



HAL
open science

Existence de solutions faibles et faible-renormalisées pour des systèmes non linéaires de Boussinesq.

Abdelatif Attaoui

► **To cite this version:**

Abdelatif Attaoui. Existence de solutions faibles et faible-renormalisées pour des systèmes non linéaires de Boussinesq.. Mathématiques [math]. Université de Rouen, 2007. Français. NNT: . tel-00259252

HAL Id: tel-00259252

<https://theses.hal.science/tel-00259252>

Submitted on 27 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de
Docteur de L'Université de Rouen

présentée par

Abdelatif ATTAOUI

Discipline : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Analyse Numérique

Existence de solutions faibles et faible-renormalisées pour des
systèmes non linéaires de Boussinesq.

Date de soutenance : 06 Avril 2007

Composition du Jury

Président	: D. Cioranescu	Directeur de Recherche CNRS, Paris VI
Rapporteurs	: D. Cioranescu E. Fernández-Cara	Directeur de Recherche CNRS, Paris VI Professeur, Université Sevilla
Directeur de Thèse	: D. Blanchard	Professeur, Université de Rouen
Examineurs	: L. Glanetas A. Miranville C.-J Xu,	Professeur, Université de Rouen Professeur, Université de Poitiers Professeur Université de Rouen

Thèse préparée à l'Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Dominique Blanchard pour m'avoir proposé un sujet de thèse très intéressant, pour son encadrement, ses nombreux conseils et son soutien constant tout au long de ma thèse. Son cours sur les solutions renormalisées d'une grande rigueur pédagogique et scientifique est encore dans mes bagages.

Je souhaite remercier Doina Cioranescu pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail en acceptant d'être président du jury.

C'est un honneur pour moi que Doina Cioranescu et Enrique Fernández-Cara aient accepté la tâche de rapporter ma thèse. Je les remercie de s'en être acquittés avec grand soin. Certains de leurs travaux ont constitué pour moi un point d'ancrage et cette thèse n'aurait pu trouver rapporteurs plus appropriés.

Messieurs Léo Glangetas, Alain Miranville et Chao Juang Xu me font un grand honneur en participant au jury de ma thèse.

Ma gratitude revient aussi à Olivier Guibé, celui dont le travail a dynamisé le mien. Il a toujours répondu patiemment à mes interrogations et m'a apporté maints éclairages.

Mes remerciements vont également à Thierry de la Rue et Elise Janvresse qui s'occupent de l'atelier des doctorants, dont j'ai beaucoup appris.

Je tiens à remercier tous mes amis doctorants et post-doctorants de l'UMR 6085, et plus particulièrement Nicolas Bruyère.

Mes remerciements s'adressent aussi à Marguerite Losada, Edwige Auvray, Isabelle Lamitte et Marc Jolly pour leur disponibilité et leur gentillesse.

Il me reste à adresser une pensée à ma chère famille : Natacha, mes parents, mes frères et soeur, à ma belle famille dont le soutien est une ressource inestimable.

Table des matières

Introduction	7
1 Étude d'un système non linéaire de Boussinesq à second membre borné dans L^∞	13
1.1 Introduction	13
1.2 Définitions et rappels	14
1.3 Existence et stabilité pour une fonction b plus régulière	17
1.4 Existence d'une solution pour le système couplé	66
2 Étude d'un système non linéaire de Boussinesq à second membre ayant une croissance	69
2.1 Introduction	69
2.2 Existence et stabilité pour une fonction b plus régulière	71
2.3 Existence de solution du système couplé	91
2.4 Existence de solution en dimension 3	95
2.5 Quelques résultats concernant l'unicité	97
3 Étude d'un système non linéaire de Boussinesq-Stefan à second membre ayant une croissance	103
3.1 Introduction	103
3.2 Définitions et rappels	106
3.3 Existence d'une solution pour le système non linéaire	108
4 Existence d'une solution faible pour un système formellement équivalent en dimension 3	119
4.1 Introduction	119
4.2 Définitions	122
4.3 Existence d'une solution faible du système formellement équivalent	123

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions quelques modèles de mécanique des fluides, en particulier des systèmes non linéaires d'évolution, notamment le système non linéaire de Boussinesq suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } Q, \quad (1)$$

$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (4)$$

$$u(t = 0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t = 0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (5)$$

où Ω est un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^N , ($N = 2, 3$), de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le taux de déformations. L'équation (1) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans cette équation, les quantités μ et p désignent respectivement la viscosité et la pression cinématique du fluide. Le second membre de l'équation (1) est la fonction $F(\theta)$, où F est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité qui dépendent de la température. La fonction μ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et bornée. La fonction F est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^N , u_0 appartient à $L^2(\Omega)$, à divergence nulle et $u_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. L'équation (2) est l'équation de conservation de l'énergie dans laquelle le second membre $\mu(\theta)|Du|^2$ est l'énergie de dissipation. Pour cette équation, la donnée initiale $b(\theta_0)$ appartient à $L^1(\Omega)$. Le système de Boussinesq (1) – (5) des équations d'hydrodynamique (voir [12]), résulte d'un couplage entre les équations de Navier Stokes et l'équation de l'énergie ([27]). Des systèmes non linéaires similaires mais avec un second membre constant (par rapport à θ) et $b(\theta) = \theta$ ont été en particulier étudié dans [13], [14] et [25]. La présence des gradients de densité ou la variation de densité dans un fluide est induite, par exemple, par des variations de la température résultant du chauffage non uniforme du fluide. On trouvera, par exemple, une présentation des hypothèses, qui permettent de justifier les modèles de Boussinesq dans [3]. Les modèles étudiés dans cette thèse sont plus généraux que celui décrit dans [3] ou [12], puisque l'on considère ici une énergie interne $b(\theta)$ non linéaire, une viscosité dépendant de la température et un couplage via l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$. L'existence des solutions à (1) – (5) repose sur la stabilité des équations (1) et (2) si l'on travaille par approximations ou sur l'unicité des solutions de ces équations si l'on travaille par point

fixe. On est donc amené à distinguer le cas de la dimension 2 d'espace ($N = 2$) de la dimension 3 ($N = 3$).

♣ Le cas de la dimension $N = 2$

On sait que si $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, alors l'équation de Navier-Stokes (1) a une solution unique pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ est stable dans $L^1(Q)$ vis-à-vis des approximations. L'équation de conservation de l'énergie (2) se place donc naturellement dans le cadre L^1 . Nombreux sont les travaux sur les équations paraboliques à données L^1 (voir [5] et [15] par exemple). Pour avoir l'unicité et la stabilité de solution de (2), on utilise donc le cadre des solutions renormalisées qui possèdent ces propriétés à la différence des solutions faibles. Le type de solutions que l'on obtient dépend bien sûr du comportement de la fonction F . Si F est par exemple bornée, on obtient des solutions pour toutes données initiales $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $b(\theta_0) \in L^1(\Omega)$. Pour aborder le cas de fonctions F plus générales, il faut examiner plus précisément la régularité des solutions de (2). Sous les hypothèses que nous adoptons sur b , les solutions renormalisées des équations de type (2) vérifient les régularités suivantes :

$$\theta \in L^\infty(0, T, L^1(\Omega)),$$

$$\forall k > 0, \int_0^T \int_\Omega |DT_k(\theta)|^2 dx dt \leq C k,$$

avec $T_k(r) = \min(k, \max(r, -k)) \forall r \in \mathbb{R}$. Nous démontrons alors dans une première étape que $\theta \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$ avec $1 < q < \infty$ et $r < \frac{q}{q-1}$ (un résultat similaire est démontré dans [29] pour $N > 2$). Pour avoir $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, on est donc amené à faire une hypothèse de croissance sur F du type :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $2\alpha \in [0, 3]$. Nous démontrons alors dans une deuxième étape que $F(\theta)$ s'identifie à un élément de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ avec

$$\|F(\theta)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C(a + \|\theta\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}^\alpha).$$

Ces arguments nous permettent via des approximations de b et des méthodes de points fixe de démontrer que (1) – (5) possèdent des solutions pour des données initiales petites.

♣ Le cas de la dimension $N = 3$

L'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes (1) et la stabilité de l'énergie de dissipation sont des problèmes ouverts si u_0 appartient seulement à $(H_0^1(\Omega))^3$. Si par exemple $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ et F est une fonction bornée telle que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta$, avec η une constante suffisamment petite, on peut obtenir alors l'existence d'une solution à (1) – (5) pour les mêmes techniques que dans le cas $N = 2$.

Si u_0 est seulement dans $(H_0^1(\Omega))^3$, le manque de stabilité de l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ dans $L^1(Q)$ est un obstacle sérieux. Nous utilisons alors une transformation formelle analogue à celle utilisée pour les équations de Rayleigh-Bénard dans [25]. Le système formellement équivalent à (1) – (5) est ici :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \text{ dans } Q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) \right) + \operatorname{div} \left\{ u \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) + p \right) \right\} \quad (7)$$

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \right\} - \Delta \theta = F(\theta) \cdot u + \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j \partial_j (\mu(\theta) u_i) \text{ dans } Q,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Q, \quad (8)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (9)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \text{ dans } \Omega. \quad (10)$$

L'équation (7) est l'équation de conservation de l'énergie totale : énergie cinétique et énergie interne. Il faut remarquer que dans la modélisation thermodynamique du couplage vitesse-température pour les milieux continus, c'est en fait de l'équation (7) que l'on part (premier principe de la thermodynamique). L'équation (2) se déduit en combinant (1) multipliée par u et (7). Il est donc légitime de travailler avec le système (6)-(7). L'avantage de travailler avec le système (6) – (10) est que l'équation (7) possède des propriétés de stabilité par rapport aux approximations. Ceci nous permet de démontrer que le système (6) – (10) admet au moins une solution pour des données initiales petites et bien sûr sous l'hypothèse de croissance de F :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $2\alpha \in [0, \frac{5}{3}[$.

La notion de solutions renormalisées a été introduite par P.-L. Lions et R.-J. Di Perna [19] pour l'étude des équations de Boltzmann (voir aussi P.-L. Lions [25] pour des applications à des modèles de mécanique des fluides). Cette notion a été adaptée par la suite à des versions elliptiques et paraboliques (voir par exemple [4], [9], [20] et [23]).

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Dans le Chapitre 1, nous étudions le système (1) – (5) en dimension 2 ($N = 2$). Dans un premier temps, nous démontrons le Lemme 1.3.4 où il s'agit de montrer l'existence et l'unicité de la solution renormalisée de l'équation suivante :

$$\begin{cases} b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = G & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (11)$$

Pour une fonction G donnée dans $L^1(Q)$, une donnée initiale $b(\theta_0) \in L^1(\Omega)$ et pour u donnée dans $L^2(Q)$, on appelle solution renormalisée du problème (11), une fonction mesurable θ définie sur Q vérifiant :

$$b(\theta) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)); \quad (12)$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0; \quad (13)$$

$$\int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |b(\theta)(x,t)| \leq n+1\}} b'(\theta) |\nabla \theta|^2 dx dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty; \quad (14)$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a

$$\frac{\partial S(b(\theta))}{\partial t} + \operatorname{div} (uS(b(\theta))) - \operatorname{div} (S'(b(\theta))\nabla\theta) + S''(b(\theta))b'(\theta)|\nabla\theta|^2 = GS'(b(\theta)) \quad (15)$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$,

$$S(b(\theta))(t=0) = S(b(\theta_0)) \text{ sur } \Omega. \quad (16)$$

On démontre que pour une fonction b définie sur \mathbb{R} , de classe C^1 , strictement croissante et nulle en zéro, il existe une solution renormalisée du problème (11) au sens de la définition ci-dessus. Si de plus b' est localement lipschitzienne, on montre que cette solution est unique. Une variante de ce problème où l'on remplace $u \cdot \nabla b(\theta)$ par $\operatorname{div}\phi(\theta)$, où ϕ est une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^N , a été étudiée dans D. Blanchard et H. Redwane [9]. Ce résultat sera également utilisé dans les Chapitres 2 et 4. Ensuite, dans le cas particulier où F est bornée dans $L^\infty(Q)$, le Théorème 1.4.1 nous donne l'existence d'une solution faible-renormalisée du système (1) – (5) au sens de la Définition 1.2.2 du Chapitre 1.

Dans le Chapitre 2, nous étudions toujours le système (1) – (5) en dimension 2 ($N = 2$). On suppose que la fonction F vérifie une hypothèse de croissance du type :

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$.

(i) Le Théorème 2.4.1 nous donne :

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (1) – (5) (au sens de la Définition 1.2.2)

- si $1 < 2\alpha < 3$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible-renormalisée du système (1) – (5) (au sens de la Définition 1.2.2).

(ii) Dans la Section 2.5, on montre un résultat d'existence en dimension 3. On suppose que F est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 et que $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$, le Théorème 2.5.1 nous donne :

il existe un nombre réel $\eta > 0$, suffisamment petit tel que si $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta$, alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (1) – (5) en dimension $N = 3$ (au sens de la Définition 1.2.2).

(iii) Les Théorèmes 2.6.1 et 2.6.2 nous donnent deux résultats d'unicité sous des conditions très particulières sur les données et en dimension 2.

Dans le Chapitre 3, nous étudions l'existence d'une solution pour un système non linéaire de Boussinesq où l'on remplace le terme de convection $u \cdot \nabla b(\theta)$ et le laplacien par un terme de convection du type $\operatorname{div}(\Phi(\theta))$ et un opérateur non linéaire de diffusion dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div}(\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (17)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, \theta, \nabla\theta)) + \operatorname{div}(\Phi(\theta)) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (18)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (19)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (20)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (21)$$

Dans ce système, b est un graphe défini sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ monotone et qui vérifie $b^{-1} \in C^0(\mathbb{R})$. De plus, la fonction $a(x, s, \xi)$ est monotone et coercive par rapport à ξ . La fonction Φ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^2 . La donnée initiale b_0 appartient à $L^1(\Omega)$. La fonction F vérifie une hypothèse de croissance comme dans le second chapitre. L'originalité du travail que nous présentons ici résulte du fait que la fonction θ vérifie une équation plus générale, mais sans le terme de convection $u \cdot \nabla b(\theta)$. Il s'agit de montrer que sous des conditions moins fortes sur b , notamment, pour une fonction b discontinue, il existe une solution en dimension 2 du système (17) – (21). Dans un premier temps, on donne la définition d'une solution faible-renormalisée du système (17) – (21). Un couple de fonctions (u, θ) définies sur $\Omega \times (0, T)$ est une solution faible-renormalisée du système (17) – (21) si :

$$u \in L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0 \text{ et } \theta \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

$$\frac{1}{n} \int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |\theta(x,t)| \leq 2n\}} a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta \, dx \, dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

u est solution faible de l'équation de Navier-Stokes ,

il existe $\beta_\theta \in L^1(Q)$ tel que $\beta_\theta \in b(\theta)$ presque partout dans Q et qui vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t \int_0^{\beta_\theta} S'(b^{-1}(r)) \, dr \, dx \, dt \\ & - \int_\Omega \varphi(0) \left(\int_0^{b_0} S'(b^{-1}(r)) \, dr \right) \, dx + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \varphi S'(\theta) \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta S''(\theta) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \left(\int_0^\theta \Phi'(\xi) S'(\xi) \, d\xi \right) \, dx \, dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta) |Du|^2 S'(\theta) \varphi \, dx \, dt, \end{aligned}$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ tel que S' est à support compact, et pour tout $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ tel que $S'(\theta)\varphi \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$.

On suppose que b vérifie de plus les hypothèses (3.8) et (3.10) du Chapitre 3, que l'opérateur a est plus régulier (satisfait les hypothèse (3.13)-(3.16) du Chapitre 3) et que la fonction F vérifie

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$. Alors :

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (17) – (21) (au sens de la définition ci-dessus).
- si $1 < 2\alpha < 3$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible-renormalisée du système (17) – (21) (au sens de la même définition).

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du système formellement équivalent (6) – (10) en dimension 3 ($N = 3$). Dans le système (6) – (10), on a la possibilité de passer à la limite dans le terme $\partial_i u_j \partial_j (\mu u_i)$ qui peut s'écrire sous la forme $\partial_i (\mu (u \cdot \nabla) u_i)$ (vis-à-vis des approximations). En utilisant le cadre des solutions renormalisées des problèmes paraboliques à données L^1 (voir [10] et [22]) ainsi que les théorèmes de compacité, (voir [30]), nous démontrons l'existence d'une solution faible du système formellement équivalent (6) – (10). On suppose que $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$, et que $2\alpha \in [0, \frac{5}{3}]$. On suppose que la fonction F vérifie

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et que b est une fonction lipschitzienne. Le Théorème 4.3.1 nous donne :

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible du système (6) – (10) (au sens de la Définition 4.2.1).
- si $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible du système (6) – (10) (au sens de la Définition 4.2.1).

Chapitre 1

Étude d'un système non linéaire de Boussinesq à second membre borné dans L^∞

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence d'une solution faible-renormalisée pour un système non linéaire de type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.3)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.4)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.5)$$

où Ω est un ouvert, lipschitzien et borné de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$. On pose $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$. Les inconnues sont le champ de vitesse $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b \text{ est une fonction de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } b(0) = 0 \quad (1.6)$$

$$b'(r) \geq \alpha' \forall r \in \mathbb{R}, \text{ pour une constante } \alpha' > 0 \quad (1.7)$$

$$\mu \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ telle que } m_0 \leq \mu(s) \leq m_1, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

où m_0 et m_1 sont des constantes vérifiant $0 < m_0 \leq m_1$

$$F \text{ est une fonction continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \text{ et bornée} \quad (1.9)$$

$$u_0 \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} u_0 = 0, \text{ et } u_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.10)$$

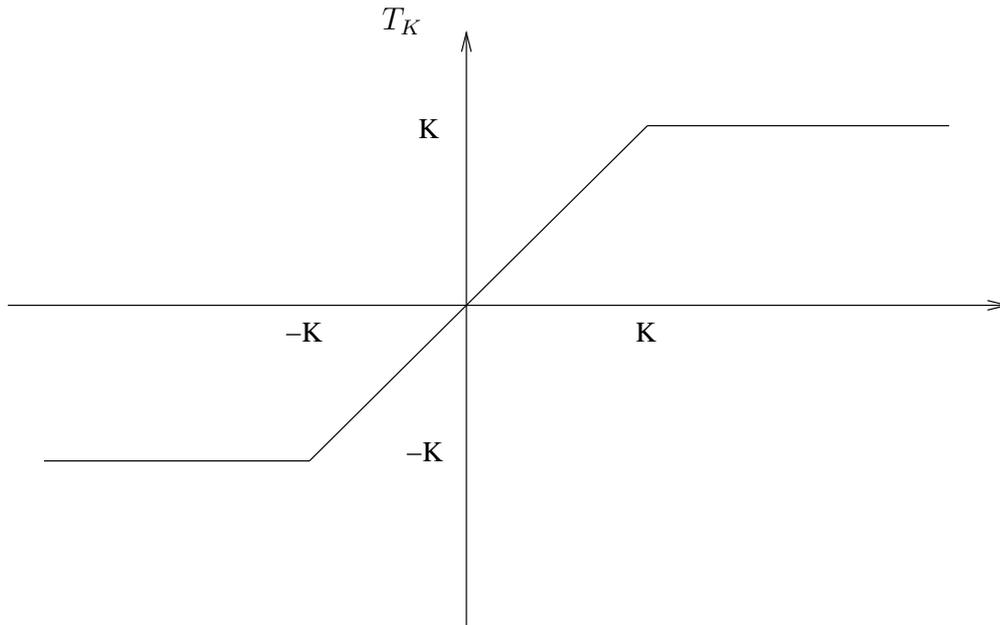
θ_0 est une fonction mesurable définie sur Ω telle que $b(\theta_0) \in L^1(\Omega)$. (1.11)

La difficulté principale concernant l'existence d'une solution pour le système (1.1) – (1.5) est due à l'équation (1.2) et au couplage. Si u est une solution variationnelle de (1.1) ($u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$), le terme à droite de (1.2) appartient alors à $L^1(\Omega \times (0, T))$. Pour remédier à cette difficulté, on utilise la technique des solutions renormalisées. Cette notion a été introduite par P.-L. Lions et R.-J. Di Perna [19] pour l'étude des équations de Boltzmann (voir aussi P.-L. Lions [25] pour quelques applications à des modèles de mécanique des fluides). Cette notion a été adaptée à une version parabolique de (1.2) – (1.5) par D. Blanchard, et H. Redwane dans [9]. Ce chapitre est composé de 4 sections, dans la section 2, on donne la définition des espaces fonctionnels de Navier-Stokes ainsi que la définition d'une solution faible-renormalisée de (1.1) – (1.5). Dans la section 3, on suppose que b' est localement lipschitzienne, on adapte alors les techniques usuelles des équations de Navier-Stokes [32] avec celles des solutions renormalisées pour prouver l'existence d'une solution faible de l'équation (1.1) et une solution renormalisée de l'équation (1.2). Dans la dernière section, on introduit un problème approché du système (1.1) – (1.5). Le travail établi dans la Section 3 nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution faible-renormalisée de ce système. Enfin, on passe à la limite dans le système approché pour déduire l'existence d'une solution faible-renormalisée du système couplé.

1.2 Définitions et rappels

On note T_K la fonction troncature à la hauteur K ($K \geq 0$) définie par :

$$T_K(r) = \min(K, \max(r, -K)).$$



Pour toute partie A de Ω , on note χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A .

On rappelle les espaces fonctionnels classiques pour les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} C_\sigma^\infty(\Omega) &= \{u \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N); \operatorname{div} u = 0\}, \\ L_\sigma^p(\Omega) &= \text{fermeture de } C_\sigma^\infty(\Omega) \text{ dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ H_\sigma^1(\Omega) &= \text{fermeture de } C_\sigma^\infty(\Omega) \text{ dans } H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ L_\sigma^p(Q) &= L^p(0, T; L_\sigma^p(\Omega)). \end{aligned}$$

avec $p \geq 1$.

On remarque que la pression p peut être éliminée du système (1.1) – (1.5), ceci grâce au lemme de Rham [16] : si $\langle q, w \rangle = 0$ pour tout $w \in H_\sigma^1(\Omega)$ alors il existe une distribution p telle que $q = -\nabla p$. Dans la suite, nous étudions le système suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (1.12)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (1.14)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.15)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.16)$$

Pour introduire la notion d'une solution faible-renormalisée du système ((1.12)–(1.16)), on considère les deux formes bilinéaire et trilinéaire suivantes :

$$a_\theta(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \mu(\theta) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

$$d(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx = \int_\Omega (u \cdot \nabla)v \cdot w dx,$$

$\forall u, v \in H_\sigma^1(\Omega), w \in H_\sigma^1(\Omega), \theta$ est une fonction mesurable.

Lemme 1.2.1. *La forme bilinéaire a_θ est continue et coercive dans $H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega)$ pour presque tout $t \in [0, T]$.*

Preuve du Lemme 1.2.1.

Sachant que μ est bornée, il est facile de vérifier que a_θ est continue, d'après l'inégalité de Korn, a_θ est coercive, autrement dit, $a_\theta(u, u) \geq m_0 \|u\|_{H_\sigma^1(\Omega)}^2$.

Lemme 1.2.2. *La forme trilinéaire d est continue et antisymétrique dans $H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega)$, autrement dit :*

$d(u, v, w) + d(u, w, v) = 0, \forall u, v, w \in H_\sigma^1(\Omega)$. En particulier, $d(u, v, v) = 0, \forall u, v \in H_\sigma^1(\Omega)$.

Preuve du Lemme 1.2.2.

Une démonstration détaillée est dans [31].

Définition 1.2.1 (Solution renormalisée). Soit G une fonction dans $L^1(Q)$, u dans $L^2(Q)$, et θ_0 une fonction mesurable telle que $b(\theta_0)$ appartient à $L^1(\Omega)$. Une fonction mesurable θ définie sur Q est dite solution renormalisée du problème :

$$P_1(G, \theta_0) \begin{cases} b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = G & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

si :

$$b(\theta) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)); \quad (1.17)$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0; \quad (1.18)$$

$$\int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |b(\theta)(x,t)| \leq n+1\}} b'(\theta) |\nabla \theta|^2 dx dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty; \quad (1.19)$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a

$$\frac{\partial S(b(\theta))}{\partial t} + \operatorname{div}(uS(b(\theta))) - \operatorname{div}(S'(b(\theta))\nabla \theta) + S''(b(\theta))b'(\theta)|\nabla \theta|^2 = GS'(b(\theta)) \quad (1.20)$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$,

$$S(b(\theta))(t=0) = S(b(\theta_0)) \text{ dans } \Omega. \quad (1.21)$$

Remarque 1.2.3. L'équation (1.20) est obtenue en multipliant ponctuellement l'équation de $P_1(G, \theta_0)$ par $S'(b(\theta))$, on vérifie aisément que tous les termes de cette équation ont un sens dans $\mathcal{D}'(Q)$.

En effet, si $M > 0$ est telle que $\operatorname{supp}(S') \subset [-M, M]$, les propriétés de b impliquent que si $|b(\theta)| \leq M$, on aura :

$$|\theta| \leq K_M \quad \text{avec } K_M = \max\left(-b^{-1}(-M), b^{-1}(M)\right).$$

Ce qui nous permet de remplacer dans (1.20) les fonctions $b(\theta)$ et θ par $T_M(b(\theta))$ et $T_{K_M}(\theta)$ respectivement. De plus on a :

- $uS(b(\theta)) \in L^2(Q)$, puisque $u \in L^2(Q)$ et S est bornée partout,
- $S'(b(\theta))D\theta = S'(b(\theta))DT_{K_M}(\theta)$ presque partout dans Q et les régularités (1.18) entraînent alors que $S'(b(\theta))D\theta \in L^2(Q)$,
- $S''(b(\theta))b'(\theta)|D\theta|^2 = S''(b(\theta))b'(\theta)|DT_{K_M}(\theta)|^2$ presque partout dans Q , $S''(b(\theta))b'(\theta) \in L^\infty(Q)$ puisque :

$$|S''(b(\theta))b'(\theta)| \leq \|S''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \max_{r \in [-b^{-1}(-M), b^{-1}(M)]} |b'(r)| \quad \text{p.p. dans } Q,$$

les régularités (1.18) entraînent alors que $S''(b(\theta))b'(\theta)|D\theta|^2 \in L^1(Q)$,

- $GS'(b(\theta)) \in L^1(Q)$, puisque $G \in L^1(Q)$ et $S'(b(\theta)) \in L^\infty(Q)$

Ainsi tous les termes de l'équation (1.20) ont un sens dans $\mathcal{D}'(Q)$, nous remarquons aussi que l'équation (1.20) implique que le terme parabolique :

$$\frac{\partial S(b(\theta))}{\partial t} \in L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

On vérifiera plus tard que $S(b(\theta)) \in C^0([0, T]; L^1(\Omega))$. L'équation (1.21) a un sens alors pour toute fonction $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact.

La définition suivante précise la notion de solution faible-renormalisée pour le système (1.12) – (1.16).

Définition 1.2.2. *Un couple de fonctions (u, θ) définies sur $\Omega \times (0, T)$ est une solution faible-renormalisée du système ((1.12) – (1.16)) si :*

$$u \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \quad (1.22)$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0 \text{ et } b(\theta) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad (1.23)$$

$$\int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |b(\theta)(x,t)| \leq n+1\}} b'(\theta) |D\theta|^2 dx dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad (1.24)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (1.25)$$

$$\langle u_t, w \rangle_{L_\sigma^2(\Omega)} + 2a_\theta(u, w) + d(u, u, w) = \langle F(\theta), w \rangle_{L_\sigma^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_\sigma^1(\Omega), \quad (1.26)$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a

$$\frac{\partial S(b(\theta))}{\partial t} + \operatorname{div}(uS(b(\theta))) - \operatorname{div}(S'(b(\theta))D\theta) + S''(b(\theta))b'(\theta)|D\theta|^2 = 2\mu(\theta)|Du|^2 S'(b(\theta)) \quad (1.27)$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$,

$$S(b(\theta))(t=0) = S(b(\theta_0)) \text{ dans } \Omega. \quad (1.28)$$

1.3 Existence et stabilité pour une fonction b plus régulière

Dans cette section, nous supposons de plus que :

$$b' \text{ est localement lipschitzienne} \quad (1.29)$$

En effet, cette hypothèse est nécessaire pour avoir l'unicité de la solution renormalisée et pouvoir appliquer un point fixe par la suite. Dans le cas où la fonction continue F est bornée, les propriétés des équations de Navier-Stokes ainsi que des solutions renormalisées vont nous permettre d'établir grâce à un théorème de point fixe, un résultat d'existence d'une solution du système (1.12) – (1.16) :

Théorème 1.3.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) et (1.29), alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système ((1.12)–(1.16)) (au sens de la Définition 1.2.2).*

Preuve du Théorème 1.3.1.

Nous utilisons une méthode de point fixe.

Soit θ un élément arbitraire de $L^1(Q)$, et considérons le problème suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (1.30)$$

$$\text{pour presque tout } t \in (0, T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (1.31)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.32)$$

$$u(t = 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.33)$$

Lemme 1.3.2. *On suppose vérifiées les hypothèses (1.8), (1.9), (1.10). La fonction θ est fixée dans $L^1(Q)$. Alors il existe une unique solution faible du problème ((1.30) – (1.33)) telle que $u \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Preuve du Lemme 1.3.2.

Puisque $\mu(\theta)$ est bornée, il suffit alors de refaire le même raisonnement que Luc Tartar (voir [31]).

Remarque 1.3.3. *Le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution faible du système ((1.30) – (1.33)) reste valable dans le cas où θ est fixée dans un espace telle que $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (voir [25] par exemple).*

On passe maintenant à l'analyse du second problème qui provient du système ((1.12) – (1.16)) :

$$b(\hat{\theta})_t + u \cdot \nabla b(\hat{\theta}) - \Delta \hat{\theta} = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (1.34)$$

$$\hat{\theta} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.35)$$

$$b(\hat{\theta})(t = 0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.36)$$

Lemme 1.3.4. *Soient $\theta \in L^1(Q)$ et u est l'unique solution du problème ((1.30) – (1.33)). Sous les hypothèses (1.6), (1.7), (1.8) et (1.11), il existe une unique solution renormalisée $\hat{\theta}$ du problème ((1.34) – (1.36)) telle que $T_K(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \forall K \geq 0$ et $b(\hat{\theta}) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.*

Preuve du Lemme 1.3.4.

La démonstration de l'existence est décomposée en 7 étapes :

Étape 1. Dans cette étape, on commence par régulariser le problème (1.34) – (1.36). Ce type d'approximation nous permet d'adapter les techniques des solutions renormalisées appliquées aux problèmes paraboliques à données L^1 .

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on définit :

$$b_\varepsilon(r) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(b(r)) + \varepsilon r \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Alors b_ε est une fonction lipschitzienne vérifiant $b_\varepsilon(0) = 0$, $b'_\varepsilon(r) \geq \varepsilon \forall r \in \mathbb{R}$ et,

$$b_\varepsilon(r) \longrightarrow b(r),$$

quand ε tend vers 0, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

$$f^\varepsilon \in C_0^\infty(Q) \text{ telle que } f^\varepsilon \longrightarrow 2\mu(\theta)|Du|^2 = f, \text{ fortement dans } L^1(Q), \quad (1.38)$$

quand ε tend vers 0.

$$\theta_0^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) \text{ telle que } b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \longrightarrow b(\theta_0) \text{ fortement dans } L^1(\Omega), \quad (1.39)$$

quand ε tend vers 0.

Nous considérons maintenant le problème approché suivant :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)_t + u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{dans } Q \quad (1.40)$$

$$\theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.41)$$

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.42)$$

Lemme 1.3.5. *Le problème (1.40) – (1.42) admet au moins une solution faible θ^ε dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.*

Preuve du Lemme 1.3.5.

La démonstration est basée sur des techniques d'approximation, sur des estimations à priori et des passages à la limite. Elle est divisée en deux étapes. Dans la première étape, on résout un problème approché associé à (1.40) – (1.42) où l'on approche u par u_j qui est dans $L^\infty(Q)$ et à divergence nulle. En effet, pour pouvoir multiplier le terme $u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ par la fonction test $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ par exemple, on a besoin de plus de régularité sur u . Dans la deuxième étape, on obtient des estimations uniformes en j et on passe à la limite quand j tend vers l'infini dans le problème approché de la première étape.

1. ★★ Pour $\varepsilon > 0$ et j fixés, nous proposons de résoudre :

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)_t + u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) - \Delta \theta_j^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{dans } Q \quad (1.43)$$

$$\theta_j^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.44)$$

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.45)$$

avec $u_j \in L^\infty_\sigma(Q)$ vérifiant

$$\|u_j\|_{L^\infty_\sigma(Q)} \leq j \text{ et } u_j \longrightarrow u \text{ dans } L^2_\sigma(Q) \text{ quand } j \text{ tend vers } +\infty. \quad (1.46)$$

(on trouve ce type d'approximation dans [25] et [17] par exemple).

Dans un premier temps, et dans le but de simplifier les notations, nous allons omettre les indices ε et j .

Le problème ((1.43) – (1.45)) peut être réécrit sous la forme :

$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q \quad (1.47)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.48)$$

$$b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.49)$$

Nous rappelons que b est lipschitzienne, et que $b' \geq c$, pour une constante $c > 0$, $f \in L^2(Q)$, $u \in L^\infty(Q)$, et $\operatorname{div} u = 0$.

Cependant, les hypothèses que nous avons ne suffisent pas pour appliquer un point fixe, car on ne trouve pas de convexe fermé, borné et stable. On introduit alors une régularisation de b comme suit :

$$b^\eta(r) = T_{\frac{1}{\eta}}(b(r)),$$

et on définit le problème approché suivant :

$$b(\theta)_t + \operatorname{div}(u \cdot b^\eta(\theta)) - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q \quad (1.50)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.51)$$

$$b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.52)$$

Pour $\eta > 0$ fixé, le problème approché ((1.50) – (1.52)) admet une solution.

En effet, on procède par un point fixe.

Pour $\bar{\theta} \in L^2(Q)$ et $u \in L^\infty(Q)$ fixés, on définit l'unique solution $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ du problème :

$$b(\theta)_t + \operatorname{div}(u \cdot b^\eta(\bar{\theta})) - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q \quad (1.53)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.54)$$

$$b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.55)$$

(voir par exemple [2]). Notons ψ l'application définie par :

$$\psi : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$$

$$\bar{\theta} \longrightarrow \theta = \psi(\bar{\theta})$$

$i\text{-}\psi$ est compacte :

on suppose que $\bar{\theta}$ est bornée dans $L^2(Q)$, on a :

$$b(\theta)_t - \Delta \theta = \bar{f} \text{ dans } Q.$$

avec $\bar{f} = f - \operatorname{div}(u \cdot b^n(\bar{\theta}))$. On a en particulier $\bar{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ car u et $b^n(\bar{\theta})$ sont dans $L^\infty(Q)$ et f appartient à $C_0^\infty(Q)$.

Nous obtenons pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial b(\theta)}{\partial t} \theta \, dx \, ds + \int_0^t \int_\Omega |D\theta|^2 \, dx \, ds \\ = \int_0^t \int_\Omega \bar{f} \theta \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (1.56)$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int_\Omega B(\theta)(t) \, dx - \int_\Omega B(\theta_0) \, dx \\ + \int_0^t \int_\Omega |D\theta|^2 \, dx \, ds = \int_0^t \int_\Omega \bar{f} \theta \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (1.57)$$

où $B(r) = \int_0^r b'(s) s \, ds$ vérifie :

$$B(r) \geq c \frac{r^2}{2} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (1.58)$$

car ici, on a $b' \geq c$. En utilisant (1.57), (1.58), et l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \int_\Omega |\theta(t)|^2 \, dx + \int_0^t \|D\theta\|_{L^2(\Omega)}^2(s) \, ds \\ \leq \int_0^t \|\bar{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}(s) \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)}(s) \, ds + \int_\Omega B(\theta_0) \, dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|D\theta\|_{L^2(\Omega)}^2(s) \, ds \\ + \int_\Omega B(\theta_0) \, dx \end{aligned} \quad (1.59)$$

cela entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \int_\Omega |\theta(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^t \|D\theta\|_{L^2(\Omega)}^2(s) \, ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2(s) \, ds + \int_\Omega B(\theta_0) \, dx \end{aligned} \quad (1.60)$$

En utilisant (1.60), on déduit que θ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, le caractère lipschitzien de b implique :

$$b(\theta) \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.61)$$

$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t}$ étant bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, l'estimation (1.61) et un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4), nous permettent de conclure que :

$$b(\theta) \text{ est compacte dans } L^2(Q)$$

D'après les propriétés de b , nous avons :

$$|\theta_n - \theta_m| \leq \frac{1}{c} |b(\theta_n) - b(\theta_m)|,$$

alors

$$\theta \text{ est compacte dans } L^2(Q) \tag{1.62}$$

ii-Montrons que ψ est continue :

Soient $\bar{\theta} \in L^2(Q)$ et $\bar{\theta}_n$ une suite de $L^2(Q)$ telles que :

$$\bar{\theta}_n \longrightarrow \bar{\theta} \text{ fortement dans } L^2(Q), \tag{1.63}$$

quand n tend vers $+\infty$. On pose :

$$\theta_n = \psi(\bar{\theta}_n) \text{ et } \theta = \psi(\bar{\theta}).$$

Pour $\eta > 0$ et n fixés, nous avons :

$$b(\theta_n)_t + \operatorname{div}(u \cdot b^\eta(\bar{\theta}_n)) - \Delta \theta_n = f \text{ dans } Q. \tag{1.64}$$

$\bar{\theta}_n$ est bornée dans $L^2(Q)$ d'après (1.63). On utilise le résultat de compacité (1.62), on en déduit que :

$$\theta_n \text{ est compacte dans } L^2(Q).$$

Il existe une fonction α dans $L^2(Q)$ telle que :

$$\theta_n \longrightarrow \alpha \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

à une sous-suite près, quand n tend vers $+\infty$. b étant continue et lipschitzienne, on obtient alors :

$$b(\theta_n) \longrightarrow b(\alpha) \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$.

De même, (1.63) implique que :

$$b^\eta(\bar{\theta}_n) \longrightarrow b^\eta(\bar{\theta}) \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$. On passe maintenant à la limite dans (1.64), quand n tend vers $+\infty$, η étant fixé, on obtient :

$$b(\alpha)_t + \operatorname{div}(u \cdot b^\eta(\bar{\theta})) - \Delta \alpha = f \text{ dans } Q,$$

au sens faible. Par définition de θ_n , on a :

$$b(\theta_n)(t = 0) = b(\theta_0) \text{ dans } \Omega.$$

On suit le même raisonnement ci-dessus. En appliquant un lemme de type Aubin (Simon [30]), on montre que :

$$b(\theta_n) \text{ demeure dans un compact de } C^0(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Alors, $b(\theta_n)(t = 0)$ converge fortement vers $b(\alpha)(t = 0)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, quand n tend vers l'infini. On en déduit que $b(\alpha)(t = 0) = b(\theta_0)$ dans Ω . L'unicité de la solution du problème (1.53) – (1.55) implique que $\alpha = \theta$ et que par la suite :

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$.

iii-Montrons qu'il existe une boule B de $L^2(Q)$ telle que $\psi(B) \subset B$: soit $\bar{\theta} \in B_{L^2(Q)}(0, R)$, où R est nombre réel strictement positif.

En utilisant (1.57), et grâce à l'inégalité de Poincaré, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} B(\theta)(t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D\theta|^2 dx ds & (1.65) \\ & \leq \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}(s) \|\theta\|_{L^2(\Omega)}(s) ds + \int_{\Omega} B(\theta_0) dx \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot b^\eta(\bar{\theta}) \nabla \theta dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \|D\theta\|_{L^2(\Omega)}^2(s) ds \\ & \quad + \|u\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|b^\eta(\bar{\theta})\|_{L^2(\Omega)}(s) \|D\theta\|_{L^2(\Omega)}(s) ds + \int_{\Omega} B(\theta_0) dx. \end{aligned}$$

Pour $\eta > 0$ fixé, nous avons :

$$\|b^\eta(\bar{\theta})\|_{L^\infty(Q)} \leq c_1 \text{ où } c_1 \text{ est une constante indépendante de } \bar{\theta}. \quad (1.66)$$

A partir de (1.58), (1.65), (1.66), et par une application de l'inégalité de Young, nous obtenons en particulier :

$$\|\theta\|_{L^2(Q)} \leq c_2 \text{ où } c_2 \text{ est une constante indépendante de } \bar{\theta}, \quad (1.67)$$

ce qui nous assure l'existence d'une boule B de $L^2(Q)$ telle que $\psi(B) \subset B$. D'après (i), (ii), (iii), l'application du théorème du point fixe de Schauder, et

la définition de ψ , on conclut qu'il existe une solution θ^n du problème approché (1.50) – (1.52) :

$$b(\theta^n)_t + \operatorname{div}(u \cdot b^n(\theta^n)) - \Delta \theta^n = f \quad \text{dans } Q \quad (1.68)$$

$$\theta^n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (1.69)$$

$$b(\theta^n)(t = 0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.70)$$

On multiplie l'équation (1.68) par la fonction test θ^n , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B(\theta^n)(t) dx - \int_{\Omega} B(\theta_0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D\theta^n|^2 dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b^n(\theta^n) \theta^n dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f \theta^n dx ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

On montre que :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b^n(\theta^n) \theta^n dx ds = 0. \quad (1.71)$$

En effet, on pose $B^n(r) = \int_0^r (b^n)'(s) s ds$ et on note par T_K la fonction troncature à la hauteur K ($K \geq 0$) définie par :

$$T_K(r) = \min(K, \max(r, -K)).$$

Puisque $\operatorname{div} u = 0$, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \nabla B^n(T_K(\theta^n)) dx ds = 0,$$

pour tout entier K . De plus, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \nabla B^n(T_K(\theta^n)) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} u \nabla b^n(T_K(\theta^n)) T_K(\theta^n) dx ds.$$

En faisant tendre K vers l'infini dans le terme à droite de l'égalité ci-dessus, on obtient le résultat souhaité (1.71). On refait à peu près les mêmes estimations que (1.59), (1.60) et (1.61), on déduit que :

$$b(\theta^n) \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.72)$$

On a $u \nabla b^n(\theta^n) = u (b^n)'(\theta^n) \nabla \theta^n$, on a aussi $|(b^n)'(\theta^n)| \leq |b'(\theta^n)|$, donc majorée par une constante. Alors $u \nabla b^n(\theta^n)$ est borné dans $L^2(Q)$. On en déduit que :

$$\frac{\partial b(\theta^n)}{\partial t} \text{ est borné dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (1.73)$$

Les estimation (1.72), (1.73) et un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4), nous permettent de conclure que :

$$b(\theta^\eta) \text{ est compacte dans } L^2(Q)$$

D'après les propriétés de b , nous avons :

$$|\theta_n - \theta_m| \leq \frac{1}{c} |b(\theta_n) - b(\theta_m)|,$$

alors

$$\theta^\eta \text{ est compacte dans } L^2(Q). \quad (1.74)$$

Il existe alors une fonction θ dans $L^2(Q)$ telle que :

$$\theta^\eta \longrightarrow \theta \text{ fortement dans } L^2(Q), \quad (1.75)$$

à une sous-suite près, quand η tend vers 0. le caractère continu et lipschitzien de b implique :

$$b(\theta^\eta) \longrightarrow b(\theta) \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand η tend vers 0.

Comme b est continue, on a :

$$b^\eta(\theta^\eta) \longrightarrow b(\theta) \text{ p.p. dans } Q \quad (1.76)$$

quand η tend vers 0.

L'inégalité $|b^\eta(\theta^\eta)| \leq |\theta^\eta|$, ainsi que l'estimation (1.75), nous permettent d'obtenir :

$$b^\eta(\theta^\eta) \text{ est bornée uniformément en } \eta \text{ dans } L^2(Q). \quad (1.77)$$

En utilisant (1.76), (1.77), nous déduisons que :

$$b^\eta(\theta^\eta) \longrightarrow b(\theta) \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand η tend vers 0.

On peut passer maintenant à la limite dans (1.68), quand η tend vers 0.

Pour justifier la condition initiale (1.49), on utilise les deux estimations (1.72) et (1.73). On applique alors un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4) pour déduire que $b(\theta^\eta)$ demeure dans un compact de $C^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$, donc $b(\theta_0) = b(\theta^\eta)(t=0)$ converge vers $b(\theta)(t=0)$ fortement dans $H^{-1}(\Omega)$, d'où la condition initiale (1.49). On peut donc conclure que le problème (1.47) – (1.49) admet au moins une solution θ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ qui vérifie $b(\theta) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

2. ** Pour $\varepsilon > 0$ fixé :

Le but de cette étape est d'obtenir des estimations uniformes en j et de passer à la limite quand j tend vers l'infini dans le problème approché (1.43) – (1.45) de la première étape.

On rappelle que pour $\varepsilon > 0$ et j fixés, le problème (1.43) – (1.45) admet au moins une solution $\theta_j^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

On multiplie la première équation (1.43) par θ_j^ε , on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)}{\partial t} \theta_j^\varepsilon dx ds + \int_0^t \int_\Omega |D\theta_j^\varepsilon|^2 dx ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \theta_j^\varepsilon dx ds = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon \theta_j^\varepsilon dx ds. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Comme $\operatorname{div} u_j = 0$, on refait le même raisonnement que (1.71) pour avoir :

$$\int_0^t \int_\Omega u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \theta_j^\varepsilon dx ds = 0.$$

On procède de la même façon que dans (1.65), on obtient, pour $\varepsilon > 0$ fixé que :

$$\theta_j^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.79)$$

indépendamment de j . Pour $\varepsilon > 0$ fixé, b_ε étant lipschitzienne, on a :

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.80)$$

indépendamment de j , pour $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque $u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \in L^2(Q)$, on multiplie cette fois-ci l'équation (1.43) par $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)}{\partial t} b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) dx ds + \int_0^t \int_\Omega b'_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) |D\theta_j^\varepsilon|^2 dx ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) dx ds = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) dx ds. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Comme $\operatorname{div} u_j = 0$, on refait toujours le même raisonnement que (1.71), on obtient :

$$\int_0^t \int_\Omega u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) dx ds = 0,$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega |b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)|^2 dx \\ & + \int_0^t \int_\Omega b'_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) |D\theta_j^\varepsilon|^2 dx ds = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) dx ds, \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(t)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |f^\varepsilon(s)|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(s)|^2 dx ds,$$

finalment, on aura :

$$\int_{\Omega} |b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(t)|^2 dx \leq C_1 + C_2 \int_0^t \int_{\Omega} |b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(s)|^2 dx ds, \quad (1.82)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes qui dépendent uniquement de ε .

L'estimation (1.82) et le lemme de Gronwall permettent de déduire que pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (1.83)$$

indépendamment de j .

Puisque $b_\varepsilon'(r) \geq \varepsilon$, $\forall r \in \mathbb{R}$, alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

$$\theta_j^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (1.84)$$

et

$$\theta_j^\varepsilon \rightharpoonup \theta^\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(Q), \quad (1.85)$$

à une sous-suite près, quand j tend vers $+\infty$.

On sait que :

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)}{\partial t} = \Delta \theta_j^\varepsilon - u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) + f^\varepsilon \text{ dans } Q$$

* $\Delta \theta_j^\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (voir (1.79)).

* D'après (1.46), et (1.80), $u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(Q)$.

* f^ε appartient en particulier à $L^2(Q)$, pour $\varepsilon > 0$ fixé.

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (1.86)$$

En utilisant (1.80), (1.86), l'application du lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4) à $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$ implique que :

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \text{ est compacte dans } L^2(Q),$$

on en déduit,

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \longrightarrow \chi_\varepsilon \text{ fortement dans } L^2(Q), \quad (1.87)$$

à une sous-suite près, quand j tend vers $+\infty$.

D'après (1.85), (1.87), et un résultat classique de Minty (voir par exemple [24]), on obtient :

$$\chi_\varepsilon = b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \quad (1.88)$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

$$b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \longrightarrow b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ fortement dans } L^2(Q), \quad (1.89)$$

quand j tend vers $+\infty$.

Grâce à (1.79) et (1.85), on déduit que :

$$\theta_j^\varepsilon \rightharpoonup \theta^\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (1.90)$$

quand j tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on passe à la limite quand j tend vers l'infini dans l'équation approché (1.43), en utilisant les résultats de convergence (1.89) et (1.90). La principale difficulté est de passer à la limite dans le terme $u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$. D'après (1.80) et (1.89), on a :

$$\nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ faiblement dans } L^2(Q),$$

à une sous-suite près, quand j tend vers $+\infty$. De plus, on a :

$$u_j \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

quand j tend vers $+\infty$, alors :

$$u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \rightharpoonup u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ faiblement dans } L^1(Q),$$

quand j tend vers $+\infty$. On peut donc passer à la limite dans chaque terme de l'équation approché (1.43). Il nous reste plus qu'à vérifier la condition initiale (1.42). Nous rappelons d'abord que $u_j \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) = \operatorname{div}(u_j \cdot b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon))$, car $\operatorname{div} u_j = 0$. On sait que $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ pour $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$ est bornée dans $L^4(Q)$ pour $\varepsilon > 0$ fixé, car on est en dimension 2 ($N = 2$). u_j étant borné dans $L^2(Q)$, on en déduit que :

$$u_j \cdot b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon) \text{ est borné dans } L^{\frac{4}{3}}(Q),$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé. D'après les estimations ci-dessus, on conclut que :

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega)), \quad (1.91)$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé. D'après (1.84), (1.91) et un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4), on déduit que $b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)$ demeure dans un compact de $C^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$, donc $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) = b_\varepsilon(\theta_j^\varepsilon)(t = 0)$ converge vers $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t = 0)$ fortement dans $H^{-1}(\Omega)$, d'où la condition initiale (1.42). On en déduit que pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\theta^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ est solution du problème (1.40) – (1.42).}$$

Étape 2. ESTIMATIONS A PRIORI. Les estimations qui découleront de cette étape, sont liées aux techniques usuelles de solutions renormalisées appliquées aux problèmes

de type (1.40)-(1.42), (voir par exemple [9]). On prend $T_K(\theta^\varepsilon)$ comme fonction test dans (1.40), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2 dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(\theta^\varepsilon) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) dx ds + \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) dx \end{aligned} \quad (1.92)$$

pour tout t dans $(0, T)$, et où

$$B_K^\varepsilon(z) = \int_0^z b'_\varepsilon(s) T_K(s) ds$$

En utilisant $\operatorname{div} u = 0$, la formule de Stokes et la condition (1.41) entraînent :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(\theta^\varepsilon) dx ds = 0 \quad (1.93)$$

D'après la définition de B_K^ε , on a $0 \leq B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \leq K|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)|$ p.p. dans Ω , ce qui implique :

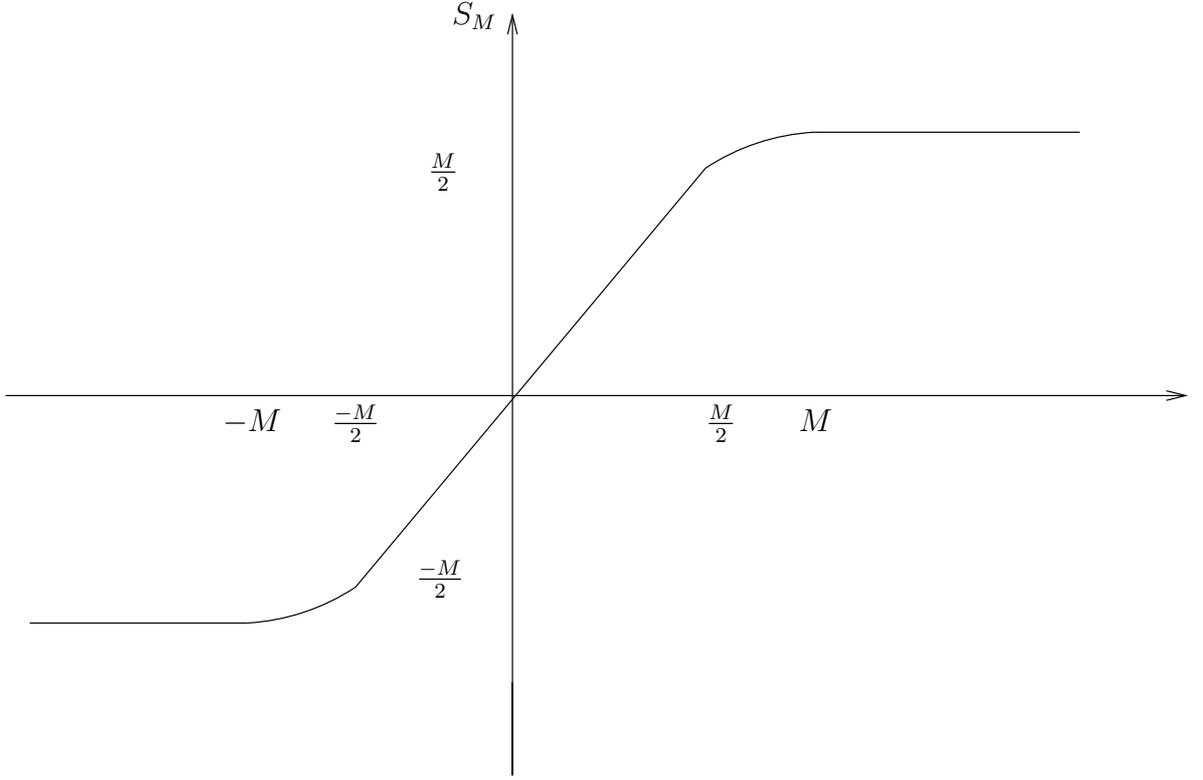
$$0 \leq \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) dx \leq K \| |b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)| \|_{L^1(\Omega)}.$$

Les propriétés de f^ε et $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)$, ainsi que les égalités (1.92) et (1.93) permettent de déduire que :

$$T_K(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ indépendamment de } \varepsilon, \quad (1.94)$$

pour tout $K \geq 0$.

Pour $M > 0$ fixé, soit S_M une fonction croissante de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
 $\operatorname{supp} S' \subset [-M, M]$, $S'_M = 1$ sur $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$ et $S_M(0) = 0$.



D'après la définition de b_ε , il est clair que

$$\{|b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq M\} \subset \{|b(\theta^\varepsilon)| \leq M\} = \{b^{-1}(-M) \leq \theta^\varepsilon \leq b^{-1}(M)\}$$

pour $\varepsilon < \frac{1}{M}$.

Nous procédons de la même façon que dans la remarque (1.2.3), en remplaçant la fonction S par S_M , et le problème $P_1(G, \theta_0)$ par le problème (1.40)–(1.42), on obtient alors :

$$(S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)))_{\varepsilon < \frac{1}{M}} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.95)$$

et

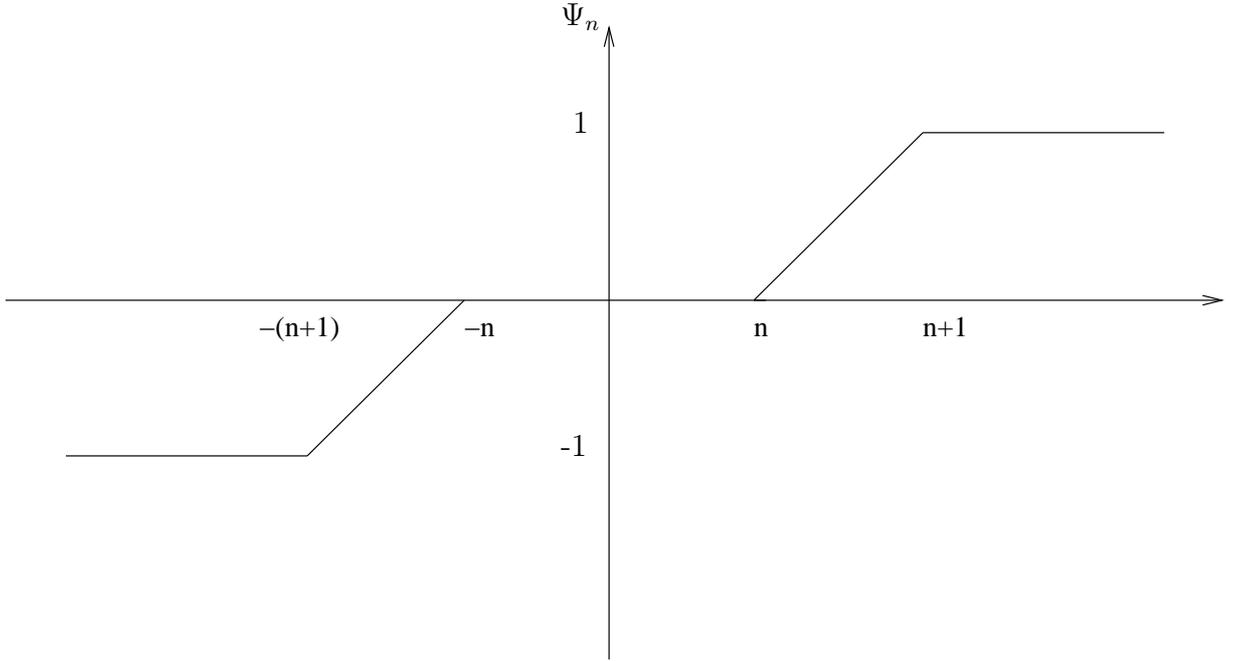
$$\left(\frac{\partial S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}\right)_{\varepsilon < \frac{1}{M}} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad (1.96)$$

On applique un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 4) qui nous permet de conclure que pour tout $M > 0$ et pour tout $\varepsilon < \frac{1}{M}$:

$$S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ est dans un compact de } L^2(Q). \quad (1.97)$$

On définit la fonction lipschitzienne bornée Ψ_n par :

$$\Psi_n(r) = T_{n+1}(r) - T_n(r)$$



et la fonction lipschitzienne positive $\overline{\Psi}_n$ par :

$$\overline{\Psi}_n(r) = \int_0^r \Psi_n(s) ds.$$

On choisit $\Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ comme fonction test dans (1.40) – (1.42). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \overline{\Psi}_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t)) dx + \int_0^t \int_{\Omega} D\theta^\varepsilon D\Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f^\varepsilon \Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds + \int_{\Omega} \overline{\Psi}_n(b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)) dx \end{aligned} \quad (1.98)$$

pour tout t dans $(0, T)$.

Étape 3. Nous commençons par démontrer les résultats de convergence à une sous-suite près :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} \text{ sur } Q, \quad (1.99)$$

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } b(\hat{\theta}) \text{ sur } Q, \quad (1.100)$$

$$T_K(\theta^\varepsilon) \text{ converge faiblement vers } T_K(\hat{\theta}) \text{ sur } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (1.101)$$

$$\Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ converge faiblement vers } \Psi_n(b(\hat{\theta})) \text{ sur } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.102)$$

quand ε tend vers 0 pour tout $K > 0$ et pour chaque $n \geq 1$.

On démontre via un procédé de construction de suite diagonale, qu'il existe une sous-suite, toujours notée par $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ et qui vérifie :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } \chi \text{ sur } Q,$$

où χ est une fonction mesurable.

On considère désormais que M est un entier, on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) = v_n$.

D'après (1.97), on sait que :

$$\{S_M(v_n)/n > M\} \subset C_M,$$

C_M étant un compact de $L^2(Q)$.

On prend $M = 1$, il existe une sous suite $(v_{n_k}^1)_k$ de $(v_n)_n$ telle que la suite $(S_1(v_{n_k}^1))_k$ converge presque partout sur Q .

Pout $M = 2$, il suffit de remarquer que :

$$(S_2(v_{n_k}^1))_{n_k > 2} \subset \{S_2(v_n)/n > 2\} \subset C_2.$$

Comme pour le cas où M est égale à 1, on extrait une sous-suite $(v_{n_k}^2)_k$ de $(v_{n_k}^1)_{n_k > 2}$ telle que la suite $(S_2(v_{n_k}^2))_k$ converge presque partout sur Q ,

et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on puisse construire une suite diagonale $(v_{n_k}^{n_k+1})_k$, telle que la suite $(S_M(v_{n_k}^{n_k+1}))_k$ converge presque partout sur Q , pour tout entier M .

On conclut que pour tout entier M , il existe une sous-suite toujours notée par $(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ telle que :

$$S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon > 0} \text{ converge presque partout sur } Q, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

La fonction T_M étant continue, pour tout $M > 0$ fixé, on obtient :

$$T_{\frac{M}{2}}(S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) \text{ converge presque partout sur } Q \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'après la définition de S_M , il est facile de vérifier que :

$$T_{\frac{M}{2}}(S_M)(t) = T_{\frac{M}{2}}(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que pour tout $M > 0$ fixé :

$$T_{\frac{M}{2}}(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ converge presque partout sur } Q \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On applique à présent un lemme de F. Murat (voir [26]), il existe une sous-suite toujours notée par $(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$, il existe une fonction mesurable χ définie sur Q telle que :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } \chi \text{ sur } Q.$$

On sait que b_ε^{-1} est continue sur \mathbb{R} , et converge partout vers b^{-1} , par conséquent :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} = b^{-1}(\chi) \text{ sur } Q, \quad (1.103)$$

et que :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } b(\hat{\theta}) \text{ sur } Q,$$

quand ε tend vers 0.

En utilisant la convergence (1.103), et le fait que $T_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, indépendamment de ε , on conclut que pour tout $K > 0$ fixé :

$$T_K(\theta^\varepsilon) \text{ converge faiblement vers } T_K(\hat{\theta}) \text{ sur } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

On utilise $T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ comme fonction test dans (1.40)-(1.42), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \overline{T_K}(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))(t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f^\varepsilon T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds + \int_{\Omega} \overline{T_K}(b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)) dx \end{aligned} \quad (1.104)$$

où $\overline{T_K}(r) = \int_0^r T_K(s) ds$.

Sachant que $\operatorname{div} u = 0$, on utilise la formule de Stokes et la condition (1.41) pour obtenir :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds = 0 \quad (1.105)$$

On passe maintenant à la limite inférieure dans l'équation (1.104) quand ε tend vers 0, en utilisant (1.105), (1.100), (1.38) et (1.39), on obtient :

$$\int_{\Omega} \overline{T_K}(b(\hat{\theta}))(t) dx \leq K(\|f\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

D'après l'inégalité précédente, et grâce à la définition de $\overline{T_K}$, on en déduit que :

$$K \int_{\Omega} |b(\hat{\theta})(t)| dx \leq \frac{3}{2} K^2 \operatorname{mes}(\Omega) + K(\|f\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)})$$

pour presque tout $t \in [0, T]$, ce qui implique

$$b(\hat{\theta}) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)).$$

On passe maintenant à la limite dans (1.98) quand ε tend vers 0. Comme $\operatorname{div} u = 0$, on utilise la formule de Stokes et la condition (1.41) pour obtenir :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \Psi_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds = 0$$

il en découle :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx dt \leq \int_0^t \int_{\Omega} f \Psi_n(b(\hat{\theta})) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \overline{\Psi}_n(b(\theta_0)) dx. \quad (1.106)$$

Comme Ψ_n et $\overline{\Psi_n}$ convergent presque partout vers zéro où

$$|\Psi_n(b(\hat{\theta}))| \leq 1 \text{ et } |\overline{\Psi_n}(b(\theta_0))| \leq |b(\theta_0)| \in L^1(\Omega),$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'obtenir :

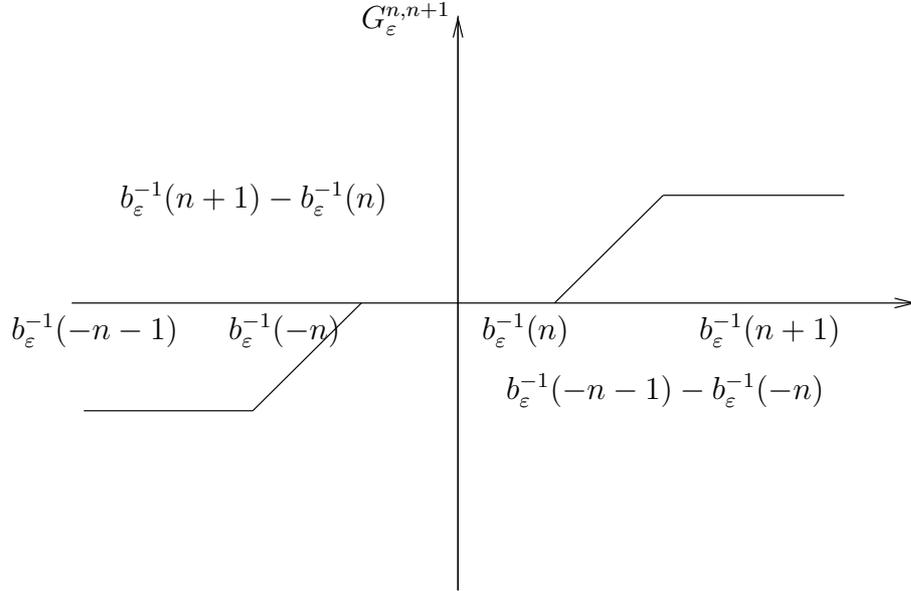
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx dt = 0 \quad (1.107)$$

on va prouver maintenant que :

$$\begin{aligned} (b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon))^{\frac{1}{2}} |D\theta^\varepsilon| \chi_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} &\text{ converge faiblement dans } (L^2(Q))^N \\ \text{vers } (b'(\hat{\theta}))^{\frac{1}{2}} |D\hat{\theta}| \chi_{\{n \leq |b(\hat{\theta})| \leq n+1\}} &\text{ quand } \varepsilon \text{ tend vers 0 pour tout } n. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Pour tout entier n , on définit une suite de fonctions lipschitziennes et continues par :

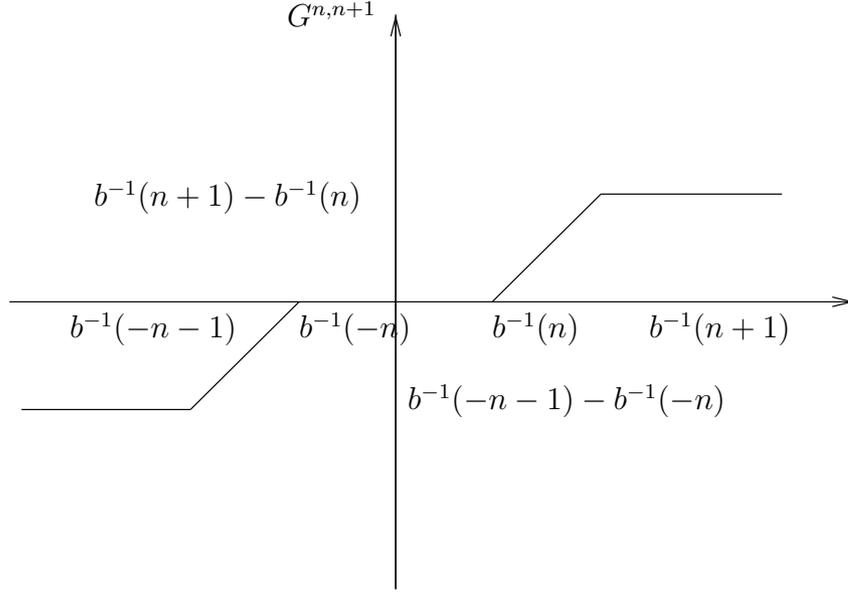
$$G_\varepsilon^{n,n+1}(r) = (T_{b_\varepsilon^{-1}(n+1)}(r) - T_{b_\varepsilon^{-1}(n)}(r))^+ - (T_{-b_\varepsilon^{-1}(-n-1)}(r) - T_{-b_\varepsilon^{-1}(-n)}(r))^-$$



Pour tout nombre réel r et pour tout entier n , $G_\varepsilon^{n,n+1}$ converge vers

$$G^{n,n+1}(r) = (T_{b^{-1}(n+1)}(r) - T_{b^{-1}(n)}(r))^+ - (T_{-b^{-1}(-n-1)}(r) - T_{-b^{-1}(-n)}(r))^-$$

quand ε tend vers zéro.



Sachant que $\text{supp}(G_\varepsilon^{n,n+1})' \subset [b^{-1}(-n-1), b^{-1}(n+1)]$ pour $\varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$, $\|G_\varepsilon^{n,n+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_n = \max\{b^{-1}(n+1), |b^{-1}(-n-1)|\}$ et $\|(G_\varepsilon^{n,n+1})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$. On en déduit que la suite $DG_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)$ qui s'identifie à $(G_\varepsilon^{n,n+1})'(\theta^\varepsilon)DT_{K_n}(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(Q)^N$ pour $\varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$. Grâce à la convergence de b_ε , il existe une sous suite de $G_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)$ notée de la même façon telle que $DG_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)$ converge faiblement vers $DG^{n,n+1}(\hat{\theta})$ dans $L^2(Q)^N$ quand ε tend vers zéro. D'après les définitions de $G_\varepsilon^{n,n+1}$ et de $G^{n,n+1}$, on a pour $\varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$

$$(b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon))^{\frac{1}{2}} |D\theta^\varepsilon| \chi_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} = (b'_\varepsilon(G_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)))^{\frac{1}{2}} DG_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon) \text{ p.p. dans } Q.$$

La continuité de b' sur \mathbb{R} entraîne que :

$$(b'_\varepsilon(G_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)))^{\frac{1}{2}} \rightarrow (b'(G^{n,n+1}(\hat{\theta})))^{\frac{1}{2}} \text{ p.p. dans } Q,$$

quand ε tend vers zéro, où

$$|(b'_\varepsilon(G_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)))^{\frac{1}{2}}| \leq \max_{[b^{-1}(-n-1), b^{-1}(n+1)]} ((b')^{\frac{1}{2}}(r) + 1) \text{ p.p. dans } Q.$$

En tenant compte de la convergence de $DG_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)$ vers $DG^{n,n+1}(\hat{\theta})$ dans $L^2(Q)^N$, on en déduit que pour tout entier n :

$$(b'_\varepsilon(G_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon)))^{\frac{1}{2}} DG_\varepsilon^{n,n+1}(\theta^\varepsilon) \rightharpoonup (b'(G^{n,n+1}(\hat{\theta})))^{\frac{1}{2}} DG^{n,n+1}(\hat{\theta})$$

faiblement dans $L^2(Q)^N$, quand ε tend vers zéro. Et

$$(b'(G^{n,n+1}(\hat{\theta})))^{\frac{1}{2}} DG^{n,n+1}(\hat{\theta}) = (b'(\hat{\theta}))^{\frac{1}{2}} D\hat{\theta} \chi_{\{n \leq |b(\hat{\theta})| \leq n+1\}} \text{ p.p. dans } Q.$$

Cela implique que :

$$\int_0^t \int_{\{n \leq |b(\hat{\theta})| \leq n+1\}} b'(\hat{\theta}) |D\hat{\theta}|^2 dx dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx dt$$

grâce à l'estimation (1.107), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\{n \leq |b(\hat{\theta})| \leq n+1\}} b'(\hat{\theta}) |D\hat{\theta}|^2 dx dt = 0 \quad (1.109)$$

Étape 4. On définit une régularisation spécifique de $T_K(b(\hat{\theta}))$ (pour $K \geq 0$ fixé) par :
Soit $(v_0^\mu)_\mu$ une suite de fonctions définie sur Ω telle que :

$$v_0^\mu \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \forall \mu > 0, \quad (1.110)$$

$$\|v_0^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K \quad \forall \mu > 0, \quad (1.111)$$

$$v_0^\mu \rightarrow T_K(b(\theta_0)) \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \frac{1}{\mu} \|Dv_0^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \text{ quand } \mu \rightarrow +\infty. \quad (1.112)$$

(voir par exemple [7] pour la preuve de l'existence de telle suite $(v_0^\mu)_\mu$).
D'après (1.7), on a :

$$DT_K(b(\hat{\theta})) = T'_K(b(\hat{\theta}))b'(\hat{\theta})DT_{\frac{K}{\alpha'}}(\hat{\theta}).$$

Puisque b est localement lipschitzienne et grâce à (1.101), on obtient :

$$T_K(b(\hat{\theta})) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \forall K \geq 0.$$

$\forall K \geq 0, \forall \mu > 0$, il existe une unique solution

$$(T_K(b(\hat{\theta})))_\mu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

du problème monotone :

$$\frac{\partial T_K(b(\hat{\theta}))_\mu}{\partial t} + \mu(T_K(b(\hat{\theta}))_\mu - T_K(b(\hat{\theta}))) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q) \quad (1.113)$$

$$T_K(b(\hat{\theta}))_\mu(t=0) = v_0^\mu \quad \text{dans } \Omega \quad (1.114)$$

((1.113)-(1.114)) implique que :

$$\frac{\partial T_K(b(\hat{\theta}))_\mu}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.115)$$

On se contentera ici de rappeler quelques résultats très importants (voir [6]) :

$$T_K(b(\hat{\theta}))_\mu \rightarrow T_K(b(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q, \text{ et dans } L^\infty(Q) \text{ faible } * \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} &\text{et fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ quand } \mu \text{ tend vers } +\infty \\ &\|T_K(b(\hat{\theta}))_\mu\|_{L^\infty(Q)} \leq \max(\|T_K(b(\hat{\theta}))\|_{L^\infty(Q)}; \|v_0^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq K \end{aligned} \quad (1.117)$$

pour tout μ et pour tout $K \geq 0$.

Lemme 1.3.6. *Soit $K \geq 0$ fixé, soit S une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, croissante telle que $S(r) = r$ pour $|r| \leq K$ et telle que S' soit à support compact, alors :*

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu \right\rangle ds dt \geq 0.$$

où le crochet \langle, \rangle représente le produit de dualité entre $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Preuve du Lemme 1.3.6.

Dans cette démonstration, nous nous inspirons des techniques de démonstration utilisées dans le cadre linéaire dans [7].

Soit $K \geq 0$ fixé. S' étant à support compact, nous avons :

$$S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q),$$

et

$$S(b(\hat{\theta})) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q).$$

On multiplie comme d'habitude l'équation du problème régularisé par $S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$, on vérifie aisément que :

$$\frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} \in L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Par définition de S , on a :

$$T_K(S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) = T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \quad \text{et} \quad T_K(S(b(\hat{\theta}))) = T_K(b(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q.$$

L'unicité de la solution du problème monotone implique que pour tout $\mu > 0$:

$$(T_K(S(b(\hat{\theta}))))_\mu = (T_K(b(\hat{\theta})))_\mu \text{ p.p dans } Q. \quad (1.118)$$

Pour ne pas alourdir les notations, on pose :

$$v^\varepsilon = S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ et } v = S(b(\hat{\theta})). \quad (1.119)$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu \right\rangle ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}, (T_K(v^\varepsilon) - (T_K(v))_\mu) \right\rangle ds dt. \end{aligned}$$

D'après (1.115), (1.118), et (1.119), on obtient :

$$\frac{\partial (T_K(v))_\mu}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset L^1(Q).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - (T_K(b(\hat{\theta})))_\mu \right\rangle ds dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial(v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu)}{\partial t}, (v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu) \right\rangle ds dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}, (v^\varepsilon - T_K(v^\varepsilon)) \right\rangle ds dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial(T_K(v))_\mu}{\partial t}, (v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu) dx ds dt.
\end{aligned}$$

Sachant que $\int_0^r (s - T_K(s)) ds = \frac{1}{2}|r - T_K(r)|^2$, et en appliquant un lemme de Murat [26], on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - (T_K(b(\hat{\theta})))_\mu \right\rangle ds dt \tag{1.120} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu|^2 dx dt - \frac{T}{2} \int_\Omega |v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu|^2(t=0) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |v^\varepsilon - T_K(v^\varepsilon)|^2 dx dt + \frac{T}{2} \int_\Omega |v^\varepsilon - T_K(v^\varepsilon)|^2(t=0) dx \\
&\quad + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial(T_K(v))_\mu}{\partial t}, (v^\varepsilon - (T_K(v))_\mu) dx ds dt.
\end{aligned}$$

Rappelons que $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \rightarrow b(\hat{\theta})$ p.p. dans Q , et que S est bornée, ce qui implique :

$$v^\varepsilon \rightarrow v \text{ fortement dans } L^2(Q) \text{ et dans } L^\infty(Q) \text{ faiblement } *,$$

quand ε tend vers 0.

On a également $v^\varepsilon(t=0) = S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))(t=0) = S(b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon))$ p.p. dans Q ,

or, $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \rightarrow b(\theta_0)$ fortement dans $L^1(\Omega)$, quand ε tend vers 0, on en déduit :

$$v^\varepsilon(t=0) \rightarrow S(b(\theta_0)) \text{ fortement dans } L^2(\Omega),$$

quand ε tend vers 0.

On fait tendre ε vers 0 dans (1.120), en utilisant les deux derniers résultats de convergence de v^ε et de $v^\varepsilon(t=0)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - (T_K(b(\hat{\theta})))_\mu \right\rangle ds dt \tag{1.121} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |v - (T_K(v))_\mu|^2 dx dt - \frac{T}{2} \int_\Omega |S(b(\theta_0)) - (T_K(v))_\mu(t=0)|^2 dx
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v - T_K(v)|^2 dx dt + \frac{T}{2} \int_{\Omega} |S(b(\theta_0)) - T_K(S(b(\theta_0)))(t=0)|^2 dx \\ + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial(T_K(v))_{\mu}}{\partial t}, (v - (T_K(v))_{\mu}) dx ds dt,$$

pour tout $\mu > 0$.

Avant de passer à la limite-inf quand μ tend vers l'infini dans (1.121), nous réécrivons le problème monotone en termes de $T_K(v)$:

$$\frac{\partial(T_K(v))_{\mu}}{\partial t} + \mu((T_K(v))_{\mu} - T_K(v)) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q), \quad (1.122)$$

$$(T_K(v))_{\mu}(t=0) = v_0^{\mu} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.123)$$

puisque $T_K(S(b(\theta_0))) = T_K(b(\theta_0))$ p.p. dans Ω , on a :

$$(T_K(v))_{\mu} \rightarrow T_K(v) \text{ dans } L^2(Q), \quad (1.124)$$

et

$$(T_K(v))_{\mu}(t=0) \rightarrow T_K(S(b(\theta_0))) \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (1.125)$$

quand μ tend vers $+\infty$.

On passe à la limite-inf, quand μ tend vers $+\infty$ dans (1.121), d'après (1.122), (1.124), et (1.125), on obtient :

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b_{\varepsilon}(\theta^{\varepsilon}))}{\partial t}, T_K(b_{\varepsilon}(\theta^{\varepsilon})) - (T_K(b(\hat{\theta})))_{\mu} \right\rangle ds dt \\ = \liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \mu \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} (T_K(v) - (T_K(v))_{\mu})(v - (T_K(v))_{\mu}) dx ds dt.$$

On sait que $|(T_K(v))_{\mu}| \leq K$ presque partout dans Q , ce qui implique :

$$(T_K(v) - (T_K(v))_{\mu})(v - (T_K(v))_{\mu}) \geq 0 \text{ p.p. dans } Q,$$

la démonstration du lemme (1.3.6) est ainsi terminée.

Étape 5.

Lemme 1.3.7. *La sous suite de θ^{ε} définie dans l'étape 3 vérifie pour tout $K \geq 0$:*

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} DT_{K^*}(\theta^{\varepsilon}) DT_K(b_{\varepsilon}(\theta^{\varepsilon})) dx ds dt \leq \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} DT_{K^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) dx ds dt,$$

où $K^* = \max(b^{-1}(K), |b^{-1}(-K)|)$

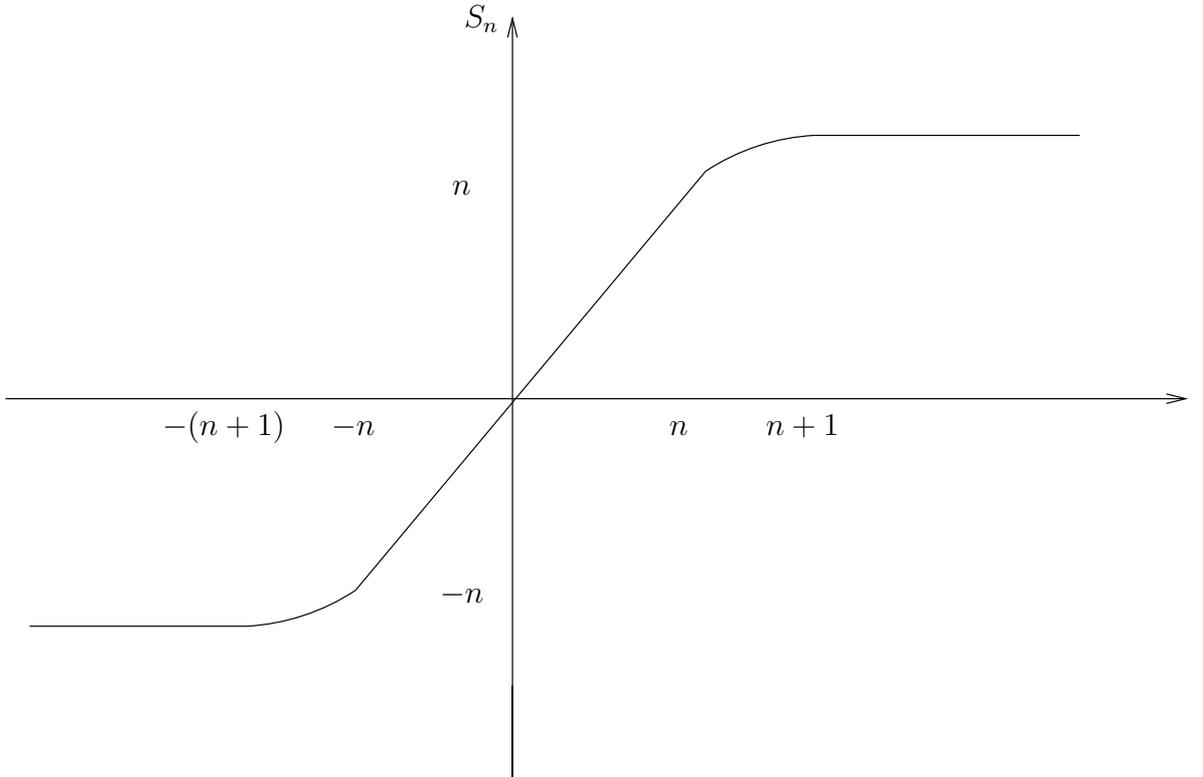
Preuve du Lemme 1.3.7.

On définit pour $n \geq 1$ fixé, la suite de fonctions croissantes et de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$S_n(r) = r \text{ pour } |r| \leq n, \quad (1.126)$$

$$\text{supp}(S_n)' \subset [-(n+1), n+1], \quad (1.127)$$

$$\|S_n''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1. \quad (1.128)$$



On multiplie le problème régularisé ((1.40) – (1.42)) par $S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} + u \cdot b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) D\theta^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - \text{div} (S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon) \\ + S''_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 = f^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \end{aligned} \quad (1.129)$$

On choisit la fonction $W_\mu^\varepsilon = T_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu$ comme fonction test dans (1.129)

(pour $\varepsilon > 0$ et $\mu > 0$), on obtient après intégration sur $(0, t)$, puis $(0, T)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, W_\mu^\varepsilon \right\rangle ds dt + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon DW_\mu^\varepsilon dx ds dt \\ & + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S''_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) W_\mu^\varepsilon |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds dt \\ & + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u \cdot b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) D\theta^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt \\ & = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Dans ce qui suit, on passe à la limite dans (1.130) quand ε tend vers 0, puis quand μ tend vers $+\infty$ et enfin quand n tend vers $+\infty$ pour $K \geq 0$ fixé. On démontre d'abord les résultats suivants :

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}, W_\mu^\varepsilon \right\rangle ds dt \geq 0 \quad \forall n \geq K, \quad (1.131)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S''_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) W_\mu^\varepsilon |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds dt \right| = 0, \quad (1.132)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad (1.133)$$

$$\text{et } \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt = 0 \quad \forall n \geq 1. \quad (1.134)$$

Preuve du (1.131) : en utilisant la définition de W_μ^ε , le lemme (1.3.6) appliqué avec $\overline{S} = S_n$ pour $n \geq K$ fixé, l'estimation (1.131) est une conséquence immédiate.

Preuve du (1.132) : pour tout $n \geq 1$ fixé, on a $\text{supp}(S_n)'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S''_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) W_\mu^\varepsilon |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds dt \right| \\ & \leq T \|S''_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|W_\mu^\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \int_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx dt, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\mu > 0$. L'application de l'inégalité précédente, en tenant compte des estimations (1.117) et (1.128) nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S''_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) W_\mu^\varepsilon |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds dt \right| \\ & \leq C \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{n \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| \leq n+1\}} b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx dt, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$, où C est une constante indépendante de n . Grâce à l'estimation (1.107), on peut passer à la limite dans cette dernière inégalité quand n tend vers $+\infty$ et obtenir (1.132).

Preuve du (1.133) : pour $\mu > 0$ fixé, on a :

$$W_\mu^\varepsilon \rightharpoonup T_K(b(\hat{\theta})) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.135)$$

et p.p. dans Q , et dans $L^\infty(Q)$ faible $*$ quand ε tend vers 0.

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en utilisant les estimations (1.38), (1.100), et (1.135), on en déduit pour tout $\mu > 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta) |Du|^2 S'_n(b(\hat{\theta})) (T_K(b(\hat{\theta})) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu) dx ds dt. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $n \geq 1$ fixé, l'estimation (1.116) nous permet de passer à la limite dans cette dernière égalité quand μ tend vers $+\infty$, ce qui achève la démonstration de (1.133).

Preuve du (1.134) : pour $n \geq 1$ fixé, on a :

$$u \cdot b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon W_\mu^\varepsilon = u \cdot S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(T_{N^*}(\theta^\varepsilon)) DT_{N^*}(\theta^\varepsilon) W_\mu^\varepsilon, \quad (1.136)$$

p.p. dans Q , $\forall \varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$ où $N^* = \max(b^{-1}(n+1), -b^{-1}(-n-1))$.

Comme $\text{supp}(S'_n) \subset [-n-1, n+1]$, la suite :

$$(S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(T_{N^*}(\theta^\varepsilon)))_\varepsilon \text{ est bornée et converge vers } S'_n(b(\hat{\theta})) b'(T_{N^*}(\hat{\theta})) \quad (1.137)$$

presque partout dans Q quand ε tend vers 0, car S'_n est régulier et bornée et grâce aux estimations (1.99), (1.100) et (1.37).

Pour $\mu > 0$ fixé, on a :

$$W_\mu^\varepsilon \rightharpoonup T_K(b(\hat{\theta})) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu \text{ p.p. dans } Q \text{ et dans } L^\infty(Q) \text{ faible } *, \quad (1.138)$$

quand ε tend vers 0.

u étant fixé dans $L^2(Q)$, les estimations (1.136), (1.137), et (1.138), entraînent :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) W_\mu^\varepsilon dx ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u \cdot b'(T_{N^*}(\hat{\theta})) S'_n(b(\hat{\theta})) DT_{N^*}(\hat{\theta}) [T_K(b(\hat{\theta})) - T_K(b(\hat{\theta}))_\mu] dx ds dt, \quad (1.139) \end{aligned}$$

pour tout $\mu > 0$.

En utilisant l'estimation (1.116) et en passant à la limite dans (1.139) quand μ tend vers l'infini, on obtient le résultat (1.134) souhaité.

Nous retournons maintenant à la démonstration du lemme (1.3.7), grâce aux estimations (1.130), (1.131), (1.132), (1.133) et (1.134), nous sommes en mesure de passer à la limite-sup quand ε tend vers zéro, puis à la limite-sup quand μ tend vers $+\infty$ et enfin à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1.130). Nous obtenons en utilisant la définition de W_μ^ε que pour tout $K \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon (DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - DT_K(b(\hat{\theta})))_\mu dx ds dt \leq 0.$$

Comme $S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) = D\theta^\varepsilon DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ pour $K \leq n$.

L'inégalité précédente implique que pour tout $K \leq n$:

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega D\theta^\varepsilon DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds dt \\ & \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon DT_K(b(\hat{\theta}))_\mu dx ds dt. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Le terme du coté droit de l'inégalité (1.140) sera traité de la manière qui suit : pour $\varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$, on a :

$$S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon = S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) DT_{N^*}(\theta^\varepsilon) \text{ p.p. dans } Q.$$

Grâce à l'estimation (1.101) on conclut que pour $n \geq 1$ fixé

$$S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon \rightharpoonup S'_n(b(\hat{\theta})) DT_{N^*}(\hat{\theta}) \text{ faiblement dans } L^2(Q),$$

quand ε tend vers zéro. La convergence forte de $T_K(b(\hat{\theta}))_\mu$ vers $T_K(b(\hat{\theta}))$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ quand μ tend vers $+\infty$, implique que

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S'_n(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) D\theta^\varepsilon DT_K(b(\hat{\theta}))_\mu dx ds dt \\ & = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S'_n(b(\hat{\theta})) DT_{N^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) dx ds dt \\ & = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{N^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) dx ds dt, \end{aligned} \quad (1.141)$$

pour $K \leq n$. Maintenant pour $K \leq n$ on a

$$DT_{N^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) = DT_{K^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q$$

où $K^* = \max(b^{-1}(K), -b^{-1}(-K))$, ce qui implique tenant compte des estimations (1.140) et (1.141) que

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega D\theta^\varepsilon DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) dx ds dt$$

$$\leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) dx ds dt.$$

Pour $\varepsilon \leq \frac{1}{K}$, on a $D\theta^\varepsilon DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) = DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ p.p. dans Q . On termine ainsi la preuve du lemme (1.3.7).

Étape 6.

Lemme 1.3.8. *Pour $K \geq 0$ fixé, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega [DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})]^2 T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt = 0$$

et

$$DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \rightharpoonup DT_{K^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})),$$

faiblement dans $L^1(Q)$ quand ε tend vers 0, où $K^* = \max \{b^{-1}(K), |b^{-1}(-K)|\}$

Preuve du Lemme 1.3.8.

Soit $K \geq 0$ fixé. La définition de b_ε implique que :

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega [DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})]^2 T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt \geq 0.$$

Cette dernière inégalité peut être décomposée comme suit :

$$A_1^\varepsilon + A_2^\varepsilon + A_3^\varepsilon \geq 0, \quad (1.142)$$

où

$$A_1^\varepsilon = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt,$$

$$A_2^\varepsilon = - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) DT_{K^*}(\hat{\theta}) T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt,$$

et

$$A_3^\varepsilon = - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\hat{\theta}) [DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})] T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt.$$

Nous avons :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} A_1^\varepsilon = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt.$$

D'après le lemme 1.3.7, on obtient :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} A_1^\varepsilon \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\hat{\theta}) DT_K(b(\hat{\theta})) dx ds dt. \quad (1.143)$$

En utilisant les estimations (1.37), (1.100) et (1.101), on a :

$$DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) = DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(T_{K^*}(\theta^\varepsilon))$$

pour tout $\varepsilon < \frac{1}{K}$ et

$$DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(T_{K^*}(\theta^\varepsilon)) \rightarrow DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b(\hat{\theta}))b'(T_{K^*}(\hat{\theta})) \quad (1.144)$$

fortement dans $(L^2(Q))^N$, quand ε tend vers zéro. On a également :

$$DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b(\hat{\theta}))b'(T_{K^*}(\hat{\theta})) = DT_K(b(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q. \quad (1.145)$$

En utilisant les estimations (1.101), (1.144) et (1.145), on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_2^\varepsilon = - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta}))dx ds dt. \quad (1.146)$$

Et d'après les estimations (1.37), (1.100) et (1.101), on conclut que :

$$(DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta}))T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (1.147)$$

faiblement dans $(L^2(Q))^N$, quand ε tend zéro. Les estimations (1.101) et (1.147) entraînent que pour tout $K > 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_3^\varepsilon = 0. \quad (1.148)$$

Grâce aux estimations (1.143), (1.146) et (1.148), on peut passer à la limite-sup quand ε tend vers zéro dans (1.142) et obtenir pour $K \geq 0$ fixé :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega [DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})]^2 T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) dx ds dt = 0.$$

Compte tenu de ce dernier résultat de convergence, on déduit que pour tout $K \geq 0$ et pour tout $T' < T$:

$$[DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})]^2 T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \rightarrow 0$$

fortement dans $L^1((0, T') \times \Omega)$ quand ε tend vers zéro. In addition, we have :

$$\begin{aligned} & [DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) - DT_{K^*}(\hat{\theta})]^2 T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \\ &= DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - 2DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \\ & \quad + DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon). \end{aligned}$$

On note :

$$B_1^\varepsilon = DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$$

et

$$B_2^\varepsilon = DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon).$$

D'après (1.144) et (1.145), nous avons :

$$DT_{K^*}(\hat{\theta})T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \rightarrow DT_K(b(\hat{\theta}))$$

fortement dans $(L^2(Q))^N$ quand ε tend vers zéro. En utilisant l'estimation (1.101) et ce dernier résultat de convergence, on obtient :

$$B_1^\varepsilon \rightharpoonup DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta})) \quad (1.149)$$

faiblement dans $(L^1(Q))^N$ quand ε tend vers zéro. De la même façon, on obtient :

$$B_2^\varepsilon \rightharpoonup DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta})) \quad (1.150)$$

fortement dans $(L^1(Q))^N$ quand ε tend vers zéro. Les estimations (1.149) et (1.150), impliquent que pour tout $K \geq 0$ et pour tout $T' < T$:

$$DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)DT_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \rightharpoonup DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta})) \quad (1.151)$$

faiblement dans $L^1((0, T') \times \Omega)$ quand ε tend vers zéro. Par la suite, on prolonge la fonction f sur l'intervalle $(0, \bar{T})$ avec $\bar{T} > T$ (prolongement par 0). On peut facilement vérifier que le résultat de convergence (1.151) reste vrai faiblement dans $L^1(Q)$, la preuve du Lemme (1.3.8) est alors complète.

Étape 7. Dans cette étape, on montre que $\hat{\theta}$ satisfait (1.27) et (1.28). Soit S une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact. Soit K un nombre réel positif tel que $\text{supp}(S') \subset [-K, K]$. On multiplie ponctuellement l'équation approchée (1.40) par $S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} + u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - \text{div}(S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon) \\ + S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 = f^\varepsilon S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \end{aligned} \quad (1.152)$$

Dans ce qui suit, on va passer à la limite quand ε tend vers 0 dans chaque terme de (1.152).

★ Limite de $\frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}$

$$\frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial S(b(\hat{\theta}))}{\partial t} \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \text{ quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0$$

sachant que S est bornée, continue et que $S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ converge vers $S(b(\hat{\theta}))$ p.p. dans Q et dans $L^\infty(Q)$ faible *.

★ Limite de : $\text{div}(S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon)$

Comme $\text{supp} S' \subset [-K, K]$, on a pour $\varepsilon < \frac{1}{K}$, où $K^* = \max\{b^{-1}(K), |b^{-1}(-K)|\}$:

$$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon = S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) \text{ p.p. dans } Q$$

La suite $S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ converge vers $S'(b(\hat{\theta}))$ p.p. dans Q et elle est bornée .

L'estimation (1.101) donne alors :

$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))DT_{K^*}(\theta^\varepsilon) \rightharpoonup S'(b(\hat{\theta}))DT_{K^*}(\hat{\theta})$ faiblement dans $L^2(Q)$ quand ε tend vers 0.

$S'(b(\hat{\theta}))DT_{K^*}(\hat{\theta}) = S'(b(\hat{\theta}))D\hat{\theta}$ p.p. dans Q puisque $S'(b(\hat{\theta})) = 0$ pour $|b(\hat{\theta})| \geq K$, alors

$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon \rightharpoonup S'(b(\hat{\theta}))D\hat{\theta}$ faiblement dans $L^2(Q)$ quand ε tend vers 0.

★ Limite de $S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2$:

Comme $\text{supp} S'' \subset [-K, K]$, nous avons pour $\varepsilon \leq \frac{1}{K}$:

$$\begin{aligned} S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 &= S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(T_{K^*}(\theta^\varepsilon))|DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)|^2 \\ &= S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))T'_K(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)DT_{K^*}(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon \text{ p.p. dans } Q. \end{aligned}$$

La convergence presque partout de $S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ vers $S''(b(\hat{\theta}))$ quand ε tend vers 0, le fait que S'' soit bornée, et le Lemme 1.3.8 nous permet de conclure que :

$$S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 \rightharpoonup S''(b(\hat{\theta}))DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta})),$$

faiblement dans $L^1(Q)$, quand ε tend vers 0. Enfin :

$$S''(b(\hat{\theta}))DT_{K^*}(\hat{\theta})DT_K(b(\hat{\theta})) = S''(b(\hat{\theta}))b'(\hat{\theta})|D\hat{\theta}|^2 \text{ p.p. dans } Q.$$

★ Limite de $f^\varepsilon S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$:

D'après (1.38) et (1.100), on a :

$$f^\varepsilon S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow 2\mu(\theta)|Du|^2 S'(b(\hat{\theta}))$$

fortement dans $L^1(Q)$ quand ε tend vers 0.

★ Limite de $u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$:

Comme $\text{div } u = 0$, on a :

$$u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) = \text{div } (u \cdot S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

La convergence presque partout de $S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ vers $S(b(\hat{\theta}))$ quand ε tend vers 0, le fait que S soit bornée, et que u soit fixée dans $L^2(Q)$ entraînent que :

$$u \cdot S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow u \cdot S(b(\hat{\theta})) \text{ fortement dans } L^2(Q) \text{ quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0.$$

Grâce à ces résultats de convergence, nous sommes en mesure de passer à la limite quand ε tend vers 0 dans le problème régularisé et de conclure que $\hat{\theta}$ satisfait (1.27). Il nous reste à montrer que $S(b(\hat{\theta}))$ vérifie la condition initiale (1.28). Pour cela, on vérifie d'abord que :

$$S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow S(b(\hat{\theta})) \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

quand ε tend vers zéro. En effet :

$$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon = S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(T_{K_{\alpha'}}(\theta^\varepsilon))DT_{K_{\alpha'}}(\theta^\varepsilon) \text{ p.p. dans } Q, \quad (1.153)$$

pour ε petit, où $K_{\alpha'} = \frac{K}{\alpha'}$, car $\text{supp } S' \subset [-K, K]$ et grâce à l'estimation (1.7). b étant de classe C^1 , d'après (1.99), on a :

$$b'_\varepsilon(T_{K_{\alpha'}}(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow b'(T_{K_{\alpha'}}(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q, \quad (1.154)$$

quand ε tend vers 0. De même, on a :

$$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow S'(b(\hat{\theta})) \text{ p.p. dans } Q, \quad (1.155)$$

quand ε tend vers 0, car S' est continue. Par ailleurs, on a :

$$S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(T_{K_{\alpha'}}(\theta^\varepsilon)) \text{ est borné dans } L^\infty(Q), \quad (1.156)$$

pour tout $K \geq 0$, car b est localement lipschitzienne. Puisque b est de classe C^1 et grâce à l'estimation (1.7), le Lemme 1.3.8, nous assure mieux que la convergence faible de $T_{K^*}(\theta^\varepsilon)$ vers $T_{K^*}(\hat{\theta})$:

$$T_{K^*}(\theta^\varepsilon) \longrightarrow T_{K^*}(\hat{\theta}) \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (1.157)$$

quand ε tend vers zéro. D'après (1.153), (1.154), (1.155), (1.156) et (1.157), on conclut que :

$$S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \longrightarrow S(b(\hat{\theta})) \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (1.158)$$

quand ε tend vers zéro. Le même raisonnement qui nous a donné (1.158), permet de vérifier que :

$$\text{div } (S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon) \text{ est compact dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Alors $\frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t}$ se décompose en deux termes. Un premier terme est compact dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, tandis que le deuxième terme converge faiblement dans $L^1(Q)$ (d'après les résultats de convergence ci-dessus). En tenant compte de l'estimation (1.158) et en appliquant un lemme de [28], on conclut que $S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))$ demeure dans un compact de $C^0([0, T]; L^1(\Omega))$. On en déduit que d'un côté $S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))(t=0) = S(b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon))$ converge vers $S(b(\hat{\theta}))(t=0)$ fortement dans $L^1(\Omega)$. D'un autre côté, (1.39) et la régularité de S impliquent que $S(b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon))$ converge vers $S(b(\theta_0))$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$. On conclut alors que :

$$S(b(\hat{\theta}))(t=0) = S(b(\theta_0)) \text{ dans } \Omega.$$

Ce qui termine la démonstration du résultat de l'existence.

Dans la huitième et dernière étape, on montre que la solution renormalisée du problème (1.34) – (1.36) est unique.

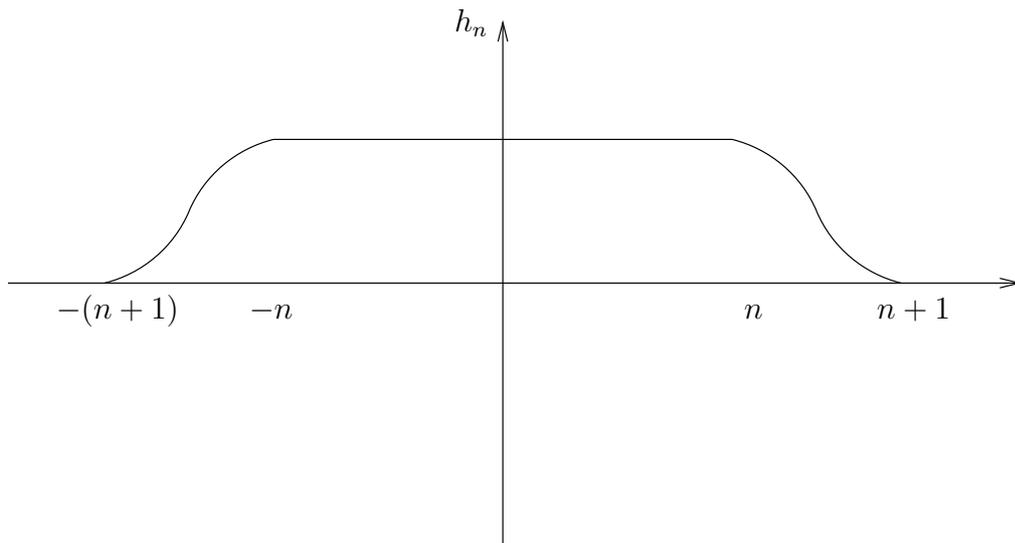
Étape 8.unicité : Rappelons maintenant la définition de la suite de fonctions h_n :

$$h_n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \leq n, \\ h(r - (n-1)\text{sg}(r)) & \text{si } |r| \geq n, \end{cases}$$

où h est une fonction positive de classe $C_0^\infty(\mathbb{R})$, telle que :

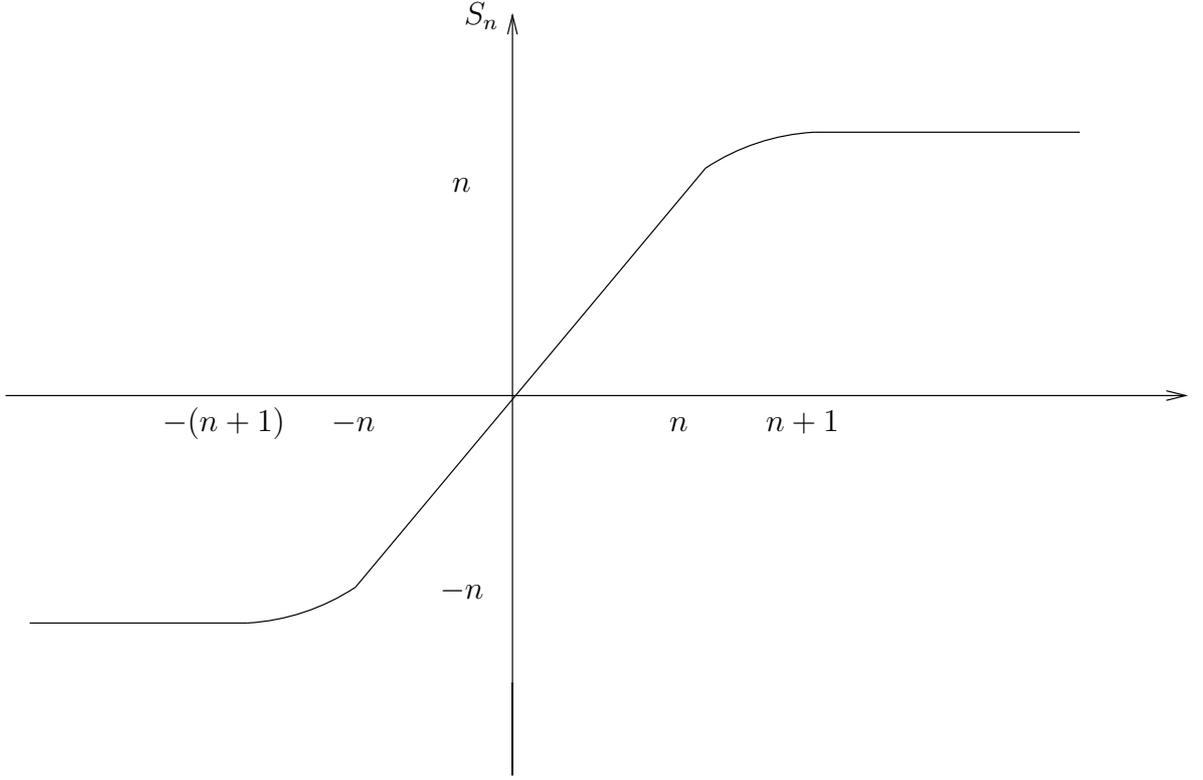
$$h(r) = 1 \text{ si } |r| \leq 1, \quad 0 \leq h(r) \leq 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad h(r) = 0 \text{ si } |r| \geq 2.$$

On suppose que h est décroissante sur $[1, 2]$ et croissante sur $[-2, -1]$.



Pour tout entier $n \geq 2$, la suite de fonctions définie par :

$$S_n(r) = \int_0^r h_n(s) ds,$$



est utilisée pour remplacer S dans (1.27) pour $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n(b(\hat{\theta}_i))}{\partial t} - \operatorname{div} (h_n(b(\hat{\theta}_i))D\hat{\theta}_i) + h'_n(b(\hat{\theta}_i))b'(\hat{\theta}_i)|D\hat{\theta}_i|^2 \\ + \operatorname{div} (uS_n(b(\hat{\theta}_i))) = fh_n(b(\hat{\theta}_i)) \end{aligned} \quad (1.159)$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$, pour $i = 1, 2$.

Soit K un nombre réel et positif. On prend $\frac{1}{K}T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2)))$ comme fonction test dans la différence des équations (1.159) pour $i = 1$ et $i = 2$.

Nous obtenons après intégration sur $(0, t)$, puis sur $(0, T)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t \frac{1}{K} \left\langle \frac{\partial S_n(b(\hat{\theta}_1))}{\partial t} - \frac{\partial S_n(b(\hat{\theta}_2))}{\partial t}, T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) \right\rangle ds dt \\ + A_{nK} + B_{nK} + C_{nK} + D_{nK} \\ = \int_0^T \int_\Omega \frac{T-t}{K} f[h_n(b(\hat{\theta}_1)) - h_n(b(\hat{\theta}_2))] T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt, \end{aligned} \quad (1.160)$$

où

$$A_{nK} = \int_0^T \int_\Omega \frac{T-t}{K} [h_n(b(\hat{\theta}_1))D\hat{\theta}_1 - h_n(b(\hat{\theta}_2))D\hat{\theta}_2] DT_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt,$$

$$B_{nK} = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{T-t}{K} h'_n(b(\hat{\theta}_1)) b'(\hat{\theta}_1) |D\hat{\theta}_1|^2 T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt,$$

$$C_{nK} = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{T-t}{K} h'_n(b(\hat{\theta}_2)) b'(\hat{\theta}_2) |D\hat{\theta}_2|^2 T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt,$$

et

$$D_{nK} = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{T-t}{K} u \cdot [S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))] DT_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt.$$

Dans (1.160), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ signifie le produit de dualité entre $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dans la suite, on montre que les termes A_{nK} , B_{nK} , C_{nK} , et D_{nK} vérifient :

$$\limsup_{K \rightarrow 0} A_{nK} \geq 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (1.161)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{K \rightarrow 0} B_{nK} = 0 \quad (1.162)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{K \rightarrow 0} C_{nK} = 0 \quad (1.163)$$

et

$$D_{nK} = 0 \quad \forall n \geq 2, \forall K \geq 0. \quad (1.164)$$

Preuve du (1.161), (1.162), et (1.163)

Le caractère localement lipschitzien de b' , nous permet de justifier les estimations (1.161), (1.162) et (1.163) comme dans [9].

Preuve du (1.164) :

d'après la définition de D_{nK} , nous avons :

$$\begin{aligned} D_{nK} &= - \int_0^T \frac{T-t}{K} \left[\int_{\Omega} u \cdot Dg_K(w_n)(t) dx \right] dt \\ &= - \int_0^T \frac{T-t}{K} \left[\int_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot g_K(w_n)(t) dx \right] dt, \end{aligned}$$

où

$$g_K(r) = \int_0^r s T'_K(s) ds, \text{ et } w_n = S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2)),$$

sachant que $g_K(w_n) = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$. Comme $\operatorname{div} u = 0$, on en déduit le résultat désiré (1.164).

On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(b(\hat{\theta}_1))}{\partial t} - \frac{\partial S_n(b(\hat{\theta}_2))}{\partial t}, T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) \right\rangle ds \\ &= \int_{\Omega} \overline{T_K}(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2)))(t) dx. \end{aligned} \quad (1.165)$$

En utilisant (1.165), (1.161), (1.162), (1.163), et (1.164), on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{K \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{K} \overline{T_K}(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt \\ & \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{K \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \frac{T-t}{K} f[h_n(b(\hat{\theta}_1)) - h_n(b(\hat{\theta}_2))] T_K(S_n(b(\hat{\theta}_1)) - S_n(b(\hat{\theta}_2))) dx dt. \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} \frac{T_K}{K}(r) &= \text{sg}(r), \\ \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\overline{T_K}}{K}(r) &= |r|, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(r) &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(r) &= r, \end{aligned}$$

où $\text{sg}(r)$ représente le signe de r . On applique le Lemme de Fatou dans le premier terme de l'inégalité ci-dessus, et le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans le deuxième terme, on obtient :

$$\int_Q |b(\hat{\theta}_1) - b(\hat{\theta}_2)| dx dt = 0,$$

On en déduit que $b(\hat{\theta}_1) = b(\hat{\theta}_2)$ p.p. dans Q , et que $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ p.p. dans Q .

Ce qui termine la démonstration du Lemme (1.3.4).

RETOUR À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (1.3.1) :

On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi_1 : L^1(Q) &\longrightarrow L^1(Q) : \\ \theta &\longrightarrow \hat{\theta} = \psi_1(\theta) \end{aligned}$$

On rappelle que $\hat{\theta}$ est l'unique solution renormalisée du problème :

$$\begin{aligned} b(\hat{\theta})_t + u \cdot \nabla b(\hat{\theta}) - \Delta \hat{\theta} &= 2\mu(\theta)|Du|^2 && \text{dans } Q, \\ \hat{\theta} &= 0 && \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\hat{\theta})(t=0) &= b(\theta_0) && \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

où θ est fixé dans $L^1(Q)$ et u est l'unique solution du problème ((1.30) – (1.33)). Dans un premier temps, on démontre le lemme suivant :

Lemme 1.3.9. $\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}]$, il existe une constante $c(p, N, \Omega, T)$ qui dépend uniquement de p, N, Ω , et T telle que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

Preuve du Lemme 1.3.9.

On rappelle que si on prend $T_K(\theta^\varepsilon)$ comme fonction test dans (1.40), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2 dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(\theta^\varepsilon) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) dx ds + \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) dx \end{aligned} \quad (1.166)$$

pour tout t dans $(0, T)$, et où

$$B_K^\varepsilon(z) = \int_0^z b'_\varepsilon(s) T_K(s) ds.$$

On sait que $\operatorname{div} u = 0$, la formule de Stokes et la condition (1.41) entraînent alors :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_K(\theta^\varepsilon) dx ds = 0 \quad (1.167)$$

D'après la définition de B_K^ε , on a :

$$0 \leq B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \leq K |b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)|$$

presque partout dans Ω , ce qui implique :

$$0 \leq \int_{\Omega} B_K^\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) dx \leq K \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)}.$$

D'après (1.101), on a :

$$T_K(\theta^\varepsilon) \rightharpoonup T_K(\hat{\theta}) \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

quand ε tend vers zéro. On passe alors à la limite quand ε tend vers zéro dans (1.166). Grâce aux estimations (1.38), (1.39) et (1.167), on obtient :

$$\int_Q |DT_K(\hat{\theta})|^2 dx dt \leq KC((\|\mu(\theta)\|Du)^2)_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (1.168)$$

L'estimation (1.168) et l'application du lemme 1 dans D.Blanchard et O.Guibé [4] entraînent que :

$\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}]$, il existe une constante $c(p, N, \Omega, T)$ qui dépend uniquement de p, N, Ω , et T telle que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)\|Du)^2)_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{N}{N+2}} \cdot \|\hat{\theta}\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))}^{\frac{2}{N+2}}. \quad (1.169)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\|b(\hat{\theta})\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} \leq \|\mu(\theta)\|Du)^2)_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)},$$

d'après (1.7), on obtient :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq c (\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}), \quad (1.170)$$

où c est une constante.

Les estimations (1.169), et (1.170) nous permettent d'achever la preuve du Lemme (1.3.9).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que ψ_1 est compacte, continue et qu'il existe une boule B de $L^1(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$.

i- ψ_1 est compacte :

Soit θ_n une suite de fonctions qui est bornée dans $L^1(Q)$. La suite $\hat{\theta}_n$ est définie par :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, et d'après le Lemme (1.3.2), u_n de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$ est l'unique solution faible du problème suivant :

$$u_{nt} + (u_n \cdot \nabla)u_n - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta_n)Du_n) = F(\theta_n) \quad \text{dans } (H^1_\sigma)'(\Omega), \quad (1.171)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\operatorname{div} u_n = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (1.172)$$

$$u_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.173)$$

$$u_n(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.174)$$

D'après la définition de ψ_1 et le lemme (1.3.4), nous obtenons pour $n \geq 1$ fixé :

$\hat{\theta}_n$ est l'unique solution renormalisée du problème suivant :

$$b(\hat{\theta}_n)_t + u_n \cdot \nabla b(\hat{\theta}_n) - \Delta \hat{\theta}_n = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (1.175)$$

$$\hat{\theta}_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.176)$$

$$b(\hat{\theta}_n)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.177)$$

D'après (1.9), on déduit que $F(\theta_n)$ est bornée dans $L^\infty(Q)$.

Puisque dans cette section :

$$u_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)), \quad (1.178)$$

$$u_{nt} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H^1_\sigma)'(\Omega)).$$

Nous pouvons alors extraire une sous-suite telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)), \quad (1.179)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2_\sigma(Q), \quad (1.180)$$

$$u_{nt} \rightharpoonup u_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H^1_\sigma)'(\Omega)). \quad (1.181)$$

quand n tend vers $+\infty$, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$ (voir par exemple [31], [17] et [32]).

Cela implique que :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q) \quad (1.182)$$

Utilisant cette fois-ci l'estimation (1.182), ainsi que le Lemme (1.3.9), on obtient :

$$\hat{\theta}_n \text{ est bornée dans } L^p(Q), \quad (1.183)$$

pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N}]$.

Pour $n \geq 1$ fixé, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} + \operatorname{div} (u_n \cdot S(b(\hat{\theta}_n))) - \operatorname{div} (S'(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n) \\ & + S''(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'(b(\hat{\theta}_n)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \end{aligned} \quad (1.184)$$

★ ESTIMATIONS A PRIORI : On prend $T_K(\hat{\theta}_n)$ comme fonction test dans (1.184), avec $S = S_M$, et $S_M \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ telle que S'_M soit à support compact ($\operatorname{supp} (S'_M) \subset [-M, M]$), $S'_M = 1$ dans $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$ et $S_M(0) = 0$.

Dans la suite, on passe à la limite quand M tend vers $+\infty$, le nombre réel K reste fixé.

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t}, T_K(\hat{\theta}_n) \right\rangle ds &= \int_{\Omega} \left(\int_0^{\hat{\theta}_n} (S'_M(b(z))b'(z)T_K(z)) dz \right) (t) dx - C \quad (1.185) \\ \text{où } C &= \int_0^{\theta_0} S'_M(b(z))b'(z)T_K(z) dz \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^{\hat{\theta}_n} (S'_M(b(z))b'(z)T_K(z)) dz \right) (t) dx \geq 0$$

La formule de Stokes, la condition (1.176), et le fait que $\operatorname{div} u_n = 0$ nous permet d'obtenir :

$$\int_{\Omega} u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n))DT_K(\hat{\theta}_n) dx = 0. \quad (1.186)$$

Nous avons :

$$\int_0^t \int_{\Omega} S'_M(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n DT_K(\hat{\theta}_n) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} S'_M(b(\hat{\theta}_n))|DT_K(\hat{\theta}_n)|^2 dx ds,$$

ce qui implique :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} S'_M(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n DT_K(\hat{\theta}_n) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} |DT_K(\hat{\theta}_n)|^2 dx ds. \quad (1.187)$$

Grâce à la condition d'énergie, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} S''_M(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge vers } 0, \quad (1.188)$$

quand M tend vers $+\infty$. On a aussi :

$$DS_M(b(\hat{\theta}_n)) = S'_M(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)DT_{K_M}(\hat{\theta}_n) \text{ p.p. dans } Q, \quad (1.189)$$

où $K_M = \max(-b^{-1}(-M), b^{-1}(M))$. D'après les estimations :

$$\|S'_M(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|S'_M\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\max_{r \in [-b^{-1}(-M), b^{-1}(M)]} |b'(r)| \right) \quad (1.190)$$

(1.185), (1.186), (1.187), (1.188), et (1.178), on obtient :

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ uniformément en } n \quad \forall K \geq 0. \quad (1.191)$$

L'égalité (1.189) ainsi que les estimations (1.190) et (1.191) sans oublier que $S_M(0) = 0$ donnent :

$$S_M(b(\hat{\theta}_n)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \forall M \geq 1. \quad (1.192)$$

En utilisant (1.184), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} &= -\operatorname{div}(u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n))) + \operatorname{div}(S'_M(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n) \\ &\quad - S''_M(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 + 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'_M b(\hat{\theta}_n) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \end{aligned} \quad (1.193)$$

Comme $\operatorname{supp}(S')$ et $\operatorname{supp}(S'')$ sont tous les deux inclus dans $[-M, M]$, $\hat{\theta}_n$ peut être remplacée par $T_{K_M}(\hat{\theta}_n)$ dans chaque terme de (1.193) :

★ $\operatorname{div}(S'_M(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n)$ s'identifie avec $\operatorname{div}(S'_M(b(\hat{\theta}_n))DT_{K_M}(\hat{\theta}_n))$ p.p. dans Q , qui est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

★ $\operatorname{div}(u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n))) = u_n \cdot \nabla S_M(b(\hat{\theta}_n))$, puisque $\operatorname{div} u_n = 0$. D'après (1.180) et (1.192), il est clair que $\operatorname{div}(u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n)))$ est bornée dans $L^1(Q)$ pour tout $M \geq 1$.

★ $S''_M(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2$ est bornée dans $L^1(Q)$.

★ $2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'_M b(\hat{\theta}_n)$ est bornée dans $L^1(Q)$, grâce à (1.179) et au fait que $\mu(\theta_n)S'_M(b(\hat{\theta}_n))$ soit bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Par conséquent :

$$\frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^1(Q) \quad \forall M \geq 1 \quad (1.194)$$

On démontre de la même façon que dans l'étape 3, en utilisant les estimations (1.192) et (1.194) que pour une sous-suite toujours indexée par n , il existe une fonction ϑ telle que :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \vartheta \text{ dans } Q, \quad (1.195)$$

$$b(\hat{\theta}_n) \text{ converge presque partout vers } b(\vartheta) \text{ dans } Q, \quad (1.196)$$

et grâce à l'estimation (1.191)

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge faiblement vers } T_K(\vartheta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.197)$$

En utilisant (1.183), et (1.195), on conclut que :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^q(Q), \quad (1.198)$$

pour tout q vérifiant $q < p$ avec $1 \leq p < \frac{N+2}{N}$,
alors

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^p(Q), \quad (1.199)$$

pour tout p vérifiant $1 \leq p < \frac{N+2}{N}$, en particulier :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^1(Q). \quad (1.200)$$

ii- ψ_1 est continue :

soit θ_n une suite de fonctions appartenant à $L^1(Q)$. La fonction θ appartient également à $L^1(Q)$. $\hat{\theta}_n$, et $\hat{\theta}$ sont définies comme suit :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n \text{ et } \psi_1(\theta) = \hat{\theta}$$

On suppose que :

$$\theta_n \longrightarrow \theta, \quad (1.201)$$

fortement dans $L^1(Q)$ quand n tend vers $+\infty$.

On montre dans ce paragraphe que :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta},$$

fortement dans $L^1(Q)$ quand n tend vers $+\infty$.

On suit le même raisonnement de (i), on rappelle que pour une sous-suite toujours indexée par n , il existe une fonction mesurable ϑ telle que :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \vartheta \text{ dans } Q,$$

$$b(\hat{\theta}_n) \text{ converge presque partout vers } b(\vartheta) \text{ dans } Q,$$

et

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge faiblement vers } T_K(\vartheta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

pour tout $K \geq 0$, quand n tend vers $+\infty$.

Notre but maintenant est de montrer que ϑ est une solution renormalisée du problème (1.34) – (1.36)

On montre que $b(\vartheta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$:

On prend $T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n)))$ comme fonction test dans (1.184), avec $S = S_M$, cela entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega S'_M(b(\hat{\theta}_n)) \frac{\partial b(\hat{\theta}_n)}{\partial t} T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds - \int_0^t \int_\Omega u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n)) DT_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_\Omega S'_M(b(\hat{\theta}_n)) D\hat{\theta}_n DT_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_\Omega S''_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad = \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_M(b(\hat{\theta}_n)) T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Procédons comme dans (1.186), on obtient :

$$\int_0^t \int_\Omega u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n)) DT_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds = 0,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \overline{T_K}(S_M(b(\hat{\theta}_n)))(t) dx + \int_0^t \int_\Omega S'_M(b(\hat{\theta}_n)) D\hat{\theta}_n DT_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_\Omega S''_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \quad (1.203) \\ & = \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_M(b(\hat{\theta}_n)) T_K(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx + \int_\Omega \overline{T_K}(S_M(b(\theta_0)))(t) dx ds. \end{aligned}$$

On passe à la limite quand M tend vers $+\infty$ dans (1.203), on a :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \overline{T_K}(b(\hat{\theta}_n))(t) dx + \int_0^t \int_\Omega b'(\hat{\theta}_n) T'_K(b(\hat{\theta}_n)) |D\hat{\theta}_n|^2 dx ds \quad (1.204) \\ & = \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 T_K(b(\hat{\theta}_n)) dx ds + \int_\Omega \overline{T_K}(b(\theta_0))(t) dx. \end{aligned}$$

L'estimation (1.179) implique que la suite $(Du_n)_n$ est bornée dans $(L^2(Q))^N$, on obtient alors que :

$$\int_\Omega \overline{T_K}(b(\hat{\theta}_n))(t) dx + \int_0^t \int_\Omega b'(\hat{\theta}_n) T'_K(b(\hat{\theta}_n)) |D\hat{\theta}_n|^2 dx ds \leq K(C + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}), \quad (1.205)$$

où C est une constante. Le deuxième terme à gauche de (1.205) est positif, l'estimation, (1.196) et le lemme de Fatou permettent de passer à la limite-inf dans (1.205) quand n tend vers $+\infty$ et d'obtenir ainsi :

$$\int_\Omega \overline{T_K}(b(\vartheta))(t) dx \leq K(C + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

Grâce à la définition de $\overline{T_K}$, on déduit à partir de l'inégalité précédente que :

$$K \int_\Omega |b(\vartheta)(x, t)| dx \leq \frac{3K^2}{2} \text{mes}(\Omega) + K(C + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

pour presque tout $t \in (0, T)$, ce qui implique $b(\vartheta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

On rappelle que :

$$\int_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 dx dt \text{ converge vers } 0, \quad (1.206)$$

quand p tend vers $+\infty$, $\forall n$ fixé.

On montre maintenant que :

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \int_{\{p \leq |b(\vartheta)| \leq p+1\}} b'(\vartheta) |D\vartheta|^2 dx dt = 0. \quad (1.207)$$

On introduit les fonctions : $Z_p^{p+1}(r) = T_{p+1}(r) - T_p(r)$ et $\widetilde{Z}_p^{p+1}(t) = \int_0^t Z_p^{p+1}(s) ds$.

On prend $Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n)))$ comme fonction test dans (1.184), avec $S = S_M$, pour tout entier n , nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n)) D Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} S'_M(b(\hat{\theta}_n)) D \hat{\theta}_n D Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} S''_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) |D \hat{\theta}_n|^2 Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \\ & \quad = \int_0^t \int_{\Omega} 2\mu(\theta_n) |D u_n|^2 S'_M(b(\hat{\theta}_n)) Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds. \end{aligned} \quad (1.208)$$

Nous avons aussi :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds = \int_{\Omega} \widetilde{Z}_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n)))(t) dx - \int_{\Omega} \widetilde{Z}_p^{p+1}(S_M(b(\theta_0))) dx, \quad (1.209)$$

où \widetilde{Z}_p^{p+1} est positive. Grâce au théorème de divergence, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_n \cdot S_M(b(\hat{\theta}_n)) D Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds = 0. \quad (1.210)$$

On a :

$$S'_M(b(\hat{\theta}_n)) D \hat{\theta}_n D Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) = S'_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) \chi_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} |D \hat{\theta}_n|^2,$$

presque partout dans Q , pour M assez grand. Puisque $b(\hat{\theta}_n)$ est tronquée, la suite $\hat{\theta}_n$ l'est aussi grâce à la coercivité de b . On en déduit que $\chi_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} |D \hat{\theta}_n|^2 \in L^1(Q)$. Par ailleurs, S'_M converge presque partout vers 1, quand M tend vers l'infini, et $S'_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n)$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ d'après (1.190). Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne alors :

$$\int_0^t \int_{\Omega} S'_M(b(\hat{\theta}_n)) D \hat{\theta}_n D Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \rightarrow \int_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} b'(\hat{\theta}_n) |D \hat{\theta}_n|^2 dx dt \quad (1.211)$$

quand M tend vers $+\infty$.

D'après (1.206), on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} S''_M(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) |D \hat{\theta}_n|^2 Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \text{ converge vers } 0 \quad (1.212)$$

quand M tend vers $+\infty$. Finalement,

$$\int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_M(b(\hat{\theta}_n)) Z_p^{p+1}(S_M(b(\hat{\theta}_n))) dx ds \rightarrow \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 Z_p^{p+1}(b(\hat{\theta}_n)) dx ds \quad (1.213)$$

quand M tend vers $+\infty$. On utilise les estimations (1.209), (1.210), (1.211), (1.212) et (1.213), pour passer à la limite dans (1.208) quand M tend vers $+\infty$ et on obtient alors :

$$\int_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 dx dt \leq \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 Z_p^{p+1}(b(\hat{\theta}_n)) dx ds + \int_\Omega \widetilde{Z_p^{p+1}}(b(\theta_0)) dx. \quad (1.214)$$

Revenant à la démonstration de la condition d'énergie (1.207) :

on remarque d'abord que le terme $(u \cdot \nabla)u \cdot u$ a un sens. En effet, $u \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$ et $L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \subset L^4(Q)$ en dimension 2 ($N = 2$). On multiplie alors l'équation (1.171) par u_n . Puisque :

$$F(\theta_n) \rightarrow F(\theta) \text{ dans } L^p(Q), \forall p < \infty,$$

on fait tendre n vers l'infini. En faisant la différence entre l'équation obtenue et l'équation de u multipliée par la fonction test u , on déduit que u_n converge en norme dans $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$ vers u , quand n tend vers l'infini. D'après la convergence faible (1.179), on conclut que :

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (1.215)$$

quand n tend vers $+\infty$. D'après (1.215), (1.196), et puisque Z_p^{p+1} est continue et bornée, on peut alors passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1.214) et obtenir :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 dx dt \leq \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta) |Du|^2 Z_p^{p+1}(b(\vartheta)) dx ds + \int_\Omega \widetilde{Z_p^{p+1}}(b(\theta_0)) dx. \quad (1.216)$$

Comme Z_p^{p+1} et $\widetilde{Z_p^{p+1}}$ convergent partout vers zéro quand p tend vers $+\infty$, et que

$$|Z_p^{p+1}(b(\vartheta))| \leq 1 \text{ et } |\widetilde{Z_p^{p+1}}(b(\theta_0))| \leq |b(\theta_0)| \in L^1(\Omega),$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} b'(\hat{\theta}_n) |D\hat{\theta}_n|^2 dx dt = 0. \quad (1.217)$$

Nous remarquons que :

$$(b'(\hat{\theta}_n))^{\frac{1}{2}} D\hat{\theta}_n \chi_{\{p \leq |b(\hat{\theta}_n)| \leq p+1\}} \rightharpoonup (b'(\vartheta))^{\frac{1}{2}} D\vartheta \chi_{\{p \leq |b(\vartheta)| \leq p+1\}},$$

faiblement dans $L^2(Q)$ quand n tend vers $+\infty$. Pour s'en convaincre, il suffit de suivre le même raisonnement de l'étape 3. On conclut avec (1.217) que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{n \leq |b(\vartheta)| \leq n+1\}} b'(\vartheta) |D\vartheta|^2 dx dt = 0.$$

La condition d'énergie (1.207) est alors démontrée.

En suivant le même raisonnement que dans la preuve du Lemme (1.3.6), on a :

Lemme 1.3.10.

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t}, T_K(b(\hat{\theta}_n)) - T_K(b(\vartheta)) \right\rangle_{\mu} ds dt \geq 0.$$

Nous démontrons maintenant l'analogie du Lemme (1.3.7), en ne détaillant que les différences à apporter dans la preuve.

Lemme 1.3.11.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} DT_{K^*}(\hat{\theta}_n) DT_K(b(\hat{\theta}_n)) dx ds dt \leq \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} DT_{K^*}(\vartheta) DT_K(b(\vartheta)) dx ds dt.$$

$$\text{où } K^* = \max(b^{-1}(K), -b^{-1}(-K))$$

Preuve du Lemme 1.3.11.

On utilise (1.184), on remplace S par S_p , on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_p(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} - \operatorname{div}(S'_p(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n) + S''_p(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 \\ & + u_n \cdot b'(\hat{\theta}_n)D\hat{\theta}_n S'_p(b(\hat{\theta}_n)) = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'_p(b(\hat{\theta}_n)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \end{aligned} \quad (1.218)$$

On prend la fonction $T_K(b(\hat{\theta}_n)) - T_K(b(\vartheta))_{\mu}$ (pour $n > 0$ et $\mu > 0$) comme fonction test dans (1.218). Pour $K \geq 0$, fixé, on pose :

$$W_{\mu}^n = T_K(b(\hat{\theta}_n)) - T_K(b(\vartheta))_{\mu}. \quad (1.219)$$

On obtient après intégration sur $(0, t)$ puis sur $(0, T)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_p(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t}, W_{\mu}^n \right\rangle ds dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} u_n \cdot b'(\hat{\theta}_n)D\hat{\theta}_n S'_p(b(\hat{\theta}_n))W_{\mu}^n dx ds dt \\ & + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} S'_p(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n DW_{\mu}^n dx ds dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} S''_p(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)W_{\mu}^n |D\hat{\theta}_n|^2 dx ds dt \\ & = \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'_p(b(\hat{\theta}_n))W_{\mu}^n dx ds dt. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Dans la suite, on passe à la limite dans (1.220) quand n tend vers $+\infty$, puis quand μ tend vers $+\infty$ et enfin quand p tend vers $+\infty$. Le nombre réel $K \geq 0$ reste fixé.

Les seuls termes qui méritent d'être étudiés sont les termes en u_n , puisqu'on est plus dans le cas où u est fixé dans L^2 . Ceci est la seule différence par rapport à la démonstration du Lemme 1.3.7.

En utilisant (1.215), (1.196) et (1.201) le caractère continu et borné de S'_p et de T_K , on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'_p(b(\hat{\theta}_n))W_{\mu}^n dx ds dt = \\ & \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\mu(\theta)|Du|^2 S'_p(b(\vartheta))(T_K(b(\vartheta)) - T_K(b(\vartheta))_{\mu}) dx ds dt. \end{aligned}$$

D'après (1.116), on obtient :

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_p(b(\hat{\theta}_n)) W_\mu^n dx ds dt = 0, \forall p \geq 1.$$

Pour $p \geq 1$ fixé, on a :

$$u_n \cdot b'(\hat{\theta}_n) S'_p(b(\hat{\theta}_n)) D\hat{\theta}_n W_\mu^n = u_n \cdot S'_p(b(\hat{\theta}_n)) b'(T_{p^*}(\hat{\theta}_n)) DT_{p^*}(\hat{\theta}_n) W_\mu^n, \quad (1.221)$$

p.p. dans Q où $p^* = \max(b^{-1}(p+1), -b^{-1}(-p-1))$. Comme $\text{supp}(S'_p) \subset [-p-1, p+1]$, la suite :

$$S'_p(b(\hat{\theta}_n)) b'(T_{p^*}(\hat{\theta}_n)) \text{ est bornée et converge vers } S'_p(b(\vartheta)) b'(T_{p^*}(\vartheta)) \quad (1.222)$$

presque partout dans Q quand n tend vers $+\infty$, puisque S'_p est régulier et borné, et grâce aux estimations (1.195) et (1.196).

Pour $\mu > 0$ fixé, nous avons :

$$W_\mu^n \rightharpoonup T_K(b(\vartheta)) - T_K(b(\vartheta))_\mu \text{ p.p. dans } Q \text{ et dans } L^\infty(Q) \text{ faible } * \quad (1.223)$$

quand n tend vers $+\infty$.

D'après (1.180), (1.197), (1.221), (1.222) et (1.223), on déduit que :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u_n \cdot \nabla b(\hat{\theta}_n) S'_p(b(\hat{\theta}_n)) W_\mu^n dx ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u \cdot b'(T_{p^*}(\vartheta)) S'_p(b(\vartheta)) DT_{p^*}(\vartheta) [T_K(b(\vartheta)) - T_K(b(\vartheta))_\mu] dx ds dt \end{aligned} \quad (1.224)$$

pour tout $\mu > 0$.

On fait maintenant appel à la convergence (1.116), en remplaçant $\hat{\theta}$ par ϑ , et on passe à la limite quand $\mu \rightarrow +\infty$ dans (1.224), ce qui permet de conclure que :

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega u_n \cdot \nabla b(\hat{\theta}_n) S'_p(b(\hat{\theta}_n)) W_\mu^n dx ds dt = 0 \quad (1.225)$$

pour tout $p \geq 1$.

La suite de la démonstration est identique à celle du Lemme 1.3.7.

Lemme 1.3.12. *Pour $K \geq 0$ fixé, nous avons :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega [DT_{K^*}(\hat{\theta}_n) - DT_{K^*}(\vartheta)]^2 T'_K(b(\hat{\theta}_n)) b'(\hat{\theta}_n) dx ds dt = 0$$

et

$DT_{K^*}(\hat{\theta}_n) DT_K(b(\hat{\theta}_n)) \rightharpoonup DT_{K^*}(\vartheta) DT_K(b(\vartheta))$ faiblement dans $L^1(Q)$ quand n tend vers $+\infty$,

où $K^* = \max\{b^{-1}(K), |b^{-1}(-K)|\}$

Preuve du Lemme 1.3.12.

La démonstration reste identique à celle du Lemme (1.3.8) dans l'étape 6.

A présent, il nous faut prouver que ϑ satisfait (1.27). Soit S une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' soit à support compact. Soit K un nombre réel positif vérifiant $\text{supp}(S') \subset [-K, K]$. Dans ce qui suit, on passera à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans chaque terme de (1.184) :

$$\star \text{ Limite de } \frac{\partial S(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t}$$

$$\frac{\partial S(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial S(b(\vartheta))}{\partial t} \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty$$

puisque S est bornée, continue et grâce à l'estimation (1.196).

\star Limite de $\text{div}(S'(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n)$:

comme $\text{supp}(S') \subset [-K, K]$, on a :

$$S'(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n = S'(b(\hat{\theta}_n))DT_{K^*}(\hat{\theta}_n) \text{ p.p. dans } Q,$$

où $K^* = \max\{b^{-1}(K), |b^{-1}(-K)|\}$.

$$\text{La suite } S'(b(\hat{\theta}_n)) \text{ converge vers } S'(b(\vartheta)) \text{ p.p. dans } Q \text{ et elle est bornée.} \quad (1.226)$$

D'après (1.226) et (1.197)

$$S'(b(\hat{\theta}_n))DT_{K^*}(\hat{\theta}_n) \rightharpoonup S'(b(\vartheta))DT_{K^*}(\vartheta) \text{ faiblement dans } L^2(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$.

Le terme $S'(b(\vartheta))DT_{K^*}(\vartheta) = S'(b(\vartheta))D\vartheta$ p.p. dans Q , puisque $S'(b(\vartheta)) = 0$, pour $|b(\vartheta)| \geq K$.

\star Limite de $S''(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2$

Comme $\text{supp}(S'') \subset [-K, K]$, nous avons :

$$\begin{aligned} S''(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 &= S''(b(\hat{\theta}_n))b'(T_{K^*}(\hat{\theta}_n))|DT_{K^*}(\hat{\theta}_n)|^2 \\ &= S''(b(\hat{\theta}_n))T'_K(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)DT_{K^*}(\hat{\theta}_n)D\hat{\theta}_n \text{ p.p. dans } Q. \end{aligned}$$

Le terme $T'_K(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)DT_{K^*}(\hat{\theta}_n)D\hat{\theta}_n$ peut être réécrit sous la forme $DT_{K^*}(\hat{\theta}_n)DT_K(b(\hat{\theta}_n))$.

La convergence presque partout de $S''(b(\hat{\theta}_n))$ vers $S''(b(\vartheta))$ quand n tend vers $+\infty$, le caractère borné de S'' , et l'application du lemme (1.3.12) permettent de conclure que :

$$S''(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 \rightharpoonup S''(b(\vartheta))DT_{K^*}(\vartheta)DT_K(b(\vartheta)) \text{ faiblement dans } L^1(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$. Or :

$$S''(b(\vartheta))DT_{K^*}(\vartheta)DT_K(b(\vartheta)) = S''(b(\vartheta))b'(\vartheta)|D\vartheta|^2 \text{ p.p. dans } Q.$$

★ Limite de $2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'(b(\hat{\theta}_n))$:

Grâce aux estimations (1.215), (1.226), (1.201), le fait que μ soit continue et bornée, on a :

$$2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'(b(\hat{\theta}_n)) \longrightarrow 2\mu(\theta)|Du|^2 S'(b(\vartheta)) \text{ fortement dans } L^1(Q),$$

quand n tend vers $+\infty$.

★ Limite de $\operatorname{div}(u_n \cdot S(b(\hat{\theta}_n)))$:

La convergence presque partout de $S(b(\hat{\theta}_n))$ vers $S(b(\vartheta))$ quand n tend vers $+\infty$, le fait que S soit bornée, et l'estimation (1.180) entraînent :

$$u_n S(b(\hat{\theta}_n)) \longrightarrow u S(b(\vartheta))$$

fortement dans $L^2_\sigma(Q)$ quand n tend vers $+\infty$.

Tous ces résultats de convergence nous permettent de passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'équation (1.184) et de conclure que ϑ satisfait (1.27).

Reste à montrer que $S(b(\vartheta))$ satisfait la condition initiale (1.28). Pour cela, on procède exactement de la même façon que dans l'étape 7.

Par conséquent, ϑ est une solution renormalisée du problème (1.34) – (1.36), d'après le lemme (1.3.4), on conclut que :

$$\vartheta = \hat{\theta} \text{ p.p. dans } Q.$$

En utilisant (1.195), on obtient :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} \text{ dans } Q. \quad (1.227)$$

D'après les estimations (1.183) et (1.227), on a :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \quad (1.228)$$

fortement dans $L^q(Q)$ pour tout q vérifiant $q < p$, avec $1 \leq p < \frac{N+2}{N}$, alors

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \quad (1.229)$$

fortement dans $L^p(Q)$, pour tout p vérifiant $1 \leq p < \frac{N+2}{N}$, en particulier :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \quad (1.230)$$

fortement dans $L^1(Q)$, quand n tend vers $+\infty$.

iii-Il existe une boule B de $L^1(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$:
on cherche un nombre réel positif R , telle que :

$$\psi_1(B_{L^1(Q)}(0, R)) \subset B_{L^1(Q)}(0, R).$$

On suppose que θ appartient à $B_{L^1(Q)}(0, R)$.

Comme F est bornée, on a :

$$F(\theta) \text{ est bornée dans } L^\infty(Q).$$

On rappelle que la fonction u , appartenant à $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ est l'unique solution du problème (1.30)–(1.33). On utilise alors u comme une fonction test dans (1.30), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu(\theta) |Du|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} F(\theta) \cdot u dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + m_0 \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} F(\theta) \cdot u dx dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + m_0 \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq \int_0^T \|F(\theta)\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.231)$$

D'après l'estimation (1.231), ainsi que l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + m_0 \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq c_1 \int_0^T \|F(\theta)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.232)$$

où c_1 est une constante. L'inégalité de Young, l'estimation (1.232) ainsi que l'inégalité de Korn nous permettent de conclure que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq \frac{c_1^2}{m_0^2} \|F(\theta)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{2}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ce qui implique :

$$u \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)).$$

Par conséquent :

$$\mu(\theta) |Du|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q),$$

en utilisant le Lemme 1.3.9, on en déduit que :

$$\hat{\theta} \text{ est bornée dans } L^1(Q),$$

autrement dit, il existe une constante $C > 0$, indépendante de θ telle que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^1(Q)} \leq C,$$

pour conclure, il suffit de prendre $R \geq C$. Ce qui implique :

$$\psi_1(B_{L^1(Q)}(0, R)) \subset B_{L^1(Q)}(0, R).$$

Le théorème du point fixe de Schauder ainsi que la définition de ψ_1 permettent de conclure, sous les conditions annoncées auparavant, qu'il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (1.12) – (1.16).

1.4 Existence d'une solution pour le système couplé

Dans cette section, on ne suppose plus que b' est localement lipschitzienne. La fonction b vérifie uniquement les hypothèses (1.6) et (1.7).

Théorème 1.4.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) et (1.11). Alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème ((1.12) – (1.16)) (au sens de la définition 1.2.2).*

Preuve du Théorème 1.4.1.

Soit b_ε la régularisation de b définie par :
 b_ε est une suite d'approximation de b , de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0, \forall r \in \mathbb{R}, b_\varepsilon(0) = 0$
 et telle que b_ε et b'_ε convergent vers b et b' uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0.
 Sachant que b'_ε converge uniformément vers b' sur \mathbb{R} , et en utilisant l'hypothèse (1.7) de coercivité de b , on obtient :

$$b'_\varepsilon \geq \frac{\alpha'}{2}.$$

On en déduit que b_ε vérifie (1.6), (1.7) et (1.29). On considère le problème approché suivant :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon) = F(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (1.233)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (1.234)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (1.235)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (1.236)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0 \text{ et } b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.237)$$

D'après les hypothèses mentionnées dans le Théorème 1.4.1, l'application du Théorème 1.3.1 nous permet de conclure qu'il existe une solution faible-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (1.233) – (1.237).

F étant bornée sur \mathbb{R} ,

on en déduit que :

$$F(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée sur } Q.$$

Alors :

$$u^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)),$$

on peut alors extraire une sous-suite telle que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)),$$

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q),$$

quand ε tend vers 0, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$. Cela entraîne :

$$\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q),$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} + \operatorname{div}(u^\varepsilon \cdot S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) - \operatorname{div}(S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon) \\ & + S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q), \end{aligned}$$

Dans la suite, on procède de la même façon que dans la Section 1.3, afin de démontrer que :

$T_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ indépendamment de ε pour tout $K \geq 0$,

$$S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^1_0(\Omega)),$$

et

$$\frac{\partial S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

indépendamment de ε pour $\varepsilon < \frac{1}{M}$, (S_M est définie dans la Section 1.3). On obtient à une sous-suite près que :

θ^ε converge presque partout vers θ dans Q ,

$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge presque partout vers $b(\theta)$ dans Q ,

$T_K(\theta^\varepsilon)$ converge faiblement vers $T_K(\theta)$ dans $L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$,

où θ est une fonction mesurable. Par conséquent :

$$F(\theta^\varepsilon) \rightarrow F(\theta) \text{ dans } L^p(Q), \forall p < \infty.$$

Puisque u^ε est compacte dans $L^2(Q)$, on déduit que :

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)), \quad (1.238)$$

quand ε tend vers zéro. Avec les mêmes arguments qu'on a utilisé tout au long de la section précédente, on vérifie aisément les estimations (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), et (1.28).

Par conséquent, il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (1.12) – (1.16).

Chapitre 2

Étude d'un système non linéaire de Boussinesq à second membre ayant une croissance

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'existence d'une solution faible-renormalisée pour un système non linéaire que nous rappelons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.5)$$

où Ω est un ouvert lipschitzien et borné de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$. Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dans le premier chapitre, nous avons supposé que F est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, ce qui nous a permis d'établir un théorème d'existence. Dans ce chapitre, on se place dans le cadre où la fonction F vérifie une hypothèse de croissance :

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha, \text{ avec } a \geq 0, M \geq 0 \quad (2.6)$$

et $2\alpha \in [0, 3]$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b \text{ est une fonction de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } b(0) = 0, \quad (2.7)$$

$$b'(r) \geq \alpha' \forall r \in \mathbb{R} \text{ pour une constante } \alpha' > 0, \quad (2.8)$$

μ est une fonction continue sur \mathbb{R} , telle que $m_0 \leq \mu(s) \leq m_1, \forall s \in \mathbb{R}$ (2.9)

avec $0 < m_0 \leq m_1$,

F est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^N , (2.10)

$u_0 \in (L^2(\Omega))^2$, $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $u_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, (2.11)

θ_0 est une fonction mesurable définie sur Ω telle que $b(\theta_0) \in L^1(\Omega)$. (2.12)

Ce chapitre est composé de 6 sections. Dans la Section 2.2, on rappelle la définition d'une solution faible-renormalisée de (2.13) – (2.17). Dans la Section 2.3, on suppose de plus que b' est localement lipschitzienne. Il s'agit de montrer un résultat d'existence de solution sous cette condition supplémentaire sur b , mais uniquement dans le cas où $1 < 2\alpha < 3$. Le cas où $0 \leq 2\alpha \leq 1$ sera traité directement dans la section 2.4 sans passer par l'étape intermédiaire où l'on suppose que b' est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} . Dans la Section 2.3, on distingue deux cas suivant les valeurs de α . Dans le premier cas, on suppose que $1 < 2\alpha < 2$. On fixe θ dans $L^{2\alpha}(Q)$ et on considère l'unique solution faible u de (2.13), puis on désigne par $\hat{\theta}$ l'unique solution renormalisée du problème :

$$\begin{aligned} b(\hat{\theta})_t + u \cdot \nabla b(\hat{\theta}) - \Delta \hat{\theta} &= 2\mu(\theta)|Du|^2 && \text{dans } Q, \\ \hat{\theta} &= 0 && \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\hat{\theta})(t=0) &= b(\theta_0) && \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

on utilise alors l'estimation suivante : $\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}[$,

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

Les propriétés de stabilité des solutions renormalisées pour les problèmes paraboliques (voir [4], [9]) permettent alors de montrer que l'application $\psi_1 : \theta \rightarrow \hat{\theta}$ est continue et compacte de $L^{2\alpha}(Q)$ dans lui-même. On montre alors que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq c \left[a^2 + M^2 \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right].$$

En supposant que les données sont suffisamment petites, il existe donc une boule de $L^{2\alpha}(Q)$ stable par l'application ψ_1 . Le théorème du point fixe de Schauder permet de conclure à l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) du système (2.13) – (2.17), telle que θ est bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$, si b' est localement lipschitzienne. Dans le deuxième cas, on suppose que $2 \leq 2\alpha < 3$, on vérifie que si $p > \frac{2}{3-2\alpha}$, $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$, on a :

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} F(\theta) \varphi \, dx \, dt \right| \leq C \|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}^\alpha \cdot \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + C' \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

pour θ dans $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ et pour tout φ dans $C_0^\infty(Q)$. On fixe alors θ dans $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ et on définit $\hat{\theta}$ comme ci-dessus. On a alors $\hat{\theta} \in L^\infty(0, T, L^1(\Omega))$ avec $\|\hat{\theta}\|_{L^\infty(0,T,L^1(\Omega))} \leq M$,

et $\int_0^T \int_\Omega |DT_K(\hat{\theta})|^2 dx dt \leq K \cdot M$, $\forall K > 0$. On en déduit que $\forall q, r$ tel que $1 < q < \infty$, et $r < \frac{q}{q-1}$, $\hat{\theta} \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$, et il existe donc une constante $C(q, r, \Omega, N)$ telle que $\|\hat{\theta}\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))} \leq C \cdot M$. En utilisant les estimations sur $\hat{\theta}$, on montre que l'application ψ_2 (définie par $\psi_2(\theta) = \hat{\theta}$) vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ dans lui-même, sous réserve que les données soient petites. On en déduit l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) du système (2.13) – (2.17) telle que θ est bornée dans $L^r(0, T; L^q(\Omega))$. Dans la Section 2.4, on distingue deux cas suivant les valeurs de α . Dans le premier cas, on suppose que $1 < 2\alpha < 3$. On introduit un problème approché du système (2.13) – (2.17) en régularisant la fonction b par b_ε . Le travail établi dans la Section 2.3 nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution faible-renormalisée de ce système. Enfin, on passe à la limite dans le système approché pour déduire l'existence d'une solution faible-renormalisée du système couplé (2.13) – (2.17). Dans le deuxième cas, on suppose que $0 \leq 2\alpha \leq 1$. On introduit un problème approché du système (2.13) – (2.17) en remplaçant la fonction F par $F^\varepsilon = F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. Le travail établi dans le Chapitre 1 nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution faible-renormalisée de ce système, tout en s'affranchissant de l'hypothèse de petites données. Enfin, on passe à la limite dans le système approché pour déduire l'existence d'une solution faible-renormalisée du système couplé (2.13) – (2.17). Dans la cinquième section, on établit l'existence d'une solution faible-renormalisée du système (2.13) – (2.17) en dimension $N = 3$, sous des conditions très particulières, en effet, on suppose que F et u_0 sont très petites. Enfin, dans la sixième et dernière section, on énonce et on démontre quelques résultats d'unicité du système couplé en dimension 2.

Dans la suite nous étudions le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.13)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.15)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.16)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.17)$$

2.2 Existence et stabilité pour une fonction b plus régulière

Dans cette section, nous supposons de plus que :

$$b' \text{ est localement lipschitzienne sur } \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Il s'agit de montrer un résultat d'existence de solution sous cette condition supplémentaire sur b , mais uniquement dans le cas où $1 < 2\alpha < 3$. Le cas où $0 \leq 2\alpha \leq 1$ sera traité

directement dans la section 2.4 sans passer par l'étape intermédiaire où l'on suppose que b' est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.18), et que la fonction F vérifie*

$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha$, avec $a \geq 0, M \geq 0$, alors :

si $1 < 2\alpha < 3$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible-renormalisée du système (2.13) – (2.17) (au sens de la Définition 1.2.2).

Remarque 2.2.2. *Dans la Définition 1.2.2, le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ devient $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ si $2 \leq 2\alpha < 3$.*

Preuve du Théorème 2.2.1.

Nous utilisons une méthode de point fixe.

Selon les valeurs de α , la fonction θ sera choisit dans un espace particulier.

- $\theta \in L^{2\alpha}(Q)$ si $1 < 2\alpha < 2$.

- $\theta \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$ si $2 \leq 2\alpha < 3$, avec pour ce dernier cas, $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$. Le nombre réel p' est l'exposant conjugué de p , où p vérifie $p > \frac{2}{3-2\alpha}$.

Considérons maintenant le problème suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.19)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.20)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.21)$$

$$u(t=0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.22)$$

Lemme 2.2.3. *On suppose vérifiées les hypothèses (2.9), (2.10), (2.11). La fonction F vérifie l'hypothèse de croissance (2.6) telle que $2\alpha \in]1, 3[$. Selon les valeurs de α , θ est fixé dans un espace particulier comme ci-dessus. Alors il existe une unique solution faible u du problème (2.19) – (2.22) telle que $u \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Preuve du Lemme 2.2.3.

Pour tout 2α appartenant à $]1, 3[$, la fonction θ est fixé dans un espace de telle sorte que $F(\theta) \in L^2(Q)$ où alors $F(\theta)$ s'identifie à un élément de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. En effet, prenons par exemple le cas où $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$, on a $2 \leq \frac{2}{3-2\alpha} < \infty$.

On choisit p tel que $\frac{2}{3-2\alpha} < p < \infty$, alors $p > 2$. Soit p' le conjugué de Hölder de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

On note $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$.

Soit une fonction φ dans $C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\theta^\alpha| |\varphi| dx dt &\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |\theta^{\alpha p'}| dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi^p| dx \right)^{\frac{1}{p}} dt, \\ &\leq \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\theta^{\alpha p'}| dx \right)^{\frac{2}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\varphi^p| dx \right)^{\frac{2}{p}} dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'après les inclusions de Sobolev, on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega |\theta^\alpha| |\varphi| dx dt \leq C \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\theta^q| dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{q}{p'r}} \cdot \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))},$$

ce qui implique :

$$\int_0^T \int_\Omega |\theta^\alpha| |\varphi| dx dt \leq C \|\theta\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}^\alpha \cdot \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Et d'après la croissance de F , on a :

$$\left| \int_0^T \int_\Omega F(\theta) \varphi dx dt \right| \leq C \|\theta\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}^\alpha \cdot \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + C' \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Donc la fonction $F(\theta)$ s'identifie à un élément de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. D'après la Remarque 1.3.3, il existe une unique solution faible u du problème (2.19) – (2.22) telle que $u \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$.

On passe maintenant à l'analyse du second problème qui provient du système (2.13) – (2.17) :

$$b(\hat{\theta})_t + u \cdot \nabla b(\hat{\theta}) - \Delta \hat{\theta} = 2\mu(\theta) |Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.23)$$

$$\hat{\theta} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.24)$$

$$b(\hat{\theta})(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.25)$$

Lemme 2.2.4. *On choisit θ comme dans le Lemme 2.2.3, u est l'unique solution du problème (2.19)–(2.22), sous les hypothèses (2.7), (2.8), (2.9) et (2.12), il existe une unique solution renormalisée $\hat{\theta}$ du problème (2.23)–(2.25) telle que $T_K(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \forall K \geq 0$ et $b(\hat{\theta}) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.*

Preuve du Lemme 2.2.4.

Voir les étapes 1 à 8 du premier chapitre.

RETOUR À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (2.2.1) :

Dans la suite, nous distinguons deux cas possibles :

CAS 1 : $1 < 2\alpha < 2$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned}\psi_1 : L^{2\alpha}(Q) &\longrightarrow L^{2\alpha}(Q) : \\ \theta &\longrightarrow \hat{\theta} = \psi_1(\theta),\end{aligned}$$

où $\hat{\theta}$ est donnée par le Lemme 2.2.4.

Dans un premier temps, nous rappelons le lemme suivant dont la démonstration a été faite dans le premier chapitre :

Lemme 2.2.5. $\forall p \in [1, 2[$, il existe une constante $c(p, N, \Omega, T)$ qui dépend uniquement de p, N, Ω , et T telle que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}).$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que ψ_1 est compacte, continue et qu'il existe une boule B de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$.

ψ_1 est compacte :

soit θ_n une suite de fonctions bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$, et la suite $\hat{\theta}_n$ définie par :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, d'après le lemme (2.2.3), u_n est l'unique solution faible du problème suivant :

$$u_{nt} + (u_n \cdot \nabla)u_n - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta_n)Du_n) = F(\theta_n) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.26)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\operatorname{div} u_n = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.27)$$

$$u_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.28)$$

$$u_n(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.29)$$

D'après la définition de ψ_1 (voir le Lemme 2.2.4), pour $n \geq 1$ fixé, $\hat{\theta}_n$ est l'unique solution renormalisée du problème suivant :

$$b(\hat{\theta}_n)_t + u_n \cdot \nabla b(\hat{\theta}_n) - \Delta \hat{\theta}_n = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.30)$$

$$\hat{\theta}_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.31)$$

$$b(\hat{\theta}_n)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.32)$$

D'après la croissance de F (voir (2.6)), on déduit que $F(\theta_n)$ est bornée dans $L^2(Q)$. Nous avons alors, comme dans le chapitre 1 :

$$u_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (2.33)$$

$$u_{nt} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)).$$

Nous pouvons alors extraire une sous-suite telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (2.34)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \quad (2.35)$$

$$u_{nt} \rightharpoonup u_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)), \quad (2.36)$$

quand n tend vers $+\infty$, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$. Cela implique que :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q). \quad (2.37)$$

Utilisant cette fois-ci l'estimation (2.37), ainsi que le Lemme 2.2.5, on obtient :

$$\hat{\theta}_n \text{ est bornée dans } L^p(Q), \quad (2.38)$$

pour tout $p \in [1, 2[$.

Pour $n \geq 1$ fixé, nous avons en particulier :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} + \operatorname{div}(u_n \cdot S(b(\hat{\theta}_n))) - \operatorname{div}(S'(b(\hat{\theta}_n))D\hat{\theta}_n) \\ & + S''(b(\hat{\theta}_n))b'(\hat{\theta}_n)|D\hat{\theta}_n|^2 = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 S'(b(\hat{\theta}_n)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \end{aligned} \quad (2.39)$$

★ ESTIMATIONS A PRIORI : On prend $T_K(\hat{\theta}_n)$ comme fonction test dans (2.39), avec $S = S_M$, et $S_M \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ telle que S'_M soit à support compact ($\operatorname{supp}(S'_M) \subset [-M, M]$), $S'_M = 1$ dans $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$ et $S_M(0) = 0$.

En reprenant le même raisonnement du paragraphe (i), Section 3 (ψ_1 est compacte) du Chapitre 1, on retrouve les estimations suivantes :

$$S_M(b(\hat{\theta}_n)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.40)$$

et

$$\frac{\partial S_M(b(\hat{\theta}_n))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^1(Q), \quad (2.41)$$

pour tout $M \geq 1$. D'après ce même raisonnement, et grâce aux estimations (2.40) et (2.41), on vérifie que pour une sous-suite toujours indexée par n , il existe une fonction ϑ telle que :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \vartheta \text{ dans } Q, \quad (2.42)$$

$$b(\hat{\theta}_n) \text{ converge presque partout vers } b(\vartheta) \text{ dans } Q, \quad (2.43)$$

et

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge faiblement vers } T_K(\vartheta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.44)$$

pour tout $K \geq 0$, quand n tend vers $+\infty$. En utilisant (2.38), et (2.42), on conclut que :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^q(Q), \quad (2.45)$$

pour tout q vérifiant $q < p$, avec $1 \leq p < 2$,
alors

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^p(Q), \quad (2.46)$$

pour tout p vérifiant $1 \leq p < 2$, en particulier :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^{2\alpha}(Q), \quad (2.47)$$

puisque $1 < 2\alpha < 2$.

ii- ψ_1 est continue :

soit θ_n une suite de fonctions de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que :

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ fortement dans } L^{2\alpha}(Q), \quad (2.48)$$

quand n tend vers $+\infty$ (avec $1 < 2\alpha < 2$), où θ est une fonction appartenant à $L^{2\alpha}(Q)$. Soit $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\theta}$ définies par :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n \text{ et } \psi_1(\theta) = \hat{\theta}.$$

On suit le même type de raisonnement que dans (i), on rappelle que pour une sous-suite toujours indexée par n , il existe une fonction ϑ telle que :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \vartheta \text{ dans } Q,$$

$$b(\hat{\theta}_n) \text{ converge presque partout vers } b(\vartheta) \text{ dans } Q,$$

et

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge faiblement vers } T_K(\vartheta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

pour tout $K \geq 0$, quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, on a :

$$F(\theta_n) \rightharpoonup F(\theta) \text{ dans } L^2(Q),$$

quand n tend vers l'infini et u_n est compacte dans $L^2(Q)$. On en déduit :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)),$$

quand n tend vers l'infini. Dans la suite, il suffit de reprendre exactement le même raisonnement du paragraphe (iii), Section 3 (ψ_1 est continue) du Chapitre 1 pour conclure que ϑ est une solution renormalisée du problème (2.23) – (2.25). D'après le Lemme (2.2.4), on conclut que :

$$\vartheta = \hat{\theta} \text{ p.p. dans } Q,$$

d'après l'estimation (2.42), on obtient :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} \text{ dans } Q. \quad (2.49)$$

Les estimations (2.38) et (2.49) impliquent :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta} \text{ fortement dans } L^q(Q), \quad (2.50)$$

pour tout q tel que $q < p$, avec $1 \leq p < 2$,
alors

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta} \text{ fortement dans } L^p(Q), \quad (2.51)$$

pour tout p tel que $1 \leq p < 2$,
par conséquent :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta} \text{ fortement dans } L^{2\alpha}(Q), \quad (2.52)$$

car $1 < 2\alpha < 2$.

iii-Il existe une boule B de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$:
on cherche à déterminer un nombre réel positif R , tel que :

$$\psi_1(B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R)) \subset B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R).$$

On suppose que θ appartient à $B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R)$.

On rappelle que u , appartenant à $L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega))$ est l'unique solution du problème (2.19) – (2.22). On utilise alors u comme une fonction test dans (2.19), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega |u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta) |Du|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega F(\theta) \cdot u dx dt + \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0|^2 dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega |u(t)|^2 dx + \frac{m_0}{2} \int_0^T \int_\Omega |Du|^2 dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_\Omega F(\theta) \cdot u dx dt + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$m_0 \int_0^T \int_\Omega |Du|^2 dx dt \leq 2 \int_0^T \|F(\theta)\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.53)$$

D'après l'estimation (2.53), ainsi que l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$m_0 \int_0^T \int_\Omega |Du|^2 dx dt \leq c_1 \int_0^T \|F(\theta)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.54)$$

où c_1 est une constante, l'inégalité de Young, l'estimation (2.54) ainsi que l'inégalité de Korn nous permettent de conclure que :

$$\int_0^T \int_\Omega |Du|^2 dx dt \leq \frac{c_1^2}{m_0^2} \|F(\theta)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{2}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.55)$$

D'après le Lemme (2.2.5), et l'estimation (2.55), on a :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T) \left[\frac{m_1 c_1^2}{m_0^2} \|F(\theta)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{2m_1}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right], \quad (2.56)$$

pour tout p tel que $1 \leq p < 2$.

D'après la croissance de F , on obtient :

$$|F(\theta)|^2 \leq 2(a^2 + M^2|\theta|^{2\alpha}) \text{ p.p. dans } Q,$$

alors

$$\|F(\theta)\|_{L^2(Q)}^2 \leq 2a^2 \text{mes}(\Omega)T + 2M^2\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha}. \quad (2.57)$$

Il s'ensuit d'après (2.56) et (2.57) que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T) \left[\frac{2m_1 c_1^2}{m_0^2} a^2 \text{mes}(\Omega)T + \frac{2m_1 c_1^2}{m_0^2} M^2 \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha} + \frac{2m_1}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right],$$

pour tout p tel que $1 \leq p < 2$. Puisque $1 < 2\alpha < 2$, nous avons en particulier :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq c(\alpha, N, \Omega, T) \left[\frac{2m_1 c_1^2}{m_0^2} a^2 \text{mes}(\Omega)T + \frac{2m_1 c_1^2}{m_0^2} M^2 \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha} + \frac{2m_1}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right].$$

On en déduit que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq c \left[a^2 + M^2 \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right],$$

avec c une constante qui ne dépend pas de $\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}$.

Maintenant, on cherche à déterminer un nombre réel positif R tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R.$$

On sait que s'il existe un nombre réel positif η , suffisamment petit tel que :

$$a^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta,$$

alors, il existe $R(\eta) > 0$ tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha}(\eta) + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R(\eta),$$

cela implique :

$$\psi_1(B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R(\eta))) \subset B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R(\eta)).$$

On applique le théorème du point fixe de Schauder. D'après la définition de ψ_1 , on conclut que sous la condition de petites données, il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.13) – (2.17) telle que :

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq R(\eta),$$

pour η suffisamment petit.

CAS 2 : $2 \leq 2\alpha < 3$. Dans un premier temps, nous allons donner la preuve du lemme suivant :

Lemme 2.2.6. *Soit θ une fonction mesurable définie sur Q , et une constante $M > 0$, telle que :*

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} \leq M, \quad (2.58)$$

$$\forall K > 0, T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ et } \int_Q |DT_K(\theta)|^2 dx dt \leq K M, \quad (2.59)$$

alors, pour tout q, r vérifiant $1 < q < \infty$, et $r < \frac{q}{q-1}$, on a $\theta \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$, et il existe une constante C (qui dépend de T, r, q, Ω, N) telle que

$$\|\theta\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))} \leq C M.$$

Preuve du Lemme 2.2.6.

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |T_K(\theta)|^3 dx &\leq C \int_\Omega |T_K(\theta)| dx \int_\Omega |DT_K(\theta)|^2 dx, \\ &\leq C M \int_\Omega |DT_K(\theta)|^2 dx, \end{aligned}$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

Ce qui implique :

$$\text{mes}\{(x, t) : |\theta| > K\} \leq C \frac{M}{K^3} \int_\Omega |DT_K(\theta)|^2 dx. \quad (2.60)$$

On écrit :

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt = \int_0^T \left(\int_0^\infty \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta|^q > s\} ds \right)^{\frac{r}{q}} dt,$$

d'après l'estimation (2.58), on a :

$$\text{mes}\{x \in \Omega : |\theta| > K\} \leq \frac{M}{K}, \quad (2.61)$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

Pour presque tout t dans $(0, T)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)|^q > s\} &= \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)| > s^{\frac{1}{q}}\} \\ &= \left(\text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)| > s^{\frac{1}{q}}\} \right)^o \left(\text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)| > s^{\frac{1}{q}}\} \right)^{1-o}, \end{aligned}$$

les estimations (2.60) et (2.61), impliquent :

$$\text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)|^q > s\} \leq CM^o \left(\frac{\int_{\Omega} |DT_{s^{\frac{1}{q}}}(\theta)|^2 dx}{s^{\frac{3}{q}}} \right)^o \frac{M^{1-o}}{s^{\frac{1-o}{q}}},$$

On en déduit :

$$\text{mes}\{x \in \Omega : |\theta(t, x)|^q > s\} \leq CM \left(\int_{\Omega} |DT_{s^{\frac{1}{q}}}(\theta)|^2 dx \right)^o \frac{1}{s^{\frac{1+2o}{q}}}, \quad (2.62)$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

Dans ce qui suit, la preuve de ce lemme sera divisée en trois étapes.

Étape 1 : $q = r$. On pose $o = 1$. Soit un nombre réel positif β , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt &\leq \int_0^T \int_0^{\beta} \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta|^q > s\} ds dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\beta}^{\infty} \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta|^q > s\} ds dt. \end{aligned}$$

D'après (2.62), on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt \leq \beta T |\Omega| + CM \int_0^T \int_{\beta}^{\infty} \int_{\Omega} |DT_{s^{\frac{1}{q}}}(\theta)|^2 dx \frac{1}{s^{\frac{3}{q}}} ds dt.$$

Le théorème de Fubini permet de conclure que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt &\leq \beta T |\Omega| + CM \int_{\beta}^{\infty} \int_0^T \int_{\Omega} |DT_{s^{\frac{1}{q}}}(\theta)|^2 dx \frac{1}{s^{\frac{3}{q}}} dt ds, \\ &\leq \beta T |\Omega| + CM \int_{\beta}^{\infty} \frac{M}{s^{\frac{2}{q}}} ds. \end{aligned}$$

Rappelons que $q < 2$ (par hypothèse), alors :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt \leq \beta T |\Omega| + CM^2 \frac{\beta^{1-\frac{2}{q}}}{-1 + \frac{2}{q}}.$$

On pose $\beta = M^q$, on en déduit que :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt \leq M^q (T |\Omega| + \frac{Cq}{2-q}).$$

Étape 2 : $q < r$. Soit un nombre réel positif β , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt &\leq \int_0^T \left(\int_0^{\beta} \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta|^q > s\} ds \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &+ \int_0^T \left(\int_{\beta}^{\infty} \text{mes}\{x \in \Omega : |\theta|^q > s\} ds \right)^{\frac{r}{q}} dt. \end{aligned}$$

On pose $o = \frac{q}{r}$ dans (2.62), on obtient :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \beta^{\frac{r}{q}} |\Omega|^{\frac{r}{q}} T + C \int_0^T \left(\int_{\beta}^{\infty} \frac{M \left(\int_{\Omega} |DT_{\frac{1}{s^q}}(\theta)|^2 dx \right)^{\frac{q}{r}}}{s^{\frac{1}{q} + \frac{2}{r}}} ds \right)^{\frac{r}{q}} dt.$$

Pour un nombre réel $\gamma > 1$, on écrit :

$$\left(\int_{\Omega} |DT_{\frac{1}{s^q}}(\theta)|^2 dx \right)^{\frac{q}{r}} = \left(\frac{\int_{\Omega} |DT_{\frac{1}{s^q}}(\theta)|^2 dx}{s^{\frac{1}{q} + \gamma}} \right)^{\frac{q}{r}} s^{\frac{1}{r} + \frac{\gamma q}{r}},$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt &\leq \beta^{\frac{r}{q}} |\Omega|^{\frac{r}{q}} T \\ &+ CM^{\frac{r}{q}} \int_0^T \left[\int_{\beta}^{\infty} \frac{\int_{\Omega} |DT_{\frac{1}{s^q}}(\theta)|^2 dx}{s^{\frac{1}{q} + \gamma}} \right] ds \cdot \left[\int_{\beta}^{\infty} \frac{ds}{s^{[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q}}} \right]^{\frac{r-q}{q}} dt, \end{aligned}$$

l'intégrale $\left[\int_{\beta}^{\infty} \frac{ds}{s^{[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q}}} \right]^{\frac{r-q}{q}}$ est finie et indépendante de t , si et seulement

si on a $[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q} > 1$.

Le théorème de Fubini implique :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \beta^{\frac{r}{q}} |\Omega|^{\frac{r}{q}} T + CM^{1+\frac{r}{q}} \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{s^{\gamma}} ds \cdot \left[\int_{\beta}^{\infty} \frac{ds}{s^{[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q}}} \right]^{\frac{r-q}{q}},$$

on sait que $r < \frac{q}{q-1}$ (par hypothèses du Lemme 2.2.6), alors $1 + \frac{1}{q} + \frac{r}{q^2} - \frac{r}{q} > 1$, il existe un nombre réel γ tel que $1 < \gamma < 1 + \frac{1}{q} + \frac{r}{q^2} - \frac{r}{q}$, il est facile de vérifier

qu'on a $[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1 - q\gamma)]\frac{r}{r-q} > 1$.

On a également :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \beta^{\frac{r}{q}} |\Omega|^{\frac{r}{q}} T + CM^{1+\frac{r}{q}} \frac{\beta^{1-\gamma}}{\gamma-1} \cdot \frac{\beta^{[1-[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q}]\frac{r-q}{q}}}{[\frac{1}{q} + \frac{1}{r}(1-q\gamma)]\frac{r}{r-q} - 1},$$

si on pose $\beta = M^q$, on conclut que :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq C(\gamma, r, q, N) M^r.$$

Étape 3 : $r < q$. Si $q < 2$, alors $r < 2$. D'après l'inégalité de Hölder on a :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq C(r, q, \Omega, T) \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^q dx dt \right)^{\frac{r}{q}},$$

d'après la première étape, on a :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq C(r, q, \Omega, T) M^r.$$

Si $q \geq 2$, pour $0 < o < 1$, l'inégalité de Hölder implique :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} &\leq \left(\int_{\Omega} |\theta|^{q-o+o} dx \right)^{\frac{r}{q}}, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\theta| dx \right)^{\frac{or}{q}} \left(\int_{\Omega} |\theta|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{(1-o)r}{q}}, \end{aligned}$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

L'estimation (2.58) nous donne :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq M^{\frac{or}{q}} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{1-o}{q-o} \frac{r(q-o)}{q}} dt. \quad (2.63)$$

Dans la suite, on montre que pour tout $K > 0$:

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{1-o}{q-o} \frac{r(q-o)}{q}} dt \leq CM. \quad (2.64)$$

On rappelle que $N = 2$, d'après les inclusions de Sobolev, on obtient :

$$\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^p dx \leq C(p, |\Omega|) \left(\int_{\Omega} |DT_K(\theta)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}, \quad (2.65)$$

pour tout $p \geq 2$.

on prend $p = \frac{2q}{(1-o)r}$, et on écrit :

$$|T_K(\theta)|^{\frac{q-o}{1-o}} \leq |T_K(\theta)|^p \cdot K^{\frac{1}{1-o}(q-o-\frac{2q}{r})},$$

pour presque tout (x, t) dans Q , alors :

$$\left(\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{1-o}{q-o} \frac{r(q-o)}{q}} \leq K^{\frac{r}{q}(q-o-\frac{2q}{r})} \left(\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}},$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

D'après l'estimation (2.65), on déduit que :

$$\left(\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{1-o}{q-o} \frac{r(q-o)}{q}} \leq c K^{\frac{r}{q}(q-o-\frac{2q}{r})} \int_{\Omega} |DT_K(\theta)|^2 dx,$$

pour presque tout t dans $(0, T)$.

Cela implique :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |T_K(\theta)|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{(1-o)r}{q}} dt \leq CK^{\frac{r}{q}(q-o-\frac{2q}{r})} KM,$$

par hypothèses du Lemme 2.2.6, on sait que $r < \frac{q}{q-1}$, alors $0 < \frac{q}{r}(r-1) < 1$, on peut prendre $o = \frac{q}{r}(r-1)$, la preuve de (2.64) est alors terminée.

L'estimation (2.64) et le lemme de Fatou permettent de conclure que :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^{\frac{q-o}{1-o}} dx \right)^{\frac{1-o}{q-o} \frac{r(q-o)}{q}} dt \leq CM, \quad (2.66)$$

d'après (2.63), on déduit que :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq C(\gamma, r, q, N) M^r.$$

La preuve du Lemme 2.2.6 est alors complète.

On rappelle que si $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ alors $2 \leq \frac{2}{3-2\alpha} < \infty$.

On choisit p tel que $\frac{2}{3-2\alpha} < p < \infty$, alors $p > 2$. Soit p' le conjugué de Hölder de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

$$1 < p' < \frac{2}{2\alpha - 1}.$$

On pose $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$.

On remarque que r et q vérifient $1 < q < \infty$, et $r < \frac{q}{q-1}$. Soit θ une fonction de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$. Dans la preuve du Lemme 2.2.3, on a montré que la fonction $F(\theta)$ s'identifie à un élément de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et qu'on a :

$$\|F(\theta)\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \leq C(a + \|\theta\|_{L^{2\alpha}(L^q(\Omega))}^\alpha). \quad (2.67)$$

D'après le Lemme 2.2.3, il existe une solution unique $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ du problème (2.19) – (2.22). De plus d'après le Lemme 2.2.4, il existe une solution re-normalisée unique $\hat{\theta}$ du problème (2.23) – (2.25) telle que $T_K(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\forall K \geq 0$ et $b(\hat{\theta}) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

On définit l'application suivante :

$$\psi_2 : L^r(0, T; L^q(\Omega)) \longrightarrow L^r(0, T; L^q(\Omega))$$

$$\theta \longrightarrow \hat{\theta} = \psi_2(\theta)$$

On sait que $\hat{\theta}$ vérifie les estimations (1.168), (1.170). Le Lemme (2.2.6) permet alors de déduire que $\hat{\theta} \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$. L'application ψ_2 est bien définie.

Dans ce qui suit, nous allons démontrer que ψ_2 est compacte, continue et qu'il existe une boule B de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ telle que $\psi_2(B) \subset B$.

i - ψ_2 est compacte :

On définit une suite de fonctions θ_n bornée dans $L^r(0, T; L^q(\Omega))$, et la suite $\hat{\theta}_n$ par

$$\psi_2(\theta_n) = \hat{\theta}_n.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, d'après le Lemme (2.2.3), u_n est l'unique solution du problème suivant :

$$u_{nt} + (u_n \cdot \nabla)u_n - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta_n)Du_n) = F(\theta_n) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.68)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\operatorname{div} u_n = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.69)$$

$$u_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.70)$$

$$u_n(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.71)$$

Grâce à l'estimation (2.67), on déduit que $F(\theta_n)$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Alors :

$$u_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (2.72)$$

$$u_{nt} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)).$$

On peut alors extraire une sous-suite telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (2.73)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \quad (2.74)$$

$$u_{nt} \rightharpoonup u_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)), \quad (2.75)$$

quand n tend vers $+\infty$, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$.
(voir [31] et [17]).

Cela implique :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q). \quad (2.76)$$

D'après la définition de ψ_2 , l'estimation (2.76), et le Lemme 2.2.4, nous obtenons pour $n \geq 1$ fixé :

$\hat{\theta}_n$ est l'unique solution renormalisée du problème suivant :

$$b(\hat{\theta}_n)_t + u_n \cdot \nabla b(\hat{\theta}_n) - \Delta \hat{\theta}_n = 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.77)$$

$$\hat{\theta}_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.78)$$

$$b(\hat{\theta}_n)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.79)$$

L'estimation (2.76) implique que les hypothèses du Lemme (2.2.6) sont satisfaites et par conséquent :

$$\hat{\theta}_n \text{ est bornée dans } L^{r_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega)), \quad (2.80)$$

pour tout couple (q_1, r_1) tel que $1 < q_1 < \infty$ et $r_1 < \frac{q_1}{q_1-1}$.

On suit le même raisonnement de (i), dans le cas où $1 < 2\alpha < 2$, on obtient :

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \vartheta,$$

à une sous-suite près, presque partout dans Q , quand n tend vers $+\infty$, où ϑ est une fonction mesurable.

Maintenant, on démontre que :

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \vartheta,$$

fortement dans $L^r(0, T; L^q(\Omega))$, quand n tend vers $+\infty$.

Dans un premier temps, on montre qu'ils existent q_1 et r_1 tel que $q_1 > q$, $r_1 > r$, $1 < q_1 < \infty$ et $r_1 < \frac{q_1}{q_1-1}$.

On sait que $p > \frac{2}{3-2\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha p}{p-1} < \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, on choisit q_1 tel que $\frac{\alpha p}{p-1} < q_1 < \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$.

$$q_1 > \alpha p' \Rightarrow q_1 > q.$$

$$q_1 < \frac{2\alpha}{2\alpha-1} \Rightarrow 2\alpha < \frac{q_1}{q_1-1},$$

on choisit r_1 tel que

$$2\alpha < r_1 < \frac{q_1}{q_1-1},$$

cela implique $r_1 > r$ et $r_1 < \frac{q_1}{q_1-1}$. On utilise l'inégalité de Hölder :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \int_0^T \left(\int_\Omega |\hat{\theta}_n|^{q_1} dx \right)^{\frac{r}{q_1}} \cdot (\text{mes } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1-q}{q_1} \frac{r}{q}} dt,$$

alors

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\hat{\theta}_n|^{q_1} dx \right)^{\frac{r_1}{q_1}} dt \right)^{\frac{r}{r_1}} \cdot I, \quad (2.81)$$

$$\text{où } I = \left(\int_0^T (\text{mes } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}} dt \right)^{\frac{r_1 - r}{r_1}}.$$

On a pour presque tout t dans $(0, T)$:

$$\text{mes } \{x \in \Omega; |\hat{\theta}_n| > K\} \leq \frac{M}{K},$$

car $\hat{\theta}_n$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. Alors

$$\int_0^T (\text{mes } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}} dt \leq T \frac{M^s}{K^s},$$

où $s = \frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}$, on en déduit :

$$\left(\int_0^T (\text{mes } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}} dt \right)^{\frac{r_1 - r}{r_1}} \leq T^{\frac{r_1 - r}{r_1}} \frac{M^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q}}}{K^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q}}}.$$

Finalement, on obtient :

$$\left(\int_0^T (\text{mes } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}} dt \right)^{\frac{r_1 - r}{r_1}} \text{ tend vers zéro, quand } K \text{ tend vers } +\infty,$$

indépendamment de n . D'après les estimations (2.81) et (2.80), on conclut que :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \text{ tend vers zéro quand } K \text{ tend vers } +\infty, \quad (2.82)$$

indépendamment de n . On rappelle que :

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \vartheta,$$

presque partout dans Q , quand n tend vers $+\infty$. De plus, en suivant le même raisonnement que (i) et (ii), dans le cas où $1 < 2\alpha < 2$, on conclut que ϑ satisfait (2.58) et (2.59). Grâce au Lemme (2.2.6), on obtient en particulier :

$$\vartheta \in L^{r_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega)).$$

A présent, on observe l'inégalité :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx + \int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt,$$

d'après l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt &\leq C \int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &\quad + C \int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Pour presque tout t dans $(0, T)$, on a :

$$|\hat{\theta}_n - \vartheta|^q \chi_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} \rightarrow 0,$$

p.p. dans Ω , quand n tend vers $+\infty$ et

$$|\hat{\theta}_n - \vartheta|^q \chi_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} \leq C(K^q + |\vartheta|^q) \in L^1(\Omega),$$

pour presque tout t dans $(0, T)$. Le théorème de Lebesgue implique que :

$$\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \rightarrow 0,$$

quand n tend vers $+\infty$, de plus, nous avons :

$$\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \leq C_1 \left(|\Omega| K^q + \int_{\Omega} |\vartheta|^q dx \right),$$

ce qui implique :

$$\left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} \rightarrow 0,$$

quand n tend vers $+\infty$, pour presque tout t dans $(0, T)$, et

$$\left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} \leq C_2 \left(|\Omega| K^r + \left(\int_{\Omega} |\vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} \right).$$

Soit la fonction définie par :

$$t \longrightarrow |\Omega| K^r + \left(\int_{\Omega} |\vartheta(x, t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} \in L^1(0, T),$$

on applique le théorème de Lebesgue :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| \leq K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \rightarrow 0, \quad (2.84)$$

quand n tend vers $+\infty$.

Dans ce qui suit, on montre que le second membre à droite de l'inégalité (2.83), tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de n . Grâce à l'inégalité de Young, on obtient :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq C_3 \int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt + C_3 \int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt, \quad (2.85)$$

d'après (2.82), le premier terme à droite de l'inégalité (2.85), tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de n . On rappelle que $\vartheta \in L^{r_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, les mêmes arguments qui nous ont permis d'avoir l'estimation (2.82), nous assurent que :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \leq \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\vartheta|^{q_1} dx \right)^{\frac{r_1}{q_1}} dt \right)^{\frac{r}{r_1}} \cdot J$$

$$\text{où } J = \left(\int_0^T (\text{meas } \{|\hat{\theta}_n| > K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1} \frac{r}{q} \frac{r_1}{r_1 - r}} dt \right)^{\frac{r_1 - r}{r_1}},$$

cela implique que le deuxième terme à droite de l'inégalité (2.85), tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de n . On en déduit que :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|\hat{\theta}_n| > K\}} |\hat{\theta}_n - \vartheta|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \rightarrow 0, \quad (2.86)$$

quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de n .

D'après les estimations (2.83), (2.84) et (2.86), on conclut que :

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \vartheta \text{ fortement dans } L^r(0, T; L^q(\Omega)), \quad (2.87)$$

quand n tend vers $+\infty$.

ii- ψ_2 est continue :

soit θ_n une suite de fonctions de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ telle que :

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ fortement dans } L^r(0, T; L^q(\Omega)), \quad (2.88)$$

quand n tend vers $+\infty$, où θ est une fonction qui appartient à $L^r(0, T; L^q(\Omega))$. Soit $\hat{\theta}_n$, et $\hat{\theta}$ définies par :

$$\psi_2(\theta_n) = \hat{\theta}_n \text{ et } \psi_2(\theta) = \hat{\theta}.$$

On suit le même raisonnement que (ii) dans le cas où $1 < 2\alpha < 2$, on rappelle que pour une sous-suite indexée par n , il existe une fonction v telle que :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } v \text{ dans } Q,$$

$b(\hat{\theta}_n)$ converge presque partout vers $b(v)$ dans Q ,

et

$T_K(\hat{\theta}_n)$ converge faiblement vers $T_K(v)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

quand n tend vers $+\infty$.

On sait que l'application :

$$\begin{aligned} L^r(0, T; L^q(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; L^{p'}(\Omega)) \\ \theta &\longrightarrow F(\theta) \end{aligned}$$

est continue et que l'injection $L^2(0, T; L^{p'}(\Omega)) \subset L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ est continue. Donc, d'après (2.88), on déduit que :

$$F(\theta_n) \rightarrow F(\theta) \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \rightarrow \mu(\theta)|Du|^2 \text{ dans } L^1(Q).$$

quand n tend vers $+\infty$. On conclut que v est une solution renormalisée du problème (2.23) – (2.25). D'après le Lemme 2.2.4, on a $v = \hat{\theta}$ p.p. dans Q , alors :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} \text{ dans } Q. \quad (2.89)$$

D'après les mêmes arguments qui ont donné l'estimation (2.80), on sait que $\hat{\theta}_n$ est bornée dans $L^{r_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, pour tout (q_1, r_1) tel que $1 < q_1 < \infty$ et $r_1 < \frac{q_1}{q_1-1}$.

On conclut (compacité de ψ_2) que :

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \hat{\theta} \text{ fortement dans } L^r(0, T; L^q(\Omega)),$$

quand n tend vers $+\infty$.

iii-Il existe une boule B de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ telle que $\psi_2(B) \subset B$

On cherche à déterminer un nombre réel positif R , tel que :

$$\psi_2(B_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}(0, R)) \subset B_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}(0, R).$$

On suppose que θ appartient à $B_{L^r(0, T; L^q(\Omega))}(0, R)$.

On rappelle que u , appartenant à $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ est l'unique solution du problème (2.19) – (2.22). On utilise alors u comme une fonction test dans (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\Omega |u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta) |Du|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega F(\theta) \cdot u dx dt + \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0|^2 dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \frac{m_0}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} F(\theta) \cdot u dx dt + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

d'après la définition de F , on a :

$$\begin{aligned} m_0 \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt & \leq 2 \int_0^T \int_{\Omega} a u dx dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + 2M \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^\alpha u dx dt, \end{aligned}$$

d'après (2.67), on a :

$$m_0 \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq 2a \|u\|_{L^2(Q)} + 2M \|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}^\alpha \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On applique les inégalités de Young et de Poincaré ainsi que l'inégalité de Korn pour obtenir :

$$\frac{m_0}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq c_1 a \|\nabla u\|_{L^2(Q)} + \frac{2M^2}{m_0} \|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On applique une fois de plus les inégalités de Young et de Korn, d'où :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |Du|^2 dx dt \leq \frac{4c_1^2 a^2}{m_0^2} + \frac{8M^2}{m_0^2} \|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}^{2\alpha} + \frac{4}{m_0} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Le Lemme 2.2.6, implique que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq c_2 (\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}),$$

on conclut alors que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq c \left[a^2 + M^2 \|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right],$$

c est une constante indépendante de $\|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}$.

Désormais, on cherche un nombre réel positif R tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R,$$

on sait que s'il existe un nombre réel positif η , suffisamment petit tel que :

$$a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta,$$

alors, il existe $R(\eta) > 0$ tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha}(\eta) + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R(\eta),$$

ce qui implique :

$$\psi_2(B_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}(0, R(\eta))) \subset B_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}(0, R(\eta)).$$

Le théorème du point fixe de Schauder ainsi que la définition de ψ_2 , permettent de conclure qu'il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.13) – (2.17), pour des données petites, telle que :

$$\|\theta\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq R(\eta),$$

pour η suffisamment petit.

2.3 Existence de solution du système couplé

Dans cette section b satisfait (2.7) et (2.8). On ne suppose donc plus b' localement lipschitzienne.

Théorème 2.3.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) et que la fonction F vérifie*

$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha$, avec $a \geq 0, M \geq 0$, alors :

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (2.13) – (2.17) (au sens de la Définition 1.2.2).

- si $1 < 2\alpha < 3$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible-renormalisée du système (2.13) – (2.17).

Preuve du Théorème 2.3.1.

On distingue deux cas suivant les valeurs de α :

CAS 1 : $1 < 2\alpha < 3$. Soit b_ε une suite de fonctions qui régularise b :

b_ε est une suite de fonctions de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0, \forall r \in \mathbb{R}, b_\varepsilon(0) = 0$ et telle que b_ε et b'_ε convergent uniformément vers b et b' successivement sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0.

Puisque $b_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ alors b'_ε est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Sachant que b'_ε converge vers b' uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0, et grâce à l'estimation (2.8), on obtient :

$$b'_\varepsilon(r) \geq \frac{\alpha'}{2} \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

on en déduit que b_ε satisfait (2.7), (2.8) et (2.18).

On considère le problème approché suivant :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon) = F(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.90)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.91)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.92)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.93)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0 \text{ et } b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.94)$$

On a :

$$\begin{aligned} & a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_\varepsilon(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} + \|b_\varepsilon(\theta_0) - b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_\varepsilon(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq \eta + \|b_\varepsilon(\theta_0) - b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé, et suffisamment petit, on en déduit que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_\varepsilon(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta',$$

où η' est un nombre réel positif et suffisamment petit. D'après cette condition et les hypothèses mentionnées dans le Théorème 2.3.1, l'application du Théorème 2.2.1 permet de conclure que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $C(\eta) > 0$ et une solution faible-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.90) – (2.94) telle que :

$$\begin{aligned} \|\theta^\varepsilon\|_{L^{2\alpha}(Q)} & \leq C(\eta) \quad \text{si } 1 < 2\alpha < 2, \\ \|\theta^\varepsilon\|_{L^{r_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega))} & \leq C(\eta) \quad \text{si } 2 \leq 2\alpha < 3. \end{aligned}$$

$$\forall q_1 > 1, \forall r_1 < \frac{q_1}{q_1-1}.$$

Cela implique, et compris dans tous les cas que :

$$F(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

alors :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon & \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} & \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)). \end{aligned}$$

On peut alors extraire une sous-suite telle que :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon & \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \\ u^\varepsilon & \rightarrow u \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \end{aligned}$$

quand ε tend vers 0, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$. Cela implique :

$$\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q).$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} + \operatorname{div}(u^\varepsilon \cdot S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) - \operatorname{div}(S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon) \\ & + S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, il suffit de suivre le même raisonnement que la Section 2.3, pour en déduire que :

$T_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ indépendamment de ε pour tout $K \geq 0$,

$$S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^1_0(\Omega)),$$

et

$$\frac{\partial S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

indépendamment de ε pour $\varepsilon < \frac{1}{M}$, (S_M est définie dans la Section 2.3). À une sous-suite près, nous avons :

θ^ε converge presque partout vers θ dans Q ,

$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge presque partout vers $b(\theta)$ dans Q ,

$T_K(\theta^\varepsilon)$ converge faiblement vers $T_K(\theta)$ dans $L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$,

quand ε tend vers 0, où θ est une fonction mesurable.

Raisonnement identique à celui de la compacité de ψ_2 :

$$\theta^\varepsilon \rightarrow \theta \text{ dans } L^{2\alpha}(L^q),$$

$$\text{alors } F(\theta^\varepsilon) \rightarrow F(\theta) \text{ dans } L^2(H^{-1}),$$

$$\text{d'où } \mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \rightarrow \mu(\theta)|Du|^2 \text{ dans } L^1(Q),$$

Toujours grâce aux mêmes arguments de la troisième section, on démontre les estimations (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), et (1.28).

Par conséquent, il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.13) – (2.17).

CAS 2 : $0 \leq 2\alpha \leq 1$. Si α est nul, il suffit d'appliquer le Théorème 1.4.1 du chapitre 1. On suppose maintenant que $0 < 2\alpha \leq 1$. On procède par approximation et passage

à la limite. On commence par remplacer la fonction F par $F^\varepsilon = F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et on considère le problème approché suivant :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon) = F^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.95)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{\partial b(\theta^\varepsilon)}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla b(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.96)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.97)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.98)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta^\varepsilon)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.99)$$

La fonction F^ε étant et bornée, en appliquant le Théorème 1.4.1 du chapitre 1, on déduit qu'il existe une solution faible-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du système approché (2.95) – (2.99) au sens de la Définition 1.2.2. On obtient (voir la démonstration du Théorème 2.2.1) pour le système (2.95) – (2.99), l'estimation suivante :

$$\int_\Omega |\theta^\varepsilon|(t)dx \leq c_1 \int_0^t \int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha} dx dt + c_2, \quad (2.100)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes qui dépendent de Ω , T et des données.

Pour $2\alpha = 1$, on applique le lemme de Gronwall pour déduire que la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée uniformément en ε dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

Pour $0 < 2\alpha < 1$, on applique d'abord l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité suivante :

$$cx^{2\alpha} \leq c_0 + cx,$$

avant d'appliquer une deuxième fois le lemme de Gronwall pour déduire que la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée uniformément en ε dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

Puisque $2\alpha \leq 1$, par définition de F et F^ε , on conclut que la suite $(F^\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est en particulier bornée uniformément en ε dans $L^2(Q)$.

$\Rightarrow \mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2$ est bornée dans $L^1(Q)$.

Or, u^ε est compact dans $L^2(Q)$, il suffit donc de reprendre le même raisonnement que dans le cas précédent ($1 < 2\alpha < 3$). Il existe alors deux fonctions u et θ telles que :

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)),$$

$$\theta^\varepsilon \rightarrow \theta \text{ presque partout dans } Q,$$

à une sous-suite près, quand ε tend vers 0. Toujours grâce aux mêmes arguments du cas précédent, on démontre les estimations (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), et (1.28).

Ainsi, (u, θ) est une solution faible-renormalisée (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.13) – (2.17).

2.4 Existence de solution en dimension 3

Dans cette section, on suppose que F est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 et bornée.

Théorème 2.4.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (2.7) – (2.12). On suppose de plus que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, et qu'il existe un nombre réel $\eta > 0$, suffisamment petit tel que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta$, alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (2.13) – (2.17) en dimension $N = 3$ (au sens de la Définition 1.2.2).*

Preuve du Théorème 2.4.1.

On se contentera ici de rappeler les différentes étapes principales et nécessaires à l'élaboration d'une preuve. On démontre ce théorème par point fixe et on procède en deux étapes. Dans la première étape, nous supposons de plus que b' est localement Lipschitzienne. Soit la fonction θ dans $L^1(Q)$, on suppose qu'il existe un nombre réel $\eta > 0$, suffisamment petit tel que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta$. Le théorème 3.11 de [32] nous assure l'existence et l'unicité de la solution faible u de l'équation (2.12) dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, avec $\|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C$. À (θ, u) , on associe l'unique solution renormalisée $\hat{\theta}$ du problème suivant :

$$\begin{aligned} b(\hat{\theta})_t + u \cdot \nabla b(\hat{\theta}) - \Delta \hat{\theta} &= 2\mu(\theta)|Du|^2 && \text{dans } Q, \\ \hat{\theta} &= 0 && \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\hat{\theta})(t=0) &= b(\theta_0) && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On définit l'application ψ_3 par :

$$\begin{aligned} \psi_3 : L^1(Q) &\longrightarrow L^1(Q) \\ \theta &\longrightarrow \hat{\theta} = \psi_3(\theta) \end{aligned}$$

Pour les mêmes arguments utilisés dans le Chapitre 1, on montre que ψ_3 vérifie les conditions du théorème de point fixe de Schauder, d'où l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) du système (2.13) – (2.17). Dans la deuxième étape, on note par b_ε la régularisation de b définie par :

b_ε est une suite d'approximations de b , de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0, \forall r \in \mathbb{R}$, $b_\varepsilon(0) = 0$ et telle que b_ε et b'_ε convergent vers b et b' uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0. On rappelle que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, b_ε satisfait les hypothèses (2.7), (2.8) et (2.18).

On considère le problème approché suivant :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon) = F(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (2.101)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{\partial b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (2.102)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.103)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (2.104)$$

$$u^\varepsilon(\cdot, 0) = u_0 \text{ et } b(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.105)$$

On sait qu'il existe un nombre réel $\eta > 0$, suffisamment petit tel que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta$. Donc, d'après le résultat de l'étape 1, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution faible-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.101) – (2.105) où :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)). \end{aligned}$$

Par un lemme de type Aubin (Simon [30]), on peut extraire une sous-suite telle que :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \\ u^\varepsilon &\rightharpoonup u \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \end{aligned}$$

quand ε tend vers 0, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Cela entraîne :

$$\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q),$$

$\forall S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} + \operatorname{div}(u^\varepsilon \cdot S(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))) - \operatorname{div}(S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))D\theta^\varepsilon) \\ &+ S''(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))b'_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|D\theta^\varepsilon|^2 = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 S'(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \end{aligned}$$

Dans la suite, on procédera de la même façon que dans le Chapitre 1, afin de démontrer que :

$$T_K(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ indépendamment de } \varepsilon \text{ pour tout } K \geq 0,$$

$$S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

et

$$\frac{\partial S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

indépendamment de ε pour $\varepsilon < \frac{1}{M}$, (S_M est définie dans la section 1.3). On obtient à une sous suite près que :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge presque partout vers } \theta \text{ dans } Q,$$

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } b(\theta) \text{ dans } Q,$$

$$T_K(\theta^\varepsilon) \text{ converge faiblement vers } T_K(\theta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

quand ε tend vers 0, où θ est une fonction mesurable. Avec les mêmes arguments du chapitre 1, on démontre les estimations (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), et (1.28), d'où l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 1.2.2) du problème (2.13) – (2.17).

2.5 Quelques résultats concernant l'unicité

Dans cette section, on se place sous des conditions particulières, on suppose que $N = 2$, $2\mu = 1$, on suppose également que le second membre de l'équation d'énergie est remplacé par une fonction f donnée qui appartient à $L^2(Q)$. Le théorème suivant montre l'unicité de la solution faible du système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \Delta u = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.107)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.108)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.109)$$

$$u(t = 0) = u_0 \text{ et } \theta(t = 0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.110)$$

Théorème 2.5.1. *On suppose que $N = 2$. La fonction continue F est lipschitzienne et bornée, $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$, et que $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible (u, θ) du système (2.106) – (2.110).*

Preuve du Théorème 2.5.1.

Comme on a supposé que $N = 2$, F est bornée, et que $f \in L^2(Q)$, l'existence d'une solution faible du système (2.106) – (2.110) est un résultat classique. On se contentera de démontrer l'unicité de la solution faible de ce système.

Soient θ_1 et θ_2 deux solutions faibles de l'équation (2.107), en faisant la différence des deux équations en θ_1 et θ_2 , en multipliant par $\theta_1 - \theta_2$, et en intégrant sur Ω puis sur $(0, T)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \int_Q (u_1 \cdot \nabla \theta_1 - u_2 \cdot \nabla \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) dx dt + \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt = 0. \quad (2.111)$$

Le deuxième terme à gauche de l'égalité précédente peut être réécrit sous forme :

$$\begin{aligned} \int_Q (u_1 \cdot \nabla \theta_1 - u_2 \cdot \nabla \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) dx dt &= \int_Q (u_1 - u_2 \cdot \nabla \theta_1)(\theta_1 - \theta_2) dx dt \\ &\quad + \int_Q (u_2 \cdot \nabla \theta_1)(\theta_1 - \theta_2) dx dt - \int_Q (u_2 \cdot \nabla \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) dx dt \\ &= \int_Q (u_1 - u_2 \cdot \nabla(\theta_1 - \theta_2))(\theta_1 - \theta_2) dx dt + \int_Q (u_2 \cdot \nabla(\theta_1 - \theta_2))(\theta_1 - \theta_2) dx dt \\ &\quad + \int_Q ((u_1 - u_2) \cdot \nabla \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) dx dt. \end{aligned}$$

Puisque a est antisymétrique, les deux premiers termes à droite de cette dernière égalité sont nuls, ce qui implique d'après (2.111) :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \int_Q (u_1 - u_2) \nabla \theta_2 (\theta_1 - \theta_2) dx dt + \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt = 0, \quad (2.112)$$

on en déduit :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt \leq \|u_1 - u_2\|_{L^4(Q)} \|\theta_2\|_{L^4(Q)} \|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|_{L^2(Q)}. \quad (2.113)$$

f étant fixée dans $L^2(Q)$, θ_2 est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$. D'après les inclusions de Sobolev, θ_2 est bornée dans $L^4(Q)$. En appliquant maintenant l'inégalité de Young à l'estimation (2.113), on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt \leq C_1 \|u_1 - u_2\|_{L^4(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (2.114)$$

On applique toujours les inclusions de Sobolev en dimension 2, puis les résultats de dépendance continue des équations de Navier-Stokes (voir [31]), on conclut :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt \leq C_2 \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (2.115)$$

F étant lipschitzienne, on a pour presque tout t dans $[0, T]$:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_Q |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^2 dx dt \leq C_2 \int_0^T \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2(t) dx dt. \quad (2.116)$$

Le lemme de Gronwall nous assure alors que $\theta_1 = \theta_2$, les résultats classiques des équations de Navier-Stokes en dimension 2 impliquent que $u_1 = u_2$.

Maintenant, on démontre l'unicité de la solution faible-renormalisée du système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \Delta u = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.118)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.119)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.120)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.121)$$

Théorème 2.5.2. *On suppose vérifiées les hypothèses (2.7), (2.8), (2.11) et (2.12). On suppose de plus que :*

- $N = 2$,
- b est Lipschitzienne,
- F est Lipschitzienne,
- Il existe $M > 0$ telle que $F' = 0$ sur $]-\infty, -M] \cup [M, +\infty[$,
- $f \in L^2(Q)$.

Alors il existe une unique solution faible-renormalisée (u, θ) du système (2.117) – (2.121).

Preuve du Théorème 2.5.2.

On a déjà montré l'existence d'une solution faible-renormalisée en dimension 2 du système (2.117) – (2.121), dans un cadre un peu plus général que celui des hypothèses du Théorème 2.5.2 (voir le Théorème 1.4.1). On s'inspire de la méthode de J.-I Diaz et G. Galiano dans [17] pour montrer l'unicité. Désormais, on suppose qu'il existe deux solutions faible-renormalisées (u_1, θ_1) et (u_2, θ_2) du système (2.117) – (2.121). On pose : $u = u_1 - u_2$, $\theta = S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))$ pour tout $n \geq 1$, et $F_i = F(\theta_i)$, $i = 1, 2$. Alors (u, θ) satisfait :

$$u_t + (u_1 \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u_2 - \Delta u = F_1 - F_2 \text{ dans } Q, \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} & \theta_t + u_1 \cdot \nabla \theta + u \cdot \nabla S_n(b(\theta_2)) - \Delta(Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2)) \\ &= f[S'_n(b(\theta_1)) - S'_n(b(\theta_2))] - S''_n(b(\theta_1))b'(\theta_1)|\nabla\theta_1|^2 + S''_n(b(\theta_2))b'(\theta_2)|\nabla\theta_2|^2 \text{ dans } Q, \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Q, \quad (2.124)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (2.125)$$

$$u(t=0) = 0 \text{ et } \theta(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.126)$$

$$\int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |b(\theta_i)(x,t)| \leq n+1\}} b'(\theta_i)|\nabla\theta_i|^2 dx dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, i = 1, 2, \quad (2.127)$$

où $Z_n(r) = \int_0^r S'_n(b(s)) ds$.

Pour tout $t \in [0, T]$, nous considérons les fonctions test assez régulières w et ξ telles que $w(\cdot, T) = 0$ dans Ω . En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \cdot w dx dt + \int_Q (u_1 \cdot \nabla)u \cdot w dx dt + \int_Q (u \cdot \nabla)u_2 \cdot w dx dt - \int_Q \Delta u w dx dt = \int_Q (F_1 - F_2)w dx dt. \quad (2.128)$$

Rappelons que $b(u_1, u, w) = -b(u_1, w, u)$ et que $b(u, u_2, w) = -b(u, w, u_2)$, alors :

$$- \int_Q u \cdot \frac{\partial w}{\partial t} dx dt - \int_Q u \cdot (u_1 \cdot \nabla)w dx dt - \int_Q u_2 \cdot (u \cdot \nabla)w dx dt - \int_Q u \Delta w dx dt = \int_Q (F_1 - F_2)w dx dt. \quad (2.129)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \theta(T) \xi(T) dx - \int_Q \theta \frac{\partial \xi}{\partial t} - \int_Q u_1 \theta \nabla \xi dx dt + \int_Q u \nabla S_n(b(\theta_2)) \xi dx dt - \int_Q (Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2)) \Delta \xi \\ &= \int_Q f[S'_n(b(\theta_1)) - S'_n(b(\theta_2))] \xi dx dt - \int_Q S''_n(b(\theta_1))b'(\theta_1)|\nabla\theta_1|^2 \xi dx dt \\ & \quad + \int_Q S''_n(b(\theta_2))b'(\theta_2)|\nabla\theta_2|^2 \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.130)$$

En faisant la somme de (2.129) et (2.130), on obtient :

$$\int_\Omega \theta(T) \xi(T) dx = \int_Q u \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla)w + \Delta w \right) dx dt + \int_Q u_2 \cdot (u \cdot \nabla)w dx dt \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_Q (F_1 - F_2)w \, dx \, dt + \int_Q \theta \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1 \cdot \nabla \xi \right) \, dx \, dt - \int_Q \xi u \nabla S_n(b(\theta_2)) \, dx \, dt \\
& + \int_Q (Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2)) \Delta \xi \, dx \, dt + \int_Q f[S'_n(b(\theta_1)) - S'_n(b(\theta_2))] \xi \, dx \, dt \\
& - \int_Q S''_n(b(\theta_1)) b'(\theta_1) |\nabla \theta_1|^2 \xi \, dx \, dt + \int_Q S''_n(b(\theta_2)) b'(\theta_2) |\nabla \theta_2|^2 \xi \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

On exprime maintenant le terme $u_2 \cdot (u \cdot \nabla)w$ en utilisant l'opérateur différentiel L défini par :

$$u \cdot (Lw : u_2) = u \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot u_2, \frac{\partial w}{\partial y} \cdot u_2 \right)$$

Soit $h : Q \longrightarrow [0, +\infty[$ la fonction définie par :

$$h = \begin{cases} \frac{Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2)}{S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))} & \text{si } S_n(b(\theta_1)) \neq S_n(b(\theta_2)), \\ \frac{1}{\max_{\mathbb{R}}(b')} & \text{sinon .} \end{cases}$$

Par définition de Z_n , on a :

$$Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} S'_n(b(s)) \, ds.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\max_{\mathbb{R}}(b')} \left(S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2)) \right) & \leq Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2) \\
& \leq \frac{1}{\min_{\mathbb{R}}(b')} \left(S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2)) \right). \quad (2.132)
\end{aligned}$$

b étant lipschitzienne, il existe alors une constante $k_0 > 0$ telle que $h > k_0$ presque partout dans Q . De même, le caractère lipschitzien de b^{-1} implique que $h \in L^\infty(Q)$. On remarque aussi grâce à (2.132) que si $S_n(b(\theta_1)) = S_n(b(\theta_2))$, alors $Z_n(\theta_1) - Z_n(\theta_2) = 0$. Par ailleurs, on vérifie que si $S_n(b(\theta_1)) = S_n(b(\theta_2))$ pour n suffisamment grand, alors $F_1 - F_2 = 0$ presque partout dans Q . En effet, on distingue deux cas possibles. Dans le premier cas, on suppose que $b(\theta_1) = b(\theta_2)$, alors $\theta_1 = \theta_2$ et par conséquent $F_1 - F_2 = 0$. Dans le deuxième cas, on suppose que $b(\theta_1) \neq b(\theta_2)$. Par définition de S_n , on a de toute évidence $b(\theta_1) > n + 1$ et $b(\theta_2) > n + 1$ (ou alors $b(\theta_1) < -(n + 1)$ et $b(\theta_2) < -(n + 1)$). Cela implique $\theta_1 > b^{-1}(n)$ et $\theta_2 > b^{-1}(n)$. Pour n suffisamment grand, on peut supposer que $b^{-1}(n) > M$. On en déduit que $\theta_1 > M$ et $\theta_2 > M$ et que $F_1 - F_2 = 0$ presque partout dans Q (car $F' = 0$ sur $] -\infty, -M] \cup [M, +\infty[$). D'après l'égalité (2.131), on a :

$$\int_{\Omega} \theta(T) \xi(T) \, dx = \int_Q u \cdot (w_t + (u_1 \cdot \nabla)w + Lw : u_2 - \xi \nabla S_n(b(\theta_2)) + \Delta w) \, dx \, dt \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_Q \theta(\xi_t + u_1 \cdot \nabla \xi + g \cdot w + h\Delta \xi) dx dt + \int_Q f[S'_n(b(\theta_1)) - S'_n(b(\theta_2))] \xi dx dt \\
& - \int_Q S''_n(b(\theta_1))b'(\theta_1)|\nabla \theta_1|^2 \xi dx dt + \int_Q S''_n(b(\theta_2))b'(\theta_2)|\nabla \theta_2|^2 \xi dx dt,
\end{aligned}$$

où

$$g = \begin{cases} \frac{F(\theta_1) - F(\theta_2)}{S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))} & \text{si } S_n(b(\theta_1)) \neq S_n(b(\theta_2)), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour n suffisamment grand.

Mettons nous par exemple dans le cas où $b(\theta_1) < n$ et $b(\theta_2) < n$. Alors :

$$g = \begin{cases} \frac{F(\theta_1) - F(\theta_2)}{b(\theta_1) - b(\theta_2)} & \text{si } b(\theta_1) \neq b(\theta_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque b^{-1} et F sont lipschitziennes, il est clair que $g \in L^\infty(Q)$. Cependant si $b(\theta_1) > n$ et $b(\theta_2) > n$, le caractère lipschitzien de b^{-1} et F ne suffit pas pour avoir g dans $L^\infty(Q)$. On utilise alors l'hypothèse du théorème 2.5.2 :

$$\text{Il existe } M > 0 \text{ telle que } F' = 0 \text{ sur }]-\infty, -M] \cup [M, +\infty[. \quad (2.134)$$

Pour n assez grand, on choisit M telle que $M < b^{-1}(n)$. On obtient alors : $M < b^{-1}(n) < \theta_1$, et $M < b^{-1}(n) < \theta_2$. L'hypothèse (2.134) implique :

$$F(\theta_1) = F(\theta_2) = \text{constante.}$$

Dans le troisième et dernier cas, on suppose que $b(\theta_1) < n$ et que $b(\theta_2) > n$. Alors, pour n suffisamment grand, on a :

$$g = \frac{F(\theta_1) - F(M)}{b(\theta_1) - S_n(b(\theta_2))}.$$

On peut minorer la quantité $|b(\theta_1) - S_n(b(\theta_2))|$ par une constante strictement positive, pour n suffisamment grand, tandis que $F(\theta_1) - F(M)$ reste borné car F' est nulle en dehors d'un compact. On en déduit que g est dans $L^\infty(Q)$ dans ce troisième cas. Dans tous les cas, on a vérifié que l'hypothèse (2.134) empêche g d'exploser. On en déduit que $g \in L^\infty(Q)$.

Pour chaque n fixé, on considère le problème suivant :

$$w_{Kt}^n + (u_1 \cdot \nabla)w_K^n + Lw_K^n : u_2 - \xi_K^n \nabla S_n(b(\theta_2)) + \Delta w_K^n = 0 \quad \text{dans } Q(2.135)$$

$$\xi_{Kt}^n + u_1 \cdot \nabla \xi_K^n + g \cdot w_K^n + h\Delta \xi_K^n + \frac{T_K}{K}(S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))) = 0 \quad \text{dans } Q(2.136)$$

$$\text{div } w_K^n = 0 \quad \text{dans } Q(2.137)$$

$$w_K^n = 0 \text{ et } \xi_K^n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T(2.138)$$

$$w_K^n(t = T) = 0 \text{ et } \xi_K^n(t = T) = 0 \quad \text{dans } \Omega(2.139)$$

D'après les inclusions de Sobolev en dimension 2, u_1 , u_2 et u appartiennent à $L^\infty(Q)$ (voir [32]), rappelons également que $\nabla S_n(b(\theta_2))$ est bornée dans $L^2(Q)$ uniformément en n , car

f appartient à $L^2(Q)$. On applique alors le lemme 7 de [14], ce qui nous donne l'existence d'une unique solution faible du problème (2.135) – (2.139), telle que $\|\xi\|_{L^\infty(Q)} \leq C(K)$, où $C(K)$ est une constante qui dépend de K . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_Q [S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))] \frac{T_K}{K} (S_n(b(\theta_1)) - S_n(b(\theta_2))) dx dt &= \int_Q f [S'_n(b(\theta_1)) - S'_n(b(\theta_2))] \xi dx dt \\ &- \int_Q S''_n(b(\theta_1)) b'(\theta_1) |\nabla \theta_1|^2 \xi dx dt + \int_Q S''_n(b(\theta_2)) b'(\theta_2) |\nabla \theta_2|^2 \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Pour K fixé, en faisant tendre n vers l'infini, les trois termes à droite de l'égalité (2.140) convergent vers 0, car ξ est bornée dans $L^\infty(Q)$ et grâce aux estimations (2.127). On en déduit :

$$\int_Q (b(\theta_1) - b(\theta_2)) \frac{T_K}{K} (b(\theta_1) - b(\theta_2)) dx dt = 0, \quad \forall K \geq 0, \quad (2.141)$$

on fait tendre K vers 0, on obtient :

$$\int_Q |b(\theta_1) - b(\theta_2)| dx dt = 0, \quad (2.142)$$

alors $b(\theta_1) = b(\theta_2)$ presque partout dans Q , et par conséquent $\theta_1 = \theta_2$ presque partout dans Q . Les résultats classiques des équations de Navier-Stokes en dimension 2 impliquent que $u_1 = u_2$ presque partout dans Q . L'unicité de la solution faible-renormalisée du système (2.117) – (2.121) est ainsi démontrée.

Chapitre 3

Étude d'un système non linéaire de Boussinesq-Stefan à second membre ayant une croissance

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence d'une solution faible-renormalisée pour un système non linéaire de Boussinesq où l'on remplace le terme de convection $u \cdot \nabla b(\theta)$ et le laplacien par un terme de convection du type $\operatorname{div}(\Phi(\theta))$ et un opérateur non linéaire de diffusion dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div}(\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, \theta, \nabla \theta)) + \operatorname{div}(\Phi(\theta)) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.5)$$

où Ω est un ouvert lipschitzien et borné de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$. Dans ce système, b est un graphe défini sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ monotone et qui vérifie $b^{-1} \in C^0(\mathbb{R})$. De plus, la fonction $a(x, s, \xi)$ est monotone et coercive par rapport à ξ . La fonction Φ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Les données initiales u_0 et b_0 appartiennent à $L^2(\Omega)$ et $L^1(\Omega)$ respectivement. Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme dans le second chapitre, on se place dans le cadre où la fonction F vérifie une hypothèse de croissance :

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha, \text{ avec } a \geq 0, M \geq 0 \quad (3.6)$$

et $2\alpha \in [0, 3[$.

L'originalité du travail que nous présentons ici résulte du fait que la fonction θ vérifie une équation plus générale, mais sans le terme de convection $u \cdot \nabla b(\theta)$. Il s'agit de montrer que sous des conditions moins fortes sur b , notamment, pour une fonction b discontinue, il existe une solution faible-renormalisée en dimension 2 du système (3.1) – (3.5). Il convient de remarquer que l'équation de la chaleur (3.2) s'inscrit dans le cadre d'un problème de type Stefan à données L^1 , ayant un opérateur non linéaire de diffusion et un terme de convection. On utilise alors le cadre des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes et le cadre des solutions renormalisées introduit dans [8] pour l'équation de la chaleur (3.2). Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions renormalisées dans [8] permettent d'utiliser des arguments de type point fixe. L'originalité de l'article [8] est de définir une solution renormalisée où l'on tient compte de l'intégration par parties. Sur la base de cette définition et en multipliant par les fonctions tests adéquates, on retrouve les mêmes estimations sur θ que les chapitres précédents. Désormais, nous sommes en mesure d'appliquer un point fixe directement sans avoir à régulariser la fonction b .

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ est un graphe monotone telle que } 0 \in b(0). \quad (3.7)$$

$$|b(r)| \geq C|r| \forall r \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

où C est une constante > 0 .

$$b^{-1} \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

où b^{-1} est la fonction inverse de b .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } \underline{b}, \text{ définie par } \underline{b} = \min \{r \in b(s)\} \text{ admet un nombre} \quad (3.10)$$

fini de points discontinus sur $[-n, n]$, et b est de classe C^1 en dehors de ces points.

$$\mu \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R}, \text{ telle que } m_0 \leq \mu(s) \leq m_1, \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

$$\text{avec } 0 < m_0 \leq m_1,$$

$$F \text{ est une fonction continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2. \quad (3.12)$$

$a(x, s, \xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction de Carathéodory telle que :

$$a(x, s, \xi)\xi \geq \alpha'|\xi|^2, \quad (3.13)$$

$$|a(x, s, \xi) - a(x, r, \xi)| \leq L(s, r)(K(x) + |\xi|)|s - r|, \quad (3.14)$$

$$|a(x, s, \xi)| \leq M(|s|)(K(x) + |\xi|), \quad (3.15)$$

$$(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta))(\xi - \eta) \geq 0, \quad (3.16)$$

pour chaque ξ, η dans \mathbb{R}^2 , pour chaque s, r dans \mathbb{R} et pour presque tout x dans Ω , où $\alpha' > 0$, $K(x) \in L^2(\Omega)$ et $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

$$\text{La fonction } \Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ est localement lipschitzienne.} \quad (3.17)$$

$$u_0 \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} u_0 = 0, \text{ et } u_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.18)$$

$$b_0 \in L^1(\Omega). \quad (3.19)$$

Ce chapitre est composé de 3 sections. Dans la Section 3.2, on rappelle la définition d'une solution renormalisée de (3.2) à données L^1 introduite dans [8]. On rappelle ensuite la définition d'une solution faible-renormalisée de tout le système (3.1) – (3.5). Dans la Section 3.3, on énonce et on démontre un théorème d'existence de solution faible-renormalisée du système (3.1) – (3.5). On distingue trois cas suivant les valeurs de α . Dans le premier cas, on suppose que $1 < 2\alpha < 2$. On fixe θ dans $L^{2\alpha}(Q)$ et on considère l'unique solution faible u de (3.1), puis on désigne par $\hat{\theta}$ l'unique solution renormalisée du problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\hat{\theta})}{\partial t} - \operatorname{div} (a(x, \hat{\theta}, \nabla \hat{\theta})) + \operatorname{div} (\Phi(\hat{\theta})) &= 2\mu(\theta)|Du|^2 && \text{dans } Q, \\ \hat{\theta} &= 0 && \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\hat{\theta})(t=0) &= b_0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Puisque $\mu(\theta)|Du|^2$ est dans $L^1(Q)$, on retrouve grâce à [8] l'estimation suivante :
 $\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}[$, on a :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}).$$

Les propriétés de stabilité des solutions renormalisées pour les problèmes paraboliques (voir [8]) permettent alors de montrer que l'application $\psi_1 : \theta \rightarrow \hat{\theta}$ est continue. Cependant la compacité de ψ_1 reste un problème plus délicat. En effet, pour une suite θ_n bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$, le second membre $\mu(\theta_n)|Du_n|^2$ est borné dans $L^1(Q)$. L'analyse développée dans [8] ne permet pas conclure directement que la suite $\hat{\theta}_n$ ($\hat{\theta}_n = \psi_1(\theta_n)$) converge presque partout dans Q . Nous allons donc procéder différemment. On définit une fonction f assez régulière (au moins deux fois dérivable), telle que $f(x) = x^3$ sur un voisinage de zéro suffisamment petit. la fonction f est linéaire en dehors du voisinage de zéro. On pose

$$\gamma_1 = f^+ \text{ et } \gamma_2 = -f^-.$$

Les deux fonctions $\gamma_1(b(r) - \varepsilon - 1)$ et $\gamma_2(b(r) + \varepsilon)$ sont de classe C^1 . Par un argument de type Aubin, on montre que les deux fonctions $\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)$ et $\gamma_2(b(\hat{\theta}_n) + \varepsilon)$ convergent presque partout et on en déduit la convergence presque partout de $\hat{\theta}_n$. En supposant que les données sont suffisamment petites, on montre qu'il existe une boule de $L^{2\alpha}(Q)$ stable par l'application ψ_1 comme dans le Chapitre 2. Le théorème du point fixe de Schauder permet de conclure quant à l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) du système (3.1) – (3.5) pour de petites données. Dans le deuxième cas, on suppose que $2 \leq 2\alpha < 3$. On refait la même démonstration que dans le premier cas et on applique le théorème du point fixe de Schauder sur $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ comme dans le Chapitre 2 pour conclure à l'existence d'une solution pour de petites données. Enfin, dans le troisième et dernier cas, on suppose que $0 \leq 2\alpha \leq 1$. On introduit un problème approché du système (3.1) – (3.5) en remplaçant la fonction F par $F^\varepsilon = F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. Le théorème du point fixe de Schauder appliqué

sur $L^1(Q)$ nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution faible-renormalisée de ce système, tout en s'affranchissant de l'hypothèse de petites données. Enfin, on passe à la limite dans le système approché pour déduire l'existence d'une solution faible-renormalisée du système couplé (3.1) – (3.5).

3.2 Définitions et rappels

Dans la suite nous étudions le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (3.20)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div} (a(x, \theta, \nabla\theta)) + \operatorname{div} (\Phi(\theta)) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3.22)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (3.23)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.24)$$

Pour introduire la notion d'une solution faible-renormalisée du système (3.20) – (3.24), on rappelle les deux formes bilinéaires et trilinéaires suivantes :

$$a_\theta(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \mu(\theta) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

$$d(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx = \int_\Omega (u \cdot \nabla)v \cdot w dx,$$

$\forall u, v \in H_\sigma^1(\Omega), w \in H_\sigma^1(\Omega), \theta$ est une fonction mesurable.

Nous rappelons que la forme bilinéaire a_θ est continue et coercive dans $H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega)$ pour presque tout $t \in [0, T]$ et que la forme trilinéaire d est continue et antisymétrique dans $H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega) \times H_\sigma^1(\Omega)$.

Définition 3.2.1 (Solution renormalisée). Soit G une fonction dans $L^1(Q)$, b_0 appartient à $L^1(\Omega)$. Une fonction mesurable θ définie sur Q est dite solution renormalisée du problème :

$$P_1(G, \theta_0) \begin{cases} \frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, \theta, \nabla\theta)) + \operatorname{div}(\Phi(\theta)) = G & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\theta)(t=0) = b_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

si :

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)); \quad (3.25)$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0; \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{n} \int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |\theta(x,t)| \leq 2n\}} a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta \, dx \, dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty; \quad (3.27)$$

il existe $\beta_\theta \in L^1(Q)$ tel que $\beta_\theta \in b(\theta)$ presque partout dans Q et qui vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t \int_0^{\beta_\theta} S'(b^{-1}(r)) \, dr \, dx \, dt \\ & \quad - \int_\Omega \varphi(0) \left(\int_0^{b_0} S'(b^{-1}(r)) \, dr \right) \, dx + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \varphi S'(\theta) \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta S''(\theta) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \left(\int_0^\theta \Phi'(\xi) S'(\xi) \, d\xi \right) \, dx \, dt \\ & \hspace{20em} = \int_0^T \int_\Omega G S'(\theta) \varphi \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.28)$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ tel que S' est à support compact, et pour tout $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ tel que $S'(\theta) \varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Remarque 3.2.1. Puisque l'on a supposé que b^{-1} est continue sur \mathbb{R} , on a :

$$\theta = b^{-1}(\beta_\theta).$$

On rappelle les résultats essentiels démontrés dans [8] :

Théorème 3.2.2. – Sous les hypothèses ci-dessus sur les données G et b_0 , le problème $P_1(G, \theta_0)$ admet une unique solution renormalisée.

– Si θ^ε et θ^η sont deux solutions renormalisées pour les données $(G^\varepsilon, b_0^\varepsilon)$ et (G^η, b_0^η) , alors :

$$\|\beta_{\theta^\varepsilon} - \beta_{\theta^\eta}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|G^\varepsilon - G^\eta\|_{L^1(Q)} + \|b_0^\varepsilon - b_0^\eta\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

La définition suivante précise la notion de solution faible-renormalisée pour le système (3.20) – (3.24).

Définition 3.2.2. Un couple de fonctions (u, θ) définies sur $\Omega \times (0, T)$ est une solution faible-renormalisée du système (3.20) – (3.24) si :

$$u \in L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \quad (3.29)$$

$$T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ pour tout } K \geq 0 \text{ et } \theta \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{n} \int_{\{(x,t) \in Q; n \leq |\theta(x,t)| \leq 2n\}} a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta \, dx \, dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad (3.31)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (3.32)$$

$$u \text{ est solution faible de l'équation de Navier-Stokes,} \quad (3.33)$$

il existe $\beta_\theta \in L^1(Q)$ tel que $\beta_\theta \in b(\theta)$ presque partout dans Q et qui vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t \int_0^{\beta_\theta} S'(b^{-1}(r)) dr dx dt \\ & - \int_\Omega \varphi(0) \left(\int_0^{b_0} S'(b^{-1}(r)) dr \right) dx + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \varphi S'(\theta) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega a(x, \theta, \nabla \theta) \nabla \theta S''(\theta) \varphi dx dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \left(\int_0^\theta \Phi'(\xi) S'(\xi) d\xi \right) dx dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta) |Du|^2 S'(\theta) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.34)$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ tel que S' est à support compact, et pour tout $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ tel que $S'(\theta)\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

3.3 Existence d'une solution pour le système non linéaire

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (3.7)–(3.10), (3.11), (3.12), (3.13)–(3.16), (3.17), (3.18) et (3.19) et que la fonction F vérifie*

$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha$, avec $a \geq 0, M \geq 0$, alors :

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système (3.20) – (3.24) (au sens de la Définition 3.2.2).

- si $1 < 2\alpha < 3$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible-renormalisée du système (3.20) – (3.24) (au sens de la Définition 3.2.2).

Preuve du Théorème 3.3.1.

La démonstration de ce théorème sera divisé en deux cas. Dans le premier cas, on suppose que $1 < 2\alpha < 3$ et on procède par point fixe. Dans le deuxième cas, on suppose que $0 \leq 2\alpha \leq 1$ et on procède par approximation et passage à la limite. Le premier cas sera lui aussi divisé en deux étapes. Dans la première étape, on suppose que $1 < 2\alpha < 2$ et on applique un point fixe sur $L^{2\alpha}(Q)$. Dans la deuxième étape, on suppose que $2 \leq 2\alpha < 3$ et on applique un point fixe sur $L^r(0, T; L^q(\Omega))$, où r et q dépendent de α .

CAS 1 : $1 < 2\alpha < 3$. Nous utilisons une méthode de point fixe.

Selon les valeurs de α , on se donne une fonction θ telle que :

- $\theta \in L^{2\alpha}(Q)$ si $1 < 2\alpha < 2$.

- $\theta \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$ si $2 \leq 2\alpha < 3$, avec pour ce dernier cas, $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$. Le nombre réel p' est l'exposant conjugué de p , où p vérifie $p > \frac{2}{3-2\alpha}$.

En utilisant la condition de croissance sur la fonction F , on a $F(\theta) \in L^2(Q)$ si $1 < 2\alpha < 2$ et $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ si $2 \leq 2\alpha < 3$ par l'analyse développée dans la Section 2.2 du Chapitre 2.

A la fonction θ , on associe l'unique solution faible u dans $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ du problème suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) = F(\theta) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (3.35)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3.36)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (3.37)$$

$$u(t=0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.38)$$

On passe maintenant à l'analyse du second problème qui provient du système (3.20) – (3.24) :

$$\frac{\partial b(\hat{\theta})}{\partial t} - \operatorname{div} (a(x, \hat{\theta}, \nabla \hat{\theta})) + \operatorname{div} (\Phi(\hat{\theta})) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (3.39)$$

$$\hat{\theta} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (3.40)$$

$$b(\hat{\theta})(t=0) = b_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.41)$$

Dans [8], on trouve une démonstration détaillée du lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *On choisit θ comme ci-dessus, u est l'unique solution du problème (3.35) – (3.38), sous les hypothèses (3.7)-(3.10), (3.11), (3.13)-(3.16), (3.17) et (3.19), il existe une unique solution renormalisée $\hat{\theta}$ du problème (3.39) – (3.41) telle que $T_K(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\forall K \geq 0$ et $\beta_{\hat{\theta}} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.*

On a aussi $\hat{\theta} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ (par (3.8)).

RETOUR À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3.1) :

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses du Lemme 3.3.2, pour tout q, r vérifiant $1 < q < \infty$, et $r < \frac{q}{q-1}$, on a $\hat{\theta} \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$, et il existe une constante C (qui dépend de T, r, q, Ω, N) telle que*

$$\|\hat{\theta}\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))} \leq C (\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}).$$

Preuve du Lemme 3.3.3.

On utilise principalement la méthode de [8]. En effet, d'après le Théorème 3.2.2, on a :

$$\|\beta_{\hat{\theta}}\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} \leq c(p, N, \Omega, T) (\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}).$$

L'hypothèse (3.8) donne alors l'estimation suivante :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}), \quad (3.42)$$

d'où l'on déduit en utilisant le lemme 3.5 de [8] :

$$\int_Q |\nabla T_K(\hat{\theta})|^2 dx dt \leq c(p, N, \Omega, T)(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}).$$

Il suffit d'utiliser les deux estimations ci-dessus et de faire appel au Lemme 2.2.6 du chapitre 2 pour conclure.

La suite de la démonstration se fait en deux étapes :

ÉTAPE 1 : $1 < 2\alpha < 2$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi_1 : L^{2\alpha}(Q) &\longrightarrow L^{2\alpha}(Q) : \\ \theta &\longrightarrow \hat{\theta} = \psi_1(\theta), \end{aligned}$$

où $\hat{\theta}$ est donnée par le Lemme 3.3.2.

Le Lemme 3.3.3 nous assure l'inégalité suivante :

$\forall p \in [1, 2[$, il existe une constante C qui dépend uniquement de p, N, Ω , et T telle que :

$$\|\hat{\theta}\|_{L^p(Q)} \leq C(\|\mu(\theta)|Du|^2\|_{L^1(Q)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)}). \quad (3.43)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que ψ_1 est compacte, continue et qu'il existe une boule B de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$.

i- ψ_1 est compacte :

soit θ_n une suite de fonctions bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$, et la suite $\hat{\theta}_n$ définie par :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, u_n est l'unique solution faible du problème suivant :

$$\begin{aligned} u_{nt} + (u_n \cdot \nabla)u_n - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta_n)Du_n) &= F(\theta_n) \quad \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \quad (3.44) \\ \text{pour presque tout } t &\in (0, T), \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} u_n = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3.45)$$

$$u_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (3.46)$$

$$u_n(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.47)$$

D'après la définition de ψ_1 (voir le Lemme 3.3.2), pour $n \geq 1$ fixé, $\hat{\theta}_n$ est l'unique solution renormalisée du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\hat{\theta}_n)}{\partial t} - \operatorname{div} (a(x, \hat{\theta}_n, \nabla \hat{\theta}_n)) + \operatorname{div} (\Phi(\hat{\theta}_n)) &= 2\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \quad \text{dans } Q, \\ \hat{\theta}_n &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\hat{\theta}_n)(t=0) &= b_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'après la croissance de F (voir (3.6)) et puisque $1 < 2\alpha < 2$, on déduit que $F(\theta_n)$ est bornée dans $L^2(Q)$.

Nous avons alors, comme dans le chapitre 1 :

$$u_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)), \quad (3.48)$$

$$u_{nt} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H^1_\sigma)'(\Omega)).$$

Nous pouvons alors extraire une sous-suite telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega)), \quad (3.49)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2_\sigma(Q), \quad (3.50)$$

$$u_{nt} \rightharpoonup u_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H^1_\sigma)'(\Omega)), \quad (3.51)$$

quand n tend vers $+\infty$, où u est une fonction de $L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_\sigma(\Omega))$. Cela implique que :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \text{ est bornée dans } L^1(Q). \quad (3.52)$$

Utilisant les estimations (3.52) et (3.43), on obtient :

$$\hat{\theta}_n \text{ est bornée dans } L^p(Q), \quad (3.53)$$

pour tout $p \in [1, 2[$.

Nous allons maintenant déduire de (3.52) que la suite $\hat{\theta}_n$ (à une sous-suite près) converge presque partout dans Q . On ne peut pas déduire ce résultat directement de [8] car l'on utilise la convergence forte dans $L^1(Q)$ du second membre de l'équation de la chaleur. Pour simplifier la démonstration, on suppose que b a un seul point de discontinuité en zéro. Prenons par exemple $b(0^+) = 1$ et $b(0^-) = 0$. La démonstration qui suit reste valable pour toute fonction b qui satisfait les hypothèses du Théorème 3.3.1. On définit une nouvelle fonction f assez régulière (au moins deux fois dérivable), telle que $f(x) = x^3$ sur un voisinage de zéro suffisamment petit. la fonction f est linéaire en dehors du voisinage de zéro. On pose

$$\gamma_1 = f^+ \text{ et } \gamma_2 = -f^-.$$

Les deux fonctions $\gamma_1(b(r) - \varepsilon - 1)$ et $\gamma_2(b(r) + \varepsilon)$ sont de classe C^1 . Par un argument de type Aubin, on montre que les deux fonctions $\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)$ et $\gamma_2(b(\hat{\theta}_n) + \varepsilon)$ convergent presque partout et on en déduit la convergence presque partout de $\hat{\theta}_n$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, pour $M \geq 1$, on montre que pour la suite S_M définie dans les chapitres précédents (Chapitre 2, Section 2.2) :

$$S_M \left(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1) \right) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^1_0(\Omega)).$$

On a en effet :

$$DS_M\left(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)\right) = S'_M(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1))\gamma'_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)b'(\hat{\theta}_n)\chi_{\{b(\hat{\theta}_n) > 1 + \varepsilon\}}DT_{K_{M\varepsilon}}(\hat{\theta}_n).$$

presque partout dans Q , où $K_{M\varepsilon}$ est un nombre réel qui dépend de M et ε . Puisque b est de classe C^1 en dehors des points de discontinuité et S'_M est à support compact, on a :

$$S'_M(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1))\gamma'_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)b'(\hat{\theta}_n)\chi_{\{b(\hat{\theta}_n) > 1 + \varepsilon\}} \text{ est bornée dans } L^\infty(Q).$$

Puisque $\mu(\theta_n)|Du_n|^2$ est bornée dans $L^1(Q)$, on a d'après [8] :

$$DT_{K_{M\varepsilon}}(\hat{\theta}_n) \text{ est bornée dans } L^2(Q).$$

On conclut que :

$$S_M\left(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)\right) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.54)$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout $M \geq 1$.

Pour ε et M fixés, on montre maintenant que :

$$\frac{\partial S_M\left(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)\right)}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Pour $n \geq 1$ fixé, $\hat{\theta}_n$ est une solution renormalisée de l'équation de la chaleur, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \varphi_t \int_0^{\beta_{\hat{\theta}_n}} S'_{M\varepsilon}(b^{-1}(r)) dr dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega a(x, \hat{\theta}_n, \nabla \hat{\theta}_n) \nabla \varphi S'_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n) dx dt + \int_0^T \int_\Omega a(x, \hat{\theta}_n, \nabla \hat{\theta}_n) \nabla \hat{\theta}_n S''_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n) \varphi dx dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \left(\int_0^{\hat{\theta}_n} \Phi'(\xi) S'_{M\varepsilon}(\xi) d\xi \right) dx dt - \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ et $S_{M\varepsilon}(r) = \int_0^r S'_M(\gamma_1(b(r) - \varepsilon - 1)) \gamma'_1(b(r) - \varepsilon - 1) dr$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\beta_{\hat{\theta}_n}} S'_{M\varepsilon}(b^{-1}(r)) dr \right) &= \operatorname{div} (a(x, \hat{\theta}_n, \nabla \hat{\theta}_n) S'_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n)) \\ & - a(x, \hat{\theta}_n, \nabla \hat{\theta}_n) \nabla \hat{\theta}_n S''_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n) - \operatorname{div} (\Phi(\hat{\theta}_n)) S'_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n) + 2\mu(\theta_n) |Du_n|^2 S'_{M\varepsilon}(\hat{\theta}_n), \end{aligned} \quad (3.56)$$

au sens des distributions. Puisque $S'_{M\varepsilon}$ et $S''_{M\varepsilon}$ sont à support compact ($\text{supp}(S'_{M\varepsilon}) \subset [-L, L]$, ε et M fixés), on peut remplacer $\hat{\theta}_n$ par sa troncature $T_L(\hat{\theta}_n)$ dans l'égalité précédente. La croissance de la fonction a nous permet de vérifier de la même façon que dans les chapitres précédents que chaque terme à droite de l'égalité (3.56) est borné soit dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, soit dans $L^1(Q)$. On en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\beta_{\hat{\theta}_n}} S'_{M\varepsilon}(b^{-1}(r)) dr \right) \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout $M \geq 1$.

Par ailleurs, puisque $S'_{M\varepsilon}(r) = 0$, en particulier pour $b(r) < 1 + \varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta_{\hat{\theta}_n}} S'_{M\varepsilon}(b^{-1}(r)) dr &= \int_0^{b(\hat{\theta}_n)} S'_M(\gamma_1(r - \varepsilon - 1)) \gamma'_1(r - \varepsilon - 1) dr \\ &= S_M(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1)). \end{aligned} \quad (3.57)$$

On conclut que :

$$\frac{\partial S_M(\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \varepsilon - 1))}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(Q) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (3.58)$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout $M \geq 1$.

Grâce aux estimations (3.54) et (3.58), on applique un lemme de type Aubin (Simon [30]). Par un procédé de construction de suite diagonale, il existe une sous-suite notée $\hat{\theta}_n$ telle que pour tout entier m , on a :

$$\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{m} - 1) \longrightarrow \phi_m \quad (3.59)$$

et

$$\gamma_2(b(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{m}) \longrightarrow \psi_m \quad (3.60)$$

presque partout dans Q , quand n tend vers l'infini.

On passe désormais à la dernière phase de cette démonstration. On utilise les résultats de convergence (3.59) et (3.60) pour montrer la convergence presque partout de $\hat{\theta}_n$ à une sous-suite près.

La suite de fonctions ϕ_m est une suite positive et décroissante en m , tandis que ψ_m est une suite de fonctions négative et croissante en m , alors :

$$\phi_m \longrightarrow \gamma^+ \quad (3.61)$$

et

$$\psi_m \longrightarrow \gamma^- \quad (3.62)$$

presque partout dans Q , quand m tend vers l'infini, où γ^+ est une fonction mesurable positive et γ^- est une fonction mesurable négative.

Il convient de remarquer d'abord que :

$$\gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{m} - 1) = \gamma_1(b(\hat{\theta}_n^+) - \frac{1}{m} - 1) \quad (3.63)$$

presque partout dans Q . On a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{m} - 1) = \gamma^+.$$

On a également :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_1(b(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{m} - 1) = \gamma_1(b(\hat{\theta}_n^+) - 1),$$

uniformément en n , car γ_1 est lipschitzienne. On en déduit alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(b(\hat{\theta}_n^+) - 1) = \gamma^+. \quad (3.64)$$

- Soit $(x, t) \in Q$ tel que $\gamma^+(x, t) > 0$:

d'après (3.64) et puisque γ_1^{-1} est continue sur $[0, +\infty[$, on a :

$$b(\hat{\theta}_n^+)(x, t) \longrightarrow \gamma_1^{-1}(\gamma^+(x, t)) + 1,$$

quand n tend vers l'infini. La continuité de b^{-1} nous permet de déduire que :

$$\hat{\theta}_n^+(x, t) \longrightarrow b^{-1}\left(\gamma_1^{-1}(\gamma^+(x, t)) + 1\right),$$

quand n tend vers l'infini.

- Soit $(x, t) \in Q$ tel que $\gamma^+(x, t) = 0$:

par définition de γ_1 et d'après (3.64), il est clair que :

$$\hat{\theta}_n^+(x, t) \longrightarrow 0,$$

quand n tend vers l'infini.

On conclut que :

$$\hat{\theta}_n^+ \longrightarrow \sigma^+, \quad (3.65)$$

presque partout dans Q , quand n tend vers l'infini, où σ^+ est une fonction définie par :

$$\sigma^+ = \begin{cases} b^{-1}(\gamma_1^{-1}(\gamma^+) + 1) & \text{dans } \{(x, t) \in Q, \gamma^+(x, t) > 0\} \\ 0 & \text{dans } \{(x, t) \in Q, \gamma^+(x, t) = 0\} \end{cases}$$

De la même façon, on montre que :

$$\hat{\theta}_n^- \longrightarrow \sigma^-, \quad (3.66)$$

presque partout dans Q , quand n tend vers l'infini, où σ^- est une fonction définie par :

$$\sigma^- = \begin{cases} -b^{-1}(\gamma_2^{-1}(\gamma^-)) & \text{dans } \{(x, t) \in Q, \gamma^-(x, t) < 0\} \\ 0 & \text{dans } \{(x, t) \in Q, \gamma^-(x, t) = 0\} \end{cases}$$

Puisque $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n^+ - \hat{\theta}_n^-$, on obtient alors :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \sigma, \quad (3.67)$$

presque partout dans Q , quand n tend vers l'infini, où σ est une fonction définie par $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$. En utilisant (3.53), et (3.67), on conclut que :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^q(Q), \quad (3.68)$$

pour tout q vérifiant $q < p$, avec $1 \leq p < 2$,
alors

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^p(Q), \quad (3.69)$$

pour tout p vérifiant $1 \leq p < 2$, en particulier :

$$\hat{\theta}_n \text{ demeure dans un compact de } L^{2\alpha}(Q), \quad (3.70)$$

puisque $1 < 2\alpha < 2$.

ii-On montre que ψ_1 est continue :

soit θ_n une suite de fonctions de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que :

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ fortement dans } L^{2\alpha}(Q), \quad (3.71)$$

quand n tend vers $+\infty$ (avec $1 < 2\alpha < 2$), où θ est une fonction appartenant à $L^{2\alpha}(Q)$. Soit $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\theta}$ définies par :

$$\psi_1(\theta_n) = \hat{\theta}_n \text{ et } \psi_1(\theta) = \hat{\theta}.$$

Puisqu'on est en dimension $2(N = 2)$, grâce aux convergences (3.49) et (3.71) et grâce à la compacité de u_n dans $L^2(Q)$, on vérifie comme pour la convergence (1.215), que :

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

quand n tend vers l'infini. Puisque la fonction μ est continue, on obtient :

$$\mu(\theta_n)|Du_n|^2 \longrightarrow \mu(\theta)|Du|^2 \text{ fortement dans } L^1(Q), \quad (3.72)$$

quand n tend vers l'infini. D'après la convergence (3.72), le Théorème 3.2.2 montre que $\beta_{\hat{\theta}_n}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. En particulier, il existe deux fonctions ϑ et $\beta_\vartheta \in b(\vartheta)$ telles que :

$$\beta_{\hat{\theta}_n} \longrightarrow \beta_\vartheta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \text{ et presque partout dans } Q,$$

à une sous-suite près. Puisque b^{-1} est continue, alors :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \vartheta \text{ presque partout dans } Q.$$

quand n tend vers l'infini. Par conséquent :

$$T_K(\hat{\theta}_n) \text{ converge faiblement vers } T_K(\vartheta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

pour tout $K \geq 0$, quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit d'après le théorème 4.1 de [8] que ϑ est l'unique solution renormalisée du problème (3.39) – (3.41), d'après le Lemme (3.3.2), on conclut que :

$$\vartheta = \hat{\theta} \text{ p.p. dans } Q,$$

On obtient alors :

$$\hat{\theta}_n \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta} \text{ dans } Q. \quad (3.73)$$

Les estimations (3.53) et (3.73) impliquent :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \text{ fortement dans } L^q(Q), \quad (3.74)$$

pour tout q tel que $q < p$, avec $1 \leq p < 2$,
alors

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \text{ fortement dans } L^p(Q), \quad (3.75)$$

pour tout p tel que $1 \leq p < 2$,
par conséquent :

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \hat{\theta}, \text{ fortement dans } L^{2\alpha}(Q), \quad (3.76)$$

car $1 < 2\alpha < 2$.

iii-On montre qu'il existe une boule B de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que $\psi_1(B) \subset B$:

Compte tenu de l'estimation (3.43), la démonstration de l'existence d'un nombre réel positif R , tel que :

$$\psi_1(B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R)) \subset B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R),$$

est exactement la même que celle donnée au Chapitre 2, Section 2.2, paragraphe *iii*. On applique le théorème du point fixe de Schauder. D'après la définition de ψ_1 , on conclut que sous la condition de petites données, il existe une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 3.2.2) du problème (3.20) – (3.24).

ÉTAPE 2 : $2 \leq 2\alpha < 3$. On rappelle que si $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ alors $2 \leq \frac{2}{3-2\alpha} < \infty$.

On choisit p tel que $\frac{2}{3-2\alpha} < p < \infty$, alors $p > 2$. Soit p' le conjugué de Hölder de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). On pose $q = \alpha p'$ et $r = 2\alpha$.

On remarque que r et q vérifient $1 < q < \infty$, et $r < \frac{q}{q-1}$.

Soit θ une fonction de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$. D'après le Chapitre 2, Section 2.2, la fonction $F(\theta)$ s'identifie à un élément de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe une solution unique $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ du problème (3.35) – (3.38). De plus d'après le lemme 3.3.2, il existe une solution renormalisée unique $\hat{\theta}$ du problème (3.39) – (3.41) telle que $T_K(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \forall K \geq 0$ et $\hat{\theta} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi_2 : L^r(0, T; L^q(\Omega)) &\longrightarrow L^r(0, T; L^q(\Omega)) \\ \theta &\longrightarrow \hat{\theta} = \psi_2(\theta) \end{aligned}$$

Le Lemme (3.3.3) permet alors de déduire que $\hat{\theta} \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$. L'application ψ_2 est donc bien définie.

En reprenant la démonstration du cas $2 \leq 2\alpha < 3$ du Chapitre 2, Section 2.2, adapté suivant le raisonnement de l'étape précédente, on en déduit que l'application ψ_2 est compacte, continue et qu'il existe une boule B de $L^r(0, T; L^q(\Omega))$ telle que $\psi_2(B) \subset B$.

CAS 2 : $0 \leq 2\alpha \leq 1$. Si α est nul, Dans ce cas, l'analyse de la démonstration du théorème 1.3.1, en se basant bien évidemment sur le raisonnement fait dans le premier cas, permet d'obtenir l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 3.2.2) du problème (3.20) – (3.24). En effet, l'application ψ_1 (du premier chapitre) ainsi construite de $L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$, reste compacte et continue. De plus,

$$F(\theta) \text{ est bornée dans } L^\infty(Q).$$

ce qui implique qu'il existe un nombre réel positif $R > 0$ tel que :

$$\psi_1(B_{L^1(Q)}(0, R)) \subset B_{L^1(Q)}(0, R).$$

Ainsi, on applique le théorème du point fixe de Schauder sur $L^1(Q)$ sans supposer que les données sont petites, d'où l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) (au sens de la Définition 3.2.2) du problème (3.20) – (3.24). On suppose maintenant que $0 < 2\alpha \leq 1$. On procède par approximation et passage à la limite. On commence par remplacer la fonction F par $F^\varepsilon = F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et on considère le problème approché suivant :

$$P^\varepsilon \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon) = F^\varepsilon(\theta^\varepsilon) & \text{dans } (H_\sigma^1)'(\Omega), \\ \text{pour presque tout } t \in (0, T) \\ \frac{\partial b(\theta^\varepsilon)}{\partial t} - \operatorname{div} (a(x, \theta^\varepsilon, \nabla\theta^\varepsilon)) + \operatorname{div} (\Phi(\theta^\varepsilon)) = 2\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 & \text{dans } Q, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } Q, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

La fonction F^ε étant continue et bornée, on déduit qu'il existe une solution faible-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du système approché P^ε au sens de la Définition 3.2.2 (d'après le cas $\alpha = 0$). On obtient via l'estimation (3.42) et en répétant la démonstration du cas $0 < 2\alpha \leq 1$ du Chapitre 2, Section 2.3 :

$$\int_{\Omega} |\theta^\varepsilon|(t) dx \leq c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |\theta^\varepsilon|^{2\alpha} dx dt + c_2, \quad (3.77)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes qui dépendent de Ω , T et des données b_0 et u_0 . Puisque $2\alpha \leq 1$, le raisonnement du chapitre 2 montre que la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée uniformément en ε dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. Par définition de F et F^ε , on conclut que la suite $(F^\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est en particulier bornée uniformément en ε dans $L^2(Q)$. Désormais, il suffit de reprendre le même raisonnement que dans le cas précédent ($1 < 2\alpha < 3$). Il existe alors deux fonctions u et θ telles que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)),$$

$$\theta^\varepsilon \longrightarrow \theta \text{ presque partout dans } Q,$$

et puisque $N = 2$ et comme pour la convergence (3.72), on a :

$$\mu(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 \longrightarrow \mu(\theta)|Du|^2 \text{ fortement dans } L^1(Q),$$

à une sous-suite près, quand ε tend vers 0. En passant à la limite quand ε tend vers 0 dans le système approché P^ε et en utilisant le résultat de stabilité donné dans le théorème 4.1 de [8], on vérifie que (u, θ) est une solution faible-renormalisée (au sens de la Définition 3.2.2) du problème (3.20) – (3.24).

Chapitre 4

Existence d'une solution faible pour un système formellement équivalent en dimension 3

4.1 Introduction

Dans le deuxième chapitre , nous avons étudié le système non linéaire de Boussinesq :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta \theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$u(t = 0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t = 0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.5)$$

En dimension 2 ($N = 2$), la difficulté principale concernant l'existence d'une solution pour le système (4.1) – (4.5) est due à l'équation (4.2) et au couplage. Afin de se placer dans le cadre des solutions renormalisées des équations paraboliques avec un second membre dans L^1 , nous avons imposé des conditions de croissance sur la fonction continue F . Nous avons profité de l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes, ce qui nous a permis d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder. En dimension 3 ($N = 3$), l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes reste un problème ouvert. Néanmoins, on obtient l'unicité dans [32], sous réserve que la fonction continue F soit uniformément bornée et pour des données petites F et u_0 . Nous avons un deuxième obstacle lié au manque de stabilité du terme quadratique $\mu(\theta)|Du|^2$ dans l'équation de la chaleur (vis-à-vis des approximations). Afin de pallier ces difficultés pour $N = 3$, nous allons opérer une transformation formelle analogue à celle utilisée pour les équations de Rayleigh-Bénard dans [25]. En multipliant (4.1) par u et en additionnant à (4.2), on obtient le système formellement équivalent sui-

vant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2 \operatorname{div} (\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \text{ dans } Q, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) \right) + \operatorname{div} \left\{ u \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) + p \right) \right\} \quad (4.7)$$

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \right\} - \Delta \theta = F(\theta) \cdot u + \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j \partial_j (\mu(\theta)u_i) \text{ dans } Q,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Q, \quad (4.8)$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (4.9)$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \text{ dans } \Omega, \quad (4.10)$$

où Ω est un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, et $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$. L'avantage du système (4.6) – (4.10) par rapport à (4.1) – (4.5) repose sur la possibilité de passer à la limite même pour $N = 3$ dans le terme $\partial_i u_j \partial_j (\mu u_i)$. En utilisant les résultats des travaux effectués sur les solutions renormalisées des problèmes paraboliques à données L^1 (voir [9] et [23]) ainsi que les théorèmes de compacité (voir [30]), nous démontrons dans le Théorème 4.3.1, l'existence d'une solution faible du système formellement équivalent (4.6) – (4.10). Tout au long de ce chapitre, on suppose que $N = 3$ et que la fonction continue F vérifie une hypothèse de croissance :

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $2\alpha \in [0, \frac{5}{3}]$.

Soit $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$. On considère le système approché suivant :

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\operatorname{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \quad \text{dans } Q, \quad (4.11)$$

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (4.12)$$

où $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Q , $u^\varepsilon = 0$, $\theta^\varepsilon = 0$ sur Σ_T , $u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon$ et $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)$ dans Ω , $u_0^\varepsilon = u_0 * \rho_\varepsilon$, $\theta_0^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \rightarrow b(\theta_0)$, fortement dans $L^1(\Omega)$ quand ε tend vers zéro, b_ε est une suite d'approximations de b , de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$, et telle que b_ε et b'_ε convergent vers b et b' uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0. Les régularisations u_ε , μ_ε et F^ε sont définies dans [25]. En supposant que les données sont suffisamment petites, on montre grâce au théorème du point fixe de Schauder, qu'il existe une solution $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ forte-renormalisée du système approché (4.11) – (4.12), pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est fixé et suffisamment petit. Grâce au lemme 2.2 de [10], nous pouvons démontrer que $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $C(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega))$ ($\forall 1 \leq q < 3$) et que $\nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^r(\Omega \times (0, T))$ ($\forall 1 \leq r < \frac{5}{4}$) (on utilise ici l'hypothèse supplémentaire : b est une fonction Lipschitzienne). Par ailleurs, on montre qu'il existe une fonction mesurable θ définie sur Q , telle que, à une sous suite près, θ^ε converge vers θ ,

et $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge vers $b(\theta)$, presque partout dans Q . On combine les deux équations (4.11) et (4.12), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) + \operatorname{div} \left\{ u_\varepsilon \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) + u^\varepsilon p^\varepsilon \right\} \quad (4.13)$$

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} \right) \right\} - \Delta \theta^\varepsilon = F^\varepsilon \cdot u^\varepsilon + \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j^\varepsilon \partial_j (\mu_\varepsilon u_i^\varepsilon) \text{ dans } Q,$$

On remarque que $\partial_i u_j^\varepsilon \partial_j (\mu_\varepsilon u_i^\varepsilon) = \partial_i (\mu_\varepsilon (u^\varepsilon \cdot \nabla) u_i^\varepsilon)$, et en appliquant un théorème de compacité sur l'équation (4.13), on déduit que $\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge fortement dans $L^r(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega)) (\forall 1 \leq r < \infty, \forall 1 \leq q < 3)$. On applique cette fois-ci un théorème de compacité sur l'équation (4.11), cela implique que $\frac{|u^\varepsilon|^2}{2}$ converge fortement vers $\frac{|u|^2}{2}$ dans $L^r(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega)) (\forall 1 \leq r < \infty, \forall 1 \leq q < 3)$. On conclut alors que $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge fortement vers $b(\theta)$ dans le même espace. On démontre aussi que μ_ε converge fortement vers $\mu(\theta)$ dans $L^p(Q) \forall p < \infty$ et que F^ε converge vers $F(\theta)$ dans $L^p(Q)$ fort $\forall p < 2$, quand ε tend vers 0. On peut alors passer à la limite dans chaque terme des équations (4.11) et (4.13) et obtenir une solution faible de (4.6) – (4.10) (au sens de la définition 4.2.1). Si $0 \leq 2\alpha \leq 1$, on introduit un problème approché du système (4.6) – (4.10) en remplaçant la fonction F par $F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$:

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon - 2 \operatorname{div}(\mu_\varepsilon D u^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \quad \text{dans } Q, \quad (4.14)$$

$$b(\theta^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon |D u^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (4.15)$$

où $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Q , $u^\varepsilon = 0$, $\theta^\varepsilon = 0$ sur Σ_T , $u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon$ et $b(\theta^\varepsilon)(t=0) = b(\theta_0)$ dans Ω . A $\varepsilon > 0$, la fonction $F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ étant continue et bornée, on applique le théorème du point fixe de Schauder sur $L^1(Q)$, ce qui nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution forte-renormalisée de ce système, tout en s'affranchissant de l'hypothèse de petites données. Enfin, on vérifie que la suite F^ε est bornée uniformément en ε dans $L^2(Q)$ et on passe à la limite dans le nouveau système approché (4.11)-(4.13) comme dans le cas où $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$ pour déduire l'existence d'une solution faible du système (4.6) – (4.10) (au sens de la définition 4.2.1).

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b \text{ est une fonction de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } b(0) = 0, \quad (4.16)$$

$$b \text{ est une fonction lipschitzienne,} \quad (4.17)$$

$$b'(r) \geq \alpha' \forall r \in \mathbb{R}, \text{ pour une constante } \alpha' > 0, \quad (4.18)$$

$$\mu \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ avec } m_0 \leq \mu(s) \leq m_1, \quad (4.19)$$

où m_0 et m_1 sont des constantes vérifiant $0 < m_0 \leq m_1 \quad \forall s \in \mathbb{R}$,

La fonction F vérifie une hypothèse de croissance :

$$\forall r \in \mathbb{R}, |F(r)| \leq a + M|r|^\alpha, \text{ avec } a \geq 0, M \geq 0, \text{ et } 2\alpha \in [0, \frac{5}{3}], \quad (4.20)$$

$$F \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \quad (4.21)$$

$$u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3, \text{ div } u_0 = 0, \text{ et } u_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (4.22)$$

$$\theta_0 \text{ est une fonction mesurable définie sur } \Omega \text{ telle que } b(\theta_0) \in L^1(\Omega). \quad (4.23)$$

4.2 Définitions

On rappelle que T_K est la fonction troncature à la hauteur K ($K \geq 0$) définie par :

$$T_K(r) = \min(K, \max(r, -K)).$$

La définition suivante précise la notion de solution faible du système formellement équivalent (4.6) – (4.10).

Définition 4.2.1. *Un couple de fonctions (u, θ) définies sur $\Omega \times (0, T)$ est une solution faible du système (4.6) – (4.10) si :*

$$u \in L^2(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^2(\Omega)) \forall 1 \leq q < 6; \forall 1 \leq p < \infty \quad (4.24)$$

$$\nabla p \in L^{\frac{5}{4}}(\Omega \times (0, T)) \quad (4.25)$$

$$\theta \in L^p(\Omega \times (0, T)) \forall 1 \leq p < \frac{5}{3} \quad (4.26)$$

$$b(\theta) \in L^1(0, T; L^m(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega)) \forall 1 \leq m < 3; \forall 1 \leq r < \infty \quad (4.27)$$

$$u \text{ est une solution faible de l'équation (4.6) (au sens des distributions) } \quad (4.28)$$

et si pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} dx \int_0^T dt \left\{ \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \left(\frac{|u|^2}{2} + b(\theta) + p \right) \cdot \nabla \phi \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^3 \left\{ \mu(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \right\} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \theta \Delta \phi + F(\theta) \cdot u \phi + \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j \partial_j (\mu(\theta) u_i) \phi \right\} \\ & - \int_{\Omega} dx \left\{ \frac{|u_0|^2}{2} + b(\theta_0) \right\} \phi(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Remarque 4.2.1. *Quand $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, le terme $u b(\theta)$ a bien un sens. En effet, on sait que*

$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^6(\Omega))$ (inclusions de Sobolev). En dimension 3, on obtient alors $u \in L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Or $b(\theta) \in L^q(Q)$, $\forall q < \frac{5}{3}$ grâce aux estimations de Boccardo-Gallouët [11]. On en déduit que $u b(\theta) \in L^1(Q)$.

4.3 Existence d'une solution faible du système formellement équivalent

Dans cette section, on énonce et on démontre un résultat d'existence d'une solution faible du système formellement équivalent (4.6)-(4.10)

Théorème 4.3.1. *On suppose satisfaites les hypothèses (4.16)-(4.23) et Ω "régulier". Alors :*

- si $0 \leq 2\alpha \leq 1$ alors il existe au moins une solution faible du système (4.6)-(4.10) (au sens de la Définition 4.2.1).
- si $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$, il existe $\eta > 0$, tel que si $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta$, alors il existe une solution faible du système (4.6)-(4.10) (au sens de la Définition 4.2.1).

Preuve du Théorème 4.3.1.

On distingue deux cas suivant les valeurs de α .

CAS 1 : $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$. La démonstration de ce théorème se divise alors en trois étapes. Dans la première étape, on montre l'existence d'une solution forte-renormalisée d'un système approché associé à (4.1) – (4.5). Dans la deuxième étape, on construit un nouveau système à partir du système approché. La troisième et dernière étape est basée sur des estimations a priori et un passage à la limite.

Étape 1. On utilise la méthode de P.-L. Lions [25] pour approcher le problème en u . Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on considère le système approché suivant :

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\operatorname{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \quad \text{dans } Q, \quad (4.30)$$

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (4.32)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (4.33)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon \text{ et } b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.34)$$

où $u_0^\varepsilon = u_0 * \rho_\varepsilon$, ($*$ est le produit de convolution), ρ_ε est une suite de fonctions régularisantes. Maintenant, nous allons préciser la définition de u_ε , μ_ε et de F^ε . Soit θ fixé dans $L^{2\alpha}(Q)$ où $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$. Soit μ^ε une suite de fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ bornées et telle que μ^ε converge vers μ uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0.

On pose :

$$\widetilde{\mu^\varepsilon(\theta)} = \begin{cases} \mu^\varepsilon(\theta) & \text{dans } \Omega, \\ 1 & \text{dans } \Omega^c. \end{cases}$$

La suite de fonctions μ_ε est définie par :

$$\mu_\varepsilon = \widetilde{\mu^\varepsilon(\theta)} * \rho_\varepsilon|_\Omega.$$

Soit Ω_ε définie par :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

On note par \bar{u}_ε la troncature de u^ε dans Ω_ε (prolongement par 0 sur Ω), et on définit u_ε par :

$$u_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon * \rho_{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Si $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ (par exemple), u_ε s'annule sur $\partial\Omega$, est régulier en x tel que $\text{div } u_\varepsilon = 0$ dans \mathbb{R}^N . Enfin, on pose :

$$F^\varepsilon = \zeta_\varepsilon(F(\theta)\chi_{(d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon)}) * \rho_\varepsilon,$$

où $\zeta_\varepsilon \in C^\infty([0, T])$, $\zeta_\varepsilon(t) = 1$ si $t \geq 2\varepsilon$, $0 \leq \zeta_\varepsilon(t) \leq 1$ si $t \in [0, T]$, $\zeta_\varepsilon(t) = 0$ si $t \leq \varepsilon$.

Lemme 4.3.2. *pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est fixé et suffisamment petit, il existe une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du système approché (4.30)–(4.34) (pour des données petites).*

Preuve du Lemme 4.3.2.

On procède par point fixe. Soit θ fixé dans $L^{2\alpha}(Q)$ où $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème approché suivant :

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\text{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \text{ dans } Q, \quad (4.35)$$

$$\text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } Q, \quad (4.36)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon \text{ dans } \Omega, u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma_T. \quad (4.37)$$

Ce problème admet une solution unique u^ε telle que $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$ (voir [25]).

Toujours pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit $\hat{\theta}^\varepsilon$ l'unique solution renormalisée du problème approché suivant :

$$b_\varepsilon(\hat{\theta}^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\hat{\theta}^\varepsilon) - \Delta \hat{\theta}^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \text{ dans } Q, \quad (4.38)$$

$$\hat{\theta}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (4.39)$$

$$b_\varepsilon(\hat{\theta}^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \text{ dans } \Omega, \quad (4.40)$$

où $\theta_0^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ et telle que $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \rightarrow b(\theta_0)$ fortement dans $L^1(\Omega)$ quand ε tend vers zéro. La suite de fonctions b_ε est une suite d'approximations de b , de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0, \forall r \in \mathbb{R}$, $b_\varepsilon(0) = 0$ et telle que b_ε et b'_ε convergent vers b et b' uniformément sur \mathbb{R} quand ε tend vers 0.

On remarque que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, la fonction b_ε vérifie toutes les hypothèses nécessaires à l'existence et l'unicité de la solution renormalisée du problème (4.38) – (4.40) (voir Chapitre 1).

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit l'application ψ_ε par :

$$\psi_\varepsilon : L^{2\alpha}(Q) \longrightarrow L^{2\alpha}(Q)$$

$$\theta \longrightarrow \hat{\theta}^\varepsilon.$$

Comme $\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \in L^1(Q)$, les estimations de Boccardo-Gallouet ([11], voir aussi [4]) impliquent que $\hat{\theta}^\varepsilon \in L^p(Q)$, $\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}[$. En particulier $\hat{\theta}^\varepsilon \in L^{2\alpha}(Q)$. L'application ψ_ε est alors bien définie. Dans la suite, on vérifie que cette application est compacte, continue et qu'il existe un convexe fermé borné et stable par ψ_ε .

★ ψ_ε est compacte :

Soit θ_n une suite de fonctions bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$.

Pour $n \geq 1$ fixé, soit u_n^ε l'unique solution du problème :

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} + (u_n^\varepsilon \cdot \nabla) u_n^\varepsilon - 2 \operatorname{div} (\mu_\varepsilon^n Du_n^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F_n^\varepsilon \text{ dans } Q, \quad (4.41)$$

$$u_n^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]), \operatorname{div} u_n^\varepsilon = 0 \text{ dans } Q, \quad (4.42)$$

$$u_n^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon \text{ dans } \Omega, u_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (4.43)$$

u_n^ε est construit à partir de u_n^ε comme ci-dessus. Il en est de même pour μ_ε^n et F_n^ε . Par définition de F_n^ε , on a :

$$\|F_n^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C \|F(\theta_n)\|_{L^2(Q)}.$$

Puisque θ_n est bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$, alors F_n^ε est bornée dans $L^2(Q)$ uniformément en n , pour tout $\varepsilon > 0$. Le même raisonnement qui nous a permis de montrer que ψ_1 est compact dans le Chapitre 2, nous assure qu'il en est de même pour ψ_ε .

★ ψ_ε est continue :

On définit une suite de fonctions θ_n qui appartient à $L^{2\alpha}(Q)$, et une fonction $\theta \in L^{2\alpha}(Q)$. Les fonctions $\hat{\theta}_n^\varepsilon$ et $\hat{\theta}^\varepsilon$ sont définies par :

$$\psi_\varepsilon(\theta_n) = \hat{\theta}_n^\varepsilon \text{ et } \psi_\varepsilon(\theta) = \hat{\theta}^\varepsilon.$$

On suppose que :

$$\theta_n \longrightarrow \theta, \quad (4.44)$$

fortement dans $L^{2\alpha}(Q)$ quand n tend vers $+\infty$.

La suite F_n^ε est bornée dans $L^2(Q)$ uniformément en n , pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

$$u_n^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)).$$

Nous pouvons alors extraire une sous-suite telle que :

$$u_n^\varepsilon \rightharpoonup v^\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (4.46)$$

$$u_n^\varepsilon \rightarrow v^\varepsilon \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q),$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)).$$

quand n tend vers $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. où v^ε est une fonction de $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega))$. Par ailleurs, on vérifie aisément d'après les résultats classiques d'analyse fonctionnelle que :

$$\mu_\varepsilon^n \rightarrow \mu_\varepsilon \text{ fortement dans } L^p(Q), \forall p < \infty, \quad (4.47)$$

$$u_\varepsilon^n \rightarrow \bar{v}^\varepsilon * \rho_{\frac{\varepsilon}{2}} \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \quad (4.48)$$

$$F_n^\varepsilon \rightarrow F^\varepsilon \text{ fortement dans } L^1(Q), \quad (4.49)$$

quand n tend vers $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. Grâce à ces résultats, on déduit que v^ε est une solution faible du problème (4.35) – (4.37). Or le problème (4.35) – (4.37) admet une solution forte et unique u^ε . Ce qui implique (voir [25] chap 2, § 2.5) que $v^\varepsilon = u^\varepsilon$ presque partout dans Q . Puisque u_n^ε est régulier, on peut le considérer comme fonction test dans (4.41). On peut alors passer de la convergence faible dans (4.46) à la convergence forte comme dans (1.215). On en déduit :

$$u_n^\varepsilon \rightarrow u^\varepsilon \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)), \quad (4.50)$$

$$u_\varepsilon^n \rightarrow u_\varepsilon \text{ fortement dans } L_\sigma^2(Q), \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H_\sigma^1)'(\Omega)), \quad (4.52)$$

quand n tend vers $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, où u^ε est l'unique solution du problème (4.35) – (4.37).

Pour tout $n \geq 1$ fixé, nous rappelons que $\hat{\theta}_n^\varepsilon$ est l'unique solution renormalisée du problème suivant :

$$b_\varepsilon(\hat{\theta}_n^\varepsilon)_t + u_\varepsilon^n \cdot \nabla b_\varepsilon(\hat{\theta}_n^\varepsilon) - \Delta \hat{\theta}_n^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon^n |Du_n^\varepsilon|^2 \text{ dans } Q, \quad (4.53)$$

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (4.54)$$

$$b_\varepsilon(\hat{\theta}_n^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \text{ dans } \Omega, \quad (4.55)$$

où $\theta_0^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \rightarrow b(\theta_0)$, fortement dans $L^1(\Omega)$ quand ε tend vers zéro. D'après l'estimation (4.50), le second membre $\mu_\varepsilon^n |Du_n^\varepsilon|^2$ est borné dans $L^1(Q)$ uniformément en n . On utilise les résultats des chapitres 1 et 2 pour les solutions renormalisées à second membre dans $L^1(Q)$. On conclut que pour une sous-suite toujours indexée par n , pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une fonction mesurable ϑ_ε telle que :

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon \text{ converge presque partout vers } \vartheta_\varepsilon \text{ dans } Q,$$

$$b_\varepsilon(\hat{\theta}_n^\varepsilon) \text{ converge presque partout vers } b_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \text{ dans } Q,$$

et

$T_K(\hat{\theta}_n^\varepsilon)$ converge faiblement vers $T_K(\vartheta_\varepsilon)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

quand n tend vers $+\infty$. On démontre comme dans les chapitres 1 et 2 que ϑ_ε n'est autre que l'unique solution renormalisée du problème (4.38)–(4.40), alors :

$$\vartheta_\varepsilon = \hat{\theta}^\varepsilon \text{ p.p. dans } Q.$$

On obtient avec les résultats de convergence ci-dessus :

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon \text{ converge presque partout vers } \hat{\theta}^\varepsilon \text{ dans } Q, \quad (4.56)$$

quand n tend vers $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$. Le Lemme 2.2.5 du Chapitre 2 implique alors que :

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^p(Q),$$

$\forall p \in [1, \frac{N+2}{N}[$, $\forall \varepsilon > 0$. On en déduit que :

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon \longrightarrow \hat{\theta}^\varepsilon,$$

fortement dans $L^p(Q)$, pour tout p tel que $1 \leq p < \frac{N+2}{N}$,
en particulier :

$$\hat{\theta}_n^\varepsilon \longrightarrow \hat{\theta}^\varepsilon,$$

fortement dans $L^{2\alpha}(Q)$, car $1 < 2\alpha < \frac{N+2}{N}$. Ceci démontre la continuité de l'application ψ_ε de $L^{2\alpha}(Q)$ dans $L^{2\alpha}(Q)$.

★-Il existe une boule B de $L^{2\alpha}(Q)$ telle que $\psi_\varepsilon(B) \subset B$:
on cherche à déterminer un nombre réel positif R , tel que :

$$\psi_\varepsilon(B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R)) \subset B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R).$$

On suppose que θ appartient à $B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R)$.

On rappelle que u^ε est l'unique solution du problème (4.35) – (4.37) dans $L^2(0, T; H_\sigma^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$. On utilise alors u^ε comme une fonction test dans (4.35). Si on refait les mêmes calculs qu'au paragraphe (iii) dans le Chapitre 2, on obtient :

$$\|\hat{\theta}^\varepsilon\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq c \left[a^2 + M^2 \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}^{2\alpha} + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \right],$$

avec c une constante qui ne dépend pas de $\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)}$.

Ce qui nous amène à chercher un nombre réel positif R tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha} + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R.$$

Ce nombre réel existe à condition que $a^2 + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)}$ soit suffisamment petit. Par hypothèse, on sait qu'il existe un nombre réel positif η , tel que :

$$a^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta.$$

Grâce à cette dernière estimation et à la définition de u_0^ε , on a :

$$\begin{aligned} & a^2 + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq a^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) - b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}, \\ & \leq \eta + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) - b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Puisque $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \rightarrow b(\theta_0)$, fortement dans $L^1(\Omega)$ quand ε tend vers zéro, il est clair que pour $\varepsilon_0 > 0$ fixé, suffisamment petit, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a :

$$a^2 + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta',$$

où η' est un nombre réel positif suffisamment petit. Il existe alors $R(\eta) > 0$ tel que :

$$c \left(a^2 + M^2 R^{2\alpha}(\eta) + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq R(\eta).$$

Cela implique :

$$\psi_\varepsilon(B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R(\eta))) \subset B_{L^{2\alpha}(Q)}(0, R(\eta)).$$

On applique le théorème du point fixe de Schauder à ψ_ε :

$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe θ^ε telle que $\|\theta^\varepsilon\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq R(\eta)$, et telle que $\psi_\varepsilon(\theta^\varepsilon) = \theta^\varepsilon$.

Par définition de ψ_ε , on conclut l'existence d'une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du système approché :

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\operatorname{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon &= F^\varepsilon && \text{dans } Q, \\ b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon &= 2\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 && \text{dans } Q, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon &= 0 && \text{dans } Q, \\ u^\varepsilon &= 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 && \text{sur } \Sigma_T, \\ u^\varepsilon(t=0) &= u_0^\varepsilon \text{ et } b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) && \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est fixé suffisamment petit.

Étape 2. On remarque d'abord que l'équation (4.31) du système approché (4.30) – (4.34) a un second membre très régulier, ce qui nous permet de considérer la solution renormalisée de cette équation comme une solution faible. On multiplie la première équation (4.30) par u^ε , en additionnant le résultat à la seconde

équation (4.31), on obtient après simplification un nouveau système approché équivalent à (4.30) – (4.34) qui est :

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\operatorname{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \text{ dans } Q, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) + \operatorname{div} \left\{ u_\varepsilon \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) + u^\varepsilon p^\varepsilon \right\} \quad (4.58)$$

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} \right) \right\} - \Delta \theta^\varepsilon = F^\varepsilon \cdot u^\varepsilon + \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j^\varepsilon \partial_j (\mu_\varepsilon u_i^\varepsilon) \text{ dans } Q, \quad (4.59)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \text{ dans } Q, \quad (4.59)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ et } \theta^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (4.60)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon \text{ et } b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)(t=0) = b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon) \text{ dans } \Omega, \quad (4.61)$$

pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est fixé suffisamment petit.

Étape 3. Dans cette troisième et dernière étape, on passe à la limite dans le système approché (4.57) – (4.61). On démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega))$ ($\forall 1 \leq q < 3$) et $\nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^r(\Omega \times (0, T))$ ($\forall 1 \leq r < \frac{5}{4}$).

Preuve du Lemme 4.3.3.

On considère de nouveau le problème (4.30) – (4.34). D'après le théorème du point fixe de Schauder que nous avons pu appliquer, on sait que ce problème admet une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ telle que θ^ε est bornée dans $L^{2\alpha}(Q)$ pour ε suffisamment petit. Par définition de F et de F^ε , il est clair que F^ε est bornée dans $L^2(Q)$, et donc u^ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Comme μ_ε est bornée aussi, le second membre de l'équation (4.31) est bornée dans $L^1(Q)$. Puisque $b_\varepsilon(\theta_0^\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, on en déduit que $b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

On multiplie l'équation (4.31) par la fonction test $Z_K^{K+1}(S_M(b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)))$, où $Z_K^{K+1}(r) = T_{K+1}(r) - T_K(r)$, S_M est définie dans les chapitres précédents.

On refait les mêmes calculs qui nous ont permis de montrer la condition d'énergie (1.207) dans le Chapitre 1. On obtient :

$$\int_{\{K \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| < K+1\}} b_\varepsilon'(\theta^\varepsilon) |D\theta^\varepsilon|^2 dx ds \leq C, \quad (4.62)$$

où C est une constante.

On pose :

$$B_K = \{(x, t) \in Q, K \leq |b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)| < K+1\}.$$

Comme b est une fonction lipschitzienne, et grâce à la première estimation du Lemme 4.3.3, on a :

$$\|b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} \leq C, \quad (4.63)$$

$$\int_{B_K} |\nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 dx ds \leq C, \quad \forall K \in \mathbb{N}. \quad (4.64)$$

D'après ces deux dernières estimations, et en appliquant le lemme 2.2 de [10], on obtient

$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^r(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout couple (q, r) tel que

$$1 \leq q < \min\left\{\frac{N}{N-1}, 2\right\}, \quad 1 \leq r < 2$$

et $\frac{2}{r} + \frac{N}{q} > N + 1.$

En particulier,

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)),$$

$\forall 1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ si $N > 2$, alors

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), \forall 1 \leq q < \frac{3}{2}.$$

Or $W_0^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$, ce qui implique

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^1(0, T; L^q(\Omega)), \forall 1 \leq q < 3.$$

On a aussi :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), \forall 1 \leq q < \frac{N+2}{N+1},$$

par conséquent :

$$\nabla b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^r(\Omega \times (0, T)), \forall 1 \leq r < \frac{5}{4}.$$

d'où ce qu'il fallait démontrer.

On passe maintenant à la démonstration du lemme suivant :

Lemme 4.3.4. *Il existe une fonction u définie sur Q telle que u^ε converge vers u fortement dans $L^2(0, T; L^q(\Omega))$, $\forall q \in [1, 6[$, et fortement dans $L^r(0, T; L^2(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, à une sous suite près quand ε tend vers 0.*

Preuve du Lemme 4.3.4.

On rappelle que u^ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. D'après les inclusions de Sobolev en dimension 3, le terme $u_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon$ est borné dans $L^{\frac{5}{4}}(Q)$. F^ε est en particulier bornée dans le même espace. ∇p^ε est également bornée dans $L^{\frac{5}{4}}(Q)$ (voir P.-L. Lions [25]). On en déduit que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; L^1(\Omega)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Observons maintenant les injections suivantes :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset W^{-1,s}(\Omega),$$

la première injection est compacte, avec $s < \inf(2, \frac{N}{N-1})$, pour tout $1 \leq q < 2^* = 6$. Alors

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,s}(\Omega)),$$

avec $s < \inf(2, \frac{N}{N-1})$. Un lemme de type Aubin (Simon [30]) implique que :

$$u^\varepsilon \text{ est relativement compacte dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)), \forall 1 \leq q < 6.$$

On conclut qu'il existe une fonction mesurable u définie sur Q telle que :

$$u^\varepsilon \text{ converge vers } u \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)), \forall q \in [1, 6[,$$

à une sous-suite près quand ε tend vers 0.

On passe maintenant à la démonstration du deuxième résultat de convergence.

On rappelle qu'on a :

$$u^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,s}(\Omega)),$$

avec $s < \inf(2, \frac{N}{N-1})$. On a également les injections suivantes :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,s}(\Omega),$$

la première injection est compacte, avec $s < \inf(2, \frac{N}{N-1})$. Un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 6) implique que :

$$u^\varepsilon \text{ est relativement compacte dans } L^r(0, T; L^2(\Omega)), \forall 1 \leq r < \infty.$$

On conclut que :

$$u^\varepsilon \text{ converge vers } u \text{ fortement dans } L^r(0, T; L^2(\Omega)), \forall r \in [1, \infty[,$$

à une sous-suite près quand ε tend vers 0.

Remarque 4.3.5. $\frac{|u^\varepsilon|^2}{2}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega))$ ($\forall 1 \leq q < 3$).

Dans le lemme suivant, on démontre un résultat de convergence très important :

Lemme 4.3.6. $\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge fortement vers $\frac{|u|^2}{2} + b(\theta)$ dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[, \forall q \in [1, 3[,$ quand ε tend vers 0.

Preuve du Lemme 4.3.6.

Dans tout ce qui suit, on pose :

$$G^\varepsilon = \frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon).$$

On montre que chaque terme de l'équation (4.58) est borné. En effet, d'après le lemme 4.3.3 et la remarque 4.3.5, on a :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega)) (\forall 1 \leq q < 3).$$

$$\nabla G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^r(Q) (\forall 1 \leq r < \frac{5}{4}),$$

autrement dit

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)) (\forall 1 \leq r < \frac{5}{4}).$$

On pose

$$T_1 = \operatorname{div}(u_\varepsilon \cdot G^\varepsilon).$$

Comme u_ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, et G^ε est bornée dans $L^1(0, T; L^q(\Omega))$ ($\forall 2 < q < 3$), alors :

$$T_1 \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) (\forall 1 < r < \frac{6}{5}).$$

On pose

$$T_2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} \right) \right\}.$$

On sait que μ_ε est bornée dans $L^\infty(Q)$, et que $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} \right)$ est bornée dans $L^{\frac{5}{4}}(Q)$, alors :

$$T_2 \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) (\forall 1 < r < \frac{5}{4}).$$

On pose

$$T_3 = \Delta \theta^\varepsilon.$$

La coercivité de b et le Lemme 4.3.3 impliquent que :

$$T_3 \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) (\forall 1 < r < \frac{5}{4}).$$

On pose

$$T_4 = F^\varepsilon \cdot u^\varepsilon.$$

On a déjà vérifié que F^ε est bornée dans $L^2(Q)$, et que u^ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. On en déduit que :

$$T_4 \text{ est bornée dans } L^1(Q).$$

On pose

$$T_5 = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j^\varepsilon \partial_j (\mu_\varepsilon u_i^\varepsilon).$$

On montre que ce terme peut s'écrire sous une autre forme, pour cela, on va omettre le symbole ε pour ne pas alourdir les notations. On pose

$$A = \mu(u \cdot \nabla)u.$$

Alors :

$$A = \mu \sum_{i=1}^3 (u_i \partial_i)u = \mu \sum_{i=1}^3 u_i \cdot \partial_i u.$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \sum_{i,j=1}^3 \partial_j (\mu u_i \cdot \partial_i u_j), \\ \operatorname{div} A &= \sum_{i,j=1}^3 \partial_j (\mu u_i) \partial_i u_j + \mu \sum_{i,j=1}^3 u_i \partial_j \partial_i u_j. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette dernière égalité est nul, car la divergence de u est nulle. On en déduit que

$$T_5 = \operatorname{div} [\mu_\varepsilon (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon].$$

Le même raisonnement que pour T_2 donne :

$$T_5 \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) \ (\forall 1 < r < \frac{5}{4}).$$

On pose

$$T_6 = \operatorname{div}(u^\varepsilon \cdot p^\varepsilon).$$

Sans perdre de généralité, on suppose que $\operatorname{div} F^\varepsilon = 0$, on rappelle aussi que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $u_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. Sachant que μ_ε est bornée dans $L^\infty(Q)$, on applique le théorème 3.1 de Giga et Sohr [21], on obtient alors :

$$\nabla p^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^{\frac{5}{4}}(Q).$$

et que

$$p^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)) \ (\forall q < \frac{3}{2}). \quad (4.65)$$

Grâce à cette dernière estimation et au Lemme 4.3.4, on conclut que :

$$u^\varepsilon \cdot p^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^1(0, T; L^r(\Omega)) \ (\forall 1 < r < \frac{6}{5}).$$

Par conséquent :

$$T_6 \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) \ (\forall 1 < r < \frac{6}{5}).$$

Récapitulatif :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)) \ (\forall 1 < r < \frac{6}{5}), \quad (4.66)$$

(et dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega))$, $\forall 1 \leq q < 3$),

$$\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; L^1(\Omega)) + L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega)) \ (\forall 1 < r < \frac{6}{5}). \quad (4.67)$$

Observons les injections suivantes :

$$W_0^{1,r}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset W^{-1,s}(\Omega).$$

La première injection est compacte, avec $1 < r < \frac{6}{5}$, et $s < \inf(r, \frac{N}{N-1})$ (il suffit de prendre $s < r$). D'après (4.66) et (4.67), on a :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)), \ (\forall 1 < r < \frac{6}{5}),$$

$$\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,s}(\Omega)),$$

avec $s < r$. Un lemme de type Aubin (Simon [30]) implique :

$$G^\varepsilon \text{ est relativement compacte dans } L^1(Q).$$

On conclut qu'il existe une fonction G définie sur Q telle que :

$$G^\varepsilon \text{ converge vers } G \text{ fortement dans } L^1(Q), \quad (4.68)$$

à une sous-suite près, quand ε tend vers 0.

Désormais, on utilisera les deux estimations (4.66) et (4.68) pour montrer la convergence forte de G^ε vers G dans $L^1(0, T; L^q(\Omega))$, $\forall 1 < q < 3$. En effet, d'après l'estimation (4.66), G^ε est bornée dans $L^1(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, avec $1 < q_1 < 3$. Soit q tel que $q_1 > q > 1$ ($\frac{q_1}{q} > 1$). On utilise l'inégalité de Hölder :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| \geq K\}} |G^\varepsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} |G^\varepsilon|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdot (\text{mes } \{|G^\varepsilon| \geq K\})^{\frac{q_1 - q}{q_1}} dt.$$

On sait que G^ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, alors, on a pour presque tout t dans $(0, T)$:

$$\text{mes } \{x \in \Omega; |G^\varepsilon| \geq K\} \leq \frac{M}{K}.$$

Ce qui implique :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| \geq K\}} |G^\varepsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \leq \frac{M^{\frac{q_1-q}{q_1}}}{K^{\frac{q_1-q}{q_1}}} \cdot \int_0^T \left(\int_{\Omega} |G^\varepsilon|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} dt.$$

Le deuxième terme à droite de cette dernière inégalité est produit de deux termes. Le premier terme tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de ε . Le deuxième est borné. On en déduit que :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| \geq K\}} |G^\varepsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \text{ tend vers zéro quand } K \text{ tend vers } +\infty, \quad (4.69)$$

indépendamment de ε , d'où l'équi-intégrabilité.

D'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\begin{aligned} \|G^\varepsilon - G\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega))} &\leq \int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \\ &\quad + \int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| > K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Pour presque tout t dans $(0, T)$, on a :

$$|G^\varepsilon - G|^q \chi_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} \rightarrow 0,$$

p.p. dans Ω , quand ε tend vers 0 et

$$|G^\varepsilon - G|^q \chi_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} \leq C(K^q + |G|^q), \quad (4.71)$$

pour presque tout t dans $(0, T)$. On vérifie maintenant que $G \in L^1(0, T; L^q(\Omega))$. En effet, G^ε est bornée dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^q(\Omega))$, ($\forall 1 \leq q < 3$). Par interpolation, on obtient :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^p(0, T; L^{q'}(\Omega)),$$

$\forall 1 < p < \infty$ et $\forall 1 < q' < q < 3$, ce qui implique :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^p(0, T; L^{q'}(\Omega)),$$

$\forall 1 < p < \infty$ et $\forall 1 < q' < 3$. En particulier :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^p(0, T; L^{q_1}(\Omega)), \forall 1 < p < \infty.$$

$L^p(0, T; L^{q_1}(\Omega))$ est un espace réflexif, alors :

$$G^\varepsilon \text{ converge faiblement vers } G$$

dans $L^p(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, $\forall 1 < p < \infty$ à une sous-suite près. On en déduit que $G \in L^p(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, $\forall 1 < p < \infty$. Par ailleurs, on a les injections suivantes :

$$L^p(0, T; L^{q_1}(\Omega)) \subset L^1(0, T; L^{q_1}(\Omega)) \subset L^1(0, T; L^q(\Omega)).$$

Il s'ensuit que $G \in L^1(0, T; L^q(\Omega))$. Ce qui implique que le deuxième terme à droite de l'inégalité (4.71) appartient à $L^1(\Omega)$ pour presque tout t dans $[0, T]$. Le théorème de Lebesgue implique alors que :

$$\int_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \rightarrow 0,$$

quand ε tend vers 0 et que :

$$\left(\int_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0,$$

pour presque tout t dans $(0, T)$, quand ε tend vers 0. D'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\left(\int_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq K|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Omega} |G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

Soit la fonction définie par :

$$t \longrightarrow K|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Omega} |G(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \in L^1(0, T),$$

on applique le théorème de Lebesgue :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| \leq K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \rightarrow 0, \quad (4.72)$$

quand ε tend vers 0.

Dans ce qui suit, on montre que le second membre à droite de l'inégalité (4.70), tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de ε . Grâce à l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| > K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt &\leq \int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| > K\}} |G^\varepsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \\ &\quad + \int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| > K\}} |G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt, \end{aligned} \quad (4.73)$$

d'après (4.69), le premier terme à droite de l'inégalité (4.73), tend vers zéro, quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de ε . On rappelle que $G \in L^1(0, T; L^{q_1}(\Omega))$, et que :

$$\text{mes } \{|G^\varepsilon| > K\} \leq w(K),$$

avec $w(K)$ tend vers 0, quand K tend vers $+\infty$. Avec tous ces résultats, on conclut que :

$$\int_0^T \left(\int_{\{|G^\varepsilon| > K\}} |G^\varepsilon - G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \rightarrow 0, \quad (4.74)$$

quand K tend vers $+\infty$, indépendamment de ε .

D'après les estimations (4.70), (4.72) et (4.74), on conclut que :

$$G^\varepsilon \rightarrow G \text{ fortement dans } L^1(0, T; L^q(\Omega)),$$

quand ε tend vers 0, $\forall 1 < q < q_1$ avec $q_1 < 3$. Alors :

$$G^\varepsilon \rightarrow G \text{ fortement dans } L^1(0, T; L^q(\Omega)), \quad (4.75)$$

quand ε tend vers 0, $\forall 1 \leq q < 3$.

On retourne maintenant à la démonstration du Lemme 4.3.6. Observons les injections suivantes :

$$W_0^{1,r}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset W^{-1,s}(\Omega),$$

la première injection est compacte, avec $1 < r < \frac{6}{5}$, et $s < \inf(r, \frac{N}{N-1})$ (il suffit de prendre $s < r$). D'après (4.66) et (4.67), on a :

$$G^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)), \quad (\forall 1 < r < \frac{6}{5}).$$

$$\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans } L^1(0, T; W^{-1,s}(\Omega)),$$

avec $s < r$. Un lemme de type Aubin (Simon [30], corollaire 6) implique :

$$G^\varepsilon \text{ est relativement compacte dans } L^r(0, T; L^1(\Omega)), \quad (4.76)$$

$\forall 1 \leq r < \infty$.

D'après le Lemme 4.3.4, on a :

$$\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} \text{ converge fortement vers } \frac{|u|^2}{2}, \quad (4.77)$$

dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, $\forall q \in [1, 3[$, quand ε tend vers 0. De même d'après les estimations (4.75) et (4.76), on a :

$$\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge fortement vers } G, \quad (4.78)$$

dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, $\forall q \in [1, 3[$, quand ε tend vers 0. D'après (4.77) et (4.78), on a :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge fortement vers } G - \frac{|u|^2}{2}, \quad (4.79)$$

dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, $\forall q \in [1, 3[$, quand ε tend vers 0.

En appliquant les techniques usuelles des solutions renormalisées à l'équation (4.31), sachant qu'elle a un second membre borné dans $L^1(Q)$, on montre de la même façon que dans les chapitres précédents qu'il existe une fonction mesurable θ définie sur Q , telle que, à une sous-suite près :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge vers } \theta, \quad (4.80)$$

et

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge vers } b(\theta), \quad (4.81)$$

presque partout dans Q , quand ε tend vers 0. D'après (4.79) et (4.81), on conclut que :

$$b(\theta) = G - \frac{|u|^2}{2},$$

presque partout dans Q . Les estimations (4.78) et (4.79) impliquent que :

$$b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge fortement vers } b(\theta), \quad (4.82)$$

dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, $\forall q \in [1, 3[$, quand ε tend vers 0 et que :

$$\frac{|u^\varepsilon|^2}{2} + b_\varepsilon(\theta^\varepsilon) \text{ converge fortement vers } \frac{|u|^2}{2} + b(\theta), \quad (4.83)$$

dans $L^1(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^r(0, T; L^1(\Omega))$, $\forall r \in [1, \infty[$, $\forall q \in [1, 3[$, quand ε tend vers 0. Cela achève la démonstration du Lemme 4.3.6.

Retour à la démonstration du Théorème 4.3.1 :

on vérifie que θ^ε converge fortement vers θ dans $L^1(Q)$.

En effet, d'après ce qui précède :

$$\theta^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^p(Q),$$

avec $1 < p < \frac{5}{3}$, en tenant compte de l'estimation (4.80), on déduit que :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge fortement vers } \theta$$

dans $L^q(Q)$, pour tout q vérifiant $1 \leq q < p$. Ce qui implique :

$$\theta^\varepsilon \text{ converge fortement vers } \theta, \quad (4.84)$$

dans $L^1(Q)$, quand ε tend vers zéro.

Dans le lemme suivant, on démontre la convergence de μ_ε :

Lemme 4.3.7. μ_ε converge fortement vers $\mu(\theta)$, dans $L^p(Q)$,
 $\forall p < \infty$, quand ε tend vers zéro.

Preuve du Lemme 4.3.7.

Soit la fonction T_h définie par :

$$T_h f(x) = \begin{cases} f(x+h, t) & \text{si } (x+h, t) \in Q, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $f_\varepsilon = \widetilde{\mu^\varepsilon(\theta^\varepsilon)}$ ($\widetilde{\mu^\varepsilon(\theta^\varepsilon)}$ est définie ci-dessus), et $f = \widetilde{\mu(\theta)}$ où

$$\widetilde{\mu(\theta)} = \begin{cases} \mu(\theta) & \text{dans } Q, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le caractère borné de μ^ε , et l'estimation (4.80) impliquent que :

$$f_\varepsilon \text{ converge fortement vers } f, \quad (4.85)$$

dans $L^p(\mathbb{R}^{N+1})$, quand ε tend vers 0, $\forall 1 \leq p < \infty$.

On a :

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} &= \|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f_\varepsilon + f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}, \\ &\leq \|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Dans un premier temps, on montre que :

$$\|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

On procède de la même manière que dans E. DiBenedetto [18] (proposition 21.1). En effet, pour presque tout t dans \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} |(\rho_\varepsilon * f_\varepsilon)(x, t) - f_\varepsilon(x, t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) [f_\varepsilon(y, t) - f_\varepsilon(x, t)] dy \right|, \\ &\leq \int_{|\eta| < \varepsilon} \rho_\varepsilon(\eta) |f_\varepsilon(x+\eta, t) - f_\varepsilon(x, t)| d\eta, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|(\rho_\varepsilon * f_\varepsilon)(x, t) - f_\varepsilon(x, t)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta) |f_\varepsilon(x+\eta, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}},$$

où q est l'exposant conjugué de p . On en déduit que :

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N} |(\rho_\varepsilon * f_\varepsilon)(x, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p dx dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta) |f_\varepsilon(x+\eta, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p d\eta \right) dx \right) dt, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho_\varepsilon(\eta) \int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x+\eta, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p dx \right) d\eta \right) dt, \end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini. On applique une deuxième fois ce théorème, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N} |(\rho_\varepsilon * f_\varepsilon)(x, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p dx dt \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta) \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x + \eta, t) - f_\varepsilon(x, t)|^p dx \right) dt \right) d\eta, \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta) \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}^p d\eta, \\
& \leq \int_{|\eta| < \varepsilon} \rho_\varepsilon(\eta) \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}^p d\eta, \\
& \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}^p.
\end{aligned}$$

On conclut que :

$$\|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}. \quad (4.87)$$

D'après les estimations (4.86) et (4.87), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}, \\
& \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f_\varepsilon - f_\varepsilon - T_\eta f + f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}, \\
& \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta(f_\varepsilon - f) - (f_\varepsilon - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}, \\
& \leq \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta(f_\varepsilon - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + 2\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}, \\
& \leq 3\|(f_\varepsilon - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} + \sup_{|\eta| < \varepsilon} \|T_\eta f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}.
\end{aligned}$$

Le premier terme à droite de cette dernière inégalité tend vers 0 grâce à l'estimation (4.85). De même, le deuxième terme à droite de cette inégalité tend vers 0 (voir DiBenedetto [18], proposition 21.1). Par conséquent :

$$\|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \text{ tend vers } 0,$$

quand ε tend vers 0. Alors :

$$\|\rho_\varepsilon * f_\varepsilon - f\|_{L^p(Q)} \text{ tend vers } 0,$$

quand ε tend vers 0. Autrement dit, on a :

$$\|\mu_\varepsilon - \mu(\theta)\|_{L^p(Q)} \text{ tend vers } 0,$$

quand ε tend vers 0. Ce qui achève la démonstration du Lemme 4.3.7.

Remarque 4.3.8. On peut démontrer par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être décrit la convergence suivante :

$$F^\varepsilon \text{ converge fortement vers } F(\theta) \text{ dans } L^p(Q), \quad (4.88)$$

$\forall p < 2$, quand ε tend vers 0.

Donc, on a en particulier :

$$\mu_\varepsilon(u^\varepsilon \cdot \nabla)u_i^\varepsilon \rightharpoonup \mu(\theta)(u \cdot \nabla)u_i \text{ dans } L^1(Q). \quad (4.89)$$

Maintenant, on vérifie que le terme $\operatorname{div}(u^\varepsilon \cdot p^\varepsilon)$ passe à la limite quand ε tend vers 0. En effet, l'estimation (4.65) implique que à une sous-suite près :

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)),$$

$\forall q < \frac{3}{2}$. On sait aussi que :

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)),$$

$\forall 1 \leq q < 6$. Ces deux derniers résultats de convergence nous assurent alors que :

$$u^\varepsilon p^\varepsilon \rightharpoonup u p \text{ faiblement dans } L^1(0, T; L^r(\Omega)),$$

$\forall r < \frac{6}{5}$. En particulier,

$$u^\varepsilon p^\varepsilon \rightharpoonup u p \text{ faiblement dans } L^1(Q).$$

On en déduit que :

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon p^\varepsilon) \rightharpoonup \operatorname{div}(u p) \text{ au sens des distributions.} \quad (4.90)$$

Grâce à tous les résultats de convergence que nous avons pu montrer jusqu'ici, et plus particulièrement grâce aux Lemmes 4.3.4, 4.3.6 et 4.3.7 et grâce aux estimations (4.77), (4.82), (4.84), (4.88), (4.89) et (4.90), nous pouvons passer à la limite dans chaque terme des équations (4.57) et (4.58) et obtenir une solution faible du système (4.6) – (4.10) au sens de la Définition 4.2.1.

CAS 2 : $0 \leq 2\alpha \leq 1$. Si α est nul, Dans ce cas, l'analyse de la démonstration du théorème 4.3.1 dans le premier cas permet d'obtenir l'existence d'une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du problème (4.30)-(4.34). En effet, l'application ψ_1 (du premier cas) ainsi construite de $L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$, reste compacte et continue. De plus,

$$F^\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(Q).$$

ce qui implique qu'il existe un nombre réel positif $R > 0$ tel que :

$$\psi_1(B_{L^1(Q)}(0, R)) \subset B_{L^1(Q)}(0, R).$$

Ainsi, on applique le théorème du point fixe de Schauder sur $L^1(Q)$ sans supposer que les données sont petites, d'où l'existence d'une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du problème (4.30) – (4.34).

On suppose maintenant que $0 < 2\alpha \leq 1$. On procède par approximation et passage à la limite. On commence par remplacer la fonction F par $F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème approché suivant :

$$u_t^\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - 2\operatorname{div}(\mu_\varepsilon Du^\varepsilon) + \nabla p^\varepsilon = F^\varepsilon \quad \text{dans } Q, \quad (4.91)$$

$$b(\theta^\varepsilon)_t + u_\varepsilon \cdot \nabla b(\theta^\varepsilon) - \Delta \theta^\varepsilon = 2\mu_\varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \quad \text{dans } Q, \quad (4.92)$$

où $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Q , $u^\varepsilon = 0$, $\theta^\varepsilon = 0$ sur Σ_T , $u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon$ et $b(\theta^\varepsilon)(t=0) = b(\theta_0)$ dans Ω . La suite F^ε est définie par :

$$F^\varepsilon = \zeta_\varepsilon(F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\theta)\chi_{(d(x,\partial\Omega)>2\varepsilon)}) * \rho_\varepsilon.$$

A $\varepsilon > 0$, La fonction $F \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ étant continue et bornée, on déduit qu'il existe une solution forte-renormalisée $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du système approché (4.91) – (4.92) (d'après le cas $\alpha = 0$). Le même raisonnement des chapitres 2 et 3 dans la cas où $0 \leq 2\alpha \leq 1$ montre que la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée uniformément en ε dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. Par définition de F et F^ε , on conclut que la suite F^ε est en particulier bornée uniformément en ε dans $L^2(Q)$. Enfin, on construit un nouveau système approché (4.57)-(4.61) et on passe à la limite dans ce nouveau système comme dans le cas où $1 < 2\alpha < \frac{5}{3}$ pour déduire l'existence d'une solution faible du système (4.6) – (4.10) (au sens de la définition 4.2.1).

Ainsi se termine la démonstration du Théorème 4.3.1.

Bibliographie

- [1] R.-A. Adams. Sobolev spaces. Academic Press, 1975.
- [2] H.-W. Alt-S.Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. Math. Z, 183 :311–341, 1983.
- [3] C. Bernardi, B. Métivet, and B. Pernaud-Thomas. Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par éléments finis. RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 29(7) :871–921, 1995.
- [4] D. Blanchard and O. Guibé. Existence of solution for a nonlinear system in thermo-viscoelasticity. Adv. Differential Equations, 5 :1221–1252, 2000.
- [5] D. Blanchard and F. Murat. Renormalized solution for nonlinear parabolic problems with L^1 data, existence and uniqueness. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 127 :1137–1152, 1997.
- [6] D. Blanchard, F. Murat, and H. Redwane. Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with two unbounded nonlinearities (to appear).
- [7] D. Blanchard, F. Murat, and H. Redwane. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems. J. Differential Equations, 177 :331–374, 2001.
- [8] D. Blanchard and A. Porretta. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. J. Differential Equations, 210(2) :383–428, 2005.
- [9] D. Blanchard and H. Redwane. Renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic evolution problems. J. Math. Pures Appl, 77 :117–151, 1998.
- [10] L. Boccardo, A. Dall’Aglio, T. Gallouët, and L. Orsina. Nonlinear parabolic equations with measure data. J. Funct. Anal., 147(1) :237–258, 1997.
- [11] L. Boccardo and T. Gallouët. On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. J. Funct. Anal, 87 :149–169, 1989.
- [12] J. Boussinesq. Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [13] B. Climent and E. Fernández-Cara. Existence and uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes system. J. Math. Pures Appl. (9), 76(4) :307–319, 1997.
- [14] B. Climent and E. Fernández-Cara. Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind. Math. Models Methods Appl. Sci., 8(4) :603–622, 1998.

- [15] A. Dall'Aglio and L. Orsina. Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data. Nonlinear Analysis, 27 :59–73, 1986.
- [16] G. De Rham. Variétés différentiables. Hermann, Paris, 1960.
- [17] J.-I Diaz and G. Galiano. Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 11(1) :59–82, 1998.
- [18] E. DiBenedetto. Real analysis. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
- [19] R.-J DiPerna and P.-L Lions. On the cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. Ann of Math, 130(1) :321–366, 1989.
- [20] T. Gallouët, J. Lederer, R. Lewandowski, F. Murat, and L. Tartar. On a turbulent system with unbounded eddy viscosities. Nonlinear Analysis TMA, 52(1) :1051–1068, 2003.
- [21] Y. Giga and H. Sohr. Abstract L^p estimates for the cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains. J. Funct. Anal, 102 :72–94, 1991.
- [22] O. Guibé. Existence and uniqueness results for a nonlinear stationary system. Nonlinear Differential Equations Appl, 10 :309–328, 2003.
- [23] R. Lewandowski. Analyse mathématique et océanographique. Masson, Paris, 1997.
- [24] J.-L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [25] P.-L. Lions. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1 : Incompressible Models. Oxford Lect. Series in Math. Appl. 3. Oxford, 1996.
- [26] P.-L. Lions and F. Murat. Solutions renormalisées d'équations elliptiques (à paraître).
- [27] J.-M. Milhaljan. A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. Astronom. J, 136 :1126–1133, 1962.
- [28] A. Porretta. Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 177 :143–172, 1999.
- [29] S. Segura de León and J. Toledo. Regularity for entropy solutions of parabolic p -Laplacian type equations. Publ. Mat, 43 :665–683, 1999.
- [30] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. Ann. Mat. Pur. App, 146 :65–96, 1987.
- [31] L. Tartar. Topics in nonlinear analysis. Publications mathématiques d'orsay, 1982.
- [32] R. Temam. Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis, 3rd revised edition. North-Holland, Amsterdam, 1984.