Etude asymptotique et multiplicité pour l'équation de Sobolev Poincaré

Marie Dellinger

Université de Paris VI - Pierre et Marie Curie

Thèse de Doctorat

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

Présentée par

Marie Dellinger

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

Etude asymptotique et multiplicité pour l'équation de Sobolev Poincaré.

Thèse soutenue le 30 mars 2007 devant le Jury composé de

Monsieur AMMANN Bernd (rapporteur)
Monsieur AUBIN Thierry
Monsieur BAIRD Paul (rapporteur)
Monsieur HEBEY Emmanuel (codirecteur)
Monsieur HUMBERT Emmanuel
Monsieur VAUGON Michel (codirecteur)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Messieurs Bernd Ammann et Paul Baird pour le travail et le temps qu'ils ont consacrés à mon travail en tant que rapporteurs ; ainsi que Messieurs Thierry Aubin et Emmanuel Humbert pour avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci aussi à toutes les personnes qui ont contribué à faire de ma thèse un moment appréciable :

à Emmanuel Hebey pour son encadrement efficace, pour m'avoir donné les directions à suivre et pour sa relecture précise de mon travail

à mes parents pour leur soutien moral et matériel (...culinaire)

à Jean et surtout à Céline pour avoir supporté mon stress, ma fatigue et parfois ma mauvaise humeur ; mais surtout pour avoir partagé mon enthousiasme et pour m'avoir bien souvent fait rire

à Vazou pour les nombreuses heures de travail côte à côte et pour tout le reste

à la team du bureau 8C24 : Farid, Michel et Walid qui rendent les longues journées à Chevaleret plus agréables

à la team des Monts d'Auvergne :
Benoît, la génération montante des sciences
Stéphane, le gardien des livres : pour son enthousiasme toujours intact pour les mathématiques et sa manière d'en parler
Zoé, la collègue et amie : pour notre collaboration, nos discussions mathématiques et plus philosophiques sur nos parcours croisés, nos projets et notre partage du goût des mathématiques et de l'enseignement
et enfin Michel qui m'a ouvert les portes du monde de la recherche et fait partagé, avec toute son humanité, sa passion pour le métier d'enseignant chercheur.

Table des matières

I Etude asymptotique d'une suite de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré structurée par l'énergie 17

1 Inégalité et équation de Sobolev Poincaré 18
1.1 L'inégalité de Sobolev Poincaré 18
1.2 L'équation de Sobolev Poincaré 23
1.3 La première meilleure constante K_n : un lien entre inégalité et équation de Sobolev Poincaré 25
1.4 Energie associée à l'équation de Sobolev Poincaré 34

2 Etude asymptotique de l'équation de Sobolev Poincaré en énergie bornée "petite". 35
2.1 Introduction à l'énergie bornée 35
2.2 Deux résultats "techniques" en énergie bornée 37
2.2.1 Processus d'itération 37
2.2.2 Principe itératif de De Giorgi-Nash-Moser 39
2.3 Etude asymptotique en énergie "petite" 40
2.3.1 Energie "trop petite pour la concentration" 40
2.3.2 Energie "minimale pour la concentration". 42
2.3.3 Le phénomène de concentration en énergie minimale. 43

3 Etude asymptotique en énergie bornée : la décomposition H_1^2 53
3.1 Enoncé du théorème de décomposition 55
3.2 Décomposition H_1^2 pour des bulles de signe quelconque 57
3.3 Positivité des bulles 66
3.4 Additivité des énergies 71
3.5 Estimée ponctuelle 71

4 De l'énergie bornée à l'énergie infinie : la fonction énergie 76
4.1 Fonction énergie bornée 77
4.2 Fonction énergie infinie 79
4.3 Une première multiplicité par comparaison des énergies 87

II Multiplicité de niveaux d'énergies pour des solutions positives de l'équation de Sobolev en présence d'isométries **89**

5 Multiplicité de solutions positives de l'équation de Sobolev par séparation des énergies **90**
5.1 Introduction 91
5.2 Premier groupe de résultats obtenus par séparation des énergies . . . 101
5.2.1 Enoncé du théorème 5.1 101
5.2.2 Exemples 105
5.2.3 Démonstration du théorème 5.1 113
5.3 Deuxième groupe de résultats obtenus par séparation des énergies . . 115
5.3.1 Enoncé du théorème 5.2 115
5.3.2 Exemples sur la variété $S^1(t) \times S^{n-1}$ 117
5.3.3 Démonstration du théorème 5.2 123
5.4 Comparaison des deux théorèmes 124

III Multiplicité de niveaux d'énergies pour des solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré en présence d'isométries **127**

6 Inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries **129**
6.1 Inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries 129
6.2 Inégalité de Sobolev Poincaré optimale en présence d'isométries . . . 132
6.2.1 Exemples pour l'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ 133
6.2.2 Démonstration de l'inégalité optimale 134

7 Multiplicité de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré par séparation des énergies **144**
7.1 Premier groupe de résultats obtenus par séparation des énergies 144
7.1.1 Enoncé du théorème 7.1 144
7.1.2 Exemples 147
7.1.3 Démonstration du théorème 7.1 150
7.2 Deuxième groupe de résultats obtenus par séparation des énergies . . 153
7.2.1 Enoncé du théorème 7.2 153
7.2.2 Exemples 154
7.2.3 Démonstration du théorème 7.2 155

A Position des points de concentration en énergie bornée **157**

B Courbure scalaire et groupe d'isométries **159**
B.1 Courbure scalaire et quotient global 159
B.2 Courbure scalaire et quotient local : un exemple 160

Introduction

1 Le contexte

Notre travail se situe dans le cadre de l'analyse non linéaire sur les variétés. Un des célèbres problèmes du domaine est le problème de Yamabe. On l'énonce de la manière suivante : sur une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, montrer qu'il existe un changement de métrique conforme qui rend la courbure scalaire constante. Cette question géométrique revient à montrer l'existence d'une solution $u \in C^\infty(M)$ strictement positive de l'équation de Yamabe

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g\, u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad (E_Y)$$

où $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$ est le laplacien riemannien de la variété et $Scal_g$ sa courbure scalaire. Le problème de Yamabe est aujourd'hui complètement résolu. Il se généralise au problème de courbure scalaire prescrite qui s'étudie avec les mêmes outils et s'énonce comme suit : sur une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, quelles fonctions sont les courbures scalaires d'une métrique conforme à g ? Cela se traduit par la recherche des fonctions $f \in C^\infty(M)$ pour lesquelles il existe $u \in C^\infty(M)$ strictement positive solution de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = f u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Ce type d'équations liées à des problèmes géométriques conduit naturellement à l'étude analytique de solutions positives d'équations du type

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{2^*-1} \qquad (E_S)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $f \in C^0(M)$ et où on note $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Dans cette thèse, l'équation (E_S) est appelée équation de Sobolev par opposition à l'équation de Sobolev Poincaré présentée ci-dessous. Ce nom vient du fait que l'étude de l'existence de solutions pour ce type d'équations est fortement liée, par la méthode variationnelle, à l'étude des meilleures constantes dans l'inégalité fonctionnelle donnée par la continuité de l'inclusion de l'espace de Sobolev $H_1^2(M)$ dans l'espace $L^{2^*}(M)$, où $H_1^2(M)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(M)$ dont le gradient est aussi dans $L^2(M)$. Cette inégalité s'écrit :
$\exists A > 0, \exists B > 0, \forall u \in H_1^2(M),$

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq A\left(\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2\right). \qquad (I_{AB})$$

On définit alors la notion de première meilleure constante pour cette inégalité par

$$\inf\{A > 0 \ / \ \exists B > 0, (I_{AB}) \text{ est vraie pour tout } u \in H_1^2(M)\}.$$

Aubin [1] et Talenti [40] montrent que la première meilleure constante de l'inégalité (I_{AB}) est égal à

$$K_n = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}.$$

Hebey-Vaugon [28] montrent ensuite que K_n est effectivement atteinte sur toute variété riemanienne compacte de dimension $n \geq 3$. On a alors : $\forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq K_n \left(\|\nabla u\|_2^2 + B_0(M,g)\|u\|_2^2\right). \qquad (I_S^{opt})$$

où $B_0(M,g)$ est la seconde meilleure constante dans (I_{AB}), c'est-à-dire la borne inférieure des $B > 0$ pour lesquels (I_{AB}) est vraie avec $A = K_n$ pour tout $u \in H_1^2(M)$. L'inégalité (I_S^{opt}) est appelée inégalité de Sobolev optimale.

Ces notions importantes ayant été présentées, on considère maintenant l'inégalité fonctionnelle qui joue un rôle important dans cette thèse. En combinant par exemple l'inégalité de Poincaré et l'inégalité (I_{AB}), on obtient :
$\exists A > 0, \exists C > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq A\left(\|\nabla u\|_2^2 + C\|u\|_1^2\right) \qquad (I_{AC})$$

où par rapport à (I_{AB}), la norme L^1 remplace la norme L^2 dans le second membre. De la même manière que l'inégalité (I_{AB}) est liée à l'équation (E_S), nous montrons que l'inégalité (I_{AC}) est liée à des solutions positives de l'équation suivante :

$$\Delta_g u + \alpha\Sigma\|u\|_1 = f u^{2^*-1} \qquad (E_{\alpha,f})$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $f \in C^0(M)$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$. Dans notre travail, cette équation $(E_{\alpha,f})$ est appelée équation de Sobolev Poincaré. Soulignons les particularités de cette équation qui montrent l'intérêt de son étude.

Tout d'abord comme pour l'équation de Sobolev, l'équation $(E_{\alpha,f})$ est de type critique dans le sens où l'exposant 2^* du second membre est la valeur critique quant à la compacité de l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^p(M)$. En effet, l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^p(M)$ est continue pour $p \in [1, 2^*]$ et le théorème de Rellich-Kondrakov affirme qu'elle est compacte seulement pour $p \in [1, 2^*[$. La compacité donne directement par la méthode variationnelle l'existence de solutions non triviales pour des équations sous-critiques, c'est-à-dire où l'exposant du second membre est strictement inférieur à $2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. La recherche de solutions non triviales dans le cas critique est beaucoup plus délicate. Ce problème a déjà été rencontré pour l'équation de Yamabe puis pour les équations plus générales (E_S) : il se résout en faisant converger une suite de solutions d'équations sous-critiques vers une solution de l'équation critique voulue. Nous adaptons ce raisonnement pour l'équation de Sobolev Poincaré et nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 0.1. *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ telle que* $\sup f > 0$. *Si*

$$\mu_\alpha := \inf_{\{u \in H_1^2(M), \int_M f|u|^{2^*} dv_g > 0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \alpha \|u\|_1^2}{\left(\int_M f|u|^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*}} < \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*} K_n},$$

alors il existe une solution $u_\alpha \in C^{1,\beta}(M)$ positive non identiquement nulle de $(E_{\alpha,f})$. De plus, cette solution est globalement minimisante dans le sens où

$$\mu_\alpha = \frac{\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + \alpha \|u_\alpha\|_1^2}{\left(\int_M f|u_\alpha|^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*}}.$$

Dans cette proposition apparaît la valeur K_n de la meilleure première constante de (I_{AB}) qui, comme le montrent facilement Druet-Hebey-Vaugon [14], est aussi la meilleure première constante de l'inégalité (I_{AC}). Ils montrent de plus l'inégalité suivante, appelée inégalité de Sobolev Poincaré :
$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon(M,g) > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq (K_n + \varepsilon)\left(\|\nabla u\|_2^2 + C_\varepsilon(M,g)\, \|u\|_1^2\right). \qquad (I_{SP})$$

Cependant K_n, en tant que première meilleure constante de (I_{AC}), n'est pas toujours atteinte, autrement dit l'inégalité (I_{SP}) n'est pas vraie pour $\varepsilon = 0$ sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, ce qui est par contre le cas pour l'inégalité de Sobolev. Lorsque (I_{SP}) est vraie avec $\varepsilon = 0$, on a : $\forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq K_n \left(\|\nabla u\|_2^2 + C_0(M,g)\|u\|_1^2\right), \qquad (I_{SP}^{opt})$$

où $C_0(M,g)$ est la seconde meilleure constante de (I_{AC}), c'est-à-dire la borne inférieure des $C > 0$ pour lesquels (I_{AC}) est vraie avec $A = K_n$. L'inégalité (I_{SP}^{opt}) est appelée inégalité optimale de Sobolev Poincaré. Druet-Hebey-Vaugon [14] montrent que sa validité est fortement affectée par la dimension $n \geq 3$ et la géométrie de la variété par l'intermédiaire de sa courbure scalaire notée $Scal_g$. Ils montrent en effet que (I_{SP}^{opt}) est valide dans les cas suivants : $n = 3$; $n \geq 4$ et $Scal_g < 0$; $n \in \{4,5\}$ et $Scal_g \leq 0$; $n \geq 6$, $Scal_g \leq 0$ et (M,g) est conformément plate. En revanche, elle est fausse dès que $n \geq 4$ et $\sup Scal_g > 0$.

Cette différence importante entre l'inégalité de Sobolev et celle de Sobolev Poincaré se retrouve lorsqu'on s'intéresse à l'existence de solutions pour les équations associées à ces inégalités par la méthode variationnelle. On montre en effet qu'une première différence entre ces deux équations est que l'équation de Sobolev Poincaré est très sensible à la dimension et à la géométrie de la variété, ce qui n'est pas du tout le cas pour l'équation de Sobolev. Nous montrons les deux résultats opposés suivants en corollaire des conditions de validité de (I_{SP}^{opt}) données ci-dessus :

Proposition 0.2. ***a)*** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$ dont la courbure scalaire vérifie $Scal_g > 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour toute fonction $f \in C^2(M)$ de maximum strictement positif atteint en $x_0 \in M$ vérifiant $(n-4)\Delta_g f(x_0) = 0$, il existe une solution positive à l'équation $(E_{\alpha,f})$ qui de plus est globalement minimisante.*
b) *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ sur laquelle l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale (I_{SP}^{opt}) est vérifiée (ce qui implique que $(n-3)Scal_g \leq 0$), alors dès que $\alpha > C_0(M, g)$, il n'existe pas de solutions à l'équation $(E_{\alpha,f})$ qui soient globalement minimisantes.*

Une deuxième particularité de notre équation concerne l'annulation éventuelle de ses solutions positives. Soit une solution $u \in H_1^2(M)$ positive non triviale de $(E_{\alpha,f})$ alors, contrairement à l'équation de Sobolev où par le principe du maximum toute solution positive non nulle est strictement positive, ici on ne peut pas affirmer que u est strictement positive. Il n'est donc pas incohérent de voir apparaître la fonction $\Sigma \in L^\infty(M)$. Elle vaut 1 sur $\{u > 0\}$ et 0 sur $M \setminus supp\ u$ où $supp\ u$ est le support de u. On ne connaît pas la valeur de Σ sur $supp\ u \cap \{u = 0\}$, ensemble dont on ne connaît pas la mesure. Cette fonction provient du fait que la norme L^1 n'est différentiable dans aucune direction et peut être considérée "formellement" comme la différentielle de cette norme.

Enfin, une dernière particularité de notre équation concerne la régularité de ses solutions : les théorèmes de régularité montrent en effet seulement qu'une solution de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ appartient à $C^{1,\beta}(M)$ alors qu'une solution de l'équation de Sobolev (E_S) appartient à $C^\infty(M)$.

L'objet principal de cette thèse est l'étude de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ et plus particulièrement de l'ensemble de ses solutions positives noté :

$$\mathcal{S}_{\alpha,f} = \left\{u \in H_1^2(M), u \textbf{ est solution positive non triviale de } (E_{\alpha,f})\right\}.$$

Notre étude est structurée par la notion d'énergie d'une solution définie par :

$$\forall u \in S_{\alpha,f}, \qquad \mathcal{E}(u) = \int_M f|u|^{2^*}\, dv_g.$$

Nous faisons tout d'abord une étude dynamique de l'équation de Sobolev Poincaré : pour f fixée, on considère une suite $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ et notre but est de décrire le comportement asymptotique de (u_α) suivant son "niveau d'énergie" lorsque α converge vers $\alpha_0 \in]0, +\infty]$. Nous montrons ensuite des résultats de multiplicité de niveaux d'énergies pour des solutions positives d'une équation de type Sobolev Poincaré en présence d'isométries. Nos résultats sur l'équation de Sobolev Poincaré sont présentés dans la section 2 suivante.
De plus, au cours de notre travail, nous avons été amené à étudier la question de multiplicité des niveaux d'énergies pour une équation de type Sobolev en présence d'isométries. Nous avons pu généraliser des résultats existants et notre travail à ce propos est présenté dans la section 3.

2 Les résultats concernant l'équation de Sobolev Poincaré

a) Etude asymptotique

Dans la première partie de notre thèse, nous étudions le comportement asymptotique d'une suite (u_α) de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ dont l'énergie est bornée lorsque α converge vers $\alpha_0 \in]0, +\infty]$ et que f reste fixe. Nous adaptons à l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ les résultats déjà connus sur le comportement asymptotique d'une suite de solutions positives de l'équation de Sobolev (E_S), voir notamment Druet-Hebey-Robert [13], Hebey [26] et [24] qui se démontrent grâce aux techniques désormais classiques de méthode variationnelle, de changement d'échelle et de phénomène de concentration. Ces techniques s'adaptent à l'équation de Sobolev Poincaré dans leur déroulement global. Cependant, des différences apparaissent à cause de la présence de la norme L^1 qui est non différentiable et qui apporte une inhomogénéité des fonctionnelles utilisées par changement de métrique conforme. Cela nous oblige à modifier certaines approches et donc certaines hypothèses. Les résultats obtenus sont parfois très différents du cas de l'équation de Sobolev comme on l'a d'ailleurs déjà remarqué en ce qui concerne l'existence de solutions globalement minimisantes.

Dans le chapitre **1**, nous montrons que (u_α) converge lorsque $\alpha \to \alpha_0 \in]0, +\infty]$ faiblement dans $H_1^2(M)$ vers une fonction $u_0 \in H_1^2(M)$, fortement dans $L^1(M)$ et presque partout vers cette même limite u_0. Le but de cette première partie est d'affiner la description de cette convergence. Le comportement obtenu dépend du niveau d'énergie de la suite, c'est pourquoi nous structurons notre étude en augmentant au fur et à mesure la valeur de cette énergie jusqu'à arriver à des énergies arbitrairement grandes.

Dans le chapitre **2**, nous commençons par le cas simple où l'énergie de la suite est majorée par $\mathcal{E}_{min} = \left(K_n \sup f^{2/2^*}\right)^{-n/2}$. On montre que si $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) < \mathcal{E}_{min}$ alors la convergence de (u_α) vers u_0 est forte dans $H_1^2(M)$ alors que si $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) = \mathcal{E}_{min}$ on sait seulement que la convergence de (u_α) vers u_0 est faible dans $H_1^2(M)$. En particulier, la suite $(u_\alpha - u_0)$ ne tend pas nécessairement vers 0 en norme L^{2^*} alors qu'elle tend vers 0 presque partout. Dans ce cas, un phénomène de concentration a lieu : la masse L^{2^*} de la suite $(u_\alpha - u_0)$ se regroupe lorsque α tend vers α_0 autour d'un point de concentration. On montre que ce point de concentration est unique et situé en un point de maximum de f. La valeur $\mathcal{E}_{min}$ est donc l'énergie minimale permettant l'existence d'un phénomène de concentration. L'étude de ce phénomène de concentration en énergie minimale est détaillée dans la fin de ce second chapitre.

Dans le chapitre **3**, nous passons au cas général où l'énergie de la suite de solutions (u_α) est bornée de façon arbitraire. Nous montrons que la décomposition dite "H_1^2", obtenue initialement par Struwe [39] pour une suite de solutions d'une EDP euclidienne, est valable pour notre suite de solutions :

Théorème 0.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient $\alpha_0 > 0$, $f \in C^0(M)$ telle que $\sup_M f > 0$ et (u_α) une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée. Alors il existe $u_0 \in \mathcal{S}_{\alpha_0,f} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ suites de points $(x^i_\alpha), i \in \{1...k\}$, convergeant chacune à sous suite près vers $x^i_0 \in M$ quand $\alpha \to \alpha_0$ et k suites de réels strictement positifs (ρ^i_α) tendant vers 0 quand $\alpha \to \alpha_0$ tels que, à extraction de sous suites près :*

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^{k} f(x^i_0)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \mathcal{B}^i_\alpha + \mathcal{R}_\alpha,$$

où $\forall i \in \{1..k\}$, $f(x^i_0) > 0$, où $\|\mathcal{R}_\alpha\|_{H^2_1} \longrightarrow 0$ quand $\alpha \to \alpha_0$ et où $\forall i \in \{1..k\}, (\mathcal{B}^i_\alpha)$ est une bulle positive, c'est-à-dire une suite de fonctions à support compact dans $B_{x^i_\alpha}(\delta)$ définie par :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall x \in B_{x^i_\alpha}(\delta), \qquad \mathcal{B}^i_\alpha(x) = \left(\frac{\rho^i_\alpha}{{\rho^i_\alpha}^2 + \frac{d_g(x^i_\alpha,\, x)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n}{2}-1}.$$

On montre alors facilement que l'énergie se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \mathcal{E}(u_0) + K_n^{-n/2} \sum_{i=1}^{k} f(x^i_0)^{1-n/2} + \circ(1).$$

Enfin, on montre une estimée ponctuelle : $\exists C > 0, \forall x \in M$,

$$\left(\min_{i=1..k} d_g(x^i_\alpha, x) \right)^{\frac{n-2}{2}} |u_\alpha(x) - u_0(x)| \leq C.$$

Il est intéressant de remarquer que la suite $(u_\alpha - u_0)$ se concentre mais que la situation est un peu différente du cas de l'énergie minimale où on rappelle que pour $f \in C^0(M)$, il existe un unique point de concentration situé en un maximum de f. Ici, en énergie quelconque il peut y avoir plusieurs points de concentration et on montre seulement (voir l'appendice A) que si $f \in C^1(M)$ ce sont des points critiques de f.

Dans le chapitre **4**, nous cherchons à obtenir des solutions de grande énergie dans le cas particulier de l'équation de Sobolev Poincaré où $f \equiv 1$, à savoir

$$\Delta_g u + \alpha \Sigma \|u\|_1 = u^{2^*-1} \qquad (E_\alpha)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$. Pour cela, nous utilisons la notion de fonction énergie $\mathcal{E}_m$ introduite par Hebey [24] et qui pour l'équation (E_α) est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathcal{E}_m(\alpha) = \inf_{\{u \in \mathcal{S}_{\alpha,1}\}} \mathcal{E}(u).$$

On s'intéresse à la régularité de cette fonction et à son comportement en l'infini. Comme pour les questions d'existence de solutions, deux situations différentes se produisent alors suivant la géométrie de la variété :

Théorème 0.2. *Soit (M,g) une variété riemanienne compacte de dimension $n \geq 4$.*
a) *Si $\sup Scal_g > 0$, alors la fonction énergie $\mathcal{E}_m : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^+$ associée à (E_α) est lipschitzienne, croissante et majorée par $K_n^{-\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $\mathcal{E}_m$ est dérivable sur tout intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{+*}$ sur lequel pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, il existe une unique solution globalement minimisante u_α de (E_α) et on a*

$$\forall \alpha \in \mathcal{I}, \qquad \mathcal{E}'(\alpha) = \frac{n}{2}\|u_\alpha\|_1^2.$$

b) *Si la variété est localement conformément plate avec une courbure scalaire négative dont le Hessien est non dégénéré en tout point où elle est nulle, alors la fonction énergie $\mathcal{E}_m$ associée à (E_α) est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, lipschitzienne et majorée par $K_n^{-\frac{n}{2}}$ sur $]0, C_0(M,g)[$. Elle est de plus semi-continue inférieurement sur un voisinage de l'infini et de limite infinie lorsque α tend vers $+\infty$. (En particulier toute suite de solutions a une énergie qui tend vers $+\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$.)*

b) Multiplicité

La suite de notre travail est motivée par la recherche d'exemples de multiplicité de niveaux d'énergie pour des solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$. Le principe est le suivant : grâce à l'introduction de groupes d'isométries de la variété, on obtient plusieurs solutions chacune invariante par un groupe d'isométries et on cherche des conditions pour que ces solutions aient des énergies différentes. Ce raisonnement est utilisé par Hebey-Vaugon [29] pour l'équation de Sobolev (E_S) dans le cas particulier des problèmes de Yamabe et de Nirenberg et dans le cas particulier où les groupes d'isométries sont finis et permettent de définir une variété quotient globale. D'une part, nous adaptons ce raisonnement à l'équation de Sobolev Poincaré et d'autre part nous étendons les résultats de Hebey-Vaugon [29] à une palette plus large d'équations de type Sobolev et pour des groupes d'isométries n'ayant pas forcément d'orbite finie et ne permettant pas toujours le passage au quotient global. Les travaux de Faget [17] et [18] sur l'influence d'un groupe G d'isométries de la variété sur l'inégalité de Sobolev sont le point de départ permettant cette généralisation. Nos résultats à ce propos sont exposés dans la section **3** ci-dessous.

La recherche de multiplicité de solutions positives pour l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ est traitée dans la troisième partie de notre thèse. Nous étudions tout d'abord dans le chapitre **6** l'influence d'un groupe G d'isométries sur l'inégalité de Sobolev Poincaré. On note $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites, $A > 0$ le volume minimal des G-orbites de dimension k et $H_{1,G}^2(M)$ les fonctions de $H_1^2(M)$ qui sont invariantes par le groupe G. D'une part, on rappelle que le fait d'imposer des invariances par isométries permet d'augmenter la valeur de l'exposant critique pour l'inclusion de $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^p(M)$: Hebey-Vaugon [30] montrent en effet que pour $n-k > 2, H_{1,G}^2(M)$ est inclus de manière compacte dans $L^p(M)$ pour $p \in \left[1, \frac{2(n-k)}{n-2-k}\right[$ et que l'inclusion $H_{1,G}^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$ où $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$ est seulement continue. On a $2^\sharp \geq 2^*$ avec inégalité stricte dès que $k > 0$ c'est-à-dire dès que le groupe G n'engendre pas d'orbites finies. Précisons d'autre part qu'en ce qui concerne l'action d'un

groupe d'isométries G, nous dirons qu'elle "permet le passage au quotient" si toutes les G-orbites sont principales car alors, voir par exemple Bredon [5] et Gallot-Hullin-Lafontaine [20], on peut munir l'espace topologique M/G d'une structure de variété riemanienne de sorte que le triplet $(\pi_G, M, M/G)$ soit une fibration riemannienne.
Sur l'influence d'un groupe d'isométries G sur l'inégalité de Sobolev Poincaré, nous montrons facilement l'inégalité suivante :
$\forall \varepsilon > 0, \exists C_{\varepsilon,G}(M,g) > 0, \forall u \in H^2_{1,G}(M)$,

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k} + \varepsilon}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left(\|\nabla u\|^2_2 + C_{\varepsilon,G}(M,g)\, \|u\|^2_1 \right) \qquad (I^G_{SP})$$

où $\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}$ est la meilleure première constante et où $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$. L'inégalité (I^G_{SP}) est appelée inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries. A cette inégalité est associée par la méthode variationnelle l'équation suivante, que nous appelons équation de Sobolev Poincaré en présence d'isométries :

$$\Delta_g u + \alpha\Sigma\|u\|_1 = f u^{2^\sharp - 1}. \qquad (E^\sharp_{\alpha,f})$$

où la solution $u \in H^2_1(M)$ est positive et invariante par l'action du groupe G et où $\alpha > 0$, $f \in C^0_G(M)$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$.
Nous donnons un cas où la première meilleure constante de (I^G_{SP}) est effectivement atteinte :

Théorème 0.3. *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des orbites et $A > 0$ le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que $n - k > 2$. Si l'hypothèse $(\mathcal{H}^{SP}_1)$ énoncée ci-dessous est vraie alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^2_{1,G}(M)$,*

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left(\|\nabla u\|^2_2 + C\, \|u\|^2_1 \right) \qquad (1)$$

$(\mathcal{H}^{SP}_1)$: pour toute orbite $O^G_{x_0}$ de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe un sous-groupe d'isométries G' et $\delta > 0$ tels que :
i) Sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M / d_g(x, O_{x_0}) < \delta\}$, les G'-orbites sont principales.
ii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}$, $\quad O^{G'}_x \subset O^G_x$ et $O^{G'}_{x_0} = O^G_{x_0} := O_{x_0}$.
iii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}$, $\quad A = vol_g O_{x_0} \leq vol_g O^{G'}_x$.
iv) Sur la variété à bord $O_{x_0,\delta}/G'$, l'inégalité de Sobolev Poincaré (I^{opt}_{SP}) est valable.

Lorsque l'inégalité (1) est vraie, on définit la seconde meilleure constante $C_{O,G}(M,g)$ comme la borne inférieure des $C > 0$ tel que (1) est vraie. On a alors

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left(\|\nabla u\|^2_2 + C_{O,G}(M,g)\, \|u\|^2_1 \right). \qquad (I^{G,opt}_{SP})$$

L'inégalité $(I^{G,opt}_{SP})$ est appelée inégalité de Sobolev Poincaré optimale en présence d'isométries. Dans l'hypothèse technique $(\mathcal{H}^{SP}_1)$, la condition $i)$ permet de passer au quotient au voisinage de chaque orbite de dimension minimale k et de volume minimal A. Grâce à *iv*), on écrit l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale (I_{SP}^{opt}) sur chaque variété quotient et enfin les conditions *ii*) et *iii*) permettent de "remonter" cette inégalité sur la variété initiale M pour finalement obtenir ($I_{SP}^{G,opt}$). La démonstration de cette inégalité optimale nécessite une étude précise de la géométrie des orbites et se ramène à montrer l'impossibilité d'un phénomène de concentration pour une suite de solutions G-invariantes de l'équation ($E_{\alpha,1}^{\sharp}$). Précisons que cette fois-ci, l'ensemble vers lequel se concentre la suite de solutions G-invariantes est une unique G-orbite qui est de dimension minimale $k \geq 0$ et de volume minimal $A > 0$.

Dans le chapitre **7**, nous obtenons des résultats de multiplicité pour l'équation de Sobolev Poincaré en présence d'un groupe G d'isométries :

$$\Delta_g u + \alpha\Sigma\|u\|_1 = f u^{2^\sharp - 1}. \qquad (E_{\alpha,f}^{\sharp})$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $f \in C^0(M), \Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$ et $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$ où $k \geq 0$ est la dimension minimale des G-orbites. Notons que dans ($E_{\alpha,f}^{\sharp}$), on a $2^\sharp > 2^*$ si $k > 0$.
Nos résultats sont tout d'abord donnés sous la forme générale suivante : nous supposons acquise l'existence de deux solutions positives pour l'équation ($E_{\alpha,f}^{\sharp}$) chacune étant invariante par un groupe d'isométries et nous obtenons dans les théorèmes techniques 7.1 et 7.2 des conditions générales assurant que les énergies de ces deux solutions sont différentes. Pour écrire ces conditions, on se sert notamment des inégalités de Sobolev Poincaré, en présence ou non d'isométries. Nous sommes contraints d'utiliser les formes non optimales de ces inégalités car sinon la compatibilité entre les conditions d'existence et celles de multiplicité ne peut être garantie. Cela est dû en particulier au peu de renseignements dont nous disposons sur les deuxièmes meilleures constantes $C_0(M,g)$ et $C_{0,G}(M,g)$. A cette raison technique s'ajoute le fait que demander la validité de la forme optimale de l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence ou non d'isométries a des conséquences très lourdes sur la géométrie de la variété qui empêchent souvent, comme on l'a vu par exemple dans la proposition 0.2, d'obtenir facilement l'existence de solutions.
Une manière intéressante de reformuler le théorème 7.1 qui permet d'obtenir pour f bien choisie tout un intervalle de multiplicité pour le paramètre réel α est la suivante :

Théorème 0.4. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1- et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que $A_1 < A_2$. Soit $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right)$, alors pour tout $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$, il existe une constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha} \geq 0$ nulle si et seulement si $\alpha = C_{\varepsilon,G_2}$ telle que si une fonction $f \in C^0_{G_1 \cup G_2}(M)$ strictement positive vérifie*

$$\frac{\sup f}{⨍ f \, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha}$$

et s'il existe deux solutions à l'équation ($E_{\alpha,f}^{\sharp}$), l'une G_1-minimisante et -invariante et l'autre G_2-minimisante et -invariante alors les énergies de ces deux solutions sont différentes.

La constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}$ dépend des paramètres $\varepsilon, \alpha, G_1, G_2, M, g$ et d'un réel $r \in]0,1[$ assez petit. Sa valeur explicite est donnée par (7.4) dans la sous section 7.1.1.
En ajoutant des conditions d'existence de solutions, on obtient des résultats complets de multiplicité pour plusieurs variétés. On note (S^p, h_p) la sphère standard de dimension $p > 0$ et (V^q, g_V) une variété riemanienne compacte de dimension $q > 0$. Nos exemples sont les suivants : la sphère standard (S^n, h_n) et la variété produit $(S^1(t) \times S^{n-1}, h_1 \times h_{n-1})$ où on fait agir des groupes finis permettant le passage au quotient ; la variété $(S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}, h_1 \times h_3 \times g_V)$ avec $\min_V Scal_{g_V} > -6$ où les deux groupes d'isométries utilisés permettent le passage au quotient avec des orbites de dimension constante égale à 1 et enfin la variété $(V^k \times S^{n-k}, g_V \times h_{n-k})$ où les groupes d'isométries utilisés ont des orbites de dimension minimale égale à $k \geq 1$ et ne permettent pas le passage au quotient et où $\min_V Scal_{g_V} > -(n-2k)(n-2k-1)$. Pour les énoncés précis de ces résultats, on renvoie aux corollaires 7.1, 7.2 et 7.3.

Le théorème 7.2 est obtenu par le même raisonnement global de séparation des énergies que pour le théorème 7.1, la différence entre ces deux théorèmes étant d'ordre technique. Son intérêt est qu'il donne un intervalle de multiplicité pour le paramètre α pour toutes les fonctions f :

Théorème 0.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1- et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n - k \geq 4$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que : $A_1 < A_2$. Soient $\varepsilon \in \left]0, K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right)\right[$, $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive et $\alpha > 0$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} \alpha &\leq C_{\varepsilon,G_2} \\ \alpha &> C_{\varepsilon,G_2} - \left(\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}+\varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}} \left(v_g \fint f \, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}} \end{aligned}$$

Alors s'il existe deux solutions, l'une G_1- l'autre G_2-invariante à l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$, alors les énergies de ces solutions sont différentes.

Les exemples pour lesquels on peut garantir la compatibilité entre l'existence et la multiplicité sont alors les mêmes que ceux présentés pour le théorème 0.4 ci-dessus. On renvoie aux corollaires 7.4, 7.5 et 7.6 pour leurs énoncés complets.
Soulignons de plus que ces deux théorèmes se complètent car les hypothèses de la première version demande à la fonction f de présenter d'assez fortes variations alors que la deuxième version donne un intervalle de multiplicité d'autant plus étendu que f est proche d'une constante.

Nos résultats, bien que précis, restent malgré tout non explicites car la valeur de la constante C_{ε,G_2} n'est pas connue. La situation est différente pour la question voisine de multiplicité pour des équations du type Sobolev sur laquelle nous nous sommes aussi penchés durant notre travail. Nous obtenons des résultats intéressants et originaux de part leur précision et leur caractère explicite que l'on détaille dans la section suivante.

3 Résultats parallèles : mutiplicité pour l'équation de Sobolev en présence d'isométries

Dans la deuxième partie de notre thèse, nous généralisons les résultats de multiplicité d'Hebey-Vaugon [29] pour les équations de Yamabe et de Nirenberg en utilisant les travaux de Faget [17] et [18] sur l'influence d'un groupe G (fini ou non) d'isométries de la variété sur l'inégalité de Sobolev. Elle montre en particulier que sous une hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, l'inégalité de Sobolev optimale en présence d'isométries est valable : $\forall u \in H^2_{1,G}(M)$

$$\| u\|^2_{\frac{2(n-k)}{n-2-k}} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left(\|\nabla u\|^2_2 + B_{0,G}(M,g)\,\|u\|^2_2\right) \qquad (I^{G,opt}_S)$$

où les valeurs des deux constantes sont optimales, priorité étant donnée à la première constante $\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}$ et où l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ regroupe les trois premières conditions $i), ii)$ et $iii)$ de l'hypothèse $(\mathcal{H}^{SP}_1)$ énoncée ci-dessus.
Nos résultats de multiplicité d'énergies concernent alors les solutions positives de l'équation liée par la méthode variationnelle à l'inégalité précédente

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{2^\sharp-1} \qquad (E^\sharp_S)$$

avec $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$ où $k \geq 0$ est la dimension minimale des G-orbites.
L'intérêt et l'originalité de nos résultats viennent du fait que l'équation $(E^\sharp_S)$ est de type critique : on a en effet rappelé que $2^\sharp$ est la valeur de $p > 1$ pour laquelle l'inclusion $H^2_{1,G}(M) \subset L^p(M)$ est continue mais pas compacte. On précise que de nombreux exemples de multiplicité ont été obtenus lorsque l'exposant du second membre de l'équation est sous-critique, c'est-à-dire correspond à une inclusion compacte de $H^2_1(M)$ (ou $H^2_{1,G}(M)$) dans $L^p(M)$, la compacité de ces inclusions étant fondamentale dans les démonstrations.

Dans le chapitre **5**, comme pour le cas de l'équation de Sobolev Poincaré, nous supposons tout d'abord acquise l'existence de deux solutions positives pour l'équation $(E^\sharp_S)$ chacune étant invariante par un groupe d'isométries et nous obtenons dans les théorèmes techniques 5.1 et 5.2 des conditions générales assurant que les énergies de ces deux solutions sont différentes. Pour écrire ces conditions, on utilise les inégalités de Sobolev en présence ou non d'isométries et optimales ou non. En se contentant des formes non optimales des inégalités, des résultats peu explicites et comparables à ceux obtenus pour l'équation de Sobolev Poincaré pourraient être énoncés. Mais ici, en utilisant les formes optimales, on trouve des exemples où la compatibilité entre les conditions d'existence et de multiplicité est assurée. On choisit pour cela des variétés et des groupes d'isométries pour lesquels on dispose de renseignements suffisamment précis sur les deuxièmes meilleures constantes $B_0(M,g)$ et (ou) $B_{0,G}(M,g)$. De plus, soulignons qu'imposer la validité des formes optimales pour les inégalités de Sobolev n'est pas très contraignant pour la variété : en effet lorsqu'il n'y a pas d'isométries, on a vu que la forme optimale est toujours vraie et en présence d'isométries, l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est peu contraignante et vérifiée dans de nombreux exemples.

Lorsque la compatibilité est assurée, nos exemples de multiplicité prennent alors une forme explicite et mettent en évidence des fonctions f et un intervalle pour le paramètre α sur lesquels il existe deux (et parfois plus) solutions différentes pour l'équation $(E_S^\sharp)$.
En application du théorème 5.1, nous obtenons un résultat qui généralise celui obtenu par Hebey-Vaugon [29] dans le cas particulier de l'équation de Nirenberg (qui est l'équation (E_S) avec $\alpha = \frac{n(n-2)}{4}$) :

Théorème 0.6. *Sur la sphère standard (S^n, h_n) de dimension impaire $n = 2p + 1 \geq 5$, on considère deux sous-groupes finis d'isométries G_1 et G_2 qui opèrent librement de cardinaux respectifs A_1 et A_2 tels que $1 < A_1 < A_2$ et une fonction $f \in C^\infty_{G_1 \cup G_2}(S^n)$ positive dont les dérivées en un point $x_0 \in M$ où elle est maximale sont nulles jusqu'à l'ordre $n-3$. Si f vérifie de plus*

$$\left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{2/n} > \left(B_{0,G_2} - \frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}\right)\left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{4A_2^{\frac{4}{n(n-2)}}}{n(n-2)}\left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-1}$$

alors l'équation

$$\Delta_{h_n} u + \alpha u = f u^{2^*-1}$$

admet deux solutions positives distinctes, l'une invariante par G_1, l'autre par G_2, lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left]\frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}; \frac{n(n-2)}{4}\right[.$$

Nous obtenons avec le théorème 5.1 d'autres résultats de multiplicité sur la variété $(S^1(t) \times S^{n-1}, h_1 \times h_{n-1})$ avec des groupes finis permettant le passage au quotient ainsi que sur la variété $(S^1(a) \times S^2(b) \times S^{n-3}, h_1 \times h_2 \times h_{n-3})$ mais avec des groupes d'isométries ne permettant plus le passage au quotient. Les énoncés sont explicites mais assez techniques, on ne les cite pas ici et on renvoie aux corollaires 5.6 et 5.7.

Comme pour la multiplicité pour l'équation de Sobolev Poincaré, les deux théorèmes 5.1 et 5.2 se démontrent avec le même raisonnement global, la différence étant purement technique. Les avantages de chacune des versions sont les mêmes que dans le cas de Sobolev Poincaré : la première version demande à f de varier suffisament alors que la seconde donne un intervalle de multiplicité pour α d'autant plus étendu que f est proche d'une constante.
Pour cette raison, nous donnons les exemples concernant le theorème 5.2 avec f constante égale à 1. Le premier généralise le résultat obtenu par Hebey-Vaugon [29] pour l'équation de Yamabe sur la variété $S^1(t) \times S^{n-1}$ (qui est l'équation (E_S) avec $f \equiv 1$ et $\alpha = \frac{(n-2)^2}{4}$) :

Théorème 0.7. *Sur la variété produit $(S^1(t) \times S^{n-1}, h_1 \times h_{n-1})$ où $n \geq 3$, $(S^1(t), h_1)$ est le cercle standard de rayon $t > 0$ et où (S^{n-1}, h_{n-1}) est la sphère standard de dimension $n-1$, on considère les deux sous-groupes d'isométries $G_1 = R_1 \times I_{S^{n-1}}$ et $G_2 = R_2 \times I_{S^{n-1}}$ où R_1 et R_2 sont deux sous-groupes finis de $SO(2)$ d'ordres respectifs A_1 et A_2 tels que $A_1 < A_2$. Si*

$$t > \frac{A_2 \omega_n}{2\pi\omega_{n-1}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n/2}$$

alors l'équation

$$\Delta_{h_1\times h_{n-1}} u + \alpha u = u^{2^*-1}$$

admet trois solutions positives d'énergies différentes si α appartient à l'intervalle :

$$\left]\max\left\{\frac{(n-2)^2}{4}+\frac{A_2^2}{4t^2}-\frac{\left(A_2^{\frac{2}{n}}-A_1^{\frac{2}{n}}\right)n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}}\;,\;\frac{A_2^{2/n}n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}}\right\}\;;\;\frac{(n-2)^2}{4}\right]$$

Une des solutions est invariante par G_1, une autre par G_2 et la dernière est la solution constante $\overline{u}_\alpha = \alpha^{\frac{n-2}{4}}$.

Citons aussi le résultat suivant à cause de la simplicité de son énoncé et du fait qu'il utilise la fibration de Hopf sur S^3 :

Théorème 0.8. *Sur la variété produit $(S^1(t)\times S^3, h_1\times h_3)$ où $(S^1(t), h_1)$ est le cercle standard de rayon $t > 0$ et où (S^3, h_3) est la sphère standard de dimension 3, on considère les deux sous-groupes d'isométries*

$$G_1 = I_{S^1(t)}\times\{(\sigma,\sigma)/\sigma\in SO(2)\}\qquad et \qquad G_2 = O(2)\times I_{S^3}.$$

Alors l'équation

$$\Delta_{h_1\times h_3} u + \alpha u = u^5$$

admet deux solutions positives d'énergies distinctes lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left]\frac{3}{4\,t^{2/3}};\frac{3}{4}\right[.$$

L'une des solutions est invariante par le groupe G_1, l'autre par G_2.

Dans ces deux derniers résultats les groupes permettent le passage au quotient, on renvoie au corollaire 5.11 pour un exemple sur $(S^1(t)\times S^{n-1}, h_1\times h_{n-1})$ où les groupes ne le permettent pas.

Première partie

Etude asymptotique d'une suite de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré structurée par l'énergie

Chapitre 1

Inégalité et équation de Sobolev Poincaré

1.1 L'inégalité de Sobolev Poincaré

Rappels sur l'inégalité de Sobolev

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. On note $2^* = \frac{2n}{n-2}$. L'espace de Sobolev $H_1^2(M)$ est inclus dans les espaces $L^p(M)$ pour $p \in [1, 2^*]$ et le théorème de Rellich-Kondrakov affirme que l'inclusion est compacte pour $p \in [1, 2^*[$ ce qui donne l'inégalité : $\forall \varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$||u||_p^2 \leq \varepsilon ||\nabla u||_2^2 + B_\varepsilon ||u||_2^2,$$

Pour $p \in [1, 2^*[$, la compacité permet d'obtenir directement par la méthode variationnelle des solutions pour des équations dites "sous-critiques" de la forme :

$$\Delta_g u + hu = f u^{p-1}$$

où h et f sont deux fonctions continues sur M. Dans le cas où p est égal à l'exposant critique 2^*, l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$ est seulement continue et donne l'inégalité : $\exists A > 0, \exists B > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$||u||_{2^*}^2 \leq A\left(||\nabla u||_2^2 + B||u||_2^2\right), \qquad (I_{AB})$$

où la première constante A ne peut plus être rendue arbitrairement petite. L'existence de solutions pour des équations dites "critiques"

$$\Delta_g u + hu = f u^{2^*-1} \qquad (E_S)$$

est alors beaucoup plus difficile à obtenir que pour le cas sous-critique. L'équation (E_S) est appelée dans la suite équation de Sobolev. On aurait aussi pu parler d'équation de type courbure scalaire prescrite ou encore de type Yamabe mais on a choisi ce nom par

opposition à l'équation de Sobolev Poincaré présentée plus bas.
Les études concernant cette dernière équation ont rendu naturelle la question des constantes optimales dans l'inégalité $(I_{A,B})$: quelle est la borne inférieure des $A > 0$ pour lesquels il existe $B > 0$ tel que $(I_{A,B})$ est vraie pour tout $u \in H_1^2(M)$? Cette borne inférieure est-elle atteinte ? Ou, si l'on s'intéresse plutôt à la deuxième constante : quelle est la borne inférieure des $B > 0$ pour lesquels il existe $A > 0$ tel que $(I_{A,B})$ est vraie pour tout $u \in H_1^2(M)$? On parle de "programme A" et de "programme B" : dans [12], Druet-Hebey regroupent les résultats actuels concernant ce "programme AB" pour l'inégalité de Sobolev.
Cette optimisation des inégalités fonctionnelles est un sujet largement traité ces derniers temps : pour l'inégalité de Nash, voir par exemple Druet-Hebey-Vaugon [15] et Humbert [32] et [33] ; pour l'inégalité de Sobolev logarithmique ainsi que l'inégalité de Garigliardo-Nirenberg, voir Brouttelande [7] et [8] ; pour l'inégalité issue du cas d'exception des inclusions de Sobolev, voir Faget [19].
Revenons à l'inégalité (I_{AB}) : lorsque la priorité est donnée à la première constante, on sait depuis Aubin[1], Talenti [40] que la meilleure première constante, c'est-à-dire la borne inférieure des $A > 0$ pour lesquels il existe $B > 0$ tel que (I_{AB}) est vraie pour tout $u \in H_1^2(M)$, est $K_n = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}$, où ω_n est le volume de la sphère unité standard S^n.
Cette valeur est aussi la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne. Ainsi,
$\forall \varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon(M,g) > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq (K_n + \varepsilon)\left(\|\nabla u\|_2^2 + B_\varepsilon(M,g)\,\|u\|_2^2\right). \qquad (I_S)$$

En fait, Hebey-Vaugon [28] ont montré que (I_{SP}) est valable pour $\varepsilon = 0$ sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. La première constante étant optimisée, on minimise alors la seconde en définissant :

$$B_0(M,g) = \inf\left\{B > 0/(I_{A,B}) \text{ est vraie avec } A = K_n \text{ pour toute fonction } u \in H_1^2(M)\right\},$$

$B_0(M,g)$ est appelé seconde meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev et on a :
$\forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq K_n\left(\|\nabla u\|_2^2 + B_0(M,g)\,\|u\|_2^2\right). \qquad (I_S^{opt})$$

Le seul exemple de variété compacte où la valeur de la seconde meilleure constante est connue est la sphère standard (S^n, h_n) pour laquelle

$$B_0(S^n, h_n) = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Pour les autres variétés compactes, des minorations de la seconde meilleure constante $B_0(M,g)$ sont obtenues grâce à des fonctions tests utilisées dans (I_S^{opt}). Des techniques plus élaborées permettent dans certains cas d'obtenir des majorations de $B_0(M,g)$. Les résultats dont nous nous servirons dans la suite, notamment dans le chapitre 5 sont présentés dans la sous-section 5.1.e) de ce même chapitre.

L'inégalité de Sobolev Poincaré

Sur une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$, on considère l'inégalité suivante : $\exists A > 0, \exists C > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq A\left(\|\nabla u\|_2^2 + C\|u\|_1^2\right) \qquad (I_{AC})$$

Comparativement à l'inégalité de Sobolev, la norme L^1 qui apparaît au second membre, remplace la norme L^2. Quelques études sur cette inégalité ont déjà été faites, notamment par Druet-Hebey-Vaugon [14], Druet-Hebey [11] et Hebey [23]. La première meilleure constante, c'est-à-dire la borne inférieure des réels $A > 0$ tels qu'il existe $C > 0$ de sorte que (I_{AC}) est vraie pour tout $u \in H_1^2(M)$ est K_n et donc est identique à celle de l'inégalité de Sobolev, précisément :
$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon(M, g) > 0, \forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq (K_n + \varepsilon)\left(\|\nabla u\|_2^2 + C_\varepsilon(M, g)\|u\|_1^2\right). \qquad (I_{SP})$$

où $K_n = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}$. La question se pose alors de savoir si l'on peut prendre $\varepsilon = 0$ dans (I_{SP}), en d'autres termes, est-ce que C_ε tend vers une limite finie lorsque ε tend vers 0 ? Lorsque la réponse est positive, on définit comme pour l'inégalité de Sobolev une deuxième meilleure constante par :

$$C_0(M, g) = \inf\left\{C > 0/(I_{AC}) \text{ est vraie avec } A = K_n \text{ pour toute fonction } u \in H_1^2(M)\right\},$$

et alors, $\forall u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq K_n\left(\|\nabla u\|_2^2 + C_0(M, g)\|u\|_1^2\right). \qquad (I_{SP}^{opt})$$

C'est ici qu'apparaît une grande différence entre l'inégalité de Sobolev optimale et celle de Sobolev Poincaré optimale : cette dernière n'est pas toujours vérifiée et sa validité dépend fortement de la géométrie de la variété. Hebey présente dans [25] les résultats obtenus dans Druet-Hebey-Vaugon [14], Hebey [23] et Druet-Hebey [11] pour cette inégalité ; on les regroupe dans le théorème suivant :

Théorème A (voir Hebey [25]). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure scalaire $Scal_g$. L'inégalité (I_{SP}^{opt}) est vraie si :*
a) *$n = 3$;*
b) *$n \geq 4$ et $Scal_g < 0$;*
c) *$n = 4$ ou 5 et $Scal_g \leq 0$;*
d) *$n \geq 6$, $Scal_g \leq 0$ et (M, g) est conformément plate.*
De plus, lorsque $Scal_g < 0$ et $n \geq 4$, il existe des fonctions extrémales pour (I_{SP}^{opt}).
En revanche, l'inégalité est fausse pour $n \geq 4$ dès que $\max_M Scal_g > 0$ et, dans ce cas, le comportement de C_ε pour $\varepsilon \to O^+$ est donné par :

$$C_\varepsilon = \begin{cases} C(4)\,(\max Scal_g)^3 |\ln \varepsilon|^3 + \circ(|\ln \varepsilon|^3) & si\ n = 4 \\ C(n)\,(\max Scal_g)^{\frac{n+2}{2}} \varepsilon^{-\frac{(n-4)(n+2)}{2(n-2)}} + \circ\left(\varepsilon^{-\frac{(n-4)(n+2)}{2(n-2)}}\right) & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

Remarque 1. *D'après Hebey-Vaugon [28], l'inégalité de Sobolev optimale* (I_S^{opt}) *est aussi valable sur une variété riemannienne compacte avec bord de dimension* $n \geq 3$ *pour tout* $u \in \mathring{H}_1^2(M)$ *où* $\mathring{H}_1^2(M)$ *est l'espace de Sobolev complété de* $\mathcal{D}(M)$ *(qui est l'ensemble des fonctions* $C^\infty(M)$ *à support compact dans* $M \setminus \partial M$*) pour la norme*

$$||u||^2 = \int_M |\nabla u|^2 \, dv_g + \int_M u^2 \, dv_g.$$

De la même manière, les conditions de validité de l'inégalité optimale de Sobolev Poincaré données dans le théorème A précédent sont aussi valables sur une variété riemannienne compacte à bord : sous ces conditions on a la validité de (I_{SP}^{opt}) *quelle que soit* $u \in \mathring{H}_1^2(M)$.

La deuxième meilleure constante $C_0(M, g)$:

Faisons maintenant quelques remarques à propos de la seconde meilleure constante $C_0(M, g)$, lorsqu'elle existe, c'est-à-dire lorsque l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale (I_{SP}^{opt}) est vraie. La constante $C_0(M, g)$ dépend de la géométrie de la variété comme c'est déjà le cas pour la seconde meilleure constante $B_0(M, g)$ de l'inégalité de Sobolev. On le voit notamment dans la minoration suivante, facilement obtenue en testant la fonction $1 \in H_1^2(M)$ dans (I_{SP}^{opt}) :

$$C_0(M, g) \geq K_n^{-1} \, v_g^{-\frac{n+2}{n}}, \tag{1.1}$$

où $v_g = vol_g(M)$. On vérifie de plus facilement que dans le cas d'égalité, $C_0(M, g) = \left(K_n \, v_g^{\frac{n+2}{n}}\right)^{-1}$, les constantes sont des fonctions extrémales de (I_{SP}^{opt}). L'inégalité (1.1) est malheureusement le seul renseignement dont nous disposons sur $C_0(M, g)$. Cependant, la minoration (1.1) n'a rien d'optimale : la proposition suivante montre qu'il existe "beaucoup" de variétés pour lesquelles l'inégalité (1.1) est stricte.

Proposition 1.1. *Soient* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n - 1 \geq 2$ *et pour* $t > 0$, $M_t = S^1(t) \times M$ *munie de la métrique produit* $g_t = h_t \times g$ *une variété de dimension n sur laquelle l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale* (I_{SP}^{opt}) *est vraie. Alors, il existe* $t_0 > 0$ *tel que pour tout* $t \in]0, t_0[$, *en notant* $v_{g_t} = vol_{g_t}(M_t)$, *on a*

$$C_0(M_t, g_t) > K_n^{-1} \, v_{g_t}^{-\frac{n+2}{n}}.$$

Démonstration de la proposition 1.1
Soit G un sous groupe fini de $SO(2)$ de cardinal $k \in \mathbb{N}^*$. Le groupe $G \times Id_M$ agit sur M_t et on a :

$$\forall t > 0, \quad M_t/(G \times Id_M) = (S^1(t)/G) \times (M/Id_M) = S^1\left(\frac{t}{k}\right) \times M = M_{t/k}$$

De plus, comme les orbites sont toutes principales (voir définition 5.1 ou Gallot-Hulin-Lafontaine [20]) il existe sur $M_{t/k}$ une structure de variété et une unique métrique $g_{t/k}$

induite par g pour laquelle $\pi_t : M_t \to M_{t/k}$ est une submersion riemannienne.
On suppose, par l'absurde, qu'il existe une suite (t_k) tendant vers 0 pour laquelle

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad C_0(g_{t_k}) \leq K_n^{-1} v_{g_{t_k}}^{-\frac{n+2}{n}}$$

L'inégalité de Sobolev Poincaré optimale sur la variété (M_{t_k}, g_{t_k}) donne : $\forall \tilde{u} \in H_1^2(M_{t_k})$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{M_{t_k}} |\tilde{u}|^{2^*} dv_{g_{t_k}}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq K_n \left(\int_{M_{t_k}} |\nabla_{g_{t_k}} \tilde{u}|^2 dv_{g_{t_k}} + C_0(g_{t_k}) \left(\int_{M_{t_k}} |\tilde{u}| dv_{g_{t_k}}\right)^2\right) \\
&\leq K_n \left(\int_{M_{t_k}} |\nabla_{g_{t_k}} \tilde{u}|^2 dv_{g_{t_k}} + \frac{1}{K_n (2\pi t_k v_{g_{t_k}})^{\frac{n+2}{n}}} \left(\int_{M_{t_k}} |\tilde{u}| dv_{g_{t_k}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On peut considérer M_{t_k} comme une variété quotient $M_{t_k} = M_{kt_k}/G$. On réécrit les inégalités précédentes en "remontant" sur M_{kt_k} et en utilisant les formules de passage suivante : $\forall \tilde{u} \in H_1^2(M_{t_k})$, en notant $u = \tilde{u} \circ \pi_{kt_k}$

$$\int_{M_{kt_k}} u \, dv_{g_{kt_k}} = k \int_{M_{t_k}} \tilde{u} \, dv_{g_{t_k}}$$

et

$$\int_{M_{kt_k}} |\nabla_{g_{kt_k}} u|^2 \, dv_{g_{kt_k}} = \int_{M_{kt_k}} |\nabla_{g_{t_k}} \tilde{u}|^2 \circ \pi \, dv_{g_{kt_k}} = k \int_{M_{t_k}} |\nabla_{g_{t_k}} \tilde{u}|^2 \, dv_{g_{t_k}}.$$

On obtient : $\forall u \in H_{1,G_{t_k}}^2(M_{kt_k})$,

$$\left(\int_{M_{kt_k}} |u|^{2^*} dv_{g_{kt_k}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{K_n}{k^{2/n}} \left[\int_{M_{kt_k}} |\nabla_{g_{kt_k}} u|^2 dv_{g_{kt_k}} + \frac{\left(\int_{M_{kt_k}} |u| dv_{g_{kt_k}}\right)^2}{k K_n (2\pi t_k v_{g_{t_k}})^{\frac{n+2}{n}}}\right]$$

Enfin comme u est invariante par G_k

$$\begin{aligned}
(2\pi k t_k)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M |u|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{K_n}{k^{2/n}} \left[2\pi k t_k \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + \frac{(2\pi k t_k)^2 \left(\int_M |u| dv_g\right)^2}{k K_n (2\pi t_k v_{g_{t_k}})^{\frac{n+2}{n}}}\right] \\
\left(\int_M |u|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq K_n (2\pi t_k)^{2/n} \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + v_{g_{t_k}}^{-\frac{n+2}{n}} \left(\int_M |u| dv_g\right)^2
\end{aligned}$$

Ce qui en passant à la limite pour $k \to \infty$ donne : $\forall u \in H_1^2(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq v_{g_{t_k}}^{-\frac{n+2}{n}} \left(\int_M |u| dv_g\right)^2$$

ce qui est impossible pour u non constante. La proposition 1.1 est ainsi démontrée.$\square$

Malheureusement l'inégalité (1.1) est actuellement la seule information dont nous disposons sur $C_0(M,g)$. La présence de la norme L^1 dans (I_{SP}^{opt}) à la place de la norme L^2 de (I_S^{opt}) rend beaucoup plus difficile l'obtention d'autres minorations de $C_0(M,g)$ en testant des fonctions dans l'inégalité (I_{SP}^{opt}). Cela provient du fait que le terme provenant de la norme L^1 n'apparaît plus dans les calculs au premier ordre des développements limités comme c'est le cas pour le terme provenant de la norme L^2. D'autre part, la technique donnant des majorations de $B_0(M,g)$ ne s'adapte pas au cas de l'inégalité de Sobolev Poincaré. Son principe est d'introduire des partitions de l'unité et des développements limités de la métrique dans l'inégalité de Sobolev euclidienne pour aboutir à une inégalité du type (I_{AB}) car les termes perturbateurs sont tous du même ordre que la norme L^2. Cette technique ne permet pas de récupérer une norme L^1 et est donc inefficace pour l'inégalité de Sobolev Poincaré. Ces différences peuvent sembler très techniques mais sont essentielles car elles sont à l'origine de nombreux "échecs" pour le cas des équations et inégalités de Sobolev Poincaré.

1.2 L'équation de Sobolev Poincaré

Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ une fonction dont le maximum est strictement positif. On considère la fonctionnelle I_α définie sur $H_1^2(M)$ par :

$$I_\alpha(u) = \int_M |\nabla u|^2 \, dv_g + \alpha \left(\int_M |u| \, dv_g \right)^2$$

que l'on cherche à minimiser sur

$$\mathcal{A} = \{u \in H_1^2(M), \int_M f|u|^{2^*} \, dv_g = 1\}.$$

Ce problème de minimisation est identique à celui posé en considérant la fonctionnelle

$$Q_\alpha(u) = \frac{I_\alpha(u)}{\left(\int_M f|u|^{2^*} \, dv_g \right)^{2/2^*}},$$

sur

$$\mathcal{A}^+ = \{u \in H_1^2(M), \int_M f|u|^{2^*} \, dv_g > 0\}.$$

On note alors

$$\mu_\alpha = \inf_{u \in \mathcal{A}} I_\alpha(u) = \inf_{u \in \mathcal{A}^+} Q_\alpha(u)$$

et on donne la définition suivante

Définition 1.1. *Une fonction $u \in H_1^2(M)$ de $(E_{\alpha,f})$ est globalement minimisante (ou plus simplement minimisante lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) si elle vérifie*

$$Q_\alpha(u) = \mu_\alpha := \inf_{v \in \mathcal{A}^+} Q_\alpha(v).$$

Un intérêt de la fonctionnelle Q_α par rapport à I_α est qu'elle est homogène, autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall u \in \mathcal{A}^+, Q_\alpha(\lambda u) = Q_\alpha(u)$.
Il est important de remarquer que les fonctionnelles I_α et Q_α ne sont pas différentiables partout sur $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}^+$ car la norme L^1 qui intervient dans I_α n'est différentiable dans aucune direction. Ces fonctionnelles ne sont pas non plus invariantes par changement de métrique conforme contrairement à ce qui se passe pour les fonctionnelles associées aux équations de Sobolev.

Les méthodes variationnelles classiques, notamment le théorème des multiplicateurs de Lagrange, permettent de relier ce type de problème de minimisation sous contraintes à l'existence de solutions pour des EDP associées.
Deux difficultés nous empêchent ici de suivre directement le raisonnement classique. D'une part, la présence de l'exposant critique 2^* empêche d'obtenir par raisonnement direct l'existence de l'élément réalisant la borne inférieure ; ce problème a bien sûr déjà été rencontré pour les équations à exposant critique de type Sobolev (E_S) et, historiquement, est apparu dans le problème de Yamabe. D'autre part, dans notre cas, les fonctionnelles I_α et Q_α ne sont pas différentiables à cause de la norme L^1. Ces deux difficultés sont surmontées dans la démonstration de la proposition 1.2 en travaillant d'abord avec des équations doublement sous-critiques : on remplace l'exposant critique 2^* par un exposant sous critique $q < 2^*$ et la norme L^1 par une norme L^{θ_q} avec $\theta_q > 1$ qui est alors différentiable. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique alors dès qu'il existe un minimiseur pour μ_α et montre l'existence d'une solution faible pour une équation sous-critique. On passe alors à la limite $q \to 2^*$ et $\theta_q \to 1$ dans cette équation. L'équation critique vérifiée par un minimiseur u est alors de la forme (voir la démonstration de la proposition 1.2) : $\forall \varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \nabla u \nabla \varphi \, dv_g + \alpha \int_M |u| \, dv_g \int_M \Sigma \varphi \, dv_g = \int_M f |u|^{2^*-2} u \varphi \, dv_g \tag{1.2}$$

où $f \in C^0(M)$, $\alpha > 0$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ est telle que $u\,\Sigma = u$. Les théorèmes de régularité montrent que $u \in C^{1,\beta}(M)$. Lorsque u vérifie (1.2), on dira que u est solution faible de l'équation

$$\Delta_g u + \alpha \Sigma \|u\|_1 = f |u|^{2^*-2} u. \tag{$E_{\alpha,f}$}$$

L'équation $(E_{\alpha,f})$ est appelée dans notre travail équation de Sobolev Poincaré.

Remarque 2. *L'apparition de cette fonction Σ est tout à fait spécifique à cette étude : la situation est en effet différente pour l'équation de Sobolev où le principe du maximum permet d'affirmer que toute solution positive est strictement positive. Ici, le principe du maximum ne s'applique pas à cause du terme perturbateur qui ne permet pas d'écrire l'équation sous la forme : $\Delta_g u = uG(u)$. Cependant, comme la fonctionnelle $I_\alpha(u)$ et l'ensemble $\mathcal{A}$ sont invariants lorsque l'on change u en $|u|$, les solutions de (1.2) obtenues par minimisation peuvent être choisies positives ou nulles mais ne seront en générale pas strictement positives. Il n'est donc pas incohérent de voir la fonction Σ apparaître. C'est une conséquence de la non différentiablité de la norme L^1 : elle est en effet obtenue comme limite de la différentielle de la norme L^{θ_q} lorsque θ_q tend vers* 1. *On peut donc la considérer comme la "différentielle formelle" de la norme L^1.*

L'objet principal de cette thèse est l'étude des solutions positives de l'équation critique de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$**, ensemble qui, pour** $\alpha > 0$ **et** $f \in C^0(M)$ **fixés, est noté :**

$$\mathcal{S}_{\alpha,f} = \left\{u \in H_1^2(M), u \text{ **est solution positive de** } (E_{\alpha,f})\right\},$$

et d'après les théorèmes de régularité,

$$\mathcal{S}_{\alpha,f} = \left\{u \in C^{1,\beta}(M), u \text{ **est solution positive de** } (E_{\alpha,f})\right\}.$$

Une remarque évidente sur l'équation de Sobolev Poincaré est qu'une solution u non triviale de $(E_{\alpha,f})$ vérifie nécessairement

$$\int_M f|u|^{2^*}\, dv_g > 0.$$

En effet, en prenant $\varphi = u$ dans (1.2), on obtient : $\int_M f|u|^{2^*}\, dv_g = \|\nabla u\|_2^2 + \alpha\|u\|_1^2 > 0$. Ainsi $\mathcal{S}_{\alpha,f} \subset \mathcal{A}^+$ et une condition nécessaire à l'existence de solutions pour $(E_{\alpha,f})$ est

$$\sup_M f > 0. \tag{1.3}$$

Dans la section suivante, on montre le lien étroit qui existe entre inégalité et équation de Sobolev Poincaré : la première meilleure constante K_n joue notamment un rôle essentiel dans le problème d'existence de solutions. On obtient l'existence de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ globalement minimisantes.

1.3 La première meilleure constante K_n : un lien entre inégalité et équation de Sobolev Poincaré

Un premier lien apparaît rapidement entre le problème variationnel qui introduit l'équation de Sobolev Poincaré et l'inégalité (I_{SP}) du même nom. En testant des fonctions particulières dans la fonctionnelle Q_α, nous montrons dans le lemme 1.2 que :

$$\forall \alpha > 0, \qquad 0 \le \mu_\alpha \le \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*} K_n}.$$

Cette majoration est fondamentale lors de l'étude d'existence de solutions pour $(E_{\alpha,f})$, le cas d'égalité $\mu_\alpha = \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*} K_n}$ apparaît comme un cas critique, le cas d'inégalité stricte est traité dans la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \ge 3$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ une fonction dont le maximum est strictement positif. Si*

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^+} Q_\alpha(u) := \mu_\alpha < \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*} K_n}, \tag{1.4}$$

alors il existe $u_\alpha \in C^{1,\beta}(M)$ positive , non identiquement nulle et il existe $\Sigma_\alpha \in L^\infty(M)$ vérifiant $0 \le \Sigma_\alpha \le 1$ et $u_\alpha \Sigma_\alpha = u_\alpha$ telles que

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha \|u_\alpha\|_1 \Sigma_\alpha = f u_\alpha^{2^*-1}$$

et u_α est une globalement minimisante au sens où $Q_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha := \inf_{v \in \mathcal{A}^+} Q_\alpha(v)$.

Cette situation est la même que pour les équations de Sobolev : elle est démontrée pour la première fois par Aubin [3]. Dans le cas de Sobolev Poincaré, Druet-Hebey-Vaugon la démontrent pour $f \equiv 1$ dans [14].

Ce résultat, bien que simple à obtenir, est fondamental car il donne une réponse positive à la question d'existence de solutions pour $(E_{\alpha,f})$ dans le cas où $\mu_\alpha < \frac{1}{K_n(\sup f)^{2/2^*}}$. L'obtention de solutions pour le cas $\mu_\alpha \geq \frac{1}{K_n(\sup f)^{2/2^*}}$ n'est pas réglée directement par cette méthode variationnelle. Cependant, dans ce cas, on s'inspire de cette technique pour apporter une réponse partielle dans la proposition 6.2 où on impose aux solutions des invariances par isométries.

Démonstration de la proposition 1.2

Equation sous-critique : la présence de l'exposant $2^* = \frac{2n}{n-2}$ critique dans le membre de gauche de $(E_{\alpha,f})$ ne permet pas d'obtenir directement l'existence de solutions par la méthode variationnelle du fait de la non compacité de l'inclusion de $H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$. Comme pour le problème de Yamabe, on passe alors par des équations sous-critiques où l'exposant du second membre vérifie $q \in]2, 2^*[$. De plus, une difficulté spécifique liée à notre équation est la non différentiabilité de la norme L^1 et donc de la fonctionnelle I_α. Pour régler ce problème, on travaille d'abord avec une norme L^{θ_q} où $\theta_q \in]1, 2[$ à la place de la norme L^1. On adopte les notations suivantes : $\forall u \in H_1^2(M), \forall q \in]2, 2^*[, \forall \theta_q \in]1, 2[, \forall \alpha > 0,$

$$\begin{aligned}
I_q(u) &= \int_M |\nabla u|^2 \, dv_g + \alpha \left(\int_M |u|^{\theta_q} \, dv_g \right)^{\frac{2}{\theta_q}} \\
\mathcal{A}_q &= \{u \in H_1^2(M), \int_M f|u|^q \, dv_g = 1\} \\
\mu_q &= \inf_{u \in \mathcal{A}_q} I_q(u)
\end{aligned}$$

L'inclusion $H_1^2(M) \subset L^q(M)$ est compacte, la méthode variationnelle classique donne alors l'existence de $u_q \in \mathcal{A}_q$ positive, non identiquement nulle, telle que $I_q(u_q) = \mu_q$ et qui est solution faible de l'équation sous-critique :

$$\Delta_g u_q + \alpha \left(\int_M u_q^{\theta_q} \, dv_g \right)^{\frac{2}{\theta_q} - 1} u_q^{\theta_q - 1} = \mu_q \, f \, u_q^{q-1} \tag{E_q}$$

c'est-à-dire que u_q vérifie : $\forall \varphi \in H_1^2(M)$

$$\int_M \nabla u_q \nabla \varphi \, dv_g + \alpha \left(\int_M u_q^{\theta_q} \, dv_g \right)^{\frac{2}{\theta_q} - 1} \int_M u_q^{\theta_q - 1} \varphi \, dv_g = \mu_q \int_M f \, u_q^{q-1} \varphi \, dv_g \tag{1.5}$$

Remarquons au passage que $\mu_q > 0$ puisque u_q est positive non identiquement nulle.

Passage à l'équation critique : dans (1.5), on fait tendre $q < 2^*$ vers 2^* et $\theta_q > 1$ vers 1, en s'assurant que tous les termes convergent.

Montrons que

$$\limsup_{q\to 2^*} \mu_q \leq \mu_\alpha. \tag{1.6}$$

Par définition de μ_α, on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists u_\varepsilon \in \mathcal{A}, \qquad I_\alpha(u_\varepsilon) \leq \mu_\alpha + \varepsilon.$
Pour q proche de 2^*, $\int_M f|u_\varepsilon|^q\ dv_g$ est non nul car $u_\varepsilon \in \mathcal{A}$. On pose alors $v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\left(\int_M f|u_\varepsilon|^q\ dv_g\right)^{1/q}}$, de telle façon que $v_\varepsilon \in \mathcal{A}_q$, d'où :

$$\mu_q \leq I_q(v_\varepsilon) = \frac{I_q(u_\varepsilon)}{\left(\int_M f|u_\varepsilon|^q\ dv_g\right)^{2/q}}.$$

Or $\lim\limits_{q\to 2^*} \int f|u_\varepsilon|^q\ dv_g = 1$ et $\forall u \in H_1^2(M),\ \lim\limits_{q\to 2^*} I_q(u) = I_\alpha(u)$. Le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne alors $\limsup_{q\to 2^*} \mu_q \leq I_\alpha(u_\varepsilon) \leq \mu_\alpha + \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, (1.6) est vraie.
En particulier la suite (μ_q) est bornée, donc à extraction de sous-suite près, elle converge vers une limite notée μ vérifiant

$$0 \leq \mu := \lim_{q\to 2^*} \mu_q \leq \mu_\alpha. \tag{1.7}$$

Montrons que la suite (u_q) **est bornée dans** $H_1^2(M)$ **:** comme u_q est une solution minimisante de (E_q), et que (μ_q) est une suite bornée, on a

$$0 \leq \int_M |\nabla u_q|^2\ dv_g + \alpha \left(\int_M u_q^{\theta_q}\ dv_g\right)^{\frac{2}{\theta_q}} \leq C$$

où $C > 0$ est indépendant de q. Ainsi $\|\nabla u_q\|_2^2 \leq C$ et (u_q) est bornée dans $L^{\theta_q}(M)$. Or $H_1^2 \subset L^2 \subset L^{\theta_q}$, la première inclusion étant compacte, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \qquad \|u_q\|_2 \leq \varepsilon \|\nabla u_q\|_2 + C_\varepsilon \|u_q\|_{\theta_q}.$$

(u_q) est alors bornée dans $L^2(M)$ et finalement dans $H_1^2(M)$. Par réflexivité de $H_1^2(M)$ et par le théorème de Rellich-Kondrakov, il existe une sous-suite toujours notée (u_q) qui converge faiblement dans $H_1^2(M)$, fortement dans $L^2(M)$, et presque partout vers une fonction $u_\alpha \in H_1^2(M)$ qui est positive car les u_q le sont. Or comme $\theta_q \in]1, 2[$, on a

$$\forall q < 2^*, \qquad \|u_q - u_\alpha\|_{\theta_q} \leq v_g^{\frac{2-\theta_q}{2\theta_q}} \|u_q - u_\alpha\|_2$$

et donc en passant à la limite $q \to 2^*$ et $\theta_q \to 1^+$, on obtient

$$\lim_{q\to 2^*, \theta_q \to 1} \|u_q - u_\alpha\|_{\theta_q} = 0.$$

On obtient ainsi les deux limites

$$\lim_{q\to 2^*} \int_M \nabla u_q \nabla \varphi\ dv_g = \int_M \nabla u_\alpha \nabla \varphi\ dv_g \quad \text{et} \quad \lim_{q\to 2^*, \theta_q\to 1} \int_M u_q^{\theta_q}\ dv_g = \int_M u_\alpha\ dv_g$$

Pour les deux termes restant de 1.5, on utilise le lemme classique suivant :

Lemme 1.1. *Soit $p > 1$, si (f_k) est une suite bornée dans L^p et si elle converge presque partout vers une fonction f, alors $f \in L^p$ et $f_k \rightharpoonup f$ dans L^p.*

L'inclusion continue $H_1^2(M) \subset L^{2^*}$ implique que (u_q) est bornée dans L^{2^*}. La suite (u_q^{q-1}) est alors bornée dans $L^{\frac{2^*}{q-1}}$ donc dans $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$ car $\frac{2^*}{2^*-1} < \frac{2^*}{q-1}$. Comme de plus (u_q^{q-1}) converge presque partout vers $u_\alpha^{2^*-1}$, le lemme 1.1 montre que

$$u_q^{q-1} \rightharpoonup u_\alpha^{2^*-1} \text{ dans } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$$

ce qui entraine, puisque $\left(L^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)' = L^{2^*} \supset H_1^2$ et que f est continue

$$\forall \varphi \in H_1^2(M), \qquad \lim_{q \to 2^*} \int_M f u_q^{q-1} \varphi \, dv_g = \int_M f u_\alpha^{2^*-1} \varphi \, dv_g.$$

Reste à étudier la convergence du terme $\int_M u_q^{\theta_q - 1} \varphi \, dv_g$ spécifique à l'équation de Sobolev Poincaré. Comme (u_q) converge presque partout vers $u_\alpha \geq 0$ et que $\theta_q - 1$ converge vers 0, $\left(u_q^{\theta_q-1}\right)$ converge presque partout vers une fonction Σ_α telle que $0 \leq \Sigma_\alpha \leq 1$ et $u_\alpha \Sigma_\alpha = u_\alpha$. Soit $p > 1$, pour θ_q proche de 1, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_M u_q^{(\theta_q-1)\, p} \, dv_g \leq \left(\int_M u_q^2 \, dv_g \right)^{\frac{(\theta_q-1)p}{2}} v_g^{1 - \frac{(\theta_q-1)p}{2}} \leq C_p, \tag{1.8}$$

la suite $\left(u_q^{\theta_q-1}\right)$ est donc bornée dans L^p pour $p > 1$. Le lemme 1.1 implique alors que

$$u_q^{\theta_q-1} \rightharpoonup \Sigma_\alpha \text{ dans } L^p.$$

En particulier,

$$\lim_{q \to 2^*} \int_M u_q^{\theta_q-1} \varphi \, dv_g = \int_M \Sigma_\alpha \varphi \, dv_g.$$

En faisant tendre q vers 2^* et θ_q vers 1 dans (1.5), avec les limites que l'on vient de montrer, u_α est solution faible positive (éventuellement nulle) de l'équation :

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha \|u_\alpha\|_1 \Sigma_\alpha = \mu f u_\alpha^{2^*-1} \tag{1.9}$$

où $\Sigma_\alpha \in L^\infty(M)$ vérifie $u_\alpha \Sigma_\alpha = u_\alpha$. Les théorèmes de régularité montrent que u_α est dans $C^{1,\beta}(M)$. L'équation (1.9) implique alors que $\Sigma_\alpha(x) = 0$ si $x \in M \setminus supp\ u_\alpha$. Comme $\Sigma_\alpha(x) = 1$ si $u_\alpha(x) > 0$, la fonction Σ_α, reste indéterminée seulement sur $\{u = 0\} \cap supp\ u_\alpha$, ensemble dont on ne connaît pas la mesure.

Montrons que u_α n'est pas la fonction nulle : c'est ici qu'intervient de manière fondamentale la majoration stricte (1.4) de μ_α. Grâce à l'inégalité de Hölder et celle de Sobolev Poincaré (I_{SP}) : $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
1 = \left(\int_M f u_q^q \, dv_g \right)^{\frac{2}{q}} &\leq (\sup f)^{\frac{2}{q}} v_g^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^*}} \left(\int_M u_q^{2^*} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq (\sup f)^{\frac{2}{q}} v_g^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^*}} (K_n + \varepsilon) \left(\|\nabla u_q\|_2^2 + C_\varepsilon \|u_q\|_1^2 \right) \\
&\leq (\sup f)^{\frac{2}{q}} v_g^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^*}} (K_n + \varepsilon) \left(\mu_q + C_\varepsilon \|u_q\|_1^2 \right)
\end{aligned}$$

Puis, en faisant tendre q vers 2^*,

$$1 \le (\sup f)^{\frac{2}{2^*}}(K_n+\varepsilon)\left(\mu + C_\varepsilon \|u_\alpha\|_1^2\right)$$

Or par (1.4) et (1.7), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu < \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*}(K_n+\varepsilon)}$. Pour ε fixé à cette valeur, on a donc :

$$1 < 1 + D_\varepsilon \|u_\alpha\|_1^2,$$

où $D_\varepsilon = B_\varepsilon (\sup f)^{\frac{2}{2^*}}(K_n+\varepsilon) > 0$. Ainsi $\|u_\alpha\|_1^2 \neq 0$, et donc $u_\alpha \not\equiv 0$. En particulier, cela implique par (1.7) et (1.9) que $\mu > 0$.

Montrons que $u_\alpha \in \mathcal{A}$ **et que** $I_\alpha(u_\alpha) = \mu = \mu_\alpha$ **:** tout d'abord grâce à la convergence faible de (u_q) dans $H_1^2(M)$ et au fait que u_q est minimisante pour μ_q :

$$\mu \int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g = I_\alpha(u_\alpha) \le \liminf_{q\to 2^*} I_\alpha(u_q) = \liminf_{q\to 2^*} I_q(u_q) = \liminf_{q\to 2^*} \mu_q = \mu$$

Comme $\mu > 0$, on en déduit que $\int f u_\alpha^{2^*}\, dv_g \le 1$. Pour l'inégalité inverse :

$$\mu \le \mu_\alpha \le I_\alpha\left(\frac{u_\alpha}{\left(\int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{1/2^*}}\right) = \frac{I_\alpha(u_\alpha)}{\left(\int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*}} = \mu\left(\int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{2/n},$$

et comme $\mu > 0$, on en déduit $\int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g \ge 1$ et donc $\int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g = 1$, c'est-à-dire $u_\alpha \in \mathcal{A}$. Cela implique d'une part que $\mu_\alpha \le I_\alpha(u_\alpha)$ et d'autre part, grâce à (1.9), que $I_\alpha(u_\alpha) = \mu$, d'où $\mu_\alpha \le \mu$, ce qui avec (1.7) montre bien que $\mu = \mu_\alpha$. Ainsi u_α est une solution faible positive non identiquement nulle de l'équation $\Delta u_\alpha + \alpha\|u_\alpha\|_1 \Sigma_\alpha = \mu_\alpha f u_\alpha^{2^*-1}$, autrement dit : $\forall \varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \nabla u_\alpha \nabla \varphi\, dv_g + \alpha\|u_\alpha\|_1 \int_M \Sigma_\alpha \varphi = \mu_\alpha \int_M f u_\alpha^{2^*-2}\varphi$$

et en plus

$$\int_M f|u_\alpha|^{2^*} dv_g = 1$$

en particulier $I_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha$. Pour avoir une solution de $(E_{\alpha,f})$ il suffit alors de considérer la fonction positive non identiquement nulle $\mu_\alpha^{\frac{n-2}{4}} u_\alpha$ qui vérifie bien $(E_{\alpha,f})$ et qui est minimisante au sens de la définition 1.1 car

$$Q_\alpha(\mu_\alpha^{\frac{n-2}{4}} u_\alpha) = I_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha.$$

Cela achève la démonstration de la proposition 1.2. □

De la proposition 1.2 se déduisent des corollaires donnant des conditions suffisantes sur $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ pour assurer l'existence de solutions pour $(E_{\alpha,f})$:

Corollaire 1.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ telle que $\int_M f\, dv_g > 0$. Si*

$$\alpha < \frac{1}{K_n v_g^2} \left(\frac{\int_M f\, dv_g}{\sup f} \right)^{\frac{2}{2^*}}, \tag{1.10}$$

où $v_g = vol_g(M)$, alors l'équation $(E_{\alpha,f})$ admet une solution globalement minimisante positive non nulle.

Ce corollaire est obtenu immédiatement en remarquant que la constante positive $\left(\int f\, dv_g\right)^{-1/2^*}$ appartient à $\mathcal{A}$ et en se ramenant à la condition (1.4) de la proposition 1.2.

Une autre condition suffisante d'existence est obtenue en testant dans la fonctionnelle Q_α des fonctions classiques particulières (celles qui réalisent l'égalité dans l'inégalité euclidienne optimale de Sobolev) :

Lemme 1.2. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^2(M)$ réalisant son maximum en $x_0 \in M$. On considère la famille de fonctions définies par*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in M, \qquad u_\varepsilon(x) &= (\varepsilon + r^2)^{1-\frac{n}{2}} - (\varepsilon + \delta^2)^{1-\frac{n}{2}} \text{ sur } B_{x_0}(\delta) \\ &= 0 \text{ sur } M \setminus B_{x_0}(\delta) \end{aligned}$$

où $r = d_g(x, x_0)$ et $\delta > 0$ strictement plus petit que le rayon d'injectivité de M. Alors :

$$\begin{aligned} Q_\alpha(u_\varepsilon) &\leq \frac{1}{K_n\, (\sup f)^{\frac{2}{2^*}}} \left[1 + \left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{2 f(x_0)} - \frac{S cal_g(x_0)}{n-4} \right) \frac{\varepsilon}{n} + \circ(\varepsilon) \right] \text{ si } n \geq 5 && (1.11) \\ &\leq \frac{1}{K_4\, (\sup f)^{\frac{2}{2^*}}} \left[1 + \frac{S cal_g(x_0)}{8}\, \varepsilon \ln \varepsilon + \circ(\varepsilon \ln \varepsilon) \right] \quad \text{si } n = 4 && (1.12) \end{aligned}$$

Il suit facilement du lemme 1.2 que $\forall \alpha > 0, \forall n \geq 4$,

$$0 \leq \mu_\alpha \leq \frac{1}{(\sup f)^{2/2^*} K_n}. \tag{1.13}$$

Remarque 3. *Cela étant dit, (1.13) reste vraie même en dimension 3. Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Soit $n \geq 3$, si (1.13) est fausse alors $\exists \varepsilon > 0, \forall u \in \mathcal{A}$,*

$$I_\alpha(u) \geq \frac{1+\varepsilon}{(\sup f)^{2/2^*} K_n} \left(\int_M f |u|^{2^*}\, dv_g \right)^{2/2^*}.$$

Or $I_\alpha(u) \leq \int_M |\nabla u|^2\, dv_g + \alpha v_g \int_M u^2\, dv_g$. Soit alors $u \in \mathcal{A}$ telle que $supp\ u \subset B_{x_0}(\delta)$ où $B_{x_0}(\delta)$ est choisie telle que : $\exists \eta \in]1, 1+\varepsilon[, \forall x \in B_{x_0}(\delta)$,

$$(1+\varepsilon) f^{2/2^*} \geq \eta (\sup f)^{2/2^*}.$$

Pour un tel u, *on a*

$$\left(\int_M |u|^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*} \le \frac{K_n}{\eta}\left(\int_M |\nabla u|^2\, dv_g + \alpha v_g \int_M u^2\, dv_g\right)$$

ce qui est impossible comme $\eta > 1$ *car* K_n *est la première meilleure constante de l'inégalité de Sobolev.*

Remarque 4. *Pour la fonctionnelle* Q_α *associée à l'équation de Sobolev Poincaré, une différence importante apparaît par rapport au cas classique de l'équation de Sobolev : l'influence du terme perturbateur* $\alpha\|u\|_1^2$ *et donc du paramètre* α *n'intervient plus au premier ordre du développement limité de la fonctionnelle, comme c'est le cas pour la fonctionnelle associée à l'équation de Sobolev.*

Démonstration du lemme 1.2

Les techniques de calcul permettant de démontrer ce lemme sont désormais classiques. On utilise deux développements lus dans la carte exponentielle en x_0 ; le premier utilise le fait que f atteint son maximum en x_0 et le second résulte du développement de Cartan la métrique g

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}\,\partial_{ij} f(x_0)\, x^i x^j + r^{2+\rho} O(1) \\ dv_g &= \left(1 - \frac{1}{6}\, Ric_g(x_0)_{ij}\, x^i x^j + r^{2+\rho} O(1)\right) dx \end{aligned}$$

où $0 < \rho < 1$. D'où

$$\begin{aligned} \int_M f u_\varepsilon^{2^*}\, dv_g &= f(x_0) \int_{B_0(\delta)} u_\varepsilon^{2^*}\, dx \\ &+ \left(\frac{1}{2}\,\partial_{ij} f(x_0) - \frac{1}{6}\, Ric_g(x_0)_{ij}\, f(x_0)\right) \int_{B_0(\delta)} u_\varepsilon^{2^*} x^i x^j\, dx \\ &+ \int_{B_0(\delta)} u_\varepsilon^{2^*} r^{2+\rho}\, O(1)\, dx \end{aligned}$$

En utilisant principalement des changements de variables, on vérifie que, pour $n \ge 4$,

$$\begin{aligned} \int_{B_0(\delta)} u_\varepsilon^{2^*}\, dx &\ge \frac{\omega_{n-1}(n-2)}{2n} I_n^{n/2}\, \varepsilon^{-n/2}\, (1 + \circ(1)) \\ \int_{B_0(\delta)} u_\varepsilon^{2^*} x^i x^j\, dx &\ge \frac{\omega_{n-1}}{2n}\, I_n^{n/2}\, \delta^{ij}\, \varepsilon^{1-\frac{n}{2}}\, (1 + \circ(1)) \end{aligned}$$

où $I_p^q = \int_0^{+\infty} (1+t)^{-p}\, t^q\, dt$. Or comme on travaille dans la carte exponentielle, on a $g^{ij}(x_0) = \delta_i^j$ et donc $\delta^{ij}\partial_{ij} f(x_0) = -\Delta_\xi f(x_0) = -\Delta_g f(x_0)$ et $\delta^{ij} Ric_g(x_0)_{ij} = Scal_g(x_0)$.

On obtient ainsi :

$$
\begin{aligned}
\int_M f u_\varepsilon^{2^*}\, dv_g \quad &\geq \quad \frac{(n-2)\omega_{n-1}}{2n}\ f(x_0)\ I_n^{n/2}\ \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \\
&\qquad \left[1 - \frac{\varepsilon}{n-2}\left(\frac{Scal_g(x_0)}{6} + \frac{\Delta f(x_0)}{2f(x_0)}\right) + \circ(\varepsilon)\right] \text{ si } n > 4 \\
&\geq \quad \frac{(n-2)\omega_{n-1}}{2n}\ f(x_0)\ I_n^{n/2}\ \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\ [1 + \circ(\varepsilon \ln \varepsilon)] \text{ si } n = 4
\end{aligned}
$$

Des calculs similaires donnent

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2\, dv_g \quad &= \quad \frac{(n-2)^2\omega_{n-1}}{2}\ I_n^{n/2}\ \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \\
&\qquad \left(1 - \frac{n+2}{6n(n-4)} Scal_g(x_0)\varepsilon + \circ(\varepsilon)\right) \text{ si } n > 4 \\
&= \quad \frac{(n-2)^2\omega_{n-1}}{2}\ \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \\
&\qquad \left(I_n^{\frac{n}{2}} + \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\varepsilon \ln \varepsilon + \circ(\varepsilon \ln \varepsilon)\right) \text{ si } n = 4
\end{aligned}
$$

et

$$
\int_M |u_\varepsilon|\, dv_g = O(1)
$$

de sorte que $\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \int_M |u_\varepsilon|\, dv_g = \circ(\varepsilon)$ si $n > 4$ et $\varepsilon \int_M |u_\varepsilon|\, dv_g = \circ(\varepsilon \ln \varepsilon)$ si $n = 4$.
Finalement, grâce à la relation $\frac{(n-2)^2\omega_{n-1}}{2}\ I_n^{n/2} = \frac{1}{K_n}\left(\frac{(n-2)\omega_{n-1}}{2n}\ I_n^{n/2}\right)^{(n-2)/n}$, on obtient l'expression suivante pour $Q_\alpha(u_\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha(u_\varepsilon) \quad &\leq \quad \frac{1}{K_n\ f(x_0)^{2/2^*}}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{\Delta f(x_0)}{2nf(x_0)} - \frac{Scal_g(x_0)}{n(n-4)}\right) + \circ(\varepsilon)\right] \text{ si n>4} \\
&\leq \quad \frac{1}{K_4\ f(x_0)^{2/2^*}}\left[1 + \frac{Scal_g(x_0)}{8}\varepsilon \ln \varepsilon + \circ(\varepsilon \ln \varepsilon)\right] \text{ si n=4}
\end{aligned}
$$

Le lemme est démontré et si on fait tendre ε vers 0, on obtient alors $\mu_\alpha \leq \frac{1}{K_n(\sup f)^{2/2^*}}$, c'est-à-dire (1.13) ce qui montre l'affirmation faite après le lemme.□

Le lemme 1.2 et la proposition 1.2 impliquent alors le corollaire :

Corollaire 1.2. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^2(M)$ une fonction dont le maximum est atteint en $x_0 \in M$ et strictement positif. Si*

$$
\frac{(n-4)\ \Delta_g f(x_0)}{2\ f(x_0)} < Scal_g(x_0) \tag{1.14}
$$

alors l'équation $(E_{\alpha,f})$ admet une solution globalement minimisante positive non identiquement nulle. En particulier :

a) *Si* $Scal_g > 0$ *sur* M*, alors pour tout* $\alpha > 0$ *et pour toute fonction* $f \in C^2(M)$ *telle que* $\sup f = f(x_0) > 0$ *et* $(n-4)\,\Delta_g f(x_0) = 0$*, l'équation* $(E_{\alpha,f})$ *admet une solution globalement minimisante positive non identiquement nulle ;*
b) *Si* $\max_M Scal_g > 0$*, alors pour tout* $\alpha > 0$*, l'équation* $(E_{\alpha,1})$ *admet une solution globalement minimisante positive non identiquement nulle.*

Remarque 5. *Comme* f *atteint son maximum en* x_0*, on a* $\Delta_g f(x_0) \geq 0$*, en rappelant qu'on utilise le laplacien des géomètres* ($\Delta_g = -\nabla^i\nabla_i$)*. Ainsi, (1.14) n'est réalisable que lorsque* $Scal_g(x_0) > 0$*. Mais dans ce cas (voir le théorème A rappelé en introduction) l'inégalité de Sobolev Poincaré est toujours fausse. Ainsi, dès que l'on demande la validité de* (I_{SP}^{opt})*, le corollaire 1.2 est inutilisable.*

La proposition 1.2 donne un dernier corollaire d'existence dans le cas où $f \equiv 1$ qui s'obtient immédiatement grâce à la définition de la seconde meilleure constante $C_0(M,g)$:

Corollaire 1.3. *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte, de dimension* $n \geq 3$ *sur laquelle l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale* (I_{SP}^{opt}) *est vraie. Si*

$$\alpha < C_0(M,g), \tag{1.15}$$

alors l'équation $(E_{\alpha,1})$ *admet une solution positive globalement minimisante non nulle.*

Pour finir, on donne un exemple où il n'existe pas de solutions minimisantes pour l'équation $(E_{\alpha,f})$ ce qui met encore plus en évidence la forte sensibilité de l'équation de Sobolev Poincaré à la géométrie de la variété :

Corollaire 1.4. *Sur une variété riemannienne* (M,g) *compacte, de dimension* $n \geq 4$ *et de courbure scalaire vérifiant* $Scal_g < 0$*, l'inégalité* (I_{SP}^{opt}) *est vraie et dès que* $\alpha > C_0(M,g)$*, il n'existe pas de solutions pour l'équation* $(E_{\alpha,f})$ *qui soient globalement minimisantes.*

Démonstration du corollaire 1.4
Supposons qu'il existe une solution globalement minimisante $u \in H_1^2(M)$ à l'équation $(E_{\alpha,f})$ pour $f \in C^0(M)$ et $\alpha > C_0(M,g)$. Alors par définition et par (1.13), on a

$$K_n(\sup f)^{2/2^*}\left(\|\nabla u\|_2^2 + \alpha\|u\|_1^2\right) \leq \left(\int_M f|u|^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*}$$

Or d'après l'inégalité (I_{SP}^{opt}), on a aussi

$$\left(\int_M f|u|^{2^*}\, dv_g\right)^{2/2^*} \leq K_n(\sup f)^{2/2^*}\left(\|\nabla u\|_2^2 + C_0(M,g)\,\|u\|_1^2\right)$$

d'où l'on déduit que $\alpha \leq C_0(M,g)$ ce qui est absurde.□

1.4 Energie associée à l'équation de Sobolev Poincaré

Lorsque $u \in H_1^2(M)$ est solution d'une équation elliptique du type $\Delta u + h(u) = 0$, l'énergie de u est classiquement définie par $J(u)$ où J est la fonctionnelle définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 \, dv_g + H(u)$$

avec $H(u) = \int_M \left(\int_0^u h(t)\, dt\right) dv_g$ de sorte que $\forall \varphi \in H_1^2(M)$,

$$DJ_u(\varphi) = \int_M \nabla u \nabla \varphi \, dv_g + \int_M h(u)\varphi \, dv_g.$$

Ainsi, pour une solution u de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$

$$\Delta_g u + \alpha \|u\|_1 \Sigma_\alpha = f|u|^{2^*-2}u,$$

l'énergie de u est donnée (en considérant formellement Σ_α comme la "différentielle" de la norme L^1) par :

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{\alpha}{2}\left(\int_M |u| dv_g\right)^2 - \frac{1}{2^*}\int_M f|u|^{2^*} dv_g.$$

Si l'on prend $\varphi = u$ dans (1.2) on obtient $\|\nabla u\|_2^2 + \alpha\|u\|_1^2 = \int_M f|u|^{2^*} dv_g$, d'où $J_\alpha(u) = \frac{1}{n}\int_M f|u|^{2^*} dv_g$, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 1.2. *Soit u une solution de $(E_{\alpha,f})$, son énergie est définie par*

$$\mathcal{E}(u) = \int_M f|u|^{2^*} dv_g.$$

On a

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\alpha,f}, \qquad \mathcal{E}(u) = nJ_\alpha(u) = Q_\alpha(u)^{n/2} \geq 0.$$

C'est cette notion d'énergie qui structure la suite de notre travail : on étudie dans les chapitres suivants de cette partie le comportement d'une suite de solutions de $(E_{\alpha,f})$ suivant son niveau d'énergie. Dans la deuxième et troisième partie, des multiplicités de solutions sont obtenues en imposant à ces solutions d'avoir des énergies différentes.

Chapitre 2

Etude asymptotique de l'équation de Sobolev Poincaré en énergie bornée "petite".

2.1 Introduction à l'énergie bornée

Par "étude asymptotique", on entend l'étude d'une suite (u_α) de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ lorsque le paramètre α converge vers $\alpha_0 \in]0, +\infty]$, la fonction $f \in C^0(M)$ telle que $\sup f > 0$ restant fixée.

Définition 2.1. *Une suite (u_α) de solutions de $(E_{\alpha,f})$ est d'énergie bornée si (u_α) est une suite de solutions de l'équation $(E_{\alpha,f})$ pour laquelle : $\exists C > 0, \forall \alpha > 0$,*

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \int_M f|u_\alpha|^{2^*} dv_g \leq C.$$

Cette hypothèse a des conséquences immédiates sur le comportement asymptotique de la suite de solutions qui sont détaillées dans la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit (u_α) une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée, il existe alors une sous-suite notée encore (u_α) qui converge faiblement dans $H_1^2(M)$, fortement dans L^1 et presque partout vers une fonction positive $u_0 \in C^{1,\beta}(M)$ qui est nulle si $\alpha_0 = +\infty$ et qui , si $\alpha_0 < +\infty$, vérifie faiblement l'équation limite :*

$$\Delta_g u_0 + \alpha_0 \|u_0\|_1 \Sigma_0 = f u_0^{2^*-1}. \qquad (E_{\alpha_0,f})$$

où $\Sigma_0 \in L^\infty(M)$ est telle que $u_0 \Sigma_0 = u_0$. De plus

$$\|\nabla u_\alpha\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 = \|\nabla(u_\alpha - u_0)\|_2^2 + \circ(1), \qquad (2.1)$$

$$\int_M f|u_\alpha - u_0|^{2^*}\, dv_g = \int_M f u_\alpha^{2^*}\, dv_g - \int_M f u_0^{2^*}\, dv_g + \circ(1). \qquad (2.2)$$

où $\circ(1)$ *tend vers* 0 *lorsque* α *tend vers* $\alpha_0 \in [0, +\infty[$. *En particulier,*

$$\mathcal{E}(u_0) \leq \varliminf_{\alpha \to \alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha). \tag{2.3}$$

Démonstration de la proposition 2.1

Puisque (u_α) est une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée :
$\exists C > 0, \forall \alpha > 0,$

$$0 \leq \|\nabla u_\alpha\|_2^2 + \alpha \|u_\alpha\|_1^2 = \int_M f u_\alpha^{2^*} \, dv_g \leq C.$$

En particulier, les suites $\left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2\right), \left(\alpha \|u_\alpha\|_1^2\right)$ et donc $\left(\|u_\alpha\|_1^2\right)$ sont bornées. Or par la double inclusion $H_1^2(M) \subset L^2(M) \subset L^1(M)$ et la compacité de la première, on sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall \alpha > 0,$

$$\|u_\alpha\|_2 \leq \varepsilon \|\nabla u_\alpha\|_2 + C_\varepsilon \|u_\alpha\|_1.$$

La suite (u_α) est donc bornée $H_1^2(M)$. Par réflexivité de $H_1^2(M)$ et par le théorème de Rellich-Kondrakov, il existe donc $u_0 \in H_1^2(M)$ telle que, à extraction de sous-suites près, (u_α) converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers u_0, fortement dans L^2 et donc L^1 et presque partout vers la même limite u_0. En particulier, $u_0 \geq 0$ presque partout.
Si $\alpha \to +\infty$, comme la suite $(\alpha \|u_\alpha\|_1^2)$ est bornée, nécessairement $\lim_{\alpha \to +\infty} \|u_\alpha\|_1 = \|u_0\|_1 = 0$. Par suite, u_0 est nulle.
Le passage à la limite $\alpha \to \alpha_0 < +\infty$ dans $(E_{\alpha,f})$ donne l'équation $(E_{\alpha_0,f})$ par les mêmes arguments de convergence que dans la démonstration de la proposition 1.2 et les théorèmes de régularité montrent que $u_0 \in C^{1,\beta}(M)$. On détaille seulement la convergence de (Σ_α) vers Σ_0 car elle est particulière à notre étude. Tout d'abord, comme $\int_M \Sigma_\alpha^2 \, dv_g \leq v_g$ où v_g est la volume de (M, g), (Σ_α) est bornée dans L^2 donc converge à sous suite près faiblement dans L^2 vers une fonction Σ_0

$$\forall \varphi \in H_1^2(M), \qquad \int_M \Sigma_\alpha \varphi \, dv_g \longrightarrow \int_M \Sigma_0 \varphi \, dv_g \quad \text{quand } \alpha \to \alpha_0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_M \Sigma_\alpha u_\alpha - \Sigma_0 u_0 \, dv_g \right| &\leq \left| \int_M \Sigma_\alpha u_\alpha - \Sigma_\alpha u_0 \, dv_g \right| + \left| \int_M \Sigma_\alpha u_0 - \Sigma_0 u_0 \, dv_g \right| \\
&\leq \|u_\alpha - u_0\|_1 + \left| \int_M \Sigma_\alpha u_0 \, dv_g - \int_M \Sigma_0 u_0 \, dv_g \right| = \circ(1)
\end{aligned}$$

D'autre part, $\int_M \Sigma_\alpha u_\alpha \, dv_g = \int_M u_\alpha \, dv_g = \int_M u_0 \, dv_g + \circ(1)$. On en déduit donc que $\Sigma_0 u_0 = u_0$ presque partout.
La limite (2.1) résulte directement de la convergence faible dans H_1^2 de (u_α) vers u_0.
Pour montrer (2.2), on écrit

$$\begin{aligned}
\int_M \left| f \left(| u_\alpha - u_0|^{2^*} - u_\alpha^{2^*} + u_0^{2^*} \right) \right| \, dv_g &\leq \sup_M |f| \int_M \left| |u_\alpha - u_0|^{2^*} - u_\alpha^{2^*} + u_0^{2^*} \right| \, dv_g \\
\leq \quad & C \int_M |u_0|^{2^*-1} |u_\alpha - u_0| \, dv_g + C \int_M |u_\alpha - u_0|^{2^*-1} |u_0| \, dv_g \\
\leq \quad & C \|u_\alpha - u_0\|_1 + C \|u_\alpha - u_0\|_{2^*-1}^{2^*-1} = \circ(1),
\end{aligned}$$

et la proposition 2.1 est démontrée.$\square$

2.2 Deux résultats "techniques" en énergie bornée

On énonce maintenant deux résultats techniques importants qui sont fréquemment utilisés dans la suite.

2.2.1 Processus d'itération

Partant d'une solution faible u_α de $(E_{\alpha,f})$, on peut sous certaines hypothèses obtenir localement un contrôle de la norme L^p de u_α avec p aussi grand que l'on veut. L'idée technique est de poser $\varphi = \eta^2 u_\alpha^k$ dans $(E_{\alpha,f})$, où η est une fonction cut off qui permet de localiser, puis de faire ensuite une récurrence sur k. Le lemme suivant permet de démarer la procédure, il est similaire à celui obtenu pour les équations de Sobolev.

Lemme 2.1. *Soient $\alpha > 0$, $f \in C^0(M)$, $u_\alpha \in H_1^2(M)$ une solution positive de $(E_{\alpha,f})$ et $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction à support compact telle que $0 \le \eta \le 1$. Pour tout $k \ge 1$, on pose*

$$A_\alpha(k,\eta) = 1 \qquad si\ f|_{supp\ \eta} \le 0 \tag{2.4}$$

$$= 1 - \frac{(k+1)^2}{4k} K_n \left(\sup_{supp\ \eta} f\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{supp\ \eta} f u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \ si\ f|_{supp\ eta} \ge 0 \tag{2.5}$$

$$= 1 - \frac{(k+1)^2}{4k} K_n \sup_{supp\ \eta} |f| \left(\int_{supp\ \eta} u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \ si\ f\ change\ de\ signe\ sur\ supp\ \eta \tag{2.6}$$

Alors on a

$$A_\alpha(k,\eta)\left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}}\right)^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \int_M C_\alpha(k,\eta)\, u_\alpha^{k+1} dv_g \le C \int_{supp\ \eta} u_\alpha^{k+1} dv_g \tag{2.7}$$

avec

$$C_\alpha(k,\eta) = K_n\left(\frac{(k-1)}{2k}\eta(\Delta\eta) + \frac{k+1}{2k}|\nabla\eta|^2 + B_0(M,g)\eta^2\right).$$

Remarque 6. *Ce lemme n'a d'intérêt que si l'on a des hypothèses suffisantes pour que $A_\alpha(k,\eta)$ soit strictement positif.*

Démonstration du lemme 2.1

Notre démonstration est assez classique, le terme particulier à l'équation de Sobolev Poincaré disparaissant dans les calculs. Soit $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction à support compact telle que $0 \le \eta \le 1$. En prenant $\varphi = \eta^2 {u_\alpha}^k$ dans $(E_{\alpha,f})$, on obtient

$$\int_M \eta^2 {u_\alpha}^k \Delta u_\alpha dv_g + \alpha \int_M u_\alpha dv_g \int_M \eta^2 {u_\alpha}^k dv_g = \int_M \eta^2 f {u_\alpha}^{2^*+k-1} dv_g \tag{2.8}$$

De plus, on vérifie que

$$\int_M \eta^2 u_\alpha^k \Delta u_\alpha dv_g = \frac{4k}{(k+1)^2} \int_M \left|\nabla(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 dv_g$$

$$-\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\int_M \eta(\Delta\eta)u_\alpha^{k+1}dv_g - \frac{2}{k+1}\int_M \left|\nabla\eta\right|^2 u_\alpha^{k+1}dv_g$$

D'où

$$\frac{4k}{(k+1)^2}\int_M \left|\nabla(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 dv_g = \int_M \eta^2 f {u_\alpha}^{2^*+k-1}dv_g + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\int_M \eta(\Delta\eta)u_\alpha^{k+1}dv_g$$
$$+\frac{2}{k+1}\int_M \left|\nabla\eta\right|^2 u_\alpha^{k+1}dv_g - \alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_M \eta^2 {u_\alpha}^k dv_g$$

Et comme $\alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_M \eta^2 {u_\alpha}^k dv_g \geq 0$,

$$\int_M \left|\nabla(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 dv_g \leq \frac{(k+1)^2}{4k}\int_M \eta^2 f {u_\alpha}^{2^*+k-1}dv_g$$
$$+\frac{k-1}{2k}\int_M \eta(\Delta\eta)u_\alpha^{k+1}dv_g + \frac{k+1}{2k}\int_M \left|\nabla\eta\right|^2 u_\alpha^{k+1}dv_g \tag{2.9}$$

Tout d'abord, si $f|_{supp\ \eta} \leq 0$, alors

$$\int_M \eta^2 f {u_\alpha}^{2^*+k-1}dv_g \leq 0.$$

Maintenant, si f change de signe sur $supp\ \eta$, alors par l'inégalité de Hölder :

$$\int_M \eta^2 f u_\alpha^{2^*+k-1}dv_g \leq \sup_{supp\ \eta}|f|\left(\int_M \eta^{2^*} u_\alpha^{\frac{2^*(k+1)}{2}}\ dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_{supp\ \eta} u_\alpha^{2^*}\ dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}.$$

Enfin si $f|_{supp\ \eta} \geq 0$, on majore ce terme de la manière suivante, toujours grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_M \eta^2 f u_\alpha^{2^*+k-1}dv_g &\leq \left(\int_M \eta^{2^*} u_\alpha^{\frac{2^*(k+1)}{2}}\ f\ dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_{supp\ \eta} f u_\alpha^{2^*}\ dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}\\ &\leq \left(\sup_{supp\ \eta} f\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_M \eta^{2^*} u_\alpha^{\frac{2^*(k+1)}{2}}\ dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_{supp\ \eta} f u_\alpha^{2^*}\ dv_g\right)^{\frac{2}{n}}.\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Sobolev optimale (I_S^{opt}),

$$\left(\int_M \left(\eta {u_\alpha}^{(k+1)/2}\right)^{2^*}dv_g\right)^{2/2^*} \leq K_n\left(\int_M \left|\nabla\left(\eta {u_\alpha}^{\frac{k+1}{2}}\right)\right|^2 dv_g + B_0(M,g)\int_M \eta^2 {u_\alpha}^{k+1}dv_g\right)$$

En reportant (2.9) dans cette inégalité ainsi que la majoration de $\int_M \eta^2 f u_\alpha^{2^*+k-1}$ correspondant à l'hypothèse vérifiée par f, on obtient (2.7) et le lemme 2.1 est démontré.$\square$

2.2.2 Principe itératif de De Giorgi-Nash-Moser

Les majorations obtenues dans le lemme 2.1 de normes L^p_{loc} de (u_α) pour p aussi grand que l'on veut, permettent d'obtenir un contrôle de la norme C^0_{loc} . Ce résultat est appelé classiquement dans la littérature le schéma itératif de De Giorgi-Nash-Moser. Dans sa version classique, il donne un contrôle C^0_{loc} de (u_α) en partant d'un contrôle en norme L^p avec $p > 1$. Ce résultat est suffisant par exemple lorsqu'on travaille avec les équations de Sobolev, mais dans le cas des équations de Sobolev Poincaré où la norme L^1 joue un rôle important, il est nécessaire de pouvoir démarer l'itération justement par cette norme. Pour cela, nous utilisons la version plus forte du schéma itératif de De Giorgi-Nash-Moser démontrée par Han Lin [31] où le contrôle C^0_{loc} de (u_α) s'obtient à partir d'un contrôle L^p où $p > 0$. Voici son énoncé adapté au cas riemannien :

Théorème B (**De Giorgi-Nash-Moser**). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient $c \in C^0(M)$, $F \in C^0(M)$ et $u \in H_1^2(M)$, $u \geq 0$ telles que quelle que soit $\varphi \in H_1^2(M)$ positive,*

$$\int_M \nabla u \nabla \varphi \, dv_g + \int_M c u \varphi \, dv_g \leq \int_M F \varphi \, dv_g.$$

S'il existe $x \in M, \delta > 0, r > \frac{n}{2}$ et $\Gamma > 0$ tels que

$$\int_{B_x(\delta)} c^r \, dv_g \leq \Gamma$$

alors $u \in L^\infty_{loc}(B_x(\delta)$ et quels que soient $p > 0$ et $\theta \in]0, 1[$, il existe $C = C(n, \Gamma, p, q) > 0$ tel que

$$\sup_{B_x(\theta\delta)} u \leq C \left(\frac{1}{(1-\theta)^{n/p}} \|u\|_{L^p(B_x(\delta))} + \|F\|_{L^p(B_x(\delta))} \right). \tag{2.10}$$

Pour une suite de solutions de l'équation de Sobolev-Poincaré, cet énoncé devient :

Corollaire 2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit $f \in C^0(M)$ et soit $u_\alpha \in H_1^2(M)$ une solution (faible) positive de l'équation de Sobolev Poincaré*

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha \Sigma_\alpha \|u_\alpha\|_1 = f u_\alpha^{2^*-1} \tag{$E_{\alpha,f}$}$$

S'il existe $x \in M, \delta > 0, q > \frac{2n}{n-2}$ et $\Gamma > 0$ tels que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^q dv_g \leq \Gamma, \tag{2.11}$$

alors $u \in L^\infty_{loc}(B_x(\delta)$ et quels que soient $p > 0$ et $\theta \in]0, 1[$, il existe $C = C(n, \Gamma, p, q) > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \sup_{B_x(\theta\delta)} u_\alpha \leq \frac{C}{(1-\theta)^{n/p}} \|u_\alpha\|_{L^p(B_x(\delta))}. \tag{2.12}$$

Démonstration du corollaire 2.1

Ce corollaire provient immédiatement du théorème B précédent en posant $F = 0$ et $c = -fu_\alpha^{2^*-2}$. L'hypothèse requise sur la fonction c se traduit par l'existence de $x \in M, \delta > 0, r > \frac{n}{2}$ et de $\Gamma > 0$ tels que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{(2^*-2)r} dv_g \leq \Gamma.$$

Comme $r > \frac{n}{2}$, cela est équivalent à l'existence de $q > 2^*$ et de $\Gamma > 0$ tels que quel que soit $\alpha > 0$, on a $\int_{B_x(\delta)} u_\alpha^q \, dv_g \leq \Gamma$ ce qui est vérifié par l'hypothèse (2.11).□

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique d'une suite de solutions positives (u_α) de $(E_{\alpha,f})$ dans le cas particulier où son énergie est majorée par

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathcal{E}(u_\alpha) = \int_M f u_\alpha^{2^*} \, dv_g \leq \left(\frac{1}{K_n (\sup_M f)^{2/2^*}} \right)^{\frac{n}{2}}. \qquad (\mathcal{H}_{petite})$$

Cette hypothèse est appelée "énergie petite" et notée $(\mathcal{H}_{petite})$.
L'étude générale en énergie bornée est faite dans le chapitre suivant.

Remarque 7. *La majoration $(\mathcal{H}_{petite})$ est immédiatement vérifiée lorsque la solution u_α de $(E_{\alpha,f})$ est obtenue par la proposition 1.2 puisqu'alors u_α est minimisante et donc*

$$\mathcal{E}(u_\alpha)^{2/n} = Q_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha < \frac{1}{K_n (\sup f)^{2/2^*}}.$$

2.3 Etude asymptotique en énergie "petite"

Soit (u_α) vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}_{petite})$: il s'agit donc d'une suite de solutions de $(E_{\alpha,f})$ pour laquelle

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathcal{E}(u_\alpha) \leq \left(\frac{1}{K_n (\sup f)^{2/2^*}} \right)^{\frac{n}{2}}. \qquad (2.13)$$

Il existe alors une sous-suite encore notée (u_α) telle que $(\mathcal{E}(u_\alpha))$ converge vers

$$\mathcal{E}_0 := \lim_{\alpha \to \alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) \in \left[0, \left(K_n (\sup f)^{2/2^*} \right)^{-\frac{n}{2}} \right]$$

et qui d'après le lemme 2.1, converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers u_0 lorsque α tend vers $\alpha_0 \leq +\infty$. Deux cas se produisent alors, suivant que la limite $\mathcal{E}_0$ est ou n'est pas égale à $\left(K_n (\sup f)^{2/2^*} \right)^{-n/2}$.

2.3.1 Energie "trop petite pour la concentration"

Proposition 2.2. *Si une suite (u_α) de solutions non nulles de $(E_{\alpha,f})$ vérifie $(\mathcal{H}_{petite})$ et si $0 \leq \mathcal{E}_0 < \left(K_n (\sup f)^{\frac{2}{2^*}} \right)^{-n/2}$, alors (u_α) converge vers u_0 en norme H_1^2 et u_0 n'est pas identiquement nulle.*

A titre de remarque et avant de démontrer la proposition, on montre qu'on ne peut pas avoir $\mathcal{E}_0 = 0$. En effet comme on le voit à partir de l'inégalité de Sobolev Poincaré, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \|u_\alpha\|_2 \leq \|\nabla u_\alpha\|_2 + \|u_\alpha\|_1.$$

En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour α proche de α_0

$$\varepsilon \|u_\alpha\|_2 \leq \|\nabla u_\alpha\|_2 + \alpha \|u_\alpha\|_1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u_\alpha\|_{H_1^2} &\leq 2\left(\|\nabla u_\alpha\|_2 + \alpha\|u_\alpha\|_1\right) = 2\mathcal{E}(u_\alpha) \\ &\leq C \int_N |u_\alpha|^{2^*} \, dv_g \leq C \|u_\alpha\|_{H_1^2}^{2^*} \end{aligned}$$

par inégalité de Sobolev, où ici $\|u_\alpha\|_{H_1^2} = \|\nabla u_\alpha\|_2 + \|u_\alpha\|_2$. Par suite, pour α proche de α_0,

$$\|u_\alpha\|_{H_1^2}^{2^*-1} \geq \frac{\varepsilon}{C}$$

et il existe donc un minorant strictement positif pour $\mathcal{E}_0$.

Démonstration de la proposition 2.2
On écrit grâce à l'inégalité (I_S^{opt}) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_\alpha)^{2/2^*} = \left(\int_M f u_\alpha^{2^*} \, dv_g\right)^{2/2^*} &\leq K_n (\sup f)^{2/2^*} \left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + B_0(M,g)\|u_\alpha\|_2^2\right) \\ &\leq K_n (\sup f)^{2/2^*} \left(\mathcal{E}(u_\alpha) + B_0(M,g)\|u_\alpha\|_2^2\right) \end{aligned}$$

En passant à la limite sur α, comme (u_α) converge en norme L^2 vers u_0, on a :

$$\mathcal{E}_0^{2/2^*} \leq K_n (\sup f)^{2/2^*} \mathcal{E}_0 + D\|u_0\|_2^2, \tag{2.14}$$

où $D \geq 0$ est indépendant de α. Or par hypothèse, $K_n(\sup f)^{2/2^*} < \mathcal{E}_0^{-2/n}$, donc

$$\mathcal{E}_0^{2/2^*} < \mathcal{E}_0^{2/2^*} + D\|u_0\|_2^2,$$

et u_0 est non nulle.

Remarque 8. *L'inégalité (2.14) est valable dans le cas général où (u_α) est une suite de solutions de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée et sera utilisée dans la suite.*

Pour montrer la convergence forte de (u_α) vers u_0 dans $H_1^2(M)$, il suffit de montrer que $\|\nabla u_\alpha\|_2 \to \|\nabla u_0\|_2$ quand $\alpha \to \alpha_0$. Or

$$\|\nabla u_\alpha\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 = \mathcal{E}(u_\alpha) - \mathcal{E}(u_0) + \alpha_0\|u_0\|_1^2 - \alpha\|u_\alpha\|_1^2,$$

donc

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2\right) = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(u_0) \tag{2.15}$$

où, par Rellich-Kondrakov, on a supposé que $u_\alpha \to u_0$ dans L^1. Ecrivons l'inégalité de Sobolev optimale (I_S^{opt}) pour la fonction $u_\alpha - u_0$:

$$\left(\int_M f|u_\alpha - u_0|^{2^*} dv_g\right)^{2/2^*} \leq K_n(\sup f)^{2/2^*} \left(\|\nabla(u_\alpha - u_0)\|_2^2 + B_0(M,g) \|u_\alpha - u_0\|_2^2\right),$$

puis, grâce à (2.1) et (2.2) :

$$(\mathcal{E}(u_\alpha) - \mathcal{E}(u_0) + \circ(1))^{2/2^*} \leq K_n(\sup f)^{2/2^*} \left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 + \circ(1) + B_0(M,g) \|u_\alpha - u_0\|_2^2\right)$$

d'où par passage à la limite sur α d'après (2.15) et la convergence forte de (u_α) vers u_0 dans L^2 que l'on peut là encore supposer par Rellich-Kondrakov :

$$(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(u_0))^{2/2^*} \leq K_n(\sup f)^{2/2^*} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(u_0)).$$

Alors, si $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}(u_0)$, comme $\mathcal{E}(u_0) \leq \mathcal{E}_0$ on obtient

$$(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(u_0))^{-2/n} \leq K_n(\sup f)^{2/2^*}$$

soit

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(u_0) \geq \left(K_n(\sup f)^{2/2^*}\right)^{-n/2} > \mathcal{E}_0$$

et donc $\mathcal{E}(u_0) < 0$, ce qui est impossible. On en déduit que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(u_0)$ et donc par (2.1) et (2.15) que la convergence de (u_α) vers u_0 est dans ce cas forte dans $H_1^2(M)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.$\square$

2.3.2 Energie "minimale pour la concentration".

Définition 2.2. *L'énergie d'une suite (u_α) de solutions de $(E_{\alpha,f})$ est "minimale pour la concentration" (on dira seulement minimale) si*

$$\mathcal{E}_0 := \lim_{\alpha\to\alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) = \frac{1}{(K_n(\sup f)^{2/2^*})^{n/2}}. \tag{2.16}$$

Lorsque $\mathcal{E}_0 = \left(K_n(\sup f)^{2/2^*}\right)^{-n/2}$, la convergence de (u_α) vers u_0 est faible dans $H_1^2(M)$ mais on ne sait pas si elle est forte ou non. L'étude plus fine de cette convergence est faite pour le cas général où l'énergie est bornée dans le chapitre suivant : la notion de "bulle" permet alors de décrire plus précisément le comportement asymptotique de la suite de solutions. Le théorème 3.1 justifiera précisément le terme "d'énergie minimale" de la définition suivante : il s'agit de la plus petite énergie pour laquelle l'existence d'une bulle est possible (on verra aussi qu'il y a alors dans ce cas au maximum une seule bulle).

2.3.3 Le phénomène de concentration en énergie minimale.

On présente ici un exemple important d'énergie minimale :

Proposition 2.3. *Soit (u_α) une suite vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}_{petite})$ et telle que*

$$u_\alpha \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } H_1^2(M) \text{ mais pas fortement quand } \alpha \to \alpha_0 \in]0, +\infty] \tag{2.17}$$

alors l'énergie de (u_α) est minimale (pour la concentration) c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_0 := \lim_{\alpha \to \alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) = \frac{1}{(K_n (\sup f)^{2/2^*})^{n/2}}$$

et de plus

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \alpha \| u_\alpha \|_1^2 = 0. \tag{2.18}$$

On rappelle que (2.17) est immédiatement vérifiée (à sous-suite près) si $\alpha_0 = +\infty$.

Démonstration de la proposition 2.3
Par hypothèse $u_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ et la suite (u_α) est bornée dans $H_1^2(M)$. On peut donc supposer qu'à sous suite près elle converge fortement dans L^2 et L^1 et comme la convergence n'est pas forte dans $H_1^2(M)$, on a $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \|u_\alpha\|_{H_1^2} = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \|\nabla u_\alpha\|_2 > 0$ et donc

$$\mathcal{E}_0 := \lim_{\alpha \to \alpha_0} \mathcal{E}(u_\alpha) \geq \lim_{\alpha \to \alpha_0} \|\nabla u_\alpha\|_2^2 > 0.$$

D'après l'inégalité (2.14) démontrée plus haut (qui est bien valable en énergie bornée d'après la remarque 8) ainsi que le fait que $u_0 \equiv 0$:

$$\mathcal{E}_0^{2/2^*} \leq K_n (\sup f)^{2/2^*} \mathcal{E}_0,$$

d'où puisque $\mathcal{E}_0 > 0$, on a $\mathcal{E}_0 \geq \frac{1}{\left(K_n(\sup f)^{2/2^*}\right)^{n/2}}$, ce qui, avec l'hypothèse $(\mathcal{H}_{petite})$ implique bien que $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{\left(K_n(\sup f)^{2/2^*}\right)^{n/2}}$.
D'autre part, pour montrer (2.14), on a utilisé la majoration un peu grossière $\|\nabla u_\alpha\|_2^2 \leq \mathcal{E}(u_\alpha)$. En utilisant l'expression exacte de $\mathcal{E}(u_\alpha)$, on a :

$$\mathcal{E}(u_\alpha)^{2/2^*} \leq (\sup f)^{2/2^*} K_n \left(\mathcal{E}(u_\alpha) - \alpha \|u_\alpha\|_1^2 + B_0(M, g)\|u_\alpha\|_2^2\right),$$

d'où en passant à la limite sur α, par (2.16) et (2.17), on obtient :

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \alpha \| u_\alpha \|_1^2 = 0,$$

ce qui achève la démonstration.$\square$

Dans le cadre de la proposition précédente, la suite (u_α) tend vers 0 presque partout, cependant elle ne peut pas converger vers 0 dans $L^{2^*}(M)$ car son énergie ne tend pas vers 0. Cette remarque justifie l'introduction de la notion de point de concentration, définie de la manière suivante :

Définition 2.3 (point de concentration). *Soit* (u_α) *une suite de solutions de* $(E_{\alpha,f})$ *qui converge vers 0 faiblement dans* $H_1^2(M)$ *mais pas en norme* L^{2^*}*, un point* $x \in M$ *est un point de concentration pour la suite* (u_α) *si*

$$\forall \delta > 0, \qquad \limsup_{\alpha \to \alpha_0} \int_{B_x(\delta)} |u_\alpha|^{2^*} \, dv_g > 0. \tag{2.19}$$

Un objectif de cette étude est de connaître de façon de plus en plus précise le comportement asymptotique de (u_α). Pour cela, on montre plusieurs propositions qui sont les premières étapes classiques de l'étude du phénomène de concentration. Ce sont les mêmes que dans le cas de l'équation de Sobolev, sauf pour la dernière, la proposition 2.9 qui est particulière à notre cas.

Proposition 2.4. *Soit* (u_α) *une suite vérifiant* $(\mathcal{H}_{petite})$*, (2.17) et donc (2.16). Alors il existe un point de concentration* x_0 *qui est unique à extraction de sous-suite près et qui vérifie* $f(x_0) = \sup f > 0$*. De plus :*

$$\forall \delta > 0, \qquad \limsup_{\alpha \to \alpha_0} \int_{B_{x_0}(\delta)} f u_\alpha^{2^*} \, dv_g = \frac{1}{(K_n (\sup f)^{2/2^*})^{n/2}} = \mathcal{E}_0. \tag{2.20}$$

Remarque 9. *Pour un phénomène de concentration en énergie minimale d'une suite de solutions de l'équation de Sobolev Poincaré* $(E_{\alpha,1})$ *(où* $f \equiv 1$*) étudiée par Hebey [25] , on ne connaît pas la position du point de concentration. La situation change si l'on introduit une fonction* f *non constante au second membre de* $(E_{\alpha,f})$ *: en énergie minimale, le point de concentration est alors fixé en un point où* f *atteint son maximum. A part cette différence, le phénomène de concentration étudié ici présente les mêmes caractéristiques que celui déjà étudié en énergie minimale pour l'équation de Sobolev Poincaré avec* $f \equiv 1$*, voir Hebey [25].*
Nous verrons dès le chapitre 3 que lorsque l'énergie n'est plus minimale mais seulement bornée, il peut y avoir plusieurs points de concentration et nous montrons dans l'appendice A que la fonction f *ne les fixe plus nécessairement en ses maxima mais seulement en ses points critiques.*

Démonstration de la proposition 2.4
La compacité de M assure l'existence d'au moins un point de concentration. On suppose que $x_0 \in M$ est un point de concentration de (u_α) et on définit $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction cut off centrée en x_0 de la manière suivante : pour $\delta > 0$, $\eta = 0$ sur $M \backslash B_{x_0}(\delta)$, $\eta = 1$ sur $B_{x_0}(\delta/2)$ et $0 \le \eta \le 1$.
On commence par montrer que $f(x_0) > 0$. Si l'on suppose tout d'abord que $f(x_0) < 0$, alors par continuité de f il existe $\delta > 0$ tel que $f|_{B_{x_0}(\delta)} \le 0$. D'après (2.7) et (2.4) du lemme 2.1, on a pour $k \ge 1$:

$$\left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}} \right)^{2^*} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \le C \int_M u_\alpha^{k+1} \, dv_g. \tag{2.21}$$

Comme, (u_α) est bornée dans $H_1^2(M)$ et donc dans L^{k+1} pour k proche de 1, il existe $C > 0, \forall \alpha > 0$,

$$\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}} \right)^{2^*} dv_g \le C.$$

Alors grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_0}(\delta/2)} u_\alpha^{2^*}\, dv_g &\leq \left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}}\right)^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M u_\alpha^{2^*-\frac{2^*(k-1)}{2^*-2}}\, dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}\\ &\leq C\left(\int_M u_\alpha^{2^*-\frac{2^*(k-1)}{2^*-2}}\, dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}.\end{aligned}$$

Or pour $k > 1$ proche de 1, on a $1 < r = 2^* - \frac{2^*(k-1)}{2^*-2} < 2^*$, donc la convergence forte de (u_α) nous donne $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_M u_\alpha^r\, dv_g = 0$ et alors

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_{x_0}(\delta/2)} u_\alpha^{2^*}\, dv_g = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la définition du point de concentration. On en déduit que $f(x_0) \geq 0$.
Pour démontrer les autres points de la proposition, on raisonne encore par l'absurde et on obtient à chaque fois l'inégalité (2.21). La contradiction découle alors du même raisonnement que celui qui vient d'être fait.
Supposons tout d'abord que $f(x_0) = 0$, (2.7) est alors valable avec

$$A_\alpha(k,\eta) = 1 - \frac{(k+1)^2}{4k} K_n \sup_{B_{x_0}(\delta)} |f| \left(\int_{B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}$$

Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $\sup_{B_{x_0}(\delta)} |f|$ soit assez petit pour que $A_\alpha(k,\eta) > 0$. L'inégalité (2.7) devient donc (2.21) :

$$\left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}}\right)^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_M u_\alpha^{k+1} dv_g,$$

qui entraine une contradiction comme précédemment. On a donc montré que si x_0 est un point de concentration, alors $f(x_0) > 0$. L'inégalité (2.7) est donc valable avec (2.5) comme expression pour $A_\alpha(k,\eta)$:

$$A_\alpha(k,\eta) = 1 - \frac{(k+1)^2}{4k} K_n \left(\sup_{supp\ \eta} f\right)^{2/2^*} \left(\int_{supp\ \eta} f\, u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{2/n}$$

où η est à support compact dans $B_{x_0}(\delta_0)$ avec $\delta_0 > 0$ assez petit pour que $f > 0$ sur $B_{x_0}(\delta_0)$. On montre maintenant que l'on peut extraire de (u_α) une sous-suite qui n'a qu'un seul point de concentration, pour cela, on pose pour $\delta < \delta_0$,

$$a_\delta = \limsup_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_{x_0}(\delta)} f u_\alpha^{2^*}\, dv_g.$$

D'après ce que l'on a montré précédemment

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{f\leq 0} u_\alpha^{2^*}\, dv_g = 0$$

on en déduit que $0 < a_\delta \le \mathcal{E}_0$. Supposons qu'il existe $\delta_1 \in]0, \delta_0[$ pour lequel $a_{\delta_1} < \mathcal{E}_0$, alors

$$K_n \left(\sup_{B_{x_0}(\delta_1)} f \right)^{2/2^*} a_{\delta_1}^{2/n} \le \left(\frac{a_{\delta_1}}{\mathcal{E}_0} \right)^{2/n} < 1,$$

et comme $\lim_{k\to 1} \frac{(k+1)^2}{4k} = 1$, pour α proche de α_0 et k proche de 1, et η à support compact dans $B_{x_0}(\delta_1)$, on a $A_\alpha(k,\eta) > 0$ et (2.21) est vraie. La contradiction s'en déduit comme précédemment. Ainsi pour tout $\delta > 0, a_\delta = \mathcal{E}_0$ ce qui assure, pour une sous-suite extraite, l'unicité du point de concentration et montre (2.20).
Supposons enfin que x_0 ne réalise pas le maximum de f, il existe alors $\delta_2 \in]0, \delta_0[$ tel que $\sup\limits_{B_{x_0}(\delta_2)} f < \sup\limits_M f$. On a alors,

$$K_n \left(\sup_{B_{x_0}(\delta_2)} f \right)^{2/2^*} a_{\delta_2}^{2/n} = \left(\frac{\sup_{B_{x_0}(\delta_2)} f}{\sup_M f} \right)^{2/2^*} < 1.$$

Ainsi, pour k proche de 1 et η_2 à support compact dans $B_{x_0}(\delta_2)$, $A(k,\eta_2) > 0$ et (2.21) est vraie. A nouveau, la contradiction a lieu et donc x_0 réalise bien le maximum de f, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.4.□

Proposition 2.5. *Soit (u_α) une suite vérifiant $(\mathcal{H}_{petite})$, (2.17) et donc (2.16). Alors*

$$u_\alpha \to 0 \text{ dans } C^0_{loc}(M \backslash \{x_0\})$$

où x_0 est le point de concentration de la proposition 2.4.

Démonstration de la proposition 2.5
Soient $x \neq x_0$, $\delta > 0$ tel que $B_x(\delta) \cap \{x_0\} = \emptyset$ et $\eta \in C^\infty(M)$ à support compact inclus dans $B_x(\delta)$. On ne connaît pas le signe de f sur $B_x(\delta)$ et le lemme 2.1 s'utilise donc avec :

$$A_\alpha(k,\eta) = 1 - \frac{(k+1)^2}{4k} K_n \sup_{B_x(\delta)} |f| \left(\int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Or, comme x n'est pas un point de concentration, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_g = 0,$$

d'où $A_\alpha(k,\eta) > 0$ pour ce choix de δ et pour α proche de α_0 et (2.21) est vraie. Alors, en choisissant $k = 2^* - 1$ dans (2.21), on en déduit que (u_α) est bornée dans $L^{(2^*)^2/2}(B_x(\delta))$. Comme $(2^*)^2/2 > 2^*$, le corollaire 2.1 du procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser donne :

$$\exists C > 0, \qquad \sup_{B_x(\delta/2)} u_\alpha \le C \|u_\alpha\|_2.$$

Et par (2.17),

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \sup_{B_x(\delta/2)} u_\alpha = 0,$$

ce qui démontre la proposition 2.5.□

Pour affiner la connaissance du comportement asymptotique de la suite (u_α), on s'intéresse à son comportement au voisinage du point de concentration. Soit x_α un point où u_α réalise son maximum, on pose :

$$\lambda_\alpha^{1-\frac{n}{2}} := u_\alpha(x_\alpha) = \max_M u_\alpha.$$

Puisque (u_α) tend vers 0 dans $C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$, nécessairement

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} x_\alpha = x_0 \qquad \text{et } \lim_{\alpha\to\alpha_0} \lambda_\alpha = 0.$$

La proposition 2.6 précise la vitesse de convergence de l'énergie des solutions u_α autour de x_0 et la proposition 2.7 donne une estimée ponctuelle.

Proposition 2.6 (**Vitesse de convergence**). *Soit (u_α) une suite vérifiant $(\mathcal{H}_{petite})$, (2.17) et donc (2.16). Alors*

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{B_{x_\alpha}(R\lambda_\alpha)} f u_\alpha^{2^*}\, dv_g = \left(\frac{1}{K_n(\sup f)^{2/2^*}}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{2.22}$$

Démonstration de la proposition 2.6

On utilise la technique du changement d'échelle (blow up) : grâce à la carte exponentielle en un point de M, on "transporte" sur $\mathbb{R}^n$ les relations que l'on connait sur M et on peut alors utiliser les dilatations classiques de $\mathbb{R}^n$ notées $\mathcal{D}_l$ où $l > 0$ est le coefficient de dilatation. Un changement d'échelle se caractérise par la donnée de son centre, ici x_α, et de son coefficient de dilatation, ici λ_α^{-1}. Pour familiariser le lecteur non initié à ce type de raisonnement, on détaille ci-dessous la succession de changements de cartes et de métriques qui constituent le changement d'échelle. Soit $0 < \delta < i_g$ de façon que l'application exponentielle exp_{x_α} soit un difféomorphisme de $B_0(\delta) \subset \mathbb{R}^n$ dans $B_{x_\alpha}(\delta)$,

$$\begin{array}{ccccc}
B_{x_\alpha}(\delta) & \xrightarrow{\exp^{-1}_{x_\alpha}} & B_0(\delta)\subset\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathcal{D}_{\lambda_\alpha^{-1}}} & B_0(\lambda_\alpha^{-1}\delta)\subset\mathbb{R}^n \\
 & & x & \mapsto & x/\lambda_\alpha \\
 & & & & \\
g & \to & g_\alpha = \exp^*_{x_\alpha} g & \to & \tilde{g}_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^2}(\mathcal{D}_{\lambda_\alpha})^* g_\alpha
\end{array}$$

Pour $x \in B_0(\lambda_\alpha^{-1}\delta)$, on pose :

$$\begin{array}{rclcrcl}
\tilde{g}_\alpha(x) & = & \frac{1}{\lambda_\alpha^2}(\mathcal{D}_{\lambda_\alpha})^* g_\alpha(x) & \qquad & \tilde{\Sigma}_\alpha(x) & = & \Sigma_\alpha(exp_{x_\alpha}(\lambda_\alpha x)) \\
\tilde{u}_\alpha(x) & = & \lambda_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(\lambda_\alpha x)) & & \tilde{f}_\alpha(x) & = & f(exp_{x_\alpha}(\lambda_\alpha x))
\end{array}$$

On a alors $\tilde{u}_\alpha(0) = 1$ et $\tilde{u}_\alpha$ vérifie l'équation :

$$\Delta_{\tilde{g}_\alpha}\tilde{u}_\alpha + \alpha\lambda_\alpha^{\frac{n+2}{2}}\tilde{\Sigma}_\alpha\left(\int_M u_\alpha dv_g\right) = \tilde{f}_\alpha \tilde{u}_\alpha^{2^*-1} \tag{$\tilde{E}_{\alpha,f}$}$$

De plus, puisque $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\lambda_\alpha = 0$, on montre classiquement que les composantes de $\tilde{g}_\alpha$ convergent $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vers celles de la métrique euclidienne ξ et que $\tilde{u}_\alpha$ converge $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

vers une fonction $\tilde{u}$ non nulle telle que $\tilde{u}(0) = 1$ et qui vérifie, comme $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \lambda_\alpha = 0$ et par le fait que $f(x_0) = \sup f$:

$$\Delta_\xi \tilde{u} = \sup f\ \tilde{u}^{2^*-1}.$$

L'expression de $\tilde{u}$ est alors donnée, voir Cafarelli-Gidas-Spruck [9] et Obata [34] par translations et homothéties de la solution particulière :

$$\tilde{u}(x) = \left(1 + \frac{\sup f}{n(n-2)}|x|^2\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(R\lambda_\alpha)} f u_\alpha^{2^*}\, dv_g &= \int_{B_0(R)} \tilde{f}_\alpha \tilde{u}_\alpha^{2^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} = \sup f \int_{B_0(R)} \tilde{u}^{2^*} dx + \circ(1) \\ &= \left(\frac{1}{K_n (\sup f)^{2/2^*}}\right)^{\frac{n}{2}} + \circ(1) + \varepsilon_R\end{aligned}$$

où $\circ(1) \to 0$ quand $\alpha \to \alpha_0$ et $\varepsilon_R \to 0$ quand $R \to +\infty$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.6.$\square$

Proposition 2.7 (**Estimée ponctuelle**). *Soit* (u_α) *une suite vérifiant* $(\mathcal{H}_{petite})$, *(2.17) et donc (2.16). Alors,* $\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x \in M$,

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(x) \le C. \tag{2.23}$$

Démonstration de la proposition 2.7
Posons $V_\alpha(x) = d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(x)$. Si la proposition est fausse alors, à extraction de sous-suite près, en notant y_α un point où V_α réalise son maximum :

$$V_\alpha(y_\alpha) = \|V_\alpha\|_\infty \longrightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \to \alpha_0.$$

Comme $u_\alpha \to 0$ dans $C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$, nécessairement $y_\alpha \to x_0$, et puisque $u_\alpha(y_\alpha) \le u_\alpha(x_\alpha) = \lambda_\alpha^{1-\frac{n}{2}}$ on a :

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}{\lambda_\alpha} = +\infty. \tag{2.24}$$

Comme dans la démonstration précédente, on fait alors un changement d'échelle, mais cette fois-ci autour du point y_α et de coefficient de dilatation $\gamma_\alpha^{-1} = u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n-2}}$. On note pour $\delta < i_g$

$$\Omega_\alpha = \gamma_\alpha^{-1}\ exp_{y_\alpha}^{-1}\left(B_{x_\alpha}(\delta)\right),$$

en remarquant que puisque $\gamma_\alpha \to 0$, pour α proche de α_0, on a $B_0(2) \subset \Omega_\alpha$. Pour $x \in \Omega_\alpha$, on pose

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha(x) &= \tfrac{1}{\gamma_\alpha^2}(\exp_{y_\alpha} \circ \mathcal{D}_{\gamma_\alpha})^* g(x) & \bar{\Sigma}_\alpha(x) &= \Sigma_\alpha(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) \\ \bar{u}_\alpha(x) &= \gamma_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) & \bar{f}_\alpha(x) &= f(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x))\end{aligned}$$

Par construction, $\overline{u}_\alpha(0) = 1$ et $\overline{u}_\alpha$ vérifie l'équation

$$\Delta_{\overline{g}_\alpha}\overline{u}_\alpha + \alpha\gamma_\alpha^{\frac{n+2}{2}}\overline{\Sigma}_\alpha\left(\int_M u_\alpha dv_g\right) = \overline{f}_\alpha\overline{u}_\alpha^{2^*-1}. \qquad (\overline{E}_{\alpha,f})$$

Comme précédemment, puisque γ_α tend vers 0 lorsque $\alpha \to \alpha_0$, $\overline{g}_\alpha \to \xi$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Or $V_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$, donc pour α proche de α_0 et $x \in B_0(2)$,

$$d_g(x_\alpha, exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) \geq \frac{1}{2}d_g(x_\alpha, y_\alpha) \qquad (2.25)$$

Or toujours pour α proche de α_0, par (2.24) et (2.25),

$$B_{y_\alpha}(2\gamma_\alpha) \cap B_{x_\alpha}(R\lambda_\alpha) = \emptyset,$$

et d'après la proposition 2.6, on a

$$\int_{B_0(2)} \overline{f}_\alpha\overline{u}_\alpha^{2^*}dv_{\overline{g}_\alpha} = \int_{B_{y_\alpha}(2\gamma_\alpha)} f u_\alpha^{2^*}dv_g \longrightarrow 0.$$

Dans le lemme 2.1 en prenant η à support compact inclus dans $B_{y_\alpha}(2\gamma_\alpha)$, on a donc $A(k,\eta) < 1$ et (2.21) est vraie, ce qui pour $k = 2^* - 1$ donne

$$\int_{B_0(1)} \overline{u}_\alpha^{(2^*)^2/2}dv_{\overline{g}_\alpha} \to 0.$$

On en déduit par le principe itératif de De Giorgi-Nash-Moser que $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \sup\limits_{B_0(1)} \overline{u}_\alpha = 0$ ce qui est impossible car $\overline{u}_\alpha(0) = 1$. L'estimée ponctuelle est démontrée.□

Le phénomène de concentration autour de x_0 a des implications exprimées en "termes L^2". Pour préciser cela, on introduit le quotient

$$R_2(\delta,\alpha) = \frac{\int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^2 dv_g}{\int_M u_\alpha^2 dv_g}$$

où x_0 est comme dans la proposition 2.4 et on montre la proposition suivante :

Proposition 2.8 (**Concentration** L^2)**.** *Soit* (u_α) *une suite vérifiant* $(\mathcal{H}_{petite})$*, (2.17) et donc (2.16) . Alors,* $\forall n \geq 4, \forall \alpha_0 \in]0,+\infty]$ *et* $\forall\delta > 0$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R_2(\delta,\alpha) = 0. \qquad (2.26)$$

Démonstration de la proposition 2.8

On a

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^2 dv_g &= \int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} \Sigma_\alpha\, u_\alpha^2 dv_g \\ &\leq \left(\sup_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha\right)^2 \int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} \Sigma_\alpha\, dv_g \\ &\leq C\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2 \int_M \Sigma_\alpha\, dv_g\end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte du procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser, valable pour des domaines dont le point de concentration n'est pas adhérent. De plus, en intégrant directement $(E_{\alpha,f})$,

$$\int_M u_\alpha dv_g \int_M \Sigma_\alpha dv_g = \frac{1}{\alpha}\int_M f u_\alpha^{2^*-1} dv_g \leq C \int_M u_\alpha^{2^*-1} dv_g$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^2 dv_g &\leq C\|u_\alpha\|_1 \int_M u_\alpha^{2^*-1} dv_g \\
\int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^2 dv_g &\leq C\sqrt{\int_M u_\alpha^2 dv_g} \int_M u_\alpha^{2^*-1} dv_g \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Cette inégalité permet de prouver (2.26), l'idée principale étant d'utiliser une inégalité de Hölder. Cela donne immédiatement le résultat pour $n \geq 6$ et pour $n = 5$, le cas $n = 4$ correspond à un cas critique et la démonstration est alors plus subtile.
Dans le cas $n \geq 6$, on a $2 \geq 2^* - 1$ donc

$$\int_M u_\alpha^{2^*-1} dv_g \leq v_g^{\frac{3-2^*}{2}} \left(\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)^{\frac{2^*-1}{2}}$$

On reporte cette inégalité dans (2.27), et en divisant par $\|u_\alpha\|_2^2$,

$$R_2(\delta,\alpha) \leq C\left(\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)^{\frac{2^*}{2}-1}$$

Enfin, puisque $\frac{2^*}{2} - 1 \geq 0$ et que par hypothèse $\|u_\alpha\|_2$ tend vers 0, on a bien montré que (2.26) est vraie pour $n \geq 6$.
Lorsque $n = 5$, $2^* = 10/3$, et donc $2 < 2^* - 1$. On ne peut plus appliquer l'inégalité de Hölder de la même manière. Cependant,

$$\begin{aligned}
\int_M u_\alpha^{7/3} dv_g &= \int_M u_\alpha^{3/2}\, u_\alpha^{5/6} dv_g \\
&\leq \|u_\alpha^{3/2}\|_{4/3}\, \|u_\alpha^{5/6}\|_4 \\
&\leq \left(\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)^{3/4} \left(\int_M u_\alpha^{10/3} dvg\right)^{1/4}
\end{aligned}$$

Donc (2.27) donne

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha^2 dv_g &\leq C\left(\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)^{5/4} \left(\int_M u_\alpha^{2^*} dvg\right)^{1/4} \\
&\leq C\left(\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)^{5/4}
\end{aligned}$$

D'où

$$R_2(\delta,\alpha) \le C\left(\int_M {u_\alpha}^2 dv_g\right)^{1/4}$$

Et à nouveau, la convergence vers 0 en norme L^2 de u_α prouve que (2.26) est vraie. Si on procède de façon analogue dans le cas $n = 4$ pour lequel $2^* = 4$, on montre seulement que $R_2(\delta,\alpha) \le C$, ce qui ne permet pas de conclure. Une étude plus subtile de ce qui se passe au voisinage des points de concentration doit être faite, mais le résultat est encore vrai, voir Hebey [25].□

Pour l'équation de Sobolev Poincaré nous aurons besoin d'une estimée supplémentaire : celle sur la norme L^1. On introduit le quotient :

$$R_1(\delta,\alpha) = \frac{\int_{M\setminus Bx_0(\delta)} u_\alpha dv_g}{\int_M u_\alpha dv_g}.$$

La situation est alors un peu différente de celle de la concentration L^2 : en effet, la concentration en norme L^1 n'est vraie que lorsque $\alpha_0 = +\infty$, pour $\alpha_0 < +\infty$, on se contente de borner le rapport R_1. On obtient le résultat suivant :

Proposition 2.9 (**Concentration** L^1)**.** *Soit* (u_α) *une suite vérifiant* $(\mathcal{H}_{petite})$*, (2.17) et donc (2.16). Alors,* $\forall\delta > 0$,

$$R_1(\delta,\alpha) \le \frac{C}{\alpha} + o(1) \tag{2.28}$$

où $o(1) \to 0$ *quand* $\alpha \to \alpha_0 \in (0,+\infty]$.

Démonstration de la proposition 2.9

Soit $\eta \in C^\infty(M)$ telle que $\eta = 1$ sur $M\setminus B_{x_0}(\delta)$ et $\eta = 0$ sur $B_{x_0}(\delta/2)$. On prend $\varphi = \eta^2 u_\alpha$ dans $(E_{\alpha,f})$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_M f\eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g &= \int_M \eta^2 u_\alpha \Delta u_\alpha dv_g + \alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_M \eta^2 u_\alpha dv_g\\ &= 2\int_M \eta u_\alpha \nabla\eta\nabla u_\alpha dv_g + \int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g + \alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_M \eta^2 u_\alpha dv_g\end{aligned}$$

D'où comme $\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g \ge 0$

$$\alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_M \eta^2 u_\alpha dv_g \le C\int_M \eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g + 2\int_M \eta u_\alpha|\nabla\eta||\nabla u_\alpha| dv_g$$

Puis en divisant par $\alpha\left(\int_M u_\alpha \, dv_g\right)^2$,

$$\frac{\int_M \eta^2 u_\alpha dv_g}{\int_M u_\alpha dv_g} \le \frac{C}{\alpha}\frac{\int_M \eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} + \frac{C}{\alpha}\frac{\int_M \eta u_\alpha|\nabla\eta||\nabla u_\alpha| dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \tag{2.29}$$

D'après le procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser, on a d'une part :

$$\frac{\int_M \eta u_\alpha^{2^*} dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \le C\frac{\left(\sup_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha\right)^{2^*}}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \le C\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^{2^*-2}$$

et la norme L^1 de (u_α) tend vers 0, donc

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{\int_M \eta u_\alpha^{2^*} dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} = 0 \tag{2.30}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_M \eta u_\alpha |\nabla\eta||\nabla u_\alpha| dv_g &\leq C \sup_{M\setminus B_{x_0}(\delta)} u_\alpha \int_M \eta|\nabla u_\alpha| dv_g \\
&\leq C \int_M u_\alpha dv_g \sqrt{\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g}.
\end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, en partant de $(E_{\alpha,f})$ mais en éliminant le terme particulier de l'équation et non pas le terme en gradient, on arrive comme dans les calculs de la démonstration du lemme 2.1 à

$$\begin{aligned}
\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g &\leq C\int_M \eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g + 2\int_M \eta u_\alpha|\nabla\eta||\nabla u_\alpha| dv_g \\
&\leq C\int_M \eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g + C\int_M u_\alpha dv_g \sqrt{\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g} \\
\frac{\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} &\leq C\frac{\int_M \eta^2 u_\alpha^{2^*} dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} + C\sqrt{\frac{\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2}}.
\end{aligned}$$

Grâce à (2.30), il existe $C \geq 0$ tel que

$$\frac{\int_M \eta^2|\nabla u_\alpha|^2 dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \leq C,$$

et donc,

$$\frac{\int_M \eta u_\alpha|\nabla\eta||\nabla u_\alpha| dv_g}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \leq C. \tag{2.31}$$

En reportant (2.30) et (2.31) dans (2.29), on a bien montré (2.28).□

Chapitre 3

Etude asymptotique en énergie bornée : la décomposition H_1^2

L'objet de ce chapitre est de décrire le comportement asymptotique lorsque α tend vers $\alpha_0 < +\infty$ d'une suite (u_α) de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ dont l'énergie est bornée mais plus nécessairement minimale.
Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, lorsque l'énergie de (u_α) est bornée, (u_α) converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers $u_0 \in H_1^2(M)$ et les premières caractéristiques de cette convergence sont détaillées dans la proposition 2.1.
Nous montrons ici que la description peut-être affinée : la théorie H_1^2 telle que développée par Struwe [39] s'adapte à notre situation. Struwe montre qu'une suite de solutions "euclidiennes" de l'équation

$$\Delta_\xi u_\alpha = |u_\alpha|^{2^*-2} u_\alpha$$

qui est bornée dans $H_1^2(\Omega)$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, se décompose dans $H_1^2(\Omega)$ en somme d'une solution d'une équation limite $\Delta_\xi u = |u|^{2^*-2} u$ et d'un nombre fini de "bulles" obtenues à partir de solutions de l'équation euclidienne non perturbée $\Delta_\xi u = |u|^{2^*-2} u$. Le résultat s'étend au cas d'une variété riemannienne (M, g) pour des équations du type :

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = |u_\alpha|^{2^*-2} u_\alpha. \tag{3.1}$$

On renvoie par exemple à Druet-Hebey-Robert [13]. La généralisation à des équations d'ordre supérieur a été étudiée : Hebey-Robert [27] établissent la décomposition H_2^2 associée à des équations avec du bilaplacien et Saintier [35] la généralise au p-laplacien.

Nous montrons dans ce chapitre la validité de la décomposition H_1^2 pour une suite de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré :

$$\Delta_g u + \alpha \|u\|_1 \Sigma_\alpha = f u^{2^*-1}. \qquad (E_{\alpha,f})$$

Deux différences apparaissent par rapport aux études déjà faites .
D'une part, dans les résultats cités ci-dessus, la décomposition est obtenue dans le cas plus général de suites de Palais-Smale pour la fonctionnelle différentiable associée à l'équation étudiée. On rappelle la définition de suite de Palais-Smale : une suite (u_α) de fonctions de $H_1^2(M)$ est une suite de Palais-Smale pour une fonctionnelle différentiable F_α si $(F_\alpha(u_\alpha))$ est bornée indépendemment de α et si $DF_\alpha(u_\alpha)$ tend vers 0 dans $H_1^2(M)^{'}$ quand $\alpha \to \alpha_0$. Dans le cas de l'équation (3.1), la fonctionnelle associée est

$$F_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M \left(|\nabla u|^2 + h_\alpha u^2\right) dv_g - \frac{1}{2^*}\int_M |u|^{2^*} dv_g.$$

Une suite de solutions de (3.1) bornée dans $H_1^2(M)$ est de Palais-Smale car $DF_\alpha(u_\alpha) = 0$ et car si elle est bornée dans $H_1^2(M)$, alors $(F_\alpha(u_\alpha))$ est aussi bornée.
La fonctionnelle qui est associée à notre équation de Sobolev Poincaré $(E_{\alpha,f})$ est

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{\alpha}{2}\left(\int_M |u| dv_g\right)^2 - \frac{1}{2^*}\int_M f|u|^{2^*} dv_g.$$

Elle n'est pas différentiable à cause de la norme L^1 qui n'est différentiable dans aucune direction. La définition d'une suite de Palais-Smale pour J_α pose alors de sérieuses difficultés, c'est pourquoi nous nous intéressons à la question de la décomposition H_1^2 seulement pour des suites de solutions (faibles) de $(E_{\alpha,f})$.
D'autre part, la fonction f (non constante) du second membre de l'équation $(E_{\alpha,f})$ va intervenir dans la décomposition H_1^2 et demander des arguments particuliers; cependant le déroulement global ne sera pas modifié.

On définit maintenant la notion de "bulles" suivant la terminologie introduite dans Struwe [39]. Elles sont construites à partir de solutions (souvent explicitement connues) de l'équation euclidienne $\Delta_\xi u = |u|^{2^*-2}u$ par changement d'échelle, précisément :

Définition 3.1. *Soient $(x_\alpha)_{\alpha>0}$ une suite de points de M et $(\rho_\alpha)_{\alpha>0}$ une suite de réels strictements positifs convergeant vers 0. On appelle "bulle" la suite $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha>0}$ de fonctions de $C^\infty(M)$ définies par*

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in M, \qquad \mathcal{B}_\alpha(x) = \eta_{x_\alpha}(x)\, \rho_\alpha^{1-\frac{n}{2}}\, u\left(\rho_\alpha^{-1} exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right), \qquad (3.2)$$

où $\eta_{x_\alpha} \in C^\infty(M)$ vérifie $0 \le \eta_{x_\alpha} \le 1$, $\eta_{x_\alpha} = 1$ sur $B_{x_\alpha}(\delta/2)$ et $\eta_{x_\alpha} = 0$ sur $M \setminus B_{x_\alpha}(\delta)$, et où $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une solution non triviale sur $(\mathbb{R}^n, \xi)$ de l'équation

$$\Delta_\xi u = |u|^{2^*-2}u. \qquad (3.3)$$

Les x_α sont appelés "centres" de la bulle, et les ρ_α "poids" de la bulle.

Si on impose aux solutions de (3.3) d'être positives, alors d'après Caffarelli-Gidas-Spruck [9] et Obata [34], elles sont de la forme

$$u_{\lambda,a}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{|x-a|^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n}{2}-1},$$

avec $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Ce sont de plus des fonctions extrémales de l'inégalité euclidienne forte de Sobolev (c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles l'égalité est réalisée).
On appelle "bulle positive" la bulle définie à partir de la fonction particulière $u_{1,0}$ par la définition 3.1 ; elle est alors définie par l'expression :

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in M, \qquad \mathcal{B}_\alpha(x) = \eta_{x_\alpha}(x) \left(\frac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha^2 + \frac{d_g(x_\alpha,x)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n}{2}-1}. \tag{3.4}$$

Remarquons que pour une bulle positive $(\mathcal{B}_\alpha)$, telle que $\lim_{\alpha\to\alpha_0} x_\alpha = x_0$, on a

$$\mathcal{B}_\alpha \longrightarrow 0 \text{ dans } C^0_{loc}\left(M\backslash\{x_0\}\right). \tag{3.5}$$

3.1 Enoncé du théorème de décomposition

Soient $\alpha_0 \in]0, +\infty[$ et $f \in C^0(M)$ de maximum strictement positif. On étudie ici le comportement asymptotique quand $\alpha \to \alpha_0$ d'une suite (u_α) de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ dont l'énergie est bornée : cela généralise l'étude faite dans le chapitre 2 sur le phénomène de concentration en énergie minimale. On rappelle qu'une suite (u_α) de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée vérifie :

$$\forall \alpha > 0, \forall \varphi \in H_1^2(M), \quad \int_M \nabla u_\alpha \nabla \varphi \, dv_g + \alpha \|u_\alpha\|_1 \int_M \Sigma_\alpha \varphi \, dv_g = \int_M f u_\alpha^{2^*-1} \varphi \, dv_g$$

avec $u_\alpha \Sigma_\alpha = u_\alpha$ et qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \int_M f u_\alpha^{2^*} dv_g \leq C.$$

Notre théorème s'énonce comme suit :

Théorème 3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient $\alpha_0 > 0$, $f \in C^0(M)$ telle que $\sup_M f > 0$ et $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée. Alors il existe $u_0 \in \mathcal{S}_{\alpha_0,f} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ suites de points $(x_\alpha^i)_{i=1..k}$, convergeant chacune à sous suite près vers $x_0^i \in M$ et k suites de réels strictement positifs $(\rho_\alpha^i)_{i=1..k}$ tendant vers 0 qui définissent k bulles positives $(\mathcal{B}_\alpha^i)_{i=1...k}$ tels que, à extraction de sous-suites près :*

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^k f(x_0^i)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \mathcal{B}_\alpha^i + \mathcal{R}_\alpha,$$

où $\|\mathcal{R}_\alpha\|_{H_1^2} \longrightarrow 0$ quand $\alpha \to \alpha_0$ et où $\forall i \in [1,k]$, $f(x_0^i) > 0$. L'énergie se décompose de la même manière, à savoir

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \mathcal{E}(u_0) + K_n^{-n/2} \sum_{i=1}^{k} f(x_0^i)^{1-n/2} + \circ(1). \tag{3.6}$$

On a de plus l'estimée ponctuelle suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que, à extraction de sous-suite près, pour tout $x \in M$,

$$\left(\min_{i=1..k} d_g(x_\alpha^i, x)\right)^{\frac{n-2}{2}} |u_\alpha(x) - u_0(x)| \le C. \tag{3.7}$$

Avant de démontrer ce théorème, rappelons ce que nous savions déjà sur le comportement asymptotique d'une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée. Par la proposition 2.1, elle converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers u_0 qui, comme $\alpha_0 < +\infty$, est solution positive peut-être nulle de $(E_{\alpha_0,f})$ et on a les deux relations (2.1) et (2.2). On pose alors

$$\hat{u}_\alpha = u_\alpha - u_0,$$

la suite $(\hat{u}_\alpha)$ tend vers 0 faiblement dans $H_1^2(M)$, fortement dans L^1 et presque partout, mais on ne peut pas affirmer qu'elle est positive.
Le théorème 3.1 donne une description beaucoup plus précise de $(\hat{u}_\alpha)$: la décomposition H_1^2 assure que $(\hat{u}_\alpha)$ à laquelle on soustrait une somme de k bulles converge vers 0 en norme $H_1^2(M)$. D'autre part, ces k bulles sont définies à partir de k suites de centres qui, à sous suite près, convergent puisque M est compacte. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des limites des centres :

$$\mathcal{C} = \{\lim_{\alpha\to\alpha_0} x_\alpha^i / \ i = 1...k\} = \{x_0^1, ..., x_0^k\}.$$

Deux suites de centres peuvent converger vers le même point, donc $\mathcal{C}$ contient $p \in [1,k]$ éléments. La convergence presque partout de $(\hat{u}_\alpha)$ et la positivité des bulles impliquent que $\hat{u}_\alpha$ est positive au voisinage des points de $\mathcal{C}$.
On déduit du théorème 3.1 la proposition suivante :

Proposition 3.1. *: Soit (u_α) une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée. Dans la décomposition H_1^2 de (u_α), chaque suite (x_α^i) de centres d'une bulle converge, à extraction de sous-suite près, vers une limite notée x_0^i. L'ensemble $\mathcal{C} = \{x_0^1, ..., x_0^k\}$ est alors précisément l'ensemble des points de concentration de la suite $(\hat{u}_\alpha = u_\alpha - u_0)$.*

Remarque 10. *On montre en appendice A que si $f \in C^1(M)$, alors les points de concentration de la suite $(\hat{u}_\alpha)$ sont des points critiques de f.*

Démonstration de la proposition 3.1 :
Soit $x_0 \in \mathcal{C}$, il existe une bulle positive $\left(\mathcal{B}_\alpha^j\right)$ de centres (x_α^j) tels que $\lim_{\alpha\to\alpha_0} x_\alpha^j = x_0$ et $f(x_0) > 0$. Soit $\delta > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour α proche de α_0

$$B_{x_\alpha^j}(\rho) \subset B_{x_0}(\delta)$$

alors grâce à la décomposition H_1^2 :

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0}\int_{B_{x_0}(\delta)}\hat{u}_\alpha^{2^*}dv_g \quad\geq\quad f(x_0)^{-\frac{n}{2}}\limsup_{\alpha\to\alpha_0}\int_{B_{x_\alpha^j}(\rho)}\left(\mathcal{B}_\alpha^j\right)^{2^*}dv_g>0$$

x_0 est donc un point de concentration de $(\hat{u}_\alpha)$.
Soit maintenant $x\in M\backslash C$, alors il existe $\delta_x>0$ tel que $B_x(2\delta_x)\cap C=\emptyset$ et grâce à (3.5),

$$\begin{aligned}\int_{B_x(\delta_x)}\hat{u}_\alpha^{2^*}dv_g &= \int_{B_x(\delta_x)}\left(\sum_{i=1}^k f(x_0^i)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{B}_\alpha^i+\mathcal{R}_\alpha\right)^{2^*}dv_g\\ &\leq C\sum_{i=1}^k f(x_0^i)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\int_{B_x(\delta_x)}\left(\mathcal{B}_\alpha^i\right)^{2^*}dv_g+\circ(1)\\ &= \circ(1),\end{aligned}$$

et x n'est pas un point de concentration de $(\hat{u}_\alpha)$. La proposition est démontrée.□

La démonstration du théorème 3.1 suit le même schéma que celle de Struwe [39]. Dans Hebey [25] l'estimée ponctuelle (3.7) est montrée dans le cas d'une suite de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré particulière $(E_{\alpha,1})$ qui se concentre en énergie minimale.
Dans notre démonstration, nous obtenons tout d'abord dans la section 3.2 la décomposition H_1^2 avec des bulles de signe quelconque. La positivité est montrée dans la section 3.3, l'additivité des énergies en 3.4 et enfin l'estimée ponctuelle dans la section 3.5 qui clôt ce chapitre.

3.2 Décomposition H_1^2 pour des bulles de signe quelconque

On note J_α la fonctionnelle définie par : $\forall u\in H_1^2(M)$,

$$J_\alpha(u)=\frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2dv_g+\frac{\alpha}{2}\left(\int_M|u|dv_g\right)^2-\frac{1}{2^*}\int_M f|u|^{2^*}dv_g.$$

On rappelle que cette fonctionnelle n'est pas différentiable à cause du terme $\int_M|u|\,dv_g$: la notion de suite de Palais Smale ne sera pas utilisée pour J_α. Notons que si u_α est solution de $(E_{\alpha,f})$, en prenant $\varphi=u_\alpha$ dans la version faible de $(E_{\alpha,f})$, on obtient

$$J_\alpha(u_\alpha)=\frac{1}{n}\int_M f|u_\alpha|^{2^*}dv_g=\frac{1}{n}\mathcal{E}(u_\alpha).$$

On introduit la fonctionnelle $\hat{J}$ associée à l'équation non perturbée $\Delta_g u=fu^{2^*-1}$: $\forall u\in H_1^2(M)$,

$$\hat{J}(u)=\frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2dv_g-\frac{1}{2^*}\int_M f|u|^{2^*}dv_g.$$

Pour cette fonctionnelle, la notion de suite de Palais-Smale est bien définie.
On démontre dans cette section que la décomposition du théorème 3.1 est vraie avec des bulles de signe quelconque.

Première étape : $(\hat{u}_\alpha)$ est une suite de Palais-Smale pour $\hat{J}$.

Montrons tout d'abord la relation suivante :

$$\hat{J}(\hat{u}_\alpha) = J_\alpha(u_\alpha) - J_\alpha(u_0) + \circ(1). \tag{3.8}$$

Pour cela, on a

$$\begin{array}{rcl} J_\alpha(u_\alpha) & = & J_\alpha(\hat{u}_\alpha + u_0) \\ & = & \frac{1}{2}\int_M |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M |\nabla u_0|^2 dv_g \\ + & & \int_M \nabla\hat{u}_\alpha \nabla u_0 dv_g + \frac{\alpha}{2}\|u_\alpha\|_1^2 - \frac{1}{2^*}\int_M f|\hat{u}_\alpha + u_0|^{2^*} dv_g \end{array}$$

De plus comme $\hat{u}_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^1(M)$ et $L^2(M)$,

$$\alpha\|u_\alpha\|_1^2 = \alpha\|u_0\|_1^2 + \circ(1) \quad \text{et} \quad \int_M \nabla\hat{u}_\alpha \nabla u_0 dv_g = \circ(1).$$

et donc

$$J_\alpha(u_\alpha) = J_\alpha(u_0) + \hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \frac{1}{2^*}\int_M \Phi_\alpha dv_g + \circ(1)$$

où

$$\Phi_\alpha = f\left(|\hat{u}_\alpha + u_0|^{2^*} - |\hat{u}_\alpha|^{2^*} - |u_0|^{2^*}\right) = f\left(u_\alpha^{2^*} - u_0^{2^*} - |u_\alpha - u_0|\right)$$

or d'après (2.2), $\int_M \Phi_\alpha dv_g = \circ(1)$, ainsi (3.8) est vraie.

Montrons maintenant que $(\hat{u}_\alpha)$ est une suite de Palais-Smale pour $\hat{J}$. Tout d'abord, puisque (u_α) est une suite de solutions de (E_α) d'énergie bornée,

$$J_\alpha(u_\alpha) = \frac{1}{n}\int_M f|u_\alpha|^{2^*} dv_g \leq C.$$

Par (3.8), on obtient donc que $(\hat{J}(\hat{u}_\alpha))$ est une suite bornée, ce qui est la première condition pour que $(\hat{u}_\alpha)$ soit une suite de Palais Smale pour $\hat{J}$. Il existe donc une sous-suite telle que $(\hat{J}(\hat{u}_\alpha))$ converge vers une limite finie que l'on note

$$\beta := \lim_{\alpha\to\alpha_0} \hat{J}(\hat{u}_\alpha) < +\infty.$$

D'autre part, pour $\varphi \in H_1^2(M)$:

$$D\hat{J}(\hat{u}_\alpha).\varphi = \int_M \nabla\hat{u}_\alpha \nabla\varphi\, dv_g - \int_M f|\hat{u}_\alpha|^{2^*-2}\hat{u}_\alpha \varphi\, dv_g,$$

puis, en écrivant que $u_\alpha = \hat{u}_\alpha + u_0$ est solution faible de $(E_{\alpha,f})$ et avec les limites déjà vues, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \int_M \nabla\hat{u}_\alpha\nabla\varphi\, dv_g & - & \int_M f|\hat{u}_\alpha|^{2^*-2}\hat{u}_\alpha\varphi\, dv_g \\ +\int_M \nabla u_0\nabla\varphi\, dv_g & - & \int_M f u_0^{2^*-1}\varphi\, dv_g - \alpha_0\|u_0\|_1 \int_M \Sigma_0\varphi\, dv_g \\ & + & \int_M \psi_\alpha\varphi\, dv_g \ = \ \circ(\|\varphi\|_{H_1^2}) \end{array}$$

où
$$\psi_\alpha = f\left(|\hat{u}_\alpha|^{2^*-2}\hat{u}_\alpha + u_0^{2^*-1} - (\hat{u}_\alpha + u_0)^{2^*-1}\right).$$
Dans cette égalité, la première ligne est l'expression de $D\hat{J}(\hat{u}_\alpha).\varphi$ et la seconde est nulle car u_0 est solution (peut-être nulle) de $(E_{\alpha_0,f})$. De plus
$$\begin{aligned}\int_M |\psi_\alpha\varphi|\,dv_g &\leq C\int_M |\hat{u}_\alpha|^{2^*-2}|u_0||\varphi|\,dvg + C\int_M |u_0|^{2^*-2}|\hat{u}_\alpha||\varphi|\,dvg\\ &\leq C\|\varphi\|_{2^*}\left[\left\||\hat{u}_\alpha|^{2^*-2}|u_0|\right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} + \left\||u_0|^{2^*-2}|\hat{u}_\alpha|\right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\right]\\ &\leq C\|\varphi\|_{H_1^2}\left[\|\hat{u}_\alpha\|^{2^*-2}_{\frac{(2^*-2)2^*}{2^*-1}} + \|\hat{u}_\alpha\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\right]\end{aligned}$$
Les deux normes entre crochets tendent vers 0 car $\frac{(2^*-2)2^*}{2^*-1} < 2^*$ et $\frac{2^*}{2^*-1} < 2^*$, d'où
$$\int_M \psi_\alpha\varphi\,dv_g = \circ\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right),$$
ainsi $\forall\varphi \in H_1^2(M)$,
$$D\hat{J}(\hat{u}_\alpha).\varphi = \circ(\|\varphi\|_{H_1^2}), \tag{3.9}$$
et $(\hat{u}_\alpha)$ est une suite de Palais-Smale pour $\hat{J}$, ce qui achève la preuve de la première étape.□

Dans la suite, on note
$$\beta_{x_0} := \frac{1}{n\ (K_n\ f(x_0)^{2/2^*})^{n/2}} \quad \text{et} \quad \beta^* := \frac{1}{n\ (K_n(\sup f)^{2/2^*})^{n/2}}.$$

Deuxième étape : soit (v_α) une suite de Palais Smale pour $\hat{J}$ qui tend faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Si $\beta := \lim_{\alpha\to\alpha_0}\hat{J}(v_\alpha) < \beta^*$, alors la convergence de (v_α) vers 0 est forte dans $H_1^2(M)$.

On sait déjà par la convergence faible de (v_α) vers 0 dans $H_1^2(M)$ que $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\|v_\alpha\|_2 = 0$. Il reste donc à montrer que $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\|\nabla v_\alpha\|_2 = 0$. Comme (v_α) est une suite de Palais Smale pour $\hat{J}$, on a
$$\int_M |\nabla v_\alpha|^2 dv_g = \int_M f|v_\alpha|^{2^*}dv_g + \circ(1),$$
d'où
$$\begin{aligned}\hat{J}(v_\alpha) &= \frac{1}{n}\int_M f|v_\alpha|^{2^*}dv_g + \circ(1) = \frac{1}{n}\int_M |\nabla v_\alpha|^2 dv_g + \circ(1)\\ &= \beta + \circ(1),\end{aligned}$$
et nécessairement $\beta \geq 0$. Alors par l'inégalité de Sobolev optimale (I_S^{opt}),
$$\left(n\hat{J}(v_\alpha)\right)^{2/2^*} \leq (\sup_M f)^{2/2^*}K_n\left(n\hat{J}(v_\alpha) + B_0(M,g)\|v_\alpha\|_2^2\right) + \circ(1).$$

Par passage à la limite sur α,

$$(n\beta)^{1-\frac{2}{n}} \leq (\sup f)^{2/2^*} K_n\, n\beta = (n\beta^*)^{-2/n}\ n\beta.$$

Si $\beta > 0$, alors $\beta \geq \beta^*$, ce qui est impossible car on a supposé que $\beta < \beta^*$, donc $\beta = 0$. Alors, $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \|\nabla v_\alpha\|_2^2 = 0$, et finalement, (v_α) tend fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$, la deuxième étape est démontrée.$\square$

L'étape suivante est la partie délicate de la démonstration : on y construit explicitement une bulle.

Troisième étape : soit (v_α) une suite de Palais Smale pour $\hat{J}$ qui tend faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ mais pas fortement. Il existe alors une bulle $(\mathcal{B}_\alpha)$ de centres (x_α) et de poids (ρ_α) telle que, à extraction de sous-suites près, la nouvelle suite $w_\alpha = v_\alpha - f(x_0)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\ \mathcal{B}_\alpha$ vérifie :
i) **(w_α) est une suite de Palais-Smale pour $\hat{J}$;**
ii) **(w_α) tend faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$;**
iii) **$\hat{J}(w_\alpha) = \hat{J}(v_\alpha) - \hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) + \circ(1)$ où on note $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha = f(x_0)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\ \mathcal{B}_\alpha$.**

Pour démontrer cette proposition, on commence par construire la bulle : il s'agit de trouver les centres (x_α) et les poids (ρ_α) qui lui sont associés. La suite (v_α) tend vers 0 faiblement dans $H_1^2(M)$ donc fortement dans L^2. Il s'en suit que $\|v_\alpha\|_{H_1^2} = \|\nabla v_\alpha\|_2 + \circ(1)$. Or (v_α) est une suite de Palais Smale pour $\hat{J}$, donc $(\hat{J}(v_\alpha))$ converge vers une limite finie notée β, et d'après la deuxième étape on a $\beta \geq \beta^*$ car la convergence n'est pas forte dans $H_1^2(M)$. La condition de Palais Smale sur la différentielle de $\hat{J}$ donne alors

$$\int_M |\nabla v_\alpha|^2\ dv_g = n\beta + \circ(1).$$

Ainsi, pour $t_0 > 0$ "petit", il existe $x_0 \in M$ et $\lambda_0 > 0$ tels que

$$\int_{B_{x_0}(t_0)} |\nabla v_\alpha|^2\ dv_g \geq \lambda_0.$$

On note alors

$$\mathfrak{E}_\alpha(t) = \max_{x\in M} \int_{B_x(t)} |\nabla v_\alpha|^2\ dv_g.$$

Par continuité de la fonction $t \mapsto \mathfrak{E}_\alpha(t)$, $\forall\lambda \in]0,\lambda_0[,\ \exists t_\alpha \in]0,t_0[,\ \exists x_\alpha \in M$,

$$\lambda = \mathfrak{E}_\alpha(t_\alpha) = \int_{B_{x_\alpha}(t_\alpha)} |\nabla v_\alpha|^2\ dv_g.$$

Le paramètre $\lambda > 0$ sera fixé "petit" au cours de la démonstration. $B_{x_\alpha}(t_\alpha)$ est donc une boule qui maximise pour un rayon fixé t_α la norme L^2 du gradient de v_α. La suite (x_α) donne les centres de la bulle, les poids de la bulle sont proportionnels à t_α définis par

$$\rho_\alpha = \frac{t_\alpha}{C_0 r},$$

où $r \in (0, r_0)$ "petit" sera fixé dans la suite de la démonstration et où les constantes $C_0 \in (1,2)$ et $r_0 < i_g/2$ sont définies par la proporiété :
$\forall x \in M, \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \forall z \in \mathbb{R}^n,$

$$|y| \leq r_0 \text{ et } |z| \leq r_0 \quad \Longrightarrow \quad d_g\left(exp_x(y), exp_x(z)\right) \leq C_0|y-z|. \tag{3.10}$$

Cela implique les deux inclusions suivantes : pour $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $|z| + r < r_0\rho_\alpha^{-1}$,

$$\begin{aligned} \exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha B_z(r)) &\subset B_{\exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha z)}(C_0 r \rho_\alpha) \\ \exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha B_0(C_0 r)) &= B_{x_\alpha}(C_0 r \rho_\alpha) \end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'échelle de centre x_α et de coefficient de dilatation ρ_α^{-1} : pour $x \in B_0(\rho_\alpha^{-1} i_g)$, on pose

$$\begin{aligned} \hat{v}_\alpha(x) &= \rho_\alpha^{n/2-1} v_\alpha(exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha x)) \\ \hat{g}_\alpha(x) &= \frac{1}{\rho_\alpha^2}\left(\exp_{x_\alpha} \circ \mathcal{D}_{\rho_\alpha}\right)^* g(x) \\ \hat{f}_\alpha(x) &= f\left(exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha x)\right) \end{aligned}$$

On introduit la fonction cut off $\hat{\eta}_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par : pour $\delta < i_g$, $\hat{\eta}_\alpha = 1$ sur $B_0\left(\frac{\delta}{4\rho_\alpha}\right)$, $\hat{\eta}_\alpha = 0$ sur $\mathbb{R}^n \backslash B_0\left(\frac{3\delta}{4\rho_\alpha}\right)$ et $0 \leq \hat{\eta}_\alpha \leq 1$.
Notre démonstration suit alors les mêmes étapes que celles présentées dans Druet-Hebey-Robert dans [13], la présence de la fonction f non constante ne modifie pas les raisonnements. On borne d'abord $(\hat{\eta}_\alpha \hat{v}_\alpha)$ dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ qui est le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions régulières à support compact dans $\mathbb{R}^n$, pour la norme $||u|| = ||\nabla u||_2$. Il existe alors $v \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ telle que à extraction de sous-suites près :

$$\hat{\eta}_\alpha \hat{v}_\alpha \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } D_1^2(\mathbb{R}^n).$$

La partie délicate de la démonstration consiste alors à montrer que la convergence de $\hat{\eta}_\alpha \hat{v}_\alpha$ vers v est forte dans $H_1^2(B_0(C_0 r))$ pour $r > 0$ et $\lambda > 0$ assez petits. Il en découle ensuite facilement que

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \rho_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad v \not\equiv 0, \tag{3.11}$$

puis finalement que

$$\forall R > 0, \qquad \hat{v}_\alpha \longrightarrow v \text{ dans } H_1^2(B_0(R)) \tag{3.12}$$

avec $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ solution de l'équation euclidienne $\Delta_\xi v = f(x_0)|v|^{2^*-2}v$ et de plus

$$f(x_0) > 0.$$

On définit alors $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ en transportant v sur la variété par un changement d'échelle :

$$\forall x \in M, \quad \tilde{\mathcal{B}}_\alpha(x) = \eta_{x_\alpha}(x) {\rho_\alpha}^{1-\frac{n}{2}} v\left(\rho_\alpha^{-1} exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right).$$

Or la fonction $u = f(x_0)^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} v$ est alors solution de $\Delta_\xi u = |u|^{2^*-2}u$ et donc

$$\tilde{\mathcal{B}}_\alpha = f(x_0)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\ \mathcal{B}_\alpha,$$

où $\mathcal{B}_\alpha$ est définie par (3.2). On pose alors $w_\alpha = v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ et il reste à prouver que w_α vérifie les trois assertions (i), (ii) et (iii).
Pour (ii), sachant que $(\hat{u}_\alpha)$ tend vers 0 faiblement dans $H_1^2(M)$, il suffit de montrer que $(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha)$ tend faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Soit donc $\varphi \in C^\infty(M)$, $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ étant nulle en dehors de $B_{x_\alpha}(\delta)$, on a pour $R > 0$ fixé et pour α proche de α_0 :

$$\int_M \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g = \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g$$

Tout d'abord, en passant de la variété à $\mathbb{R}^n$ grâce à l'application $\exp_{x_\alpha} : \mathbb{R}^n \to M$,

$$\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g = \rho_\alpha^{1-\frac{n}{2}} \int_{B_0(R\rho_\alpha)} \varphi(exp_{x_\alpha}(x))\, \eta_{x_\alpha}(exp_{x_\alpha}(x))\, v\left(\rho_\alpha^{-1} x\right) \, dv_{g_\alpha}$$

où $g_\alpha = exp_{x_\alpha}^*(g)$. Or il existe $C > 0$ tel que $dv_{g_\alpha} \le C dx$, d'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi dv_g \right| &\le C \|\varphi\|_\infty \rho_\alpha^{1-\frac{n}{2}} \int_{B_0(R\rho_\alpha)} \left| v\left(\rho_\alpha^{-1} x\right) \right| \, dx \\
&\le C \rho_\alpha^{1+\frac{n}{2}} \int_{B_0(R)} |v(x)| \, dx = \circ(1)
\end{aligned}$$

car $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \rho_\alpha = 0$. Ensuite, de la même manière

$$\left| \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g \right| \le C \|\varphi\|_\infty \rho_\alpha^{1+\frac{n}{2}} \int_{B_0(\delta\rho_\alpha^{-1})\setminus B_0(R)} |v(x)| \, dx = \circ(1)$$

On a donc montré que pour $\varphi \in C^\infty(M)$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_M \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g = 0.$$

Par densité le résultat est vrai pour $\varphi \in H_1^2(M)$.
Des arguments similaires permettent de montrer que pour $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_M \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi dv_g = 0,$$

et (ii) est ainsi démontrée.
Pour la preuve de (i), montrons dans un premier temps que $D\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) \to 0$ dans $H_1^2(M)'$, c'est-à-dire que $\forall \varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta)} \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi \, dv_g - \int_{B_{x_\alpha}(\delta)} f |\tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^{2^*-2} \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \varphi \, dv_g = \circ(\|\varphi\|_{H_1^2}).$$

On écrit

$$\begin{aligned}
\int_{B_{x_\alpha}(\delta)} \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi \, dv_g &= \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi \, dv_g \\
\text{D'où } \left| \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla \varphi \, dv_g \right| &\le \left(\int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla \varphi|^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|\varphi\|_{H_1^2} \left(\int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla \tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^2 \, dv_g \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Alors
$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla\varphi \, dv_g = O(\|\varphi\|_{H_1^2})\, \varepsilon_R$$
avec $\varepsilon_R \to 0$ quand $R \to +\infty$. De plus pour α proche de α_0,
$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla\varphi dv_g &= \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla\left(\eta_{x_\alpha}(x)\rho_\alpha{}^{1-\frac{n}{2}} v\left(\frac{1}{\rho_\alpha} exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)\right)\nabla\varphi(x)dv_g(x)\\ &= \int_{B_0(R)} \nabla v \nabla\overline{\varphi}_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha}\end{aligned}$$
La dernière ligne est obtenue par un changement d'échelle en posant pour $y \in B_0(R)$:
$\overline{\varphi}_\alpha(y) = \rho_\alpha{}^{\frac{n}{2}-1}\eta_{x_\alpha}(exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha y))\, \varphi(exp_{x_\alpha}(\rho_\alpha y))$.
Puisque $\tilde{g}_\alpha \to \xi$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et que l'on a
$$\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla\varphi|_g^2 \, dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla\overline{\varphi}_\alpha|^2_{g_\alpha} \, dv_{\tilde{g}_\alpha},$$
il vient
$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} \nabla\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla\varphi \, dv_g &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla\overline{\varphi}_\alpha \, dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} \nabla v\nabla\overline{\varphi}_\alpha \, dx + \circ\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right)\\ \text{et } \left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} \nabla v \nabla\overline{\varphi}_\alpha \, dx\right| &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} |\nabla v|^2 \, dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} |\nabla\overline{\varphi}_\alpha|^2 \, dx}\\ &= O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) \varepsilon_R\end{aligned}$$
Ainsi
$$\int_M \nabla\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \nabla\varphi \, dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla\overline{\varphi}_\alpha \, dx + \circ\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right)\varepsilon_R. \tag{3.13}$$
De la même manière, on montre que
$$\int_M f|\tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^{2^*-2}\tilde{\mathcal{B}}_\alpha\varphi \, dv_g = f(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*-2} v\, \overline{\varphi}_\alpha \, dx + \circ\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right)\varepsilon_R \tag{3.14}$$
Or, v est solution de $\Delta_\xi v = f(x_0)|v|^{2^*-2}v$, et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient,
$$D\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha).\varphi = \circ(\|\varphi\|_{H_1^2}).$$
Maintenant,
$$\begin{aligned}D\hat{J}(w_\alpha).\varphi &= \int_M \nabla(v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha)\nabla\varphi dv_g - \int_M f|v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^{2^*-2}(v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha)\varphi dv_g\\ &= D\hat{J}(v_\alpha).\varphi - D\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha).\varphi - \int_M \phi_\alpha\varphi dv_g\end{aligned}$$
avec
$$\phi_\alpha = f\left(|w_\alpha|^{2^*-2}w_\alpha - |v_\alpha|^{2^*-2}v_\alpha + |\mathcal{B}_\alpha|^{2^*-2}\mathcal{B}_\alpha\right)$$

Un raisonnement semblable à celui fait à la première étape donne

$$\int_M \phi_\alpha \varphi \, dv_g = \circ(\|\varphi\|_{H_1^2})$$

Ainsi $D\hat{J}(w_\alpha) \to 0$ dans le dual $H_1^2(M)'$ et (i) est prouvée.
Enfin, pour (iii) on calcule,

$$\hat{J}(w_\alpha) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_M \left|\nabla(v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha)\right|^2 dv_g - \frac{1}{2^*}\int_M f\left|v_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha\right|^{2^*} dv_g$$

Pour le terme avec les gradients, comme $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ est nulle en dehors de $B_{x_\alpha}(\delta)$, pour α proche de α_0 , on a

$$\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_{M\setminus B_{x_\alpha}(\delta)} |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla w_\alpha|^2 \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g$$

Or, par changement d'échelle de centre x_α et de coefficient ρ_α,

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g \quad &= \quad \int_{B_0(R)} |\nabla(\hat{v}_\alpha - v)|^2 dv_{\hat{g}_\alpha} \\ &\leq \quad \|\hat{v}_\alpha - v\|_{H_1^2(B_0(R))} \\ &= \quad \circ(1) \qquad \text{d'après (3.12).}\end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0} \lim_{R\to\infty} \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla\tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^2 \, dv_g = 0,$$

on a

$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla w_\alpha|^2 \, dv_g = \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g + \varepsilon_R(\alpha)$$

avec $\limsup_{\alpha\to\alpha_0} \lim_{R\to\infty} \ \varepsilon_R(\alpha) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g \quad &= \quad \int_{M\setminus B_{x_\alpha}(\delta)} |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(\delta)\setminus B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g + \circ(1) + \varepsilon_R(\alpha) \\ &= \quad \int_M |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g - \int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla v_\alpha|^2 \, dv_g + \circ(1) + \varepsilon_R(\alpha)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(R\rho_\alpha)} |\nabla_g v_\alpha|^2 \, dv_g \quad &= \quad \int_{B_0(R)} |\nabla_{\hat{g}_\alpha} \hat{v}_\alpha|^2 \, dv_{\hat{g}_\alpha} \\ &= \quad \int_{B_0(R)} |\nabla_\xi \hat{v}_\alpha|^2 \, dx + \circ(1) \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi v|^2 dx + \varepsilon_R + \circ(1),\end{aligned}$$

la dernière ligne étant une conséquence de (3.12). On a donc montré que

$$\int_M |\nabla_g w_\alpha|^2\, dv_g = \int_M |\nabla_g v_\alpha|^2\, dv_g - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi v|^2 dx + \varepsilon_R + \circ(1) \tag{3.15}$$

Et un raisonnement similaire donne pour l'autre terme

$$\int_M f|w_\alpha|^{2^*}\, dv_g = \int_M f|v_\alpha|^{2^*}\, dv_g - f(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*}\, dx + \varepsilon_R + \circ(1) \tag{3.16}$$

Or grâce au changement d'échelle centré en x_α et de coefficient ρ_α :

$$\begin{aligned}
\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) &= \frac{1}{2}\int_{B_{x_\alpha}(\delta)} |\nabla_g \tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^2 dv_g - \frac{1}{2^*}\int_{B_{x_\alpha}(\delta)} f|\tilde{\mathcal{B}}_\alpha|^{2^*} dv_g \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_0(\delta\rho_\alpha^{-1})} |\nabla_{\hat{g}_\alpha} v|^2 dv_{\hat{g}_\alpha} - \frac{1}{2^*}\int_{B_0(\delta\rho_\alpha^{-1})} \hat{f}_\alpha |v|^{2^*} dv_{\hat{g}_\alpha}
\end{aligned}$$

d'où grâce à la continuité de f, au théorème de convergence dominée

$$\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi v|^2 dx - \frac{f(x_0)}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx + \circ(1) \tag{3.17}$$

Ainsi, (3.15), (3.16) et (3.17) donnent, en faisant tendre R vers l'infini,

$$\hat{J}(w_\alpha) = \hat{J}(v_\alpha) - \hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) + \circ(1),$$

donc (iii) est vraie, ce qui achève la troisième étape.□

Quatrième étape : $\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) \geq \beta_{x_0}$ et si $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ est positive, alors il y a égalité.

On rappelle que β_{x_0} est défini en même temps que β^*, juste avant la deuxième étape. On sait que v vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi v|^2 dx = f(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx,$$

ce qui donne avec (3.17)

$$\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) = \frac{f(x_0)}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx + \circ(1).$$

Or d'après l'inégalité de Sobolev euclidienne

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq K_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi v|^2 dx, \tag{3.18}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx \geq \frac{1}{(K_n\; f(x_0))^{n/2}},$$

et

$$\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) \geq \beta_{x_0} + \circ(1).$$

Si de plus la bulle est positive, c'est-à-dire si v est positive, alors on sait que (3.18) est une égalité, et donc $\hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha) = \beta_{x_0} + \circ(1)$. □

Cinquième étape : preuve de la décomposition.

Soit (u_α) une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ d'énergie bornée. La suite de Palais-Smale $(\hat{u}_\alpha)$ obtenue à la première étape tend vers 0 faiblement dans $H_1^2(M)$.
Si elle tend aussi fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$ alors le théorème est prouvé avec $k = 0$, il n'y a pas de bulle.
Si elle ne tend pas fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$, alors on applique la deuxième étape avec $v_\alpha = \hat{u}_\alpha$: il existe une bulle, notée $(\mathcal{B}_\alpha^1)$ de centres (x_α^1) convergeant vers x_0^1 telle que $u_\alpha^1 = \hat{u}_\alpha - f(x_0^1)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\mathcal{B}_\alpha^1 = \hat{u}_\alpha - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha^1$ est une suite de Palais-Smale pour $\hat{J}$ tendant faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et vérifiant grâce à *iii*)

$$\begin{aligned} \hat{J}(\hat{u}_\alpha^1) &= \hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \hat{J}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha^1) + \circ(1) \\ &\leq \hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \beta_{x_0^1} + \circ(1) \end{aligned}$$

Si $\hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \beta_{x_0^1} < \beta^*$, alors $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \hat{J}(\hat{u}_\alpha^1) < \beta^*$ et la deuxième étape montre que $(\hat{u}_\alpha^1)$ tend fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Le théorème est prouvé avec $k = 1$, puisque $\|u_\alpha - u_0 - \tilde{\mathcal{B}}_\alpha^1\|_{H_1^2} \to 0$. Sinon on recommence le processus .
A la $m$ième étape, on obtient donc une suite $(\hat{u}_\alpha^m)$ de Palais Smale pour $\hat{J}$, tendant vers 0 faiblement dans H_1^2 telle que $\hat{u}_\alpha^m = \hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^m \tilde{\mathcal{B}}_\alpha^i$ et vérifiant

$$\begin{aligned} 0 \leq \hat{J}(\hat{u}_\alpha^m) &\leq \hat{J}(\hat{u}_\alpha^{m-1}) - \beta_{x_0^m} + \circ(1) \\ &\leq \hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \sum_{i=1}^m \beta_{x_0^i} + \circ(1) \end{aligned}$$

La suite $(\hat{J}(\hat{u}_\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive. Si le processus est infini, alors nécessairement, $\lim_{i\to+\infty} \beta_{x_0^i} = 0$, ce qui implique par définition de $\beta_{x_0^i}$ que $\lim_{i\to+\infty} f(x_0^i) = +\infty$. C'est impossible comme f est continue et que M est compacte. Le processus est donc fini. Cependant, il peut être effectué tant que $\hat{J}(\hat{u}_\alpha^m) - \sum_{i=1}^m \beta_{x_0^i} \geq \beta^*$. Il existe une étape N pour laquelle $\hat{J}(\hat{u}_\alpha) - \sum_{i=1}^N \beta_{x_0^i} < \beta^*$ et alors $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \hat{J}(\hat{u}_\alpha^N) < \beta^*$ et d'après la deuxième étape, la convergence de $(\hat{u}_\alpha^N)$ vers 0 est forte dans $H_1^2(M)$. La décomposition est prouvée avec $k = N$.□

3.3 Positivité des bulles

Tenons maintenant compte du fait que les solutions u_α sont choisies positives et montrons le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Si la suite (u_α) est formée de solutions de $(E_{\alpha,f})$ positives, alors les k bulles $(\mathcal{B}_\alpha^i)$ pour $i \in [1,k]$ obtenues dans la décomposition H_1^2 proviennent de k solutions positives de (3.3), notées u^i pour $i \in [1,k]$, et sont donc des bulles positives definies par (3.4).*

Démonstration du lemme 3.1

On montre tout d'abord que pour tout entier $N \in [1,k]$ et pour tout entier $s \in [0, N-1]$, il existe $p_s \in \mathbb{N}$ suites de points (y_α^j) de M et p_s suites (λ_α^j) de réels > 0 , telles qu'on ait les trois conditions suivantes : $\forall j \leq p_s$,

$$\frac{d_g(x_\alpha^N, y_\alpha^j)}{\rho_\alpha^N} \leq C \tag{3.19}$$

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N} = 0 \tag{3.20}$$

et $\forall R > 0, \forall R' > 0$,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N) \setminus \cup_{j=1}^{ps} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left| \hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{s} u_\alpha^i - u_\alpha^N \right|^{2^*} dv_g = \circ(1) + \epsilon(R'), \tag{3.21}$$

avec $\epsilon(R') \longrightarrow 0$ quand $R' \to +\infty$ et où u_α^i est définie par :

$$u_\alpha^i(x) = (\rho_\alpha^i)^{1-\frac{n}{2}} u^i \left(\frac{1}{\rho_\alpha^i} \exp_{x_\alpha^i}^{-1}(x) \right),$$

Dans cette expression u^i est une solution de l'équation euclidienne $\Delta_\xi u = f(x_0^i)|u|^{2^*-2}u$ définissant la bulle $\mathcal{B}_\alpha^i$.

Dans cette démonstration, on utilise plusieurs fois le changement d'échelle centré en x_α^N et de coefficient de dilatation $\left(\rho_\alpha^N\right)^{-1}$. On en précise les notations qui seront utilisées dans toute la démonstration : $\forall x \in B_0(\delta)$ où $0 < \delta \leq i_g/2$:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{\alpha,N}(x) &= (\rho_\alpha^N)^{\frac{n}{2}-1} \hat{u}_\alpha \left(\exp_{x_\alpha^N}(\rho_\alpha^N x) \right) \\
\hat{g}_{\alpha,N}(x) &= \frac{1}{\left(\rho_\alpha^N\right)^2} \left(\exp_{x_\alpha^N} \circ \mathcal{D}_{\rho_\alpha^N} \right)^* g(x)
\end{aligned}$$

Soit $N \in [1,k]$ fixé, on montre l'affirmation par récurrence descendante sur $s \in [0, N-1]$. Soit $R > 0$ fixé. Pour l'initialisation de la récurrence, on commence par écrire en utilisant les formules de changement d'échelle et le fait que $\hat{g}_{\alpha,N} \to \xi$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (car $\rho_\alpha^N \to 0$),

$$\begin{aligned}
\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)} \left| \hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{N-1} u_\alpha^i - u_\alpha^N \right|^{2^*} dv_g &= \int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)} \left| \hat{u}_\alpha - u_\alpha^N \right|^{2^*} dv_g + \circ(1) \\
&= \int_{B_0(R)} \left| \hat{v}_{\alpha,N} - u^N \right|^{2^*} dx + \circ(1)
\end{aligned}$$

d'où grâce à (3.12)

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)} \left| \hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{N-1} u_\alpha^i - u_\alpha^N \right|^{2^*} dv_g = \circ(1)$$

Cela prouve la proposition de récurrence pour $s = N-1$ avec $p_s = 0$.
Montrons maintenant l'hérédité : soit $s \in [0, N-1]$ pour lequel il existe p_s suites de points (y_α^j) et p_s suites de réels strictement positifs (λ_α^j) telles que (3.19), (3.20) et (3.21) soient vraies. On veut trouver p_{s-1} suites de points (y_α^j) et p_{s-1} suites de réels stritement positifs (λ_α^j) vérifiant toutes (3.19) et (3.20) et telles que

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_{s-1}} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|\hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{s-1} u_\alpha^i - u_\alpha^N\right|^{2^*} dv_g = \circ(1) + \epsilon(R'). \tag{3.22}$$

On veut donc montrer que (3.21) reste vraie si on enlève à $\hat{u}_\alpha$ seulement $(s-1)$ bulles non localisées, quitte à intégrer sur un domaine plus petit en enlevant une boule supplémentaire au domaine d'intégration (ce qui ne sera pas toujours nécessaire). Trois cas de figures peuvent se produire.
Premier cas : $\lim_{\alpha\to\alpha_0} d_g(x_\alpha^s, x_\alpha^N) \neq 0$.
Les centres des bulles (x_α^s) et (x_α^N) ne tendent alors pas vers la même limite quand $\alpha \to \alpha_0$. Alors, à extraction de sous-suite près, pour α proche de α_0,

$$\forall \tilde{R} > 0, \quad B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N) \cap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s) = \emptyset.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_s} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|u_\alpha^s\right|^{2^*} dv_g &\leq \int_{M\setminus B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s)} \left|u_\alpha^s\right|^{2^*} dv_g \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(\tilde{R})} |u^s|^{2^*} dx + \circ(1)\end{aligned}$$

Cela donne, puisque $\tilde{R}$ est arbitraire et que $u^s \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_s} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|u_\alpha^s\right|^{2^*} dv_g = \circ(1).$$

D'où, grâce à l'hypothèse de récurrence (3.21),

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_s} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|u_\alpha - \sum_{i=1}^{s-1} u_\alpha^i - u_\alpha^N\right|^{2^*} dv_g = \circ(1) + \epsilon(R'),$$

ce qui montre (3.22) avec $p_{s-1} = p_s$ et termine la récurrence (on garde en effet les mêmes suites p_s suites de points (y_α^j) et les mêmes p_s suites de scalaires (λ_α^j) que pour le rang s, elles vérifient donc déjà (3.19) et (3.20) par l'hypothèse de récurrence).
Remarquons que, dans ce cas simple, le domaine d'intégration n'a pas besoin d'être rétréci pour compenser le retrait d'une bulle pour passer au rang $s-1$.
Deuxième cas : $\lim_{\alpha\to\alpha_0} d_g(x_\alpha^s, x_\alpha^N) = 0$.
On sait qu'il existe $r_0 > 0$ et $C \geq 1$ tels que pour tout $x \in M$ et $y, z \in \mathbb{R}^n$

$$|y| \leq r_0 \text{ et } |z| \leq r_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{C}|z-y| \leq d_g\left(exp_x(y), exp_x(z)\right) \leq C|z-y|. \tag{3.23}$$

On pose alors $\tilde{x}_\alpha^s \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{y}_\alpha^j \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_\alpha^s = exp_{x_\alpha^N}(\rho_\alpha^N \tilde{x}_\alpha^s)$ et $y_\alpha^j = exp_{x_\alpha^N}(\rho_\alpha^N \tilde{y}_\alpha^j)$. La double inégalité précédente appliquée à $x = x_\alpha^N$ et $y = \rho_\alpha^N \tilde{x}_\alpha^s$ puis $y = \rho_\alpha^N \tilde{y}_\alpha^j$, donne l'existence de $C \geq 1$ tel que dès que $|y| \leq r_0$ et $|z| \leq r_0$ on a les inclusions :

$$B_{\tilde{x}_\alpha^s}\left(\frac{R'}{C}\frac{\rho_\alpha^s}{\rho_\alpha^N}\right) \subset \frac{1}{\rho_\alpha^N} exp_{x_\alpha^N}^{-1}(B_{x_\alpha^s}(R'\rho_\alpha^s)) \subset B_{\tilde{x}_\alpha^s}\left(R'C\frac{\rho_\alpha^s}{\rho_\alpha^N}\right) \tag{3.24}$$

et

$$B_{\tilde{y}_\alpha^j}\left(\frac{R'}{C}\frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N}\right) \subset \frac{1}{\rho_\alpha^N} exp_{x_\alpha^N}^{-1}\left(B_{y_\alpha^j}\left(R'\lambda_\alpha^j\right)\right) \subset B_{\tilde{y}_\alpha^j}\left(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N}\right) \tag{3.25}$$

Or d'après (3.12), pour $\tilde{R} > 0$,

$$\int_{B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s)} \left|\hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{s} u_\alpha^i\right|^{2^*} dv_g = \int_{B_0(\tilde{R})} \left|\hat{v}_{\alpha,s} - u^s\right|^{2^*} dv_g + \circ(1) = \circ(1)$$

Donc grâce à l'hypothèse de récurrence (3.21), si on intersecte le domaine d'intégration de (3.21) avec $B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s)$, on obtient

$$\int_{\left(B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{ps} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)\right)\cap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s)} |u_\alpha^N|^{2^*} dv_g = \circ(1) + \epsilon(R')$$

Ce qui donne, par changement d'échelle de coefficient ρ_α^N centré en x_α^N et grâce à (3.24) et (3.25),

$$\int_{\left(B_0(R)\setminus\cup_{j=1}^{ps} B_{\tilde{y}_\alpha^j}(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N})\right)\cap B_{\tilde{x}_\alpha^s}(\frac{\tilde{R}}{C}\frac{\rho_\alpha^s}{\rho_\alpha^N})} |u^N|^{2^*} dx = \circ(1) + \epsilon(R') \tag{3.26}$$

Deux cas sont alors possibles suivant la limite de $\frac{d_g(x_\alpha^N, x_\alpha^s)}{\rho_\alpha^N}$.

Tout d'abord, si $\frac{d_g(x_\alpha^N, x_\alpha^s)}{\rho_\alpha^N} \to +\infty$, alors on a aussi $\frac{d_g(x_\alpha^N, x_\alpha^s)}{\rho_\alpha^s} \to +\infty$ d'après (3.26), et donc pour tout $\tilde{R} > 0$, $B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N) \cap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\rho_\alpha^s) = \emptyset$. On procède alors comme dans le premier cas et on démontre (3.22) sans avoir besoin de retirer une boule supplémentaire au domaine d'intégration puisque l'on prend $p_{s-1} = p_s$ et que l'on choisit exactement les mêmes suites que pour le rang s.

Enfin, si le rapport $\frac{d_g(x_\alpha^N, x_\alpha^s)}{\rho_\alpha^N}$ est borné, alors (3.26) implique que $\frac{\rho_\alpha^s}{\rho_\alpha^N} \to 0$. On prend alors comme suites de points, les p_s suites (y_α^j) auxquelles on adjoint une suite suppémentaire : $(y_\alpha^{p_s+1}) = (x_\alpha^N)$ qui vérifie elle aussi (3.19). Pour les p_s suites de réels (λ_α^j), on adjoint la suite $(\lambda_\alpha^{p_s+1}) = (\rho_\alpha^s)$ qui vérifie bien (3.20). On a alors,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{ps+1} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|\hat{u}_\alpha - \sum_{i=1}^{s} u_\alpha^i - u_\alpha^N\right|^{2^*} dv_g = \circ(1) + \epsilon(R')$$

et

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{ps+1} B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|u_\alpha^s\right|^{2^*} dv_g \leq \int_{M\setminus B_{x_\alpha^N}(R'\rho_\alpha^s)} \left|u_\alpha^s\right|^{2^*} dvg \leq \epsilon(R')$$

Donc
$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_s+1}B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|\hat{u}_\alpha-\sum_{i=1}^{s-1}u_\alpha^i-u_\alpha^N\right|^{2^*}dv_g=\circ(1)+\epsilon(R')$$
Cela termine la récurrence avec $p_{s-1}=p_s+1$.

Montrons maintenant que les k bulles obtenues dans la décomposition H_1^2 sont positives en montrant que les k solutions u^i de $\Delta_\xi u=f(x_0^i)|u|^{2^*-2}u$ qui définissent ces bulles sont positives. Pour cela, on se fixe $N\in[1,k]$ et on montre que u^N est positive. Ecrivons (3.21) pour $s=0$: il existe p_0 suites de points (y_α^j) et p_0 suites de réels (λ_α^j) telles que
$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)\setminus\cup_{j=1}^{p_0}B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|\hat{u}_\alpha-u_\alpha^N\right|^{2^*}dv_g=\circ(1)+\epsilon(R').$$
Par changement d'échelle de centre x_α^N et de coefficient ρ_α^N et en utilisant (3.25) :
$$\int_{B_0(R)\setminus\cup_{j=1}^{p_0}B_{\tilde{y}_\alpha^j}(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N})}\left|\hat{v}_{\alpha,N}-u^N\right|^{2^*}dx=\circ(1)+\epsilon(R'). \qquad (3.27)$$
A extraction de sous-suite près, $(\tilde{y}_\alpha^j)$ converge quand $\alpha\to\alpha_0$ vers une limite notée $\tilde{y}^j$. Ainsi comme $\frac{\lambda_\alpha^j}{\rho_\alpha^N}\to 0$, (3.27) implique
$$\hat{v}_{\alpha,N}\to u^N \text{ dans } L^{2^*}\left(B_0(R)\setminus\ \cup_{j=1}^{p}\{\tilde{y}^j\}\right).$$
Donc $\hat{v}_{\alpha,N}\to u^N$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$. On pose alors
$$U_{0,\alpha,N}(x)=\left(\rho_\alpha^N\right)^{\frac{n-2}{2}}u_0\left(\exp_{x_\alpha^N}(\rho_\alpha^N x)\right)$$
Toujours par changement d'échelle de centre x_α^N, et de coefficient de dilatation $\left(\rho_\alpha^N\right)^{-1}$,
$$\int_{B_0(R)}|U_{0,\alpha,N}|^{2^*}dx=\int_{B_{x_\alpha^N}(R\rho_\alpha^N)}|u_0|^{2^*}dv_g+\circ(1)=\circ(1)$$
car (ρ_α^N) tend vers 0 et u_0 est continue. Ainsi, $(U_{0,\alpha,N})$ tend vers 0 dans $L^{2^*}_{loc}(B_0(R))$ et donc tend vers 0 presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi si on pose
$$U_{\alpha,N}(x)=\left(\rho_\alpha^N\right)^{\frac{n-2}{2}}u_\alpha\left(\exp_{x_\alpha^N}(\rho_\alpha^N x)\right),$$
l'égalité $u_\alpha=\hat{u}_\alpha+u_0$ se transforme par le changement d'échelle que l'on vient d'utiliser en $U_{\alpha,N}=\hat{v}_{\alpha,N}+U_{0,\alpha,N}$. D'un côté, on vient de voir que $\hat{v}_{\alpha,N}+U_{0,\alpha,N}\to u^N$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$, et de l'autre que $U_{\alpha,N}$ est positive car u_α l'est. On en déduit que u^N est positive. Cela démontre le lemme.$\square$

3.4 Additivité des énergies

L'existence de la décomposition H_1^2 de (u_α) étant acquise, montrons que l'énergie se décompose de la même manière c'est-à-dire que (3.6) est vraie : par construction des bulles, notamment avec *iii*) de la troisième étape, et par (3.8), on peut écrire que

$$J_\alpha(u_\alpha) = J_\alpha(u_0) + \sum_{i=1}^{k} \hat{J}\left(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha^i\right) + \circ(1)$$

Or les bulles sont positives, donc on sait que : $\forall i \in [1,k]$, $\hat{J}\left(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha^i\right) = \beta_{x_0^i} + \circ(1)$, et comme u_α est solution de $(E_{\alpha,f})$ et u_0 solution de $(E_{\alpha_0,f})$, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} J_\alpha(u_\alpha) &= \frac{1}{n}\mathcal{E}(u_\alpha) \\ J_\alpha(u_0) &= \frac{1}{n}\int_M f|u_0|^{2^*}\, dv_g + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_0}{2}\right)||u_0||_1^2 = \frac{1}{n}\mathcal{E}(u_0) + \circ(1) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \mathcal{E}(u_0) + K_n^{-n/2}\sum_{i=1}^{k} f(x_0^i)^{1-n/2} + \circ(1).$$

Ainsi (3.6) est démontrée.

3.5 Estimée ponctuelle

Passons maintenant à la démonstration de la seconde partie du théorème 3.1. Pour obtenir (3.7), il suffit de montrer que : $\exists C > 0, \forall x \in M, \forall \alpha > 0$,

$$\left(\min_{i=1..k} d_g(x_\alpha^i, x)\right)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x) \leq C.$$

La démonstration de cette estimée ponctuelle est similaire à celle de la proposition 2.7 où l'estimée est montrée en énergie minimale ; ici l'énergie n'est plus minimale mais seulement bornée. La difficulté réside dans le fait qu'il y a plusieurs suites de centres (x_α^i), alors qu'en énergie minimale, il n'y en avait qu'une seule. On pose pour $x \in M$

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x) &= \min_{i=1..k} d_g(x_\alpha^i, x) \\ V_\alpha(x) &= \Phi_\alpha(x)^{\frac{n}{2}-1}u_\alpha(x) \\ V_\alpha(y_\alpha) &= \max_{x\in M} V_\alpha(x) \\ \gamma_\alpha &= u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} \end{aligned}$$

On raisonne par l'absurde : si (V_α) n'est pas bornée, il existe une sous-suite extraite telle que $V_\alpha(y_\alpha) \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \to \alpha_0$. Or

$$V_\alpha(y_\alpha) = \left(\frac{\Phi_\alpha(y_\alpha)}{\gamma_\alpha}\right)^{\frac{n}{2}-1} \leq C\gamma_\alpha^{1-\frac{n}{2}},$$

donc

$$\gamma_\alpha \longrightarrow 0 \text{ quand } \alpha \to \alpha_0, \tag{3.28}$$

et $\forall i \in [1,k]$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{d_g(x_\alpha^i, y_\alpha)}{\gamma_\alpha} = +\infty \tag{3.29}$$

Bien sûr (3.29) est évident si (x_α^i) et (y_α) ne tendent pas vers la même limite ; alors que si (x_α^i) et (y_α) tendent vers le même point de $\mathcal{C}$, cela signifie que les deux suites se rapprochent avec une vitesse plus petite que celle avec laquelle γ_α tend vers 0.
Pour montrer (3.29) dans ce dernier cas, on utilise le changement d'échelle centré en y_α et de coefficient de dilatation γ_α^{-1} avec les mêmes notations que dans la démonstration de l'estimée ponctuelle en énergie minimale (voir proposition 2.7) : pour $\delta < i_g$ et pour tout $x \in B_0(\delta\gamma_\alpha^{-1})$

$$\begin{array}{rclcrcl} \bar{g}_\alpha(x) & = & \frac{1}{\gamma_\alpha^2}\left(exp_{y_\alpha} \circ \mathcal{D}_{\gamma_\alpha}\right)^* g(x) & \qquad & \bar{\Sigma}_\alpha(x) & = & \Sigma_\alpha(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) \\ \bar{u}_\alpha(x) & = & \gamma_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) & & \bar{f}_\alpha(x) & = & f(exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x)) \end{array}$$

Alors $\bar{u}_\alpha(0) = 1$ et (E_α) est transformée en l'équation :

$$\Delta_{\bar{g}_\alpha} \bar{u}_\alpha + \alpha\gamma_\alpha^{\frac{(n+2)}{2}} \|u_\alpha\|_1 \bar{\Sigma}_\alpha = \bar{f}_\alpha \bar{u}_\alpha^{2^*-1} \tag{$\bar{E}_\alpha$}$$

On montre que $\bar{u}_\alpha$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $R > 0$ fixé, pour α assez proche de α_0, $B_0(R) \subset B_0(\delta\gamma_\alpha^{-1})$ puisque γ_α tend vers 0. Pour $x \in B_0(R)$, on a :

$$\bar{u}_\alpha(x) = \left(\frac{\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(z_\alpha)}\right)^{\frac{n-2}{2}} V_\alpha(z_\alpha), \tag{3.30}$$

où $z_\alpha = exp_{y_\alpha}(\gamma_\alpha x) \in B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)$. Or pour $\forall i \in [1,k]$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_\alpha^i, z_\alpha) & \geq & d(x_\alpha^i, y_\alpha) - R\gamma_\alpha \\ & \geq & \Phi_\alpha(y_\alpha) - R\gamma_\alpha \\ & \geq & \left(1 - \dfrac{R\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)\Phi_\alpha(y_\alpha) \end{array}$$

Ainsi en prenant le minimum pour $i = 1..k$, on obtient :

$$\Phi_\alpha(z_\alpha) \geq \left(1 - \frac{R\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)\Phi_\alpha(y_\alpha)$$

Et le terme de droite est positif pour α assez proche de α_0 car grâce à (3.29),

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} = 0.$$

L'inégalité précédente reportée dans (3.30) nous donne :

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\alpha(x) &\leq \left(1 - \frac{R\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{1-\frac{n}{2}} \left(\frac{\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{\frac{n}{2}-1} v_\alpha(z_\alpha) \\
&\leq \left(1 - \frac{R\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{1-\frac{n}{2}} \left(\frac{\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{\frac{n}{2}-1} v_\alpha(y_\alpha)
\end{aligned}$$

d'où $\forall x \in B_0(R)$,

$$\bar{u}_\alpha(x) \leq \left(1 - \frac{R\gamma_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{1-\frac{n}{2}} \leq C$$

où C ne dépend pas de α. La suite $(\bar{u}_\alpha)$ est donc uniformément bornée sur $B_0(R) \subset \mathbb{R}^n$. En particulier pour $q > 2^*$, il existe $C > 0$ tel que : $\forall \alpha > 0$,

$$\int_{B_0(R)} \bar{u}_\alpha^q dv_{\bar{g}_\alpha} \leq C.$$

Ainsi $\bar{u}_\alpha$ vérifie les hypothèses du principe itératif de Moser : il existe donc $C > 0$ tel que

$$\sup_{B_0(R/2)} \bar{u}_\alpha \leq C \left(\int_{B_0(R)} \bar{u}_\alpha^{2^*} dv_{\bar{g}_\alpha} \right)^{1/2^*}. \tag{3.31}$$

Or par changement d'échelle, on a

$$\int_{B_0(R)} \bar{u}_\alpha^{2^*} dv_{\bar{g}_\alpha} = \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} u_\alpha^{2^*} dv_g.$$

Utilisons la décomposition H_1^2 pour (u_α) :

$$\begin{aligned}
\int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} u_\alpha^{2^*} dv_g &= \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} \left(u_0 + \sum_{i=1}^k f(x_0^i)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \mathcal{B}_\alpha^i + \mathcal{R}_\alpha \right)^{2^*} dv_g \\
&\leq C \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} u_0^{2^*} dv_g + C \sum_{i=1}^k \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g + C \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} \mathcal{R}_\alpha^{2^*} dv_g
\end{aligned}$$

Or γ_α tend vers 0, donc $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} u_0^{2^*} dv_g = 0$. De plus

$$\left| \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} \mathcal{R}_\alpha^{2^*} dv_g \right| \leq C \|\mathcal{R}_\alpha\|_{H_1^2}^{2^*} = \circ(1) \text{ quand } \alpha \to \alpha_0.$$

Ainsi

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} u_\alpha^{2^*} dv_g \leq C \sum_{i=1}^k \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g + \circ(1) \tag{3.32}$$

Il reste à montrer que

$$\forall R > 0, \forall i = 1..k, \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g = 0. \tag{3.33}$$

On rappelle que

$$\mathcal{C} = \left\{x \in M/\ \exists i \in [1,k],\ x = \lim_{\alpha\to\alpha_0} x_\alpha^i\right\} = \left\{x_1, ..., x_p\right\},$$

avec $p \leq k$. Remarquons par ailleurs que $\lim_{\alpha\to\alpha_0} y_\alpha \in \mathcal{C}$ car d'après la décomposition H_1^2, $u_\alpha \longrightarrow u_0$ dans $C^0_{loc}(M\backslash\mathcal{C})$ et $u_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$. les suites (x_α^i) et (y_α) peuvent avoir la même limite, d'où la nécessité de comparer leur vitesse de convergence par l'intermédiaire des boules $B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)$ et $B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i)$. Soit $R > 0$ et $i \in [1,k]$ fixés, deux cas peuvent se produire :

– 1^{er} *cas :* $\forall R' > 0, B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i) = \emptyset$ pour α assez proche de α_0 ; autrement dit les boules ne se rencontrent pas à partir d'un certain rang.
  Dans ce cas, $B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha) \subset M\backslash B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i)$, donc

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g \leq \int_{M\backslash B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g$$

  Or $\mathcal{B}_\alpha^i \longrightarrow 0$ quand $\alpha \to \alpha_0$ dans $C^0_{loc}\left(M \setminus \{x_0^i\}\right)$, donc

$$\int_{M\backslash B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g = \varepsilon_{R'}(\alpha), \quad \text{où } \lim_{R'\to\infty} \lim_{\alpha\to\alpha_0} \varepsilon_{R'}(\alpha) = 0$$

  En passant à la limite dans l'inégalité précédente pour $R' \to \infty$, on obtient bien (3.33).

– $2^{ème}$ *cas :* $\exists R' > 0, B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R'\rho_\alpha^i) \neq \emptyset$ pour une sous-suite α qui converge vers α_0. Cela se traduit par le fait que

$$d_g(x_\alpha^i, y_\alpha) \leq R\gamma_\alpha + R'\rho_\alpha^i,$$

  et (3.29) entraine alors :

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R + R'\frac{\rho_\alpha^i}{\gamma_\alpha} = +\infty$$

  en particulier

$$\gamma_\alpha = \circ(\rho_\alpha^i) \text{ pour } \alpha \to \alpha_0. \tag{3.34}$$

  Or on a aussi

$$\frac{d_g(x_\alpha^i, y_\alpha)}{\rho_\alpha^i} \leq R\frac{\gamma_\alpha}{\rho_\alpha^i} + R',$$

  d'où

$$d_g(x_\alpha^i, y_\alpha) = O(\rho_\alpha^i) \text{ pour } \alpha \to \alpha_0. \tag{3.35}$$

  Alors (3.23), où on choisit $x = x_\alpha^i$ et $y = \frac{1}{\rho_\alpha^i}\exp^{-1}_{x_\alpha^i}(y_\alpha)$ qui sera noté t_α, donne l'existence d'un réel $C \geq 1$ tel que l'inclusion suivante a lieu :

$$B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha) \subset exp_{x_\alpha^i}\left(\rho_\alpha^i B_{t_\alpha}\left(C\frac{R\gamma_\alpha}{\rho_\alpha^i}\right)\right) = D_\alpha^i,$$

d'où en utilisant le changement d'échelle centré en x_α^i et de coefficient ρ_α^i :

$$\begin{aligned}\int_{B_{y_\alpha}(R\gamma_\alpha)} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g &\leq \int_{D_\alpha^i} (\mathcal{B}_\alpha^i)^{2^*} dv_g \\ &\leq \int_{B_{t_\alpha}\left(C\frac{R\gamma_\alpha}{\rho_\alpha^i}\right)} (v^i)^{2^*} dv_{\bar{g}_\alpha}\end{aligned}$$

où v^i est la solution positive sur $\mathbb{R}^n$ de $\Delta_\xi u = f(x_0^i)u^{2^*-1}$ à partir de laquelle est définie la bulle $(\mathcal{B}_\alpha^i)$.
Enfin puisque $\frac{\gamma_\alpha}{\rho_\alpha^i} = \circ(1)$, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient bien (3.33). Cela implique avec (3.31) et (3.32) que

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \sup_{B_0(R/2)} \overline{u}_\alpha = 0.$$

Cela est impossible car $\overline{u}_\alpha(0) = 1$. On aboutit donc à une contradiction, la suite (V_α) est bornée et ainsi (3.7) est vraie, ce qui achève notre démonstration.$\square$

Chapitre 4

De l'énergie bornée à l'énergie infinie : la fonction énergie

Dans ce chapitre, on ne traite que le cas particulier où $f \equiv 1$ dans l'équation de Sobolev-Poincaré $(E_{\alpha,f})$. Lorsque f est non constante peu de résultats intéressants ont pu être obtenus.
On considère sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$ l'équation (au sens faible)

$$\Delta_g u + \alpha \left(\int_M |u| \, dv_g \right) \Sigma = u^{2^*-1} \tag{E_α}$$

où $2^* = \frac{2n}{n-2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$. Une solution $u \in H_1^2(M)$ de cette équation vérifie

$$\forall \varphi \in H_1^2(M), \quad \int_M \nabla u \nabla \varphi \, dv_g + \alpha \|u\|_1 \int_M \varphi \Sigma \, dv_g = \int_M u^{2^*-1} \varphi \, dv_g \tag{4.1}$$

L'énergie d'une solution u a été définie (ici $f \equiv 1$) par

$$\mathcal{E}(u) = \int_M |u|^{2^*} \, dv_g.$$

L'équation (E_α) peut, pour α fixé, admettre plusieurs solutions positives. On reprend alors la notion de fonction énergie $\mathcal{E}_m(\alpha)$ associée à l'équation (E_α) et introduite dans le cas des équations de Sobolev par Hebey [26] et [24], en posant :

Définition 4.1. *La fonction énergie $\mathcal{E}_m$ associée à l'équation (E_α) est la fonction qui, à tout $\alpha > 0$, associe*

$$\mathcal{E}_m(\alpha) = \inf_{u \in \mathcal{S}_\alpha} \mathcal{E}(u),$$

où $\mathcal{S}_\alpha$ est l'ensemble des solutions positives non identiquement nulles de (E_α).

Le but de ce chapitre est d'étudier cette fonction, en particulier sa régularité et son comportement en l'infini. On remarque tout d'abord que la solution constante $\overline{u}_\alpha = \left(\alpha v_g\right)^{\frac{n-2}{4}}$ de (E_α) a une énergie $\mathcal{E}(\overline{u}_\alpha) = \alpha^{\frac{n}{2}} v_g^{\frac{n+2}{2}}$ et donc que

$$\forall \alpha > 0, \qquad 0 \leq \mathcal{E}_m(\alpha) \leq \alpha^{\frac{n}{2}} v_g^{\frac{n+2}{2}}. \tag{4.2}$$

On démontre de plus facilement qu'une solution de (E_α) globalement minimisante est aussi une solution minimisante pour la fonction énergie :

Proposition 4.1. *S'il existe une solution $u_\alpha \in H_1^2(M)$ de (E_α) globalement minimisante (au sens de la définition 1.1), alors cette fonction u_α est aussi minimisante pour la fonction énergie, au sens où*

$$\mathcal{E}(u_\alpha) = \mathcal{E}_m(\alpha) := \inf_{u \in \mathcal{S}_\alpha} \mathcal{E}(u), \tag{4.3}$$

et on a aussi

$$\mu_\alpha^{\frac{n}{2}} = \mathcal{E}_m(\alpha). \tag{4.4}$$

Démonstration de la proposition 4.1
Une solution u_α de l'équation (E_α) qui est globalement minimisante vérifie, par la définition 1.1 :

$$\mu_\alpha^{\frac{n}{2}} := \inf_{u \in \mathcal{A}^+} Q_\alpha(u)^{\frac{n}{2}} = Q_\alpha(u_\alpha)^{\frac{n}{2}} = \mathcal{E}(u_\alpha).$$

Remarquons juste qu'ici comme $f \equiv 1$, on a $\mathcal{A}^+ = H_1^2(M)^*$. Or $u_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$, donc on a $\mathcal{E}(u_\alpha) \geq \mathcal{E}_m(\alpha)$ et comme $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{A}^+$, il vient :

$$\mathcal{E}(u_\alpha) \leq \inf_{u \in \mathcal{S}_\alpha} Q_\alpha(u)^{\frac{n}{2}} = \inf_{u \in \mathcal{S}_\alpha} \mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_m(\alpha)$$

ce qui démontre les égalités (4.3) et (4.4).□

Remarque 11. *La réciproque de cette proposition n'étant pas toujours vraie, il est important, dans ce chapitre, de préciser à quel objet se rapporte l'adjectif "minimisant." Cela est inutile dans tous les autres chapitres de cette thèse où, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'adjectif minimisant qualifie toujours une solution globalement minimisante au sens de la définition 1.1.*

4.1 Fonction énergie bornée

En cas d'existence de solutions pour l'équation (E_α) globalement minimisantes, on obtient assez facilement

Proposition 4.2. *Si, pour tout α d'un intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{+*}$, il existe une solution u_α de (E_α) globalement minimisante, alors la fonction énergie $\mathcal{E}_m$ est majorée par $K_n^{-\frac{n}{2}}$, lipschitzienne et croissante sur $\mathcal{I}$. Si de plus, pour chaque $\alpha \in \mathcal{I}$, il* *existe une unique solution globalement minimisante u_α telle que $\mathcal{E}(u_\alpha) < K_n^{-\frac{n}{2}}$, alors $\mathcal{E}_m$ est dérivable sur $\mathcal{I}$ et $\mathcal{E}'_m(\alpha) = \frac{n}{2}\|u_\alpha\|_1^2$.*

Démonstration de la proposition 4.2

Soient $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{I}^2$ tel que $\alpha_0 \neq \alpha_1$ et u_0 et u_1 des solutions globalement minimisantes de (E_{α_0}) et (E_{α_1}). Pour $i \in \{0, 1\}$, on a grâce à (4.4) et (1.13) :

$$\mathcal{E}_m(\alpha_i) = \mu_{\alpha_i}^{\frac{n}{2}} \leq K_n^{-\frac{n}{2}}$$

De plus par définition de μ_α :

$$Q_{\alpha_0}(u_0) = \mu_{\alpha_0} \leq Q_{\alpha_0}(u_1) \qquad \text{et} \qquad Q_{\alpha_1}(u_1) = \mu_{\alpha_1} \leq Q_{\alpha_1}(u_0),$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_0}(u_0) - Q_{\alpha_1}(u_0) &\leq \mu_{\alpha_0} - \mu_{\alpha_1} &&\leq Q_{\alpha_0}(u_1) - Q_{\alpha_1}(u_1) \\ (\alpha_0 - \alpha_1)\frac{\|u_0\|_1^2}{\|u_0\|_{2^*}^2} &\leq \mu_{\alpha_0} - \mu_{\alpha_1} &&\leq (\alpha_0 - \alpha_1)\frac{\|u_1\|_1^2}{\|u_1\|_{2^*}^2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

et comme $\frac{\|u_i\|_1^2}{\|u_i\|_{2^*}^2} \leq v_g^{\frac{n+2}{n}}$, on en déduit par (4.3) que la fonction $\mathcal{E}_m$ est lipschitzienne sur $\mathcal{I}$. D'autre part, μ_α est évidemment une fonction croissante en α, et comme $\mathcal{E}_m(\alpha) = \mu_\alpha^{\frac{n}{2}}$, la fonction $\mathcal{E}_m$ est croissante.

On montre maintenant la dérivabilité de $\mathcal{E}_m$ (sous l'hypothèse de la proposition). Soient $\alpha_0 \in \mathcal{I}$, $\alpha \in \mathcal{I}$, tel que $\alpha \neq \alpha_0, u_0$ l'unique solution de E_{α_0} globalement minimisante et u_α l'unique solution globalement minimisante de (E_α). Par (4.5), on a : si $\alpha_0 - \alpha > 0$, alors

$$\frac{\|u_0\|_1^2}{\|u_0\|_{2^*}^2} \leq \frac{\mu_{\alpha_0} - \mu_\alpha}{\alpha_0 - \alpha} \leq \frac{\|u_\alpha\|_1^2}{\|u_\alpha\|_{2^*}^2} \tag{4.6}$$

et si $\alpha_0 - \alpha < 0$, alors

$$\frac{\|u_\alpha\|_1^2}{\|u_\alpha\|_{2^*}^2} \leq \frac{\mu_{\alpha_0} - \mu_\alpha}{\alpha_0 - \alpha} \leq \frac{\|u_0\|_1^2}{\|u_0\|_{2^*}^2} \tag{4.7}$$

Lorsque α converge vers α_0, la continuité de $\mathcal{E}_m$ montre que $\|u_\alpha\|_{2^*}$ converge vers $\|u_0\|_{2^*} < K_n^{-\frac{n}{2}}$. Son énergie est donc "trop petite pour la concentration" en utilisant le vocabulaire introduit dans le chapitre 2 et la proposition 2.2 montre que, à sous-suite près, (u_α) converge en norme H_1^2 vers une fonction $\tilde{u}_0$ non identiquement nulle. Par continuité, $\tilde{u}_0$ est alors une solution minimisante pour l'équation (E_{α_0}) et donc par unicité $\tilde{u}_0 = u_0$. On en déduit que $\frac{\|u_\alpha\|_1^2}{\|u_\alpha\|_{2^*}^2}$ converge vers $\frac{\|u_0\|_1^2}{\|u_0\|_{2^*}^2}$ et par (4.6) et (4.7), la fonction $\alpha \to \mu_\alpha$ est dérivable en $\alpha \in \mathcal{I}$ de dérivée

$$\mu'(\alpha) = \frac{\|u_\alpha\|_1^2}{\|u_\alpha\|_{2^*}^2} = \frac{\|u_\alpha\|_1^2}{\mu(\alpha)^{\frac{n-2}{2}}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{d\alpha}\left(\mu(\alpha)^{\frac{n}{2}}\right) = \mathcal{E}'_m(\alpha) = \frac{n}{2}\|u_\alpha\|_1^2.$$

La proposition est démontrée.□

Cette proposition et les corollaires 1.2 et 1.3 donnent alors le résultat suivant

Corollaire 4.1. ***a)*** *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$ telle que $\max_M Scal_g > 0$, alors la fonction énergie $\mathcal{E}_m$ associée à (E_α) est lipschitzienne croissante et majorée par $K_n^{-\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.*
b) *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ telle que l'inégalité optimale (I_{SP}^{opt}) est vérifiée (voir théorème A), alors $\mathcal{E}_m$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, lipschizienne et majorée par $K_n^{-\frac{n}{2}}$ sur $]0, C_0(g)[$.*

4.2 Fonction énergie infinie

Lorsque la courbure scalaire est négative ou nulle sur M, l'étude de la fonction énergie $\mathcal{E}_m$ pour $\alpha > C_0(g)$ est bien plus difficile car comme on l'a montré dans la proposition 1.4, il n'existe pas de solutions globalement minimisantes pour l'équation (E_α). Le résultat obtenu est énoncé dans le théorème 4.1 pour une variété riemannienne compacte localement conformément plate de courbure scalaire négative. Sa démonstration est très technique, elle demande une étude de phénomène de concentration et l'utilisation d'une inégalité de Pohozaev. Elle suit le schéma présenté par Hebey dans [26] pour l'équation de Sobolev et dans [25] pour l'équation de Sobolev Poincaré dans le cas particulier du tore.

Théorème 4.1. *Soit (M, g) une variété riemanienne compacte de dimension $n \geq 4$, localement conformément plate à courbure scalaire négative $Scal_g \leq 0$. Si le Hessien de la courbure scalaire est non dégénéré en tout point où la courbure scalaire $Scal_g$ s'annule, alors la fonction énergie associée à l'équation de Sobolev Poincaré est semi-continue inférieurement sur un voisinage de l'infini et*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{E}_m(\alpha) = +\infty.$$

Remarque 12. *Pour des équations du type $\Delta_g u + \alpha u = u^{2^*-1}$, Hebey [26] montre la semi-continuité inférieure de la fonction énergie sur une variété localement conformément plate sur l'intervalle $]\frac{n-2}{4(n-1)} \max Scal_g, +\infty[$. La présence de la norme L^1 dans notre équation, qui implique notamment la non invariance par changement de métrique conforme de la fonctionnelle Q_α, nous empêche d'expliciter l'intervalle de semi-continuité.*

Mise en place de la démonstration du théorème 4.1

On explique d'abord comment chacune des démonstrations se ramène à montrer l'impossibilité d'un phénomène de concentration ; on raisonne alors par l'absurde et la contradiction est obtenue grâce à l'identité de Pohozaev.

a) Semi-continuité inférieure :

Par définition de $\mathcal{E}_m$:

$$\forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists u_{\alpha,\varepsilon} \in S_\alpha, \quad \mathcal{E}_m(\alpha) \leq \mathcal{E}(u_{\alpha,\varepsilon}) \leq \mathcal{E}_m(\alpha) + \varepsilon.$$

Soit $\alpha_0 > 0$, lorsque α converge vers $\alpha_0 < +\infty$, l'inégalité (4.2) montre que l'énergie de la suite $(u_{\alpha,\varepsilon})$ est bornée. D'après le théorème 3.1, la décomposition H_1^2 est valable pour $(u_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha>0}$ et l'énergie se décompose de la même manière, en particulier $\mathcal{E}(u_0) \leq \mathcal{E}(u_{\alpha,\varepsilon})$. Supposons que u_0 n'est pas la fonction nulle, auquel cas $u_0 \in S_{\alpha_0}$, et alors $\mathcal{E}_m(\alpha_0) \leq \mathcal{E}(u_0)$, d'où

$$\mathcal{E}_m(\alpha_0) \leq \mathcal{E}_m(\alpha) + \varepsilon,$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit :

$$\mathcal{E}_m(\alpha_0) \leq \liminf_{\alpha \to \alpha_0} \mathcal{E}_m(\alpha)$$

ce qui montre la semi-continuité inférieure. La preuve de la semi-continuité est donc ramenée à montrer que u_0 n'est pas la fonction nulle.

b) Comportement en l'infini :

Pour montrer que la fonction énergie tend vers l'infini lorsque α tend vers $+\infty$, on procède par l'absurde en supposant que, à extraction de sous-suite près, la suite $(\mathcal{E}_m(\alpha))$ est bornée. Par définition de $\mathcal{E}_m$, cela implique qu'il existe $C > 0$ et une suite $(u_\alpha) \in S_\alpha$ tels que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathcal{E}(u_\alpha) \leq C.$$

La suite (u_α) a donc une énergie bornée et par la proposition 2.1 elle converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers la fonction $u_0 \equiv 0$ car $\alpha_0 = +\infty$. La démonstration de la limite infinie est donc ramenée à montrer que la nullité de u_0 implique une contradiction.

Pour obtenir la contradiction et donc démontrer le théorème 4.1, on a besoin de quelques résultats classiques caractérisant le phénomène de concentration.

c) Etude du phénomène de concentration en énergie bornée :

Soit (u_α) une suite de solutions positives de (E_α) d'énergie bornée telle que

$$u_\alpha \rightharpoonup u_0 \equiv 0 \quad \text{faiblement dans } H_1^2(M) \quad \text{lorsque } \alpha \to \alpha_0 \in]0, +\infty]. \tag{4.8}$$

Cette condition implique qu'un phénomène de concentration a lieu. Le cas de l'énergie minimale a été traité dans la sous-section 2.3.3, on s'y réferre lorsque les arguments utilisés sont les mêmes. L'adaptation à l'énergie bornée ne pose pas de véritable difficulté mais nécessite l'utilisation de la décomposition H_1^2 du théorème 3.1. On rappelle que l'on note :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{x \in M, \exists i \in [1,k], (x_\alpha^i)_{\alpha>0} \text{ converge à sous suite près vers } x\} \\ &= \{x_1, ..., x_p\} \end{aligned}$$

où $1 \le p \le k$ et où les k suites $(x_\alpha^i)_{\alpha>0}$ sont les centres des k bulles obtenues dans la décomposition H_1^2 de (u_α). On a vu dans la proposition 3.1 que les éléments de $\mathcal{C}$ sont des points de concentration de la suite (u_α) car ici $u_0 \equiv 0$. Contrairement à l'énergie minimale où il y a unicité (à sous-suite près) du point de concentration, dans le cas de l'énergie bornée, il peut y avoir plusieurs points de concentration.

Proposition 4.3. *Soit (u_α) une suite de solutions positives de (E_α) d'énergie bornée vérifiant (4.8). Alors $u_\alpha \to 0$ dans $C^0_{loc}(M\backslash\mathcal{C})$ quand $\alpha \to \alpha_0$.*

Démonstration de la proposition 4.3

Le raisonnement est le même que pour la proposition 2.5 dans le cas de l'énergie minimale mais il faut tenir compte de la présence des bulles.

Soient $x \in M\backslash\mathcal{C}$, $\delta > 0$ tel que $B_x(\delta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\eta \in C^\infty(M)$ définie par $\eta = 0$ sur $M\backslash B_x(\delta)$, $\eta = 1$ sur $B_x(\delta/2)$, et $0 \le \eta \le 1$. Le lemme 2.1 donne alors , pour $k = 2^* - 1$ et puisque f est constante égale à 1 :

$$A_\alpha(2^*, \eta)\left(\int_M \left(\eta^2 u_\alpha^{\frac{(2^*)^2}{2}}\right) dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \le C \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g \tag{4.9}$$

avec

$$A_\alpha(2^*, \eta) = 1 - \frac{n}{2(n-2)} K_n \left(\int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g\right)^{2/n}.$$

Alors grâce à la décomposition H_1^2 et à (4.8), on a :

$$\begin{aligned} \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g &= \int_{B_x(\delta)} \left(\sum_{m=1}^k \mathcal{B}_\alpha^m + \mathcal{R}_\alpha\right)^{2^*} dv_g \\ &\le C \sum_{m=1}^k \int_{B_x(\delta)} (\mathcal{B}_\alpha^m)^{2^*} dv_g + C \int_{B_x(\delta)} \mathcal{R}_\alpha{}^{2^*} dv_g \\ &\le C \sum_{m=1}^k \max_{B_x(\delta)} (\mathcal{B}_\alpha^m)^{2^*} + C \|\mathcal{R}_\alpha\|_{H_1^2}^{2^*}. \end{aligned}$$

Or on a vu que les bulles tendent vers 0 sur $M\backslash\mathcal{C}$ donc sur $B_x(\delta)$ par choix de δ, et $\mathcal{R}_\alpha$ tend vers 0 en norme H_1^2, donc

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g = 0 \tag{4.10}$$

et $A_\alpha(2^*,\eta) > 0$ pour α proche de α_0 d'où

$$\left(\int_{B_x(\delta/2)} u_\alpha^{\frac{(2^*)^2}{2}} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g \leq C.$$

Ainsi, la suite (u_α) est bornée dans $L^{(2^*)^2/2}(B_x(\delta/2))$. Or $(2^*)^2/2 > 2$, le procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser donne donc :

$$\sup_{B_x(\delta/4)} u_\alpha \leq C\left(\int_{B_x(\delta/2)} u_\alpha^{2^*} dv_g\right)^{1/2^*} \longrightarrow 0 \text{ quand } \alpha \to \alpha_0$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 4.3.$\square$

On étudie maintenant le phénomène de concentration "en norme L^2" et "en norme L^1". Pour cela, à $\delta > 0$ fixé, on note désormais $B_\delta = \cup_{i=1}^p B_{x_i}(\delta)$ et on introduit les deux quotients

$$R_2(\delta,\alpha) = \frac{\int_{M\setminus B_\delta} u_\alpha^2 dv_g}{\int_M u_\alpha^2 dv_g} \qquad \text{et} \qquad R_1(\delta,\alpha) = \frac{\int_{M\setminus B_\delta} u_\alpha dv_g}{\int_M u_\alpha dv_g}.$$

Les résultats concernant ces deux quotients sont les mêmes qu'en énergie minimale :

Proposition 4.4. *$\forall n \geq 4$, $\forall \alpha_0 \in]0,+\infty]$ et $\forall \delta > 0$,*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R_2(\delta,\alpha) = 0 \tag{4.11}$$

et

$$R_1(\delta,\alpha) \leq \frac{C}{\alpha} + o(1) \tag{4.12}$$

où $C \geq 0$ ne dépend pas de α et $o(1) \to 0$ quand $\alpha \to \alpha_0$.

La démonstration est ici la même que dans le cas des propositions 2.8 et 2.9 en énergie minimale : on remplace seulement $B_{x_0}(\delta)$ où x_0 était l'unique point de concentration par $B_\delta = \cup_{i=1}^p B_{x_i}(\delta)$.

d) Démonstration du théorème 4.1

Soient (M,g) une variété riemannienne compacte localement conformément plate à courbure scalaire négative ou nulle, (u_α) une suite de solutions positives de (E_α) d'énergie bornée telle que $u_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ pour $\alpha \to \alpha_0 \in]0,+\infty]$ et $x_i \in C$ un point de concentration de (u_α). Puisque M est localement conformément plate, il existe $\delta > 0$ et $\varphi \in C^\infty(M)$ strictement positive telle que la métrique $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ soit plate sur $B_{x_i}(\delta)$. Par invariance conforme du laplacien, on a

$$\Delta_{\tilde{g}}\left(\frac{u_\alpha}{\varphi}\right) = \varphi^{1-2^*}\left(\Delta_g u_\alpha + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_\alpha\right).$$

La fonction $\hat{u}_\alpha = \frac{u_\alpha}{\varphi}$ vérifie alors l'équation :

$$\Delta_{\tilde{g}}\hat{u}_\alpha + \frac{\alpha \|u_\alpha\|_1 \Sigma_\alpha}{\varphi^{2^*-1}} - h\hat{u}_\alpha = \hat{u}_\alpha^{2^*-1} \qquad (\hat{E}_\alpha)$$

où $h = \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{Scal_g}{\varphi^{2^*-2}}$.
Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ radiale symétrique décroissante telle que $\eta = 1$ sur $B_{x_i}(\frac{\delta}{2})$ et $\eta = 0$ sur $\mathbb{R}^n \backslash B_{x_i}(\delta)$. On écrit l'identité de Pohozaev pour la fonction $\eta\hat{u}_\alpha$:

$$2\int_{\mathbb{R}^n} x^k \partial_k(\eta\hat{u}_\alpha)\Delta_\xi(\eta\hat{u}_\alpha)\,dx + (n-2)\int_{\mathbb{R}^n} \eta\hat{u}_\alpha \Delta_\xi(\eta\hat{u}_\alpha)\,dx \leq 0$$

Des intégrations par parties donnent

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^k \partial_k(\eta\hat{u}_\alpha)\Delta_\xi(\eta\hat{u}_\alpha)\,dx = \mathcal{R}_1(\alpha) + \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 (x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^n} (x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha\Delta_\xi(\eta\hat{u}_\alpha)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\eta\,dx \\ &- 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\nabla_\xi\eta\nabla_\xi\hat{u}_\alpha\,dx \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta\hat{u}_\alpha\Delta_\xi(\eta\hat{u}_\alpha)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx + \mathcal{R}_2(\alpha)$$

où

$$\mathcal{R}_2(\alpha) = -2\int_{\mathbb{R}^n} \eta\hat{u}_\alpha\nabla_\xi\eta\nabla_\xi\hat{u}_\alpha\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta\hat{u}_\alpha^2\Delta_\xi\eta\,dx$$

Ainsi l'identité de Pohozaev se réécrit

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx + (n-2)\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx + \mathcal{R}(\alpha) \leq 0$$

avec $\mathcal{R} = 2\mathcal{R}_1 + (n-2)\mathcal{R}_2$. Or comme $\hat{u}_\alpha$ est solution de $(\hat{E}_\alpha)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} h\eta^2\hat{u}_\alpha^2\,dx \\ &- \alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta^2\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx \\ \text{et } \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha^{2^*-1}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)h\hat{u}_\alpha\,dx \\ &- \alpha\int_M u_\alpha dv_g \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)}{\varphi^{2^*-1}}\,dx \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha^{2^*-1}\,dx + (n-2)\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx + \mathcal{R}(\alpha)$$

$$+2\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)h\hat{u}_\alpha\,dx+(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2h\hat{u}_\alpha^2\,dx$$

$$\le 2\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)}{\varphi^{2^*-1}}\,dx+(n-2)\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta^2\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx$$

On effectue alors les intégrations par parties sur les termes en $(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha^{2^*-1}\,dx=-\frac{n-2}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx-\frac{n-2}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)}{\varphi^{2^*-1}}\,dx=-2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta(x^k\partial_k\eta)}{\varphi^{2^*-1}}\hat{u}_\alpha\,dx-n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta^2\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\hat{u}_\alpha(x^k\partial_k\varphi^{1-2^*})\,dx$$

et

$$2\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)h\hat{u}_\alpha\,dx=-n\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2h\hat{u}_\alpha^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}x^k\partial_k(\eta^2h)\hat{u}_\alpha^2\,dx$$

Et donc,

$$(n+2)\alpha\|u_\alpha\|_1\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\hat{u}_\alpha\Big(\varphi^{1-2^*}+\frac{2x^k\partial_k\varphi^{1-2^*}}{n+2}\Big)\,dx+4\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\eta\frac{(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx+\mathcal{R}(\alpha)$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^n}\Big[2h+x^k\partial_kh\Big]\eta^2\hat{u}_\alpha^2\,dx+2\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)h\hat{u}_\alpha^2\,dx+\frac{4}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx \tag{4.13}$$

En ce qui concerne le calcul de $\mathcal{R}$, une intégration par parties donne pour $\mathcal{R}_2$:

$$\mathcal{R}_2(\alpha)=\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla_\xi\eta|^2\hat{u}_\alpha^2\,dx.$$

Pour le calcul de $\mathcal{R}_1$, une intégration par parties donne tout d'abord

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\eta\;\,dx=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[n\eta\Delta_\xi\eta+(x^k\partial_k\eta)\Delta_\xi\eta+(x^k\partial_k\Delta_\xi\eta)\eta\Big]\;\hat{u}_\alpha^2\;\,dx$$

et aussi

$$\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha\Delta_\xi(\eta u_\alpha)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\Delta_\xi\eta\;\hat{u}_\alpha^2\,dx-2\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha\nabla_\xi\eta\nabla_\xi\hat{u}_\alpha\,dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx,$$

Comme $\hat{u}_\alpha$ vérifie $(\hat{E}_\alpha)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta\hat{u}_\alpha\Delta_\xi\hat{u}_\alpha\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx$$

$$-\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta\frac{\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta h\hat{u}_\alpha^2\,dx$$

et d'autre part

$$2\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\hat{u}_\alpha\nabla_\xi\eta\nabla_\xi\hat{u}_\alpha\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\Delta_\xi\eta\,\hat{u}_\alpha^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^n}\nabla_\xi(x^k\partial_k\eta)\nabla_\xi\eta\,\hat{u}_\alpha^2\,dx$$

et donc

$$\begin{aligned}2\mathcal{R}_1(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(\eta)\hat{u}_\alpha^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(\eta)\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx - 2\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)\frac{\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx\\ &- 4\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\nabla_\xi\eta\nabla_\xi u_\alpha\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta h\hat{u}_\alpha^2\,dx\end{aligned}$$

où

$$\tilde{f}(\eta) = 2\nabla_\xi(x^k\partial_k\eta)\nabla_\xi\eta - n_\xi\eta\Delta_\xi\eta - (x^k\partial_k\eta)\Delta_\xi\eta - (x^k\partial_k\Delta_\xi\eta)\eta,$$

et

$$\tilde{g}(\eta) = 2(x^k\partial_k\eta)\eta.$$

Et finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\tilde{f}(\eta) + (n-2)|\nabla_\xi\eta|^2\right)\hat{u}_\alpha^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(\eta)\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx\\ &- 2\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)\frac{\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx - 4\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\hat{u}_\alpha)\nabla_\xi\eta\nabla_\xi\hat{u}_\alpha\,dx\\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^n}(x^k\partial_k\eta)\eta h\hat{u}_\alpha^2\,dx\end{aligned}$$

On reporte dans (4.13) en tenant compte du fait que puisque η est symétrique radiale et décroissante, on a

$$\eta(x^k\partial_k u_\alpha)\nabla\eta\nabla u_\alpha = \frac{1}{r}\eta\frac{d\eta}{dr}(x^k\partial_k u_\alpha)^2 \leq 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&(n+2)\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\hat{u}_\alpha(\varphi^{1-2^*}+\frac{2x^k\partial_k\varphi^{1-2^*}}{n+2})\,dx+2\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x^k\partial_k\eta)\frac{\hat{u}_\alpha}{\varphi^{2^*-1}}\,dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left[2h + x^k\partial_k h\right]\eta^2\hat{u}_\alpha^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}|f(\eta)|\hat{u}_\alpha^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}|g(\eta)|\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx\end{aligned}$$

avec $f(\eta) = \tilde{f}(\eta)+(n-2)|\nabla\eta|^2$ et $g(\eta) = \frac{4}{n}(x^k\partial_k\eta)\eta$. Comme f et g sont nulles hors de l'anneau $A_{x_i}(\delta) = B_{x_i}(\delta)\backslash B_{x_i}(\frac{\delta}{2})$ et que φ est continue et strictement positive sur M compact, il existe $C > 0$ et $c > 0$ tel que $c \leq \varphi \leq C$. De plus, en choisissant δ assez petit, il existe $c_1 > 0$ tel que $\varphi^{1-2^*} + \frac{2x^k\partial_k\varphi^{1-2^*}}{n+2} \geq c_1$ sur $B_{x_i}(\delta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{B_{x_i}(\delta)}\hat{u}_\alpha\,dx - \int_{B_{x_i}(\delta)}\left(2h + x^k\partial_k h\right)\eta^2\hat{u}_\alpha^2\,dx\\ &\leq C\alpha\int_M u_\alpha dv_g\int_{A_{x_i}(\delta)}\hat{u}_\alpha\,dx + C\int_{A_{x_i}(\delta)}|f(\eta)|\hat{u}_\alpha^2\,dx + C\int_{A_{x_i}(\delta)}|g(\eta)|\hat{u}_\alpha^{2^*}\,dx\end{aligned}$$

On effectue ce travail pour les p points de $\mathcal{C}$ et on somme les inégalités obtenues, ce qui en notant $B_\delta = \cup_{i=1}^p B_{x_i}(\delta)$ et $A_\delta = \cup_{i=1}^p A_{x_i}(\delta)$, donne

$$\alpha \int_M u_\alpha dv_g \int_{B_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx - \int_{B_\delta} \left(2h + x^k \partial_k h\right) \eta^2 \hat{u}_\alpha^2 \, dx$$

$$\leq C\alpha \int_M u_\alpha dv_g \int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx + C \int_{A_\delta} |f(\eta)| \hat{u}_\alpha^2 \, dx + C \int_{A_\delta} |g(\eta)| \hat{u}_\alpha^{2^*} \, dx$$

De plus

$$\int_{A_\delta} |g(\eta)| \hat{u}_\alpha^{2^*} \, dx \quad \leq \quad C (\sup_{A_\delta} \hat{u}_\alpha)^{2^*-2} \int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx \quad \leq \quad C \int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx$$

D'où

$$\alpha \int_M u_\alpha dv_g \int_{B_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx - \int_{B_\delta} \left(2h + x^k \partial_k h\right) \eta^2 \hat{u}_\alpha^2 \, dx$$

$$\leq C\alpha \int_M u_\alpha dv_g \int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx + C \int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx \tag{4.14}$$

Si on montre que pour $\delta > 0$ assez petit, on a

$$\int_{B_\delta} \left(2h + x^k \partial_k h\right) \eta^2 \hat{u}_\alpha^2 \, dx \leq 0 \tag{4.15}$$

Alors (4.14) devient après avoir diviser par $\alpha \left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2$:

$$\frac{\int_{B_\delta} \hat{u}_\alpha \ \ dx}{\int_M u_\alpha dv_g} \leq C \frac{\int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx}{\int_M u_\alpha dv_g} + \frac{C}{\alpha} \frac{\int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \tag{4.16}$$

Or (4.12) montre que "la concentration en norme L^1" a lieu car $\alpha \to +\infty$. Cela donne aussi puisque $\tilde{g}$ est plate sur $B_{x_i}(\delta)$ (donc " $dx = dv_{\tilde{g}} = \varphi^{2^*} dv_g$") :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha \, dx}{\int_M u_\alpha dv_g} \quad = \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{A_\delta} \varphi^{2^*-1} u_\alpha dv_g}{\int_M u_\alpha dv_g} \quad \leq \quad C \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{A_\delta} u_\alpha dv_g}{\int_M u_\alpha dv_g} \quad = \quad 0$$

De plus par le procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser,

$$\frac{\int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} \quad \leq \quad C \left(\frac{\sup_{M \setminus B_\delta} \hat{u}_\alpha}{\int_M u_\alpha dv_g} \right)^2 \quad \leq \quad C$$

Donc

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{C}{\alpha} \frac{\int_{A_\delta} \hat{u}_\alpha^2 \, dx}{\left(\int_M u_\alpha dv_g\right)^2} = 0$$

Un passage à la limite pour $\alpha \to +\infty$ dans (4.16) implique alors :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{B_\delta} \hat{u}_\alpha \ dx}{\int_M u_\alpha dv_g} = 0$$

ce qui contredit la concentration en norme L^1 donnée par (4.12), et termine donc la preuve.

Reste donc à montrer (4.15). Il suffit de le montrer sur chaque $B_{x_i}(\delta)$.

$$2h + (x^k \partial_k h) = \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g \left(2\varphi^{2-2^*} + x^k \partial_k \varphi^{2-2^*}\right) + \frac{n-2}{4(n-1)} \varphi^{2-2^*} (x^k \partial_k Scal_g)$$

φ est strictement positive, on peut choisir $\delta > 0$ assez petit pour qu'il existe $C > 0$ tel que sur $B_{x_i}(\delta)$

$$2\varphi^{2-2^*} + x^k \partial_k \varphi^{2-2^*} \le C$$

d'où

$$2h + (x^k \partial_k h) \le C(Scal_g + x^k \partial_k Scal_g)$$

et on montre que pour $\delta > 0$ assez petit :

$$\forall x \in B_{x_i}(\delta), \qquad (Scal_g + x^k \partial_k Scal_g)(x) \le 0 \tag{4.17}$$

Cela est évident dans le cas où $Scal_g(x_i) < 0$, la démonstration est alors terminée. Dans le cas où $Scal_g(x_i) = 0$ par hypothèse le hessien de la courbure scalaire est non dégénéré en x_i et donc stritement négatif car x_i est un maximum de $Scal_g$. Le développement limité de la courbure scalaire sur $B_{x_i}(\delta)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (Scal_g + x^k \partial_k Scal_g)(x) &= Scal_g(0) + 2x^j \partial_j Scal_g(x_i) + x^j x^k \partial_{jk} Scal_g(x_i) + \circ(|x|^2) \\ &= x^j x^k \partial_{jk} Scal_g(x_i) + \circ(|x|^2) \\ &< 0 \qquad \text{pour } \delta \text{ assez petit} \end{aligned}$$

(4.15) est ainsi démontré ce qui achève la démonstration du théorème 4.1. □

4.3 Une première multiplicité par comparaison des énergies

Dans l'étude de la fonction énergie que l'on vient de faire, deux types de solutions apparaissent pour l'équation (E_α) : la solution constante $\overline{u}_\alpha = (\alpha v_g)^{\frac{n-2}{4}}$ définie pour tout $\alpha > 0$ et éventuellement une solution globalement minimisante $u_{\alpha m}$ pour l'équation (E_α). L'énergie de la solution constante vaut

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathcal{E}(\overline{u}_\alpha) = \alpha^{\frac{n}{2}} v_g^{\frac{n+2}{2}}$$

alors que celle de la solution globalement minimisante, lorsqu'elle existe, vérifie :

$$\mathcal{E}(u_{\alpha m}) < K_n^{-n/2}.$$

On a vu que l'existence de solution minimisante est garantie pour tout $\alpha > 0$ si $\max Scal_g > 0$, donc sur des variétés où l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale est fausse. Dans ce cas, dès que $\alpha \geq K_n^{-1}\ v_g^{-\frac{n+2}{n}}$, les deux solutions précédentes ont des énergies distinctes et sont donc différentes.
Dans le cas où l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale est vraie, une condition suffisante d'existence de solution globalement minimisante est $\alpha < C_0(M,g)$. Les deux solutions sont donc d'énergies différentes si

$$\alpha \in \left[K_n^{-1}\ v_g^{-\frac{n+2}{n}}, C_0(M,g)\right[, \tag{4.18}$$

intervalle qui est bien non vide pour certaines variétés d'après la proposition 1.1. Les deux résultats précédents sont résumés dans le

Lemme 4.1. *S'il existe une solution de l'équation* (E_α) *globalement minimisante, alors cette solution est d'énergie différente de celle de la solution constante si*

$$\alpha \geq \frac{1}{K_n v_g^{\frac{n+2}{n}}}.$$

On a donc ici un premier résultat simple de multiplicité de solutions obtenu par séparation des énergies. Grâce à l'introduction d'invariance par isométries, on obtient dans les deux parties suivantes, toujours par séparation des énergies, des résultats plus généraux de multiplicité pour l'équation de Sobolev et celle de Sobolev Poincaré. On s'inspire de l'article de Hebey-Vaugon [29] où le cas de l'équation de Sobolev en présence de groupe d'isométries finis est traité.

Dans la deuxième partie, nous étendons le principe de [29] à un cadre plus général grâce aux résultats de Faget [17] pour des équations de type Sobolev.
Dans la troisième partie, nous l'adaptons aux équations de Sobolev Poincaré.

Deuxième partie

Multiplicité de niveaux d’énergies pour des solutions positives de l’équation de Sobolev en présence d’isométries

Chapitre 5

Multiplicité de solutions positives de l'équation de Sobolev par séparation des énergies

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$.
Le point de départ de ce chapitre est la recherche d'exemples de multiplicité de solutions pour l'équation de Sobolev :

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad (E_S^*)$$

où $\alpha > 0$, $f \in C^2(M)$ est strictement positive et $u \in H_1^2(M), u > 0$.
La technique utilisée est inspirée des travaux de Hebey-Vaugon [29] où des résultats de multiplicité sont obtenus pour des équations (E_S^*) particulières : celle de Nirenberg et de Yamabe. L'outil principal pour obtenir des solutions potentiellement différentes est de leur imposer des invariances par des sous-groupes du groupe des isométries de (M, g) noté $Isom_g(M)$. Pour que ces solutions soient ensuite effectivement différentes, il suffit que leur énergie le soit (voir la définition 1.2).
Nous généralisons ici ces résultats grâce aux travaux de Faget [17] et [18] sur l'influence d'un groupe d'isométries sur l'inégalité de Sobolev. Nous obtenons alors par cette méthode des résultats de multiplicité de solutions pour l'équation de Sobolev en présence d'isométries :

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{\frac{n+2-k}{n-2-k}} \qquad (E_S^\sharp)$$

où $k \geq 0$ est la dimension minimale des orbites des groupes d'isométries introduits. Lorsqu'il existe une orbite finie, donc lorsque $k = 0$, on retrouve l'équation (E_S^*).
Plus précisément, on met en évidence des fonctions f telles qu'il existe un intervalle pour le paramètre α sur lequel il existe deux (ou plus) niveaux d'énergie de solutions différents pour l'équation (E_S^*) ou $(E_S^\sharp)$, et donc deux (ou plus) solutions différentes.

5.1 Introduction

a) Quelques rappels sur l'inégalité de Sobolev, l'équation de Sobolev et les invariances par groupes d'isométries

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, de dimension $n \geq 3$.
En premier lieu, nous rappelons l'inégalité de Sobolev optimale. La continuité de l'inclusion de l'espace de Sobolev $H_1^2(M)$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ donne l'existence de deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\| u\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq A\left(\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2\right). \tag{I_{AB}}$$

Hebey-Vaugon dans [30] montrent, grâce à une étude précise d'un "phénomène de concentration", que $K_n = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}$ est atteinte. En particulier, K_n est la borne inférieure des $A > 0$ pour lesquels il existe une constante $B > 0$ telle que l'inégalité (I_{AB}) est vraie pour tout $u \in H_1^2(M)$. On rappelle que K_n est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne au sens où elle est la plus petite constante strictement positive K pour laquelle on a :

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{(n-2)/n} \leq K \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx.$$

La constante A étant fixée à cette valeur, on définit $B_0(M, g)$ comme la borne inférieure des $B > 0$ tels que l'inégalité (I_{AB}) est vraie avec $A = K_n$ pour tout $u \in H_1^2(M)$. Hebey-Vaugon [28] montrent la validité sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ de "l'inégalité de Sobolev optimale" :

$$\forall u \in H_1^2(M), \qquad \| u\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq K_n\left(\|\nabla u\|_2^2 + B_0(M, g)\|u\|_2^2\right). \tag{I_S^{opt}}$$

Précisons que la valeur exacte de $B_0(M, g)$ n'est actuellement connue, dans le cadre des variétés compactes, que pour la sphère standard où elle vaut $B_0(S^n, h_n) = \frac{n(n-2)}{4}$. Pour les autres variétés, on ne dispose que de minorations et parfois de majorations de $B_0(M, g)$. Elles sont présentées dans la sous-section 5.1.e) et montrent que, contrairement à K_n qui ne dépend que de la dimension de la variété, $B_0(M, g)$ dépend en plus de sa géométrie. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note $B_{0,g}$ pour $B_0(M, g)$.

Ce premier rappel étant fait, on s'intéresse aux solutions strictement positives d'équations du type :

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{p-1} \tag{E_p}$$

où $p > 0$, $f \in C^0(M)$ et $\alpha > 0$. Le problème d'existence de solutions de (E_p) appartenant à $H_1^2(M)$ a déjà été assez largement étudié : pour $p < \frac{2n}{n-2}$, la méthode variationnelle donne assez directement l'existence de solutions grâce à la compacité de l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^p(M)$. Pour $p = \frac{2n}{n-2}$, l'inclusion n'est plus compacte, l'existence de solutions est plus difficile à obtenir et la constante $K_n = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}$ joue alors un rôle essentiel (voir le théorème E). Ainsi, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ est la valeur "critique" pour la compacité

de l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^p(M)$. Enfin, lorsque $p > \frac{2n}{n-2}$, l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^p(M)$ n'a plus lieu et la technique présentée ici ne permet pas de trouver de solutions à l'équation (E_p).
Cependant, il existe d'autres techniques permettant de trouver des solutions pour l'équation (E_p) lorsque $p > 2^*$. L'une d'entre elles résulte de la méthode variationnelle classique mais où on impose aux solutions d'être invariantes par un groupe G d'isométries de la variété. On introduit pour cela les notations :

$$\begin{aligned} H_{1,G}^2(M) &= \{u \in H_1^2(M), \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\} \\ C_G^p(M) &= \{u \in C^p(M), \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\} \end{aligned}$$

Le groupe G agit sur la variété et on utilise le vocabulaire classique suivant : pour $x \in M$, $O_x^G = \{\sigma(x), \sigma \in G\}$ est l'orbite de x sous G et $S_x^G = \{\sigma \in G, \sigma(x) = x\}$ est le stabilisateur de x. On note $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites. Une orbite O_x^G est dite principale si pour tout $y \in M$, S_y^G possède un sous-groupe conjugué à S_x^G. Les orbites principales sont de dimension maximale (mais la réciproque est fausse). La réunion Ω des orbites principales est un ouvert dense de M et Ω/G est une variété quotient (voir la définition suivante). Plus précisément, en notant π_G la surjection canonique $\pi_G : \Omega \to \Omega/G$, le triplet $(\pi_G, \Omega, \Omega/G)$ est une fibration dont chaque fibre est une orbite. Pour tous ces résultats, on renvoie par exemple à Bredon [5] et à Gallot-Hulin-Lafontaine [20]. Dans le cas où toutes les orbites sont principales, on utilise dans notre travail le vocabulaire suivant :

Définition 5.1. *Soient (M, g) une variété riemanienne compacte et G un sous-groupe de $Isom_g(M)$. Si toutes les orbites sous G sont principales, alors on dit que G "permet le passage au quotient" : cela signifie que sur l'espace topologique M/G, de l'ensemble des orbites, il existe une unique structure de variété et une unique métrique riemannienne $\tilde{g}$ induite par g telles que $\pi : M \to M/G$ soit une submersion riemannienne.*

Grâce à l'introduction de sous-groupes de $Isom_g(M)$, Hebey-Vaugon [30] montrent que la valeur de l'exposant "critique" pour la compacité des inclusions des espaces de Sobolev G-invariants dans les espaces L^p peut être augmentée jusqu'à une valeur notée $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k} \geq 2^*$ qui, s'il n'y a pas d'orbite finie, est strictement supérieure à 2^* :

Théorème C (Hebey-Vaugon [30]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit G un sous groupe compact de $Isom_g(M)$ et $k \geq 0$ la plus petite dimension des orbites sous G.*
Si $n - k \leq 2$ alors pour tout $q \geq 1$, $H_{1,G}^2(M) \subset L^q(M)$ et l'inclusion est continue et compacte.
Si $n - k > 2$ alors pour tout $q \in [1, \frac{2(n-k)}{n-2-k}]$, l'inclusion $H_{1,G}^2(M) \subset L^q(M)$ est continue. Elle est compacte seulement si $q < \frac{2(n-k)}{n-2-k}$.

De la continuité de l'inclusion $H_{1,G}^2 \subset L^{\frac{2(n-k)}{n-2-k}}$ découle une inégalité fonctionnelle :

Théorème D (Faget [18]). *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites* *et $A > 0$ le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que $n-k > 2$ et on note $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists B_{\varepsilon,G}(M,g) > 0, \forall u \in H^2_{1,G}(M)$,*

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\|\nabla u\|^2_2 + B_{\varepsilon,G}(M,g)\|u\|^2_2\right], \qquad (I^G_S)$$

et $\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}$ est la plus petite première constante pour laquelle l'inégalité précédente peut être vraie pour tout $u \in H^2_{1,G}(M)$. De plus, si une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ énoncée ci-dessous est vérifiée, alors il existe $B > 0$, tel que $\forall u \in H^2_{1,G}(M)$,

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left[\|\nabla u\|^2_2 + B\|u\|^2_2\right]. \qquad (5.1)$$

$(\mathcal{H}_1)$: pour toute orbite $O^G_{x_0}$ de dimension minimale $k \geq 0$ et de volume minimal $A > 0$, il existe un sous-groupe d'isométries G' et $\delta > 0$ tels que :
i) Sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M / d_g(x, O_{x_0}) < \delta\}$, les G'-orbites sont principales.
ii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}, \qquad O^{G'}_x \subset O^G_x$ et $O^{G'}_{x_0} = O^G_{x_0} := O_{x_0}$.
iii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}, \qquad A = vol_g O_{x_0} \leq vol_g O^{G'}_x$.

$(\mathcal{H}_2)$: pour toute orbite $O^G_{x_0}$ de dimension minimale $k \geq 0$ et de volume minimal $A > 0$, il existe un sous-groupe normal de G noté H et $\delta > 0$ tels que :
i) Sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M / d_g(x, O_{x_0}) < \delta\}$, les H-orbites sont principales.
ii) $O^H_{x_0} = O^G_{x_0} = O_{x_0}$.
iii) $\forall x \in O_{x_0,\delta},\ x \notin O_{x_0}, \quad dim O^G_x > k$.
iv) $\forall x \in O_{x_0}$, x est un point critique pour la fonction $v_H(y) = vol_g O^H_y$.

Remarque 13. ***Notations lorsqu'il existe un sous-groupe H vérifiant une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$:*** *comme les H-orbites sont principales sur $O_{x_0,\delta}$, $O_{x_0,\delta}/H$ est une variété que l'on munit de la métrique $\tilde{g}$ induite par g pour laquelle la projection canonique $\pi_H : O_{x_0,\delta} \to O_{x_0,\delta}/H$ est une submersion riemannienne. Pour tout $x \in M$, on définit la fonction v_H par $v_H(x) = vol_g(O^H_x)$. Pour tout $x \in O_{x_0,\delta}$, on note $\overline{x}_H = \pi_H(O^H_x)$ et $\tilde{v}_H$ la fonction définie par $\forall \overline{x} \in O_{x_0,\delta}/H,\ \tilde{v}_H(\overline{x}) = vol_g(\pi^{-1}_H(\overline{x})) = v_H(x)$.*

Lorsque (5.1) est vérifiée, on définit la meilleure deuxième constante $B_{0,G}(M,g)$ comme la borne inférieure des $B > 0$ tels que (5.1) est vraie pour tout $u \in H^2_{1,G}(M)$. On a alors : $\forall u \in H^2_{1,G}(M)$,

$$\| u\|^2_{\frac{2(n-k)}{n-2-k}} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left(\|\nabla u\|^2_2 + B_{0,G}(M,g)\ \|u\|^2_2\right). \qquad (I^{G,opt}_S)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $B_{0,G}$ pour $B_{0,G}(M,g)$. Des précisions sur cette constante nous permettant d'exhiber des exemples de multiplicité sont donnés dans la sous-section 5.1.e).

Comme dans le cas "sans isométries", l'inégalité (I_S^G) permet, grâce à la méthode variationnelle, d'obtenir des solutions, dans ce cas G-invariantes, pour l'équation :

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{2^\sharp - 1} \tag{$E_S^\sharp$}$$

où $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$. L'équation ($E_S^\sharp$) est appelée dans cette thèse "équation de Sobolev en présence d'isométries". L'existence de solutions pour une telle équation s'obtient classiquement par un problème de minimisation sous contrainte. On note C_α la fonctionnelle définie par :

$$\forall \alpha > 0, \forall u \in H_1^2(M), \qquad C_\alpha(u) := \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \alpha \int_M u^2 dv_g}{\left(\int_M f|u|^{2^\sharp} dv_g\right)^{2/2^\sharp}}$$

que l'on minimise sur l'ensemble $\mathcal{A}_G^+ = \{u \in H_{1,G}^2(M), \int_M f|u|^{2^\sharp}\, dv_g > 0\}$ et on note

$$\Upsilon_G := \inf_{u \in \mathcal{A}_G^+} C_\alpha(u).$$

Faget montre alors le théorème d'existence de solutions suivant :

Théorème E (**Faget [17]**). *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un sous groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la plus petite dimension des G-orbites, $A > 0$ le volume minimum des orbites de dimension k et $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^0(M)$ invariante par G et de maximum strictement positif. On suppose que $n - k > 2$. Alors*

$$\Upsilon_G \leq \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\,(\sup_M f)^{\frac{n-2-k}{n-k}}}, \tag{5.2}$$

et si

$$\Upsilon_G < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\,(\sup_M f)^{\frac{n-2-k}{n-k}}} \tag{5.3}$$

alors il existe $u \in C^2(M) \cap \mathcal{A}_G^+$ strictement positive vérifiant l'équation :

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{2^\sharp - 1} \tag{$E_S^\sharp$}$$

et telle que u est un minimiseur pour Υ_G au sens où $C_\alpha(u) = \Upsilon_G$.

Remarquons qu'une condition nécessaire pour l'existence de solutions à ($E_S^\sharp$) est $\sup f > 0$. Nous nous plaçons dans la suite sous l'hypothèse plus restrictive $f > 0$. Pour l'étude de ce type d'équation ($E_S^\sharp$), on définit le même vocabulaire que celui utilisé dans la première partie pour l'équation de Sobolev Poincaré :

Définition 5.2. *: Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$ et $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites. Soit $u \in C_G^2(M)$ une solution de ($E_S^\sharp$). L'énergie d'une telle solution est définie par :*

$$\mathcal{E}(u) = \int_M f|u|^{\frac{2(n-k)}{n-2-k}}\, dv_g.$$

D'autre part, cette solution est dite $G-$minimisante si

$$C_\alpha(u) = \Upsilon_G := \inf_{u \in \mathcal{A}_G^+} C_\alpha(u).$$

Ainsi, l'énergie d'une solution u qui est G-minimisante vérifie :

$$\mathcal{E}(u) = \Upsilon_G^{\frac{n-k}{2}}. \tag{5.4}$$

b) Existences de solutions positives G-minimisantes pour $(E_S^\sharp)$

Le théorème d'existence E implique des conditions suffisantes sur $\alpha > 0$ et $f \in C_G^0(M)$ de l'équation $(E_S^\sharp)$ pour avoir l'existence de solutions. Tout d'abord, lorsque $f \equiv 1$, on obtient par définition de $B_{0,G}$ et par l'inégalité (5.3) du théorème E :

Corollaire 5.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G un groupe d'isométries de (M,g) et $k \geq 0$ la dimension minimale des $G-$orbites tel que $n-k > 2$. On suppose que l'inégalité de Sobolev optimale en présence d'isométries $(I_S^{G,opt})$ est vraie. Si*

$$0 < \alpha < B_{0,G}(M,g),$$

alors il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$ solution $G-$minimisante strictement positive de l'équation

$$\Delta_g u + \alpha u = u^{\frac{n+2-k}{n-2-k}}. \tag{$\overline{E_S^\sharp}$}$$

D'autre part, le test de la fonction $1 \in \mathcal{A}_G^+$ dans C_α donne, toujours grâce à (5.3) :

Corollaire 5.2. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G un groupe d'isométries de (M,g), $k \geq 0$ la dimension minimale des $G-$orbites que l'on suppose vérifier $n-k > 2$, $A > 0$ le volume minimal des orbites de dimension k et $f \in C_G^0(M)$ telle que $\int_M f\, dv_g > 0$. On note $⨍ f\, dv_g$ la valeur moyenne de f. Si*

$$\alpha < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{v_g^{\frac{2}{n-k}} K_{n-k}} \left(\frac{⨍ f\, dv_g}{\sup f} \right)^{\frac{n-2-k}{n-k}},$$

alors il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$ solution positive et $G-$minimisante de l'équation $(E_S^\sharp)$.

Cependant ce corollaire ne sera pas compatible avec les conditions de multiplicité. Nous nous servirons d'un autre résultat obtenu par Faget [18] où elle calcule la valeur de la fonctionnelle C_α (dans le cas où f est constante égale à 1) pour des fonctions test obtenues en rendant $G-$invariantes celles utilisées classiquement et que l'on a présentées dans le lemme 1.2 de la première partie. En adaptant son calcul au cas où f n'est pas constante, on obtient :

Corollaire 5.3. *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$, G un sous groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites que l'on suppose vérifier $n-k \geq 4$, $A > 0$ le volume minimal des G-orbites de dimension k et*

$x_0 \in M$ un point dont l'orbite sous G est de dimension k et de volume A. On suppose qu'il existe un groupe d'isométries H pour lequel l'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ du théorème D est vraie. On note alors $\pi_H : O_{x_0,\delta} \to O_{x_0,\delta}/H$ et $\tilde{g}$ la métrique quotient induite par g sur $O_{x_0,\delta}/H$. Soit enfin $f \in C^2_G(M)$, dont le maximum est atteint en x_0, si les conditions suivantes sont remplies

$$\begin{cases} (n-4-k)\,\Delta_g f(x_0) = 0 \\ \alpha < \frac{n-2-k}{4(n-1-k)}\left(\frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}_H(\bar{x}_0)}{A} + S\,cal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)\right) \end{cases} \tag{5.5}$$

alors il existe une solution positive $G-$invariante et $G-$minimisante à l'équation $(E^\sharp_S)$.

Remarque 14. *Si les $G-$orbites sont toutes principales (c'est-à-dire si G permet le passage au quotient) et de volume constant, alors le corollaire précédent donne l'existence d'une solution G-minimisante et -invariante pour $(E^\sharp_S)$ dès que $\alpha > 0$ et $f \in C^2_G(M)$ de maximum atteint en $x_0 \in M$ vérifient :*

$$\begin{cases} (n-4-k)\,\Delta_g f(x_0) = 0 \\ \alpha < \frac{n-2-k}{4(n-1-k)} S\,cal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) \end{cases} \tag{5.5.bis}$$

Démonstration du corollaire 5.3

Sur $O_{x_0,\delta}$, on considère pour $\varepsilon > 0$ les fonctions :

$$\tilde{u}_\varepsilon = (\varepsilon + \tilde{r}^2)^{1-N/2} - (\varepsilon + \delta^2)^{1-N/2}$$

où $\tilde{r} = d_{\tilde{g}}(., \bar{x}_0)$ et $N = n - k$. Alors, en notant $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon \circ \pi_H$ et grâce aux formules de passage (5.8) et (5.9) présentées au début de la démonstration de la proposition 5.4, des calculs maintenant classiques (bien que techniquement longs) et analogues à ceux détaillés dans le lemme 1.2 donne :

$$C_\alpha(u_\varepsilon) \le \frac{A^{2/N}}{K_N\,\tilde{f}(\bar{x}_0)^{2/2^\sharp}}$$
$$\times\left[1 + \frac{\varepsilon}{N(N-4)}\left(\frac{\alpha\;4(N-1)}{N-2} + \frac{(N-4)\Delta_{\tilde{g}}\tilde{f}(\bar{x}_0)}{2\tilde{f}(\bar{x}_0)} - \frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}_H(\bar{x}_0)}{A} - S\,cal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)\right) + \circ(\varepsilon)\right] \quad \text{pour } n-k>4$$

$$\times\left[1 + \frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{8}\left(S\,cal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) + \frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}_H(\bar{x}_0)}{A} - 6\alpha\right) + \circ(\varepsilon\ln\varepsilon)\right] \quad \text{pour } n-k=4$$

Or

$$\Delta_{\tilde{g}}\tilde{f}(\bar{x}_0) = \Delta_g f(x_0).$$

On montre ce résultat de la manière suivante : pour tout $w \in C^0(O_{x_0,\delta})$ à support compact, grâce à des intégrations par parties et aux formules de passage (5.8) et (5.9), on a

$$\begin{aligned}
\int_{O_{x_0,\delta}} \Delta_g f\, w\, dv_g &= \int_{O_{x_0,\delta}} \nabla f \nabla w\, dv_g = \int_{O_{x_0,\delta}} \left(\tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \tilde{w}\right) \circ \pi_H\, dv_g \\
&= \int_{O_{x_0,\delta}/H} \left(\tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \tilde{w}\right) \tilde{v}_H\, dv_{\tilde{g}} = \int_{O_{x_0,\delta}/H} \left(\Delta_{\tilde{g}} \tilde{f}\, \tilde{v}_H - \tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \tilde{v}_H\right) \tilde{w}\, dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_{O_{x_0,\delta}/H} \left(\Delta_{\tilde{g}} \tilde{f} - \tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \ln \tilde{v}_H\right) \tilde{w}\, \tilde{v}_H\, dv_{\tilde{g}} = \int_{O_{x_0,\delta}} \left[\left(\Delta_{\tilde{g}} \tilde{f} - \tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \ln \tilde{v}_H\right) \tilde{w}\right] \circ \pi_H\, dv_g \\
&= \int_{O_{x_0,\delta}} \left[\left(\Delta_{\tilde{g}} \tilde{f} - \tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \ln \tilde{v}_H\right) \circ \pi_H\right] w\, dv_g
\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta_g f(x_0) = \left(\Delta_{\tilde{g}} \tilde{f} - \tilde{\nabla} \tilde{f} \tilde{\nabla} \ln \tilde{v}_H\right)(\bar{x_0})$$

et comme d'après les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$, le point $\bar{x_0}$ est critique pour $\tilde{v}_H$, on en déduit bien que $\Delta_g f(x_0) = \Delta_{\tilde{g}} \tilde{f}(\bar{x_0})$. Alors (5.5) implique

$$C_\alpha(u_\varepsilon) < \frac{A^{2/(n-k)}}{K_{n-k} \sup f^{2/2^\sharp}}$$

et le théorème E permet d'achever la démonstration.$\square$

c) Unicité et multiplicité pour des équations critiques de type (E_S^*) :

Nous commençons par donner les principaux résultats connus d'unicité de solution pour l'équation de Yamabe :

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = u^{2^*-1} \qquad (E_Y)$$

Proposition 5.1. ***1)*** *Sur la phère standard (S^n, h_n) où $Scal_{h_n} = n(n-1)$, il existe une infinité de solutions pour l'équation (E_Y) : la solution constante $\bar{u} = \left(\frac{n(n-2)}{4}\right)^{\frac{n-2}{4}}$ ainsi que les fonctions $u_{\beta,P}$ définies dans Aubin [2] par*

$$u_{\beta,P} = \left(\frac{n(n-2)}{4}(\beta^2-1)\right)^{\frac{n-2}{4}} (1-\cos r_P)^{1-\frac{n}{2}}$$

où $\beta > 1$ et r_P est la distance géodésique à un point P donné de la sphère. Elles ont toutes la même énergie :

$$\mathcal{E}(u_{\beta,P}) = \mathcal{E}(\bar{u}) = K_n^{-\frac{n}{2}}.$$

2) *Sur une variété riemannienne (M, g) compacte non conformément difféomorphe à la sphère standard, l'équation (E_Y) admet une unique solution (qui est la solution constante) si l'une des conditions suivantes est vraie :*
a) *Il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g pour laquelle $\int_M Scal_{\tilde{g}}\, dv_{\tilde{g}} \leq 0$ (Aubin [2])*
b) *Il existe une métrique conforme à g qui est d'Einstein (Obata [34]).*

Un autre résultat d'unicité intéressant concernant des équations plus générales que (E_Y) est obtenu par Gidas et Spruck [21]. La version présentée ici est due à Bidaut-Véron et Véron [4] :

Proposition 5.2 (**Bidaut-Véron, Véron [4]**). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ dont la courbure de Ricci est notée Ric_g. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$Ric_g \geq \frac{4(n-1)}{n(n-2)}\alpha\, g, \tag{5.6}$$

l'inégalité devant être stricte si (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère standard. Alors la solution constante $\overline{u} = \alpha^{\frac{n-2}{4}}$ est la seule solution strictement positive de l'équation

$$\Delta_g u + \alpha u = u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{$\overline{E}_S^*$}$$

Remarque 15. *Sur la sphère standard, il y a donc unicité de la solution de l'équation $(\overline{E}_S^*)$ dès que $\alpha < \frac{n(n-2)}{4}$ et pour $\alpha = \frac{n(n-2)}{4}$, il y a une infinité de solutions qui sont toutes de même énergie. Ainsi, pour obtenir un résultat de multiplicité sur la sphère standard par séparation des énergies pour l'équation (E_S^*) où $\alpha \in]0, \frac{n(n-2)}{4}]$, il faudra supposer f non constante.*

Pour obtenir des multiplicités de solutions sur la sphère standard à partir de l'équation (E_S^*), Esposito [16] n'introduit pas de fonction non constante au second membre mais permet au paramète α d'être non constant. Il obtient le résultat suivant, qui ne nous sert pas dans la suite mais que l'on mentionne tout de même pour culture :

Proposition 5.3 (**Esposito [16]**). *Sur la sphère standard (S^n, h_n), on considère l'équation*

$$\Delta_{h_n} u + \alpha(x)\, u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{5.7}$$

où $u \in H_1^2(S^n), u > 0$ et $\alpha \in C^0(S^n)$ définie pour $x \in S^n$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$ par

$$\alpha(x) = \frac{n(n-2)}{4} + \varepsilon F(x) + G(\varepsilon, x)$$

telle que $\|G(\varepsilon, x)\| = \circ(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors pour $|\varepsilon|$ petit, l'équation (5.7) admet une solution ; elle en admet au moins deux solutions si F change de signe et $n \geq 4$ ou si $n = 3$ et $\int_{S^n} F\, dv_{h_n} = 0$ avec $F \not\equiv 0$.

d) Vers la multiplicité

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir des résultats de multiplicité de solutions positives pour les équations de type "critique" $(E_S^\sharp)$ et (E_S^*) par séparation des énergies. Ces équations sont dites "critiques" dans le sens où l'exposant $crit - 1$ du second membre (égal à $2^* - 1$ dans (E_S^*) et à $2^\sharp - 1$ dans $(E_S^\sharp)$) correspond à une valeur pour laquelle il y a perte de compacité de l'inclusion de $H_1^2(M)$ ou $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^{crit}(M)$.

Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$. On note $k_i \geq 0$ la dimension minimale des G_i-orbites et $A_i > 0$ le volume minimale des G_i-orbites de dimension k_i. Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ garantissant la validité de $(I_S^{G_i,opt})$, on note $B_{0,G_i}(M,g)$ la seconde meilleure constante $(I_S^{G_i,opt})$ et on a alors :

$$\forall u \in H_{1,G_i}^2(M), \qquad \| u\|^2_{\frac{2(n-k)}{n-2-k}} \leq \frac{K_{n-k}}{A_i^{\frac{2}{n-k}}} \left(\|\nabla u\|_2^2 + B_{0,G_i}(M,g) \, \|u\|_2^2 \right). \qquad (I_S^{G_i,opt})$$

L'idée est alors de trouver deux solutions de $(E_S^\sharp)$, l'une invariante par G_1, l'autre par G_2 et d'imposer des conditions pour qu'elles aient des énergies différentes. Pour cela, on choisit G_1 et G_2 tels que

$$k_1 = k_2 = k \qquad \text{et} \qquad A_1 < A_2.$$

L'hypothèse d'égalité des dimensions minimales des orbites est indispensable car sans elle, les deux solutions ne vérifieraient pas la même équation puisque l'exposant $2^\sharp - 1 = \frac{n+2-k}{n-2-k}$ changerait de valeur.
L'hypothèse $A_1 < A_2$ permet aux actions des deux groupes d'être "assez différentes" pour pouvoir potentiellement séparer les énergies des deux solutions .
Sous réserve que les conditions d'existence et celles assurant la séparation des énergies soient compatibles, on obtient deux solutions différentes. Cette compatibilité se montre grâce à des contrôles précis sur les secondes meilleures constantes $B_{0,G_i}(M,g)$ et $B_0(M,g)$. Les renseignements dont nous disposons actuellement sur ces constantes et qui nous servent pour établir des exemples de multiplicité sont exposés dans la sous-section suivante.

e) La seconde meilleure constante $B_{0,G}(M,g)$

Commençons par examiner le cas particulier d'une variété (M,g) où l'action du groupe G permet le passage au quotient (c'est-à-dire pour laquelle toutes les orbites sont principales, voir la définition 5.1) et où les orbites sont de volume constant.

Proposition 5.4. *Soient (M,g) une variéte riemanienne compacte de dimension $n \geq 3$ sur laquelle opère un groupe d'isométries G permettant le passage au quotient et tel que les $G-$orbites sont toutes de même dimension $k \geq 0$ tel que $n-k > 2$ et de volume constant $A > 0$. Alors $(I_S^{G,opt})$ est vraie et*

$$B_{0,G}(M,g) = B_0(M/G, \tilde{g}),$$

où $\tilde{g}$ est la métrique quotient induite par g sur M/G.

Démonstration de la proposition 5.4 :
La validité de l'inégalité $(I_S^{G,opt})$ provient du fait que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est immédiatement vérifiée si on prend comme sous groupe normal de G le groupe G lui-même.
L'action de G permet de définir la variété M/G sur laquelle on note $\tilde{g}$ la métrique quotient induite par g sur M/G, π la submersion riemannienne de (M,g) dans $(M/G,\tilde{g})$ et

$\tilde{v}$ la fonction définie sur M/G par : $\forall y \in M/G, \tilde{v}(y) = vol_g(\pi^{-1}(y)) = vol_g(O_y^G)$.
Les formules de passage suivantes sont valables : $\forall \tilde{u} \in H_1^2(M/G)$, en notant $u = \tilde{u} \circ \pi$

$$\int_M \tilde{u} \circ \pi \, dv_g = \int_{M/G} \tilde{v}\tilde{u} \, dv_{\tilde{g}} = A \int_{M/G} \tilde{u} \, dv_{\tilde{g}} \tag{5.8}$$

et

$$\int_M |\nabla_g(\tilde{u} \circ \pi)|^2 \, dv_g = \int_M |\nabla_{\tilde{g}}\tilde{u}|^2 \circ \pi \, dv_g = \int_{M/G} \tilde{v}|\nabla_{\tilde{g}}\tilde{u}|^2 \, dv_{\tilde{g}} = A \int_{M/G} |\nabla_{\tilde{g}}\tilde{u}|^2 \, dv_{\tilde{g}}. \tag{5.9}$$

L'inégalité de Sobolev optimale sur la variété $(M/G, \tilde{g})$ de dimension $n-k$ s'écrit : $\forall \tilde{u} \in H_1^2(M/G)$,

$$\left(\int_{M/G} |\tilde{u}|^{2^\sharp} \, dv_{\tilde{g}} \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq K_{n-k} \left[\int_{M/G} |\nabla_{\tilde{g}}\tilde{u}|^2 \, dv_{\tilde{g}} + B_0(M/G, \tilde{g}) \int_{M/G} \tilde{u}^2 \, dv_{\tilde{g}} \right].$$

Et, en utilisant les formules de passage rappelées ci-dessus, on revient sur (M, g) :
$\forall u \in H_{1,G}^2(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^\sharp} \, dv_g \right)^{2/2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left[\int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + B_0(M/G, \tilde{g}) \int_M u^2 \, dv_g \right].$$

Ainsi (I_S^G) est valable pour $\varepsilon = 0$ et on peut définir la seconde meilleure constante $B_{0,G}(M, g)$ qui par sa minimalité vérifie $B_{0,G}(M, g) \leq B_0(M/G, \tilde{g})$.
L'inégalité dans l'autre sens est obtenue en faisant le raisonnement inverse : les fonctions de $H_{1,G}^2(M)$ vérifient l'équation de Sobolev optimale en présence d'isométries $(I_S^{G,opt})$ sur (M, g), on passe cette équation sur la variété quotient grâce aux mêmes formules de passage. C'est alors la minimalité de $B_0(M/G, \tilde{g})$ qui nous donne l'inégalité voulue. La proposition est démontrée.$\square$

Faisons quelques rappels sur la seconde meilleure constante $B_0(M, g)$ de l'inégalité de Sobolev optimale sans isométries (I_S^{opt}). La seule valeur actuellement connue pour $B_0(M, g)$ dans le cadre des variétés compactes est celle de la sphère standard : $B_0(S^n, h_n) = \frac{n(n-2)}{4}$. Sur une variété compacte, on sait seulement que $B_0(M, g)$ dépend de la dimension de la variété et de sa géométrie comme le montre le simple test de la constante 1 dans l'inégalité (I_S^{opt}) qui donne directement la minoration :

$$B_0(M, g) \geq \frac{1}{K_n \, v_g^{\frac{2}{n}}}. \tag{5.10}$$

Une autre minoration est obtenue classiquement grâce aux fonctions test particulières présentées dans le corollaire 5.3 de cette partie ainsi que dans le corollaire 1.2 de la première partie :

$$B_0(M, g) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} \max_M Scal_g. \tag{5.11}$$

Dans certains cas particuliers, il existe aussi des majorations de $B_0(M, g)$. Dans [29], Hebey-Vaugon traitent le cas de certaines variétés conformément plates :

Proposition 5.5 (**Hebey-Vaugon [29]**). ***a)*** *Soit $G \subset O(n+1)$ un groupe cyclique d'ordre A agissant librement sur la sphère standard (S^n, h_n), $n \geq 3$. On munit S^n/G de la métrique quotient g induite par h_n. Alors*

$$\frac{A^{2/n}n(n-2)}{4} \leq B_0(S^n/G, g) \leq \left(1 + \frac{A^2}{4}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1 + \frac{n(n-2)}{4}. \tag{5.12}$$

b) *Soient $S^1(t)$, $t > 0$ le cercle de rayon t centré en 0 dans $\mathbb{R}^2$ et $S^1(t) \times S^{n-1}$ la variété de dimension $n \geq 3$ munie de la métrique $h_1 \times h_{n-1}$ produit des deux métriques standards de $S^1(t)$ et S^{n-1}. Alors*

$$\frac{(n-2)^2}{4} \leq B_0(S^1(t) \times S^{n-1}, h_1 \times h_{n-1}) \leq \frac{1}{4t^2} + \frac{(n-2)^2}{4}. \tag{5.13}$$

En ce qui concerne l'estimation de la seconde meilleure constante $B_{0,G}(M, g)$ de l'inégalité $(I_S^{G,opt})$, seules des minorations sont connues. Elles sont obtenues dans Faget [18] grâce à la technique classique qui consiste à tester des fonctions particulières dans $(I_S^{G,opt})$ (voir la démonstration du corollaire 5.3 pour le détail des calculs) :

Proposition 5.6 (**Faget [18]**). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des $G-$orbites tel que $n-k > 4$ et $A > 0$ le volume minimal des $G-$orbites de dimension k. On suppose qu'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ du théorème D est vérifiée pour un sous-groupe H d'isométries. Alors*

$$B_{0,G}(M, g) \geq \max\left\{\frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{v_g^{\frac{2}{n-k}} K_{n-k}}, \frac{n-2-k}{4(n-k-1)}\left(Scal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) + \frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}_H(\bar{x}_0)}{A}\right)\right\}. \tag{5.14}$$

Avant de présenter nos résultats, précisons que le but de notre travail est d'obtenir des résultats de multiplicité mettant en évidence le rôle fondamental de la seconde meilleure constante. Nous n'avons pas exprimé les théorèmes avec les hypothèses optimales (relatives aux techniques utilisées) car celles-ci sont alors très techniques et peu lisibles. L'objectif est essentiellement de donner de nombreux exemples de multiplicité de solutions positives pour les équations de Sobolev en présence d'isométries $(E_S^\sharp)$ et (E_S^*).

5.2 Premier groupe de résultats obtenus par séparation des énergies

On commence par une première technique qui s'inspire des raisonnements de Hebey-Vaugon [29] pour le problème de Nirenberg et les généralise.

5.2.1 Enoncé du théorème 5.1

Pour faciliter l'écriture du théorème général ainsi que sa démonstration, on introduit une inégalité écrite volontairement sous la forme générale suivante : pour $crit > 2$ fixé,

$\exists P > 0, \exists D > 0, \forall u \in H,$

$$\|u\|_{crit}^2 \leq P\left[\|\nabla u\|_2^2 + D\|u\|_2^2\right] \tag{I_{PD}}$$

où H est un espace fonctionnel inclus dans $H_1^2(M)$ et où (I_{PD}) provient d'une inclusion critique (au sens où elle est continue mais non compacte) de H dans $L^{crit}(M)$.
Citons les deux cas dont nous nous servirons :

Cas 1 : $H = H_1^2(M)$ alors pour tout $\varepsilon \geq 0$, $\begin{cases} crit & = & \frac{2n}{n-2} \\ P & = & K_n + \varepsilon \\ D & = & B_\varepsilon(M,g) \end{cases}$.

L'inégalité (I_{PD}) est alors l'inégalité de Sobolev classique (I_S) et d'après Hebey-Vaugon [28] sa version optimale (c'est-à-dire pour $\varepsilon = 0$) est valable sans hypothèse supplémentaire.

Pour le second cas, on introduit un sous-groupe G des isométries de (M,g) dont la dimension minimale des orbites est notée $k \geq 0$:

Cas 2 : $H = H_{1,G}^2(M)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\begin{cases} crit & = & \frac{2(n-k)}{n-2-k} \\ P & = & \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon \\ D & = & B_{\varepsilon,G}(M,g) \end{cases}$.

L'inégalité (I_{PD}) est alors l'inégalité de Sobolev non optimale en présence d'isométries (I_S^G). Pour pouvoir prendre $\varepsilon = 0$ c'est-à-dire travailler avec l'inégalité optimale $(I_S^{G,opt})$, il suffit d'après le théorème D qu'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ soit vérifiée.

Notre résultat s'énonce sous la forme générale suivante :

Théorème 5.1. *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1- et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que*

$$A_1 < A_2.$$

*Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive, on suppose qu'il existe deux solutions strictement positives de $(E_S^\sharp)$: une solution $u_1 \in H_{1,G_1}^2(M)$ qui est G_1–minimisante et une solution $u_2 \in H_{1,G_2}^2(M)$, G_2–minimisante.
Si pour $\varepsilon \geq 0$, le réel α vérifie les trois inégalités suivantes :*

$$i) \quad \alpha \leq B_{\varepsilon,G_2} \tag{5.15}$$

$$ii) \quad \alpha \geq \frac{(4-crit)crit}{4} D \tag{5.16}$$

$$iii) \quad \alpha > B_{\varepsilon,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} \frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon} - 1\right] \frac{A_2^{\frac{2-crit}{n-k}} K_{n-k}^{\frac{crit-2}{2}}}{v_g^{\frac{(crit-2)(n-2-k)}{2(n-k)}} P^{\frac{crit}{2}}} \left(\frac{(4-crit)crit}{4}\right)^{\frac{crit}{2}} \left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{\frac{(crit-2)(n-2-k)}{2(n-k)}} \tag{5.17}$$

où $B_{\varepsilon,G}$ est la seconde constante dans (I_S^G) et où $\fint f\, dv_g$ est la valeur moyenne de f, alors

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2).$$

En particulier, les solutions u_1 et u_2 sont différentes.

Remarque 16. *Pour que les conditions i) et ii) soient compatibles, il faut que $\frac{(4-crit)crit}{4} D \leq B_{\varepsilon,G_2}$.*
Pour que les conditions i) et iii) soient compatibles, il faut que $crit < 4$, ce qui introduit des restrictions sur la dimension, et aussi que $\varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{2/(n-k)} - 1\right)$. De plus, iii) est d'autant plus facilement vérifiée par α que ε est petit ce qui justifie le fait que, lorsque c'est possible, on choisit la forme optimale ($\varepsilon = 0$) des inégalités utilisées.
Ce théorème montre aussi que si le paramètre α vérifie i) et ii), alors on peut trouver une fonction f pour laquelle iii) est vérifiée. En effet, f est indépendante de tous les autres paramètres du problème (contrairement à A_i par exemple dont la variation entraine aussi celle de B_{0,G_i}). On peut donc augmenter le rapport $\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}$, par exemple en augmentant la valeur maximale de f tout en gardant sa valeur moyenne constante, jusqu'à ce que α vérifie iii). Remarquons que cela est possible dès que le groupe engendré par G_1 et G_2 n'est pas transitif sur la variété (auquel cas une fonction invariante par ces deux groupes est nécessairement constante). Il existe donc des couples (α, f) remplissant les trois conditions de multiplicité. Restera à vérifier la compatibilité entre les conditions d'existence et de multiplicité.

On énonce maintenant les versions du théorème 5.1 suivant le choix de P et D que l'on fait pour l'inégalité (I_{PD}). On les donne dans le cas optimal, c'est-à-dire avec $\varepsilon = 0$. Dans [29], Hebey-Vaugon utilisent comme inégalité (I_{PD}) l'inégalité de Sobolev optimale sans isométries (I_S^{opt}). En utilisant cette même inégalité pour (I_{PD}), nous généralisons leurs résultats dans le théorème 5.1.a). Dans le théorème 5.1.b), l'inégalité $(I_S^{G,opt})$ est utilisée pour (I_{PD}), ce qui donne des nouveaux résultats de multiplicité.

La première version correspond au cas 1 où l'inégalité (I_{PD}) utilisée est l'inégalité optimale de Sobolev (I_S^{opt}) :

Théorème 5.1.a). *Soit (M, g) une variété compacte de dimension $n > 4$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$, tels que les G_1 et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n - k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que :*

$$A_1 < A_2$$

et que les deux inégalités optimales $(I_S^{G_1,opt})$ et $(I_S^{G_2,opt})$ sont vraies.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^0_{G_1 \cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive, on suppose qu'il existe deux solutions strictement positives de $(E_S^\sharp)$: une solution $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M)$ qui est G_1-minimisante et une solution $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M)$, G_2-minimisante.

Si le réel $\alpha > 0$ vérifie les trois inégalités :

$$i) \qquad \alpha \leq B_{0,G_2} \tag{5.18}$$

$$ii) \qquad \alpha \geq \frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(M,g) \tag{5.19}$$

$$iii) \qquad \alpha > B_{0,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right] \frac{A_2^{-\frac{4}{(n-k)(n-2)}} K_{n-k}^{\frac{2}{n-2}}}{v_g^{\frac{2(n-2-k)}{(n-k)(n-2)}} K_n^{\frac{n}{n-2}}} \left(\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\right)^{\frac{n}{n-2}} \left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{\frac{2(n-2-k)}{(n-k)(n-2)}} \tag{5.20}$$

Alors

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2).$$

En particulier, les solutions u_1 et u_2 sont différentes.

Notons que l'hypothèse $n > 4$ résulte de la remarque 16 car $\frac{2n}{n-2} > 4 \Leftrightarrow n > 4$.
La seconde version correspond au cas 2 où l'inégalité (I_{PD}) utilisée est l'inégalité de Sobolev optimale en présence d'isométries $(I_S^{G,opt})$:

Théorème 5.1.b). *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 4$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$, tels que les G_1 et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 4$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que :*

$$A_1 < A_2$$

et que les deux inégalités optimales $(I_S^{G_1,opt})$ et $(I_S^{G_2,opt})$ sont vraies.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^0_{G_1 \cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive, on suppose qu'il existe deux solutions strictement positives de $(E_S^\sharp)$: une solution $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M)$ qui est G_1-minimisante et une solution $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M)$, G_2-minimisante.
Si $\alpha > 0$ vérifie les trois inégalités :

$$i) \qquad \alpha \leq B_{0,G_2} \tag{5.21}$$

$$ii) \qquad \alpha \geq \frac{(n-k)(n-4-k)}{(n-2-k)^2} B_{0,G_2} \tag{5.22}$$

$$iii) \qquad \alpha > B_{0,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right] \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{v_g^{\frac{2}{n-k}} K_{n-k}} \left(\frac{(n-k)(n-4-k)}{(n-2-k)^2}\right)^{\frac{n-k}{n-2-k}} \left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{\frac{2}{n-k}} \tag{5.23}$$

Alors

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2).$$

En particulier, les solutions u_1 et u_2 sont différentes.

Remarquons que l'hypothèse $n - k > 4$ résulte de la remarque 16 car $crit = \frac{2(n-k)}{n-2-k} > 4 \Leftrightarrow n - k > 4$.

D'autre part, le théorème 5.1 permet, en choisissant une famille de sous-groupes d'isométries convenable, de séparer les énergies d'autant de solutions que l'on veut, pourvu que l'inégalité *iii*) soit vérifiée de proche en proche. On énonce ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 5.4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les inégalités de Sobolev optimales en présence d'isométries $(I_S^{G_i,opt})$ soient vraies. On note pour $i \in I, k_i \geq 0$ la dimension minimale des G_i-orbites et $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k_i et on suppose que $\forall i \in I, k_i = k$.*
Soit $f \in C^0_{\cup_{i\in I} G_i}(M)$ une fonction strictement positive. On suppose que pour tout $i \in I$, il existe une solution minimisante positive $u_i \in H^2_{1,G_i}(M)$ de $(E_S^\sharp)$.
Si $\alpha \in \left[\frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(M, g);\ \min_{i\in I}(B_{0,G_i})\right]$ et si : $\forall i \in I, \forall j \in I$, tels que $A_j < A_i$ on a

$$\left(\frac{A_i}{A_j}\right)^{\frac{2}{n-k}} > 1 + (B_{0,G_i} - \alpha)\frac{K_n^{\frac{n}{n-2}}}{K_{n-k}^{\frac{2}{n-2}}} A_i^{\frac{4}{(n-k)(n-2)}} \left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \left(\frac{V \fint f\, dv_g}{\sup f}\right)^{\frac{2(n-2-k)}{(n-k)(n-2)}}$$

Alors

$$\mathcal{E}(u_j) < \mathcal{E}(u_i).$$

5.2.2 Exemples

Dans cette sous-section, on exhibe des exemples pour lesquels les conditions d'existence et de multiplicité sont compatibles : plus précisément, on montre que pour f fixée, bien choisie, il existe tout un intervalle pour le paramètre α sur lequel l'équation

$$\Delta_g u + \alpha u = f u^{2^\sharp - 1} \tag{$E_S^\sharp$}$$

admet au moins deux solutions positives différentes. On utilise le corollaire 5.3 pour obtenir des solutions de $(E_S^\sharp)$.

a) De la multiplicité pour le problème de Nirenberg à un intervalle de multiplicité pour une équation plus générale sur la sphère
Un exemple important d'équation du type $(E_S^\sharp)$ apparaît dans les problèmes de courbure scalaire prescrite : sur une variété (M, g) de dimension $n \geq 3$ et de courbure scalaire $Scal_g$, on cherche quelles conditions une fonction $f \in C^\infty(M)$ doit remplir pour être la nouvelle courbure scalaire de la variété après un changement de métrique conforme. Ce problème revient à trouver les fonctions f pour lesquelles il existe $u \in C^\infty(M)$ strictement positive solution de l'équation :

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = f u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{5.24}$$

Sur la sphère standard (S^n, h_n), ce problème est généralement nommé problème de Nirenberg, et l'équation (5.24) devient alors :

$$\Delta_{h_n} u + \frac{n(n-2)}{4} u = f u^{\frac{n+2}{n-2}}. \qquad (E_N)$$

Dans le cas où f est constante, (5.24) est l'équation du "problème de Yamabe" :

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = u^{\frac{n+2}{n-2}}. \qquad (E_Y)$$

On s'intéresse ici à la multiplicité des énergies pour l'équation de Nirenberg (E_N). Pour obtenir une réponse positive, il faut que f soit non constante sinon, d'après la proposition 5.1, il y a une infinité de solutions pour (E_N) mais nos résultats ne permettent pas de les distinguer car elles ont toutes la même énergie.
Dans [29], Hebey-Vaugon obtiennent des résultats de multiplicité pour l'équation de Nirenberg (E_N). Nous généralisons leurs résultats en montrant que pour certaines fonctions f non constantes, il existe deux solutions d'énergies différentes pour l'équation (E_S^*) sur la sphère standard :

$$\Delta_{h_n} u + \alpha u = f u^{2^*-1}$$

lorsque α appartient à un intervalle fermé de borne supérieure $\frac{n(n-2)}{4}$.

Corollaire 5.5. *Soit (S^n, h_n) la sphère standard de dimension impaire $n \geq 5$ sur laquelle opèrent librement G_1 et G_2 deux sous-groupes finis de $O(n+1)$ de cardinaux respectifs A_1 et A_2 tels que $1 < A_1 < A_2$. Soit $f \in C^\infty_{G_1 \cup G_2}(S^n)$ une fonction positive dont les dérivées en un point $x_0 \in M$ où elle est maximale sont nulles jusqu'à l'ordre $n-3$. Si f vérifie*

$$\left(\frac{\sup f}{\fint f \, dv_{h_n}}\right)^{2/n} > \left(B_{0,G_2} - \frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}\right)\left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{4A_2^{\frac{4}{n(n-2)}}}{n(n-2)} \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-1} \qquad (5.25)$$

Alors, l'équation (E_S^*) admet deux solutions positives d'énergies distinctes, l'une invariante par G_1, l'autre par G_2, lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left[\frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}; \frac{n(n-2)}{4}\right].$$

Démonstration du corollaire 5.5
Puisque les deux groupes finis G_1 et G_2 opèrent librement sur la sphère, ils permettent le passage au quotient et on munit S^n/G_i de la métrique quotient $\tilde{g}_i$ induite par h_n. Puisque les orbites sont toutes finies de même cardinal A_i, la proposition 5.4 affirme que $(I_S^{G_i,opt})$ est vraie et que :

$$B_{0,G_i} = B_0(S^n/G_i, \tilde{g}_i).$$

D'une part, comme $f \in C^\infty_{G_i}(M)$ et que ses dérivées en x_0 sont nulles jusqu'à l'ordre $n-3$, on sait d'après Hebey-Vaugon [29] qu'il existe $u_i \in H^2_{1,G_i}(M)$ solution G_i-minimisante de l'équation de Nirenberg :

$$\Delta_{h_n} u_i + \frac{n(n-2)}{4} u_i = f u_i^{2^*-1}$$

c'est-à-dire de l'équation (E_S^*) dans le cas où $\alpha = \frac{n(n-2)}{4}$.
D'autre part, puisque $\Delta_{h_n} f(x_0) = 0$, que G_i permet le passage au quotient et que les G-orbites sont de cardinal constant, la remarque 14 montre qu'il existe $u_i \in H^2_{1,G_i}(M)$ solution de (E_S^*) dès que α vérifie :

$$\alpha < \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{\tilde{g}_i}(\overline{x}_{0,i}) = \frac{n(n-2)}{4}.$$

où $\overline{x}_{0,i} = \pi_i(O_{x_0}^{G_i})$ avec $\pi_i : S^n \to S^n/G_i$. Ainsi pour tout f vérifiant les hypothèses du corollaire et pour tout $\alpha \leq \frac{n(n-2)}{4}$, il existe deux solutions $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M)$ et $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M)$ à l'équation (E_S^*).
Maintenant, d'après le théorème 5.1.a), ces deux solutions sont d'énergies différentes si les trois conditions (5.18), (5.19) et (5.20) sont vérifiées par le couple (α, f).
La première : $\alpha \leq B_{0,G_2}$ est vérifiée dès que $\alpha \leq \frac{n(n-2)}{4}$ car d'après la minoration (5.11) :

$$B_{0,G_2} = B_0(S^n/G_2, \tilde{g}_2) \geq \frac{n(n-2)}{4}.$$

La seconde (5.19) s'écrit ici comme $B_0(S^n, h_n) = \frac{n(n-2)}{4}$:

$$\alpha \geq \frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}.$$

Enfin l'hypothèse (5.25) faite dans ce corollaire sur le rapport $\frac{\sup f}{⨍ f\, dv_{h_n}}$ implique immédiatement que la troisième condition (5.20) est vérifiée car $\alpha > 0$. Finalement, lorsque α apartient à l'intervalle non vide :

$$\left[\frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}; \frac{n(n-2)}{4}\right]$$

il existe deux solutions d'énergies différentes pour (E_S^*) et le corollaire 5.5 est démontré.□

Remarque 17. *L'hypothèse iii) du théorème 5.1 impose à f une condition globale portant sur le rapport $\frac{\sup f}{⨍ f\, dv_g}$, alors que les conditions sur f pour avoir existence de solutions sont purement locales : par exemple f doit être "assez plate" en un point où elle est maximale. Ces deux conditions peuvent donc être compatibles.*

Ce corollaire généralise les résultats de Hebey-Vaugon [29] où la multiplicité est démontrée pour l'équation de Nirenberg, c'est-à-dire dans le cas particulier de (E_S^*) où $\alpha = \frac{n(n-2)}{4}$. D'autres énoncés de multiplicité pour le problème de Nirenberg sont donnés dans cet article [29] : les énergies des solutions sont toujours séparées grâce à la même technique, seule change l'hypothèse assurant l'existence des deux solutions. Ces conditions d'existence sont aussi compatibles avec les conditions de multiplicité du théorème 5.1a) et des énoncés analogues à celui du corollaire précédent en découleraient. Par soucis de brièveté nous ne donnons pas ces corollaires.

Remarquons pour finir que si f est constante, on sait d'après la proposition 5.2 que sur la sphère standard il y a unicité de la solution de (E_S^*) lorsque $\alpha < \frac{n(n-2)}{4}$. Le corollaire 5.5 ne peut donc pas être vrai dans ce cas. On vérifie en effet facilement que si f est constante, alors l'hypothèse (5.25) requise pour appliquer le corollaire est impossible. Pour le montrer, on utilise la minoration (5.12) et les deux inégalités $\frac{n(n-2)}{4} > \frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}$ et $\frac{(n-2)^2}{n(n-4)} > 1$:

$$\begin{aligned} &\left(B_{0,G_2} - \frac{n^2(n-4)}{4(n-2)}\right)\left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{4A_2^{\frac{4}{n(n-2)}}}{n(n-2)} \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-1} \\ > \quad & \frac{n(n-2)}{4}\left(A_2^{2/n} - 1\right) \frac{4}{n(n-2)} \frac{A_2^{\frac{4}{n(n-2)}} A_1^{\frac{2}{n}}}{A_2^{2/n} - A_1^{2/n}} \\ > \quad & \frac{A_2^{2/n} - 1}{A_2^{2/n} - A_1^{2/n}} A_2^{\frac{4}{n(n-2)}} A_1^{\frac{2}{n}} > 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que (5.25) est impossible lorsque f est constante.

b) Un exemple donné par le théorème 5.1.a) avec des groupes finis permettant le passage au quotient

Le théorème 5.1.a) donne aussi des exemples de multiplicité sur des variétés non difféomorphes à la sphère standard comme le montre le corollaire suivant :

Corollaire 5.6. *Sur la variété produit* $(S^1(t) \times S^{n-1}, g = h_1 \times h_{n-1})$ *de dimension* $n > 4$, *où* $(S^1(t), h_1)$ *est le cercle standard de rayon* $t > 0$ *et* (S^{n-1}, h_{n-1}) *est la sphère standard de dimension* $n-1$, *on considère les deux sous-groupes de* $Isom_g(M)$ *définis par* $G_1 = R_1 \times I_{S^{n-1}}$ *et* $G_2 = R_2 \times I_{S^{n-1}}$ *où* R_1 *et* R_2 *sont deux sous-groupes finis de* $SO(2)$ *d'ordres respectifs* A_1 *et* A_2 *tels que* $A_1 < A_2$. *Soit* $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}(M)$ *une fonction strictement positive dont le maximum est atteint en* $x_0 \in M$ *et telle que* $\Delta_g f(x_0) = 0$. *Si*

$$t > \left(\frac{n(n-4)}{4(n-2)^2}\right)^{1/2}$$

et si f *vérifie en plus*

$$\left(\frac{\sup f}{\fint f \, dv_g}\right)^{2/n} > \left(\frac{(n-2)^2}{4} + \frac{1}{4t^2}\right) \frac{K_n A_2^{\frac{4}{n(n-2)}} (2\pi t \omega_{n-1})^{2/n}}{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{2/n} - 1} \left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \tag{5.26}$$

alors l'équation (E_S^*) *admet deux solutions positives d'énergies différentes lorsque* α *appartient à l'intervalle :*

$$\left[\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\left(\frac{(n-2)^2}{4} + \frac{1}{4t^2}\right) ; \frac{(n-2)^2}{4}\right[.$$

L'une des solutions est invariante par G_1, *l'autre par* G_2.

Démonstration du corollaire 5.6
Dans cet exemple, les deux groupes permettent le passage au quotient. En effet, on a :

$$M/G_i = \left(S^1(t)/R_i\right) \times \left(S^{n-1}/I_{S^{n-1}}\right) = S^1\left(\frac{t}{A_i}\right) \times S^{n-1}$$

avec comme métrique quotient induite par g la métrique produit $g_i = h_1 \times h_{n-1}$. De plus, pour $i \in \{1,2\}$, comme les orbites sont toutes finies et de même cardinal A_i, la proposition 5.4 affirme que $(I_S^{G_i,opt})$ est vraie et que

$$B_{0,G_i} = B_0(M/G_i, g_i) = B_0\left(S^1(t/A_i) \times S^{n-1}, g_i\right).$$

On dispose alors de l'encadrement de B_{0,G_i} donné par (5.13). Nous allons voir que cet encadrement est suffisamment précis pour garantir la compatibilité entre les conditions d'existence et de multiplicité.
Tout d'abord, la condition d'existence est donnée par (5.5bis) qui s'écrit comme $Scal_{g_i}\left(S^1(t/A_i) \times S^{n-1}\right) = (n-1)(n-2)$ et que $\Delta_g f(x_0) = 0$

$$\alpha < \frac{(n-2)^2}{4}. \tag{5.27}$$

Remarquons que cette condition d'existence ne dépend pas du groupe G_i.
Maintenant, examinons les hypothèses du théorème 5.1.a) permettant de séparer les énergies de ces deux solutions. La première (5.18) : $\alpha \leq B_{0,G_2}$ est vérifiée dès que $\alpha < \frac{(n-2)^2}{4}$ car par (5.13), $B_{0,G_2} \geq \frac{(n-2)^2}{4}$. La seconde, (5.19), s'écrit ici :

$$\alpha \geq \frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(S^1(t) \times S^{n-1}, g). \tag{5.28}$$

Quant à (5.20), elle est vérifiée grâce à (5.13) et à l'hypothèse (5.26) faite sur f car $\alpha > 0$.
Ainsi, existence et multiplicité sont compatibles si α vérifie à la fois (5.27) et (5.28) c'est-à-dire dès que

$$\frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(S^1(t) \times S^{n-1}) < \frac{(n-2)^2}{4}.$$

En utilisant la majoration (5.13), il suffit pour cela d'avoir

$$\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\left(\frac{(n-2)^2}{4} + \frac{1}{4t^2}\right) < \frac{(n-2)^2}{4}$$

ou encore

$$t > \left(\frac{n(n-4)}{4(n-2)^2}\right)^{1/2},$$

ce qui est vrai par hypothèse. Il existe donc deux solutions dont les énergies sont différentes lorsque α appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(S^1(t) \times S^{n-1}, g); \frac{(n-2)^2}{4}\right[.$$

Le but des exemples présentés ici est de donner des intervalles explicites de multiplicité pour le paramètre α. Or la valeur de $B_0(S^1(t)\times S^{n-1}, g)$ n'est pas connue explicitement, mais d'après la majoration (5.13)

$$B_0(S^1(t)\times S^{n-1}, g) \leq \frac{1}{4t^2} + \frac{(n-2)^2}{4}$$

et on se contente de l'intervalle de multiplicité pour α ne dépendant que des paramètres du problème :

$$\left[\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\left(\frac{1}{4t^2} + \frac{(n-2)^2}{4}\right); \frac{(n-2)^2}{4}\right[,$$

ce qui achève la démonstration.$\square$

c) Un exemple donné par le théorème 5.1.b) avec des groupes ne permettant pas le passage au quotient

Nous exposons maintenant un exemple de multiplicité pour lequel les orbites des groupes d'isométries sont infinies et pour lequel l'action d'un des deux groupes d'isométries ne permet pas le passage au quotient. Cet exemple illustre de plus l'intérêt du théorème 5.1.b) car dans ce cas le théorème 5.1.a) n'aboutit pas.

Corollaire 5.7. *: Sur la variété $S^1(a)\times S^2(b)\times S^{n-3}, n \geq 10$ munie de la métrique g produit des métriques standard de $S^1(a), S^2(b)$ et S^{n-3}, on considère les deux groupes d'isométries :*

$$G_1 = I_{S^1(a)\times S^2(b)} \times O(n-6)\times O(4) \qquad et \qquad G_2 = O(2)\times O(3)\times I_{S^{n-3}}.$$

Alors, les inégalités $(I_S^{G_1,opt})$ et $(I_S^{G_2,opt})$ sont vraies.
Soit $x_0 = (\theta, 0_{\mathbb{R}^{n-6}}, z_0) \in M \subset \mathbb{R}^{n+3}$, avec $\theta \in S^1(a)\times S^2(b)$ et $z_0 \in S^3$ et soit $f \in C^2_{G_1\cup G_2}$ une fonction strictement positive, maximale en x_0 telle que $\Delta_g f(x_0) = 0$ et qui vérifie

$$\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g} > \left(\left(4ab^2\right)^{2/(n-3)} - 1\right)^{-\frac{n-3}{2}} \left(\frac{(n-5)^2}{(n-3)(n-7)}\right)^{\frac{(n-3)^2}{2(n-7)}}. \tag{5.29}$$

Si de plus

$$\frac{1}{4a} < b^2 < \frac{(n-5)^2}{(n-7)(3n^2-26n+57)}, \tag{5.30}$$

alors il existe deux solutions positives d'energies différentes pour l'équation $(E_S^\sharp)$ lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left[\frac{(n-3)^2(n-7)}{4(n-5)}; \min\left\{\frac{(n-3)(n-5)}{4}, \frac{n-5}{4(n-4)}\left(\frac{2}{b^2} + (n-6)(n-7)\right)\right\}\right[$$

Remarque 18. *L'étude détaillée de l'action sur la sphère standard (S^m, h_m) de groupes d'isométries de la forme $O(r_1)\times O(r_2)\times ...\times O(r_p)$, avec $\sum_{i=1..p} r_i = m+1$ est développée par Faget [18]. Dans le corollaire 5.7, on aurait pu écrire G_1 sous la forme générale $G_1 = I_{S^1(a)\times S^2(b)} \times O(r_1)\times ...\times O(r_p)$ avec $\sum_{i=1..p} r_i = n-2$ et $\forall i \in [1, p], r_i \geq 4$. Notre but étant de présenter un énoncé simple de multiplicité, on préfère se limiter au cas particulier où $p = 2$.*

Démonstration du corollaire 5.7

Analysons tout d'abord l'action des deux groupes sur $M = S^1(a) \times S^2(b) \times S^{n-3}$.
Pour G_2, comme pour tout entier $r > 1, O(r)$ est un groupe d'isométries transitif sur la sphère standard S^{r-1}, les G_2-orbites sont toutes de la forme $S^1(a) \times S^2(b) \times \{z\}$, où $z \in S^{n-3}$. Leur dimension est donc $k_2 = 3$ et leur volume constant égal à $A_2 = 8\pi^2 ab^2$. L'action de G_2 permet le passage à la variété quotient : $M/G_2 = S^{n-3}$ où la métrique quotient $\tilde{g}_2$ est la métrique standard h_{n-3} de S^{n-3}. D'après la proposition 5.4, $(I_S^{G_2,opt})$ est donc vraie et :

$$B_{0,G_2} = B_0(M/G_2, \tilde{g}_2) = B_0(S^{n-3}, h_{n-3}) = \frac{(n-3)(n-5)}{4}.$$

L'action du groupe G_1, quant à elle, ne permet pas le passage au quotient global, car il existe des orbites non principales. L'étude détaillée d'action de sous-groupes d'isométries de ce type sur la sphère est faite par Faget [18], on en donne ici les principaux résultats. Soit $x = (\theta, y, z) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^{n-6} \times \mathbb{R}^4$ avec $\theta \in S^1(a) \times S^2(b)$, et $(y, z) \in S^{n-3}$, l'orbite de x sous G_1 est :

$$O_x^{G_1} = \{\theta\} \times S^{n-7}(r_1) \times S^3(r_2)$$

où $r_1 = ||y||$ et $r_2 = ||z||$. La dimension maximale des G_1-orbites est donc $n - 4 \geq 6$ et c'est la dimension d'orbites de points x tels que $||y|| \neq 0$ et $||z|| \neq 0$. Si $||y|| = 0$, alors $O_x^{G_1} = \{\theta\} \times \{0_{\mathbb{R}^{n-6}}\} \times S^3$ est de dimension 3 et si $||z|| = 0$, alors $O_x^{G_1} = \{\theta\} \times S^{n-7} \times \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est de dimension $n - 7 \geq 3$. Il existe donc des orbites non principales puisque de dimension strictement plus petite que $n - 4 \geq 6$. Le passage au quotient global ne se fait pas. La dimension minimale des G_1-orbites est 3, (on a bien $k_1 = k_2 = k = 3$) et le volume des G_1-orbites de dimension 3 est constant égal à $A_1 = \omega_3 = 2\pi^2 > 1$. Les orbites de dimension et de volume minimum sont donc les orbites de point du type $x_0 = (\theta, 0_{\mathbb{R}^{n-6}}, z_0)$ où $\theta \in S^1(a) \times S^2(b)$ et $z_0 \in S^3$, et

$$O_{x_0}^{G_1} = \{\theta\} \times \{0_{\mathbb{R}^{n-6}}\} \times S^3$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ du théorème D de Faget rapelée ci-dessus est remplie pour l'action du groupe G_1 en prenant comme sous-groupe normal de G_1 le groupe $H = I_{S^1(a)\times S^2(b)} \times I_{n-6} \times O(4)$. En effet l'orbite sous H d'un point $x = (\theta, y, z)$ où $\theta \in S^1(a) \times S^2(b)$ et $(y, z) \in S^{n-3} \subset \mathbb{R}^{n-6} \times \mathbb{R}^4$ est de la forme :

$$O_x^H = \{\theta\} \times \{y\} \times S^3(s)$$

où $s = ||z|| \in]0, 1]$. Le volume maximal des H-orbite est atteinte en x_0. De plus, les H-orbites sont toutes principales et on a bien $O_{x_0}^H = O_{x_0}^G := O_{x_0}$. Puis pour $x \notin O_{x_0}$,

$$O_x^{G_1} = \{\theta\} \times S^{n-7}(||y||) \times S^3(||z||)$$

avec $||y|| \neq 0$ et $||z|| \neq 0$ et donc $dim O_x^{G_1} = n - 4 > k = 3$ car $n \geq 10$. L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est donc remplie et alors on sait que l'inégalité optimale $(I_S^{G_1,opt})$ est valide.
On veut alors appliquer le théorème 5.1.b). Les premières hypothèses sont immédiatement vérifiées puisque

$$n \geq 10, \qquad k = 3 \qquad \text{et} \qquad A_1 < A_2 \text{ car } 4ab^2 < 1.$$

Le groupe engendré par G_1 et G_2 n'est pas transitif sur M (car $O(n-6)\times O(4)$ n'est pas transitif sur S^{n-3}) ce qui permet de choisir $f \in C^2_{G_1\cup G_2}(M)$ strictement positive de maximum atteint en x_0 et telle que $\Delta_g f(x_0) = 0$.

Maintentant, pour obtenir deux solutions G_i−minimisantes et invariantes pour $(E^\sharp_S)$, on utilise le corollaire 5.3. Pour le groupe G_2, comme le passage au quotient est possible avec $M/G_2 = S^{n-3}$ et comme les orbites sont de dimension et de volume constants, (5.5.bis) s'écrit

$$\alpha < \frac{n-5}{4(n-4)} Scal_{h_{n-3}}(S^{n-3}) = \frac{(n-3)(n-5)}{4}. \tag{5.31}$$

Pour le groupe G_1, (5.5) s'écrit :

$$\alpha < \frac{n-5}{4(n-4)}\left(Scal_{\tilde{g}_1}(\overline{x}_{0,1}) + \frac{3\,\Delta_{\tilde{g}_1}\tilde{v}_1(\overline{x}_{0,1})}{A_1}\right)$$

Or, on a vu que les H-orbites atteignent leur volume maximal en x_0, donc $\Delta_{\tilde{g}_1}\tilde{v}_1(\overline{x}_{0,1}) \geq 0$ (on utilise le laplacien des géomètres). En ce qui concerne la courbure scalaire, d'après le lemme B.2 de l'annexe B, on a :

$$Scal_{\tilde{g}_1}(\overline{x}_{0,1}) \geq \frac{2}{b^2} + (n-6)(n-7).$$

Ainsi, pour avoir une solution G_1−minimisante et invariante, il suffit que

$$\alpha < \frac{n-5}{4(n-4)}\left(\frac{2}{b^2} + (n-6)(n-7)\right). \tag{5.32}$$

Pour tout α vérifiant (5.31) et (5.32), il existe donc deux solutions pour $(E^\sharp_S)$: l'une G_1-invariante et minimisante, l'autre G_2-invariante et minimisante. Les énergies de ces deux solutions sont différentes si les trois conditions du théorème 5.1.b) sont vraies. La première (5.21)

$$\alpha \leq B_{0,G_2} = \frac{(n-3)(n-5)}{4}$$

est ici vérifiée puisque par (5.31), on a $\alpha < \frac{(n-3)(n-5)}{4}$. La seconde (5.22) s'écrit :

$$\alpha \geq \frac{(n-3)^2(n-7)}{4(n-5)}. \tag{5.33}$$

Enfin, la dernière condition (5.23) se réécrit ici :

$$\alpha > \frac{(n-3)(n-5)}{4}\left[1 - \left((4ab^2)^{2/(n-3)} - 1\right)\left(\frac{(n-3)(n-7)}{(n-5)^2}\right)^{\frac{n-3}{n-5}}\left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{2/(n-3)}\right]$$

or f est choisie vérifiant (5.29) c'est-à-dire justement telle que la condition (5.23) soit remplie. Ainsi, (5.31), (5.32) et (5.33) montrent qu'il existe deux solutions d'énergies différentes pour $(E^\sharp_S)$ lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left[\frac{(n-3)^2(n-7)}{4(n-5)};\ \min\left\{\frac{(n-3)(n-5)}{4};\ \frac{n-5}{4(n-4)}\left(\frac{2}{b^2} + (n-6)(n-7)\right)\right\}\right[,$$

intervalle qui est non vide car $\frac{(n-3)(n-7)}{(n-5)^2} < 1$ et car un calcul rapide montre que la majoration (5.30) imposée à b^2 implique que

$$\frac{(n-3)^2(n-7)}{4(n-5)} < \frac{n-5}{4(n-4)}\left(\frac{2}{b^2} + (n-6)(n-7)\right).$$

Le corollaire 5.7 est démontré.$\square$

5.2.3 Démonstration du théorème 5.1

Soient G_1 et G_2 deux groupes d'isométries vérifiant les hypothèses du théorème 5.1, $\alpha > 0$ et $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ strictement positive tels qu'il existe deux solutions à $(E^\sharp_S)$: $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M)$, G_1-minimisante et $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M)$, G_2-minimisante. Par la définition 5.2 d'une solution G_i-minimisante de l'équation $(E^\sharp_S)$, on a

$$\|\nabla u_i\|_2^2 + \alpha\|u_i\|_2^2 = \mathcal{E}(u_i) = \Upsilon_{G_i}^{\frac{n-k}{2}}. \tag{5.34}$$

Ainsi montrer que $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$ est équivalent à montrer que $\Upsilon_{G_1} < \Upsilon_{G_2}$. D'après la majoration (5.2) du théorème E, il suffit donc de montrer que

$$\frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}(\sup f)^{2/2^\sharp}} < \Upsilon_{G_2}. \tag{5.35}$$

Début de la minoration de Υ_{G_2} : Grâce à l'inégalité $(I_S^{G_2})$ et à (5.34), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} &= \frac{\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{2/2^\sharp}}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}} \le \frac{(\sup f)^{2/2^\sharp}\|u_2\|^2_{2^\sharp}}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}} \\
&\le \frac{(\sup f)^{2/2^\sharp}}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\|\nabla u_2\|_2^2 + B_{\varepsilon,G_2}\|u_2\|_2^2\right] \\
&\le \frac{(\sup f)^{2/2^\sharp}}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}} + (B_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\|u_2\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} \le (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[1 + \frac{B_{\varepsilon,G_2}-\alpha}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}}\|u_2\|_2^2\right] \tag{5.36}$$

Comme par *i*), $B_{\varepsilon,G_2} - \alpha \ge 0$, une majoration de $\|u_2\|_2^2$ permet de poursuivre la majoration de $\frac{1}{\Upsilon_2}$.

Majoration de la norme L^2 de u_2 : soit $0 < r < 1$, on prend $\varphi = u_2^r$ dans l'équation $(E^\sharp_S)$:

$$\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 = \frac{(r+1)^2}{4r}\int_M f u_2^{2^\sharp-1+r}\, dv_g - \alpha\frac{(r+1)^2}{4r}\int_M u_2^{r+1}\, dv_g$$

Or pour le terme comportant le f, l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned}\int_M f u_2^{2^\sharp-1+r}\, dv_g &= \int_M (f^{\frac{1}{2^\sharp}} u_2)^{2^\sharp-1+r} f^{\frac{1-r}{2^\sharp}}\, dv_g \\ &\leq \left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}}\end{aligned}$$

D'où

$$\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 \leq \frac{(r+1)^2}{4r}\left[\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}} - \alpha \int_M u_2^{r+1}\, dv_g\right]$$

Et d'après $(I_{P,D})$:

$$\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 \geq \frac{1}{P}\|u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_{crit}^2 - D\,\|u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2$$

donc

$$\frac{1}{P}\|u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_{crit}^2 \leq \frac{(r+1)^2}{4r}\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}} + \left(D - \frac{(r+1)^2}{4r}\alpha\right)\int_M u_2^{r+1}\, dv_g$$

Si on impose à α la condition supplémentaire

$$\alpha \geq \frac{4r}{(r+1)^2} D, \tag{5.37}$$

on obtient avec (5.34)

$$\begin{aligned}\left(\int_M u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\, dv_g\right)^{\frac{2}{crit}} &\leq \frac{P(r+1)^2}{4r}\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}} \\ &\leq \frac{P(r+1)^2}{4r}\Upsilon_{G_2}^{\frac{(2^\sharp-1+r)}{2^\sharp}\frac{(n-2-k)}{4}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}}\end{aligned} \tag{5.38}$$

En posant $r = \frac{4}{crit} - 1$, pour lequel on a bien $0 < r \leq 1$ car $crit < 4$, l'inégalité précédente donne directement une majoration de la norme L^2 de u_2 :

$$\int_M u_2^2\, dv_g \leq \left(\frac{4P}{(4-crit)crit}\right)^{\frac{crit}{2}} \Upsilon_2^{\frac{crit-2+n-k}{2}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{crit-2}{2^\sharp}} \tag{5.39}$$

sous la condition (5.37) qui devient :

$$\alpha \geq \frac{(4-crit)crit}{4} D$$

et qui est vérifiée par l'hypothèse *ii*).
Fin de la minoration de Υ_{G_2} : on reporte (5.39) dans (5.36)

$$\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[1 + (B_{\varepsilon,G_2} - \alpha)\left(\frac{4P}{(4-crit)crit}\right)^{\frac{crit}{2}} \Upsilon_2^{\frac{crit-2}{2}} \left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{crit-2}{2^\sharp}}\right]$$

Or d'après le théorème E, $\Upsilon_{G_2} \leq \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\ (\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}}}$, donc comme $crit - 2 > 0$,

$$\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)$$
$$\left[1+(B_{\varepsilon,G_2}-\alpha)A_2^{\frac{crit-2}{n-k}}\frac{P^{\frac{crit}{2}}}{K_{n-k}^{\frac{crit-2}{2}}}\left(\frac{4}{(4-crit)crit}\right)^{\frac{crit}{2}}\left(\frac{\int_M f\,dv_g}{\sup f}\right)^{\frac{crit-2}{2^\sharp}}\right]$$

Argument final : pour avoir (5.35) et donc $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$, il suffit que

$$(\sup f)^{2/2^\sharp}\frac{K_{n-k}}{A_1^{\frac{2}{n-k}}} > (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)$$
$$\left[1+(B_{\varepsilon,G_2}-\alpha)A_2^{\frac{crit-2}{n-k}}\frac{P^{\frac{crit}{2}}}{K_{n-k}^{\frac{crit-2}{2}}}\left(\frac{4}{(4-crit)crit}\right)^{\frac{crit}{2}}\left(\frac{\int_M f\,dv_g}{\sup f}\right)^{\frac{crit-2}{2^\sharp}}\right]$$

ou encore en notant $⨍ f\,dv_g = \frac{1}{v_g}\int_M f\,dv_g$ la valeur moyenne de f :

$$\alpha > B_{\varepsilon,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}}\frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon}-1\right]A_2^{\frac{2-crit}{n-k}}\frac{K_{n-k}^{\frac{crit-2}{2}}}{P^{\frac{crit}{2}}}\left(\frac{(4-crit)crit}{4}\right)^{\frac{crit}{2}}\left(\frac{\sup f}{v_g ⨍ f\,dv_g}\right)^{\frac{crit-2}{2^\sharp}}$$

ce qui est l'hypothèse *iii*) de l'énoncé. Le théorème 5.1 est ainsi démontré.□

5.3 Deuxième groupe de résultats obtenus par séparation des énergies

On énonce maintenant un résultat de multiplicité inspiré de la partie sur le problème de Yamabe de l'article d'Hebey-Vaugon [29]. Le raisonnement global est le même que pour les résultats précédents : on sépare les solutions grâce à leurs énergies. La différence est d'ordre technique, elle intervient lors de la majoration de la norme L^2 de la solution G_2-invariante et minimisante.

5.3.1 Enoncé du théorème 5.2

Théorème 5.2. *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$, tels que les G_1 et G_2−orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que :*

$$A_1 < A_2$$

et que les deux inégalités optimales $(I_S^{G_1,opt})$ et $(I_S^{G_2,opt})$ sont vraies.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive. On suppose qu'il

existe deux solutions strictement positives pour $(E_S^\sharp)$ *: une solution* $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M)$, G_1-*minimisante et une solution* $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M)$, G_2-*minimisante.*
Si les deux inégalités suivantes sont vérifiées :

$$i) \qquad \alpha \quad \leq \quad B_{0,G_2} \tag{5.40}$$

$$ii) \qquad \alpha \quad > \quad B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}} - A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{2}{n-k}}} \frac{\inf f}{(\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}} \left(\fint f\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}}} \tag{5.41}$$

où B_{0,G_2} *est la deuxième meilleure constante de l'inégalité* $(I_S^{G_2,opt})$*, alors*

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2).$$

En particulier, les deux solutions sont différentes.

Remarque 19. *Les conditions de multiplicité* $i)$ *et* $ii)$ *sont ici immédiatement compatibles. Cependant, contrairement au théorème 5.1, si on dispose de 2 solutions* G_i*-invariantes et minimisantes et si* α *vérifie la condition* $i)$*, on ne peut plus "jouer" sur la fonction* f *dans le but de rendre* $ii)$ *valide puisque le rapport* $\frac{\inf f}{(\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}} \left(\fint f\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}}}$ *est borné.*

Le théorème 5.2 prend une forme intéressante dans le cas où la fonction f du second membre de $(E_S^\sharp)$ est constante égale à 1 et où la condition d'existence de solutions G_i-invariantes et G_i-minimisantes est donnée par le corollaire 5.1 : $\alpha < \min(B_{0,G_1}, B_{0,G_2})$. De plus, on montre que dans ce cas, la solution triviale constante (qui n'existe que lorsque f est constante) peut être rendue différente des deux solutions obtenues par le théorème 5.2.

Corollaire 5.8. *Soit* (M, g) *une variété compacte de dimension* $n \geq 3$*. Soient* G_1 *et* G_2 *deux sous-groupes de* $Isom_g(M)$*, tels que les* G_1 *et* G_2-*orbites aient la même dimension minimale* $k \geq 0$ *vérifiant* $n - k > 2$ *et soit* $A_i > 0$ *le volume minimal des* G_i*-orbites de dimension* k *tels que*

$$A_1 < A_2.$$

On suppose que les deux inégalités optimales $(I_S^{G_1,opt})$ *et* $(I_S^{G_2,opt})$ *sont vraies et que*

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{2}{n-k}}} < B_{0,G_1} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{2}{n-k}}}. \tag{5.42}$$

1) *Alors l'équation :*

$$\Delta_g u + \alpha u = u^{2^\sharp - 1} \tag*{$(\overline{E_S^\sharp})$}$$

admet deux solutions positives d'énergies différentes lorsque le paramètre α *appartient à l'intervalle :*

$$\left] B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}} - A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{2}{n-k}}}\ ;\ \min\{B_{0,G_1}, B_{0,G_2}\} \right[. \tag{5.43}$$

L'une des solutions est invariante par le groupe G_1, l'autre par G_2.
2) *Si de plus,*

$$\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k} v_g^{\frac{2}{n-k}}} < \min\{B_{0,G_1}, B_{0,G_2}\} \tag{5.44}$$

alors il existe trois solutions positives d'énergies différentes pour l'équation $(\overline{E}_S^{\sharp})$ lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left]\max\left\{B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}} - A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\ v_g^{\frac{2}{n-k}}}, \frac{A_2^{2/(n-k)}}{K_{n-k} v_g^{2/(n-k)}}\right\}\ ;\ \min\left\{B_{0,G_1}, B_{0,G_2}\right\}\right[. \tag{5.45}$$

Démonstration du corollaire 5.8

La partie 1) se déduit immédiatement du théorème 5.2 qui montre que u_1 et u_2 ont des énergies différentes telles que $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$. Or u_2 est G_2-minimisante donc $\mathcal{E}(u_2) = \Upsilon_2^{\frac{n-k}{2}}$ et d'après la majoration (5.2) du théorème E, on obtient

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2) \leq A_2\ K_{n-k}^{-\frac{n-k}{2}}.$$

Comme f est constante, la fonction constante $\overline{u}_\alpha = \alpha^{\frac{n-2-k}{4}}$ est solution de $(\overline{E}_S^{\sharp})$. Son énergie vaut $\mathcal{E}(\overline{u}_\alpha) = \alpha^{\frac{n-k}{2}} v_g$ et est différente de celle u_1 et u_2 dès que $A_2\ K_{n-k}^{-\frac{n-k}{2}} < \alpha^{\frac{n-k}{2}} v_g$, c'est-à-dire dès que

$$\alpha > \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\ v_g^{\frac{2}{n-k}}}.$$

Cela est compatible avec le fait que α appartienne à l'intervalle de "double multiplicité" (5.43) si

$$\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\ v_g^{\frac{2}{n-k}}} < \min\{B_{0,G_1}, B_{0,G_2}\}.$$

Le corollaire est démontré.□

5.3.2 Exemples sur la variété $S^1(t) \times S^{n-1}$

On donne, grâce au corollaire 5.8, des exemples de multiplicités sur la variété produit $S^1(t) \times S^{n-1}$ munie de la métrique $g = h_1 \times h_{n-1}$ dans le cas où f est constante égale à 1 pour l'équation

$$\Delta_g u + \alpha u = u^{\frac{n+2-k}{n-2-k}}. \tag*{$(\overline{E}_S^{\sharp})$}$$

où $k \geq 0$ est la dimension minimale des orbites. Pour le premier exemple, on travaille avec les mêmes groupes finis que dans le corollaire 5.6 et comme $k = O$, la multiplicité est obtenue pour l'équation particulière

$$\Delta_g u + \alpha u = u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag*{$(\overline{E}_S^{*})$}$$

Le second exemple utilise la fibration de Hopf, dans le cas où $n = 4$. Pour ces deux premiers exemples, le passage au quotient est possible. Dans le dernier exemple, on utilise une action de groupe ne passant pas au quotient.

a) De la multiplicité pour le problème de Yamabe à un intervalle de multiplicité pour une équation plus générale

On rappelle que résoudre le problème de Yamabe sur une variété (M, g) de dimension $n \geq 3$ est équivalent à trouver une solution strictement positive $u \in C^\infty(M)$ à l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{E_Y}$$

et que ce problème admet toujours une solution. Dans le corollaire suivant, on retrouve le résultat de Hebey-Vaugon [29] de multiplicité pour l'équation de Yamabe et on le généralise en montrant qu'il existe un intervalle pour le paramètre α sur lequel il existe trois solutions différentes.

Corollaire 5.9. *Sur la variété $S^1(t) \times S^{n-1}, n \geq 3$ munie de la métrique $g = h_1 \times h_{n-1}$ produit des deux métriques standards de $S^1(t)$ et S^{n-1}, on considère les deux sous-groupes d'isométries définis par $G_1 = R_1 \times I_{S^{n-1}}$ et $G_2 = R_2 \times I_{S^{n-1}}$ où R_1 et R_2 sont deux sous-groupes finis de $SO(2)$ d'ordres respectifs A_1 et A_2 tels que $A_1 < A_2$.*
***1)** Si*

$$t > \left(\frac{A_2^2\,(2\pi\omega_{n-1})^{2/n}}{(A_2^{2/n} - A_1^{2/n})\, n(n-2)\omega_n^{2/n}} \right)^{\frac{n}{2(n-1)}}$$

alors l'équation $(\overline{E}_S^*)$ admet deux solutions positives d'énergies différentes lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left] \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{A_2^2}{4t^2} - \frac{\left(A_2^{\frac{2}{n}} - A_1^{\frac{2}{n}}\right) n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}} \; ; \; \frac{(n-2)^2}{4} \right]$$

L'une est invariante par G_1 et l'autre par G_2.
***2)** Si de plus*

$$t > \frac{A_2\omega_n}{2\pi\omega_{n-1}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{n/2} \tag{5.46}$$

alors l'équation $(\overline{E}_S^*)$ admet trois solutions positives d'énergies différentes lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left] \max \left\{ \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{A_2^2}{4t^2} - \frac{\left(A_2^{\frac{2}{n}} - A_1^{\frac{2}{n}}\right) n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}} \, , \, \frac{A_2^{2/n} n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}} \right\} \; ; \; \frac{(n-2)^2}{4} \right]$$

L'une est invariante par G_1, une autre par G_2 et la dernière est la solution constante $\overline{u}_\alpha = \alpha^{\frac{n-2}{4}}$.

Démonstration du corollaire 5.9
1) Dans cet exemple, les deux groupes permettent le passage au quotient :

$$M/G_i = \left(S^1(t)/R_i\right) \times \left(S^{n-1}/I_{S^{n-1}}\right) = S^1\left(\frac{t}{A_i}\right) \times S^{n-1}$$

avec comme métrique quotient induite par g la métrique $g_i = h_1 \times h_{n-1}$ produit des métriques standards. De plus, pour $i \in \{1,2\}$, comme les orbites sont toutes finies et de même cardinal A_i, la proposition 5.4 affirme que $(I_S^{G_i,opt})$ est vraie et que

$$B_{0,i} = B_0(M/G_i, g_i) = B_0\left(S^1(t/A_i) \times S^{n-1}, g_i\right).$$

On dispose alors pour $B_{0,i}$ de l'encadrement donné par (5.13).
Puisque f est constante, le corollaire (5.1) donne l'existence d'une solution G_i−minimisante dès que $\alpha < B_{0,G_i}$. Or $B_{0,G_i} \geq \frac{(n-2)^2}{4}$, il suffit donc que $\alpha < \frac{(n-2)^2}{4}$. De plus sur les deux variétés quotients $(S^1(t/A_i) \times S^{n-1}, g_i)$, le problème de Yamabe étant résolu, il existe une solution $\tilde{u}_i$ à l'équation (E_Y) qui s'écrit :

$$\Delta_{g_i}\tilde{u}_i + \frac{(n-2)^2}{4}\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Alors en remontant sur la variété initiale, $u_i = \tilde{u}_i \circ \pi$ est solution de $(\bar{E}_S^*)$ avec $\alpha = \frac{(n-2)^2}{4}$. On a donc la double existence dès que

$$\alpha \leq \frac{(n-2)^2}{4}.$$

Maintenant, le théorème 5.2 assure que ces deux solutions sont différentes dès que α vérifie (5.40) et (5.41), ce qui est compatible avec la double existence dès que

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{2/n} - A_1^{2/n}}{K_n v_g^{2/n}} < \frac{(n-2)^2}{4}$$

Grâce à la majoration (5.13) de B_{0,G_2} , il suffit d'avoir :

$$\frac{A_2^2}{4t^2} + \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{A_2^{2/n} - A_1^{2/n}}{K_n\,(2\pi t\omega_{n-1})^{2/n}} < \frac{(n-2)^2}{4}$$

soit

$$t > \left(\frac{A_2^2\,(2\pi\omega_{n-1})^{2/n}}{(A_2^{2/n} - A_1^{2/n})\,n(n-2)\omega_n^{2/n}}\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}$$

ce qui vrai par hypothèse. Le théorème 5.2 s'applique et les énergies des deux solutions sont différentes.

2) Pour séparer la solution constante des deux autres, il suffit d'après le corollaire 5.8 que (5.44) soit vérifiée, ou encore comme $B_{0,G_i} \geq \frac{(n-2)^2}{4}$ que

$$\frac{A_2^{2/n}}{K_n v_g^{2/n}} < \frac{(n-2)^2}{4}$$

ou encore comme $v_g = 2\pi t\omega_{n-1}$:

$$t > \frac{A_2\omega_n}{2\pi\omega_{n-1}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n/2},$$

ce qui est vrai par hypothèse. Le corollaire est démontré. □

b) La fibration de Hopf et $S^1(t) \times S^3$

On donne maintenant un exemple en dimension 4 qui illustre un des intérêts du théorème 5.2 : il permet d'obtenir des résultats en petite dimension ce qui est impossible avec le théorème 5.1.

Corollaire 5.10. *Sur $S^1(t) \times S^3$, où $t > 1$ que l'on munit de la métrique produit standard $g = h_1 \times h_3$, on considère les deux groupes*

$$G_1 = I_{S^1(t)} \times \{(\sigma, \sigma)/\sigma \in SO(2)\} \qquad \textit{et} \qquad G_2 = O(2) \times I_{S^3}.$$

Alors l'équation $(\overline{E}_S^\sharp)$ qui s'écrit ici

$$\Delta_g u + \alpha u = u^5$$

admet deux solutions positives d'énergies distinctes lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left]\frac{3}{4\, t^{2/3}}; \frac{3}{4}\right[.$$

L'une des solutions est invariante par le groupe G_1, l'autre par G_2.

Démonstration du corollaire 5.10

Le groupe $O(2)$ étant transitif sur $S^1(t)$, toutes les orbites sous G_2 sont de la forme $S^1(t) \times \{\theta\}$, où $\theta \in S^3$, donc $k_2 = 1$ et $A_2 = 2\pi t$. Elles sont principales, G_2 permet donc le passage au quotient et on a :

$$\left(S^1(t) \times S^3\right)/G_2 = \left(S^1(t)/O(2)\right) \times \left(S^3/I_{S^3}\right) = S^3$$

avec comme métrique quotient $\tilde{g}_2 = h_3$ la métrique standard de S^3. Ainsi, la proposition 5.4 implique que $(I_S^{G_2,opt})$ est vraie et que :

$$B_{0,G_2}(S^1(t) \times S^3, g) = B_0(S^3, h_3) = \frac{3}{4}.$$

L'action du groupe G_1 permet elle aussi le passage au quotient : le groupe $G = \{(\sigma, \sigma)/\sigma \in SO(2)\}$ agissant sur (S^3, h_3) donne la fibration de Hopf : $S^3 \to S^3/G = S^2(1/2)$ de fibre S^1 où la métrique quotient induite par h_3 sur $S^2(1/2)$ est la métrique standard h_2. Tous ces résultats se montrent par exemple par des calculs directs en utilisant l'application définie par : $\forall (u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, H(u, v) = (2u\overline{v}, |u|^2 - |v|^2)$ pour laquelle $H(S^3) \subset S^2$. On renvoie par exemple à Gallot-Hulin-Lafontaine [20].
Les G_1-orbites sont les fibres S^1, donc $k_2 = 1$ et $A_1 = 2\pi$ et on a :

$$\left(S^1(t) \times S^3\right)/G_1 = \left(S^1(t)/I_{S^1(t)}\right) \times \left(S^3/G\right) = S^1(t) \times S^2(1/2)$$

avec comme métrique $\tilde{g}_1$ la métrique produit standard $h_1 \times h_2$. A nouveau la proposition 5.4 montre que $(I_S^{G_1,opt})$ est vraie et que

$$B_{0,G_1}(S^1(t) \times S^3, g) = B_0(S^1(t) \times S^2(1/2), \tilde{g}_1)$$

Les premières hypothèses du corollaire 5.8 sont remplies, en effet : $n = 4$, $n-k = 3 > 2$ et $A_1 < A_2$ car $t > 1$. Reste à vérifier la validité de (5.42). Or on est dans un cas très particulier puisque :

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{2/3}}{K_3 v_g^{2/3}} = \frac{3}{4} - \frac{(2\pi t)^{2/3} 3\omega_3^{2/3}}{4(2\pi t\omega_3)^{2/3}} = 0$$

et

$$B_{0,G_1} - \frac{A_1^{2/3}}{K_3 v_g^{2/3}} = B_{0,G_1} - \frac{(2\pi)^{2/3} 3\,\omega_3^{2/3}}{4(2\pi t\omega_3)^{2/3}} = B_{0,G_1} - \frac{3}{4t^{2/3}}.$$

En d'autres termes, montrer (5.42) revient à montrer la minoration stricte suivante :

$$B_0\left(S^1(t) \times S^2(1/2), \tilde{g}_1\right) > \frac{3}{4t^{2/3}}.$$

Or (5.10) ne donne que l'inégalité large. Mais, par (5.11), on sait que

$$B_0\left(S^1(t) \times S^2(1/2), \tilde{g}_1\right) \geq \frac{1}{8} \max Scal_{\tilde{g}_1} = \frac{1}{8} Scal_{h_2}(S^2(1/2)) = 1$$

car $Scal_{h_n}(S^n(R)) = \frac{n(n-1)}{R^2}$.

Ainsi pour que (5.42) soit vraie, il suffit que $t > \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}$, ce qui est vérifié grâce à l'hypothèse $t > 1 > \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}$. Le corollaire 5.8 donne donc un intervalle de multiplicité pour α dont les bornes sont :

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}} - A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{2}{n-k}}} = \frac{3}{4} - \frac{\left[(2\pi t)^{2/3} - (2\pi)^{2/3}\right] 3\omega_3^{2/3}}{4(2\pi t\,\omega_3)^{2/3}} = \frac{3}{4t^{2/3}}$$

et comme $B_{0,G_1} \geq 1$,

$$\min\{B_{0,G_1},\ B_{0,G_2}\} = \min\{B_{0,G_1},\ 3/4\} = 3/4$$

Le corollaire est démontré. □

c) Une action de groupe où le passage au quotient n'a pas lieu

Corollaire 5.11. *Sur la variété $S^1(t) \times S^{n-1}$, où $t > 1$ et $n \geq 4$, munie de la métrique produit standard $g = h_1 \times h_{n-1}$, on considère les deux groupes*

$$G_1 = I_{S^1(t)} \times O(n-2) \times O(2) \qquad et \qquad G_2 = O(2) \times I_{S^{n-1}}.$$

Si $t > \left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ alors l'équation $(\overline{E}_S^\sharp)$ admet deux solutions positives distinctes lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\left]\frac{(n-1)(n-3)}{4t^{\frac{2}{n-1}}}; \frac{(n-3)^2}{4}\right[.$$

L'une des solutions est invariante par le groupe G_1, l'autre par G_2.

Démonstration du corollaire 5.11

Le groupe G_2 est le même que dans le corollaire 5.10 : les orbites sous G_2 sont toutes de la forme $S^1(t)\times\{z\}$ où $z \in S^{n-1}$, elles sont de dimension $k = 1$ et de volume constant $A_2 = 2\pi t$. La variété quotient est S^{n-1} munie de la métrique standard h_{n-1}, et toujours grâce à la proposition 5.4, $(I_S^{G_2,opt})$ est vraie avec :

$$B_{0,G_2} = B_0\left(S^{n-1}, h_{n-1}\right) = \frac{(n-1)(n-3)}{4}.$$

De plus, un calcul identique à celui fait dans la démonstration du corollaire 5.10 donne :

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k} v_g^{\frac{2}{n-k}}} = 0.$$

Pour l'action du groupe G_1, on renvoie à nouveau à Faget [18], ainsi qu'à notre démonstration du corollaire 5.7. Les G_1-orbites sont des produits de sphères de rayon variable éventuellement réduites à un point :
$\forall(\theta, y, z) \in S^1(t)\times\mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}^2 \subset S^1(t)\times S^{n-1}$,

$$O^{G_1}_{(\theta,y,z)} = \{\theta\}\times S^{n-3}(r_1)\times S^1(r_2)$$

où $r_1 = ||y||$ et $r_2 = ||z||$. Comme $n-3 \geq 1$, la dimension minimale des orbites est $k = 1$: ce sont les orbites de points $x_0 = (\theta, 0_{\mathbb{R}^{n-2}}, z_0)$, où $\theta \in S^1(t), z_0 \in S^1$ et on a $O^{G_1}_{x_0} = \{\theta\}\times\{0_{\mathbb{R}^{n-2}}\}\times S^1$, d'où $A_1 = 2\pi$. De plus, l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ du théorème D est vérifiée en prenant comme sous-groupe normal de G_1, le groupe $H = I_{S^1(t)}\times I_{\mathbb{R}^{n-2}}\times O(2)$. L'inégalité optimale $(I_S^{G_1,opt})$ est donc vraie.
Les premières hypothèses du corollaire sont remplies, en effet :

$$n \geq 4, \qquad n-k = n-1 > 2, \qquad \text{et} \qquad A_1 < A_2 \text{ car } t > 1.$$

Il reste donc à montrer que l'hypothèse (5.42) est vérifiée : elle s'écrit ici

$$B_{0,G_1} > \frac{(n-1)(n-3)}{4t^{\frac{2}{n-1}}}.$$

Or d'après la proposition 5.6, on sait seulement que la minoration large est vraie :

$$B_{0,G_1} \geq \frac{A_1^{2/(n-1)}}{(2\pi t\omega_{n-1})^{2/(n-1)} K_{n-1}} = \frac{(n-1)(n-3)}{4t^{2/(n-1)}}$$

Pour montrer que cette minoration est en fait stricte, on utilise l'autre minoration de B_{0,G_1} donnée par la proposition 5.6 :

$$B_{0,G_1} \geq \frac{(n-3)}{4(n-2)}\left(Scal_{\tilde{g}_1}(\overline{x}_{0,1}) + \frac{3\Delta_{\tilde{g}_1}\tilde{v}_1(\overline{x}_{0,1})}{A_1}\right).$$

Or $\Delta_{\tilde{g}_1}\tilde{v}_1(\overline{x}_{0,1}) \geq 0$ et d'après le lemme B.1 de l'annexe B :

$$Scal_{\tilde{g}_1}(\overline{x}_{0,1}) \geq (n-2)(n-3)$$

d'où
$$B_{0,G_1} \geq \frac{(n-3)^2}{4}.$$
Pour que (5.42) soit vérifiée, il suffit donc que
$$\frac{(n-3)^2}{4} > \frac{(n-1)(n-3)}{4t^{\frac{2}{n-1}}}$$
ce qui est assuré par l'hypothèse faite sur t. Ainsi le corollaire 5.8.1) donne un intervalle de multiplicité pour le paramètre α dont les bornes sont :
$$B_{0,G_2} - \frac{\left(A_2^{\frac{2}{n-1}} - A_1^{\frac{2}{n-1}}\right)}{K_{n-1} v_g^{\frac{2}{n-1}}} = \frac{(n-1)(n-3)}{4t^{\frac{2}{n-1}}}$$
et
$$\min\{B_{0,G_1}, B_{0,G_2}\} \geq \min\left\{\frac{(n-3)^2}{4}, \frac{(n-1)(n-3)}{4}\right\} = \frac{(n-3)^2}{4}$$
ce qui achève la démonstration.$\square$

5.3.3 Démonstration du théorème 5.2

La démonstration suit le même schéma que celle du théorème 5.1, la seule différence est que la majoration de la norme 2 de u_2 est obtenue d'une autre façon.
Soient G_1 et G_2 deux groupes d'isométries vérifiant les hypothèses du théorème 5.1, $\alpha > 0$ et $f \in C^0_{G_1 \cup G_2}(M)$ strictement positive tels qu'il existe deux solutions à $(E_S^\sharp)$: $u_1 \in H^2_{1,G_1}(M), G_1$-minimisante et $u_2 \in H^2_{1,G_2}(M), G_2$-minimisante. Par la définition 5.2 d'une solution G_i-minimisante de l'équation $(E_S^\sharp)$, on rappelle que u_i vérifie :
$$\|\nabla u_i\|_2^2 + \alpha \|u_i\|_2^2 = \mathcal{E}(u_i) = \Upsilon_{G_i}^{\frac{n-k}{2}},$$
ainsi montrer que $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$ est équivalent à montrer que $\Upsilon_{G_1} < \Upsilon_{G_2}$. D'après la majoration (5.2), il suffit donc de montrer que
$$\frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}(\sup f)^{2/2^\sharp}} < \Upsilon_{G_2}. \tag{5.47}$$
Début de la minoration de Υ_{G_2} : le début de la démonstration est exactement le même que pour le théorème 5.1. Grâce à (I_S^G) et à (5.34), on montre l'inégalité (5.36) :
$$\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp} \left(\frac{K_{n-k} + \varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right) \left[1 + \frac{B_{\varepsilon,G_2} - \alpha}{\Upsilon_{G_2}^{\frac{n-k}{2}}} \|u_2\|_2^2\right].$$
Si de plus
$$\alpha \leq B_{\varepsilon,G_2}, \tag{5.48}$$

alors une majoration de la norme 2 de u_2 permet de poursuivre la minoration de Υ_{G_2}.
Une autre majoration de la norme L^2 de v_2 : En rappelant que $f > 0$ et avec l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_M u_2^2 \, dv_g &\leq \frac{1}{\inf f} \int_M f v_2^2 \, dv_g \\ &\leq \frac{1}{\inf f} \left(\int_M f u_2^{2^\sharp} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M f \, dv_g \right)^{1-\frac{2}{2^\sharp}}\end{aligned}$$

d'où avec (5.34)

$$\int_M u_2^2 \, dv_g \leq \frac{1}{\inf f} \Upsilon_{G_2}^{\frac{n-2-k}{2}} \left(\int_M f \, dv_g \right)^{\frac{2}{n-k}} \tag{5.49}$$

Fin de la minoration de Υ_{G_2} : en reportant cette majoration dans (5.36) :

$$\frac{1}{\Upsilon_{G_2}} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp} \frac{K_{n-k} + \varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}} \left[1 + \frac{B_{\varepsilon,G_2} - \alpha}{\Upsilon_{G_2}} \frac{\left(\int_M f \, dv_g \right)^{\frac{2}{n-k}}}{\inf f} \right]$$

Ici, contrairement au cas précédent, on ne peut pas utiliser la majoration connue de Υ_{G_2} dans le membre de droite à cause de la puissance négative. On regroupe alors les termes en $\frac{1}{\Upsilon_{G_2}}$ ce qui donne :

$$\Upsilon_{G_2} \geq \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp}(K_{n-k} + \varepsilon)} - (B_{\varepsilon,G_2} - \alpha) \frac{\left(\int_M f \, dv_g \right)^{\frac{2}{n-k}}}{\inf_M f}$$

Argument final : pour avoir (5.47) et donc $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$, il suffit alors que

$$\frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp} K_{n-k}} < \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp}(K_{n-k} + \varepsilon)} - (B_{\varepsilon,G_2} - \alpha) \frac{\left(\int_M f \, dv_g \right)^{\frac{2}{n-k}}}{\inf f},$$

ou encore en introduisant la valeur moyenne de f notée $⨍ f \, dv_g$:

$$\alpha > B_{\varepsilon,G_2} - \left(\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k} + \varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}} \right) \frac{\inf f}{(\sup f)^{2/2^\sharp} \left(v_g ⨍ f \, dv_g \right)^{\frac{2}{n-k}}}. \tag{5.50}$$

Pour $\varepsilon < K_{n-k} \left(\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{2}{n-k}} - 1 \right)$, cela est compatible avec le fait que $\alpha \leq B_{\varepsilon,G_2}$.
Enfin, si $(I_S^{G_i,opt})$ est vraie alors les deux conditions (5.48) et (5.50) peuvent s'écrire avec $\varepsilon = 0$ et ce sont les hypothèses (5.40) et (5.41) du théorème, ce qui achève la démonstration.□

5.4 Comparaison des deux théorèmes

Nous obtenons dans les théorèmes 5.1 et 5.2 des conditions différentes sur les paramètres α et f garantisssant l'existence de deux solutions différentes pour $(E_S^\sharp)$. Nous allons analyser, suivant le profil de la fonction f, lequel des théorèmes est le plus fort.

a) Justification technique

La différence entre les théorèmes 5.1 et 5.2 vient de la remarque suivante : dans le cas particulier où $f \equiv 1, k = 0$ et $P = K_n$, la majoration (5.39) obtenue dans la démonstration du théorème 5.1 s'écrit

$$\int_M u_2^2 \, dv_g \leq \left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)} \right)^{\frac{n}{n-2}} K_n^{\frac{n}{n-2}} v_g^{\frac{2}{n}} \Upsilon_{G_2}^{\frac{n-2}{2} + \frac{n}{n-2}}$$

puis on utilise la majoration $\Upsilon_{G_2} \leq \frac{A_2^{\frac{2}{n}}}{K_n (\sup f)^{2/2^*}}$:

$$\int_M u_2^2 \, dv_g \leq \left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)} \right)^{\frac{n}{n-2}} A_2^{\frac{2}{n-2}} v_g^{\frac{2}{n}} \Upsilon_{G_2}^{\frac{n-2}{2}}$$

alors que la majoration (5.49) obtenue par la deuxième méthode s'écrit :

$$\int_M u_2^2 \, dv_g \leq v_g^{\frac{2}{n}} \Upsilon_{G_2}^{\frac{n-2}{2}}.$$

La deuxième inégalité est "meilleure" dans le sens où le majorant obtenu est plus petit que celui donné par l'autre méthode : en effet $\left(\frac{(n-2)^2}{n(n-4)} \right)^{\frac{n}{n-2}} A_2^{\frac{2}{n-2}} > 1$ car $A_2 \geq 1$ comme cardinal d'une orbite finie non vide. Dans les cas où f est constante ou proche d'une constante, comme on le montre dans la sous-section suivante, il est donc plus intéressant d'utiliser une inégalité de Hölder pour majorer la norme L^2 de u_2, donc d'utiliser le théorème 5.2

b) Une comparaison des intervalles de multiplicité

Nous comparons ici les théorèmes 5.1a) et 5.2, une comparaison entre les théorèmes 5.1b) et 5.2 donnerait les mêmes conclusions qualitatives.
La borne supérieure de l'intervalle de multiplicité pour α est la même dans les deux cas, à savoir $B_{0,2}$. Pour la borne inférieure, comparons les valeurs données par (5.20) du theorème 5.1a) et par (5.41) du théorème 5.2 : en notant $N = n - k$, on a

$$R_k = \frac{\left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{2/N} - 1 \right] \frac{K_N^{\frac{2}{n-2}}}{K_n^{\frac{n}{n-2}}} \left(\frac{n(n-4)}{(n-2)^2} \right)^{\frac{n}{n-2}} \left(\frac{\sup f}{\fint f \, dv_g} \right)^{\frac{2(N-2)}{N(n-2)}} \frac{A_2^{\frac{-4}{N(n-2)}}}{v_g^{\frac{2(N-2)}{N(n-2)}}}}{\frac{A_2^{2/N} - A_1^{2/N}}{K_N \; v_g^{2/N}} \; \frac{\inf f}{(\sup f)^{2/2^\sharp} \left(\fint f \, dv_g \right)^{2/N}}}$$

$$= \frac{v_g^{\frac{2(n-N)}{N(n-2)}}}{A_1^{2/N} A_2^{\frac{4}{N(n-2)}}} \left(\frac{n(n-4)}{(n-2)^2} \right)^{\frac{n}{n-2}} \left(\frac{K_N}{K_n} \right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{(\sup f)^{\frac{n(N-2)}{N(n-2)}} \left(\fint f \, dv_g \right)^{\frac{2k}{N(n-2)}}}{\inf f}$$

Si ce rapport est inférieur à 1, cela signifie directement que le théorème 5.2 donne un intervalle de multiplicité plus étendu que le théorème 5.1a). En revanche, s'il est supérieur à 1 il faut alors tenir compte de la condition (5.19) du théorème 5.1a), et alors pour certaines fonctions f, le théorème 5.1a) donne un intervalle de multiplicité plus étendu que la version 5.2. Positionner ce rapport R_k par rapport à 1 n'est pas aisé dans le cas général, c'est pourquoi on examine seulement le cas particulier où $k = 0$:

$$R_0 = \frac{1}{A_1^{\frac{2}{n}} A_2^{\frac{4}{n(n-2)}}} \left(\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{\sup f}{\inf f}$$

Or comme $A_i \geq 1$, on a

$$\frac{1}{A_1^{\frac{2}{n}} A_2^{\frac{4}{n(n-2)}}} \left(\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\right)^{\frac{n}{n-2}} \leq 1 \qquad \text{alors que} \qquad \frac{\sup f}{\inf f} \geq 1.$$

La position du quotient R_0 par rapport à 1 peut être fixée par la fonction f. Par exemple si f est constante, alors $R_0 \leq 1$ et la deuxième méthode est plus efficace. De même, si le rapport $\frac{\sup f}{\inf f}$ est assez proche de 1 (autrement dit si f "varie peu") pour que le quotient R_0 reste inférieur à 1, alors la seconde méthode est meilleure.
En revanche que se passe-t-il si f "varie beaucoup", c'est-à-dire assez pour que le quotient R_0 devienne plus grand que 1 ? Alors, quitte à encore augmenter la valeur du maximum de f (tout en restant à $\fint f\, dv_g$ et $inf f$ fixés) jusqu'à ce que la minoration (5.41) dans le théorème 5.2 soit plus petite que celle de (5.19) du théorème 5.1a), c'est-à-dire jusqu'à ce que :

$$B_{0,G_2} - \frac{A_2^{2/n} - A_1^{2/n}}{K_n\, v_g^{2/n}} \frac{\inf f}{(\sup f)^{2/2^*} (\fint f\, dv_g)^{2/n}} > \frac{n(n-4)}{(n-2)^2} B_0(M,g)$$

alors le premier théorème donne un intervalle de multiplicité plus étendu.
On retiendra en résumé que : **la deuxième méthode donne un intervalle de multiplicité pour α plus grand que la première pour des fonctions f qui "varient peu". Par contre, pour une fonction f présentant d'assez fortes variations, la première méthode est plus avantageuse quand à l'étendu de l'intervalle de multiplicité.**

Troisième partie

Multiplicité de niveaux d’énergies pour des solutions positives de l’équation de Sobolev Poincaré en présence d’isométries

Dans cette troisième partie, nous revenons à la question qui a motivé cette thèse, à savoir l'étude de l'équation de Sobolev Poincaré ($E_{\alpha,f}$).
On s'intéresse ici à la question de multiplicité de solutions positives pour cette équation en adaptant la méthode présentée dans la partie précédente. On sépare deux solutions grâce à leurs énergies et à l'introduction de sous-groupes d'isométries de la variété.
Pour ce faire, nous devons tout d'abord étudier l'influence des isométries sur l'inégalité de Sobolev Poincaré : dans le chapitre 6, nous établissons l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries ainsi que des hypothèses permettant d'écrire une inégalité de Sobolev Poincaré optimale en présence d'isométries, c'est-à-dire une inégalité analogue à celle ($I_S^{G,opt}$) présentée dans le théorème D de Faget.
Dans le chapitre 7, nous nous attachons à séparer grâce à leurs énergies des solutions qui sont obtenues grâce aux isométries introduites. Le raisonnement global est le même que dans le chapitre 5, mais l'établissement des exemples est très différent. On arrive en effet à obtenir des exemples pour une plus large palette de variétés que dans le cas des équations de Sobolev au chapitre 5, mais ces résultats sont moins précis dans le sens où les bornes des intervalles de multiplicité obtenus ne sont pas connues explicitement.

Chapitre 6

Inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries

On établit dans ce chapitre l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale en présence d'isométries qui est l'analogue de l'inégalité de Sobolev optimale en présence d'isométries (I_S^{opt}) due à Faget [17] et présentée dans le théorème D du chapitre 5.
Les notations utilisées dans ce chapitre en ce qui concerne l'action des groupes d'isométries sont les mêmes que dans le chapitre précédent.

6.1 Inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries

On établit tout d'abord facilement la validité de l'inégalité de Sobolev Poincaré (non optimale) en présence d'isométries.

Proposition 6.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites, et $A > 0$ le volume minimal des orbites de dimension k. On suppose que $n - k > 2$ et on note $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists C_{\varepsilon,G} > 0, \forall u \in H_{1,G}^2(M)$,*

$$\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq \left(\frac{K_{n-k} + \varepsilon}{A^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\|\nabla u\|_2^2 + C_{\varepsilon,G}\, \|u\|_1^2\right] \qquad (I_{SP}^G)$$

De plus, $K_{n-k}/A^{\frac{2}{n-k}}$ est la plus petite constante pour laquelle l'inégalité est vérifiée.

Démonstration de la proposition 6.1
Cette proposition découle directement de l'inégalité de Sobolev non optimale en présence d'isométries (I_S^G). Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 6.1, Faget [17], voir aussi le théorème D, montre que : $\forall \eta > 0, \exists B_{\eta,G} > 0, \forall u \in H_{1,G}^2(M)$,

$$\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq \left(\frac{K_{n-k} + \eta}{A^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\|\nabla u\|_2^2 + B_{\eta,G}\, \|u\|_2^2\right]$$

Comme dans le cas "sans isométries", le passage d'une inégalité de type Sobolev à celle de type Sobolev Poincaré se fait grâce à la double inclusion $H_{1,G}^2(M) \subset L^2(M) \subset L^1(M)$ et à la compacité de la première :
$\exists C_\eta > 0, \forall u \in H_{1,G}^2(M)$,
$$||u||_2^2 \leq \eta||\nabla u||_2^2 + C_\eta||u||_1^2. \tag{6.1}$$
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, les deux inégalités précédentes montrent que (I_{SP}^G) est vraie. De plus, $K_{n-k}/A^{\frac{2}{n-k}}$ étant minimale pour l'inégalité de Sobolev, elle le reste pour l'inégalité de Sobolev Poincaré. La proposition 6.1 est démontrée.$\square$

Remarque 20. *Cette démonstration rapide ne reflète pas du tout l'origine du résultat : la démonstration de Faget [17] peut être reprise dans notre cas en utilisant simplement en plus l'inégalité (6.1), qui est l'outil fondamental qui permet de passer, dans les cas non optimaux, de l'inégalité de Sobolev à celle de Sobolev Poincaré.*

Cette nouvelle inégalité fonctionnelle apporte des résultats d'existence de solutions G-invariantes pour l'équation associée par la méthode variationnelle :
$$\Delta_g u + \alpha\Sigma||u||_1 = f u^{2^\sharp - 1} \tag{$E_{\alpha,f}^\sharp$}$$
où $\alpha > 0$, $f \in C_G^0(M)$ et $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifie $u\Sigma = u$. L'équation $(E_{\alpha,f}^\sharp)$ est appelée dans cette thèse équation de Sobolev Poincaré en présence d'isométries.
Pour trouver des solutions positives à $(E_{\alpha,f}^\sharp)$, on cherche à minimiser la fonctionnelle
$$Q_{\alpha,G}(u) = \frac{||\nabla u||_2^2 + \alpha||u||_1^2}{\left(\int_M f u^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$
sur l'ensemble
$$\mathcal{A}_G^+ = \{u \in H_{1,G}^2(M), \int_M f|u|^{2^\sharp} dv_g > 0\}.$$
On pose
$$\mu_{\alpha,G} := \inf_{u \in \mathcal{A}_G^+} Q_{\alpha,G}(u).$$
On obtient alors facilement un résultat d'existence de solutions G-invariantes pour l'équation $(E_{\alpha,f}^\sharp)$ analogue à celui du théorème E pour l'équation de Sobolev $(E_S^\sharp)$:

Proposition 6.2. *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites et $A > 0$ le volume minimal des $G-$orbites de dimension k. On suppose que $n - k > 2$. Soient de plus $\alpha > 0$ et $f \in C_G^\infty(M)$ de maximum strictement positif. Alors*
$$0 \leq \mu_{\alpha,G} \leq \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp} K_{n-k}}. \tag{6.2}$$
De plus, si
$$\mu_{\alpha,G} < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp} K_{n-k}}, \tag{6.3}$$

alors il existe $u_G \in H^2_{1,G}(M)$ positive non identiquement nulle et il existe $\Sigma \in L^\infty(M)$ vérifiant $0 \le \Sigma \le 1$ et $u_G\Sigma = u_G$ telles que

$$\Delta u_G + \alpha \|u_G\|_1 \Sigma = f u_G^{2^\sharp - 1}. \qquad (E^\sharp_{\alpha,f})$$

Enfin u_G est un minimiseur de $\mu_{\alpha,G}$ dans le sens où $Q_\alpha(u_G) = \mu_{\alpha,G}$.

Cette proposition est à rapprocher de la proposition 1.2 de la première partie où on traite le cas "sans isométries".

On obtient alors dans le corollaire suivant des conditions suffisantes d'existence de solutions pour $(E^\sharp_{\alpha,f})$: la première condition est l'adaptation du corollaire 1.1 du cas sans isométries, la seconde correspond au corollaire 1.2 et la dernière au corollaire 1.3. L'inégalité optimale $(I^{G,opt}_{SP})$ et la constante $C_{O,G}(M,g)$ sont définies à la section 6.2 ci-dessous.

Corollaire 6.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \ge 3$. Soient G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \ge 0$ la dimension minimale des G-orbites et $A > 0$ le volume minimal des orbites de dimension k. On suppose que $n - k > 2$.*
*Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+_*$ et $f \in C^2_G(M)$ de maximum atteint en $x_0 \in M$, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée, alors il existe une solution $G-$invariante et $G-$minimisante à l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$ (avec $f \equiv 1$ dans le cas **b**).*

a) *Si*

$$\alpha < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k} v_g^2} \left(\frac{\int_M f \, dv_g}{\sup f} \right)^{2/2^\sharp}$$

b) *Si $f \equiv 1$, si $(I^{G,opt}_{SP})$ est vraie et si $\alpha < C_{0,G}(M,g)$*

c) *Si $n-k \ge 4$, s'il existe un sous-groupe H d'isométries pour lequel l'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ du théorème D du chapitre 5 est vraie et si*

$$Scal_{\tilde g}(\bar{x}_0) + \frac{3\Delta_{\tilde g} \tilde v_H(\bar{x}_0)}{A} - \frac{(n-4-k)\, \Delta_g f(x_0)}{2\, f(x_0)} > 0 \qquad (6.4)$$

où $x_0 \in M$ est un point dont l'orbite sous G est de dimension minimale $k \ge 0$ et de volume minimal $A > 0$ et où les notations utilisées sur le quotient $O_{x_0,\delta}/H$ sont celles présentées dans la remarque 13 suivant le théorème D.
Remarquons que (6.4) est vraie en particulier si

$$(n-4-k)\Delta_g f(x_0) = 0, \quad \Delta_{\tilde g} \tilde v_H(\bar{x}_0) \ge 0, \quad et \quad Scal_{\tilde g}(\bar{x}_0) > 0. \qquad (6.4bis)$$

d) (Un cas particulier de c) *Si $n - k \ge 4$, si toutes les $G-$orbites sont principales et de volume constant et si pour $x_0 \in M$ point de maximum de f, on a*

$$(n-4-k)\, \Delta_g f(x_0) = 0 \qquad et \qquad Scal_{\tilde g}(\bar{x}_0) > 0. \qquad (6.5)$$

Démonstration du corollaire 6.1
On reprend les mêmes raisonnements que dans le cas "sans isométries" l'objectif étant de rendre (6.3) vraie. La condition **a)** est obtenue en imposant $Q_{\alpha,G}(1) < \frac{A^{2/(n-k)}}{K_{n-k}(\sup f)^{2/2^\sharp}}$. la condition **b)** résulte immédiatement de la définition de $C_{0,G}$ dans la section 6.2 ci-dessous. La condition **c)** provient du calcul de fonctions test :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,G}(u_\varepsilon) &\leq \frac{A^{2/(n-k)}}{K_{n-k} f(x_0)^{1-\frac{n-k}{2}}} \\ &\times \left[1 + \frac{\varepsilon}{n-k}\left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{2f(x_0)} - \frac{Scal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)}{n-4-k} - \frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}(\bar{x}_0)}{A(n-4-k)}\right) + \circ(\varepsilon)\right] \quad \text{si } n-k>4 \\ &\times \left[1 + \frac{\varepsilon ln\varepsilon}{8}\left(Scal_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) + \frac{3\Delta_{\tilde{g}}\tilde{v}(\bar{x}_0)}{A}\right) + \circ(\varepsilon \ln \varepsilon)\right] \quad \text{si } n-k=4 \end{aligned}$$

où u_ε est la même fonction que celle utilisée pour démontrer le corollaire 5.3 . Enfin, la condition **d)** provient directement de **c)** et du fait que si les orbites sont principales, alors la variété quotient M/G est définie et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est immédiatement vérifiée en prenant comme sous groupe le groupe G lui-même. □

6.2 Inégalité de Sobolev Poincaré optimale en présence d'isométries

Théorème 6.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$, $k \geq 0$ la plus petite dimension des G-orbites et $A > 0$ le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que $n-k > 2$ et que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ énoncée ci-dessous est vérifiée. Alors $\exists C > 0, \forall u \in H^2_{1,G}(M)$,*

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{2/(n-k)}}\left[\|\nabla u\|^2_2 + C\|u\|^2_1\right], \tag{6.6}$$

où $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-k-2}$.

$(\mathcal{H}_1^{SP})$: pour toute orbite $O^G_{x_0}$ de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe un sous-groupe d'isométries G' et $\delta > 0$ tels que :
i) Sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M/d_g(x, O_{x_0}) < \delta\}$, les G'-orbites sont principales.
ii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}, \qquad O^{G'}_x \subset O^G_x$ et $O^{G'}_{x_0} = O^G_{x_0} := O_{x_0}$.
iii) $\forall x \in O_{x_0,\delta}, \qquad A = vol_g O_{x_0} \leq vol_g O^{G'}_x$.
iv) Sur la variété à bord $O_{x_0,\delta}/G'$, l'inégalité de Sobolev-Poincaré (I^{opt}_{SP}) est valable.

Remarque 21. *Les conditions i), ii) et iii) de $(\mathcal{H}_1^{SP})$ sont exactement l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ du théorème D de Faget. Pour démontrer notre théorème, nous nous inspirons de la démonstration de Faget [18]. Le point i) nous permet de passer au quotient au voisinage des orbites de dimension minimale et de volume minimal. Le principe est alors d'écrire une inégalité optimale sur la variété quotient (d'où l'hypothèse de validité iv) inutile dans le cas de Sobolev car (I^{opt}_S) est toujours vraie) et de la "remonter" ensuite sur la variété initiale pour obtenir $(I^{G,opt}_{SP})$ grâce à ii) et iii).*

Lorsque l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'isométries (6.6) est vraie, on définit $C_{0,G}(M,g)$ comme étant la borne inférieure des $C > 0$ tels que l'inégalité (6.6) est vraie pour toute fonction $u \in H^2_{1,G}(M)$. On a alors immédiatement

$$\forall u \in H^2_{1,G}(M), \qquad \|u\|^2_{2^\sharp} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{2/(n-k)}} \left[\|\nabla u\|_2^2 + C_{0,G}(M)\|u\|_1^2 \right]. \qquad (I_{SP}^{G,opt})$$

La valeur de $C_{0,G}(M,g)$ dépend de la géométrie de la variété et de l'action du groupe G comme le montre la minoration suivante facilement obtenue en testant $1 \in H^2_{1,G}(M)$ dans $(I_{SP}^{G,opt})$:

$$C_{0,G} \geq \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}\, v_g^{\frac{n+2-k}{n-k}}}. \tag{6.7}$$

Malheureusement cette minoration est le seul renseignement dont nous disposons actuellement sur $C_{0,G}(M,g)$: ne ne connaissons en effet aucun exemple de variétés pour lequel la valeur exacte de $C_{0,G}(M,g)$ est connue ni même encadrée. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note $C_{0,G}$ pour $C_{0,G}(M)$.

Avant de passer à la démonstration du théorème 6.1, nous donnons des exemples pour lesquels l'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ est vérifiée.

6.2.1 Exemples pour l'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$

Nous commençons par le cas simple où le groupe d'isométries G permet le passage au quotient (voir définition 5.1) et donnons une liste (non exhaustive) d'exemples :

Proposition 6.3. *L'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ est remplie pour les variétés et les groupes d'isométries permettant le passage au quotient suivants :*
1) *(S^3, h_3) et G_1 un sous-groupe fini de $O(4)$ agissant librement ;*
2) *$(S^1(t) \times S^2, h_1 \times h_2)$ et $G_2 = R \times I_{S^2}$ où R est un groupe fini de rotations de $S^1(t)$.*
3) *$(V^{n-k} \times S^k, g_V \times h_k)$ et $G_3 = I_V \times O(k+1)$ où $k \geq 1$ et (V^{n-k}, g_V) est une variété riemannienne compacte de dimension $n-k > 2$ sur laquelle l'inégalité (I_{SP}^{opt}) est vraie.*
4) *$(T^2 \times V^{n-2}, g_T \times g_V)$ et $G_4 = R_z \times I_V$*
où $T^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2+y^2+z^2+b^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0\right\}$ avec $0 < b < a$ est un tore muni de la métrique g_T induite par celle de $\mathbb{R}^3$, où R_z est la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe (Oz) et où (V^{n-2}, g_V) est une variété riemannienne compacte de dimension $n-2 \geq 2$ telle que si $n-2 \geq 3$, alors $Scal_{g_V} < 0$.

Remarque 22. *En jouant sur les hypothèses de validité de (I_{SP}^{opt}) du théorème A, beaucoup d'autres exemples peuvent être obtenus.*

Démonstration de la proposition 6.3
Dans tous ces exemples, le passage au quotient est possible et les trois premières hypothèses $i), ii)$ et $iii)$ de $(\mathcal{H}_1^{SP})$ sont immédiatement vraies en prenant comme sous-groupe normal de G le groupe G lui-même.
Reste à vérifier que (I_{SP}^{opt}) est vraie sur la variété quotient. Pour les exemples **1)** et **2)**, comme le groupe d'isométries est fini, la dimension du quotient est la même que

celle de la variété initiale c'est-à-dire 3 et (I_{SP}^{opt}) est vraie d'après le théorème A.Pour **3)**, comme $O(k+1)$ est transitif sur S^k, le quotient est (V^{n-k}, g_V) où par hypothèse l'inégalité (I_{SP}^{opt}) est vraie. Enfin, pour **4)** le quotient est $C^1 \times V^{n-2}$ muni de la métrique quotient induite par $g_T \times g_V$ où C^1 est le petit cercle du tore T^2. Si $n = 4$, alors le quotient est de dimension 3 et par le théorème A, (I_{SP}^{opt}) est vraie. Si $n \geq 5$, la courbure scalaire du quotient est celle de (V^{n-2}, g_V) et comme elle est strictement négative, on sait par le théorème A que (I_{SP}^{opt}) est vraie.□

On présente maintenant un exemple où le passage au quotient n'est pas possible. Cet exemple est détaillé dans Faget [18] car pour cet exemple l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vraie :

Proposition 6.4. *Soit $(S^2 \times T^2, h_2 \times g_T)$ la variété produit où (S^2, h_2) est la sphère standard de dimension 2 et où*

$$T^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2+y^2+z^2+b^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0\right\}$$

est un tore de $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique g_T induite par celle de $\mathbb{R}^3$. L'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ est alors vraie sur $(S^2 \times T^2, h_2 \times g_T)$ pour l'action du groupe $G = R_z \times R_z$ où R_z est le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe (Oz).

Démonstration de la proposition 6.4

On voit facilement que le groupe G ne permet pas le passage au quotient par exemple car il y a des orbites de dimension 1 et 2. Pour plus de détails sur l'action de ce groupe, on renvoie à Faget [18] où il est montré que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est remplie avec comme sous-groupe normal de G le groupe $G' = I_{S^2} \times R_z$. Il est alors évident que toutes les G'-orbites sont principales et que

$$(S^2 \times T^2)/(I_{S^2} \times R_z) = S^2 \times C^1$$

où C^1 est le petit cercle du tore. Le quotient est de dimension 3, donc (I_{SP}^{opt}) est vraie et la proposition est démontrée. □

6.2.2 Démonstration de l'inégalité optimale

On procède par l'absurde en supposant que l'inégalité (6.6) est fausse : pour tout $\alpha > 0$, il existe alors $w_\alpha \in H_{1,G}^2(M)$ tel que $Q_{\alpha,G}(w_\alpha) < \frac{K_{n-k}}{A^{2/n-k}}$ et donc

$$\mu_{\alpha,G} \leq Q_{\alpha,G}(w_\alpha) < \frac{K_{n-k}}{A^{2/n-k}}.$$

La proposition 6.2 donne alors l'existence d'une solution $u_\alpha \in H_{1,G}^2(M)$ positive non identiquement nulle à l'équation

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha \|u_\alpha\|_1 \Sigma_\alpha = u_\alpha^{2^\sharp - 1} \qquad (E_\alpha^\sharp)$$

qui de plus est minimisante pour $\mu_{\alpha,G}$ au sens où $Q_{\alpha,G}(u_\alpha) = \mu_{\alpha,G} := \inf_{v \in \mathcal{A}_G^+} Q_{\alpha,G}(v)$. On en déduit immédiatement la relation

$$\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + \alpha \|u_\alpha\|_1^2 = \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} = \mu_{\alpha,G}^{\frac{n-k}{2}} > 0. \qquad (6.8)$$

De plus, pour α assez grand u_α n'est pas la fonction constante : en effet si c'était le cas, on aurait $\mu_{\alpha,G} = C\alpha$ ce qui est impossible car la suite $(\mu_{\alpha,G})_{\alpha>0}$ est bornée. Ainsi, pour α assez grand, on a $\|\nabla u_\alpha\|_2 > 0$.
L'étude précise du comportement asymptotique de cette suite $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ nous permet d'aboutir à une contradiction.

a) Etude du phénomène de concentration

Proposition 6.5. *Soit (u_α) une suite de solutions minimisantes positives de $(E_\alpha^\sharp)$. Alors il existe une sous suite de (u_α), toujours notée (u_α) qui, lorsque α tend vers $+\infty$ converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ mais pas fortement, converge vers 0 en norme $L^1(M)$ et converge presque partout vers 0. De plus, on a les limites suivantes :*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \|\nabla u_\alpha\|_2^2 = \lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} = \frac{A}{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}} \tag{6.9}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \mu_{\alpha,G} = \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}} \tag{6.10}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\|u_\alpha\|_1^2 = 0 \tag{6.11}$$

$$\forall q \in [1, 2^\sharp[, \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_q = 0 \tag{6.12}$$

Démonstration de la proposition 6.5
La relation (6.8) implique grâce à la majoration classique (6.2) de $\mu_{\alpha,G}$ que

$$0 < \|\nabla u_\alpha\|_2^2 + \alpha\|u_\alpha\|_1^2 = \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} = \mu_{\alpha,G}^{\frac{n-k}{2}} \leq \frac{A}{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}}. \tag{6.13}$$

A extraction de sous-suites près, les suites $(\|\nabla u_\alpha\|_2^2)$, $(\alpha\|u_\alpha\|_1^2)$ et $(\|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp})$ convergent donc chacune vers une limite appartenant à l'intervalle $[0, A\, K_{n-k}^{-\frac{n-k}{2}}]$ et la suite $(\mu_{\alpha,G})$ converge vers une limite appartenant à $[0, A^{\frac{2}{n-k}}\ K_{n-k}^{-1}]$. D'après la double inclusion $H_1^2(M) \subset L^2(M) \subset L^1(M)$ et la compacité de la première, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists D_\varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \qquad \|u_\alpha\|_2 \leq \varepsilon\|\nabla u_\alpha\|_2 + D_\varepsilon\|u_\alpha\|_1 \leq C$$

où $C > 0$ ne dépend pas de α. La suite (u_α) est ainsi bornée dans $H_1^2(M)$. Par réflexivité de $H_1^2(M)$ et par le théorème de Rellich-Kondrakov, il existe $u_0 \in H_1^2(M)$ telle que, à extraction de sous-suite près, (u_α) converge faiblement dans $H_1^2(M)$, fortement dans $L^1(M)$ et presque partout vers u_0. Enfin, comme $(\alpha\|u_\alpha\|_1^2)$ est bornée, on a nécessairement $0 = \lim_{\alpha\to 0} \|u_\alpha\|_1^2 = \|u_0\|_1^2$ et donc $u_0 = 0$.
Maintenant avec (6.8) et l'inégalité (I_{SP}^G), pour $\varepsilon > 0$ il existe $C_{\varepsilon,G} > 0$ tel que pour $\alpha > 0$ assez grand,

$$1 = \frac{\left(\int_M u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{2/2^\sharp}}{(\mu_{\alpha,G})^{\frac{n-k-2}{2}}} \leq \frac{\left(\frac{K_{n-k}}{A^{2/(n-k)}} + \varepsilon\right)}{(\mu_{\alpha,G})^{\frac{n-k-2}{2}}} \left[\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + C_{\varepsilon,G}\|u_\alpha\|_1^2\right] \tag{6.14}$$

Or, toujours pour α grand

$$\mu_{\alpha,G}^{\frac{n-k-2}{2}} \geq \left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + C_{\varepsilon,G}\|u_\alpha\|_1^2\right)^{1-\frac{2}{n-k}}$$

d'où

$$1 \leq \left(\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon\right)\left(\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + C_{\varepsilon,G}\|u_\alpha\|_1^2\right)^{\frac{2}{n-k}}$$

Alors en passant à la limite $\alpha \to +\infty$, on en déduit comme $\lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_1 = 0$ que

$$1 \leq \left(\frac{K_{n-k}}{A^{2/(n-k)}} + \varepsilon\right)\left(\lim_{\alpha\to+\infty} \|\nabla u_\alpha\|_2^2\right)^{\frac{2}{n-k}}.$$

Cette relation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{\alpha\to+\infty} \|\nabla u_\alpha\|_2^2 \geq \frac{A}{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}}$, et d'après (6.13), on en déduit que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \|\nabla u_\alpha\|_2^2 = \frac{A}{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}}.$$

En particulier, la convergence de (u_α) vers 0 dans $H_{1,G}^2(M)$ n'est pas forte. Pour montrer (6.10), on suppose par l'absurde que $\lim_{\alpha\to+\infty} \mu_{\alpha,G} < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ petit,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \mu_{\alpha,G}\left(\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon\right) < 1.$$

On réécrit alors (6.14) sous la forme

$$\|\nabla u_\alpha\|_2^2 \leq (\mu_{\alpha,G})^{\frac{n-k}{2}} \leq \mu_{\alpha,G}\left(\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon\right)\left[\|\nabla u_\alpha\|_2^2 + C_{\varepsilon,G}\|u_\alpha\|_1^2\right]$$

d'où

$$\|\nabla u_\alpha\|_2^2\left(1 - \mu_{\alpha,G}\left(\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon\right)\right) \leq C\|u_\alpha\|_1^2$$

et en passant à la limite $\alpha \to +\infty$, comme $\lim_{\alpha\to+\infty} \mu_{\alpha,G}\left(\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \varepsilon\right) < 1$ on en déduit que $\lim_{\alpha\to+\infty} \|\nabla u_\alpha\|_2^2 = 0$ ce qui n'est pas vrai. La limite (6.10) est ainsi démontrée. La relation (6.8) implique alors que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} = \frac{A}{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}}$$

ce qui achève de montrer (6.9). Enfin (6.11) se déduit immédiatement de (6.9) puisque

$$\alpha\|u_\alpha\|_1^2 = \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} - \|\nabla u_\alpha\|_2^2.$$

Reste à montrer (6.12). Pour cela, d'après la double inclusion $H_1^2(M) \subset L^q(M) \subset L^1(M)$ et la compacité de la première :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \qquad \|u_\alpha\|_q^2 \leq \varepsilon\|u_\alpha\|_{H_1^2}^2 + C_\varepsilon\|u_\alpha\|_1^2$$

d'où $\limsup_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_q \le \varepsilon\, AK_{n-k}^{-\frac{n-k}{2}}$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_q = 0$$

La proposition 6.5 est ainsi démontrée. □

Ces premiers résultats permettent d'avoir une idée du comportement asymptotique de la suite (u_α) : elle converge en norme L^p pour $1 \le p < 2^\sharp$ et presque partout vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas vers 0 en norme $L^{2^\sharp}$. Un phénomène de concentration a lieu : la masse de la fonction se regroupe autour d'un ensemble de mesure nulle. Par analogie à la notion de point de concentration, on définit, pour les fonctions invariantes par G, une orbite de concentration :

Définition 6.1. *Soient (u_α) une suite de fonctions positives de $H^2_{1,G}(M)$ qui converge vers 0 faiblement dans H^2_1 mais pas dans $L^{2^\sharp}$, $G \subset Isom_g(M)$, $x \in M$ et O_x l'orbite de x sous G. Alors O_x est une orbite de concentration pour la suite (u_α) si pour tout $\delta > 0$,*

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp} dv_g > 0,$$

où $O_{x,\delta} = \{y \in M, d_g(y, O_x) < \delta\}$.

Pour affiner la description du comportement asymptotique de (u_α), on démontre la proposition suivante

Proposition 6.6. *A extraction de sous-suite près, (u_α) admet une unique orbite de concentration O_{x_0} qui est de dimension minimale k et de volume minimal A. De plus*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} u_\alpha = 0 \text{ dans } C^0_{loc}(M \backslash O_{x_0}). \tag{6.15}$$

Démonstration de la proposition 6.6

L'existence de l'orbite de concentration découle facilement de la compacité de la variété et du fait que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} = A\, K_{n-k}^{-\frac{n-k}{2}} > 0$. Pour démontrer la suite de cette proposition, on utilise plusieurs fois le lemme d'itération suivant.

Lemme 6.1. *On suppose que l'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée. Soient u_α solution de $(E_\alpha^\sharp)$ et $\eta \in C^\infty_G(M)$ une fonction à support compact telle que $0 \le \eta \le 1$. Alors, pour tout $p \ge 1$, on a*

$$A_\alpha(p,\eta)\left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{p+1}{2}}\right)^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \le \int_{supp\ \eta} C_\alpha(p,\eta)\, u_\alpha^{p+1} dv_g \le C \int_{supp\ \eta} u_\alpha^{p+1} dv_g \tag{6.16}$$

avec

$$C_\alpha(p,\eta) = \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left(\frac{(p-1)}{2p}\eta\Delta\eta + \frac{p+1}{2p}|\nabla\eta|^2 + B_{0,G}\,\eta^2\right)$$

et

$$A_\alpha(p,\eta) = 1 - \frac{(p+1)^2}{4p}\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left(\int_{supp\ \eta} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}}$$

La démonstration de ce lemme se fait de la même manière que pour le lemme 2.1 en utilisant l'équation ($E^{\sharp}_{\alpha}$) à la place de ($E_{\alpha,f}$) et l'inégalité ($I^{G,opt}_S$) à la place de (I^{opt}_S).

Commençons par montrer l'unicité. Soient $x \in M$ tel que O_x soit une orbite de concentration de (u_α), $\delta > 0$ et $\eta \in C^\infty_G(M)$ telle que $\eta = 1$ sur $O_{x,\delta/2}$ et $\eta = 0$ sur $M\backslash O_{x,\delta}$. D'après la définition de l'orbite de concentration et d'après (6.9) :

$$0 < a_\delta := \limsup_{\alpha\to+\infty}\left(\int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}} \le \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}.$$

Suppsons que $a_\delta < \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}$, alors pour p proche de 1 et pour α grand :

$$\frac{(p+1)^2}{4p}\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left(\int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}} < 1$$

c'est-à-dire $A_\alpha(p,\eta) > 0$. Alors (6.16) implique

$$\left(\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{p+1}{2}}\right)^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \le C\int_{supp\ \eta} u_\alpha^{p+1} dv_g \le C.$$

On en déduit par l'inégalité de Hölder que

$$\int_{O_{x,\delta/2}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g \le C\left(\int_M u_\alpha^{2^\sharp - \frac{2^\sharp(p-1)}{2^\sharp-2}}\, dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-2}{2^\sharp}}$$

Or pour p proche de 1, $2^\sharp - \frac{2^\sharp(p-1)}{2^\sharp-2} \in [1, 2^\sharp[$ donc d'après (6.12) on a $\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{O_{x,\delta/2}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g = 0$ ce qui contredit le fait que O_x est une orbite de concentration. Ainsi $a_\delta = \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}$ ce qui implique l'unicité de l'orbite de concentration.
Intéressons nous maintenant à la dimension de cette unique orbite de concentration notée O_{x_0}. L'étude de la géométrie des orbites faite par Faget [18] donne le lemme suivant

Lemme A (Faget [18]). *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n et $G \subset Isom_g(M)$. Alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage $O_{x,\delta} = \left\{y \in M, d_g(y, O_x) < \delta\right\}$ de l'orbite O_x tel que*

$$\forall y \in O_{x,\delta}, \qquad \dim O_y \ge \dim O_x.$$

Notons k la dimension minimale des G-orbites et supposons que la dimension de O_{x_0} est égale à $k_0 > k$. Le lemme A donne l'existence d'une variété à bord $O_{x_0,\delta}$ sur laquelle toutes les orbites sont de dimension supérieure ou égale à k_0. Les inclusions de Sobolev sur cette variété s'écrivent : $\mathring{H}^2_{1,G}(O_{x_0,\delta}) \subset L^q(O_{x_0,\delta})$. L'inclusion est continue pour tout $q \in [1, \frac{2(n-k_0)}{n-2-k_0}]$ et compacte pour tout $q \in [1, \frac{2(n-k_0)}{n-2-k_0}[$. Or on a supposé $k_0 < k$, donc $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k} < \frac{2(n-k_0)}{n-2-k_0}$ et l'inclusion $\mathring{H}^2_{1,G}(O_{x_0,\delta}) \subset L^{2^\sharp}(O_{x_0,\delta})$ est alors compacte.

Soit $0 \leq \eta \leq 1$ une fonction $C_G^\infty(M)$ à support compact dans $O_{x_0,2\delta}$ et $\eta = 1$ sur $O_{x_0,\delta}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $C_\varepsilon > 0$,

$$\left(\int_{O_{x_0}(\delta)} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq \varepsilon \|\nabla(\eta u_\alpha)\|_2^2 + \varepsilon \|u_\alpha\|_2^2 + C_\varepsilon \|u_\alpha\|_1^2,$$

en passant à la limite $\alpha \to +\infty$ puis en $\varepsilon \to 0$, on obtient grâce à la proposition 6.5 : $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g = 0$, d'où l'absurdité car O_{x_0} est une orbite de concentration. On a donc montré que la dimension de O_{x_0} est minimale égale à k.
Notons maintenant A le volume minimal des orbites de dimension k et montrons que le volume de O_{x_0} est égal à A. Pour cela, on a recours encore une fois à l'étude de la géométrie des orbites faite par Faget [18] :

Lemme B (**Faget [18]**). *Soient (M, g) une variété compacte riemannienne de dimension n, $G \subset Isom_g(M)$, $x \in M$ et O_x une G-orbite de dimension $k < n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in O_{x,\delta}$ dont l'orbite O_y est de dimension k, on a*

$$vol_g O_y \geq vol_g O_x - \varepsilon.$$

Supposons que $vol_g\, O_{x_0} > A$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ pour lequel $V_\varepsilon = vol_g O_{x_0} - \varepsilon > A$ et le lemme B donne l'existence de $\delta > 0$ tel que sur $O_{x_0,\delta}$ toutes les orbites de dimension k sont de volume supérieur ou égal à B_ε, avec égalité pour l'orbite O_{x_0}. Sur la variété $O_{x_0,\delta}$, $V_\varepsilon = vol_g O_{x_0} - \varepsilon$ est donc le volume minimal des orbites de dimension minimale k. Dans l'inégalité de Sobolev en présence d'isométries $(I_S^{G,opt})$ sur cette variété, la première constante devient donc $\frac{K_{n-k}}{V_\varepsilon^{\frac{2}{n-k}}}$ (à la place de $\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}$ pour l'inégalité optimale écrite sur M). La valeur de $A_\alpha(p, \eta)$ dans (6.16) du lemme 6.1 devient alors

$$A_\alpha(p, \eta) = 1 - \frac{(p+1)^2}{4p} \frac{K_{n-k}}{V_\varepsilon^{\frac{2}{n-k}}} \left(\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}},$$

et comme $\left(\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}} \leq \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}$, on obtient pour p proche de 1

$$A_\alpha(p, \eta) \geq 1 - \frac{(p+1)^2}{4p} \left(\frac{A}{V_\varepsilon}\right)^{\frac{2}{n-k}} > 0.$$

L'absurdité est alors obtenue de la même façon que dans la démonstration de l'unicité. Pour finir, on démontre la convergence vers 0 de (u_α) dans $C^0_{loc}(M \backslash O_{x_0})$. Soient $x \notin O_{x_0}$, $\delta > 0$ tel que $B_x(\delta) \cap O_{x_0} = \emptyset$ et $\eta \in C_G^\infty(M)$ définie par $\eta = 1$ sur $B_x(\delta/2)$ et $\eta = 0$ sur $M \backslash B_x(\delta)$ et telle que $0 \leq \eta \leq 1$. La valeur de $A_\alpha(p, \eta)$ dans (6.16) du lemme 6.1 devient alors

$$A_\alpha(p, \eta) = 1 - \frac{(p+1)^2}{4p} \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}} \left(\int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n-k}}$$

et comme O_x n'est pas une orbite de concentration, quitte à diminuer δ, on a $\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g = 0$, donc $A_\alpha(p,\eta) > 0$ et pour $p \geq 1$, on a

$$\left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{p+1}{2}})^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq C\int_M u_\alpha^{p+1} dv_g.$$

Pour $p = 2^\sharp - 1$, comme (u_α) est bornée dans $L^{2^\sharp}(M)$, cela implique que (u_α) est bornée dans $L^{\frac{(2^\sharp)^2}{2}}(B_x(\delta))$. Or $\frac{(2^\sharp)^2}{2} > 2^\sharp$, la technique d'itération de De Giorgi-Nash-Moser donne donc l'existence de $C > 0$ tel que

$$\sup_{B_x(\delta/2)} u_\alpha \leq C\|u_\alpha\|_{L^1(B_x(\delta))} \leq C\|u_\alpha\|_1,$$

ce qui en passant à la limite donne $\lim_{\alpha\to+\infty}\sup_{B_x(\delta/2)} u_\alpha = 0$. et la proposition 6.6 est démontrée.□

b) Résultat préliminaire

Lemme 6.2. *Soient (N,g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension n, G un sous groupe du groupe $Isom_g(N)$ des isométries de N, $k \geq 0$ la dimension minimale des G-orbites et $A > 0$ le volume minimal des orbites de dimension k. On suppose que $n - k > 2$. Soit O_{x_0} une orbite de dimension k et de volume A. S'il existe un sous-groupe G' de $Isom_g(N)$ tel que :*
1) Les G'-orbites sont toutes principales ;
2) Quel que soit $x \in N$, $O_x^{G'}$ est inclus dans O_x^G et $O_{x_0} = O_{x_0}^G$;
3) Quel que soit $x \in N$, $A = vol_g O_{x_0}^{G'} \leq vol_g O_x^{G'}$;
Alors N/G' est une variété quotient sur laquelle la métrique g induit une métrique quotient $\tilde g$. On note $\pi_{G'}$ la surjection canonique de N dans N/G' et $\tilde v_{G'}$ la fonction définie sur N/G' par : $\forall y \in N/G'$, $\tilde v_{G'}(y) = vol_g(\pi_{G'}^{-1}(y))$.
Si de plus l'inégalité de Sobolev Poincaré optimale (I_{SP}^G) est vraie sur la variété à bord $(N/G',\tilde g')$ où $\tilde g' = \tilde v_{G'}^{\frac{2}{n-k}}\tilde g$, alors il existe $C > 0$, tel que quelle que soit $u \in \mathring{H}^2_{1,G}(N)$,

$$\left(\int_N |u|^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq \frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left[\int_N |\nabla u|^2\, dv_g + C\left(\int_N |u|\, dv_g\right)^2\right] \tag{6.17}$$

Démonstration du lemme 6.2

L'hypothèse 1) nous permet de considérer la variété quotient N/G' qui est de dimension $n-k > 2$ et de la munir de la métrique quotient $\tilde g$ induite par g. On rappelle les "formules de passage" de (N,g) à $(N/G',\tilde g)$: quelle que soit $\tilde u \in \mathring{H}^2_1(N/G')$ à support compact

$$\int_N \tilde u\circ\pi\, dv_g = \int_{N/G'} \tilde v_{G'}\tilde u\, dv_{\tilde g} \quad \text{et} \quad \int_N |\nabla_g(\tilde u\circ\pi)|^2\, dv_g = \int_{N/G'} \tilde v_{G'}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^2\, dv_{\tilde g}.$$

Par hypothèse, l'inégalité de Sobolev Poincaré est valable sur $(N/G',\tilde g')$:
$\forall \tilde u \in \mathring{H}^2_1(N/G')$,

$$\left(\int_{N/G'} |\tilde u|^{2^\sharp}\, dv_{\tilde g'}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq K_{n-k}\left[\int_{N/G'} |\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^2\, dv_{\tilde g'} + C_0(N/G',\tilde g')\left(\int_N |\tilde u|\, dv_{\tilde g'}\right)^2\right]$$

On repasse à $(N/G',\tilde g)$, en notant que $dv_{\tilde g'}=\tilde v_{G'}dv_{\tilde g}$ et $|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^2=\frac{1}{\tilde v_{G'}^{\frac{2}{n-k}}}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^2$:

$$\left(\int_{N/G'}\tilde v_{G'}|\tilde u|^{2^\sharp}\,dv_{\tilde g}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}\le K_{n-k}\left[\int_{N/G'}\frac{\tilde v_{G'}}{\tilde v_{G'}^{\frac{2}{n-k}}}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^2\,dv_{\tilde g}+C_0(N/G',\tilde g')\left(\int_N\tilde v_{G'}|\tilde u|\,dv_{\tilde g}\right)^2\right]$$

Et enfin, en utilisant les formules de passages rappelées plus haut, on revient sur N, en notant $u=\tilde u\circ\pi_{G'}$:
$\forall u\in\mathring{\mathrm{H}}^2_{1,G'}(N)$,

$$\left(\int_N|u|^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}\le K_{n-k}\left[\int_N\frac{|\nabla_g u|^2}{\tilde v_{G'}^{\frac{2}{n-k}}\circ\pi}\,dv_g+C_0(N/G',\tilde g')\left(\int_N|u|\,dv_g\right)^2\right].$$

Or d'après l'hypothèse 3), $\tilde v_{G'}^{\frac{2}{n-k}}\circ\pi_{G'}(x)=vol_g\left(\pi_{G'}^{-1}(\pi_{G'}(x))\right)^{\frac{2}{n-k}}=\left(vol_g O_x^{G'}\right)^{\frac{2}{n-k}}\ge A^{\frac{2}{n-k}}$, d'où :

$$\left(\int_N|u|^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}\le\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left[\int_N|\nabla_g u|^2\,dv_g+A^{\frac{2}{n-k}}C_0(N/G',\tilde g')\left(\int_N|u|\,dv_g\right)^2\right]$$

Cette inégalité est en particulier valable quelle que soit $u\in\mathring{\mathrm{H}}^2_{1,G}(N)$ car d'après l'hypothèse 2), $\mathring{\mathrm{H}}^2_{1,G}(N)\subset\mathring{\mathrm{H}}^2_{1,G'}(N)$. Le lemme est démontré.$\square$

c) Argument final de la démonstration

Soit O_{x_0} une orbite de concentration de (u_α). Par la proposition 6.6, elle est unique, de dimension minimale k et de volume A lui aussi minimal. L'hypothèse $(\mathcal{H}_1^{SP})$ permet d'appliquer le lemme 6.2 en prenant $N=O_{x_0,\delta}$. Soit $\eta\in C_G^\infty(M)$ telle que $0\le\eta\le1$, $\eta=1$ sur $O_{x_0,\delta/2}$ et $\eta=0$ sur $M\backslash O_{x_0,\delta}$. D'après (6.17), il existe $C>0$ tel que

$$\left(\int_{O_{x_0,\delta/2}}u_\alpha^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}\le\frac{K_{n-k}}{A^{\frac{2}{n-k}}}\left[\int_{O_{x_0,\delta_0}}|\nabla(\eta u_\alpha)|^2\,dv_g+C\left(\int_{O_{x_0,\delta_0}}\eta u_\alpha\,dv_g\right)^2\right]$$

En développant le terme en gradiant et en utilisant le fait que u_α est solution de $(E_\alpha^\sharp)$, un calcul classique donne

$$\begin{aligned}\alpha\quad&\le\quad\frac{\int_M u_\alpha^{2^\sharp}\,dv_g-\frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\left(\int_{O_{x_0,\delta/2}}u_\alpha^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{2/2^\sharp}}{\left(\int_M u_\alpha\,dv_g\right)^2}+C\,\frac{\int_{M\backslash O_{x_0,\delta/2}}u_\alpha^2\,dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\,dv_g\right)^2}\\&+\quad C\,\frac{\int_{M\backslash O_{x_0,\delta/2}}u_\alpha|\nabla u_\alpha|\,dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\,dv_g\right)^2}+C\left(\frac{\int_{O_{x_0,\delta}}u_\alpha\,dv_g}{\int_M u_\alpha\,dv_g}\right)^2.\end{aligned}\qquad(6.18)$$

On montre alors que tous les termes du membre de droite de cette inégalité sont bornés indépendemment de α, ce qui fournit la contradiction lorsque α tend vers $+\infty$.
Pour le premier terme, puisque $0 < 1 - \frac{2}{n-k} < 1$ et que d'après la proposition 6.5, $\frac{K_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}}{A} \int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g \leq 1$, on obtient

$$\int_M u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g - \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}} \left(\int_{O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g \right)^{2/2^\sharp} \leq \int_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g,$$

puis, par le procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser et comme $u_\alpha \to 0$ sur $M \setminus \{O_{x_0}\}$,

$$\begin{aligned}
\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g &\leq \left(\sup_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha \right)^{2^\sharp - 1} \int_M u_\alpha\, dv_g \\
&\leq C \left(\sup_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha \right)^{2^\sharp - 2} \left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2 \\
&\leq C \left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2
\end{aligned}$$

Le premier terme de (6.18) est donc borné indépendemment de α.
On montre facilement que le second terme est borné grâce au procédé itératif de De Giorgi-Nash-Moser :

$$\frac{\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq C \frac{(\sup_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha)^2}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq C.$$

Pour le troisième terme, grâce à l'inégalité ci-dessus et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\frac{\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq C \sqrt{\frac{\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/2}} |\nabla u_\alpha|^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2}},$$

et des calculs classiques donnent en multipliant (E_α^*) par $(\eta')^2 u_\alpha$ où $0 \leq \eta' \leq 1$, $\eta' = 0$ sur $O_{x_0,\delta/4}$ et $\eta' = 1$ sur $M \setminus O_{x_0,\delta/2}$:

$$\frac{\int_M (\eta')^2 |\nabla u_\alpha|^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq \frac{\int_M (\eta')^2 u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} + C \sqrt{\frac{\int_M |\nabla \eta'|^2 u_\alpha^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2}} \sqrt{\frac{\int_M (\eta')^2 |\nabla u_\alpha|^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2}}$$

Or le procédé itératif de Moser permet de montrer que

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_M (\eta')^2 u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq \frac{\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/4}} u_\alpha^{2^\sharp}\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq C \\
\text{et} \quad &\frac{\int_M |\nabla \eta'|^2 u_\alpha^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq \frac{\int_{M \setminus O_{x_0,\delta/4}} u_\alpha^2\, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha\, dv_g \right)^2} \leq C
\end{aligned}$$

d'où
$$\frac{\int_M (\eta')^2 |\nabla u_\alpha|^2 \, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha \, dv_g\right)^2} \leq C + C \sqrt{\frac{\int_M (\eta')^2 |\nabla u_\alpha|^2 \, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha \, dv_g\right)^2}}.$$
On en déduit que
$$\frac{\int_M (\eta')^2 |\nabla u_\alpha|^2 \, dv_g}{\left(\int_M u_\alpha \, dv_g\right)^2} \leq C$$
c'est-à-dire que le troisième terme est borné. Enfin, comme le quatrième terme est inférieur à 1 de façon évidente, l'inégalité (6.18) s'écrit $\alpha \leq C$ où $C > 0$ ne dépend pas de α. Cela est impossible lorsque α tend vers $+\infty$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 7

Multiplicité de solutions positives de l'équation de Sobolev Poincaré par séparation des énergies

Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et G un groupe d'isométries de (M, g) dont les orbites sont de dimension minimale $k \geq 0$. Dans ce chapitre, nous étudions la multiplicité de niveaux d'énergie pour des solutions positives de l'équation liée à l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence du groupe d'isométries G :

$$\Delta u + \alpha \Sigma \|u\|_1 = f u^{2^\sharp - 1}. \qquad (E^\sharp_{\alpha,f})$$

où $2^\sharp = \frac{2(n-k)}{n-2-k}$ et où on cherche des solutions $u \in H_1^2(M)$ qui sont invariantes sous l'action du groupe G. Nous appelons l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$ équation de Sobolev Poincaré en présence d'isométries. Dans le cas où il existe des orbites finies (i.e. $k = 0$), on retrouve l'équation $(E_{\alpha,f})$ étudiée dans la première partie. Le raisonnement utilisé pour obtenir des multiplicités est le même que celui utilisé dans le chapitre 5 pour l'équation de Sobolev : on sépare les solutions en imposant à leurs énergies d'être différentes.

7.1 Premier groupe de résultats obtenus par séparation des énergies

7.1.1 Enoncé du théorème 7.1

Comme dans le cas de l'équation de Sobolev du chapitre 5, pour simplifier l'énoncé du théorème principal, on introduit une inégalité fonctionnelle écrite volontairement sous la forme générale : pour $crit > 2$ fixé, $\exists \tilde{P} > 0, \exists \tilde{D} > 0, \forall u \in H$,

$$\|u\|_{crit}^2 \leq \tilde{P}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \tilde{D}\|u\|_1^2\right], \qquad (I_{\tilde{P}\tilde{D}})$$

où H est un espace fonctionnel inclus dans $H_1^2(M)$ pour lequel l'inclusion $H \subset L^{crit}$ est critique au sens où elle est continue mais non compacte. Citons les deux cas particuliers que nous allons utiliser :

Cas 1 : $H = H_1^2(M)$ et alors $\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} crit = \frac{2n}{n-2} \\ \tilde{P} = K_n + \varepsilon \\ \tilde{D} = C_\varepsilon(M,g) \end{cases}$.

L'inégalité $(I_{\tilde{P}\tilde{D}})$ est alors l'inégalité de Sobolev Poincaré (I_{SP}), valable sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ d'après la section 1.1.

Cas 2 : $H = H_{1,G}^2(M)$ et alors $\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} crit = \frac{2(n-k)}{n-2-k} \\ \tilde{P} = \frac{K_{n-k}}{A^{2/(n-k)}} + \varepsilon \\ \tilde{D} = C_{\varepsilon,G}(M,g) \end{cases}$.

L'inégalité $(I_{\tilde{P}\tilde{D}})$ est alors l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence d'un groupe d'isométries G notée (I_{SP}^G). D'après la proposition 6.1, elle est valable sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$.

Remarque 23. *Une différence importante par rapport au cas de l'équation de Sobolev du chapitre 5 apparaît ici : les formes optimales des inégalités fonctionnnelles ne suffisent pas pour construire des exemples car les renseignements connus sur les secondes meilleures constantes des inégalités de Sobolev Poincaré (en présence ou non d'isométries) $C_0(M,g)$ et $C_{0,G}(M,g)$ sont beaucoup moins précis que ceux connus dans le cas des inégalités de Sobolev. C'est pourquoi nous travaillons dans ce chapitre avec les formes non optimales des inégalités de Sobolev Poincaré. On rappelle de plus que le fait de supposer la validité de la forme optimale de l'inégalité de type Sobolev Poincaré impose à la courbure scalaire (de la variété et d'un de ses quotients global ou local) d'être négative ou nulle, condition qui restreint encore le champ possible des exemples.*

La méthode de séparation des énergies présentée pour l'équation de Sobolev dans le théorème 5.1 s'adapte au cas de l'équation de Sobolev Poincaré et donne le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G_1- et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1 et G_2−orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que $A_1 < A_2$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C_{G_1 \cup G_2}^0(M)$ une fonction strictement positive. On suppose qu'il existe deux solutions positives de $(E_{\alpha,f}^\sharp)$: $u_1 \in H_{1,G_1}^2(M)$ minimisante pour G_1 et $u_2 \in H_{1,G_2}^2(M)$ minimisante pour G_2.*

Si pour $0 < r < 1$ *et* $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{2/(n-k)} - 1\right)$ *le paramètre* α *vérifie :*

$$\begin{aligned} i) \quad & \alpha \leq C_{\varepsilon,G_2} && (7.1)\\ ii) \quad & \alpha \geq \frac{4r}{(r+1)^2}\tilde{D} && (7.2)\\ iii) \quad & \alpha > C_{\varepsilon,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} \frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon} - 1\right] \frac{K_{n-k}^{\frac{1-r}{r+1}} A_2^{\frac{2(r-1)}{(n-k)(1+r)}}}{\tilde{P}^{\frac{2}{r+1}}\, v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}+\frac{(n-2-k)(1-r)}{(n-k)(1+r)}}} \\ & \left(\frac{4r}{(r+1)^2}\right)^{\frac{2}{r+1}} \left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{\frac{(1-r)(n-2-k)}{(r+1)(n-k)}} && (7.3) \end{aligned}$$

où $\fint f\, dv_g$ *est la valeur moyenne de* f, *alors*

$$\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2).$$

En particulier, les solutions u_1 *et* u_2 *sont différentes.*

Analysons tout d'abord la compatibilité des conditions imposées à α.
Si on se place dans le cas **2** où $(I_{\tilde{P}\tilde{D}})$ est l'inégalité de Sobolev Poincaré en présence du groupe d'isométries G_2 notée $(I_{SP}^{G_2})$, alors *ii*) se réécrit $\alpha \geq \frac{4r}{(r+1)^2}C_{\varepsilon,G_2}$ et les trois conditions sont immédiatement compatibles notamment car, par choix de r et ε, on a

$$\frac{4r}{(r+1)^2} < 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} \frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon} - 1 > 0.$$

Ainsi pour toute $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]C_{\varepsilon,G_2} - \delta, C_{\varepsilon,G_2}]$, s'il existe deux solutions chacune G_i-invariante et -minimisante pour l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$, alors les énergies de ces deux solutions sont différentes.
Si on se place dans le cas **1** où $(I_{\tilde{P}\tilde{D}})$ est l'inégalité de Sobolev Poincaré (I_{SP}) alors *ii*) se réécrit $\alpha \geq \frac{4r}{(r+1)^2}C_\varepsilon$ et la compatibilité des trois solutions est obtenue en fixant d'abord α vérifiant *i*) et *iii*) puis, comme $\lim_{r\to 0}\frac{4r}{(r+1)^2} = 0$, en choisissant r assez proche de 0 pour que *ii*) soit vérifiée.

Pour montrer la compatibilité des trois conditions dans le cas général (ie avec l'inégalité $(I_{\tilde{P}\tilde{D}})$), on procède de la manière suivante : pour $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{2/(n-k)} - 1\right)$, on se donne $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$ et $r > 0$ assez proche de 0 pour que *ii*) soit vraie, alors *iii*) est vraie pour toutes les fonctions $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ dont la rapport $\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}$ vérifie :

$$\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g} > \Lambda(\varepsilon, \alpha, r, G_1, G_2, M, g, \tilde{P})$$

où

$$\Lambda(\varepsilon, \alpha, r, G_1, G_2, M, g, \tilde{P}) =$$

$$\left(\frac{C_{\varepsilon,G_2}-\alpha}{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}}\frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon}-1}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\right)^{\frac{2}{r+1}}\frac{\tilde{P}^{\frac{2}{r+1}}v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}+\frac{(n-2-k)(1-r)}{(n-k)(1+r)}}}{K_{n-k}^{\frac{1-r}{1+r}}A_2^{\frac{2(r-1)}{(n-k)(r+1)}}}\right)^{\frac{(1+r)(n-k)}{(1-r)(n-2-k)}} \tag{7.4}$$

Dans la suite, on note plus simplement $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}$ pour $\Lambda(\varepsilon,\alpha,r,G_1,G_2,M,g,\tilde{P})$.
Cette dernière remarque permet de reformuler le théorème 7.1 sous la forme suivante :

Théorème 7.1.bis. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1- et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k > 2$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que : $A_1 < A_2$.*
Soit $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}}-1\right)$, alors pour tout $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$, il existe une constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha} \geq 0$ explicitée en (7.4) et nulle si et seulement si $\alpha = C_{\varepsilon,G_2}$ telle que si une fonction $f \in C^0_{G_1\cup G_2}(M)$ strictement positive vérifie

$$\frac{\sup f}{⨍ f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha}$$

et s'il existe deux solutions positives à l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$, l'une G_1-minimisante et invariante et l'autre G_2-minimisante et -invariante, alors les énergies de ces deux solutions sont différentes.

7.1.2 Exemples

a) Orbites finies de cardinal constant et toutes principales

Le corollaire 6.1.d) et le théorème 7.1.bis donnent le résultat suivant :

Corollaire 7.1. *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$ et G_1 et G_2 deux sous-groupes finis de $Isom_g(M)$ de cardinaux respectifs $0 < A_1 < A_2$ tels que les G_i-orbites sont toutes principales et de cardinal constant égal à $A_i > 0$.*
Soit $0 < \varepsilon < K_n\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{2/n}-1\right)$, alors pour tout $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$, il existe une constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha} \geq 0$ donnée par (7.4) et nulle si et seulement si $\alpha = C_{\varepsilon,G_2}$ telle que si une fonction $f \in C^2_{G_1\cup G_2}(M)$ strictement positive de maximum atteint en $x_0 \in M$ vérifie

$$\frac{\sup f}{⨍ f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha} \qquad et \qquad (n-4)\,\Delta_g f(x_0) = 0 \tag{7.5}$$

et si de plus

$$Scal_g(x_0) > 0, \tag{7.6}$$

alors il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation :

$$\Delta_g u + \alpha\Sigma\|u\|_1 = f u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{$E_{\alpha,f}$}$$

L'une est G_1- et l'autre G_2-invariante.

Démonstration du corollaire 7.1
La démonstration de ce corollaire est immédiate en combinant le théorème 7.1.bis et le corollaire 6.1.d). qui est appliquable ici. Nous précisons en effet que les groupes d'isométries G_1 et G_2 permettent le passage à la variété quotient M/G_i. En notant $\pi_i : M \to M/G_i$ la submersion canonique et $\tilde{g}_i$ la métrique quotient sur M/G_i, on a immédiatement puisque π_i est une isométrie locale :

$$Scal_{g_i}(\pi_i(O_{x_0}^{G_i})) = Scal_g(x_0)$$

et donc l'hypothèse (7.6) de notre corollaire implique l'hypothèse (6.5) de la proposition 6.1.d). $\square$

Ce corollaire est par exemple valable pour la sphère standard (S^n, h_n) sur laquelle opèrent librement deux sous-groupes finis de $O(n+1)$ notés G_1 et G_2 de cardinaux respectifs $0 < A_1 < A_2$ car $Scal_{h_n}(S^n) = n(n-1) > 0$.
Un deuxième exemple est la variété produit $(S^1(t) \times V^{n-1}, h_1 \times g_V)$ où $(S^1(t), h_1)$ est le cercle standard de rayon 1 et (V^{n-1}, g_V) une variété riemannienne compacte de dimension $n-1 \geq 2$ telle que $\max_V Scal_{g_V} > 0$. Sur cette variété, on considère l'action des deux groupes $G_1 = R_1 \times I_V$ et $G_2 = R_2 \times I_V$ où R_i est un groupe fini de rotations de $S^1(t)$ de cardinal $A_i > 0$. On suppose que $A_1 < A_2$ et on choisit $x_0 = (y_0, z_0) \in S^1(t) \times V$ tel que $Scal_{g_V}(z_0) > 0$.

b) Fibration de Hopf et $S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}$: orbites toutes principales de dimension 1 et de volume constant

Corollaire 7.2. *Sur la variété produit $(S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}, h_1 \times h_3 \times g_V)$ où $(S^1(t), h_1)$ est le cercle standard de rayon $t > 0$, (S^3, h_3) est la sphère standard de dimension 3 et (V^{n-4}, g_V) est une variété riemannienne compacte de dimension $n-4 \geq 1$, on considère les deux groupes d'isométries*

$$G_1 = I_{S^1(t)} \times \{(\sigma, \sigma), \sigma \in SO(2)\} \times I_V \qquad et \qquad G_2 = O(2) \times I_{S^3} \times I_V.$$

Soit $0 < \varepsilon < K_3\left(t^{2/3} - 1\right)$, alors pour tout $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$, il existe une constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha} \geq 0$ donnée par (7.4) et nulle si et seulement si $\alpha = C_{\varepsilon,G_2}$ telle que si une fonction $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}$ strictement positive de maximum atteint en $x_0 = (\theta_0, y_0, z_0) \in S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}$ vérifie

$$\frac{\sup f}{\fint f \, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha} \qquad et \qquad (n-5)\Delta_g f(x_0) = 0,$$

et si de plus

$$Scal_{g_V}(z_0) > -6 \tag{7.7}$$

alors il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$. Une de ces solutions est G_1- et l'autre G_2-invariante.

Démonstration du corollaire 7.2
On a vu dans la démonstration du corollaire 5.10 que le passage au quotient est possible

pour les deux groupes avec :

$$\begin{array}{llll} \left(S^1(t)\times S^3\times V^{n-4}\right)/G_1 = & S^1(t)\times S^2(1/2)\times V^{n-4} & \text{avec } \tilde{g}_1 = h_1\times h_2\times g_V \\ \left(S^1(t)\times S^3\times V^{n-4}\right)/G_2 = & S^3\times V^{n-4} & \text{avec } \tilde{g}_2 = h_3\times g_V \end{array}$$

et que les G_i-orbites sont de dimension constante $k = 1$ et de volume constant égal à $A_1 = 2\pi$ pour les G_1-orbites et $A_2 = 2\pi t$ pour les G_2-orbites. Comme $t > 1$, on a bien $A_1 < A_2$. On note π_i la submersion riemannienne associée à l'action de G_i.
Maintenant, soient $0 < \varepsilon < K_3\left(t^{2/3} - 1\right), \alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$ et $f \in C^2_{G_1\cup G_2}$ strictement positive de maximum atteint en x_0 telle que

$$\frac{\sup f}{⨏ f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha} \qquad \text{et} \qquad (n-5)\Delta_g f(x_0).$$

Les hypothèses du corollaire 6.2.d) sont vérifiées car $n - 1 \geq 4$ et avec (7.7) :

$$Scal_{\tilde{g}_1}\left(\pi_1(O^{G_1}_{x_0})\right) = Scal_{h_2}\left(S^2(1/2)\right) + Scal_{g_V}(z_0) = 8 + Scal_{g_V}(z_0) > 0$$

et

$$Scal_{\tilde{g}_2}(\pi_2\left(O^{G_2}_{x_0})\right) = Scal_{h_3}S^3 + Scal_{g_V}(z_0) = 6 + Scal_{g_V}(z_0) > 0.$$

le corollaire 6.2.d) montre alors qu'il existe deux solutions l'une G_1- et l'autre G_2-invariante et -minimisante pour $(E^\sharp_{\alpha,f})$. Enfin, comme $\frac{\sup f}{⨏ f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha}$, le théorème 7.1.bis permet de séparer les énergies de ces deux solutions, ce qui achève la démonstration.□

c) Orbites non principales, de dimension et de volume variables

Corollaire 7.3. *On considère la variété produit $(V^k \times S^{n-k}, g_V \times h_{n-k})$ de dimension $n \geq 5$ où (V^k, g_V) est une variété riemanienne compacte de dimension $k > 0$ telle que*

$$\begin{cases} k = 1 & si\ n = 5\ \ ou\ \ n = 6 \\ k \leq \frac{n-1}{3} & si\ n \geq 7 \end{cases} \qquad et \qquad vol_{g_V} V > \omega_k$$

et où (S^{n-k}, h_{n-k}) est la sphère standard de dimension $n - k \geq 4$. On suppose que le groupe des isométries de (V^k, g_V) contient un sous-groupe transitif G_V et on considère les deux sous-groupes d'isométries :

$$G_1 = I_V \times O(n-2k) \times O(k+1) \qquad et \qquad G_2 = G_V \times I_{S^{n-k}}.$$

On se fixe un réel $\varepsilon \in \left]0, K_{n-k}\left(\left(\frac{vol_{g_V} V}{\omega_k}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right)\right[$ et un point $x_0 = (y_0, 0_{n-2k}, z_0) \in V^k \times \mathbb{R}^{n-2k} \times S^k$ pour lequel

$$Scal_{g_V}(y_0) > -(n-2k)(n-2k-1). \tag{7.8}$$

Alors pour tout $\alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$ il existe une constante $\Lambda_{\varepsilon,\alpha} \geq 0$ donnée par (7.4) et nulle si et seulement si $\alpha = C_{\varepsilon,G_2}$ telle que si une fonction $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}$ strictement positive de maximum atteint en x_0 vérifie

$$\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha} \qquad et \qquad (n-4-k)\, \Delta_g f(x_0) = 0,$$

alors il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$. L'une est G_1- et l'autre G_2-invariante.

Démonstration du corollaire 7.3
Pour le groupe G_2 toutes les orbites sont de la forme $V^k \times \{z\}$ où $z \in S^{n-k}$: elles sont donc de dimension constante k et de volume constant $A_2 = vol_{g_V} V$. La variété quotient est la sphère S^{n-k} munie de sa métrique standard $\tilde{g}_2 = h_{n-k}$, sa courbure scalaire est constante égale à $(n-k)(n-k-1) > 0$, en particulier

$$S cal_{\tilde{g}_2}(\overline{x}_{0,G_2}) > 0.$$

L'action du groupe G_1 ne permet pas le passage au quotient. Comme $n - 2k \geq k + 1$, l'orbite $O^{G_1}_{x_0} = \{y_0\} \times S^k$ est une orbite de dimension minimale k et de volume minimal $A_1 = \omega_k$ parmi toutes les G_1-orbites. L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée pour le sous groupe normal de G_1 noté $H = I_V \times I_{S^{n-2k}} \times O(k+1)$, $\tilde{v}_H$ est maximale en $\overline{x}_{0,H}$ et

$$(V^k \times S^{n-k})/H = V^k \times S^{n-2k}$$

avec comme métrique quotient $\tilde{g}_H = g_V \times h_{n-2k}$. Alors, d'après le lemme B.2 et avec (7.8), on a

$$S cal_{\tilde{g}_H}(\overline{x}_{0,H}) = S cal_{g_V}(y_0) + (n-2k)(n-2k-1) > 0$$

Maintenant, soient $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{vol_{g_V} V}{\omega_k}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right), \alpha \in]0, C_{\varepsilon,G_2}]$ et $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}$ de maximum atteint en x_0 telle que $\Delta_g f(x_0) = 0$ et $\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g} > \Lambda_{\varepsilon,\alpha}$. Comme toutes les hypothèses du corollaire 6.1.**c)** sont remplies pour chacun des groupes G_1 et G_2, il existe deux solutions l'une G_1- et l'autre G_2-invariante et minimisante pour $(E^\sharp_{\alpha,f})$. Ces deux solutions sont d'énergies différentes d'après le théorème 7.1.bis. Le corollaire est démontré.□

Le corollaire 7.3 s'applique par exemple avec comme variété V un produit de sphères standard $S^{s_1} \times ... \times S^{s_p}$ vérifiant $\sum_{i=1}^p s_i = k$ et $\omega_{s_1}\omega_{s_2}...\omega_{s_p} > \omega_k$ et comme groupe transitif sur V le groupe $G_V = O(s_1+1) \times ... \times O(s_p+1)$.

7.1.3 Démonstration du théorème 7.1

Comme u_i est solution minimisante de l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$, on a

$$||\nabla u_i||_2^2 + \alpha ||u_i||_1^2 = \mathcal{E}(u_i) = \mu_i^{\frac{n-k}{2}} \tag{7.9}$$

ainsi pour montrer que $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$, il suffit de montrer que $\mu_1 < \mu_2$ ou encore, d'après (6.2) que

$$\frac{A_1^{2/(n-k)}}{K_{n-k}\,(\sup f)^{2/2^\sharp}} < \mu_2 \tag{7.10}$$

Minoration de μ_2 : Avec (I^G_{SP}) et (7.9) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_2} &= \frac{\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{2/2^\sharp}}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}} \leq \frac{(\sup f)^{2/2^\sharp}}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\|\nabla u_2\|_2^2 + C_{\varepsilon,G_2}\|u_2\|_1^2\right] \\
&\leq \frac{(\sup f)^{2/2^\sharp}}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[\mu_2^{\frac{n-k}{2}} + (C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\|u_2\|_1^2\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\mu_2} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[1 + \frac{C_{\varepsilon,G_2}-\alpha}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}}\|u_2\|_1^2\right] \tag{7.11}$$

Comme d'après (7.1), on a $C_{\varepsilon,G_2} - \alpha \geq 0$, une majoration de $\|u_2\|_1^2$ permet de poursuivre la majoration de $\frac{1}{\mu_2}$.

Majoration de la norme L^1 de u_2 : pour $0 < r < 1$, en prenant $\varphi = u_2^r$ dans la version faible de l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$, on a :

$$\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 = \frac{(r+1)^2}{4r}\int_M f u_2^{2^\sharp-1+r}\,dv_g - \alpha\,\frac{(r+1)^2}{4r}\int_M u_2^r dv_g \int_M u_2 dv_g$$

Pour le terme comportant le f, l'inégalité de Hölder donne :

$$\int_M f u_2^{2^\sharp-1+r} dv_g \leq \left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}}$$

d'où

$$\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 \leq \frac{(r+1)^2}{4r}\left[\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}} - \alpha\int_M u_2^r\,dv_g\int_M u_2 dv_g\right].$$

Or, grâce à $(I_{\tilde{P},\tilde{D}})$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_2^2 &\geq \frac{1}{\tilde{P}}\|u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_{crit}^2 - \tilde{D}\|u_2^{\frac{r+1}{2}}\|_1^2 \\
&\geq \frac{1}{\tilde{P}}\left(\int_M u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{crit}} - \tilde{D}\left(\int_M u_2^{\frac{r+1}{2}}\,dv_g\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{\tilde{P}}\left(\int_M u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{crit}} - \tilde{D}\int_M u_2^r\,dv_g\int_M u_2\,dv_g,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est due à l'inégalité de Cauchy Schwarz. Ainsi

$$\frac{1}{\tilde{P}}\left(\int_M u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{crit}} \le \frac{(r+1)^2}{4r}\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\,dv_g\right)^{\frac{2^\sharp-1+r}{2^\sharp}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}}$$
$$+\left(\tilde{D}-\frac{(r+1)^2}{4r}\alpha\right)\int_M u_2^r\,dv_g\int_M u_2\,dv_g$$

Or par (7.2) on a $\alpha \ge \frac{4r}{(r+1)^2}\tilde{D}$, donc avec (7.9), on obtient

$$\left(\int_M u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{crit}} \le \frac{\tilde{P}(r+1)^2}{4r}\mu_2^{\frac{(2^\sharp-1+r)\,(n-2-k)}{4}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp}} \tag{7.12}$$

On aboutit alors à la même majoration (5.38) que dans la démonstration du théorème 5.1 donnant une multiplicité pour des équations de type Sobolev. Cependant, ici la majoration de la norme L^1 de u_2 que l'on cherche à obtenir ne peut pas être obtenue directement par choix de r car le fait que $crit > 2$ implique que $\forall r > 0$, $\frac{(r+1)crit}{2} > 1$. Par contre, grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\int_M u_2\,dv_g \le v_g^{1-\frac{2}{(r+1)crit}}\left(\int u_2^{\frac{(r+1)crit}{2}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{(r+1)crit}},$$

et finalement pour $0 < r \le 1$, on obtient

$$\int_M u_2\,dv_g \le v_g^{1-\frac{2}{(r+1)crit}}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\tilde{P}\right)^{\frac{1}{r+1}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{1-r}{2^\sharp(r+1)}}\mu_2^{\frac{(2^\sharp-1+r)\,(n-2-k)}{4(r+1)}} \tag{7.13}$$

Fin de la minoration de μ_2 : en reportant (7.13) dans (7.11) :

$$\frac{1}{\mu_2} \le (\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\left[1+\frac{C_{\varepsilon,G_2}-\alpha}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}}v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\tilde{P}\right)^{\frac{2}{r+1}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{2(1-r)}{2^\sharp(1+r)}}\mu_2^{\frac{(2^\sharp-1+r)\,(n-2-k)}{2(r+1)}}\right]$$
$$\le (\sup f))^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\left[1+(C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\,v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\tilde{P}\right)^{\frac{2}{r+1}}\left(\int_M f\,dv_g\right)^{\frac{2(1-r)}{2^\sharp(r+1)}}\mu_2^{\frac{1-r}{r+1}}\right]$$

Or $\mu_2 \le \frac{A^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}}}$, donc

$$\frac{1}{\mu_2} \le (\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\left[1+(C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\,v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\right)^{\frac{2}{r+1}}\frac{\tilde{P}^{\frac{2}{r+1}}A_2^{\frac{2(1-r)}{(n-k)(1+r)}}}{K_{n-k}^{\frac{1-r}{r+1}}}\left(\frac{\int_M f}{\sup f}\right)^{\frac{2(1-r)}{2^\sharp(r+1)}}\right]$$

Argument final : pour avoir (7.10) et donc $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$, il suffit que

$$(\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{K_{n-k}}{A_1^{\frac{2}{n-k}}} \quad > \quad (\sup f)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}$$
$$\left[1+(C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\,v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}}\left(\frac{(r+1)^2}{4r}\right)^{\frac{2}{r+1}}\frac{\tilde{P}^{\frac{2}{r+1}}A_2^{\frac{2(1-r)}{(n-k)(1+r)}}}{K_{n-k}^{\frac{1-r}{r+1}}}\left(\frac{\int_M f\,dv_g}{\sup f}\right)^{\frac{2(1-r)}{2^\sharp(r+1)}}\right]$$

soit, en introduisant la valeur moyenne de f notée $\fint f\, dv_g$ et en isolant α :

$$\alpha > C_{\varepsilon,G_2} - \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} \frac{K_{n-k}}{K_{n-k}+\varepsilon} - 1\right] \frac{K_{n-k}^{\frac{1-r}{r+1}} A_2^{\frac{2(r-1)}{(n-k)(1+r)}}}{\tilde{P}_{\frac{2}{r+1}}\, v_g^{2-\frac{4}{(r+1)crit}+\frac{(1-r)2}{(1+r)2^\sharp}}} \left(\frac{4r}{(r+1)^2}\right)^{\frac{2}{r+1}} \left(\frac{\sup f}{\fint f\, dv_g}\right)^{\frac{2(1-r)}{2^\sharp(r+1)}}$$

c'est-à-dire (7.3) et le théorème 7.1 est démontré.□

7.2 Deuxième groupe de résultats obtenus par séparation des énergies

7.2.1 Enoncé du théorème 7.2

On énonce maintenant un second thèorème de multiplicité pour l'équation de Sobolev Poincaré en présence d'isométries ($E^\sharp_{\alpha,f}$) grâce au même raisonnement que celui utilisé pour le théorème 5.2 pour l'équation de Sobolev en présence d'isométries.
Pour les mêmes raisons que celles expliquées dans la remarque 23, on travaille uniquement avec les formes non optimales des inégalités (I_{SP}) et (I^G_{SP}).

Théorème 7.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $Isom_g(M)$ tels que les G_1- et G_2-orbites aient la même dimension minimale $k \geq 0$ vérifiant $n-k \geq 4$ et soit $A_i > 0$ le volume minimal des G_i-orbites de dimension k. On suppose que : $A_1 < A_2$. Soient $\varepsilon \in \left]0, K_{n-k}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right)\right[$, $f \in C^2_{G_1\cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive et $\alpha > 0$ vérifiant :*

$$\alpha \leq C_{\varepsilon,G_2} \tag{7.14}$$

$$\alpha > C_{\varepsilon,G_2} - \left(\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}+\varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}} \left(v_g \fint f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}} \tag{7.15}$$

Alors s'il existe deux solutions positives à l'équation ($E^\sharp_{\alpha,f}$), l'une G_1- l'autre G_2-minimisante et -invariante, alors les énergies de ces solutions sont différentes.

Remarque 24. *On obtient ici directement un intervalle de multiplicité pour la paramètre α. Les bornes de cet intervalle dépendent de C_{ε,G_2} dont on ne connaît pas la valeur explicite. Par contre la largeur de l'intervalle est explicite :*

$$\left(\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}+\varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}} \left(v_g \fint f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}}$$

L'intervalle est d'autant plus étendu que A_2 est grand devant A_1 (ie que les actions deux groupes G_1 et G_2 sont "différentes") et que f est proche d'une fonction constante. En particulier, le théorème est vrai pour f constante.

7.2.2 Exemples

Il suffit de s'assurer de la compatibilté entre les conditions d'existences données par le corollaire 6.1.c) et .d) et celles de multiplicité données dans le théorème ci-dessus. On vérifie facilement que les mêmes exemples que ceux exposée dans la section 7.1.2 sont ici valables, ce qui donnent les trois énoncés suivants. Le premier traite du cas de groupes d'isométries finis permettant le passage au quotient.

Corollaire 7.4. *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. et G_1 et G_2 deux sous-groupes finis de $Isom_g(M)$ de cardinaux respectifs $0 < A_1 < A_2$ tels que les G_i-orbites sont toutes principales et de cardinal constant égal à $A_i > 0$. Soient $0 < \varepsilon < K_n \left(\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{2/n} - 1 \right)$ et $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive de maximum atteint en $x_0 \in M$ vérifiant*

$$(n-4)\, \Delta_g f(x_0) = 0 \qquad et \qquad Scal_g(x_0) > 0. \tag{7.16}$$

Alors lorsque α appartient à l'intervalle :

$$\alpha \in \left] C_{\varepsilon, G_2} - \left(\frac{A_2^{\frac{2}{n}}}{K_n + \varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n}}}{K_n} \right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2}{n}} \left(v_g \fint f \, dv_g \right)^{\frac{n+2}{n}}} ;\ C_{\varepsilon, G_2} \right]$$

il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation :

$$\Delta_g u + \alpha \Sigma \|u\|_1 = f u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{$E_{\alpha,f}$}$$

L'une est G_1- et l'autre G_2-invariante.

Dans le second exemple, les orbites sont toutes principales de dimension égale à 1 et de volume constant. Le passage au quotient est donc là encore possible.

Corollaire 7.5. *Sur la variété produit $(S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}, h_1 \times h_3 \times g_V)$ où $(S^1(t), h_1)$ est le cercle standard de rayon $t > 0$, (S^3, h_3) est la sphère standard de dimension 3 et (V^{n-4}, g_V) est une variété riemannienne compacte de dimension $n-4 \geq 1$, on considère les deux groupes d'isométries*

$$G_1 = I_{S^1(t)} \times \{(\sigma, \sigma), \sigma \in SO(2)\} \times I_V \qquad et \qquad G_2 = O(2) \times I_{S^3} \times I_V.$$

Soient $0 < \varepsilon < K_3 \left(t^{2/3} - 1 \right)$ et $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}(M)$ une fonction strictement positive de maximum atteint en $x_0 = (\theta_0, y_0, z_0) \in S^1(t) \times S^3 \times V^{n-4}$ vérifiant

$$(n-5)\Delta_g f(x_0) = 0 \qquad et \qquad Scal_{g_V}(z_0) > -6.$$

Alors lorsque α appartient à l'intervalle

$$\alpha \in \left] C_{\varepsilon, G_2} - \left(\frac{(2\pi t)^{\frac{2}{n-1}}}{K_{n-1} + \varepsilon} - \frac{(2\pi)^{\frac{2}{n-1}}}{K_{n-1}} \right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-3}{n-1}} \left(4\pi^3 t vol_{g_V} V \fint f \, dv_g \right)^{\frac{n+1}{n-1}}} ;\ C_{\varepsilon, G_2} \right]$$

il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$. L'une est G_1- et l'autre G_2-invariante.

Enfin dans le dernier exemple, un des groupes ne permet pas le passage au quotient avec des orbites non principales de dimension et de volume variables.

Corollaire 7.6. *On considère la variété produit $(V^k \times S^{n-k}, g_V \times h_{n-k})$ de dimension $n \geq 5$ où (V^k, g_V) est une variété riemanienne compacte de dimension $k > 0$ telle que*

$$\begin{cases} k = 1 & si\ n = 5\ \ ou\ \ n = 6 \\ k \leq \frac{n-1}{3} & si\ n \geq 7 \end{cases} \qquad et \qquad vol_{g_V} V > \omega_k$$

et où (S^{n-k}, h_{n-k}) est la sphère standard de dimension $n - k \geq 4$. On suppose que le groupe des isométries de (V^k, g_V) contient un sous-groupe transitif G_V et on considère les deux sous-groupes d'isométries :

$$G_1 = I_V \times O(n-2k) \times O(k+1) \qquad et \qquad G_2 = G_V \times I_{S^{n-k}}.$$

Soient $0 < \varepsilon < K_{n-k}\left(\left(\frac{vol_{g_V} V}{\omega_k}\right)^{\frac{2}{n-k}} - 1\right)$ et $f \in C^2_{G_1 \cup G_2}$ une fonction strictement positive de maximum atteint en $x_0 = (y_0, 0_{n-2k}, z_0) \in V^k \times \mathbb{R}^{n-2k} \times S^k$ vérifiant

$$(n-4-k)\,\Delta_g f(x_0) = 0 \qquad et\ Scal_{g_V}(y_0) > -(n-2k)(n-2k-1).$$

Alors pour tout α appartenant à l'intervalle

$$\alpha \in \left]C_{\varepsilon,G_2} - \left(\frac{(vol_{g_V} V)^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}+\varepsilon} - \frac{\omega_k^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\right) \frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}} \left(vol_{g_V} V \omega_{n-k} \fint f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}} ; C_{\varepsilon,G_2}\right]$$

il existe deux solutions positives d'énergies différentes pour l'équation $(E^\sharp_{\alpha,f})$. L'une est G_1- et l'autre G_2-invariante.

7.2.3 Démontration du théorème 7.2

Comme u_i est une solution G_i-minimisante de $(E^\sharp_{\alpha,f})$ et avec (6.2), il suffit, pour avoir $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$ de montrer :

$$\frac{A_1^{2/(n-k)}}{K_{n-k}\,(\sup f)^{2/2^\sharp}} < \mu_2.$$

Minoration de μ_2 : des calculs identiques à ceux de la démonstration du théorème 7.1 montrent que :

$$\frac{1}{\mu_2} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp} \left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[1 + \frac{C_{\varepsilon,G_2} - \alpha}{\mu_2^{\frac{n-k}{2}}} \|u_2\|_1^2\right]$$

Or par (7.14), $C_{\varepsilon,G_2} - \alpha \geq 0$. Une majoration de $\|u_2\|_1^2$ nous permet donc de poursuivre la minoration de μ_2.

Majoration de la norme L^1 de u_2 : c'est ici que se fait la différence avec la démonstration précédente, on se sert uniquement du fait que f est strictement positive et de l' inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_M u_2\, dv_g &\leq \frac{1}{\inf f}\int_M f^{\frac{1}{2^\sharp}} u_2\, f^{1-\frac{1}{2^\sharp}}\, dv_g \\ &\leq \frac{1}{\inf f}\left(\int_M f u_2^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{1}{2^\sharp}}\left(\int_M f\, dv_g\right)^{1-\frac{1}{2^\sharp}}\end{aligned}$$

d'où avec (7.9)

$$\int_M u_2\, dv_g \leq \frac{1}{\inf f}\, \mu_2^{\frac{n-2-k}{4}}\left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{2(n-k)}}$$

et donc

$$\frac{1}{\mu_2} \leq (\sup f)^{2/2^\sharp}\left(\frac{K_{n-k}+\varepsilon}{A_2^{\frac{2}{n-k}}}\right)\left[1+\frac{C_{\varepsilon,G_2}-\alpha}{\mu_2}\,\frac{\left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}}{(\inf f)^2}\right]$$

ou encore

$$\mu_2 \geq \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp}\,(K_{n-k}+\varepsilon)} - (C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\frac{\left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}}{(\inf f)^2} \qquad (7.17)$$

Argument final : Pour avoir $\mathcal{E}(u_1) < \mathcal{E}(u_2)$, il suffit donc que

$$\frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp} K_{n-k}} < \frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{(\sup f)^{2/2^\sharp}\,(K_{n-k}+\varepsilon)} - (C_{\varepsilon,G_2}-\alpha)\frac{\left(\int_M f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}}{(\inf f)^2}$$

c'est-à-dire en introduisant la valeur moyenne de f notée $\fint f\, dv_g$:

$$\alpha > C_{\varepsilon,G_2} - \left(\frac{A_2^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}+\varepsilon} - \frac{A_1^{\frac{2}{n-k}}}{K_{n-k}}\right)\frac{\inf^2 f}{(\sup f)^{\frac{n-2-k}{n-k}}\left(v_g \fint f\, dv_g\right)^{\frac{n+2-k}{n-k}}}$$

ce qui est exactement l'hypothèse (7.15) ; le théorème est démontré. □

Annexe A

Position des points de concentration en énergie bornée

La proposition que l'on démontre dans cette première annexe complète l'étude du phénomène de concentration en énergie bornée sans isométries en précisant la position des points de concentration :

Proposition A.1. *Soient $\alpha > 0$ un paramètre réel qui converge vers $\alpha_0 < +\infty$, $f \in C^1(M)$ de maximum strictement positif, (u_α) une suite de solutions positives de $(E_{\alpha,f})$ dont l'énergie est bornée et u_0 la limite de (u_α) donnée par la proposition 2.1. Alors les points de concentration de la suite $(\hat{u}_\alpha = u_\alpha - u_0)$ sont des points critiques de f.*

Démonstration de la proposition A.1 Soient x_0 un point de concentration de $(\hat{u}_\alpha)$, Ω un voisinage de x_0 tel que $\Omega \subset (M \setminus C) \cup \{x_0\}$ où C est l'ensemble des points de concentration de $(\hat{u}_\alpha)$. On note $\mathcal{E}_\Omega = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Omega f\hat{u}_\alpha^{2^*}\, dv_g$. On sait d'après le chapitre 3 que $f(x_0) > 0$ et que $\hat{u}_\alpha$ est positive au voisinage de x_0, on peut donc choisir Ω de sorte que $\mathcal{E}_\Omega > 0$. On a alors, au sens des mesures les deux limites suivantes :

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \hat{u}_\alpha^{2^*} = \frac{\mathcal{E}_\Omega\, \delta(x_0)}{f(x_0)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 = \mathcal{E}_\Omega\, \delta(x_0) \tag{A1}$$

où $\delta(x_0)$ est la mesure de Dirac en x_0.
La première limite est immédiate notamment car $\hat{u}_\alpha \to 0$ sur $\Omega \setminus \{x_0\}$.
Pour montrer la seconde limite, on introduit $\omega \in C^2(M)$ tel que $supp\ \omega \subset \Omega$ et $\delta > 0$ tel que $B = B_{x_0}(\delta) \subset \Omega$. On a alors, grâce à des intégrations par parties, aux équations vérifiées par u_α et u_0 et aux limites montrées dans la proposition 2.1

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \omega |\nabla \hat{u}_\alpha|^2\, dv_g &= -\int_\Omega \frac{\Delta\omega}{2}\hat{u}_\alpha^2\, dv_g + \int_\Omega \omega f \hat{u}_\alpha (u_\alpha^{2^*-1} - u_0^{2^*-1})\, dv_g \\
&\quad -\alpha \int_M u_\alpha\, dv_g \int_\Omega \Sigma_\alpha \omega \hat{u}_\alpha\, dv_g + \alpha_0 \int_M u_0\, dv_g \int_\Omega \Sigma_0 \omega \hat{u}_\alpha\, dv_g \\
&= \int_\Omega \omega f \hat{u}_\alpha^{2^*}\, dv_g + \circ(1)
\end{aligned}$$

et comme $\hat{u}_\alpha \to 0$ sur $\Omega \setminus \{x_0\}$, on en déduit qu'au sens des mesure, $|\nabla \hat{u}_\alpha|^2 \to \mathcal{E}_\Omega\ \delta(x_0)$. Pour montrer que x_0 est un point critique de f, on introduit comme dans Aubin [3] la fonction $\psi \in C^\infty(M)$, $supp\ \psi \subset \Omega$ telle que

$$\partial_i \psi(x_0) = \partial_i f(x_0) \qquad \text{et} \qquad \partial_{ij}\psi(x_0) = 0.$$

En posant $\varphi = \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi$ dans l'équation vérifiée par $\hat{u}_\alpha$, on a

$$\int_\Omega \Delta \hat{u}_\alpha \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g + \alpha \int_M u_\alpha\, dv_g \int_\Omega \Sigma_\alpha \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g - \alpha_0 \int_M u_0\, dv_g \int_\Omega \Sigma_0 \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g$$
$$= \int_\Omega f(u_\alpha^{2^*-1} - u_0^{2^*-1}) \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g \tag{A2}$$

On examine alors chacun des termes de (A2). Tout d'abord pour le premier :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta \hat{u}_\alpha \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g &= \int_\Omega \nabla_j \hat{u}_\alpha \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla^j \nabla_i \psi\, dv_g + \int_\Omega \nabla_j \hat{u}_\alpha \nabla^j \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g \\ &= \int_\Omega \nabla_j \hat{u}_\alpha \nabla^i \nabla^j \psi \nabla_i \hat{u}_\alpha\, dv_g + \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla_i \psi \nabla^i \left(|\nabla \hat{u}_\alpha|^2 \right) dv_g \end{aligned}$$

et d'après (A1) et les hypothèses faites sur ψ

$$\left| \int_\Omega \nabla_j \hat{u}_\alpha \nabla^i \nabla^j \psi \nabla_i \hat{u}_\alpha\, dv_g \right| \le C \int_\omega |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 |\nabla^2 \psi|\, dv_g = \mathcal{E}_\Omega\ |\nabla^2 \psi(x_0)| + \circ(1) = \circ(1)$$

et

$$\int_\Omega \nabla_i \psi \nabla^i \left(|\nabla \hat{u}_\alpha|^2 \right) dv_g = \int_\Omega \Delta \psi\ |\nabla \hat{u}_\alpha|^2\, dv_g = \mathcal{E}_\Omega\ \Delta \psi(x_0) + \circ(1) = \circ(1)$$

Ensuite, on obtient facilement pour le deuxième terme :

$$\alpha \int_M u_\alpha\, dv_g \int_\Omega \Sigma_\alpha \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g - \alpha_0 \int_M u_0\, dv_g \int_\Omega \Sigma_0 \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g = \circ(1)$$

Enfin pour le membre de droite de $(A2)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(u_\alpha^{2^*-1} - u_0^{2^*-1}) \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g &= \int_\Omega f \hat{u}_\alpha^{2^*-1} \nabla^i \hat{u}_\alpha \nabla_i \psi\, dv_g + \circ(1) \\ &= \frac{1}{2^*} \int_\Omega f \hat{u}_\alpha^{2^*} \Delta \psi\, dv_g - \frac{1}{2^*} \int_\Omega \hat{u}_\alpha^{2^*} \nabla^i f \nabla_i \psi\, dv_g + \circ(1) \\ &= \frac{\mathcal{E}_\Omega}{2^*\ f(x_0)} \Big(f(x_0) \Delta \psi(x_0) - \nabla^i f(x_0) \nabla_i \psi(x_0) \Big) + \circ(1) \\ &= -\frac{\mathcal{E}_\Omega\ |\nabla f(x_0)|^2}{2^*\ f(x_0)} + \circ(1) \end{aligned}$$

Ainsi en reportant ces résultats dans (A2) et en passant à la limite $\alpha \to \alpha_0$, on en déduit que $|\nabla f(x_0)| = 0.\square$

Annexe B

Courbure scalaire et groupe d'isométries

Dans cette annexe, on étudie l'influence d'un groupe d'isométries sur la courbure scalaire. Dans la section B.1, on considère le cas où le groupe d'isométries permet le passage à la variété quotient et on obtient une inégalité reliant la courbure scalaire de la variété initiale à celle de la variété quotient. Dans la section B.2, le groupe d'isométries ne permet qu'un quotient local au voisinage des orbites de dimension et de volume minimal et on donne une inégalité entre la courbure scalaire de la variété en un point x_0 dont l'orbite est minimale et la courbure scalaire sur la variété quotient au point image de x_0.

B.1 Courbure scalaire et quotient global

Lemme B.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ et de courbure sectionnelle constante $K_g(M)$, G un sous-groupe de $Isom_g(M)$ permettant le passage au quotient, c'est-à-dire pour lequel toutes les $G-$orbites sont principales d'après la définition 5.1 et donc de même dimension $k \geq 0$. On note $\pi : M \to M/G$ le submersion canonique et $\tilde{g}$ la métrique quotient induite par g sur la variété M/G de dimension $n-k$. Alors*

$$\forall y \in M/G, \qquad Scal_{\tilde{g}}(y) \geq K_g(M)\,(n-k)(n-k-1). \tag{A1}$$

Remarque 25. *Dans le cas où les orbites sont finies, c'est-à-dire $k = 0$, les variétés M et M/G sont de même dimension et la submersion canonique π est une isométrie locale. L'inégalité (A1) est alors immédiatement une égalité.*

Démonstration du lemme B.1

Sur la variété riemannienne $(M/G, \tilde{g})$ de dimension $n-k$, la formule reliant la courbure scalaire $Scal_{\tilde{g}}$ et la courbure sectionnelle $K_{\tilde{g}}$ s'écrit :

$$\forall y \in M/G, \qquad Scal_{\tilde{g}}(y) = \sum_{(i,j)\in[1,n-k]^2, i\neq j} K_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \tag{A2}$$

où $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ est une base orthonormée de $T_y(M/G)$. Soit $x \in M$, l'espace vectoriel $T_x(M)$ se décompose en somme directe orthogonale pour le produit scalaire g_x :

$$T_x(M) = Ker\ d\pi_x \overset{\perp}{\oplus} (Ker\ d\pi_x)^\perp$$

Ainsi tout vecteur tangent $X \in T_x(M)$ se décompose de manière unique sous la forme : $X = X^v \overset{\perp}{\oplus} X^h$ où $X^v \in Ker\ d\pi_x$ est appelé composante verticale de X et $X^h \in (Ker\ d\pi_x)^\perp$ est appelé composante horizontale de X. Notons que l'aplication $d\pi_x \backslash_{(Ker d\pi_x)^\perp}$ est un isomorphisme. La formule de O'Neil, voir par exemple Hebey Vaugon [30], donne alors une relation entre la courbure sectionnelle de (M, g) notée K_g et celle de $(M/G, \tilde{g})$ notée $K_{\tilde{g}}$. Elle s'écrit ici, comme $\tilde{e}_i$ et $\tilde{e}_j$ sont deux vecteurs orthogonaux de $T_y(M/G)$:

$$K_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = K_g(e_i, e_j) + \frac{3}{4}\left|[e_i\ e_j]^v\right|^2$$

où $e_i = (d\pi_x \backslash_{(Ker d\pi_x)^\perp})^{-1}(\tilde{e}_i) \in (Ker d\pi_x)^\perp \subset T_x(M)$ de même pour e_j et où $[e_i\ e_j]^v$ est la composante verticale du vecteur $[e_i\ e_j] \in T_x(M)$. En particulier, on en déduit, comme la courbure sectionnelle est supposée constante sur M égale à $K_g(M)$, que :

$$K_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \geq K_g(M)$$

et on conclut avec (A2) que

$$Scal_{\tilde{g}}(y) \geq K_g(M)\ (n-k)(n-k-1)$$

ce qui démontre le lemme.$\square$

B.2 Courbure scalaire et quotient local : un exemple

Lemme B.2. *Soient (M, g) une variété riemannnienne compacte et (S^m, h_m) la sphère standard. Sur la variété $M \times S^m$ munie de la métrique produit $g \times h_m$, on considère le groupe*

$$G = I_M \times O(r_1) \times O(r_2),$$

où $r_1 \geq r_2$ et $r_1 + r_2 = m+1$. Alors pour tout $x_0 = (y_0, 0_{\mathbb{R}^{r_1}}, z_0)$ avec $y_0 \in M$, et $z_0 \in S^{r_2-1}$, $O^G_{x_0}$ est une orbite de dimension et de volume minimal parmi les G-orbites et le sous groupe normal de G noté $H = I_M \times I_{r_1} \times O(r_2)$ permet le passage au quotient sur un voisinage $O_{x_0,\delta} = \{x \in M \times S^m, d_{g\times h_m}(x, O^G_{x_0}) < \delta\}$ de $O^G_{x_0}$. On note $\pi_H : O_{x_0,\delta} \to O_{x_0,\delta}/H$ la projection canonique, $\tilde{g}$ la métrique quotient induite par g et $\overline{x}_0 = \pi_H(O^H_{x_0})$. Alors

$$Scal_{\tilde{g}}(\overline{x}_0) \geq Scal_g(y_0) + r_1(r_1 - 1)$$

Démonstration du lemme :

$O_{x_0,\delta} = \{x \in M \times S^m, d_{g\times h_m}(x, O^G_{x_0}) < \delta\}$ est un ouvert de $M \times S^m$ contenant l'orbite $O^G_{x_0} = \{y_0\} \times \{0_{\mathbb{R}^{r_1}}\} \times S^{r_2-1}$ où $y_0 \in M$. Il existe donc un ouvert O_1 de M contenant y_0 et un ouvert O_2 de S^m contenant $\{O_{\mathbb{R}^{r_1}}\} \times S^{r_2-1}$ tels que

$$O^G_{x_0} \in O_1 \times O_2 \subset O_{x_0,\delta}.$$

et on a en notant $H' = I_{r_1} \times O(r_2)$

$$(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)\,/H = \mathcal{O}_1 \;\times\; (\mathcal{O}_2/\;H')$$

avec pour métrique quotient $\tilde{g} = g \times \tilde{h}_m$ où $\tilde{h}_m$ est la métrique quotient induite par h_m sur S^m/H'. D'autre part comme $O^G_{x_0} = O^H_{x_0}$

$$\overline{x_0} = \pi_H(O^H_{x_0}) = \pi_H\left(\{y_0\} \times \{0_{\mathbb{R}^{r_1}}\} \times S^{r_2-1}\right) = \{y_0\} \times p\left(\{0_{r_1}\} \times S^{r_2-1}\right) = \{y_0\} \times \{t_0\}$$

où $p : S^m \to S^m/H'$ est la projection canonique et $t_0 = p\left(\{0_{r_1}\} \times S^{r_2-1}\right) \in \mathcal{O}_2/H$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Scal_{\tilde{g}}(\overline{x_0}) &= Scal_{g\times\tilde{h}_m}(\{y_0\} \times \{t_0\}) \\ &= Scal_g(y_0) + Scal_{\tilde{h}_m}(t_0) \end{aligned}$$

Or $t_0 \in \mathcal{O}_2/H' \subset S^m/H'$ et d'après le lemme B.1, puisque S^m/H' est de dimension $m - r_2 + 1 = r_1$ et que la courbure sectionnelle de la sphère vaut $+1$, on a : $Scal_{\tilde{h}_m}(t_0) \geq r_1(r_1 - 1)$. Ainsi :

$$Scal_{\tilde{g}}(\overline{x_0}) \geq Scal_g(y_0) + r_1(r_1 - 1),$$

le lemme est démontré.$\square$

Bibliographie

[1] AUBIN T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Differential Geom.*, 11, 573-598, 1976.

[2] AUBIN T. Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures et appl.*, 55, 269-296, 1976.

[3] AUBIN T. Nonlinear Analysis on manifolds. Monge-Ampère equations *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252, Springer-Verlag* 1982

[4] BIDAUT-VERON M.F., VERON L. Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations, *Invent. Math.* 106, 489-539, 1991.

[5] BREDON G.E. Introduction to compact transformation groups, *Academic press, New York-London* 1972

[6] BREZIS H., LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc*, 88, 486-490, 1983.

[7] BROUTTELANDE C. On the second best constant in logarithmic Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds, *Bull. Sci. Math.*, 127, 292-312 (2003).

[8] BROUTTELANDE C. The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, II. Ser. 46, 117-146 (2003).

[9] CAFARELLI L. A., GIDAS B. et SPRUCK J. Asymptotic symmetrie and local behaviour of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42, 271-297, 1989.

[10] COLLION S. Fonctions critiques et equations aux dérivées partielles elliptiques sur les variétés riemanniennes compactes, *Thèse* 2004

[11] DRUET O., HEBEY E. Asymptotics for sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds. *Adv. Differential Equations*, 7, 1409-1478, 2002.

[12] DRUET O., HEBEY E. The AB program in Geometric Analysis. Sharp Sobolev inequalities and related problems *Memoirs of the American Mathematical Society* 2002

[13] DRUET O., HEBEY E., ROBERT F. Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry *Mathematical Notes , Princeton University Press* Volume 45.

[14] DRUET O., HEBEY E., VAUGON M. Sharp Sobolev Inequalities with lower order remainder terms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353, 269-289, 2001.

[15] DRUET O., HEBEY E., VAUGON M. Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds : the influence of geometry, *Internat. Math. Res. Notices*,14, 735-779, 1999.

[16] ESPOSITO P. Uniqueness and multiplicity for perturbations of the Yamabe problem on S^n. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 32, 139-146, 2001.

[17] FAGET Z. Optimal constants in critical Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries *Ann. Global Anal. Geom.*, 24, 161-200, 2003.

[18] FAGET Z. Second-best constant and extremal functions in Sobolev inequalities in the presence of symmetries, *Adv. Differential Equations*, 9, 745-770, 2004.

[19] FAGET Z. Best constants in the exceptional case of Sobolev inequalities, *Math. Z.* 252, 133-146, 2006

[20] GALLOT S., HULIN D., LAFONTAINE J. Riemannian Geometry, *Third edition, Universitext, Springer-Verlag* 1993

[21] GIDAS, SPRUCK Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Commun. Pure Appl. Math.* 34, 525-598 (1981).

[22] GILBART G., TRUDINGER N.S. Elliptic partial differential equations of second order, *Seconde édition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 224, Springer, Berlin-New York, 1983.

[23] HEBEY E. Sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact riemannian manifolds *Trans. of the American Math. Soc.*, 354, 1193-1213, 2001.

[24] HEBEY E. Nonlinear elliptic equations of critical Sobolev growth from a dynamical viewpoint, *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology* 115-125 *Contemp. Math., 350, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2004.

[25] HEBEY E. Sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds, *http ://www.u-cergy.fr/rech/pages/hebey/index.html*

[26] HEBEY E. Variationnal methods and elliptic equations in Riemannian geometry *http ://www.u-cergy.fr/rech/pages/hebey/NotesVarMeth.dvi*

[27] HEBEY E., ROBERT F. Coercivity and Struwe′s compactness for Paneitz typeoperators with constant coefficients. *Calc. Var. Partial Differential Equations* , 13, 491-517, 2001.

[28] HEBEY E., VAUGON M. Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13, 57–93, 1996.

[29] HEBEY E., VAUGON M. Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe *Indiana Univ. Math. J.*, 41, 377-407, 1992.

[30] HEBEY E., VAUGON M. Sobolev spaces in the presence of symmetries, *J. Math. Pures Appl.* , 76, 859-881, 1997.

[31] HAN Q., LIN F. Elliptic Partial Differential Equations, *Courant Institute of Mathematical Sciences, Lecture Notes in Mathematics* 5, 1999. *Second edition published jointly by the American Mathematical Society and the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 2000

[32] HUMBERT E. Best constants in the L^2-Nash inequality *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* , 131, no. 3, 621-646, 2001.

[33] HUMBERT E. Best constant for trace Nash inequality *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 9, no. 2, 217-238, 2002

[34] OBATA M. The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds *J. Differential Geom.*, 6, 247-258, 1971.

[35] SAINTIER N. Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p-Laplacian, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 25, 299-331, 2006.

[36] SAINTIER N. Sur quelques problèmes non-linéaires en analyse géométrique *Thèse* 2005

[37] SCHOEN R. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. *Topics in calculus of variations*, 120-154, 1987, *Lecture Notes in Math., 1365, Springer, Berlin*, 1989.

[38] SOBOLEV S.L. Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, *Math. SB.*, 46, 471-496, 1938.

[39] STRUWE M. A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities *Math. Z.*, 187, 511-517, 1984.

[40] TALENTI G. Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110, 353-372, 1976.