Théorie des rapports (XIIIe - XVIe siècles) : réception, assimilation, innovation

Sabine Rommevaux

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : **Philosophie**

présentée et soutenue publiquement par

Sabine ROMMEVAUX

le 23 février 2007

au **Centre d'études supérieures de la Renaissance**

Volume I. Mémoire de synthèse des travaux et recherches

JURY :

Joël BIARD, Professeur, Université François Rabelais, Tours (Professeur référent)
Michel BLAY, Directeur de Recherche, CNRS (CAPHES)
Jean CELEYRETTE, Professeur émérite, Université Charles-de-Gaulle, Lille 3
Pier Daniele NAPOLITANI, Professeur, Università di Pisa (Italie)
Marco PANZA, Directeur de Recherche, CNRS (REHSEIS)
Edith SYLLA, Professeur, North Carolina State University (USA)

MEMOIRE DE SYNTHESE DES TRAVAUX ET RECHERCHES

> L'évocation de mon parcours intellectuel et la description des résultats de mes recherches — exercice auquel je dois me livrer ici — me donnent l'occasion de rendre hommage à Marie-Paule Rommevaux, ma mère, disparue il y a trois ans. Enseignante de mathématiques, docteur en didactique des mathématiques, elle m'a transmis son goût pour l'histoire et la philosophie des mathématiques. Elle suivait avec intérêt mes travaux.

Adolescente, je vivais déjà dans les livres ; je rêvais d'entrer à l'École des chartes et de passer ma vie dans les bibliothèques. Mais j'avais des facilités en mathématiques ; j'ai suivi une filière scientifique tout en apprenant le latin et le grec ancien. Un premier cours de mathématiques, en seconde, a décidé de mon avenir : l'algèbre de Boole, présentée comme une série de recettes, vides de sens pour moi et certainement pour l'ensemble de mes camarades. De retour à la maison a débuté une discussion entre ma mère, mon père, enseignant de mathématiques lui aussi, et moi, discussion qui n'a jamais cessé jusqu'au décès de ma mère. Mes parents ont donné sens et corps aux cours que j'ai suivis au lycée puis en classes préparatoires aux grandes écoles. À table il était question, pêle-mêle, des solides de Platon, de l'anneau de Moebius, des géométries non euclidiennes, de la crise de l'irrationalité dans les mathématiques grecques, de l'axiomatisation de la géométrie, du théorème de Gödel, des paradoxes de la théorie des ensembles, des problèmes posés par l'écriture symbolique, du rôle des mathématiques dans l'appréhension du réel, de la certitude des démonstrations mathématiques, etc. ; mais aussi d'Euclide, d'Archimède (je m'entraînais à lire le traité *Des spirales*, en grec, et mon père m'expliquait les démonstrations mathématiques), de Cauchy ou de Galois… Mes parents m'ont ainsi transmis leur passion des mathématiques et m'ont fait découvrir un univers que les cours me laissaient à peine entrevoir.

Plus tard, à l'université, tout en poursuivant des études de mathématiques, je lisais des biographies de mathématiciens et des ouvrages d'histoire des sciences ; je ne manquais jamais une occasion de suivre une conférence sur l'histoire des mathématiques.

En 1987, après que j'eusse obtenu l'agrégation de mathématiques, j'étais sur le point d'entamer des recherches en géométrie algébrique, lorsque j'ai finalement décidé de me consacrer à ce qui était devenu une passion. Je me suis inscrite en DEA d'histoire des sciences, à Paris VII. C'est alors que j'ai rencontré Ahmed Djebbar, enseignant de mathématiques à l'université d'Orsay, spécialiste des mathématiques arabes. Je voulais travailler sur les mathématiques grecques. Il m'a proposé d'apprendre l'arabe et de travailler avec lui. J'ai accepté immédiatement. Mon histoire familiale m'attachait à l'Algérie et à la lutte pour son indépendance.

J'ai ainsi préparé, sous la direction officieuse d'Ahmed Djebbar et la direction officielle de Christian Houzel, un mémoire sur AÌmad ibn Yºsuf, mathématicien égyptien (fin IXe siècle – début Xe siècle). Une grossesse difficile et une longue maladie après la naissance de ma fille m'ont contrainte à repousser de deux années la présentation de ce mémoire et m'a laissé tout le temps d'apprendre l'arabe et d'étudier l'histoire de la civilisation arabo-musulmane.

Il était prévu que je consacre ma thèse à l'édition, en arabe, de l'*Épître sur le rapport et la proportion* d'AÌmad ibn Yºsuf et à sa diffusion dans l'Occident médiéval latin. La guerre du golfe en a décidé autrement (je m'étais inscrite en thèse en 1990). Les bibliothèques des pays arabes se sont fermées aux chercheurs étrangers ; je n'ai pas pu obtenir les manuscrits qui m'étaient nécessaires. Par ailleurs, à la même période, Ahmed Djebbar, qui devait superviser mon travail, a quitté la France pour assumer des responsabilités politiques en Algérie. Au bout d'une année d'incertitudes Jean Dhombres, qui dirigeait officiellement mon travail de thèse, m'a proposé d'étudier le commentaire de Christoph Clavius au livre V des *Eléments* d'Euclide. Je suis passée brutalement des mathématiques médiévales arabes aux mathématiques latines renaissantes. L'objet toutefois restait le même : la théorie des proportions.

Ce travail sur Clavius m'a ensuite conduite à m'intéresser aux mathématiques médiévales latines et je n'ai plus eu l'occasion d'étudier les mathématiques arabes.

C'est durant cette période de formation que deux rencontres ont marqué profondément mon travail et son orientation. La première rencontre a eu lieu, à Lille, avec Gérard Simon, professeur de philosophie, un des fondateurs du Centre de Recherche sur l'Analyse et la Théorie des Savoirs qui est devenu une des composantes de l'UMR « Savoirs et Textes » à laquelle j'ai été rattachée lors de mon entrée au CNRS en 1997. En 1989 Gérard Simon donnait un cours sur l'astronomie de Kepler dans le cadre du DEA d'histoire des sciences de Lille 3. J'ai suivi ce cours. J'étais déjà consciente, à l'époque, de la nécessité de tenir compte du contexte historique dans lequel les textes que j'étudiais avaient été écrits. Mais c'est avec Gérard Simon que j'ai compris toute l'importance de cette contextualisation. Il ne s'agissait pas de donner un vernis historique aux textes étudiés en donnant quelques éléments biographiques sur l'auteur et quelques énoncés généraux sur le contexte historique, institutionnel ou scientifique de l'époque (comme je l'avais fait maladroitement dans mon mémoire de DEA), sans mettre en évidence les implications réelles de ce contexte sur le contenu même des théories étudiées. Gérard Simon, à la suite de Foucault, expliquait la nécessité de prendre en compte les *a priori* historiques lorsqu'ils expliquent comment, selon les périodes, se sont développées des manières propres de voir le monde et de l'expliquer. Je comprenais que dans ses travaux il ne s'agissait pas tant, pour lui, de s'interroger sur la véracité de telle ou telle théorie que de s'attacher à en montrer les innovations par rapport aux théories qu'elle remettait en cause. Il s'attachait aussi à dégager les contraintes conceptuelles ou culturelles, voire idéologiques, qui limitent ces innovations. Il soulignait alors avec force combien il était nécessaire d'éviter de projeter nos propres systèmes de rationalité sur les systèmes de pensée anciens, de les interroger à la lumière de ce que nous entendons aujourd'hui par science. Toutefois, j'ajouterais à l'enseignement de Gérard Simon que selon les disciplines et selon les périodes, mais aussi selon les textes que l'on étudie (Gérard Simon insistait aussi sur la nécessité de la très grande attention que l'on doit apporter à la lettre des textes), l'ampleur des *a priori* historiques qu'il est nécessaire de prendre en compte varie. Elle est sans doute moins vaste lorsque l'on travaille sur le commentaire de Campanus (XIII^{e} siècle) aux *Eléments* d'Euclide que lorsque l'on étudie les lois de Kepler sur le mouvement des astres. Nous y reviendrons. Gérard Simon sait toute l'amitié que j'ai pour lui et sa famille et que j'ai eu l'occasion de lui témoigner en organisant, avec Bernard Joly, un colloque en son honneur en octobre 2005[1].

Tout aussi déterminante a été ma rencontre avec Bernard Vitrac, en 1991 ou 1992. Ce dernier préparait alors sa thèse sur la théorie des proportions dans les *Eléments* d'Euclide. Il avait déjà publié le premier volume de sa traduction du traité euclidien (livre I à IV) et préparait le second (livre V à IX). Bernard Vitrac m'a initiée aux subtilités de la théorie des proportions et aux dangers des lectures modernisantes de cette théorie. Il m'a aussi sensibilisée à l'histoire du texte. Ses conseils et ses remarques m'ont été très précieux lors de la rédaction de ma thèse. Et depuis, son regard critique a accompagné une grande partie de mes travaux. J'ai aussi beaucoup appris du travail commun que nous avons fait, en collaboration avec Ahmed Djebbar, sur l'histoire du texte des *Eléments* d'Euclide dans les traditions grecques, arabes et latines. Ce groupe de travail a été mis en place peu de temps après le retour d'Ahmed Djebbar d'Algérie, en 1995. Nos travaux ont duré environ cinq ans et ont abouti à la publication d'un

---

[1] Les actes de ce colloque feront l'objet d'un numéro de la *Revue d'histoire des sciences*, à paraître en 2007.

article dans la revue *Archive for History of Exact Sciences*[2]. Je reviendrai sur cette étude dans l'exposé de mes travaux. Je profite de l'occasion qui m'est donnée ici pour remercier Bernard Vitrac et Ahmed Djebbar. Le travail que nous avons effectué ensemble durant ces années m'a permis de ne pas me couper de la recherche durant les deux années où j'étais au chômage après la soutenance de ma thèse, fin 1994, et avant mon entrée au CNRS en 1997.

En 1989, parallèlement au cours de Gérard Simon, j'ai suivi le cours de Jean Celeyrette sur la philosophie naturelle au Moyen Âge, à Lille. J'ai plongé avec délices, mais non sans difficulté, dans un univers de pensée très éloigné du nôtre et à première vue très déroutant. Mais j'étais alors loin de me douter que je m'intéresserais, quelques années plus tard, à cette discipline et que j'apprendrais auprès de Jean Celeyrette et d'Edmond Mazet, lui aussi enseignant de mathématiques et d'histoire des sciences à l'université Lille 3, la lecture des manuscrits latins médiévaux. Je les remercie pour le temps et l'attention qu'ils m'ont consacrés lors de mon arrivée dans l'équipe « Savoirs et textes », en 1997, équipe que dirigeait alors Jean Celeyrette. Je les remercie aussi pour leur participation régulière aux différents projets que j'ai pu mener depuis cette époque.

Et dans cette découverte de la philosophie médiévale je n'oublie pas l'enseignement de Joël Biard, puis notre collaboration et notre amitié. Je reviendrai sur nos projets communs et en particulier sur notre édition d'un traité de Blaise de Parme. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a faite en travaillant avec moi et en acceptant de diriger mon habilitation à diriger des recherches.

---

[2] Voir l'article 6 dans mon recueil d'articles, p. 143-220. Toutes les références qui suivent seront données à ce recueil, sauf mention du contraire ; les numéros de pages sont ceux du recueil, et non des articles.

L’*EPITRE SUR LE RAPPORT ET LA PROPORTION* D’AÎMAD IBN YªSUF

Comme je l’ai rappelé en introduction mon mémoire de DEA portait sur l’*Épître sur le rapport et la proportion* d’AÌmad ibn Yºsuf. Ce travail a donné lieu à ma première conférence, en Algérie, en 1990, dans le cadre du Troisième colloque maghrébin sur l’histoire des mathématiques organisé par Ahmed Djebbar[3].

Une partie de mon travail avait consisté à rassembler les éléments de la biographie et la bibliographie d’AÌmad. Je me souviens des longues heures passées au département des manuscrits orientaux de la Bibliothèque nationale de Paris à lire les biographes anciens comme Ibn Abi Usaybi^{c}a (XIII^{e} siècles) mais aussi les historiens des mathématiques arabes comme Sezging, Suter, Steinschneider, Brockelmann ou Ri∂æ KaÌÌæla et Îæjjî Khalîfa[4].

AÌmad ibn Yºsuf, égyptien, est le fils d’un personnage important de la vie publique à Bagdad au début du IX^{e} siècle, Yºsuf ibn Ibrahim, connu pour avoir écrit une biographie de médecins. AÌmad serait né autour de 860 et mort probablement vers 912 ou 913. Les ouvrages que nous avons conservés et dont l’attribution ne soulève pas de question portent sur les mathématiques et l’astrologie.

L’*Épître sur le rapport et la proportion* a été traduite en latin au XII^{e} siècle par Gérard de Crémone[5]. Un des enjeux de mon travail de thèse aurait été de déterminer dans quelle mesure cette traduction était fidèle au texte arabe. N’ayant pas pu réunir tous les manuscrits il m’a été impossible de répondre de manière définitive à cette question ; mais l’examen du manuscrit d’Alger que j’avais en ma possession montrait que la traduction était fidèle, ce qui confirme ce que l’on sait par ailleurs de la manière dont travaillait Gérard de Crémone.

---

[3] Voir l’article 1, p. 1-14. Il manque malencontreusement la bibliographie de mon article dans cette publication.

[4] Voir p. 1-5.

[5] Cette traduction a été éditée par Schrader, dans sa thèse (Sister M. Schrader, *The “Epistola De Proportione et Proportionalitate” of Ametus filius Iosephi*, Ph. D, The University of Wisconsin, 1961).

Le traité d'AÌmad est connu des mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance, comme je l'avais déjà souligné dans mon mémoire de DEA et comme j'ai pu le vérifier lors de mes recherches ultérieures. Il est composé de deux parties. La première partie présente une longue discussion sur la manière dont il convient de définir le rapport et la proportionnalité, écho des débats qui pouvaient exister à cette époque sur la théorie des proportions. Rappelons que le rapport est une relation, quantitative, entre deux nombres ou deux grandeurs continues de même genre. La proportion est une relation à quatre termes exprimant la similitude ou l'égalité des rapports. En latin, bien souvent, le rapport est désigné par le terme latin *proportio* et la proportion par *proportionalitas*. Dans mes premiers écrits j'utilisai le terme « raison » pour rendre le terme latin *proportio* et le terme arabe *nisba*. Dans mes travaux ultérieurs j'adopte la terminologie de Bernard Vitrac et parle de « rapport ». Dans le terme français « rapport » il y a l'idée de relation (on rapporte une quantité à une autre) qui est si importante dans la théorie grecque puis médiévale, comme nous le verrons. Et je réserve donc le terme « proportion » à la similitude des rapports.

Au livre V des *Eléments* d'Euclide la proportionnalité et la non-proportionnalité sont définies de la manière suivante :

> Déf. V. 5 : Des grandeurs sont dites dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième, quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux, ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, et pris de manière correspondante.
>
> Déf. V. 7 : Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir un plus grand rapport relativement à la deuxième que celui de la troisième relativement à la quatrième[6].

---

[6] Traduction de Bernard Vitrac dans Euclide, *Les Éléments. Volume 2. Livres V à IX*, Paris, Presses Universitaires de France, « Bibliothèque d'histoire des sciences », 1994, p. 41 et 46.

Chez les commentateurs arabes ces définitions, qui ont l'allure de théorèmes, ont suscité des tentatives de démonstration à partir de définitions jugées plus intuitives ou rendant mieux compte de l'essence de la proportionnalité[7]. On peut d'ailleurs s'étonner de l'absence de commentaires au sujet de ces définitions dans les mathématiques grecques[8]. Ainsi, AÌmad tente de démontrer la définition euclidienne de l'égalité des rapports en partant de l'idée intuitive de la proportion comme similitude des rapports et de trois propriétés admises sans démonstration et qui devaient aux yeux du mathématicien égyptien rendre mieux compte de la nature de la proportion que la définition euclidienne[9]. Ces trois propriétés sont les suivantes : Si $(a:b)=(c:d)$ alors $(b:a)=(d:c)$; si $(a:b)=(c:d)$, alors si $a>b$ (ou < ou =), on a $c>d$ (ou < ou = respectivement) ; si $(a:b)=(c:d)$, alors $(a:mb)=(c:md)$. Campanus (XIII^e^ siècle) montrera que cette démonstration présente un raisonnement circulaire[10].

La deuxième partie du traité d'AÌmad ibn Yºsuf présente un exercice de combinatoire : dénombrer toutes les égalités de la forme $(x_1:x_2)=(x_3:x_4)\bullet(x_5:x_6)$ que l'on peut déduire de la relation initiale $(a:b)=(c:d)\bullet(e:f)$[11]. Dans ma conférence d'Alger je présentai une analyse de la manière dont AÌmad résout cet exercice. Et je donnai quelques éléments très succincts sur la postérité du traité du mathématicien égyptien.

---

7 Je rapporte quelques-unes de ces tentatives dans une conférence donnée en Tunisie, en 1994, dans le cadre du Cinquième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques. Voir article 4, p. 81-95.

8 Voir p. 84-85.

9 J'y reviens dans cette conférence, ainsi que sur le commentaire de Campanus au sujet de la démontration d'AÌmad (voir p. 85-86).

10 Voir p. 8-9.

11 Je note $(a:b)$ le rapport de a à b, et $(c:d)\bullet(e:f)$ le composé des rapports $(c:d)$ et $(e:f)$. Nous ne nous attardons pas maintenant sur ce qu'il faut entendre par composition. Nous y reviendrons. Disons, pour faire vite, que si l'on assimile les rapports aux fractions entre leurs termes (ce que ne fait aucun des mathématiciens anciens), la composition équivaut à la multiplication de ces fractions.

Je suis revenue sur cet exercice de combinatoire ou de dénombrement dans deux articles parus en 1993 et en 1994[12]. Ce travail devait constituer un chapitre de ma thèse ; il n'en fut rien pour les raisons que j'ai expliquées plus haut. Il s'agissait d'examiner la manière dont cet exercice a été résolu par différents mathématiciens de langue arabe ou latine au Moyen Âge et à la Renaissance.

Aujourd'hui je perçois l'influence de l'enseignement de Gérard Simon dans la mise en garde qui clôt l'introduction du premier de ces articles : « Nous nous intéresserons, à partir de cet exercice, aux différentes pratiques combinatoires à travers les siècles et les traditions mathématiques. Nous n'employons pas ici le terme d'analyse combinatoire, puisque ce terme implique l'existence d'une branche des mathématiques qui ne sera vraiment constituée en Occident qu'à partir du XVII[e] siècle avec les traités de Huygens, Leibniz, etc. Dans les textes que nous avons étudiés, il ne s'agit encore que d'une pratique, suscitée par un exercice donné, et non de la mise en place d'un langage et de règles générales[13] ». J'ai toujours été très sensible à cet aspect de l'enseignement de Gérard Simon : on peut chercher les éléments de la préhistoire des disciplines ou des sciences, mais il convient de ne pas confondre cette préhistoire avec son histoire. Il est en effet nécessaire, pour qu'une discipline ou une science soit constituée, qu'un ensemble de conditions soient requises, notamment la mise en évidence claire et consciente par l'ensemble des acteurs des notions qui fondent cette science ou cette disciplines, mise en évidence qui passe par la mise en place d'un vocabulaire ou d'un langage précis, reconnu et accepté ; par ailleurs, il est nécessaire que soient explicitées les règles générales qui lient ces notions et de s'entendre sur les critères de démonstrations. Comme je le soulignai à propos de cet exercice, une pratique non théorisée ne constitue pas une science.

Pour cette étude du dénombrement des relations entre six grandeurs en proportion j'avais dégagé un ensemble de textes de natures très différentes. Cet

---

[12] Voir les articles 2 et 3.

[13] Voir p. 18-19.

exercice était naturellement présent dans des commentaires à l'*Almageste* de Ptolémée. En effet, il apparaît à l'occasion de l'étude de la figure sécante qui fait l'objet de la proposition 13 du livre I de l'*Almageste*[14]. On le retrouve aussi dans des commentaires à *La Sphère* de Ménélaus, puisque c'est à ce livre que Ptolémée a emprunté le résultat. Il apparaît par ailleurs dans des traités uniquement consacrés à la figure sécante qui joue un rôle particulier en trigonométrie sphérique. Mais ce contexte géométrique disparaît dans des traités où l'exercice de combinatoire apparaît seul, dans le cadre de manipulations sur les rapports.

Une de mes préoccupations a été de comprendre pourquoi un tel exercice de dénombrement était apparu à propos de la figure sécante[15]. Les textes donnaient peu de réponses à ce sujet. J'avais toutefois trouvé chez Oronce Finé[16] (XVI^e siècle), c'est-à-dire dans un texte très éloigné chronologiquement des premiers textes où ce problème avait été traité (au X^e siècle), la justification suivante : il était utile de connaître toutes les relations entre six grandeurs afin de pouvoir déterminer une des grandeurs à partir de la donnée des cinq autres. Il est un fait que la détermination d'une grandeur inconnue à partir de grandeurs connues, dans tous les domaines, de la géométrie, de l'arithmétique, etc., est une préoccupation constante des mathématiciens. Le premier traité général à ce sujet est *Les Données* d'Euclide. Je soulignai par ailleurs que cet exercice de combinatoire apparaissait dans le traité de Thæbit ibn Qurra à une époque (X^e siècle) où émergent et se développent des pratiques combinatoires.

Je remarque que la recherche des raisons historiques externes de l'émergence à une époque donnée d'un problème nouveau ou de notions nouvelles n'apparaît pas dans mes travaux ultérieurs. Cela s'explique sans doute parce que les textes sont en général muets à ce sujet et que mon attention se porte avant tout sur les textes (j'y reviendrai). Mais il arrive bien sûr qu'un problème ou une notion apparaissent pour des raisons internes aux théories ou

---

[14] Voir p. 17-18.
[15] Voir p. 21-23.
[16] Je ne sais pourquoi il est nommé Finée dans cet article.

des raisons de transmission plus ou moins fidèle d'un texte, comme les *Eléments*. Dans ce cas je le souligne, comme nous le verrons dans mes travaux sur Campanus.

Mais revenons à l'exercice de combinatoire. Je me posai trois questions à son propos. Comment les différents auteurs dénombrent-ils les relations entre les six grandeurs en proportion ? Comment les démontrent-ils ? Quel ordre adoptent-ils pour les présenter ?

L'étude de la première question me conduisit à mettre en évidence deux types de dénombrement. Le premier, le plus simple, est fondé sur la transformation de la relation initiale $(a:b)=(c:d)\bullet(e:f)$ en l'égalité $a.d.f=b.c.e$. C'est ainsi que procède a†-™ºÒî (XIIIe siècle)[17]. Je soulignai le cadre géométrique dans lequel était effectuée la transformation de la première relation à la seconde ($a.d.f$ est interprété comme le volume d'un parallélépipède). Tous les autres auteurs dénombrent à partir de la relation laissée sous la forme initiale. C'est plus long et plus compliqué. Il faut ainsi montrer, par exemple, que le rapport $(a:d)$ ne peut pas s'exprimer comme composé de deux rapports entre les quatre grandeurs restantes ce que tous les auteurs ne font pas correctement ou ne font pas du tout[18]. Je soulignai alors l'usage par Campanus de tableaux et d'« arbres »[19], qui palliaient l'absence d'écriture symbolique en donnant à voir les différentes combinaisons entre les lettres et permettaient de mettre en évidence les relations redondantes. Je remarquai finalement que la pratique combinatoire était plus ou moins bien maîtrisée selon les auteurs, et cela quelle que soit l'époque.

La réponse à la deuxième question me conduisit là aussi à mettre en évidence différents types de démonstrations (j'abordai cette question dans l'article 2 mais j'y revins plus longuement dans l'article 3). D'une part, les démonstrations étaient effectuées, soit dans un contexte purement géométrique, soit dans le contexte de la théorie des proportions. D'autre part, soit les

---

[17] Voir p. 23-25.
[18] Voir p. 25-28.
[19] Voir p. 26-27.

différentes relations étaient démontrées les unes indépendamment des autres, soit elles étaient déduites les unes des autres. Cette dernière manière de procéder (que l'on trouve dans le texte de Thæbit) est particulièrement intéressante et je m'y étais particulièrement attaché. Thæbit expliquait comment on devait « permuter » les termes qui composaient une relation pour en obtenir une autre[20]. J'avais alors introduit des notations modernes mettant en évidence ces permutations sur les termes afin d'expliquer l'enchaînement des relations les unes des autres.

Cette introduction des mathématiques modernes dans l'analyse de la démonstration de Thæbit m'était aussi utile pour répondre à la troisième question. Si la plupart des auteurs étudiés présentaient les différentes règles selon l'ordre lexicographique des lettres, Thæbit utilise un autre ordre. Hubert Busard avait suggéré que l'ordre proposé par Thæbit était imposé par son mode de déduction des différentes relations les unes des autres[21]. J'ai montré qu'il n'en était rien ; un détour par les mathématiques modernes était alors nécessaire[22]. J'ai alors cherché ce qui pouvait justifier l'ordre adopté par Thæbit. Une comparaison avec le traitement que Maurolyco (XVI^e^ siècle) fait du même problème m'apportait des hypothèses (lui aussi déduit les relations les unes des autres, mais il présente les règles selon l'ordre lexicographique). Une première hypothèse était que les relations s'enchaînent plus facilement les unes des autres, si l'on adopte l'ordre de Thæbit plutôt que l'ordre lexicographique. Mais je soulignais immédiatement que cette simplicité des enchaînements était reconnaissable si l'on utilisait une écriture symbolique des relations, mais qu'elle était beaucoup moins évidente dans le langage usuel utilisé par tous ces mathématiciens[23]. Une seconde hypothèse était liée au contexte géométrique de la figure sécante dans lequel Thæbit traitait ce problème de dénombrement[24].

---

[20] Voir la citation du texte de Thæbit, p. 58.

[21] Voir la citation de Busard, p. 62-63.

[22] Je n'entre pas ici dans les détails de cette question qui est complexe. Voir p. 63-68.

[23] Voir p. 69.

[24] Voir p. 70-74.

Je voudrais souligner ici combien, dans ces premiers articles, j'utilisais déjà avec précaution les transcriptions modernes. Nous venons de voir comment j'avais écarté une hypothèse sur l'ordre adopté par Thæbit car elle semblait surtout découler de l'écriture symbolique que j'avais adoptée pour rendre compte des relations et des démonstrations. Ce n'était pas non plus sans précaution que j'avais utilisé le langage moderne des permutations pour interpréter le texte de Thæbit. J'écrivais ainsi : « Toute interprétation trahit la pensée d'un mathématicien, lorsqu'elle n'est pas dûment explicitée. Mais Thæbit énonce clairement son projet. À partir d'une règle donnée il veut engendrer toutes les autres par permutation des quantités qui la composent [*je donnais alors une citation de Thæbit*]. Par ailleurs, il nous semble que l'écriture adoptée permet au moins de rendre compte de l'ordre des relations, et ce compte-rendu n'est pas en contradiction avec le texte de Thæbit »[25]. Dans la suite de mes recherches j'ai de moins en moins utilisé les transcriptions modernes, sans doute en raison de ma plus grande familiarité avec les mathématiques anciennes qui ne rend plus nécessaire aujourd'hui que je transcrive pour comprendre (je dois aussi avouer ma réticence ancienne contre un formalisme exagéré ; lorsque j'étudiai les mathématiques, et lorsque je les ai enseignées en lycée, puis à l'université, j'écrivais le plus possible les énoncés des théorèmes et leur démonstration en langue naturelle). Je souligne d'ailleurs, à l'occasion, les erreurs dans lesquelles les transcriptions modernes peuvent nous faire tomber[26]. Mais par souci de rendre les textes que j'étudie compréhensibles par les lecteurs non familiarisés avec les mathématiques anciennes il m'arrive encore de donner des interprétations symboliques. Toutefois, il est bien clair qu'il ne peut s'agir que d'interprétations. Il convient

---

[25] Voir p. 30-31.

[26] Voir par exemple, ce que je dis à propos de l'interprétation de Grant de la théorie des rapports de plus petite inégalité dans le traité *Sur les rapports de rapports* de Nicole Oresme (voir mon « introduction » à Thomas Bradwardine, *Traité sur les rapports* ; Nicole Oresme, *Sur les rapports de rapports*, introduction, traduction et commentaires de Sabine Rommevaux, p. 14-15, voir aussi « Les rapports de plus petite inégalité » dans Sabine Rommevaux, *Théorie des rapports (XIII*e *– XVI*e *siècles)* : *réception, appropriation, innovation*, dans le volume II de cette habilitation, p. 68).

toujours de revenir au texte même (je me méfie aussi des traductions, même si j'en propose moi-même dans le but, là encore, de diffuser des savoirs qui seraient inaccessibles au plus grand nombre si l'on ne traduisait pas).

Dans l'article 3 je dis quelques mots pour finir des différentes conceptions de la composition des rapports que l'on trouve dans ces textes. J'évoquai alors la dénomination d'un rapport et je précisai que l'introduction de cette notion et toutes les manipulations sur les rapports que l'on avait vues dans ces textes ne conduisaient toutefois pas les auteurs étudiés à considérer le rapport comme un nombre[27]. Je reviendrai longuement sur ces notions, ainsi que sur cette question dans mes travaux ultérieurs, notamment dans *Théorie des rapports (XIII^e^ – XVI^e^ siècles) : réception appropriation, innovation*. Et j'en dirai quelques mots à propos du commentaire de Clavius aux *Eléments* d'Euclide que je vais évoquer maintenant.

LE COMMENTAIRE DE CHRISTOPH CLAVIUS AUX *ELEMENTS* D'EUCLIDE

Ma thèse

Mon examen du problème des relations entre six grandeurs en proportion m'avait conduite à étudier quelques auteurs de la Renaissance, si bien que lorsqu'il a fallu se résoudre, au bout d'un an, à changer le sujet de ma thèse, Jean Dhombres m'a proposé de travailler sur le commentaire de Christoph Clavius au livre V des *Eléments* d'Euclide (première édition : 1574 ; deuxième édition augmentée : 1589). Je m'étais déjà familiarisée avec la théorie des proportions et j'avais connaissance de quelques-unes des sources possibles pour le commentaire de Clavius. Je pouvais réinvestir ma première année de recherche dans un sujet différent sans trop perdre de temps (j'ai pu soutenir ma thèse fin septembre 1994, ma première inscription en thèse datant de novembre 1990).

---

[27] Voir p. 74-79.

J'avais organisé la thèse en trois parties. Dans une première partie, générale, je présentai Christoph Clavius, les éléments que l'on connaissait de sa vie, son œuvre, ainsi que son implication dans la mise en place de l'enseignement des mathématiques dans les collèges jésuites. Un des aspects du commentaire de Clavius au traité euclidien est son ambition pédagogique. Il valait donc la peine de rappeler le rôle joué par Clavius dans la défense de l'enseignement des mathématiques. Dans cette première partie je proposai par ailleurs une analyse de l'ensemble du commentaire au livre V.

La deuxième partie était constituée de la traduction française du livre V (définitions et propositions) avec les commentaires de Clavius. Ces commentaires étant particulièrement importants, notamment sur les définitions, cette traduction représentait 373 pages de la thèse. J'avais pris parti pour une traduction très littérale. Lorsque je reprendrai cette traduction pour la publication de mon livre sur le commentaire de Clavius[28], je privilégierai la fluidité et le style plutôt que la littéralité.

Dans une troisième partie je développai quelques aspects du commentaire de Clavius relatifs à des points cruciaux de la théorie des proportions. Dans un premier temps j'examinai la notion de dénomination d'un rapport auquel Clavius consacre un long commentaire à la suite de la définition du rapport. J'avais rencontré cette notion une première fois dans le traité sur les rapports de Campanus consacré aux relations entre six grandeurs en proportion. Je la retrouvai ici, dans le commentaire de Clavius, ce qui me conduisit à regarder les définitions du livre VII dans la version de Campanus où elle figure aussi. Cette notion a une place importante dans les mathématiques médiévales. John Murdoch a expliqué que c'est en raison de la corruption des énoncés des définitions euclidiennes de la proportionnalité et de la non-proportionnalité dans les traductions latines du XII^e^ siècle (notamment dans la version de Robert de Chester utilisée par Campanus) qui rendait incompréhensible le rôle des équimultiples dans ces définitions que Campanus a été conduit à introduire la

---

[28] Sabine Rommevaux, *Clavius : une clé pour Euclide au XVI^e^ siècle*, Paris, Vrin, « Mathesis », 2005.

notion de dénomination des rapports au livre VII afin de fonder la proportionnalité sur des bases solides[29]. Quoi qu'il en soit, cette notion apparaît dans des textes du XIII^e^ siècle, dans différents contextes[30]. Et elle jouera un rôle important dans les mathématiques du XIV^e^ siècle en particulier. J'y reviendrai car j'y ai consacré plusieurs études. Je rappelle seulement, pour le moment, que la dénomination d'un rapport numérique de plus grande inégalité (c'est-à-dire d'un rapport entre deux nombres a et b avec $a > b$) est un nombre, mis sous la forme $n + p/q$ (p/q étant une fraction plus petite que 1), que l'on associe au rapport et qui permet de donner un nom à ce rapport selon la nomenclature que l'on trouve dans l'*Arithmétique* de Nicomaque et qui est transmise dans le monde latin par Boèce. Par exemple, la dénomination du rapport entre 2 et 1, dit rapport double, est 2. La dénomination du rapport entre 3 et 2 est 1+1/2 et ce rapport est dit sesquialtère. Ou encore, la dénomination du rapport entre 37 et 11 est 3+4/11 de sorte que le rapport est dit triple superquadripartient des 11-ièmes, etc.

Il est à noter que les mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance font une distinction, pour les rapports de plus grande inégalité, entre la dénomination et la fraction que l'on peut écrire à partir des plus petits nombres du rapport donné (car pour les rapports de plus petite inégalité, entre a et b avec $a < b$, la dénomination est la fraction des plus petits nombres). Ainsi, la dénomination du rapport sesquialtère est 1+1/2, comme nous l'avons dit, et ce n'est pas 3/2. Il est en effet essentiel, pour que la dénomination puisse donner immédiatement le nom du rapport, que soit mis en évidence le nombre de fois que le plus petit nombre est inclus dans le plus grand et le nombre de parties qu'il reste éventuellement. Ainsi un rapport de dénomination n est dit n-uple ; un rapport de dénomination $1 + 1/q$ est dit sesqui-q-ième ; ou encore, un rapport de dénomination $n + p/q$ est dit n-uple super-p-partient des q-ièmes

---

[29] Voir John Murdoch, « The Medieval Euclid : Salient Aspect of the Translations of the *Elements* by Adelard of Bath and Campanus of Novara », *Revue de Synthèse* III, n° 49-52 (1968), p. 67-94.

[30] Voir le chapitre « Dénomination d'un rapport rationnel » dans Sabine Rommevaux, *Théorie des rapports…*

(en latin on parle ainsi de *proportio sesquitertia*, *proportio dupla supertripartiens quartas*, etc.). Ainsi, la dénomination a une fonction, celle de donner un nom au rapport rationnel, qui est tout à fait fondamentale et qui est longuement soulignée par Clavius.

J'insiste beaucoup sur cette fonction de nommer qu'a la dénomination, car elle me semble essentielle et on l'oublie trop souvent pour ne retenir que l'association d'un nombre au rapport. Ce dernier point est en général mis en avant, car les historiens voudraient voir dans la dénomination les prémices d'une assimilation du rapport à un nombre (assimilation qui permettrait de faire du rapport un nombre réel, ce que l'on fait, par exemple, lorsque l'on interprète la définition de la proportionnalité du livre V d'Euclide en termes de coupures de Dedekind). Je rappelle que le rapport est une relation entre deux nombres ou deux grandeurs continues qui n'est pas assimilable à la fraction entre ces quantités. Les mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance s'en tiennent, sur ce point, à l'orthodoxie euclidienne[31]. Je l'avais déjà perçu dans ma thèse, puisque je concluais ce chapitre sur la dénomination dans le commentaire de Clavius en disant que si ce dernier consacrait une place importante à la notion de dénomination dans son commentaire à la définition du rapport, il faisait encore la différence entre le rapport numérique qui est une relation et sa dénomination qui est un nombre.

Deuxième point sur lequel j'ai porté mon attention dans ma thèse : le long développement que Clavius consacre, toujours dans son commentaire à la définition du rapport, à la théorie des médiétés, ou si l'on veut des proportionnalités ou progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques. Cet exposé se veut systématique et complet. On n'aurait rien à y ajouter si l'on devait enseigner aujourd'hui ces notions. On y trouve ainsi, par exemple, le calcul de la somme des n premiers termes d'une progression ou le calcul du n-ième terme.

---

[31] J'y reviens à plusieurs reprises dans *Théorie des rapports (XIII^e^ – XVI^e^ siècles)…*. Voir en particulier p. 32-41.

Je comparai le traitement que faisait Clavius de certaines règles avec les démonstrations des mêmes règles dans l'*Arithmétique* de Jordanus (XIII[e] siècle) et dans le *Livre d'algèbre* de Pedro Nuñez (1567), mais aussi avec le traitement algébrique que Clavius donnait des mêmes résultats dans son *Algèbre*. Je conclus au caractère pédagogique du traitement des médiétés dans le commentaire aux *Eléments* : les règles sont données sous une forme facilement mémorisable, sans démonstration générale (contrairement à ce que l'on trouve chez Jordanus), mais accompagnées d'une série d'exemples choisis de manière à éviter des calculs compliqués avec des fractions ou des racines (alors que ces exemples existent dans son *Algèbre*). Ceci me fait penser que l'édition de Clavius des *Eléments* d'Euclide ne s'adresse pas tant aux jeunes étudiants qu'aux futurs enseignants ou aux enseignants eux-mêmes[32]. Ainsi, dans son commentaire sur les médiétés Clavius montre comment construire des exemples numériques simples. C'est une préoccupation d'enseignant : trouver des exemples qui permettent de mettre en œuvre la règle proposée sans que s'ajoutent d'autres difficultés, comme le calcul sur les fractions ou les racines. Par ailleurs, dans l'ensemble de son commentaire Clavius critique les interprétations de ses prédécesseurs sur telle notion ou les démonstrations alternatives qu'ils proposent pour tel théorème. Là encore il me semble que ces critiques ne peuvent intéresser que les mathématiciens confirmés ou les enseignants qui peuvent ainsi clarifier les notions difficiles pour leurs étudiants ou les mettre en garde contre les raisonnements erronés.

Le troisième point que j'abordai dans ma thèse concernait les définitions de la proportionnalité et de la non-proportionnalité des grandeurs du livre V. Comme nous l'avons rappelé plus haut, ces définitions ont provoqué des discussions et parfois de l'incompréhension chez les commentateurs arabes puis latins. Clavius va tenter de montrer que les énoncés de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en termes d'équimultiples définissent bien la similitude ou la non-similitude des rapports. Pour cela, il part de la définition de la proportionnalité du livre VII :

---

[32] Je fais cette hypothèse dans *Clavius : une clé pour Euclide…*, p. 112.

> Des nombres sont proportionnels lorsque le premier est le même multiple du deuxième que le troisième du quatrième, ou la même partie ou les mêmes parties[33].

Sur le même modèle il propose une définition de la non-proportionnalité (cette définition n'existe pas pour les nombres au début du livre VII) :

> Des nombres ne sont pas proportionnels, c'est-à-dire le premier a au deuxième un rapport plus grand que le troisième au quatrième, lorsque le premier est un plus grand multiple ou une plus grande partie ou des plus grandes parties du deuxième que le troisième du quatrième ; ou assurément lorsque le premier contient plus de fois le deuxième que le troisième le quatrième, qu'ils aient en plus la même partie ou les mêmes parties ou non ; ou lorsque le premier contient autant de fois le deuxième que le troisième le quatrième, mais que le premier renferme en plus une partie plus grande ou des parties plus grandes du deuxième que le troisième du quatrième.

Clavius montre alors l'équivalence, pour les nombres, entre les propriétés demandées dans ces définitions et les propriétés sur les équimultiples demandées dans les définitions du livre V. Clavius en conclut que, puisque tout le monde s'accorde à dire que des nombres qui vérifient ces premières propriétés sont bien proportionnels ou non proportionnels, les propriétés équivalentes sur les équimultiples définissent aussi des nombres proportionnels et non proportionnels. Ainsi, il faut admettre qu'il en est de même pour toutes les grandeurs, commensurables ou non : si leurs équimultiples vérifient la propriété demandée dans la définition V. 5, il est juste de dire qu'elles sont proportionnelles et qu'elles sont non proportionnelles si elles vérifient la condition énoncée dans la définition V. 7. Il ne faut donc pas remettre en doute les définitions euclidiennes. Et c'est la nécessité de prendre en compte les grandeurs incommensurables qui a conduit Euclide à introduire ces définitions en termes d'équimultiples qui sont une généralisation des définitions plus intuitives du livre VII[34].

---

[33] Si A, B, C, D sont quatre nombres, on a $A = nB$ et $C = nD$, ou $A = (1/n)B$ et $C = (1/n)D$, ou $A = (p/q)B$ et $C = (p/q)D$.

[34] Voir *Clavius : une clé pour Euclide…*, p. 83-85.

Afin d'appuyer son propos Clavius évoque la définition de la similitude des segments de cercles. Il montre alors comment, à partir d'une idée intuitive de la similitude des segments dans les cas simples, c'est-à-dire dans ceux où les angles sont commensurables à quatre droits (segments définis à partir de demi-cercles, de quarts de cercles etc.), on peut trouver une propriété qui rend compte facilement de cette similitude dans le cas général[35].

On ne peut s'empêcher de comparer la démarche de Clavius à celle d'al-Jayyænî (XIe siècle), même si le traité de al-Jayyænî n'est pas passé à l'Occident. Ce dernier, en effet, montre lui aussi l'équivalence des définitions euclidiennes à des définitions en termes de parties[36]. Toutefois j'ai souligné que les démarches des deux mathématiciens étaient différentes. Al-Jayyænî veut remplacer les définitions euclidiennes par des définitions en termes de parties qu'il juge plus intuitives. Clavius, quant à lui, cherche à justifier l'usage par Euclide des équimultiples dans les définitions de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en expliquant la genèse de ces définitions à partir des définitions de la proportionnalité des nombres. Sa démarche est épistémologique : il explique, en comparant l'exemple de la définition de la proportionnalité des grandeurs à celle de la similitude des segments de cercles, comment on fabrique une définition générale à partir de cas particuliers.

Quatrième point abordé dans ma thèse : les propositions additionnelles que l'on trouve à la fin du livre V (le livre V contient vingt-cinq propositions dans la version grecque, il y en a neuf de plus dans la version de Clavius). Je comparai les énoncés de ces propositions et leurs démonstrations aux énoncés et démonstrations des mêmes résultats dans l'édition de Campanus et dans la version de Commandino (1569).

En conclusion je m'interrogeai sur une éventuelle arithmétisation du livre V qui serait visible dans le commentaire de Clavius où les exemples numériques abondent. Je pensai qu'il serait exagéré de parler d'arithmétisation. Nous avons vu que si Clavius donne, par exemple, une place importante à la notion de

---

[35] Voir *Clavius : une clé pour Euclide*…, p. 81-83.
[36] Voir *Clavius : une clé pour Euclide*…, p 88-91.

dénomination, il continue toutefois à considérer le rapport comme une relation, suivant l'orthodoxie euclidienne. Par ailleurs, l'introduction de cette notion dans son commentaire est avant tout motivée par le désir de produire une somme de tout ce que a pu être écrit avant lui à propos des *Eléments* (j'ai développé ce point dans le livre que j'ai publié à partir de ma thèse et j'y reviendrai donc un peu plus loin). Et il y a certainement un souci pédagogique dans l'utilisation des exemples numériques : il s'agit d'illustrer les règles ou les théorèmes.

Clavius : une clé pour Euclide au XVIe siècle

En 2003 j'ai entrepris de retravailler ma thèse afin de la publier. En 2005 paraissait *Clavius : une clé pour Euclide au XVIe siècle*, chez Vrin, dans la collection Mathesis. Presque dix ans s'étaient écoulés depuis la soutenance, dix ans mis à profit pour travailler sur les mathématiques médiévales. J'avais eu l'intuition en rédigeant ma thèse qu'une partie du commentaire de Clavius se faisait largement l'écho des préoccupations des mathématiciens médiévaux. Il était donc naturel qu'après cette étude je me tourne notamment vers Campanus que Clavius reprend abondamment, sans toujours le citer, ou qu'il critique. Nous verrons plus loin les deux articles que j'ai publiés sur les livres V et X dans la version de Campanus. Par ailleurs, le travail de recherche sur l'histoire du texte des *Eléments* entrepris avec Bernard Vitrac et Ahmed Djebbar, que j'ai évoqué en introduction et sur lequel je reviendrai, m'a apporté une grande familiarité avec les versions latines du XIIe siècle. Durant ces dix années j'ai aussi travaillé sur la théorie des rapports que Thomas Bradwardine et Nicole Oresme mettent en place, au XIVe siècle, à propos d'un problème de philosophie naturelle, la question du mouvement. Et j'ai étudié les critiques suscitées par cette théorie, notamment chez Blaise de Parme (XVe siècle), et dont Clavius se fait l'écho (voir plus loin). J'ai donc repris ma thèse en la nourrissant de toutes ces recherches sur les mathématiques médiévales. *Clavius : une clé pour Euclide au XVIe siècle* est ainsi une version très remaniée de ma thèse.

Ce livre se compose de deux parties : une première partie comprend une analyse du commentaire de Clavius, pas seulement du livre V, même si j'y puise des exemples à l'appui des mes thèses ; une deuxième partie comporte la traduction des seules définitions du livre V avec les commentaires de Clavius (j'ai déjà dit dans quel sens j'avais remanié cette traduction).

Cinq chapitres composent la première partie. Dans le premier chapitre je reprends les éléments sur la vie de Clavius, son œuvre et son combat pour la défense de l'enseignement des mathématiques que j'avais exposés dans ma thèse. Je reprends aussi certains des résultats d'une étude que j'ai effectuée, en 2001, sur les prologues aux *Eléments* d'Euclide[37]. Clavius profite en effet de la rédaction d'une introduction aux *Eléments* pour laquelle il s'inspire du fameux prologue de Proclus au livre I pour exposer sa vision de la place des mathématiques dans la hiérarchie des savoirs. Il y défend la suprématie des mathématiques pour ses méthodes rigoureuses et claires qui produisent une connaissance certaine. Je rappelle, en conclusion de ce chapitre, que dans les prologues qui ont été écrits par différents éditeurs des *Eléments* au Moyen Âge et à la Renaissance l'accent était mis sur la géométrie présentée comme archétype de la science démonstrative dont les résultats s'enchaînent à partir des prémisses. Je remarque alors que l'histoire du texte des *Eléments* se caractérise par un phénomène d'amplification : on passe d'« éléments », c'est-à-dire d'une sélection de résultats organisés logiquement, à des « sommes » régies par un souci de complétude et de systématicité[38]. L'édition de Clavius est un exemple emblématique d'une telle somme, comme je le montre dans le deuxième chapitre.

Ce deuxième chapitre propose une présentation générale du commentaire de Clavius. Il n'est en rien le reflet de la présentation du livre V que j'avais donnée dans la première partie de ma thèse. Il s'agit d'une réflexion nouvelle sur le statut et la nature du commentaire de Clavius à l'ensemble des *Eléments*. J'y propose une typologie des types d'interventions de Clavius sur le traité

[37] Voir article 11, p. 307.

[38] Voir *Clavius, une clé pour Euclide…*, p. 28-29.

euclidien d'une part, et des types de commentaires d'autre part. Il faut en effet dissocier deux niveaux de texte. Au premier niveau appartiennent les énoncés des principes et des théorèmes, ainsi que les démonstrations ; il s'agit donc du traité euclidien lui-même. Au second niveau appartiennent les commentaires de Clavius qui sont clairement identifiés par la mention « scholie ». Cette précision est nécessaire, car il convient de différencier les éditions commentées, du type de celle de Clavius, des versions remaniées comme celle de Campanus. Ce dernier, en effet, récrit les *Eléments* et ses ajouts modifient substantiellement certaines théories (voir plus loin notre analyse des livres VII et X). Clavius, quant à lui, modifie très peu le traité euclidien lui-même qu'il établit sans doute à partir des traductions latines de Zamberti et/ou de Commandino. Toutefois, ses rares interventions visent à compléter logiquement le traité : Il ajoute au besoin une définition ou un axiome, voire un cas de figure dans la démonstration d'une proposition. Ces types d'interventions sont courants chez les éditeurs des *Eléments*. Ils ne remettent pas en cause les théories développées par Euclide, contrairement à ce que fait Campanus.

Les scholies sont de plusieurs ordres et il faut là encore dissocier deux niveaux. Il y a tout d'abord les propositions qui sont dans le même corps de texte que le reste du traité, mais clairement identifiées comme faisant partie du commentaire puisque précédées de la mention « scolie ». Dans ces propositions Clavius rassemble tous les résultats originaux qu'il a pu trouver dans les éditions anciennes ou contemporaines des *Eléments*, mais aussi dans les ouvrages de géométrie ou d'arithmétique. Il présente ainsi une somme de tous les résultats utiles à la résolution de problèmes de géométrie et d'arithmétique, mais aussi à la compréhension des ouvrages de philosophie naturelle, d'astronomie, etc[39]. La plupart de ces propositions sont disséminées dans les différents livres, mais elles sont parfois regroupées dans des compléments qui se trouvent souvent à la fin des livres. On trouve ainsi un complément sur les fractions à la fin du livre IX.

---

[39] Voir *Clavius : une clé pour Euclide…*, p. 41-50.

Dans les scholies il y a aussi les commentaires à proprement parler, dans une police plus petite. Ils contiennent des explications sur les notions difficiles, des débats, des critiques. On en a un bon exemple avec la critique que fait Clavius de la position de Jacques Peletier du Mans sur le statut de l'angle de contingence que l'on trouve dans son commentaire à la proposition 16 du livre III[40].

Il me semble que ce que j'ai mis en place ici, à savoir une grille de lecture et une typologie des interventions de Clavius sur le traité euclidien ainsi que de ses commentaires, peut servir à l'étude d'autres éditions du texte des *Eléments* ou même à l'examen d'éditions d'autres textes. Cela permet en effet de mesurer la portée des remaniements éventuels et de décrire la nature des commentaires et de faire ainsi la différence entre les éditions commentées et les récritures. La version de Clavius est une édition commentée.

Dans le chapitre III je reviens sur la notion de dénomination et m'interroge de nouveau sur l'arithmétisation du livre V que l'introduction de cette notion pourrait susciter. J'explique en conclusion qu'il existe trois manières d'envisager l'arithmétisation du livre V[41]. Premièrement, dans un sens faible, il peut s'agir de donner des exemples numériques à l'appui de telles notions ou règles. C'est ce que fait Clavius, comme je l'avais déjà noté dans ma thèse. Deuxièmement, l'arithmétisation peut passer par l'unification des théories des proportions des livres V et VII. Les commentateurs n'ont pas manqué de s'interroger sur le double traitement de la proportionnalité, au livre V pour les grandeurs continues et au livre VII pour les nombres. On connaît les tentatives d'unifier les deux théories qui virent le jour à partir du XVII[e] siècle, notamment par Roberval ; les nombres et les grandeurs continues sont alors réunies sous le concept général de quantité. Clavius conserve les deux livres, mais met en parallèle, systématiquement, les deux théories, comme l'avait fait avant lui Campanus. Troisième manière d'arithmétiser le livre V : faire entrer les rapports dans le domaine de la quantité. Ainsi, l'assimilation du rapport à un

---

[40] Voir à ce propos notre article 13, p. 375.

[41] Voir *Clavius : une clé pour Euclide…*, p. 72-75.

nombre a été tentée par plusieurs mathématiciens. Je signale à ce propos la tentative d'ᶜUmar al-Khayyæm (1048-1131) qui associe, grâce à l'axiome de la quatrième proportionnelle, à tout rapport $(a:b)$ un nombre c tel que $(a:b)=(1:c)$. Je rappelle aussi comment Antoine Arnaud, au XVII^e siècle, fait du rapport une quantité relative entre deux grandeurs. Je m'interroge alors sur le rôle que pourrait jouer la notion de dénomination dans l'assimilation du rapport à un nombre. J'en arrive à la même conclusion que dans ma thèse, à savoir que la dénomination ne joue pas ce rôle.

Ce troisième chapitre sur la dénomination me donne aussi l'occasion d'examiner le commentaire de Clavius aux définitions des rapports doublés et triplés du livre V, ainsi que l'ajout de la fin du livre IX sur la composition des rapports[42]. Je rappelle que, si l'on a trois grandeurs a, b et c continûment proportionnelles, on dit que le rapport $(a:c)$ est le rapport doublé de $(a:b)$ et si l'on a quatre grandeurs proportionnelles a, b, c et d, le rapport $(a:d)$ est le rapport triplé de $(a:b)$. Je montre alors comment Clavius prend position par rapport à un débat suscité par la théorie des rapports développée par Thomas Bradwardine et Nicole Oresme. Cette théorie est fondée sur l'usage d'un vocabulaire additif pour désigner la composition des rapports (qui peut, par ailleurs, s'interpréter comme multiplication des dénominations de ces rapports dans le cas des rapports rationnels). Cet usage remonte aux mathématiques grecques et trouve son origine dans les théories musicales. Il est transmis au monde latin par Boèce. Ainsi, pour désigner la composition celui-ci utilise le terme « addere ». De même, plutôt que de parler de rapport doublé (*duplicata*) ou triplé (*triplicata*) Thomas Bradwardine et Nicole Oresme parlent de « double de rapport » (*dupla*) ou « triple de rapport » (*tripla*). Clavius condamne cet usage à la suite de toute une série de commentateurs dont le premier fut Blaise de Parme (XV^e siècle).

Dans le chapitre IV je reprends, en le remaniant, le chapitre de ma thèse sur les justifications que Clavius donne des définitions euclidiennes de la

---

[42] Voir *Clavius : une clé pour Euclide…*, p. 67-72.

proportionnalité et de la non-proportionnalité. Et dans le chapitre VI je reprends mon analyse de certaines règles concernant les médiétés.

La conclusion de ce livre n'est pas très éloignée de la conclusion de ma thèse. La version de Christoph Clavius des *Eléments* d'Euclide est une édition commentée, c'est-à-dire que le texte même est peu modifié et que les ajouts se trouvent dans les commentaires. Dans ces commentaires Clavius cherche d'une part à rassembler tous les résultats utiles à la compréhension des ouvrages mathématiques ou autres, d'autre part à expliquer les points difficiles. L'enjeu est avant tout pédagogique ; et je pense que cet ouvrage s'adressait aux étudiants destinés à devenir professeurs. Je souligne pour finir que Clavius a contribué à une meilleure compréhension des *Eléments*, et en particulier du livre V.

Le débat Peletier-Clavius à propos de l'angle de contingence

À l'occasion d'une journée d'études organisée dans le cadre du Master Renaissance, au CESR de Tours, en 2004, et dont le sujet était les débats à la Renaissance, j'ai présenté le débat entre Jacques Peletier du Mans et Christoph Clavius à propos de l'angle de contingence (angle que fait la circonférence d'un cercle avec sa tangente en un point quelconque). Cet exposé a donné lieu à une publication dans le *Journal de la Renaissance*[43] sous le titre : « Un débat dans les mathématiques de la Renaissance : le statut de l'angle de contingence ».

Ce débat est connu grâce aux travaux de Luigi Maieru et plus récemment de François Loget (je n'avais pas connaissance des travaux de ce dernier lors de la rédaction de cet article). Je suis revenue sur ce débat en espérant en clarifier les termes et en insistant sur son ancrage médiéval. L'exposé, comme l'article, ne s'adressent pas en priorité aux spécialistes de l'histoire des mathématiques ; il s'agissait avant tout de donner un exemple de débat en mathématiques à la Renaissance. Par ailleurs, cet exemple m'intéressait car il est représentatif de

---

[43] Voir l'article 13, p. 375.

l'aspect polémique que peut avoir le commentaire de Clavius aux *Eléments*, puisque c'est à propos d'une proposition du livre III que la question du statut l'angle de contingence, mais aussi de l'angle du demi-cercle (angle que fait la circonférence avec l'un de ses diamètres), est posée.

L'intérêt de Jacques Peletier du Mans puis de Christoph Clavius pour le statut de l'angle de contingence provient sans nul doute de leur lecture des commentaires de Campanus à la proposition 15 du livre III et à la proposition 1 du livre X de son édition des *Eléments* d'Euclide. Dans la proposition III. 15 il est démontré que l'angle de contingence est plus petit que tout angle rectiligne et, par ailleurs, que l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle rectiligne. Campanus en déduit que l'on peut passer du moins au plus sans passer par l'égal, puisque l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu et plus petit que l'angle droit, mais il n'est égal à aucun angle rectiligne. Dans son commentaire à la proposition X. 1 Campanus explique par ailleurs que l'algorithme d'Euclide présenté dans cette proposition ne s'applique pas à un angle de contingence et à un angle rectiligne, c'est-à-dire que l'on ne peut pas retrancher d'un angle rectiligne plus que sa moitié, puis du reste plus que la moitié du reste, etc., jusqu'à obtenir un angle plus petit que l'angle de contingence donné. Or cette propriété est vraie quelles que soient les grandeurs données de même genre selon X . 1. Campanus répond à cette difficulté en expliquant que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas de même genre, l'un est rectiligne et l'autre curviligne ; ils ne sont donc pas appelés angle de manière univoque. Je rappelle alors les critères pour que deux grandeurs aient entre elles un rapport : il faut d'une part que les grandeurs soient de même genre et d'autre part que la plus petite multipliée autant qu'il est nécessaire surpasse la plus grande. La définition qui présente ce second critère dans le livre V du texte grec des *Eléments* est absente de la version de Campanus. Mais on le trouve dans la démonstration de X. 1. C'est à ce critère que ce réfère Campanus pour affirmer que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas de même genre.

Cet exemple de deux grandeurs que l'on ne peut pas comparer entre elles deviendra emblématique dans les écrits du Moyen Âge. Ainsi, Blaise de Parme, professeur de mathématiques dans les universités du Nord de l'Italie à la fin du XIVe siècle et au début du XVe, pose lui aussi la question du statut de l'angle de contingence dans ses *Questions sur le traité des rapports de Thomas Bradwardine* (je reviendrai plus loin sur ce texte dont j'ai fait l'édition avec Joël Biard)[44]. Blaise explique que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne peuvent pas être mis en rapport. Il donne pour cela deux arguments. Premier argument : l'angle de contingence n'est pas une quantité, puisqu'il n'est pas divisible. Deuxième argument : si, selon une autre opinion, on admet que l'angle de contingence est une quantité, car on peut le diviser à l'infini en prenant des cercles de plus en plus grands, il faut toutefois préciser que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas de même genre ; ils ne peuvent donc pas être comparés.

On retrouve ces deux arguments, bien plus développés, dans les opinions défendues par Peletier et Clavius, sans que je puisse affirmer que l'un ou l'autre connaissait le texte de Blaise (mais il est probable que les deux arguments présentés par Blaise aient été transmis d'une manière ou d'une autre à la Renaissance). Peletier explique en effet que l'angle de contingence n'est pas un angle, qu'il n'est pas quantifiable, que c'est une non-quantité (*nihil*) ; par ailleurs, tous les angles de demi-cercles sont égaux entre eux et égaux à l'angle rectiligne droit. Pour Clavius l'angle de contingence est un angle et pour cette raison il est quantifiable (les angles de contingence diffèrent selon la taille du cercle), mais il ne peut pas être comparé à un angle rectiligne ; les angles de demi-cercles sont différents entre eux et ne sont pas égaux à l'angle droit.

---

[44] Blaise de Parme, *Questiones circa Tractatum proportionum magistri Thome Braduardini*, Introduction et édition critique de Joël Biard et Sabine Rommevaux, Paris, Vrin, « Textes philosophiques du Moyen Âge », 2005, p. 65-66.

LES PROLOGUES AUX EDITIONS DES *ELEMENTS* D'EUCLIDE

J'ai évoqué précédemment une étude des prologues aux éditions des *Eléments* d'Euclide. J'ai réalisé cette étude à l'occasion d'un colloque organisé à Lyon par Christophe Grellard, en 2001, sur les méthodes et statut des sciences à la fin du Moyen Âge, publié en 2004 aux Presses universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq[45].

Je me suis intéressée aux prologues car il me semblait qu'ils pouvaient offrir un espace privilégié pour le développement d'un discours épistémologique sur les mathématiques. J'avais bien sûr en tête le fameux prologue de Proclus qui accompagne son commentaire au livre I des *Eléments* dans lequel l'auteur s'interroge sur le statut des mathématiques, leur place dans la hiérarchie des savoirs, leurs objets, leurs principes, leurs divisions, leurs applications.

Je me posai alors la question du devenir du prologue de Proclus[46]. Je remarquai que le texte de Proclus n'a pas été traduit en arabe, mais qu'on peut en trouver des traces ou des influences dans des textes arabes, mais aussi dans des textes latins du Moyen Âge. On peut supposer que des extraits du texte de Proclus ou des commentaires qui s'en inspiraient ont été transmis en même temps que les *Eléments*. Ce n'est qu'à partir du XV^e^ siècle que le texte de Proclus a été connu dans son intégralité.

Parmi les versions latines du XII^e^ siècle seule la version dite « Adélard III » et attribuée à Jean de Tinemue contient un prologue consistant[47]. Je note, à la suite de Clagett, que les sources en sont un texte arabe inconnu, le *De disciplina geometrie* de Gerbert et le *De nuptiis Philologiae et Mercurii* de Martianus Capella. Le prologue peut être divisé en deux parties. Dans une première partie l'auteur présente une division des sciences en les « *eloquentia* » que sont la grammaire, la dialectique et la rhétorique et les « *sapientia* », elles-mêmes divisées en les sciences pratiques que sont l'éthique, les mécaniques, et

---

[45] Voir article 11, p. 307.
[46] Voir p. 310-311.
[47] Voir p. 311-312.

les sciences théoriques que sont les mathématiques, la physique et la théologie. Je soulignais qu'aucune hiérarchie n'était faite entre les disciplines. Dans une seconde partie l'auteur présente les principes des mathématiques et de la géométrie (axiomes, postulats, définitions) et la distinction entre problème et théorème. C'est dans cette partie que l'on peut noter une influence indirecte du prologue de Proclus. L'auteur présente aussi la division proclusienne de la preuve en protase, ecthèse, etc. Je souligne pour finir que les médiévaux présentent la géométrie euclidienne comme paradigme de la rationalité discursive.

Je m'intéressai ensuite aux prologues de Federico Commandino et Christoph Clavius. Rappelons que Federico Commandino publie, en 1572, une édition commentée des *Eléments* que Clavius a utilisé pour sa propre édition. J'ai choisi ces prologues car l'un comme l'autre présentaient des structures analogues, proches du prologue de Proclus, mais que les thèses qui y sont défendues sont parfois différentes.

J'ai retenu trois thèmes pour cette étude : le statut ontologique des choses mathématiques (j'emploie le terme de chose plutôt que celui d'objet pour ne rien induire quant à la réalité de ce sur quoi travaillent les mathématiciens), la place des mathématiques dans la hiérarchie des savoirs et la question de l'utilité des mathématiques. Pour chacun de ces thèmes je rappelai les opinions de Proclus, en montrant comment Commandino et Clavius prennent position par rapport à elles, mêlant des influences aristotéliciennes et platoniciennes.

En ce qui concerne le premier point[48] je rappelle que pour Aristote les choses mathématiques sont abstraites des objets sensibles, mais ne sont pas des êtres séparés. Si elles ont une forme d'être, c'est en puissance et non en acte dans la matière. Proclus, par contre, fait accéder les choses mathématiques au statut de substance (*ousia*) et leur assigne ainsi le même mode d'être que les substances sensibles et les substances intelligibles. Malgré cela les substances mathématiques sont intermédiaires entre les substances sensibles et les substances intelligibles. Commandino reprend cette hiérarchie entre les

---

[48] Voir p. 313-318.

substances, mais il remarque que si les choses mathématiques sont séparées de la matière, cette séparation ne va pas de soi et qu'il est nécessaire de se les représenter plongées dans la matière si l'on veut les connaître. Et il rejoint finalement l'opinion aristotélicienne lorsqu'il explique que les mathématiciens considèrent leurs objets en les abstrayant de la matière. L'opinion de Clavius est proche de celle d'Aristote : il explique, en effet, que « les disciplines mathématiques traitent des choses que l'on considère indépendamment de toute matière sensible, bien qu'elles soient en réalité immergées dans la matière ». Pour Proclus, comme pour Commandino et Clavius, les mathématiques sont intermédiaires entre la physique et la métaphysique si l'on se place du point de vue de leurs objets.

Par contre, si l'on se place du point de vue des modes de connaissance, les opinions diffèrent[49]. Proclus associe aux substances intelligibles ou premières la connaissance intellectuelle qui est la plus haute. La connaissance des sensibles se fait par l'opinion. Les substances mathématiques sont appréhendées par la connaissance discursive et raisonnée, intermédiaire entre la connaissance intellectuelle et l'opinion. Ainsi, à la hiérarchie des objets correspond la hiérarchie des modes de connaissance. Commandino renverse cet ordre : du point de vue des modes de connaissance les mathématiques sont au dessus des sciences divines en raison de la fermeté et de la certitude de leurs raisonnements. Comme nous l'avons vu plus haut, Clavius défend la même opinion que Commandino. Mais alors que Commandino est très bref, Clavius s'étend longuement sur le sujet et l'on ne peut manquer de rapprocher ses propos de sa défense de l'enseignement des mathématiques dans les collèges jésuites.

Concernant l'usage et l'utilité des mathématiques le point de départ des réflexions de Clavius est là encore Proclus. Ce dernier explique, en effet, que le statut intermédiaire des substances mathématiques permet un double mouvement, ascendant vers la métaphysique et descendant vers la physique. Reprenant cette idée Clavius explique que l'enseignement des mathématiques

[49] Voir p. 318-321.

sert de propédeutique à l'étude de la métaphysique en habituant l'esprit à passer progressivement des sensibles aux choses séparées ou divines. Par ailleurs, pour Clavius, les mathématiques et plus particulièrement la géométrie contribuent à l'étude de la nature.

En conclusion de cette étude je me demandai si la conception des mathématiques qui était exposée dans ces préfaces aux *Eléments* faisait écho à l'histoire du traité euclidien. Je remarquai alors que cette histoire allait dans le sens d'un renforcement de la structure logique du traité, rendant les *Eléments* d'Euclide aussi proche que possible du modèle parfait de la science discursive décrit pas Proclus.

Angela Axworthy, étudiante au CESR de Tours, a présenté en 2004, sous la direction de Joël Biard, un mémoire de maîtrise sur « Le Statut des disciplines mathématiques au XVI^e siècle au regard des préfaces aux *Éléments* d'Euclide de Niccolò Tartaglia et de Christoph Clavius » pour lequel elle s'est inspirée de mon étude. Elle entame cette année une thèse sur les mathématiques à la Renaissance, dirigée par Joël Biard ; je participe à son encadrement.

L'HISTOIRE DU TEXTE DES *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE

J'ai évoqué à plusieurs reprises le groupe de travail sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide, mis en place en 1994. Il était constitué de Bernard Vitrac, Ahmed Djebbar et moi-même. Nos travaux s'inscrivaient dans la lignée d'un ensemble d'études sur la transmission des *Eléments* d'Euclide qui fut entrepris à la suite de la polémique qui opposa Heiberg et Klamroth au moment où Heiberg établissait le texte grec du traité euclidien, à la fin du XIX^e siècle. L'enjeu, pour Heiberg, était alors de déterminer l'extension de la tradition indirecte (traductions, commentaires, etc.) à prendre en compte pour son édition. Klamroth soutenait l'idée d'une plus grande pureté de la tradition arabe ; Heiberg défendait la conclusion contraire : l'autorité des traductions arabes et des traductions latines qui en découlèrent était moindre que celles des manuscrits grecs (les *Eléments* ont été traduits à plusieurs reprises, en arabe, dès le IXe siècle, puis d'arabe en latin au XIIe siècle). Les historiens qui s'intéressèrent ensuite à cette question se rallièrent dans leur grande majorité à l'opinion de Heiberg. La seule note vraiment discordante viendra de Wilbur Knorr qui, après une étude détaillée du livre XII des *Éléments*, concluait que les traductions arabo-latines du XIIe siècle présentent un texte bien meilleur que celui transmis par les manuscrits grecs[50].

Il nous a semblé qu'il était souhaitable de reprendre l'ensemble du dossier pour plusieurs raisons. Premièrement, le matériel disponible s'est considérablement enrichi depuis l'époque du débat Klamroth-Heiberg (on a découvert de nouveaux manuscrits contenant les traductions arabes, on a identifié et édité les traductions arabo-latines du XIIe siècle[51]). Deuxièmement, la nature très polémique du débat rend douteux certains des arguments avancés. Enfin, l'excellent travail de Wilbur Knorr ne portait que sur une partie du traité euclidien, le livre XII, qui jouit du point de vue textuel d'une position particulière : c'est le seul passage du traité pour lequel nous possédons deux versions grecques très différentes. Il semblait alors nécessaire de confronter les conclusions de Knorr à une étude des autres livres.

Nous avons ainsi comparé la version grecque des *Éléments* telle qu'elle a été éditée par Heiberg, les manuscrits que nous avons pu obtenir des différentes traductions médiévales arabes et les éditions des versions arabo-latines médiévales, de même que deux manuscrits de la version latine dite Adélard III (XIIe siècle) qui était inédite au moment de cette étude[52]. Nous avons concentré notre attention sur le livre X qui traite des grandeurs irrationnelles — livre particulièrement riche en problèmes textuels — et, dans les autres livres, sur les

---

[50] Voir dans l'article 6, la première partie « Le débat Heiberg-Klamroth revisité », p. 151-159.

[51] On doit ces éditions des versions arabo-latines au travail remarquable de Hubert L. L. Busard et de Menso Folkerts. On peut se reporter à la bibliographie de l'article 6, p. 203 et suivantes.

[52] L'édition de cette version « Adélard III » est parue en 2001. Voir H. Busard, *Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's* Elements*, the so-called Adelard III Version*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2001.

définitions, les propositions à cas de figure et les preuves alternatives, autant de lieux propices à un travail de récriture ou d'interprétation du traité euclidien. Nous avons présenté les premiers résultats de notre étude lors du colloque international « The History and Philosophy of Greek Mathematics » qui s'est déroulé à la Fondation des Treilles à Tourtour (France) en juillet 1998. Le résultat final a fait l'objet d'un long article paru en 2001 : Sabine Rommevaux, Ahmed Djebbar et Bernard Vitrac, « Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide », *Archive for History of Exact Sciences*, 55 (2001), p. 221-295[53].

Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus sont les suivantes :

1) L'étude très détaillée du livre X nous a permis de mettre à l'épreuve la fiabilité des traducteurs. Nous avons pu montrer que les traducteurs, aussi bien arabes que latins, ne se permettaient que peu de libertés par rapport au texte d'Euclide. En conséquence, les divergences observées entre les différentes versions sont à rapporter à des éditeurs grecs qui ont modifié certains passages, ou aux commentateurs grecs, arabes ou latins, dont les scholies, initialement en marge des manuscrits, ont été intégrées d'une manière ou d'une autre dans le corps même du texte. Ainsi s'explique l'ajout de certaines définitions ou preuves alternatives.

2) Les conclusions proposées par Knorr à propos du livre XII ne sont pas valables pour le livre X, ni pour les définitions du livre V. Par ailleurs, pour ces deux livres, les situations sont très différentes. À propos du livre X nous pouvons mettre en évidence un schéma de transmission simple : les versions latines sont des témoins fidèles de deux versions arabes divergentes. Pour expliquer ces divergences on peut montrer qu'il existait une version grecque, aujourd'hui perdue, distincte de celle que nous connaissons. Pour les définitions du livre V nous ne connaissons pas de témoins arabes des divergences latines.

---

[53] Article 6, p. 143.

3) Les interventions sur le texte sont de nature différente selon qu'il s'agit des définitions ou axiomes, des énoncés des propositions ou des preuves. Et les différents livres n'ont pas reçu le même traitement.

4) Il est vraisemblable qu'il existait plusieurs états du texte grec dès l'Antiquité (dus à une ou plusieurs rééditions ou des commentaires). Et les traductions arabes et arabo-latines présentent des versions mixtes qui mélangent ces différents textes. Par conséquent, aucun des textes qui nous sont parvenus ne présente un texte « pur » des *Eléments* et ils sont tous d'un mérite presque équivalent.

Par ailleurs, l'étude extrêmement minutieuse que nous avons faite des divergences entre l'ensemble de ces textes, à la fois globales mais aussi linguistiques ou grammaticales, nous a permis de déterminer un certain nombre de lieux interpolés figurant dans l'édition de Heiberg qui fait actuellement autorité. Il faut toutefois préciser que ces interpolations ne remettent pas en cause le contenu mathématique des théories présentées dans le traité euclidien. Une réédition du texte grec des *Eléments* ne paraît pas absolument nécessaire.

Bernard Vitrac a repris une partie de notre analyse dans une notice du troisième volume de sa traduction des *Eléments*[54].

Ce travail sur l'histoire du texte des *Eléments* m'a fourni l'occasion d'une étude très précise des éditions latines médiévales. Nous comparions les différentes versions mot à mot, ce qui m'a permis de me familiariser avec le style de chacun des traducteurs. Et ce travail allait dans le sens de mon intérêt pour les textes que j'ai toujours lus avec beaucoup d'attention, soucieuse notamment du vocabulaire utilisé. Tout ceci m'a été très utile lorsque j'ai entrepris de travailler sur la version de Campanus.

[54] Voir Euclide, *Les Éléments. Volume 3. Livre X*, Paris, Presses Universitaires de France, « Bibliothèque d'histoire des sciences », 1998, notice « *Sur les problèmes textuels du livre X* », p. 381-399.

LE COMMENTAIRE DE CAMPANUS AUX *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE

Campanus composa une version des *Eléments* d'Euclide aux alentours de 1260. Ce n'est pas une traduction mais une récriture fondée sur plusieurs textes, mais principalement sur une des versions de Robert de Chester (XII^e siècle). On connaît en effet plusieurs états de la version de Robert. Initialement, le texte ne comporte que les énoncés. Puis des démonstrations ont été ajoutées en marge, probablement par Robert de Chester. Et ces démonstrations ont été retravaillées par des lecteurs qui les ont intégrées dans le texte. On a ainsi des versions divergentes selon les manuscrits, mais toutes contiennent les mêmes énoncés. La comparaison de ces énoncés avec ceux de Campanus montre que celui-ci a utilisé une version issue de cette tradition ; on peut même penser qu'il a eu connaissance d'une version contenant des preuves ou des éléments de preuve.

La version de Campanus connut très vite un grand succès : le nombre important de manuscrits conservés des XIII^e et XIV^e siècles en témoigne, ainsi que les citations dans de très nombreux textes de nature différente. Par ailleurs elle fut imprimée dès 1482, puis constamment réimprimée à la Renaissance et fut une source importante des mathématiques de cette époque, comme nous l'avons vu avec Clavius. Cependant, l'histoire contemporaine ne retient de la version de Campanus que certains traits caractéristiques comme l'ajout de postulats et d'axiomes, le commentaire sur l'angle de contingence et la mauvaise compréhension de la définition de la proportionnalité des grandeurs continues du livre V. J'ai donc entrepris une étude systématique du commentaire de Campanus afin d'en déterminer l'ampleur et la nature exacte.

J'ai effectué cette étude dans le cadre du séminaire d'histoire des mathématiques que j'ai organisé dès mon entrée au sein de l'UMR « Savoirs et textes », en 1997. Au cours des trois premières années de ce séminaire auquel participaient régulièrement certains membres de l'équipe comme Jean Celeyrette et Edmond Mazet, mais aussi Bernard Vitrac, nous avons étudié principalement la transmission du texte des *Eléments* à l'Occident latin. À cette occasion j'ai présenté une série d'exposés sur le commentaire de Campanus, en particulier sur les livres VII et X et sur les livres stéréométriques XI à XIII. Ces exposés ont donné lieu à deux articles, l'un sur la proportionnalité numérique et l'autre sur la théorie de la rationalité[55]. Je n'ai pas encore eu l'occasion de publier mon travail sur les livres stéréométriques.

La proportionnalité numérique

Dans mon étude du livre VII dans la version de Campanus j'ai cherché à montrer la nature du travail de ce dernier sur le traité euclidien et d'en souligner la fécondité. Pour cela j'ai identifié les sources que Campanus utilise dans ce livre et j'ai montré comment il les articule pour construire une théorie nouvelle, cohérente et complète de la proportionnalité numérique.

Plusieurs problèmes de nature différente se posent à lui. Tout d'abord, Campanus n'est pas sans remarquer l'absence de postulats arithmétiques. Il emprunte alors à l'une de ses sources, l'*Arithmétique* de Jordanus (XIII^e^ siècle)[56], des postulats et des axiomes qu'il insère dans le traité euclidien à la suite des définitions du livre VII. Ces postulats et axiomes sont utilisés dans l'ensemble des livres arithmétiques, ainsi qu'au livre X. Un second problème est posé par l'utilisation, dans les livres arithmétiques, de certaines notions non définies au livre VII, même si, pour certaines, elles le sont dans un autre cadre, au livre V qui concerne les grandeurs continues. La notion de « rapport » en est un exemple. Là encore, Campanus va puiser dans ses sources les définitions des notions fondamentales qui manquent. Enfin, Campanus est confronté aux lacunes propres aux versions arabo-latines des *Éléments* qu'il utilise pour son édition et qui nuisent à la compréhension du texte. Il comblera ces lacunes en ajoutant une proposition.

---

[55] Voir l'article 5, p. 97 et l'article 8, p. 245.

[56] Ce livre très riche et qui a nourri les mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance mériterait une étude approfondie, que j'ai l'intention de mener prochainement.

Je vais examiner chacun de ces points, mais auparavant il convient de dire quelques mots sur la position défendue par Campanus à l'égard du double traitement de la proportionnalité, au livre V pour les nombres et au livre VII pour les grandeurs continues. J'ai déjà évoqué ce problème à propos de Clavius. Campanus a, à ce sujet, une position claire : si l'on peut faire un parallèle entre certains résultats démontrés dans les deux livres, ceux-ci portent sur des objets différents (l'un sur les grandeurs continues et l'autre sur les nombres), mais bien plus, leurs principes sont différents. Campanus ne précise pas quels sont ces principes, mais on peut penser à l'équimultiplicité pour le livre V et aux notions de multiple et de parties pour le livre VII. Campanus dit seulement que les principes du livre V sont rendus difficiles à comprendre et à appliquer en raison de la « malignité » des grandeurs incommensurables, alors que ceux du livre VII sont plus simples. Ainsi, Campanus justifie le double traitement : objets différents, principes différents. Il s'interdit par conséquent d'utiliser des résultats du livre V dans le livre VII, ou inversement, comme l'ont fait certains de ses prédécesseurs (notamment Robert de Chester ou l'auteur de la version dite « Adélard III »)[57]. Je montre qu'il est ainsi conduit à ajouter une proposition dans le livre VII pour justifier un résultat sur les nombres que Robert de Chester déduisait d'une proposition du livre V[58].

Bien sûr, l'appréciation du travail de Campanus sur le traité euclidien n'a de sens que par rapport à la version qu'il a utilisée et qui diffère en de nombreux points de la version grecque que l'on connaît. Ainsi, les textes appartenant à la tradition de Robert de Chester ne contiennent pas les définitions des notions de partie et de multiple qui sont au fondement de la théorie euclidienne de la proportionnalité numérique. De plus, la définition de la proportionnalité des nombres que l'on trouve dans ces textes est plutôt vague : « Proportionnels sont les nombres dont le premier est dans le deuxième de la même manière que le troisième est dans le quatrième, ou le deuxième dans le premier de la même manière que le quatrième dans le troisième » (Euclide est plus explicite : « des

---

[57] Voir article 5, p. 105-108.
[58] Voir article 5, p. 108-112.

nombres sont dit proportionnels, si le premier est le même multiple, ou la même partie, ou les mêmes parties du deuxième que le troisième du quatrième »). Campanus ajoute alors un certain nombre de définitions au début du livre VII dont certaines sont puisées dans l'*Arithmétique* de Jordanus[59]. Ainsi, il explique qu'une partie d'un nombre nombre *(numerat*) ce nombre. Et que quand deux nombres ont une partie commune, le plus petit est dit être des parties du plus grand ; plus précisément, le plus petit nombre sera p n-ièmes parties, quand la partie commune sera la n-ième partie du plus grand nombre et où p est le nombre de fois où la partie commune se trouve dans le plus petit nombre. Euclide se contentait de dire qu'un nombre est dit être des parties d'un nombre plus grand, quand il n'en est pas une seule partie. Je remarque à ce propos que la proposition VII. 4, selon laquelle deux nombres étant donnés, le plus petit est soit une partie, soit des parties du plus grand, qui est une tautologie chez Euclide, prend tout son sens chez Campanus[60].

Campanus donne aussi une définition du rapport entre les nombres, définition absente du texte grec (alors que le rapport est défini, pour les grandeurs, au livre V comme relation quantitative entre deux grandeurs de même genre). La définition de Campanus est la suivante : « Est dit rapport d'un nombre à un nombre, précisément d'un plus petit à un plus grand, ce en quoi le plus petit est une partie ou des parties du plus grand. Et est dit rapport d'un plus grand à un plus petit, ce selon quoi le plus grand le contient, et sa partie ou ses parties ». Les expressions « ce en quoi » et « ce selon quoi » sont les traductions de « in eo quod » et « secundum quod » qui expriment le fait que le rapport est une relation et non un nombre. Il faut rapprocher cette définition de la définition de la dénomination du rapport que Campanus ajoute plus loin : « Est dite dénomination d'un rapport, précisément d'un plus petit nombre à un plus grand, la partie ou les parties de ce plus petit nombre qui sont dans le plus grand. Et est dite dénomination d'un rapport d'un plus grand à un plus petit, le

---

[59] Voir article 5, p. 92-99.
[60] Voir article 5, p. 106-108.

multiple[61], ou le multiple et la partie ou les parties selon lesquelles le plus grand est en plus ». Enfin, la proportionnalité des nombres est définie comme égalité des dénominations.

Ainsi, Campanus met en place un cadre conceptuel cohérent et complet de la proportionnalité numérique qui comble les lacunes qu'il a pu trouver dans la version de Robert de Chester, mais qui diffère de celui que l'on trouve dans le texte grec. En effet, si Campanus fonde sa théorie sur la notion de partie, comme Euclide, il ajoute la notion non euclidienne de dénomination à partir de laquelle il définit la proportionnalité des nombres.

Je conclus cet article en expliquant que le travail de récriture de Campanus va dans le sens d'une explicitation du projet euclidien en renforçant la structure logique du traité (Campanus pense d'ailleurs avoir décelé les intentions d'Euclide, comme le montrent ses commentaires introduits par « volens Euclides » ou « Euclides intenderet »).

La théorie de l'irrationalité du livre X

Le livre X des *Eléments* est réputé comme étant le plus difficile, aussi bien pour les commentateurs modernes que pour les anciens. Ainsi, Simon Stevin le qualifiait de « croix des mathématiciens ». Et il est un fait que l'étude de ce livre dans la version de Campanus est certainement la plus ardue que j'ai réalisée, tant les notions qui y sont présentées, le vocabulaire utilisé et le cadre géométrique dans lequel ces notions sont étudiées nous sont peu familiers[62].

Le livre X contient la théorie des grandeurs commensurables et incommensurables et la classification des lignes irrationnelles. Il est de facture géométrique, mais certains commentateurs y virent assez vite une arithmétique « déguisée » des nombres radicaux. Ainsi, un certain nombre de commentateurs médiévaux arabes, par exemple al-Mahænî, interprétèrent le livre X à l'aide de ces nombres. Campanus, quant à lui, reste dans le cadre

---

[61] J'ai choisi dans cet article de traduire ici « totum » par « multiple » pour faciliter la compréhension.

[62] Voir l'article 8, p. 245.

strictement géométrique qui est celui d'Euclide. Toutefois, son texte présente, à la suite des traductions arabes puis arabo-latines, mais aussi de son propre fait, un certain nombre de divergences par rapport au texte grec, divergences qui ne sont pas sans conséquences mathématiques.

Rappelons qu'Euclide introduit deux couples de notions, commensurable et incommensurable d'une part, exprimable (*rètè*) et irrationnel (*alogoi*) d'autre part. Si l'on s'en tient aux droites, on dira que deux droites sont commensurables (on ajoute souvent en longueur), si une même droite les mesure l'une comme l'autre, et incommensurables dans le cas contraire. Et on dira que ces droites sont commensurables en puissance seulement, si elles sont incommensurables mais que les carrés que l'on peut construire sur elles sont commensurables, c'est-à-dire qu'il existe une surface qui mesure l'un et l'autre de ces carrés. Si l'on pose par ailleurs une droite de référence que l'on nomme exprimable (cette droite peut varier selon les problèmes et est en général un des éléments des figures considérées), les droites qui lui sont commensurables, en longueur ou en puissance, sont aussi dites exprimables et les autres sont dites irrationnelles. On peut résumer la situation dans le tableau ci-dessous :

<table>
<tr><td>D et E commensurables</td><td>D commensurable en longueur à E</td><td rowspan="2">D exprimable</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D et E incommensurables</td><td>D commensurable en puissance seulement à E</td></tr>
<tr><td>D incommensurable en puissance à E</td><td>D irrationnelle</td></tr>
</table>

Si l'on prend l'exemple de la diagonale et du côté d'un même carré, en posant comme droite de référence le côté du carré, on dira que la diagonale est exprimable, puisque son carré est commensurable au carré du côté (c'en est le double).

On note ici qu'il n'y a pas de parallélisme entre les deux couples de notions, comme le montre le tableau : les cas d'exprimabilité ne recouvrent pas la commensurabilité. Ce non-parallélisme a dérouté les lecteurs du livre X. Je rapporte le commentaire de Pappus à ce sujet[63].

Campanus reçoit de la tradition une définition tronquée de la définition des droites exprimables ou rationnelles (en latin on a le terme *rationales*). En effet, il n'est pas précisé que les droites concernées doivent être commensurables en longueur ou en puissance seulement à la droite de référence. Il est seulement dit qu'elles doivent être commensurables. On peut alors interpréter cette définition en disant que commensurable renvoie à la première définition et ne concerne donc que les droites commensurables en longueur. Ainsi, on aurait la situation suivante :

<table>
<tr><td>D et E commensurables</td><td>D commensurable en longueur à E</td><td>D rationnelle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D et E incommensurables</td><td>D commensurable en puissance seulement à E</td><td rowspan="2">D irrationnelle</td></tr>
<tr><td>D incommensurable en puissance à E</td></tr>
</table>

Le parallélisme entre rationalité (ou exprimabilité) et commensurabilité serait strict. C'est ainsi que Tartaglia interprète la définition de Campanus[64]. Mais je remarque que cette interprétation peut être en contradiction avec la dernière définition du début du livre X dans laquelle il est dit que les côtés des carrés irrationnels sont irrationnels. Si l'on interprète cette définition en disant que cela implique que les côtés des carrés rationnels (ou exprimables) sont rationnels (ou exprimables), on en déduit que sont rationnels les côtés des carrés commensurables en longueur ou en puissance à la droite de référence[65].

Toutefois, quelle que soit la manière dont on interprète les définitions de Campanus, le parallélisme entre commensurabilité et rationalité (ou exprimabilité) se trouve renforcé par l'introduction, dans les propositions, des

---

[63] Voir article 8, p. 252.
[64] Voir article 8, p. 253.
[65] Voir article 8, p. 253-254.

notions non euclidiennes de droites rationnelles en longueur et de droites rationnelles en puissance[66]. On a alors le tableau suivant :

D et E commensurables	D commensurable en longueur à E	D rationnelle en longueur
D et E incommensurables	D commensurable en puissance à E	D rationnelle en puissance
	D incommensurable en puissance à E	D irrationnelle

Si l'on reprend l'exemple de la diagonale et du côté d'un carré, la diagonale est ici rationnelle en puissance seulement relativement au côté posé comme rationnel.

Je note que l'introduction de ces notions n'est pas le fait de Campanus. Il suit sur ce point Robert de Chester qui lui-même les reprenait de la version arabe qu'il utilisait[67]. J'ai montré que l'introduction de ces notions ne remettait pas en cause la complétude du livre X[68].

J'examine pour finir la proposition XIII 6[69]. Dans la version d'Euclide il y est démontré que toute ligne exprimable étant divisée en extrême et moyenne raison, chaque portion est une apotomé. Rappelons que diviser une droite AB donnée en extrême et moyenne raison consiste à la diviser au point C tel que $(\mathrm{AB}:\mathrm{AC}) = (\mathrm{AC}:\mathrm{BC})$. Rappelons aussi qu'une apotomé est une droite D telle que $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_2$ avec D_1 et D_2 exprimables, commensurables en puissance seulement. La notion d'apotomé est donc une notion relative à une droite posée comme référence, car c'est relativement à celle-ci que les droites D_1 et D_2 sont dites exprimables. Si l'on examine la démonstration de la proposition, dans la version grecque, on remarque que la droite posée comme référence est la droite que l'on doit diviser et qui est dite « exprimable » dans l'énoncé de la proposition.

---

[66] Voir article 8, p. 257-258.
[67] Il semble que cette introduction est le fait de Thæbit (voir article 8, p. 257).
[68] Ce point est très technique, je n'y reviens pas. Voir article 8, p. 258-261.
[69] Voir aticle 8, p. 261-267.

Si l'on examine maintenant cette proposition dans la version de Campanus, on remarque que ce dernier considère deux cas de figure, selon que la droite à diviser est rationnelle en longueur ou rationnelle en puissance. Ce faisant, il pose implicitement une droite de référence, extérieure au problème, relativement à laquelle la droite à diviser est dite rationnelle en longueur ou en puissance. Je montre aussi que la notion d'apotomé est, dans la démonstration de Campanus, relative à cette droite de référence posée extérieurement au problème.

Ce changement du statut de la droite de référence est important. En effet, poser *a priori*, quel que soit le problème examiné, une droite de référence extérieure aux données des problèmes revient à poser une unité à laquelle toutes les droites seront rapportées. On a alors les conditions d'une arithmétisation du livre X, la droite de référence étant l'unité de mesure de toutes les droites rationnelles ou irrationnelles traitées dans ce livre. Toutefois, je remarque aussitôt que cette arithmétisation n'est pas du tout présente chez Campanus[70]. En effet, j'insiste sur le fait que dans le texte de Campanus le choix de la droite de référence est implicite : à aucun moment il ne désigne de droite de référence, et à plus forte raison il ne la présente pas comme unité de mesure. Par ailleurs, je souligne : « arithmétiser le livre X signifierait traduire les différentes notions, interpréter les énoncés et les démonstrations en termes d'opérations algébriques sur les nombres ». Or ce n'est pas ce que fait Campanus dans le livre X.

Je note pour finir que l'intérêt du travail de Campanus sur le traité euclidien réside dans sa vision globale du traité, dans son souci constant de traquer les incomplétudes logiques ou mathématiques, ce que nous avions déjà remarqué dans notre étude du livre VII.

---

[70] Voir la conclusion de l'article 8, p. 268-269.

PROJET DE RECHERCHE SUR « LA RECEPTION DES *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE AU MOYEN ÂGE ET A LA RENAISSANCE »

Parallèlement à ce travail personnel sur les versions médiévales des *Eléments* d'Euclide j'ai encadré un projet collectif sur la réception des *Éléments* d'Euclide au Moyen Âge et à la Renaissance. Ce projet a duré de juin 2000 à juin 2002 et a bénéficié d'une Aide à Projet Nouveau (APN) du CNRS. Nos travaux ont donné lieu à la publication d'un numéro spécial de la *Revue d'histoire des Sciences* (n° 56/2, 2003)[71].

Comme nous l'avons vu, l'Occident disposa de la totalité des *Éléments* d'Euclide, dès le XIIe siècle, grâce aux différentes traductions latines faites à partir de versions arabes ou même directement à partir du texte grec, mais aussi grâce à des traductions hébraïques. Or, dès l'Antiquité, le traité euclidien suscita de nombreux commentaires. Les mathématiciens médiévaux, arabes ou latins, puis renaissants ne dérogèrent pas à la règle : ils discutèrent largement les points difficiles ou litigieux. Ils s'approprièrent de cette manière le traité euclidien qu'ils avaient reçu, le modifiant parfois, comme nous l'avons vu pour Campanus. Parallèlement à cette appropriation les *Eléments* furent aussi l'occasion de développements mathématiques originaux. Que l'on songe, par exemple, à la théorie des rapports de rapports développée par Nicole Oresme, et sur laquelle nous reviendrons, mais aussi aux *Questions sur la géométrie d'Euclide*, du même Nicole, dans lesquelles on trouve, entre autres choses, des considérations sur les sommes de séries infinies de grandeurs. Et on pourrait multiplier ainsi les exemples, que ce soit dans les mathématiques arabes ou latines.

Par ailleurs, on doit souligner que les *Eléments* furent un manuel d'apprentissage des mathématiques, que ce soit dans un cadre institutionnel (écoles ou universités) ou non. On trouve ainsi, en Occident, dès le XIIe siècle, des versions abrégées des *Éléments* mettant en évidence les notions fondamentales et la structure déductive des résultats et dont les objectifs sont

[71] Voir dans l'article 9, p. 277, la description de ce numéro.

sans doute pédagogiques. Il semble en effet que l'enseignement des mathématiques au Moyen Âge, pour le peu qu'on en sache, consistait surtout en l'apprentissage des notions clés et de quelques résultats fondamentaux, sans que la connaissance des démonstrations soit exigée.

Enfin, du fait de leur architecture très structurée les *Éléments* d'Euclide furent considérés comme le prototype de la rationalité discursive au delà du seul champ mathématique. Ses axiomes, certaines de ses définitions, la structure de ses démonstrations sont souvent cités en exemple et ils furent le modèle des tentatives de rationalisation de domaines comme la théologie ou la philosophie de la nature.

Nos travaux portèrent sur ces différents aspects de la réception du traité euclidien, ses différents usages intellectuels et institutionnels, afin de mieux mettre en évidence la place spécifique de la pensée médiévale occidentale dans l'histoire des mathématiques. Au moment de mettre en place ce projet je remarquais que, de façon générale, l'histoire des mathématiques dans le monde occidental entre le haut Moyen Âge et la Renaissance était fort mal connue (elle l'est sans doute encore). Depuis plusieurs années l'attention des historiens s'est surtout portée, à juste titre, sur les apports du monde arabe. Toutefois, il ne faudrait pas oublier les développements spécifiques au monde latin occidental, tant médiévaux que renaissants, d'autant que, sur un plan proprement historique, la transmission des innovations arabes à la Renaissance et à l'âge classique reste encore, dans bien des cas, à élucider. L'exemple de Clavius montrait combien les mathématiques renaissantes étaient redevables des innovations du Moyen Âge. J'ai peu de doute que ce soit encore le cas à l'Âge classique.

LE *TRAITE SUR LES RAPPORTS* DE THOMAS BRADWARDINE ET LE TRAITE *SUR LES RAPPORTS DE RAPPORTS* DE NICOLE ORESME

Lorsque l'on s'intéresse à la théorie des rapports au Moyen Âge, on ne peut manquer d'étudier le *Traité sur les rapports* de Thomas Bradwardine (1328), ainsi que le traité *Sur les rapports de rapports* de Nicole Oresme (composé entre 1351 et 1360). Dans ces deux textes est présentée une théorie des rapports en liaison avec la question du mouvement.

C'est dans le cadre des commentaires à la *Physique* d'Aristote que des maîtres ès arts d'Oxford, au XIV^{e} siècle, se posèrent la question du mouvement. Il s'agissait de donner une interprétation satisfaisante de la théorie développée par Aristote (principalement au livre VII de la *Physique*) selon laquelle il y aurait une relation de proportionnalité entre la rapidité d'un mouvement, la puissance du moteur et la résistance du mobile. On peut interpréter simplement cette relation en disant que la rapidité est équivalente au rapport de la puissance à la résistance. Mais Aristote lui-même montrait que l'on était alors conduit à des paradoxes, comme le fait qu'un moteur pourrait mouvoir un mobile de résistance plus grande que sa puissance. Au XIV^{e} siècle, d'aucuns proposèrent l'interprétation suivante : pour deux mouvements donnés il y a proportionnalité entre les rapidités et les rapports entre les puissances et les résistances. Autrement dit, pour deux moteurs A et B donnés qui meuvent respectivement un mobile C et un mobile D, on doit considérer le rapport entre le rapport de la puissance motrice de A à la résistance de C et le rapport de la puissance motrice de B à la résistance de D et ce rapport de rapports est égal au rapport entre les rapidités de ces mouvements : $(r_C : r_D) = ((P_A : R_C) : (P_B : R_D))$. C'est cette interprétation que retient Thomas Bradwardine dans son *Traité des rapports* après avoir réfuté d'autres solutions.

Cette règle du mouvement est traditionnellement appelée « loi de Bradwardine ». Je n'emploie jamais cette expression, car il ne s'agit pas ici d'une loi physique au sens où on l'entendra à partir du XVII^{e} siècle. Il est en effet étranger à la pensée des auteurs du XIV^{e} siècle que la nature soit régie par des lois mathématiques. Par ailleurs, attribuer la paternité de cette règle à Thomas Bradwardine n'est pas sans poser des difficultés. Ainsi Elzbieta Jung pense que la règle a d'abord été énoncée par Richard Kilvington dans ses *Questions sur la Physique* (Richard est un contemporain de Thomas

Bradwardine, lui aussi maître ès arts à Oxford)[72]. Toutefois, outre la question de la chronologie entre les œuvres de ces deux auteurs qui n'est pas totalement assurée, il faut remarquer que dans ses *Questions sur la Physique* Richard ne donne pas un énoncé général de la règle du mouvement, mais il se contente de cas particuliers[73]. Thomas Bradwardine semble être le premier à présenter, dans un traité autonome, la règle avec ses présupposés mathématiques et ses conséquences.

Le *Traité sur les rapports* de Thomas Bradwardine eut un rapide succès et fut connu à Paris, notamment, dès le milieu du XIV^e^ siècle. Ainsi, Nicole Oresme, pour ne parler que de lui, présente la règle du mouvement et donne les fondements mathématiques de la théorie des rapports de rapports dans son traité éponyme, théorie à peine esquissée par Thomas.

Les traités sur les rapports de Thomas Bradwardine et Nicole Oresme ont été édités en latin, accompagnés d'une traduction anglaise et de commentaires ; celui de Thomas en 1955 par H. Lamar Crosby, et celui de Nicole par Edward Grant en 1966[74]. J'ai pensé qu'il pouvait être utile de donner une traduction française de ces deux traités, afin, d'une part de les rendre accessibles à un public nouveau, d'autre part de corriger certaines erreurs d'interprétations qui ont pu entacher les traductions anglaises[75]. Crosby explique ainsi que la règle du mouvement doit s'interpréter de la manière suivante : $V = \log_n\left(\frac{F}{R}\right)$, V étant

---

[72] Voir Elzbieta Jung-Palczewska, « Works by Richard Kilvington », *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du Moyen Âge* 67 (2000), p. 181-223 ; voir en particulier, p. 207-214.

[73] Voir dans l'article de E. Jung, la note 122, p. 209.

[74] H. Lamar Crosby, Thomas Bradwardine. His Tractatus de Proportionibus. Its Significance for the Development of Mathematical Physics, Madison, University of Wisconsin Press, 1955 ; Nicole Oresme, De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes, edited with Introduction, english Translation and critical Notes by Edward Grant, Madison, University of Wisconsin Press, 1966.

[75] Cette traduction française est à paraître aux Belles-Lettres, dans la collection « Sagesses médiévales ». Voir le fascicule intitulé : Thomas Bradwardine, *Traité sur les rapports ou Sur les rapports entre les rapidités dans les mouvements* ; Nicole Oresme, *Sur les rapports de rapports*, Introduction, traduction et commentaires de Sabine Rommevaux.

la vitesse, F étant la force et R la résistance. Crosby ajoute que l'on peut aussi écrire $n^V = \left(\frac{F}{R}\right)$ afin d'éviter l'usage anachronique du logarithme. Je ne vois pas en quoi cette deuxième écriture est moins anachronique que la première, puisqu'elle fait intervenir les exponentielles, mais aussi parce qu'elle fait de la vitesse une fonction du rapport (ou plutôt du quotient) de la puissance à la résistance, alors que la notion de fonction est étrangère aux mathématiques de cette époque. Ce qui est en jeu dans la règle du mouvement c'est la comparaison de deux mouvements et la théorie mathématique utilisée est celle des rapports. Par ailleurs, le concept de force est absent du traité de Thomas Bradwardine, il apparaîtra plus tard ; Thomas parle de puissance du moteur.

Grant, quant à lui, voit dans la théorie oresmienne des rapports de rapports les prémisses d'une théorie des puissances non entières des nombres fractionnés. C'est ainsi qu'il interprète le traité de Nicole Oresme dans sa présentation et dans les commentaires qui sont en notes à sa traduction. Cette interprétation oriente parfois sa traduction, mais surtout elle conduit Grant à juger fausse la théorie des rapports de rapports de Nicole Oresme pour les rapports de plus petite inégalité. Ainsi, lorsque Nicole explique que « le rapport octuple est le triple du rapport double », Grant l'interprète en écrivant : $\left(\frac{8}{1}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)^3$. De même, le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré, qui est nommé « moitié du rapport double » par les médiévaux, est noté $\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Aussi, lorsque Nicole Oresme explique que « le rapport de 4 à 1 est double du rapport de 4 à 2 », mais que « le rapport de 2 à 4 est le rapport de 1 à 4 doublé », Grant écrit : $\left(\frac{4}{1}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Cette deuxième égalité est fausse. Mais Paul Rusnock a bien montré que c'était l'interprétation moderne qui était erronée et non la théorie oresmienne[76].

---

[76] Paul Rusnock, « Oresme on Ratios of Lesser Inequality », *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* fasc. 135, n° 45 (1995), p. 263-272. Je reviens sur la question des rapports de plus petite inégalité dans l'introduction à ma traduction des traités de Thomas Bradwardine et Nicole Oresme, p. 23-24 ; ainsi que dans *Théorie des rapports (XIIIe - XVIe siècles)…* , p. 68.

En fait, la théorie des rapports de rapports est fondée sur une interprétation additive de la composition des rapports. Comme nous l'avons vu plus haut, si a, b, c sont trois grandeurs, le rapport $(a:c)$ est dit composé du rapport $(a:b)$ et du rapport $(b:c)$ (de la même manière, si l'on veut, qu'un segment AC et composé du segment AB et du segment BC ; B étant entre A et C). Si l'on pense que la composition est comme une addition et qu'on suppose par ailleurs que les grandeurs a, b et c sont continûment proportionnelles, les rapports $(a:b)$ et $(b:c)$ sont égaux entre eux, et puisqu'ils composent le rapport $(a:c)$, chacun d'eux sera dit la moitié de ce rapport. Ainsi, par exemple, le rapport de la diagonale au côté, qui en termes modernes vaut $(\sqrt{2}:1)$, est la moitié du rapport double, puisque $(2:1)=(2:\sqrt{2})\bullet(\sqrt{2}:1)$. On a aussi que le rapport $(3:1)$ est la moitié du rapport $(9:1)$. On voit ainsi comment on peut définir la partie d'un rapport. On définit de la même manière la relation « être des parties ». Ainsi, le rapport double $(2:1)$ est la moitié du rapport quadruple $(4:1)$ et ce même rapport double est le tiers du rapport octuple $(8:1)$, donc on dira que le rapport quadruple est les deux tiers du rapport octuple. On dira aussi que le rapport entre le rapport quadruple et le rapport octuple est le rapport de 2 à 3. À partir de là, Nicole développe une théorie des rapports des rapports dont j'ai donné un aperçu dans l'introduction à ma traduction, mais que j'ai analysée plus en détail dans *Théorie des rapports (XIII^e^-XVI^e^ siècles)*, chapitre « Les rapports de rapports » et chapitre « Commensurabilité et incommensurabilité des rapports entre eux »[77].

Dans ma traduction j'ai donc cherché autant que possible à respecter la lettre et l'esprit des textes. Dans l'introduction j'ai présenté les deux traités. À la suite de l'analyse de la théorie des rapports proposée par Thomas Bradwardine et Nicole Oresme, j'ai aussi présenté les problèmes posés, chez ces deux auteurs, par la théorie du mouvement. Là encore j'ai évité les anachronismes, refusant ainsi de parler de dynamique ou de cinématique, car

---

[77] Edith Sylla et John Murdoch avaient déjà signalé le rôle joué par la composition des rapports et la notion de partie dans la construction oresmienne des rapports de rapports, dans « The Science of Motion », *in* David C. Lindberg (ed.), *Science in the Middle Ages*, Chicago, University of Chicago Press, 1978, p. 206-264.

cela impliquerait l'existence des notions de force et de vitesse qui sont absentes des traités du XIVe siècle. Ces derniers parlent en effet de puissance, comme nous l'avons déjà souligné. Et la *velocitas* (terme que j'ai traduit par « rapidité ») est, pour la plupart des médiévaux, une qualité du mouvement ou de la chose mue qui a sa qualité contraire, la *tarditas* ou lenteur. Ce n'est en aucun cas la notion post-galiléenne de vitesse conçue comme quotient de la distance parcourue par le temps de parcours.

Nous avons vu que la règle du mouvement explicite le lien qui existe entre la rapidité, la puissance du moteur et la résistance du mobile. On dit alors que l'on pose la question du mouvement du point de vue de la cause (la puissance du moteur). On peut aussi la poser du point de l'effet, et c'est ce que fait Thomas Bradwardine dans une partie du dernier chapitre de son traité à propos du mouvement circulaire. Il cherche à mesurer la rapidité en fonction de l'espace parcouru par le mobile[78]. Il commence par montrer que l'espace qui doit être pris en compte pour le calcul de la rapidité est le plus grand espace linéaire parcouru par un des points du mobile. Ainsi, dans le cas du mouvement d'un rayon de cercle autour du centre, le plus grand espace est celui qui est parcouru par le point qui se trouve sur la circonférence. Thomas en déduit un certain nombre de conclusions concernant le calcul du mouvement du cercle et de la sphère.

Thomas s'intéresse, par ailleurs, au mouvement des corps mixtes dans un milieu donné[79]. Il démontre alors que par la raréfaction du milieu on peut augmenter à l'infini la rapidité de la chute d'un corps mixte. Il envisage aussi la chute des corps mixtes dans le vide. Il explique alors que tous les corps mixtes de composition semblable, c'est-à-dire ayant la même proportion de lourdeur et de légèreté, tombent avec la même rapidité dans le vide. Il en déduit que, dans le vide, deux corps mixtes de même composition étant posés sur une balance, le plus lourd descend. Il est intéressant de noter que Thomas n'utilise pas l'exemple du vide pour énoncer des paradoxes, comme c'est souvent le cas

---

[78] Voir l'introduction à ma traduction, p. 40-44.
[79] Voir p. 44-46.

en philosophie naturelle. Il propose des dispositifs physiques pour lesquels il énonce des résultats, comme dans les milieux pleins.

Pour finir, Thomas applique la théorie des rapports aux quatre éléments[80]. Thomas part de l'hypothèse que les sphères correspondant à chacun des quatre éléments sont proportionnelles, à savoir la sphère de la terre, la sphère contenant la terre et l'eau, la sphère contenant la terre, l'eau et l'air, puis la sphère contenant les quatre éléments, dite aussi sphère des corruptibles, qui correspond à l'orbe de la lune. Thomas propose une évaluation des rayons et des volumes de ces quatre sphères. Pour cela, il se fonde sur l'estimation qu'a fournie al-Farghænî de la plus petite distance de la terre à la lune qui est égale à 33 fois le rayon de la terre et « la moitié de sa moitié et sa vingtième partie » (soit 33 fois plus un tiers). Voyons par exemple comment il évalue le rapport entre le volume de la sphère des corruptibles et le volume de la sphère de la terre. On sait que le rapport entre les volumes de deux sphères est le triple du rapport entre leurs rayons (en termes modernes, le rapport entre les volumes est le cube du rapport entre les rayons). Or, pour déterminer le triple d'un rapport, il suffit de construire une proportionnalité de quatre termes selon ce rapport. Thomas considère donc la proportionnalité : 1, 33, 1089, 35937 (il laisse tomber ici les fractions dans l'évaluation de la distance de la terre à la lune). Le rapport de 35937 à 1 est le triple du rapport de 33 à 1. Ainsi, le rapport entre le volume de la sphère des corruptibles, ou de la sphère contenant les quatre éléments, et le volume de la sphère de la terre est de 35937 à 1.

Nicole Oresme, quant à lui, ne s'intéresse ni à la chute des corps mixtes, ni aux quatre éléments. À la suite de l'énoncé de la règle du mouvement il se demande plutôt comment on doit l'utiliser[81]. Ainsi, il explique comment déterminer l'un des termes intervenant dans la règle du mouvement à partir des autres. Il montre aussi comme déterminer, lorsque cela est possible, la puissance et la résistance à partir de la rapidité. La rapidité est ici connue grâce à la dénomination du rapport dont elle est issue. Par exemple, si ce rapport est

---

[80] Voir l'introduction à ma traduction, p. 53-56.

[81] Voir p. 46-50.

rationnel, et que sa dénomination est $n + p/q$, la puissance sera $nq + p$ et la résistance q. Si le rapport est irrationnel, dénommé par un rapport rationnel, les calculs sont plus complexes. Prenons l'exemple d'un rapport irrationnel I qui serait les p q-ièmes parties d'un rapport rationnel R, c'est–à-dire, en termes modernes, que $\mathrm{I} = \mathrm{R}^{p/q}$. Nicole explique qu'il faut choisir deux lignes A et B telles que R soit le rapport entre A et B. On détermine ensuite q-1 lignes $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{q-1}$, médianes entre A et B de sorte que le rapport de A à B se compose de rapports égaux : $(\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (\mathrm{A}:\mathrm{A}_1) \bullet (\mathrm{A}_1:\mathrm{A}_2) \bullet \ldots \bullet (\mathrm{A}_{q-1}:\mathrm{B})$. Alors I est le rapport entre A et A_p ; en effet : $\mathrm{I} = (\mathrm{A}:\mathrm{A}_1)^p = (\mathrm{A}:\mathrm{A}_p)$. Donc la puissance est A et la résistance A_p.

Mais la préoccupation principale de Nicole Oresme est ailleurs. Son traité *Sur les rapports de rapports* se termine en effet par des considérations sur le mouvement des orbes célestes[82]. Il veut montrer que les configurations des astres sont, à chaque instant, uniques. En conséquence, la croyance en une grande année qui verrait tous les trente-six mille ans revenir l'ensemble des astres dans la même disposition est fausse. Nicole sape ainsi les fondements de l'astrologie. On retrouve cette même préoccupation dans plusieurs de ses œuvres.

Son argumentation est fondée sur l'intuition que dans une collection de rapports donnés il y a une forte probabilité pour que deux rapports soient incommensurables entre eux, et donc que le rapport entre ces deux rapports soit irrationnel, et cette probabilité augmente avec le nombre de rapports envisagés. En conséquence, si l'on considère le mouvement de deux astres, puisque le rapport entre leurs rapidités provient d'un rapport de rapports, il y a une probabilité élevée pour que ce rapport soit irrationnel. Ainsi, une configuration d'astres à un instant donné a une chance infime de se reproduire dans le futur ou d'avoir eu lieu dans le passé. Nicole n'a pas les moyens mathématiques de démontrer cette intuition, mais il tente d'en donner une explication.

---

[82] Voir la conclusion de notre traduction, p. 50-52.

LES *QUESTIONS* DE BLAISE DE PARME SUR LE *TRAITE DES RAPPORTS* DE THOMAS BRADWARDINE

Les traités de Thomas Bradwardine et de Nicole Oresme furent connus en Italie, dès la seconde moitié du XIV^e^ siècle. La règle du mouvement est ainsi exposée dans une *Question sur les proportionnalités des mouvements* du maître padouan François de Ferrare, en 1352. Elle est aussi discutée par Ange de Fossombruno et Messino de Codronchi dans le dernier quart du XIVe siècle[83]. Mais c'est à Blaise de Parme, contemporain de ces deux maîtres, que l'on doit le commentaire le plus important qui sera à l'origine d'une longue tradition dont Clavius se fait encore l'écho à la fin du XVIe siècle. Si, dans une première version de ses *Questions sur le traité des rapports du maître Thomas Bradwardine*, Blaise accepte la règle du mouvement tout en l'aménageant pour prendre en compte des problèmes que posent son application, dans une seconde version il en critique les fondements mathématiques et finit par la rejeter pour des raisons à la fois mathématiques et physiques. Ces critiques seront reprises par de nombreux auteurs en Italie.

L'édition critique

Blaise de Parme rédige donc une première version de ses *Questions sur le traité des rapports*, probablement entre 1378 et 1388[84]. Il n'existe qu'un seul témoin de cette version dans un manuscrit conservé à Milan. On peut trouver un extrait de cette version dans un article à paraître[85]. Cette première version contient onze questions. La seconde version a été probablement composée entre 1389 et 1407, période durant laquelle Blaise a enseigné la philosophie

---

[83] Voir Jean Celeyrette, « Le mouvement selon la cause chez Messino da Codronchi et Angelo de Fossombruno », dans Joël Biard et Sabine Rommevaux (éds.), *Mathématiques et théorie du mouvement (XIVe-XVe siècles)*, à paraître.

[84] Voir Blaise de Parme, *Questiones circa tractatum proportionum Magistri Thome Braduardini*, édité par Joël Biard et Sabine Rommevaux, Paris Vrin, 2005, « Introduction, p. 47-48.

[85] Voir dans l'article 16, l'annexe p. 469.

naturelle et les mathématiques, à Pavie et Plaisance. Il est en effet probable que Blaise a utilisé le *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine comme manuel pour cet enseignement. Cette seconde version comporte douze questions et diffère de la première version quant au titre de ces questions et à leur contenu. En 2001 Joël Biard et moi-même avons entrepris d'éditer cette seconde version. Cette édition est parue en 2005, chez Vrin, dans la collection « Textes philosophique du Moyen Âge ». Elle a été réalisée à partir des trois manuscrits qui renferment une version complète de ces *Questions* et qui sont explicitement attribués à Blaise : Oxford, Bodleian Library, Canonici, Misc. 177, f^{os} 68vb-97va ; Venise, Marziana, Lat. VIII, 38, f^{os} 8va-37ra ; Cité du Vatican, Biblioteca apostolica Vaticana, Vat., lat. 3012, f^{os} 137ra-163rb. Nous avons aussi utilisé deux manuscrits contenant des versions incomplètes et anonymes : Rome, Angelica 480 (D. 7. 6), f^{os} 79ra-91vb ; Florence, Laurenziana, Pluteo 71, codex 26, f^{os} 29ra-69ra.

Il s'agissait pour moi de mon premier travail d'édition critique d'un texte latin médiéval. Il a fallu que je m'accoutume aux abréviations des copistes et que j'apprenne les règles d'édition. Après la phase de transcription des différents manuscrits qui offrent des textes parfois incompréhensibles (les manuscrits présentent bien souvent des erreurs et des lacunes auxquelles s'ajoutent certains mots ou passages illisibles), l'établissement critique du texte à partir des différentes transcriptions est sans doute le moment le plus intéressant. Il y a le travail sur la langue latine (il s'agit de donner un texte correct) couplé au travail sur le contenu auquel il faut donner un sens. Si nous avons travaillé à partir d'un texte de base, nous n'avons pas hésité à puiser dans les autres témoins afin de produire un texte qui n'est le reflet d'aucun manuscrit, qui est reconstruit, mais qui est cohérent. Le choix de telle ou telle variante donnait souvent lieu à de longues discussions entre nous, très enrichissantes, puisqu'il s'agissait de comprendre les arguments présentés dans le texte dans ses moindres détails. C'est ici que la collaboration entre un historien de la philosophie médiévale et une historienne des mathématiques a porté ses fruits : le texte de Blaise présente en effet des passages très techniques sur la théorie des rapports où mes compétences étaient utiles ; d'autres passages plus philosophiques, notamment logiques, nécessitaient les connaissances de Joël Biard.

J'ai pris beaucoup de plaisir à ce travail d'édition qui va dans le sens de l'attention très grande que je porte aux textes, au contenu mais aussi au vocabulaire utilisé. Ce travail d'édition, Joël Biard et moi l'avons poursuivi sur d'autres textes de Blaise. Et j'ai entrepris, seule, l'édition de l'*Algorismus proportionum* de Nicole Oresme (voir plus loin).

Blaise de Parme mathématicien

Blaise de Parme a enseigné la logique, la philosophie morale, la philosophie naturelle dans les universités de Bologne, de Padoue et de Pavie à la fin du XIV^e^ siècle et au début du XV^e^ (il est mort en 1416). Et c'est dans le cadre de cet enseignement de la philosophie naturelle qu'il a enseigné les mathématiques, ce qui lui valut une grande réputation de mathématicien. Toutefois, parmi ses écrits, seules ses *Questions sur le traité des rapports* présentent une première partie proprement mathématique, puisque consacrée à la théorie des rapports. On peut alors penser que la réputation de mathématicien de Blaise vient aussi de la place qu'il assigne aux mathématiques dans la hiérarchie des sciences. En effet, selon Blaise, si l'on se place du point de vue du « sujet », la première place revient à la théologie qui traite de Dieu ou à l'astrologie qui traite du ciel et des astres. Mais les mathématiques ont la première place si l'on se place du point de vue de la certitude et de la beauté en raison de ses démonstrations belles et certaines[86]. Blaise s'inscrit ici dans un débat sur la certitude qui remonte au XIV^e^ siècle, débat dans lequel les mathématiques et la logique sont mises en balance. Comme chacun le sait, ce débat sur la certitude rejaillit, dans un autre contexte, au XVI^e^ siècle.

[86] Voir Blaise de Parme, *Questiones circa tractatum proportionum…*, « Introduction », p. 12.

La théorie des rapports de Blaise de Parme

Sur les douze questions qui composent la seconde version des *Questions sur le traité des rapports* six sont consacrées à la théorie des rapports[87]. C'est l'occasion pour Blaise de Parme de porter son attention sur les points problématiques de la théorie des rapports mise en place par Thomas Bradwardine et développée par Nicole Oresme. Il propose alors des précisions terminologiques qui permettent de clarifier les points obscurs.

Blaise se demande ainsi ce qu'est le rapport (question 2). Reprenant la définition euclidienne il explique qu'au sens propre il s'agit d'une relation entre deux quantités de même genre. Selon Blaise, le rapport, en tant que relation, n'est alors rien d'autre que les termes qui composent ce rapport ; ainsi le rapport double n'est rien d'autre que 2 et 1. Ce faisant, le rapport double et le rapport sous-double sont la même chose. Toutefois, le mathématicien a besoin de distinguer ces deux rapports, mais aussi de pouvoir travailler sur les rapports comme sur des objets. Blaise introduit alors, dans la question 5, ce qu'il appelle la raison formelle du rapport, à savoir le point de vue conceptuel selon lequel on considère la manière dont les choses sont rapportées les unes aux autres. Ainsi, si le rapport n'a pas un statut d'*ousia*, indépendamment des termes qui le composent, il peut toutefois être étudié pour lui-même, selon sa raison formelle. Et c'est ainsi que le considère le mathématicien[88].

Par ailleurs, l'homogénéité des quantités est importante (question 2). Nous avons déjà évoqué la position de Blaise à propos de l'angle de contingence, selon laquelle l'angle de contingence et l'angle rectiligne n'ont pas entre eux de rapport du fait de leur non-homogénéité. En revanche, c'est l'homogénéité de la ligne finie et de la ligne infinie qui fait dire à Blaise qu'il existe un rapport entre elles, même si ce rapport n'est pas dénommé par un nombre.

Dans les questions 3 et 4 Blaise s'intéresse à la question de l'irrationalité. Il reprend alors la distinction de Thomas Bradwardine entre les rapports

---

[87] On en trouve une présentation, dans Blaise de Parme, *Questiones circa tractatum proportionum…*, « Introduction », p. 19-27.

[88] Je reviens sur ce point dans *Théorie des rapports (XIII^e - XVI^e siècles)…*, p. 36-38.

rationnels qui sont dénommés par un nombre et les rapports irrationnels qui sont médiatement dénommé par un nombre, puisque dénommé par un rapport qui est lui-même dénommé par un nombre. Il démontre alors que le rapport de la diagonale au côté d'un même carré est irrationnel et vaut la moitié du rapport double.

L'introduction de la notion de dénomination d'un rapport l'amène à se poser la question du lien entre la comparaison des rapports et la comparaison de leurs dénominations. C'est alors qu'il examine le fondement de la théorie des rapports des rapports : la notion de partie d'un rapport liée à la composition des rapports (questions 6 et 7). Blaise commence par remarquer les paradoxes auxquels on aboutit en assimilant la composition à une addition, comme le font Thomas Bradwardine et Nicole Oresme. Par exemple, si l'on écrit que le rapport double est composé du rapport quadruple et du rapport sous-double ($(4:2)=(4:1)\bullet(1:2)$), on en déduit que le rapport quadruple est une partie du rapport double, alors qu'il lui était plus grand. Des paradoxes de ce type conduisaient Nicole Oresme à demander que dans la composition des rapports on ne puisse insérer entre les deux termes du rapport initial que des médians qui sont plus grands que le plus petit terme et plus petits que le plus grand ($(a:b)=(a:c)\bullet(c:b)$ avec $a>c>b$). Blaise ne se satisfait pas de cette restriction. Il demande de faire une distinction entre la composition des rapports et leur produit, la première opération étant un cas particulier de la seconde. Ainsi, quelles que soient les quantités a, b, c, on dira que le rapport $(a:b)$ est produit à partir du rapport $(a:c)$ et du rapport $(c:b)$, mais qu'il n'est composé de ces deux rapports que si $a>c>b$, puisqu'un rapport ne peut être composé que de rapports plus petits. Blaise fait alors un parallèle avec les nombres : 100 ne compose pas 2, mais 100 produit 2 si l'on multiplie 100 par la fraction 2/100. De même, le rapport quadruple ne compose pas le rapport double, mais il le produit.

Autre distinction terminologique demandée par Blaise de Parme : faire une distinction entre le double d'un rapport et le rapport doublé (de même entre le triple d'un rapport et le rapport triplé, etc.). Nous avons vu en effet que Nicole

Oresme, à la suite de Thomas Bradwardine, dit que si l'on a trois quantités continûment proportionnelles ($(a:b)=(b:c)$), le rapport $(a:c)$ est le double du rapport $(a:b)$. Blaise de Parme récuse ce vocabulaire et demande que l'on parle ici de rapport doublé pour réserver le terme « double » au rapport $(2a:b)$.

Blaise montre ici une bonne connaissance du *Traité sur les rapports* de Thomas Bradwardine, mais aussi de la théorie des rapports de rapports Nicole Oresme.

Les théories du mouvement de Blaise de Parme

Dans un article à paraître[89] je reviens sur la théorie du mouvement développée par Blaise de Parme que nous avions esquissée dans notre introduction à l'édition des *Questions sur le traité des rapports*. Dans cet article je m'intéresse aussi à la première version de ces questions qui propose une théorie différente que celle que développera Blaise dans la seconde.

Dans cette première version Blaise accepte la règle du mouvement, communément admise à son époque, selon laquelle le rapport entre les rapidités de deux mouvements est égal au rapport entre les rapports des puissances aux résistances. Toutefois, il en propose des aménagements qui tiennent compte d'arguments que l'on peut opposer à cette règle. Le plus important concerne la disposition des agents par rapport aux patients (je parle ici d'agents et de patients, car Blaise n'envisage pas seulement le mouvement local, comme le fait Thomas Bradwardine, mais tous les types de mouvement considérés par Aristote, à savoir, outre le mouvement local, l'altération et l'augmentation). La disposition des agents par rapport aux patients n'intervient pas dans la règle du mouvement. Or Blaise remarque que le feu n'enflamme pas les brindilles s'il en est trop éloigné. Ainsi, à une certaine distance, l'action n'a plus lieu alors que le rapport de la puissance à la résistance est toujours le même. On pourrait même ajouter que le feu brûle plus ou moins selon qu'on se

---

[89] Voir article 16, p. 437.

rapproche ou qu'on s'éloigne de lui. Blaise reformule donc la règle du mouvement en disant que le rapport entre les rapidités est égal au rapport entre les rapports des puissances aux résistances, si les agents sont dans la même disposition vis-à-vis de leurs patients[90].

Dans la seconde version de ces *Questions* Blaise change de position et rejette cette règle du mouvement. Les critiques de Blaise sont de deux ordres : mathématiques et physiques. La critique mathématique repose sur une confusion possible entre « rapport double » et « rapport doublé » que nous avons vue plus haut. Ainsi, Blaise remarque que le double du rapport de dénomination 4+1/2 est le rapport nonuple, de dénomination 9 ; mais selon le doctrine de Thomas Bradwardine le mouvement ayant une rapidité provenant du rapport nonuple est double du mouvement ayant une rapidité provenant du rapport triple. Par conséquent, la règle de Thomas serait fausse. Mais l'argument est bien sûr irrecevable du point de vue de Thomas, car ce dernier ne dirait pas que le rapport nonuple est le double du rapport de dénomination 4+1/2, mais qu'il est le double du rapport triple, si bien qu'il y a bien égalité entre le rapport des rapidités et le rapport des rapports[91]. Si l'on écarte ici l'hypothèse que Blaise serait de mauvaise foi, on doit interpréter cet argument comme une mise en garde contre les incertitudes ou les erreurs que peuvent causer l'utilisation du terme « double ».

Les objections physiques sont plus intéressantes. Blaise considère tout d'abord un processus d'altération dans lequel la rapidité augmente jusqu'à devenir infinie à la fin de l'heure[92]. Il envisage aussi la chute d'un corps dans le vide qui s'effectue à une rapidité infinie, puisque la résistance du milieu est nulle[93]. Dans les deux cas, si l'on accepte la règle de Thomas, il advient que d'un agent fini on obtient un effet infini, ce que refuse Blaise. Il propose alors sa propre solution à la question du mouvement[94].

---

[90] Voir p. 451.
[91] Voir p. 447.
[92] Voir p. 454.
[93] Voir p. 455.
[94] Voir p. 455-465.

Il distingue alors deux types d'actions : les actions dans lesquelles l'agent s'assimile le patient (par exemple le réchauffement d'un corps froid par un corps chaud), et les actions dans lesquelles l'agent ne s'assimile pas le patient (par exemple, la vision d'un objet). Il distingue aussi deux sens du mot « *velocitas* » : dans un premier sens, il s'agit du temps mesurant l'action ; dans un second sens, il s'agit de l'effet produit par l'agent sur le patient. Blaise met ici en évidence les deux composantes de la vitesse : le temps et l'effet produit, mais au lieu de les considérer ensemble il les envisage séparément.

Si l'on considère, premièrement, les actions dans lesquelles l'agent s'assimile le patient, il faut considérer pour les rapidités les effets produits. Alors le rapport entre les rapidités suit, selon les cas, du rapport des causes, c'est-à-dire du rapport entre les puissances des agents, ou du rapport entre les dispositions des patients à recevoir l'action[95].

Maintenant, quelle que soit l'action, si l'on considère pour la rapidité le temps mis pour l'action, le rapport entre ces temps est, selon la terminologie de Blaise, le rapport entre les dénominations des rapports entre les puissances et les résistances, ce qui revient à dire que le temps suit directement le rapport de la puissance à la résistance[96].

Blaise s'intéresse par ailleurs au mouvement dans le vide[97]. Du fait que pour Blaise tout agent est limité dans son action, la rapidité d'un corps dans le vide est nécessairement finie. En conséquence, cette rapidité ne peut pas dépendre du rapport de la puissance du corps à la résistance du milieu qui est nulle. En outre, Blaise remarque que des corps différents tombent à des rapidités différentes dans le vide. Il en déduit que la rapidité dépend de la puissance du corps, c'est-à-dire sa pesanteur, ou, dit autrement, le rapport des rapidités suit du rapport des puissances. Il étend cette règle au milieu plein en expliquant qu'il faut alors entendre par « puissance » la puissance qu'aurait le mobile dans le vide diminuée de la résistance du milieu[98]. Je notais en conclusion[99] combien

---

[95] Voir p. 458-459.

[96] Voir p. 460-461.

[97] Voir p. 463-464.

[98] Voir p. 464-465.

est intéressant le rôle fondateur que joue ici le mouvement dans le vide, puisque c'est à partir du mouvement dans le vide qu'est énoncée la règle du mouvement dans un milieu plein.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur ces *Questions* de Blaise, notamment en ce qui concerne sa conception de la puissance et de la résistance[100] ; il serait alors nécessaire de regarder ses *Questions sur la physique*. Il serait aussi intéressant d'étudier en détail les exemples qu'il emprunte à la statique qui lui permettent d'envisager des processus dans lesquels les corps égaux produisent un mouvement.

L'INCOMMENSURABILITE DE LA DIAGONALE ET DU COTE D'UN CARRE

L'une des questions que se pose Blaise de Parme dans ses *Questions sur le traité des rapports* est celle de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un même carré.

L'étude que j'ai faite de cette question a fait l'objet de deux articles. Le premier est centré sur Blaise de Parme. Il est paru en 2003 dans la *Revue d'histoire des sciences*[101]. Dans le second je reprends la question à partir de trois textes : les *Questions sur la géométrie d'Euclide* de Nicole Oresme, une question anonyme uniquement consacrée à la question de la diagonale et du côté, et la question de Blaise. Cet article est à paraître dans le prochain numéro de la revue *Annals of science*[102]. J'ai rédigé ce second article en pensant aux historiens des sciences non médiévistes : mon souhait était montrer comment se présente une *Question* mathématique aux XIV[e] et XV[e] siècles.

En effet, les trois textes étudiés sont mis sous la forme discursive de la *Question*. Cette forme, typiquement médiévale, est utilisée en théologie dès le

---

[99] Voir p. 466-467.

[100] Voir Blaise de Parme, *Questiones circa tractatum proportionum…*, « Introduction », p. 34.

[101] Voir l'article 10, p. 287.

[102] Voir l'article 14, p. 389.

XII^e^ siècle. Elle trouve son origine dans la dispute universitaire avant de devenir un genre discursif autonome qui permet d'exposer toutes les facettes d'un problème[103]. Suivant cette structure très codifiée l'auteur commence, dans une première partie, à aligner les arguments pour et contre (*quod sic*, *quod non*) la question posée ; il s'agit souvent d'arguments d'autorité ou de thèses défendues par d'autres maîtres. Puis, dans une seconde partie, l'auteur présente sa solution ou détermination en tranchant dans un sens ou dans un autre. Cette partie se termine par la réfutation des arguments qui sont opposés à la solution proposée par l'auteur et qui ont été exposés dans la première partie.

Appliquer cette structure aux mathématiques a ceci de paradoxal que cela conduit à la production d'arguments contraires, c'est-à-dire parfois de démonstrations fausses. Un mathématicien d'aujourd'hui a d'abord un mouvement de surprise, voire de rejet face à ces *Questions* mathématiques. Je me souviens ainsi de la réaction d'une collègue, historienne des mathématiques, alors que Joël Biard et moi-même présentions pour la première fois la question de Blaise sur l'incommensurabilité de la diagonale et du côté lors de journées d'études à Lille : elle ne comprenait pas que l'on puisse s'intéresser à ces textes qui présentaient des preuves erronées et qui, selon elle, ne relevaient pas des mathématiques, du fait que l'auteur présentait parfois des arguments physiques, philosophiques ou logiques pour la résolution d'un problème mathématique. Je pense au contraire qu'il est particulièrement intéressant d'étudier ce type de textes qui remettent en cause ce que l'on croit savoir des mathématiques, nous obligeant à nous interroger sur ce que les médiévaux entendaient par mathématiques. Comme nous l'avons rappelé, Blaise est considéré, par ses élèves et par ses contemporains, comme un grand mathématicien, alors qu'il n'a écrit aucun ouvrage mathématique sur le modèle que l'on connaît habituellement et qui est celui des *Eléments* d'Euclide. Or ce modèle était adopté par les médiévaux : que l'on songe par exemple à l'*Arithmétique* de Jordanus, mais aussi, dans une forme plus relâchée, au traité *Sur les rapports de rapports* de Nicole Oresme, et on pourrait multiplier les

---

[103] Voir l'article 14, p. 392-394.

exemples. Blaise, quant à lui, traite des mathématiques dans le cadre d'un commentaire au *Traité sur le rapport* de Thomas Bradwardine dans lequel il est question de mouvement. Il utilise la forme discursive de la *Question*, mêlant, comme nous allons le voir, différents points de vue, celui du mathématicien étant l'un de ces points de vue parmi d'autres. Se pose alors la question de l'autonomie des mathématiques par rapport aux autres disciplines, de même que la question de la légitimité d'un point de vue mathématique. Nous y reviendrons à propos d'une autre question de Blaise, celle du contact entre un plan et une sphère. Nous verrons alors comment se nouent des liens particuliers entre mathématiques et philosophie naturelle.

Voyons pour l'instant quel rôle peuvent jouer ces arguments contraires, voire ces démonstrations fausses qui sont exposés en première partie de la *Question*. Dans la question de Blaise sur l'incommensurabilité de la diagonale et du côté ces arguments ont plusieurs fonctions. Premièrement, ils permettent de délimiter le cadre épistémologique dans lequel on se place[104]. Ainsi, à propos de la question qui nous occupe Blaise rappelle que si l'on se place du point du vue du philosophe, il n'y a pas de distinction réelle entre la ligne et la surface, ce qui conduit à ce que la diagonale et le côté soient égaux, puisque ce ne sont rien d'autres que le carré lui-même[105]. Blaise précise ensuite que le point de vue du mathématicien est autre, et que selon ce point de vue, la diagonale diffère du côté. Ainsi, à propos d'une question donnée, plusieurs points de vue peuvent coexister, apportant des réponses différentes. Il est donc nécessaire de préciser le point de vue adopté. Il convient aussi, dans un second temps, de délimiter le cadre du problème. Ainsi, si l'on considère un carré, celui-ci peut être géométrique ou arithmétique. Dans le premier cas, la diagonale est incommensurable au côté ; dans le second cas, la diagonale est égale au côté. Enfin, les arguments contraires permettent de mettre en garde les étudiants contre des raisonnements faux : ils ont alors une visée pédagogique

---

[104] Joël Biard l'a bien montré à propos de Blaise de Parme dans « Mathématiques et philosophie dans les *Questions* de Blaise de Parme sur le *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine », *Revue d'histoire des sciences*, 56 - 2 (2003), 383-400.
[105] Voir p. 414.

(on n'oublie pas ici que les *Questions sur le rapport* sont sans doute issues de l'enseignement de Blaise, même si elles n'en sont peut-être pas la transcription exacte). Ainsi, Blaise, à la suite de Nicole Oresme, propose une série d'arguments dans lesquels la proportionnalité des éléments d'une figure géométrique est utilisée de manière erronée[106]. On trouve aussi un argument sur le mouvement d'une barre qui descend parallèlement à l'un des côtés du carré, parcourant dans un même temps le côté adjacent et la diagonale. Cet argument permet à Nicole Oresme, puis à Blaise de Parme, de préciser que le mouvement selon la diagonale se décompose en un mouvement horizontal et vertical[107].

Après ces premiers arguments vient la résolution de l'auteur dans laquelle sont présentées différentes preuves de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté. Ici l'exposé est plus proche de ce que l'on reconnaît habituellement être des mathématiques. Des principes et des définitions sont posés, desquels découlent des conclusions, souvent accompagnées de preuves qui, cette fois, sont bien mathématiques, même si les médiévaux ont un style d'exposé qui s'apparente plus à la logique qu'au modèle des *Eléments* (ils présentent ainsi la conclusion comme une conséquence, ayant un antécédent : il s'agit alors de prouver l'antécédent, puis l'inférence).

L'étude de ces différentes preuves de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté est intéressante car elle donne l'occasion d'examiner la conception qu'avaient ces auteurs de l'irrationalité[108]. Nous avons déjà vu comment Campanus glisse vers un parallélisme strict entre commensurabilité et rationalité. Ce parallélisme est complètement assumé par Thomas Bradwardine, Nicole Oresme et finalement Blaise de Parme : sont rationnelles les droites qui sont commensurables en longueur à la droite de référence, et irrationnelles les autres. Par ailleurs, est rationnel le rapport entre des droites commensurables, et est irrationnel le rapport entre des droites incommensurables. Thomas Bradwardine propose alors de caractériser ces rapports par

---

[106] Voir p. 292-293.
[107] Voir p. 401-402.
[108] Voir p. 300-305.

leurs dénominations : les rapports rationnels sont dénommés par des nombres, mais pas les rapports irrationnels. Le rapport de la diagonale au côté fournit un exemple de ces derniers rapports. Il est irrationnel et vaut la moitié du rapport double[109].

Je signale au passage que l'examen du traitement de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté chez Nicole Oresme, dans la question anonyme, et chez Blaise de Parme, m'a permis de montrer que la question anonyme était une réorganisation des questions de Nicole[110]. Par ailleurs, on retrouve dans les questions de Blaise de nombreux arguments déjà présents dans les questions de Nicole. Ces trois textes appartiennent à une même tradition commençant sans doute avec Nicole Oresme. Et l'intérêt de Nicole pour cette question provient de sa lecture du commentaire de Campanus au livre X des *Eléments*, puisqu'on y trouve la démonstration par le pair et l'impair de l'irrationalité du rapport entre la diagonale et le côté.

LA QUESTION DU CONTACT DE LA SPHERE ET DU PLAN DE BLAISE DE PARME

J'ai exposé la question de Blaise de Parme sur le contact entre la sphère et le plan à l'occasion d'un colloque en l'honneur de Gérard Simon que j'ai organisé, en collaboration avec Bernard Joly, en octobre 2005. Les actes de ce colloque feront l'objet d'un numéro de la *Revue d'histoire des sciences*, à paraître en 2007. Ce colloque rassemblait des historiens des sciences, spécialistes d'époques différentes. Dans mon exposé[111] j'ai souhaité montrer à des non-médiévistes un exemple d'une forme nouvelle de rationalité qui se met en place au XIV^e^ siècle et qui existe encore au XV^e^ siècle. À cette époque sont pensés à nouveaux frais les objets et les problèmes de la philosophie naturelle, ainsi que les rapports entre philosophie naturelle et mathématiques.

---

[109] Je ne rentre pas ici dans le détail fastidieux de ces différentes preuves. Voir l'article 10, p. 294-298 et l'article 14, à partir de la page 396.
[110] Voir p. 406-412.
[111] Voir l'article 17, p. 475.

La question sur le contact de la sphère et du plan de Blaise de Parme se trouve initialement dans un commentaire au traité *De l'âme* d'Aristote, mais elle est isolée dans l'un des manuscrits que nous possédons. Ce texte est à ce jour inédit, mais Joël Biard et moi-même en préparons l'édition, avec une traduction française et un commentaire.

Le texte se présente sous la forme *Question* que j'ai décrite plus haut. Dans mon article j'ai présenté de manière un peu linéaire le texte de Blaise, afin de montrer comment est présenté un problème de philosophie naturelle dans une telle structure mettant en scène les arguments pour et contre.

Il faut bien parler ici d'un problème de philosophie naturelle. En effet, Blaise commence par poser la question du contact de la sphère et du plan dans ce cadre, avant d'en venir à la question mathématique, alors même que le titre de la question ferait plutôt penser que l'on se trouve face à un problème de géométrie : « On demande si une sphère posée sur un plan le touche seulement en un point ». Mais il est vrai que Blaise parle ici de corps sphérique (*spericum*).

Blaise commence donc par expliquer qu'un corps plan et un corps sphérique n'existent pas, en montrant à quels paradoxes on arriverait si on supposait l'existence d'un tels corps dans la nature[112]. De même, le point n'a pas d'existence réelle. Ce faisant, en adoptant les règles de la logique de Blaise selon lesquelles une proposition négative est nécessairement vraie lorsque son sujet ne se réfère à rien, la réponse à la question est immédiate : la sphère et le plan ne se touchent pas, puisque ni la sphère, ni le plan n'existent. Pour les mêmes raisons on peut aussi affirmer que la sphère et le plan ne sont pas éloignés l'un de l'autre[113]. Mais cette réponse ne satisfait pas entièrement Blaise, car elle ruinerait les mathématiques. Les propositions mathématiques en effet seraient toutes fausses, puisque les termes qui entrent en jeux dans ces propositions, comme le triangle, le rapport, etc., ne se réfèrent à rien de réel[114].

---

[112] Voir p. 483-485.
[113] Voir p. 487.
[114] Voir la citation de Blaise, p. 488.

Blaise accorde alors aux mathématiciens le droit de considérer les choses sur lesquelles portent les propositions comme si elles existaient. Les propositions qu'ils énoncent sont donc « conditionnelles » : elles sont vraies sous condition que l'on fasse comme si les objets sur lesquels elles portent existent.

Blaise reformule alors la question du contact entre la sphère et le plan en faisant comme si ces objets existaient. Mais au lieu de traiter la question mathématiquement, comme on pourrait alors s'y attendre, il la traite physiquement. Il suppose donc qu'une sphère peut être posée sur un plan, mais n'admet toujours pas l'existence du point. Il suppose par ailleurs que le contact est nécessairement étendu. Il en conclut que s'il y a contact entre la sphère et le plan, c'est que la sphère est aplatie pour épouser le plan, ou que le plan est déformé pour épouser la sphère. Et c'est ce modèle physique que Blaise va exporter vers les mathématiques, en expliquant que pour la sphère mathématique et le plan mathématique le contact là aussi ne se produit que si la sphère et le plan sont déformés[115]. Il ajoute toutefois que le plan et la sphère sont tangents en un point, faisant la différence entre « se toucher » et « être tangents ».

Je remarque en conclusion de cette étude que Blaise ne fait pas de hiérarchie entre les différentes solutions qu'il propose. Les approches logiques, physiques ou mathématiques sont aussi pertinentes à ses yeux. Je souligne par ailleurs que, pour ce problème, ce ne sont pas les mathématiques qui servent de modèle, mais c'est la philosophie naturelle qui impose sa solution au problème mathématique. Et on peut trouver d'autres exemples de telles relations entre mathématiques et philosophie naturelle au Moyen Âge. Je note enfin que l'on a ici l'exemple d'un problème portant sur des objets idéaux, la sphère et le plan, problème que Blaise traite physiquement. J'y vois les conditions d'accès à une nouvelle physique.

Je projette d'étudier les *Questions sur la Physique* de Blaise de Parme (ou pour le moins une partie de ces questions qui forment un ensemble très vaste, à

---

[115] Voir p. 89-91.

ce jour inédit). Elles devraient fournir d'autres exemples de la forme de rationalité présentée ici.

LE *DE CONTINUO* DE THOMAS BRADWARDINE

Dans le cadre d'un ouvrage collectif dirigé par Joël Biard et Jean Celeyrette et intitulé « De la théologie aux mathématiques : l'infini au XIVe siècle » (Paris, Les Belles Lettres, 2005) j'ai proposé une traduction d'extraits du *De continuo* de Thomas Bradwardine accompagnée d'une courte présentation[116].

La question du continu, c'est-à-dire de sa composition ou non à partir d'indivisibles, a été posée au Moyen Âge à propos de la question du mouvement des anges. C'est ainsi que dans le cadre de commentaires des *Sentences*, manuel de théologie que tout futur théologien se devait de commenter, Jean Dun Scot (1265-1308) se demande si un ange peut se mouvoir d'un lieu à un autre par un mouvement continu. L'ange pose des problèmes spécifiques du fait de son immatérialité, donc de son indivisibilité. Son mouvement pose la question du mouvement d'un indivisible. C'est donc à propos de cette question que Duns Scot établit l'incompatibilité entre une théorie indivisibiliste (ou si l'on préfère atomiste) du continu et la géométrie euclidienne, en produisant un certain nombre de paradoxes comme le fait que les cercles auraient tous le même nombre de points. À sa suite, on trouvera dans de nombreux commentaires des *Sentences* des considérations physiques et mathématiques sur le continu. Mais c'est à Thomas Bradwardine que l'on doit le premier ouvrage uniquement consacré à la question du continu. Cet ouvrage a pour titre *De continuo*, et il a été rédigé entre 1328 et 1335.

Dans cet ouvrage Thomas Bradwardine traite la question du continu pour elle-même, indépendamment des considérations théologiques ou physiques auxquels elle était traditionnellement rattachée. Et ce traitement du continu se

---

[116] Voir texte 12, p. 325.

fait dans un cadre essentiellement géométrique, dans un style d'exposition qui évoque les mathématiques (principes, théorèmes).

Thomas reprend alors les termes d'un débat qui opposa les partisans et les adversaires d'une conception indivisibiliste du continu dans le milieu des théologiens anglais, en particulier à Oxford, dans le premier quart du XIVe siècle. Plusieurs thèses s'opposaient que Thomas rappelle brièvement dans une des conclusions de son traité[117]. Ces thèses sont rapportées par Thomas à tel ou tel maître, ou à tel ou tel texte plus ancien. Elles esquissent un tableau systématique de toutes les positions possibles sur la question de la composition du continu.

Première thèse : Le continu est composé de parties indéfiniment divisibles.

Deuxième thèse : Le continu est composé d'indivisibles qui, soit ont une étendue, c'est-à-dire sont des corps, soit n'ont pas d'étendue, sur le modèle mathématique du point et de la ligne. Dans cette dernière hypothèse, qui est celle des indivisibilistes médiévaux, deux cas peuvent alors être envisagés : soit le continu est composé d'indivisibles en nombre fini ; soit le continu est composé d'une infinité d'indivisibles. Et dans ce dernier cas deux opinions s'opposent quant à la nature de cette composition : soit les indivisibles sont immédiatement conjoints (les indivisibles sont consécutifs et par conséquent il existe un et un seul indivisible qui est le plus proche d'un indivisible donné, et cela dans toutes les directions) ; soit les indivisibles ont entre eux des intermédiaires, c'est-à-dire qu'entre deux indivisibles d'un continu se trouve toujours un indivisible (alors il n'existe pas d'indivisible qui soit le plus proche d'un indivisible donné).

On peut résumer ces thèses dans le schéma suivant :

Continu

[117] Voir la conclusion 31, p. 335-337.

Parties indéfiniment divisibles (Aristote, Averroès et Algazel, Thomas Bradwardine)

Indivisibles

non étendus (point, ligne)

étendus (corps) (Démocrite)

en nombre fini (Gauthier Chatton)

en nombre infini

sans intermédiaires (Henri de Harclay)

avec des intermédiaires (Robert Grosseteste)

Thomas Bradwardine défend la première thèse et réfute longuement les différentes thèses qui posent que le continu est composé d'indivisibles sans étendue. Il fournit alors un ensemble d'arguments qui seront repris dans les discussions ultérieures.

L'ouvrage commence par un long préambule composé de définitions, de suppositions et de conclusions qui forment en quelque sorte le cadre dans lequel se place la discussion. Y sont évoquées certaines propriétés du continu ou des indivisibles. Ainsi, la conclusion 1 pose qu'aucun indivisible n'est plus grand qu'un autre. La conclusion 2 demande que deux continus de même espèce ayant des indivisibles en nombres égaux sont égaux entre eux. Et la conclusion 3 stipule que, dans un continu, plusieurs indivisibles ne sont pas situés dans un même lieu qui est lui-même indivisible etc. On y trouve aussi des énoncés des *Éléments* d'Euclide. Par exemple, deux droites sécantes n'ont qu'un seul point d'intersection (conclusion 14). Certaines conclusions concernent le mouvement ou la question du premier et du dernier instant de ce qui est permanent ou en mouvement. D'autres conclusions, enfin, posent l'infinie divisibilité de différents types de continu en continus de même espèce, par exemple, de la ligne en une infinité de lignes (conclusion 66), ou de l'angle rectiligne en une infinité d'angles rectilignes (conclusion 67).

Viennent alors les réfutations des différentes positions indivisibilistes qui se présentent sous la forme de conclusions dont les énoncés commencent par la formule « S'il en est ainsi », c'est-à-dire, si le continu est formé d'indivisibles sans intermédiaires entre eux, ou si le continu est formé d'un nombre fini d'indivisibles, etc, selon le cas. Thomas Bradwardine montre alors que ces hypothèses indivisibilistes conduisent à des contradictions par rapport aux conclusions qu'il vient de démontrer et qui forment le cadre de sa théorie, ou qu'elles sont en contradiction avec d'autres conclusions que l'on peut déduire de la même hypothèse indivisibiliste, ou encore qu'elles sont incompatibles avec les conclusions communément admises en géométrie, en arithmétique, en musique, en théorie du mouvement, en médecine, etc, soit en toute science que Thomas appelle « vraie », c'est-à-dire en toute science qui ne suppose pas que le continu soit composé d'indivisibles (voir la supposition 4).

Il est à noter que, dans ces réfutations, un principe joue un rôle fondamental. Il s'agit de la supposition 3 selon laquelle « Là où il n'y a aucune cause de diversité ou de dissemblance la chose doit être jugée comme semblable ». Thomas utilise cette supposition pour s'assurer que tous les continus sont de même nature, c'est-à-dire que si on suppose, par exemple, que le temps, qui est un continu, est composé d'atomes en nombres finis, il faut alors supposer que tous les continus sont ainsi, par exemple les rapidités, les lignes etc. Ainsi, on peut traiter sur le modèle du continu géométrique tous les continus physiques. Mais réciproquement, un résultat obtenu sur un continu physique est aussi vrai pour le continu mathématique. Il faut souligner que cette position n'est pas unanime. Ainsi, Gautier Chatton, qui soutenait l'hypothèse indivisibiliste finitiste, niait que le continu mathématique soit de même nature que le continu physique et par conséquent rejetait le modèle géométrique qui pour lui n'était pas adéquat au problème physique.

J'ai le projet de donner une traduction de l'ensemble du *De continuo* de Thomas Bradwardine. Mais j'attends que John Murdoch ait révisé et publié son édition que l'on ne peut trouver, pour l'instant, que dans sa thèse[118].

Le traité de Thomas, complexe et riche, pose la question difficile des relations entre mathématiques et philosophie naturelle, question que nous avons déjà abordée à propos de Blaise de Parme[119]. Cette question a fait l'objet d'un groupe de recherche que j'anime depuis 2003.

PROJET DE RECHERCHE SUR LES « FORMES D'ARTICULATION ENTRE MATHEMATIQUES ET PHILOSOPHIE NATURELLE (XIV^{e} – XVI^{e} SIECLES) »

Dans ce programme de recherche j'ai proposé d'étudier les relations qui ont pu exister, au Moyen Âge et à la Renaissance (plus précisément du début du XIV^{e} siècle à la fin du XVI^{e} siècle), entre certains domaines des mathématiques, notamment la théorie des proportions, et certains aspects de la connaissance de la nature comme les théories du continu et de l'infini, et les théories du mouvement, mais aussi la science des poids et des machines simples.

Il est à noter que durant la période étudiée les savoirs se développent dans un cadre où il n'y a pas toujours de séparation franche entre les disciplines. Ainsi, les mathématiques ne sont pas étudiées et élaborées seulement dans des textes consacrés à l'arithmétique ou à la géométrie, mais aussi dans de nombreux autres textes concernant divers domaines : les sciences dites « intermédiaires », telles que l'optique ou la mécanique, l'astronomie et la musique, les commentaires de la *Physique* d'Aristote ou même les traités théologiques. Par ailleurs, sur un plan institutionnel, il faut noter qu'à la fin du

---

[118] John E. Murdoch, *Geometry and the Continum in the Fourteenth Century : a Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's* Tractatus De continuo, Ph. D, University of Wisconsin, 1957.

[119] Voir Edith D. Sylla, « Thomas Bradwardine's *De continuo* and the Structure of fourteenth-century Learning », *in* Edith D. Sylla and Michael Mc Vaugh (eds.), *Texts and Contexts in ancient and medieval Science. Studies on the occasion of John E. Murdoch's seventieth Birthday*, Leiden - New York - Köln, Brill, 1997, p. 148-186.

Moyen Âge les mathématiques sont enseignées en Italie par des maîtres qui professent en même temps la philosophie naturelle, la médecine, voire l'astrologie. Par ailleurs, depuis le XIII^e siècle, la philosophie naturelle, qui a pour base principale les textes d'Aristote traduits en même temps que leurs commentaires arabes, couvre un vaste champ allant de la théorie des principes du mouvement à l'étude du ciel et du monde, en passant par les éléments matériels, la génération et la corruption, et même l'âme en tant que principe d'animation.

Le projet a donc pour objectif de montrer, en restituant ces formes de savoir physiques et mathématiques dans leur contexte à la fois théorique, disciplinaire et institutionnel, comment les savoirs s'organisent entre eux selon des relations qui varient historiquement et répondent à des problématiques déterminées, et comment certains domaines, philosophiques ou théologiques, viennent stimuler les innovations scientifiques. Il s'articule autour de trois axes : le calcul du mouvement, la mécanique et la question du continu.

Je n'évoquerai ici que la question du calcul du mouvement qui a donné lieu à un ouvrage collectif[120].

Les théories du mouvement au Moyen Âge ont fait l'objet de plusieurs études marquantes dans les années 1950-1960, en particulier de Anneliese Maier, George Molland, William A. Wallace, mais aussi de Marshall Clagett qui après *Giovanni Marliani and Late Medieval Physics* (1941) publie *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (1959) dans lequel il donne des extraits des principales théories du mouvement sous leurs aspects « dynamique » et « cinématique », à partir de Gérard de Bruxelles (XIII^e siècle) jusqu'à certains textes de la Renaissance. Néanmoins, j'ai déjà souligné qu'il faut utiliser les travaux de Marshall Clagett avec prudence en raison de ses interprétations anachroniques. À ces travaux s'ajoutent ceux de John Murdoch et Edith Sylla. Mais durant les vingt dernières années fort peu d'études nouvelles ont été réalisés sur la question du mouvement et son articulation avec la théorie des proportions.

---

[120] Voir la description de ce volume, dans le texte 15, p. 423.

Nous nous sommes donc proposé de reprendre la lecture des temps forts de cette histoire de la question du mouvement, à partir de l'« École d'Oxford ». On désigne par là un ensemble de maîtres qui, dans le deuxième quart du XIVe siècle, renouvellent profondément l'étude des processus physiques par la mise en œuvre de nouveaux instruments logiques et mathématiques (les principaux auteurs sont Thomas Bradwardine, Guillaume Heytesbury, Richard Swineshead, ou Richard Kilvington). Ces maîtres allient ainsi la théorie des proportions à des instruments logiques sophistiqués pour l'étude du mouvement, en particulier. Mais ils s'intéressent aussi à la question du début ou de la fin d'un processus, aux problèmes de minimum et de maximum, d'intensification ou de diminution des qualités, ou encore à la conceptualisation de l'infini. Ces textes qu'ils produisent rencontrent un écho considérable, étant résumés à l'usage des étudiants, repris à Paris, soit dans des traités spécifiques, soit dans des commentaires sur la *Physique* d'Aristote, puis diffusés en Allemagne ou en Italie, comme nous l'avons vu pour le *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine.

Notre étude a porté sur les maîtres oxfordiens : Richard Kilvington, à propos duquel la question de la paternité de la loi du mouvement se pose[121], comme nous l'avons vu plus haut, et Richard Swineshead, qui a mis en place une méthode mathématique très sophistiquée pour le calcul du mouvement dont une analyse manquait jusqu'à présent[122]. Ce fut l'occasion, pour Edith Sylla, de montrer ce qu'Alvarus Thomas (Portugal, XVIe siècle) doit aux travaux de Richard Swineshead, mais aussi de Thomas Bradwardine et Nicole Oresme. Nous avons par ailleurs étudié l'influence suscitée par les discussions des maîtres anglais dans les universités du nord de l'Italie, du milieu du XIVe siècle au XVe siècle. La règle du mouvement fut ainsi examinée par Angelo de

[121] Etude de Elżbieta Jung et Robert Podkoński : « Richard Kilvington on Proportions ».

[122] Etudes d'Edmond Mazet : « Quelques aspects des méthodes mathématiques de Richard Swineshead dans les Traités des *Calculationes* sur le mouvement local », et d'Edyth Sylla : « *Calculationes de motu locali* in Richard Swineshead and Alvarus Thomas ».

Fossombruno et Messino da Codronchi, dans le dernier quart du XIVe siècle[123]. J'ai déjà évoqué mon étude du mouvement chez Blaise de Parme. À la suite de Blaise, on trouve en Italie, jusqu'à la fin du XVIe siècle, une série de textes dans lesquels la théorie du mouvement est débattue, par exemple dans des textes de Giovanni Marliani ou d'Alessandro Achillini[124]. Enfin, avec Thomas Harriot, on suit le devenir des théories du mouvement, en Angleterre, au tournant des XVIe et XVIIe siècles[125].

Ces études ont été l'occasion de montrer que l'influence de Nicole Oresme dans ces débats sur la question du mouvement était sans doute moins visible que celle de Thomas Bradwardine ou de Richard Swineshead, mais était bien réelle.

À côté de ces acquis sur la transmission des textes, sur la mise en place de traditions, sur les débats suscités, mais aussi sur le contenu théorique de ces différents textes, nous avons posé la question, qui était au cœur de notre projet, du rapport qu'entretiennent ces différents auteurs avec les mathématiques à propos de la question du mouvement. La conclusion à laquelle nous sommes parvenue est que la situation est complexe. Aristote ouvrait déjà la voie d'un traitement mathématique de la question du calcul de la rapidité, en expliquant, par exemple, que si un moteur meut un mobile sur une certaine distance donnée en un temps donné, le même moteur meut un mobile de résistance deux fois moindre sur une distance double dans le même temps. Les commentateurs tentèrent alors de donner une formulation mathématique satisfaisante de la rapidité en fonction de la puissance et de la résistance. Ainsi, comme nous l'avons vu, Thomas Bradwardine, et plus généralement les calculateurs d'Oxford, ont expliqué que le rapport entre les rapidités de deux mouvements était égal au rapport entre les rapports des puissances aux résistances. Cette

---

[123] Etude de Jean Celeyrette : « Le mouvement selon la cause chez Messino da Codronchi et Angelo di Fossombruno ».

[124] Etude de Joël Biard : « La *Question sur le rapport entre les mouvements* d'Alexandre Achillini ».

[125] Etude de Pascal Brioist et Jean-Jacques Brioist : « Harriot, lecteur d'Alvarus Thomas et de Niccolo Tartaglia ».

formulation en termes de rapports de rapports poursuit deux buts : tenter de sauver le texte d'Aristote en donnant un énoncé qui se rapproche de celui du philosophe grec, et éviter les paradoxes soulevés par les commentateurs. Il faut rappeler qu'aucun des auteurs de cette époque ne cherche à justifier la règle du mouvement à l'aide d'expérimentations (dans notre étude on ne voit apparaître des dispositifs expérimentaux qu'avec Thomas Harriot). Aux XIVe et XVe siècles la confrontation avec la nature reste théorique et les quelques références à une situation physique font souvent appel à des expériences de pensée ou à des constatations empiriques, souvent transmises de textes en textes.

Face à cette introduction des mathématiques dans l'étude du mouvement les réactions sont diverses. Prenons l'exemple de Guillaume Heytesbury et de Richard Swineshead. Au sujet du mouvement le premier s'attache avant tout à des problèmes de logique, comme les emplois corrects et incorrects des verbes *incipere* et *desinere*. Il rencontre à cette occasion des problèmes mathématiques parfois difficiles et il ne se trompe pas dans leur résolution, mais ces problèmes ne forment pas son centre d'intérêt principal. Pour Guillaume Heytesbury, comme pour de nombreux médiévaux, l'outil principal pour l'étude de la philosophie naturelle reste la logique. Richard Swineshead est quant à lui un mathématicien et c'est en mathématicien qu'il explore les conséquences mathématiques de la règle du mouvement et perd de vue le contexte physique de la question. Nicole Oresme développe lui aussi des outils mathématiques puissants pour comprendre la règle du mouvement. De même que Richard Swineshead, il tire des conséquences mathématiques de cette règle. Mais il en tire aussi une application physique en montrant comment les résultats mathématiques auxquels il est parvenu lui permettent de saper les fondements de l'astrologie, comme nous l'avons vu plus haut. Par ailleurs, nous avons vu combien, pour Blaise Parme, les domaines de la nature et des mathématiques sont encore distincts. Toutefois, l'un peut être un modèle pour l'autre, mais pas nécessairement dans le sens que l'on attendrait. Si, à la suite d'Aristote et de Thomas Bradwardine, Blaise utilise les outils mathématiques pour l'étude du mouvement, il inverse la problématique dans son étude du contact entre la sphère et le plan. Ainsi, aux XIV^e et XV^e siècles se nouent des relations complexes entre mathématiques et philosophie naturelle, avec un arrière plan épistémologique qui n'est pas clairement défini, dans une époque en plein questionnement.

THEORIE DES RAPPORTS (XIII^e - XVI^e SIECLES) : RECEPTION, ASSIMILATION, INNOVATION

À l'occasion de la préparation de cette Habilitation à diriger des recherches j'ai rédigé un ouvrage dans lequel je reviens sur la théorie des rapports (XIII^e - XVI^e siècles) qui a été l'objet principal de mes travaux durant ces dernières années. Je souhaitais approfondir l'étude de certaines notions fondamentales qui sont au cœur de cette théorie. Le but de cet ouvrage est de montrer comment durant cette période se constitue une nouvelle théorie qui a pour objet premier le rapport. Cette théorie s'ancre à la fois dans la tradition des livres V et VII des *Eléments* d'Euclide, mais aussi dans la tradition de l'*Arithmétique* de Nicomaque transmise au monde latin par Boèce. Si ces ancrages sont réels et profonds, il n'en reste pas moins que cette théorie des rapports, mise en place au XIV^e siècle par Thomas Bradwardine dans la lignée de Campanus et de Jordanus, est nouvelle en ce qu'elle présente des glissements conceptuels (notamment à propos de l'irrationalité), mais aussi de nouveaux concepts (comme la notion de dénomination d'un rapport). Cette théorie est aussi innovante, lorsqu'elle permet de parler de rapports de rapports.

Mon point de départ est donc la théorie des rapports présentée par Thomas Bradwardine une première fois dans sa *Géométrie spéculative*, puis reprise dans son *Traité des rapports*. C'est à l'occasion de son étude du mouvement que Thomas ressent le besoin de revenir sur cette notion « difficile » qu'est le rapport, qui « n'a été complètement traitée dans aucune branche de la philosophie[126] ». Il propose alors un exposé sur les rapports, mais aussi sur les proportionnalités arithmétiques, géométriques et harmoniques, qui servira de référence jusqu'au XVIe siècle au moins. J'ai donc étudié les notions fondamentales que Thomas met en place pour sa théorie des rapports, d'une part en cherchant à en déterminer les origines, d'autre part en montrant comment ces notions sont reprises, modifiées ou critiquées par d'autres auteurs. Il m'a fallu alors revenir à la théorie des rapports dans les livres V et VII de la version de Campanus, mais aussi à la théorie de l'irrationalité du livre X dans cette même version. J'ai dû aussi me pencher sur l'*Arithmétique* de Jordanus et sur deux petits traités sur les rapports attribués à Campanus et Jordanus, dans lesquels est introduite la notion fondamentale de dénomination. J'ai aussi repris mon étude de la théorie des rapports de rapports proposée par Nicole Oresme dans son traité éponyme. Comme nous l'avons vu, cette théorie prolonge l'exposé de Thomas en donnant notamment une assise théorique complète à la règle du mouvement proposée par le maître anglais. J'ai fait une large part aux *Questions sur le traité des rapports* de Blaise de Parme qui propose une lecture critique de cette théorie des rapports. J'ai enfin abordé le XVIe siècle avec trois auteurs, Volumnius Rodolphus qui rejette la théorie des rapports de Thomas Bradwardine et Nicole Oresme, Alvarus Thomas qui la reprend, et Pedro Nuñez qui s'en inspire.

La notion de dénomination d'un rapport rationnel fait l'objet de mon premier chapitre. J'ai commencé par elle, car elle apparaît au tout début du traité de Thomas, et elle est le point de départ de la division des rapports. En effet, Thomas distingue les rapports rationnels des rapports irrationnels, en ce que les premiers sont immédiatement dénommés par un nombre, alors que les seconds ne le sont que médiatement un rapport rationnel. Nicole Oresme remettra en cause cette division en ayant l'intuition qu'il existe des rapports irrationnels qui ne sont pas commensurables à un rapport rationnel, et par conséquent ne peuvent être dénommés ainsi.

---

[126] Voir le prologue du *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine, dans ma traduction, p. 63.

Cette notion de dénomination avait déjà fait l'objet d'un de mes articles, paru en 2001 dans la revue *Methodos*[127]. J'ai approfondi cette étude en apportant de nouveaux éléments. Je note en particulier qu'il existe deux définitions de la dénomination. Selon la première, que l'on trouve dans les petits traités sur les rapports de Campanus et Jordanus, la dénomination est le résultat de la division de l'antécédent du rapport par son conséquent. Selon la seconde, que l'on trouve dans le livre VII des *Eléments* de Campanus et dans l'*Arithmétique* de Jordanus, la dénomination d'un rapport de plus grande inégalité est un nombre mis sous la forme d'un entier et d'une fraction, qui exprime la manière d'être du conséquent relativement à l'antécédent. Bien sûr, ces définitions ne sont pas sans lien, puisque l'on obtient ce nombre en faisant la division de l'antécédent par le conséquent. Mais j'insiste sur la forme particulière de la dénomination qui permet à celle-ci de remplir son rôle, c'est-à-dire donner un nom au rapport selon la nomenclature des rapports de Nicomaque.

On associe ainsi un nombre au rapport. Est-ce que pour autant le rapport est identifié à ce nombre ? Je montre que non. Tous les auteurs que j'ai étudiés font la différence entre le rapport, qui est une relation, et la dénomination qui lui est associée. Blaise de Parme est très explicite sur ce point et propose une analyse très intéressante. Il explique que la dénomination permet de mettre en évidence la raison formelle du rapport, c'est-à-dire le point de vue selon lequel on considère les choses rapportées les unes aux autres. Cette raison formelle est bien liée à la quantité, mais le rapport reste une relation : c'est une relation quantitative.

Je pose enfin la question difficile de l'origine de la notion de dénomination. J'ai écrit à plusieurs reprises que, selon moi, cette notion était sans doute une invention médiévale latine. Je m'explique longuement sur ce point dans ce premier chapitre. Je montre alors qu'il est pour l'heure impossible d'établir un lien textuel entre la définition de la dénomination comme division des termes du rapport et la notion de *pélikotès* du rapport que l'on trouve dans la définition

---

[127] Voir l'article 7, p. 221.

apocryphe du livre VI des *Eléments* (définition que l'on ne trouve pas dans la version de Campanus, même si elle figure dans certaines traduction du XII^e siècle). Je souligne alors que le terme même de « dénomination », dans lequel on a l'idée fondamentale de nommer le rapport, est sans lien avec le terme *pélikotès* traduit en latin par *quantitas*. Par ailleurs, la seconde définition de la dénomination n'existe à ma connaissance dans aucun texte grec, ni arabe. J'ai fait l'hypothèse que ce serait une invention des médiévaux qui se seraient inspirés de la notion de dénomination d'une partie qui est présentée par Boèce dans son *Arithmétique* et qu'on retrouve dans le livre VII de Campanus.

Le chapitre II concerne la théorie des rapports de rapports. La notion de rapport de rapports n'est pas explicite dans le *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine, mais elle est nécessaire à la compréhension de sa règle du mouvement. Car si Thomas l'énonce en disant que les rapidités sont géométriquement proportionnelles aux rapports entre puissances et résistances, cela implique que le rapport entre les rapidités est le rapport entre les rapports des puissances aux résistances (et c'est le formulation de Nicole Oresme).

J'ai donné les grands traits de la théorie des rapports de rapports dans l'introduction à ma traduction des traités de Thomas Bradwardine et de Nicole Oresme. J'y reviens plus longuement dans ce second chapitre. Je montre comment Nicole Oresme et amené à considérer les rapports comme des quantités susceptibles d'avoir entre elles un rapport. Il définit alors pour ces rapports la notion de partie à partir de l'opération de composition qu'il assimile à une addition. Il s'inspire enfin de la théorie du livre VII pour définir un rapport de rapports. Au passage je montre en quoi les lectures modernes de la théorie des rapports de rapports qui en font une théorie des puissances fractionnaires des fractions fausse la vision que l'on a de la théorie oresmienne.

Je reprends ensuite les critiques que fait Blaise de Parme des fondements de la théorie des rapports. Là encore je prends le temps de développer les éléments notés dans l'introduction à l'édition critique des *Questions sur le traité des rapports* de Blaise. Puis je consacre quelques pages à l'opuscule sur les rapports de Volumnius Rodulphus (publié en 1516) qui, à ma connaissance, n'a jamais été étudié jusqu'à présent. Ce texte, très embrouillé, présente une critique très vive de la théorie oresmienne. Mon attention sur ce texte a été attirée par une citation de Clavius. C'est en effet grâce à cet opuscule que Clavius a eu connaissance des débats qui ont eu lieu au XV[e] siècle, à la suite de Blaise, à propos de cette théorie et dont il se fait un lointain écho dans son commentaire aux *Elément*s, comme je l'ai rappelé plus haut. Pour finir ce chapitre j'examine la manière dont Pedro Nuñez, dans son *Livre d'algèbre, d'arithmétique et de géométrie* publié en 1567, reprend la théorie oresmienne tout en y apportant des nuances importantes. Je montre ainsi que le traité de Nicole Oresme était encore une source d'inspiration à la fin du XVI[e] siècle.

Si les rapports peuvent être considérés comme des quantités susceptibles d'avoir entre elles un rapport, on peut aussi leur appliquer les définitions du livre X et parler de rapport commensurables ou incommensurables entre eux. C'est ce que fait Nicole Oresme qui développe une théorie de la commensurabilité des rapports que j'ai examinée dans le chapitre III. J'ai conscience que ce chapitre est très technique. Mais j'ai souhaité montrer comment Nicole met en œuvre la composition des rapports et la notion de partie d'un rapport pour définir des critères de commensurabilité des rapports. Bien souvent les lectures modernisantes cachent les lourdeurs des textes médiévaux. Je n'ai pas épargné ces lourdeurs aux lecteurs en espérant qu'elles n'occultent pas l'ingéniosité de la construction de Nicole.

La complexité de cette construction fait que l'on n'en trouve que peu d'échos dans les traités ultérieurs. Mais j'en ai trouvé des traces dans la première rédaction des *Questions sur le traité des rapports* de Blaise de Parme. On trouve aussi une discussion de la partie III du traité de Nicole dans le *Livre sur les trois mouvements* d'Alvarus Thomas (publié en 1509). Alvarus remet alors en cause les critères de Nicole qui sont exprimés à l'aide des plus petits termes d'un rapport (par exemple, si entre les plus petits termes d'un rapport il n'y a pas de médian proportionnel, ce rapport est incommensurable à tout rapport plus petit que lui). Il se demande si l'on peut se restreindre ainsi à l'examen de ces seuls premiers termes. Pour finir, je reviens sur le *Livre* *d'algèbre* de Pedro Nuñez qui présente une théorie de la commensurabilité des rapports différentes de celle de Nicole.

Chapitre IV : l'irrationalité. Mon étude du livre X de Campanus, ainsi que de la question de Blaise de Parme de l'irrationalité du rapport de la diagonale et du côté d'un même carré m'avaient déjà conduite à remarquer que les médiévaux développaient une théorie de l'irrationalité qui diffère de la théorie euclidienne. J'y reviens dans ce livre, car c'est un point important de la théorie des rapports de Thomas Bradwardine, comme nous l'avons rappelé plus haut.

Le chapitre V est consacré à l'*Algorithme des rapports* de Nicole Oresme dont je propose l'édition critique en annexe. Je reviens juste après sur ce traité. Je note seulement ici que, dans ce traité, le rapport acquiert le statut d'objet de calcul au même titre que le nombre entier ou la fraction. Nicole propose, en effet, une notation des rapports et présente les opérations que l'on peut effectuer sur eux. Il applique ensuite ces opérations pour la résolution de différents problèmes. Il me semble important de souligner cette accession du rapport au statut d'objet de calcul, car cela ne va pas de soi, le rapport étant une relation (c'est toujours vrai pour Nicole Oresme, même si dans un certain sens on peut le considérer comme une quantité).

Par ailleurs, à l'occasion de cette étude, j'ai pu monter que Blaise de Parme connaissait aussi l'*Algorithme des rapports* dont il reprend presque textuellement certains passages. Ainsi, tous les travaux de Nicole Oresme sur les rapports étaient diffusés dans le nord de l'Italie, au XV^e^ siècle. Je ne doute pas que l'on trouvera d'autres témoins de cette diffusion dans les manuscrits qui dorment encore dans les bibliothèques.

En conclusion de ce livre je note que l'objet central de la théorie que j'ai présentée est le rapport. Il semblerait que cet objet soit plus secondaire dans la théorie euclidienne qui fait plutôt la part belle à la proportion. Mais pour les médiévaux le rapport est bien au centre : ils se posent la question de sa nature (relation, quantité ?), de ses divisions et de sa dénomination (c'est-à-dire de la manière dont il convient de le nommer). Nicole Oresme en fait aussi un objet de calcul.

J'espère avoir ainsi, dans ce livre, donné un panorama des questions posées par la théorie des rapports mise en place aux XIII^e et XIV^e siècles et largement diffusée jusqu'à la Renaissance.

L'ALGORITHME DES RAPPORTS DE NICOLE ORESME

J'ai entrepris l'édition critique de l'*Algorithme des rapports* de Nicole Oresme en mai 2006. Je propose en annexe de mon livre, *Théorie des rapports (XIII^e - XVI^e siècles),* un texte provisoire effectué à partir de cinq manuscrits parmi les dix-sept recensés par Edward Grant dans sa thèse. Je rappelle que l'*Algorithme des rapports* a été édité une première fois, en entier, à partir d'un seul manuscrit, par Maxilian Curtze en 1868. La première partie de ce traité ainsi que le prologue ont été édités à partir de plusieurs manuscrits par Edward Grant, dans sa thèse, en 1957. Par ailleurs, ce dernier propose une traduction anglaise commentée du prologue et de la première partie dans un article paru en 1965 et dans *A Source Book in Medieval Science*, en 1974. Il manquait donc une édition critique de l'ensemble du traité. J'y ajouterai plus tard une traduction française.

Ce traité a retenu l'attention des historiens car on y trouve une écriture symbolique des rapports, à partir de leurs dénominations, tant pour les rapports rationnels que pour les rapports irrationnels qui sont des parties d'un rapport rationnel. J'ai montré qu'il ne fallait pas exagérer la portée de cette écriture symbolique. Tout d'abord, il est très difficile de savoir quelles étaient les notations préconisées par Nicole Oresme lui-même, car les manuscrits divergent beaucoup sur ce point. Dans mon édition j'ai choisi de noter $k^p\dfrac{m}{n}$ le rapport rationnel dont la dénomination est $k+\dfrac{m}{n}$ et de noter $\dfrac{a}{b}k^p\dfrac{m}{n}$ le rapport irrationnel qui est *a b*-ième parties du rapport précédent ; mais il existe des variantes à ces notations que j'ai signalées dans les notes. Si l'on peut voir dans ces notations une écriture symbolique, c'est beaucoup moins évident dans la notation 2^{la} utilisée pour le rapport double chez certains copistes, ou dans la notation $\frac{1}{2}2^{la}$ mise pour la moitié du rapport double. Il s'agit alors plutôt d'abréviations courantes dans les manuscrits de cette époque (XIV^{e} et XV^{e} siècles) ou d'un mélange de symboles et d'abréviations. Par ailleurs, il est aussi difficile de connaître l'étendue de l'utilisation de ces notations dans le traité, tant les manuscrits divergent là aussi. Et enfin, on doit souligner que ces notations ne sont pas utilisées par Nicole Oresme lorsqu'il présente les opérations sur les rapports dans la première partie de son traité.

L'*Algorithme des rapports* se présente en effet sur le modèle des algorithmes des nombres ou des fractions : écriture des rapports, descriptions des opérations illustrées par des exemples. Ici, ces opérations sont au nombre de deux, l'addition et la soustraction qui correspondent, si l'on veut, à la multiplication et la division des fractions associées aux rapports. Dans une deuxième et une troisième parties on trouve des applications de ces opérations à des problèmes principalement de géométrie, mais aussi de philosophie naturelle. Je décris un peu longuement ces problèmes dans le cinquième chapitre de mon livre, car ils n'ont à ma connaissance jamais été étudiés.

Pour une partie de ces problèmes la source d'inspiration de Nicole Oresme semble être le livre XIII des *Eléments* d'Euclide. La proposition 8 nous apprend que si une pyramide est inscrite dans une sphère, « les diamètres de cette sphère ont au côté de cette pyramide, en puissance, un rapport sesquialtère ». Je reprends ici la formulation de Campanus. Nicole Oresme le dit autrement : « le rapport du diamètre de la sphère au côté de la pyramide ayant quatre bases triangulaires équilatérales inscrite dans cette sphère est la moitié du rapport sesquialtère ». Par ailleurs, le rapport entre le diamètre de la sphère et le côté du cube inscrit est la moitié du rapport triple ; et le rapport entre le diamètre de la sphère et le côté de l'octaèdre est la moitié du rapport double (voir les propositions XIII. 14 et 15 ; là encore il est question de rapport en puissance dans les *Eléments*). Nicole Oresme va utiliser ces résultats pour déterminer les rapports entre les côtés ou les surfaces des faces des corps réguliers inscrits dans la sphère (le cube, la pyramide, l'octaèdre). Auparavant, il avait déterminé les rapports entre les côtés des carrés, des triangles et des hexagones inscrits et circonscrits à un cercle.

Le traité se termine par un problème d'astronomie dont on sait l'importance pour Nicole Oresme. Il considère alors quatre cordes issues d'un même point dans un cercles, ces cordes représentant les quatre aspects du ciel, le sextile, le quartile, le trine et l'opposé. Il détermine alors les rapports entre ces cordes.

La résolution de tous ces problèmes nécessite l'utilisation d'une addition ou d'une soustraction de rapports irrationnels.

MA PRATIQUE DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

En guise de conclusion je voudrais dire quelques mots de ma pratique de l'histoire des mathématiques médiévales et renaissantes.

Il existe plusieurs approches de l'histoire des sciences. Il y a l'approche que je qualifierais de scientifique, car pratiquée bien souvent, mais pas seulement, par des historiens qui sont à l'origine des scientifiques. L'accent est mis sur les découvertes scientifiques examinées à l'aune des sciences de notre temps, jugées selon l'importance qu'elles ont eue dans une science en progrès qui mène aux vérités que nous reconnaissons comme telles aujourd'hui. En ce sens c'est une histoire rétrospective. C'est aussi une histoire qui sanctionne : telle théorie, tel résultat sont jugés justes ou faux, intéressants ou non, selon des critères qui sont ceux des scientifiques d'aujourd'hui, à la lumière de ce que nous pensons être vrai, être scientifique, être un progrès.

Il y a l'approche proprement historique. Les faits scientifiques y sont considérés comme des faits historiques à replacer dans une période donnée. L'accent est mis sur le contexte historique du travail scientifique. On s'intéressera alors à la biographie des savants, à la chronologie de leurs œuvres, mais aussi à l'histoire du livre, des communautés scientifiques, des institutions, des universités, etc.

Il y a l'approche sociologique où la production scientifique est examinée comme toute autre production, ayant ses acteurs pris dans des réseaux d'influence et de pouvoir, mais aussi d'argent et de rentabilité.

Selon ces deux dernières approches la vérité des faits scientifiques produits a finalement peu d'importance, alors qu'elle est cruciale dans la première approche. Se pose alors la question de ce qu'est une vérité scientifique, trop complexe pour que je l'aborde ici.

Il y a une autre approche, partagée par un certain nombre d'historiens des sciences. Celle-ci est centrée sur les théories scientifiques, comme la première approche, mais contrairement à celle-ci les auteurs étudiés sont replacés dans leur époque. Les innovations sont jugées à la lumière de ce que les prédécesseurs et les contemporains des auteurs étudiés tenaient pour valide ; les critères permettant de juger des théories sont ainsi fournis par l'époque dans laquelle elles ont été développées. Et si l'on s'intéresse à ce qui vient après, c'est afin de se poser la question du devenir des théories étudiées (le regard n'est pas rétrospectif). On met alors à jour des ruptures et des continuités.

Bien sûr, ce panorama est volontairement schématique, et la pratique réelle des historiens des sciences est plus complexe, mêlant souvent ces différentes approches. Toutefois, c'est sans aucun doute de cette dernière approche que je me sens la plus proche. Je vais tenter ici de décrire ma démarche.

Tout d'abord, il me semble important de souligner que j'étudie avant tout des textes. De ces textes je vais dégager des notions, des théories, mais mon point de départ est toujours un texte. J'envisage d'abord ce texte dans sa globalité. Je souligne ce point, car je sais les dangers dans lesquels on peut tomber en ne portant son attention que sur tel ou tel résultat isolé du reste du texte (Gérard Simon l'a bien montré à propos des fameuses « lois de Kepler » et je pense que cela vaut aussi pour les mathématiques). Je porte donc mon attention sur la nature du texte (géométrique, de philosophie naturelle, etc.), sur son architecture et finalement sur la manière dont les résultats sont présentés, enchaînés. Je m'interroge aussi sur le statut du texte que j'étudie. Ainsi, par exemple, je fais la différence entre une traduction des *Eléments* d'Euclide, une version faite à partir de traductions, éventuellement commentée, et une récriture de ces *Eléments*. Je dégage, s'il le faut, différents niveaux de textes. Des ajouts de définitions, d'axiomes ou de propositions ou encore des démonstrations alternatives n'ont pas le même statut que des commentaires, et ces commentaires ne sont pas tous de même ordre, comme je l'ai montré à propos de la version de Clavius des *Eléments* d'Euclide. De même, il me semble important de marquer la différence entre les types de rédaction. Il y a ainsi les ouvrages de mathématiques rédigés sous une forme que l'on qualifie d'euclidienne, dans laquelle les théorèmes sont enchaînés selon un ordre logique à partir des prémisses. Et il y a, au Moyen Âge, les *Questions* mathématiques dont la forme très codifiée suppose que l'on produise des objections conduisant parfois à l'énoncé de résultats ou de démonstrations erronés. On ne peut manquer alors de s'interroger sur l'influence qu'a cette forme de la *Question* sur le contenu mathématique des textes, comme je l'ai fait à propos de Blaise de Parme.

Examinant ainsi le texte dans sa globalité je m'interroge sur la cohérence des théories qui y sont développées. J'essaie de mettre en évidence les problèmes posés par l'auteur et les solutions qu'il apporte. Je tâche de dégager des systèmes de pensée, lorsqu'ils existent. Ceci est particulièrement visible, il me semble, dans mon étude de la version de Campanus des *Eléments* d'Euclide. Une première étude détaillée du livre VII m'avait permis de mettre à jour son souci de complétude, souci que j'ai pu vérifier sur les autres livres. Ainsi, lorsque j'ai étudié le livre X et que j'ai vu apparaître les notions de droites rationnelles en longueur et de droites rationnelles en puissance, j'ai aussitôt vérifié que ces notions apparaissaient encore au livre XIII dans lequel on démontre que certaines des droites qui composent des figures géométriques planes ou solides sont irrationnelles. J'ai été heureuse de constater que là encore Campanus était cohérent : j'ai ainsi remarqué que dans la proposition XIII. 17 le diamètre de la sphère dans laquelle est inscrit le dodécaèdre à construire est posé rationnel en longueur ou en puissance, alors qu'il est dit exprimable (ou rationnel) par Euclide. Ce changement impliquait l'ajout d'un cas de figure dans la proposition XIII. 6 qui est utilisée dans la démonstration de XIII. 17, ajout que j'ai effectivement trouvé dans le texte de Campanus. Je n'entre pas les détails techniques[128], je veux seulement souligner que ma familiarité avec le texte de Campanus m'a fait deviner les changements et les ajouts qu'il devait apporter au texte euclidien. C'est cette familiarité avec les théories anciennes que je recherche. Dit autrement, j'essaie de mettre dans la peau du mathématicien que j'étudie, tout en sachant que je ne peux pas totalement faire abstraction de ce que je sais et de ce que je suis. Entendons-nous bien, il ne s'agit pas pour moi de connaître la psychologie de l'auteur que j'étudie. L'auteur en tant qu'individu m'intéresse peu et je ne prétends pas savoir ce qu'il pensait. Je m'attache aux doctrines, je cherche à comprendre les systèmes de pensée, à mettre en évidence leurs cohérences et leurs failles.

Je reste ainsi proche des textes et des théories que j'étudie, essayant autant que faire se peut d'en donner la lettre et l'esprit. Je m'interdis autant que possible d'interpréter les théories du passé à la lumière de ce que je sais de la suite de l'histoire, partant du principe que ce sur quoi se fonde l'auteur que j'étudie sont les connaissances qu'il a acquises, les textes qu'il a lus, mais certainement pas les théories à venir.

Je me dois donc de déterminer précisément ce que l'auteur étudié connaissait, dans quel cadre théorique il se plaçait. Ainsi, lorsque je m'attache aux sources, non pas dans la recherche, vaine, de précurseurs, mais dans le but de dresser le tableau des connaissances de l'auteur étudié, je suis soucieuse de préciser autant que possible les versions des textes qu'il a pu lire, si l'on en connaît plusieurs versions (par exemple, il est inutile de chercher dans l'édition grecque des *Eléments* d'Euclide les références des propositions euclidiennes citées par les médiévaux qui utilisent à partir du XIV^e^ siècle la version de Campanus ; ceci peut paraître une évidence, mais j'ai remarqué à plusieurs reprises qu'il n'était pas inutile de le préciser). Je cherche ensuite à déterminer comment l'auteur s'approprie les théories qu'il reçoit, comment il les modifie ou les réinvestit dans de nouveaux objets, pour de nouveaux objectifs. Je pense

---

[128] On peut se reporter à l'article 8, p. 261-267.

ici particulièrement à mon étude de la théorie des rapports de rapports de Nicole Oresme dans laquelle j'ai montré comment Nicole reprend la théorie des rapports des grandeurs et des nombres des livres V et VII d'Euclide pour l'appliquer aux rapports eux-mêmes. Ainsi, mon regard se tourne principalement vers le passé d'une théorie afin de marquer les continuités et les ruptures, et si j'envisage son futur c'est pour montrer comment la nouvelle théorie mise ainsi en place a été comprise, acceptée ou rejetée, voire modifiée et réinvestie à son tour.

Dans cette recherche de la compréhension des théories du passé je suis d'abord guidée par les textes eux-mêmes, comme nous l'avons vu. Cependant, il arrive parfois que des éléments extérieurs, historiques, sociologiques, institutionnels, ou autres offrent un éclairage nouveau sur les contenus des textes. Ainsi, à propos du commentaire de Clavius aux *Eléments* d'Euclide, il est intéressant de savoir que le mathématicien jésuite a joué un rôle important dans la mise en place de l'enseignement des mathématiques dans les collèges jésuites, et qu'il a ouvert une Académie des mathématiques dans laquelle étaient formés les futurs professeurs. Cette connaissance historique, extérieure au texte que j'étudiais, m'a permis de faire l'hypothèse que les commentaires de Clavius aux *Eléments,* dont certains ont manifestement un but pédagogique, pouvaient avoir été écrits pour les futurs enseignants plutôt que pour les étudiants débutants. Dans un autre registre j'ai évoqué les *Questions* mathématiques. Connaître le cadre universitaire de la dispute médiévale et les différentes étapes qui ont conduit à la forme discursive de la *Question* est nécessaire à la compréhension de ces textes. Ainsi, il m'arrive d'évoquer le contexte historique, institutionnel, ou autre, des théories que j'étudie. Mais je ne le fais que rarement et uniquement si cette évocation est nécessaire à ma compréhension. Je cherche avant tout des cohérences internes.

Derrière ma pratique de l'histoire des mathématiques il y a une conviction : celle que les mathématiques ont une histoire et que cette histoire ne se réduit pas à l'enchaînement chronologique des résultats accumulés depuis l'aube des temps, résultats que tout mathématicien reconnaîtra comme vrais, quelle que soit l'époque à laquelle il appartient. Je pense que ce qu'on appelle « mathématiques » évolue selon les époques et qu'on ne peut étudier les traités mathématiques qu'en les pensant dans leur époque. Mais on peut me rétorquer qu'un mathématicien d'aujourd'hui, lorsqu'il ouvre les *Eléments* d'Euclide, ou le traité *Sur les rapports de rapports* de Nicole Oresme n'a pas de doute qu'il s'agit bien de mathématiques et peut dire si les résultats qu'ils contiennent sont justes ou faux. Ce mathématicien peut même reconnaître les coupures de Dedekind dans le livre V d'Euclide, et les puissances non entières dans les rapports de rapports. Mais je crains que ce soit cette traduction dans le langage des mathématiques d'aujourd'hui qui rendent ces textes familiers, ou pour le moins compréhensibles à notre mathématicien. La difficulté est beaucoup plus grande lorsque l'on cherche à comprendre ce qu'il y a réellement dans ces textes. On plonge alors dans un univers qui n'est pas familier, dans des théories qui sont aujourd'hui obsolètes et qui s'insèrent souvent dans des contextes épistémologiques qui ne sont plus les nôtres (l'étude de l'aristotélisme médiéval est indispensable à la compréhension des mathématiques de Blaise de Parme, par exemple). La difficulté est aussi accrue, lorsque l'on étudie des textes qui ne sont pas rédigés selon le canon euclidien. Le fait que les *Eléments* aient été traduits, qu'ils aient servi de manuels et de modèles, a donné naissance à une tradition de traités qui sont tous sur le même modèle. On a ainsi l'illusion d'une continuité, à travers les époques et les cultures. Mais si le *De continuo* de Thomas Bradwardine a une forme euclidienne, on a du mal à déterminer s'il s'agit de mathématiques ou de philosophie naturelle. Par ailleurs, à côté de ces traités, on trouve des textes obéissant à d'autres formes discursives. Nous en avons eu un exemple avec la question sur la diagonale et le côté d'un carré de Nicole Oresme et Blaise de Parme. On peine alors à reconnaître qu'il s'agit toujours de mathématiques alors que c'est ce que pensaient faire ces auteurs. L'apparition de nouvelles disciplines fait aussi varier les frontières des mathématiques. Je pense ainsi à l'algèbre. Il a fallu du temps pour qu'elle se constitue en tant que discipline à part entière, ayant ses propres critères de validation, indépendamment du modèle géométrique dominant. Et on pourrait ainsi multiplier les exemples selon les époques. Ainsi, l'historien des mathématiques, comme l'historien de n'importe quelle science, ne peut éviter de se poser la question de ce que sont les mathématiques, et la réponse dépendra de l'époque qu'il étudie. Il me semble alors indispensable d'étudier les textes et les théories dans leur époque, comme je tente de le faire.

POSTCRIPTUM

L'image que les chercheurs travaillant sur d'autres périodes ont de la science au Moyen Âge latin est encore trop souvent caricaturale : au mieux on fait appel aux médiévistes lorsque l'on est à la recherche de sources (je pense par exemple aux travaux sur la philosophie naturelle du XIVe siècle suscités par la recherche des sources de Galilée, où les théories mises en place par les médiévaux sont analysées à la lumière de la nouvelle physique) ; au pire, on pense qu'il ne s'est rien passé d'intéressant en mathématiques entre Euclide et Descartes (sauf peut-être chez les arabes) ou qu'en physique les choses sérieuses commencent au XVIIe siècle. Je force consciemment le trait, la réalité est bien sûr plus complexe et je dois ajouter qu'elle dépend des pays (il me semble qu'en France l'histoire des sciences est bien plus tributaire de la périodisation que dans d'autres pays). Mais je ne crois pas être très éloignée de la vérité en faisant ce constat. Or les études qui ont été menées ces dernières années ont profondément changé la vision que l'on pouvait avoir des mathématiques et de la philosophie naturelle au Moyen Âge, présentant les théories sous un jour nouveau. Et je ne doute pas que cette meilleure connaissance des sciences médiévales permettra d'apporter un éclairage nouveau sur la Renaissance et l'Âge classique. On ne peut avoir une vision claire des innovations et des changements radicaux qui se sont produits au XVIIe siècle que si l'on connaît parfaitement ce qui s'est passé avant. Rupture sans aucun doute, mais sur quels points et par rapport à quoi ?

Prenons l'exemple de la théorie des rapports que j'ai étudiée ces dernières années. J'ai montré que les maîtres ès arts des XIVe et XVe siècles ont modifié substantiellement cette théorie dans la lignée de Campanus et de Jordanus. Cette nouvelle théorie est encore bien présente au XVI^e siècle et je pense qu'elle nourrit encore l'imaginaire des mathématiciens et des physiciens du XVII^e siècle. Certes, la traduction latine des *Eléments* d'Euclide publiée par Zamberti de 1505 et les nombreuses autres éditions qui suivirent proposèrent des livres V et VII débarrassés des ajouts et des modifications que lui avait apportés Campanus, ainsi que de ses commentaires. Mais la version de Campanus reste un ouvrage de référence dans lequel les commentateurs vont puiser des résultats et des explications (on le voit bien avec Clavius). Bien plus, la nouvelle théorie des rapports mise en place par Thomas Bradwardine et développée par ses successeurs est connue au XVI^e siècle ; on s'en inspire, on la discute. Ainsi, on ne peut pas comprendre pourquoi Clavius passe autant de temps à expliquer que la composition des rapports est une multiplication et non pas une addition ou qu'il consacre autant de pages aux notions de rapport doublé et triplé, expliquant qu'il ne faut pas les confondre avec le double et le triple du rapport, si l'on n'a pas en tête la théorie des rapports de rapports de Nicole Oresme et les discussions qu'elle a suscitée. Il me semble donc que si l'on se pose, par exemple, la question du rapport de l'algèbre à la théorie des proportions ou encore du rôle des rapports dans la construction des logarithmes on doit prendre garde que la théorie des proportions ou des rapports qui doit ici être envisagée n'est pas uniquement la théorie des livres V et VII des *Eléments* d'Euclide (et j'ai envie d'ajouter que ce ne doit pas être l'interprétation que font par exemple Bernard Vitrac ou Jean-Louis Gardies de ces livres), mais aussi la nouvelle théorie des rapports mise en place par Campanus puis Thomas Bradwardine et enrichie tout au long des XIV^e et XV^e siècles.

Faire connaître plus amplement nos travaux est donc notre devoir de médiévistes aujourd'hui. J'ai déjà tenté de le faire en rédigeant des articles à l'intention des historiens des sciences non spécialistes du Moyen Âge. Mon entreprise de traduction des textes fondamentaux de la philosophie naturelle ou des mathématiques, que je souhaite poursuivre, va aussi dans ce sens. Et j'ai par ailleurs le projet de travailler sur l'algèbre et sans doute sur la construction des logarithmes (j'ai eu l'occasion de voir récemment quelques pages du traité sur les logarithmes de Kepler où j'ai retrouvé la méthode d'insertion de médians entre les termes d'un rapport, qui est au fondement de la théorie des rapports de rapports de Nicole Oresme). J'espère ainsi pouvoir montrer comment les études sur le Moyen Âge, que je souhaite aussi poursuivre, peuvent enrichir notre connaissance de la Renaissance et de l'Âge classique.

TABLE DES MATIERES