



**HAL**  
open science

# Evaluation expérimentale d'éléments de calcul quantique (qubit) formés d'électrons piégés sur l'hélium liquide

Emmanuel Rousseau

► **To cite this version:**

Emmanuel Rousseau. Evaluation expérimentale d'éléments de calcul quantique (qubit) formés d'électrons piégés sur l'hélium liquide. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00250371

**HAL Id: tel-00250371**

**<https://theses.hal.science/tel-00250371>**

Submitted on 11 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de doctorat de l'université Paris XI

Spécialité :  
physique

Présentée par :

Emmanuel ROUSSEAU

Sujet de la thèse :

Evaluation expérimentale d'éléments de calcul quantique (qubit)  
formés d'électrons piégés sur l'hélium liquide

Soutenue le 6 décembre 2006  
Devant le jury composé de Mme, MM.

Hélène Bouchiat, présidente  
Olivier Buisson, rapporteur  
Mike Lea, rapporteur  
Marco Aprili, examinateur  
Eric Varoquaux, examinateur  
Iouri Mouhkarski, directeur de thèse

Thèse préparée au Service de Physique de l'état Condensé  
Direction des Science de la Matière,  
Département sur la Recherche de l'Etat Condensé, les Atomes et les Molécules  
CEA-Saclay

## Remerciements

Je te tiens à remercier vivement toutes les personnes qui ont assistées à ma soutenance de thèse. Cela m'a fait très plaisir de vous voir !

Je voudrais plus particulièrement remercier Iouri Moukharski, mon directeur de thèse.

Merci de m'avoir donné la possibilité de réaliser cette thèse. Merci pour ta très grande disponibilité. J'ai beaucoup appris à tes côtés.

Merci aussi à Eric Varoquaux, directeur de thèse "sur le papier seulement", paraît-il! Merci d'avoir relu cette thèse dans la précipitation. Merci pour les cailloux ! Je pense avoir articulé finalement !

Merci Olivier, j'envie ta rigueur expérimentale et la précision de tes mains !

Merci Jean-Michel, merci pour la soudure. Merci aussi pour les "potins du labo". J'en étais friand !

Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont facilitées ma vie lors de la réalisation des échantillons. Ainsi, encore une fois, merci à Iouri, merci au groupe Quantronic et surtout merci à Pief Orfila pour sa grande disponibilité.

Je fais un signe amical à Grégoire, Antoine, Anne, Myriam (pour faire simple, le groupe magnétisme !). Vous croiser en salle blanche fut un réel plaisir et une bulle d'air frais dans cette atmosphère confinée !

Nicolas, sans toi, cette dernière année de thèse n'aurait pas eu la même saveur. Heureusement que tu étais là pour égayer la pause du matin, la pause du midi, la pause de l'après-midi et celles qui se greffaient par-ci, par-là au gré de nos humeurs respectives. Courage, c'est bientôt fini pour toi aussi !

Merci à Catherine, Soun, Mathieu, Antoine et Jean-Baptiste d'être venus. Je n'ai pas été très bavard mais j'étais ravi de vous voir, ici à Orsay, pour ma soutenance. Merci Cathy d'avoir déplacé tes cours, merci Antoine d'avoir pris trois jours de RTT (il fallait cela pour s'en remettre !).

Je voudrais remercier mes parents, ma Grand-Mère. Entres autres choses, merci de vous être occupés des petits-fours... Par contre, je ne remercie pas mon p'tit frère. M.. partir en Hongrie une semaine avant ma soutenance...

Je voudrais remercier Mike Lea d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse écrite tout en français. Merci de ton extrême gentillesse lors de nos différentes rencontres.

Merci aussi aux différents membres du groupe de Mike pour leur accueil chaleureux.

Et plus particulièrement, merci Dave ! Tu ne peux pas savoir comme j'ai apprécié les 15 jours que tu as passé à Saclay. Nous débutions tous les deux notre thèse. "Heureux les simples d'esprits". Tu ne me contrediras pas, je pense, mais il n'est pas simple de devenir un esprit un peu moins simple ! Bonne chance à Tokyo !

Merci aussi à Phil Meeson de m'avoir invité à donner un séminaire à Londres. L'accueil fut fort agréable.

Je voudrais aussi remercier Olivier Buisson d'être le second rapporteur de cette thèse. J'ai pris beaucoup de plaisir à discuter échappement à Orlando.

Merci à Hélène Bouchiat et à Marco Aprili d'avoir acceptés d'être membres du jury de thèse.

Iouri m'a permis de rencontrer toute une communauté russe et ukrainienne. Coucou à eux et merci (Small) Sergey et Andreï de m'avoir baladé dans Moscou.

J'ai beaucoup aimé ma vie parisienne durant les 2,5 premières années de thèse (il y eu comme une parenthèse), soirée par-ci, concert par-là, badminton. Alors je voudrais remercier toutes les personnes avec qui j'ai vécu ces moments. J'ai maintenant hâte qu'elle recommence, cette vie là !

## Résumé

Un électron au dessus de l'hélium présente un spectre quantifié. L'interaction avec l'environnement est estimée suffisamment faible afin de permettre la réalisation d'un bit quantique (qubit) en utilisant les deux premiers niveaux d'énergie.

La première étape dans la réalisation de ce qubit consiste à piéger et à contrôler un unique électron. Ceci a été réalisé grâce à un jeu d'électrodes micro-fabriquées définissant un puits de potentiel dans lequel l'électron est piégé. Nous sommes capables avec un tel échantillon de piéger et de détecter un nombre variables d'électrons entre 1 et une vingtaine.

Cela nous a alors permis d'étudier le comportement statique d'un petit nombre d'électrons dans un piège. Ils sont supposés cristallisés et formés des structures appelées molécules de Wigner. De telles molécules n'ont pas encore été observées avec des électrons au-dessus de l'hélium. Sans apporter de preuves formelles, nos résultats sont en faveur d'une cristallisation de Wigner.

Nous avons ensuite essayé de caractériser plus précisément le qubit. Nous avons cherché à réaliser une lecture projective (dépendant de l'état du qubit) et une mesure du temps de relaxation. Les résultats ont été obtenus en excitant l'électron par un champ électrique incohérent. Une mesure propre du temps de relaxation nécessiterait un champ électrique cohérent. La conclusion ne peut donc pas être définitive mais il semblerait que le temps de relaxation soit plus court que calculé théoriquement. Cela est peut-être dû à une mesure de la relaxation entre les états d'oscillations dans le piège et non entre les états du qubit.

Mots clefs : qubit, électrons au dessus de l'hélium, SET, molécules de Wigner.

### Abstract

An electron on helium presents a quantized energy spectrum. The interaction with the environment is considered sufficiently weak in order to allow the realization of a quantum bit (qubit) by using the first two energy levels.

The first stage in the realization of this qubit was to trap and control a single electron. This is carried out thanks to a set of micro-fabricated electrodes defining a well of potential in which the electron is trapped.

We are able with such a sample to trap and detect a variables number of electrons varying between one and around twenty. This then allowed us to study the static behaviour of a small number of electrons in a trap. They are supposed to crystallize and form structures called Wigner molecules. Such molecules have not yet been observed yet with electrons above helium. Our results bring circumstantial evidence for of Wigner crystallization. We then sought to characterize the qubit more precisely. We sought to carry out a projective reading (depending on the state of the qubit) and a measurement of the relaxation time. The results were obtained by exciting the electron with an incoherent electric field. A clean measurement of the relaxation time would require a coherent electric field. The conclusion cannot thus be final but it would seem that the relaxation time is shorter than calculated theoretically. That is perhaps due to a measurement of the relaxation between the oscillating states in the trap and not between the states of the qubit.

Key words: qubit, electrons on helium, SET, Wigner molecules.

# Introduction

Cette thèse traite de la réalisation expérimentale de qubits constitués d'électron flottant au-dessus d'un film liquide. Elle est un pas dans la voie suggérée par Mark Dykman et Phil Platzman en 1999 [8].

La recherche d'un ordinateur quantique et plus particulièrement de bits quantiques (qubits) est actuellement très active. On entrevoit les possibilités d'un tel ordinateur mais une réalisation concrète semble encore lointaine.

La raison principale incombe aux interactions avec l'environnement qui font perdre le caractère quantique du système. La recherche se focalise actuellement sur des systèmes physiques suffisamment isolés de leur environnement ce qui préserve pendant un temps relativement long la cohérence quantique. Le calcul quantique impose d'autres contraintes aux qubits. Ces contraintes ont été listées par DiVincenzo [4].

C'est dans ce contexte que Platzman et Dykman proposèrent de réaliser un qubit à partir d'électrons au-dessus de l'hélium.

L'approche d'un électron au dessus d'un film d'hélium se caractérise par l'apparition d'une charge image qui l'attire. Il est par ailleurs repoussé par le liquide lui-même. Il se forme alors des états liés d'énergies discrètes dont le spectre ressemble à celui de l'atome d'hydrogène.

Il a été suggéré d'utiliser le fondamental et le premier état excité de ce spectre pour réaliser le qubit.

L'électron interagit avec la surface d'hélium et ces interactions sont bien entendu responsables de la décohérence. Néanmoins, l'électron au dessus de l'hélium flotte relativement loin de l'interface (11 nm), limitant ainsi la décohérence. L'hélium est peu polarisable, la charge image (i.e. l'attraction) est faible. Platzman et Dykman calculèrent le temps de décohérence. Il s'avéra être suffisamment long pour permettre une application en tant que qubit.

Le modèle hydrogénoïde décrivant l'interaction entre l'électron et la charge image est présenté au paragraphe I.3.1. Il faudra garder à l'esprit qu'il s'agit d'un modèle simple décrivant néanmoins de manière précise les électrons au-dessus de l'hélium. Le qubit ainsi constitué est confronté à la liste de DiVincenzo au paragraphe I.3.2.

Dans ce manuscrit, j'ai tenu à présenter les calculs de temps de relaxation et de déphasage. Leurs évolutions avec les paramètres pertinents de nos expériences sont présentées au paragraphe I.4.

L'objectif premier de cette thèse a porté sur le piégeage d'un seul électron au-dessus du film d'hélium. Pour ce faire, des échantillons réalisés par microscopie électronique ont été fabriqués. Ils consistent en un réseau d'électrodes délimitant un puits de potentiel dans lequel l'électron va être piégé. Au centre de ce piège et situé sous la surface du film d'hélium se trouve un transistor à électron unique (Single Electron Transistor) utilisé pour détecter l'électron.

Un SET est constitué de deux jonctions tunnel mises en série. La partie métallique entre les deux jonctions est appelée îlot. Il y a de plus une grille couplée capacitivement à l'îlot. Le courant à travers le SET est une fonction périodique de la charge totale de l'îlot. La phase des oscillations est donc une mesure de la charge de l'îlot. Les électrons sur l'hélium sont au dessus du SET et contribuent, par polarisation, à la charge de l'îlot. Lorsqu'un électron quitte

le piège, la charge de l'îlot change. Cela se traduit par une modification de la phase des oscillations. Les principes de fonctionnement des SETs et la méthode d'analyse des données sont détaillés au paragraphe I.5.

Je décris la géométrie des échantillons en début de deuxième partie. Une description de la cellule expérimentale suit. Nous présenterons en particulier l'effort effectué pour filtrer les lignes de mesure afin d'isoler l'échantillon du monde extérieur.

Je présente enfin dans la dernière partie les résultats expérimentaux. Je m'attarde sur l'étude du bruit de charge du SET. Les origines de ce bruit et ses conséquences sur les résultats sont explicitées. Nous montrons en particulier que le développement d'un SET dont l'îlot est pyramidal fut déterminant pour le piégeage et la mise en évidence d'un électron unique. Afin de garder la cohérence du texte, des résultats issus d'un SET dont l'îlot n'est pas pyramidal sont exposés dans l'annexe D. Il est préférable de la lire après le chapitre II.3.4. En m'appuyant sur les résultats issus de l'étude du bruit, je montre que, sans doute possible, nous piégeons et contrôlons un seul électron dans le piège électrostatique.

Nous sommes alors en mesure d'étudier les propriétés statiques d'un petit nombre d'électrons dans un piège. On attend un régime de cristallisation de Wigner et la formation de molécules de Wigner (paragraphe III.5.1 et III.5.2). A notre connaissance, de tels îlots n'ont pas encore été observés avec les électrons au dessus de l'hélium. Nous montrons comment avec notre dispositif expérimental de telles molécules peuvent être mises en évidence (paragraphe III.5.3).

Je me concentre ensuite sur une caractérisation plus poussée du qubit. Deux des cinq critères de DiVincenzo ont été testés.

Nous avons essayé de réaliser une mesure projective, c'est-à-dire dépendant de l'état du qubit. Nous avons aussi essayé de déterminer le temps de relaxation d'un électron au-dessus de l'hélium. Ces deux critères ont été testés par la même expérience qui consiste à étudier la probabilité d'échappement de l'électron à travers la barrière de potentiel créée par le piège électrostatique. L'échappement va dépendre de l'état et de la température de l'électron.

La méthode de mesure de l'état du qubit n'est pas à remettre à cause. Elle est utilisée dans de nombreuses autres expériences [48-50]. Dans notre expérience, nous n'avons pas mis en évidence une quelconque quantification des états de l'électron que ce soit les états perpendiculaires ou les états d'oscillations dans le puits. Nous avons malgré tout observé une augmentation de la température de l'électron. De cette augmentation, nous en avons déduit le temps de relaxation.

L'îlot du SET est soumis à des fluctuations de potentiel. Ces fluctuations vont fournir de l'énergie à l'électron. Le SET peut être vu comme un système de chauffage.

D'un autre côté, l'électron perd de l'énergie en interagissant avec l'environnement. Il s'établit un équilibre thermique. La largeur et la position des courbes d'échappement vont dépendre de la température de l'électron. En estimant l'action du SET sur l'électron, nous avons déduit un temps de relaxation inférieur à  $0.03 \mu\text{s}$ . De plus, nous avons réalisé une mesure directe du temps de relaxation. Nous chauffons l'électron. Nous coupons le chauffage et après un temps  $\tau$  déterminons sa température. La température décroît en un temps très court que nous n'avons pas réussi à mesurer. Nous savons seulement que ce temps est inférieur à  $0.4 \mu\text{s}$ .

Ces mesures sont présentement une borne supérieure qui est presque d'un ordre de grandeur inférieur à la valeur attendue.

Résumé.....	2
Introduction .....	4
<b>I. Première partie: Vers un ordinateur quantique.</b> .....	8
<b>I.1. Principes du calcul quantique</b> .....	8
<i>I.1.1. Intérêt d'un tel ordinateur ?</i> .....	8
<i>I.1.2. Les bases de l'informatique quantique : le formalisme quantique.</i> .....	9
<b>I.2. Les critères de DiVincenzo</b> .....	13
<b>I.3. La proposition de Dykman et Platzman</b> .....	17
<i>I.3.1. Quelques propriétés des électrons au-dessus de l'hélium</i> .....	17
<i>I.3.2. Le qubit proprement dit</i> .....	21
<b>I.4. Temps de décohérence</b> .....	30
<i>I.4.1. Temps de relaxation et temps de déphasage</i> .....	30
<i>I.4.2. Mécanismes de décohérence</i> .....	32
<b>I.5. Transistor à électron unique</b> .....	61
<i>I.5.1. Théorie orthodoxe du blocage de Coulomb</i> .....	61
<i>I.5.2. Caractéristique courant-tension</i> .....	65
<i>I.5.3. Le SET supraconducteur en tant qu'électromètre</i> .....	68
<b>II. Deuxième partie, piéger un électron : La course de fond</b> .....	71
<b>II.1. Les échantillons</b> .....	71
<i>II.1.1. géométrie des échantillons et choix des matériaux</i> .....	71
<i>II.1.2. techniques de fabrication</i> .....	73
<i>II.1.3. Simulation du profil des potentiels.</i> .....	76
<b>II.2. La cellule expérimentale</b> .....	77
<i>II.2.1. Description</i> .....	77
<i>II.2.2. Introduire la quantité exacte d'hélium.</i> .....	78
<i>II.2.3. Générer les électrons : décharge corona.</i> .....	81
<b>II.3. Connexions avec le monde extérieur</b> .....	83
<i>II.3.1. Limiter ces connexions</i> .....	83
<i>II.3.2. Schémas électriques du SET</i> .....	84
<i>II.3.3. Détection synchrone</i> .....	85
<i>II.3.4. Schéma électrique global</i> .....	88
<b>III. Troisième partie, piéger un électron : La ligne d'arrivée</b> .....	89
<b>III.1. Détection par mesure capacitive.</b> .....	89
<b>III.2. Caractéristiques de l'échantillon</b> .....	90
<i>III.2.1. Paramètres physiques</i> .....	90
<i>III.2.2. Bruit et autres observations perturbatrices</i> .....	92
<b>III.3. Oscillations courtes avec le réservoir gauche</b> .....	98
<b>III.4. Un seul électron localisé.</b> .....	104
<i>III.4.1. Courbe de décharge</i> .....	104
<i>III.4.2. Evolution avec la profondeur du piège</i> .....	108
<b>III.5. Ilot de Wigner et énergie d'un point quantique cristallisé.</b> .....	110
<i>III.5.1. Cristallisation de Wigner</i> .....	110
<i>III.5.2. Molécules de Wigner</i> .....	111
<i>III.5.3. Spectres d'addition</i> .....	117
<b>III.6. Lecture projective et temps de thermalisation</b> .....	123
<i>III.6.1. Lecture projective</i> .....	123

<i>III.6.2. Courbes d'échappement</i> .....	127
<i>III.6.3. Procédure d'analyse</i> .....	132
<i>III.6.4. Estimation du temps de relaxation</i> .....	143
<b>Conclusion</b> .....	158
<b>Annexes</b> .....	159
<b>Annexe A : lithographie électronique</b> .....	160
<b>Annexe B : évaporation sous angles et SET à îlot pyramidal</b> .....	161
<b>Annexe C : données techniques concernant la fabrication</b> .....	162
<b>Annexe D : Pourquoi un SET à îlot pyramidal ?</b> .....	165
<b>Bibliographie</b> .....	167

# I. Première partie: Vers un ordinateur quantique.

## I.1. Principes du calcul quantique

### I.1.1. *Intérêt d'un tel ordinateur ?*

Expliquer le monde microscopique des atomes fut une des premières tâches de la mécanique quantique. On s'est aperçu par la suite que son formalisme, que les concepts qu'elle dégagait n'étaient nullement contraints par la taille du système. On a alors observé des effets purement quantiques pour des grandeurs macroscopiques. De célèbres exemples sont l'effet tunnel macroscopique, la supraconductivité, la superfluidité.

Il faut néanmoins se placer dans des conditions expérimentales assez précises pour voir ces manifestations quantiques sur des objets macroscopiques. Les objets microscopiques restent, encore à l'heure actuelle, des objets privilégiés pour l'observation de phénomènes quantiques. La décohérence invoquée pour expliquer le passage d'un monde régi par la mécanique quantique à un monde soumis aux lois de la physique classique dépend, pour sa part, de la taille du système.

Les microprocesseurs de nos ordinateurs contiennent de plus en plus de transistors. Ces transistors sont de plus en plus petits. Leur taille caractéristique est actuellement de 80 nm et on prévoit 32 nm pour 2009. A ces échelles, la décohérence ne supprime plus complètement les effets quantiques. La physique quantique va venir modifier le comportement de nos ordinateurs.

Doit-on accepter cette plongée dans l'univers quantique comme une fatalité? Peut-être pas! On peut peut-être tirer parti des lois quantiques pour rendre les ordinateurs intrinsèquement plus performants qu'ils ne le sont avec les technologies actuelles régies par les lois de la physique classique.

Des algorithmes utilisant les concepts de la physique quantique ont montré que de tels ordinateurs pourraient résoudre beaucoup plus rapidement certains problèmes comme la factorisation des nombres premiers.

L'univers quantique est particulièrement riche et complexe. Il ne peut donc être que difficilement simulable. Ainsi, Richard Feynman nota en 1982 qu'un ordinateur régi par les lois de mécanique quantique serait beaucoup plus performant pour simuler un système quantique que son homologue classique.

### ***1.1.2. Les bases de l'informatique quantique : le formalisme quantique.***

Le formalisme quantique diffère radicalement du formalisme classique. Les objets physiques y sont décrits par des vecteurs, notés  $|\psi\rangle$ , évoluant dans un espace complexe, appelé espace de Hilbert. La norme de ces vecteurs représente la densité de probabilité d'observer le système physique dans l'état  $|\psi\rangle$  avec les grandeurs qui lui sont associées comme l'énergie, l'impulsion, la position etc.

L'équation de Schrödinger régit l'évolution d'un tel vecteur:

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle.$$

$H$  est le hamiltonien c'est-à-dire l'énergie du système.

Une propriété remarquable et fondamentale de cette équation est sa linéarité : toute superposition linéaire de solutions est aussi solution. Ainsi, si  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  sont solutions, alors pour  $\alpha$  et  $\beta$  complexes, le ket  $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$  est aussi solution.

Certaines solutions sont invariantes. Leur énergie est conservée, l'état reste identique à lui-même. On parle alors d'état propre du hamiltonien.

Ces états propres forment une base de l'espace de Hilbert. Ainsi, toute solution  $|\psi\rangle$  de l'équation de Schrödinger pourra être décomposée sur la base des états propres  $|\psi_k\rangle$  et s'écrira :

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle \text{ avec } \sum_k |c_k|^2 = 1.$$

L'informatique classique manipule des objets élémentaires, les bits<sup>1</sup>. Ces bits ne peuvent prendre que deux valeurs 0 ou 1 (par exemple, 0 peut représenter une absence de courant à travers le transistor alors que le courant traverse le transistor dans l'état 1). Un ensemble de bits constituera un registre et un registre permettra d'écrire des nombres en base binaire. Les opérations sur les nombres, sur les registres, sont effectuées par l'intermédiaire de portes logiques. Une seule porte logique manipulant deux bits, la porte NON-ET (NAND) (pour laquelle la sortie est 0 si les deux entrées sont 1) est suffisante pour réaliser toutes les opérations possibles [1].

En informatique quantique, les nombres seront aussi écrits en base binaire et on utilise deux états propres d'un système physique pour cela. Les bits quantiques seront nommés "qubits" et notés  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ .

---

<sup>1</sup> De l'anglais Binary digit

A la différence d'un bit classique, l'équation de Schrödinger permet à un bit quantique d'être dans une superposition des deux états de base. Il s'agira alors d'un état quelconque du qubit, que l'on écrira :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \text{ avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Lors d'une mesure de cet état  $|\psi\rangle$ , on obtiendra l'état propre  $|0\rangle$  avec une probabilité  $\alpha^2$  et l'état propre  $|1\rangle$  avec une probabilité  $\beta^2$ . La mesure en mécanique quantique est un processus irréversible, l'état  $|\psi\rangle$  est détruit.

La superposition quantique n'a pas d'équivalent dans le formalisme classique: un transistor ne peut pas à la fois bloquer et laisser passer le courant!

La mécanique quantique ne se limite pas à la description d'une particule unique. Elle peut décrire tout le registre de qubits. Un état du registre (les valeurs 0 ou 1 prises par les différents qubits) sera décrit par un unique vecteur. Les états propres du registre seront le produit tensoriel des états propres de chacun des  $n$  qubits. Ainsi, les états propres du registre s'écriront :

$$|\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\rangle = |\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varepsilon_n\rangle,$$

avec  $\varepsilon_{1\dots n} = 0$  ou  $1$ .

Les états propres du registre forment un espace de dimension  $2^n$ . La dimension de l'espace de Hilbert augmente exponentiellement avec le nombre de qubits.

Les états propres décrivent tous les nombres compris entre 0 et  $2^n - 1$  de la base décimale. Nous les noterons:

$$|k\rangle = |\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\rangle \text{ avec } k = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\varepsilon_i}.$$

On peut bien entendu placer le registre dans une superposition des états de base. Prenons le cas de la superposition de poids égaux, le ket décrivant l'état s'écrit :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle.$$

Cet état est une superposition de tous les nombres de la base décimale.

Effectuer une transformation, une opération, sur cet état revient à effectuer cette opération sur tous les nombres de la base décimale en même temps.

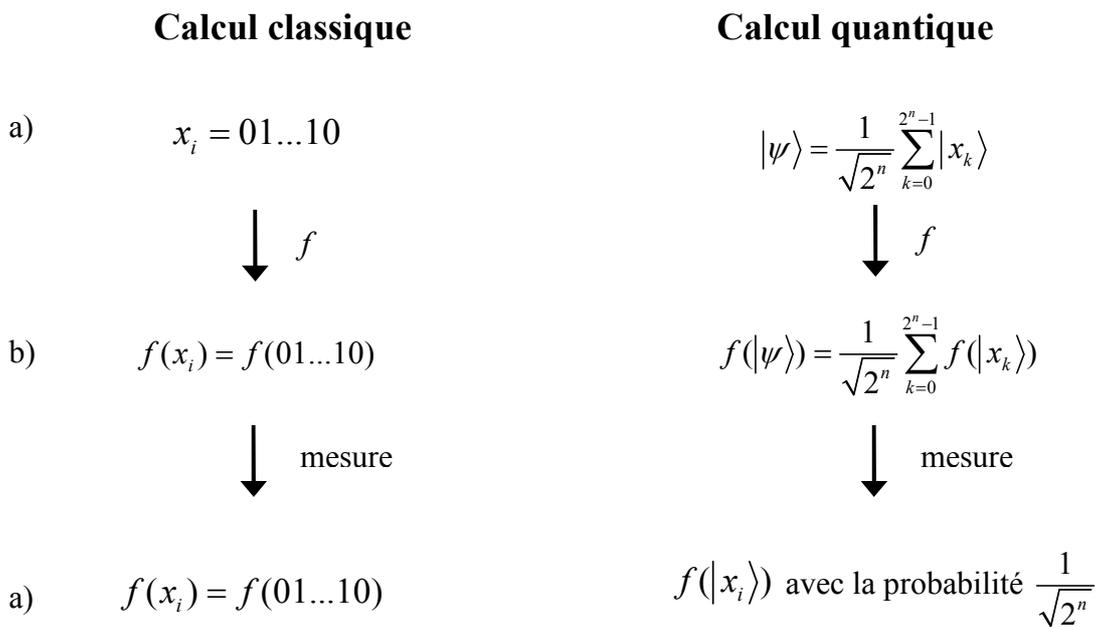
On entrevoit ici le principal attrait de l'informatique quantique. Contrairement à la version classique, un ordinateur quantique peut réaliser des opérations sur tous les nombres en même temps. On imagine le gain de temps et l'accroissement de puissance que cela engendre. Ce point fondamental a été mis en avant en 1985 par Deutsch qui a ainsi introduit le concept de parallélisme quantique [2]

Cependant, cette description de l'information quantique est incomplète. En effet, il a été précisé plus haut que le résultat de mesure donnait lieu à une destruction de l'état initial. On effectue bien les opérations sur les  $2^n$  nombres de la base décimale mais le processus de mesure ne nous permet d'avoir le résultat que pour un seul de ces nombres, nombre qui n'est même pas choisi par l'opérateur mais est donné avec une certaine probabilité (Figure 1).

L'avantage du parallélisme quantique n'apparaît pas clairement dans cette description du calcul quantique car un élément important y manque. Afin de tirer pleinement avantage du parallélisme quantique, il faut utiliser d'astucieux algorithmes. Tout le génie de l'algorithme se cache dans la fonction  $f$  de la Figure 1 qui ne peut pas être identique à celle utilisée pour l'algorithme classique. Transformer des bits en qubits n'est pas suffisant pour réaliser un ordinateur quantique. Il faut ensuite réaliser les "bonnes" opérations.

Il y a actuellement peu d'algorithmes quantiques. Deutsch et Josza furent les premiers à inventer un tel algorithme. On peut aussi citer Shor et son désormais célèbre algorithme de factorisation.

Malgré la recherche intense d'algorithmes quantiques, peu de progrès ont été réalisés dans ce domaine. On ne sait pas si cela est lié au fait qu'il y en a peu ou parce qu'ils sont difficiles à trouver.



**Figure 1: illustration du calcul classique et du calcul quantique.** a) Dans la version classique, chaque bit prend une valeur, 0 ou 1, on décrit ainsi un seul nombre  $x_i$ . Dans la version quantique, on crée un état qui est une superposition de tous les nombres  $x_i$  possibles. b) On effectue ensuite une série d'opérations, représentée comme l'application d'une fonction  $f$  sur un (qu)bit. c) Après la mesure (c'est-à-dire après la lecture du résultat des opérations), on obtient le résultat sur le nombre de départ pour la version classique et le résultat sur un des nombres possibles pour la version quantique. La probabilité d'obtenir le résultat pour le nombre  $x_i$  est  $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ .

Néanmoins, la description probabiliste de l'informatique quantique est aussi rassurante. En effet, avancé sans précaution, le concept de calcul parallèle semble magique. Une seule opération suffit pour obtenir le résultat pour tous les nombres décrit par le registre. La quantité d'information accessible semble alors énorme. En tout cas, beaucoup plus importante que pour des phénomènes régis par les lois de la physique classique. Il a été démontré qu'il n'en était rien. On ne peut pas obtenir plus d'informations des bits quantiques qu'on ne le peut avec des bits classiques. On obtient la même quantité d'information mais, avec un bon algorithme quantique, en un temps plus court [3].

L'informatique quantique inquiète les militaires, les banques, toutes les personnes concernées par la transmission d'informations codées. Elles ont vu dans l'algorithme de Shor un moyen pour déchiffrer leurs informations. Afin que les militaires se fassent vraiment des cheveux blancs, il nous faut maintenant nous interroger sur la réalisation concrète d'éléments de calculs quantiques et les problèmes alors rencontrés.

## I.2. Les critères de DiVincenzo

Dans l'article "Topics in quantum computers", DiVincenzo [4] liste les critères que doit satisfaire un système physique s'il veut se targuer du qualificatif : candidat potentiellement "bon" bit quantique. (Pour plus de détails, on pourra aussi se reporter à la thèse de Lieven Vandersypen [5]).

*L'espace de Hilbert global doit être dénombrable.*

Le nombre de qubits doit être connu avec précision<sup>2</sup>. Nous verrons plus loin qu'il est de plus nécessaire que les qubits interagissent entre eux.

*L'opérateur doit être capable d'initialiser le registre de qubits.*

On comprend en effet que l'état de départ doit être connu. S'il est aléatoire, le résultat des calculs sera peu utile.

Cet état doit aussi être stable. Le niveau fondamental du système doit être atteint. Un système de refroidissement sera sûrement nécessaire.

*Il doit être possible d'effectuer des transformations unitaires sur les qubits*

Il doit être possible de placer les qubits dans une superposition quelconque des états de base. L'opérateur doit alors être capable de contrôler un terme du hamiltonien du système qu'il pourra à loisir allumer ou éteindre. L'évolution du système suivant ce hamiltonien correspondra alors à une étape d'un algorithme.

La condition est même plus contraignante car ces transformations unitaires doivent pouvoir s'appliquer sur deux qubits couplés.

Au même titre qu'il fut démontré que tout calcul classique peut être réalisé avec une seule porte logique, il a été démontré que tout algorithme quantique peut être réalisé avec seulement trois portes logiques quantiques [6]. Deux d'entre elles ne mettent en jeu qu'un seul qubit. Il

---

<sup>2</sup> Ce critère peut sembler évident. Mais il ne faut pas oublier que l'on désire des bits quantiques, donc des objets le plus souvent microscopiques qui ne sont pas aisément dénombrables!

Il y a en tout premier lieu la porte de Hadamard qui permet de créer une superposition de poids égal des deux états de base à partir d'un état propre et dont la matrice caractéristique est donnée ci-dessous :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ donnant lieu aux transformations suivantes } \begin{array}{l} |0\rangle \xrightarrow{H} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1\rangle \xrightarrow{H} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} .$$

La seconde porte à un qubit introduit un déphasage entre les deux états propres. Sa matrice caractéristique est la suivante :

$$S(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l} |0\rangle \xrightarrow{S} |0\rangle \\ |1\rangle \xrightarrow{S} e^{-i\varphi} |1\rangle \end{array} .$$

Il n'est pas obligatoire que  $\varphi$  soit fixé. En revanche, s'il l'est,  $\varphi$  devra être un nombre irrationnel afin que toutes rotations soient réalisables par applications successives de cette matrice [7].

Il y a enfin une porte à deux qubits, la porte CNOT (NON-contrôlé). Elle est constituée d'un qubit cible et d'un qubit de contrôle (Figure 2). Elle change l'état du qubit cible lorsque l'état du qubit de contrôle est  $|1\rangle$ , l'état du qubit de contrôle, quant à lui, n'est pas modifié.

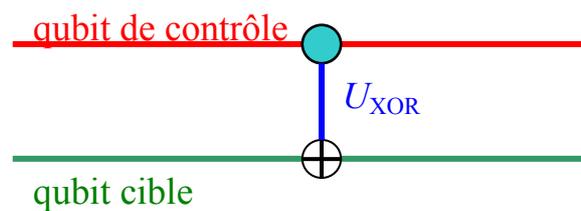


Figure 2 : schéma de la porte Non-Contrôlé.

Dans la base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , si le premier qubit est le qubit de contrôle et le second le qubit cible, la matrice caractéristique de cette porte s'écrit donc :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle effectue donc les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} |00\rangle &\xrightarrow{U} |00\rangle \\ |01\rangle &\xrightarrow{U} |01\rangle \\ |10\rangle &\xrightarrow{U} |11\rangle \\ |11\rangle &\xrightarrow{U} |10\rangle \end{aligned}.$$

***On doit pouvoir réaliser une mesure de l'état d'un qubit.***

Cette mesure sera projective, le qubit sera généralement projeté sur la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , bien qu'il puisse l'être sur une autre base. Cela a peu d'importance. En revanche, le résultat doit être sûr, les erreurs dues à la mesure de l'état doivent être très faibles.

***Le temps de cohérence doit être suffisamment long.***

Le système physique va interagir avec l'environnement. Il en résulte une perte des conditions initiales du qubit en absence de manipulations par l'expérimentateur.

On appelle temps de cohérence le temps typique pendant lequel le système reste dans l'état initial.

La décohérence va être responsable d'erreurs. Le résultat du calcul quantique ne sera pas uniquement dû aux actions extérieures de l'opérateur implémentant l'algorithme quantique mais aussi aux interactions non contrôlées entre les qubits et leur environnement. En présence d'une grande décohérence, le résultat sera complètement aléatoire donc inutilisable. Néanmoins, il existe des algorithmes permettant de corriger les erreurs dues à la décohérence. Celle-ci ne doit, malgré tout, pas être trop importante.

Le temps de cohérence est à comparer à la durée typique d'exécution d'une porte logique quantique. La superposition quantique doit être préservée pendant ce temps de fonctionnement. Ainsi, si on appelle  $\tau_{pl}$  le temps de fonctionnement d'une porte et  $\tau_{co}$  le temps de cohérence des qubits, les codes de correction des erreurs peuvent s'appliquer si:

$$\frac{\tau_{pl}}{\tau_{co}} < 10^{-4} .$$

Il doit être possible de réaliser dix mille opérations logiques pendant le temps de cohérence. Les algorithmes de correction des erreurs ont été une grande avancée. La décohérence semblait complètement briser le rêve d'un ordinateur quantique. Les algorithmes l'ont rendu viable même en présence de décohérence. Sans cette avancée, due en premier lieu à Shor, l'étude des qubits n'aurait sûrement pas eu autant d'engouement.

Cette nécessité d'un long temps de cohérence est le critère le plus contraignant de la liste de DiVincenzo. Il mobilise une grande part de la recherche actuelle sur les qubits qui essaie de trouver un système physique ayant un long temps de cohérence.

A ces cinq critères peut s'en ajouter un dernier, plus prosaïque, plus pratique :

***Les éléments de calcul doivent être intégrables dans de grandes structures et interconnectables comme le sont actuellement les transistors.***

Deux théoriciens américains Mark Dykman et Phil Platzman proposèrent en 1999 dans un article publié dans *Science* [8] de réaliser des qubits à partir d'électrons "flottant" au-dessus d'un film d'hélium liquide. La partie suivante sera dédiée à la présentation de cette proposition et commencera par une présentation de la physique des électrons au-dessus de l'hélium.

### I.3. La proposition de Dykman et Platzman

#### I.3.1. Quelques propriétés des électrons au-dessus de l'hélium

Lorsqu'un électron s'approche d'un isolant, il induit une séparation des barycentres des charges positives et négatives. Apparaît alors une charge positive à la surface de l'isolant qui attire l'électron. Cette charge image est liée à la constante diélectrique (qui n'est rien d'autre qu'une mesure de la facilité ou de la difficulté à séparer les barycentres des charges positives et négatives). L'hélium étant un gaz rare, ses couches énergétiques sont complètes, et un élément très léger, il est difficile de séparer les barycentres des charges. Sa constante diélectrique est faible, la charge induite par polarisation l'est aussi.

Par ailleurs, l'électron ne peut pas s'approcher infiniment près de la surface à cause de la répulsion exercée par les électrons de l'hélium. On modélise cette répulsion par une barrière de potentielle. Elle est estimée à environ 1eV. Afin d'obtenir des résultats analytiques, cette barrière sera supposée impénétrable.

En supposant que le film d'hélium occupe le demi-espace inférieur et que l'électron est situé dans le demi-espace supérieur (voir la Figure 3), on peut écrire le potentiel auquel il est soumis sous la forme suivante[18] :

$$\begin{cases} V = \frac{\Lambda e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} & \text{pour } z \geq 0 \\ V = +\infty & \text{pour } z \leq 0 \end{cases} \quad \text{Équation 1}$$

Où  $\Lambda e = \frac{(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)} e$  est la charge image qui apparaît par polarisation dans le diélectrique.

$\epsilon$  est la constante diélectrique du matériau. Elle est égale à 1,057.

Avec cette modélisation, l'électron est piégé verticalement par un potentiel de type coulombien unidimensionnel.

Il présente alors un spectre type atome d'hydrogène dont les énergies sont données par :

$$E_n = -\frac{(\Lambda e^2)^2 m}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2} = -Ry \frac{1}{n^2} \quad \text{pour } n=1, \dots, +\infty$$

$$\text{Avec } Ry = \frac{(\Lambda e^2)^2 m}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 160 \text{ GHz} = 7.5 \text{ K}$$

$Ry$  est l'équivalent de la constante de Rydberg pour le système constitué d'un électron et sa charge image.

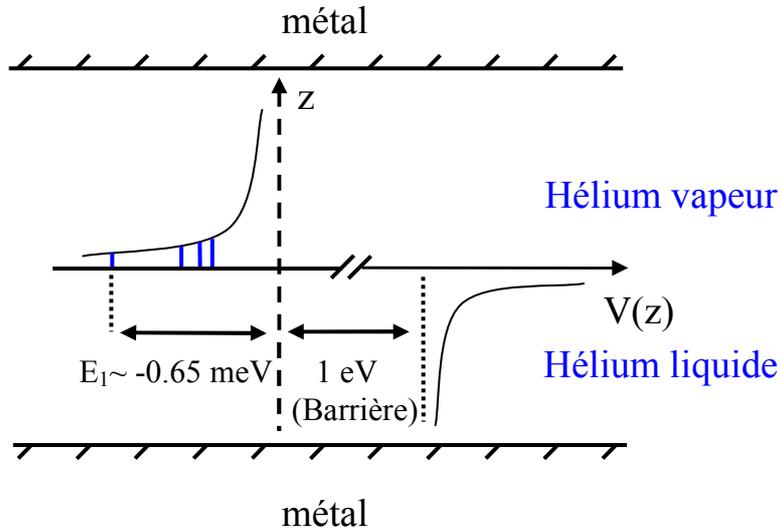


Figure 3 : schéma du potentiel de confinement d'un électron au-dessus d'un film d'hélium. L'axe horizontal représente les variations du potentiel créé par la charge image et la répulsion des électrons de l'hélium. Les états d'énergie de l'électron au-dessus de l'hélium sont des états de Rydberg.

L'énergie du niveau fondamental est 0.65 meV et on peut induire des transitions entre cet état et le premier état excité par une micro-onde de fréquence 120 GHz.

L'extension typique des fonctions d'onde est donnée par le rayon de Bohr relatif à ce système :

$$a_B = \frac{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2}{m\Lambda e^2} \approx 7.6 \text{ nm}.$$

Comparé au rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène (0.05 nm) , ce rayon de Bohr est immense. Cela tient au fait que, l'hélium étant très peu polarisable, la charge image est extrêmement faible. L'électron est peu attiré par la surface.

La distance moyenne entre l'électron et l'hélium est, elle aussi, grande. Par exemple, pour le niveau fondamental, elle vaut 11,4 nm et pour le premier état excité 45.6 nm.

L'électron au-dessus de l'hélium "vole" donc assez loin de la surface, surface qui de plus présente peu de rugosité car l'hélium est liquide. Il s'y déplace donc avec une très grande mobilité. Afin de le "conserver", il conviendra de le confiner grâce à un jeu d'électrodes chargées négativement.

En conclusion, on gardera à l'esprit que l'électron est piégé assez loin de la surface, par une surface parfaitement lisse (à l'exception des ondes capillaires excitées thermiquement) qui de plus l'isole du substrat. Ceci est le point clé qui fait des électrons sur l'hélium un système intéressant pour la réalisation de qubit.

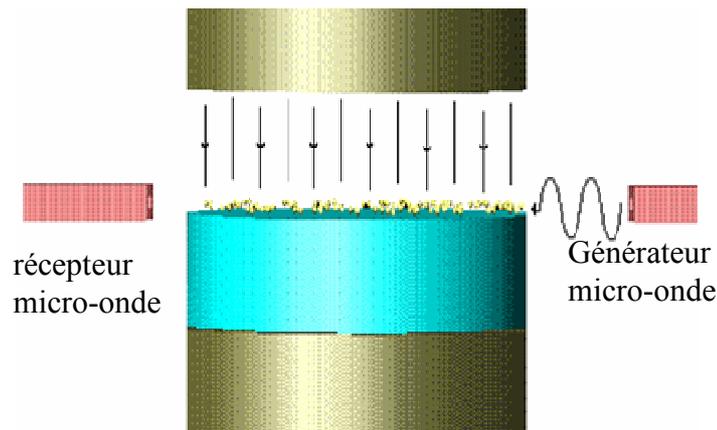
*Remarques :*

Le spectre trouvé précédemment n'est valable que pour un film d'hélium épais. Dans notre expérience, le film d'hélium n'est pas très épais. On peut attendre une modification du spectre à cause de l'apparition de charges induites dans le diélectrique qui maintient le film d'hélium. On peut démontrer [9] que le spectre n'est modifié par la présence du substrat que pour des films d'épaisseur inférieure à 100 nm ce qui ne sera pas notre situation.

Le spectre a été trouvé en supposant que le potentiel  $V_0$  était infini (la surface est une barrière impénétrable, la fonction d'onde de l'électron s'annule sur la surface). Cette approximation peut sembler grossière d'autant plus que l'interface liquide-vapeur n'est pas discontinue. Le profil de densité est plutôt compliqué et la largeur de l'interface est estimée à 6-8 Å [10]. Néanmoins, cette approximation se justifie par le fait que l'énergie du fondamental  $E_1=0.65$  meV est très faible devant la barrière  $V_0\sim 1$  eV mais aussi par le fait que la distance moyenne électron-interface  $\langle z \rangle \sim 110$  Å est grande devant la largeur de l'interface.

L'écart entre les niveaux d'énergie peut-être modifié grâce à un champ électrique appliqué perpendiculairement à la surface. L'électron se couple au champ (effet Stark) ce qui ajoute le terme  $V=-eEz$  au hamiltonien décrivant l'électron et sa charge image. Les variations des fréquences de transition en fonction du champ électrique peuvent être calculées (voir insert Figure 5).

En 1976, Grimes utilise cette modification des fréquences de résonance pour réaliser une spectroscopie des niveaux d'énergie des électrons au-dessus de l'hélium. Il irradie une surface chargée, qui est située entre les électrodes d'un condensateur, par une onde de fréquence fixe 220 GHz (Figure 4). En modifiant la tension aux bornes du condensateur, il modifie le champ électrique vu par les électrons et l'écart entre les niveaux. Il observe alors un pic d'absorption lorsque l'écart entre un niveau excité et le fondamental devient égal à la fréquence de travail (Figure 5).



**Figure 4 :** Schéma de l'expérience réalisé par Grimes pour effectuer une spectroscopie des électrons sur l'hélium. Le film d'hélium est situé entre les deux électrodes d'un condensateur. Des électrons sont déposés à la surface de l'hélium. Lorsque l'écart entre un niveau excité Hélium et le fondamental est en résonance avec l'onde à 220 GHz, Grimes observe un maximum d'absorption.

Les résultats pionniers de Grimes ont permis de confirmer expérimentalement la nature hydrogénoïde du spectre des électrons au-dessus de l'hélium. Ses expériences permettent aussi de confirmer que l'hypothèse d'une interface liquide-vapeur bien définie n'engendre que peu de différence (5% environ) entre la modélisation et les résultats expérimentaux.

En revanche, il existe des modélisations plus compliquées décrivant plus finement la structure diffuse de l'interface [11]. Ces théories reproduisent plus fidèlement les résultats expérimentaux. L'accord atteint alors 0.6 %.

La modélisation hydrogénoïde suffira à notre propos et sera le modèle qui décrira les qubits.

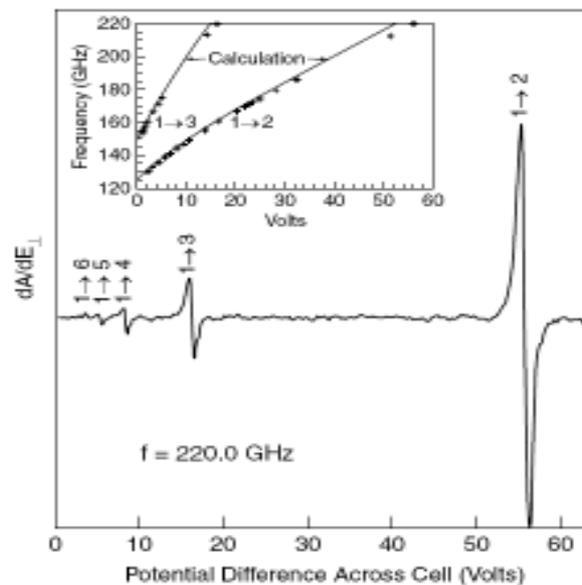


Figure 5 : Dérivée de l'absorption en fonction de la différence de potentiel appliquée au condensateur pour une fréquence de 220 GHz et une température de 1.2 K. L'effet Stark décale les fréquences de transitions entre l'état fondamental ( $m=1$ ) et les états excités ( $m=2,3,\dots$ ) qui deviennent alors en résonance avec l'onde appliquée. Insert : Variation de la fréquence de transition avec la tension électrique appliquée aux bornes du condensateur. Les croix sont les points expérimentaux tandis que les courbes en trait plein sont les prédictions théoriques.

### I.3.2. *Le qubit proprement dit*

On voit se dessiner la proposition de qubit faite par Platzman et Dykman [8].  
Suivons DiVincenzo et sa liste pour décrire les propriétés de ce qubit

#### I.3.2.a. *Un jeu discret d'états quantiques*

Pour réaliser un qubit, il nous faut en tout premier lieu un système à deux états.

Le fondamental et le premier état excité des électrons au-dessus de l'hélium seront donc les deux états du qubit.

Néanmoins, le premier critère de DiVincenzo stipule que les qubit doivent être dénombrables. Les électrons devront donc être localisés dans le plan [12]. Pour ce faire, un potentiel de confinement sera appliqué sur les électrons par l'intermédiaire d'un réseau d'électrodes. On peut imaginer un potentiel périodique suivant  $x$  et  $y$ , chaque électron occupant un minimum du potentiel (Figure 6).

Les niveaux d'énergies parallèles seront eux aussi quantifiés. Il nous faut vérifier que l'écart entre niveaux  $n$  est pas du même ordre de grandeur que celui entre les états du qubit afin de ne pas exciter les états parallèles au lieu des états perpendiculaires.

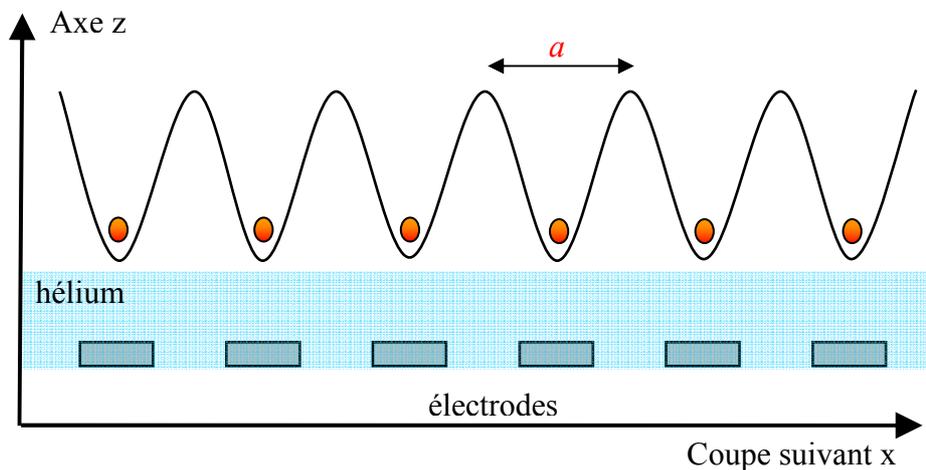


Figure 6 : Potentiel périodique confinant les électrons dans le plan. Coupe suivant  $x$ , le profil présente la même périodicité suivant  $y$ . La période spatiale est  $a=0.5 \mu\text{m}$ .

Appelons  $a$  la périodicité spatiale du potentiel et prenons la égale à  $0.5 \mu\text{m}$ .

Le potentiel créé par les électrodes n'est pas purement harmonique. La décroissance suivant  $z$  est exponentielle. Les longueurs d'onde les plus courtes décroissent très rapidement et le potentiel vu par l'électron sera presque sinusoïdal.

Il peut alors s'écrire sous la forme:

$$V(x, y, z) = V_0 e^{-qz} (\cos(qx) + \cos(qy)) = V_d (\cos(qx) + \cos(qy)).$$

Où  $q$  est la fréquence spatiale  $q = 2\pi/a$  et  $V_0$  le potentiel appliqué à l'électrode.

Si on ne veut pas appliquer sur les électrodes des potentiels trop importants, l'épaisseur d'hélium  $d$  ne doit pas être plus grande que la périodicité spatiale.

La décroissance exponentielle du potentiel suivant  $z$  impose donc que:

$$d \leq a.$$

Pour des déplacements de l'électron faibles devant  $a$ , le potentiel se réduit à celui d'un oscillateur harmonique de pulsation caractéristique:

$$\omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{4\pi^2 e V_d}{m a^2}}.$$

L'écart entre les niveaux d'énergie parallèles sera alors :

$$\Delta E = \hbar \omega = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{e V_d}{m}}.$$

Si on applique 200 mV sur les électrodes, l'amplitude du piège  $V_d$  vaudra 0.4 mV pour une hauteur d'hélium de  $0.5 \mu m$ . La fréquence de transition sera alors  $f_c = 17$  GHz qui est d'un ordre de grandeur inférieure à celle des états perpendiculaires. Pour des températures inférieures à 0.8 K, le système sera dans l'état fondamental des vibrations horizontales.

Afin de satisfaire pleinement le critère de DiVincenzo, il faut s'assurer que chaque piège ne contienne qu'un seul électron.

*Remarques :*

Le potentiel appliqué sur les électrodes sera aussi à l'origine d'un champ électrique qui décalera par effet Stark la fréquence de transition. Le champ électrique vu par l'électron et la fréquence de transition dépendront de l'épaisseur du film d'hélium.

La proposition originale de Platzman et Dykman concerne les états perpendiculaires. On pourrait tout aussi bien considérer et utiliser les états de vibration dans le piège si celui-ci est anharmonique<sup>4</sup>. En utilisant une fréquence appropriée, seuls deux niveaux peuvent être peuplés.

---

<sup>4</sup> Dans le cas où le piège serait harmonique, l'écart entre les niveaux d'énergie est constant. Il devient alors difficile d'isoler deux niveaux particuliers pour faire un qubit.

### I.3.2.b. *initialisation du qubit*

Le passage de l'état fondamental vers le premier état excité se fera par une onde micro-onde de fréquence 120 GHz. Cette fréquence correspondant à une température de 5.8 K. en absence de toute excitations extérieures, pour des températures inférieures à 1 K, seul le niveau fondamental sera peuplé. Le spectre étant anharmonique, l'onde ne peut permettre le passage qu'entre les deux niveaux considérés.

Les électrons sur l'hélium peuvent être vu comme un système à deux niveaux et former un qubit. L'état fondamental est atteint pour une température inférieure à 1 K.

Une telle température nécessite l'emploi d'un cryostat. Nous verrons plus tard qu'il est nécessaire que l'expérience soit réalisée à des températures inférieure à 30 mK. Elle prendra place dans un cryostat à dilution.

### I.3.2.c. *opérations unitaires et portes logiques à deux qubits*

L'opérateur contrôle le passage de l'état fondamental vers le premier état excité en appliquant un champ hyperfréquence polarisé verticalement. Il a à sa disposition un terme du hamiltonien qu'il peut à loisir allumer ou éteindre.

En se restreignant aux deux premiers états et en prenant l'énergie du fondamental comme référence des énergies, on peut décrire le qubit par le hamiltonien effectif suivant:

$$H = \hbar\omega_0 |1\rangle\langle 1| + e l_d E_{RF} \cos(\omega t) (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|),$$

$$\text{avec } l_d = \langle 0|z|1\rangle = \langle 1|z|0\rangle.$$

Le premier terme du hamiltonien décrit les deux niveaux d'énergie tandis que le second décrit l'interaction dipolaire entre l'électron et le champ micro-onde (illustration Figure 7). Seule l'absorption et l'émission stimulée sont décrites par ce hamiltonien.

Nous nous sommes placés dans l'approximation dipolaire. La longueur dipolaire  $l_d$  est supposée petite devant la longueur d'onde du champ. Pour une fréquence de transition de 120 GHz, la longueur d'onde est de l'ordre du millimètre ( $\lambda = 2,5$  mm). La longueur dipolaire (4.25nm) est donc bien plus petite.

Cette description du couplage de l'électron avec le champ électrique est une approche perturbative. On suppose que les fonctions d'onde ne sont pas modifiées.

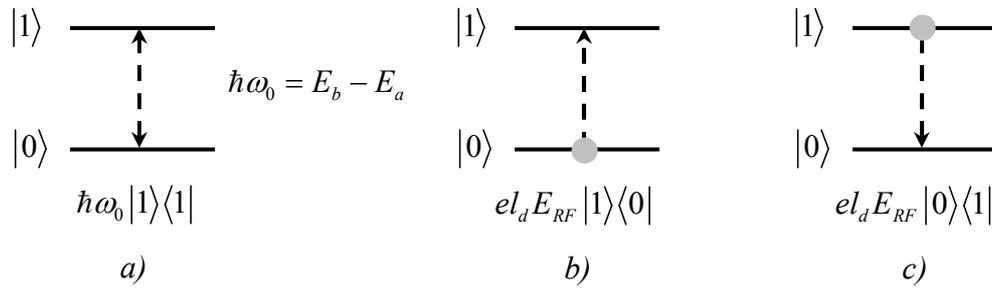


Figure 7 : illustrations des différents termes décrit par le hamiltonien effectif. *a)* décrit un système à deux niveaux, le fondamental est pris pour référence des énergies. *b)* décrit l'absorption stimulée. *c)* décrit l'émission stimulée.

La résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas résonnant ( $\omega = \omega_0$ ) donne:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int H(t) dt} |\psi(0)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = R(\nu) |\psi(0)\rangle.$$

$$\text{avec } R(\nu) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu t) & -i \sin(2\pi\nu t) e^{-i\omega_0 t} \\ \sin(2\pi\nu t) & i \cos(2\pi\nu t) e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}.$$

Le terme de couplage induit des oscillations de Rabi (oscillations entre le fondamental et le premier état excité) à la fréquence  $\nu$  :

$$h\nu = e l_d E_{RF},$$

$$\nu = 0.1 \text{ GHz pour } E_{RF} = 100 \text{ V/m}$$

Une impulsion de durée  $1/2\nu$  va transformer l'état  $|0\rangle$  en état  $-i|1\rangle$  alors qu'une impulsion de durée  $1/4\nu$  transformera ce même état en l'état  $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ .

En absence de champ radio-fréquence, la solution de l'équation de Schrödinger est fort simple. La matrice s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = S(t) |\psi(0)\rangle,$$

$$\text{avec } S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}.$$

L'évolution libre du qubit introduit une phase entre les deux états propres et réalise alors la porte de phase  $S(\omega_0 t)$ .

La porte de Hadamard, quant à elle, peut être réalisée en appliquant successivement une impulsion de durée  $1/2\nu$  et en laissant évoluer le système pendant la durée  $t = \frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{1}{8\nu}$  :

$$H = R\left(\frac{1}{4\nu}\right) \cdot S\left(\frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{1}{8\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le temps nécessaire pour exécuter une porte de Hadamard est  $\tau_H = \frac{3}{8\nu} + \frac{\pi}{2\omega_0} \approx \frac{3}{8\nu} \propto \frac{1}{\nu}$ .

Le temps d'exécution de la porte de Hadamard est déterminé par la fréquence des oscillations de Rabi.  $\nu$  représente la fréquence d'horloge de cet ordinateur quantique. Sa valeur peut être choisie en jouant sur l'amplitude du champ micro-onde  $E_{RF}$ .

Nous venons de voir comment réaliser des portes logiques à un qubit. Il nous faut aussi réaliser des portes logiques à deux qubits. Plusieurs type de portes à deux qubits peuvent être réalisés. Nous allons décrire la réalisation de la porte XOR (CNOT en anglais) car, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, elle finit la liste des trois portes universelles. De plus, cette porte est d'une grande importance pour la réalisation des algorithmes correcteurs d'erreurs [4].

Pour cela, il est nécessaire que les qubits interagissent. Tout naturellement, ils vont interagir via l'interaction coulombienne (Figure 8).

Le hamiltonien d'interaction entre deux qubits s'écrit :

$$H_{int} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}},$$

Où  $r_{12}$  est la distance séparant les deux électrons.

Si la distance inter-électrodes  $r$  est grande devant la hauteur des électrons par rapport au film d'hélium, le hamiltonien d'interaction se réduit à [12] :

$$H_{int}(z_1, z_2) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{(z_1 - z_2)^2}{2a^2}\right) \quad \text{Équation 2}$$

Où  $z_1, z_2$  sont respectivement la hauteur de l'électron 1 et de l'électron 2 par rapport au film d'hélium.

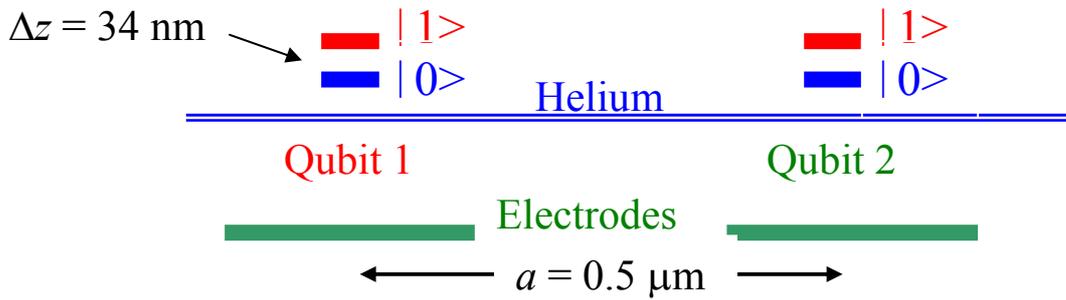


Figure 8 : schéma d'une géométrie à deux qubits. La distance moyenne entre les qubits dépend de l'état dans lequel chacun se trouve.

Le hamiltonien d'interaction est diagonal dans la base des états propres. Si on appelle  $\omega_1$  la fréquence de transition du fondamental vers le premier état excité pour le qubit 1 et  $\omega_2$  la fréquence de transition du fondamental vers le premier état excité pour le qubit 2 alors les niveaux d'énergie s'écrivent :

$$E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \hbar \omega_1 + \varepsilon_2 \hbar \omega_2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \hbar \Delta\omega \quad \text{Équation 3}$$

Où  $\varepsilon_{1,2}$  prennent pour valeur 0 ou 1 suivant l'état du qubit qu'ils décrivent (les états propres s'écrivent donc  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$ ).

$$\Delta\nu_{XOR} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar a^3} (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)^2 = \frac{(4.5a_B)^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar a^3}$$

est le décalage en fréquence induit par le champ électrique du qubit voisin.

$\bar{z}_0, \bar{z}_1$  sont les hauteurs moyennes par rapport au film d'hélium.

Le décalage en fréquence  $\Delta\nu_{XOR}$  vaut environ 3 GHz sans champ électrique statique appliqué. La dépendance avec le champ électrique a lieu par l'intermédiaire des distances moyennes  $\bar{z}_0, \bar{z}_1$ .

Suivant l'équation 2, on observe un décalage en fréquence supplémentaire  $\Delta\omega$  lorsque les deux électrons sont à des hauteurs différentes par rapport au film d'hélium c'est-à-dire lorsqu'ils sont dans des états différents [13].

On peut remarquer que les qubits 1 et 2 jouent des rôles symétriques si leur fréquence de transition  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont identiques. Il est nécessaire pour réaliser une porte XOR de rendre les rôles non symétriques afin d'avoir un qubit de contrôle et un qubit cible. Ceci peut-être simplement obtenu en appliquant des champs électriques statiques différents sur les qubits.

On modifie ainsi par effet Stark le spectre d'un des deux qubits. Le spectre devient celui de la Figure 9.

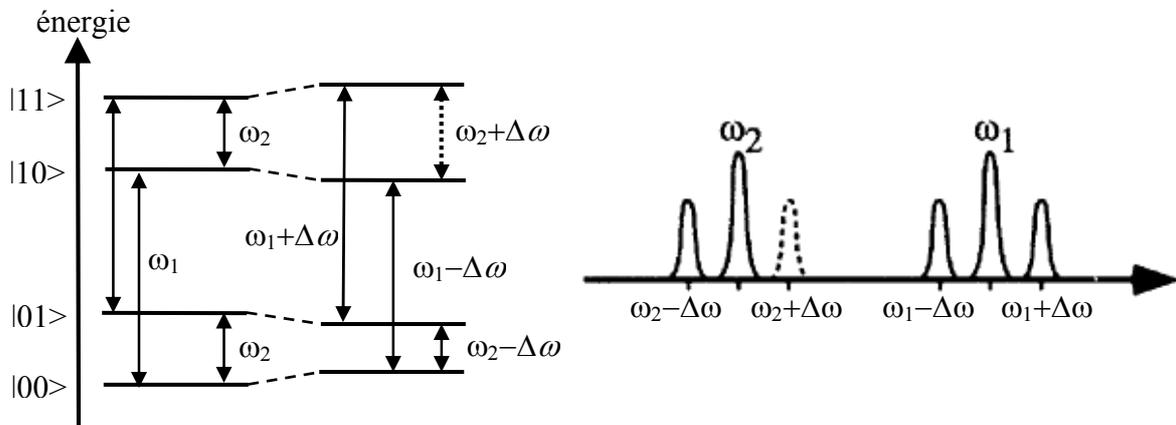


Figure 9 : (a) niveaux d'énergie des deux électrons sans et avec couplage entre les électrons. (b) Spectre de résonance des deux électrons. La ligne en pointillée montre la fréquence pour laquelle les deux qubits se comportent comme une porte XOR, le qubit 1 étant le qubit de contrôle et le qubit 2, le qubit cible.

Une impulsion à la fréquence  $\omega_2 + \Delta\omega$  de durée  $\frac{1}{2(\omega_2 + \Delta\omega)}$  va engendrer une transition  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  (à une phase près) du qubit 2 si le qubit 1 est dans l'état  $|1\rangle$ . Le qubit 1 est insensible à cette impulsion. En appliquant ensuite une porte  $S(\omega_0 t)$ , on peut réaliser une porte XOR de matrice caractéristique la matrice U présentée au I.2.

Le décalage en fréquence  $\Delta\omega$  limite la fréquence d'horloge à 3 GHz dans le cas le plus favorable lorsqu'il n'y a pas de champ pressant appliqué sur l'électron. Le champ pressant va réduire la distance moyenne par rapport au film d'hélium ce qui réduira le décalage en fréquence.

### I.3.2.d. Lecture projective du qubit

L'avant dernier critère de DiVincenzo requiert une lecture projective des qubits. Les électrons seront détectés grâce à un SET (single Electron Transistor, transistor à électron unique). Les principes de fonctionnement des SETs seront vu au chapitre suivant.

Nous verrons ensuite (chapitre III) que le SET, peut permettre une lecture projective s'il n'est pas trop bruyant. Une autre méthode, indépendante de la qualité du SET, sera elle aussi exposée dans la troisième partie.

### *I.3.2.e. Un long temps de décohérence*

Afin de décrire et prédire le temps de décohérence d'un électron au-dessus de l'hélium, il nous faut décrire son couplage avec l'environnement. Le couplage s'établit à travers divers processus que nous allons présenter ci-dessous. Le détail des arguments théoriques pourra être trouvé dans les références [8,12,14,15]. Nous ne présenterons pas le détail des calculs. En revanche, pour chaque mécanisme de couplage, l'évolution des temps de thermalisation et de déphasage en fonction des paramètres pertinents d'un point de vue expérimental sera présentée. Ainsi, nous nous concentrerons en particulier sur l'évolution avec le champ électrique extérieur ( $E$ ), avec la fréquence du piège ( $\omega_{||}$ ), la température ( $T$ ) et la distance SET-électron ( $d$ ).

Ce traitement pourra paraître laborieux mais il semble nécessaire car les temps de relaxation et de déphasage n'évoluent pas linéairement avec les différentes grandeurs précédentes, notamment avec  $E$  et  $\omega_{||}$ .

La géométrie de l'échantillon est telle que lors du piégeage d'un électron la fréquence caractéristique du piège se situe aux alentours de 40 GHz. Nous pouvons faire varier cette fréquence sur la plage [20 GHz, 60 GHz].

Au cours des expériences, il est apparu plus facile de piéger un électron avec un fort champ électrique ( $\sim 4 \cdot 10^5$  V/m) qu'avec un champ faible ( $\sim 5 \cdot 10^4$  V/m). La plupart des expériences ont donc été réalisées avec ce fort champ électrique alors que les estimations de [14] ont été faites pour un champ nul et un champ de  $3 \cdot 10^4$  V/m. Nous avons donc tracé l'évolution des temps de relaxation et de déphasage pour des amplitudes de champ électrique variant entre 0 V/m et  $5 \cdot 10^5$  V/m.

La distance SET-électron est idéalement 500 nm dans les estimations de Dykman et al. Cette distance varie dans notre dispositif expérimental [se référer à la description de l'échantillon, partie ]. La distance maximale est environ 500 nm mais au plus proche de l'électron, elle n'est que de 100 nm.

L'évolution des temps de relaxation et de déphasage a nécessité le calcul des fonctions d'onde, de l'énergie, des distances moyennes par rapport au film d'hélium en fonction du champ électrique extérieur pour l'état fondamental et le premier état excité. Ces calculs (numériques) ont été réalisés avec le logiciel FlexPDE. Les calculs des intégrales faisant intervenir des fonctions de Bessel modifiées ont, quant à eux, été réalisés avec le logiciel Mathematica.

Le chapitre suivant est dédié au temps de décohérence. Nous présentons tout d'abord les notions de temps de relaxation et de temps de déphasage. Ensuite, les différents mécanismes de décohérence sont présentés séparément. Nous expliquerons entre autre le rôle fondamental du confinement.

La fréquence d'horloge du qubit peut être choisie en jouant sur l'amplitude du champ micro-onde. En revanche, elle ne peut pas excéder 3 GHz (c.f. I.3.2.d). L'amplitude du champ micro-onde définit la fréquence d'horloge. Sans grande difficulté, elle peut être de 100 V/m (1000V/m) impliquant une fréquence d'horloge de 100 MHz (1 GHz). Le temps de décohérence doit donc être supérieur à  $10^{-4}$  s ( $10^{-5}$  s).

## I.4. Temps de décohérence

### I.4.1. Temps de relaxation et temps de déphasage

La décohérence est par définition la perte de l'état initial du qubit. Les qubits étant décrits dans un espace complexe cette perte de l'état initial intervient de deux manières. Il peut s'agir d'une transition d'un état propre vers un autre. On parle alors de relaxation (ou thermalisation). Il peut aussi y avoir une perte de la phase initiale. On parle alors de déphasage.

Nous allons dans un premier temps expliciter la notion de relaxation.

Considérons un qubit soumis à une perturbation extérieure  $V(t)$ . Le qubit est placé dans l'état  $|1\rangle$  et on s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la probabilité  $p_1$  d'être dans cet état (Figure 10).

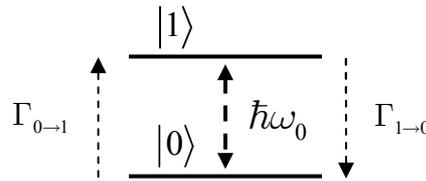


Figure 10 : Système à deux niveaux soumis à une perturbation extérieure  $V(t)$  induisant des transitions entre les deux états.

On appelle  $\Gamma_{0\rightarrow 1}$  le taux de transition de l'état  $|0\rangle$  vers l'état  $|1\rangle$  et  $\Gamma_{1\rightarrow 0}$  le taux de transition de l'état excité vers le fondamental. L'évolution de  $p_1$  est donnée par l'équation :

$$\frac{dp_1}{dt} = p_0\Gamma_{0\rightarrow 1} - p_1\Gamma_{1\rightarrow 0}.$$

Les taux de transition, quant à eux, sont donnés par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma_{1\rightarrow 0} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 1|V(t)|0\rangle|^2 \delta(\hbar\omega_0 - \hbar\omega),$$

$$\Gamma_{0\rightarrow 1} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 0|V(t)|1\rangle|^2 \delta(\hbar\omega_0 - \hbar\omega).$$

Ils se révèlent être identiques car  $|\langle 0|V(t)|1\rangle|^2 = |\langle 1|V(t)|0\rangle|^2$ . Ils seront notés  $\Gamma$  par la suite.

Ajouter au fait que la somme des probabilités est égale à 1, la probabilité d'observer l'électron dans l'état excité est donné par :

$$\frac{dp_1}{dt} + 2\Gamma p_1 = \Gamma$$

$p_1$  décroît exponentiellement avec une constante de temps  $T_1 = 1/2\Gamma$ .

$T_1$  est appelé temps de relaxation. Il s'agit de la constante de temps avec laquelle le système retourne à l'équilibre.

La transition ne peut avoir lieu que si l'énergie est conservée. L'énergie libérée est absorbée par l'environnement. Ainsi, seules les contributions de  $V(t)$  à la fréquence de transition du qubit  $\omega_0$  seront responsables de la thermalisation.

Intéressons nous maintenant à la perte de la phase d'origine.

Considérons un état quelconque du qubit:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp(-i\frac{\varphi}{2})|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp(i\frac{\varphi}{2})|1\rangle.$$

La perte de la phase se traduira une modification de  $\varphi$  au cours du temps. On peut montrer [16] que les variations de  $\varphi$  sont liées aux fluctuations basses fréquence de  $V(t)$ .

Comme  $V(t)$  est une perturbation du hamiltonien décrivant le qubit et que les fluctuations  $V(t)$  qui nous intéressent sont lentes par rapport aux constantes de temps propres au qubit ( $1/\omega_0$ ), la phase  $\varphi$  peut être décrite sous l'approximation WKB:

$$\varphi = \int_0^t \omega_0(t')dt',$$

$\delta E(t) = \hbar\omega_0(t)$  est toujours l'écart énergétique entre les deux états mais fluctue (lentement) au cours du temps sous l'action de  $V(t)$ .

Etant liée aux fluctuations de  $V(t)$ , l'évolution de la phase peut être vue comme un phénomène de diffusion [14] dont la variance est proportionnelle au temps :

$$\delta\varphi^2 \propto \Gamma_\varphi t,$$

où  $\Gamma_\varphi$  est le taux de déphasage.

Par analogie avec  $T_1$ , on définit le temps de déphasage par  $T_2 = 1/2\Gamma_\varphi$ . Il correspond au temps au bout duquel on peut observer une différence de phase significative entre l'état initial et l'état considéré.

#### **I.4.2. Mécanismes de décohérence**

##### *I.4.2.a. Interaction avec les atomes de la vapeur*

Afin de limiter les collisions entre les électrons et l'hélium, il convient de réduire au minimum la densité d'hélium en phase gazeuse. Pour des températures inférieures à 100 mK, cette densité est quasiment nulle. Ce mécanisme ne participe alors plus à la décohérence.

##### *I.4.2.b. Interaction avec la surface.*

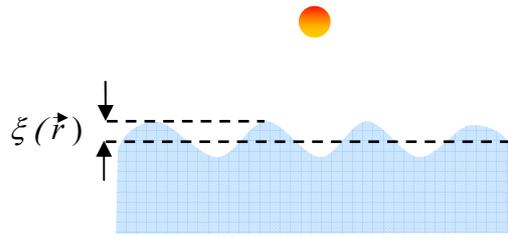
Les électrons interagissent avec les ondes déformant la surface de l'hélium. On peut tout d'abord répertorier les phonons. Existents aussi des ondes capillaires qui se propagent à la surface de l'hélium. Quantifiées, elles sont appelées riplons.

Les riplons comme les phonons vont modifier la distance électron-hélium. Le potentiel d'interaction entre l'électron et la charge image devra en tenir compte.

Il s'écrira alors (voir Figure 11 pour illustration):

$$V = \frac{\Lambda e^2}{z} \longrightarrow V = \frac{\Lambda e^2}{z - \xi(\vec{r})}$$

Où  $\Lambda e = \frac{(\varepsilon - 1)}{4(\varepsilon + 1)} e$  est la charge image qui apparaît dans l'hélium et  $\xi(\vec{r})$  le déplacement de la hauteur d'hélium lors du passage d'un riplon ou d'un phonon.



**Figure 11 : les oscillations de la surface modifient la distance hélium-électron. Ces ondes vont être responsables de la désexcitation des électrons.**

La déformation de la surface n'entraîne pas seulement une modification de l'interaction électron-charge image. Elle modifie aussi les conditions aux limites que doit satisfaire la fonction d'onde [17]. Celle-ci ne doit plus s'annuler sur une surface plane mais sur une surface courbe. La cinétique de l'électron va en être modifiée. Pour de faibles fréquences (inférieure à 6 GHz), la surface va entraîner l'électron (et inversement) alors que pour des fréquences plus élevées, l'électron oscillera dans les "creux" de la déformation  $\xi(\vec{r})$  [18].

Pour des excitations de grande longueur d'onde, on supposera que la fonction d'onde de l'électron s'adapte aux modifications de la surface et continue à s'annuler au niveau de l'interface. Il s'agit de l'approximation adiabatique [19].

Le couplage avec la surface est traité de manière perturbative. On effectue un développement du potentiel d'interaction  $V$  en tenant compte de l'annulation de la fonction d'onde sur une surface curviligne. Apparaît alors dans le hamiltonien des fonctions de Bessel modifiée traduisant le passage aux coordonnées curvilignes.

L'hypothèse adiabatique permet de rendre compte d'une modification de la cinétique de l'électron ce que ne permet pas un simple développement perturbatif du potentiel d'interaction  $V(t)$ . La validité et la pertinence de l'approximation adiabatique ont été confirmées expérimentalement [19] par des mesures de conductivité.

Le développement au premier ordre décrit le couplage avec un seul ripplon. Il s'écrit :

$$H_i^1 = \sum_q \xi_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \widehat{V}_q, \text{ équation 4}$$

Avec

$$\widehat{V}_q = -\frac{i}{m} (\vec{q}\cdot\vec{p}) p_z - \frac{i\hbar}{2m} q^2 p_z + eE_{\perp} + \Lambda e q^2 v_{pol}(qz), \text{ équation 5}$$

$$v_{pol}(qz) = \frac{1 - qzK_1(qz)}{(qz)^2}, \text{ équation 6}$$

où  $K_1(qz)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

$\vec{p}$  est l'impulsion de l'électron,  $\vec{q}$  celle de l'onde d'amplitude  $\xi_q$ .

$E_{\perp}$  le champ électrique extérieur appliqué sur l'électron.

Les deux premiers termes traduisent la modification de la cinétique de l'électron liée à l'annulation de la fonction d'onde sur une surface courbe.

Le terme  $v_{pol}(qz)$  décrit la modification de l'énergie de polarisation lors du passage d'un ripplon ou d'un phonon d'impulsion  $\vec{q}$ .

Le développement au second ordre du hamiltonien d'interaction traduit le couplage avec deux ripplons ou deux phonons. Il fait lui aussi apparaître un terme cinétique et un terme de polarisation:

$$H_i^2 = \sum \xi_{q_1} \xi_{q_2} \exp\left[i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot \vec{r}\right] \hat{V}_{\vec{q}_1 \vec{q}_2}, \text{ équation 7}$$

avec,

$$\hat{V}_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} = V_{\frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{q_1 q_2}}^k + V_{\frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{q_1 q_2}}^{pol}, \text{ équation 8}$$

Le terme cinétique s'écrit:

$$V_{\frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{q_1 q_2}}^k = -\frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{2m} p_z^2, \text{ équation 9}$$

Le terme de polarisation pour sa part a l'expression suivante:

$$V_{\frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{q_1 q_2}}^{pol} = -\Lambda e \frac{1 - u(q_1 z) - u(q_2 z) + u(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| z)}{z^3}, \text{ équation 10}$$

$$\text{avec } u(x) = \frac{x^2 K_2(x)}{2}.$$

$K_2(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

La différence entre ripplons et phonons s'établit par des relations de dispersion différentes. L'amplitude  $\xi_q$  des excitations d'impulsion  $q$  sera différente.

L'approximation adiabatique est valable pour des vecteurs d'onde inférieurs à  $10^7 \text{ cm}^{-1}$  [14].

Nous allons maintenant décrire plus en détail l'interaction avec les ripples. Tout d'abord, nous estimerons le temps de relaxation que l'on peut attendre par un mécanisme impliquant un seul ripple. Nous montrerons ensuite que ce temps de relaxation peut être fortement réduit si l'électron est confiné. La thermalisation s'effectue alors par l'émission de deux ripples.

#### *1.4.2.c. Couplage avec un seul ripple*

Les estimations suivantes ne s'appuient pas sur le formalisme développé au paragraphe précédent. Nous allons déterminer un ordre de grandeur du temps de relaxation en examinant les paramètres qui interviennent dans la relaxation.

En tout premier lieu, seuls les ripples permettant un recouvrement des fonctions d'ondes de l'état excité et du fondamental seront efficaces.

Leur longueur d'onde est de l'ordre de l'inverse de la distance moyenne entre les deux états c'est à dire de l'ordre de l'inverse du rayon de Bohr  $a_B$ . L'énergie des ripples mis en jeu est très faible :

$$E_{rip} = \hbar\omega \sim \hbar \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{a_B}\right)^3} \simeq 1 \mu eV.$$

Car pour des ondes capillaires, la pulsation et le vecteur d'onde sont liés par la relation :

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma}{\rho} k^3, \text{ équation 11}$$

$\sigma$  est le coefficient de tension superficielle ( $\sigma = 0.37 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^2$ ) et  $\rho$  la masse volumique de l'hélium ( $\rho = 0.145 \text{ g/cm}^3$ )

L'énergie absorbée par le ripple est presque 100 fois inférieure à l'énergie émise. L'énergie provenant de la désexcitation est alors principalement absorbée par l'électron et convertie en énergie cinétique parallèlement à la surface. L'électron acquiert par ce fait une quantité de mouvement supplémentaire. Par conservation de l'impulsion, le ripple est donc émis dans la direction opposée. Un vecteur d'onde de l'ordre de  $1/a_B$  permet d'assurer la conservation de la quantité de mouvement. Expérimentalement, on observe une augmentation de la conductivité des électrons..

On peut écrire simplement le hamiltonien de couplage entre l'électron et le ripplon sous la forme suivante:

$$H_{er} = e\widehat{E}\xi.$$

$\widehat{E}$  est un opérateur représentant le champ électrique effectif vu par l'électron et  $\xi$  l'amplitude des ripplons.

La règle d'or de Fermi nous apprend que  $\hbar/T_1$  est quadratique en  $H_{er}$ :

$$\frac{\hbar}{T_1} \propto |\langle i | H_{er} | f \rangle|^2 \delta(E_f - E_i).$$

La distribution de Dirac, assurant la conservation de l'énergie, est homogène à l'inverse d'une énergie. La seule énergie mise en jeu dans ce processus est de l'ordre de la constante de Rydberg  $Ry$ . Ainsi :

$$\delta(E_f - E_i) \propto \frac{1}{Ry}$$

L'énergie thermique est la source des ripplons. L'amplitude quadratique moyenne des ondes de surface excitées est donc:

$$\xi_T \propto \left( \frac{k_B T}{\sigma} \right)^{1/2}.$$

Des déplacements de l'ordre de  $a_B$  de la surface induisent des variations d'énergie de l'ordre de  $Ry$ . On aura alors :

$$\begin{aligned} e\widehat{E}a_B &\sim Ry \\ e\widehat{E} &\sim \frac{Ry}{a_B} \end{aligned}$$

Et donc à quelques facteurs numériques près :

$$\frac{\hbar}{T_1} \propto \left( \frac{Ry}{a_B} \xi_T \right)^2 \frac{1}{Ry}$$

Le temps de relaxation par émission d'un ripplon est inversement proportionnel à la température (Figure 12). Pour une température de 10 mK, il est de l'ordre de la centième de microseconde.

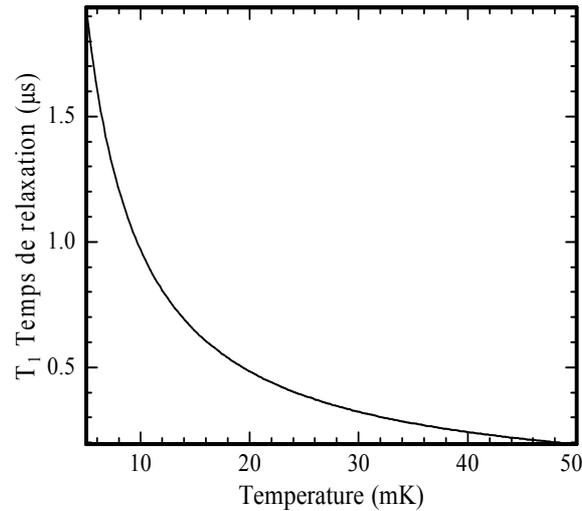


Figure 12 : évolution du temps de relaxation en fonction de la température du film d'hélium.

Pour des valeurs raisonnables du champ électrique micro-onde, nous avons vu que le temps d'exécution d'une porte logique est d'environ 0.01 microseconde. Le rapport du temps de relaxation sur le temps d'exécution de la porte quantique est de l'ordre de 100 ce qui est de deux ordres de grandeur inférieur à la valeur requise par les algorithmes correcteurs d'erreurs. Ce rapport doit être amélioré pour réaliser un qubit. Le temps de décohérence par un mécanisme d'interaction avec un ripplon peut être fortement augmenté si l'électron est confiné.

Le confinement conduit à une quantification des niveaux parallèles. L'électron ne peut plus acquérir n'importe quelle énergie cinétique. Celle-ci est imposée par la fréquence du piège.

Nous avons précédemment vu que l'énergie des ripplons invoqués dans ce processus était forcément petite. Dans le cas d'un électron libre, elle peut être arbitrairement petite car l'électron emporte, sous forme d'énergie cinétique, l'énergie restante.

La transition la plus favorable (Figure 13), celle qui libère le moins d'énergie est la transition entre le premier état excité et le plus haut état de vibration accessible  $\nu_c$  tel que :

$$\nu_c = \text{int} \left( \frac{E_1 - E_0}{\hbar \omega_{\parallel}} \right). \text{Équation 12}$$

Où  $\text{int}(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

On observe une transition entre l'état  $|2, 0, 0\rangle$  et l'état  $|1, \nu_c, m_{\nu_c}\rangle$ .

L'énergie échangée est inférieure à  $\hbar \omega_{\parallel}$ .

Si la fréquence du piège est supérieure à 0.2 GHz (i.e.  $\sim 1 \mu\text{eV}$ ), l'échange d'énergie impose aux ripplons une faible longueur d'onde. Ils ne sont plus efficaces. Ils ne permettent plus de coupler les deux états. Le temps de relaxation associé est par conséquent grand.

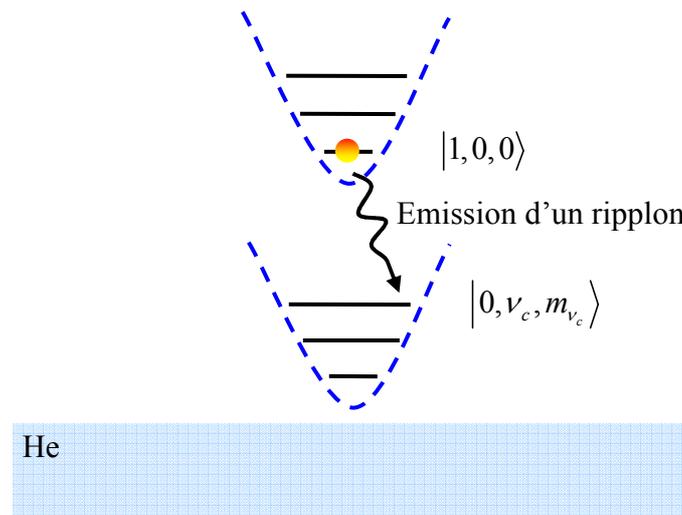


Figure 13 : Emission d'un ripplon dans le cas d'un électron confiné dans un puits parabolique. La transition s'effectue avec un état excité des niveaux parallèles.

On peut comprendre la suppression du mécanisme à un ripplon en regardant la conservation de l'impulsion. L'électron étant confiné dans un piège harmonique, sa quantité de mouvement est faible et imposée par la fréquence caractéristique du confinement (il ne peut pas se déplacer plus que de  $a_{\parallel} = (\hbar/m\omega_{\parallel})^{1/2}$ , la longueur de confinement).

Le ripplon, pour sa part, porte une quantité de mouvement qui est d'autant plus grande que l'énergie qu'il doit accommoder l'est. On arrive alors à deux conditions contradictoires qui font de l'émission d'un seul ripplon un mécanisme hautement improbable : d'un côté une très faible quantité de mouvement et de l'autre une grande énergie.

L'augmentation du temps de thermalisation associée à cette contradiction est d'autant plus grande que la fréquence du piège l'est.

Le premier terme du développement perturbatif étant faible, il nous faut maintenant nous intéresser au second ordre et considérer l'émission de deux riplons.

Le confinement ne permet pas de réduire significativement ce mécanisme. Les deux conditions précédentes peuvent être réalisées si on considère une désexcitation mettant en jeu deux riplons d'impulsion opposée et dont la somme est faible (l'impulsion totale restera faible) mais de faible longueur d'onde (l'énergie transportée pourra être grande). Ce mécanisme sera détaillé au paragraphe suivant.

Avant cela intéressons-nous au déphasage créé par le passage d'un ripplon. Nous nous intéressons maintenant à des riplons de faible énergie. L'efficacité de ces riplons ne sera pas réduite par le confinement. Il s'agit d'un choc élastique, aucun échange d'énergie n'entre en jeu.

Le passage d'un ripplon va moduler la distance électron-hélium ce qui entraînera des variations de la distance entre les deux niveaux d'énergie de l'électron. Cette modulation sera à l'origine de la perte de la phase de l'état initial.

Nous ne tiendrons compte que des riplons majoritaires (les plus probablement émis) c'est à dire ceux ayant une énergie égale à l'énergie thermique  $\hbar\omega_T \simeq k_B T$ .

Le taux de déphasage est donné par [14] :

$$\Gamma_\varphi^{1r} \sim \frac{\rho}{a_\parallel} \left( \frac{k_B T}{\hbar\sigma} \right)^3 R y^2 k_{12}$$

Avec  $k_{12} = |\langle 0 | v_{pol}(qz) | 0 \rangle|^2 - |\langle 1 | v_{pol}(qz) | 1 \rangle|^2 \approx 0.23$  et  $v_{pol}(x) = \frac{1 - x K_1(x)}{x^2}$  où  $K_1(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Le taux de déphasage dépend du cube de la température. Il dépend aussi de la racine carrée de la fréquence d'oscillation du piège par l'intermédiaire de  $a_\parallel = (\hbar/m\omega_\parallel)^{1/2}$ .

$k_{12}$  ne varie pratiquement pas avec le champ électrique (dépendance par l'intermédiaire des fonctions d'ondes). Ainsi  $\Gamma_\varphi^{pol}$  est quasiment indépendant du champ électrique extérieur.

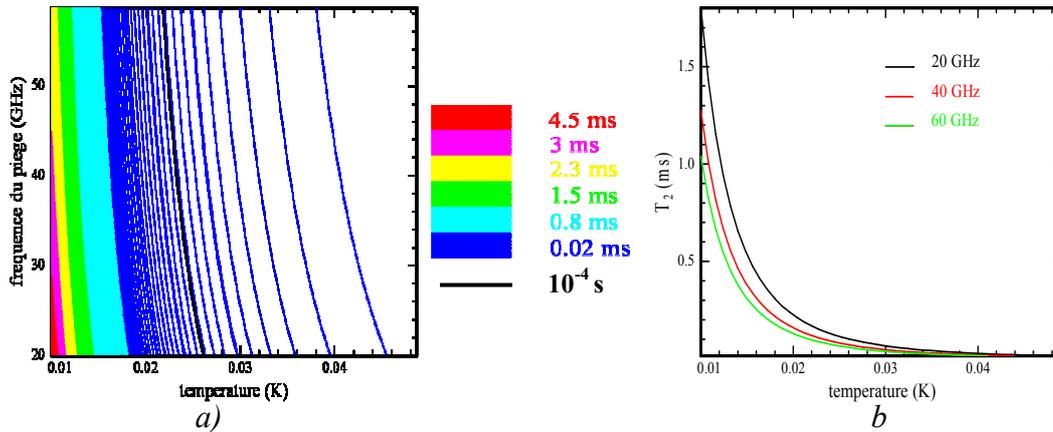


Figure 14 : a) évolution du temps de déphasage en fonction de la température et de la fréquence du piège. en rouge, le temps de déphasage est supérieur à la milliseconde, tandis qu'en bleu foncé, il est inférieur à la micro-seconde. La ligne noire matérialise la ligne telle que  $(\tau_{pl}/\tau_{coh} = 10^4)$  (i.e. 10  $\mu$ s). Deux lignes sont séparées par 10  $\mu$ s. b) temps de déphasage pour trois fréquences différentes.

La Figure 14 présente l'évolution du temps de déphasage en fonction de la température et de la fréquence caractéristique du piège. La ligne noire matérialise la ligne pour laquelle  $\tau_{pl}/\tau_{coh} = 10^4$ .

La température est le paramètre pertinent du fait de la dépendance à la puissance 3. Il est donc particulièrement important d'être à une température inférieure à 25 mK et ce quelque soit la fréquence du confinement.

#### I.4.2.d. Couplage avec deux riplons

Le calcul du taux de relaxation par un mécanisme à deux riplons nécessite le calcul de l'expression suivante, réécriture de la règle d'or de Fermi et traduisant la dégénérescence des états d'oscillations:

$$\Gamma_1^{2r} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{m_{v_c}} \left| \langle 1, 0, 0 | H_i^2 | 0, \nu, m_{v_c} \rangle \right|^2 (\bar{n}(\omega_{q_1}) + 1) (\bar{n}(\omega_{q_2}) + 1) \delta(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - (E_1 - E_0 - \nu_c \hbar \omega_{\parallel}) / \hbar)$$

équation 13

$H_i^2$  est donné par l'  $H_i^2 = \sum \xi_{q_1} \xi_{q_2} \exp\left[i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot \vec{r}\right] \hat{V}_{\vec{q}_1 \vec{q}_2}$ , équation 7.  $\bar{n}(\omega)$  est le nombre moyen de riplons de fréquence  $\omega$  à la température  $T$

L'amplitude des riplons est écrite en terme d'opérateur annihilation création et est donnée par [14,20]:

$$\xi_q = \frac{1}{\sqrt{S}} \sqrt{\frac{\hbar q}{2\rho\omega_q}} (b_q + b_q^+)$$

avec  $S$  surface du film d'hélium,  $\rho$  densité de l'hélium.

A nouveau, nous nous limitons à la transition la plus probable (Figure 13) entre l'état  $|100\rangle$  et l'état  $|0, \nu_c, m_{v_c}\rangle$ .

L'interaction implique un échange d'énergie  $\delta E$  tel que :

$$\delta E = E_1 - E_0 - \nu_c \hbar \omega_{\parallel}$$

Chaque riplon emporte typiquement la moitié de cette énergie. Elle est de l'ordre du Kelvin. Aux températures considérées (50 mK), le nombre moyen de riplons ayant cette énergie est quasi-nul :

$$\bar{n}(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \simeq \exp(-\hbar\omega/k_B T) \ll 1, \text{ équation 14.}$$

La désexcitation de l'électron s'effectuera donc par émission spontanée de riplons.

On supposera les états horizontaux et verticaux de l'électron indépendants. Les fonctions d'ondes se factorisent en deux fonctions, l'une décrivant les états d'oscillation, l'autre les états perpendiculaires.

Les éléments de matrice de l'équation 13 se factorisent :

$$\langle 1, 0, 0 | \widehat{V}_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \exp[i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot \vec{r}] | 0, \nu_c, m_\nu \rangle = \langle 1 | \widehat{V}_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} | 0 \rangle \langle 0, 0 | \exp[i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot \vec{r}] | \nu_c, m_\nu \rangle.$$

La somme sur la dégénérescence de l'état d'oscillation se simplifie sachant que :

$$g(\nu, q) = \sum_{m_\nu} |\langle 0, 0 | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \nu, m_\nu \rangle|^2 = \frac{x e^{-x}}{\nu!}, \text{ équation 15}$$

avec  $x = q^2 a_{\parallel}^2 / 2$

Cette relation montre que la dépendance est exponentielle avec le vecteur d'onde  $\vec{q}$ . L'estimation du temps de relaxation ne prendra en compte que le mécanisme impliquant des riplons en résonance avec l'échange d'énergie:

$$q = q_{res} = \left( \frac{\rho}{\sigma} \left( \frac{\delta E}{2\hbar} \right)^2 \right)^{1/3}.$$

Le taux de relaxation se décompose en deux termes. Un terme cinétique tel que :

$$\Gamma_1^{2r,k} = \frac{Ry^2}{24\pi\rho^{1/2}\sigma^{2/3}} \frac{1}{a_{\parallel}^2} q_{res}^{7/2} K_{12}^2, \quad \text{équation 16}$$

$$\text{où } K_{12} = \frac{\langle 1 | p_z^2 / 2m | 0 \rangle}{Ry}.$$

Et un terme de polarisation :

$$\Gamma_1^{2r,pol} = \frac{Ry^2}{24\pi\rho^{1/2}\sigma^{2/3}a_B^4} \frac{1}{a_{\parallel}^2} \frac{1}{q_{res}^{1/2}} U_{12}^2, \quad \text{équation 17}$$

$$\text{où } U_{12} = 2a_B^3 \langle 1 | \frac{2 - q_{res}^2 z^2 K_2(q_{res} z)}{z^3} | 0 \rangle,$$

où  $K_2$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Elle décrit la modification de la polarisation due à la courbure de la surface lors du passage des riplons.

Le terme cinétique varie rapidement avec l'énergie échangée  $\Gamma_1^{2r,k} \propto (\delta E)^{7/3}$ , comprise entre 0 et  $\hbar\omega_{\parallel}$ .

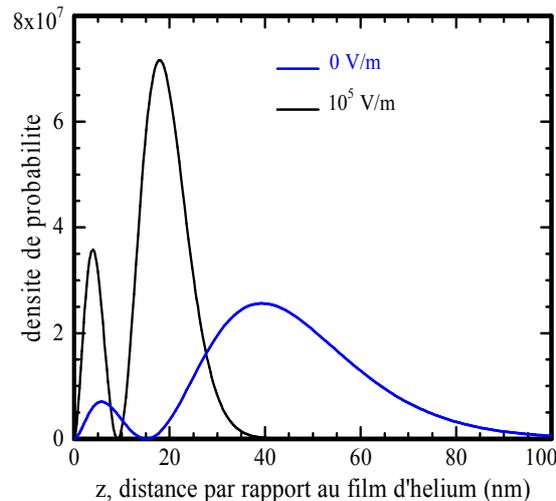
Bien que cela ne soit pas forcément évident à réaliser expérimentalement, afin d'augmenter le temps de relaxation, il faut essayer de minimiser cette énergie. L'énergie caractéristique du piège devrait donc être proportionnelle à l'écart énergétique entre les deux niveaux.

Pour le terme cinétique, comme pour le terme de polarisation, la dépendance explicite avec la fréquence du piège passe par l'intermédiaire du carré de la longueur de localisation  $a_{\parallel}^2 = \hbar/m\omega_{\parallel}$ ,  $\Gamma_1^{2r,k}, \Gamma_1^{2r,pol} \propto \omega_{\parallel}$ .

La dépendance avec le champ électrique a lieu avec la déformation des fonctions d'onde. Il y a alors une dépendance de  $K_{12}$  et  $U_{12}$  avec le champ électrique.

Plus la norme du champ électrique est importante, plus l'électron est "pressé" vers le film d'hélium. Cela augmente le couplage électron-rippion et diminue le temps de relaxation.

Ce point est illustré par la Figure 15 pour l'état excité. On y a représenté la densité de probabilité pour deux valeurs du champ électrique. On observe que les maxima se reprochent de la surface ( $z=0$ ).



**Figure 15 : Exemple pour l'état excité. Densité de probabilité pour deux valeurs du champ électrique en fonction de la distance par rapport au film d'hélium. Pour la courbe bleue, le champ extérieur est nul. Il vaut  $10^5$  V/m pour la courbe noire.**

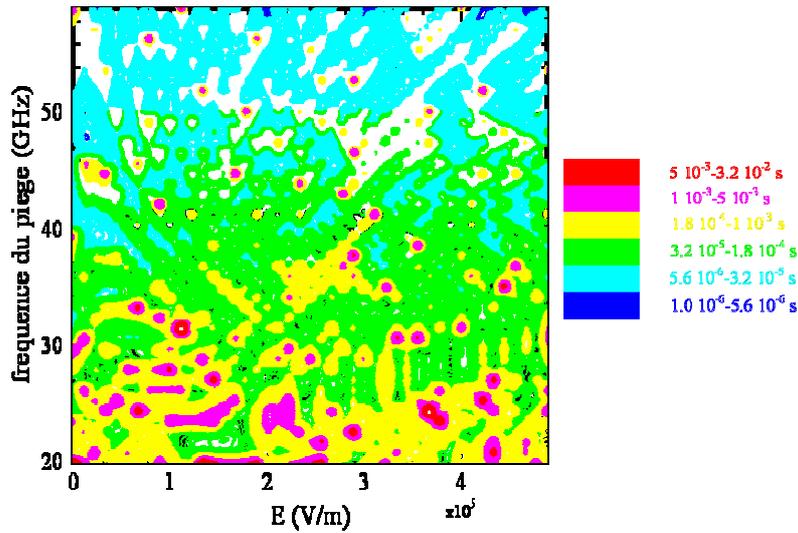


Figure 16 : évolution de la composante cinétique du temps de relaxation en fonction du champ électrique et de la fréquence du piège. En rouge, le temps de thermalisation est supérieur à la milliseconde, tandis qu'en bleu, il est inférieur à  $10 \mu\text{s}$ . Le temps de relaxation vaut  $10 \mu\text{s}$  sur les courbes noires.

La Figure 16 montre les évolutions du temps de relaxation en fonction du champ électrique et de la fréquence du piège. La dépendance non linéaire de l'énergie échangée (par l'intermédiaire d'une partie entière) avec la fréquence et le champ électrique donne lieu à des régions localisées où le temps de relaxation est supérieure à  $10 \mu\text{s}$ . Du fait de la dépendance à la puissance  $7/2$  avec l'énergie échangée, il est très facile de passer d'une région où le temps de relaxation est trop court pour une application qubit (en bleu sur la Figure 16) à une région convenable (en rouge).

Ces variations non linéaires apparaissent plus clairement sur les courbes de la Figure 17. Il est intéressant de constater que de grandes variations du temps de relaxation sont à prévoir pour de faibles variations du champ pressant ou de la fréquence d'oscillations. Néanmoins, d'après la Figure 16, il semble plus aisé d'obtenir un long temps de thermalisation pour des pièges présentant de faibles fréquences caractéristiques. Cela tient au fait qu'il est plus fréquent que la différence d'énergie entre le premier état excité et le fondamental soit proportionnel à  $\hbar\omega_{\parallel}$  lorsque la fréquence du piège est faible que lorsqu'elle est grande. Cependant, il faut garder à l'esprit que même dans ces régions, il est possible d'obtenir un très long temps de relaxation en faisant en sorte que  $\delta E = 0$ . C'est juste moins probable.

A priori, en se référant aux équations 16 et 17, lorsque peu d'énergie est échangée, il semble possible d'atteindre un temps de relaxation infini. Le processus mettant en jeu un seul ripplon devient alors à nouveau possible et limite le temps de relaxation.

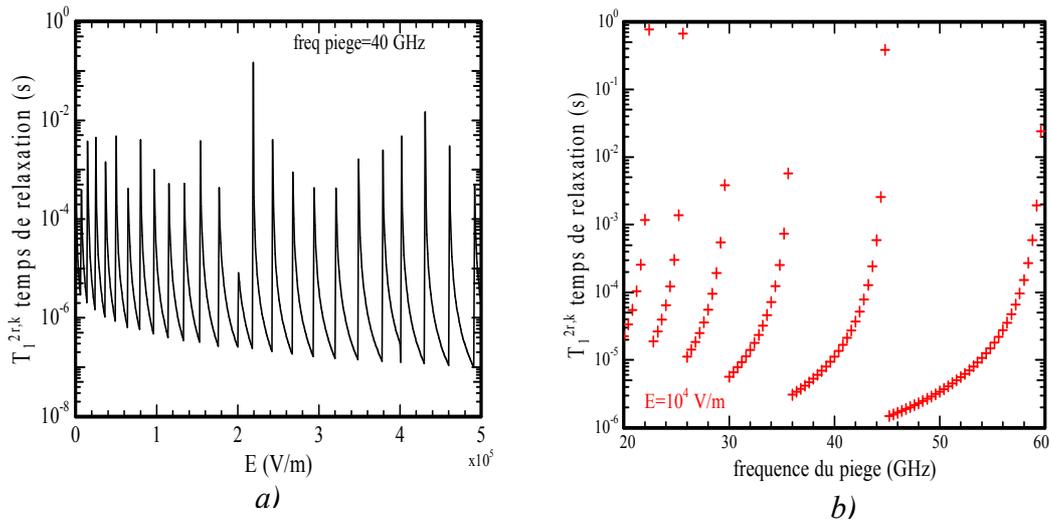


Figure 17 : évolution de la composante cinétique du temps de thermalisation en fonction du champ électrique (a) pour une fréquence d'oscillation fixe et (b) en fonction de la fréquence d'oscillation pour un champ électrique extérieur fixe.

La valeur minimale du temps de thermalisation diminue lorsque le champ électrique augmente (Figure 17 a). Ceci résulte de l'augmentation de  $K_{12}$  avec le champ électrique. Le champ électrique presse les fonctions d'onde vers la surface d'hélium. La zone de recouvrement des fonctions d'onde augmente.

Il est en de même pour le terme  $U_{12}(q_{res})$  du terme de polarisation. Cela se traduit alors par une diminution de la valeur minimale atteinte (Figure 18).

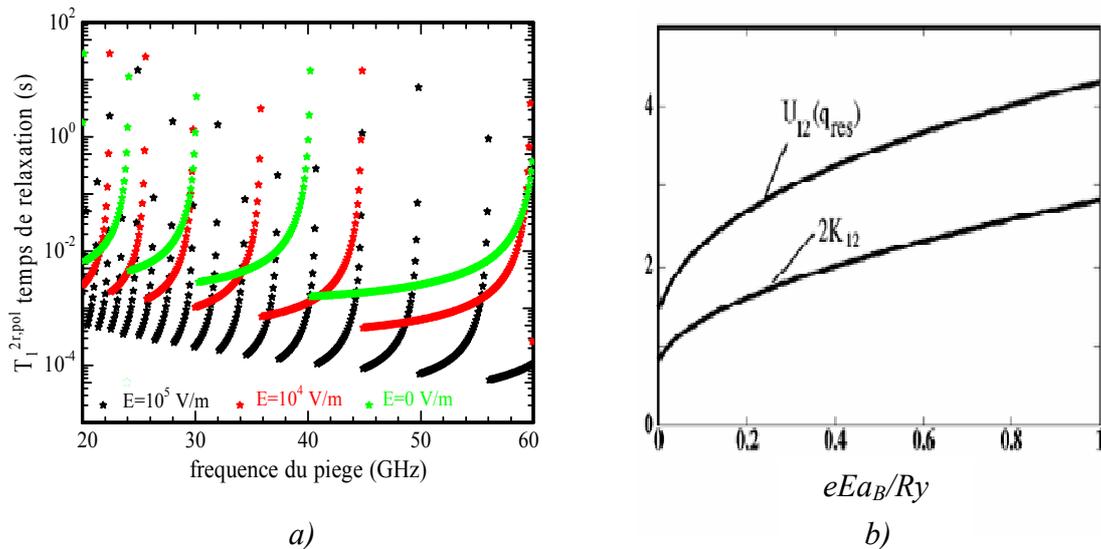


Figure 18 : a) variation de la composante polarisation du temps de thermalisation en fonction de la fréquence du piège. b) variation de  $U_{12}$ , à  $q_{res}$  fixé et de  $K_{12}$  en fonction du champ électrique extérieur. Le champ extérieur a été normalisé par  $Ry/ea_B \sim 9.10^4$  V/m.

Au premier abord, il semblerait que  $\Gamma_1^{2r,k}$  et  $\Gamma_1^{2r,pol}$  varient, en fonction de l'énergie échangée  $\delta E$ , dans des directions opposées puisque  $\Gamma_1^{2r,k} \propto q_{res}^{7/2}$  alors que  $\Gamma_1^{2r,pol} \propto q_{res}^{-1/2}$ .

Il faut garder à l'esprit que  $U_{12}(q_{res})$  est aussi fonction de  $q_{res}$ . Le rapport  $\frac{U_{12}(q_{res})}{q_{res}^{1/2}}$  tend vers 0 lorsque  $q_{res}$  tend vers 0 (Figure 19). Ainsi,  $\Gamma_1^{2r,k}$  et  $\Gamma_1^{2r,pol}$  sont minimaux lorsque l'énergie échangée  $\delta E$  est nulle. Il s'agit donc du paramètre à minimiser pour augmenter le temps de relaxation.

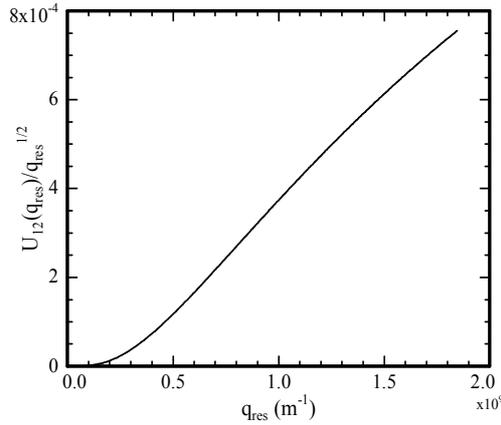


Figure 19 : variation du rapport  $U_{12}(q_{res})/q_{res}^{1/2}$  en fonction de  $q_{res}$ .

*Remarque :*

Le taux de relaxation dû au terme de polarisation est 100 fois plus faible que celui lié à la composante cinétique. Il s'agit d'une conséquence de l'approximation adiabatique. La modification de l'énergie cinétique a plus d'effet sur l'électron que la modification de la charge image.

Le couplage avec deux riplons sera, bien entendu, aussi source de déphasage. Les riplons vont interagir différemment avec les électrons dans l'état fondamental et avec ceux dans le premier état excité.

A nouveau, seuls les riplons d'énergie thermique seront pris en compte. Comme précédemment, on différenciera deux contributions.

Un terme cinétique donné par :

$$\Gamma_2^{2r,k} = \frac{\pi^{1/2} \rho}{27\sqrt{2}} \frac{1}{a_{||}} \left( \frac{k_B T}{\hbar \sigma} \right)^3 Ry^2 \tilde{K}_{12}^2$$

Avec  $\tilde{K}_{12} = \frac{\langle 1 | p_z^2 / 2m | 1 \rangle - \langle 2 | p_z^2 / 2m | 2 \rangle}{Ry}$

Le terme de polarisation est obtenu en remplaçant dans  $\tilde{K}_{12}$  la différence d'énergie cinétique dans chacun des deux états par la différence d'énergie potentielle . On obtient alors  $\tilde{K}_{12}^p$  tel que :

$$\tilde{K}_{12}^p = \frac{\langle 1 | \frac{1}{2} \frac{\Lambda e^2}{4\pi\epsilon_0 z} | 1 \rangle - \langle 2 | \frac{1}{2} \frac{\Lambda e^2}{4\pi\epsilon_0 z} | 2 \rangle}{Ry}$$

La valeurs des paramètres  $\tilde{K}_{12}$  et  $\tilde{K}_{12}^p$  est maximale en champ nul. Augmenter le champ électrique diminuera le temps de déphasage. Ceci est toujours la conséquence du rapprochement des fonctions d'onde vers la surface sous l'action du champ pressant. L'énergie potentielle moyenne devient alors comparable pour les deux états. La grandeur  $\tilde{K}_{12}^p$  s'annule. Conséquence du théorème du viriel, il en est de même pour  $\tilde{K}_{12}$ .

Nous présentons ici ( Figure 20) le temps de déphasage total (cinétique et polarisation) dû au couplage avec deux riplons. Pour des températures inférieures à 40 mK, le temps de déphasage est suffisamment long pour des applications de type qubit. Il peut facilement prendre des valeurs de l'ordre de la milliseconde.

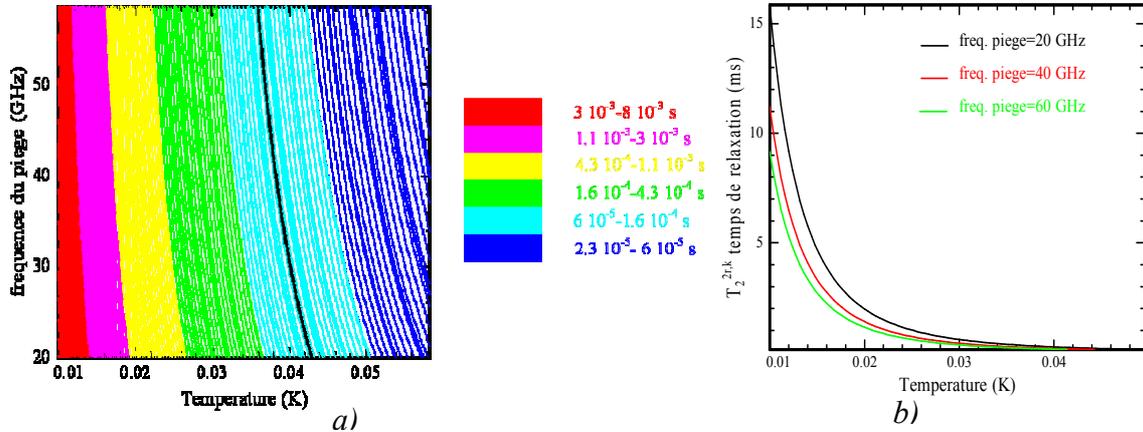


Figure 20 : a) évolution du temps de déphasage (cinétique+polarisation) en fonction de la température et de la fréquence d'oscillation. La ligne noire caractérise un temps de déphasage égal à 10 μs. b) pour trois valeurs d'oscillations différentes

#### I.4.2.e. *Limites de ces estimations*

Outre les approximations consistant à ne considérer que les ripples ayant l'impulsion  $q_{res}$ , nous n'avons pas tenu compte d'un terme résultant de l'interférence du terme cinétique et du terme de polarisation. Il est estimé plus faible que ces deux derniers [14] et donc négligeable. Par ailleurs, il existe une limite intrinsèque à ces estimations. Le modèle les sous-tendant suppose une barrière liquide-vapeur infinie, une interface hélium-vapeur bien définie ainsi que des ripples de grandes longueurs d'onde. Les corrections apportées par l'approximation adiabatique dépendent fortement du vecteur d'onde des ripples. Au-delà de  $10^9 \text{ m}^{-1}$ , les corrections deviennent grandes devant 1 traduisant l'inadéquation de la méthode. Pour le cas le plus défavorable, la longueur d'onde des ripples participant à la thermalisation est de cet ordre de grandeur ( $q_{res.}=10^9 \text{ m}^{-1}$  lorsque l'énergie échangée est égale à 60 GHz). On peut donc raisonnablement penser que cette approximation suffit. Néanmoins, quelques détails sur le régime à faible longueur d'onde sont donnés au paragraphe suivant.

#### I.4.2.f. *Couplage avec deux ripples de très courte longueur d'onde.*

Maintenant, on ne présuppose plus que la fonction d'onde des électrons s'adapte aux fluctuations et s'annule à l'interface. La cinétique de l'électron se trouve alors moins perturbée par les fluctuations. La méthode reste perturbative mais on décrit plus finement le potentiel d'interaction avec la charge image.

Pour une surface plane, la modélisation ressemble étrangement à celle de l'équation 1 mais tient maintenant compte du fait que l'électron peut pénétrer dans le film d'hélium ( $V_0$  est fini) [20,17].

$$\begin{cases} V = \frac{\Lambda e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z+b} & \text{pour } z > 0 \\ V = V_0 & \text{pour } z \leq 0 \end{cases}$$

avec  $V_0=0.97 \text{ eV}$  et  $b = 0.91 \text{ \AA}$ .

On effectue ensuite un développement perturbatif de ce potentiel [17]. Le développement met évidence plusieurs points. Tout d'abord, la contribution principale provient du déplacement de la barrière  $V_0$ . Ensuite, pour des longueurs d'onde grandes devant  $10^9 \text{ m}$ , le terme du premier ordre est négligeable devant le second ordre. La décroissance de l'électron par émission de deux ripples devient le phénomène principal.

Le temps de relaxation n'a pas été calculé pour un électron confiné dans un piège électrostatique.

Pour un électron libre [21], il s'avère être très court même en l'absence de champ électrique extérieur ( $T_1 \simeq 1 \mu s$ ) et diminue lorsque le champ électrique augmente ( $T_1 \simeq 0.01 \mu s$  pour  $E=10^5$  V/m).

Contrairement aux résultats donnés par l'approximation adiabatique [8,15], confiner l'électron avec un champ magnétique n'augmente pas significativement le temps de relaxation [21]. On peut raisonnablement penser qu'il en sera de même pour un confinement électrostatique. Le calcul exact reste néanmoins nécessaire.

Analysons maintenant la contribution provenant de l'interaction avec les phonons.

#### *1.4.2.g. Couplage avec les phonons.*

Le calcul du temps de relaxation se base là encore sur l'approximation adiabatique mais se limite au premier ordre du développement perturbatif (au hamiltonien  $H_i^1$  (équation 4)).

La propagation des phonons étant tridimensionnelle, un phonon perpendiculaire à l'interface pourra accommoder toute l'énergie perdue par l'électron tout en assurant une conservation de l'impulsion (Figure 21).

La décroissance par interaction avec des phonon se propageant parallèlement à la surface ne sera pas prise en compte. En effet, comme précédemment pour la décroissance mettant en jeu un seul ripplon, un seul phonon transverse ne pourra pas accommoder toute l'énergie libérée et permettre une conservation de la quantité de mouvement.

L'épaisseur finie de l'interface impose un nombre d'onde maximal. La transition liquide-vapeur s'effectue sur une distance comprise entre 6 et 8 Å. Des phonons ayant une longueur d'onde plus petite que cette épaisseur ne pourront pas s'y propager et interagir avec l'électron. Le nombre d'onde maximal est de l'ordre de l'inverse de cette distance  $q_{\max} \simeq 10^9 m^{-1}$  ce qui est en accord avec l'approximation adiabatique. Le coupage avec les phonons peut donc être traité par l'intermédiaire de l'approximation adiabatique.

Nous nous limiterons à nouveau à la transition libérant le moins d'énergie :

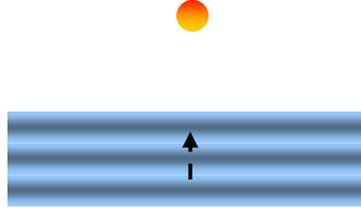
$$|1,0,0\rangle \longrightarrow |0,\nu_c,m_\nu\rangle.$$

Les processus de couplage électron-phonon diffèrent peu de ceux avec les ripplons. Seule change dans l'équation 4, l'expression du déplacement de la surface lors du passage d'un phonon :

$$\xi_q \longrightarrow u_Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V v_s Q}} (c_Q - c_{-Q}^+)$$

où  $V$  est le volume de l'hélium,  $Q$  le vecteur d'onde des ripplons,  $v_s$  la vitesse du son dans l'hélium.

A nouveau, il y aura deux contributions: une affectant le mouvement des électrons et l'autre l'énergie de polarisation.



**Figure 21 : Electron soumis aux phonons de l'hélium. Seuls les phonons transverses à la surface vont être efficaces dans les processus de relaxation et décohérence. Le code de couleur symbolise les plans d'ondes liés aux phonons.**

Le terme cinétique est donné par :

$$\Gamma_1^{ph,k} \approx (E_1 - E_0)^2 z_{12}^2 \frac{\nu_c m^3 \omega_{\parallel}^3}{4\pi\rho v_s \hbar^3 \delta E}$$

Avec  $v_s=238 \text{ m.s}^{-1}$  pour des températures inférieures à 0.5 K [22].

Tandis que le terme de polarisation est donné par :

$$\Gamma_1^{ph,pol} \approx \frac{4Ry^2 a_B^2}{\nu_c! \pi \rho v_s \delta E a_{\parallel}^6} \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\nu_c+2} v^2(x)$$

avec  $v^2(x) = \left| \langle 1 | v_{pol} \left[ (2x)^{1/2} z/a_{\parallel} \right] | 2 \rangle \right|^2$ ,  $v_{pol}(x) = \frac{1 - xK_1(x)}{x^2}$

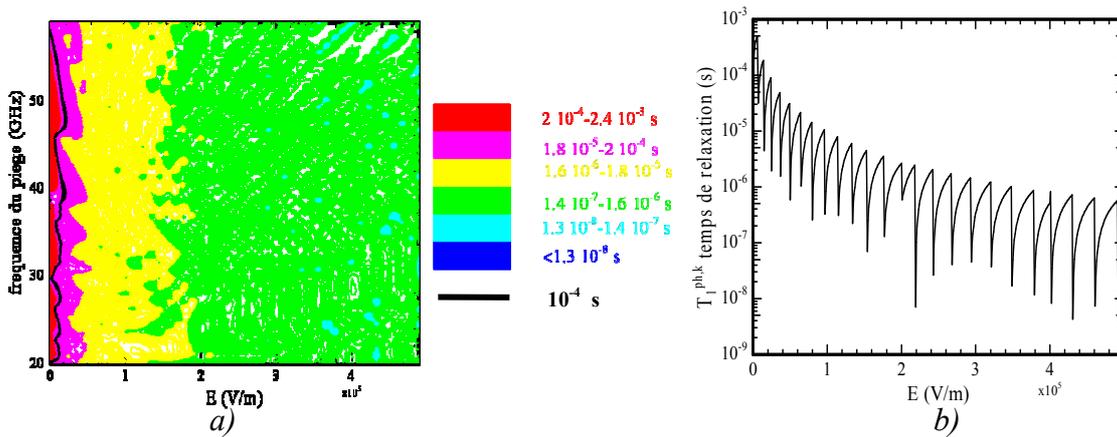


Figure 22: a) évolution de la composante cinétique du temps de relaxation dû au couplage avec les phonons avec le champ électrique extérieur et la fréquence d'oscillation du piège. b) pour un piège de fréquence caractéristique 20 GHz.

La Figure 22 a) présente l'évolution du temps de thermalisation en fonction du champ électrique et de la fréquence caractéristique du piège. A fréquence d'oscillation fixe, la valeur minimale est atteinte pour un champ électrique nul. Cette dépendance est liée principalement à la différence entre les états d'énergie ( $E_1 - E_0$ ). La longueur dipolaire  $z_{12}$  n'évolue pratiquement pas avec le champ électrique (Figure 23).

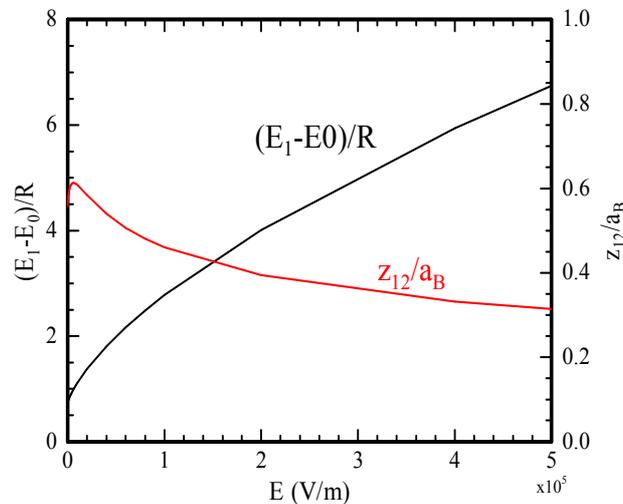
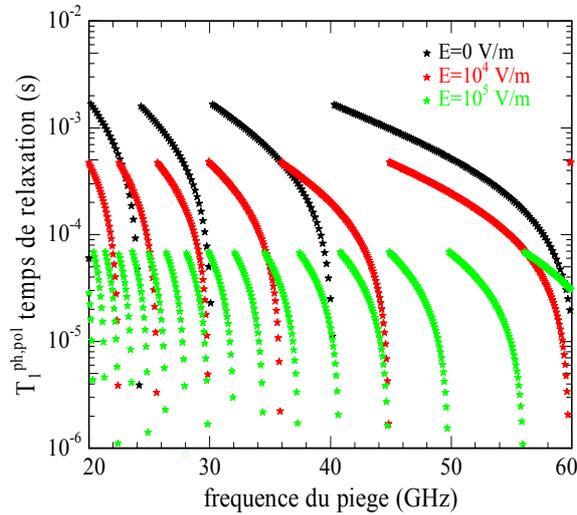


Figure 23 : courbe noire : évolution de la différence d'énergie entre le premier état excité et le fondamental avec le champ pressant. Courbe rouge : évolution de la longueur dipolaire.

Comme pour le couplage avec deux ripplons, un échange d'énergie nul ( $\delta E=0$ ) augmente le temps de relaxation (Figure 22 b). Il prend cette fois une valeur finie car il s'agit d'un mécanisme à un seul phonon.

Il en est de même pour la composante issue du terme de polarisation (Figure 24). Comme précédemment, on peut remarquer que la valeur maximale diminue lorsque le champ

électrique augmente. Les variations sont d'autant plus grandes que le champ électrique est important.



**Figure 24 : composante du temps de relaxation issue du terme de polarisation. Evolution avec la fréquence du piège, pour trois valeurs du champ électrique extérieur (courbe noire : 0 V/m ; courbe rouge :  $10^4$  V/m , courbe verte :  $10^5$  V/m)**

Les deux composantes du temps de relaxation peuvent être augmentées en faisant croître la fréquence de confinement. L'énergie échangée met alors en jeu des phonons de longueur d'onde plus petite que l'interface liquide-vapeur. La diffusion de l'électron par les phonons sera alors peu efficace, ces derniers ne pouvant pas se propager dans cette interface diffuse et interagir avec l'électron.

Le couplage des phonons étant du premier ordre, le terme d'interférence entre la partie cinétique et la partie polarisation n'est plus négligeable. Il est du même ordre de grandeur.

Ces calculs décrivent la relaxation de l'électron avec le déplacement de la surface d'hélium. Un mécanisme de relaxation original auquel ont pensé Platzman et Dykman consiste à prendre en compte la modulation de la constante diélectrique par les phonons.

Le passage d'un phonon s'accompagne d'une modification locale de la densité de l'hélium. Elle va s'accompagner d'une modification de la constante diélectrique, qui pour de faibles perturbations peut s'écrire:

$$\delta\varepsilon = (\varepsilon - 1) \frac{\delta\rho}{\rho}.$$

La constante diélectrique va donc se trouver modulée par ces oscillations de densité. La charge image, qui lui est proportionnelle, sera, elle aussi, sujette à ces fluctuations. Ce couplage est différent du terme de polarisation précédent dans le sens où ce n'est plus la distance électron-hélium qui varie mais la charge image elle-même.

Le taux correspondant est alors donné par :

$$\Gamma_{ph}^d \simeq \frac{Ry^2 \delta E a_B^2}{\pi \hbar^2 \rho v_s^3} \int_0^\infty dq q^3 \left| \langle 2 | v^d(q_{\nu_c}) | 1 \rangle \right|^2 g(\nu_c, q).$$

$$\text{avec } v^d(q, z) = \int_0^\infty dz' \frac{e^{-iQ_z z'} K_1[q(z+z')]}{z+z'}$$

et  $Q_z$  la quantité de mouvement portée par le phonon.

$v^d(q, z)$  traduit la modification de la charge image lors du passage d'un phonon d'impulsion  $Q_z$ .

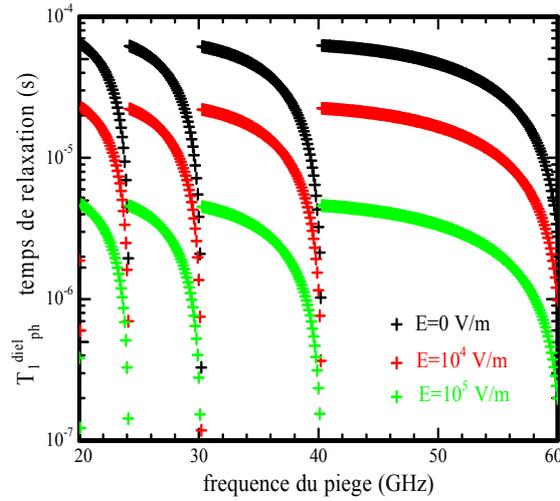
L'approximation de la phase stationnaire permet d'obtenir une valeur approchée lorsque  $Q_z \gg q$  :

$$v^d(q, z) \simeq -i \frac{K_1(qz)}{Q_z z}, \text{ Équation 18}$$

On peut alors calculer le temps de relaxation pour différents champs électriques (Figure 25). Les valeurs données sont sûrement sous-estimées (le temps de relaxation réel est plus long) lorsque l'échange d'énergie devient faible. Le moment du phonon ne satisfait plus la condition  $Q_z \gg q$  et l'approximation de la phase stationnaire n'est plus valide.

Le temps de relaxation varie peu avec la fréquence du confinement. En revanche, il varie d'un ordre de grandeur entre la valeur en champ nul et celle pour un champ de  $10^5$  V/m.

La relaxation liée à ce mécanisme est un effet relativement fort, peu dépendant du confinement. Le taux de relaxation permet tout juste une application en tant que qubit même en champ nul.



**Figure 25 : évolution du temps de relaxation dû à la modulation de la charge image lors du passage d'un phonon.**

Néanmoins, la contribution principale provient du terme intégral. Elle dépend fortement des faibles distances. L'intégrale commence à 0 ce qui n'est pas très pertinent pour une interface diffuse. Commencer l'intégration en  $a_B/10$  au lieu de 0 augmente le temps de relaxation d'un facteur 3. On peut donc s'attendre à des temps de relaxation plus long que ceux présentés Figure 25.

Le couplage avec un seul ripplon donnait lieu à un déphasage de l'ordre de la milliseconde. Le temps de déphasage résultant du couplage avec un seul phonon sera très grand et sera négligé. Cela est la conséquence de la valeur très faible de la densité d'état pour les faibles fréquences. Ce n'était pas le cas pour les ripplons. La densité d'état varie comme le carré de l'énergie pour les phonons alors qu'elle varie comme  $\propto E^{1/3}$  dans le cas des ripplons. Cette différence est le résultat de relations de dispersion différentes et d'une intégration dans le plan pour les ripplons mais en volume pour les phonons.

#### I.4.2.h.

#### *Couplage avec les électrodes environnantes et avec le SET*

Les électrons au-dessus de l'hélium peuvent interagir avec les électrodes environnantes et notamment dans notre cas avec l'îlot du SET. L'électron peut céder de l'énergie aux électrodes en créant une paire électron-trou ou un plasmon (onde de densité de charge dans l'électrode). L'extension de la fonction d'onde, de l'ordre de  $a_B$ , est faible devant la distance électron-électrode. L'interaction entre l'électron et l'électrode sera alors modélisée par une interaction dipolaire :

$$H_{coup} = -e\delta E_{el}z$$

Où  $\delta E_{el}$  sont les variations du champ électrique ressenties par l'électron:

Eliminer la décroissance par création d'une paire électron-trou peut se faire en utilisant des électrodes supraconductrices[8].

Créer une paire nécessite l'énergie  $2\Delta$  où  $\Delta$  est le gap supraconducteur. Si ce gap est supérieur à l'écart entre les niveaux, l'énergie libérée lors d'une transition sera insuffisante pour créer une paire. On peut par exemple utiliser le niobium dont le gap est d'environ  $\Delta \sim 8$  K alors que l'écart entre niveaux n'est que de 5.6 K.

Les fluctuations du champ électrique créées par le SET seront liées aux fluctuations de la charge de l'îlot. Le courant qui traverse le SET entraîne une fluctuation de charge d'amplitude  $e/2$  qui se traduit par le potentiel  $\delta V = e/2C$  sur l'îlot (C capacité totale de l'îlot) (voir insert Figure 27). Le temps moyen passé par électron dans l'îlot est aléatoire et donné par une loi de Poisson. Les fluctuations de charge sont semblables à un "bruit de grenaille". Elles en possèdent notamment le spectre.

Seules les fluctuations en résonance avec l'écart énergétique interviennent dans la thermalisation.

On aura alors :

$$\Gamma_r^{SET} = \frac{|\langle 1 | e \delta E_{el}(\omega_{10}) z | 2 \rangle|^2}{\hbar^2} = \frac{e^2 l_d^2}{\hbar^2} |\delta E_{el}(\omega_{10})|^2$$

Où  $l_d$  est la longueur dipolaire  $l_d = |\langle 1 | z | 2 \rangle|$  et  $\delta E_{el}(\omega_{10})$  est la densité spectrale du champ électrique à la fréquence de transition.

En assimilant l'îlot du SET à une sphère conductrice de rayon  $r_{SET}$ , les fluctuations du champ électrique  $\delta E_{el}$  sont reliées aux fluctuations du potentiel de l'îlot  $\delta V$  par la relation :

$$\delta E_{el} = \frac{r_{SET}}{d^2} \delta V,$$

Où d est la distance électron-SET.

Cette relation est valable si l'îlot du SET est une équipotentielle ce qui est le cas puisque les longueurs d'onde correspondant à la fréquence  $\omega_{12}$  sont de l'ordre du millimètre alors que le SET n'excède pas le micromètre.

$\delta V$  est lié à  $\delta Q$  la densité spectrale des fluctuations de charges sur l'îlot par :

$$\delta V = \frac{\delta Q}{C} \text{ avec } \delta Q = \sqrt{\frac{2e^2 \tau_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1}}.$$

Où C est la capacité totale de l'îlot et  $\tau_i$  est le temps moyen que l'électron passe sur l'îlot.

$\Gamma_r^{SET}$  s'écrit donc :

$$\Gamma_r^{SET} = \frac{e^2 l_d^2}{\hbar^2} \frac{r_{SET}^2}{C^2 d^4} \left( \frac{2e^2 \tau_t}{\omega_{10}^2 \tau_t^2 + 1} \right)$$

$\Gamma_r^{SET}$  varie avec le champ électrique extérieur par l'intermédiaire de  $l_d$  et de  $\omega_{12}$ . Il dépend fortement de la distance électron-électrode.

Les Figure 26 a et b présentent les variations du temps de relaxation en fonction de la distance hélium-SET et du champ électrique appliqué. On peut remarquer que ce temps de thermalisation est globalement faible. Le couplage avec le SET est un mécanisme efficace, mais il peut être réduit si on augmente le champ électrique pressant. Ceci est lié à la dépendance de la densité spectrale avec la fréquence de transition (Figure 27). Entre 0 et  $10^5$  V/m, la fréquence de transition augmente de plus d'un ordre de grandeur.

La densité spectrale à la fréquence de transition en champ nul est déjà faible. Elle ne vaut que 10% de la valeur maximale (Figure 27).

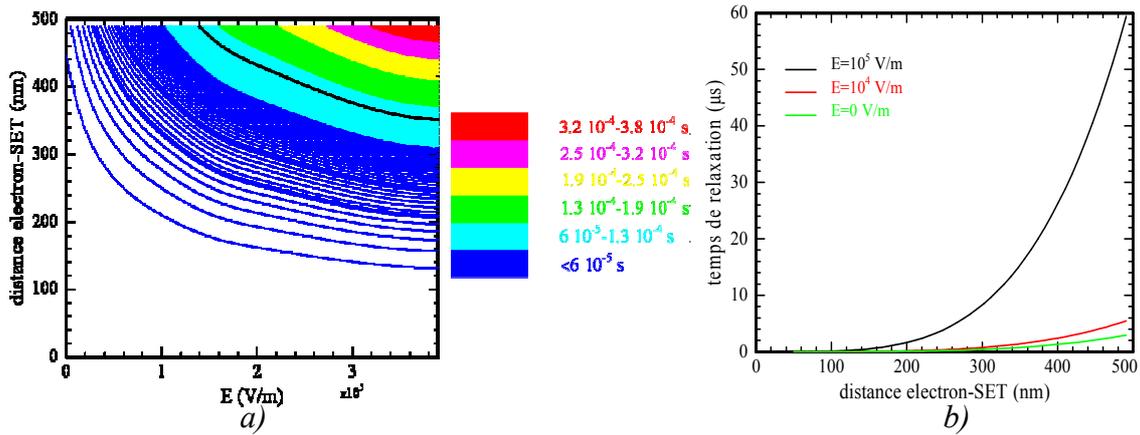


Figure 26 : a) Evolution du temps de thermalisation dû au couplage avec le SET en fonction du champ électrique et de la distance séparant l'îlot et l'électron. b) Même chose pour trois valeurs du champ électrique différentes. Ces estimations ont été réalisées avec  $r_{SET}=0.5$  nm,  $C=10^{-15}$  F et  $\tau_t=5.10^{-11}$  s (correspondant à un courant de 3nA).

Elle diminue fortement lorsque la fréquence augmente. Ainsi, pour un fort champ électrique, elle est quasi-nulle à la fréquence de transition correspondante.

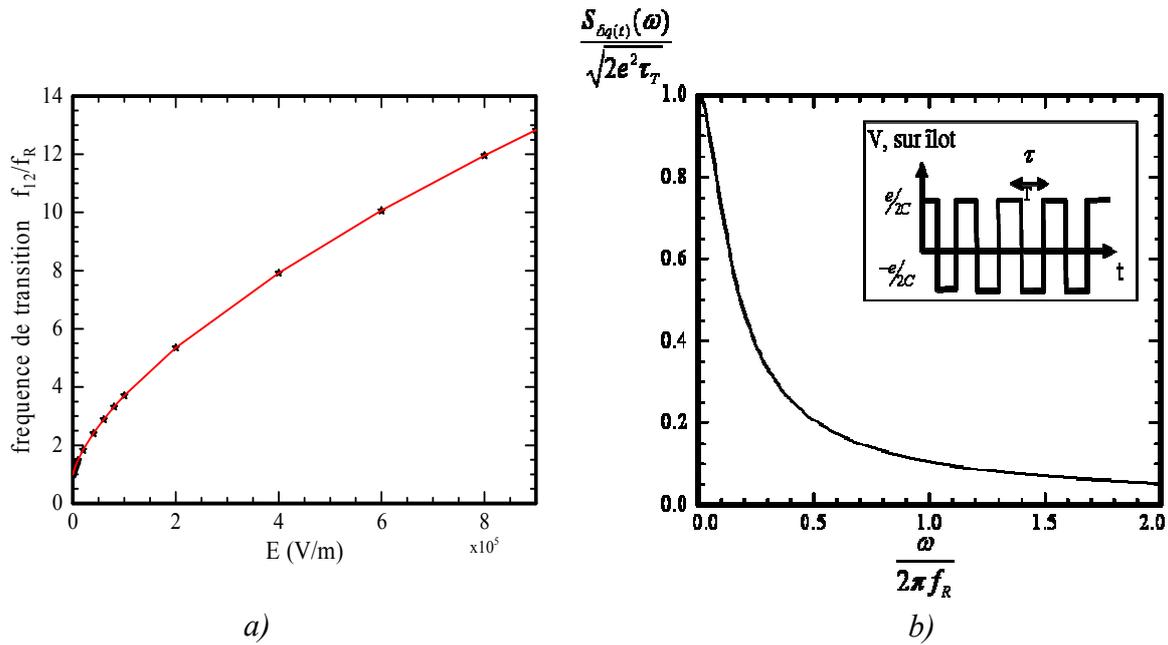


Figure 27 : a) variation de la fréquence de transition en fonction du champ électrique. La courbe a été normalisée par la valeur en champ nulle  $f_R$ . b) variations de la densité spectrale des fluctuations de charge sur l'îlot du SET. A la fréquence de transition, l'amplitude de la densité spectrale n'est que de 0.1 fois la valeur maximale. Insert : le passage par effet tunnel des électrons de la source vers le drain entraîne une fluctuation du potentiel de l'îlot.

Le déphasage introduit par couplage avec le SET est donné par :

$$\Gamma_{\varphi}^{elec} = \frac{e^2}{\hbar^2} (z_{11} - z_{00})^2 |\delta E(0)|^2 = \frac{e^2}{\hbar^2} (z_{11} - z_{00})^2 \frac{r_{SET}^2}{C^2 d^4} 2e^2 \tau_t,$$

Où  $z_{ii} = \langle i | z | i \rangle$  est la distance moyenne électron-hélium dans l'état  $i$ .

Comme précédemment,  $\Gamma_{\varphi}^{elec}$  varie en fonction du champ électrique par l'intermédiaire des  $z_{ii}$ .

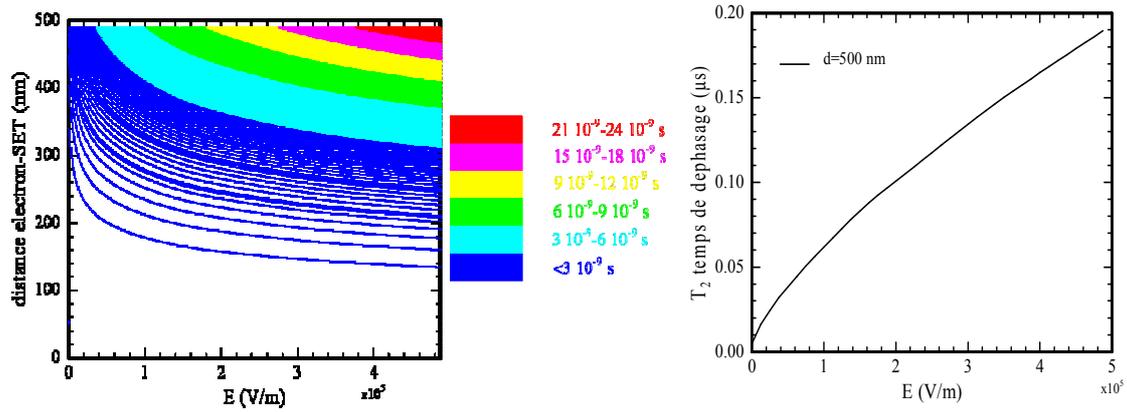


figure 28 : temps de déphasage lié au couplage avec le SET.

Le temps de déphasage est extrêmement court. Aucune valeurs du champ électrique et de la distance électron –SET ne permettent une application de type qubit.

Il devient nécessaire d'éteindre le courant à travers le SET pendant les étapes de manipulations du qubit. Le SET sera alors équivalent à une simple électrode responsable du confinement. Le potentiel du SET sera néanmoins sujet à des fluctuations qui entraîneront de la décohérence.

Ces fluctuations, d'origine quantique, proviendront de l'électrode elle-même. Le taux associé est :

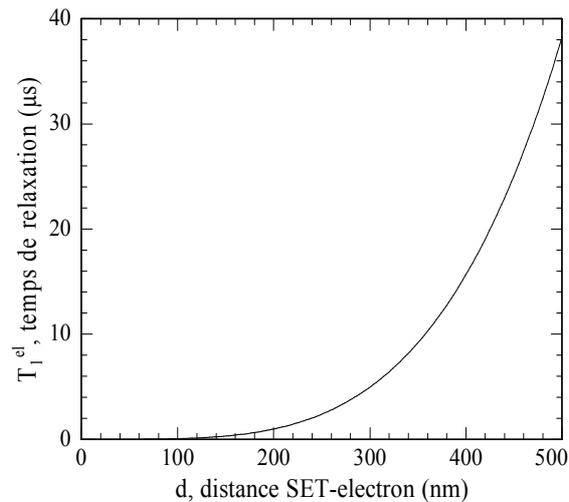
$$\Gamma_{12}^{el} = \frac{2(E_1 - E_0)R_{el}e^2l_d^2r_{SET}^2}{\hbar^2d^4}$$

Où  $R_{el}$  est la résistance de l'îlot

Le SET est connecté à la masse par une capacité de quelques picroFarads. L'impédance de l'îlot à la fréquence de transition est alors de l'ordre de l'ohm,  $R_{ilot} \simeq \frac{1}{C\omega_{12}} = \frac{\hbar}{C(E_1 - E_0)}$ .

Le temps de relaxation associé devient alors pratiquement indépendant du champ électrique extérieur (c.f. Figure 23), il ne dépend que de la distance SET-électron,  $d$ :

$$\Gamma_{12}^{el} = \frac{2e^2l_d^2r_{SET}^2}{C\hbar d^4}$$



**figure 29 : temps de thermalisation lié au SET, vu comme une électrode de confinement. Variations avec  $d$ , la distance électron-SET.**

Ce temps de relaxation est trop court pour permettre un application en tant que qubit. Il conviendra alors d'installer des condensateurs sur l'échantillon lui-même afin de diminuer le couplage avec la masse. Le diminuer d'un facteur 3 est suffisant.

En tant qu'électrode, le SET sera aussi soumis à des fluctuations thermiques entraînant un déphasage entre les états. Les fluctuations thermiques sont liées aux fluctuations thermiques des lignes de contact. Les lignes de contact ne sont pas en équilibre thermique avec la cellule expérimentale. Leur température peut facilement être de l'ordre du Kelvin. Le taux de déphasage associé est donné par :

$$\Gamma_{\varphi}^{el} = \frac{2k_B T_{ext} R_{ext} e^2 (z_{11} - z_{00})^2 r_{SET}^2}{\hbar^2 d^4},$$

où  $T_{ext}$  est la température des lignes de contact. Nous la supposons égale à 1 K. et  $R_{ext}$ , le résistance des lignes de contact, nous la supposons égale à  $25\Omega$ .

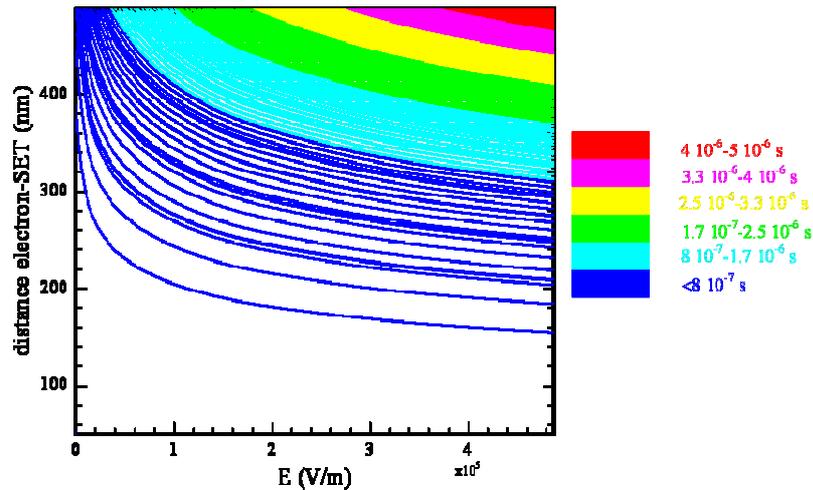


figure 30 : temps de déphasage dû au SET considéré comme une électrode soumis aux fluctuations thermiques de ses lignes de contact.

Le temps de déphasage reste malheureusement trop court pour les paramètres du SET que nous avons fabriqué. Dans un objectif de réalisation de qubit, il faudra réduire le rayon du SET et s'assurer que la distance électron-îlot reste suffisamment importante (environ 500 nm).

#### I.4.2.i.

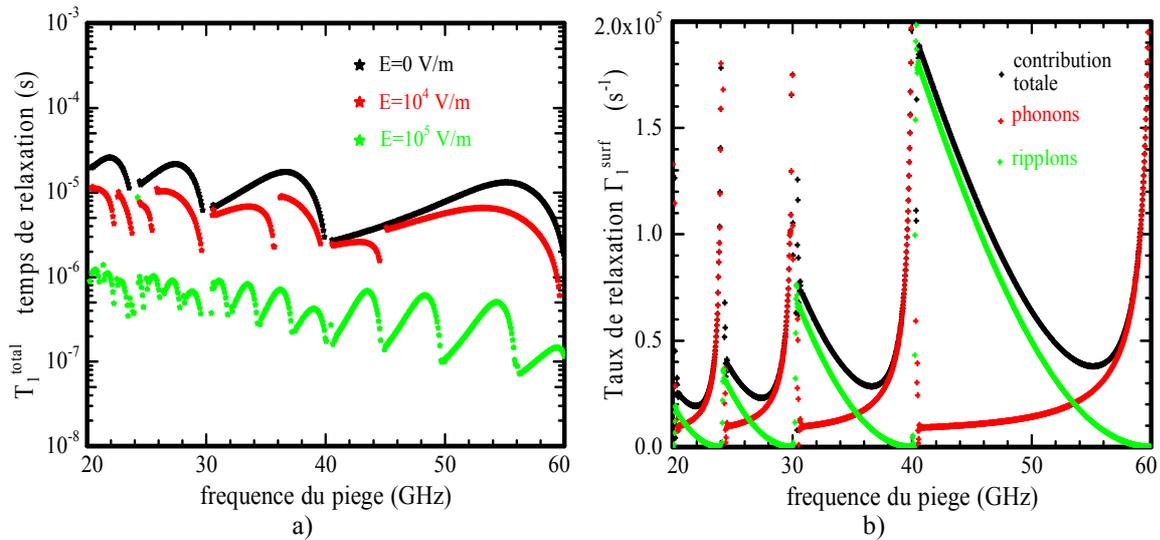
#### Résumé

De ces estimations, il faudra retenir que le SET est une grande source de déphasage. Néanmoins, l'opérateur peut diminuer le déphasage en jouant sur la géométrie du SET et sur le circuit électrique. Ces remarques amènent certaines contraintes géométriques que doit satisfaire l'échantillon.

Une distance SET-électron suffisamment grande mais pas trop afin que la charge induite par un électron soit mesurable. Typiquement, 500 nm est un bon compromis. Cela permet à un électron d'induire une charge de  $0.1e$  sur l'îlot ce qui est en principe mesurable. Le temps de décohérence associé permet une application en tant que qubit.

Autant il semble possible de contrôler l'action du SET autant il est difficile de contrôler les interactions avec la surface. Le déphasage induit par les phonons et les riplons est négligeable devant celui créé par le SET ou devant leur relaxation. En revanche, la relaxation peut s'avérer être trop importante.

La Figure 31 a) présente, pour trois valeurs du champ électrique, l'évolution du temps de relaxation associé à tous les mécanismes de couplage avec la surface (sauf à celui lié aux deux riplons de très courte longueur d'onde).



**Figure 31 :** a) évolution du temps de thermalisation lié aux couplage avec la surface en fonction de la fréquence de confinement pour trois valeurs du champ électrique. En noir, champ électrique nul  $E=0$ , en rouge  $E=10^4$  V/m, en vert  $E=10^5$  V/m. b) courbe noire : évolution du taux de relaxation avec la fréquence de confinement pour un champ pressant nul. Courbe rouge : contribution des phonons. En vert : contribution des riplons.

On peut augmenter le temps de relaxation en modifiant la fréquence de confinement. La dépendance est non triviale car elle intervient par l'intermédiaire d'une partie entière. Le gain n'est malheureusement pas aussi important qu'on pouvait le penser de prime en abord. Les contributions des phonons et des riplons varient en directions opposées (Figure 31 b), le taux de relaxation total varie donc peu.

Tous les mécanismes de relaxation (avec la surface, avec le SET) dépendent fortement du champ électrique extérieur. Il apparaît nécessaire de le réduire au maximum, un champ nul étant l'idéal.

Dans les conditions optimales, le temps de relaxation est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5}$  s. Le rapport du temps d'exécution d'une porte logique (variant entre  $10^{-8}$  et  $10^{-9}$ s) sur le temps de cohérence peut être suffisamment grand pour permettre une application en tant que qubit :

$$\frac{\tau_{co}}{\tau_{pl}} \propto 2 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5} d10^{-4}$$

On retiendra qu'on attend un temps de relaxation compris entre 50 et 5  $\mu$ s en champ nul. Il devient compris entre 1 et 0.1  $\mu$ s pour un champ de  $10^5$  V/m.

## I.5. Transistor à électron unique

### I.5.1. Théorie orthodoxe du blocage de Coulomb

#### I.5.1.a. Quelques ordres de grandeur

Un SET consiste en deux jonctions tunnel très petites, reliées à un îlot, et d'une grille couplée de manière capacitive à cet îlot (Figure 32)

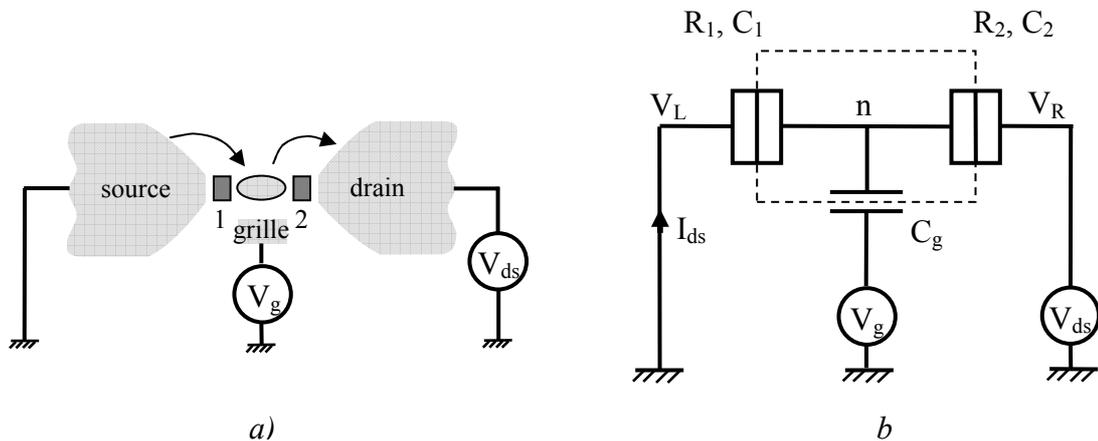


Figure 32 : a) Représentation schématique d'un SET constitué d'un îlot au centre séparé des électrodes par deux couches isolantes et couplées à une grille. b) Circuit électrique équivalent. Le potentiel électrostatique sur l'îlot et par conséquent sa charge sont modulés par le potentiel de la source \$V\_g\$.

L'idée du SET est d'obtenir une boîte, l'îlot, dans laquelle le nombre d'électron est fixé et change d'un nombre entier par effet tunnel. Il est donc nécessaire que les électrons ne puissent en ressortir ni à cause des fluctuations thermiques, ni à cause des fluctuations quantiques.

Si on appelle \$C\_\Sigma\$ la capacité totale de l'îlot, avec la source, le drain et la grille, l'énergie nécessaire pour ajouter un électron dans l'îlot est :

$$E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$$

Afin d'éviter que l'électron ne s'échappe à cause des fluctuations thermiques, il est nécessaire que l'énergie thermique soit petite devant l'énergie de charge  $E_c$ . Cette condition impose des contraintes sur la géométrie du SET :

$$k_B T \ll \frac{e^2}{2C_\Sigma}$$

$$C_\Sigma T \ll \frac{e^2}{2k_B} \text{ or } C_\Sigma \propto \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

$$\text{donc } ST \ll \frac{e^2 d}{2\varepsilon \varepsilon_0 k_B} \approx 10^{-14}$$

avec  $\varepsilon = 10$ ,  $d = 1 \text{ nm}$  et  $S$  l'aire des jonctions

$\varepsilon$  étant la permittivité de l'isolant et  $d$  son épaisseur.

Ces estimations supposent que la capacité totale est dominée par les capacités des jonctions. Il est évident que le couplage avec la grille est plus faible que celui avec les jonctions.

Si on se place à basse température  $T \sim 1\text{K}$ , le confinement des électrons nécessite des jonctions tunnel inférieures à la centaine de nanomètres. Le SET sera réalisé par lithographie électronique.

On peut remarquer que l'on recherche ici des états discrets de charge pour l'îlot et non des états discrets pour l'énergie des électrons de l'îlot. Ainsi, ce sont les dimensions typiques des jonctions qui importent et non les dimensions de l'îlot lui-même. Les niveaux d'énergie des électrons sont continus et décrits par des densités d'énergie. Les SETs peuvent ainsi être traités de manière semi-classique.

Par ailleurs, toujours pour cette recherche d'états de charge discrets, il convient que les fluctuations quantiques restent faibles afin que les électrons restent confinés.

Le temps typique  $\delta t$  et l'énergie  $\delta E = E_c$  qu'il peut échanger pendant ce temps sont liés par l'inégalité de Heisenberg :

$$E_c \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

La jonction tunnel est équivalente à un condensateur  $C_\Sigma$  en parallèle avec une résistance  $R_t$ , la résistance tunnel. La décharge de l'îlot est caractérisée par la constante de temps  $R_t C_\Sigma$ . L'électron reste confiné dans l'îlot si :

$$R_t C_\Sigma \gg \frac{\hbar}{2} \frac{2C_\Sigma}{e^2}$$

$$R_t \gg \frac{\hbar}{e^2} = R_Q = 25.8 \text{ k}\Omega$$

La fonction d'onde des électrons sera localisée si la résistance de la jonction tunnel est supérieure à la résistance quantique  $R_Q$

On peut noter que la résistance quantique devient  $R_Q = \frac{h}{(2e)^2} = 6.5 \text{ k}\Omega$  si le SET est réalisé en matériaux qui sont supraconducteurs aux températures de fonctionnement.

Par ailleurs, lorsque le SET est réalisé dans des matériaux supraconducteurs, une autre échelle d'énergie intervient, l'énergie du couplage Josephson  $E_J$ . Le couplage Josephson est lié au gap supraconducteur et à la résistance tunnel des jonctions mesurée lorsque le SET est dans l'état normal [23,25] :

$$E_J = \frac{h\Delta}{8e^2 R_t}$$

Si le couplage Josephson est fort devant l'énergie de chargement, les jonctions tunnel deviennent transparentes pour les paires de Cooper et les effets de chargement seront supprimés. Afin d'observer ces effets de chargements, il faut donc que l'énergie de chargement soit supérieure au couplage Josephson :

$$\frac{h\Delta}{8e^2 R_t} \ll \frac{e^2}{8C_\Sigma}$$

$$\frac{R_t}{C_\Sigma} \gg \frac{h\Delta}{8e^4} \approx 3.10^{18} \text{ avec } \Delta \approx 2 \text{ K}$$

Avec  $C_\Sigma$  de l'ordre de  $10^{-15}$  F, la résistance de la jonction tunnel doit être supérieure à 3 k $\Omega$ , ce qui est par ailleurs assuré par la condition de confinement malgré les fluctuations quantiques.

### *1.5.1.b. Modulation du courant par la tension de grille*

Considérons tout d'abord le cas d'un SET non-supraconducteur.

Les états de charge peuvent être modifiés continûment grâce à la présence de la grille. L'énergie de chargement dépend toujours du nombre (entier) d'électrons présents dans l'îlot mais aussi de la tension (continue) de la grille [23].

L'ajout d'un électron à l'îlot entraîne un accroissement de l'énergie de charge égal à :

$$E_c(n+1, Q_g) - E_c(n, Q_g) = \frac{((n+1)e - Q_g)^2 - (ne - Q_g)^2}{2C_\Sigma}$$

$$E_c(n+1, Q_g) - E_c(n, Q_g) = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{Q_g}{e}\right) \frac{e^2}{C_\Sigma}$$

Où  $Q_g = C_g V_g + C_L V_L + C_R V_R$  est la charge totale induite par les trois potentiels  $V_g, V_L, V_R$  sur l'îlot.

Ces niveaux d'énergie sont équidistants. Ils sont modulés par la tension de grille (voir Figure 33). Pour la situation décrite par la Figure 33, un électron peut passer du contact gauche sur l'îlot s'il existe un état accessible sur l'îlot:

$$eV_L \geq E_c(n+1, Q_g) - E_c(n, Q_g)$$

De manière similaire, l'électron peut quitter l'îlot pour rejoindre le contact droit si l'énergie de chargement est supérieure à l'énergie de Fermi sur le contact droit :

$$E_c(n+1, Q_g) - E_c(n, Q_g) \geq eV_R$$

Ainsi, si un état de charge de l'îlot se trouve entre les niveaux de Fermi des deux contacts, un courant traverse l'îlot (Figure 33a). En revanche, lorsque aucun état de charge n'est disponible, aucun courant ne peut traverser l'îlot. Le SET se trouve dans le régime du blocage de Coulomb, sa conductance est nulle (Figure 33b).

Le courant qui traverse le SET va être une fonction périodique du potentiel appliqué sur la grille. Cette période est  $e$ , la charge de l'électron.

Si aucune précaution n'est prise, un SET fait en matériaux supraconducteurs présente lui aussi une périodicité de  $e$  bien que le courant soit dû au passage de paires de Cooper. Comme la température est non nulle, des quasi-particules sont présentes. Elles ont une énergie plus faible dans l'îlot car le gap supraconducteur y est plus faible [24]. Elles vont donc "l'empoisonner" et seront à l'origine de la périodicité de  $e$ .

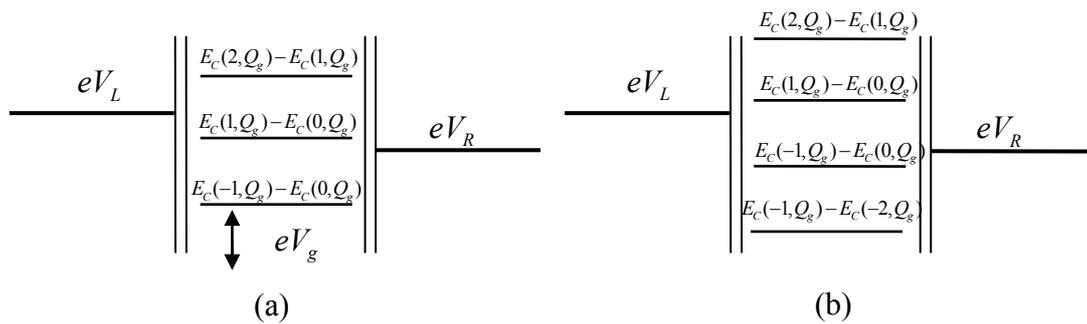


Figure 33 : (a) Configuration énergétique du SET lors d'une conduction non nulle. Les différences d'énergie correspondant à l'addition et au départ d'un électron sont représentées. Elles peuvent être modifiées par la tension de grille  $V_g$ . (b) Configuration énergétique lors du blocage de Coulomb. Aucun niveau de charge ne se trouve entre les niveaux de Fermi des deux contacts. Le courant ne peut pas traverser le SET.

A température nulle, les pics de conduction sont des Dirac. L'augmentation de la température et la présence des quasi-particules entraînent un élargissement de ces pics

### I.5.2. Caractéristique courant-tension

Dans ce paragraphe, nous allons succinctement décrire la caractéristique courant-tension du SET supraconducteur (i.e. l'évolution du courant drain-source ( $I_{ds}$ ) en fonction de la tension drain-source ( $V_{ds}$ )). Pour plus de détails théoriques, on pourra consulter les références [23] et [25].

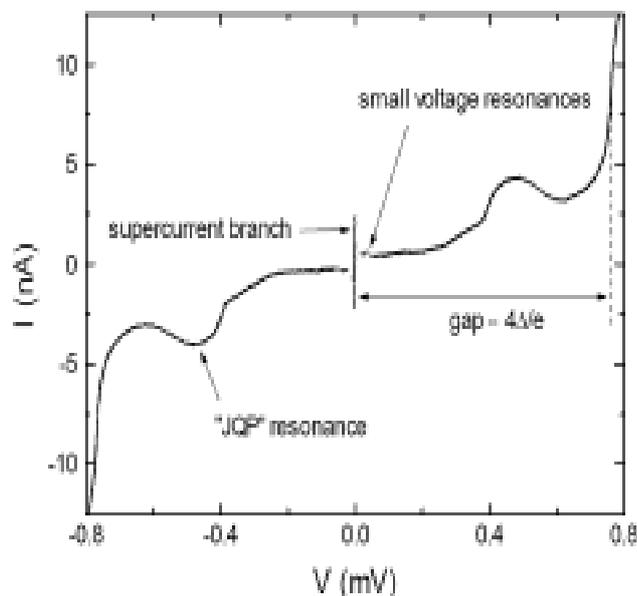


Figure 34 : caractéristique courant-tension typique pour un SET supraconducteur. (extrait de la thèse de Ph. Joyez)

La Figure 34 présente une caractéristique courant-tension typique d'un SET supraconducteur. On peut tout d'abord remarquer l'existence d'un courant continu pour une tension nulle. Il s'agit de la branche de super-courant, caractéristique de l'effet Josephson. Le courant dû aux paires de Cooper traverse les deux jonctions en série sans se soucier des barrières isolantes. Ce super-courant est particulièrement sensible aux effets de charge et l'observer n'est pas chose aisée. Son observation n'étant d'aucune utilité dans notre projet, aucun effort ne sera fait pour l'observer.

Tant que la tension drain-source est inférieure à  $4\Delta/e$  (supérieure au gap supraconducteur pour chacune des deux jonctions), la résistance du transistor est grande. le courant est

principalement dû au passage des paires de Cooper. C'est alors une fonction oscillante du temps à la fréquence :

$$f = \frac{2eV_{ds}}{\hbar} \simeq 3.10^9 \text{ Hz} / \mu\text{V} .$$

Ce courant est moyenné par la mesure, il apparaît comme nul. La très faible conductance continue observée est due aux quasi-particules qui sont peu nombreuses car l'énergie thermique est bien inférieure au gap supraconducteur.

Pour des tensions supérieures à  $4\Delta/e$ , des quasi-particules sont créées. On voit alors apparaître un courant continu.

Dans l'intervalle de tension  $[0, 4\Delta/e]$ , on peut remarquer l'existence d'un pic de résonance. Ce pic fut observé et analysé la première fois par Fulton et al. et Dolan [26]. Cette résonance est due aux paires de Cooper qui agissent comme un catalyseur en augmentant le transfert des quasi-particules à travers les jonctions.

Dans notre montage expérimental, le SET sera polarisé en courant. Avec une telle polarisation, les pics "JQP" ne seront pas stables. La caractéristique mesurée aura l'allure de la Figure 35. L'alimentation électrique rend la figure dissymétrique. Cette dissymétrie n'est pas cruciale dans notre expérience, elle n'a pas été corrigée. Nous avons simplement recherché la valeur du courant drain-source  $I_{ds}$  pour lequel la tension drain-source  $U_{ds}$  est nulle. Pour ces paramètres de polarisations, aucun courant ne circule à travers le SET.

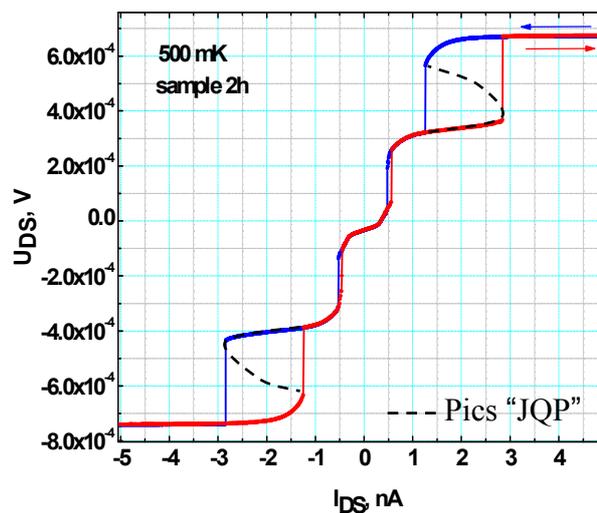


Figure 35 : Caractéristique courant-tension expérimentale d'un SET supraconducteur polarisé en courant. Les pics "JQP" ont été schématisés car ils ne sont pas stables. On observe alors de l'hystérésis.

En utilisant le théorème de Norton, on peut modéliser la source de courant et l'environnement par une source de courant parfaite et une résistance en parallèle. Le schéma d'alimentation du SET est représenté Figure 36 (a). La tension aux bornes du SET est une fonction de  $I_{ds}$ ,  $V_{ds} = f(I_{ds})$  représentée Figure 36 (b).

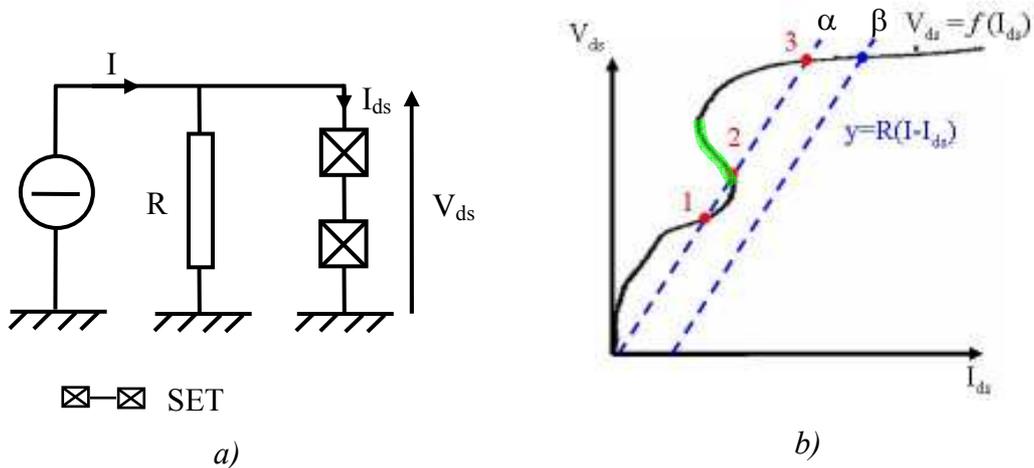


Figure 36 : a) Schéma du SET polarisé en courant (configuration de l'expérience). Le SET est parcouru par le courant  $I_{ds}$  et la tension  $V_{ds}$  est établie à ses bornes. Pour des soucis de clarté, la grille n'a pas été représentée. b) courbe noire: Caractéristique courant-tension du SET. courbe bleue: tension aux bornes de la résistance R. courbe rouge : trois points de fonctionnement, seuls les points 1 et 3 sont stables. courbe verte : région instable de pente négative.

Dans la situation  $\beta$  de la Figure 36 (b), il n'y a qu'un point de fonctionnement, par contre dans la situation  $\alpha$ , à cause des pics "JQP", il y en a trois. Tous ne sont pas stables. En effet, imaginons qu'il y a une fluctuation  $\delta I$  du courant d'alimentation. Cela entraîne une fluctuation du courant à travers le SET, fluctuation qui reste petite si le SET est à un point de fonctionnement stable. A un point de fonctionnement, les courants vérifient la relation :

$$f(I_{ds}) = R(I - I_{ds})$$

Sous l'effet des fluctuations, les courants varient tels que :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow I + \delta I \\ I_{ds} &\rightarrow I_{ds} + \delta i \end{aligned}$$

Les fluctuations sont alors reliées par la relation :

$$\delta i = \frac{1}{\left. \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{I_{ds}}} \delta I + 1$$

$\delta i$  reste petit si :

$$\left. \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial i} \right)_{I_{ds}} + 1 \geq 1 \quad \text{soit si} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right)_{I_{ds}} \geq 0$$

Les points de fonctionnement stables sont ceux pour lesquels la dérivée de la fonction donnant la tension aux bornes du SET en fonction du courant qui le traverse est positive.

Sur la Figure 36 (b), toute la portion de la courbe dont la pente est négative est instable. On comprend dorénavant pourquoi lors d'une polarisation en courant, la caractéristique ressemble à la Figure 35 et présente de l'hystérésis.

Le SET sera polarisé proche des pics "JQP" sur la branche inférieure car c'est pour ces positions que l'amplitude des oscillations du blocage de Coulomb est la plus grande [27].

### I.5.3. Le SET supraconducteur en tant qu'électromètre

Dans notre expérience, le SET est utilisé comme un électromètre c'est-à-dire comme un détecteur de charge très précis, en tout cas suffisamment précis pour détecter les électrons qui flottent au-dessus de l'hélium.

Imaginons un électron piégé au-dessus d'un SET par un puits de potentiel (Figure 37). Une modification du potentiel de la grille entraîne une variation périodique, de période  $e$ , du courant et de la tension aux bornes du SET :

$$V_{ds} = f\left(\frac{CV_{grille}}{e}\right).$$

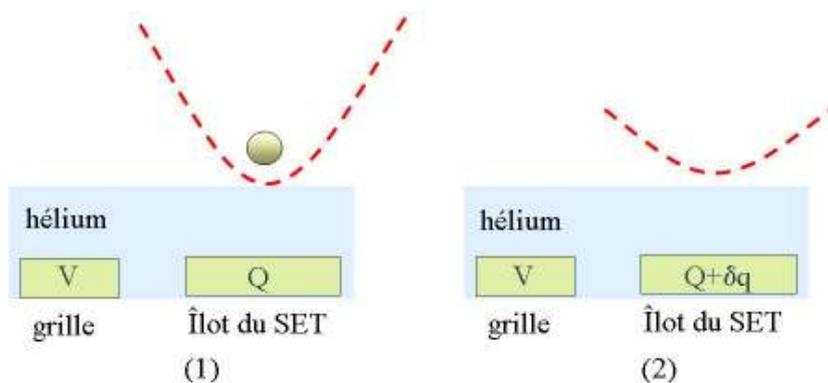
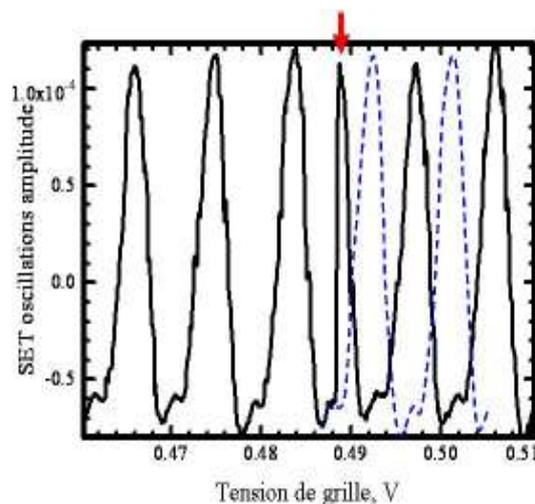


Figure 37 : (1) électron piégé dans un puits électrostatique (schématisé par des tirets rouges) au-dessus de l'îlot d'un SET. (2) Lorsque l'électron quitte le piège, la charge sur l'îlot change brusquement impliquant un changement brusque de la phase des oscillations.

Imaginons maintenant que le puits s'abaisse et qu'il ne puisse plus contenir l'électron. L'électron quitte le piège. Cela induit une variation soudaine de la charge de l'îlot du SET.

$$V_{ds} = f\left(\frac{CV_{grille}}{e} + \frac{\delta q}{e}\right)$$

La situation est résumée par la Figure 38. La flèche rouge marque le départ de l'électron du piège qui se traduit au niveau des oscillations par un déphasage brutal.



**Figure 38 : modulations de la tension aux bornes du SET par la tension appliquée à la grille. La courbe noire est la courbe obtenue expérimentalement. L'amplitude des oscillations du SET est donnée en V. Un électron a quitté le piège, marqué par une flèche rouge. La phase des oscillations a alors changé. La courbe en tirets bleus représente les oscillations qui auraient été mesurées sans modification de la phase. L'exemple présenté correspond à un décalage de phase de  $0.4e$ .**

Un électron induit une charge positive sur l'îlot. Ainsi, le départ d'un électron va induire une variation de charge  $\delta q$  négative. Avec la convention de signe choisie, la variation de phase  $\delta\varphi = \delta q/e$  sera négative lorsqu'un électron quittera le piège. On attend donc un saut de phase négatif (vers le bas) lorsqu'un électron quitte le piège et un saut de phase positif (vers le haut) lorsqu'un électron entre dans le piège.

La procédure de mise en évidence des électrons sera la suivante:

La forme des oscillations de Coulomb est non triviale et dépend de paramètres non contrôlables (c.f. Figure 38). Ce sont des pics de Dirac élargis par la température et la densité de quasi-particules. Nous ne pouvons contrôler la densité des quasi-particules, la forme des oscillations sera une donnée expérimentale.

Nous balayerons une électrode afin d'enregistrer plusieurs modulations. Une partie calme (sans variations de phase) comportant plusieurs périodes sera transformée suivant la transformation suivante :

$$V^* = \text{mod}(V, p)$$

où  $V$  est le potentiel de l'électrode,  $p$  la période approximative des oscillations et  $\text{mod}(x,p)$  désigne le modulo de  $x$  suivant  $p$ .

L'ensemble des oscillations est alors compris entre 0 et  $p$ . Plusieurs oscillations se superposent, elles sont moyennées afin d'obtenir une courbe "moyenne". Cette courbe "moyenne" permet de s'affranchir d'une partie des fluctuations statistiques. Elle est alors ajustée à l'aide de fonctions "spline" qui définiront alors la fonction de référence. L'ensemble des oscillations sera "fitté" par cette fonction de référence. Deux paramètres d'ajustement sont utilisés, la phase  $\delta\varphi$ , et l'amplitude.

Les sauts de phase marqueront le départ ou l'arrivée d'un électron dans le piège.

*Remarque :*

Le mécanisme de détection des électrons ne requiert nullement l'utilisation d'un SET supraconducteur. Celui-ci permet seulement d'avoir des oscillations de plus grandes amplitudes ainsi qu'un couplage avec l'électron flottant plus faible.

## II. Deuxième partie, piéger un électron :

### *La course de fond*

#### II.1. Les échantillons

##### II.1.1. *Géométrie des échantillons et choix des matériaux*

La géométrie des échantillons qui ont été fabriqués au cours de cette thèse résulte d'une réflexion commune entre le Royal Holloway College de Londres (G.Pappageorgiou, P. Glasson, M. Lea [12]) et Iouri Moukharski. J'ai été initié à la nano-fabrication par L. Hristakos. Ensuite, les conseils avisés de Iouri me furent précieux afin de parvenir à la réalisation de quelques échantillons.

L'échantillon doit satisfaire les contraintes suivantes :

Le film d'hélium doit être d'environ 500 nm (se référer au chapitre I).

On doit pouvoir isoler un seul et unique électron dans un puits électrostatique.

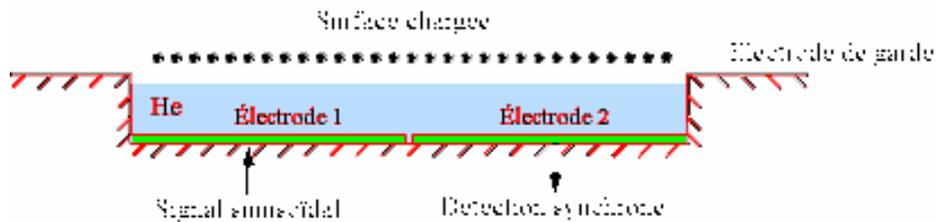
Par ailleurs, il peut être judicieux de disposer d'un réservoir d'électrons qui récupérera les électrons quittant le piège et qui pourra permettre de recharger le piège sans faire de nouvelle décharge.

L'électron doit être détecté via un SET.

Il peut être utile d'avoir un autre moyen pour s'assurer de la présence des électrons à la surface de l'hélium. On réalisera pour cela une détection par mesure capacitive. Il s'agit de la méthode historique de détection des électrons au-dessus de l'hélium, inventée par Sommer et Tanner [28].

Elle consiste à mesurer la capacité entre deux électrodes qui supporte le film d'hélium (figure 39).

La couche d'électron renforce le couplage capacitif entre les deux électrodes. La détection synchrone permet d'avoir accès à la mobilité des électrons par l'intermédiaire de la composante réelle du signal mesuré. La composante imaginaire permet, quant à elle, d'obtenir la valeur de la densité électronique moyenne au-dessus des deux réservoirs.



**figure 39:** Schéma du dispositif de détection des électrons dans l'expérience de Sommer et Tanner. L'électrode de garde confine les électrons au-dessus des électrodes 1 et 2. Une tension sinusoïdale est appliquée sur l'électrode 1. Le couplage capacitif entre les deux électrodes est mesuré par détection synchrone sur l'électrode 2. La présence des électrons augmente le couplage capacitif entre les deux électrodes.

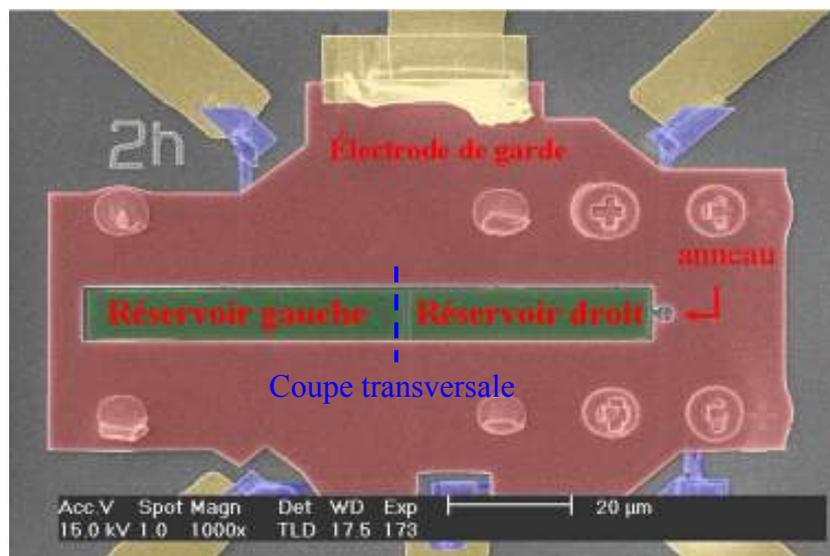
La géométrie retenue fut donc la suivante (Figure 40) :

Deux réservoirs (entre lesquels une mesure capacitive sera réalisée), le réservoir gauche et le réservoir droit de dimensions similaires :  $54 \times 10 \mu\text{m}$  pour le réservoir gauche et  $41 \times 10 \mu\text{m}$  pour le réservoir droit avec un gap de  $1 \mu\text{m}$  entre les deux réservoirs.

Un piège électrostatique où les électrons seront détectés un par un est défini par un anneau de diamètre  $3 \mu\text{m}$ .

Une électrode confinant les électrons au-dessus des deux réservoirs. Elle est surélevée de  $500 \text{ nm}$  par rapport au deux réservoirs et à l'anneau afin de former le canal de  $500 \text{ nm}$  de profondeur (Figure 41).

Un SET, déposé au fond de l'anneau.



**Figure 40 :** photographie au SEM de l'échantillon. Les différentes parties de l'échantillon ont été coloriées. En vert, sont représentés les deux réservoirs, en rouge l'électrode de garde et en bleu, les lignes assurant le contact électrique entre ces différents éléments et les contacts macroscopiques qui apparaissent ici en doré. La coupe transversale de l'échantillon suivant la ligne en tirets bleus est représentée sur la Figure 41

La majeure partie de l'échantillon est métallisée afin que les électrons ne soient pas piégés par les isolants.

Vient ensuite le choix des matériaux. Les estimations des temps de décohérence ont préconisé un matériau supraconducteur dont le gap est supérieur à 5.6 K. Le niobium de gap 7.5 K fut donc choisi. Il est pulvérisé sur l'échantillon. Ainsi, il y adhère mieux que du niobium évaporé. Ce procédé permet en outre de réduire les contraintes superficielles qui peuvent exister dans la couche déposée. Les contraintes sont ajustées en variant la pression lors de la pulvérisation. Ceci n'est pas possible avec un évaporateur de métaux. Par ailleurs, évaporer du niobium est généralement un processus délicat car l'étape de "lift-off" est difficile. Le choix du niobium est de plus extrêmement intéressant car il permet de réutiliser l'échantillon si le SET ne fonctionne pas ou plus. Le SET sera fait en aluminium<sup>5</sup>. L'aluminium peut être dissous par gravure chimique acide ou basique, alors que le niobium est inerte. Ainsi, on peut dissoudre le SET et en refaire un sur le même échantillon. On évite les premières étapes de dépôt des réservoirs, de l'électrode de garde, etc....

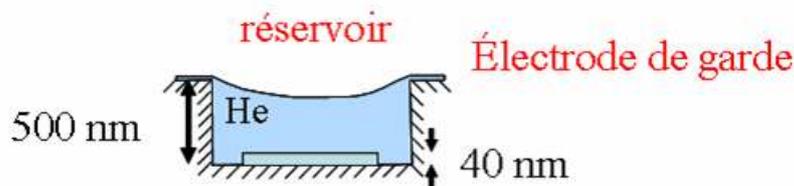


Figure 41 : Coupe transversale de l'échantillon suivant la ligne en tirets bleus de la . L'électrode de garde est 500 nm plus haut que les deux réservoirs qui eux font 40 nm d'épaisseur. Le canal ainsi défini est rempli d'hélium.

### II.1.2. techniques de fabrication

Les échantillons sont réalisés en 8 étapes, une lithographie UV, quatre lithographies électroniques, deux gravures ioniques et une gravure chimique.

L'annexe A schématise les principes de la lithographie électronique (directement transposable au cas de la lithographie optique en remplaçant l'exposition par le faisceau d'électrons par un faisceau UV). L'annexe B, quant à elle, illustre l'évaporation sous angle (la célèbre "Shadow technique") nécessaire pour la réalisation d'un SET. Les différents paramètres utilisés sont résumés dans l'annexe C.

Les échantillons sont réalisés sur un "wafer" de silicium de deux pouces de diamètre et 280  $\mu\text{m}$  d'épaisseur. Le silicium est dopé P afin que la conduction soit réalisée par des trous plutôt que par des électrons et recouvert d'une couche isolante de 500 nm de silice  $\text{SiO}_2$ . Il est nécessaire qu'il soit faiblement dopé afin qu'il ne conduise pas à basse température.

On pulvérise en premier lieu 40 nm de niobium sur ce "wafer". Vient ensuite la lithographie optique qui définit les contacts macroscopiques (Figure 42).

<sup>5</sup> L'aluminium est un matériau d'utilisation courante. Il est facile à évaporer, la couche isolante est obtenue par oxydation de l'aluminium dans la chambre de dépôt et elle est plutôt de bonne qualité.

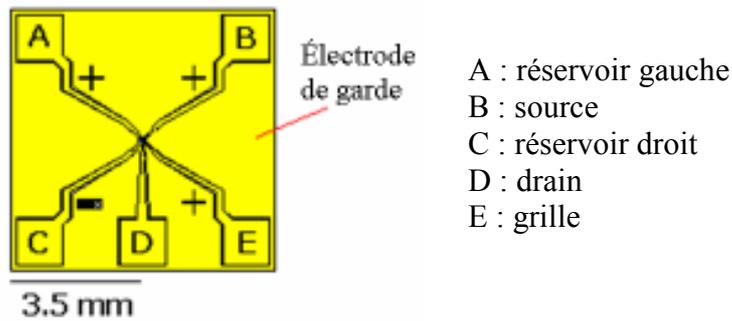


Figure 42 : vue macroscopique de l'échantillon. Les parties jaunes sont recouvertes de 250 nm d'or isolées les unes des autres par un espace vide de 250  $\mu\text{m}$  de large (parties noires).

La lithographie est réalisée par exposition d'une résine négative sur l'ensemble du wafer à partir d'un masque en verre dont les motifs sont en chrome. Des échantillons carrés de côté 7 mm sont ensuite découpés avec un diamant ("scriber").

Suivent deux étapes de lithographie électronique. Lors de la première, sont déposées des croix en or de 150 nm d'épaisseur qui serviront aux réalignements ultérieurs. Lors de la deuxième lithographie, sont déposés les deux réservoirs, les lignes de source et de drain du transistor (Figure 43) par évaporation de 50 nm d'aluminium.

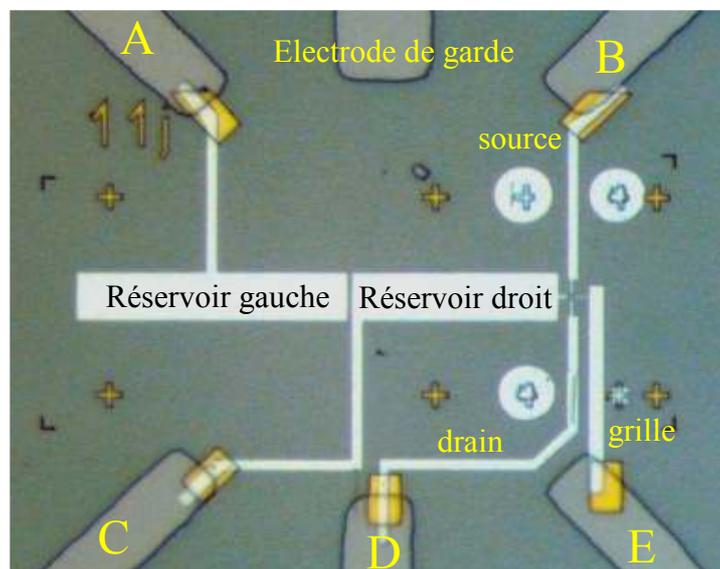


Figure 43 : image au microscope optique de la partie centrale de l'échantillon après les deux premières étapes de lithographie électronique et les métallisations qui leur sont associées. Les croix (1<sup>ère</sup> lithographie) sont en or (200 nm), les réservoirs et les lignes de contacts (source et drain) (2<sup>ème</sup> lithographie) sont en aluminium (45 nm). Légende associée aux lettres : se référer à la Figure 42.

La couche inférieure est en niobium. Elle est gravée par attaque ionique (RIE, Reactive Ion Etching) en utilisant un plasma de  $\text{SF}_6$ . Les matériaux légers étant insensibles à cette gravure, la couche d'aluminium sert de masque protecteur à la couche de niobium qui se trouve

dessous. Après la gravure, on observe le même motif que celui de la Figure 43 sauf que la couche inférieure est maintenant de la silice.

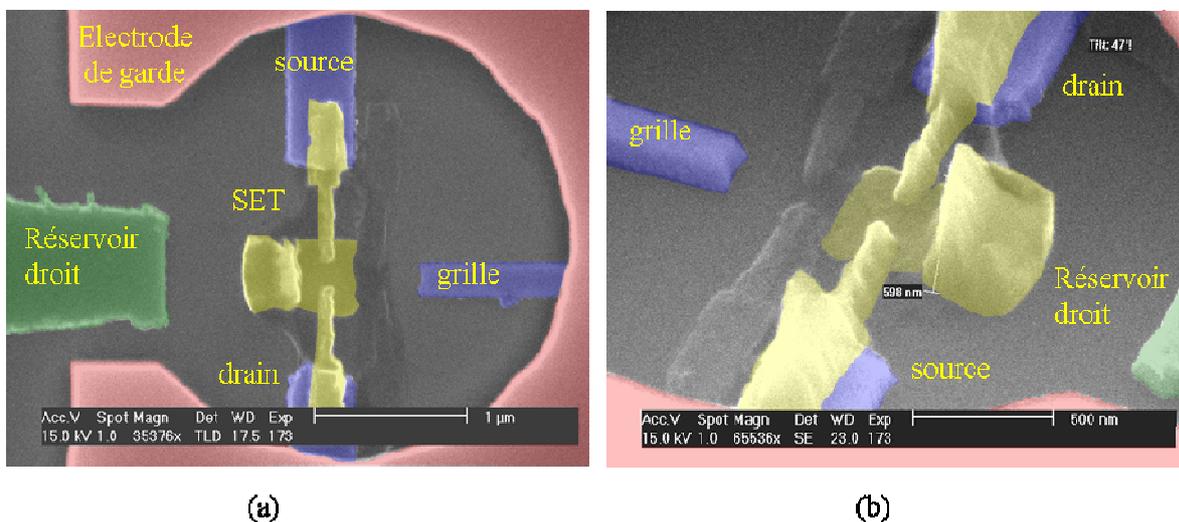
Il nous faut ensuite former le canal de 500 nm de profondeur, ainsi que l'électrode de garde qui nous permettra de confiner les électrons au-dessus des deux réservoirs. Il est nécessaire d'empêcher tout contact électrique entre cette électrode et les autres composants de l'échantillon. On dépose une couche isolante, un poly-imide, le PI2611 de 250 nm d'épaisseur puis, toujours par pulvérisation une couche de 250 nm de niobium. Comme précédemment, on va par lithographie électronique et dépôt d'aluminium, puis par gravure ionique réaliser le motif de l'électrode de garde. On obtient alors l'échantillon de la Figure 40.

Les différentes électrodes étant recouvertes d'aluminium, on effectue une gravure chimique de cet aluminium avant la fabrication du SET.

Nous avons donné un profil pyramidal à l'îlot du SET que nous avons fabriqué en étendant la technique d'évaporation sous angles (les motivations du recours à l'emploi d'un SET à îlot pyramidal (abrégé par la suite en SET pyramidal) sont présentées dans l'annexe D).

La fabrication du SET pyramidal est présentée dans l'annexe B. L'alignement du SET sur les lignes de contact doit être précis. Le SET est déposé sur les contacts en niobium réalisés lors de la deuxième étape. La précision du réaligement est inférieure à 200 nm près.

La largeur de l'îlot a été adaptée afin que ses deux images se recouvrent. Autrement, une des images aurait pu prendre un potentiel aléatoire et le profil des potentiels dans l'anneau n'aurait pas pu être contrôlé. L'îlot a une largeur de 400 nm, les deux images sont séparées de 300 nm. Il y a donc un recouvrement de 100 nm. Ce contact, d'aire importante, induit un couplage beaucoup plus faible que celui des jonctions. Les effets de chargement entre les deux îlots seront ignorés.



**Figure 44 :** vues au SEM du SET pyramidal dans l'anneau. (a) vue de dessus, l'îlot fait 500 nm de long et 2\*400 nm de large, les deux images se recouvrent. (b) vue sous angle de l'îlot. On peut y voir le profil pyramidal de l'îlot. Attention, la direction d'observation est inversée par rapport à la photographie a).

### II.1.3. Simulation du profil des potentiels.

Nous avons effectué une simulation du profil de potentiel ressenti par l'électron. Cette simulation a été réalisée avec le logiciel FlexPDE 4.0. C'est un logiciel générique de résolution d'équations aux dérivées partielles avec condition aux limites.

Le logiciel réalise une résolution par éléments finis en 3 dimensions. La géométrie complète de l'échantillon est simulée. Les épaisseurs, les constantes diélectriques des différentes couches, silicium, silice, électrodes métalliques, hélium, air sont prises en compte. La structure pyramidale du SET a été modélisée.

Le logiciel calcule le potentiel et le champ électrique en tout point de l'échantillon. Ainsi, il nous permet d'avoir accès au potentiel ressenti par un électron flottant au-dessus du film d'hélium.

D'une manière générale, nous ne représenterons pas le profil du potentiel électrique mais le profil de l'énergie potentielle d'un électron dans ce profil de potentiel électrique. L'énergie sera en électron-volts. Ainsi la correspondance entre le profil d'énergie potentielle et le profil des potentiels électriques est simple, juste un signe. De plus, cette représentation est plus claire. L'électron occupe un minimum du profil. Dans la suite de cette thèse, nous parlerons de "profil de potentiel" pour "profil de l'énergie potentielle d'un électron". Un exemple de profil de potentiel est représenté Figure 45.

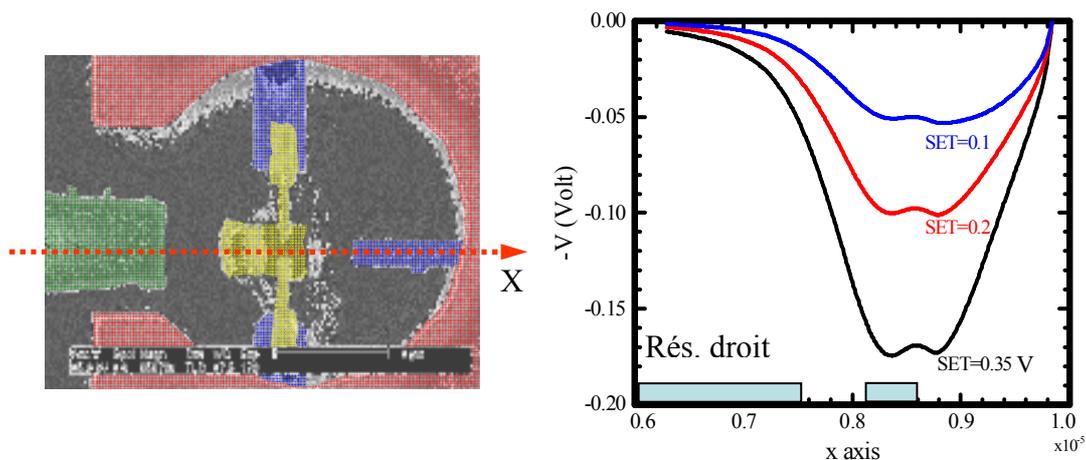


Figure 45 : profil de l'énergie potentielle d'un électron dans l'anneau pour différentes valeurs du potentiel électrique appliqué sur le SET (coupe suivant l'axe x). Les autres électrodes (réservoir gauche, droit, grille) sont à zéro volts. L'électron est supposé "flotté" à 11 nm au-dessus du film d'hélium.

Le SET crée lui-même le piège électrostatique dans lequel les électrons seront piégés. La profondeur du piège, donc le nombre maximal d'électrons que le piège peut accommoder, est modifiée en variant le potentiel électrique appliqué sur le SET.

La simulation nous permet aussi de calculer la charge induite sur l'îlot du SET par un électron. Un électron localisé dans le minimum du potentiel crée une charge de  $0.4e$  sur l'îlot du SET.

## II.2. La cellule expérimentale

### II.2.1. Description

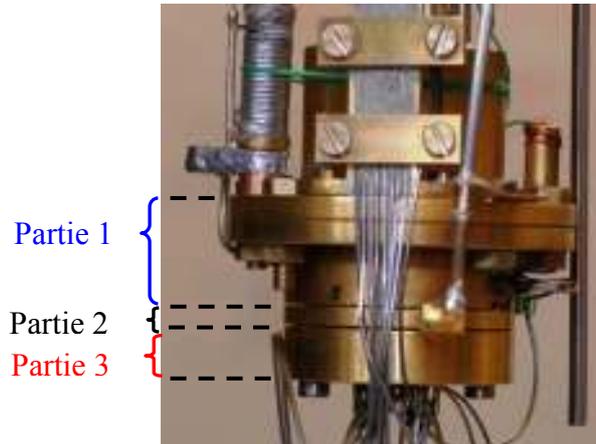


Figure 46 : photographie de la cellule expérimentale. Elle se compose de trois parties principales. La **partie 1** est reliée à la chambre à mélange, l'échantillon est fixé sur la partie 2. La **partie 3** assure les contacts électriques entre l'échantillon et l'extérieur.

L'expérience se déroule à basse température ( $T \sim 30\text{mK}$ ), elle nécessite donc l'utilisation d'un cryostat à dilution. La cellule expérimentale est en cuivre doré afin d'avoir une bonne conduction thermique. Une photographie de la cellule est présentée Figure 46 tandis que la Figure 47 en présente une coupe. Les dimensions typiques de la cellule sont présentées sur la Figure 47.

La **partie 1** est reliée à la chambre à mélange et permet le refroidissement de l'ensemble de la cellule. Elle délimite aussi un espace vide en son centre qui sera l'espace accessible à l'hélium, introduit via un capillaire. Un canon à électron est aussi inséré dans cet espace. Il permettra la création des électrons qui peupleront le film d'hélium. Le doigt du canon à électron est visible sur la Figure 48.

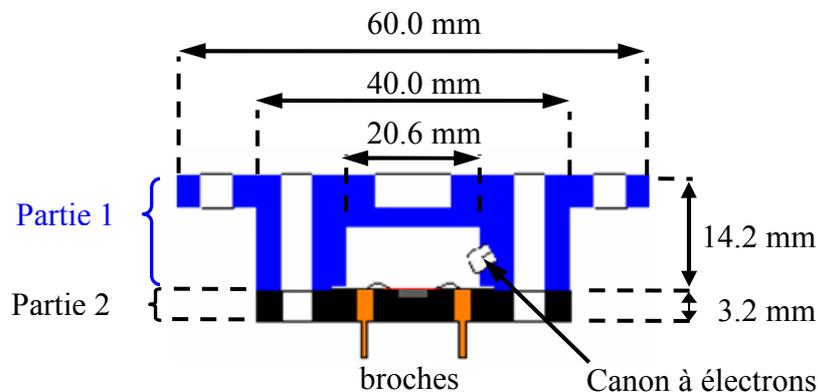


Figure 47 : coupe de la cellule expérimentale, la partie 3 n'est pas représentées. L'échantillon est fixé par soudure par ultrason aux broches.

L'échantillon est connecté aux broches en cuivre de la partie 2 par soudure aux ultrasons. Les fils utilisés pour la soudure sont en or ( $50\ \mu\text{m}$ ) ou en aluminium ( $25\ \mu\text{m}$ ). L'étanchéité entre la **partie 1** et la partie 2 de la cellule est assurée par un joint en indium.

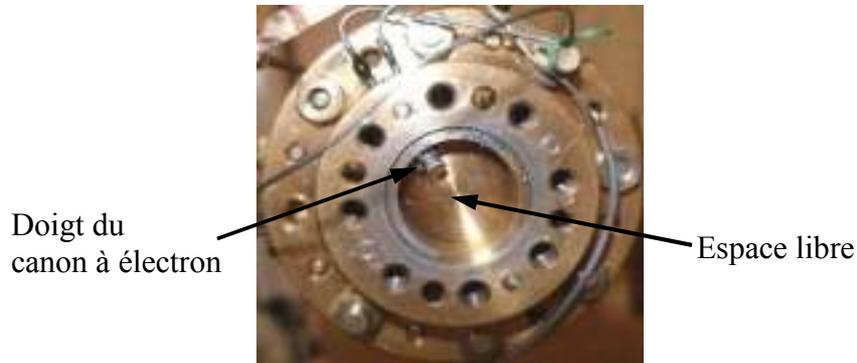


Figure 48 : **partie 1** de la cellule vue de dessous.

La Figure 49 est une photographie de la partie 2 sur laquelle un échantillon a été monté.

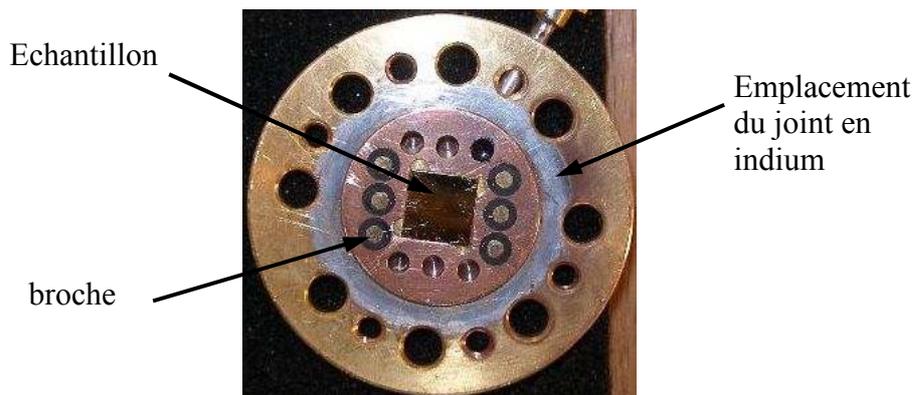


Figure 49 : échantillon monté sur la **partie 2** de la cellule. Un joint en indium assure l'étanchéité entre la **partie 1** et la partie 2 de la cellule.

La **partie 3** de la cellule établit les contacts électriques entre les pinoches et l'extérieur.

### **II.2.2. Introduire la quantité exacte d'hélium.**

L'hélium est introduit dans la cellule via un capillaire placé à température ambiante. La cellule est préalablement pompée. Il nous faut introduire la quantité exacte d'hélium pour remplir le canal (réservoir gauche, droit et anneau) et seulement le canal. En aucun cas, le film

d'hélium au-dessus de l'électrode de garde ne doit être le plus fin possible<sup>6</sup>. L'épaisseur du film est imposée par les forces de capillarité et par le niveau relatif du bain d'hélium dans la cellule. Il convient donc d'ajouter la quantité minimale d'hélium permettant de ne remplir que les deux réservoirs et l'anneau. Le film au-dessus de l'électrode de garde sera alors de 300 Å environ.

Afin de contrôler la quantité d'hélium ajoutée, nous mesurons avec un pont de mesure de capacité, la capacité entre deux électrodes (c.f. Figure 42 et Figure 43). Cette mesure s'effectue toujours entre l'électrode de garde et une des autres électrodes afin d'avoir le plus grand couplage donc la meilleure précision possible. Généralement, nous utilisons un des deux réservoirs. La capacité est dominée par les électrodes macroscopiques (se référer à la Figure 42). Ainsi, comme la mesure a principalement lieu entre les électrodes macroscopiques, le choix de l'électrode n'a pas d'importance, les électrodes macroscopiques étant toutes identiques.

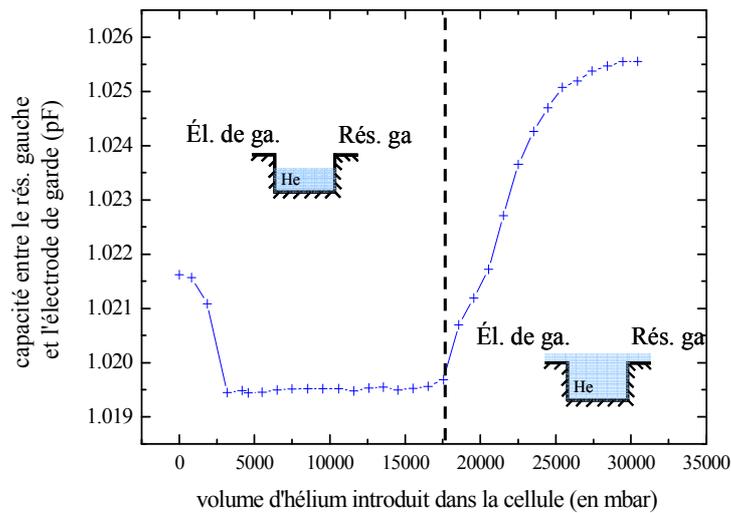
La Figure 50 présente les variations de capacité en fonction de la quantité d'hélium introduite. La quantité d'hélium introduit est donnée en unité arbitraire dans le sens où nous ne connaissons pas la fraction d'hélium introduit qui reste présent dans le capillaire. Nous introduisons de l'hélium gazeux, mesuré en mbar. L'hélium se condense avant d'avoir atteint la cellule expérimentale. Il est liquide dans toute une partie du capillaire. Les forces de capillarité stabilisent cette colonne de liquide. Il en résulte deux conséquences. Tout d'abord, nous ne connaissons pas la quantité exacte qui arrive effectivement sur l'échantillon. Cela empêche toute conversion du volume introduit en unité de pression en hauteur de film. Ensuite, cette colonne peut être instable. Le niveau d'hélium varie alors subitement. Afin de minimiser les effets de ces brusques variations, la cellule expérimentale contient une cavité située sous l'échantillon. Le volume de cette cavité est grand. Il accommode les variations de niveau.

La capacité (Figure 50) commence par décroître. Nous ne savons pas expliquer cette décroissance. Néanmoins, il ne s'agit pas d'un effet de température car elle existe lorsque de l'hélium a été préalablement introduit puis pompé. L'hélium étant difficile à pomper complètement, il reste toujours un film monomoléculaire qui assure la thermalisation de l'ensemble de la cellule.

Après cette décroissance, la courbe est plate. Un film fin se forme sur l'ensemble de l'échantillon. Le canal, situé sous le niveau des électrodes macroscopiques, se remplit petit à petit. La capacité finit par augmenter. Le film d'hélium rempli complètement l'espace libre entre les deux réservoirs. La hauteur du film d'hélium augmente, la capacité augmente. Puis, elle finit par saturer.

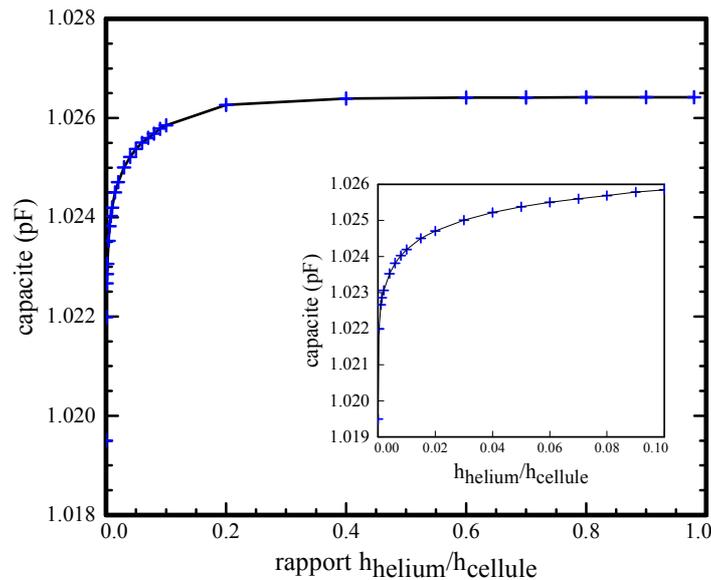
---

<sup>6</sup> Ainsi les électrons au-dessus de l'électrode de garde seront fixes car piégés par les aspérités de la surface. Ils ne seront donc pas source de perturbations.



**Figure 50 : variation de la capacité entre le réservoir gauche et l'électrode de garde. A gauche de la ligne en pointillés noirs, le film d'hélium ne recouvre pas les électrodes entre lesquelles la mesure est fait. La capacité reste constante. A droite de la ligne en pointillés, le film recouvre les deux électrodes. La capacité augmente avec la quantité introduite.**

Nous avons calculé par simulation numérique (avec le logiciel FlexPDE) les variations de capacité en fonction de la hauteur d'hélium dans la cellule. La simulation ne permet évidemment pas de retrouver les valeurs expérimentales absolues (il y a la capacité des câbles, le couplage à la masse etc... qui ne sont pas pris en compte). On normalise donc le minimum de la valeur obtenue par simulation par le minimum de la valeur expérimentale. Le résultat est représenté Figure 51 où l'axe des abscisses est le rapport de la hauteur du film d'hélium sur la hauteur totale de la cellule. On peut remarquer (voir insert) que la capacité a atteint 90% de sa valeur finale pour le rapport 0.05 qui est le rapport du gap entre les électrodes et sur la hauteur de la cellule (0.25/5 mm). Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, la capacité sature lorsque le niveau d'hélium est supérieur au gap entre les électrodes.



**Figure 51 :** simulation de la variation de la capacité entre le réservoir gauche et l'électrode de garde en fonction du rapport de la hauteur d'hélium sur la hauteur de la cellule. Insert : zoom sur la région [0,0.1].

La valeur maximale de la capacité déterminée grâce à la simulation correspond à moins de 0.1% près à la valeur maximale mesurée (valeur maximale calculée : 1.0265 pF, valeur maximale mesurée : 1.0255 pF). Elle prouve que l'augmentation de capacité mesurée est complètement due à l'hélium introduit.

La mesure de la capacité entre un réservoir et l'électrode de garde n'est réalisée qu'une seule fois. Cette première mesure réalise un étalonnage. Nous ajoutons dans la cellule vide la quantité d'hélium pour nous situer sur la partie plate de la Figure 50, juste avant la remontée de capacité. Ainsi, seul le canal est rempli. Le film d'hélium est monomoléculaire sur les autres parties de l'échantillon.

### **II.2.3. Générer les électrons : décharge corona.**

Les électrons sont créés grâce à une décharge corona. On applique un fort potentiel négatif (en valeur absolue, entre 450 et 900 V) sur une électrode située dans une cage en forme de doigt (voir Figure 47 et Figure 48). Cette électrode est séparée par une grille dont le potentiel est à la masse. Le corps de la cellule ainsi que la cage sont à la masse.

Lorsqu'on désire peupler la surface d'hélium d'électrons, un léger potentiel positif est appliqué sur toutes les électrodes de l'échantillon (entre +0.1 et +0.3 V).

Grâce à sa géométrie particulière, le champ électrique créé au niveau du doigt est très intense. Cet effet de pointe se traduit par une décharge.

Nous pouvons aussi générer des ions positifs en appliquant un potentiel positif sur l'électrode. Après plusieurs décharges négatives successives, créer des cations peut être utile pour neutraliser les électrons immobiles piégés dans sur les parties diélectriques de l'échantillon. Ces électrons forment alors une barrière de potentiel qui empêche les électrons générés par la décharge d'atteindre les deux réservoirs. Les cations libérés se déposent sous la surface d'hélium. Ils créent ainsi un potentiel attracteur supplémentaire et augmentent le confinement.

Les décharges positives et négatives se déroulent principalement en deux étapes. Il y a tout d'abord une étape de génération d'ions et d'électrons. Ils sont ensuite accélérés par le champ électrique et engendrent, par un effet d'avalanche en rencontrant des atomes neutres du gaz environnant, des ions et des électrons. La grille, un réseau métallique de période spatiale  $0.1 \mu\text{m}$  (grille de microscope électronique), dont le potentiel est à la masse permet de décélérer les ions ou les électrons suivant la polarité de la décharge.

La densité du gaz (l'hélium) doit être suffisamment importante pour entretenir la décharge. La décharge est effectuée à  $1.2\text{K}$ . La cellule est ensuite refroidie jusqu'à la température de travail  $T \sim 30 \text{ mK}$ , ce qui demande un peu de temps (environ 1 heure). On comprend maintenant l'utilité des deux réservoirs.

## II.3. Connexions avec le monde extérieur

### II.3.1. *Limiter ces connexions*

Nous avons vu au paragraphe *I.5.1* que le blocage de Coulomb ne pouvait être visible que pour des températures inférieures à 1 K. Les parties "chaudes" du cryostat (les parties allant de la température de la pièce à la plaque à 4K) vont émettre des radiations thermiques qui vont apporter suffisamment d'énergie aux électrons pour leur permettre de traverser la barrière. Le phénomène de blocage de Coulomb ne sera plus visible. Un Kelvin correspond à une fréquence d'environ 20 GHz. Il nous faut donc réaliser un filtrage haute fréquence des câbles. Toutes les lignes de mesure sont réalisées par un câble Thermocoax d'environ un mètre de long et de diamètre extérieur 1 mm. Au-delà de 50 cm, les câbles Thermocoax suppriment très efficacement les fréquences supérieures à 1 GHz [29]. A 20 GHz, l'atténuation atteint une centaine de décibel par mètre.

Les câbles thermocoax sont reliés à des boîtes contenant des filtres LC commerciaux de la société muRata. Ces filtres éliminent les fréquences supérieures à 100 MHz . Ces boîtes sont attachées à la plaque à 1 K. Les filtres sont constitués de deux bobines et d'un condensateur de 22 pF en parallèle. L'ensemble, de petite taille, ne dépasse pas 3.2 mm. Ces filtres présentent une fréquence de coupure à 3 dB de 100 MHz. Le nombres de filtres varient alors de 1 à 4 suivant la place disponible.

La différence de température entre le haut (~300K) et le bas des câbles(30 mK) donne lieu à l'apparition d'une différence de potentiel (effet Seebeck). Des variations de la température de la pièce vont engendrer de lentes variations de cette différence de potentiel, engendrant une indétermination du potentiel des différentes électrodes. Afin d'augmenter la reproductibilité de l'expérience, il convient de réduire les effets de ces potentiels thermiques.

Ainsi, sur les lignes connectées au SET, à l'électrode de garde et au réservoir droit, ont été ajouté des diviseurs de tension ( $1/10^{\text{ième}}$ ). Ils sont réalisés par une résistance de 1 k $\Omega$  reliée à la masse sur la plaque à 1 K en série avec une résistance de 10 k $\Omega$  située à l'ambiante dans les boîtes de filtrage décrites ci-dessous. Les lignes où sont présents ces diviseurs n'ont qu'un seul filtre.

A température ambiante, sur toutes les lignes sont installés des filtres basses fréquences (fréquence de coupure ~1kHz).

Les câbles allant de la plaque à 1K à la cellule sont faits à partir d'un fil en Manganin (alliage de cuivre 86%, de manganèse 12% et de nickel 2%) de diamètre 0.15 mm. Ils sont. insérés dans un petit tube en inox. Le diamètre est très petit afin d'éviter la propagation de micro-ondes entre le fil conducteur et la gaine.

### II.3.2. Schémas électriques du SET

Le courant qui traverse le SET est de l'ordre de la dizaine de nA pour une tension drain-source de l'ordre du dixième de mV. La tension drain-source sera amplifiée par un préamplificateur bas-bruit de gain 100 (LI-75A, NF electronic).

Le SET est polarisé en courant. De plus, il nous faut varier le potentiel de l'îlot par rapport aux autres électrodes. Le potentiel du SET peut être modifié en variant le potentiel de la source par rapport à la masse du cryostat, qui est la masse de référence.

Le circuit d'alimentation du SET est donc le suivant :

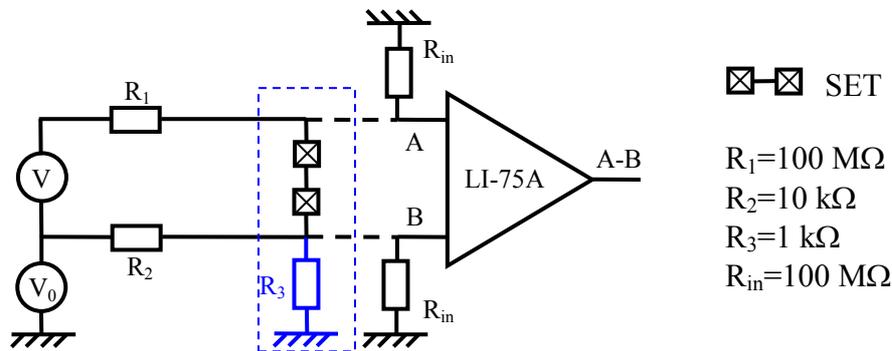


figure 52 : Schéma électrique de l'alimentation du SET. La résistance  $R_3$  est montée sur la plaque à 1K tandis que les autres résistances sont à température ambiante. Les résistances  $R_{in}$  sont les impédance d'entrée de l'amplificateur. Le rectangle bleu entoure les éléments du montage situés à froid.

Le préamplificateur est utilisé en mode différentiel. Le signal de sortie est envoyé sur la carte d'acquisition contrôlée par le logiciel LabView.

En éteignant la source  $V$ , les potentiels de la source, et du drain ( $V_s$ ,  $V_d$  respectivement) sont liés par la relation :

$$V_s \left( 1 + \frac{R_1}{R_{SET}} + \frac{R_2}{R_{SET}} + \frac{R_1}{R_{in}} \right) = V_d \left( 1 + \frac{R_1}{R_{SET}} + \frac{R_2}{R_{SET}} + \frac{R_2}{R_{\parallel}} \right),$$

$$\text{avec } R_{\parallel} = \frac{R_3 R_{in}}{R_3 + R_{in}} \simeq R_3,$$

et  $R_{SET} \simeq 100\text{ k}\Omega$ , la résistance du SET .

Si on se place dans une situation symétrique où  $R_1=R_2$  et  $R_3=0$ , évidemment  $V_s=V_d$ . La source  $V_0$  ne crée qu'un décalage global du potentiel du SET par rapport à la masse du cryostat.

La résistance  $R_3$ , montée sur la plaque à 1K, réalise avec la résistance  $R_2$ , le diviseur de tension permettant de minimiser les variations basse fréquence du potentiel thermique. Une situation symétrique n'est donc pas envisageable. Afin de décaler les potentiels  $V_s$  et  $V_d$  de la même quantité, un des termes communs des quantités entre parenthèses doit dominer. Ainsi,

$$\frac{R_1}{R_{in}} \sim 1 - 10, \frac{R_1}{R_{SET}} \gg 1 \text{ entraînant } V_s \approx V_d \quad \text{relations 1}$$

Le courant à travers le SET est donné par :

$$i_{SET} \approx \frac{V}{R_1}.$$

Il est indépendant des caractéristiques du SET. Il est imposé par l'expérimentateur. Le SET est polarisé en courant.

La source V ne peut pas fournir plus de 10V et nous désirons faire varier le courant à travers le SET entre 0 et plusieurs dizaines de nA. Les valeurs données en figure 52 permettent de couvrir la plage désirée tout en vérifiant les relations 1.

### **II.3.3. Détection synchrone**

Les oscillations de blocage de Coulomb des SETs que nous avons fabriqués sont très bruyantes. Le bruit en  $1/f$  est important. Il y a de plus des fluctuateurs qui entraînent des déphasages aléatoires de  $0.1e$ . Nous avons dû réaliser une mesure par détection synchrone afin d'extraire un signal beaucoup moins bruyant. Un signal sinusoïdal de fréquence 125 Hz et d'amplitude 0.4 mV est appliqué sur l'électrode de garde. L'électrode de garde fut choisie car elle a le plus grand couplage capacitif avec l'îlot du SET. L'amplitude du signal utilisé n'est alors pas trop grande. Le signal venant du SET, après avoir été amplifié par l'amplificateur bas bruit, est envoyé sur une détection synchrone. Le rapport signal sur bruit est considérablement amélioré car la détection synchrone ne sélectionne que le signal autour d'une bande étroite centrée sur la fréquence de travail de 125 Hz. Elle ne sélectionne donc que le bruit présent dans cette bande. La fréquence de travail peut être adaptée afin de déterminer une fréquence où le rapport signal sur bruit est bon. Nous nous sommes placés à 125 Hz. La Figure 53 illustre l'augmentation du rapport signal sur bruit par détection synchrone.

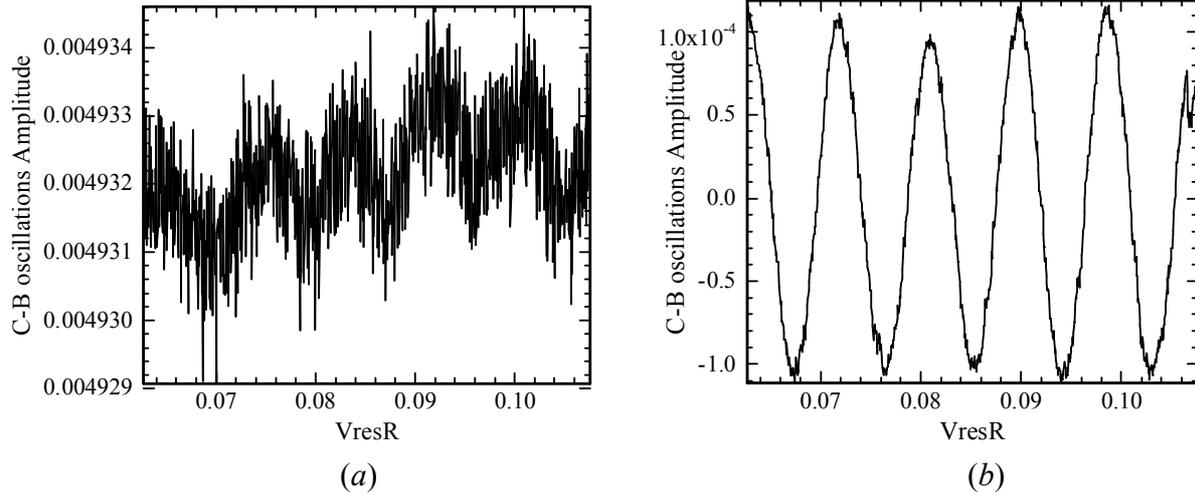


Figure 53 : (a) oscillations de Coulomb provenant directement du SET et amplifiées par le préamplificateur bas bruit. (b) Mêmes oscillations obtenues par détection synchrone. Le rapport signal sur bruit est considérablement augmenté.

Le signal obtenu par détection synchrone correspond à la dérivée du signal original. Une phase de  $\pi/2$  est donc introduite entre le signal original et le signal donné par la détection synchrone. Cela ne perturbe en rien notre détection de la position des sauts de phase car nous nous intéressons aux variations de la phase.

L'amplitude des oscillations obtenue par détection synchrone dépend bien entendu de l'amplitude du signal excitateur appliqué sur l'électrode de garde. Pour une fonction sinusoïdale, la dépendance est une fonction de Bessel.  $V_{ds}$  est une fonction périodique du potentiel appliqué sur les électrodes adjacentes, notamment de l'électrode de garde  $V_{garde}$ . Par simplification, nous supposons que cette dépendance est un sinus<sup>7</sup> :

$$V_{ds} = f\left(\frac{CV_{garde}}{e}\right) \propto V_{ds0} \sin\left(\frac{CV_{garde}}{e}\right).$$

Le potentiel de l'électrode de garde est la somme du potentiel continu  $V_{garde0}$  et du potentiel sinusoïdal utilisé pour la détection synchrone  $\tilde{V} \sin(\omega t)$ . Le potentiel aux bornes du SET est donc :

$$V_{ds} \propto V_{ds0} \sin\left(\frac{CV_{garde0} + C\tilde{V}_0 \sin(\omega t)}{e}\right)$$

$$\text{or } \sin(x \sin(\theta)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\theta]$$

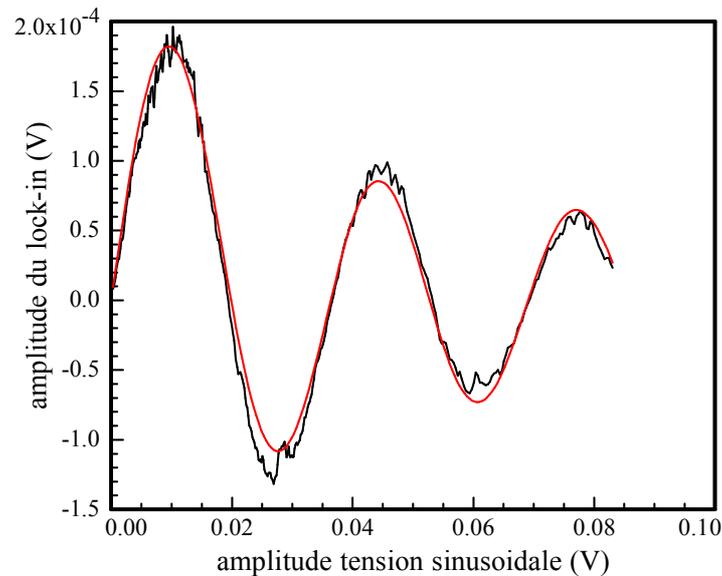
où  $J_{2n-1}(x)$  sont les fonctions de Bessel de première espèce.

Le lock-in ne sélectionne que le terme à la fréquence  $\omega$  ( $-\omega$ ).

<sup>7</sup> On pourrait aussi dire qu'on se limite au premier terme de la série de Fourier.

$$V_{ds} \propto 2 \cdot J_1\left(\frac{C\tilde{V}_0}{e}\right) \cdot V_{ds0} \cdot \cos\left(\frac{CV_{garde0}}{e}\right) .$$

La Figure 54 représente les variations d'amplitude du signal venant du lock-in en fonction de l'amplitude du signal sinusoïdal. La courbe rouge est un ajustement par une fonction de Bessel de première espèce. On peut remarquer que l'accord entre les deux courbes est très satisfaisant.



**Figure 54 : variation de l'amplitude des oscillations de Coulomb en fonction de l'amplitude de la tension sinusoïdale de 125 Hz appliquée sur l'électrode de garde. La courbe rouge est un ajustement par une fonction de Bessel de première espèce des données expérimentales.**

L'ajustement permet d'obtenir la valeur du couplage entre l'électrode de garde et le SET. La valeur obtenue est  $C = (3.09 \pm 0.01) 10^{-17} F$ . Cette valeur est proche de la valeur qu'on peut déduire de la période des oscillations de Coulomb  $C = (3.27 \pm 0.03) 10^{-17} F$ . La différence de 5% peut provenir de la non-harmonicité des oscillations entraînant une erreur sur la détermination des paramètres du fit.

On peut se placer sur le premier maximum. Ce n'est généralement pas la position que nous adoptons. Nous préférons utiliser une amplitude plus faible afin de ne pas trop perturber les électrons qui flottent sur le film d'hélium<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Nous prenons cette précaution bien qu'aucun résultat clair ne vienne indiquer une quelconque perturbation due au signal excitateur.

### II.3.4.

### Schéma électrique global

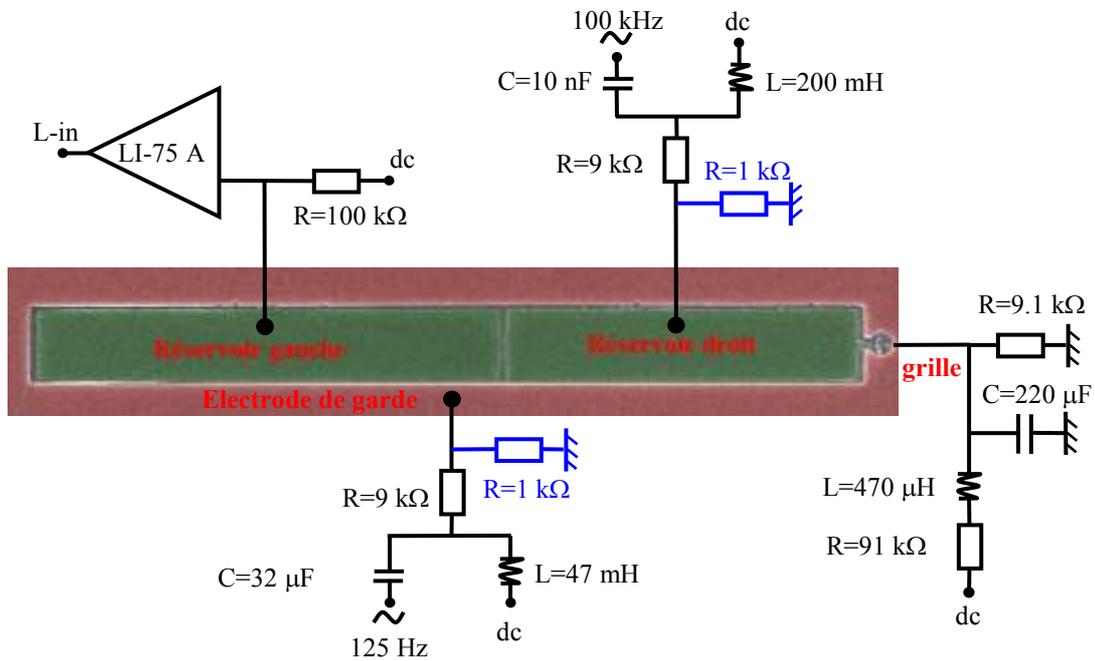


Figure 55 : schéma électrique global (hors SET) de l'échantillon. Les résistances bleues sont attachées à la plaque à 1K alors que le reste des composants se trouve à la température de la pièce. Les filtres basse fréquence utilisés sur les lignes du SET sont identiques à celui de la grille.

Une grande impédance ( $\sim 10\text{-}100\text{ k}\Omega$ ) est ajoutée sur chaque ligne dc afin que le courant reste raisonnable. Le signal de fréquence 100 kHz est appliqué sur le réservoir droit par l'intermédiaire d'un condensateur de capacité  $C=10\text{ nF}$ , tandis que le signal de fréquence 125 Hz est appliqué sur la masse à travers une capacité de  $32\text{ }\mu\text{F}$ .

### III. Troisième partie, piéger un électron :

#### *La ligne d'arrivée*

##### III.1. Détection par mesure capacitive.

La décharge s'effectuant à 1.2 K, température pour laquelle le SET ne fonctionne pas, afin de s'assurer de la présence des électrons, nous effectuons une détection par mesure capacitive comme expliqué au II.2.1.

La présence des électrons se manifeste par une augmentation du couplage capacitif entre les deux réservoirs. Nous appliquons un signal sinusoïdal de fréquence 100 kHz et d'amplitude environ 100  $\mu$ V sur le réservoir droit. La mesure est effectuée sur le réservoir gauche avec un détecteur synchrone, le signal à mesurer ayant été préalablement amplifié avec un préamplificateur bas-bruit. La tension délivrée par le lock-in augmente de 1 à 20  $10^{-8}$  Volts rms après la décharge.

Le signal mesuré est trop faible pour nous permettre une estimation de la densité électronique et de la mobilité des électrons à partir de la mesure de conductivité de la couche électronique.

Lors de ses expériences, Grimes a utilisé des électrodes dont les dimensions typiques étaient de l'ordre du millimètre. Nous sommes deux ordres de grandeur en dessous ce qui explique pourquoi nous ne pouvons pas déterminer la densité moyenne.

De plus, le signal n'est pas très stable. Il peut disparaître bien que les électrons soient toujours présents. Nous n'avons remarqué aucun lien entre la disparition du signal capacitif et les potentiels sur les réservoirs, la température, etc....

## III.2. Caractéristiques de l'échantillon

### III.2.1. Paramètres physiques

Avant de présenter les résultats montrant le piégeage d'un électron unique au-dessus du film d'hélium, nous allons présenter les caractéristiques de l'échantillon, notamment les paramètres du SET (capacité des jonctions, couplage avec les différentes électrodes). Les oscillations de blocage de Coulomb restent visibles jusqu'à la température de 1 K. cela permet d'avoir une estimation de l'énergie de chargement:

On en déduit alors la capacité totale de l'îlot avec l'extérieur  $C_T = 930 \text{ aF}$ .

La Figure 56 présente une caractéristique courant-tension du SET. Comme précisé dans la première partie, lorsque la tension source-drain excède  $4\Delta/e$ , la conduction est assurée par des quasi-particules. Il en résulte donc une conduction suivant la loi d'Ohm décalée de  $\pm 2\Delta/e$  (suivant le signe de la tension drain-source) traduisant le fait que les quasi-particules sont produites pour des tensions supérieures en valeur absolue à  $2\Delta/e$ .

Il faut de plus tenir compte du blocage de Coulomb. Il apparaît alors une tension seuil  $|V_c| = \frac{e}{C_T}$  au-delà de laquelle un courant peut traverser le SET.

Pour  $I$  suffisamment grand, la caractéristique courant-tension s'écrit donc:

$$I(V) = \frac{1}{R_T} \left[ V + \left( \pm \frac{2\Delta}{e} \pm \frac{e}{C_T} \right) \right]$$

Où  $R_T$  et  $C_T$  sont la résistance totale et la capacité totale de l'îlot et  $\Delta$  le gap supraconducteur de l'aluminium.

L'écart entre les deux asymptotes est donné par [27] :  $V_{off} = \frac{4\Delta}{e} + \frac{2E_C}{e}$

qui permet de remonter à la valeur du gap supraconducteur connaissant l'énergie de chargement.

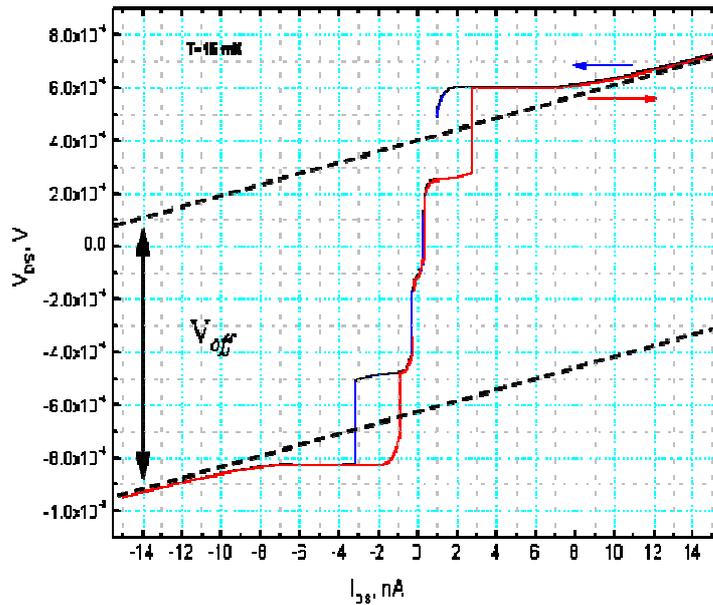


Figure 56: Caractéristique courant-tension du SET polarisé en courant. L'écart entre les deux asymptotes  $V_{off}$  permet de remonter au gap supraconducteur  $\Delta$  de l'aluminium.

Le gap supraconducteur vaut donc  $2\Delta = 388 \mu eV$ . On peut ainsi en déduire la température critique pour un supraconducteur décrit par la théorie BCS :

$$T_C \simeq \frac{2\Delta}{3.5k_B} = 1.29 K$$

Cette valeur est plutôt proche de la valeur couramment admise  $T_C=1.1 K$  mais il est connu qu'elle augmente pour des couches minces d'aluminium, ce qui est notre cas.

Connaissant le gap supraconducteur, on peut maintenant en déduire la valeur de l'énergie Josephson grâce à la relation de Ambegaokar-Baratoff [<sup>9</sup>]:

$$E_J = \frac{\hbar\Delta}{8e^2R_J} = 7 \mu eV$$

Où  $R_J$  est la résistance d'une jonction tunnel.

Les deux jonctions sont en série, nous les supposons identiques. Ainsi, la résistance d'une jonction sera  $R_J = \frac{100}{2} k\Omega$ .

<sup>9</sup> La relation écrite ici ne tient pas compte de la présence de l'îlot. Une relation plus correcte imposerait une renormalisation de l'énergie Josephson. Le rapport  $\frac{E_C}{\Delta} \simeq 0.44$  étant faible, la correction apportée serait inférieure à 10%. Une telle précision sur les estimations données dans ce paragraphe n'est pas pertinente.

Nous nous plaçons toujours proche du pic “JQP” pour enregistrer les oscillation du blocage de Coulomb. Les périodes de ces oscillations ainsi que la valeur de la capacité entre l’électrode considérée et l’îlot sont données ci-dessous :

Grille:	$T_{gr}=30.9 \text{ mV}$	$C_{gr-I}=5.2 \text{ aF}$
Réservoir droit :	$T_{Rd}=8.86 \text{ mV}$	$C_{Rd-I}=18.1 \text{ aF}$
SET:	$T_{SET}=4.5 \text{ mV}$	$C_{SET-I}=35.6 \text{ aF}$
Electrode de garde :	$T_{ga}=4.8 \text{ mV}$	$C_{ga-I}=33.3 \text{ aF}$
Réservoir gauche :	$T_{Rg}\sim 600 \text{ mV}$	$C_{Rg-I}=0.3 \text{ aF}$
Total		$C_j= 436.6 \text{ aF}$

La caractéristique courant-tension ainsi que les oscillations de blocage de Coulomb deviennent indépendantes de la température pour des températures inférieures à 300 mK. Nous en déduisons donc que les électrons de conduction ne peuvent pas être thermalisés en dessous de cette température.

### **III.2.2. Bruit et autres observations perturbatrices**

Le bruit du SET fut un des problèmes majeurs de notre expérience et est à l’origine du développement du SET pyramidal ainsi que de l’utilisation d’une détection synchrone. Les origines du bruit ne sont pas encore complètement identifiées et restent des problématiques actuelles. Dans ce paragraphe, je ne présenterai que les manifestations du bruit dans notre dispositif et leurs conséquences sur la phase des oscillations.

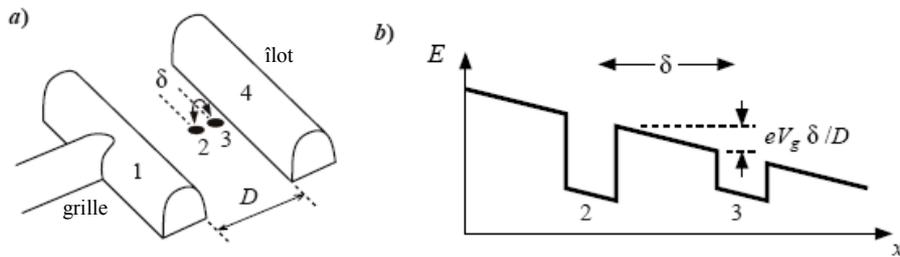
#### **III.2.2.a. Origine du bruit**

Dans notre dispositif, le bruit, c'est-à-dire les fluctuations statistiques du courant drain-source, est dû à deux mécanismes différents qu’on regroupe sous la même appellation de “fluctuateurs”.

Il y a tout d’abord des impuretés, situées dans les barrières isolantes des jonctions Josephson, qui piègent puis relâchent des électrons de conduction. Il en résulte alors une variation du courant à travers le SET, que l’on interprète aussi comme une variation de la résistance. Ce type de bruit est éliminé par la détection synchrone.

L’autre catégorie de fluctuateurs générant le bruit est constituée de charges mobiles (par exemple un électron) qui sautent entre deux, ou plus, positions stables (voir schéma *a*) de la Figure 57) . Il en résulte l’apparition d’un dipôle oscillant. Ce dipôle génère un champ électrique qui modifie la charge de l’îlot et donc la tension drain-source mesurée. Ces fluctuateurs sont très certainement localisés dans les diélectriques qui environnent l’îlot, que

ce soit dans le substrat sur lequel il repose ou la couche d'alumine qui l'enrobe. Ils peuvent même être présents dans les jonctions tunnel elles-mêmes.



**Figure 57:** charge dans un système à deux niveaux. La charge passe d'un piège à l'autre par effet tunnel. a) dessin schématique de la grille (1) et de l'îlot (4) du SET, séparée par une distance  $D$ . Comme l'îlot est quasiment isolé, les électrode de source et de drain n'ont pas été représentées. Un système à deux niveaux est localisé entre l'îlot et la grille où une charge peut passer par effet tunnel d'un site (2) à un autre (3), séparés d'une distance  $\delta$ . b) diagramme énergétique du fluctuateur. La tension de grille entraîne un abaissement de la barrière égal à  $eV_g \delta/D$ . L'électrode appelée "grille" sur ce schéma représente une des électrodes de l'échantillon (réservoir droit, gauche, électrode de garde, etc.)

Ces deux sources de bruit sont difficilement distinguables car toutes deux modifient le courant drain-source. Elles font intervenir une constante de temps effective traduisant dans un cas le temps moyen  $\tau_1$  pendant lequel une impureté a piégé un électron (ou le temps moyen pendant lequel un électron est dans un des deux pièges) et le temps moyen  $\tau_2$  pendant lequel l'impureté ne capture pas d'électron (le temps moyen que l'électron passe dans l'autre piège). Ces deux constantes de temps ne peuvent être différenciées, elles apparaissent sous la forme d'un temps caractéristique effectif donné par :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

Ce temps caractéristique est le seul paramètre physique décrivant les deux phénomènes responsables des fluctuations de courant. La densité spectrale aura la même forme et sera décrite par une distribution de Debye-Lorentz [30]:

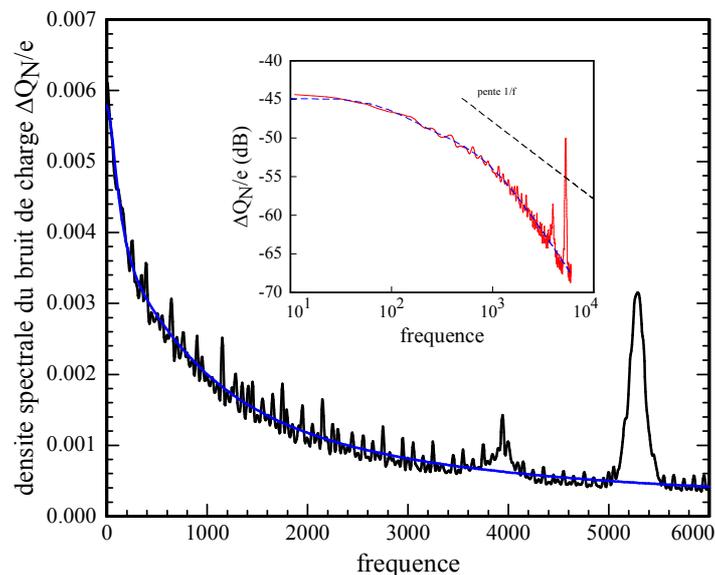
$$\frac{\delta Q_N}{e} = \left[ \sum_i \frac{\Delta Q_i^2 \tau_i}{(4\pi^2 f^2 \tau_i^2 + 1)} \right]^{1/2}$$

Où  $\Delta Q_i$  et  $\tau_i$  sont l'amplitude et le temps caractéristique du  $i$ -ième fluctuateur.

Si ces fluctuateurs sont en très grand nombre, les  $\tau_i$  prennent toutes les valeurs possibles. Le spectre se réduit alors à un terme inversement proportionnel à la fréquence. On parle alors d'un bruit en  $1/f$ .

La Figure 58 présente un spectre expérimental et un ajustement par une distribution de Debye-Lorentz. Comme observé précédemment par de nombreux auteurs [31-32], pour des jonctions mésoscopiques, un petit nombre de fluctuateurs (deux notre cas) suffit pour ajuster le spectre expérimental à une distribution de Debye-Lorentz. Le fit donne les paramètres suivants :  $\Delta Q_1 = 0.22 e/\sqrt{Hz}$ ,  $\tau_1 = 0.2ms$ ,  $\Delta Q_2 = 0.13 e/\sqrt{Hz}$ ,  $\tau_2 = 1.5ms$ . Un nombre limité de fluctuateurs suffit pour expliquer le bruit observé dans le dispositif. Il faut noter que l'intensité des fluctuateurs donnée par le fit est cohérente avec les observations directes. Sur

les oscillations de blocage de courant, nous observons des sauts de phases d'amplitudes  $0,1e$ ,  $0,2e$  avec des périodes caractéristiques de l'ordre de la milliseconde.



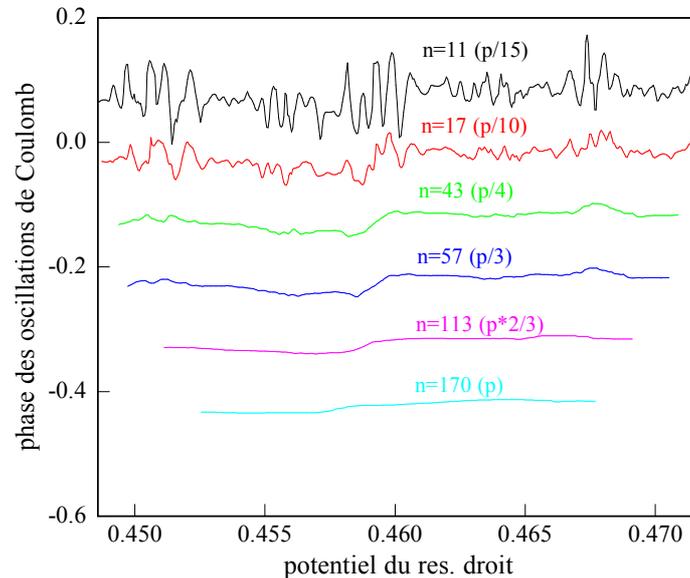
**Figure 58: spectre du bruit de charge.** la courbe bleue est un ajustement des données par une distribution de Debye-Lorentz. Seuls les paramètres correspondant à deux fluctuateurs suffisent pour ajuster correctement les données à la distribution. Les deux pics à 4 kHz et 5.3 kHz sont liés à la carte d'acquisition électronique. En insert : même spectre et son ajustement mais présenté en décibel sur une échelle logarithmique. Une droite de pente  $1/f$  a été tracée. Même à haute fréquence, le spectre n'est pas celui d'un bruit en  $1/f$ .

Afin de comparer le bruit des différents SETs, on compare leur bruit respectif à 10Hz. Les valeurs les plus couramment trouvées dans la littérature sont situées aux alentours de  $1\sim 5 \cdot 10^{-4} e/\sqrt{\text{Hz}}$ . Le bruit à 10 Hz du SET utilisé dans nos expériences était compris entre  $2 \cdot 10^{-3} e/\sqrt{\text{Hz}}$  et  $8 \cdot 10^{-3} e/\sqrt{\text{Hz}}$  ce qui malheureusement est un ordre de grandeur supérieur aux valeurs trouvées dans la littérature.

Le spectre présente deux résonances à 4kHz et 5.3 kHz, reproductibles liées à la carte d'acquisition électronique. Leur fréquence est en fait beaucoup plus grande. Elles apparaissent à plus basse fréquence à cause de l'algorithme de transformée de Fourier (repliement) qui utilise une fréquence d'échantillonnage finie.

Les fluctuations statistiques apparaissent sur le signal de phase des oscillations de Coulomb (le signal utile dans notre expérience, obtenu par la procédure d'ajustement décrite à la section I.5.3) comme des oscillations rapides de la phase. Bien sûr, ces oscillations peuvent être moyennées en augmentant le nombre de points de la portion de courbe à "fitter". La Figure 59 montre l'évolution de la phase des oscillations obtenue avec la procédure d'ajustement pour des portions de courbe comprenant des nombres de points différents. Ainsi, lorsque la portion de courbe "fittée" contient un petit nombre de points (1/15 ou 1/10 du nombre de points d'une période complète) la phase est très bruitée. Le bruit diminue lorsque le nombre de points utilisé augmente. Néanmoins, ce nombre de points ne peut pas être trop grand si on ne veut pas perdre les variations de phase. Dans le cas contraire, le départ d'un électron du piège n'apparaîtra pas comme un brusque saut de phase. Il y a donc un compromis à trouver entre

un signal plutôt lisse et un signal plus bruité mais mettant clairement en évidence les sauts. Suivant la qualité du signal issu du SET, nous utilisons un nombre de points compris entre un quart et un tiers du nombre de points d'une période complète.



**Figure 59:** évolution de la phase des oscillations lors de l'augmentation du nombre de points utilisés pour le fit. Une période complète comprend 170 points. Des portions de courbe comprenant de 11 points (correspondant à un quinzième du nombre de points d'une période complète) à 170 points (une période complète) sont ajustées à la courbe de référence. Les fluctuations diminuent lorsque le nombre de points augmente.

*Remarque :*

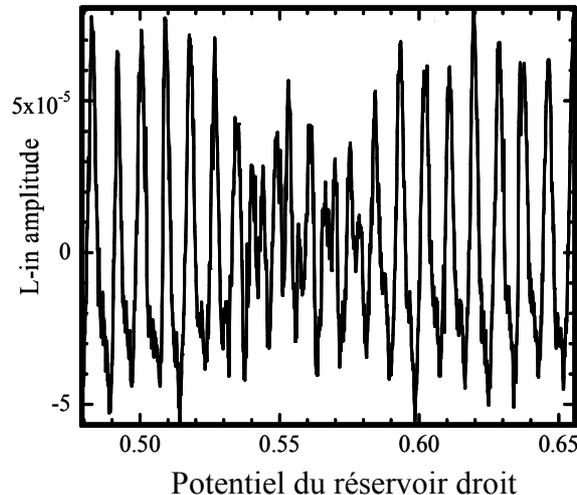
En étudiant l'évolution de la densité spectrale du bruit avec le gain du SET (i.e. la dérivée de la tension drain-source en fonction du potentiel appliqué sur la grille), il est possible de discriminer les contributions au bruit provenant des fluctuateurs situés dans les barrières isolantes de celles provenant des fluctuateurs situés dans les diélectriques. Une telle étude [33] montre que le bruit provient majoritairement des fluctuateurs situés dans les diélectriques. Le bruit provenant des jonctions a une intensité de l'ordre de  $10^{-5} e/\sqrt{Hz}$  bien plus faible que l'intensité du bruit mesurée avec nos échantillons.

En outre, nous avons observé que le bruit de nos dispositifs augmentait avec la surface des différentes électrodes constituant le SET. Nous pensons donc que dans notre cas, les fluctuateurs sont localisés dans la couche d'alumine.

### *III.2.2.b. Lorsqu'un fluctuateur s'emballe...*

Nous venons de voir que les fluctuateurs sont en nombre restreint. Il arrive qu'un de ces fluctuateurs "s'emballe" pour certaines valeurs des potentiels appliqués aux électrodes. Les fluctuations de charge de l'îlot induites par ce fluctuateur "débridé" sont tellement

importantes qu'elles moyennent les oscillations de Coulomb. Elles ne sont plus observables, elles sont "détruites". La Figure 60 présente des oscillations de Coulomb en présence d'un tel fluctuateur.



**Figure 60: oscillations de Coulomb lors d'un balayage du réservoir droit en présence d'un fluctuateur "débridé". Les fluctuations sont telles que les oscillations de coulomb sont détruites. Le fluctuateur moyenne la charge de l'îlot.**

Le potentiel sur le réservoir droit pour lequel le fluctuateur "s'allume" dépend du potentiel des autres électrodes.

Le fluctuateur est un système à deux niveaux. La direction du dipôle qu'il définit est fixée. Seul son sens change. Lorsque le champ électrique est perpendiculaire au dipôle, il n'y a plus de position privilégiée. L'électron peut facilement sauter d'un piège à l'autre. Le fluctuateur s'emballe alors. Le champ électrique qu'il crée varie rapidement, le bruit explose.

Lorsque le fluctuateur se "calme", l'électron se fixe dans une des positions stables. En "fittant" les oscillations avant que le fluctuateur ne s'allume, puis après qu'il se soit éteint, on peut obtenir la charge qu'il a induit sur l'îlot. Cette charge est comprise entre  $0.2e$  et  $0.4e$ .

### *III.2.2.c. boucle d'hystérésis.*

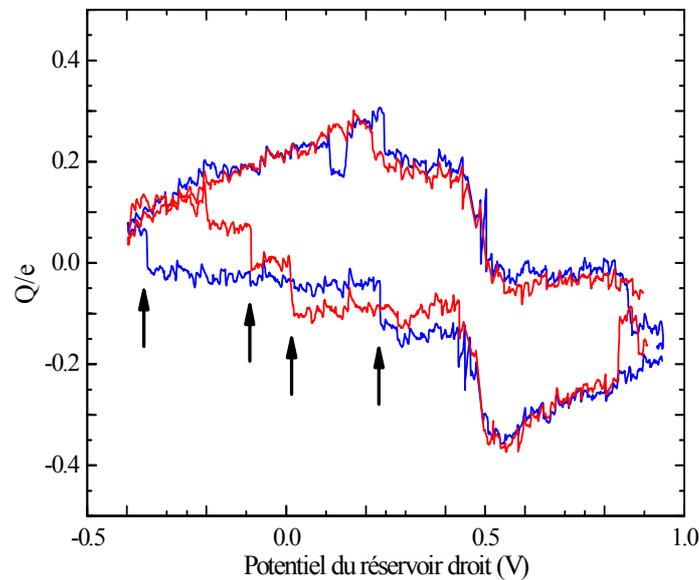
La Figure 61 montre l'évolution de la phase des oscillations du SET en absence d'électrons avant toute décharge. Il ne peut pas y avoir d'électrons au-dessus du film d'hélium. Elle présente une boucle d'hystérésis traduisant le déplacement de charges dans le substrat. Les charges migrent graduellement vers les régions de plus hauts potentiels. Ainsi, lorsqu'on augmente le potentiel sur le réservoir droit, les charges négatives se déplacent vers le réservoir et s'éloignent du SET. Avec la convention de signe choisie (se référer au paragraphe I-5.3), cela se traduit par une diminution de la phase du SET.

Lorsque le potentiel du réservoir droit diminue, les charges négatives se rapprochent de l'îlot (la phase augmente).

Par ailleurs, la Figure 61 présente des sauts de phase discrets de forte amplitude ( $\sim 0.1e$ ). Ces sauts sont causés par des charges qui sautent d'une position stable à l'autre. Contrairement aux fluctuateurs évoqués au paragraphe précédent, ces charges ne traversent la barrière qu'une seule fois.

La Figure 57 *b*) montre l'évolution du profil énergétique d'une telle charge. Augmenter le potentiel du réservoir droit (appelé de manière générale "grille" sur la Figure 57 *b*) diminue la longueur de la barrière entre les deux pièges. Au-delà d'un certain potentiel, la longueur de la barrière devient si courte que la probabilité de la traverser par effet tunnel devient très proche de 1. La charge saute alors et minimise ainsi son énergie.

Autant, le mouvement continu des charges est peu gênant, autant ces sauts discrets sont perturbant car ils peuvent être confondus avec des électrons au-dessus de l'hélium. Néanmoins, les potentiels pour lesquels ils apparaissent sont aléatoires. Ces sauts ne sont donc pas reproductibles, ce qui ne devrait pas être le cas pour les électrons au-dessus de l'hélium. Cela nous donne un moyen de discriminer les deux événements



**Figure 61:** deux balayages (courbe rouge et courbe bleue) du réservoir droit en absence d'électrons. La phase des oscillations présente une boucle d'hystérésis traduisant le mouvement de charges dans le substrat de silicium. Les flèches marquent des sauts brusques de forte amplitude  $\sim 0.1e$ . il faut noter que ces sauts ne sont pas reproductibles.

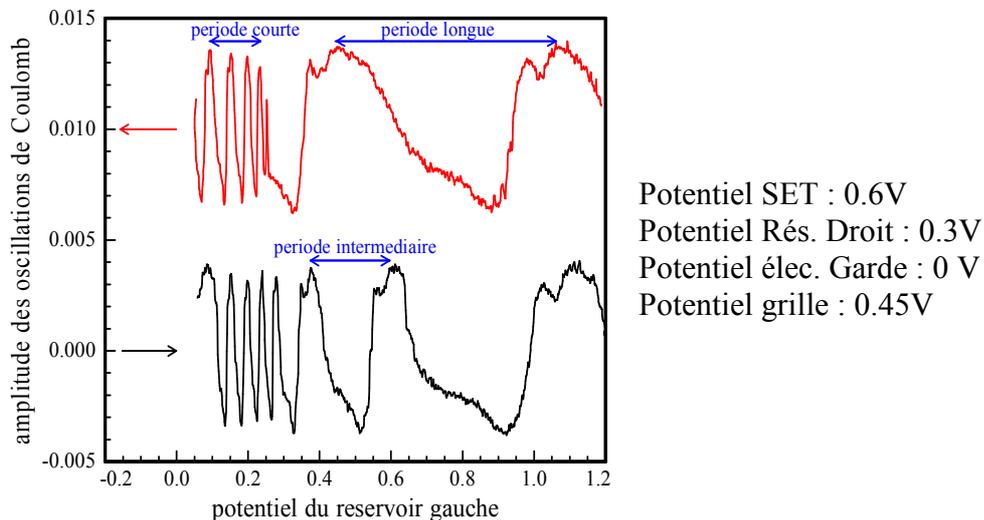
Nous avons essayé de vaincre, ou au moins de réduire le bruit du transistor. Nous avons essayé plusieurs méthodes dont certaines utilisées par certains auteurs [32] comme refroidir lentement le cryostat, refroidir en appliquant un potentiel sinusoïdal sur l'électrode de garde, toutes ces méthodes ayant en commun la volonté de placer les fluctuateurs dans un état d'équilibre. Malheureusement, aucune méthode ne fut probante !

### III.3. Oscillations courtes avec le réservoir gauche

La première manifestation des électrons dans notre expérience ne fut pas une détection individuelle avec le SET, comme on l'espérait, mais une observation collective. En présence d'électrons, on observe une forte réduction de la période des oscillations

Le réservoir gauche se situe loin du SET. Le couplage avec l'îlot est faible. Il en résulte des oscillations de grande période ( $T_{Rg} \approx 600 mV$ ).

Cette période subit de brusques variations lorsqu'une couche d'électrons est présente à la surface de l'hélium (Figure 62). On peut distinguer trois régions de périodes différentes. Il y a bien entendu la période longue traduisant le faible couplage entre le réservoir gauche et le SET. Apparaît ensuite une période courte. Enfin, on peut observer une période intermédiaire. De plus, les comportements sont différents suivant la direction de variation du potentiel du réservoir gauche.



**Figure 62 : Oscillations du SET avec le réservoir gauche en présence d'électrons. Pour plus de clarté, la courbe rouge a été décalée de 0.01 V. Le potentiel du réservoir gauche varie de 0 à 1.2V lors de l'enregistrement de la courbe noire, tandis qu'il varie de 1.2 à 0 pour la courbe rouge. La période varie et les comportements dépendent de la direction de balayage.**

Plaçons-nous tout d'abord dans la situation où le potentiel du réservoir gauche est suffisamment élevé afin que tous les électrons soient situés au-dessus. On diminue progressivement le potentiel du réservoir gauche vers des valeurs plus négatives, tout en laissant constant ceux des autres électrodes. Bien entendu, le couplage faible entre le réservoir gauche et l'îlot du SET induit des oscillations de grande période. Il s'agit de la partie de courbe rouge comprise entre 1.2 V et 0.23 V, environ. A partir d'un seuil, 0.23 V dans la situation qui nous intéresse, les oscillations deviennent très courtes. Si courtes que les premières apparaissent comme des pics. Le potentiel de la couche électronique a atteint le haut de la barrière, une faible variation du potentiel du réservoir gauche fait entrer beaucoup

d'électrons dans le puits<sup>10</sup>. Chaque électron induit une charge positive supplémentaire sur l'îlot du SET. La charge de l'îlot augmente très rapidement. Les oscillations ne sont pas visibles.

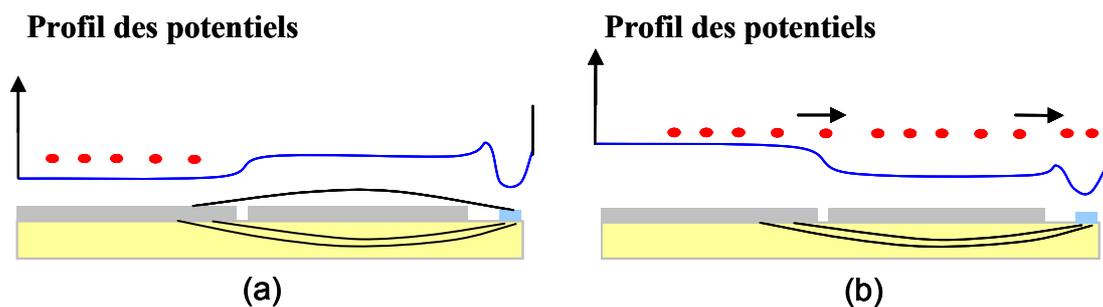
Le potentiel de la couche électronique dépasse alors la barrière. Les électrons sont poussés continûment dans l'îlot. La densité électronique de l'anneau augmente continûment. La charge induite sur l'îlot par les électrons s'ajoute à la charge due au couplage avec le réservoir gauche. La charge de l'îlot du SET vaut alors:

$$Q_{SET} = C_{g-i}V_g - \alpha en_a S_a \quad \text{Équation 19}$$

Où  $C_{g-i}$  est la capacité entre le SET et le réservoir gauche,  $V_g$  le potentiel du réservoir gauche,  $\alpha e$  la charge moyenne induite par un électron,  $n_a$  la densité moyenne dans l'anneau et  $S_a$  la surface de l'anneau.  $n_a S_a$  est le nombre d'électrons entrés dans l'anneau.

Le signe “-” dans l'équation 19 traduit le fait qu'un électron qui entre dans l'anneau induit une charge positive sur l'îlot.

Les électrons entrants induisent une charge beaucoup plus grande sur l'îlot que le couplage SET-réservoir gauche. La période des oscillations est courte.

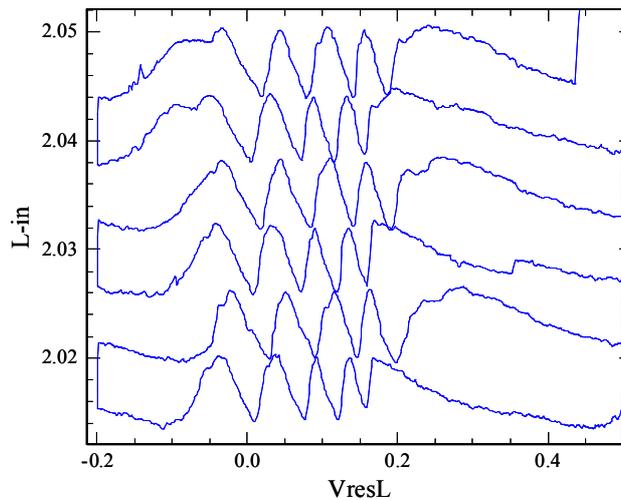


**Figure 63 :** (a) Le potentiel du réservoir gauche est supérieur à celui du réservoir droit, la majorité des électrons est au-dessus du réservoir gauche. Le couplage avec l'îlot du SET passe principalement par le substrat, la période est longue. (b) le potentiel de la couche électronique dépasse la barrière entre le réservoir droit et le SET. Les électrons pénètrent alors continûment dans l'anneau augmentant ainsi le couplage entre le réservoir gauche et le SET. La période est courte et dépend de la densité électronique.

Lorsque le potentiel sur le réservoir gauche devient trop faible, il est complètement dépeuplé. Les électrons occupent le réservoir droit et l'anneau. Continuer à diminuer le potentiel du réservoir gauche à peu d'effet sur la couche électronique. La charge induite sur l'îlot résulte principalement du couplage capacitif entre le SET et le réservoir gauche. On retrouve une période longue. Cette situation n'est pas visible sur la Figure 62. il aurait fallu appliquer un potentiel plus faible sur le réservoir gauche. En revanche, on peut observer un tel comportement sur la Figure 64. On observe tout d'abord des oscillations de longue période lorsque le potentiel sur réservoir droit est largement positif. Viennent ensuite quelques oscillations courtes. Les oscillations de grandes périodes réapparaissent ensuite.

<sup>10</sup> Le potentiel de la couche électronique est donné par  $U_e = V - \frac{ned}{\epsilon_0}$  où  $V$  est le potentiel de l'électrode sous laquelle sont les électrons,  $n$  la densité électronique et  $d$  la distance électrode-électrons.

La transition oscillations courtes-oscillations longues n'est pas brutale. Il y a en fait une transition continue période longue- période courte. Cette transition est clairement visible sur la Figure 62 et notée période intermédiaire. Elle est visible lorsque le potentiel du réservoir gauche varie des potentiels faibles vers des potentiels plus fort alors qu'elle n'apparaissait pas lorsque le réservoir variait dans la direction opposée. Cela traduit la présence et l'existence de la barrière. Pour la courbe rouge, le potentiel du réservoir gauche diminue, on pousse les électrons dans l'anneau. Initialement, il n'y en a pas. Ils pénètrent brusquement dans l'anneau. En revanche, lorsqu'on balaie dans la direction opposée, des électrons peuplent l'anneau. La couche électronique recouvre l'anneau et les deux réservoirs. Les électrons sont tirés progressivement de l'anneau, la transition apparaît comme continue. Tous les électrons ne sont pas tirés hors de l'anneau. Une fraction reste piégée par la barrière.



**Figure 64 :** retour des oscillations de période longue après les oscillations de période courte. La période courte est plus longue que celle de la Figure 62 car la densité électronique (que nous ne contrôlons pas) est plus faible. Lorsqu'on balaie de la droite vers la gauche, le piège étant plein, la transition période courte-période longue se fait continûment.

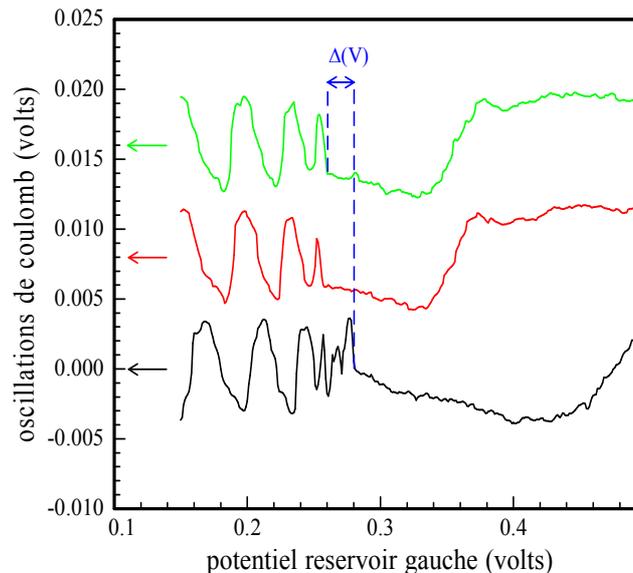
Ce fait est illustré par la Figure 65. On a effectué plusieurs balayages aller-retour du réservoir gauche. Pour plus de clarté, seuls les balayages aller, ceux pour lesquels on remplit le piège, sont représentés. On peut remarquer que les oscillations courtes commencent beaucoup plus tôt pour le premier balayage (la courbe noire) que pour les suivants. Des électrons sont restés piégés dans le puits. Leur présence augmente la hauteur de la barrière de potentiel. Le potentiel du réservoir gauche doit prendre une valeur plus négative pour compenser cette augmentation. D'où l'observation d'un décalage  $\Delta V$  du potentiel pour lequel commence les oscillations courtes. De plus, les oscillations longues présentent clairement une différence de phase entre le premier balayage et les suivants. La charge du SET a variée d'une fraction constante. Des électrons ont été piégés.

*Remarques:*

- Il peut sembler étrange que la période des oscillations courtes puisse dépendre de la densité électronique. Cela tient au fait qu'il ne faut pas voir la couche électronique comme une couche métallique. Dans un métal, le nombre d'électrons disponible est très grand, ce qui n'est pas le cas pour la couche d'électron flottant au-dessus de l'hélium. Le nombre

d'électrons étant fini, la densité électronique ne dépend pas seulement de la géométrie et des potentiels appliqués mais aussi du nombre total d'électrons car les électrons vont chercher à minimiser leurs interactions et donc à occuper tout l'espace qui est disponible.

- Les courbes présentées dans cette partie ont été enregistrées avec un SET à îlot non pyramidal. Le SET pyramidal accroît la barrière entre le réservoir droit et l'anneau. Les effets décrits ici sont donc moins visibles avec ce type d'échantillon. Une seule oscillation courte est généralement visible lorsqu'on balaye le potentiel du réservoir gauche. Pour plus de clarté, des résultats provenant d'un SET non pyramidal ont donc été présentés.



**Figure 65: balayages du réservoir gauche de potentiel les plus positifs vers les potentiels négatifs. On observe un décalage du début des oscillations courtes entre le premier balayage et les suivants. Le décalage est noté  $\Delta(V)$ .**

A la lumière de ces résultats, nous pouvons voir la couche électronique comme un fluide se déplaçant dans un paysage imposé par le profil de potentiels. Abaisser le potentiel d'un réservoir revient à augmenter l'énergie des électrons et les poussent vers les zones où les potentiels sont plus bas.

Ces résultats nous ont appris la démarche à suivre pour charger l'anneau. Il suffit d'abaisser les potentiels des réservoirs gauche et droit afin que le potentiel de la couche électronique dépasse la barrière. Les électrons pénètrent alors en nombre dans le piège.

Ils indiquent aussi clairement qu'il semble plus simple d'extraire les électrons un par un du piège que de les faire pénétrer un par un. L'évolution de la période des oscillations est continue, voire peut-être même linéaire lorsqu'on vide l'anneau. Elle est brutale (fortement non linéaire) lorsqu'on remplit l'anneau.

Le profil des potentiels étant assez compliqué, il n'est pas possible d'obtenir d'expressions analytiques afin de faire des comparaisons quantitatives avec les résultats expérimentaux. Il est évident que la tension seuil pour laquelle les oscillations courtes débutent ainsi que la période de ces mêmes oscillations dépendent de la densité électronique moyenne. Néanmoins, les effets de bords sont trop importants, on ne peut obtenir que des résultats qualitatifs. Par exemple, la transition continue d'oscillations de grande période à des oscillations de faibles périodes est due à ces effets de bords. Il n'y a plus d'électrons au dessus du réservoir gauche. Les lignes de champ entre les deux réservoirs poussent les électrons.

Tenir compte des effets de bord nécessite de prendre en compte toute la géométrie de l'échantillon.

Nous avons remarqué que très souvent la période des oscillations courtes est d'environ 30 mV. Cette valeur est reproductible décharge après décharge. Nous allons développer ci-dessous un modèle simpliste montrant que cette période n'est qu'une propriété de la géométrie de l'échantillon. Il y a beaucoup d'électrons, la couche électronique se comporte comme une couche métallique. La période des oscillations est indépendante du nombre d'électrons.

Par ailleurs, nous avons remarqué qu'au fur et à mesure de l'expérience, la période des oscillations courtes augmente. Nous perdons des électrons la couche électronique n'est plus continue sur l'ensemble de l'échantillon. Elle n'est plus assimilable à une couche métallique. Il faut tenir compte des effets de bords. La période dépend du nombre total d'électrons. Il s'agit de la situation de la Figure 64.

Intéressons nous maintenant à cette période de 30 mV. Supposons que la couche électronique recouvre les trois électrodes. Elle est continue mais avec des densités différentes pour chaque électrode.

Le potentiel d'une couche électronique au-dessus d'une électrode de potentiel  $V$  est donnée par :

$$U_e = V - \frac{ned}{\epsilon_0}$$

En se restreignant à un modèle unidimensionnel, en négligeant les effets de bords, on peut supposer l'échantillon comme étant constitué de trois électrodes, le réservoir gauche, le réservoir droit et enfin le SET. On ne modélise pas la barrière. Le potentiel de la couche électronique vérifie alors :

$$U_e = V_j - \frac{n_j ed}{\epsilon_0} \quad \text{avec } j = \begin{cases} \text{réservoir gauche} \\ \text{réservoir droit} \\ \text{SET} \end{cases}$$

Le potentiel de la couche électronique est une constante. La relation suivante doit être vérifiée :

$$V_j - \frac{n_j ed}{\epsilon_0} = V_k - \frac{n_k ed}{\epsilon_0} \quad \text{avec } j \neq k$$

La densité varie linéairement avec le potentiel des autres électrodes. Par exemple, une variation  $\delta V_k$  de l'électrode  $k$  entraîne une variation  $\delta n_j = -2(\epsilon_0/ed)\delta V_k$  de la densité au-dessus de l'électrode  $j$ . Cette proportionnalité justifie la comparaison de la couche électronique avec un fluide. Si  $\delta V_k$  est négatif,  $\delta n_j$  est positif, la densité augmente. Les électrons de l'électrode  $k$  sont poussés sur l'électrode  $j$ .

On suppose, de plus, que le nombre total d'électrons est conservé. On a alors la relation supplémentaire :

$$\sum S_j n_j = N_0$$

Où  $S_j$  est la surface de l'électrode  $j$  et  $N_0$  le nombre total d'électrons

La densité électronique au dessus de l'électrode  $j$  est donné par :

$$\frac{n_j}{\bar{n}_0} = 1 + \sum_{k \neq j} \frac{S_k (V_j - V_k)}{V_0 \Sigma_t}$$

Avec  $\bar{n}_0 = \frac{N_0}{\sum_j S_j}$  la densité moyenne au dessus des trois électrodes,  $V_0 = \frac{\bar{n}_0 e d}{\epsilon_0}$ , le potentiel associé à cette densité moyenne et  $\Sigma_t = S_{rés.ga.} + S_{rés.dr.} + S_{SET}$  la surface totale des trois électrodes.

La charge induite sur l'îlot du SET lors d'un balayage du réservoir gauche est donnée par l'équation 19. La période des oscillations en présence d'électron dans l'anneau s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial V_{rés.ga.}} = \frac{e}{T^*} = C_g + \alpha e \bar{n}_0 \frac{S_{SET} S_{rés.ga.}}{V_0 \Sigma_t} \quad \text{Équation 20}$$

En négligeant la contribution du couplage capacitif entre le réservoir gauche et le SET, la période des oscillations courtes s'écrit :

$$T^* \simeq \frac{e d (S_{rés.ga.} + S_{rés.dr.})}{\epsilon_0 \alpha S_{rés.ga.} S_{SET}}$$

Nous avons aussi négligé l'aire de l'anneau par rapport à celles des deux réservoirs. La période des oscillations courtes ne dépend que de la géométrie de l'échantillon. Elle est indépendante de la densité électronique dans l'anneau ainsi que de la densité électronique moyenne. Une couche électronique continue se comporte comme une couche métallique.

Estimons la période attendue. Les dimensions caractéristiques sont les suivantes :

$$S_{rés.ga.} = 50 * 10 \mu m^2, S_{rés.dr.} = 40 * 10 \mu m^2, S_{SET} = \pi(10^{-6})^2, d = 500 nm .$$

Un électron loin de l'îlot induit une charge quasi nulle sur le SET alors qu'un électron situé juste au dessus induit une charge de  $0.4e$ . En moyenne, elle doit valoir entre  $0.1e$  et  $0.2e$  (Ces valeurs seront justifiées au chapitre suivant).

On obtient alors :

$$T^* = 26 - 52 mV$$

Ce qui est tout à fait en accord avec les constatations expérimentales.

### III.4. Un seul électron localisé.

Les expériences précédentes nous ont appris à “apprivoiser” les électrons. La recharge de l’anneau étant un phénomène collectif, il semble plus aisé de voir les électrons quitter le piège un par un plutôt que de les voir entrer. Ainsi les courbes présentées seront des courbes de décharge de l’anneau. Nous chargerons l’anneau, puis nous diminuerons la hauteur de la barrière en augmentant le potentiel du réservoir droit.

#### III.4.1. Courbe de décharge

La procédure d’analyse est celle expliquée au I-4.3. On remplit l’anneau par la procédure expliquée à la partie précédente, puis on diminue la hauteur de la barrière en augmentant le potentiel du réservoir droit. On visualise les oscillations du blocage de Coulomb relatif au balayage du réservoir droit. Lorsqu’un électron quitte le piège, on doit observer un saut de la phase des oscillations.

Une courbe expérimentale enregistrée pour les valeurs de potentiels suivants ( $V_{\text{SET}}=0.3$ ,  $V_{\text{él.garde}}=-0.1$ ,  $V_{\text{grille}}=0.3$ ,  $V_{\text{res.gau.}}=-0.1$ , en volts) est présentée Figure 66.

Au point **a**, le piège est plein d’électrons, le potentiel du réservoir droit est faible (0.1 V), la barrière est haute.

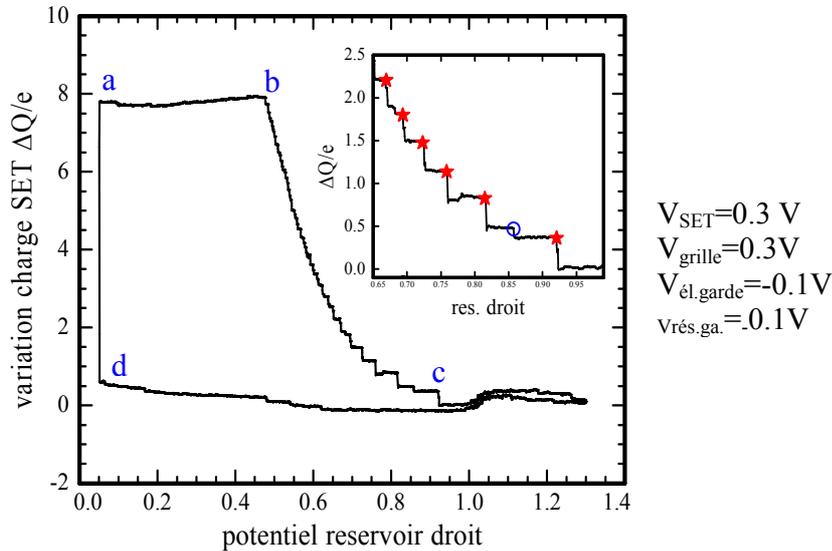
La phase des oscillations du SET reste constante jusqu’au point **b**. Le potentiel de la couche électronique dans le piège atteint alors le haut de la barrière. Les électrons quittent alors le piège un par un, chaque départ apparaissant sur la courbe comme une marche. Les marches sont particulièrement bien visibles sur l’insertion de la Figure 66 qui est un agrandissement sur les 6 derniers sauts. Le potentiel du réservoir droit varie entre 0.65 et 0.92 V. Le profil des potentiels est celui de la figure 69 b).

Les premiers sauts sont peu visibles et noyés dans le bruit. Lorsque le nombre d’électrons diminue, l’amplitude des sauts et la longueur des marches augmente. Le rapport signal sur bruit augmente. Le départ d’un électron devient clairement visible. Lorsque le nombre d’électrons dans le piège diminue, celui qui le quitte est de plus en plus proche de l’îlot. La charge induite sur l’îlot par l’électron qui quitte le piège augmente lorsque le nombre d’électrons dans le piège diminue. Cela se traduit par une augmentation de la hauteur des marches. L’augmentation de la longueur des marches résulte, pour sa part, d’une diminution de la répulsion coulombienne lorsque le nombre d’électrons diminue.

Pour cette raison, le départ des premiers électrons est peu visible et ne se traduit pas par des sauts bien marqués. Des marches bien marquées apparaissent peu à peu. On voit ensuite apparaître des marches bien définies dont l’amplitude augmente lorsque le nombre d’électrons diminue. Les deux derniers électrons induisent sur l’îlot une charge de  $0.4e$ . En simulant un SET à profil pyramidal, on retrouve cette valeur, confirmant ainsi le départ d’un seul électron pour chaque saut.

On peut voir dans l’insertion de la Figure 66 un petit saut d’amplitude  $0.1e$  marqué d’un cercle bleu. Ce saut est dû à un fluctuateur. Il est similaire à ceux qui apparaissent sur la Figure 61. Avec un tel niveau de bruit, sans le fort couplage entre l’électron et le SET donnant lieu à une variation de charge de  $0.4e$  pour le dernier électron, le départ d’un électron serait

très difficilement identifiable. Cette constatation justifie à elle seule l'emploi d'un SET à îlot pyramidal. Une courbe de décharge de l'anneau réalisée avec un SET dont l'îlot n'était pas pyramidal est présentée dans l'annexe D.

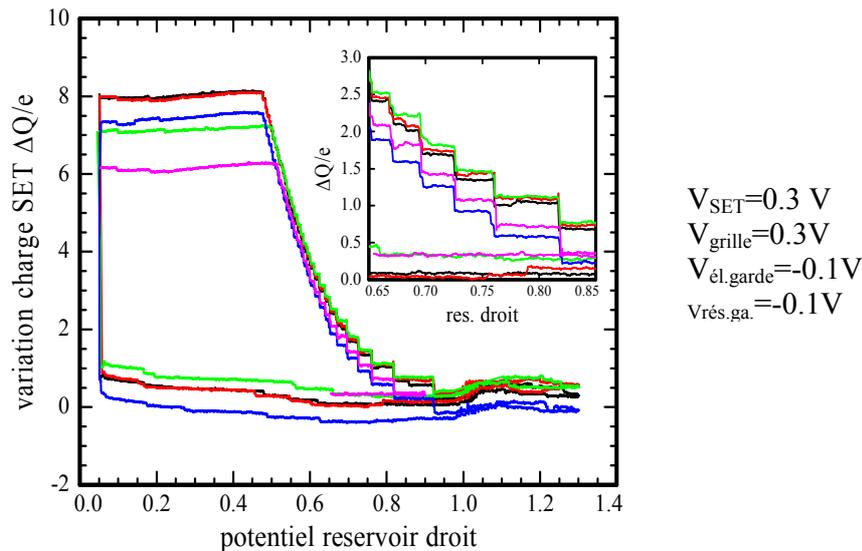


**Figure 66: évolution de la phase des oscillations du SET en fonction du potentiel du réservoir droit. Le départ d'un électron de l'anneau apparaît par un saut (une marche) de la phase des oscillations.. Insertion : zoom sur les derniers sauts. Ils sont marqués par une croix rouge. Le cercle bleu indique un saut dû à un fluctuateur.**

Au point **c**, le dernier électron quitte le piège (profil des potentiel : figure 69 *c*). La charge reste ensuite plus ou moins constante. Les fluctuations observées sont dues à des mouvements de charges dans le substrat. Lorsqu'on diminue le potentiel du réservoir droit, on reforme la barrière et on augmente le potentiel de la couche électronique.

La charge reste constante jusqu'au point **d** où beaucoup d'électrons pénètrent dans le piège, le remplissant à nouveau, le potentiel de la couche électronique ayant atteint le haut de la barrière (figure 69 *d*). Un nouveau cycle peut commencer.

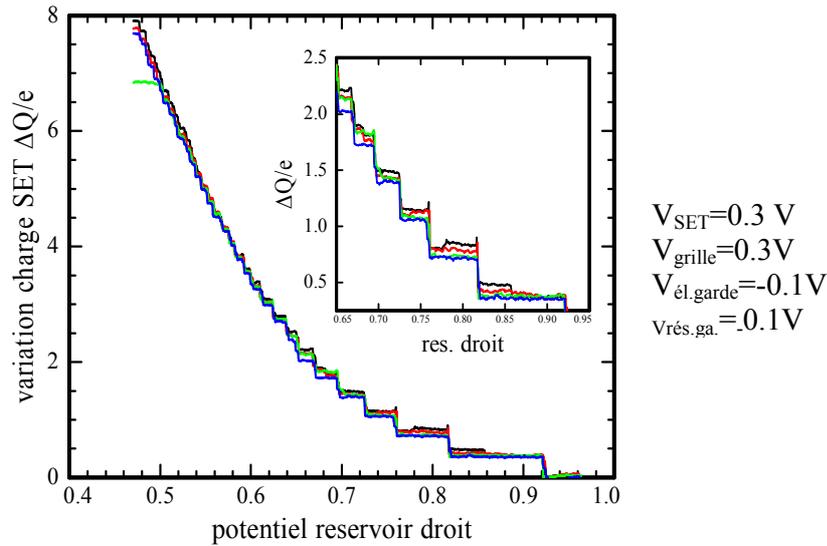
Lors de la recharge, la phase varie rapidement et de plusieurs fois  $e$ . L'ajustement ne parvient pas à tenir compte du nombre total d'électrons qui sont entrés dans le piège. Nous refermons alors le cycle "à la main" en supposant que la charge initiale dans l'anneau reste constante cycle après cycle.



**Figure 67:** cycle de charge et décharge de l'anneau par balayage du réservoir droit. 5 courbes sont superposées. La position des sauts est extrêmement stable. Il y a un décalage vertical des courbes dû à des fluctuations de charges dans le substrat. Le nombre d'électrons qui entrent dans le piège varie de recharge en recharge.

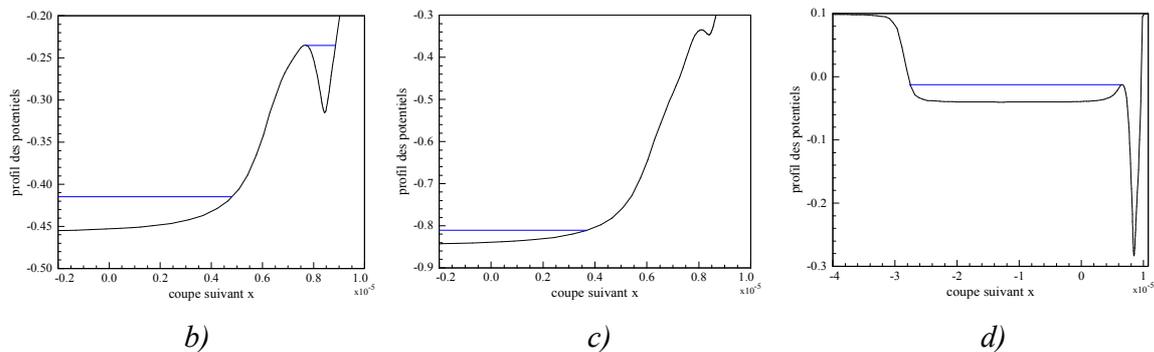
La Figure 67 présente de tels cycles. Le potentiel pour lequel l'électron quitte l'anneau est stable et reproductible. En revanche, la variation globale de la charge au cours de la décharge de l'anneau n'est pas reproductible. La lente migration des charges dans le substrat au cours du temps (celles qui sont responsables de la boucle d'hystérésis Figure 61) donnent lieu à ces décalages verticaux. Si on impose aux courbes de se superposer au niveau de la dernière marche, c'est-à-dire si on supprime la variation de charge accumulée au cours du balayage cela consiste simplement à soustraire la charge accumulée pendant le balayage mais surtout celle accumulée lors des balayages précédents, l'accord est alors bien meilleur (Figure 68). Il reste de légères variations. Elles sont dues aux fluctuations de charge plus rapides mais aussi aux fluctuateurs qui sautent spontanément d'une position stable à une autre.

Ces observations confirment les observations précédentes faites lors des balayages du réservoir gauche. Il y a une forte hystérésis. Les électrons pénètrent en grand nombre dans l'anneau lorsque le potentiel de la couche électronique qui est au dessus des deux réservoirs a atteint le haut de la barrière. Le piège est un état métastable, la barrière est épaisse (figure 69 b) et c))



**Figure 68 :** courbes de décharge identiques à celles de la Figure 67 . On a forcé la phase à être égale après le dernier saut (lorsqu'il n'y a plus d'électrons). L'insertion est un zoom sur les derniers sauts.

Ces courbes diffèrent radicalement de la courbe (Figure 61) sans électrons montrant des sauts discrets de charges dans le substrat. On observe ici aussi des boucles d'hystérésis mais leurs amplitudes totales sont beaucoup plus grandes ( $\sim 7e$ ) que celle de la boucle d'hystérésis sans électrons ( $\sim 1e$ ). De plus, les positions des sauts sont reproductibles. L'amplitude et la longueur des marches augmentent lorsque le nombre d'électrons diminue. Tous ces arguments prouvent que les électrons au-dessus de l'hélium sont responsables des observations précédentes. Il ne s'agit en aucun cas de fluctuateurs localisés près de l'îlot qui sautent d'une position stable à une autre.

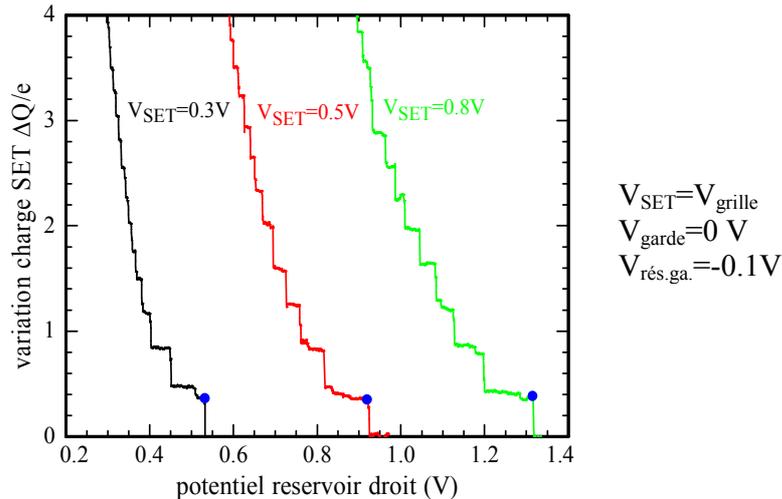


**figure 69 :** profil calculé des potentiels et potentiel de la couche électronique en bleu avec les potentiels des situations précédentes ( $SET=0.5 \text{ V}$  ;  $V_{grille}=0.5 \text{ V}$ ,  $V_{garde}=-0.1 \text{ V}$ ,  $V_{rés.ga.}=-0.1$ ). On a supposé que le potentiel de la couche électronique au-dessus du réservoir droit restait constante. *a)*  $V_{rés.dr.}=0.45 \text{ V}$ , le potentiel de la couche électronique dans l'anneau atteint le haut de la barrière, l'anneau commence à se décharger. *b)*  $V_{rés.dr.}=0.85 \text{ V}$ , le dernier électron a quitté l'anneau. On peut remarquer que la couche électronique au-dessus du réservoir droit se situe beaucoup plus bas que le piège. La situation est non réversible. *c)*  $V_{rés.dr.}=0.05 \text{ V}$ , le potentiel de la couche électronique atteint le haut de la barrière, des électrons peuvent pénétrer, l'anneau se recharge.

### III.4.2. Evolution avec la profondeur du piège

Il pourrait être intéressant d'étudier l'évolution du nombre d'électrons piégés en fonction de la taille (profondeur et superficie) du piège. Malheureusement les premiers sauts ne sont pas visibles car noyés dans le bruit. Une telle étude se révèle impossible. Elle permettrait d'obtenir l'évolution de la densité électronique au-dessus l'anneau en fonction du potentiel appliqué sur le SET.

En revanche, on peut facilement étudier les derniers sauts qui sont bien visibles (figure 70)

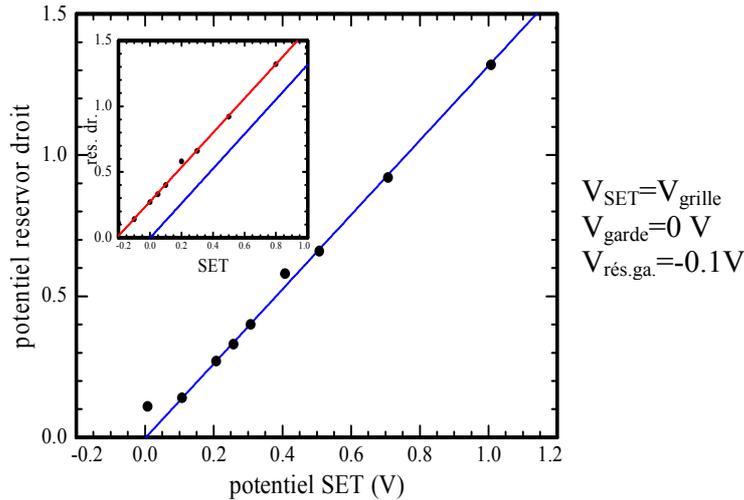


**figure 70 : courbes d'extraction pour différentes valeurs du potentiel du SET et de la grille. Le dernier saut, marqué par un point bleu est bien visible.**

Nous allons représenter (Figure 71) le potentiel pris par le réservoir droit lorsque le dernier électron quitte le piège en fonction du potentiel appliqué sur le SET et la grille. Les potentiels de ces deux électrodes ont été pris égaux.

A l'aide des simulations du profil des potentiels, nous pouvons déterminer le potentiel du réservoir droit théorique pour lequel l'électron doit quitter le piège. Il s'agit de la courbe bleue de la Figure 71. Afin de tracer cette courbe, il faut imposer un critère d'échappement. Nous décidons de représenter les points pour lesquels l'électron a une probabilité  $\frac{1}{2}$  de quitter le puits (plus de détails sur les calculs de probabilité seront donnés à la partie III).

L'échappement se fait par effet tunnel. La largeur de la courbe d'échappement, c'est-à-dire les potentiels du réservoir droit pour lesquels l'électron peut quitter le piège, est trop faible pour être représentée.



**Figure 71 : Potentiel du réservoir droit pour lequel le dernier électron quitte le piège pour différentes valeurs du potentiel du SET. Les points ont été décalés de +0.208 V, potentiel de contact entre l'aluminium et le niobium. La courbe bleue est obtenue par simulation. Elle représente les points pour lesquels la probabilité d'échappement du puits est 1/2. Insertion : points expérimentaux non décalés de +0.208V, en bleu, courbe simulée, en rouge, ajustement passant pas les points expérimentaux.**

On peut remarquer dans un premier temps que les points expérimentaux ne s'alignent pas sur la droite théorique (insertion Figure 71). Il faut les décaler de +0.206 V pour obtenir un très bon accord. Ce décalage est un effet du potentiel de contact entre le niobium (qui constitue le réservoir droit et l'électrode de garde) et l'aluminium (le SET lui-même).

Entre deux matériaux, A, B de potentiel chimique  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ , différents apparaît un potentiel de contact égal à  $V_{pc} = -(\varphi_B - \varphi_A)/e$ . Le potentiel chimique du niobium étant 4.3 eV et celui de l'aluminium 4.1 eV, il apparaît alors un potentiel de contact de +0.2 V sur le SET. On retrouve le décalage observé expérimentalement. Le potentiel de l'îlot est toujours 0.2 V supérieur à celui que nous imposons.

On peut remarquer que nous avons ici une méthode précise de mesure du potentiel chimique entre deux métaux. La valeur trouvée entre le niobium et l'aluminium est :

$$V_{pc} = 0.206 \pm 0.005 \text{ V}$$

Il faut noter que cette mesure et son incertitude sont indépendantes des simulations numériques. La pente et l'ordonnée à l'origine du fit passant par les points expérimentaux suffisent pour déterminer le potentiel de contact. Les incertitudes proviennent des incertitudes statistiques lors de la détermination de la pente et de l'ordonnée.

*Remarque :*

L'équipe du Royal Holloway College de Londres rapporte des résultats similaires [34] aux nôtres avec un échantillon ayant la même géométrie que les nôtres (sauf l'îlot qui n'était pas pyramidal). Leurs SETs étaient beaucoup moins bruyants que les nôtres. Ainsi même sans SET pyramidal, ils ont réussi à voir des électrons quittant ou entrant dans le piège un par un. Ils ont réussi à voir des électrons quitter le piège en diminuant le potentiel de la grille. Une telle observation n'a jamais pu être faite dans notre expérience.

### III.5. Ilot de Wigner et énergie d'un point quantique cristallisé.

#### III.5.1. Cristallisation de Wigner

Une couche bidimensionnelle d'électrons peut subir une transition de phase et passer ainsi d'un état liquide (pas de corrélation de position à longue portée des électrons) à une phase solide où les électrons présentent des corrélations de position à longue portée. Les électrons cristallisent si les interactions coulombiennes dominent les fluctuations quantiques et thermiques. Wigner fut le premier à prédire l'existence d'une telle cristallisation en 1934, on parle donc de cristallisation de Wigner [35].

##### III.5.1.a. fluctuations thermiques

Soit  $a = 1/\sqrt{\pi n_0}$  le rayon moyen de la surface occupée par chaque électron. On définit le rapport  $\Gamma$  qui caractérise l'importance des interactions coulombienne sur les fluctuations thermiques :

$$\Gamma = \frac{\text{énergie coulombienne moyenne}}{\text{énergie thermique}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{k_B T}$$

Pour de très fortes corrélations,  $\Gamma \geq 128 \pm 2$ , les électrons présentent une phase cristalline. Bonsall et Maradudin [36] ont montré que pour un système classique à température nulle ( $\hbar=0$ ,  $T=0$ ), le réseau triangulaire est le plus stable.

##### III.5.1.b. fluctuations quantiques

Les fluctuations quantiques peuvent empêcher la formation du cristal de Wigner. On introduit le paramètre de Brueckner  $r_s$  qui mesure la compétition entre l'énergie cinétique et les interactions :

$$r_s = \frac{\text{énergie coulombienne moyenne}}{\text{énergie cinétique moyenne}} = \frac{e^2}{\frac{\hbar^2}{ma^2}} = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} a = \frac{a}{a_B^h} \propto \frac{1}{\sqrt{n_0}}$$

Où  $a_B^h$  est le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène, à ne pas confondre avec le rayon de Bohr de l'électron flottant au-dessus de l'hélium  $a_B$ .

Ici, le rayon de Bohr  $a_B^h$  caractérise l'interaction entre deux charges ponctuelles de charge  $e$ , les deux électrons, alors que le rayon de Bohr propre aux électrons sur l'hélium  $a_B$  caractérise l'interaction entre un électron et sa charge image de charge  $\Lambda e$ .

Si  $r_s$  est grand devant 1, les fonctions d'ondes se recouvrent très peu et un cristal de Wigner peut alors être formé. Pratiquement,  $r_s \geq 33$  suffit pour observer une cristallisation.

On peut remarquer que  $r_s$  est inversement proportionnel à la racine carré de la densité. Comprimer un cristal quantique le fait fondre !

### **III.5.2. Molécules de Wigner**

Dans le cas particulier de notre expérience, la cristallisation de Wigner pose quelques questions. Premièrement, le nombre d'électrons entrant en jeu n'est pas très grand. On peut donc se poser la question toute légitime de la cristallisation d'un nombre fini et petit d'électrons (entre 2 et 50). Leur arrangement dans l'espace est perturbé par la présence du piège [37] et doit résulter d'un compromis entre le réseau triangulaire, imposé par la cristallisation de Wigner et la géométrie du piège.

Ensuite, on peut se poser la question quant à la nature des interactions entre les électrons du point quantique. En effet, si les électrons sont proches d'électrodes métalliques, la charge image positive qui apparaît dans ces électrodes écrante l'interaction coulombienne entre les électrons du point quantique. Il en résulte alors une interaction qui décroît exponentiellement. Deux électrons aux extrémités du point n'interagissent plus. On comprend alors sans peine, qu'en présence d'écrantage la cristallisation de Wigner n'aura pas lieu. Les électrons restent en phase liquide.

#### *III.5.2.a. énergie d'un point quantique cristallisé et cristallisation*

#### Molécules de Wigner

La cristallisation de Wigner en dimension réduite ne concerne pas seulement les électrons au dessus de l'hélium ou encore les électrons dans des points quantiques. Elle apparaît en physique de l'état solide, en physique des plasmas mais aussi en physique atomique [38].

Ainsi, de nombreux articles théoriques traitent de la cristallisation de Wigner en dimensions réduites. Les auteurs ont surtout considéré des puits paraboliques. Certains étendent néanmoins leurs résultats à des puits variant suivant une loi de puissance. Nous allons pour notre part seulement parler d'électrons.

Considérons un ensemble de  $N$  électrons interagissant dans un piège  $V(\vec{r})$  de profil quelconque. Appelons  $\vec{r}_i$  le vecteur position du  $i$ -ième électron normalisé par la longueur  $r_0 = (e^2/\epsilon_0)^{1/3} (m\omega_{||}^2/2)^{-1/3}$ , où  $\omega_{||}$  est la fréquence caractéristique du piège.  $r_0$  est égale à 280 nm.

Le hamiltonien du système s'écrit :

$$H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j}^N \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\nu} + \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i) \dots \text{Équation 21}$$

La loi d'interaction est générale. Les interactions coulombiennes sont retrouvées pour  $\nu=1$  mais cet hamiltonien permet de décrire toutes sortes d'interactions. Nous n'avons pas spécifié le profil du potentiel de confinement. De manière générale, il est écrit sous la forme:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (r^2)^\gamma$$

On retrouve un confinement harmonique lorsque  $\gamma=1$  et des écarts à cette harmonicité peuvent être étudiés en faisant varier  $\gamma$ .

Sauf précisions, les résultats qui suivent s'appliquent à des électrons interagissant par interaction coulombienne ( $\nu=1$ ) dans un puits parabolique ( $\gamma=1$ ).

Nous avons écrit ici un hamiltonien classique pour lequel nous allons rechercher des configurations statiques. L'équivalent quantique devrait faire apparaître un terme supplémentaire traduisant l'énergie cinétique des électrons.

Cet hamiltonien traite d'un problème de  $N$  corps en interaction. Nous recherchons la configuration, c'est-à-dire la position des différents électrons dans le piège, qui minimise cet hamiltonien. Il est très difficile d'obtenir une solution analytique à ce problème à cause du nombre élevé de variables. Les solutions à cet hamiltonien sont obtenues par simulation numérique. Le nombre élevé de minima locaux rend la recherche du minimum global par simulation Monte Carlo particulièrement efficace [39]. Néanmoins, afin d'obtenir des résultats sur les configurations excitées, il peut être intéressant d'avoir recours à la méthode d'optimisation de Newton [40]. Des résultats analytiques permettant de relier simplement l'énergie d'interaction et de confinement et donnant de propriétés générales vérifiées par les configurations d'énergie minimales ont été obtenus dans la référence [41].

Les électrons s'organisent en couches concentriques formant un anneau de largeur beaucoup plus faible que le rayon. On parle alors de molécules de Wigner ou d'îlots de Wigner. Le nombre de couches augmente par palier avec le nombre d'électrons. Ainsi, une première transition, où on passe de configurations à une couche à des configurations présentant deux couches, est observée lorsque le nombre d'électrons passe de 5 à 6. Une transition similaire caractérisée par le passage de deux à trois couches est observée lorsque le nombre d'électrons passe de 15 à 16 (figure 72). Bedanov et Peeters ont construit une table de "Medeleev" traduisant ces transitions géométriques [39]. Lorsque tous les anneaux sont remplis par le nombre maximal d'électrons autorisés, un nouvel anneau, constitué d'un seul électron au centre, est créé.

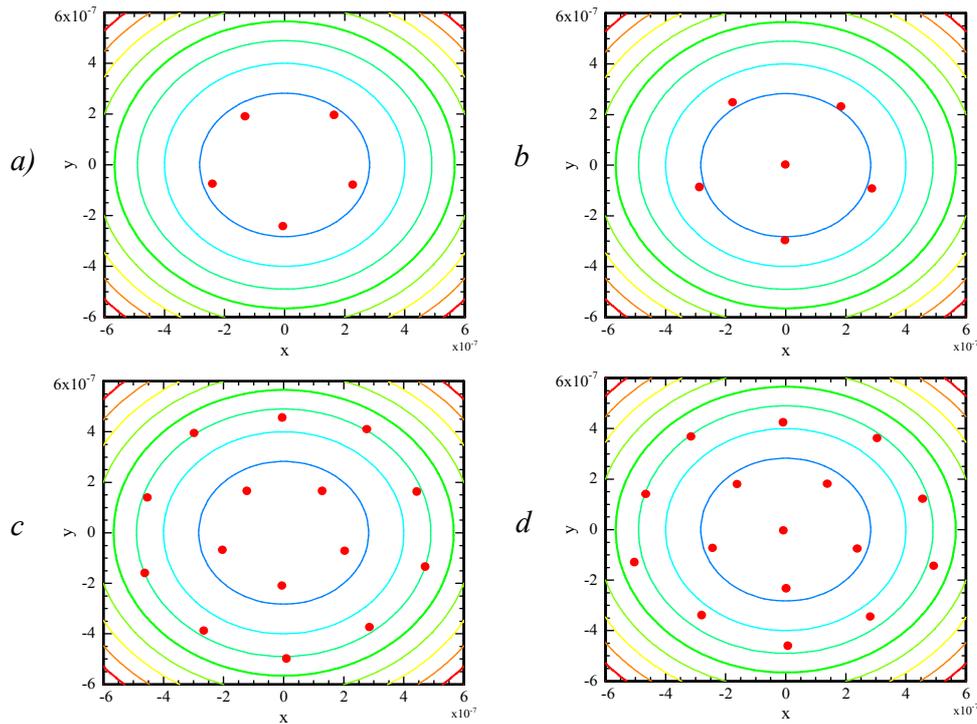


figure 72 : molécules de Wigner dans un puits parabolique à température nulle. Les points représentent la position des électrons tandis que les lignes pleines sont des lignes iso-potentiel. *a-b*) transition d'une configuration à une couche (5 électrons) à une configuration à deux couches (6 électrons). *c-d*) transition d'une configuration à deux couches (15 électrons) à une configuration à trois couches (16 électrons).

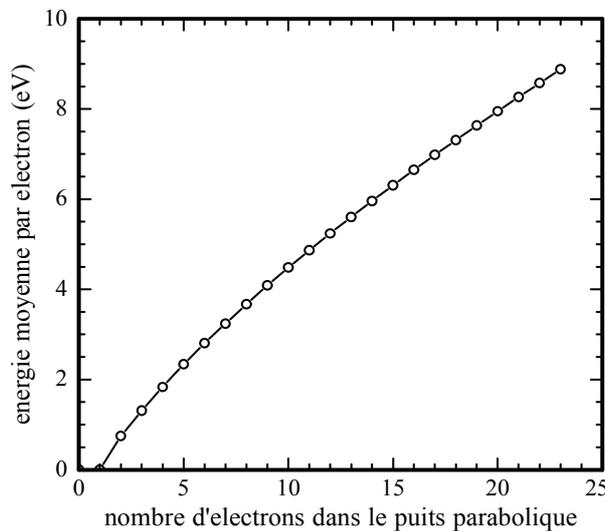
### Transitions de phase

Certaines configurations ont été qualifiées de “nombres magiques” mais nous préférons comme suggéré dans la référence [37] parler de “nombres magiques géométriques”. En effet, à cause du grand nombre de minima locaux, il est très difficile d'observer un comportement non monotone de l'énergie des configurations avec le nombre d'électrons (figure 73) pouvant donner lieu à l'observation de nombres magiques. Le caractère "magique" de ces configurations ne se traduit pas par une énergie particulièrement différente des configurations voisines mais dans leur robustesse face aux rotations relatives des différentes couches. De telles configurations sont réalisées lorsque les nombres de particules de chaque anneau sont proportionnels (par exemple :  $N=19=1+6+12$ ,  $N=12=3+9$ ). La proportionnalité du nombre d'électrons entre les anneaux donne une rigidité supplémentaire à la molécule de Wigner ; il lui est plus difficile de tourner sur elle-même, elle est qualifiée de magique.

A cause de la petite taille du système et de la non-uniformité de la densité, on ne peut pas définir de température de transition entre un état solide (les molécules de Wigner) et un état liquide. Néanmoins, on peut définir une température critique au-delà de laquelle le déplacement quadratique moyen dépasse une valeur critique [39] (critère le Lindemann). La température n'est plus suffisamment basse pour limiter le déplacement des électrons et les confiner dans une région restreinte de l'espace. Ils sont en phase liquide. Le même critère peut être utilisé pour étudier la stabilité des molécules de Wigner face aux fluctuations quantiques [42].

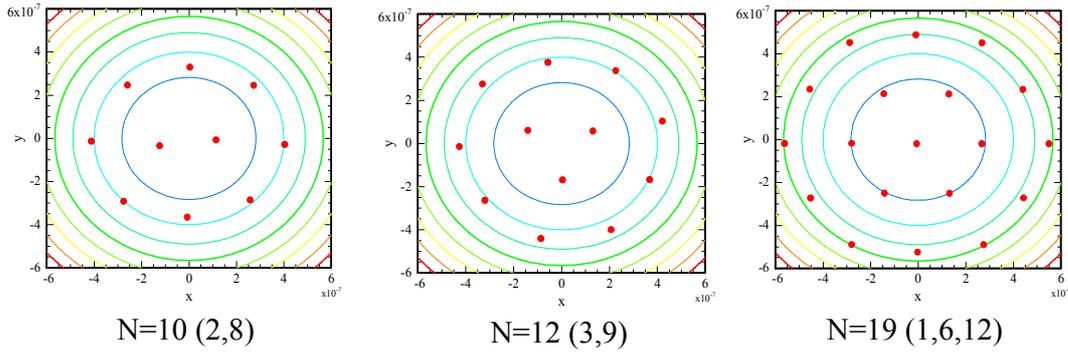
On peut noter deux comportements distincts suivant le nombre d'électrons. Lorsque l'îlot contient suffisamment d'électrons ( $N \geq 20$ ) la température critique est plus faible que la

température de transition de phase du système infini d'électron bidimensionnel au dessus de l'hélium [39]. En revanche, lorsque le nombre est très petit, la température critique dépend fortement du nombre d'électrons dans l'îlot. Le scénario de fusion est différent du scénario pour un système infini. Dans le cas des molécules de Wigner, on observe deux températures critiques distinctes. Il y a tout d'abord une température critique dite "d'orientation" au-delà de laquelle les différentes couches tournent les unes par rapport aux autres bien que leur ordre interne soit conservé. Il y a aussi une température critique "radiale", plus élevée, qui se traduit par un élargissement puis un recouvrement des anneaux. Les îlots de Wigner présentant plus de 100 électrons, tout comme le système infini, ne présentent pas de température critique d'orientation. Du fait de leur plus grande résistance face aux rotations internes, les configurations présentant un "nombre magique géométrique" présentent une température critique plus élevée que les configurations "non magiques". Cette température est d'ailleurs plus élevée que la température de fusion du cristal de Wigner infini. Leur propriété géométrique les rend plus stables face aux fluctuations tant quantiques [42] que classiques. Ainsi, les électrons continuent à former des molécules de Wigner à des températures et à des densités pour lesquels ils seraient dans l'état liquide pour le système infini.



**figure 73 : évolution de l'énergie moyenne par électron en fonction du nombre d'électrons (pour un confinement parabolique). L'énergie est en eV et normalisée par  $E_0 = (e^2/4\pi\epsilon_0)^{2/3} (m\omega_0/2)^{1/3}$  où  $\omega_0$  est la fréquence du puits.**

Malheureusement, l'organisation spatiale des configurations dépend à priori aussi bien de la force du confinement que de son profil [38,43]. Les résultats précédents relatifs au puits parabolique nous apprennent que, pour des températures inférieures à la température de cristallisation du système infini, les électrons doivent s'organiser en structure dont l'ordre résulte d'une compétition entre le confinement et les interactions. L'énergie de ces configurations traduit leur géométrie. Ainsi, ces constatations nous ont amenés à développer des simulations numériques afin de comprendre les résultats de nos mesures. Ce sont des simulations type Monte Carlo. Elles nous donnent accès à la configuration d'énergie minimum quelque soit le profil du potentiel. Intéressons-nous tout d'abord à l'interaction entre les électrons et cherchons à la caractériser.



**figure 74 : configurations “magiques”. Le nombre d’électrons de la couche extérieure est un multiple entier de celui de la couche intérieure**

### *Interaction entre les électrons*

L’énergie d’interaction et l’énergie de confinement vérifie une relation type “théorème du viriel” pour les configurations qui minimisent le hamiltonien [41]. Quelque soit la forme des interactions entre électrons et la forme du potentiel, l’énergie de confinement est proportionnelle à l’énergie d’interaction. La constante de proportionnalité dépend du confinement et la loi d’interaction.

Pour des électrons dans un puits parabolique, l’énergie de confinement et l’énergie d’interaction vérifient alors :

$$\left[ \frac{1}{2} m \omega_0^2 \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right] \quad \text{Équation 22}$$

Nous allons estimer la distance entre deux électrons à partir de cette relation.

Lorsque seulement deux électrons sont présents dans le piège, leurs vecteurs position sont opposés et de même norme. Appelons  $r_0$  cette norme. A partir de l’équation 1, on peut écrire :

$$r_0 = \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m \omega_0^2} \right)^{1/3}$$

Nous estimons la fréquence du piège à partir des simulations réalisées avec FlexPDE. Lorsque deux électrons restent dans le piège, la fréquence caractéristique est d’environ 40 GHz ce qui implique une distance d’environ  $2r_0 \approx 250$  nm entre les électrons

Pour des valeurs assez grande du potentiel du réservoir droit (lorsque seulement deux électrons restent dans le piège), le piège créé par l’échantillon diffère un peu du piège parabolique (figure 75). La distance réelle entre deux électrons doit donc être légèrement supérieure à celle estimée précédemment.

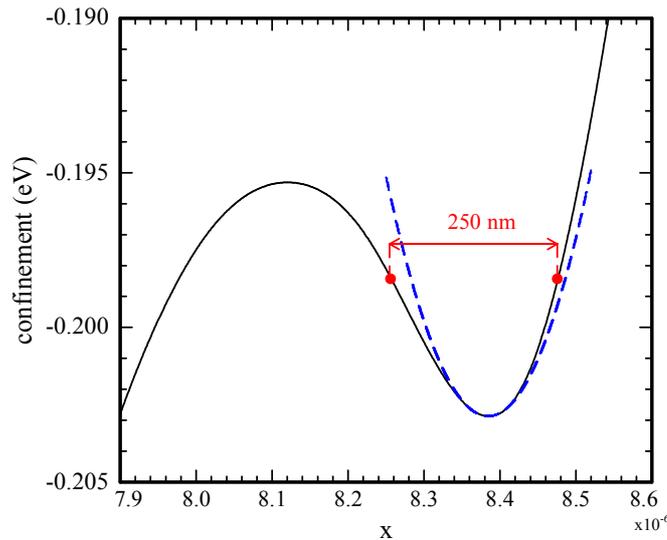


figure 75 : profil des potentiels réels (courbe noire) et un puits parabolique de même fréquence (courbe tirets bleus). Le profil réel s'écarte de la parabole. Il confine moins que le potentiel parabolique. Les points rouges symbolisent deux électrons dans le pièges distant de 250 nm.

Le SET est idéalement à 500 nm sous le film d'hélium. A cause du profil pyramidal, une partie de l'îlot se situe beaucoup plus près de la surface (environ 100 nm). Néanmoins, cette partie représente une faible fraction de la surface totale. A strictement parler, l'interaction entre les électrons n'est donc pas purement coulombienne. Elle se situe à mi-chemin entre l'interaction coulombienne et l'interaction dipolaire. Une interaction dipolaire entre les électrons est suffisante pour leur permettre de cristalliser (figure 76). Evidemment, les configurations sont différentes des configurations obtenues pour une interaction coulombienne [38].

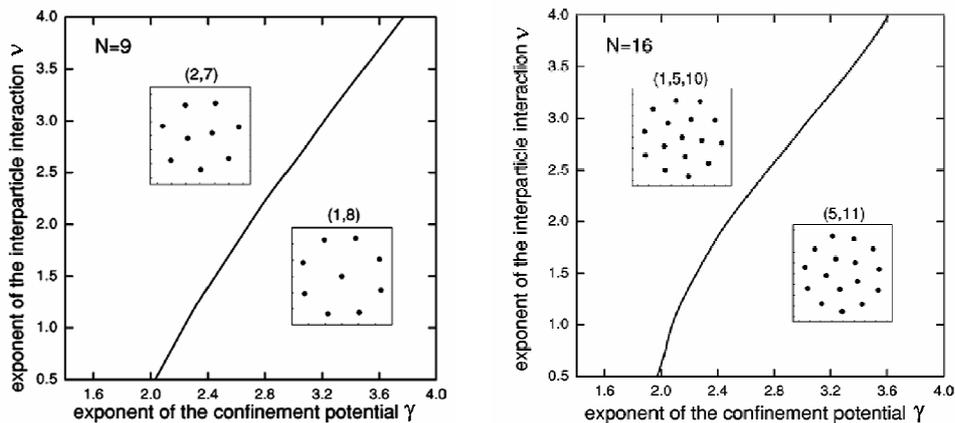


figure 76 : diagramme de phase de l'état fondamental des configurations à 9 et 16 électrons en fonction de la forme du confinement ( $\gamma$ ) et de la loi d'interaction entre les particules ( $\nu$ ). (extrait de [38])

### III.5.3. Spectres d'addition

En s'appuyant sur les mesures par couplage capacitif, nous estimons la densité électronique à  $10^{14} \text{ m}^{-2}$ . Un système infini cristalliserait pour des températures inférieures à 2K.

Du fait de l'interaction coulombienne, les électrons au dessus de notre échantillon doivent former des îlots de Wigner et l'énergie de ces îlots doit refléter leur structure interne. De tels îlots n'ont jamais été observés pour des électrons flottant au dessus de l'hélium. En revanche, des observations macroscopiques [44] ont été faites et les structures prédites par les simulations ont été retrouvées [38-40]

Une observation directe étant impossible, nous devons déduire la structure des molécules de Wigner de leur énergie et plus particulièrement de l'étude des spectres d'addition, traduisant l'énergie requise pour extraire (dans notre expérience mais "ajouter" en général, d'où le nom) un électron du piège.

Dans notre expérience, cette énergie est simplement proportionnelle à la longueur des marches sur les courbes de décharge de l'îlot. La constante de proportionnalité traduit le couplage entre l'îlot et le réservoir droit.

Il peut être utile de comparer les spectres attendus pour des électrons en phase liquide à ceux en phase solide.

#### III.5.3.a. Phase liquide

En phase liquide, du fait du déplacement erratique des électrons, les interactions coulombiennes entre les électrons du point quantique mais aussi avec ceux en dehors du point sont moyennées. On suppose alors l'interaction coulombienne constante et on la modélise par une capacité constante. Ainsi, ajouter un électron au point requiert l'énergie de chargement :

$$E_c = \frac{e^2}{2C}$$

constante quelque soit le nombre d'électrons dans le piège.

Ensuite, on suppose que le spectre d'énergie d'une particule dans un puits parabolique n'est pas modifié par les interactions [45]. Ainsi, ajouter une particule revient à peupler les différents niveaux du spectre d'énergie d'une particule dans un puits parabolique.

Sous ces hypothèses, l'énergie d'addition s'écrit alors :

$$\Delta\mu(N) = \frac{e^2}{C} + \Delta E$$

Où  $\Delta E=0$  si l'électron s'ajoute à une couche non complète et  $\Delta E >0$  si l'électron s'ajoute à une nouvelle couche (Figure 77).

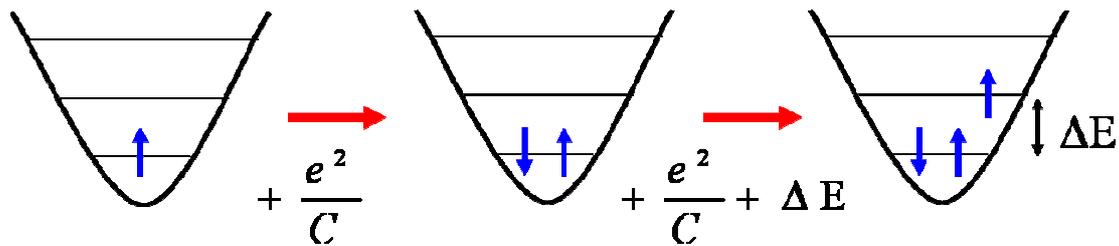


Figure 77 : schéma traduisant le principe du modèle de l'interaction constante. Le spectre d'énergie est celui d'un puits parabolique à deux dimensions. Ces niveaux d'énergie sont dégénérés (2, 6, 9, etc.).

Ajouter un électron à une couche non complète nécessite l'énergie  $e^2/2C$ . En revanche, ajouter un électron à une couche complète nécessite l'énergie  $e^2/2C + \Delta E$  où  $\Delta E$  est l'écart d'énergie entre deux niveaux.

Le spectre d'addition des électrons en phase liquide présente alors de brusques pics lorsqu'une nouvelle couche d'énergie est peuplée. La dégénérescence des niveaux d'énergie du puits parabolique peuvent ainsi être mise en évidence.

La figure 78 présente un spectre d'addition expérimental pour un point quantique réalisé à partir d'un gaz bidimensionnel d'électrons à la jonction de deux semi-conducteurs. La densité électronique de ces systèmes est telle que les électrons sont en phase liquide. Leur spectre d'addition présentent des pics pour  $N=2,6,12$  traduisant la dégénérescence des premier, deuxième et troisième niveaux d'énergie du piège harmonique bidimensionnel. On peut aussi noter l'existence de pics d'amplitude plus faible pour  $N=4,9,16$ . Ces nombres sont associés à l'équivalent d'une règle de Hund pour les points quantiques. Les configurations pour lesquelles les spins des électrons sont anti-parallèles sont plus stables que celles qui présentent un électron célibataire. Leur ajouter un électron nécessite plus d'énergie d'où la présence d'un pic dans le spectre d'addition.

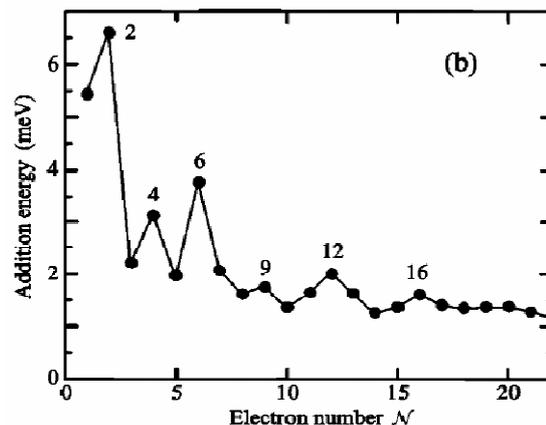


figure 78 : spectre d'addition d'un point quantique pour des électrons en phase liquide (extrait de [45]). On observe un pic (2,6,12) associé à la dégénérescence des niveaux d'énergie du puits parabolique bidimensionnel. Les autres pics (4,9,16) sont associés à la règle de Hund.

Pour des électrons en phase liquide, le spectre d'addition d'un puits parabolique présente de clairs pics traduisant la dégénérescence des niveaux d'énergie.

On peut aller au-delà du modèle des interactions constantes en le remplaçant par une description moins phénoménologique afin de tenir compte, entre autre, de la non-harmonicité et de déformations éventuelles du potentiel de confinement. Cette description consiste à

résoudre par approximations successives l'équation de Schrödinger, par une méthode Hartree-Fock, et l'équation de Poisson [46]. L'équation de Schrödinger permet d'obtenir la distribution des électrons dans le point quantique tandis que l'équation de Poisson permet d'obtenir le potentiel créé par cette distribution de charges.

On remarque alors que la non-harmonicité du piège n'est pas un obstacle à l'observation des nombres magiques. En revanche, il est nécessaire que le piège présente une symétrie de révolution. Briser cette symétrie se traduit par une disparition progressive des nombres magiques [47] au fur et à mesure que l'anharmonicité augmente.

### III.5.3.b. Phase solide

#### Piège parabolique

Considérons maintenant des électrons en phase solide. On peut facilement obtenir le spectre d'addition théorique à partir de [40]. Et en remarquant qu'il est relié à l'énergie des configurations par:

$$\Delta\mu(N) = E(N+1) - 2E(N) + E(N-1)$$

Où  $E(N)$  est l'énergie de la configuration à  $N$  électrons.

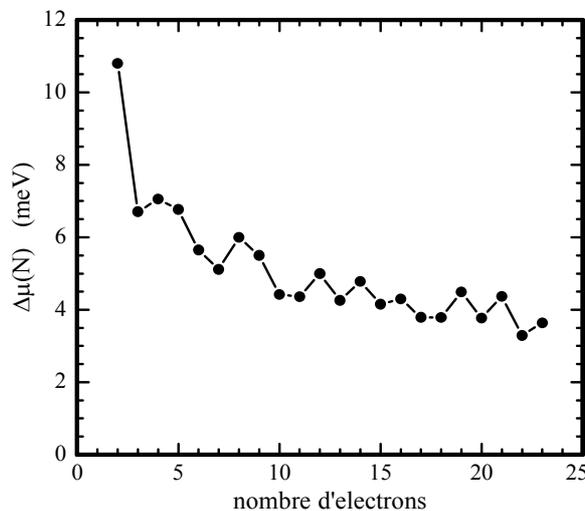


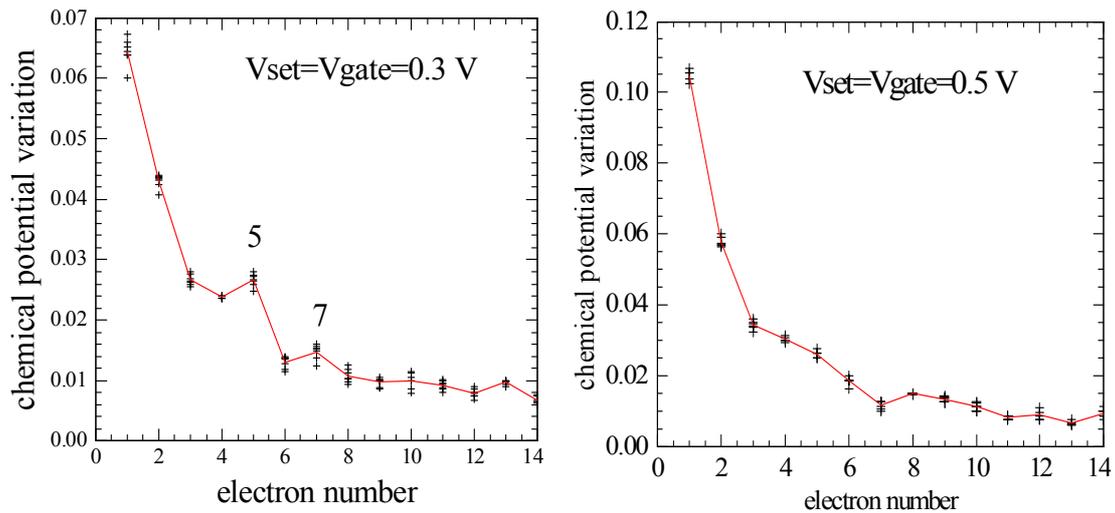
figure 79 : spectre d'addition pour des électrons formant des molécules de Wigner dans un puits parabolique.  $E_0$  est liée à la normalisation du hamiltonien (c.f figure 73)

L'énergie variant de manière monotone, ce spectre ne présente pas de nombre magique.

De la comparaison des deux spectres il apparaît deux comportements différents permettant de distinguer les états liquide et cristallisé. Si on observe de clairs pics pour certains nombres d'électrons dans le piège, les électrons sont en état liquide. En revanche, si aucun nombre magique n'apparaît, les électrons forment des molécules de Wigner.

## spectres expérimentaux

Deux spectres expérimentaux obtenus pour des pièges différents sont présentés à la Figure 80. Tous deux se caractérisent par l'absence évidente de nombres magiques. Le potentiel du SET correspond à la valeur imposée lors de l'expérience. Le potentiel réel sur l'îlot est celui imposé auquel s'ajoute le potentiel de contact.



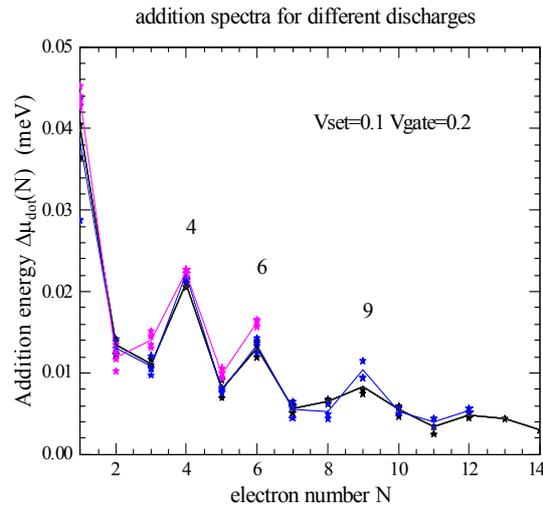
**Figure 80:** spectres d'addition expérimentaux pour différentes valeurs des potentiels du SET et de la grille. Le potentiel chimique est donné en volt.

Malheureusement, ces spectres ne sont pas reproductibles décharges après décharges. Ils dépendent de la distribution des impuretés qui est modifiée par le réchauffement nécessaire pour effectuer la décharge corona. La distribution des impuretés étant différentes, le profil des potentiels est légèrement différent. Hors, les molécules de Wigner sont très sensibles au profil des potentiels. Une modification même légère se traduira par un spectre complètement différent.

Nous avons mentionné plus haut que le spectre des électrons en phase liquide dans un piège non symétrique se caractérisait par une absence de nombres magiques.

Nous pensons, néanmoins que notre piège est suffisamment symétrique pour permettre la génération de nombres magiques pour des électrons en phase liquide. On peut par exemple comparer les fréquences caractéristiques dans des directions transverses. La simulation du profil des potentiels permet d'en avoir une estimation. Elles sont égales à moins de 1% près lorsqu'il y a beaucoup d'électrons. Lorsque le dernier électron quitte le piège, on a dans la direction x  $\omega_x \sim 40$  GHz et dans la direction y  $\omega_y \sim 60$  GHz. Le rapport des deux  $\delta \approx 1.5$  devrait permettre d'observer la dégénérescence du puits parabolique [47]

Le spectre a) de la Figure 81 présente les nombres magiques (sauf le chiffre 2) caractéristiques des électrons en phase liquide dans un puits parabolique.



**Figure 81 : spectres expérimentaux présentant les nombres magiques caractéristique d'un piège parabolique**

Nous ne savons pas expliquer pourquoi les électrons étaient en phase liquide lors de l'enregistrement des spectres de la Figure 81.

Il semble difficile de croire que la géométrie du piège est telle qu'elle permet l'observation claire de pics correspondant de surcroît aux nombres magiques du piège parabolique.

On peut imaginer qu'un ou plusieurs ions positifs issus de la décharge aient pénétré sous le film d'hélium. Ils augmentent alors le confinement entraînant alors une transition de phase solide-liquide sous l'action des fluctuations quantiques.

Le film d'hélium n'est pas immobile. Il subit des fluctuations de niveau. C'est pour cette raison que nous avons ajouté un volume supplémentaire à la cellule afin de minimiser les effets des variations du film d'hélium. On peut alors imaginer que le film d'hélium était plutôt mince lors de l'enregistrement des spectres de la Figure 81. Nous avons vu que l'interaction entre les électrons n'était pas purement coulombienne. La diminution du film d'hélium réduira encore les interactions entre électrons. Elles pourront être beaucoup plus écrantées qu'elles ne le sont la plupart du temps. Ainsi, comme pour les points quantiques réalisés dans des hétérostructures, les électrons seront en phase liquide.

Afin d'être plus affirmatif, il faudrait pouvoir simuler les spectres d'addition. Nous avons essayé de faire de telles simulations. Le résultat est peu concluant car, comme mentionné précédemment, les spectres sont très sensibles à la distribution des impuretés (Figure 82). Néanmoins, les courbes expérimentale et théoriques sont proches ce qui renforce le sentiment d'observer des électrons cristallisés.

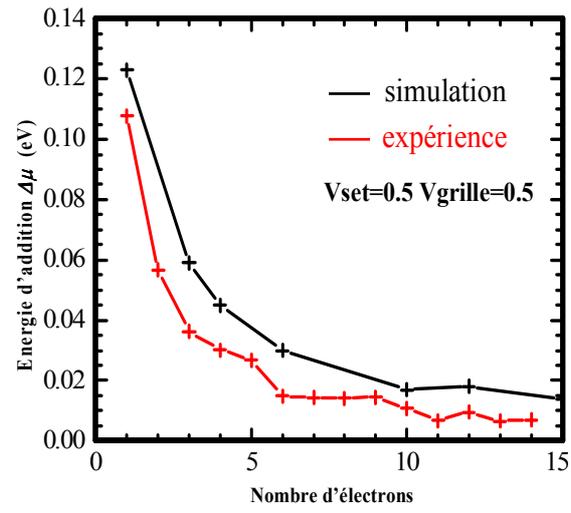


Figure 82 : spectre expérimental (en rouge) et spectre simulé (en noir).

## III.6. Lecture projective et temps de thermalisation

### III.6.1. Lecture projective

Le quatrième point des critères de DiVincenzo mentionne la nécessité d'une lecture projective, c'est-à-dire sachant discriminer les deux états du qubit. On peut entrevoir deux manières de réaliser cette lecture avec notre dispositif expérimental. Tout d'abord en utilisant le SET. La charge créée sur l'îlot par un électron dépendra de son état. Cette mesure impose des restrictions sur le bruit du SET qui sont détaillées ci-dessous au point *a*. Une détermination de l'état du qubit pourra aussi être réalisée en étudiant des courbes de probabilité d'échappement à travers la barrière. Leur principe sera détaillé au point *b*.

#### III.6.1.a. détermination de l'état du qubit avec le SET

La charge induite sur l'îlot par l'électron dépend bien entendu de la distance électron-hélium. Les distances moyennes par rapport au film d'hélium dépendent de l'état de l'électron, la charge induite sur l'îlot, dépendra donc de l'état.

Nous avons vu qu'un électron (dans l'état fondamental à priori) induisait sur l'îlot une charge égale à  $0.4e$ , nous allons en déduire la charge créée par l'électron lorsqu'il est dans le premier état excité. Le couplage entre l'électron et le SET est inversement proportionnel à la distance les séparant. La valeur  $Q_1$  attendue de cette charge pour un électron flottant à 46 nm au-dessus du film d'hélium est telle que:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{d}{d+h} \approx 0.89,$$

$$Q_1 \approx 0.89 \times 0.4e = 0.36e,$$

où  $Q_0$  (resp.  $Q_1$ ) est la charge induite sur l'îlot du SET par l'électron dans le fondamental (resp. le premier état excité),

$h$  est la différence entre les hauteurs moyennes dans l'état 1 et l'état 0  $h \simeq 30\text{nm}$

$d$  la distance SET-interface hélium-vapeur,  $d$  est estimée à 250 nm

(ces valeurs présupposent que le champ électrique appliqué sur l'électron est nul.)

La charge induite par un électron dans le premier état excité est donc de  $0.36e$ .

Le temps de mesure permettant de distinguer cette différence de charge ( $\delta q = 0.04e$ ) du bruit doit être faible devant le temps de décohérence. Bien entendu, le SET utilisé dans notre expérience est beaucoup trop bruyant même si le temps de mesure est extrêmement grand. En

revanche, un SET ayant un niveau de bruit correct ( $\sim 3.10^{-4} e/\sqrt{Hz}$ ) pourrait déterminer l'état du qubit en  $\sim 10$  ns, ce qui est tout à fait acceptable.

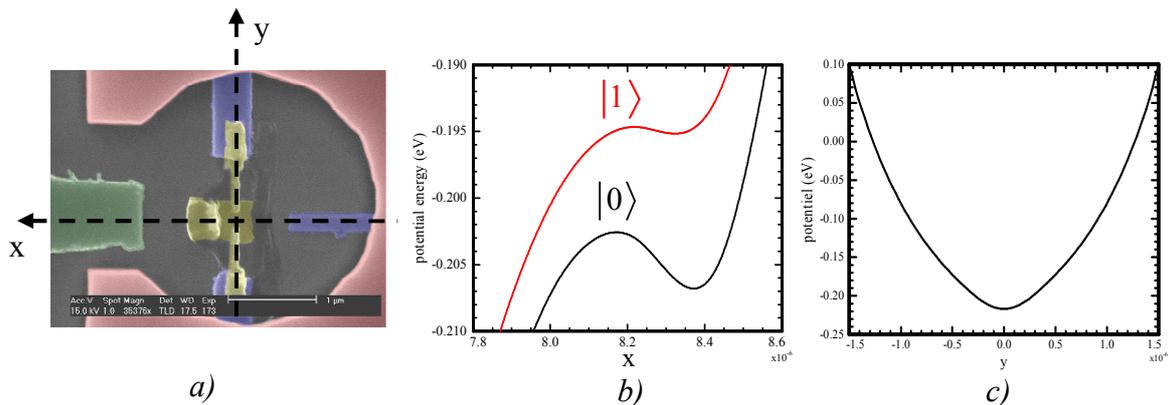
Bien entendu, augmenter le champ pressant diminue la différence de charge. Il sera alors nécessaire d'augmenter le temps de mesure.

Afin de contourner le manque de sensibilité du SET utilisé, nous avons essayé de déterminer l'état du qubit par une autre méthode.

### III.6.1.b. courbes d'échappement

L'électron évolue dans un piège dont la barrière a la forme d'une selle à cheval et présente un point col suivant l'axe de symétrie (Figure 83 a)). Si cette barrière est suffisamment fine, l'électron pourra la traverser soit par effet tunnel, soit par activation thermique, si la température est suffisamment élevée. Nous supposons que l'électron s'échappe le long de l'axe de symétrie. Le système se réduit alors à un problème unidimensionnel.

Evoluant à des distances différentes par rapport aux électrodes, l'électron dans l'état fondamental et dans l'état excité "voit" des profils de potentiels différents (Figure 83 b)).



**Figure 83 :** a) le piège présente un axe de symétrie (axe X). Le piège présente un minimum le long de cet axe. b) profil des potentiels pour un électron dans l'état fondamental (courbe noire) et pour un électron dans le premier état excité (courbe rouge). c) profil des potentiels suivant l'axe y.

Ainsi la barrière vue par l'électron sera plus faible lorsqu'il sera dans l'état excité. Il pourra donc plus facilement être extrait du piège.

On a ici une méthode permettant de discriminer les deux états de l'électron. Cette méthode a déjà été appliquée avec succès aux circuits à qubits supraconducteurs [48,49,50]

L'échappement à travers la barrière est probabiliste. Si la température est suffisamment haute, les fluctuations thermiques peuvent apporter suffisamment d'énergie à l'électron pour lui permettre de "sauter" par-dessus la barrière. A très basse température, si la barrière est suffisamment fine, l'électron s'échappera par effet tunnel. En conséquence, pour un état donné, la probabilité d'échappement dépend de la hauteur et la longueur de la barrière mais aussi de la température.

L'idée est donc de placer un électron dans un piège suffisamment profond afin qu'il ne puisse pas s'en échapper. On le laisse évoluer. Ensuite, afin de déterminer son état, on applique une tension positive sur le réservoir droit pendant un bref instant (impulsion). La hauteur de la barrière va diminuer et l'électron pourra s'en échapper ou non suivant son état. Afin que la discrimination des états soit possible, il est nécessaire que les courbes d'échappement des deux états soit bien distinctes.

Connaissant le profil des potentiels et donc la forme de la barrière, il est facile de calculer la probabilité d'échappement par effet tunnel en fonction du potentiel sur le réservoir droit.

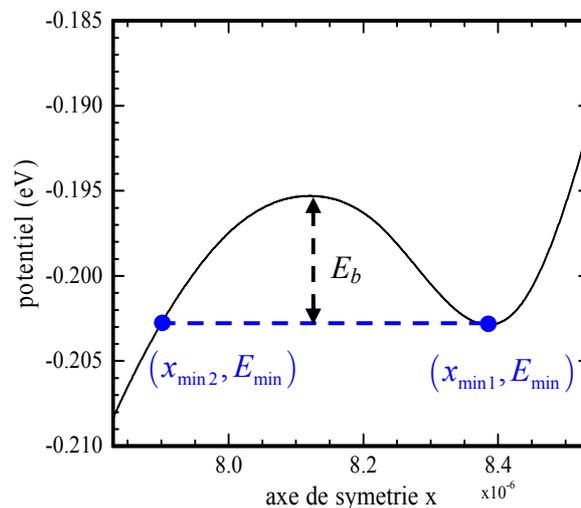
Le taux d'échappement, c'est-à-dire le nombre d'événements par unité de temps est donné par:

$$\Gamma = \frac{\omega_0}{2\pi} p,$$

où  $\omega_0$  est la fréquence d'oscillation de l'électron dans le piège et  $p$  la probabilité d'échapper. En faisant l'approximation d'une barrière épaisse, la probabilité d'échapper par effet tunnel est donnée par:

$$p_{tun} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_{min1}}^{x_{min2}} \sqrt{2m(V(x) - E_{min})}\right) \quad \text{Équation 23}$$

$V(x)$  est le profil des potentiels.  $x_{min1}$  et  $x_{min2}$  sont définis sur la Figure 84. On intègre en suivant la géométrie de la barrière.



**Figure 84 : définition des paramètres utilisés pour déterminer la probabilité de traverser la barrière par effet tunnel.**

La probabilité, à l'instant  $t$ , que l'électron quitte le piège pendant l'intervalle  $dt$  résulte de deux événements statistiquement indépendants. En premier lieu, il faut que la particule n'ait pas quitté le piège avant l'instant  $t$ , ensuite, qu'elle le quitte pendant la durée  $dt$ . Cette probabilité est donnée par :

$$dp = (1 - p(t))\Gamma dt.$$

En appelant  $\Delta t$  le temps pendant lequel on applique l'impulsion, la probabilité d'échappement s'écrit alors [51]:

$$p = 1 - \exp(-\Gamma\Delta t) \quad \text{Équation 24}$$

La distance moyenne électron-hélium dépend évidemment du champ électrique pressant (figure 85). Comme la différence diminue lorsque le champ électrique augmente, les deux états seront plus difficiles à discriminer en champ fort.

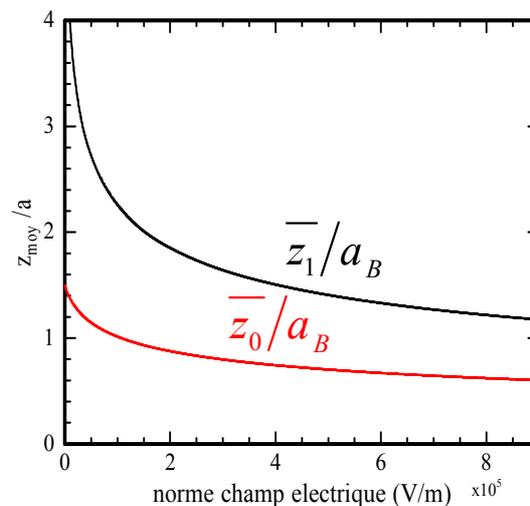


figure 85 : évolution de la distance moyenne électron-hélium en fonction du champ électrique pressant appliqué sur l'électron.  $a_B$  est le rayon de l'atome de Bohr relatif aux électrons sur l'hélium.

Nous présentons ici les courbes attendues lorsqu'aucun champ électrique n'est appliqué sur les électrons et pour un champ de  $4 \cdot 10^5$  V/m. Cette valeur correspond à une valeur typique permettant de piéger facilement les électrons ( $V_{\text{set}}=0.3\text{V}$ ,  $V_{\text{garde}}=-0.1\text{V}$ ,  $V_{\text{resR}}\sim 0.75\text{V}$ ).

Ces courbes montrent clairement que les courbes d'échappement sont bien distinctes les unes des autres même avec un champ pressant assez fort. Cette méthode permet donc de réaliser une mesure projective de l'état du qubit.

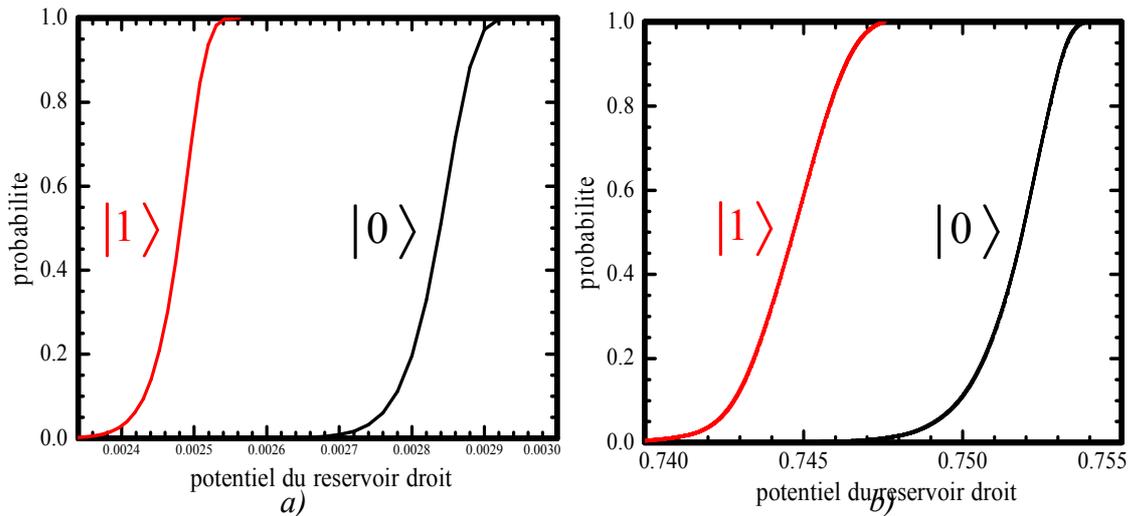


Figure 86 : a) courbes d'extraction pour l'état fondamental lorsqu'un très faible champ électrique est appliqué sur l'électron ( $E \sim 3 \cdot 10^4$  V/m). b) courbes d'échappement théoriques pour des valeurs typiques de  $V_{\text{set}}$ ,  $V_{\text{gate}}$  et  $V_{\text{garde}}$  ( $E = 4 \cdot 10^5$  V/m).

### III.6.2. Courbes d'échappement

#### III.6.2.a. exciter l'électron

Nous avons d'écrit au premier chapitre les mécanismes d'interactions entre le SET et les électrons. Les fluctuations du potentiel de l'îlot entraînent des transitions entre le fondamental et le premier état excité.

Ainsi, en un temps de mélange  $\tau_{mél}$  correspondant au temps de thermalisation dû au SET, l'électron à partir de l'état fondamental se retrouve dans une superposition statistique des deux états. Il est dans l'état  $|1\rangle$  avec une probabilité que l'on appellera  $q$  et dans l'état  $|0\rangle$  avec la probabilité  $1-q$ .

Cette probabilité  $q$  dépend, bien entendu, du temps de mélange (qui est un temps d'excitation)  $\tau_{mél}$  et du temps de relaxation vers l'état fondamental. L'excitation est l'œuvre du SET tandis que la thermalisation résulte des mécanismes d'interactions avec les ripples, les phonons mais aussi avec le SET.

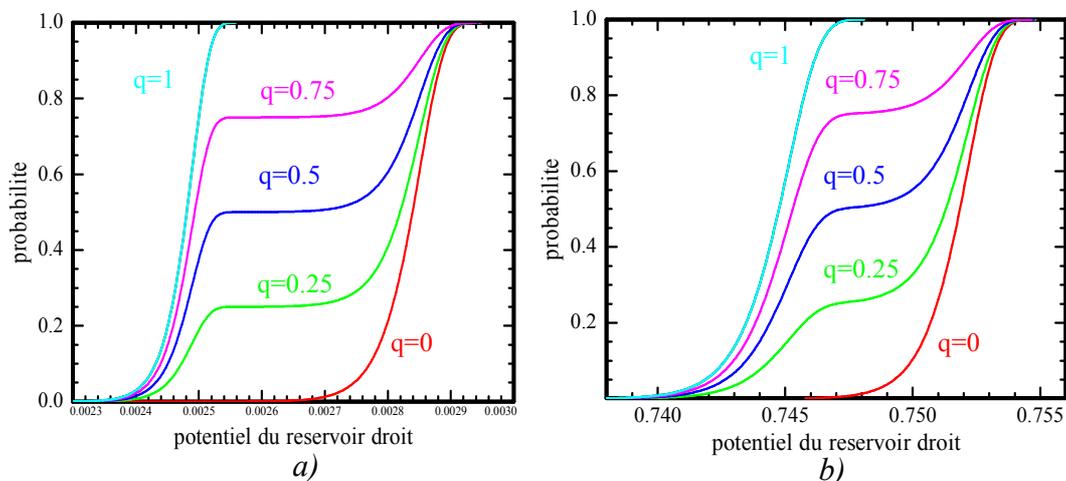
La probabilité d'échappement du puits  $p_{mél}$  est donnée par :

$$p_{mél} = q \cdot p(|1\rangle) + (1 - q) \cdot p(|0\rangle),$$

où  $p(|i = 0, 1\rangle)$  est donnée par l'équation III.6-2.

Nous avons vu au chapitre 1 que le temps de relaxation associé au couplage avec le SET était proportionnel au courant qui traverse le SET. A courant nul, il n'y a pas d'excitation, l'électron

ne peut être que dans l'état fondamental. Lorsqu'on augmente le courant, on diminue le temps de mélange. On peuple le premier état excité.



**Figure 87 :** évolution des courbes d'échappement lorsque la probabilité  $q$  de peupler le premier état excité augmente. a) Pour un champ électrique appliqué sur l'électron très faible ( $\sim 300\text{V/cm}$ ), l'écart entre les états d'énergie est maximal. b) pour des valeurs typiques de potentiels appliqués au  $\square$  électrodes (SET=0.3 V,  $V_{\text{grille}}=0.3$  V,  $V_{\text{élec.garde.}}=-0.1\text{V}$ ) permettant un piégeage facile. L'écart d'énergie entre les niveaux est plus faible, le plateau est moins marqué mais reste clairement visible. le champ électrique est alors de  $4000\text{V/cm}$ .

Les courbes de la Figure 87 font apparaître un plateau caractéristique d'un système à deux niveaux. Même lorsque le champ électrique appliqué sur l'électron est important ( $\sim 4$  kV/cm),

### III.6.2.b. Courbes expérimentales.

Il nous faut évaluer la probabilité d'échappement d'un électron à travers la barrière. Pour ce faire, nous plaçons un électron dans le piège. Le piège est alors suffisamment profond afin que l'électron ne puisse pas s'en échapper spontanément. Les potentiels du SET, de la grille, de l'électrode de garde ainsi que celui du réservoir gauche sont fixes. La valeur du potentiel sur le réservoir droit qui permet de piéger durablement l'électron est appelée  $V_{\text{base}}$ . Nous avons vérifié que  $V_{\text{base}}$  permet de piéger un seul électron durant toute une nuit.

Nous nous intéressons dans un premier lieu à l'évolution des courbes d'échappement avec le courant de chauffage. La séquence expérimentale est présentée Figure 88.

Nous commençons donc par "chauffer" l'électron. Le courant à travers le SET ( $I_{\text{ds}}$ ) prend des valeurs comprises entre 0 (pas de chauffage) et 30 nA.

On applique alors une impulsion 300 ms après le début du chauffage. L'amplitude  $A$  est variable. La durée de l'impulsion  $\tau_{\text{imp}}$  est égale à 2  $\mu\text{s}$ . Cette impulsion réduit la hauteur de la barrière. L'électron peut s'échapper.

Le courant à travers le SET prend alors la valeur utilisée pour la mesure ( $I_{\text{ds}}=2.3$  nA). Le potentiel pris par le réservoir droit est ajusté à une valeur de référence telle qu'on observe un maximum (ou un minimum) des oscillations de blocage de Coulomb lorsqu'un électron est dans le piège. S'il n'y a plus d'électron, l'amplitude des oscillations de Coulomb est alors au

minimum (resp. maximum). Même avec le fort niveau de bruit qui caractérise le SET utilisé dans nos expériences, la différence de signal entre la présence et l'absence d'électron est clairement visible. S'il n'y a plus d'électron, le piège est rechargé. Si l'électron est présent, nous attendons 150 ms à courant nul avant de "chauffer" à nouveau l'électron. Ce temps d'attente permet de s'assurer que l'électron n'est pas "pré-chauffé" par le courant de mesure. Nous avons fait varier ce temps d'attente entre 150 et 1000 ms et comme attendu nous n'avons observé aucune modification des courbes d'échappement. Le potentiel du réservoir droit reprend bien entendu la valeur  $V_{\text{base}}$ .

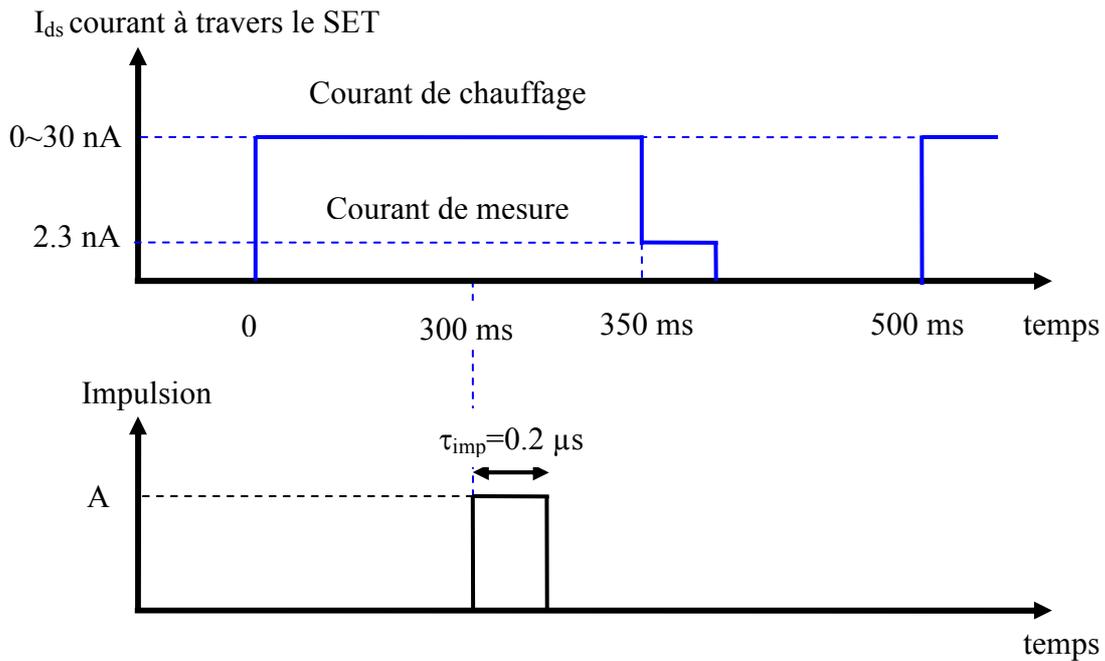


Figure 88 : séquence d'enregistrement des courbes d'échappement.

Pour une amplitude fixée, nous répétons plusieurs fois l'expérience. Nous comptons le nombre de fois où l'électron s'échappe  $N_A^{\text{ext}}$  et le nombre de fois où l'expérience est réalisée  $N_A^{\text{tot}}$ . La probabilité d'échappement est déterminée par l'estimateur :

$$p(A) = \frac{N_A^{\text{ext}}}{N_A^{\text{tot}}}.$$

Les barres d'erreurs, quant à elles, sont déterminées par la relation :

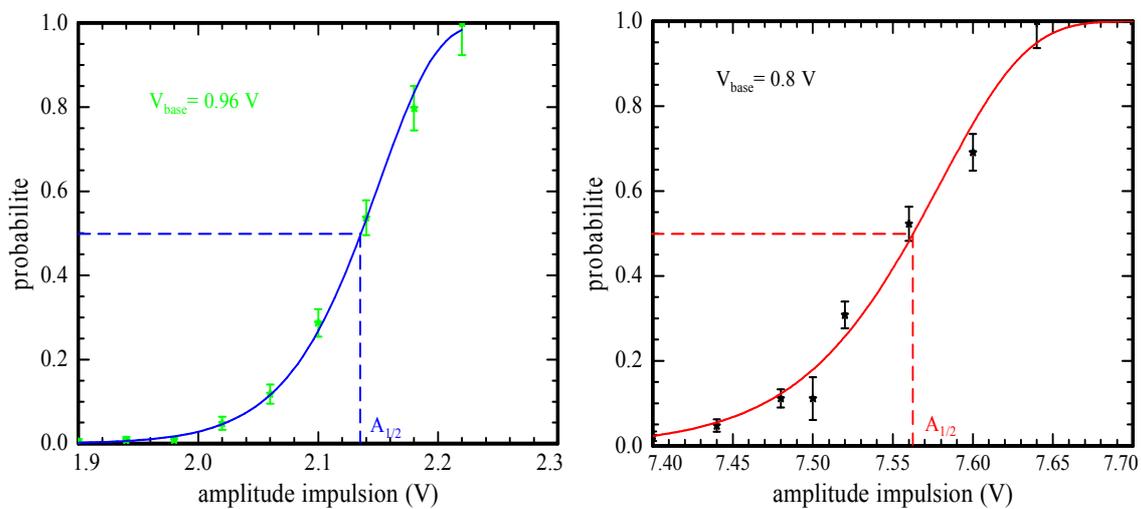
$$\sqrt{\frac{p(A)(1-p(A))}{N_A^{\text{tot}}}}.$$

Afin de comparer courbe expérimentale et simulation, il faut représenter la probabilité d'extraction en fonction du potentiel appliqué sur le réservoir droit. Or, l'impulsion est

appliquée à travers un diviseur. Une mesure précise du facteur de division est nécessaire afin de connaître le potentiel sur le réservoir droit.

Dans les mêmes conditions de température et pour un courant nul à travers le SET, nous enregistrons plusieurs courbes d'échappement pour différentes valeurs de  $V_{base}$ .

Après la correction tenant compte du diviseur, les courbes doivent se superposer. Afin d'obtenir ce coefficient correcteur, nous représentons  $A_{1/2}$ , l'amplitude de l'impulsion pour laquelle la probabilité d'échappement est  $1/2$ , en fonction du potentiel de base sur le réservoir droit.  $A_{1/2}$  est la grandeur pertinente pour caractériser le déplacement des courbes car elle peut être déterminée avec une très grande précision.  $A_{1/2}$  est déterminée par un ajustement. La précision est telle que les barres d'erreur ne sont pas représentables sur la Figure 90. Les variations de  $A_{1/2}$  sont indépendantes du modèle choisi lors de l'ajustement.



**Figure 89 : courbes d'échappement pour deux valeurs différentes du potentiel de base du réservoir droit. ( $V_{base}=0.96$  V. et  $V_{base}=0.80$  V). Les courbes en trait plein sont des ajustement permettant de déterminer  $A_{1/2}$ .**

Les points de la Figure 90 s'alignent parfaitement. Le coefficient directeur permet d'avoir accès à la valeur du diviseur. Le potentiel réel sur le réservoir droit est alors obtenu grâce à la relation :

$$V = V_{base} + \frac{A}{33.9}, \text{ Équation 25}$$

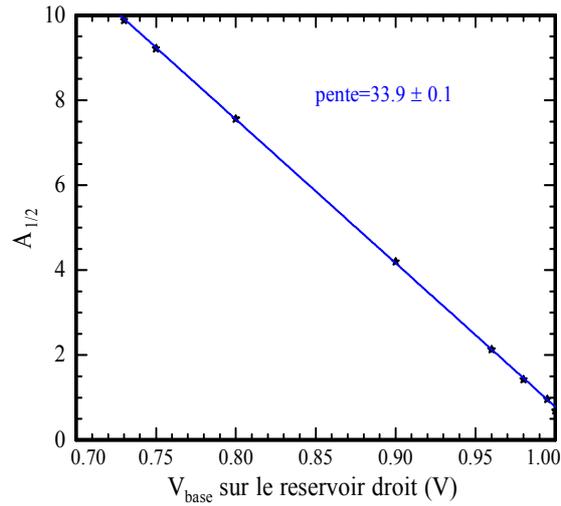


Figure 90 : évolution de  $A_{1/2}$  en fonction du potentiel de base sur le réservoir droit.

L'incertitude sur le coefficient de la droite de la Figure 90 est de 0.3%. Nous négligerons cette incertitude dans le traitement des données.

En appliquant l'équation III-6.3 aux données de la Figure 89, nous obtenons les courbes de la Figure 91. l'objectif a été atteint, les courbes de la Figure 89 ont été normalisées. Elles se superposent.

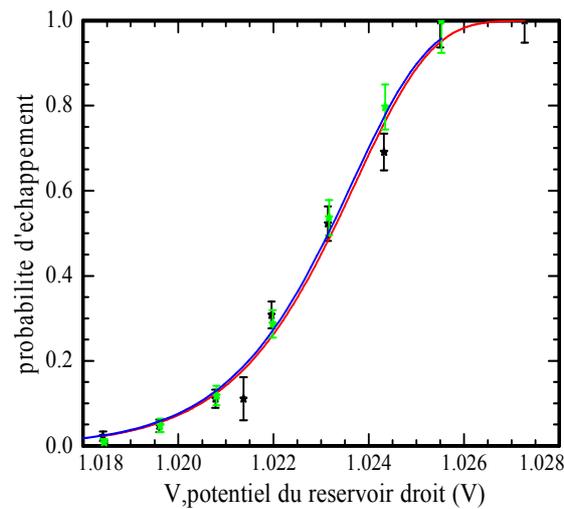


Figure 91 : courbes de la Figure 90 après transformation par la relation III-6.3.

La Figure 92 présente des courbes d'échappement expérimentales pour deux valeurs du courant à travers le SET.

Lorsqu'aucun courant ne circule à travers le SET, on enregistre la courbe rouge. Il s'agit de la courbe de référence. L'électron est dans l'état fondamental.

La courbe turquoise présente une courbe d'échappement lorsque l'électron est "chauffé" par un courant de 20 nA. L'impulsion est appliquée alors que le courant de chauffage circule dans le SET. Elle est appliquée 100 ms après le début du chauffage.

L'augmentation du courant induit un décalage de la courbe vers des potentiels plus faibles. Il devient plus aisé d'extraire l'électron. On observe de plus un élargissement de la courbe d'échappement. En revanche, le plateau traduisant la quantification des états n'apparaît pas.

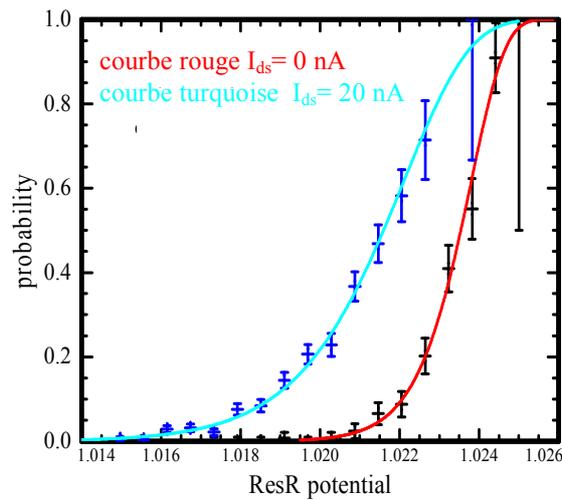


Figure 92 : courbes d'échappement expérimentales. Les points sont les points expérimentaux tandis que les courbes pleines sont des ajustements (voir plus loin dans le texte). Les points noirs ont été enregistrés sans courant à travers le SET alors que 20 nA circulaient lorsque les points bleus ont été enregistré.

### III.6.3. Procédure d'analyse

#### III.6.3.a. Analyse des courbes d'échappement.

L'augmentation de la largeur et le décalage vers les potentiels plus faible peuvent s'interpréter comme une augmentation de la température d'une particule ayant une distribution continue de niveaux accessibles. Nous allons traiter les données expérimentales dans cette optique en recherchant la température de l'électron. Deux arguments peuvent expliquer cette distribution continue d'états d'énergies.

Cela n'est évidemment pas le cas si on se limite aux niveaux perpendiculaires de l'électron. Mais existent aussi les états d'oscillations dans le piège. Les états d'énergie de l'électron peuvent alors être suffisamment proches et donner l'impression d'un spectre en énergie continu.

Par ailleurs, on peut aussi observer un élargissement des niveaux d'énergie si le temps de relaxation est court devant la durée de l'impulsion. En effet, l'électron peut changer plusieurs fois d'état pendant la durée de l'impulsion. La forme du piège se modifiant pendant l'impulsion, les niveaux d'énergie changent. L'électron ne "voit" plus deux états définis mais des bandes d'énergie.

Les fluctuations du champ électrique fournissent de l'énergie à cette particule. Une partie de l'énergie est échangée avec l'environnement. Un équilibre s'établit. On définit une température effective  $T_e$  traduisant cet équilibre.

Dans le cas d'un processus activé thermiquement, le taux d'échappement est indépendant de la géométrie du piège. Il ne dépend que de la hauteur de la barrière:

$$\Gamma = \frac{\omega_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{E_b}{k_B T_e}\right),$$

$E_b$  est hauteur de la barrière (c.f. Figure 84 ) et  $\omega_0/2\pi$  la fréquence d'oscillation du puits. Afin d'obtenir la température de l'électron, il faut connaître avec précision la hauteur de la barrière  $E_b$  ainsi que la fréquence d'oscillation  $\omega_0/2\pi$ .

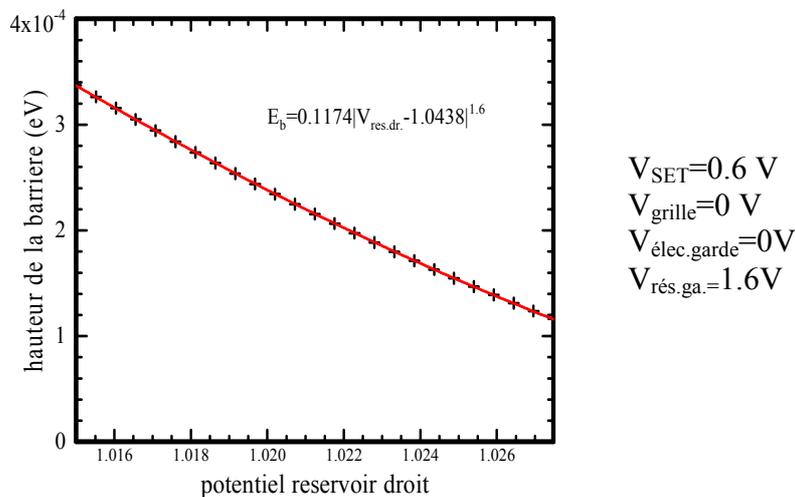
A partir des simulations du profil des potentiels, il est aisé de connaître  $E_b$  quelque soit la valeur  $V_{rés.dr.}$  du potentiel pris par le réservoir droit. Afin d'obtenir une forme analytique, on ajuste les points de la simulation par une courbe de la forme :

$$E_b = E_b^0 |V_{rés.dr.} - V_0|^{1.6}. \text{ Équation 26}$$

La Figure 93 présente l'évolution de la hauteur de la barrière en fonction du potentiel sur le réservoir droit.

$V_0$  est le potentiel qu'il faut appliquer sur le réservoir droit pour faire disparaître la barrière.

$V_0$  et  $E_b^0$  doivent être recalculés pour toutes configurations de potentiels (SET, grille, électrode de garde).



**Figure 93 : évolution de la hauteur de la barrière en fonction du potentiel du réservoir droit. Les points noirs sont issus des simulations tandis que le courbe rouge est un ajustement par l'  $E_b = E_b^0 |V_{rés.dr.} - V_0|^{1.6}$ . Équation 26**

$\omega_0$  est estimé à partir de la simulation. Il varie légèrement  $\omega_0 \sim 40$  GHz. Il s'agit de la fréquence d'oscillation du piège pendant l'impulsion. Les points expérimentaux sont alors ajustés par une courbe d'équation :

$$p(V_{rés.dr.}) = 1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 \Delta t}{2\pi} \exp\left(-\frac{E_b^0 |V_{rés.dr.} - V_0|^{1.6}}{k_b T_e}\right)\right), \text{Équation 27}$$

$\Delta t$  est pris égal à la durée de l'impulsion,  $\Delta t = 0.2 \mu s$ .

Ne reste alors plus qu'un seul paramètre ajustable, la température  $T_e$  de la particule.

*Remarques:*

On utilise couramment le modèle du puits cubique-parabolique (appelé aussi modèle canonique) pour décrire l'échappement d'une particule. Ce modèle s'applique lorsque la fréquence caractéristique du puits  $\omega_0$  est égale à la fréquence caractéristique de la barrière  $\omega_b = \omega_0$ .

En fonction de la position de la particule, la barrière est donnée par :

$$E_b(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x}{x_b}\right),$$

$x_b$  est la position de la barrière.

La hauteur de la barrière prend alors une forme simple [52]:

$$E_b^0(v) \approx 2^{3/2} b_0 \left(1 - \left|\frac{v}{v_0}\right|\right)^{3/2},$$

où  $v_0$  et  $b_0$  sont deux constantes,

et  $v$  le paramètre extérieur qui permet à l'opérateur de modifier la hauteur de la barrière.

Il s'agit du potentiel du réservoir droit dans notre cas.

Cette expression est très proche de l'équation 26 bien que la fréquence de la barrière ne soit pas égale à la fréquence caractéristique du piège dans notre expérience (Figure 94).

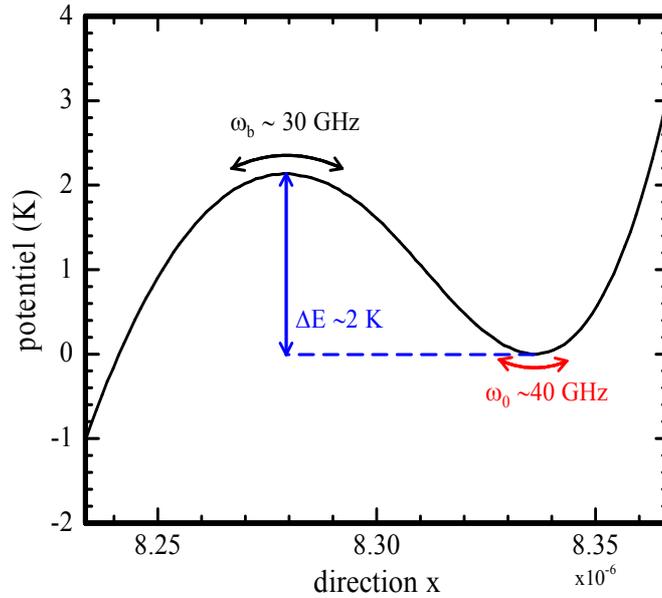


Figure 94 : profil des potentiels dans la direction d'échappement (direction  $x$  cf Figure 83 a) lorsque la probabilité d'échappement est  $\frac{1}{2}$ .

L'échappement s'effectue lorsque la barrière est grande devant la température (Figure 95). Cela est lié au préfacteur qui est grand. La particule oscille très vite par rapport à la durée d'impulsion. Elle peut tenter de traverser la barrière un grand nombre de fois ( $\sim 8000$ ) pendant l'impulsion.

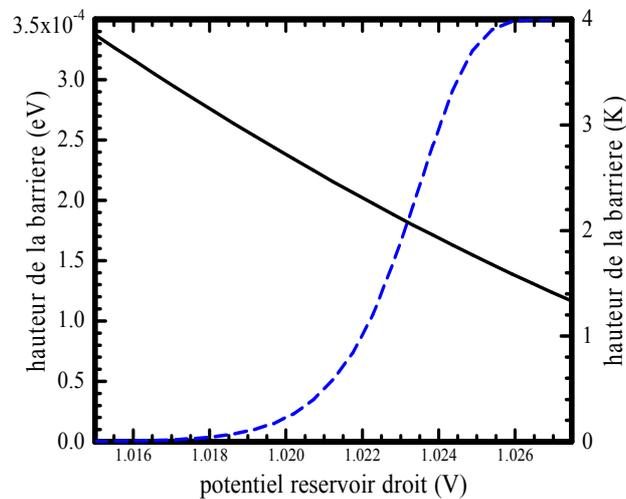


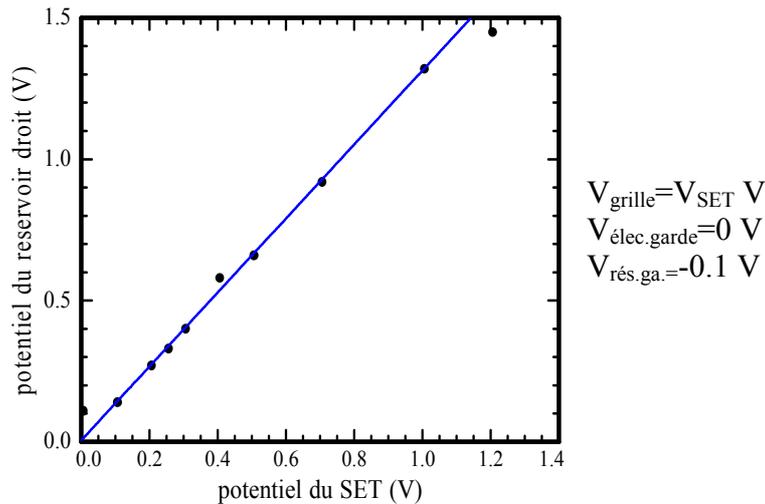
Figure 95 : évolution de la hauteur de la barrière en fonction du potentiel sur le réservoir droit. La hauteur de la barrière est exprimée dans deux unités : à gauche en eV, à droite en Kelvin. En tirets bleus a été superposé la probabilité d'échappement du puits correspondante.

III.6.3.b. pertinence du traitement des données expérimentales.

Lors de l'ajustement des points expérimentaux par l'équation III-6.4, les imprécisions sur la valeur de la barrière se traduiront sur la température effective. Il devient donc nécessaire de juger la qualité des simulations réalisées.

III.6.3.b.i. pertinence du profil des potentiels.

Le bon accord entre le profil des potentiels et l'expérience a déjà mis en évidence au II-B-4.2 lorsque nous avons représenté la valeur prise par le potentiel droit lorsque le dernier électron quitte le piège en fonction du potentiel sur le SET. Cette courbe est une mesure du "couplage" entre l'électron et le réservoir droit et le SET. En tenant compte du potentiel de contact, la simulation reproduit fidèlement ce couplage puisque que les points expérimentaux s'alignent sur la droite issue des simulations (Figure 96).



**Figure 96 : points expérimentaux: potentiel pris par le réservoir droit lorsque le dernier électron quitte le piège en fonction du potentiel appliqué sur le SET. Courbe bleue : potentiel (issus des simulations) pris par le réservoir droit lorsque la probabilité de quitter le piège est ½ en fonction du potentiel sur le SET.**

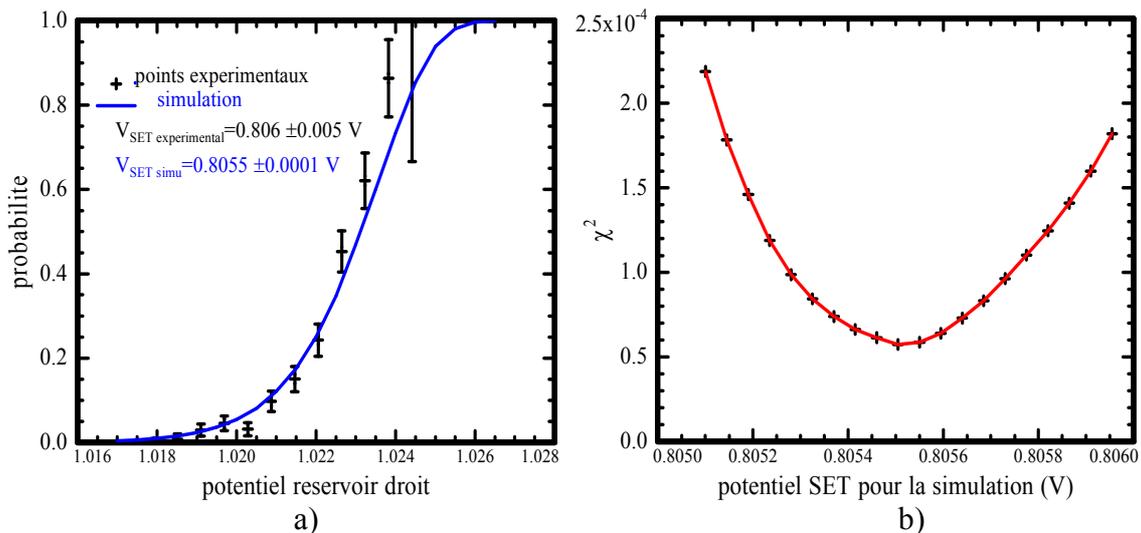
Lorsque la température de l'hélium (de l'environnement) est faible et sans excitation par l'intermédiaire du SET, l'échappement ne peut se faire que par effet tunnel. Nous pouvons directement comparer la courbe d'échappement expérimentale à celle calculée en utilisant les équations III.6-1 et III.6-2. La probabilité est alors donnée par :

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 \Delta t}{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_{\min 1}}^{x_{\min 2}} \sqrt{2m(V(x) - E_{\min})} dx\right)\right).$$

Cette formule ne présuppose aucune modélisation de la barrière. On intègre numériquement le profil de la barrière issue des simulations. Le profil des potentiels est calculé pour différentes valeurs du potentiel du réservoir droit. On répète cette intégration afin de tracer la courbe d'échappement.

Lors du calcul de la barrière, il faut bien entendu tenir compte du potentiel contact. Or celui-ci n'est pas rigoureusement connu. On ajuste alors la valeur du potentiel du SET afin que les courbes expérimentales et théoriques se superposent. Il faut noter que cet ajustement est minime, bien inférieur à la précision avec laquelle le potentiel de contact est mesuré. Dans l'exemple présenté sur la Figure 97, le potentiel réel du SET (potentiel appliqué plus potentiel de contact) est  $0.806 \pm 0.005$  tandis que la valeur utilisée dans la simulation est  $0.8055 \pm 0.0001$ . Cette valeur est obtenue en minimisant le  $\chi^2$ , calculé en tenant compte de l'écart type affecté à chaque point expérimental. La valeur de  $\chi^2$  varie de 10 % sur l'intervalle  $\pm 0.0001$

On observe alors un très bon accord entre la courbe expérimentale et la courbe obtenue grâce aux simulations. Il n'y a aucun paramètre ajustable. La largeur de la courbe expérimentale est parfaitement reproduite par les simulations. Lorsque l'échappement se fait par effet tunnel, la largeur de la courbe est liée à la géométrie du piège.



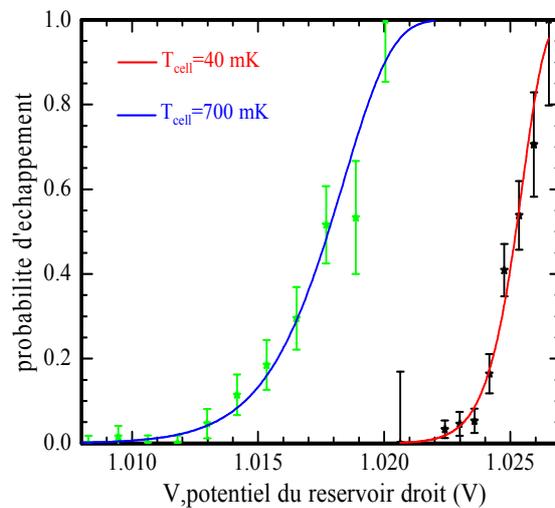
**Figure 97 : a) courbes expérimentales (points noirs) et simulation (courbe bleue). Le potentiel du SET est légèrement ajusté (valeur comprise dans l'intervalle de mesure du potentiel de contact) afin que les deux courbes se superposent. La simulation reproduit fidèlement la largeur de la courbe. Les potentiels sur les différentes électrodes sont les suivants :  $V_{SET}=0.6\ V$ ,  $V_{grille}=0\ V$ ,  $V_{él.garde}=0\ V$ ,  $V_{rés.ga.}=1.6\ V$ . b) variation du  $\chi^2$  lors de la détermination du potentiel du SET.**

### III.6.3.b.ii.

évolution avec la température du film d'hélium.

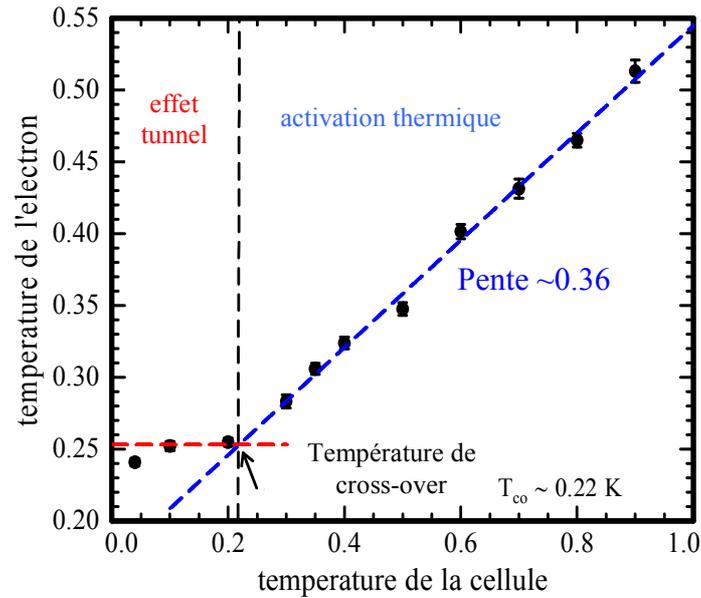
Au vu des résultats précédents, la barrière semble correctement reproduit par les simulations. On peut tester plus finement la méthode d'analyse en étudiant l'évolution des courbes d'échappement avec la température du film d'hélium. Ainsi, nous enregistrons des courbes d'échappement pour des températures de la cellule expérimentale allant de 40 mK à

900 mK. Au-delà le SET ne fonctionne plus. Nous n'avons plus de moyen pour détecter l'électron.



**Figure 98 : courbes d'échappement pour deux températures différentes de la cellule. Les croix sont les points expérimentaux tandis que les courbes sont les ajustements par l'équation II-B.6-4.**

Les courbes expérimentales sont ajustées par l'équation II-B.6-4. Un exemple pour deux températures différentes est présenté Figure 98. Lorsque la température augmente, comme énoncé au paragraphe précédent, on observe un déplacement vers des potentiels plus faibles et un élargissement des courbes. De l'ajustement, on extrait la température effective de l'électron. On représente ensuite la température effective en fonction de la température de la cellule (Figure 99).



**Figure 99 : température effective de l'électron en fonction de la température de la cellule. La température effective est constante tant que la température de la cellule est inférieure à 0.2 K. Ensuite, la température de l'électron augmente linéairement.**

La température effective de l'électron apparaît comme constante tant que la température de la cellule est inférieure à 200 mK. Ensuite, elle augmente linéairement. Le plateau caractérise un échappement par effet tunnel, les fluctuations thermiques et le bruit du SET ( voir plus loin la Figure 105 pour une preuve expérimentale de ce dernier point) étant trop faibles pour y contribuer.

Ce n'est plus le cas lorsque la température augmente. A haute température, le taux d'échappement est principalement dû aux fluctuations thermiques. La température effective de l'électron doit alors augmenter linéairement avec la température de la cellule.

La température de cross-over est définie comme la température pour laquelle le taux d'échappement par effet tunnel devient égal au taux d'échappement dû aux fluctuations thermiques. Sur la courbe expérimentale, cette température correspond à l'intersection entre le plateau et la droite. Elle est égale à 220 mK. De sa définition, nous pouvons extraire la température de cross-over des simulations. Elle est une propriété géométrique de la barrière. Elle est liée à sa forme réelle et spécifiquement à son épaisseur. Le fait que la température mesurée (220 mK) soit très proche de la valeur théorique ( $228 \pm 5$  mK) apporte une preuve supplémentaire de la pertinence du traitement des données et de la qualité des simulations effectuées.

Il existe une expression théorique valable dans le cadre du modèle canonique. La température de cross-over est donnée par :

$$T_{co} = \frac{\hbar\omega_b}{2\pi k_B}$$

Avec  $\omega_b \approx 30$  GHz,  $T_{co} = 0.23$  K ce qui est à nouveau tout à fait compatible avec la mesure.

Néanmoins, la Figure 99 n'est pas entièrement satisfaisante. Le coefficient directeur de la droite devrait être 1 or il s'avère être 0.36.

Nous ne comprenons pas qu'elle en est la raison.

On peut tout d'abord remettre en cause l'approximation d'un échappement unidimensionnel. Au niveau du col, le piège est relativement évasé (Figure 100). On pourrait alors penser qu'il y a des chemins supplémentaires par lesquels la particule peut s'échapper.

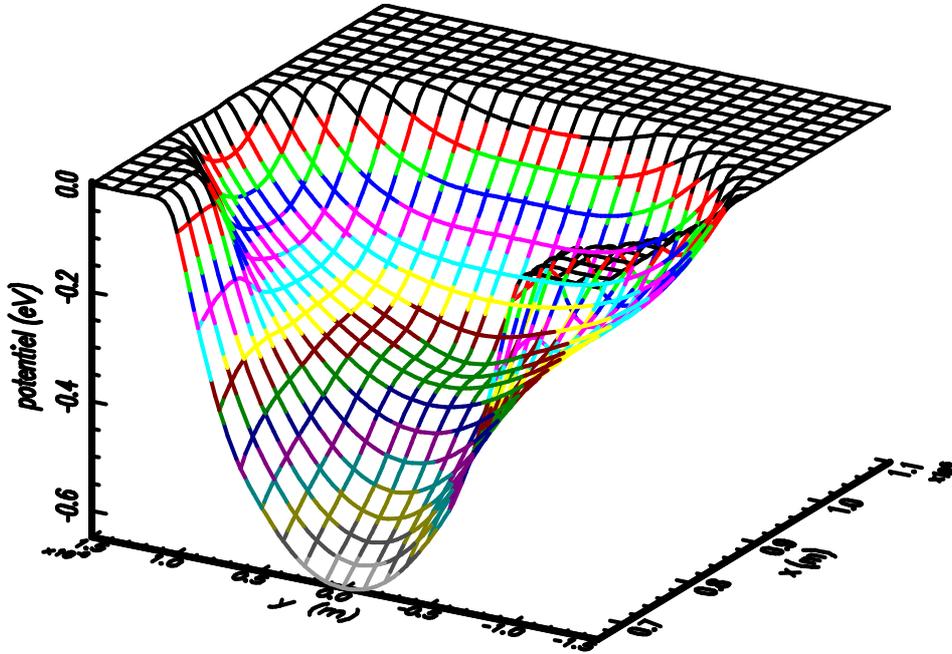


Figure 100 : vue en trois dimensions du piège lorsque la probabilité d'échappement est  $\frac{1}{2}$ .

Lors d'un échappement bidimensionnel, le taux est donné par :

$$\Gamma = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\omega_y}{\omega_b^y} \exp\left(-\frac{E_b}{k_B T_e}\right)$$

où  $\omega_y$  est la fréquence dans la puits dans la direction transverse à l'échappement (direction  $y$  de la Figure 100),

et  $\omega_b^y$  est la fréquence au niveau du point col dans la direction transverse.

En s'appuyant sur les simulations,  $\omega_y$  et  $\omega_b^y$  sont égales à moins de 1% près. Les corrections apportées par le rapport  $\omega_y / \omega_b^y$  sont minimales et négligeables car elles n'affectent que le préfacteur. Elles ne peuvent en aucun cas modifier la pente d'un facteur 3. L'approximation unidimensionnelle se trouve ici justifiée.

Il nous faut donc essayer de comprendre pourquoi la barrière réelle serait trois fois plus importante que la barrière simulée.

Nous avons essayé de tester la pertinence de notre analyse et plus particulièrement la pertinence des simulations numériques. Plusieurs arguments semblent accréditer la méthode.

La température de cross-over expérimentale est égale, aux incertitudes près, à la valeur issue des simulations. Cette valeur est de plus en accord avec le résultat issu du modèle canonique  $T_{co} = \hbar\omega_b/2\pi k_B$ .

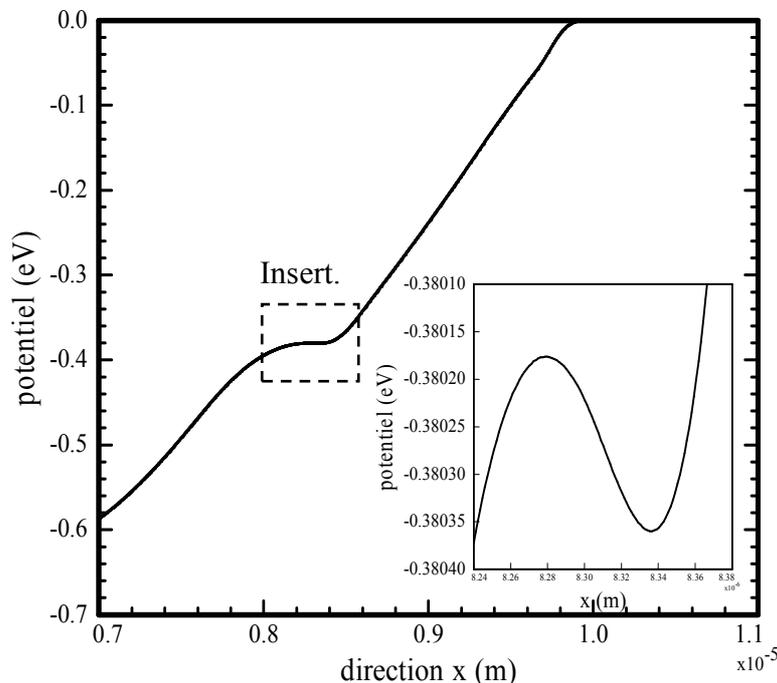
Les courbes d'échappement se superposent parfaitement aux courbes expérimentales si on ajuste très légèrement la valeur du potentiel du SET. Il est à noter que cet ajustement du potentiel du SET est naturel. Il ne s'agit en aucun cas d'un ajustement par convenance, non justifié. L'ajustement du potentiel du SET ne dépasse jamais la plage d'incertitude du potentiel de contact.

La barrière a été testée pour plusieurs couples ( $V_{SET}$ ,  $V_{rés.dr.}$ ). Les points expérimentaux (Figure 96) s'accordent avec les valeurs données par les simulations. Cette vérification permet de tester la hauteur de la barrière pour des variations de  $V_{SET}$  et  $V_{rés.dr.}$  de l'ordre du volt. Le potentiel du SET varie sur la plage [0, 1 V] tandis que le potentiel du réservoir droit varie sur la plage [0, 1.2 V].

L'échappement, pour sa part, a lieu sur des variations plus faibles du potentiel du réservoir droit. Typiquement, il ne varie que de 30mV c'est-à-dire sur une plage trente fois plus petite. Les simulations ne peuvent peut-être pas rendre compte de l'évolution de la barrière pour de si petites variations. Nous nous intéressons à de légères variations sur de très courtes distances (Figure 101). Cela impose aux simulations d'avoir une précision inférieure au pour-mille.

Il est difficile de déterminer la précision exacte des simulations. On l'estime a priori de cet ordre de grandeur. Mais peut-être surestimons-nous cette précision. Nous sommes incapables d'anticiper les conséquences exactes sur la pente de la Figure 99 et si cela peut se traduire par un facteur trois sur la pente.

Le facteur trois semble malgré tout trop important. On devrait en retrouver des traces sur la Figure 94.



**Figure 101 : profil des potentiels lorsque la probabilité d'échappement est  $\frac{1}{2}$ . Le piège (présenté en insert) est plat par rapport à l'ensemble des variations.**

En supposant que la barrière expérimentale est trois fois plus grande que la barrière simulée, cela décale la température de cross-over théorique.

Pour une barrière de profil quelconque,  $E_b(x) = E_b^0 f(x)$ , la température de cross-over est donnée approximativement par (les grandeurs sont définies à la Figure 102):

$$T_{co} \approx \frac{\hbar \sqrt{E_b^0}}{2\alpha \sqrt{2mk_B} \Delta x}$$

où  $0 < \alpha = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \sqrt{f(x)} dx \leq 1$  est un facteur géométrique traduisant l'écart par rapport à la fonction porte.

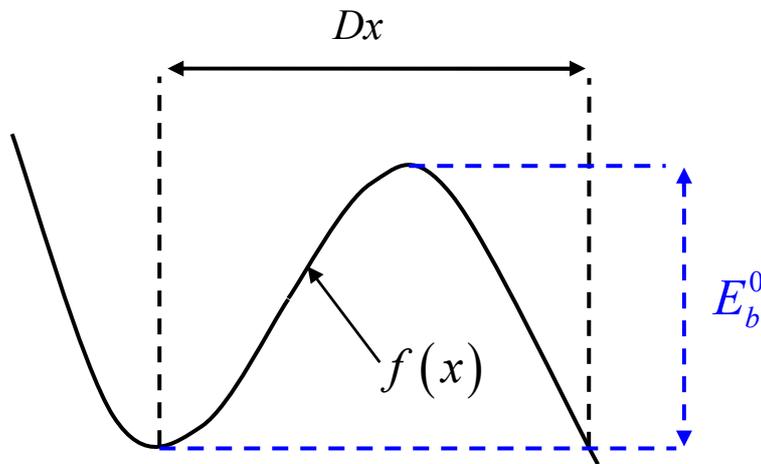


Figure 102 : barrière de profil quelconque. Définition des grandeurs  $\Delta x$ ,  $f(x)$  et  $E_b^0$

La température de cross-over varie donc comme la racine carrée du maximum de la barrière et comme l'inverse de sa largeur.

Si on suppose que l'erreur des simulations ne porte que sur la valeur de la barrière, on doit donc attendre une température de cross-over plus importante que la valeur actuelle :

$$T_{co}' \sim 0.228 \times \sqrt{3} \sim 0.4 K$$

Ce qui est bien entendu supérieur à la valeur mesurée et complètement inexplicable.

Elle devient inférieure à la valeur mesurée si on suppose maintenant que l'imprécision des simulations se reporte sur la barrière et sur la largeur :

$$T_{co}'' \sim 0.228/\sqrt{3} \sim 0.13 K$$

Cette valeur peut être compatible avec les mesures. Il nous suffit de supposer que l'électron est surchauffé par un bruit émanant des électrodes. Mais ce serait vraiment jouer de malchance que le bruit soit tel que la température finale soit égale à la valeur donnée par les simulations.

Il reste une solution tout aussi malchanceuse qui consiste à supposer que les incertitudes sur la hauteur de la barrière compensent celles sur la largeur afin d'obtenir une température de cross-over égale à la température de cross-over mesurée.

On peut aussi supposer que cette pente ait une origine physique (Figure 111).

Nous n'avons pas d'idée sur le mécanisme exact qui refroidirait l'électron. Mais un effet similaire a été observée dans la référence [53]. Lorsqu'il est polarisé au niveau des pics JQP, le SET refroidit l'oscillateur mécanique avec lequel il est couplé. L'électron dans le piège constitue également un système oscillant. Le couplage avec le SET peut peut-être expliquer pourquoi la température de l'électron est inférieure à celle de la cellule expérimentale. Néanmoins suivant la référence 53, l'effet du refroidissement SET dépend fortement du point de fonctionnement ce qui n'a pas été observé dans nos expériences. La pente de la droite est indépendante du courant à travers le SET (Figure 105).

Dans la suite du traitement des données, nous ne corrigerons pas cette pente obtenue expérimentalement.

*Remarque :*

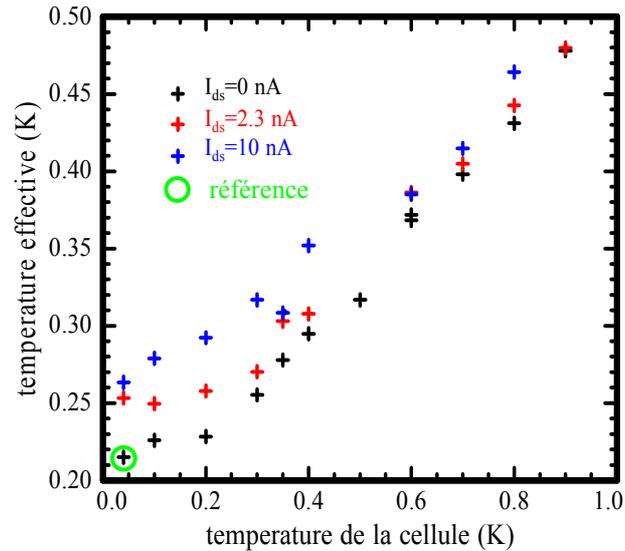
La position des courbes expérimentales n'est pas toujours très stable. Un déplacement global et significatif de la courbe (c'est-à-dire plus grand que la demi-largeur) est parfois observé. Ce déplacement résulte d'une brusque modification du profil des potentiels. Nous avons introduit des diviseurs  $1/10^{\text{ième}}$  à 1 K sur les lignes menant au réservoir droit, à la masse et au SET afin de minimiser des changements de la tension thermique. Nous n'avons observé aucune amélioration. Nous pensons donc que ces effets sont liés à l'échantillon lui-même et à une modification de la distribution des charges superficielles.

### **III.6.4. Estimation du temps de relaxation**

#### *III.6.4.a. température électronique en fonction du courant de chauffage*

Avant de représenter l'évolution de la température de l'électron en fonction de l'intensité du chauffage, il faut s'interroger sur l'influence du courant de chauffage sur la barrière. Nous pouvons estimer le potentiel supplémentaire sur l'îlot induit par un courant de 30 nA.

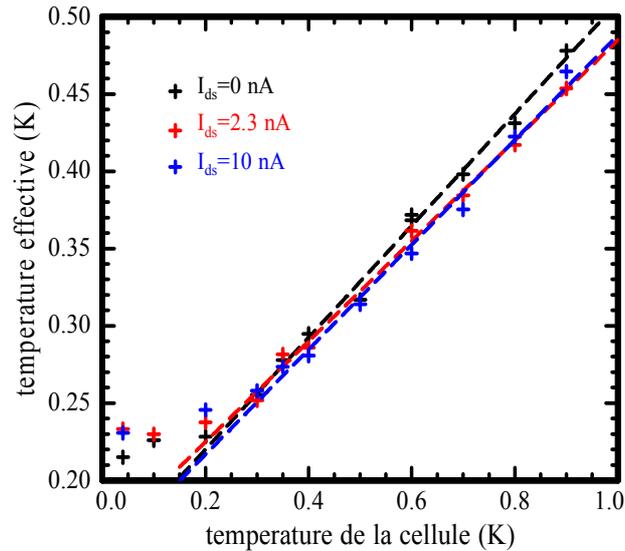
Supposons que les deux jonctions sont identiques. Typiquement la résistance totale du SET est égale à une centaine de kilo-ohm̄ce qui fait 50 k $\Omega$  pour chacune. Ainsi, un courant de 30 nA engendre une augmentation de 3 mV du potentiel de l'îlot. Ceci est non négligeable et doit se traduire, si l'électron reste dans l'état fondamental, par un décalage global des courbes d'échappement. La courbe de la Figure 103 illustre ce point.



**Figure 103 : température effective de l'électron en fonction de la température de la cellule pour trois valeurs du courant de chauffage**

Nous avons représenté la température effective de l'électron en fonction de la température de la cellule pour trois valeurs différentes du courant de chauffage. Lors des ajustements, nous avons utilisé les valeurs de  $E_b^0$  et  $V_0$  trouvées pour la courbe à faible température ( $T=40$  mK) et sans courant ( $I_{ds}=0$  nA) (cercle vert Figure 103). Il s'agit, a priori, de la courbe de référence. Il est intéressant de comparer les courbes rouges et noires. Toutes deux présentent un plateau, la température de cross-over semble identique mais la courbe rouge est décalée de 0.02 K. Le décalage est un artéfact de la procédure d'ajustement. Comme expliqué précédemment, la température effective obtenue corrige les erreurs sur les valeurs de  $E_b^0$  et  $V_0$ . C'est pour cette raison que l'on observe un décalage entre les courbes. La présence du palier indique que l'échappement s'effectue par effet tunnel pour des températures inférieures à 200 mK. La présence du courant modifie légèrement la géométrie de la barrière. On peut vérifier à l'aide des simulations que ces modifications sont très légères, non mesurable dans notre dispositif. Rien ne peut donc expliquer un tel déplacement du plateau si ce n'est l'utilisation de valeurs de  $E_b^0$  et  $V_0$  inappropriées. Comme l'échappement semble toujours être réalisé par effet tunnel aux basses températures, nous allons utiliser la courbe enregistrée à 40 mK comme courbe de référence. Elle permettra de déterminer le potentiel réel sur le SET, potentiel tenant compte du potentiel supplémentaire engendré par le courant. Nous extrairons les valeurs de valeurs de  $E_b^0$  et  $V_0$ . Ces valeurs seront utilisées pour les températures supérieures. Nous ferons de même pour la courbe dont le courant de chauffage est 10 nA bien que le plateau ne soit pas présent (sur la Figure 103).

Les résultats issus de cette analyse sont présentés Figure 104.



**Figure 104 : évolution de la température effective de l'électron en fonction de la température de la cellule. Maintenant les valeurs de  $E_b^0$  et  $V_o$  sont propres à chaque courbes. Les barres d'erreurs étant faibles (de la taille des croix), elles n'ont pas été représentées.**

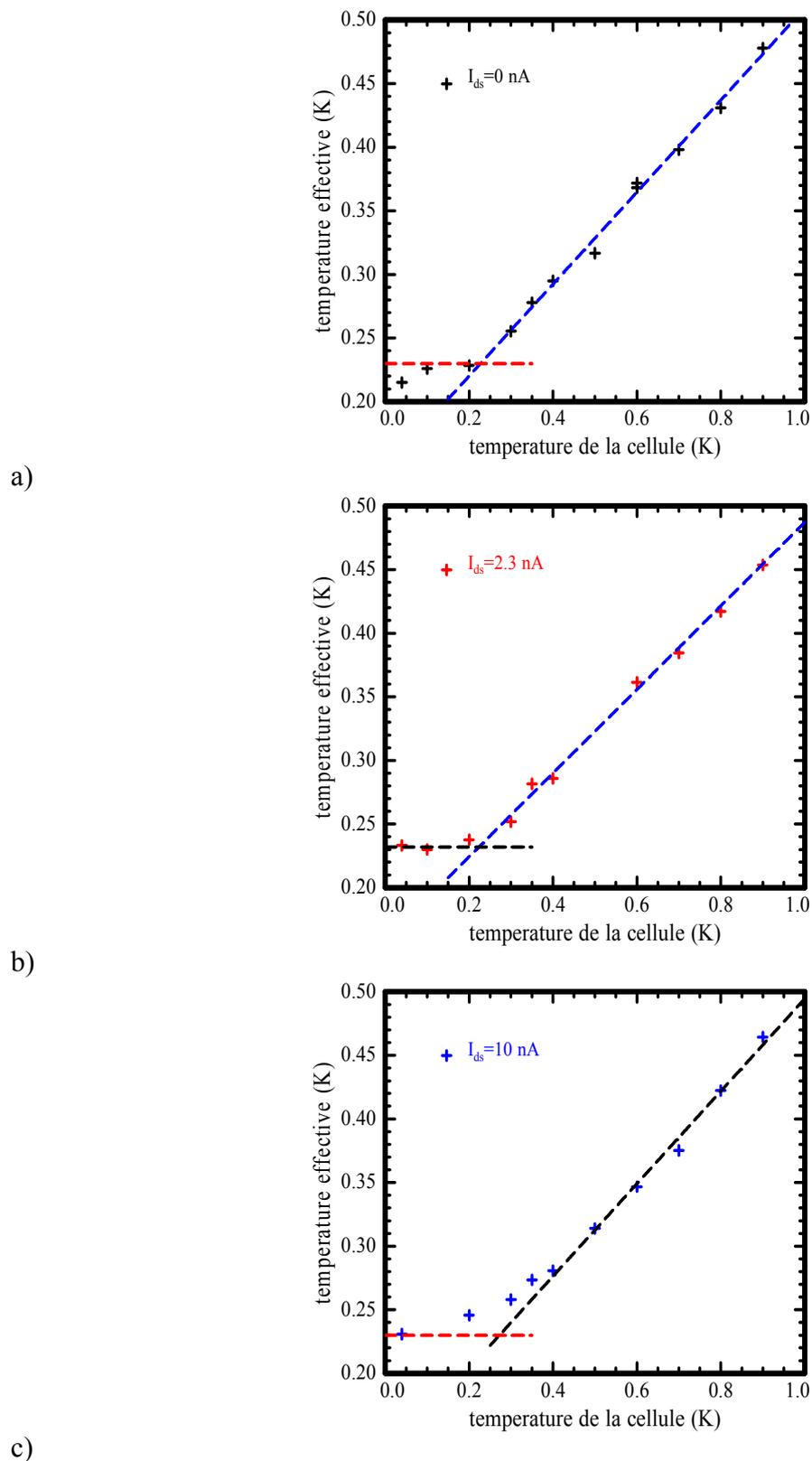
Les résultats sont maintenant plus satisfaisants. Les plateaux se superposent, les températures de cross-over sont compatibles entre elles et avec la position du plateau. De plus, en tenant compte des incertitudes, les pentes des différentes droites sont compatibles (le coefficient directeur de la droite noire et de la bleue sont identiques ( $0,36 \pm 0,02$ ) et celui de la droite rouge est égal à  $0,33 \pm 0,02$ ).

Les effets du courant sur les courbes d'échappement semblent relativement faibles. Ils n'apparaissent pas clairement sur la Figure 104. Représentons séparément les différentes courbes (Figure 105).

La courbe c) est extrêmement intéressante. On peut y observer une augmentation de la température de l'électron, par rapport à la courbe sans courant (courbe a)), dans l'intervalle de température [200 mK, 400 mK]. Aux très basses températures (40 mK), l'échappement s'effectue par effet tunnel. L'augmentation de la température du milieu augmente l'amplitude des fluctuations thermiques. Les fluctuations dues à la présence du courant s'ajoutent aux fluctuations thermiques. Leurs sommes devient alors suffisante pour permettre un échappement. On observe une augmentation de la température effective de l'électron. Au-delà de 400 mK, les fluctuations thermiques deviennent plus grandes que les fluctuations liées au courant. L'échappement apparaît comme étant exclusivement thermique, les points s'alignent sur une droite, de même pente que les données sans courant. L'échappement dépendant exponentiellement des fluctuations, il n'est pas nécessaire que les fluctuations thermiques soient très grandes devant les fluctuations liées au courant pour dominer.

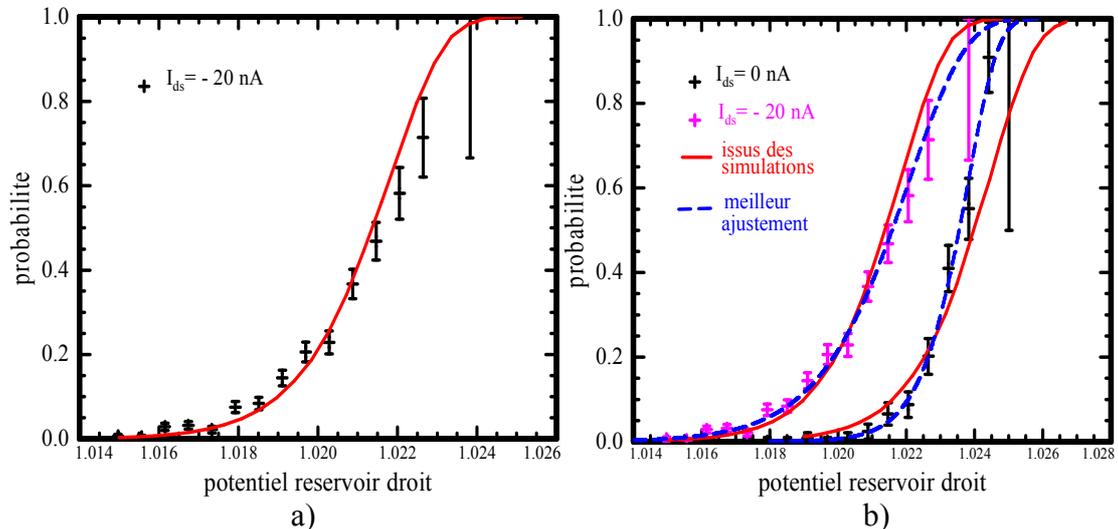
Un courant intermédiaire ( $I_{ds}=2.3$  nA) ne semble pas suffisant pour augmenter le taux d'échappement.

Cette méthode d'analyse est un peu limitée car elle nécessite d'effectuer l'expérience sur toute la gamme des températures [40 mK, 900 mK]. Sans la courbe complète, il est très difficile de conclure. En effet, même lorsque le courant de chauffage est égal à 30 nA, il n'est pas possible d'observer une différence significative entre la largeur de la courbe expérimentale et celle de la courbe issue des simulations.



**Figure 105** : évolution de la température effective de l'électron pour trois valeur du courant. a) pas de chauffage par le SET, le couant  $I_{ds}$  est nul. b)  $I_{ds}=2,3$  nA. c)  $I_{ds}=10$  nA . le courant modifie très légèrement les courbes. Avec un courant de 10 nA, on peut observer une augmentation de la température de l'électron lorsque la température de la cellule est comprise entre 200 mK et 400 mK. Au-delà de 400 mK, l'échappement est à nouveau dominé par les fluctuations thermiques.

La figure 106 présente la courbe expérimentale enregistrée avec un courant de chauffage de 20 nA. Aux points expérimentaux ont été superposés une courbe issue des simulations. Comme précédemment, la valeur du potentiel du SET a été ajustée afin d'obtenir le meilleur accord (minimum du  $\chi^2$ ) entre les deux courbes.



**figure 106 : a) courbe d'échappement (croix) et simulation (courbe rouge) pour un courant de -20 nA. Il n'y a pas de différence significative entre les deux courbes. b) croix noires : courbe d'échappement sans courant de chauffage, croix bleues : avec un courant de -20 nA. Les courbes rouges sont issues des simulations. Les courbes en tirets bleus sont les meilleurs ajustements passant pas les points expérimentaux en faisant varier  $E_b^0$  et  $V_0$ .**

Aucune différence significative n'apparaît entre les points expérimentaux et la courbe issue des simulations (figure 106 a)). Il n'y a pas, non plus, entre la largeur des courbes à 20 nA et à 0 nA.

Ont été représentés sur la figure 106 b), en tirets bleus, les meilleurs ajustements des points expérimentaux obtenus en faisant varier  $E_b^0$  et  $V_0$ . La température effective, qui en est issue, est approximativement 170 mK lorsque  $I_{ds}=0$  et environ 300 mK lorsque  $I_{ds}=-20$  nA. ces valeurs permettent en évidence la difficulté du traitement, outre sa mise en œuvre laborieuse. La température de 170 mK apparaît comme incorrecte. Il est clair que la température effective minimale est 230 mK. Cette différence résulte peut-être d'une modification de la distribution des charges surfaciques qui induit l'ajustement en erreur.

Pour conclure, ces études nous permettent de mettre en évidence une action du SET sur l'électron. L'augmentation de la température est nettement visible sur la Figure 105 c).

Mais cet effet est relativement faible et difficile à quantifier. Le SET chauffe très peu l'électron impliquant un fort couplage entre l'électron et son environnement. Avec un courant de 10 nA, la température maximale de l'électron est 200mK.

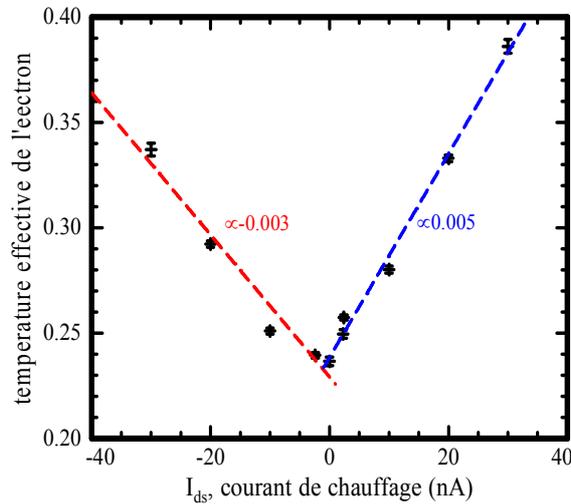
## III.6.4.b.

*quelques remarques sur le traitement des données*

A 40 mK, les courbes d'échappement varient peu avec le courant à travers de chauffage.

La difficulté du traitement des données consiste à faire la différence entre la contribution provenant d'un décalage du potentiel du SET de celle due à l'augmentation réelle de la température de l'électron.

Ce commentaire est illustré par la Figure 107. Les courbes d'échappement ont été enregistrées à 40 mK. Nous avons utilisé des valeurs fixes pour  $E_b^0$  et  $V_0$ , valeur obtenue pour la courbe sans courant. On observe une augmentation linéaire de la température avec le courant. Cette augmentation est un artefact car la modification du potentiel du SET avec le courant n'a pas été pris en compte. Ce que nous cherchons, l'augmentation réelle de la température de l'électron avec le courant, est une déviation par rapport à cette droite. Les données à 40 mK ne permettent pas de mettre en évidence une telle déviation.



**Figure 107 : évolution de la température électronique en fonction du courant de chauffage sans tenir compte des variations du potentiel du SET.**

Il pourrait être intéressant d'extraire des courbes d'échappement une grandeur ne dépendant que de la température.

La largeur des courbes semble plus pertinente. Elle augmente linéairement avec la température.

On peut tout d'abord regarder la pente de la courbe au point  $V_{1/2}$  où la probabilité est  $1/2$ .

Elle est donnée par :

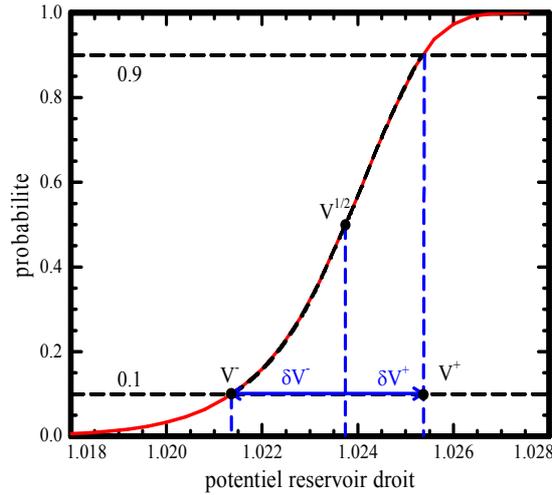
$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{V_{1/2}} = - \frac{\ln 2}{2k_B T} \left. \frac{\partial E_b}{\partial V} \right)_{V_{1/2}} .$$

La pente de la courbe d'échappement varie comme l'inverse de la température. Mais cette grandeur présente plusieurs désavantages. Tout d'abord, une détermination absolue de la température nécessite une modélisation de l'évolution de la barrière avec le potentiel sur le réservoir droit. La situation semble identique à la précédente. A ceci près que l'on peut

raisonnablement estimer que  $\partial E_b / \partial V)_{V_{1/2}}$  est indépendant du potentiel sur le SET. un point expérimental à basse température permet d'obtenir sa valeur.

Néanmoins, la détermination expérimentale de  $\partial p / \partial V)_{V_{1/2}}$  est peu précise.

Plutôt que la pente, il pourrait alors être plus intéressant de s'intéresser à  $\Delta V$  la largeur de la courbe définit comme la différence entre le potentiel  $V^+$ , pour lequel la probabilité est 0.9, et  $V^-$ , le potentiel pour lequel la probabilité est 0.1.



**Figure 108 :** définition des grandeurs  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $\delta V^+$ ,  $\delta V^-$  et  $\Delta V = V^+ - V^- = \delta V^+ - \delta V^-$ .

On définit aussi  $\delta V^+$  et  $\delta V^-$  comme l'écart de  $V^+$ ,  $V^-$  à  $V_{1/2}$ . on peut raisonnablement supposer que  $\delta V^+$  et  $\delta V^-$  sont petits devant  $V_{1/2}$ .  $\Delta V$  se réécrit alors :

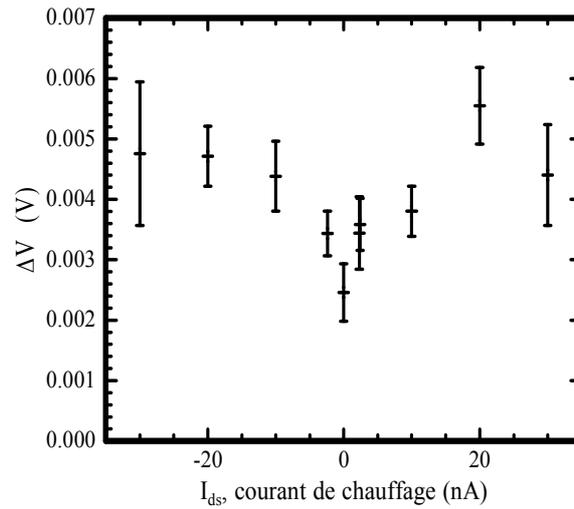
$$\Delta V = \frac{k_B T}{\partial E_b / \partial V)_{V_{1/2}}} \ln \left( \frac{\ln 90}{\ln 10} \right).$$

Cette relation augmente linéairement avec la température mais, à nouveau, la détermination de la température nécessite une modélisation de l'évolution de la barrière avec le potentiel du réservoir droit. Comme précédemment et pour les mêmes raisons, un point expérimental peut permettre un étalonnage.

Elle apparaît de plus beaucoup plus précise. Elle ne dépend que du logarithme des points de référence. Une erreur sur la détermination de ces points se répercute peu.

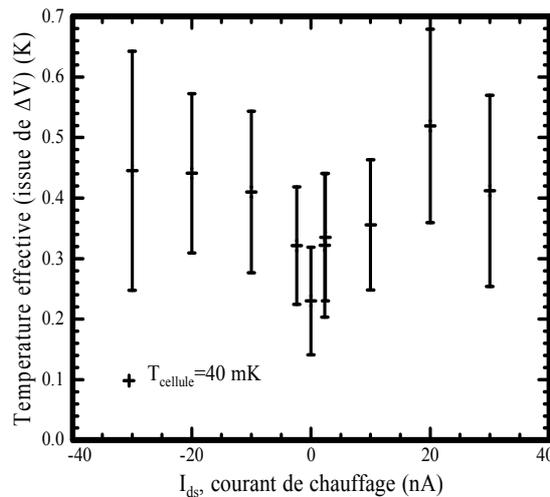
La Figure 109 présente l'évolution de la largeur des courbes d'échappement en fonction du courant à travers le SET. La valeur de la largeur en courant nul,  $\Delta V(I_{ds} = 0)$ , est utilisée comme valeur de référence. Nous normaliserons les températures par 230 mK :

$$T_e = 0.23 \frac{\Delta V}{\Delta V(I_{ds} = 0)}$$



**Figure 109 : évolution de la largeur des courbes d'échappement en fonction du courant de chauffage. (mêmes données que la Figure 107)**

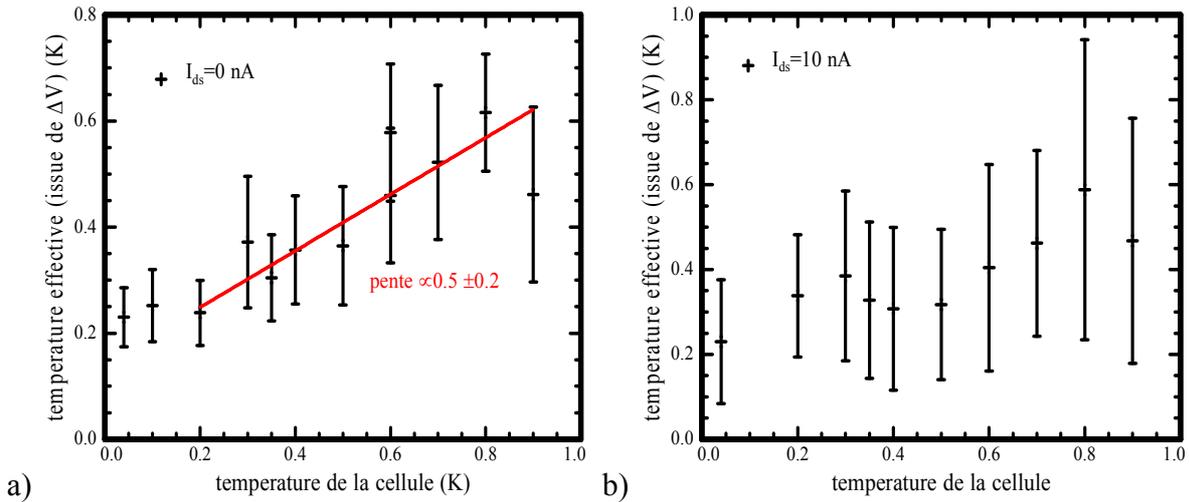
On obtient alors la courbe de la Figure 110. L'augmentation des barres d'erreur provient de l'indétermination existante sur le point de référence  $\Delta V(I_{ds} = 0)$ .



**Figure 110 : évolution de la température effective de l'électron en fonction du courant à travers le SET.**

Les résultats issus de cette méthode sont compatibles avec ceux issus de la méthode s'appuyant sur les simulations. L'augmentation de la température est très faible même avec un courant de 30 nA.

Cette méthode reste moins précise que la méthode s'appuyant sur les simulations. Par exemple, elle ne peut pas mettre en évidence les modifications de la courbe c) de la Figure 105 par rapport à la figure a). Il faut noter que le coefficient directeur de la droite est encore inférieur à 1 et compatible avec la valeur 0.36 des Figure 105. Sa valeur semble avoir une origine physique et ne pas être un artefact de la procédure d'analyse.



**Figure 111 : évolution de la température effective en fonction de la température de la cellule expérimentale pour deux valeurs du courant de chauffage. La température effective est issue de  $\Delta V$ . a)  $I_{ds}=0$ , à comparer avec Figure 105 a). A noter que le coefficient directeur de la droite est compatible avec ceux de la Figure 105. b)  $I_{ds}=10$  nA, à comparer avec Figure 105 c).**

C'est dans le but de bénéficier de la précision de la méthode s'appuyant sur les simulations que nous avons préféré cette analyse laborieuse plutôt que la méthode s'appuyant sur  $\Delta V$ . La précision repose sur le fait que l'ajustement s'appuie principalement sur la recherche du centre de la courbe ( $V_{1/2}$ ) et peu sur la largeur. Néanmoins, le centre de la courbe dépend fortement du potentiel sur le SET. Un étalonnage n'est pas possible. La détermination de la température passe par une paramétrisation de la barrière. La valeur des paramètres dépend malheureusement fortement du potentiel du SET.

#### III.6.4.c. *estimation du temps de relaxation*

Nous allons maintenant essayer d'estimer, tout au moins donner une borne supérieure du temps de thermalisation.

Supposons que seuls deux états d'énergie sont accessibles à l'électron. Cela peut-être les états verticaux (ceux qui nous intéressent en vue de la réalisation du qubit) ou les états horizontaux, d'oscillations dans le piège.

Nous ne les avons pas encore considérés pour l'instant mais il n'est pas improbable que le SET les excite aussi.

Appelons  $\tau_e$ , temps d'excitation, le temps moyen que l'électron passe dans l'état fondamental et  $\tau_d$ , temps de désexcitation, temps moyen que l'électron passe dans le premier état excité (Figure 112).

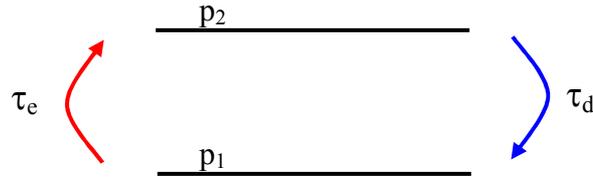


Figure 112 : définition des grandeurs  $\tau_e$ ,  $\tau_d$ ,  $p_1$ ,  $p_2$

Si on suppose l'équilibre thermique atteint, les probabilités vérifient la relation suivante :

$$p_2 \tau_e = p_1 \tau_d .$$

Cette relation néglige toute émission spontanée ce qui est raisonnable car le temps de thermalisation apparaît comme plutôt court.

Le rapport des probabilités est donné par le facteur de Boltzmann. On est alors en mesure de relier les temps d'excitation et de désexcitation à la température :

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{k_B T_e}\right),$$

où  $\hbar\omega_0$  est l'écart énergétique entre les deux états,

$$\frac{\tau_d}{\tau_e} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{k_B T_e}\right).$$

L'excitation est l'œuvre du SET alors que la désexcitation résulte des effets combinés du SET et de l'environnement. Ainsi,

$$\tau_e = \frac{1}{2\Gamma_{SET}} \text{ et } \tau_d = \frac{1}{2(\Gamma_{SET} + \Gamma_{env})} .$$

Le taux de relaxation dû à l'environnement est alors donné par :

$$\Gamma_{env} = \Gamma_{SET} \left( \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T_e}\right) - 1 \right).$$

Si on se réfère à la Figure 105 c) la température de l'électron semble être voisine de 200 mK.

Nous supposons donc qu'un courant de 10 nA chauffe l'électron à 200 mK.

Le taux d'excitation peut s'écrire en fonction du courant à travers le SET

$$\Gamma_{SET} = \frac{e^2 l_d^2}{\hbar^2} \frac{r_{SET}^2}{C^2 d^4} \left( \frac{2e^2 \tau_t}{\omega_0^2 \tau_t^2 + 1} \right) = 2 \frac{e^5 l_d^2}{\hbar^2} \frac{r_{SET}^2}{C^2 d^4} \frac{|I_{ds}|}{\omega_0^2 e^2 + I_{ds}^2}.$$

$C=10^{-17}$  F est la capacité du SET,  $d=100$  nm la distance hélium-SET,  $r_{SET}=500$  nm est le rayon du SET et la  $l_d$  est la longueur dipolaire.

Si on considère les états verticaux,  $l_d = 4.25$  nm et est quasiment indépendante du champ électrique appliqué sur l'électron. Le champ électrique pressant est assez fort, environ  $10^5$  V/m, ce qui implique :

$$\hbar\omega_0 \approx 1.75 \text{ K},$$

alors,

$$\Gamma_{env} \geq 37.10^6 \text{ s}^{-1},$$

ce qui donne un temps de thermalisation inférieur à 0.03  $\mu$ s.

Si maintenant nous supposons que les états excités sont les états d'oscillations dans le piège, les valeurs numériques sont les suivantes :

$l_d = 20$  nm,  $l_d$  est calculé en résolvant numériquement l'équation de Schrödinger pour la géométrie particulière du piège. La valeur de la longueur dipolaire donnée correspond au couplage des deux premiers états d'oscillation.

L'écart énergétique entre ces deux états est 2 K (40 GHz).

$$\Gamma_{env} \geq 2.2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Ce qui donne un temps de relaxation inférieur à 0.4 ns.

Ces temps de thermalisation apparaissent très courts. Mais, il faut relativiser leur valeur absolue car elle repose sur des estimations (à partir de simulations numériques) de certaines grandeurs, notamment l'écart énergétique. La dépendance avec l'écart énergétique est exponentielle. Une faible erreur entraîne alors de grande variation sur la valeur du temps de relaxation.

Au vu des valeurs des longueurs dipolaires, il semblerait que les transitions s'effectuent préférentiellement entre les états parallèles.

En effet, si on calcule le rapport des taux d'excitation des niveaux parallèles sur le taux d'excitation des niveaux perpendiculaires, l'écart énergétique étant sensiblement le même, le rapport ne dépend que du rapport du carré des longueurs dipolaires:

$$\frac{\Gamma_{SET}^{\parallel}}{\Gamma_{SET}^{\perp}} = \frac{l_d^{\parallel 2}}{\omega_{\parallel}^2 e^2 + I^2} \frac{\omega_{\perp}^2 e^2 + I^2}{l_d^{\perp 2}} \approx \left( \frac{l_d^{\parallel}}{l_d^{\perp}} \right)^2 = 22$$

On s'aperçoit alors qu'il est 20 fois plus probable d'exciter les niveaux parallèles plutôt que les niveaux perpendiculaires.

Il n'y a pas encore de théorie prédisant le temps de relaxation des états de vibration d'un électron dans un piège électrostatique. On ne peut donc pas comparer la valeur trouvée à une valeur théorique.

III.6.4.d. *mesure directe du temps de thermalisation*

Nous allons maintenant essayer de mesurer directement le temps de relaxation, que ce soit celui des états perpendiculaires ou horizontaux.

Pour ce faire, nous "chauffons" l'électron avec un fort courant à travers le SET (typiquement nous avons utilisé 50 nA). Nous coupons le chauffage. Après une durée  $\tau$  de l'ordre de la micro seconde, nous appliquons l'impulsion sur le réservoir droit. On extrait ensuite de l'ajustement la température effective de l'électron. On attend une décroissance exponentielle de la température avec une constante de temps égale au temps de relaxation de l'électron.

Le couplage avec le SET a le grand avantage de permettre une excitation de l'électron sans utilisation d'un champ micro-onde à la fréquence de transition. En revanche, être certain que le SET n'excite pas l'électron est moins évident. Il faut être certain que le courant à travers le SET est nul. Couper le courant ou court-circuiter le SET (à température ambiante) n'est pas suffisant. Il existe une tension thermique aux bornes du SET, résultat de la non-symétrie parfaite du câblage. Cette tension charge les câbles. Leur capacité est suffisamment grande pour que la charge soit de l'ordre de la milliseconde. Lorsque les mesures réclament une constante de temps bien plus petite, il est préférable de maintenir constante la tension aux bornes du SET afin d'éviter cette charge. Pour ce faire, nous avons introduit un condensateur de grande capacité  $C=10\mu\text{F}$ . Le schéma d'alimentation du SET (Figure 113) s'en est trouvé modifié:

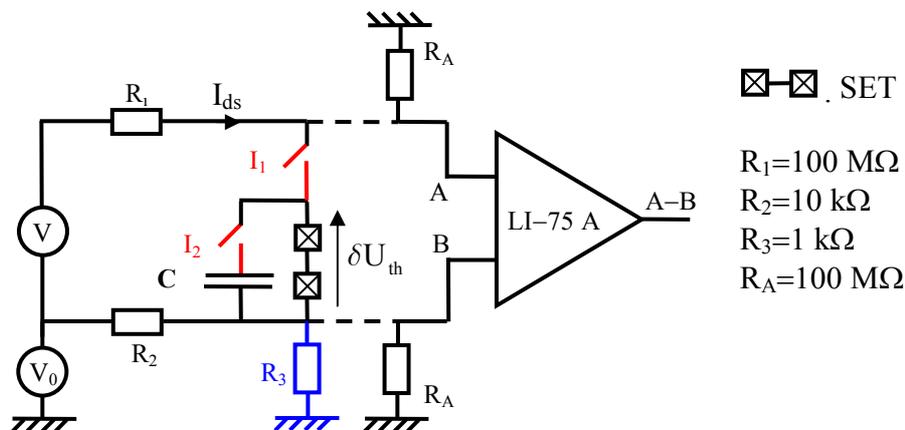


Figure 113 : schéma d'alimentation du SET modifié. Le diviseur  $1/10^{\text{ième}}$  est réalisé entre la résistance  $R_2$  et  $R_3$ . Deux interrupteurs ( $I_1, I_2$ ) ont été ajoutés ainsi qu'un condensateur ( $C$ ). Les interrupteurs sont situés à température ambiante.

La séquence sera la suivante (Figure 114):

On charge le condensateur avec la tension thermique  $\delta U_{th}$  aux bornes du SET.  $I_1$  est ouvert, aucun courant ne circule.  $I_2$  est fermé, le condensateur se charge.

$I_1$  est fermé. On chauffe l'électron ( $I_{ds} \neq 0$ ).  $I_2$  est ouvert.

On ouvre  $I_1$  et on ferme  $I_2$ . Le courant à travers le SET est nul. La tension aux bornes de C, ainsi qu'aux bornes du SET, reste constante et égale à la tension de charge du condensateur ( $\delta U_{th}$ ). On applique l'impulsion sur le réservoir droit.

On ferme  $I_1$  et on ouvre  $I_2$ . On établit le courant de mesure dans le SET. on vérifie la présence ou non de l'électron.

Comme précédemment, la durée de l'impulsion est  $0.2 \mu s$ . Lors de la détection de l'électron (4), le potentiel du réservoir est ajusté afin d'être situé sur un maximum ou un minimum des oscillations de Coulomb.

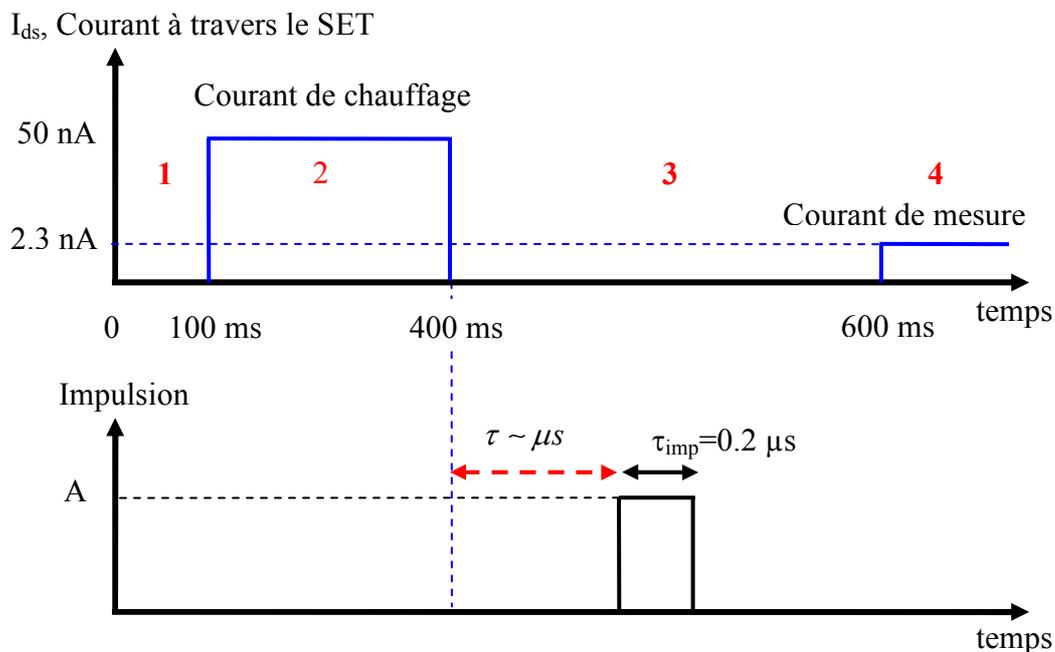


Figure 114 : séquence temporelle du chargement du condensateur et de l'application de l'impulsion.

Le courant à travers le SET passe par des filtres haute fréquence. Leur constante de temps est environ  $0.4 \mu s$ . Il convient donc d'appliquer l'impulsion après ces  $0.4 \mu s$ .

Nous avons tout d'abord réalisé cette expérience dans des conditions permettant un piégeage aisé de l'électron. Typiquement sous les conditions suivantes,

$$\begin{array}{lll}
 V_{set}=0.6 \text{ V} & V_{grille}=0 \text{ V} & V_{él.garde}=0 \text{ V}, \\
 V_{set}=0.3 \text{ V} & V_{grille}=0 \text{ V} & V_{él.garde}=-0.1 \text{ V}, \\
 V_{set}=0.3 \text{ V} & V_{grille}=0.3 \text{ V} & V_{él.garde}=-0.1,
 \end{array}$$

il est aisé de piéger un électron.

Le système électronique est stable. Un fort champ électrique maintient l'électron dans le piège. Malheureusement, la courbe d'échappement redevenait identique à celle sans chauffage en un temps non mesurable.

Nous avons vu au premier chapitre qu'augmenter le champ électrique diminuait le temps de relaxation. Nous avons donc cherché à minimiser le champ électrique appliqué sur l'électron. Le piégeage est devenu moins évident. Sans que nous ne sachions vraiment pourquoi, la couche électronique entière est devenue instable. Rapidement nous perdions tous les électrons. Réaliser toute une série de mesure avec la même répartition de charges surfaciques devenait alors très difficile. La relation de cause à effet, réduction du champ électrique-déstabilisation de la couche électronique, n'est pas évidente. Le champ électrique n'est modifié que localement (dans l'anneau). Cela ne devrait pas perturber toute la couche électronique. Il pourrait être plus facile de perdre l'électron dans le piège mais pas tous les électrons au-dessus de l'échantillon.

Néanmoins les paramètres suivants, nous ont permis de réaliser l'expérience :

$$V_{\text{set}}=0 \text{ V} \quad V_{\text{grille}}=0 \text{ V} \quad V_{\text{él.garde}}=-0.1 \text{ V}.$$

Le champ électrique sur l'électron est alors d'environ 500 V/cm alors qu'il était de l'ordre de 4000 V/cm dans les conditions précédentes.

Là encore, nous n'avons pas mesuré de temps de relaxation supérieur à la constante de temps des filtres. Si nous appliquons l'impulsion après des durées plus courtes que la constante de temps (le courant de chauffage à travers le SET n'est pas nul), nous enregistrons la courbe de la Figure 115. la température effective de l'électron diminue. Un ajustement exponentiel des points expérimentaux montre que la décroissance s'effectue avec temps caractéristique de 0.4  $\mu\text{s}$ , égal à la constante des temps des filtres. Il nous est impossible de mettre en évidence le moindre effet dû à la relaxation. Le temps de relaxation est inférieur, peut-être même largement inférieur, à 0.4  $\mu\text{s}$ .

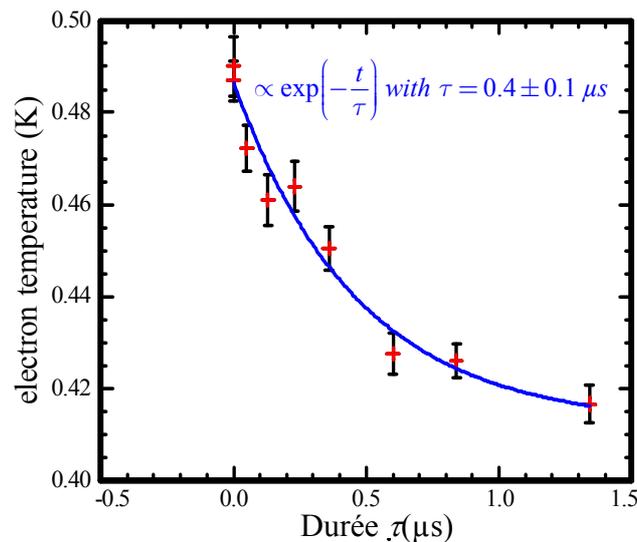


Figure 115 : évolution de la température de l'électron en fonction de la durée  $\tau$ .

*III.6.4.e. Comparaison avec les estimations.*

Les deux mesures concordent. Le résultat direct donne un temps de relaxation inférieur, voire même très inférieur à  $0.4 \mu\text{s}$  tandis que le résultat indirect donne un temps de relaxation de l'ordre de  $0.03 \mu\text{s}$ .

Ces valeurs semblent plus faibles que les valeurs calculées dans le cadre de l'approximation adiabatiques. On attend un temps de relaxation supérieur à  $0.1 \mu\text{s}$  même pour un champ électrique important.

Reste la désexcitation par un mécanisme mettant en jeu deux riplons de courte longueur d'onde. Si comme pressenti le confinement n'augmente pas le temps de relaxation, on doit attendre un temps de thermalisation de l'ordre de  $0.01 \mu\text{s}$ . Cette valeur est alors en accord avec les mesures.

## Conclusion

*“On construit la science avec des faits comme une maison avec des pierres. Mais une accumulation de faits n’est pas plus une science qu’un tas de pierres n’est une maison”*

Henri Poincaré

Les principaux acquis de ce travail sont la manipulation et le piégeage d’un électron unique, ou d’un petit nombre connu d’électrons, dans un anneau bien localisé. Les propriétés statistiques d’un électron unique de l’échappement de l’électron hors du piège ont été étudiées.

La mise en ordre des données expérimentales s’est appuyée sur une simulation du profil du piège. Elle est apparue nécessaire afin d’obtenir un chiffre, le temps de relaxation.

Malheureusement, trop de paramètres interviennent pour juger réellement de sa perspicacité. Elle semble tout à fait satisfaisante sur plusieurs points. Elle décrit correctement la barrière lorsque les potentiels des électrodes varient sur des plages assez grandes (Figure 96). La température de cross-over ainsi que la largeur des courbes sont reproduites.

Néanmoins, contrairement à l’intuition, les simulations semblent indiquer que la température de l’électron est toujours inférieure à celle de la cellule expérimentale (Figure 105). Diverses hypothèses ont été envisagées pour rendre compte de cet état de fait mais aucune ne paraît vraiment satisfaisante.

Il est fort possible que le système formé par l’électron unique et le SET, en assez fort couplage dans ce travail, soit plus compliqué qu’envisagée ici et que des comportements du genre de ceux décrit par Naik et al [53] puissent exister. Il reste de tout cela que l’analyse des expériences est malaisée et que la non-observation des marches dans les courbes de probabilité d’échappement provenant des deux états du qubit est inexplicable.

Des mesures directes, il est apparu que le temps de relaxation est court et inférieur à la valeur calculée dans le cadre de l’approximation adiabatique. Reste l’hypothèse de la désexcitation par émission de deux ripples de courtes longueurs d’onde, hypothèse qu’un calcul exact en géométrie confinée doit étayer.

D’un point de vue expérimental, un SET moins bruyant rendrait l’expérience plus aisée. La détection synchrone deviendrait inutile. L’état du qubit pourrait être directement mesuré avec le SET.

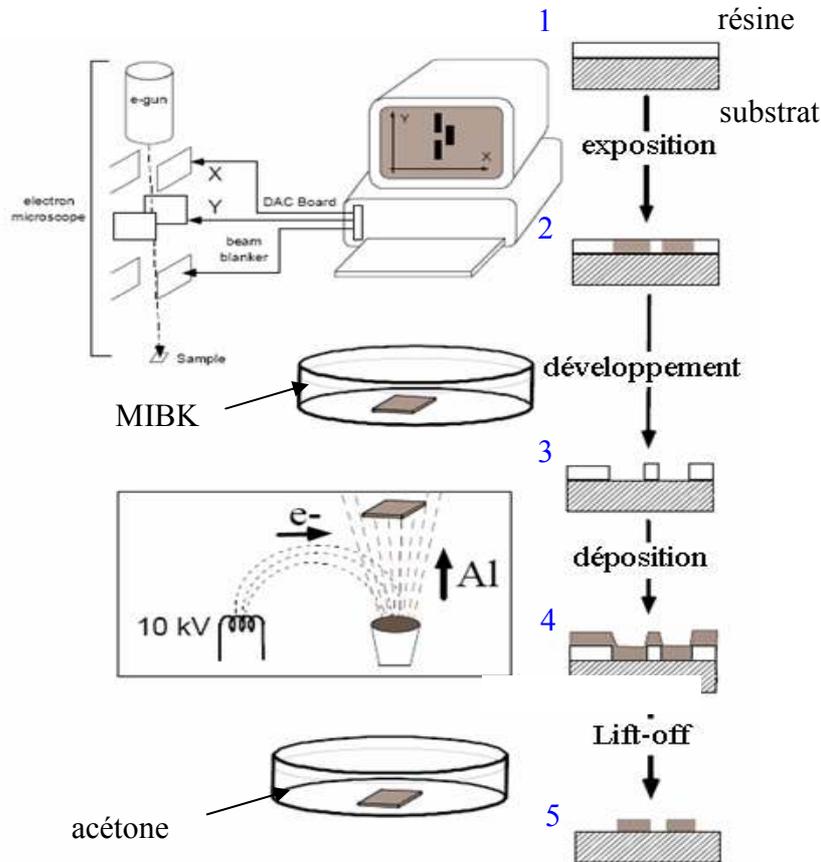
Il faut aussi comprendre et combattre ce qui déstabilise la couche électronique. Ainsi un piégeage en champ faible serait possible et augmenterait le temps de relaxation.

De plus, cela augmenterait la reproductibilité et la précision des expériences. On pourrait accumuler plus de points lors de l’enregistrement des courbes d’échappement. La largeur des courbes serait déterminée avec une précision plus grande. On pourrait ainsi se passer d’une analyse numérique lourde et faciliter le traitement des données.

Mesurer proprement le temps de relaxation exige l’emploi d’un champ électrique cohérent. Dans cette optique, deux guides d’onde ont été installés dans le cryostat, l’un coaxial montant jusqu’à 60 GHz, l’autre rectangulaire, permettant d’amener un champ hyperfréquence de 120 GHz jusqu’à l’échantillon. Ces guides devraient permettre une spectroscopie directe des états de l’électron ainsi que leur manipulation.

# Annexes

## Annexe A : lithographie électronique



: différentes étapes de lithographie électronique : exposition par un microscope électronique (2) d'un substrat recouvert d'une résine (1), développement (3), évaporation d'une couche mince métallique (4), dissolution de la résine restante (5).

Une résine, du PMMA (polyméthylméthacrylate, du plexiglas en fait !) ou un mélange MMA (acide méthacrylique)/PMMA dilué dans de l'anisole est déposée en couche fine et uniforme à la surface de l'échantillon grâce à une tournette (situation 1).

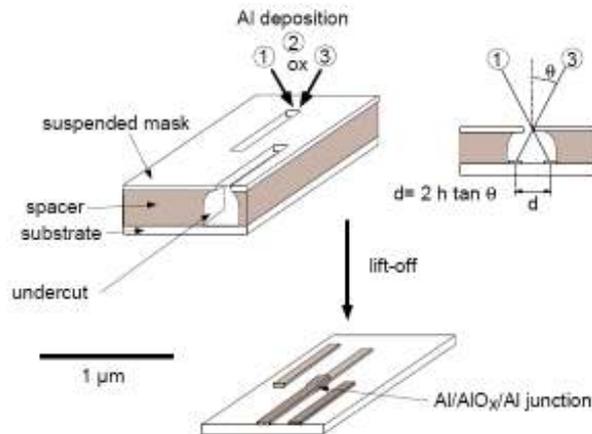
L'échantillon est alors exposé sous le faisceau d'un microscope électronique (Philips SFEG) accéléré à 30 kV qui altère localement la résine. La position du faisceau est contrôlée par un ordinateur (et du logiciel Elphy Quantum de la société Raith) afin que la résine soit irradiée avec une dose contrôlée suivant un motif précis. Le logiciel permet aussi un réalignement sur un motif précédent. La précision du réalignement est typiquement de 100 nm (situation 2).

La résine irradiée devient alors soluble dans le MIBK (développeur). La résolution atteinte n'est ni limitée par la taille du faisceau incident (quand celui est rigoureusement réglé), ni par sa diffraction mais par la rétro-diffusion des électrons par la résine et le substrat. Il y a alors une exposition partielle de la résine proche du motif exposé. Le logiciel Elphy permet de tenir compte de ces effets de proximité (situation 3).

Vient ensuite un dépôt de métaux (aluminium dans notre cas) (situation 4).

Un passage dans l'acétone permet d'enlever la résine qui était restée sur l'échantillon (situation 5).

## Annexe B : évaporation sous angles et SET à îlot pyramidal



**Figure 116 : fabrication de jonction Josephson par évaporation sous angles. La première couche métallique est oxydée avant le dépôt de la seconde couche métallique. Les angles de dépôt sont ajustés afin que les deux couches se superposent. La zone de recouvrement définit la jonction tunnel.**

L'évaporation sous angles (figure 116), utilisée pour fabriquer un SET permet un bon alignement des électrodes lors de la fabrication des jonctions et évite une remise à l'air de l'échantillon, la jonction étant réalisée par oxydation de l'aluminium dans l'enceinte de dépôt des matériaux. On dépose tout d'abord une double couche de résine (MAA/PMMA). La couche inférieure (MAA) étant plus soluble dans le MIBK, le développement crée une cavité sous le masque de PMMA, permettant alors une déposition sous angles. Une modification de l'angle sous lequel est faite l'évaporation entraîne un déplacement du motif. Les angles d'évaporation sont ajustés afin qu'une petite portion des électrodes se recouvre. La jonction tunnel est obtenue par oxydation de la surface de la première couche déposée. La résistance de cette jonction tunnel (i.e. l'épaisseur de la couche oxydée) dépend de la pression et du temps d'oxydation.

Nous avons enrichi cette méthode de fabrication afin d'obtenir un SET à îlot pyramidal.

Pour la réalisation de ce type de SET, 3 évaporations supplémentaires sont nécessaires. Après les deux premières évaporations permettant d'obtenir les jonctions tunnel (méthode précédente figure 116), on effectue deux autres évaporations à grands angles. Nous avons utilisé des angles compris entre  $75^\circ$  et  $85^\circ$ . Ces deux évaporations ont pour objectif de fermer les zones sur le masque correspondant aux lignes de contact. Elles ne font que 90 nm de large. On évapore à grand angles deux fois 250 nm d'aluminium (pour  $+75^\circ$  et  $-75^\circ$ , par exemple). Les lignes de contact sont fermées alors que l'îlot qui fait 400 nm de large reste ouvert. L'ouverture est bien entendu réduite, elle ne fait plus qu'approximativement 100 nm. On évapore alors sous angle nul 250 nm d'aluminium qui viennent former la pyramide.

## Annexe C : données techniques concernant la fabrication

### Substrat

Wafer de silicium  
Diamètre : 2 pouces  
Type P  
Dopant B  
Résistivité 180-210  $\Omega\text{cm}$   
Orientation 100

### Pulvérisation du niobium

Paramètres pour un dépôt sur de la silice (première pulvérisation, pour la réalisation des réservoirs)

Pression argon :  $P_{Ar}=0.006$  mbar

Puissance :  $P_u=100$  W épaisseur déposée : 20 nm

Puissance :  $P_u=200$  W épaisseur déposée : 20 nm, épaisseur totale=40 nm

Paramètres pour un dépôt sur du poly-imide PI2611

Pression argon :  $P_{Ar}=0.009$  mbar

Puissance :  $P_u=375$  W épaisseur déposée : 250 nm

### Lithographie optique

Résine : Ultra-i 310 1.0 [SHIPPLEY] (malheureusement elle n'est plus fabriquée)

tourneuse : 3000 tpm (tours par minute) → résine d'épaisseur 1  $\mu\text{m}$

Plaque chauffante: 110°C pendant 1 minute

Dose d'exposition: 14  $\text{mJ}/\text{cm}^2$

Plaque chauffante : 110°C pendant 2 min

Développement : MFCD 26 pendant 45s

## Dépôt de poly-imide PI2611

Préparation de la solution fille : 30g de PI2611  
30 ml de N-méthyl-2-pyrrolidone

Dépôt sur l'échantillon

Promoteur d'adhésion : ultradel A600 200 tpm pendant 30s

Plaque chauffante : 120°C pendant 1 min

PI2611 (solution fille) : 3500 tpm (~250-300 nm)

Four : 180°C pendant 30 min

Four sous vide : 350°C pendant 1h

## Lithographie électronique (hors SET)

Résine : PMMA A6 (diluée à 6% dans l'anisole) 3000 tpm pendant 1 min

Plaque chauffante : 180°C pendant 60~90s

Dose : ~250 mC/cm<sup>2</sup> mais cette valeur est à adapter suivant la structure (correction de proximité faite par le logiciel Elphy (Raith)).

Développement : MIBK (méthylisobutylcétone) pendant 45 s

## Lithographie électronique : SET à flot pyramidal

Résine : MMA/PMMA A8.5 (diluée à 8.5% dans l'anisole) 1200 tpm pendant 1 min  
7000 tpm pendant 7s

Couche épaisse 900 nm

Plaque chauffante : 180°C pendant 60~90s

Résine : PMMA A3 (diluée à 3% dans l'anisole) 7000 tpm pendant 1 min

Couche fine 90 nm

Plaque chauffante : 180°C pendant 60~90s

Dose : ~250 mC/cm<sup>2</sup>

Développement : MIBK (méthylisobutylcétone)

Evaporation sous 5 angles

Flash de titane pour diminuer la pression  $P_{\text{début}} \sim 2 \cdot 10^{-7}$  mbar

40 nm aluminium @ -10°

Oxydation par un mélange O<sub>2</sub>-Ar(75%-25% concentration molaire) P~7.5mbar pendant 4 min  
(résistance de la jonction tunnel entre 30 et 50 kΩ)

170 nm d'aluminium @ +10°

170 nm d'aluminium @ +75°

170 nm d'aluminium @ -75°

250 nm d'aluminium @ +10°

### Gravure ionique (Reactive Ion Milling)

Couche mince de niobium (40 nm) (réservoirs et lignes de contact)

Débit des gaz : 20cc SF<sub>6</sub>

2 cc O<sub>2</sub>

Pression totale : P=0.0010 mbar

Puissance : P<sub>u</sub>=50W, tension U=160V pendant 35s

Couche épaisse de niobium (250 nm) (électrode de garde)

Débit des gaz : 20cc SF<sub>6</sub>

2 cc O<sub>2</sub>

Pression totale : P=0.0010 mbar

Puissance : P<sub>u</sub>=50W, tension U=160V pendant 90s

Couche de poly-imide (250 nm) (électrode de garde)

Débit des gaz : 2cc SF<sub>6</sub>

50 cc O<sub>2</sub>

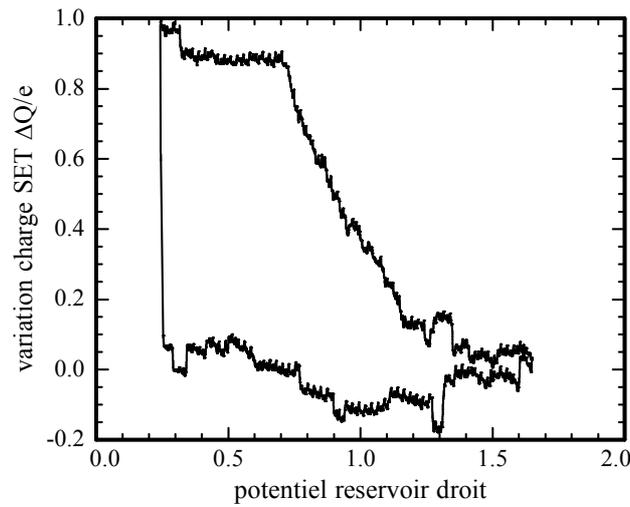
Pression totale : P=0.05 mbar

Puissance : P<sub>u</sub>=15W, tension U=100V pendant 3min

## Annexe D : Pourquoi un SET à îlot pyramidal ?

Cet annexe présente les résultats obtenus avec un SET à îlot non pyramidal. La surface de l'îlot est donc plate. Un électron situé au dessus de cet îlot doit induire une charge égale à  $0.1e$ .

On a réalisé une expérience typique. Beaucoup d'électrons sont placés dans l'anneau. On diminue la hauteur de barrière entre le réservoir droit et l'anneau en augmentant le potentiel sur le réservoir droit.



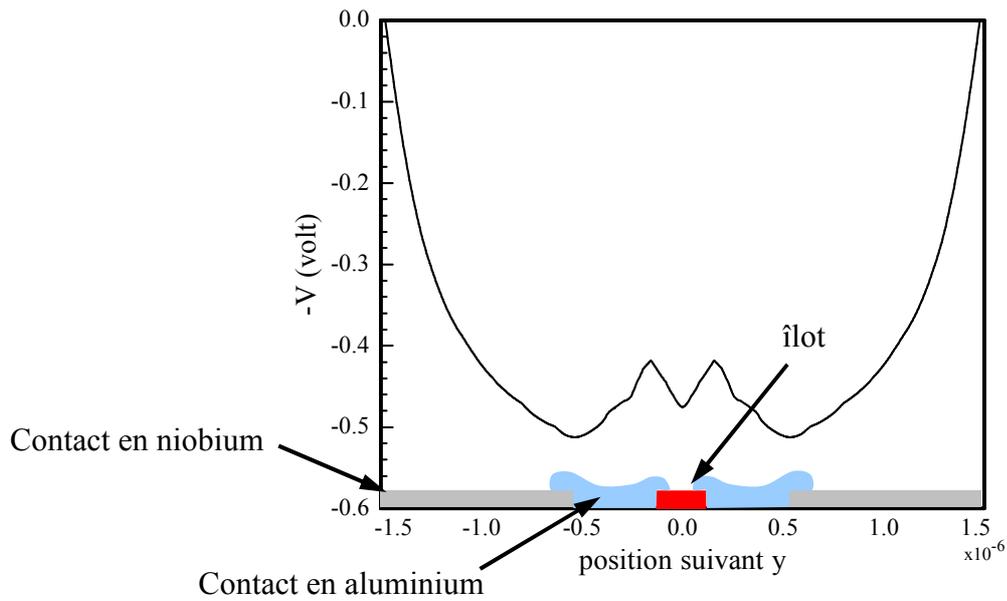
En position 1, l'anneau est plein d'électrons. Le nombre d'électrons dans l'anneau reste constant jusqu'à ce qu'ils commencent à le quitter (position 2). Pour cet échantillon, le bruit est dominé par des fluctuateurs qui créent des sauts de phase aléatoire de  $0.1e$ . Le signal créé par un électron est trop faible pour être extrait de ce bruit. Ainsi même les derniers sauts (positions 3) ne sont pas visibles. Ensuite l'anneau est vide, la charge est plutôt stable. Les fluctuations lentes visibles résultent de mouvements de charge dans le substrat de silicium. Ensuite en position 4, beaucoup d'électrons rentrent brusquement dans le piège et remplissent le piège.

Cette figure est extrêmement similaire à celles observées avec un SET pyramidal. La principale différence tient dans le fait qu'aucun saut marquant le départ d'un électron n'est visible.

Cela peut s'expliquer par le niveau de bruit qui est du même ordre de grandeur que le signal. Une solution pour remédier à ce problème est d'augmenter le signal c'est-à-dire augmenter la valeur de la charge induite par un électron flottant au dessus de l'hélium sur l'îlots du SET.

Il nous faut donc augmenter le couplage entre l'électron au dessus de l'hélium et le SET.

Le profil des potentiels pour le SET à îlot plat montre que les minima principaux ne sont pas situés au dessus de l'îlot mais au dessus des contacts.



Le minima sont situés au-dessus des contacts et non au-dessus de l'îlot car les contacts en aluminium du SET sont déposés sur les contacts en niobium. Ils se trouvent donc plus près des électrons flottant sur l'hélium et ont donc plus d'influence.

Le SET à îlot pyramidal en augmentant la hauteur de l'îlot sans augmenter celle des contacts permet de contourner ce problème.

Donc d'une part, le SET pyramidal augmente le couplage entre le SET et l'électron car le minimum global se situe au-dessus de l'îlot. D'autre part, la distance îlot-électron est réduite ce qui augmente la valeur de la charge induite par un électron sur l'îlot.

## Bibliographie

---

- [1] A. Steane, Rep. Prog. Phys. **61**, 117 (1998)
- [2] Deutsch D, Proc.R.Soc.Lond. **A**, 400 (1985)
- [3] V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **74**, 197 (2002)
- [4] DiVincenzo D.P. , cond-mat/9612126, (1996)
- [5] Vandersypen L.M.K. "Experimental Quantum Computation With Nuclear Spins in Liquid Solution" Ph.d thesis July 2001
- [6] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000
- [7] A. Steane, quant-physics/9708022, 1997
- [8] P.M. Platzman and M. I. Dykman, Science **284** (5422), 1967 (1999)
- [9] Arnold J.Dahm and Eva.Y.Andrei, *Two dimensional Electron Systems*, 281-316, "Electrons on helium film."
- [10] K Penanen *et al.*, Phys Rev B **62**, 9621 (2000)
- [11] M. H. Degani *et al.* Phys. Rev. B **72**, 125408 (2005)
- [12] M. J. Lea, P. G. Frayne and Yu. Mukharsky, Forstsch. Phys. **48** , 1109-1124 (2000)
- [13] Adriano Barenco, David Deutsch, Artur Eckert, Richard Jozsa, Phys. Rev. Lett. **74**, 4083 (1994)
- [14] M. I. Dykman *et al.*, Phys. Rev. B **67**, 155402 (2003)
- [15] M. I. Dykman and P. M. Platzman, Fortschr. Phys. **48**, 1095 (2000)
- [16] C. P. Slichter, *Principle of magnetic resonance*, Springer Series in Solid-State Science 1992
- [17] Yu. Monarkha, Sov. J. Low Temp. Phys. **4**, 515 (1978)
- [18] D. C. Glattli, " Dynamique de cristaux bidimensionnels classiques d'électrons. Propriétés thermiques et mise en évidence de nouvelles excitations.", Thèse de doctorat (1986)
- [19] Yu. P. Monarkha, Sov. J. Low. Temp. Phys. **3**, 282 (1978)
- [20] M. W. Cole Phys. Rev. B **2**, 4239 (1970)
- [21] Yu. P. Monarkha, S. S. Sokolov, *to be published*
- [22] W. M. Witney and C. E. Chase, Phys. Rev. Lett. **9**, 243 (1962)
- [23] Gerd Schön, *Quantum transport and dissipation*, Wiley-VCH, 1998
- [24] José Aumentado *et al.*, Requirement for robust  $2e$  periodicity in a single-Cooper-pair transistors, short note
- [25] P. Joyez, , "Le transistor à une paire de Cooper : un système quantique macroscopique ", Thèse de doctorat (1995)
- [26] Fulton *et al.* Phys. Rev. Lett. **63**, 1307 (1989)
- [27] G. Papageorgiou, "Counting Electrons on Helium with a Single Electron Tunneling Transistor", PhD Thesis (2003)
- [28] W. T. Sommer and D. J. Tanner, Phys. Rev. Lett. **27**, 1345 (1971)
- [29] A. B. Zorin, Rev. Sci. Instrum. **66**, 4296 (1995)
- [30] S. Machlup, J. Appl. Phys. **25**, 341 (1953)
- [31] C. T. Rogers and R. A. Buhrman, Phys Rev. Lett. **53**, 1272, (1984)
- [32] A. N. Tavkhelidze and J. Mygind, J. Appl. Phys. **83**, 310, (1998)
- [33] B. Starmark and *al.*, J. Appl. Phys. **86**, 2132 (1999)
- [34] G. Papageorgiou *et al.*, Applied Physics Letters **86**, 153106 (2005)
- [35] E. Wigner, Phys. Rev. **46**, 1002 (1934)
- [36] L. Bonsall and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **15**, 137 (1977)
- [37] M. Reimann and M. Manninen, Rev. Mod. Phys. **74**, 1283 (2002)

- 
- [38] M. Kong *et al*, Phys. Rev. E **65**, 046602 (2002)
  - [39] V. M. Bedanov and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **49**, 2667 (1994)
  - [40] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **51**, 7700 (1995)
  - [41] G. Date *et al*, J. Phys.: Condens. Matter **10**, 5875 (1998)
  - [42] A. V. Filinov *et al*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3851 (2001)
  - [43] B. Partoens and F. M. Peeters, J. Phys.: Condens. Matter **9**, 5383 (1997)
  - [44] M. Saint Jean *et al*, Europhy. Lett. **58**, 1200 (1987)
  - [45] L. P. Kouwenhoven *et al*, Rep. Prog. Phys. **64**, 701 (2001)
  - [46] S. Bednarek *et al*, Phys. Rev. B **61**, 4461 (2000)
  - [47] D. G. Austing *et al*, Phys. Rev. B **60**, 11514 (1999)
  - [48] F. Balestro *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 158301 (2003)
  - [49] Y. Yu *et al.*, Science **296**, 889 (2002)
  - [50] A. Cottet *et al*, Physica C **367**, 197 (2002)
  - [51] E. Varoquaux and O. Avenel, Phys. Rev. B **68**, 054515 (2003)
  - [52] A. I. Larkin *et al*, Physica B **126**, 414 (1986)
  - [53] A. Naik *et al*, Nature **443**, 193 (2006)