Autour du problème de Lehmer relatif dans un tore

Emmanuel DELSINNE

Soutenance de thèse

Université de Caen

Vendredi 14 décembre 2007

1. Le problème de Lehmer
   - Mesure de Mahler
   - Hauteur
   - Principaux résultats
2. Le problème de Lehmer relatif unidimensionnel
   - Hauteur & extensions abéliennes
   - Conjectures
   - Résultats
3. Problème de Lehmer relatif en dimension supérieure : cas des points
   - Hauteur dans le tore
   - Conjectures et résultats
   - Esquisse de la preuve
4. Problème de Lehmer relatif en dimension supérieure : cas général
   - Minimum essentiel
   - Conjectures et résultats

Le problème de Lehmer

Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Notons $P(X) = a_d \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$. La mesure de Mahler de P est le nombre réel

$$M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$*. Notons* $P(X) = a_d \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$*. La mesure de Mahler de* P *est le nombre réel*

$$M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

- La mesure de Mahler est multiplicative.

Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Notons $P(X) = a_d \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$. La mesure de Mahler de P est le nombre réel

$$M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

- La mesure de Mahler est multiplicative.
- Si $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, alors $M(P) \geq 1$.

Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$*. Notons* $P(X) = a_d \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$*. La mesure de Mahler de* P *est le nombre réel*

$$M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

- La mesure de Mahler est multiplicative.
- Si $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, alors $M(P) \geq 1$.

Proposition (Kronecker)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *irréductible. Alors* $M(P) = 1$ *si et seulement si* $P(X) = \pm X$ *ou* P *est un polynôme cyclotomique.*

Question (Lehmer, 1933)

Pour tout $\varepsilon > 0$ *existe-t-il* $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *tel que*

$$1 < M(P) < 1 + \varepsilon \text{ ?}$$

Question (Lehmer, 1933)

Pour tout $\varepsilon > 0$ *existe-t-il* $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *tel que*

$$1 < M(P) < 1 + \varepsilon \text{ ?}$$

- $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$

Question (Lehmer, 1933)

Pour tout $\varepsilon > 0$ *existe-t-il* $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *tel que*

$$1 < M(P) < 1 + \varepsilon \text{ ?}$$

- $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$

Conjecture (Lehmer)

Il existe $c > 0$ *tel que, pour tout* $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *irréductible, différent de* $\pm X$ *et d'un polynôme cyclotomique, on ait*

$$M(P) \geq 1 + c.$$

Soit α un nombre algébrique non nul.

Définition

Soit K un corps de nombres contenant α. La hauteur de α est le réel

$$h(\alpha) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

Soit α un nombre algébrique non nul.

Définition

Soit K un corps de nombres contenant α. La hauteur de α est le réel

$$h(\alpha) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

- Si P_α est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$ et $D_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ son degré, alors

$$h(\alpha) = \frac{\log M(P_\alpha)}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \ ;$$

Soit α un nombre algébrique non nul.

Définition

Soit K un corps de nombres contenant α. La hauteur de α est le réel

$$h(\alpha) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

- Si P_α est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$ et $D_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ son degré, alors

$$h(\alpha) = \frac{\log M(P_\alpha)}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \ ;$$

- $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$; $\forall \ell \in \mathbb{Z},\ h(\alpha^\ell) = |\ell| h(\alpha)$;

Soit α un nombre algébrique non nul.

Définition

Soit K un corps de nombres contenant α. La hauteur de α est le réel

$$h(\alpha) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

- Si P_α est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$ et $D_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ son degré, alors
$$h(\alpha) = \frac{\log M(P_\alpha)}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \ ;$$
- $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$; $\forall \ell \in \mathbb{Z},\ h(\alpha^\ell) = |\ell| h(\alpha)$;
- $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta) + \log 2$;

Soit α un nombre algébrique non nul.

Définition

Soit K un corps de nombres contenant α. La hauteur de α est le réel

$$h(\alpha) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

- Si P_α est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$ et $D_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ son degré, alors
$$h(\alpha) = \frac{\log M(P_\alpha)}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \ ;$$
- $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$; $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, $h(\alpha^\ell) = |\ell| h(\alpha)$;
- $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta) + \log 2$;
- (Kronecker) $h(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha \in \mu_\infty$, l'ensemble des racines de l'unité.

Conjecture (Lehmer)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}.$$

Théorème (Dobrowolski, 1979)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \cdot \left(\log 3D_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^{-3}.$$

Théorème (Dobrowolski, 1979)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \cdot \left(\log 3D_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^{-3}.$$

- Si α n'est pas un entier algébrique, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log 2}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$.

Théorème (Dobrowolski, 1979)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \cdot \left(\log 3D_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^{-3}.$$

- Si α n'est pas un entier algébrique, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log 2}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$.
- (Smyth, 1971) Si α n'est pas réciproque, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log \theta}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$ où θ est la racine réelle de $X^3 - X - 1$.

Théorème (Dobrowolski, 1979)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \cdot \left(\log 3D_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^{-3}.$$

- Si α n'est pas un entier algébrique, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log 2}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$.
- (Smyth, 1971) Si α n'est pas réciproque, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log \theta}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$ où θ est la racine réelle de $X^3 - X - 1$.
- (Schinzel, 1973) Si α appartient à un corps C.M. et $|\alpha| \neq 1$, alors $h(\alpha) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Théorème (Dobrowolski, 1979)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)} \cdot \left(\log 3D_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^{-3}.$$

- Si α n'est pas un entier algébrique, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log 2}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$.
- (Smyth, 1971) Si α n'est pas réciproque, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log \theta}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$ où θ est la racine réelle de $X^3 - X - 1$.
- (Schinzel, 1973) Si α appartient à un corps C.M. et $|\alpha| \neq 1$, alors $h(\alpha) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- (Amoroso-David, 1999) Si l'extension $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est galoisienne, alors $h(\alpha) \geq \frac{c}{D_{\mathbb{Q}}(\alpha)}$.

Le problème de Lehmer relatif unidimensionnel

Théorème (Amoroso-Dvornicich, 2000)

Pour tout $\alpha \in (\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^* \setminus \mu_\infty$, *on a*

$$h(\alpha) \geq \frac{\log 5}{12}.$$

Théorème (Amoroso-Dvornicich, 2000)

Pour tout $\alpha \in (\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^* \setminus \mu_\infty$, *on a*

$$h(\alpha) \geq \frac{\log 5}{12}.$$

Théorème (Amoroso-Zannier, 2000)

Soit K *un corps de nombres. Il existe* $c(K) > 0$ *tel que, pour tout* $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, *on ait*

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha))^{-13}.$$

Conjecture (Problème de Lehmer relatif)

Soit K un corps de nombres. Il existe $c(K) > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

Conjecture (Problème de Lehmer relatif)

Soit K un corps de nombres. Il existe $c(K) > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus \mu_{\infty}$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

- Dépendance en K ?

Conjecture (Problème de Lehmer relatif)

Soit K un corps de nombres. Il existe $c(K) > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

- Dépendance en K ?

Conjecture

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[K:\mathbb{Q}]D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Conjecture (Problème de Lehmer relatif)

Soit K un corps de nombres. Il existe $c(K) > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

- Dépendance en K ?

Conjecture

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times \setminus \mu_\infty$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[K:\mathbb{Q}] D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}.$$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

- Cette conjecture est fausse

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.
Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On a $[K : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ et $n \gg [K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]$.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.
Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On a $[K : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ et $n \gg [K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]$.
Soit $\alpha = 2^{1/n}$.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.
Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On a $[K : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ et $n \gg [K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]$.
Soit $\alpha = 2^{1/n}$. Alors $\alpha \in K^{\mathrm{ab}}$ donc $D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha) = 1$ et

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.
Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On a $[K : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ et $n \gg [K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]$.
Soit $\alpha = 2^{1/n}$. Alors $\alpha \in K^{\mathrm{ab}}$ donc $D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha) = 1$ et

$$h(\alpha) = \frac{\log 2}{n} \ll \frac{1}{[K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]} \frac{1}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}$$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n le produit des m premiers nombres premiers.
Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On a $[K : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ et $n \gg [K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]$.
Soit $\alpha = 2^{1/n}$. Alors $\alpha \in K^{\mathrm{ab}}$ donc $D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha) = 1$ et

$$h(\alpha) = \frac{\log 2}{n} \ll \frac{1}{[K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}]} \frac{1}{D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)}$$

Ainsi $c(K) \gg ([K : \mathbb{Q}] \log\log[K : \mathbb{Q}])^{-1}$.

Théorème (Amoroso-D. 2007)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)}} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)})^{-4}.$$

$$\textit{avec} \;\; c(K) = \begin{cases} c([K:\mathbb{Q}] \log(3|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|))^{-3} & \textit{sous GRH} \\ (2[K:\mathbb{Q}]!\Delta_{K/\mathbb{Q}})^{-c} & \textit{sans GRH} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Théorème (Amoroso-D. 2007)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)}} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)})^{-4}.$$

$$\textit{avec}\ \ c(K) = \begin{cases} c([K:\mathbb{Q}]\log(3|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|))^{-3} & \textit{sous GRH} \\ (2[K:\mathbb{Q}]!\Delta_{K/\mathbb{Q}})^{-c} & \textit{sans GRH} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

- Dépendance en $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$?

Théorème (Amoroso-D. 2007)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)}} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)})^{-4}.$$

avec $c(K) = \begin{cases} c([K:\mathbb{Q}]\log(3|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|))^{-3} & \textit{sous GRH} \\ (2[K:\mathbb{Q}]!\Delta_{K/\mathbb{Q}})^{-c} & \textit{sans GRH} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

- Dépendance en $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$?
- GRH : estimation du terme reste dans un théorème des idéaux premiers de K (Lagarias-Odlyzko & Friedlander).

Théorème (Amoroso-D. 2007)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^{\times}$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)}} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)})^{-4}.$$

$$\textit{avec}\ \ c(K) = \begin{cases} c([K:\mathbb{Q}] \log(3|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|))^{-3} & \textit{sous GRH} \\ (2[K:\mathbb{Q}]!\Delta_{K/\mathbb{Q}})^{-c} & \textit{sans GRH} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \arrow[d, dash, "D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha)"] \\ K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathrm{ab}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

- Dépendance en $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$?
- GRH : estimation du terme reste dans un théorème des idéaux premiers de K (Lagarias-Odlyzko & Friedlander).
- Amélioration du facteur logarithmique à l'aide d'une trichotomie (premiers très, peu ou pas ramifiés).

Théorème (Amoroso-D. 2007)

Il existe $c > 0$ tel que, pour tout corps de nombres K et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$, on ait

$$h(\alpha) \geq \frac{c(K)}{D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)}} (\log 3 D_{K^{\mathrm{ab}}(\alpha)})^{-4}.$$

$$\textit{avec}\ \ c(K) = \begin{cases} c([K:\mathbb{Q}]\log(3|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|))^{-3} & \textit{sous GRH} \\ (2[K:\mathbb{Q}]!\Delta_{K/\mathbb{Q}})^{-c} & \textit{sans GRH} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} K^{\mathrm{ab}}(\alpha) \\ \Big| \ D_{K^{\mathrm{ab}}}(\alpha) \\ K^{\mathrm{ab}} \\ \Big| \ \mathrm{ab} \\ K \\ \Big| \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

- Dépendance en $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$?
- GRH : estimation du terme reste dans un théorème des idéaux premiers de K (Lagarias-Odlyzko & Friedlander).
- Amélioration du facteur logarithmique à l'aide d'une trichotomie (premiers très, peu ou pas ramifiés).
- Preuve : utilise des outils plus élémentaires (déterminant de type Vandermonde) en évitant le recours à un lemme de Siegel absolu.

Problème de Lehmer relatif en dimension supérieure : le cas des points

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ le tore de dimension n, plongé naturellement dans $\mathbb{P}^n$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{G}_m^n = \mathbb{G}_m^n(\bar{\mathbb{Q}})$ le tore de dimension n, plongé naturellement dans $\mathbb{P}^n$.

Définition

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$. Soit K un corps de nombres contenant les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$. La hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ est le réel

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ le tore de dimension n, plongé naturellement dans $\mathbb{P}^n$.

Définition

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Soit K un corps de nombres contenant les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$. La hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ est le réel

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}.$$

- $h(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}) \leq h(\boldsymbol{\alpha}) + h(\boldsymbol{\beta})$;

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{G}_m^n = \mathbb{G}_m^n(\bar{\mathbb{Q}})$ le tore de dimension n, plongé naturellement dans $\mathbb{P}^n$.

Définition

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$. Soit K un corps de nombres contenant les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$. La hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ est le réel

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha_1|_v, \dots, |\alpha_n|_v\}.$$

- $h(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}) \leq h(\boldsymbol{\alpha}) + h(\boldsymbol{\beta})$;
- $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\boldsymbol{\alpha}^\ell) = \ell h(\boldsymbol{\alpha})$;

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ le tore de dimension n, plongé naturellement dans $\mathbb{P}^n$.

Définition

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Soit K un corps de nombres contenant les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$. La hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ est le réel

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}.$$

- $h(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}) \leq h(\boldsymbol{\alpha}) + h(\boldsymbol{\beta})$;
- $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\boldsymbol{\alpha}^\ell) = \ell h(\boldsymbol{\alpha})$;
- (Kronecker) $h(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\mathrm{tors}}$, l'ensemble des points de torsion.

Définition

Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de $\boldsymbol{\alpha}$ sur K est l'entier

$$\omega_K(\boldsymbol{\alpha}) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}.$$

Définition

Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de $\boldsymbol{\alpha}$ sur K est l'entier

$$\omega_K(\boldsymbol{\alpha}) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}.$$

- $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n,\ \omega_K(\boldsymbol{\alpha}) \leq n(D_K(\boldsymbol{\alpha}))^{1/n}$.

Définition

Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de $\boldsymbol{\alpha}$ sur K est l'entier

$$\omega_K(\boldsymbol{\alpha}) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}.$$

- $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n,\ \omega_K(\boldsymbol{\alpha}) \leq n(D_K(\boldsymbol{\alpha}))^{1/n}$.

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

L'hypothèse « $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes » est

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

L'hypothèse « $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes » est

- nécessaire : si $\boldsymbol{\alpha}_d = (2^{1/d}, \ldots, 2^{1/d})$, alors $\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}) = 1$ et $h(\boldsymbol{\alpha}_d) = \frac{\log 2}{d}$;

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

L'hypothèse « $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes » est

- nécessaire : si $\boldsymbol{\alpha}_d = (2^{1/d}, \ldots, 2^{1/d})$, alors $\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}) = 1$ et $h(\boldsymbol{\alpha}_d) = \frac{\log 2}{d}$;
- équivalente à « $\boldsymbol{\alpha}$ n'appartient pas à un translaté de sous-tore par un point de torsion ».

Conjecture (Amoroso-David, 1999 : Lehmer en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

Théorème (Amoroso-David, 1999)

Il existe $c(n) > 0$ et $\kappa(n) > 0$ tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}(\log 3\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}))^{-\kappa(n)}.$$

Conjecture (Lehmer relatif en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

Conjecture (Lehmer relatif en dimension supérieure)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

Théorème (Amoroso-David, 2004)

Il existe $c(n) > 0$, $\kappa(n) > 0$ et $\mu(n) > 0$ tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et pour toute extension abélienne $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}(\log 3[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{-\kappa(n)}$$

ou il existe une sous-variété de torsion définie sur $\mathbb{L}$ contenant $\boldsymbol{\alpha}$ telle que

$$(\deg B)^{1/\mathrm{codim}(B)} \leq c(n)\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})(\log 3[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\mu(n)}.$$

Théorème (D., 2007)

Il existe $c(n) > 0$, $\kappa(n) > 0$ *et* $\mu(n) > 0$ *tels que, pour tout* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ *et pour toute extension abélienne* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{Q}$ *vérifiant* $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbb{L}}$, *on ait*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}(\log 3\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{-\kappa(n)}$$

ou il existe une sous-variété de torsion définie sur $\mathbb{L}$ *contenant* $\boldsymbol{\alpha}$ *telle que*

$$(\deg B)^{1/\mathrm{codim}(B)} \leq c(n)\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})(\log 3\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\mu(n)}.$$

Théorème (D., 2007)

Il existe $c(n) > 0$, $\kappa(n) > 0$ et $\mu(n) > 0$ tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et pour toute extension abélienne $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$ vérifiant $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbb{L}}$, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})} (\log 3\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{-\kappa(n)}$$

ou il existe une sous-variété de torsion définie sur $\mathbb{L}$ contenant $\boldsymbol{\alpha}$ telle que

$$(\deg B)^{1/\mathrm{codim}(B)} \leq c(n)\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})(\log 3\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\mu(n)}.$$

- $\kappa(n)$ et $\mu(n)$ explicites et $c(n)$ effectivement calculable.

Hypothèse $(\mathcal{H}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbb{L}})$

Pour tout sous-tore H de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, pour tout ℓ entier naturel, pour tout nombre premier p ramifié dans $\mathbb{L}$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on ait

$$\left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell} \notin H \Longrightarrow \left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell p} \notin H.$$

Hypothèse ($\mathcal{H}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbb{L}}$)

Pour tout sous-tore H de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, pour tout ℓ entier naturel, pour tout nombre premier p ramifié dans $\mathbb{L}$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on ait

$$\left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell} \notin H \Longrightarrow \left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell p} \notin H.$$

- Version plus faible de l'hypothèse : contrôle des paramètres.

Hypothèse $(\mathcal{H}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbb{L}})$

Pour tout sous-tore H de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, pour tout ℓ entier naturel, pour tout nombre premier p ramifié dans $\mathbb{L}$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on ait

$$\left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell} \notin H \Longrightarrow \left(\frac{\sigma(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\ell p} \notin H.$$

- Version plus faible de l'hypothèse : contrôle des paramètres.
- $H = 1$ (G.Rémond).

Esquisse de la preuve.

Esquisse de la preuve.

- On suppose, par l'absurde, que la hauteur de α est petite.

Esquisse de la preuve.

- On suppose, par l'absurde, que la hauteur de α est petite.
- On fixe un ensemble de premiers.

Esquisse de la preuve.

- On suppose, par l'absurde, que la hauteur de α est petite.
- On fixe un ensemble de premiers.
- On fait une dichotomie :

Esquisse de la preuve.

- On suppose, par l'absurde, que la hauteur de α est petite.
- On fixe un ensemble de premiers.
- On fait une dichotomie :
    - Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

Esquisse de la preuve.

- On suppose, par l'absurde, que la hauteur de α est petite.
- On fixe un ensemble de premiers.
- On fait une dichotomie :
  - Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.
  - Il existe un premier très ramifié dans $\mathbb{L}$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.
- Construction d'une fonction auxiliaire à l'aide d'un lemme de Siegel absolu : $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X] \setminus \{0\}$ identiquement nulle avec forte multiplicité sur $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{\mathbb{L}} = \cup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})} \sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.
- Construction d'une fonction auxiliaire à l'aide d'un lemme de Siegel absolu : $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X] \setminus \{0\}$ identiquement nulle avec forte multiplicité sur $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{\mathbb{L}} = \cup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})} \sigma(\boldsymbol{\alpha})$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ et $\tau\boldsymbol{\alpha}^p$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ prolongeant le morphisme de Frobenius $\phi_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.
- Construction d'une fonction auxiliaire à l'aide d'un lemme de Siegel absolu : $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X] \setminus \{0\}$ identiquement nulle avec forte multiplicité sur $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{\mathbb{L}} = \cup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})} \sigma(\boldsymbol{\alpha})$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ et $\tau\boldsymbol{\alpha}^p$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ prolongeant le morphisme de Frobenius $\phi_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$.
- Extrapolation : F identiquement nulle sur de nombreux conjugués de multiples $\{\boldsymbol{\alpha}^m\}_{\mathbb{L}}$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.
- Construction d'une fonction auxiliaire à l'aide d'un lemme de Siegel absolu : $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X] \setminus \{0\}$ identiquement nulle avec forte multiplicité sur $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{\mathbb{L}} = \cup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})} \sigma(\boldsymbol{\alpha})$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ et $\tau\boldsymbol{\alpha}^p$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ prolongeant le morphisme de Frobenius $\phi_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$.
- Extrapolation : F identiquement nulle sur de nombreux conjugués de multiples $\{\boldsymbol{\alpha}^m\}_{\mathbb{L}}$.
- Lemme de zéros : construction d'une variété V dont on contrôle le degré et contenant une puissance $\{\boldsymbol{\alpha}^\ell\}_{\mathbb{L}}$.

Tous les premiers considérés sont peu ramifiés dans $\mathbb{L}$.

- Approche à la Amoroso-David : schéma classique d'une preuve de transcendance.
- Construction d'une fonction auxiliaire à l'aide d'un lemme de Siegel absolu : $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X] \setminus \{0\}$ identiquement nulle avec forte multiplicité sur $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{\mathbb{L}} = \cup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})} \sigma(\boldsymbol{\alpha})$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ et $\tau\boldsymbol{\alpha}^p$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ prolongeant le morphisme de Frobenius $\phi_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$.
- Extrapolation : F identiquement nulle sur de nombreux conjugués de multiples $\{\boldsymbol{\alpha}^m\}_{\mathbb{L}}$.
- Lemme de zéros : construction d'une variété V dont on contrôle le degré et contenant une puissance $\{\boldsymbol{\alpha}^\ell\}_{\mathbb{L}}$.
- $$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^\ell) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^\rho}.$$

Il existe un premier p très ramifié dans $\mathbb{L}$.

- Il existe un sous-corps $\mathbb{L}_{(p)} \subsetneq \mathbb{L}$ tel que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\zeta}\tau\boldsymbol{\alpha}$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L}_{(p)})$ et $\boldsymbol{\zeta}$ point de p-torsion.

Il existe un premier p très ramifié dans $\mathbb{L}$.

- Il existe un sous-corps $\mathbb{L}_{(p)} \subsetneq \mathbb{L}$ tel que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\zeta}\tau\boldsymbol{\alpha}$ sont p-adiquement proches pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{L}_{(p)})$ et $\boldsymbol{\zeta}$ point de p-torsion.
- Argument de déterminant (pas de lemme de Siegel) :

$$\omega_{\mathbb{L}_{(p)}}(\boldsymbol{\alpha}^p) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Insuffisant pour conclure

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Insuffisant pour conclure : descente.

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Insuffisant pour conclure : descente.

- Appliquer plusieurs fois de suite cette proposition.

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Insuffisant pour conclure : descente.

- Appliquer plusieurs fois de suite cette proposition.
- Construction d'une suite de variétés « emboîtées ».

Proposition

Si $h(\boldsymbol{\alpha}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\log \omega_{\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})})^{-\kappa}$, *alors*

- *il existe* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \frac{\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})}{(\log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}))^{\rho}}$$

- *ou il existe* $\ell' \in \mathbb{N}^*$ *et un sous-corps* $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}$ *tel que*

$$\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell'}) \ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}) \log \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Insuffisant pour conclure : descente.

- Appliquer plusieurs fois de suite cette proposition.
- Construction d'une suite de variétés « emboîtées ».
- Obtenir deux variétés de même dimension possédant certaines propriétés.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \quad \ll \quad \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ &\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)}\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ &\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ &\ll \deg(V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}).
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un produit de premiers peu ramifiés

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}).
\end{aligned}$$

Contradiction.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \quad \ll \quad \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ &\ll \deg(\ell'^{-1}[\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(\ell'^{-1}[\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll (\ell'^{-1}\deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')}
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(\ell'^{-1}[\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll (\ell'^{-1}\deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll (\ell')^{-1/n}\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\begin{array}{rcl}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) & \ll & \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
 & \ll & \deg(\ell'^{-1}[\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
 & \ll & (\ell'^{-1}\deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
 & \ll & (\ell')^{-1/n}\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\
 & \ll & \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}).
\end{array}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V n'est pas un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg(\ell'^{-1}[\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll (\ell'^{-1}\deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll (\ell')^{-1/n}\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}).
\end{aligned}$$

Contradiction.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \quad \ll \quad \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)}\\ &\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)}\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll ([\mathbb{L}' : \mathbb{L}]^{-1} \deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')}
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll ([\mathbb{L}' : \mathbb{L}]^{-1} \deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll [\mathbb{L}' : \mathbb{L}]^{-1/n} \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}
\end{aligned}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\begin{array}{rcl} \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) & \ll & \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ & \ll & \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\ & \ll & ([\mathbb{L}':\mathbb{L}]^{-1}\deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\ & \ll & [\mathbb{L}':\mathbb{L}]^{-1/n}\omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\ & \ll & \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}). \end{array}$$

On obtient deux variétés V et V' vérifiant

- $\boldsymbol{\alpha}^{\ell} \in V$;
- $\dim V = \dim V'$;
- $[\ell']V \subset V'$;
- ℓ' est un « bon » entier pour V ;
- $(\deg V')^{1/\mathrm{codim}(V')} \ll \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa}$.

Si ℓ' est un premier très ramifié et V est un translaté de sous-tore

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) &\ll \deg(V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll \deg([\ell']V)^{1/\mathrm{codim}(V)} \\
&\ll ([\mathbb{L}' : \mathbb{L}]^{-1} \deg(V'))^{1/\mathrm{codim}(V')} \\
&\ll [\mathbb{L}' : \mathbb{L}]^{-1/n} \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'})(\log \omega_{\mathbb{L}'}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell\ell'}))^{\kappa} \\
&\ll \omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}).
\end{aligned}$$

Contradiction.

Problème de Lehmer relatif en dimension supérieure : le cas général

Définition

Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Le minimum essentiel de V est le réel défini par

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) = \inf_{\theta \in \mathbb{R}_+} \{\overline{V(\theta)}^{\mathbf{Zar}} = V\},$$

où $V(\theta) = \{\boldsymbol{\alpha} \in V,\ h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\}$.

Définition

Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Le minimum essentiel de V est le réel défini par

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) = \inf_{\theta \in \mathbb{R}_+} \{\overline{V(\theta)}^{\mathrm{Zar}} = V\},$$

où $V(\theta) = \{\boldsymbol{\alpha} \in V,\ h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\}$.

Théorème (Zhang, 1992)

Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Alors $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) = 0$ si et seulement si V est une variété de torsion.

Définition

Soient V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de V sur K est l'entier

$$\omega_K(V) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$$

Définition

Soient V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de V sur K est l'entier

$$\omega_K(V) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$$

Conjecture (Amoroso-David, 2001)

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour toute sous-variété géométriquement irréductible V de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ non contenue dans une variété de torsion, on ait

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)}$$

Définition

Soient V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. L'indice d'obstruction de V sur K est l'entier

$$\omega_K(V) = \min\{\deg P,\ P \in K[\mathbf{X}] \setminus \{0\},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ P(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$$

Théorème (Amoroso-David, 2001)

Il existe $c(n) > 0$ et $\kappa(n) > 0$ tels que, pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ non contenue dans une variété de torsion, on ait

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)} (\log \omega_{\mathbb{Q}}(V))^{-\kappa(n)}$$

- Corollaire du théorème pour les points.

Conjecture

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour toute sous-variété V géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ non contenue dans une variété de torsion, on ait

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V)}$$

Conjecture

Il existe $c(n) > 0$ tel que, pour toute sous-variété V géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ non contenue dans une variété de torsion, on ait

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V)}$$

Théorème (D., 2005)

Il existe $c(n) > 0$ et $\kappa > 0$ tels que, pour toute hypersurface irréductible V de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui n'est pas de torsion, on ait

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V)} (\log 3\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V))^{-\kappa}$$

Conclusion

Conclusion

- Problème unidimensionnel : clarifier la dépendance en K.

Conclusion

- Problème unidimensionnel : clarifier la dépendance en K.
- Problème en dimension supérieure : enlever l'hypothèse technique.