$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+}\int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)|dx = 0. \tag{4.5}$$

Remark 4.3. *In (4.3), the term $sgn(\phi(u)-\phi(k))$ has to be understood in the sense of the trace of $\phi(u)$ on Σ_{hp} from the side of Q_p.*

Remark 4.4. *If we suppose that u takes its values in $]a,b[$, we can choose in (4.3) successively $k > \|u\|_\infty$ and $k < -\|u\|_\infty$, and we compare the two resulting inequalities. We remark that the boundary integrals and all the k-dependant terms collapse. So it comes for any φ in $H_0^1(Q)$,*

$$\int_Q (u\partial_t\varphi + (\boldsymbol{b}(x)f(u) - \mathbb{I}_{\Omega_p}\nabla_x\phi(u))\cdot\nabla_x\varphi - g(t,x,u)\varphi)dxdt = 0. \tag{4.6}$$

Thus u is a weak solution, since, in the sense of distributions on Q,

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u) - \mathbb{I}_{\Omega_p}\nabla_x\phi(u)) + g(t,x,u) = 0.$$

4.3 Statement of uniqueness

The proof of the uniqueness of a weak entropy solution to (4.1) is divided into two steps. First we obtain a comparison result in the hyperbolic zone and then we prove an uniqueness property in the parabolic one.

4.3.1 Study on the hyperbolic zone

We derive from (4.3) and (4.4) an entropy inequality on the hyperbolic domain that will be the starting point to establish a time-Lipschitzian dependance in $L^1(\Omega_h)$ of a weak solution to (4.1) with respect to the corresponding initial data. To do so, as in [5], we state first:

Lemma 4.5. *Let u be a bounded and measurable function satisfying* (4.3) *and* (4.4)*. Then for any real k and any φ of $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$,*

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h} (|u-k|\partial_t\varphi + |f_h(u)-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\varphi - G_h(u,k)\varphi)dxdt \\
\leq\ & \operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h)) - f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1} \\
&-\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(k)-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

where $G_h(u,k) = sgn(u-k)(g_h(t,x,u) + \mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_h(x)f_h(k))$.

Proof. From (4.3), it comes that for $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\Omega_h)$, $\varphi\geq 0$,

$$\int_{Q_h} (|u-k|\partial_t\varphi + |f_h(u)-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\varphi - G_h(u,k)\varphi)dxdt \geq 0. \tag{4.8}$$

Thus, from (4.8) and by referring to F. Otto's works in [43] (see also [40] Lemma 7.34), we state that:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h)) - f_h(k)|\boldsymbol{b}_h.\boldsymbol{\nu}_h\beta(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1} \text{ exists,} \tag{4.9}$$

for any real k and $\beta\in L^1(\Sigma_h)$.

Moreover, it follows from [43] that, for any φ in $C_c^\infty(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi\geq 0$,

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h} (|u-k|\partial_t\varphi + |f_h(u)-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\varphi - G_h(u,k)\varphi)dxdt \\
&\leq -\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h)) - f_h(k)|\boldsymbol{b}_h.\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

From (4.4), and by definition of $\mathcal{F}$, we argue that:

$$\begin{aligned}
&-\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h.\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1}\\
\leq\ & \operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}\\
&-\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(k)-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Then we use the two previous inequalities and we split the frontier Γ_h into Γ_{hp} and $\Gamma_h\setminus\Gamma_{hp}$ to obtain:

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h}(|u-k|\partial_t\varphi+|f_h(u)-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\varphi-G_h(u,k)\varphi)dxdt\\
\leq\ & -\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h.\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1}\\
&+\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi d\mathcal{H}^{n}\\
&-\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(k)-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi dtd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

As, according to (4.2),

$$-\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h.\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)dtd\mathcal{H}^{n-1}\leq 0,$$

the proof is complete. □

Now, in order to use the method of doubling variables, we need some technical results based on properties of mollifiers and already pointed out in [40], [5] or [47].

First, from (4.9), we deduce that for any open subset Σ_{loc} of Σ_h, and for any real k there exists θ_k in $L^\infty(\Sigma_{loc})$ such that for any β in $L^1(\Sigma_{loc})$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{loc}} |f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(k)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\beta(\sigma)d\mathcal{H}^{n}=\int_{\Sigma_{loc}}\theta_k(\sigma)\beta(\sigma)d\mathcal{H}^n. \tag{4.10}$$

Next we introduce the sequence of mollifiers $(\mathcal{W}_j)_{j>0}$ on $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\forall j>0,\forall p=(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1},\mathcal{W}_j(p)=\rho_j(t)\prod_{i=1}^n\rho_j(x_i),$$

where $(\rho_j)_j$ is a standard sequence of mollifiers on $\mathbb{R}$. We observe that for a.e. $\sigma\in\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}$

$$0\leq\int_{Q_h}\mathcal{W}_j(\sigma-\tilde{p})d\tilde{p}\leq 1 \text{ and } \lim_{j\to 0^+}\int_{Q_h}\mathcal{W}_j(\sigma-\tilde{p})d\tilde{p}=\frac{1}{2}.$$

In this framework, the next statement holds:

Lemma 4.6. *Let u a measurable and bounded function on Q_h such that (4.7) holds. Then, for any continuous function φ on $\overline{Q}_h$,*

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to 0^+}\int_{Q_h}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u(p))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h(\tilde{\overline{\sigma}})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\frac{\tilde{p}_{|\Sigma}+p}{2})\mathcal{W}_j(\tilde{p}_{|\Sigma}-p)d\tilde{\sigma}dp\\
=\ &\frac{1}{2}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h(\overline{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}$$

and,

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to 0^+}\int_{Q_h}\text{ess}\lim_{j\to 0^+}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h(\overline{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\frac{p_{|\Sigma}+\tilde{p}}{2})\mathcal{W}_j(p_{|\Sigma}-\tilde{p})d\sigma d\tilde{p}\\
&=\frac{1}{2}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h(\overline{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\varphi(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

Thanks to (4.7) and Lemma 4.6, we are now able to state an uniqueness property on the hyperbolic zone.

Theorem 4.7. *Let u_1 and u_2 be two entropy weak solutions to (4.1) for initial data $u_{0,1}$ and $u_{0,2}$ respectively. Then, for a.e. t in $]0,T[$,*

$$\int_{\Omega_h}|u_1(t,.)-u_2(t,.)|dx\leq e^{M_{g_h}t}\int_{\Omega_h}|u_{0,1}-u_{0,2}|dx.$$

Proof. Let ζ be in $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$, $\zeta\geq 0$. We choose in (4.7), for u_1 written in variables $p=(t,x)$,

$$k=\tilde{u}_2\equiv u_2(\tilde{t},\tilde{x}),\ \varphi(p)=\zeta(\frac{p+\tilde{p}}{2})\mathcal{W}_j(p-\tilde{p})=\psi_j(p,\tilde{p}),$$

and in (4.7), for u_2 written in variables $\tilde{p}=(\tilde{t},\tilde{x})$,

$$k=u_1(t,x),\ \varphi(\tilde{p})=\zeta(\frac{p+\tilde{p}}{2})\mathcal{W}_j(p-\tilde{p})=\psi_j(p,\tilde{p}).$$

We integrate over Q_h on the $\tilde{p}$ variable for u_1 and on the p variable for u_2. We add up and it comes:

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h\times Q_h}|u_1-\tilde{u}_2|(\partial_t\psi_j+\partial_{\tilde{t}}\psi_j)+|f_h(u_1)-f_h(\tilde{u}_2)|(\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\psi_j+\tilde{\boldsymbol{b}}_h\cdot\nabla_{\tilde{x}}\psi_j))dpd\tilde{p}\\
&+\int_{Q_h\times Q_h}(G_h(u_1,\tilde{u}_2)+G_h(\tilde{u}_2,u_1))\psi_j dpd\tilde{p}\\
\leq\ &-\int_{Q_h}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u_1)-f_h(0)|\tilde{\boldsymbol{b}}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(\tilde{\sigma},p)d\mathcal{H}^n_{\tilde{\sigma}}dp\\
&-\int_{Q_h}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(\tilde{u}_2)-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(\sigma,\tilde{p})d\mathcal{H}^n_{\sigma}d\tilde{p}\\
&+\int_{Q_h}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(u_1(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(\sigma,\tilde{p})dtd\mathcal{H}^{n-1}_{\sigma}d\tilde{p}\\
&+\int_{Q_h}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}}|f_h(\tilde{u}_2(\tilde{\sigma}+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\tilde{\boldsymbol{b}}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(p,\tilde{\sigma})dtd\mathcal{H}^{n-1}_{\tilde{\sigma}}dp.
\end{aligned}\tag{4.11}$$

To take the limit on j in the right-hand side, we refer to Lemma 4.6 to argue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to 0^+} -\int_{Q_h}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u_1)-f_h(0)|\tilde{\boldsymbol{b}}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(\tilde{\sigma},p)dtd\mathcal{H}^{n-1}_{\tilde{\sigma}}dp\\
=\ &\frac{1}{2}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u_1(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\tilde{\boldsymbol{b}}_h(\overline{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta(\sigma)d\sigma\\
=\ &\lim_{j\to 0^+}\int_{Q_h}\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} |f_h(u_1(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))-f_h(0)|\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\psi_j(\sigma,\tilde{p})dtd\mathcal{H}^{n-1}_{\sigma}d\tilde{p}.
\end{aligned}$$

So the right-hand side goes to 0 with j. It is classical to take the limit on j in the left-hand side of (4.11) and we have:

$$\int_{Q_h}\{|u_1-u_2|\partial_t\varphi+|f_h(u_1)-f_h(u_2)|\boldsymbol{b}.\nabla\zeta - sgn(u_1-u_2)(g_h(u_1)-g_h(u_2))\varphi\}dxdt\geq 0.$$

For $\zeta=\alpha\beta$ where α belongs to $\mathcal{C}^\infty_c(]0,T[)$, $\alpha\geq 0$, and β to $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $\beta\geq 0$, $\beta\equiv 1$ on Q_h, the Lipschitz condition for g_h provides:

$$-\int_{Q_h}|u_1-u_2|\alpha'(t)dxdt\leq M_{g_h}\int_{Q_h}|u_1-u_2|\alpha(t)dxdt.$$

When α is the element of a sequence approximating $\mathbb{I}_{[0,t]}$, t being given outside a set of measure zero, we obtain the desired equality, thanks to the initial condition (4.5) and to Gronwall Lemma (see Lemma 0.7) □

4.3.2 Study in the parabolic zone

On Q_p, we characterize a solution to (4.1) through a variational equality including the contribution of entering data from the hyperbolic zone. Indeed:

Proposition 4.8. *Let u be a weak entropy solution to* (4.1) *such that $a\leq u\leq b$. Then,*

$$\partial_t u\in L^2(0,T;V').$$

Furthermore, for any v in $L^2(0,T;V)$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\langle\langle\partial_t u,v\rangle\rangle dt+\int_{Q_p}(\nabla_x\phi(u)-f_p(u)\boldsymbol{b}_p)\cdot\nabla v dxdt+\int_{Q_p}g_p(t,x,u)vdxdt\\
&-\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}}f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h v dtd\mathcal{H}^{n-1}=0.
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Proof. Thanks to Remark 4.4, u satisfies (4.6). Since $\mathcal{D}(0,T;H^1_0(\Omega))\subset H^1_0(Q)$, (4.6) is still true for any φ in $\mathcal{D}(0,T;H^1_0(\Omega))$. Now let ζ be given in $\mathcal{D}(0,T;V)$. We consider $\hat{\zeta}$

an extension of ζ to $\mathcal{D}(0,T;H_0^1(\Omega))$ and we take $\varphi=\hat{\zeta}\xi_\varrho$ in (4.6) where ξ_ϱ belongs to $W^{1,+\infty}(\Omega)$, $0\leq\xi_\varrho\leq 1$, and fulfills for any positive ϱ:

$$\xi_\varrho(x)=\begin{cases} 1 \text{ if } x\in\overline{\Omega}_p \\ 0 \text{ if } x\in\Omega_h, d(x,\Gamma_{hp})\geq\varrho \\ \|\nabla_x\xi_\varrho\|_\infty\leq\dfrac{C}{\varrho},\ C>0 \text{ independant of } \varrho. \end{cases}$$

We pass to the limit when ϱ goes to 0^+. To this purpose, we use (4.9) to claim that:

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\int_{Q_h} f_h(u)\hat{\varphi}\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla\xi_\varrho dxdt=\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\varphi\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h dtd\mathcal{H}^{n-1}.$$

There is no difficulty to take the ϱ-limit in the other terms in (4.6) . That yields, for any φ in $\mathcal{D}(0,T;V)$, $\varphi\geq 0$:

$$\begin{aligned} &-\int_{Q_p} u\partial_t\varphi dxdt+\int_{Q_p}(\nabla_x\phi(u)-f_p(u)\boldsymbol{b}_p)\cdot\nabla_x\varphi dxdt+\int_{Q_p} g_p(t,x,u)\varphi dxdt \\ &-\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\varphi\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h dtd\mathcal{H}^{n-1}=0. \end{aligned}\tag{4.13}$$

Since u is bounded and $\phi(u)$ belongs to $L^2(0,T;V)$ we state that:

$$\left|\int_{Q_p}(\nabla_x\phi(u)-f_p(u)\boldsymbol{b}_p)\cdot\nabla_x\varphi dxdt\right|\leq C_1\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)},$$

where C_1 is a positive real.

Thanks to the Trace Theorem of V into $L^2(\Gamma)$, we have, for *a.e.* τ:

$$\int_{\Sigma_{hp}} f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\varphi\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h dtd\mathcal{H}^{n-1}\leq C_2\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)},$$

so that

$$\left|\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\varphi\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h d\sigma\right|\leq C_2\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)},$$

where C_2 is a positive real.

Thus, there exists a constant C such that:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T;V), \left|\int_{Q_p} u\partial_t\varphi dxdt\right|\leq C\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)},$$

which ensures that $\partial_t u$ belongs to $L^2(0,T;V')$ (see Appendix of [11]). So,

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T;V), -\int_{Q_p} u\partial_t\varphi dxdt=\int_0^T\langle\langle\partial_t u,\varphi\rangle\rangle dt.$$

By density we may rewrite (4.13) with φ in $L^2(0,T;V)$ and (4.12) follows that completes the proof of Proposition 4.8. $\square$

4.3.3 The uniqueness theorem

Let u_1 and u_2 be two weak entropy solutions to (4.1) such that u_i takes its value in $]a, b[$, $i = 1, 2$. We suppose also that u_1 and u_2 have the same intial datum on the hyperbolic area. Thanks to Theorem 4.7, we are sure that $u_1 = u_2$ a.e. on Q_h. On the parabolic zone, the uniqueness proof lies on a method of doubling only the time variable. Moreover, to deal with the convective term, we assume that $f_p \circ \phi^{-1}$ is Hölder continuous on $[\phi(a), \phi(b)]$ with an exposant greater or equal than $1/2$. That means:

$$\exists\, \theta \in [1/2, +\infty[,\ \exists\, \mathcal{C} > 0, \forall (x, y) \in \phi([a, b])^2, |(f_p \circ \phi^{-1})(x) - (f_p \circ \phi^{-1})(y)| \le \mathcal{C}|x - y|^\theta. \tag{4.14}$$

Then we may assert that:

Theorem 4.9. *Under* (4.14)*, the problem* (4.1) *admits at most one weak entropy solution. Besides, if u_1 and u_2 are two weak entropy solutions corresponding to initial data $u_{0,1}$ and $u_{0,2}$ such that $u_{0,1} = u_{0,2}$ a.e. on Ω_h then, for a.e. t in $]0, T[$,*

$$\int_\Omega |u_1(t, .) - u_2(t, .)| dx \le e^{M_{g_p} t} \int_{\Omega_p} |u_{0,1} - u_{0,2}| dx.$$

Proof. In (4.12), written for u_1 in variable (t, x), we consider

$$v(t, \tilde{t}, x) = sgn_\eta(\phi(u_1)(t, x) - \phi(u_2)(\tilde{t}, x))\alpha_j(t, \tilde{t}),$$

and in (4.12) written for u_2 in variables $(\tilde{t}, x)$, we take

$$-sgn_\eta(\phi(u_1)(t, x) - \phi(u_2)(\tilde{t}, x))\alpha_j(t, \tilde{t}) = -v(t, \tilde{t}, x).$$

For any positive real j,

$$\alpha_j(t, \tilde{t}) = \gamma(\frac{t + \tilde{t}}{2})\rho_j(\frac{t - \tilde{t}}{2}),$$

where γ is a nonnegative element of $\mathcal{C}_c^\infty(]0, T[)$, and j is small enough for α_j to belong to $\mathcal{C}_c^\infty(]0, T[\times]0, T[)$, $\alpha_j \ge 0$. We add up and it comes:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^T \langle\langle \partial_t u_1 - \partial_{\tilde{t}} \tilde{u}_2, sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\rangle\rangle \alpha_j dt d\tilde{t} \\
&+ \int_{]0,T[\times Q_p} \nabla(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) \cdot \nabla sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
&- \int_{]0,T[\times Q_p} (f_p(u_1) - f_p(\tilde{u}_2))\boldsymbol{b}_p \cdot \nabla sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
&+ \int_{]0,T[\times Q_p} (g_p(t, x, u_1) - g_p(\tilde{t}, x, \tilde{u}_2)) sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
= &\int_0^T \operatorname*{ess\,lim}_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_{hp}} f_h(u_1(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h))\boldsymbol{b}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_j d\sigma d\tilde{t} \\
&- \int_0^T \operatorname*{ess\,lim}_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_{hp}} f_h(u_2(\tilde{\sigma} + \tau \boldsymbol{\nu}_h))\boldsymbol{b}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_j dx dt d\tilde{t}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

To simplify the writing we add a "tilde" superscript to any function in the $\tilde{t}$ variable. We want to pass to the limit in (4.15), first when η goes to 0^+ and then when j tends to 0^+. To do so, we have to transform some lines.

In the first one of the left-hand side, we use for each term an integration by parts formula based on the F. Mignot- A. Bamberger Lemma (see Lemma 0.8) to obtain:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^T \langle\langle \partial_t u_1 - \partial_t \tilde{u}_2, sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\rangle\rangle \alpha_j dt d\tilde{t} \\
= & -\int_{]0,T[\times Q_p} \left(\left(\int_{\tilde{u}_2}^{u_1} sgn_\eta(\phi(r) - \phi(\tilde{u}_2)) dr \right) \partial_t \alpha_j \right) dx dt d\tilde{t} \\
& -\int_{]0,T[\times Q_p} \left(\left(\int_{\tilde{u}_2}^{u_1} sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(r)) dr \right) \partial_{\tilde{t}} \alpha_j \right) dx dt d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

In the third line of (4.15), we write $f_p(u) = f_p \circ \phi^{-1}(\phi(u))$ for $u = u_1$ and for $u = \tilde{u}_2$. Then due to (4.14) and to the Young inequality (see Property 0.9) with $p = 2$, we derive that:

$$\begin{aligned}
& -\int_{]0,T[\times Q_p} (f_p(u_1) - f_p(\tilde{u}_2)) \boldsymbol{b}_p \cdot \nabla sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) \alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
\leq \quad & \frac{\mathcal{C}^2 \|\boldsymbol{b}_p\|_{L^\infty(\Omega_p)^n}}{2} \int_{]0,T[\times Q_p} |\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)|^{2\theta} sgn'_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) \alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
& + \frac{1}{2} \int_{]0,T[\times Q_p} sgn'_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) |\nabla(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))|^2 \alpha_j dx dt d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

In the right-hand side of the previous inequality, the second integral vanishes into the diffusion term. By definition of sgn_η, the first one is bounded by:

$$C \int_{]0,T[\times Q_p} \eta^{2\theta - 1} \alpha_j \mathbb{I}_{[-\eta < \phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2) < \eta]} dx dt d\tilde{t},$$

that goes to 0 with η as soon as $\theta \geq \frac{1}{2}$. Moreover, in order to use the Lipschitz property of g_p, we write the reaction term under the form:

$$\begin{aligned}
& \int_{]0,T[\times Q_p} (g_p(t, x, u_1) - g_p(t, x, \tilde{u}_2)) sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) \alpha_j dx dt d\tilde{t} \\
& + \int_{]0,T[\times Q_p} (g_p(t, x, \tilde{u}_2) - g_p(\tilde{t}, x, \tilde{u}_2)) sgn_\eta(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2)) \alpha_j dx dt d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

We study now the right-hand side of (4.15). Since $u_1 = u_2$ a.e. on Q_h, then $u_1(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h) = u_2(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h)$, for any negative τ. Thus we refer to relation (4.10) for $k \leq -\|u_1\|_\infty$ to state the existence of θ in $L^\infty(\Sigma_{hp})$ such that, for any β in $L^1(\Sigma_{hp})$,

$$\begin{aligned}
& \operatorname*{ess\,lim}_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_{hp}} f_h(u_1(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h)) \boldsymbol{b}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h \beta(\sigma) dt d\mathcal{H}^{n-1} \\
= \quad & \operatorname*{ess\,lim}_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_{hp}} f_h(u_2(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h)) \boldsymbol{b}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h \beta(\sigma) dt d\mathcal{H}^{n-1} \\
= \quad & \int_{\Sigma_{hp}} \theta(\sigma) \beta(\sigma) dt d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Then we need to consider the term:

$$\int_0^T \int_{\Sigma_{hp}} (\theta(t,\overline{\sigma}) - \theta(\tilde{t},\overline{\sigma}))sgn_\eta(\phi(u_1)(\sigma) - \phi(u_2)(\tilde{t},\overline{\sigma}))\alpha_j(\tilde{t},t)dtd\mathcal{H}^{n-1}d\tilde{t}.$$

Finally, when η goes to 0^+ in (4.15), through the Lebesgue-dominated convergence Theorem, it comes:

$$\begin{aligned} & -\int_{]0,T[\times Q_p} |u_1 - u_2|(\partial_t\alpha_j + \partial_{\tilde{t}}\alpha_j)dxdtd\tilde{t} \\ \leq \; & \int_0^T\int_0^T\int_{\Gamma_{hp}} |\theta(t,\overline{\sigma}) - \theta(\tilde{t},\overline{\sigma})|\alpha_j dtd\mathcal{H}^{n-1}d\tilde{t} + M'_{g_p}\int_{]0,T[\times Q_p} |u_1 - u_2|\alpha_j dxdtd\tilde{t} \\ & + \int_{]0,T[\times Q_p} |g_p(t,x,\tilde{u}_2) - g_p(\tilde{t},x,\tilde{u}_2)|\alpha_j dxdtd\tilde{t}. \end{aligned}$$

Now we come back to the definition of α_j to express the sum $\partial_t\alpha_j + \partial_{\tilde{t}}\alpha_j$. Then we are able to take the limit with respect to j through the notion of the Lebesgue's point for an integrable function on $]0,T[$. For any γ in $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, we obtain:

$$-\int_{Q_p} |u_1 - u_2|\gamma'(t)dxdt \leq M_{g_p}\int_{Q_p} |u_1 - u_2|\gamma(t)dxdt.$$

Then we use the Gronwall Lemma (see Lemma 0.7) to complete the proof of Theorem 4.9. □

4.4 The Existence Property

4.4.1 The second order problem

We approximate a weak solution to (4.1) through a sequence of solutions to viscous problems linked to (4.1) by adding a diffusion term in accordance with the proposed physical modelling of two layers in the subsoil with different geological characteristics. Thus, for any positive μ, we are first interested in the uniqueness and existence of a measurable and bounded function u_μ on Q satisfying:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_\mu + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) & = & \mathrm{div}_x(\lambda_\mu\nabla_x\phi_\mu(u_\mu)) & \text{in } Q, \\ u_\mu & = & 0 & \text{on }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u_\mu(0,.) & = & u_0 & \text{on } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.16}$$

with

$$\lambda_\mu(x) = \mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + \mu\mathbb{I}_{\Omega_h}(x),$$

and

$$\phi_\mu(u_\mu) = \phi(u_\mu) + \mu u_\mu.$$

We define:

$$N_1 = \sum_{l\in\{h,p\}} M_{g_l},\ N_2 = \sum_{l\in\{h,p\}} M_{f_l}\|\mathrm{div}\boldsymbol{b}_l\|_{L^\infty(\Omega_l)},\ \mathcal{N} = N_1 + N_2.$$

and

$$N_3 = \sum_{l\in\{h,p\}} \operatorname*{ess\ sup}_{[0,T]\times\overline{\Omega}_l} (g_l(t,x,b) + f_l(b)\mathrm{div}(\boldsymbol{b}_l))^-,$$
$$N_4 = \sum_{l\in\{h,p\}} \operatorname*{ess\ sup}_{[0,T]\times\overline{\Omega}_l} (g_l(t,x,a) + f_l(a)\mathrm{div}\boldsymbol{b}_l)^+.$$

This way, we can assert

$$\exists!\ M \in \mathbb{R}^+, Me^{\mathcal{N}T} + \tfrac{N_3}{\mathcal{N}}(e^{\mathcal{N}T} - 1) = b,$$
$$\exists!\ m \in \mathbb{R}^-, me^{\mathcal{N}T} - \tfrac{N_4}{\mathcal{N}}(e^{\mathcal{N}T} - 1) = a$$

Then we consider an initial datum in $L^\infty(\Omega)$ such that

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u_0 = M \quad \text{and} \quad \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u_0 = m.$$

Finally we introduce the nonnegative and nondecreasing time-dependant function

$$M_1 : t \in [0,T] \to M_1(t) = Me^{\mathcal{N}t} + \frac{N_3}{\mathcal{N}}(e^{\mathcal{N}t} - 1), \tag{4.17}$$

and the nonpositive and nonincreasing function

$$M_2 : t \in [0,T] \to M_2(t) = me^{\mathcal{N}t} - \frac{N_4}{\mathcal{N}}(e^{\mathcal{N}t} - 1). \tag{4.18}$$

We notice that $M_1(T) = b \geq M$ and $M_2(T) = a \leq m$.

We investigate the behavior of the sequence $(u_\mu)_{\mu>0}$ when μ goes to 0^+. With this view, in order to deal with bounded solutions, we introduce the following assumptions on f_h and f_p *a.e.* on Γ_{hp}:

$$\forall r \in [M,b],\ (f_p(r)\boldsymbol{b}_p - f_h(r)\boldsymbol{b}_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_h \geq 0, \tag{4.19}$$
$$\forall r \in [a,m],\ (f_p(r)\boldsymbol{b}_p - f_h(r)\boldsymbol{b}_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_h \leq 0, \tag{4.20}$$

This way we may state the first main theorem of this section:

Proposition 4.10. *Under* (4.19) *and* (4.20) *there exists a unique solution u_μ to* (4.16) *in $W(0,T)\cap L^\infty(Q)$ such that:*

$$\forall t \in [0,T], M_2(t) \leq u_\mu(t,.) \leq M_1(t)\ a.e.\ in\ \Omega, \tag{4.21}$$

$$u_\mu(0,.) = u_0\ a.e.\ in\ \Omega. \tag{4.22}$$

Moreover u_μ satisfies the variational equality for any v in $H^1_0(\Omega)$, and for a.e. t in $]0,T[$:

$$\langle\partial_t u_\mu, v\rangle + \int_\Omega((\lambda_\mu(x)\nabla_x\phi_\mu(u_\mu) - \boldsymbol{b}(x)f(u_\mu))\cdot\nabla_x v + g(t,x,u_\mu)v)dx = 0. \tag{4.23}$$

Remark 4.11. *We remind that since u_μ belongs to $W(0,T)$, for any t in $[0,T]$, $u_\mu(t,.)$ is an element of $L^2(\Omega)$; that gives a meaning to $u_\mu(0,.)$ a.e. in Ω (see Definition 0.3)*

Proof. (a) In a first step we use a troncation process as in Chapter 3. For any real a,b,c, $\mathcal{B}(a,b,c) = \max\{a, \min\{b,c\}\}$. Then, for a fixed positive μ, we introduce the modified problem:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Find } u_\mu \text{ in } W(0,T) \text{ such that a.e. on }]0,T[\text{ and for all } v \text{ in } H_0^1(\Omega),\\ \langle \partial_t u_\mu, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega ((\lambda_\mu(x)\phi'_\mu(u_\mu^\star)\nabla_x u_\mu - \boldsymbol{b}(x) f(u_\mu^\star))\cdot \nabla_x v + g(t,x,u_\mu^\star)v)dx = 0.\end{array}\right. \tag{4.24}$$

where $u_\mu^\star = \mathcal{B}(M_2(t), u_\mu, M_1(t))$.

First we show that (4.21)-(4.23) is equivalent to (4.24). It is clear that if u_μ satisfies (4.21)-(4.23) then u_μ fulfills (4.24). So let u_μ be a solution to (4.24). In order to obtain the majoration for u_μ in (4.21), we consider in (4.24) the test-function $v_\eta = sgn_\eta(u_\mu - M_1(t))^+$ and we integrate over $]0,s[$, for any s of $]0,T]$.

For the evolution term, one adds and subtracts $\langle \partial_t M_1(t), v_\eta\rangle$. Then we integrate through a F. Mignot- A. Bamberger formula (see Lemma 0.8).

Since v_η and $\nabla_x v_\eta$ are supported on $\{u_\mu > M_1\}$, we can state that (by denoting $Q_s =]0,s[\times\Omega$):

$$-\int_{Q_s} f(u_\mu^\star)\boldsymbol{b}(x)\cdot\nabla_x v_\eta dxdt = -\int_{Q_s} f(M_1(t))\boldsymbol{b}(x)\cdot\nabla_x v_\eta dxdt$$

and

$$\int_{Q_s} g(t,x,u_\mu^\star)v_\eta dxdt = \int_{Q_s} g(t,x,M_1(t))v_\eta dxdt$$

For the convective term we use a Green formula to obtain:

$$\begin{aligned}-\int_{Q_s} f(M_1(t))\boldsymbol{b}(x)\cdot\nabla_x v_\eta dxdt &= \sum_{l\in\{h,p\}}\int_0^s\int_{\Omega_l} f_l(M_1(t))\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_l(x)v_\eta dxdt\\ &+\int_{\Sigma_{hp}}(f_p(M_1(t))\boldsymbol{b}_p\cdot\boldsymbol{\nu}_h - f_h(M_1(t))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h)v_\eta dtd\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Then we use (4.19) to ensure the interface integral is nonnegative.

The diffusive term is also nonnegative. Thus, when η goes to 0^+, it comes:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u_\mu(s,x) - M_1(s))^+dx + \int_{Q_s} M'_1(t)sgn(u_\mu - M_1(t))^+dxdt\\ &+\sum_{i\in\{h,p\}}\int_{Q_{i,s}}(f_i(M_1(t))\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_i(x) + g_i(t,x,M_1(t)))sgn(u_\mu - M_1(t))^+dxdt \le 0.\end{aligned}$$

By coming back to the definition of M_1, a.e. on Q,

$$
\begin{aligned}
&M_1'(t) + \sum_{l\in\{h,p\}} (f_l(M_1(t))\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,M_1(t)))\mathbb{I}_{\Omega_l}\\
&= \mathcal{N} M_1(t) + N_3 + \sum_{l\in\{h,p\}} (f_l(M_1(t))\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,M_1(t)))\mathbb{I}_{\Omega_l}\\
&\geq \mathcal{N} M_1(t) + N_3 - \mathcal{N} M_1(t) + \mathcal{N} b + \sum_{l\in\{h,p\}} (f_l(b)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,b))\mathbb{I}_{\Omega_l}\\
&\geq N_3 + \mathcal{N} b + \sum_{l\in\{h,p\}} \{(f_l(b)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,b)))^+ - (f_l(b)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,b)))^-\}\\
&\geq \mathcal{N} b + \sum_{l\in\{h,p\}} (f_l(b)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_l(x) + g_l(t,x,b)))^+\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

The conclusion follows.

The reasoning for the minoration in (4.21) is similar. We consider the test-function $v_\eta = -sgn_\eta(u_\mu - M_2(t))^-$ in (4.24) and we use (4.20) to ensure that the integral along the interface is nonnegative.

Thus the existence property for (4.16) is reduced to an existence result to (4.24). To do so we use the Schauder-Tychonoff fixed point Theorem (see Theorem 0.10). So, for a given w in $W(0,T)$, we consider the linearized problem:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{find } U \text{ in } W(0,T) \text{ such that for any } v \text{ in } H_0^1(\Omega) \text{ and a.e. in }]0,T[,\\
\langle \partial_t U, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega ((\lambda_\mu \phi_\mu'(w^\star)\nabla_x U - f(u)\boldsymbol{b}(x)\cdot + g(t,x,w^\star)v)dx = 0,\\
U(0,.) = u_0.
\end{array}
\right. \tag{4.25}
$$

It is well-known that (4.25) has a unique solution. Thus we may define the operator

$$
\begin{array}{rccc}
\mathcal{T}: & W(0,T) & \rightarrow & W(0,T)\\
& w & \rightarrow & U \equiv \mathcal{T}(w)
\end{array}
$$

where U is the unique solution to (4.25).

By choosing $v = U$ in (4.25) we argue that there exists a positive constant C_1, independent of w, such that:

$$\|U\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_1.$$

The former estimate and the definition of the norm in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ entail by coming back to (4.25) that there exists a constant C_2, independant on w, such that:

$$\|\partial_t U\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \leq C_2.$$

Hence we denote $C_3 = (C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}$ and we can state that

$$\mathcal{C} = \{U \in W(0,T), \|U\|_{W(0,T)} \leq C_3, U(0,.) = u_0 \text{ a.e. in } \Omega\}$$

is a convex set, weakly compact in $W(0,T)$ and such that $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. As $\mathcal{C}$ is a metric space for the weak topology $\sigma(W(0,T), W'(0,T))$, we consider a sequence $(w_n)_n$ converging toward w weakly in $W(0,T)$ in order to establish that $(\mathcal{T}(w_n))_n$ weakly converges toward $\mathcal{T}(w)$ in $W(0,T)$. For any n, we set $U_n = \mathcal{T}(w_n)$. Since $(U_n)_n$ is bounded in $W(0,T)$ there exists U in $W(0,T)$ such that up to a subsequence, (U_n) goes to U weakly in $W(0,T)$, stongly in $L^2(Q)$. Moreover $U_n(0,.)$ goes to $U(0,.)$ weakly in $L^2(\Omega)$. Consequently $U(0,.) = u_0$ a.e. in Ω and thus by taking the limit with respect to n in (4.25), we prove that $U = \mathcal{T}(w)$. As (4.25) admits an unique solution, the whole sequence $(U_n)_n$ converges towards $\mathcal{T}(w)$. Eventually $\mathcal{T}$ has at least one fixed point u_μ that is namely a solution to (4.24) (and so to (4.21)-(4.23)).

(b) We have to prove now the uniqueness of a solution to (4.21)-(4.23). To this purpose, as in Chapter 3 we use a Holmgren-type duality method.

Let u and $\widehat{u}$ be two weak solutions. For any t of $[0,T]$, we consider $z(t,.)$ (resp. $\widehat{z}(t,.)$) in $H_0^1(\Omega)$ such that for all v in $H_0^1(\Omega)$, for all t in $[0,T]$:

$$\int_\Omega \lambda_\mu \nabla_x z \cdot \nabla_x v dx = \int_\Omega u v dx \text{ (resp. } \int_\Omega \lambda_\mu \nabla_x \widehat{z} \cdot \nabla_x v dx = \int_\Omega \widehat{u} v dx). \tag{4.26}$$

Let us remark that since $\partial_t u$ (resp. $\partial_t \widehat{u}$) belongs to $L^2(0,T;V')$, we are able to define, for a.e. t in $]0,T[$, $\partial_t z$ (resp. $\partial_t \widehat{z}$) in $H_0^1(\Omega)$ characterized by the variational equality:

for any v in $H_0^1(\Omega)$ and any t in $[0,T]$,

$$\int_\Omega \lambda_\mu \nabla_x \partial_t z \cdot \nabla_x v dx = \langle \partial_t u, v \rangle \text{(resp. } \int_\Omega \lambda_\mu \nabla_x \partial_t \widehat{z} \cdot \nabla_x v dx = \langle \partial_t \widehat{u}, v \rangle). \tag{4.27}$$

First we take $v = z - \widehat{z}$ in (4.23) written for u and for $\widehat{u}$, and in (4.27). We integrate between 0 and s, $s \in [0,T]$, to obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_s} \lambda_\mu \nabla_x \partial_t (z - \widehat{z}) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt + \int_{Q_s} \lambda_\mu \nabla_x (\phi_\mu(u) - \phi_\mu(\widehat{u}) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt \\
&= \int_{Q_s} (\boldsymbol{b}(x) f(u) - \boldsymbol{b}(x) f(\widehat{u})) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt - \int_{Q_s} (g(t,x,u) - g(t,x,\widehat{u})(z - \widehat{z}) dx dt.
\end{aligned}$$

We observe that

$$\begin{aligned}
\int_{Q_s} \lambda_\mu \nabla_x \partial_t (z - \widehat{z}) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt &= \int_{Q_s} \lambda_\mu \partial_t (\nabla_x (z - \widehat{z})) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_\mu |\nabla_x (z - \widehat{z})|^2 (s,.) dx,
\end{aligned}$$

since $\nabla_x z(0,.) = \nabla_x \widehat{z}(0,.)$ as a consequence of (4.26) with $t = 0$.

In addition we choose $v = \phi_\mu(u) - \phi_\mu(\widehat{u})$ in (4.26) to write:

$$\begin{aligned}
\int_{Q_s} \lambda_\mu \nabla_x (\phi_\mu(u) - \phi_\mu(\widehat{u})) \cdot \nabla_x (z - \widehat{z}) dx dt &= \int_{Q_s} (u - \widehat{u})(\phi_\mu(u) - \phi_\mu(\widehat{u})) dx dt \\
&\geq \mu \|u - \widehat{u}\|_{L^2(Q_s)}^2.
\end{aligned}$$

Now we use the Lipschitz condition for f_l and g_l, $l \in \{h, p\}$. So the Young inequality with $p = 2$ (see Property 0.9) provides, for any s in $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_\mu |\nabla(z-\widehat{z})|^2(s,.)dx + \mu\|u-\widehat{u}\|^2_{L^2(Q_s)} \\
\leq\ & 2\|u-\widehat{u}\|_{L^2(Q_s)}(\max(\|\boldsymbol{b}_h\|_\infty M_{f_h}, \|\boldsymbol{b}_p\|_\infty M_{f_p})\|\nabla(z-\widehat{z})\|_{L^2(Q_s)^n} \\
& + \max(M_{g_h}, M_{g_p})\|z-\widehat{z}\|_{L^2(Q_s)}).
\end{aligned}$$

The Poincaré inequality (to estimate $\|z-\widehat{z}\|_{L^2(Q_s)}$ with $\|\nabla(z-\widehat{z})\|_{L^2(Q_s)^n}$) and the Young inequality lead to the existence of a positive constant C such that:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_\mu |\nabla(z-\widehat{z})|^2(s,.)dx \leq C\|\nabla(z-\widehat{z})\|^2_{L^2(Q_s)^n}.$$

Since $z(t,.)$ and $\widehat{z}(t,.)$ belong to $H^1_0(\Omega)$, we conclude by using the Gronwall Lemma (see Lemma 0.7). □

This previous duality method allows us also to state the following useful result:

Proposition 4.12. *For any positive μ, the weak solution u_μ satisfying* (4.21)-(4.23) *is such that $\sqrt{t}\partial_t u_\mu$ belongs to $L^2(Q)$.*

Proof. For the sake of simplicity we write u instead of u_μ. Let h be an element of $]0, T[$. For any t of $[0, T-h]$, we consider the functions $z(t,.)$ and $\widehat{z}(t,.)$ of $H^1_0(\Omega)$ given by (4.26) for the corresponding $u(t+h,.)$ and $u(t,.)$ that is to say, for any v in $H^1_0(\Omega)$:

$$\int_\Omega \lambda_\mu \nabla z(t,.)\cdot\nabla v dx = \int_\Omega u(t+h,.)v dx \ \text{ and } \int_\Omega \lambda_\mu \nabla\widehat{z}(t,.)\cdot\nabla v dx = \int_\Omega u(t,.)v dx.$$

The time variable being fixed, we take $v = t(z-\widehat{z})$ in (4.23), for $u(t+h,.)$ and for $u(t,.)$. We integrate with respect to t from 0 to $T-h$ and we substract the two resulting equalities. We obtain :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-h} t\langle\partial_t u((t+h,.)-u(t,.)), (z-\widehat{z})\rangle dt \\
& + \int_0^{T-h} t\int_\Omega \lambda_\mu(x)\nabla_x(\phi_\mu(u)(t+h,x)-\phi_\mu(u)(t,x))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt \\
=\ & \int_0^{T-h} t\int_\Omega (\boldsymbol{b}(x)f(u(t+h,x)-\boldsymbol{b}(x)f(u(t,x)))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt \\
& - \int_0^{T-h} t\int_\Omega (g(t+h,x,u(t+h,x))-g(t,x,u(t,.))(z-\widehat{z})dxdt.
\end{aligned}$$

By (4.27), we also have :

$$\langle\partial_t u(t+h,.), v\rangle = \int_\Omega \lambda_\mu\nabla\partial_t z\cdot\nabla v dx \ \text{ and } \ \langle\partial_t u(t,.), v\rangle = \int_\Omega \lambda_\mu\nabla\partial_t\widehat{z}\cdot\nabla v dx.$$

So we can write :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-h} t\langle \partial_t(u(t+h,.)-u(t,.)),(z-\widehat{z})\rangle dt\\
=\ &\int_0^{T-h}\int_\Omega t\lambda_\mu \nabla_x \partial_t(z-\widehat{z})\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt\\
=\ &\frac{1}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega t\lambda_\mu \partial_t|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2 dxdt\\
=\ &-\frac{1}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega \lambda_\mu|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega (T-h)\lambda_\mu|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2(T-h,x)dx,
\end{aligned}$$

thanks to an integration by parts.

Thus :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (T-h)\lambda_\mu|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2(T-h,x)dx\\
&+\int_0^{T-h} t\int_\Omega \lambda_\mu(x)\nabla_x(\phi_\mu(u)(t+h,x)-\phi_\mu(u)(t,x))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt\\
=\ &\int_0^{T-h} t\int_\Omega (\boldsymbol{b}(x)f(u(t+h,x)-\boldsymbol{b}(x)f(u(t,x)))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt\\
&-\int_0^{T-h} t\int_\Omega (g(t+h,x,u(t+h,x))-g(t,x,u(t,.))(z-\widehat{z})dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{T-h} t\int_\Omega \lambda_\mu|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{4.28}$$

First we want to minorize the left-hand side of (4.28). By using (4.26) with $v=\phi_\mu(u(t+h,x))-\phi_\mu(u(t,h))$, we have :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \lambda_\mu(x)\nabla_x(\phi_\mu(u(t+h,x))-\phi_\mu(u(t,h))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})\\
=\ &\int_\Omega (\phi_\mu(u(t+h,x))-\phi_\mu(u(t,x))(u(t+h,x)-u(t,x))dx
\end{aligned}$$

Since the first term in the left-hand side of (4.28) is nonnegative, and $\phi_\mu(u)=\phi(u)+\mu u$, we can deduce from (4.28) that :

$$\begin{aligned}
&\mu\int_0^{T-h} t\|u(t+h,.)-u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
\leq\ &\int_0^{T-h} t\int_\Omega (\boldsymbol{b}(x)f(u(t+h,x))-\boldsymbol{b}(x)f(u(t,x)))\cdot\nabla_x(z-\widehat{z})dxdt\\
&-\int_0^{T-h} t\int_\Omega (g(t+h,x,u(t+h,x))-g(t,x,u(t,.))(z-\widehat{z})dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{T-h} t\int_\Omega \lambda_\mu|\nabla_x(z-\widehat{z})|^2dxdt
\end{aligned}\tag{4.29}$$

Then we look at the right-hand side. First we highlight that for $v = (z - \widehat{z})(t,.)$ in (4.26), we obtain :

$$\lambda_\mu \int_\Omega (\nabla(z-\widehat{z})(t,x))^2 dx = \int_\Omega (u(t+h,x) - u(t,x))(z-\widehat{z})(t,.)dx$$

and that provides :

$$\min(1,\mu)\|(z-\widehat{z})(t,.)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u(t+h,.) - u(t,.)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

In the sequel we denote by C a generic constant independent of any parameter and by $C(\mu)$ a generic constant independent of h and u_0 (but that can depend on μ). By reasoning on Ω_h and Ω_p, and using the Lipschitz condition for f_h and f_p, the Young inequality (see Lemma 0.9 with $p = 2$) provides that the first line in the right-hand side of (4.28) is bounded. Indeed:

$$\left|\int_0^{T-h} t \int_\Omega (\boldsymbol{b}(x)f(u(t+h) - \boldsymbol{b}(x)f(u(t))) \cdot \nabla_x(z-\widehat{z})dxdt\right| \leq$$
$$\frac{\mu}{2}\int_0^{T-h} t \int_\Omega |u(t+h,.) - u(t,.)|^2 dxdt + \frac{C}{\mu\min(1,\mu)^2}\int_0^{T-h} \|u(t+h,.) - u(t,.)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt. \tag{4.30}$$

In the second line, on the right-hand side of (4.28), the same ideas drive us to introduce the decomposition :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{T-h} t \int_\Omega (g(t+h,x,u(t+h,x)) - g(t,x,u(t,.))(z-\widehat{z})dxdt\right| \\
\leq\ & \int_0^{T-h} t \int_\Omega |g(t+h,x,u(t+h,x)) - g(t+h,x,u(t,x))||z-\widehat{z}|dxdt \\
&+ \int_0^{T-h} t \int_\Omega |g(t+h,x,u(t,x)) - g(t,x,u(t,x))||z-\widehat{z}|dxdt.
\end{aligned}$$

This way, we use the Lipschitz condition of g_l, $l \in \{h,p\}$, the Young and Poincaré inequalities (to bound $\|z-\widehat{z}\|_{L^2(\Omega)}$ by $\|z-\widehat{z}\|_{H_0^1(\Omega)}$). So the first term is bounded by an expression of the type (4.30) and the second one by :

$$C\left(h^2 + \frac{1}{\min(1,\mu)^2}\int_0^{T-h} \|u(t+h,.) - u(t,.)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt\right).$$

Thus we claim from (4.29) the existence of a generic constant C independent on h such that :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{2}\int_0^{T-h} \frac{t}{h^2}\|u(t+h,.) - u(t,.)\|^2_{L(\Omega)}dt \\
&\leq C\left(1 + \left(\frac{1}{\min(1,\mu)^2} + \frac{2}{\mu\min(1,\mu)^2}\right)\int_0^{T-h} \frac{\|u(t+h,.) - u(t,.)\|^2_{H^{-1}}}{h^2}dt\right).
\end{aligned}$$

We take the limit on h and it comes :

$$\frac{\mu}{2}\|\sqrt{t}\partial_t u\|^2_{L^2(Q)} \leq C\left(1 + \left(\frac{1}{\min(1,\mu)^2} + \frac{2}{\mu\min(1,\mu)^2}\right)\|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right).$$

that completes the proof. □

The existence and uniqueness property for (4.16) being established, we now look for *a priori* estimates fulfilled by the sequence $(u_\mu)_{\mu>0}$ in order to study its limit when μ goes to 0^+. The proof of Proposition 4.12 points out the fact that we cannot expect an μ-uniform estimate for $\partial_t u_\mu$ in $L^2_{loc}(0,T;L^2(\Omega))$. Nevertheless we have :

Proposition 4.13. *There exists a constant C independent on μ such that :*

$$\|(\lambda_\mu)^{1/2}\nabla_x\widehat{\phi}(u_\mu)\|^2_{L^2(Q)^n} + \|(\mu\lambda_\mu)^{1/2}\nabla_x u_\mu\|^2_{L^2(Q)^n} \leq C, \tag{4.31}$$

$$\|\partial_t u_\mu\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C, \tag{4.32}$$

where $\widehat{\phi}(x) = \int_0^x \sqrt{\phi'(\tau)}d\tau.$

Proof. In order to provide the estimate of $(\lambda_\mu)^{1/2}\nabla\widehat{\phi}_\mu(u_\mu)$ in $L^2(Q)$-norm, we take $v = u_\mu$ in (4.23) and integrate over $]0,T[$. We obtain:

$$\int_0^T \langle\partial_t u_\mu, u_\mu\rangle dt + \int_0^T\int_\Omega((\lambda_\mu(x)\nabla_x\phi_\mu(u_\mu) - \boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)).\nabla_x u_\mu + g(t,x,u_\mu)u_\mu)dxdt = 0.$$

The study of the others terms being classical, we are only interested in the convective one. We split it into two integrals over Q_h and Q_p. Then we write for l in $\{h,p\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_l} f_l(u_\mu)\boldsymbol{b}_l\cdot\nabla u_\mu dxdt\\
=\ &\int_{Q_l}\nabla\left(\int_0^{u_\mu} f_l(\tau)d\tau\right)\cdot\boldsymbol{b}_l dxdt\\
=\ &-\int_{Q_l}\left(\int_0^{u_\mu} f_l(\tau)d\tau\right)\mathrm{div}\boldsymbol{b}_l dxdt + \int_{\Sigma_{hp}}\left(\int_0^{u_\mu} f_l(\tau)d\tau\right)\boldsymbol{b}_l\boldsymbol{\nu}_l dtd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Due to (4.21) each term in the right-hand side is uniformly bounded with respect to μ and (4.31) follows.

Eventually (4.32) is obtained by coming back to the definition of the norm in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. We start from (4.23), we use (4.21) and (4.31), and we conclude by the same arguments as in the end of the proof of Proposition 4.8. □

4.4.2 The viscous limit

Our aim is now to describe the behavior of the sequence $(u_\mu)_{\mu>0}$ when μ goes to 0^+. On the hyperbolic domain we take advantage of (4.21) and Theorem 0.11.

On the parabolic area, estimates (4.21), (4.31) and (4.32) are not sufficient to study the behavior of $(u_\mu)_{\mu>0}$. That is why we use an additional assumption on ϕ:

$$\phi^{-1} \text{ is Hölder continuous with an exponent } \tau \in]0,1[. \tag{4.33}$$

In this framework, we can state the following proposition

Proposition 4.14. *Under* (4.33)*, there exists a measurable function* u *in* $L^\infty(Q)$ *with* $\phi(u)$ *in* $L^2(0,T;V)$ *and such that up to a subsequence when* μ *goes to* 0^+,

$$\begin{aligned}&u_\mu \rightharpoonup u \text{ in } L^\infty(Q) \text{ weak} - \star\\ &u_\mu \to u \text{ in } L^q(Q_p) \text{ strongly for any finite } q \text{ and a.e. on } Q_p.\end{aligned}$$

Besides we also have

$$\begin{aligned}&\nabla_x\phi(u_\mu) \rightharpoonup \nabla_x\phi(u) \text{ weakly in } L^2(Q_p)^n\\ &\mu\nabla_x\phi(u_\mu) \to 0, \lambda_\mu\mu\nabla_x u_\mu \to 0 \text{ strongly in } L^2(Q_h)^n.\end{aligned}$$

Proof. We just prove the strong convergence of $(u_\mu)_{\mu>0}$ in $L^q(Q_p)$. The other ones are deduced from Proposition 4.13. We refer to the arguments put forward in [21], chapter 2. From (4.32) the sequence $(\partial_t u_\mu)_{\mu>0}$ remains fixed in a bounded subset of $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_p))$. Moreover, due to (4.21) and (4.31), the sequence $(\phi(u_\mu))_{\mu>0}$ is bounded in $L^2(0,T;V)$ uniformly with respect to μ. Using that for any s in $]0,1[$,

$$L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega_p)) \hookrightarrow L^2(0,T;W^{s,2}(\Omega_p)),$$

we argue that $u_\mu \equiv \phi_\mu^{-1}(\phi_\mu(u_\mu))$ is bounded in $L^{2/\tau}(0,T;W^{\tau s,2/\tau}(\Omega_p))$. The compactness embedding of $W^{\tau s,2/\tau}(\Omega_p)$ into $L^{2/\tau}(\Omega_p)$ and the J.L.Lions compactness Theorem ([38], p. 57) ensure that

$$\mathcal{W} \equiv \{v \in L^{2/\tau}(0,T;W^{\tau s,2/\tau}(\Omega_p)), \partial_t v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_p))\}$$

is compactly embedded in $L^{2/\tau}(0,T;L^{2/\tau}(\Omega_p))$. The conclusion follows. □

We are now able to state the second main theorem of this section:

Theorem 4.15. *Problem* (4.1) *has a weak entropy solution that is the limit in* $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ *of the whole sequence of solutions to* $(4.16)_{\mu>0}$ *when* μ *goes to* 0^+.

Proof. We consider the function u highlighted in Proposition 4.14. Since $(u_{\mu|\Omega_h})_{\mu>0}$ is uniformly bounded, thanks to Theorem 0.11, there exists a subsequence - still labelled $(u_{\mu|\Omega_h})_{\mu>0}$ - and a measurable and bounded function π - called a *process* - on $]0,1[\times Q_h$ such that for any continuous bounded function ψ on $Q_h\times]a,b[$ and ξ in $L^1(Q_h)$ (see Theorem 0.11),

$$\lim_{\mu\to 0^+}\int_{Q_h}\psi(t,x,u_\mu)\xi dxdt = \int_{]0,1[\times Qh}\psi(t,x,\pi(\alpha,t,x))\xi d\alpha dxdt. \tag{4.34}$$

We first establish that on Q_h, the *process* π is reduced to $u_{|\Omega_h}$ and secondly we prove that u is a weak entropy solution to (4.1) for initial data u_0.

To do so, we come back to (4.23) and for any real k we choose, for $\eta > 0$, the test-function $v_\eta^\mu \equiv sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\zeta_1\zeta_2$, where ζ_1 belongs to $\mathcal{C}_c^\infty(]-T,T[)$ and ζ_2 to $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\zeta_i \geq 0$ for $i = 1,2$. We obtain :

$$\langle\partial_t u_\mu, v_\eta^\mu\rangle + \int_\Omega((\lambda_\mu(x)\nabla_x\phi(u_\mu) - \boldsymbol{b}(x)f(u_\mu))\cdot\nabla_x v_\eta^\mu + g(t,x,u_\mu))v_\eta^\mu dx = 0.$$

We integrate with respect to the time variable and we perform the following transformations. For the evolution term, we set

$$I_\eta(u_\mu, k) = \int_k^{u_\mu} sgn_\eta(\phi(\tau) - \phi(k))d\tau.$$

Then through the F. Mignot- A. Bamberger integration by parts formula (see Lemma 0.8) it comes:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t u_\mu, sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\zeta_2\rangle \zeta_1 dt \\ = & -\int_Q I_\eta(u_\mu, k)\zeta_2\partial_t\zeta_1 dxdt - \int_\Omega I_\eta(u_0, k)\zeta_2\zeta_1(0)dx. \end{aligned}$$

For the diffusion term, we develop the partial derivatives and we use the fact that sgn_η is nondecreasing. We obtain :

$$\begin{aligned} \int_Q \lambda_\mu \nabla_x\phi_\mu(u_\mu)\cdot\nabla_x v_\eta^\mu dxdt \geq & \int_Q \lambda_\mu sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\nabla_x\phi(u_\mu)\zeta_1\cdot\nabla_x\zeta_2 dxdt \\ & + \int_Q \lambda_\mu\mu sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\nabla_x u_\mu\zeta_1\cdot\nabla_x\zeta_2 dxdt. \end{aligned}$$

Now, in order to take the μ-limit and then the η-limit separately on the parabolic zone and the hyperbolic one, the convection term is splitted into two integrals over Q_h and Q_p:

$$\begin{aligned} & \int_Q -\boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)\cdot\nabla_x sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\zeta_1\zeta_2 dxdt \\ = & -\sum_{l\in\{h,p\}}\int_{Q_l} f_l(u_\mu)sgn'_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\nabla_x\phi(u_\mu)\cdot\boldsymbol{b}_l\zeta_1\zeta_2 dxdt \\ & -\sum_{l\in\{h,p\}}\int_{Q_l} f_l(u_\mu)sgn_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\boldsymbol{b}_l\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 dxdt. \end{aligned}$$

Let us focus on the first line when $l = h$ (the reasoning when $l = p$ is similar). We consider the flux term

$$J_{\mu,\eta} = -\int_{Q_h} f_h(u_\mu)sgn'_\eta(\phi(u_\mu) - \phi(k))\nabla_x\phi(u_\mu)\cdot\boldsymbol{b}_h\zeta_1\zeta_2 dxdt$$

that has to be carefully studied since we only have weak convergences for $(u_\mu)_{\mu>0}$ and for $(\nabla\phi(u_\mu))_{\mu>0}$. That is why we introduce, for any real v and w,

$$D_{h,\eta}(v, w) = \int_w^v (f_h\circ\phi^{-1})(\tau)sgn'_\eta(\tau - w)d\tau.$$

Thus, thanks to the Green formula,

$$\begin{aligned} J_{\mu,\eta} &= -\int_{Q_h} \nabla_x(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu), \phi(k)))\cdot\boldsymbol{b}_h\zeta_1\zeta_2 dxdt \\ &= +\int_{Q_h} D_{h,\eta}(\phi(u_\mu), \phi(k))(\zeta_1\zeta_2\mathrm{div}\boldsymbol{b}_h + \zeta_1\nabla_x\zeta_2\cdot\boldsymbol{b}_h)dxdt \\ & \quad -\int_{\Sigma_{hp}} D_{h,\eta}(\phi(u_\mu), \phi(k))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta_1\zeta_2 dtd\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

We just mention that since $\phi(u_\mu)$ is an element of $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, for a.e. t of $]0,T[$, $(\phi(u_\mu)_{|\Omega_h})_{|\Gamma_{hp}} = (\phi(u_\mu)_{|\Omega_p})_{|\Gamma_{hp}}$.

We take now the μ-limit. For the boundary integral, $D_{h,\eta}(.,\phi(k))$ being nonlinear, the weak convergence of the traces of $\phi(u_\mu)$ on Σ_{hp} is not sufficient to pass to the limit. That is why we consider the sequence $(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\zeta_2)_{\mu>0}$. Thanks to Proposition 4.14 and since $D_{h,\eta}(.,\phi(k))$ is Lipschitz,

$$\begin{aligned}&(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\zeta_2)_{\mu>0} \text{ strongly converges towards}\\ &D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\zeta_2 \text{ in } L^q(Q_p),\ 1\le q<+\infty.\end{aligned}$$

Besides, thanks to a chain rule argument and estimate (4.31), we argue that:

$$(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\zeta_2)_{\mu>0} \text{ is uniformly bounded in } L^2(0,T;V)\cap L^\infty(Q),$$

and so,

$$\begin{aligned}&(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\zeta_2)_{\mu>0} \text{ weakly converges (up to a subsequence) towards}\\ &D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\zeta_2 \text{ in } L^2(0,T;V).\end{aligned}$$

As the trace operator from $L^2(0,T;V)$ into $L^2(\Sigma_{hp})$ is linear and continuous,

$$\begin{aligned}&(D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\zeta_2)_{\mu>0} \text{ weakly converges towards}\\ &D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\zeta_2 \text{ in } L^2(\Sigma_p), \text{ and so in } L^2(\Sigma_{hp}).\end{aligned}$$

To sum up,

$$\lim_{\mu\to 0}\int_{\Sigma_{hp}} D_{h,\eta}(\phi(u_\mu),\phi(k))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta_1\zeta_2 d\sigma = \int_{\Sigma_{hp}} D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta_1\zeta_2 d\mathcal{H}^{n-1}dt$$

Then, thanks to (4.34), it comes $\lim_{\mu\to 0^+} J_{\mu,\eta} = J_\eta$ where

$$\begin{aligned}J_\eta &= +\int_{Q_h\times]0,1[} D_{h,\eta}(\phi(\pi),\phi(k))(\zeta_1\zeta_2\mathrm{div}\boldsymbol{b}_h + \zeta_1\nabla_x\zeta_2\cdot\boldsymbol{b}_h)d\alpha dx dt\\ &\quad -\int_{\Sigma_{hp}} D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta_1\zeta_2 d\mathcal{H}^n.\end{aligned}$$

To sum up, for any fixed η, the following inequality holds :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_p} I_\eta(u,k)\zeta_2\partial_t\zeta_1 dxdt + \int_{Q_p} sgn_\eta(\phi(u)-\phi(k))f_p(u)\boldsymbol{b}_p\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 dxdt \\
&+\int_{Q_h\times]0,1[} I_\eta(\pi,k)\zeta_2\partial_t\zeta_1 d\alpha dxdt + \int_{Q_h\times]0,1[} sgn_\eta(\phi(\pi)-\phi(k))f_h(u)\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 d\alpha dxdt \\
&-\int_{Q_p} sgn_\eta(u-k)g_p(t,x,u)\zeta_1\zeta_2 dxdt - \int_{Q_h\times]0,1[} sgn_\eta(\pi-k)g_h(t,x,\pi)\zeta_1\zeta_2 d\alpha dxdt \\
&+\int_\Omega I_\eta(u_0)\zeta_1(0)\zeta_2 dx - \int_{Q_p} sgn_\eta(\Phi(u)-\Phi(k))\nabla_x(\phi(u)-\phi(k))\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 dxdt \\
&-\int_{Q_p}(sgn_\eta D_{p,\eta}(\phi(u),\phi(k))(\boldsymbol{b}_p\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 + \mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_p\zeta_1\zeta_2)dxdt \\
&-\int_{\Sigma_{hp}} D_{p,\eta}(\phi(u),\phi(k))\boldsymbol{b}_p\zeta_1\zeta_2\cdot\boldsymbol{\nu}_h dtd\mathcal{H}^{n-1} \\
&-\int_{Q_h\times]0,1[} D_{h,\eta}(\phi(\pi),\phi(k))(\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_h\zeta_1\zeta_2 + \boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 d\alpha dxdt) \\
&+\int_{\Sigma_{hp}} (D_{h,\eta}(\phi(u),\phi(k))\boldsymbol{b}_h\zeta_1\zeta_2\cdot\boldsymbol{\nu}_h dtd\mathcal{H}^{n-1} \ \geq 0.
\end{aligned}$$

with $D_{p,\eta}(v,w) = \displaystyle\int_w^v (f_p\circ\phi^{-1})(\tau)sgn'_\eta(\tau-w)d\tau.$

We take now the limit on η. We focus on the term J_η, the other ones being classical. By coming back to the definition of sgn'_η, and since $f_h\circ\phi^{-1}$ is continuous on $\phi([a,b])$, $(D_{h,\eta}(v,w))_\eta$ tends to $sgn(v-w)f_h\circ\phi^{-1}(w)$ a.e. on $Q_h\times]0,1[$ and $d\mathcal{H}^n$-a.e. on Σ_{hp}. From the Lebesgue dominated convergence Theorem, it follows that $\lim_{\eta\to 0^+} J_\eta = J$ where

$$\begin{aligned}
J \ = \ &\int_{Q_h\times]0,1[} sgn(\phi(\pi)-\phi(k))f_h(k)(\zeta_1\zeta_2\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_h + \zeta_1\nabla_x\zeta_2\cdot\boldsymbol{b}_h)d\alpha dxdt \\
&-\int_{\Sigma_{hp}} sgn(\phi(u)-\phi(k))f_h\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta_1\zeta_2 dtd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

We remark that $sgn(\phi(\pi)-\phi(k)) = sgn(\pi-k)$ a.e. on $Q_h\times]0,1[$. Eventually,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_p}(|u-k|\zeta_2\partial_t\zeta_1 + \Phi(u,k)\boldsymbol{b}_p\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1)dxdt \\
&+\int_{Q_h\times]0,1[}(|\pi-k|\zeta_2\partial_t\zeta_1 + \Phi(\pi,k)\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1)d\alpha dxdt \\
&-\int_{Q_p} sgn(u-k)(g_p(t,x,u) + f_p(k)\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_p)\zeta_1\zeta_2 dxdt \\
&-\int_{Q_h\times]0,1[} sgn(\pi-k)(g_h(t,x,\pi) + f_h(k)\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_p)\zeta_1\zeta_2 d\alpha dxdt \\
&+\int_\Omega |u_0-k|\zeta_2\zeta_1(0)dx - \int_{Q_p}\nabla_x|\phi(u)-\phi(k)|\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1 dxdt \\
&+\int_{\Sigma_{hp}}\{f_h(k)\boldsymbol{b}_h - f_p(k)\boldsymbol{b}_p\}\cdot\boldsymbol{\nu}_h sgn(\phi(u)-\phi(k))\zeta_1\zeta_2 dtd\mathcal{H}^{n-1} \ \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Now we justify that the process π fulfills the initial condition (4.5) on Ω_h. In (4.35), when we consider test-functions that belong to $C_c^\infty(\Omega_h)$, we deduce that :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h\times]0,1[}(|\pi-k|\zeta_2\partial_t\zeta_1+\Phi(\pi,k)\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1)d\alpha dxdt\\
&+\int_{Q_h\times]0,1[}sgn(\pi-k)(g_h(t,x,\pi)+f_h(k)\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_p)\zeta_1\zeta_2 d\alpha dxdt\\
\leq\ &\int_\Omega |u_0-k|\zeta_2\zeta_1(0)dx.
\end{aligned}$$

Therefore, by following F. Otto's ideas in [43] or in [40], chap.2, but here in the context of a process solution, we may be sure that :

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+}\int_{\Omega_h\times]0,1[}|\pi(\alpha,t,x)-\Lambda(x)|d\alpha dx\leq\int_{\Omega_h}|u_0-\Lambda(x)|dx, \tag{4.36}$$

for any bounded measurable Λ on Ω_h. So by choosing $\Lambda=u_0$ in (4.36), we obtain that π fulfills the initial condition (4.5).

Then let us show that π satisfies boundary condition (4.4). To this purpose, we consider the family of boundary entropy-entropy flux pair introduced by F. Otto [43] (see also Example 1.8),

$$\begin{aligned}
\forall\,\delta>0,\quad H_\delta(\tau,k)&=((\mathrm{dist}(\tau,I[0,k]))^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}-\delta\\
Q_{h,\delta}(\tau,k)&=\int_k^\tau\partial_1 H_\delta(\lambda,k)f_h'(\lambda)d\lambda.
\end{aligned}$$

We come back to (4.23) and we take the test-function $v=\partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\zeta_1\zeta_2$, where ζ_1 belongs to $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$ and ζ_2 to $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_h)$, $\zeta_2=0$ on Γ_{hp}, $\zeta_i\geq 0$. We emphasize that $\partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\zeta_1\zeta_2$ is an element of $L^2(0,T;H_0^1(\Omega_h))$ so that calculations may be performed as if we were in the single domain Q_h. In particular the Green formula does not give rise to integrals along the interface. We integrate with respect to the time variable, we use the F. Mignot- A. Bamberger Lemma. It provides, the convexity of the function $\xi\to H_\delta(\xi,.)$ being taken into account :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_h}(H_\delta(u_\mu,k)\zeta_2\partial_t\zeta_1+Q_{h,\delta}(u_\mu,k)\boldsymbol{b}_h\cdot\zeta_1\nabla_x\zeta_2-\mathcal{G}_{h,\delta}(u_\mu,k)\zeta_1\zeta_2)dxdt\\
&\leq-\mu\int_{Q_h}\partial_1 H_\delta(u_\mu,k)\zeta_1\nabla_x\zeta_2\cdot\nabla_x\phi_\mu(u_\mu)dxdt
\end{aligned}$$

with

$$\mathcal{G}_{h,\delta}(u_\mu,k)=\int_k^{u_\mu}f_h(\tau)\partial_{11}^2 H_\delta(\tau,k)d\tau\mathrm{div}_x\boldsymbol{b}_h+g_h(t,x,u_\mu)\partial_1 H_\delta(u_\mu,k).$$

We take advantange of (4.34) to take the μ-limit. It follows :

$$-\int_{]0,1[\times Q_h}\int_{Q_h}(H_\delta(\pi,k)\zeta_2\partial_t\zeta_1+Q_{h,\delta}(\pi,k)\boldsymbol{b}_h\cdot\nabla_x\zeta_2\zeta_1-\mathcal{G}_{h,\delta}(\pi,k)\zeta_1\zeta_2 d\alpha dxdt\geq 0.$$

At this point, we adapt F. Otto's works providing that, for any ζ of $L^1(\Sigma_h \setminus \Sigma_{hp})$, $\zeta \geq 0$:

$$\text{ess}\lim_{\tau\to 0^-}\int_{]0,1[\times\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}} Q_{h,\delta}(\pi(\alpha,\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}),k)\boldsymbol{b}_h(\overline{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nu}_h\zeta d\alpha dt d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0.$$

That yields to boundary condition (4.4) by observing that $(Q_{h,\delta})_{\delta>0}$ uniformly converges toward $\mathcal{F}_{0,h}$ as δ goes to 0^+.

So π "fulfills" (4.3) with $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(Q_h)$, (4.4), (4.5) where integrals over $\Sigma_h \setminus \Sigma_{hp}$, Ω_h and Q_h are respectively turned into integrals over $]0,1[\times\Sigma_h\setminus\Sigma_{hp}$, $]0,1[\times\Omega_h$ and $]0,1[\times Q_h$ with respect to the corresponding measure. This way, by reasoning as in Theorem 4.7, if $\pi_1(\alpha,.,.)$ and $\pi_2(\beta,.,.)$ are two process solutions for initial data $u_{0,1}$ ans $u_{0,2}$, then a.e. t in $]0,T[$,

$$\int_{]0,1[^2\times\Omega_h} |\pi_1(\alpha,t,x)-\pi_2(\beta,t,x)| d\alpha d\beta dx \leq e^{M_{g_h}t}\int_{\Omega_h}|u_{0,1}-u_{0,2}|dx.$$

Then, when $u_{0,1}=u_{0,2}$ on Ω_h, there exists a measurable and bounded function u_h on Q_h such that a.e on Q_h,

$$u_h(.,.) = \pi_1(\alpha,.,.) = \pi_2(\beta,.,.) \text{ for a.e. } \alpha \text{ and } \beta \text{ in }]0,1[.$$

Besides the uniqueness property ensures that the whole sequence $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ strongly converges to u_h in $L^q(Q_h)$, $1 \leq q < +\infty$.

Thus $u_h = u_{|Q_h}$ a.e. on Q_h and from (4.35) u atisfies (4.3) - for ζ of $\mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)\otimes\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ so by density for any ζ of $\mathcal{C}_c^\infty(Q)$ - and (4.4)

To complete the proof of Theorem 4.15, we only need to ensure that (4.5) holds for u. Due to (4.36) we just have to concentrate on Ω_p. We consider (4.35) for ζ_2 in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_p)$. We can state :

$$-\int_0^T\left(\int_{\Omega_p}|u-k|\zeta_2 dx + f(t)\right)\zeta_1'(t)dt \leq \int_{\Omega_p}|u_0-k|\zeta_2\zeta_1(0)dx,$$

with

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\Omega_p}\int_0^t sgn(u(\tau,x)-k)(f_p(u(\tau,x))-f_p(k))\boldsymbol{b}_p\cdot\nabla_x\zeta_2 d\tau dx \\ &+ \int_{\Omega_p}\int_0^t g_p(\tau,x,u(\tau,x))sgn(u(\tau,x)-k)\zeta_2 - |\phi(u(\tau,x))-\phi(k)|\Delta\zeta_2 d\tau dx \end{aligned}$$

So the time-depending function

$$t \longmapsto \int_0^t |u-k|\zeta_2 dx + f(t)$$

is identified a.e. with a nonincreasing and bouded function. So it has an essential limit when t goes to 0^+, $t \in]0,T[\backslash\mathcal{O}$, where $\mathcal{L}(\mathcal{O})=0$. As f goes to 0 with t it comes, for any function ζ_2 of $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_p)$, $\zeta_2 \geq 0$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_{\Omega_p} |u-k|\zeta_2 dx \leq \int_{\Omega_p} |u_0-k| dx.$$

The proof of Theorem (4.15) is achevied. □

4.5 Remarks

4.5.1 Interpretation of the problem

We have presented in this part the mathematical analysis of a class of scalar conservation laws with discontinuous flux functions. However Problem 4.1 can also be interpreted as a coupling problem between a quasilinear convection equation set in an *hyperbolic* area (namely Q_h) and a *weakly degenerate* diffusive one, set in a *parabolic* domain complementary to the former (namely Q_p). That is the spirit of [4], [5]. This problem may be formally written

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{b}_h(x) f_h(u)) + g_h(t,x,u) &= 0 & \text{on } Q_h,\\ \partial_t u + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{b}_p(x) f_p(u)) + g_p(t,x,u) &= \Delta\phi(u) & \text{on } Q_p,\\ u &= 0 & \text{on }]0,T[\times\partial\Omega,\\ u(0,.) &= u_0 & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

Of course, suitable conditions across the interface between the two regions Q_p and Q_h are needed. If we refer to the analysis of F. Gastaldi and *al.* in [22], these tranmission conditions have to be formally :

$$f_h(u)\boldsymbol{b}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h = (\nabla\phi(u) - f_p(u)\boldsymbol{b}_p)\cdot\boldsymbol{\nu}_p \text{ on } \Sigma_{hp}.$$

In the same way, the viscous problem (4.16) can be written under the form :

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u_\mu + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{b}_h(x) f_h(u_\mu)) + g_h(t,x,u_\mu) &=& \mu\Delta\phi_\mu(u_\mu) & \text{in } Q_h,\\ \partial_t u_\mu + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{b}_p(x) f_p(u_\mu)) + g_p(t,x,u_\mu) &=& \Delta\phi_\mu(u_\mu) & \text{in } Q_p,\\ (f_h(u_\mu)\boldsymbol{b}_h - \mu\nabla\phi_\mu(u_\mu))\cdot\boldsymbol{\nu}_h &=& (\nabla\phi(u_\mu) - f_p(u_\mu)\boldsymbol{b}_p)\cdot\boldsymbol{\nu}_p & \text{on } \Sigma_{hp}\\ u_{\mu|\Omega_h} &=& u_{\mu|\Omega_p} & \text{on } \Sigma_{hp}\\ u &=& 0 & \text{on }]0,T[\times\partial\Omega,\\ u(0,.) &=& u_0 & \text{on } \Omega. \end{array}$$

In this case, Proposition 4.12 provides a suitable mathematical framework to transcript the transmission condition along the interface Σ_{hp}. From Proposition 4.12, we deduce :

$$\partial_t u_\mu + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{b}(x) f(u_\mu) - \lambda_\mu \nabla\phi_\mu(u_\mu)) + g(t,x,u_\mu) = 0 \text{ a.e on } Q. \tag{4.37}$$

Then $\boldsymbol{b}(x)f(u_\mu) - \lambda_\mu \nabla\phi_\mu(u_\mu)$ is an element of $L^2_{loc}(0,T;L^2_{\text{div}}(\Omega))$ where

$$L^2_{\text{div}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n, \text{div}_x \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

This way for $l \in \{h,p\}$, $\boldsymbol{b}(x)f(u_\mu)\cdot\boldsymbol{\nu}_l - \lambda_\mu\nabla\phi_\mu(u_\mu)\cdot\boldsymbol{\nu}_l$ belong to $L^2_{loc}(0,T;H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{hp}))$, where $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{hp})$ is the topological dual of $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{hp}) \equiv \{v \in L^2(\Gamma_{hp}), \tilde{v} \in H^{1/2}(\Gamma_l)\}$ with

$$\tilde{v} = \begin{cases} w & \text{on } \Gamma_{hp} \\ 0 & \text{on } \Gamma_l \setminus \Gamma_{hp}. \end{cases}$$

Moreover, since $u_\mu(t,.)$ is in $H^1(\Omega_l)$ we can deduce that $\lambda_\mu\nabla\phi_\mu(u_\mu)\cdot\boldsymbol{\nu}_l$ belongs to $L^2_{loc}(0,T;H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{hp}))$, for any l in $\{h,p\}$. Thus we can take the $L^2(Q)$-scalar product between (4.37) and any v of $\mathcal{D}(0,T;H^1_0(\Omega))$. We integrate separately the diffusive and convective terms on Q_h and Q_p. By comparing with (4.23), it comes a.e. on $]0,T[$:

$$(f_h(u_\mu)\boldsymbol{b}_h - \mu\nabla\phi_\mu(u_\mu))\cdot\boldsymbol{\nu}_h = (\nabla\phi(u_\mu) - f_p(u_\mu)\boldsymbol{b}_p)\cdot\boldsymbol{\nu}_p \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{hp}).$$

Besides, since u_μ is in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, we also clearly have for a.e. t of $]0,T[$,

$$u_\mu\,|_{\Omega_h}(t,.) = u_\mu\,|_{\Omega_p}(t,.) \quad \mathcal{H}^{n-1} \text{ a.e. on } \Gamma_{hp}.$$

4.5.2 Notion of entropy weak solution

As a consequence of the proof of Theorem 4.9, we may propose an equivalent definition of an entropy weak solution to (4.1) that could be :

- $u \in L^\infty(Q)$, $\phi(u) \in L^2(0,T;V)$, $\partial_t u \in L^2(0,T;V')$,
- $\forall\zeta \in \mathcal{C}^\infty_c(Q_h)$, $\zeta \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\int_{Q_h} |u-k|\partial_t\varphi + \boldsymbol{b}_h(x)\Phi(u,k)\cdot\nabla_x\varphi dxdt$$
$$-\int_{Q_h} sgn(u-k)(g_h(t,x,u) + \text{div}_x\boldsymbol{b}_h(x)f(k))\varphi dxdt \geq 0,$$

- $\forall v \in L^2(0,T;V)$,

$$\int_0^T \langle\langle\partial_t u, v\rangle\rangle dt + \int_{Q_p}(\nabla_x\phi(u) - f_p(u)\boldsymbol{b}_p)\cdot\nabla v dxdt + \int_{Q_p} g_p(t,x,u)v dxdt$$
$$-\operatorname*{ess\,lim}_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{hp}} f_h(u(\sigma+\tau\boldsymbol{\nu}_h))\boldsymbol{b}_h\cdot\boldsymbol{\nu}_h v dt d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

- $\forall\zeta \in H^1_0(Q)$,

$$\int_Q (u\partial_t\zeta) - (\mathbb{I}_{\Omega_p}\nabla\phi(u) - \boldsymbol{b}(x)f(u))\cdot\nabla_x\zeta - g(t,x,u)\zeta)dxdt = 0.$$

- $\forall \zeta \in L^1(\Sigma \setminus \Sigma_{hp})$, $\zeta \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_h \setminus \Sigma_{hp}} \mathcal{F}_h(u(\sigma + \tau \boldsymbol{\nu}_h), 0, k)\varphi dt d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0,$$

- $\operatorname*{ess\,lim}_{t \to 0^+} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)| = 0.$

4.5.3 Bounds of a weak entropy solution

In this section we suppose that the initial datum u_0 is such that, for a.e. $x \in \Omega$, $u_0(x) \in [m, M]$. Let $\mu > 0$ being fixed, we can wonder when $[m, M]$ is an invariant region for the weak solution u_μ to 4.16 i.e. $m \leq u_0 \leq M$ a.e. in Ω implies $m \leq u_\mu \leq M$ a.e. in Q. This is the goal of the following Proposition.

Proposition 4.16. *If*

$$\sum_{l \in \{h,p\}} (g_i(.,.,m) + f_i(m)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_i) \leq 0 \quad \textit{and} \quad \sum_{l \in \{h,p\}} (g_i(.,.,M) + f_i(M)\mathrm{div}_x \boldsymbol{b}_i) \geq 0,$$

and if a.e. on Γ_{hp},

$$f_p(M)\boldsymbol{b}_p - f_h(M)\boldsymbol{b}_h) \cdot \boldsymbol{\nu}_h \geq 0, \tag{4.38}$$
$$(f_p(m)\boldsymbol{b}_p - f_h(m)\boldsymbol{b}_h) \cdot \boldsymbol{\nu}_h \leq 0, \tag{4.39}$$

then the unique weak solution to (4.16) *is such that a.e. on* Q,

$$m \leq u_\mu \leq M.$$

Observe that, in this case (4.19) and (4.20) are replaced by (4.38) and (4.39) that are easier to satisfy.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons mené l'analyse mathématique de problèmes couplés hyperbolique/hyperbolique. Après avoir défini la notion de solution faible entropique pour ce type de problème, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité pour une classe de fonction flux, d'abord en dimension 1 d'espace puis en dimension quelconque. La généralisation au cas multidimensionnel a été effectuée pour un terme de convection de la forme $b(x)\boldsymbol{f}(u)$, où b est une fonction à valeurs réelles et $\boldsymbol{f}$ une fonction à valeurs vectorielles. Dans le cas monodimensionnel, dans la situation particulière d'une fonction f croissante, l'existence d'une unique solution faible entropique a été démontrée dans les cas suivants :

- $b_L > 0$ et $b_R < 0$,
- $b_L < 0$ et $b_R > 0$,
- $b_L > 0$ et $b_R > 0$, $b_R - b_L > 0$.

où b_L et b_R sont respectivement les traces à gauche et à droite de l'interface du coefficent b.

Dans le cas : $b_L > 0$, $b_R > 0$, $b_L - b_R > 0$, nous avons vu que la formulation (2.5) ne convient pas puisqu'elle ne fournit pas un critère de sélection d'une unique solution. La détermination d'une condition d'entropie adaptée fait partie des perspectives de travail.

Les techniques que nous avons utilisées pour traiter le problème couplé hyperbolique / hyperbolique ne permettent pas de prendre en compte des termes de convection de la forme $\boldsymbol{b}(x)f(u)$, où $\boldsymbol{b}$ est une fonction à valeurs vectorielles et f une fonction à valeurs réelles. Or ce type de terme apparaît dans de nombreuses applications comme l'ingénierie pétrolière. Nous nous sommes alors intéressés à un problème couplé perturbé hyperbolique/parabolique faiblement dégénéré. Un résultat d'existence et d'unicité a été établi lorsque les caractéristiques du problème hyperbolique sont sortantes le long de l'interface.

Dans la suite du travail effectué, il serait intéressant d'étudier le cas des caractéristiques de l'opérateur hyperbolique entrantes à l'interface. Un autre prolongement direct de ce travail serait de considérer un problème couplé perturbé hyperbolique/parabolique fortement dégénéré. Pour cela, nous pourrions utiliser les travaux de J. Carillo dans [15].

Enfin le cas d'un problème couplé hyperbolique/hyperbolique pour une fonction flux de la forme $\boldsymbol{b}(x)f(u)$ reste à traiter dans le cas multidimensionnel. Le notion de solution cinétique, utilisée dans [8] et [26] pourrait être l'outil adapté à ce cas.

Bibliography

[1] Adimurthi, J. Jaffre, G.D. Veerappa Gowda : *Godunov-type methods for conservation laws with a flux function discontinuous in space*, SIAM J. Numer. Anal., **42**, 179-208, 2004.

[2] Adimurthi, S. Mishra, G.D. Veerappa Gowda : *Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux function*, J. Hyperbolic Differ. Equ., **2**, 783-837, 2005.

[3] Adimurthi, S. Mishra, G.D. Veerappa Gowda : *Existence and stability of entropy solutions for a conservation law with discontinuous non-convex fluxes*, Netw. Heterog. Media, **2**, 127-157, 2007.

[4] G. Aguilar, F. Lisbona, M. Madaune-Tort : *Analysis of a nonlinear parabolic-hyperbolic problem*, Adv. in Math. Sci. and Appl., **9**, 597-620, 1999.

[5] G. Aguilar, L. Lévi, M. Madaune-Tort : *Coupling of Multidimensional Parabolic and Hyperbolic Equations*, J. Hyperbolic Differ. Equ., **3**, No. 1, 53-80, 2006.

[6] E. Audusse, B. Perthame : *Uniqueness for scalar conservation laws with discontinuous flux via adapted entropies*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **135**, 253-265, 2005.

[7] F. Bachmann : *Analysis of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients*, Advances in Differential equations, **9**:11-12, 1317-1338, 2004.

[8] F. Bachmann, J. Vovelle : *Existence and uniqueness of entropy solution of scalar conservation laws with a flux function involving discontinuous coefficients*, Comm. Partial Differential Equations, **31**, 371-395, 2006.

[9] C. Bardos, A.Y LeRoux, J.C Nédélec : *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. in partial differential equations, **4**, 1017-1034, 1979.

[10] S. Berres, R. Bürger, K.H. Karlsen : *Central schemes and systems of conservation laws with discontinuous coeffients modeling gravity separation of polydisperse suspensions*, J. Comp. Appl. Math., **164-165**, 53-80, 2004.

[11] H. Brézis : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Mathamatics Studies, 5, Notas de Matematica*, 50. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Comp.; New York: American Elsevier Publishing Comp., 1973.

[12] R. Bürger, K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers : *Well-posedness in BV_t and convergence of a difference scheme for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units*, Numer. Math., **97**, 25-65, 2004.

[13] R. Bürger, K.H. Karlsen, J.D. Towers : *A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units*, SIAM J. Appl. Math., **65**, 882-840, 2005.

[14] S. Čanić : *Blood flow through compliant vessels after endovascular repair : well deformation induced by the discontinuous wall properties*, Comp. Visual. Sci., **4**, 147-155, 2002.

[15] J. Carillo : *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **147**, No. 4, 269-361, 1999.

[16] G.-Q. Chen, H. Frid : *Divergence-Measure fields and hyperbolic conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **147**, 89-118, 1999.

[17] S. Diehl : *A conservation law with point source and discontinuous flux function modelling continuous sedimentation*, SIAM J. Math. Anal., **56**, 388-419, 1996.

[18] S. Diehl : *Dynamic and steady-state behavior of continuous sedimentation*, SIAM J. Appl. Math., **57**, 991-1018, 1997.

[19] L.C. Evans, R.F. Gariepy : *Measure theory and fine properties of functions*,Studies in advances mathematics, CRC Press, London, 1992.

[20] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin : *Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation*, Chi. Ann. Math., Ser. B 16, No.1, 1-14, 1995.

[21] G. Gagneux, M. Madaune-Tort : *Analyse mathématique de modèles nonlinéaires de l'ingénierie pétrolière,* Mathématiques et Applications, **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[22] F. Gastaldi, A. Quarteroni : *Coupling of two-dimensional hyperbolic and elliptic equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **80** 1-3, 347-354, 1990.

[23] T. Gimse, N.H. Risebro : *Solution of the Cauchy problem for a conservation law with a discontinuous flux function*, SIAM J. Math. Anal., **23**, 635-648, 1992.

[24] E. Godlewski, P.A. Raviart : *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques et Applications, **3-4**, Ellipses, Paris, 1991.

[25] H. Holden, N.H. Risebro : *A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads*, SIAM J. Math. Anal., **26**, 999-1017, 1995.

[26] C. Imbert, J. Vovelle : *A Kinetic Formulation for Multidimensional Scalar Conservation Laws with Boundary Conditions and Applications*, SIAM J. Math. Anal., **36**, 214-232, 2004.

[27] J. Jimenez : *Some Scalar Conservation Laws with Discontinuous Flux*, International Journal of Evolution Equations, **2**, 3, 2006.

[28] J. Jimenez, L. Lévi : *Entropy formulations for a class of conservation laws with space-time discontinuous flux functions in a bounded domain*, J. Engrg. Math., to appear.

[29] K.H. Karlsen, M. Rascle, E. Tadmor : *On the existence and compactness of a two-dimensional resonant system of conservation law*, Comm. Math. Sci. **5** (2), 253-265, 2007.

[30] K.H. Karlsen, N.H. Risebro : *Unconditionally stable methods for Hamilton-Jacobi equations*, J. Comp. Phys., **180**,710-735, 2002.

[31] K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers : *On a nonlinear degenerate parabolic transport-diffusion equation with a discontinous coefficient*, Electron. J. Differential Equations, **2002**, 623-644, 2002.

[32] K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers : *Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with a discontinuous coefficient*, IMA J. Numer. Anal., **22**, 623-644, 2002.

[33] K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers : *L^1 stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients*, Skr. K. Nor. Vid. Selsk., 49 pp, 2003.

[34] K. H. Karlsen, J.D. Towers : *Convergence of the Lax-Friedrichs scheme and stability for conservation laws with a discontinuous space-time dependent flux*, Chin. Ann. Math., **25B**, 287-318, 2004.

[35] C. Klingenberg, N.H. Risebro : *Stability of a resonant system of conservation laws modeling polymer flow with gravitation*, J. Differential Equations, **170**, 344-380, 2001.

[36] S.N. Kruzkov : *First-order quasilinear equations with several independent variables*, Mat. Sb. **81**, 228-255, 1970.

[37] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva : *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Trans. Amer. Math. Soc., Providence, RI, **23**, 1968.

[38] J.L. Lions : *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Etudes mathématiques. Paris: Dunod; Paris: Gauthier-Villars. XX, 554 p., 1969.

[39] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor : *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc., **7**, 169-191, 1994.

[40] J. Màlex, J. Nečas, M. Rokyta, M. Růžička : *Weak and mesure-valued solutions to evolutionary PDEs* Applied Mathematics and Mathematical Computation, **13**, Chapman & Hall, London, 1996.

[41] D.N. Ostrov : *Viscosity solutions and convergence of monotone schemes for synthetic aperture radar shape-from-shading equations with discontinuous intensities*, SIAM J. Appl. Math. **59**, 2060-2085, 1999.

[42] D.N. Ostrov : *Solutions of Hamilton-Jacobi equations and scalar conservation laws with discontinuous space-time dependance*, J. Differential Equations, **182**, 51-77, 2002.

[43] F. Otto : *Initial-Boundary Value Problem for a Scalar Conservation Law*, C.R. Acad. Sci. Paris, **322**, série I, pp. 729-734, 1996.

[44] E. Yu. Panov : *Property of strong precompactness for bounded sets of measure valued solutions of a first-order quasilinear equation*, Sbornik: Mathematics, **190**:3, 427-446, 1999.

[45] E. Yu. Panov : *Existence of strong traces for generalized solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, **2**:4, 885-908, 2005.

[46] E. Yu. Panov : *Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux*, Preprint.

[47] F. Peyroutet, M. Madaune-Tort : *Error estimate for a splitting method applied to convection-reaction diffusion*, Math. Models Appl. Sci., **11** 6, 1081-1100, 2001.

[48] N. Seguin, J. Vovelle : *Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux fonction with discontinuous coefficients*, Math. Models Methods Appl. Sci. **13**:2, 221-257, 2003.

[49] L. Tartar : *H-measures, a new approach for studying homogenisation , oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **115**:3-4, 193-230, 1990.

[50] L. Tartar : *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol IV, Pitman, Boston, Mass., 1979.

[51] B. Temple : *Global solution of the Cauchy problem for a class of 2×2 nonstrictly hyperbolic conservation laws*, Adv. Appl. Math. **3**, 335-375, 1982.

[52] J.D. Towers : *Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux*, SIAM J. Numer. Anal. **38**, 681-698, 2000.

[53] J. D. Towers : *A difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux : the non-convex case*, SIAM J. Numer. Anal. **39**, 1197-1218, 2001.

[54] A. Vasseur : *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **160**, 181-193, 2001.

[55] G.B. Whitham : *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New York, 1974.

Résumé :

Cette thèse a pour objet l'analyse mathématique de lois de conservation scalaires dont la fonction flux présente une discontinuité par rapport à la variable d'espace. Nous nous intéressons plus particulèrement au problème du raccord le long d'une interface commune des solutions de deux équations quasi linéaires hyperboliques du premier ordre, posées dans deux ouverts disjoints.
En premier lieu nous considérons un problème couplé hyperbolique/hyperbolique. Sous une condition de non dégénérescence du flux, nous avons obtenu un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible entropique d'abord en dimension 1 d'espace puis en dimension quelconque. La preuve de l'unicité est basée sur la méthode de dédoublement des variables due à S.N. Kruzkov puis sur un raisonnement presque partout à l'interface. Dans le cas particulier de la dimension 1 l'existence s'obtient par une régularisation adéquate du coefficient discontinu dans le terme de convection alors que nous utilisons la méthode de viscosité artificielle dans le cas général.
En second lieu nous traitons le cas de termes de convection qui apparaissent dans l'ingénierie pétrolière pour lesquels la condition de non dégénérescence de la non linéarité n'est pas vérifiée. Nous ne pouvons donc pas adapter les méthodes précédemment utilisées. Nous nous sommes donc intéressés à un problème couplé perturbé où sur l'un des deux ouverts un terme de diffusion est ajouté. Sous l'hypothèse que les caractéristiques provenant de la zone hyperbolique sont sortantes à l'interface, l'unicité d'une solution faible entropique est établie. La méthode de viscosité artificielle et la notion de processus entropique nous permettent de prouver le résultat d'existence .

Mots-Clés : lois de conservation, flux discontinu, solution faible entropique, équation hyperbolique, équation parabolique, méthode de viscosité artificielle, méthode de dédoublement des variables.

Nonlinear transport models in heterogeneous porous media

Abstract:

This thesis deals with the mathematical analysis of some scalar conversation laws with space-discontinuous fluxes. We are interested in the coupling problem along a same interface of two first order quasilinear hyperbolic equations, set in two open disjoint domains.
In a first part we consider a coupled hyperbolic/hyperbolic problem . Under a non degeneracy condition on the flux, we obtain an existence and uniqueness result of the weak entropy solution, first in one space dimension and then in the multidimensional case. The uniqueness proof is based on the method of doubling ariables and on a pointwise reasoning along the interface. In the monodimension, the existence is obtained by a suitable regularization of the discontinuous coefficient in the convective term, while we use the vanishingviscosity method in several space dimensions.
In a second part, we treat the case of convection terms arising in petroleum engineering. The non degenaracy condition is not fulfilled anymore in this case so we cannot adapt the method used previously. Therefore we are interested in a perturbed coupled problem where in one of the two domains a diffusion term appears. Under the assumption that the interface is included in the set of outwards caracteristics of the first-order operator set in the hyperbolic zone, the uniqueness of a weak entropy solution is established. The vanishing viscosity method and the notion of process solution allow us to state the existence property.

Keywords: conversation laws, discontinous flux, weak entropy solution, hyperbolic equation, parabolic equation, vanishing viscosity method, method of doubling variable.