

Analyse de sensibilité et estimation de paramètres pour la modélisation hydrologique

Potentiel et limitations des méthodes variationnelles

W. Castaings*

*Laboratoire Jean Kuntzmann - Département Modèles et Algorithmes Déterministes
Équipe Modélisation, Observations, Identification pour les Sciences de l'Environnement (INRIA-CNRS-UJF-INPG)

sous la direction de
F-X Le Dimet (PR-UJF, LJK), D. Dartus (PR-INPT,IMFT), G-M Saulnier (CR-CNRS,EDYTEM)

Grenoble - 24 Octobre 2007

Plan de l'exposé

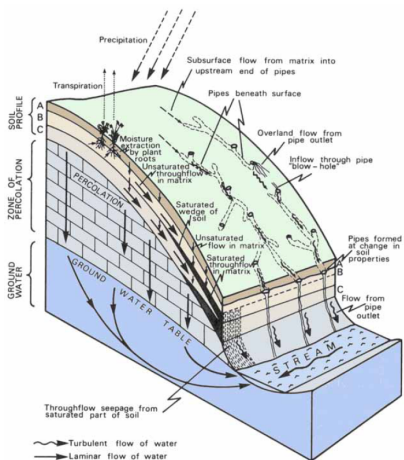
- 1 Introduction
 - Problématiques inhérentes à la modélisation hydrologique
 - Cadre d'étude et principe de l'approche adoptée
 - Approche méthodologique, modèles et données utilisés
- 2 Analyse de sensibilité variationnelle
 - Analyse différentielle directe
 - Analyse par la méthode de l'état adjoint
- 3 Estimation des paramètres par méthode de descente
 - Optimisation par quasi-newton avec contraintes de bornes
 - Analyse de vraisemblance post-optimale
- 4 Conclusions et perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problématiques inhérentes à la modélisation hydrologique
 - Cadre d'étude et principe de l'approche adoptée
 - Approche méthodologique, modèles et données utilisés
- 2 Analyse de sensibilité variationnelle
 - Analyse différentielle directe
 - Analyse par la méthode de l'état adjoint
- 3 Estimation des paramètres par méthode de descente
 - Optimisation par quasi-newton avec contraintes de bornes
 - Analyse de vraisemblance post-optimale
- 4 Conclusions et perspectives

Hydrologie de bassin

Hétérogénéité des hydrosystèmes, complexité des processus, unicité de lieu, d'action et de temps

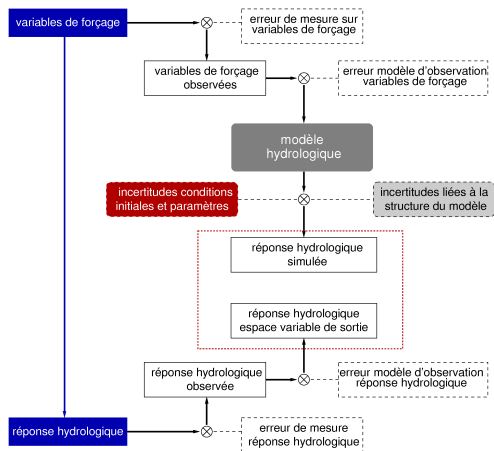


Perception des processus par un hydrologue de terrain (Kirkby, 1978)

- Objectifs de la modélisation: comprendre, reproduire, prévoir et contrôler
- Processus couplés, concurents ou dominants, difficilement descriptibles par des EDP (cadre d'application classique des méthodes variationnelles)
- **Observabilité** limitée des **propriétés** du bassin versant et du **forçage** atmosphérique auquel il est soumis
- Observation **partielle et intégrée** de la **réponse hydrologique** (surtout pour les évènements extrêmes)

Comprendre, analyser et réduire les incertitudes

Modèles imparfaits contraints et forcés par des données incertaines



- **L'analyse de sensibilité, l'assimilation de données et la propagation d'incertitudes** sont des problématiques clés et largement inter-dépendantes

Cadre d'étude et objectifs visés

Objectif

Évaluation du **potentiel** et des **limitations** des méthodes variationnelles pour la modélisation hydrologique

Méthodes variationnelles

- **Formulation théorique** et **approximation** numérique de nombreux problèmes liés à la **modélisation** des processus **physiques**
- Principales applications en sciences de l'environnement: **assimilation de données**, **analyse de sensibilité**, modes d'amplification des erreurs pour la **prévision d'ensemble**, stratégies d'**observation adaptatives**

Problématiques explorées

- **Analyse de sensibilité**
- **Calibration** par méthode de **descente**

Approche variationnelle I

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

Modèle direct

- x variable d'état
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ paramètres
- Une fois α fixé, x est déterminé de façon unique par

$$M(x, \alpha) = 0$$

Fonction réponse

- F , fonction scalaire de la variable d'état x (i.e $x(\alpha)$) et des paramètres α

$$F(x, \alpha)$$

- Sensibilité locale (en $\bar{\alpha}$) de F aux paramètres α : gradient de F par rapport à α

$$[\nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}}]^T = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \alpha_p} \right) \right]_{\bar{\alpha}}$$

- avec lequel on peut calculer la dérivée directionnelle de F dans n'importe quelle direction $\hat{\alpha}$

$$\hat{F}(\hat{\alpha}, \bar{\alpha}) = \langle \nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}}, \hat{\alpha} \rangle$$

Approche variationnelle II

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

Analyse de sensibilité directe

$$\hat{F}(\hat{x}, \hat{\alpha}) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \hat{\alpha}$$

avec \hat{x} solution de

$$\frac{\partial M}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \hat{\alpha} \quad \text{Modèle linéaire tangent (TLM)}$$

Méthode de l'état adjoint

On montre que si p solution de

$$\left[\frac{\partial M}{\partial x} \right]^T p = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{Modèle adjoint (ADM)}$$

$$\text{alors } \nabla_{\alpha} F_{\hat{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right]^T p$$

Approche variationnelle III

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

- Ex. On considère l'opérateur vectoriel $G : \alpha \xrightarrow{M} x \xrightarrow{F} Q(t)$

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ les paramètres du modèle
- $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_p)$ les valeurs nominales correspondantes
- $Q(t) = (Q(t_1), Q(t_2), \dots, Q(t_n))$ la réponse à l'exutoire

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ Q(t_2) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix}$$

Objectif

- Calcul des dérivées de $Q(t)$, la chronique de débits simulés par rapport aux paramètres $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

Approche variationnelle IV

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

- Matrice **jacobienne** de la transformation G en $\bar{\alpha}$

$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

Approche variationnelle V

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

- Variations sur la chronique de débit simulée résultant d'une perturbation sur α_1

$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

Approche variationnelle VI

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

- Variations sur un aspect de la prévision (*i.e* $Q(t_1)$) résultant de perturbations sur tous les α_i ($i = 1, \dots, p$)

$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha = \hat{\alpha}}$$

Approche variationnelle VII

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

Principe

- Approche **directe** (TLM) ($p \ll n$):
 - Calcul colonne par colonne (**linéarisation**)
- Approche **inverse** (ADM) ($p \gg n$):
 - Calcul ligne par ligne
 - **Dérivation** puis **transposition**, notion d'opérateur **adjoint**)

- On rappelle que lorsque F est une fonction scalaire

$$[\nabla_{\alpha} F_{\hat{\alpha}}]^T = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \alpha_p} \right) \right]_{\hat{\alpha}}$$

peut donc être évalué pour un **coût de calcul indépendant de p**

- Estimation des paramètres, minimisation de l'écart aux observations (*i.e* problème d'**optimisation**)
- Le calcul précis et efficace de $\nabla_{\alpha} F$ rend possible l'utilisation d'**algorithmes de descente** très efficaces

Approche variationnelle VIII

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

Quelques difficultés et limitations

- Expertise et efforts substantiels, apport des outils de **différentiation algorithmique (AD)**

EX.  TADENADE de INRIA/TROPICS (*Hascoët et al.* 2003)

- **Différentiabilité** de la relation α et $Q(t)$
 - Pas de consensus sur le traitement des **points de non-différentiabilité (seuils de fonctionnement)**
 - AD, points de non-différentiabilité reportés dans TLM et ADM, dérivées valides au sein d'un **flot de contrôle**
- Information **locale** et d'ordre faible qui peut se révéler limitée pour comprendre et extrapoler une dynamique fortement **non-linéaire**

Approche méthodologique

Objectif

Évaluation du **potentiel** et des **limitations** des méthodes variationnelles pour la modélisation hydrologique

Modèles hydrologiques

- Choix de structures de modèles simples et très courantes
- Opposition en termes de **paradigme de la modélisation** (approches réductionniste et systémique)
- Opposition en termes de **fonctionnement hydrologique** (ruissellement par dépassement de la capacité d'infiltration ou sur zones contributives d'aire variable)

MARINE I

Modélisation de l'Anticipation du Ruissellement et des Inondations pour des événements Extrêmes

- Modèle de prévention/prévision des **crues éclair** développé au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)
- Approche **réductionniste** représentant le ruissellement par refus d'infiltration (*Estupina-Borrell, Dartus et al, 2004*)
- Représentation **mécaniste** basée sur équations de conservation à l'échelle de la parcelle (de 0.25 à 4 hectares)
- Modèle **événementiel** et spatialement **distribué**

Ruissellement de surface

Onde Cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{s^{1/2}}{n} \frac{\partial uh^{5/3}}{\partial x} = r - i$$

Infiltration

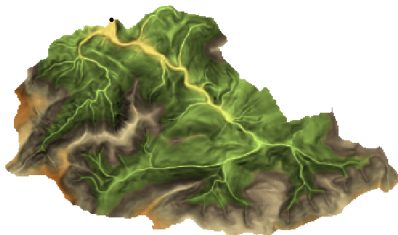
Green & Ampt

$$i = K \left(\frac{\psi \eta (1 - \theta)}{I} + 1 \right)$$

MARINE II

Modélisation de l'Anticipation du Ruissellement et des Inondations pour des événements Extrêmes

- Application à un sous-bassin du Thoré amont (25km^2) soumis à des pluies diluviennes en Novembre 1999 (événement non jaugé).



- pluies estimées par re-analyse des observations radar-précipitations du réseau ARAMIS de Météo France

Modèles basés sur le concept TOPMODEL I

TOPgraphy based watershed MODEL

- Concept initié par les Universités de Leeds & Lancaster, largement enrichi par la communauté des hydrologues, notamment au LTHE, maintenant à EDYTEM
- Approche **systemique** décrivant le ruissellement sur zones contributives saturées
- Équation de conservation à l'échelle du bassin versant, notion d'**indice de similarité hydrologique** (*Beven & Kirkby, 1979*), approche **semi-distribuée**
- Représentation **pragmatique** des **écoulements latéraux de sub-surface** (T_0 , m) sans description explicite de la géométrie et du profil d'humidité

TOPSIMPL

- Modèle de crue **événementiel** (*Saulnier et al, 2004*)
- Transfert du **ruissellement** par H.U. (identifié par la DPFT de *Duband et al, 1993*)
- **Interception** et **évapotranspiration** par modèle réservoir (*Inter, SrMax*)

Modèles basés sur le concept TOPMODEL II

TOPgraphy based watershed MODEL

- Concept initié par les Universités de Leeds & Lancaster, largement enrichi par la communauté des hydrologues, notamment au LTHE, maintenant à EDYTEM
- Approche **systemique** décrivant le ruissellement sur zones contributives saturées
- Équation de conservation à l'échelle du bassin versant, notion d'**indice de similarité hydrologique** (*Beven & Kirkby, 1979*), approche **semi-distribuée**
- Représentation **pragmatique** des **écoulements latéraux de sub-surface** (T_0 , m) sans description explicite de la géométrie et du profil d'humidité

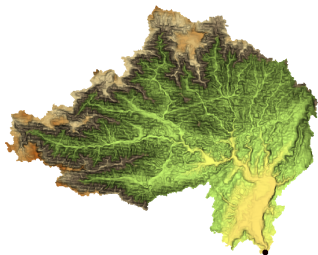
TOPAMMA

- Modèle **continu** de bilan hydrologique (*Lelay et al, 2005*)
- Transfert du **ruissellement** par H.U. géomorphologique (V_h , V_r)
- Neutralisation de la pluie et reprise évaporatoire à partir de l'**évapotranspiration** potentielle (ETP)
- Limitation de la **zone active** pour les écoulements latéraux de subsurface (d_0)
- **Percolation** vers une nappe de socle non connectée (K_{0v})

Modèles basés sur le concept TOPMODEL III

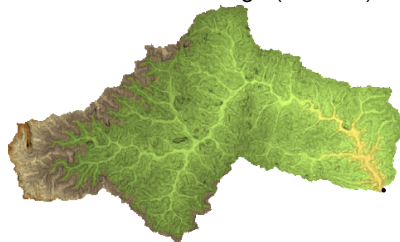
TOPgraphy based watershed MODEL

- TOPSIMPL sur Vogüe (640km²)



- 22 évènements observés
précipitations obtenues par krigeage de données ponctuelles, débits à l'exutoire

- TOPAMMA sur la Donga (586km²)



- Chronique de 5 ans d'observations
précipitations, débit, variables climatiques permettant l'estimation de l'évapotranspiration potentielle

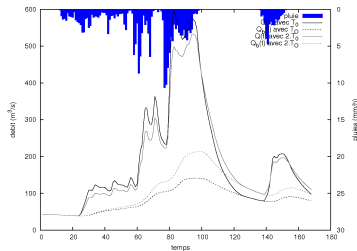
Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problématiques inhérentes à la modélisation hydrologique
 - Cadre d'étude et principe de l'approche adoptée
 - Approche méthodologique, modèles et données utilisés
- 2 **Analyse de sensibilité variationnelle**
 - **Analyse différentielle directe**
 - **Analyse par la méthode de l'état adjoint**
- 3 Estimation des paramètres par méthode de descente
 - Optimisation par quasi-newton avec contraintes de bornes
 - Analyse de vraisemblance post-optimale
- 4 Conclusions et perspectives

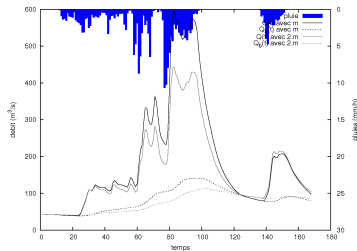
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)

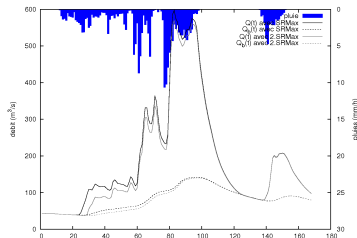
Perturbation de T_0



Perturbation de m



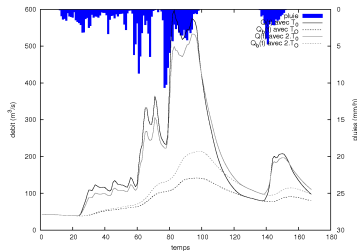
Perturbation de $SRMax$



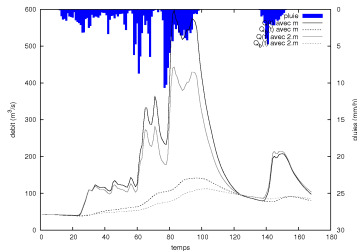
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)

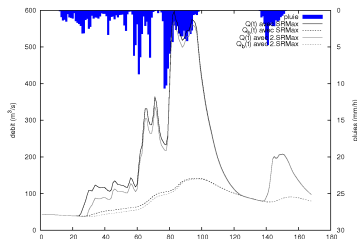
Perturbation de T_0



Perturbation de m

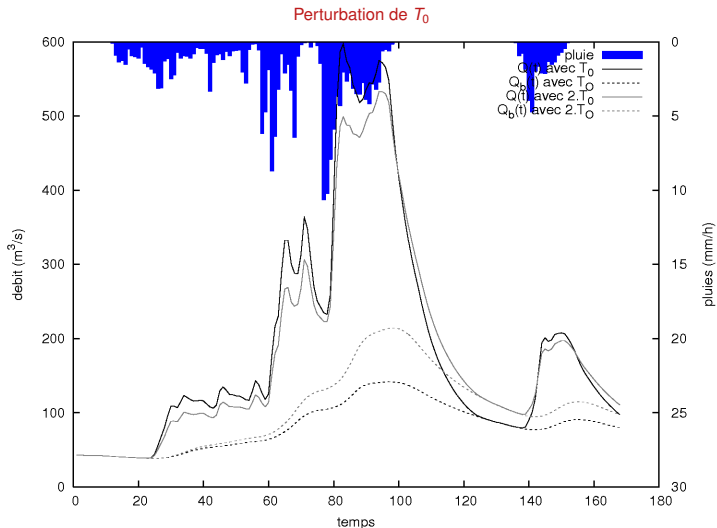


Perturbation de $SRMax$



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

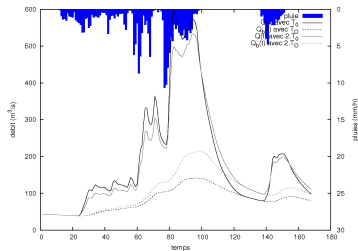
Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)



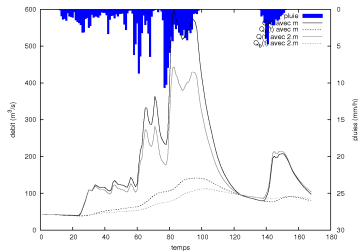
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)

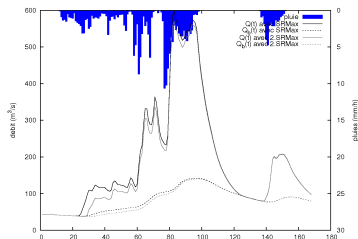
Perturbation de T_0



Perturbation de m

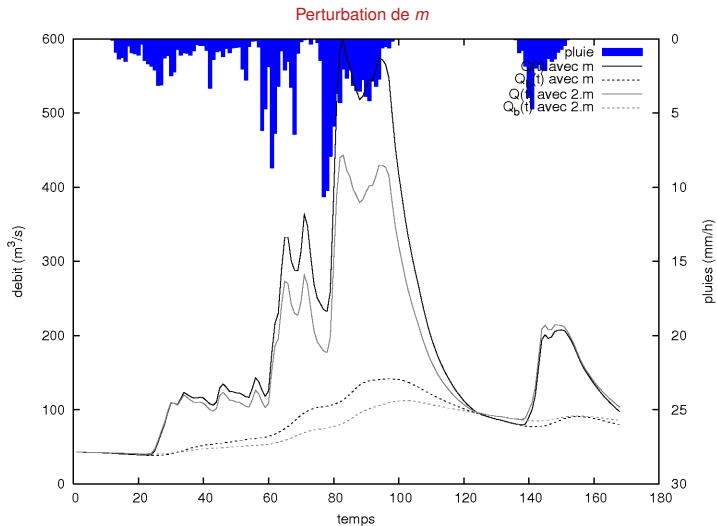


Perturbation de $SRMax$



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

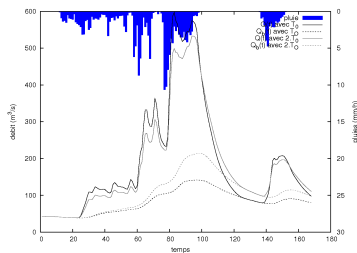
Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)



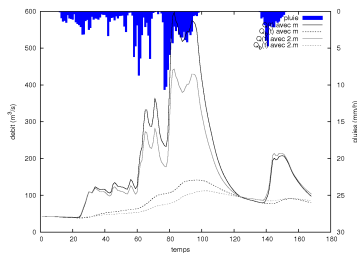
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km^2)

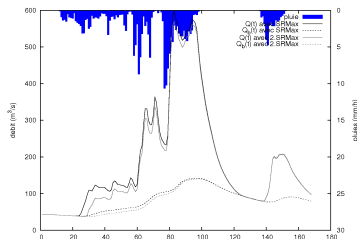
Perturbation de T_0



Perturbation de m

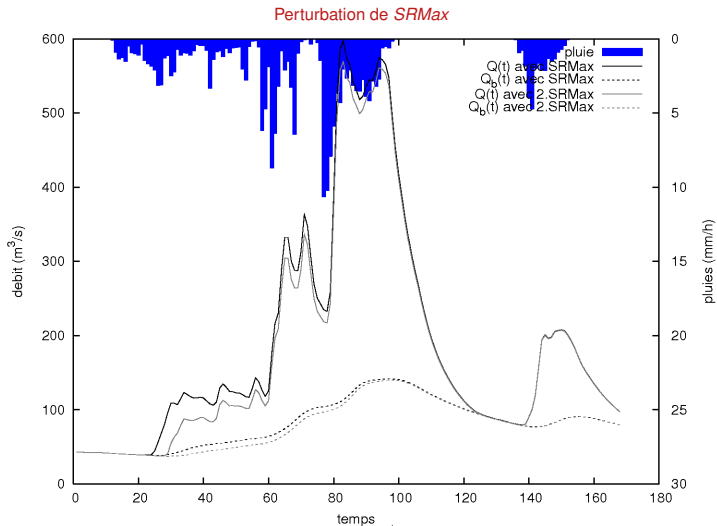


Perturbation de $SRMax$



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

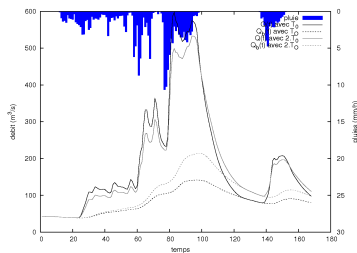
Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)



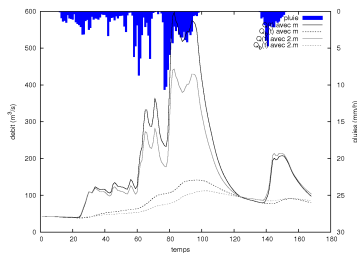
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL I

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)

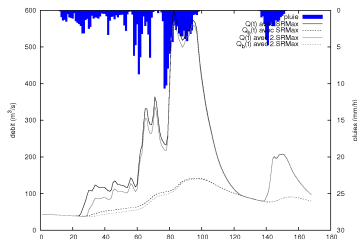
Perturbation de T_0



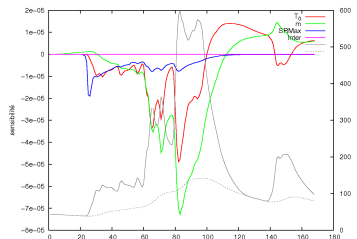
Perturbation de m



Perturbation de $SRMax$



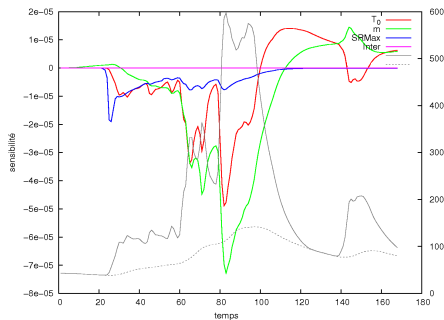
Sensibilité directe multi-directionnelle



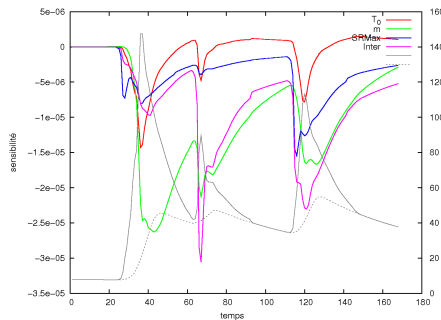
Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de TOPSIMPL II

Analyse de sensibilité directe et corroboration (BV, Vogüe 640km²)

Juin 1994 (avec $Inter = 0$)



Mars 1990 (avec $Inter \neq 0$)



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

- Vecteurs de base

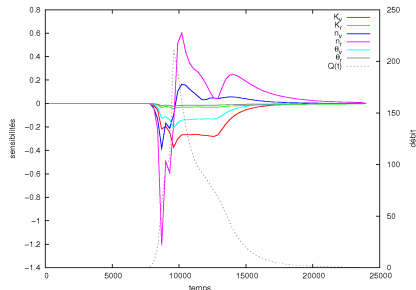
$$V_1 \text{ tq } \begin{cases} V_1(x) = 1 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_1(x) = 0 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases} \quad \text{et } V_2 \text{ tq } \begin{cases} V_2(x) = 0 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_2(x) = 1 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases}$$

Expression dans la base réduite



$$\begin{aligned} K &= K_V V_1 + K_R V_2 \\ n &= n_V V_1 + n_R V_2 \\ \theta &= \theta_V V_1 + \theta_R V_2 \end{aligned}$$

Sensibilité directe multi-directionnelle



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

Définition: SVD de \mathbf{A}

- Factorisation de la forme $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$
- **Valeurs singulières** dans \mathbf{S} (matrice diagonale): **spectre singulier**, importance relative des vecteurs singuliers correspondants
- Colonnes de \mathbf{U} et \mathbf{V} : **vecteurs singuliers** dans l'espace des **observations** et des **paramètres**

Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE III

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

Informations tirées de la SVD de $Jac_G(\alpha)$

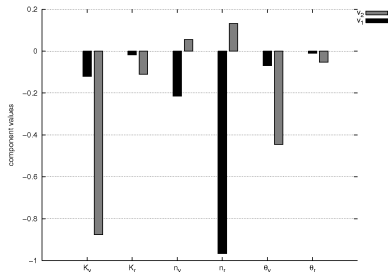
- Paramètres d'autant plus faciles à estimer que la proportion de **valeurs singulières significatives** est importante (matrice **S**)
- **Paramètres influents** sur la réponse hydrologique, ceux ayant une chance d'être identifiés lors de la résolution du **problème inverse** (matrice **V**)
- Part de l'hydrogramme où les **observations** sont susceptibles de bien **contraindre des paramètres** (matrice **U**)
- **Interprétation physique** des vecteurs singuliers (directions orthogonales) dans leurs espaces respectifs (matrices **U** et **V**)

Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE IV

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

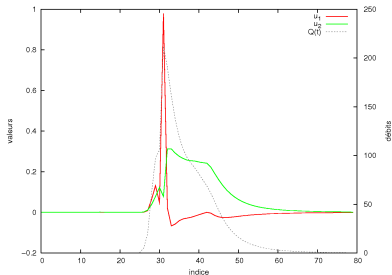
Espace des **paramètres**

composantes des 1^{ier} et 2^{ime} vecteurs singuliers



Espace des **observations**

composantes des 1^{ier} et 2^{ime} vecteurs singuliers



84.4 et 12.2 % de variabilité

Sensibilité d'aspects de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

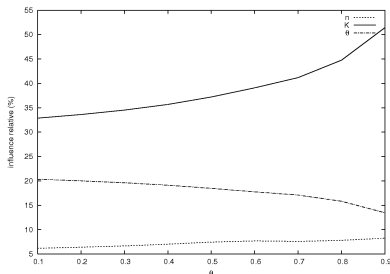
Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, BV Thoré amont (25km²)

Influence relative (en %)

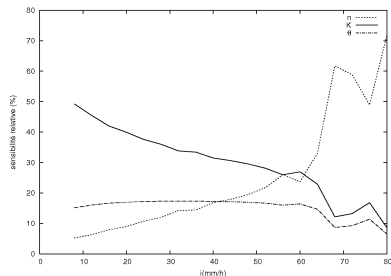
Volume d'écoulement
Débit de pointe

η, θ, ψ	K	n
18.26	36.67	8.53
4.40	7.83	78.94

Sensibilité du **volume d'écoulement**:
influence de l'humidité initiale



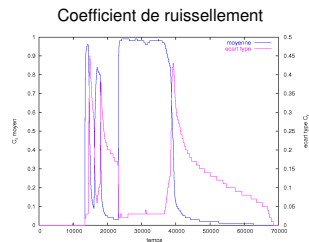
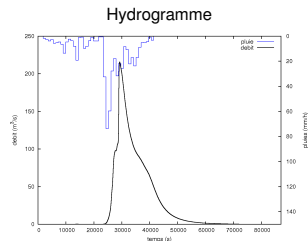
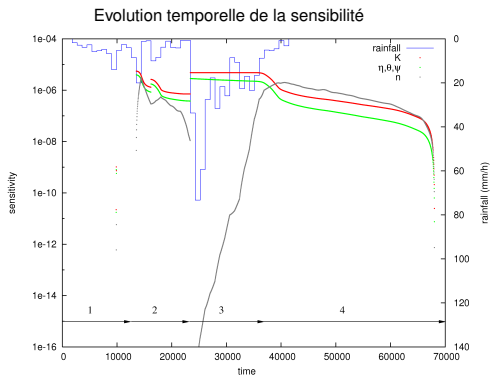
Sensibilité du **débit de pointe**:
influence du scénario de pluie



Sensibilité d'aspects de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, BV Thoré amont (25km²)

Sensibilité du volume d'écoulement: évolution temporelle et corroboration



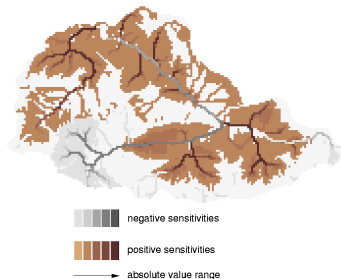
Sensibilité d'aspects de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE III

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, BV Thoré amont (25km^2)

Sensibilité du débit de pointe au frottement: **variabilité spatiale et corroboration**

Opérations et influence sur le débit de pointe:

- variation de +10% sur le frottement -4.5%
- +10% où la sensibilité est négative -5.9%
- +10% où la sensibilité est positive +1.5%



Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

- K, n et θ spatialement distribués
- x_1, \dots, x_s , indices correspondant aux différences localisations spatiales de la discrétisation

$$\text{Jac}_G(K, n, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_s)} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_s)} \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_s)} \end{pmatrix}$$

Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

- K, n et θ spatialement distribués
- x_1, \dots, x_{n_x} , indices correspondant aux différences localisations spatiales de la discrétisation
- SVD des sous-matrices correspondant à chacun des paramètres

$$\text{Jac}_G(K, n, \theta) = \begin{pmatrix}
 \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_n)}
 \end{pmatrix}$$

Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE III

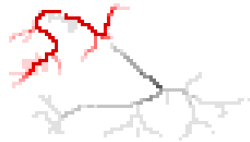
Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

Analyse des vecteurs singuliers dans l'espace des paramètres:

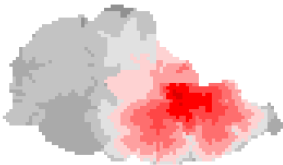
1^{ier} vecteur singulier pour n



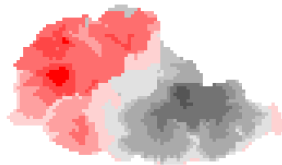
2^{ime} vecteur singulier pour n



1^{ier} vecteur singulier pour K



2^{ime} vecteur singulier pour K



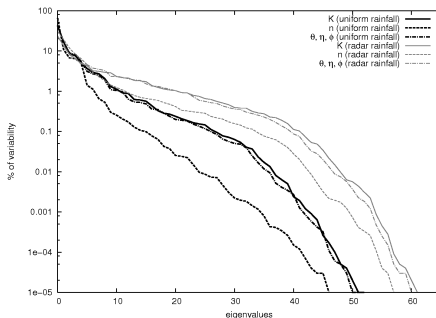
composantes positives en dégradé de rouge, négatives en dégradé de gris

Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE IV

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km²)

Analyse du spectre singulier:

- Complexité d'une **paramétrisation identifiable** (i.e nb de ddl identifiables de façon stable)
- Analyse du **contenu informatif** des différents épisodes de pluie



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problématiques inhérentes à la modélisation hydrologique
 - Cadre d'étude et principe de l'approche adoptée
 - Approche méthodologique, modèles et données utilisés
- 2 Analyse de sensibilité variationnelle
 - Analyse différentielle directe
 - Analyse par la méthode de l'état adjoint
- 3 Estimation des paramètres par méthode de descente
 - Optimisation par quasi-newton avec contraintes de bornes
 - Analyse de vraisemblance post-optimale
- 4 Conclusions et perspectives

Calibration des paramètres

Critère de performance et algorithme d'optimisation

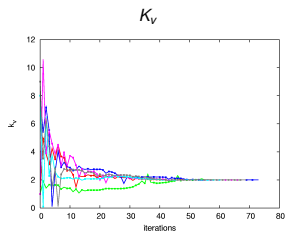
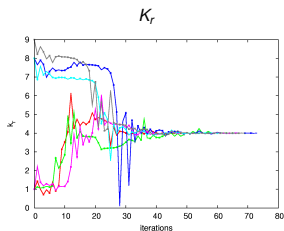
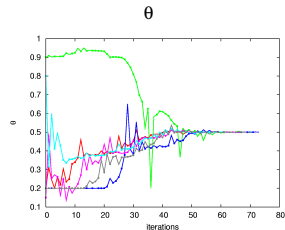
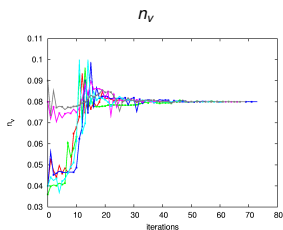
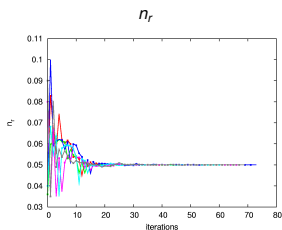
Efficiencie de Nash

$$N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - Q_{calc}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)})^2}$$

- Objectif: maximisation de N ($\in]-\infty, 1]$) pour réduire l'écart aux observations
- Méthode de l'état **adjoint**: capacité à évaluer le gradient du critère de performance (précision machine) pour un **coût de calcul indépendant du nombre de paramètres**
- N2QN1, algorithme de type **quasi-newton** avec **contraintes de bornes** (*Lemaréchal et al*, 2004 - INRIA/ESTIME)

Calibration des paramètres de MARINE (1)

Convergence avec paramétrisation versants/réseau (BV Thoré amont (25km²), ajustement aux observations synthétiques avec efficacité de Nash)



Calibration des paramètres de MARINE (2)

Tentative de **régularisation** par décomposition en valeurs singulières tronquée (**TSVD**) (BV Thoré amont (25km²), **observations synthétiques**)

- Génération d'**observations synthétiques** avec paramètres spatialement distribués (frottement dépendant de l'occupation des sols, conductivité hydraulique variant avec la distance au réseau)
- Calibration avec **paramétrisations** de **complexité croissante**, base réduite avec vecteurs siguliers de la SVD

	p_K	p_n	p_θ	Nash	$1/\kappa(H)$
P_1	1	1	1	0.908	0.965E-08
P_2	2	2	1	0.938	0.217E-11
P_{SV70}	4	2	1	0.968	0.889E-08
P_{SV80}	6	3	1	0.978	0.947E-08
P_{SV90}	9	5	1	0.986	0.242E-16

P_1 unique facteur multiplicatif, P_2 paramétrisation versants/réseau

P_{SVX} paramétrisation décrite par vecteurs singuliers expliquant X % de variabilité

p_K, p_n, p_θ nombre de *ddl* pour les paramètres respectifs

$\kappa(H)$ conditionnement de la quasi-hessienne à la dernière itération

Calibration des paramètres de MARINE (2)

Tentative de **régularisation** par décomposition en valeurs singulières tronquée (TSVD) (BV Thoré amont (25km²), **observations synthétiques**)

- Génération d'**observations synthétiques** avec paramètres spatialement distribués (frottement dépendant de l'occupation des sols, conductivité hydraulique variant avec la distance au réseau)
- Calibration avec **paramétrisations de complexité croissante**, base réduite avec vecteurs singuliers de la SVD

	p_K	p_n	p_θ	Nash	$1/\kappa(H)$
P_1	1	1	1	0.908	0.965E-08
P_2	2	2	1	0.938	0.217E-11
P_{SV70}	4	2	1	0.968	0.889E-08
P_{SV80}	6	3	1	0.978	0.947E-08
P_{SV90}	9	5	1	0.986	0.242E-16

- **Amélioration** de l'**efficience** de Nash avec complexité croissante
- **Meilleur conditionnement** avec TSVD car les vecteurs de base déterminés par le **contenu informatif** des observations

Calibration des paramètres de MARINE (3)

Tentative de régularisation par décomposition en valeurs singulières tronquée (TSVD) (BV Thoré amont (25km²), observations synthétiques)

Points à approfondir ...

- L'amélioration des performances n'est pas nécessairement accompagnée de valeurs estimées plus proches des valeurs de référence
- Nécessité d'intégrer de l'**information a priori** en recherchant un **compromis** entre **stabilité** et **flexibilité**
- Combinaison avec une approche de type **Tikhonov** et analyse du spectre singulier pour déterminer la **pénalisation appropriée**

$$J(\mathbf{x}, \alpha) = \int_0^T \left[(\varphi(\mathbf{x}, \alpha) - z)^T \mathbf{C}_z^{-1} (\varphi(\mathbf{x}, \alpha) - z) \right] dt$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} (\alpha - \alpha_{prior})^T \mathbf{C}_{\alpha_{prior}}^{-1} (\alpha - \alpha_{prior})$$

Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL I

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km²

Efficience de Nash

$$N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - Q_{calc}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)})^2}$$

Coefficient de détermination

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\left(Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)} \right) \left(Q_{calc}(t_i) - \overline{Q_{calc}(t_i)} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n \left(Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(Q_{calc}(t_i) - \overline{Q_{calc}(t_i)} \right)^2}$$

Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL II

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km²

- Validation et comparaison de performances: algorithme de **quasi-newton (QN)** / échantillonnage de **Monte Carlo (MC)** (10000 réalisations)

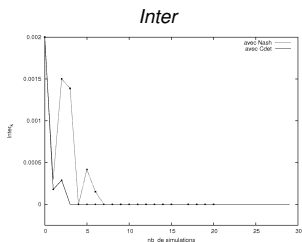
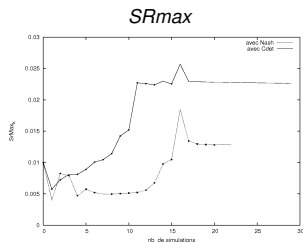
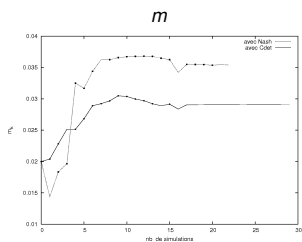
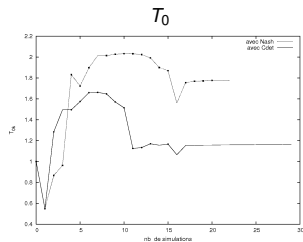
QN	Value	$T_0(\text{m}^2\text{h}^{-1})$	$m(\text{m})$	$\text{SRMax}(\text{m})$	$\text{Inter}(\text{mh}^{-1})$
Nash	0.817	1.77	0.0353	0.0128	0.
R2	0.827	1.16	0.0291	0.0225	0.

MC	Value	$T_0(\text{m}^2\text{h}^{-1})$	$m(\text{m})$	$\text{SRMax}(\text{m})$	$\text{Inter}(\text{mh}^{-1})$
Nash	0.797	1.23	0.035	0.006	0.0001
R2	0.820	0.83	0.022	0.030	7.8E-5

Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL III

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km²

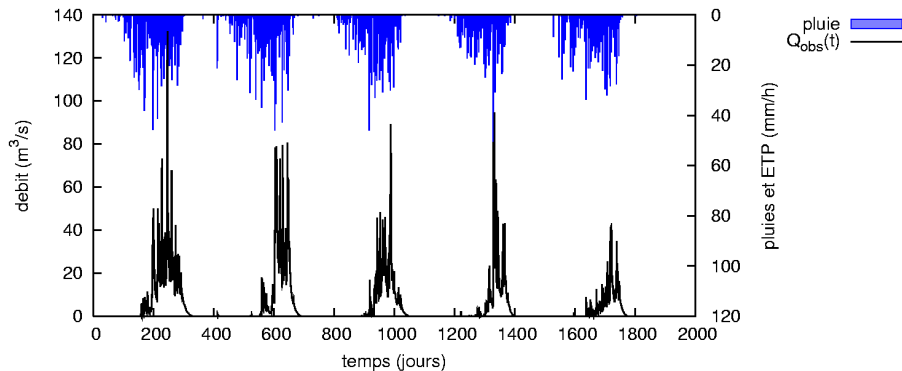
- Rapidité de la convergence de la méthode de descente



Analyse post-optimale pour TOPAMMA I

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

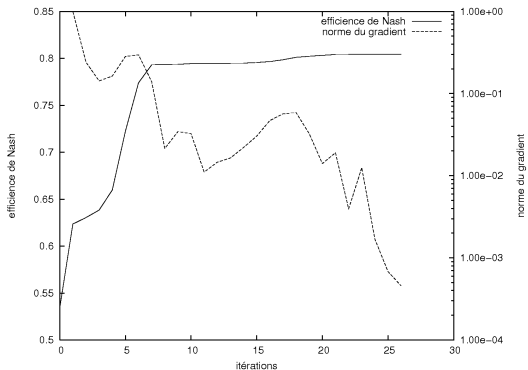
Observations sur la période 1998-2002



Analyse post-optimale pour TOPAMMA II

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

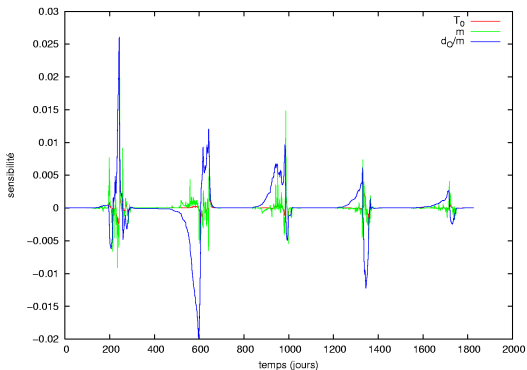
Evolution de l'efficacité et de la norme du gradient au cours des itérations



Analyse post-optimale pour TOPAMMA III

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

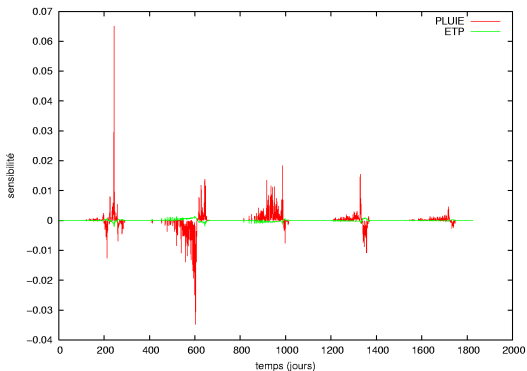
Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux paramètres



Analyse post-optimale pour TOPAMMA IV

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

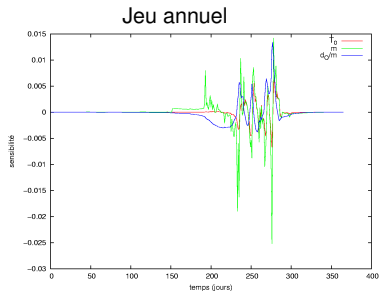
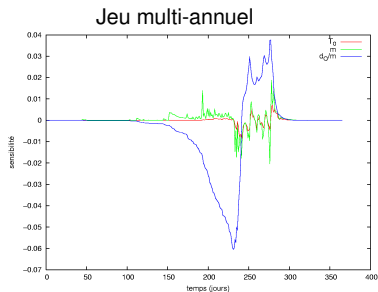
Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux variables de forçage



Analyse post-optimale pour TOPAMMA V

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

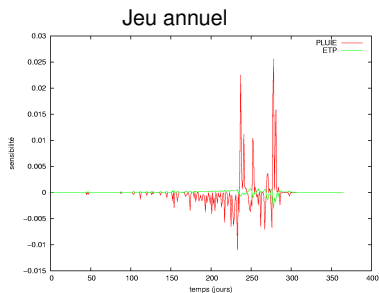
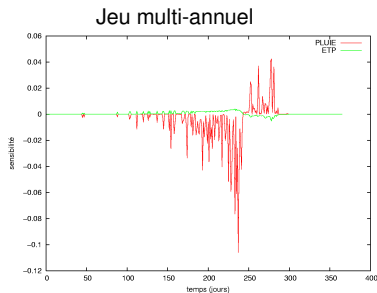
Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux paramètres: année 1999



Analyse post-optimale pour TOPAMMA VI

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km²)

Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux variables de forçage:
année 1999

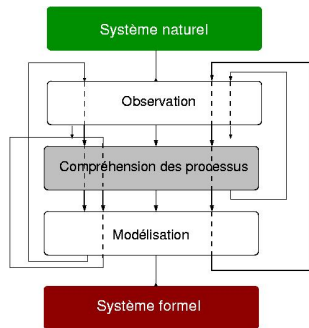


Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problématiques inhérentes à la modélisation hydrologique
 - Cadre d'étude et principe de l'approche adoptée
 - Approche méthodologique, modèles et données utilisés
- 2 Analyse de sensibilité variationnelle
 - Analyse différentielle directe
 - Analyse par la méthode de l'état adjoint
- 3 Estimation des paramètres par méthode de descente
 - Optimisation par quasi-newton avec contraintes de bornes
 - Analyse de vraisemblance post-optimale
- 4 Conclusions et perspectives

Intérêt pour la **modélisation** hydrologique

Outil d'analyse à exploiter au cours du processus conduisant à la représentation des processus



- **Analyse approfondie** de la physique décrite dans les modèles hydrologiques, corroboration/validation des **hypothèses de fonctionnement**
- Étape importante du **développement du modèle MARINE**, approfondir avec données réelles, bassins de taille plus importante (travaux en cours à l'IMFT)
- Révision de la **structure** de **TOPAMMA** pour corriger le **biais** sur le bilan hydrologique dépendant de la climatologie des précipitations
- Analyse de la **modélisation hydrologique distribuée** sur la région Cévennes-Vivarais (N-TOPMODELS sur maillage hydrologique)

Applicabilité des méthodes variationnelles

- Pertinence des dérivées calculées par **différentiation algorithmique**, même dans le cas d'une physique dont la représentation comporte des seuils de fonctionnement
- Évaluation objective et systématique du **domaine de validité des dérivées**, par ex. à l'aide de l'approche proposée par *Araya-Polo*, (2006)
- Modifier la formulation des systèmes basés sur TOPMODEL pour **assurer la dérivabilité** par rapport à toutes les variables de contrôle (paramètres de U.H. géomorphologique ou indice de similarité hydrologique)

Comprendre analyser et réduire les incertitudes pour la prévision hydrologique

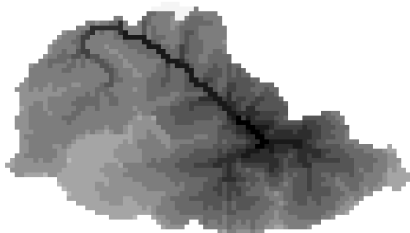
- Remise en question du **dogme** motivant l'emploi de méthodes **probabilistes/évolutionnaires** pour l'estimation des paramètres
- **Combiner** les avantages des méthodes **déterministes et stochastiques** pour l'analyse de systèmes hydrologiques (variété de bassin versants et de régimes de précipitations)
- Mise à jour de l'**état initial** par **assimilation variationnelle de données**, fenêtre d'assimilation et description des processus
- Description du **sous-espace** altérant l'**incertitude prédictive**, potentiel pour la propagation d'incertitudes dans les chaînes de prévision hydro-météorologiques (**prévision d'ensemble**)

Modes d'amplification des erreurs sur les précipitations

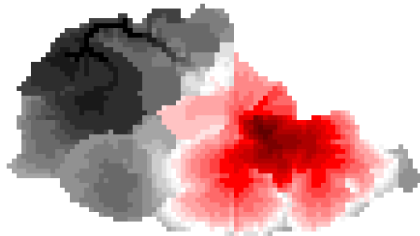
Sensibilité de $q(t)$ à ζ (coefficient correctif spatialement distribué)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{s^{1/2}}{n} \frac{\partial uh^{5/3}}{\partial x} = \zeta r - i$$

1^{ier} vecteur singulier de ζ

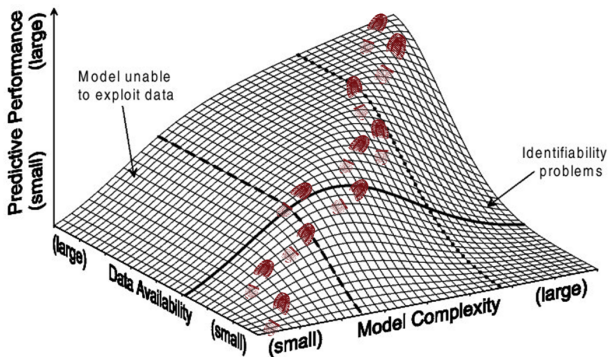


2^{ieme} vecteur singulier de ζ



composantes positives en dégradé de rouge, négatives en dégradé de gris

Merci de votre attention ...



Q?

Plan de l'exposé

- 5 Annexes
 - Analyse de sensibilité
 - Estimation des paramètres

- Results with spatially distributed (1 km resolution) rainfall forcing

Cumulated rainfall depth



First SV for ζ



Second SVD for ζ

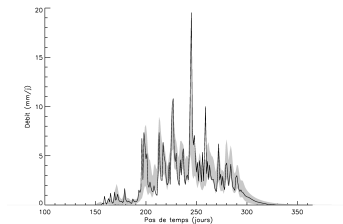
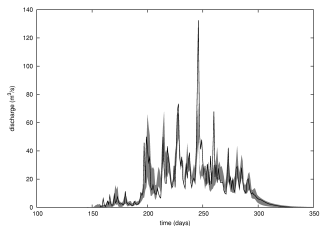


Analyse d'incertitude I

Capacité à extraire de l'information des observations

Ensemble de 5 combinaisons

GLUE (*Le Lay et al, 2006*)

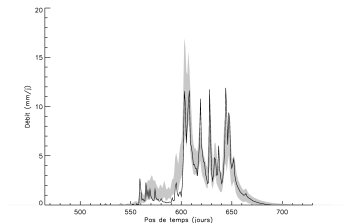
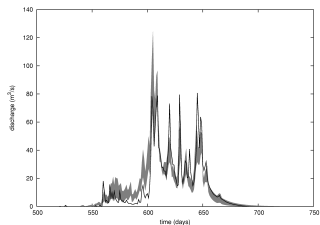


Analyse d'incertitude II

Capacité à extraire de l'information des observations

Ensemble de 5 combinaisons

GLUE (*Le Lay et al, 2006*)

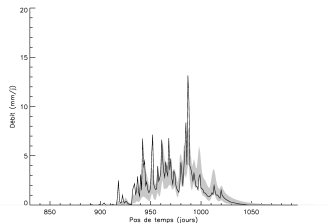
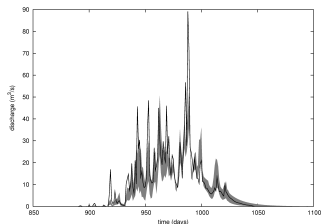


Analyse d'incertitude III

Capacité à extraire de l'information des observations

Ensemble de 5 combinaisons

GLUE (*Le Lay et al, 2006*)

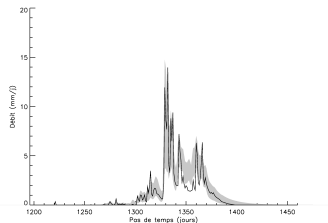
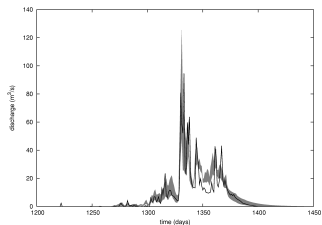


Analyse d'incertitude IV

Capacité à extraire de l'information des observations

Ensemble de 5 combinaisons

GLUE (*Le Lay et al, 2006*)

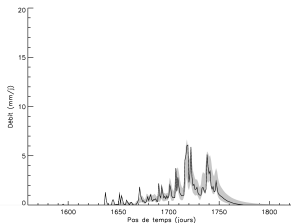
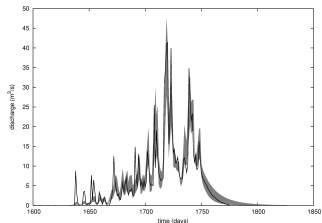


Analyse d'incertitude V

Capacité à extraire de l'information des observations

Ensemble de 5 combinaisons

GLUE (*Le Lay et al, 2006*)



Multi-modalité en hydrologie

Blâmer les méthodes d'estimation des paramètres où réviser la formulation des modèles?

