Résolution des problèmes aux limites différencielles linéaires par la méthode de décomposition de l'opérateur

Jean Veyrunes

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences

de l'Université de GRENOBLE

pour obtenir

Le titre de Docteur de 3ème Cycle

Mathématiques Appliquées

par

Jean V E Y R U N E S

Ingénieur I.E.G., I.M.A.G.

Licencié ès Sciences

RESOLUTION DES PROBLEMES AUX LIMITES DIFFERENTIELLES LINEAIRES PAR LA METHODE DE DECOMPOSITION DE l'OPERATEUR

Thèse soutenue le :

12 Octobre 1960

devant la commission d'examen :

MM. KRAVTCHENKO, Président

KUNTZMANN

HACQUES

Le présent travail a été préparé au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Kuntzmann, Directeur de ce Laboratoire. Les conseils inestimables qu'il m'a donnés constamment ont permis un aboutissement rapide de mes recherches.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Bolliet dont les conseils dans le domaine de la programmation me furent très précieux ainsi qu'à Monsieur Gastinel dont la compétence n'a d'égale que la disponibilité.

J'adresse également tous mes remerciements à Monsieur le Professeur Kravtchenko et à Monsieur Hacques, Maître de conférence, qui ont bien voulu faire partie du Jury.

PLAN

Ch. I : Exposé de la méthode.

I.1 : Intégrales d'une équation différentielle satisfaisant à certaines conditions initiales.

Soit un problème différentiel aux limites, linéaire, d'ordre n, étudié sur l'intervalle $[0, \ell]$, muni de $n-m$ conditions au point $x=0$ et de m conditions au point $x=\ell$. Les intégrales satisfaisant aux $n-m$ conditions initiales sont les solutions d'une équation d'ordre m que l'on peut écrire si on sait intégrer l'équation. Il n'y a aucune exception sauf si le problème est impossible ou indéterminé.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_m$ m fonctions linéairement indépendantes satisfaisant à l'équation homogène et aux conditions initiales homogènes. Soit u_0 une fonction satisfaisant à l'équation et aux conditions initiales.

L'équation d'ordre m cherchée s'écrit :

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_m & y \\ u'_0 & u'_1 & \cdots & u'_m & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0^{(m)} & u_1^{(m)} & \cdots & u_m^{(m)} & y^{(m)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Résoudre le problème initial consiste donc :

D'abord à résoudre $m+1$ fois une équation d'ordre n

Ensuite à résoudre l'équation d'ordre m écrite ci-dessus.

On peut se demander s'il n'est pas possible de trouver l'équation du 2e problème autrement qu'en intégrant l'équation proposée. La réponse est fournie par la méthode de décomposition d'un opérateur en produit.

Cette méthode conduit à $m+1$ équations d'ordre $n-m$ à $m+2$ inconnues (les inconnues sont homogènes). Les équations sont non linéaires. C'est cette méthode qui va être exposée maintenant.

Remarque: Les équations n'étant pas homogènes, il s'agira d'une décomposition matricielle.

I 2: Exposé de la méthode de décomposition d'un opérateur linéaire en produit.

Il est possible [1] de ramener un problème différentiel aux limites linéaire à deux problèmes différentiels de conditions initiales. Cela se ramène à la décomposition d'un opérateur d'ordre n en un produit de 2 opérateurs.

---

(1) A.A. DORODNICYN, Communication à la "Conférence Internationale sur le Traitement de l'Information", Paris, Juin 1959.

d'ordre m et n-m.

Soit à résoudre :

(1) $\quad Hy + \gamma = 0 \quad , \; H = \gamma_0 p^n + \gamma_1 p^{n-1} + \dots + \gamma_n$

$p = \dfrac{d}{dx}, \dots, p^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$; $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma$ fonctions données de x.

avec les conditions distinctes et compatibles :

(2) $\quad A_j \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot y^{(n-i)}(0) = b_j \quad , \; j = 1, 2, \dots, n-m$

$$B_K \equiv \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{Ki}\, y^{(n-i)}(\ell) = \bar{b}_K \; , \quad K = 1, 2, \dots, m.$$

Remarque : On supposera, tout au long de cet exposé, que le problème ainsi posé a une solution et une seule.

Notation : On appelera un tel problème : un problème d'ordre n, de type $(n-m, m)$.

On cherche une relation de la forme :

(3) $\quad H_3 y + \beta = 0 \quad , \; H_3 = \beta_0 p^m + \beta_1 p^{m-1} + \dots + \beta_m \; , \; \beta_0 \neq 0$ en général

entrainant (1) et l'on écrit, après avoir introduit la fonction auxiliaire z telle que $z' = 0$ $(z = 1)$

$$\begin{Vmatrix} H & \gamma \\ 0 & p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} H_3 & \beta \\ 0 & p \end{Vmatrix}$$

avec $H_1 = \alpha_0 p^{n-m} + \alpha_1 p^{n-m-1} + \dots + \alpha_{n-m}$.

L'identification $H = H_1 . H_3$ conduit à un système algébrique linéaire en α dont la $(q+1)^e$ équation s'écrit :

$$(4) \qquad \boxed{\gamma_q = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q-i} \alpha_i \cdot \beta_{q-i-j}^{(j)} \cdot C_{n-m-i}^{j}}$$

formule valable quelque soit q, supérieur ou non à $n-m$, avec les conventions suivantes :

1. Tous les produits contenant β_k, $k \neq 1, 2, \ldots, m$ sont supprimés.
2. Tous les produits contenant C_{n-m-i}^{j}, $j > n-m-i$ sont supprimés.

Les $n-m+1$ premières équations du système précédemment décrit forment un système triangulaire qui fournit les α_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-m$. La matrice de ce système s'écrit :

$$M = \left\| \begin{array}{ccccc} \beta_0 C_{n-m}^{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 C_{n-m}^{0} + \beta_0' C_{n-m}^{1} & \beta_0 C_{n-m-1}^{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 C_{n-m}^{0} + \beta_1' C_{n-m}^{1} + \beta_0'' C_{n-m}^{2} & \beta_1 C_{n-m-1}^{0} + \beta_0' C_{n-m-1}^{1} & \beta_0 C_{n-m-2}^{0} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-m} C_{n-m}^{0} + \cdots + \beta_1^{(n-m-1)} C_{n-m}^{n-m-1} + \beta_0^{(n-m)} C_{n-m}^{n-m} & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_0 C_0^{0} \end{array} \right\|$$

Elle est en général non singulière. Son déterminant vaut $(\beta_0)^{n-m+1}$.

On borde verticalement cette matrice par les colonnes successives :

$$\begin{array}{cccc} \gamma_0 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-m} & \gamma_{n-m} & \cdots & \gamma_{n-m} \\ \gamma_{n-m+1} & \gamma_{n-m+2} & \cdots & \gamma_n \end{array}$$

et horizontalement par les lignes successives :

$$\beta_1^{(n-m)} C_{n-m}^{n-m} + \cdots + \beta'_{n-m} C_{n-m}^{1} + \beta_{n-m+1} C_{n-m}^{0} \,,\; \beta_1^{(n-m-1)} C_{n-m-1}^{n-m-1} + \cdots + \beta_{n-m} C_{n-m-1}^{0} \,, \ldots ,\; \beta_1 C_0^0$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\beta_{m-1}^{(n-m)} C_{n-m}^{n-m} + \beta_m^{(n-m-1)} C_{n-m}^{n-m-1} \,,\; \beta_{m-1}^{(n-m-1)} C_{n-m-1}^{n-m-1} + \beta_m^{(n-m-2)} C_{n-m-1}^{n-m-2} \,, \ldots ,\; \beta_{m-1} C_0^0$$

$$\beta_m^{(n-m)} C_{n-m}^{n-m} \,,\; \beta_m^{(n-m-1)} C_{n-m-1}^{n-m-1} \,, \ldots ,\; \beta_m C_0^0$$

(La formule (4) fournit évidemment l'expression de la ligne générale de la suite).

On obtient ainsi m matrices. En égalant à 0 les déterminants de ces m matrices, on obtient un système différentiel de m équations, chacune étant d'ordre $n-m$ par rapport aux $m+1$ fonctions β_i ; $i = 0, 1, \ldots, m$.

On détermine β (et H_2) en écrivant $H_1 \beta + H_2 p = \gamma$. Il suffit alors de remplacer dans la dernière équation du système différentiel β_m par β et γ_n par γ pour obtenir la $(m+1)^e$ équation fixant la $(m+2)^e$ inconnue β.

On obtient donc, en définitive, un système différentiel de $m+1$ équations à $m+2$ inconnues, chaque équation étant d'ordre $n-m$ au plus (les inconnues sont homogènes).

I.3 : Ecriture des conditions initiales :

On vient de trouver des fonctions β_i et β telles que :

$$\begin{Vmatrix} H_3 & \beta \\ 0 & p \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix} = 0$$

entraîne $\begin{Vmatrix} H & \gamma \\ 0 & p \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix} = 0$. On écrit maintenant que la relation (3) est en outre compatible avec les $n-m$ conditions A_j, ce qui revient à déterminer :

$$\begin{array}{llll}
\beta_0(0), & \beta_0'(0), & \ldots, & \beta_0^{(n-m-1)}(0). \\
\beta_1(0), & \beta_1'(0), & \ldots, & \beta_1^{(n-m-1)}(0) \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\
\beta_m(0), & \beta_m'(0), & \ldots, & \beta_m^{(n-m-1)}(0) \\
\beta(0), & \beta'(0), & \ldots, & \beta^{(n-m-1)}(0)
\end{array}$$

à partir des relations (2) et ainsi achève de déterminer les fonctions β_i et β.

On considère seulement le cas tout à fait général où les conditions (2) peuvent se mettre sous la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} c_{10}\, y^{(m)}(0) + c_{11}\, y^{(m-1)}(0) + \cdots + c_{1m}\, y(0) + d_1 = 0 \\ c_{20}\, y^{(m+1)}(0) + c_{22}\, y^{(m-1)}(0) + \cdots + c_{2,m+1}\, y(0) + d_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-m,0}\, y^{(n-1)}(0) + c_{n-m,n-m}\, y^{(m-1)}(0) + \cdots + c_{n-m,n-1}\, y(0) + d_{n-m} = 0 \end{cases}$$

les $c_{j,0}$, $j = 1, 2, \ldots, n-m$ étant différents de 0.

On calcule successivement les $(n-m-1)$ 1e dérivées de la relation (3) au point $x=0$. L'identification avec (5) permet de déterminer d'une et d'une seule manière les conditions initiales relatives aux β_i et à β connaissant celles, par exemple, relatives à β_0. En effet :

$$(6) \qquad \beta_0\, y^{(m)} + \beta_1\, y^{(m-1)} + \beta_2\, y^{(m-2)} + \cdots + \beta_m\, y + \beta = 0$$

Calculée au point $x=0$ fournit par identification avec la 1e équation de (5) :

$$\beta_1(0) = \frac{c_{11}}{c_{10}}\,\beta_0(0)$$

$$\beta_i(0) = \frac{c_{1i}}{c_{10}}\,\beta_0(0)$$

$$\beta_m(0) = \frac{c_{1m}}{c_{10}}\,\beta_0(0)$$

$$\beta(0) = \frac{d_1}{c_{10}}\,\beta_0(0)$$

$i = 1, 2, \ldots, m.$

On dérive (6) :

$$\beta_0\, y^{(m+1)} + (\beta_0' + \beta_1)\, y^{(m)} + (\beta_1' + \beta_2)\, y^{(m-1)} + \cdots + (\beta_{m-1}' + \beta_m)\, y' + \beta_m'\, y + \beta' = 0$$

Soit compte tenu de (6) :

$$\beta_0\, y^{(m+1)} + \left[\beta_1' + \beta_2 - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0' + \beta_1)\beta_1\right] y^{(m-1)} + \cdots \left[\beta_i' + \beta_{i+1} - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0' + \beta_1)\beta_i\right]$$

$$y^{(m-i)} + \cdots + \left[\beta_{m-1}' + \beta_m - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0' + \beta_1)\beta_{m-1}\right] y' + \left[\beta_m' - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0' + \beta_1)\beta_m\right] y$$

$$+ \beta' - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0' + \beta_1)\,\beta$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1.$

On identifie cette expression, calculée au point $x=0$ avec la 2e équation de (5) ; On obtient ainsi :

$$\beta_1'(0) + \beta_2(0) - \frac{1}{\beta_0(0)}\left(\beta_0'(0) + \beta_1(0)\right)\beta_1(0) = \frac{c_{22}}{c_{20}}\beta_0(0)$$

$$\beta_i'(0) + \beta_{i+1}(0) - \frac{1}{\beta_0(0)}\left(\beta_0'(0) + \beta_1(0)\right)\beta_i(0) = \frac{c_{2,i+1}}{c_{20}}\beta_0(0)$$

$$\beta_{m-1}'(0) + \beta_m(0) - \frac{1}{\beta_0(0)}\left(\beta_0'(0) + \beta_1(0)\right)\beta_{m-1}(0) = \frac{c_{2,m}}{c_{20}}\beta_0(0)$$

$$\beta_m'(0) - \frac{1}{\beta_0(0)}\left(\beta_0'(0) + \beta_1(0)\right)\beta_m(0) = \frac{c_{2,m+1}}{c_{20}}\beta_0(0)$$

$$\beta'(0) - \frac{1}{\beta_0(0)}\left(\beta_0'(0) + \beta_1(0)\right)\beta(0) = \frac{d_2}{c_{20}}\beta_0(0).$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1.$

$$\beta_1'(0) = \left(\frac{c_{11}^2}{c_{10}^2} - \frac{c_{12}}{c_{10}} + \frac{c_{22}}{c_{10}}\right)\beta_0(0) + \frac{c_{11}}{c_{10}}\beta_0'(0).$$

$$\beta_i'(0) = \left(\frac{c_{11}\cdot c_{1i}}{c_{10}^2} - \frac{c_{1,i+1}}{c_{10}} + \frac{c_{2,i+1}}{c_{20}}\right)\beta_0(0) + \frac{c_{1i}}{c_{10}}\beta_0'(0).$$

$$\beta_{m-1}'(0) = \left(\frac{c_{11}\cdot c_{1,m-1}}{c_{10}^2} - \frac{c_{1m}}{c_{10}} + \frac{c_{2m}}{c_{20}}\right)\beta_0(0) + \frac{c_{1,m-1}}{c_{10}}\beta_0'(0)$$

$$\beta_m'(0) = \left(\frac{c_{11}\cdot c_{1m}}{c_{10}^2} + \frac{c_{2,m+1}}{c_{20}}\right)\beta_0(0) + \frac{c_{1m}}{c_{10}}\beta_0'(0)$$

$$\beta'(0) = \left(\frac{c_{11}\cdot d_1}{c_{10}^2} + \frac{d_2}{c_{20}}\right)\beta_0(0) + \frac{d_1}{c_{10}}\beta_0'(0).$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1.$

Il est facile de voir que, de proche en proche, ce procédé permet d'obtenir toutes les conditions initiales nécessaires au calcul des β_i et de β à partir des $n-m$ conditions A_j.

Le problème de départ est alors ramené à l'intégration de (3) avec les m conditions initiales B_K puisque l'on a supposé l'existence et l'unicité de la solution.

<u>Remarque I</u>: La résolution de (1) par ce procédé est symétrique : En effet on aurait pu chercher une relation de la forme $H_4 y + \bar{\beta} = 0$,

$$H_4 = \bar{\beta}_0 p^{n-m} + \bar{\beta}_1 p^{n-m-1} + \dots + \bar{\beta}_{n-m-1} p + \bar{\beta}_{n-m} \quad , \bar{\beta}_0 \neq 0$$

entraînant (1) et compatible avec les conditions B_K. Les Conclusions eussent été analogues...

La résolution d'un problème différentiel aux limites, d'ordre n, linéaire, muni de conditions aux limites linéaires et séparées, distribuées de la manière suivante:

$\begin{cases} n-m \text{ conditions à l'origine de l'intervalle d'étude} \\ m \text{ conditions à l'extrémité} \end{cases}$

les conditions à l'origine étant de la forme (5)

se ramène :

— A la résolution d'un problème différentiel de conditions initiales de $m+1$ équations homogènes d'ordre $n-m$ au plus, à $m+2$ inconnues au plus, déterminées au moyen des $n-m$ conditions à l'origine de l'intervalle d'étude

— A la résolution d'un problème différentiel de conditions initiales d'une équation d'ordre m, la solution étant complètement déterminé par la donnée de m conditions à l'extrémité de l'intervalle d'étude. Dans l'intégration retour on peut rencontrer des difficultés : Voir N° I.5.

<u>Remarque II</u> : Ce procédé est une généralisation de la méthode de Riccati.

En effet, si l'on se place dans le cas particulier d'une équation différentielle du 2e ordre :

$$(7) \quad \gamma_0 y'' + \gamma_1 y' + \gamma_2 y + \gamma = 0$$

avec des conditions aux limites données, l'équation fournissant β_1 est précisément celle que l'on obtient par le procédé de Riccati pour abaisser l'ordre de l'équation homogène associée à (7) : $\gamma_0 u'' + \gamma_1 u' + \gamma_2 u = 0$

$$\gamma_0 (z' + z^2) + \gamma_1 z + \gamma_2 = 0 \quad \text{avec } u = e^t \text{ et } z = t'.$$

I.4 : Choix des arbitraires dont on dispose :

On est toujours dans le cas des conditions initiales du type (5). On distinguera plusieurs cas, c'est à dire plusieurs particularisations de la relation supplémentaire existant entre les β_i du fait de l'homogénéité, par exemple :

<u>1. $\beta_0 = -1$</u> :

Il s'agit d'une simplification des équations, utilisée dans les chapitres ultérieurs.

<u>2. $\beta_0' + \beta_1 = 0$</u> :

Moyennant cette condition on a, à un facteur constant près, l'équation de la 1e méthode, présentée au N° I 1.

En effet :

a). Si 2 équations différentielles d'ordre n ont les mêmes solutions leurs coefficients sont proportionnels (le coefficient de proportionnalité pouvant dépendre de la variable)

b). Dans la méthode du N° I.1 : $\beta_0' + \beta_1 = 0$

c). Si $m+1$ fonctions $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ (β_0 non identiquement nulle) sont déterminées à un facteur près et vérifiant $\beta_0' + \beta_1 = 0$, le facteur est une constante. En effet :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda \beta_0)' + \lambda \beta_1 = 0 \\ \beta_0' + \beta_1 = 0\end{array}\right. \quad \text{entrainent} : \lambda' \beta_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda' = 0.$$

I 5 : Cause d'instabilité de la méthode de décomposition. Condition nécessaire et suffisante de stabilité.

L'emploi du mot "Instabilité" a été suggéré par le fait que les résultats numériques devenaient incohérents dans certains cas.

Revenant à la méthode du N° I.1, on voit que les u_i ($i = 0, 1, \dots, m$), solutions d'un système linéaire, ne peuvent devenir infinies en un point non singulier pour le problème proposé. Par contre le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé peut s'annuler sur l'intervalle d'intégration. Ceci est donc la seule possibilité de singularité pour l'équation d'ordre m.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité de la méthode s'écrit donc :

$$\beta_0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{pour } x \in [0, \ell]$$

I6: Etude des conditions initiales non du type (5):

$\beta_0 = -1$: On a vu au N° I.3 que dans le cas où les conditions initiales étaient du type (5) il était possible de trouver des valeurs initiales finies pour les β_i et β. Il n'en est pas de même ici.

Exemple: $y^{(4)} = 0$ avec $y(0) = y'''(0) = 0$

L'équation résolvante est $y'' = \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y$ soit:

$\beta_1(0)$ et $\beta_2(0)$ infinis.

On peut tourner les difficultés introduites par ces singularités grâce à certains artifices ou à d'autres particularisations de la relation supplémentaire entre les β_i.
Le chapitre III est consacré à l'étude des conditions initiales particulières pour les problèmes du 3e et du 4e ordre.
Le chapitre IV est un essai de généralisation de certains résultats trouvés dans cet ordre d'idée.

$\beta_0' + \beta_1 = 0$: La méthode de décomposition, si elle entraine la résolution d'une équation supplémentaire, ne devrait plus présenter d'exception.

I7: Exemples:

Problème du 2e ordre: C'est évidemment un problème (1,1)

$$r_0 y'' + r_1 y' + r_2 y + r = 0 \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} c_{10} y'(0) + c_{11} y(0) + d_1 = 0 \\ \bar{c}_{10} y'(\ell) + \bar{c}_{11} y(\ell) + \bar{d}_1 = 0 \end{array} \right.$$

On cherche une relation de la forme $\beta_0 y' + \beta_1 y + \beta = 0$.

$$\gamma_0 \beta''' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta'' + (3\gamma_0 \beta_1' + \gamma_0 \beta_1^2 + \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2)\beta' +$$
$$\left[\gamma_0 \beta_1^3 + \gamma_1 \beta_1^2 + \beta_1(\gamma_2 + 5\gamma_0 \beta_1') + 2\gamma_1 \beta_1 + 3\gamma_0 \beta_1'' + \gamma_3\right]\beta + \gamma = 0$$

avec
$$\begin{cases} \beta_1(0) = c_{11} ; & \beta(0) = d_1 \\ \beta_1'(0) = c_{22} - c_{11}^2 ; & \beta'(0) = d_2 - d_1 . c_{11} \\ \beta_1''(0) = c_{33} + 2c_{11}^3 - 3c_{11}.c_{22} ; & \beta''(0) = d_3 + 2d_1 c_{11}^2 - 2c_{22}d_1 - d_2 c \end{cases}$$

Ensuite on résoud $y' = \beta_1 y + \beta$ (8)

avec $y(\ell)$ déterminé de la manière suivante :

d'une part : $y'''(\ell) = \bar{c}_{31} y''(\ell) + \bar{c}_{32} y'(\ell) + \bar{c}_{33} y(\ell) + \bar{d}_3$

d'autre part : En dérivant 2 fois (8) on obtient au point $x = \ell$:

$$y'(\ell) = \beta_1(\ell) \cdot y(\ell) + \beta(\ell)$$
$$y''(\ell) = (\beta_1^2(\ell) + \beta_1'(\ell))\, y(\ell) + \beta_1(\ell) \cdot \beta(\ell) + \beta'(\ell)$$
$$y'''(\ell) = (\beta_1^3(\ell) + 3\beta_1(\ell) \cdot \beta_1'(\ell) + \beta_1''(\ell))\, y(\ell) + \beta_1^2(\ell) \cdot \beta(\ell) + \beta_1(\ell) \cdot \beta'(\ell) + 2\beta(\ell) \cdot \beta_1'(\ell) + \beta''(\ell).$$

d'où l'on tire :

$$y(\ell) = -\frac{(\beta_1 . \beta + \beta')(\bar{c}_{31} - \beta_1) + \beta(\bar{c}_{32} - 2\beta_1') + d_3 - \beta''}{(\beta_1^2 + \beta_1')(\bar{c}_{31} - \beta_1) + \beta_1(\bar{c}_{32} - 2\beta_1') + \bar{c}_{33} - \beta_1''}$$

toutes les fonctions figurant dans ce rapport étant calculées au point $x = \ell$. Ces valeurs sont fournies par la résolution de (1).

Problème du 4e ordre (2,2).

$$\gamma_0 y^{(4)} + \gamma_1 y''' + \gamma_2 y'' + \gamma_3 y' + \gamma_4 y + \gamma = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y''(0) = c_{11} y'(0) + c_{12} y(0) + d_1 \\ y'''(0) = c_{22} y'(0) + c_{23} y(0) + d_2 \\ y''(\ell) = \bar{c}_{11} y'(\ell) + \bar{c}_{12} y(\ell) + \bar{d}_1 \\ y'''(\ell) = \bar{c}_{22} y'(\ell) + \bar{c}_{23} y(\ell) + \bar{d}_2 \end{cases}$$

On cherche une relation de la forme $y'' = \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta$

On trouve :

$$\gamma_0 \beta_1'' + (3\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1' + \gamma_2 \beta_1 + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1^2 + \gamma_3 + (\gamma_1 + 2\gamma_0 \beta_1)\beta_2 + 2\gamma_0 \beta_2' = 0$$

$$\gamma_0 \beta_2'' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_2' + [2\gamma_0 \beta_1' + \gamma_2 + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1 + \gamma_0 \beta_2]\beta_2 + \gamma_4 = 0$$

$$\gamma_0 \beta'' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta' + [2\gamma_0 \beta_1' + \gamma_2 + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1 + \gamma_0 \beta_2]\beta + \gamma = 0$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_1(0) = c_{11} \quad ; \quad \beta_2(0) = c_{12} \quad ; \quad \beta(0) = d_1 \\ \beta_1'(0) = c_{22} - c_{11}^2 - c_{12} \\ \beta_2'(0) = c_{23} - c_{12} \cdot c_{11} \\ \beta'(0) = d_2 - d_1 \cdot c_{11} \end{cases}$$

On résoud ensuite $y'' = \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta$ avec $y(\ell)$ et $y'(\ell)$ connus.

$y(\ell)$ et $y'(\ell)$ sont donnés par la résolution du système suivant dans lequel chaque fonction est calculée au point $x = \ell$.

$$(\bar{c}_{11} - \beta_1)\, y' + (c_{12} - \beta_2)\, y = \beta - \bar{d}_1$$

$$(\bar{c}_{22} - \beta_1^2 - \beta_1' - \beta_2)\, y' + (\bar{c}_{23} - \beta_1 \beta_2 - \beta_2')\, y = \beta_1 \beta + \beta' - \bar{d}_2 .$$

Soit
$$y(\ell) = \frac{\begin{vmatrix} \bar{c}_{11} - \beta_1(\ell) & \beta(\ell) - \bar{d}_1 \\ \bar{c}_{22} - \beta_1^2(\ell) - \beta_1'(\ell) - \beta_2(\ell) & \beta_1(\ell) \cdot \beta(\ell) + \beta'(\ell) - \bar{d}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{c}_{11} - \beta_1(\ell) & \bar{c}_{12} - \beta_2(\ell) \\ \bar{c}_{22} - \beta_1^2(\ell) - \beta_1'(\ell) - \beta_2(\ell) & \bar{c}_{23} - \beta_1(\ell) \cdot \beta_2(\ell) - \beta_2'(\ell) \end{vmatrix}}$$

$$y'(\ell) = \frac{\begin{vmatrix} \beta(\ell) - \bar{d}_1 & \bar{c}_{12} - \beta_2(\ell) \\ \beta_1(\ell) \cdot \beta(\ell) + \beta'(\ell) - \bar{d}_2 & \bar{c}_{23} - \beta_1(\ell) \cdot \beta_2(\ell) - \beta_2'(\ell) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{c}_{11} - \beta_1(\ell) & \bar{c}_{12} - \beta_2(\ell) \\ \bar{c}_{22} - \beta_1^2(\ell) - \beta_1'(\ell) - \beta_2(\ell) & \bar{c}_{23} - \beta_1(\ell) \cdot \beta_2(\ell) - \beta_2'(\ell) \end{vmatrix}}$$

β_0, β_1 et β sont fournis par identification. On trouve :

$$\gamma_0\left(\beta_1^2+\beta_0'\beta_1-\beta_0\beta_1'\right)-\gamma_1\beta_0\beta_1+\gamma_2\beta_0^2=0$$
$$\gamma_0\left(\beta\beta_1+\beta_0'\beta-\beta_0\beta'\right)-\gamma_1\beta_0\beta+\gamma\beta_0^2=0$$

avec $\beta_0(0)=\lambda c_{10}$; $\beta_1(0)=\lambda c_{11}$; $\beta(0)=\lambda d_1$.

On résoud ensuite :

$$\beta_0 y'+\beta_1 y+\beta=0 \qquad \text{connaissant } y(\ell) :$$

$$\beta_0(\ell)\cdot y'(\ell)+\beta_1(\ell)\cdot y(\ell)+\beta(\ell)=0$$

et $\bar{c}_{10}\cdot y'(\ell)+\bar{c}_{11}\cdot y(\ell)+\bar{d}_1=0$ ce qui fournit par différence :

$$y(\ell)=-\frac{\bar{d}_1\,\beta_0(\ell)-\bar{c}_{10}\,\beta(\ell)}{\bar{c}_{11}\,\beta_0(\ell)-\bar{c}_{10}\,\beta_1(\ell)}$$

Problème du 4e ordre (3, 1) :

On l'écrit : $\gamma_0 y^{(4)}+\gamma_1 y'''+\gamma_2 y''+\gamma_3 y'+\gamma_4 y+\gamma=0$

avec :

$$\begin{cases} y'(0)=c_{11}\,y(0)+d_1\\ y''(0)=c_{22}\,y(0)+d_2\\ y'''(0)=c_{33}\,y(0)+d_3\\ y'''(\ell)=\bar{c}_{31}\,y''(\ell)+\bar{c}_{32}\,y'(\ell)+\bar{c}_{33}\,y(\ell)+\bar{d}_3\end{cases}$$

Par souci de simplification des calculs on a choisi les c_{j0} et $\bar{c}_{j0}$ égaux à -1. De même on choisira $\beta_0=-1$ et on cherchera une relation de la forme : $y'=\beta_1 y+\beta$.

On trouve :

$$\gamma_0\beta_1'''+(4\gamma_0\beta_1+\gamma_1)\beta_1''+\left(3\gamma_0\beta_1'+6\gamma_0\beta_1^2+3\gamma_1\beta_1+\gamma_2\right)\beta_1'+\gamma_3\beta_1$$
$$+\left(\gamma_0\beta_1^2+\gamma_1\beta_1+\gamma_2\right)\beta_1^2+\gamma_4=0$$

Ch. II : Etude du second ordre.

II.1 : Les conditions aux limites sont celles du N° I.7 dans le cas particulier où $c_{10} = \bar{c}_{10} = -1$

On étudiera le problème proposé en fonction des conditions de stabilité et compte tenu de la symétrie du problème, à savoir que l'on peut fixer les fonctions auxiliaires de résolution soit au point $x=0$, soit au point $x=\ell$.

L'étude faite précédemment sur la stabilité de la méthode montre l'indépendance des conditions de stabilité dans les problèmes où l'on identifie les fonctions auxiliaires au point $x=0$ et au point $x=\ell$.

Exemple : $y'' = y$ avec $\begin{cases} y'(0) = \beta_{10}\, y(0) + 1 \\ y'(\ell) = \beta_{1\ell}\, y(\ell) - 2 \end{cases}$

On se placera dans le cas où $\beta_0 = -1$.

Les équations de résolution sont les suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1' = 1 - \beta_1^2 & (1) \\ \beta' = -\beta_1 \cdot \beta & (2) \\ y' = \beta_1 y + \beta \end{cases}$$

1e cas : Départ au point $x=0$: Les conditions initiales de (1) et (2) sont $\beta_1(0) = \beta_{10}$ et $\beta(0) = 1$.

Le problème homogène $u'' = u$ avec $u'(0) = \beta_{10}\, u(0)$ donne :

$$u = A\left(e^{x} + C e^{-x}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \text{ constante arbitraire} \\ C = \dfrac{1 - \beta_{10}}{1 + \beta_{10}} \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante d'instabilité est :

$$\begin{cases} C < 0 \ , \quad C = -K \\ 2x = \operatorname{Log} K \ , \quad 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

ce qui entraine $\beta_{10} \leq \dfrac{1+e^{2\ell}}{1-e^{2\ell}}$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité de la méthode est :

$$\boxed{\beta_{10} > \frac{1+e^{2\ell}}{1-e^{2\ell}}}$$

<u>2e cas : Départ au point $x=\ell$: les conditions initiales de (1) et (2) sont $\beta_1(\ell) = \beta_{1\ell}$ et $\beta(\ell) = -2$</u>

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors :

$$\boxed{\beta_{1\ell} < \frac{e^{2\ell}+1}{e^{2\ell}-1}}$$

<u>Exemples Numériques :</u>

<u>1. $\ell = 1$; $\beta_{10} = -1,5$; $\beta_{1\ell} = 1$</u>

Les 2 conditions de stabilité sont :

Départ au point $x=0$: $\beta_{10} > \# -1,3$

Départ au point $x=\ell$: $\beta_{1\ell} < \# \ 1,3$

Si dans l'intégration de β_1 et de β on part des valeurs initiales au point $x=0$, les résultats sont abérants ; si, au contraire, on part des valeurs initiales au point $x=\ell$ les résultats sont bons :

Départ en $x=0$ et $x=\ell$. Pas $h=0,1$.

x	Solᵒ Exacte	Départ en $x=0$	erreur $\times 10^6$	Départ en $x=\ell$	erreur $\times 10^6$
1	0,609 502	0,894 6		0,609 497	-5
0,9	0,751 833	0,894 6		0,751 829	-4
0,8	0,901 690	0,894 6		0,901 686	-4
0,7	1,060 570	0,900 7		1,060 567	-3
0,6	1,230 066	0,915 8		1,230 063	-3
0,5	1,411 872	0,940 1	incohérence	1,411 870	-2
0,4	1,607 809	0,973 9		1,607 807	-2
0,3	1,819 837	1,017 4		1,819 836	-1
0,2	2,050 079	1,071 0		2,050 078	-1
0,1	2,300 838	1,135 4		2,300 838	0
0	2,574 625	1,211 1		2,574 625	0

2. $\ell=1$; $\beta_{10}=-1,5$; $\beta_{1\ell}=2$

Les conditions de stabilité sont les mêmes que précédemment et les résultats sont abérants quelque soit le point de départ choisi pour l'intégration de β_1 et de β.

C'est ce que montrent les résultats numériques suivants.

Cet exemple illustre un cas où la méthode est impossible à appliquer.

x	Sol Exacte	Départ en $x=0$	erreur $\times 10^6$	Départ en $x=\ell$	erreur $\times 10^6$
1	0,8008	0,8946		1,1549	
0,8	0,8971	0,8946		1,1549	
0,6	1,0294	0,9158	incohérence	1,1549	incohérence
0,4	1,2030	0,9739		1,1768	
0,2	1,4248	1,0710		1,2475	
0	1,7039	1,2111		1,3684	

(Le pas d'intégration était toujours "0,1)

II.2 Les conditions aux limites sont $y(0) = y_0$; $y(\ell) = y_\ell$.

a- Equations de résolution:

Dans le cas particulier où $c_{10} = \bar{c}_{10} = -1$ et où $\beta_0 = -1$ les équations du N° I.7 deviennent:

$$\begin{cases} \gamma_0(\beta_1' + \beta_1^2) + \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 = 0 \\ \gamma_0(\beta' + \beta_1 \cdot \beta) + \gamma_1 \beta + \gamma = 0 \\ y' = \beta_1 y + \beta . \end{cases}$$

Il s'agit d'identifier $y' = \beta_1 y + \beta$ calculée au point $x = 0$ avec $y(0) = y_0$.

Pour cela on écrit $\quad y' = \beta_1 \left(y + \frac{\beta}{\beta_1} \right)$

L'identification donne : $\beta_1(0)$ infini ; $\frac{\beta(0)}{\beta_1(0)} = -y_0$.

On élimine la difficulté introduite par $\beta_1(0)$ infini en posant:

$$\overline{\beta}_1 = \frac{1}{\beta_1} \quad ; \quad \overline{\beta} = \frac{\beta}{\beta_1}$$

Les équations de résolution sont maintenant :

$$\begin{cases} \gamma_0 \overline{\beta}_1' = \gamma_2 \overline{\beta}_1^2 + \gamma_1 \overline{\beta}_1 + \gamma_0 & \text{avec } \overline{\beta}_1(0) = 0 \\ \gamma_0 \overline{\beta}' = \gamma_2 \overline{\beta}_1 \overline{\beta} - \gamma \overline{\beta}_1 & \text{avec } \overline{\beta}(0) = -y_0 \\ y' = \frac{1}{\overline{\beta}_1}(y + \overline{\beta})' & \text{avec } y(\ell)' = y_\ell \end{cases}$$

Remarque : Tout ceci revient à choisir une autre particularisation : $\beta_1 = -1$

b. Etude de la stabilité.

On éliminera les singularités dues aux zéros de $\overline{\beta}_1$ dans l'intervalle $[0, \ell]$.

Une condition nécessaire de stabilité est que $\overline{\beta}_1$ ne devienne pas infini. Or la remarque II du N° I.3 montre que $\beta_1 = \frac{u'}{u}$ si u est la solution du problème homogène associé au problème donné, avec $u(0) = 0$.

Par suite $\overline{\beta}_1 = \frac{u}{u'}$. Cette condition nécessaire de stabilité est donc : $u' \neq 0$ dans l'intervalle $[0, \ell]$

Cette condition est suffisante car l'équation qui fournit $\overline{\beta}$, une fois $\overline{\beta}_1$ connu, est linéaire.

c. Exemples.

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = y(\ell) = 1$

Les équations de résolution sont :

$$\begin{cases} \overline{\beta}_1' = 2\overline{\beta}_1^2 + 3\overline{\beta}_1 + 1 \\ \overline{\beta}' = 2\overline{\beta}_1 \cdot \overline{\beta} \\ y' = \frac{1}{\overline{\beta}_1}(y + \overline{\beta}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{\beta}_1(0) = 0 \\ \overline{\beta}(0) = -1 \\ y(\ell) = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta_1(\ell) = 0 \\ \beta(\ell) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

suivant que l'on a choisi de particulariser $\bar{\beta}_1$ et $\bar{\beta}$ au point $x=0$ ou au point $x=\ell$.

Dans le 1^e cas la condition de stabilité est : $\underline{\ell < \operatorname{Log} 2}$

Dans le 2^e cas, elle s'écrit $\underline{\operatorname{Log} 2 > 0}$

ce qui est toujours réalisé.

La résolution ne présente pas de caractère d'instabilité. En particulier la méthode est stable pour $\ell = 1$.

Ces résultats sont illustrés par les exemples numériques ci-après :

Départ au point $x=0$: $h = 0,1$.

$\ell = 0,5$:

x	Sol. Exacte	Sol. approchée	Erreur $\times 10^6$
0,5	1	1	0
0,4	1,034 673	1,034 670	- 3
0,3	1,057 384	1,057 377	- 7
0,2	1,063 419	1,063 393	- 26
0,1	1,046 803	1,046 617	- 186
0	1	1	0

$\ell = 1$:

x	Solution Exacte	Sol. approchée	Erreur $\times 10^6$
1	1	1	0
0,8	1,121 9	$5,4776 \times 10^{12}$	
0,6	1,221 9	$6,0240 \times 10^{12}$	incohérence.
0,4	1,271 0	$5,3761 \times 10^{12}$	
0,2	1,222 2	$3,6099 \times 10^{12}$	
0	1	1	0

Départ au point $x = \ell$. $h = 0,1$.

$\ell = 0,5$:

x	Solution Exacte	Sol. approchée	Erreur $\times 10^6$
0	1	1	0
0,1	1,046 803	1,046779	-24
0,2	1,063 419	1,063 370	-49
0,3	1,057 384	1,057 297	-87
0,4	1,034 673	1,034 406	-267
0,5	1	1	0

$\ell = 1$:

x	Solution Exacte	Sol. approchée	Erreur $\times 10^6$
0	1	1	0
0,2	1,222 153	1,222 133	-20
0,4	1,271 036	1,271 009	-27
0,6	1,221 906	1,221 875	-31
0,8	1,121 920	1,121 882	-38
1	1	1	0

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec : $y(0) = y(\ell) = 1$.

Les équations de résolution sont :

$$\bar\beta_1' = 2\bar\beta_1^2 - 3\bar\beta_1 + 1 \qquad \bar\beta' = 2\bar\beta_1 \cdot \bar\beta \qquad y' = \frac{1}{\bar\beta_1}(y + \bar\beta)$$

avec $\begin{cases} \bar\beta_1(0) = 0 \\ \bar\beta(0) = -1 \\ y(\ell) = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \bar\beta_1(\ell) = 0 \\ \bar\beta(\ell) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Dans le 1e cas la méthode est stable quelque soit ℓ.
Dans le 2e cas la condition de stabilité s'écrit :

$$\ell < \operatorname{Log} 2$$

Des exemples numériques pour $\ell = 0,5$ et $\ell = 1$ sont exposés ci-après :

Départ au point $x = 0$ - $h = 0,1$

$\ell = 0,5$:

x	Solution Exacte	Sol. approchée	Erreur $\times 10^6$
0,5	1	1	0
0,4	1,046 803	1,046 779	- 24
0,3	1,063 419	1,063 370	- 49
0,2	1,057 384	1,057 297	- 87
0,1	1,034 673	1,034 446	- 227
0	1	1	0

$\ell = 1$:

x	Solution Exacte	Sol approchée	Erreur $\times 10^6$
1	1	1	0
0,8	1,222 153	1,222 133	-20
0,6	1,271 036	1,271 009	-27
0,4	1,221 906	1,221 875	-31
0,2	1,121 920	1,121 882	-38
0	1	1	0

Départ au point $x = \ell$ $h = 0,1$

$\ell = 0,5.$

x	Solution exacte	Sol approchée	Erreur $\times 10^6$
0	1	1	0
0,1	1,034 673	1,034 670	-3
0,2	1,057 384	1,057 377	-4
0,3	1,063 419	1,063 393	-26
0,4	1,046 803	1,046 617	-186
0,5	1	1	0

$\ell = 1.$

x	Solution Exacte	Sol.. approchée	Erreur $\times 10^6$
0	1	1	0
0,2	1,121 9	$5,4776 \times 10^{12}$	
0,4	1,221 9	$6,0240 \times 10^{12}$	incohérence
0,6	1,271 0	$5,3760 \times 10^{12}$	:
0,8	1,222 2	$3,6099 \times 10^{12}$	
1	1	1	0

3. Signalons enfin, $y'' = y$ avec $y(0) = y_0$; $y(\ell) = y_\ell$.

dont la résolution n'est jamais instable quelque soit le sens de l'intégration initiale, et quelque soient ℓ, y_0 et y_ℓ.

Un exemple en sera donné au chapitre V, relatif à une évaluation possible de l'erreur globale commise sur y.

Ch III : Etude du 3^e et du 4^e ordre :

Il s'agit essentiellement dans ce chapitre d'étudier la détermination des fonctions β_i et β au moyen des conditions aux limites, quelle que soit la forme de celles-ci.

III.1 : Problèmes du 3^e ordre :

Soit à résoudre : $(\gamma_0 p^3 + \gamma_1 p^2 + \gamma_2 p + \gamma_3)\, y + \gamma = 0$

$$\text{avec} \begin{cases} a_{11}\, y''(0) + a_{12}\, y'(0) + a_{13}\, y(0) = b_1 & (11) \\ a_{21}\, y''(0) + a_{22}\, y'(0) + a_{23}\, y(0) = b_2 & (12) \\ \bar{a}_{21}\, y''(\ell) + \bar{a}_{22}\, y'(\ell) + \bar{a}_{23}\, y(\ell) = \bar{b}_2 & (1) \end{cases}$$

On a vu que la résolution était symétrique. On peut donc considérer ce problème comme un problème (2,1) ou comme un problème (1,2), suivant que l'origine de l'intervalle est le point $x=0$ ou le point $x=\ell$.

III.11 : Problème (1,2) :

On cherche une relation $\beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$

La décomposition fournit pour les β_i et β les équations suivantes :

$$(2) \begin{cases} \gamma_0 (\beta_0' \beta_1 - \beta_0 \beta_1') + (\gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0)\beta_1 - \gamma_0 \beta_0 \beta_2 + \beta_0^2 \gamma_2 = 0 \\ \gamma_0 (\beta_0' \beta_2 - \beta_0 \beta_2') + (\gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0)\beta_2 + \beta_0^2 \gamma_3 = 0 \\ \gamma_0 (\beta_0' \beta - \beta_0 \beta') + (\gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0)\beta + \beta_0^2 \gamma = 0 \\ + \text{ une relation arbitraire entre les } \beta_i \end{cases}$$

Il faut déterminer $\beta_0(\ell)$, $\beta_1(\ell)$, $\beta_2(\ell)$ et $\beta(\ell)$ pour achever de déterminer les fonctions auxiliaires introduites dans la résolution, et ceci à l'aide de la relation (1)

III-111 : 1e méthode :

1e cas : $\bar{a}_{21} \neq 0$: On écrit la relation arbitraire entre les β_i : $\beta_0 = -1$:

$$(2) \text{ devient } (3) \quad \begin{cases} \gamma_0 \beta_1' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1 + \gamma_0 \beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ \gamma_0 \beta_2' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_0 \beta' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Quelles que soient les valeurs de $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{23}$, $\bar{b}_2$, l'identification au point $x = \ell$ détermine $\beta_1(\ell)$, $\beta_2(\ell)$ et $\beta(\ell)$ ($\beta_0(\ell) = -1$)

2e cas : $\bar{a}_{21} = 0$ mais $\bar{a}_{22} \neq 0$: On écrit la relation arbitraire : $\beta_1 = -1$:

$$(2) \text{ devient } (4) \quad \begin{cases} \gamma_0(\beta_0' + \beta_2\beta_0) - (\gamma_1 + \gamma_2\beta_0)\beta_0 - \gamma_0 = 0 \\ \gamma_0(\beta_2' + \beta_2^2) - (\gamma_3 + \gamma_2\beta_2)\beta_0 = 0 \\ \gamma_0(\beta' + \beta_2\beta) - (\gamma + \gamma_2\beta)\beta_0 = 0 \end{cases}$$

L'identification de la solution :

$$(5) \qquad \beta_0 y'' - y' + \beta_2 y + \beta = 0$$

Calculée au point $x = \ell$ avec la condition (1) fournit :

$$\beta_0(\ell) = 0 \;;\; \beta_2(\ell) = \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \;;\; \beta(\ell) = -\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \qquad (\beta_1(\ell) = -1)$$

Ce qui permet d'achever l'intégration de (4).

L'équation (5) peut avoir un point singulier à l'extrémité de l'intervalle d'intégration.

3^e cas : $\bar{a}_{21} = \bar{a}_{22} = 0$: la condition devient $y(\ell) = y_\ell$.

On écrit la relation arbitraire $\beta_2 = -1$

(2) devient (6) $\begin{cases} \gamma_0(\beta_0' + \beta_1) - \beta_0(\gamma_1 + \beta_0\gamma_3) = 0 \\ \gamma_0(\beta_1' - 1) - \beta_0(\gamma_2 + \beta_1\gamma_3) = 0 \\ \gamma_0\beta' - \beta_0(\gamma + \beta\gamma_3) = 0 \end{cases}$

L'identification de la solution :

$$(7) \qquad \beta_0 y'' + \beta_1 y' - y + \beta = 0$$

Calculée au point $x = \ell$ avec la condition $y(\ell) = y_\ell$ fournit $\beta_0(\ell) = \beta_1(\ell) = 0$, $\beta(\ell) = y_\ell$ $\quad (\beta_2(\ell) = -1)$ ce qui permet d'achever l'intégration de (6). L'équation (7) peut avoir un point singulier à l'extrémité de l'intervalle d'intégration ; mais ici on connait $y(\ell)$.

Il reste à résoudre : $\beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$

avec : $\begin{cases} a_{11} y''(0) + a_{12} y'(0) + a_{13} y(0) = b_1 \\ a_{21} y''(0) + a_{22} y'(0) + a_{23} y(0) = b_2 \end{cases} \quad (8)$

On écrit $\beta_0(0).y''(0) + \beta_1(0).y'(0) + \beta_2(0)\, y(0) + \beta(0) = 0$ et si les conditions (8) sont distinctes et compatibles, il est toujours possible de déterminer $y'(0)$ et $y(0)$. Il suffit en effet de résoudre :

$$\begin{cases} \left(a_{12}\beta_0(0) - a_{11}\beta_1(0)\right) y'(0) + \left(a_{13}\beta_0(0) - a_{11}\beta_2(0)\right) y(0) = b_1\beta_0(0) + a_{11}\beta(0) \\ \left(a_{22}\beta_0(0) - a_{21}\beta_1(0)\right) y'(0) + \left(a_{23}\beta_0(0) - a_{21}\beta_2(0)\right) y(0) = b_2\beta_0(0) + a_{21}\beta(0) \end{cases}$$

III.112 : 2^e méthode :

La relation arbitraire entre les β_i s'écrit

$$\beta_0' + \beta_1 = 0$$

(2) devient (9)
$$\begin{cases} \beta_0' + \beta_1 = 0 \\ \gamma_0 (\beta_1' + \beta_2) + \gamma_1 \beta_1 - \gamma_2 \beta_0 = 0 \\ \gamma_0 \beta_2' + \gamma_1 \beta_2 - \gamma_3 \beta_0 = 0 \\ \gamma_0 \beta' + \gamma_1 \beta - \gamma \beta_0 = 0 \end{cases}$$

l'identification de la solution

$$(10) \qquad \beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$$

calculée au point $x = \ell$, avec la condition (1) fournit à un facteur près $\beta_i(\ell)$, $i = 0, 1, 2$ et $\beta(\ell)$ dans les 3 cas étudiés par la 1e méthode. On trouve les mêmes réserves quant aux **singularités possibles** de l'equation (10) à l'extrémité de l'intervalle d'intégration.

III 12 : Problème (2, 1)

III 121 : 1e méthode :

On cherche une relation $\beta_0 y' + \beta_1 y + \beta = 0$

La décomposition fournit pour les β_i et β les équations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_0 \beta_0 (\beta_1 \beta_0'' - \beta_0 \beta_1'') + (3\gamma_0 \beta_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0^2 + 2\gamma_0 \beta_0' \cdot \beta_0) \beta_1' + \\ (\gamma_1 \beta_0 \beta_0' - 2\gamma_0 \beta_0'^2 - \gamma_2 \beta_0^2) \beta_1 + (\gamma_1 \beta_0 - \gamma_0 \beta_1 - 3\gamma_0 \beta_0') \beta_1^2 + \beta_0^3 \gamma_3 = 0 \\ \\ \gamma_0 \beta_0 (\beta \cdot \beta_0'' - \beta_0 \beta'') + (\gamma_0 \beta_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0^2 + 2\gamma_0 \beta_0' \beta) \beta' + [\gamma_0 (2 \beta_0 \beta_1' \\ - \beta_1^2 - 3 \beta_0' \beta_1 - 2\beta_0'^2) + \gamma_1 (\beta_0 \beta_1 + \beta_0 \beta_0') - \gamma_2 \beta_0^2] \beta + \beta_0^3 \gamma = 0 \\ + 1 \text{ relation arbitraire entre } \beta_0 \text{ et } \beta_1 \end{cases}$$

Il faut déterminer $\beta_0(0)$, $\beta_1(0)$, $\beta(0)$ ainsi que $\beta_0'(0)$, $\beta_1'(0)$, $\beta'(0)$ au moyen des relations (11) et (12) pour achever de déterminer les fonctions auxiliaires introduites par le procédé de résolution. Ces relations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} y''(0) \\ y'(0) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} b_1 - a_{13}\, y(0) \\ b_2 - a_{23}\, y(0) \end{matrix}\right\|$$

<u>1e cas :</u> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

On écrit la relation arbitraire entre les β_i : $\beta_0 = -1$

Les équations de résolution deviennent :

$$(13)\ \begin{cases} \gamma_0 \beta_1'' + (3\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta_1' + \gamma_2 \beta_1 + (\gamma_1 + \gamma_0 \beta_1)\beta_1^2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_0 \beta'' + (\gamma_0 \beta_1 + \gamma_1)\beta' + [2\gamma_0 \beta_1' + \beta_1^2 \gamma_0 + \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2]\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Quelle que soit la colonne des seconds membres, l'identification fournit d'une et d'une seule manière :

$$\beta_1(0)\,,\ \beta(0)\,,\ \beta_1'(0)\,,\ \beta'(0)$$

Il reste à résoudre : $y' = \beta_1 y + \beta$

avec la relation (1).

On écrit

$$y'(l) = \beta_1(l)\, y(l) + \beta(l)$$

$$y''(l) = \left(\beta_1^2(l) + \beta_1'(l)\right) y(l) + \beta_1(l) \cdot \beta(l) + \beta'(l)$$

On porte ces 2 valeurs dans (1) et il vient :

$$y(l) = \frac{\bar{b}_2 - \bar{a}_{21}(\beta_1(l) \cdot \beta(l) + \beta'(l)) - \bar{a}_{22}\, \beta(l)}{\bar{a}_{21}(\beta_1^2(l) + \beta_1'(l)) + \bar{a}_{22}\, \beta_1(l) + \bar{a}_{23}}$$

<u>2e cas :</u> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$

a. Relations incompatibles : Cas exclu.

b. Relations se ramenant à 1 seule : Cas exclu.

c. $a_{11} = a_{21} = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sinon on est dans l'un des 2 cas exclus.

Les conditions deviennent $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{cases}$

On écrit la relation arbitraire entre les β_i : $\beta_1 = -1$

L'identification est possible mais les équations différentielles fournissant β_0 et β ont un point singulier à l'origine.

d. $a_{11} = a_{12} = 0$

Les conditions deviennent : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ a_{21} y''(0) + a_{22} y'(0) = b_2 - a_{23} y_0 \end{cases}$

Il n'a pas été possible de trouver un moyen d'identification dans ce dernier cas particulier.

III 122 : 2e méthode :

La méthode consiste à éliminer une condition à l'origine en transformant le problème donné par la méthode de décomposition de l'opérateur. On obtient un problème (1,1) que l'on sait traiter.

Les conditions sont celles du N° III 121 1e cas :

Le problème (1,1) est le suivant :

(14) $\beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$ avec $\begin{cases} a^*_{22}\, y'(0) + a^*_{23}\, y(0) = b^*_2 \\ \bar{a}_{21}\, y''(\ell) + \bar{a}_{22}\, y'(\ell) + \bar{a}_{23}\, y(\ell) = \bar{b}_2 \end{cases}$

Les fonctions β_i et β sont fournies par les équations (2)

avec : $\beta_0(0) = \lambda . a_{11}$ $\qquad \beta_1(0) = \lambda . a_{12}$

$\beta_2(0) = \lambda . a_{13}$ $\qquad \beta(0) = -\lambda . b_1$.

Valeurs obtenues par identification à l'aide de la condition (11).

$\beta_0(0)$ étant $\neq 0$, la méthode n'introduit pas de singularité à l'origine pour le problème (14).

<u>Les conditions sont celles du N° 121 2e cas C :</u>

Les conditions à l'origine sont $\begin{cases} y'(0) = y'_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Le problème (1,1) est le suivant :

(15) $\beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$ avec $\begin{cases} y'(0) = y_0 \\ \bar{a}_{21}\, y''(\ell) + \bar{a}_{22}\, y'(\ell) + \bar{a}_{23}\, y(\ell) = \bar{b}_2 \end{cases}$

$\beta_0(0) = 0$, par conséquent la méthode introduit une singularité à l'origine pour le problème (15).

<u>Les conditions sont celles du N° 121 2e cas d :</u>

Les conditions à l'origine sont : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ a_{21}\, y''(0) + a_{22}\, y'(0) = b_2 - a_{23}\, y_0 \quad (16) \end{cases}$

La méthode est la même que dans les cas précédents.

L'identification avec la condition (16) n'introduit pas de points singuliers à l'origine :

$\beta_0(0) = \lambda . a_{21}$ $(\neq 0)$ $\qquad \beta_1(0) = \lambda . a_{22}$

$\beta_2(0) = \lambda . a_{23}$ $\qquad \beta(0) = -\lambda . b_2$

Remarque : Cette méthode permet de résoudre le dernier cas resté sans solution avec la 1e méthode.

III 2 : Problèmes du 4e ordre :

Les conditions aux limites peuvent être distribuées : $\begin{cases} 1^e : 3 \text{ à une extrémité, } 1 \text{ à l'autre} \\ 2^e : 2 \text{ à chaque extrémité.} \end{cases}$

En outre un problème du 4e ordre avec les conditions du 1e peut être traité comme un problème (3, 1) ou comme un problème (1, 3).

III.21 : Problèmes (1,3) et (3,1)

Soit à résoudre : $(\gamma_0 p^4 + \gamma_1 p^3 + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p + \gamma_4) y + \gamma = 0$

$$\text{avec} : \begin{cases} a_{11} y'''(0) + a_{12} y''(0) + a_{13} y'(0) + a_{14} y(0) = b_1 & (20) \\ a_{21} y'''(0) + a_{22} y''(0) + a_{23} y'(0) + a_{24} y(0) = b_2 & (21) \\ a_{31} y'''(0) + a_{32} y''(0) + a_{33} y'(0) + a_{34} y(0) = b_3 & (22) \\ \bar{a}_{31} y'''(l) + \bar{a}_{32} y''(l) + \bar{a}_{33} y'(l) + \bar{a}_{34} y(l) = \bar{b}_3 & (17) \end{cases}$$

III 211 : Problème (1,3) :

On cherche une relation :

$$(18) \qquad \beta_0 y''' + \beta_1 y'' + \beta_2 y' + \beta_3 y + \beta = 0$$

La décomposition fournit pour les β_i et pour β les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
\gamma_0\left(\beta_1^2+\beta_1\beta_0'-\beta_0\beta_1'-\beta_0\beta_2\right)-\beta_0\beta_1\gamma_1+\beta_0^2\gamma_2=0\\
\gamma_0\left(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_0'-\beta_0\beta_2'-\beta_0\beta_3\right)-\beta_0\beta_2\gamma_1+\beta_0^2\gamma_3=0\\
\gamma_0\left(\beta_1\beta_3+\beta_3\beta_0'-\beta_0\beta_3'\right)-\beta_0\beta_3\gamma_1+\beta_0^2\gamma_4=0\\
\gamma_0\left(\beta_1\beta+\beta\beta_0'-\beta_0\beta'\right)-\beta_0\beta\gamma_1+\beta_0^2\gamma=0\\
+\text{ une relation arbitraire entre les } \beta_i
\end{array}\right.$$

Il faut déterminer $\beta_i(\ell)$, $i=0,1,2,3$ et $\beta(\ell)$ pour achever de déterminer les fonctions auxiliaires introduites dans la résolution, et ceci à l'aide de la relation (17)

<u>1e méthode:</u> C'est la méthode du N° III 111.

Selon que l'on a,

$\bar{a}_{31}\neq 0$

$\bar{a}_{31}=0$ mais $\bar{a}_{32}\neq 0$

$\bar{a}_{31}=\bar{a}_{32}=0$ mais $\bar{a}_{33}\neq 0$

$\bar{a}_{31}=\bar{a}_{32}=\bar{a}_{33}=0$ mais $\bar{a}_{34}\neq 0$

On choisit pour la relation arbitraire, respectivement:

$\beta_0=-1$; $\beta_1=-1$; $\beta_2=-1$; $\beta_3=-1$

L'identification de la solution (18) calculée au point $x=\ell$, avec la condition (17) permet dans chacun des cas ci-dessus d'achever la détermination des β_i correspondants.

<u>Seule difficulté:</u> L'équation (18) peut avoir un point singulier à l'extrémité de l'intervalle d'intégration

<u>2e méthode:</u> La relation arbitraire entre les β_i s'écrit:

$\beta_0'+\beta_1=0$

La méthode du N° 112 se généralise sans difficulté aux problèmes du 4e ordre (1,3).

Il reste à résoudre $\beta_0 y''' + \beta_1 y'' + \beta_2 y' + \beta_3 y + \beta = 0$ avec les conditions (20), (21), (22).

On écrit $\beta_0(0).y'''(0) + \beta_1 y''(0) + \beta_2(0).y'(0) + \beta_3(0) y(0) + \beta(0) = 0$ et si les conditions (20), (21), (22) sont distinctes et compatibles il est toujours possible de déterminer $y''(0)$, $y'(0)$ et $y(0)$.

III 212 : Problème (3,1) :

1e méthode : On cherche une relation :

$$\beta_0 y' + \beta_1 y + \beta = 0$$

La décomposition fournit pour les β_i et β les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{vmatrix}
\beta_0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \\
\beta_1 + 3\beta_0' & \beta_0 & 0 & 0 & \gamma_1 \\
\beta_2 + 3\beta_1' + 3\beta_0'' & \beta_1 + 2\beta_0' & \beta_0 & 0 & \gamma_2 \\
\beta_3 + 3\beta_2' + 3\beta_1'' + \beta_0''' & \beta_2 + 2\beta_1' + \beta_0'' & \beta_1 + \beta_0' & \beta_0 & \gamma_3 \\
\beta_1''' & \beta_1'' & \beta_1' & \beta_1 & \gamma_4
\end{vmatrix} = 0 \\[2em]
\begin{vmatrix}
\beta_0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \\
\beta_1 + 3\beta_0' & \beta_0 & 0 & 0 & \gamma_1 \\
\beta_2 + 3\beta_1' + 3\beta_0'' & \beta_1 + 2\beta_0' & \beta_0 & 0 & \gamma_2 \\
\beta_3 + 3\beta_2' + 3\beta_1'' + \beta_0''' & \beta_2 + 2\beta_1' + \beta_0'' & \beta_1 + \beta_0' & \beta_0 & \gamma_3 \\
\beta''' & \beta'' & \beta' & \beta & \gamma
\end{vmatrix} = 0 \\[1em]
\text{+ une relation arbitraire entre les } \beta_i : \beta_0 \text{ et } \beta_1.
\end{array}\right.$$

Il faut déterminer :

$$\beta_0(0)\ ,\ \beta_1(0)\ ,\ \beta(0)$$
$$\beta'_0(0)\ ,\ \beta'_1(0)\ ,\ \beta'(0)$$
$$\beta''_0(0)\ ,\ \beta''_1(0)\ ,\ \beta''(0)\ .$$

au moyen des relations (20), (21), (22) pour achever de déterminer les fonctions auxiliaires introduites par le procédé de résolution. Ces relations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y'''(0) \\ y''(0) \\ y'(0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 - a_{14}\, y(0) \\ b_2 - a_{24}\, y(0) \\ b_3 - a_{34}\, y(0) \end{Vmatrix}$$

__1e cas:__ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

On suppose $\beta_0 = -1$; les équations deviennent celles du N° I.7

Quelle que soit la colonne des seconds membres, l'identification fournit d'une et d'une seule manière les grandeurs cherchées.

__2e cas:__ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

__a - Relations incompatibles__ : cas exclu

__b - Relations se ramenant à une ou à deux__ : cas exclu

__c - L'une des lignes est nulle, par exemple la 1e.__

Les conditions sont alors :
$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ a_{21}\, y'''(0) + a_{22}\, y''(0) + a_{23}\, y'(0) = b_2 - a_{24} y_0 \\ a_{31}\, y'''(0) + a_{32}\, y''(0) + a_{33}\, y'(0) = b_3 - a_{34} y_0 \end{cases}$$

d. la 1[e] colonne est nulle:

Les conditions deviennent :
$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \\ y''(0) = y''_0 \end{cases}$$

e. la 2[e] colonne est nulle.

Les conditions deviennent :
$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \\ y'''(0) = y'''_0 \end{cases}$$

f. la 3[e] colonne est nulle

Les conditions deviennent
$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y''(0) = y''_0 \\ y'''(0) = y'''_0 \end{cases}$$

On a trouvé — seulement dans le cas d — une particularisation de la relation arbitraire entre les β_i $(\beta_1 = -1)$ permettant la détermination par identification des conditions. Mais, dans ce cas, les équations fournissant β_0 et β ont un point singulier à l'origine. Par conséquent aucun des cas particuliers relatifs au problème (3,1) n'a pu être élucidé par cette méthode.

Il reste à résoudre : $\beta_0\, y' + \beta_1\, y + \beta = 0$ (23)

avec : $\bar{a}_{31}\, y'''(\ell) + \bar{a}_{32}\, y''(\ell) + \bar{a}_{33}\, y'(\ell) + \bar{a}_{34}\, y(\ell) = \bar{b}_3$ (24)

Pour déterminer $y(\ell)$, on procède comme dans le cas d'un problème du 3[e] ordre (2,1), en dérivant (23) 2 fois et en portant les expressions de $y'''(l)$ et de $y''(l)$ dans (24).

2^e Méthode : C'est la méthode du III 122 :

Le problème de défaut est,

$\gamma_0 y^{(4)} + \gamma_1 y''' + \gamma_2 y'' + \gamma_3 y' + \gamma_4 y + \gamma = 0$ avec $\begin{cases} 3 \text{ conditions à l'origine} \\ 1 \text{ condition à l'extrémité} \end{cases}$

On élimine une des 3 conditions à l'origine par l'application de la méthode de décomposition.

On est ramené au problème (2,1) suivant, que l'on sait traiter

(25) $\beta_0 y''' + \beta_1 y'' + \beta_2 y' + \beta_3 y + \beta = 0$ avec $\begin{cases} 2 \text{ conditions à l'origine} \\ 1 \text{ condition à l'extrémité} \end{cases}$

Les β_i et β sont fournis par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \beta_0' + \beta_1 = 0 \\ \gamma_0(\beta_1' + \beta_2) + \beta_1 \gamma_1 - \beta_0 \gamma_2 = 0 \\ \gamma_0(\beta_2' + \beta_3) + \beta_2 \gamma_1 - \beta_0 \gamma_3 = 0 \\ \gamma_0(\beta_3') + \beta_3 \gamma_1 - \beta_0 \gamma_4 = 0 \\ \gamma_0 \beta' + \beta \gamma_1 - \beta_0 \gamma = 0 \end{cases}$$ par exemple.

les $\beta_i(0)$ et $\beta(0)$ restant à préciser

1. Les conditions initiales sont celles du 1^e cas :

Il est toujours possible d'identifier (25), calculé à l'origine avec l'une des conditions initiales de manière à ce que $\beta_0(0)$ soit $\neq 0$.

La méthode n'introduit pas de point singulier.

2. Les conditions sont celles du 2e cas c, e ou f :

La 3e condition est utilisée pour identifier les fonctions β_i et β au point $x = 0$: $\beta_3(0) \neq 0$:
La méthode n'introduit pas de point singulier.

3. Les conditions sont celles du 2e cas d :

Quelle que soit la condition initiale choisie : $\beta_0(0) = 0$ et par suite la méthode introduit une singularité à l'origine pour le problème (25).

Cette méthode est plus efficace que la précédente.

III 22 : Problème (2,2) :

Soit à résoudre : $(\gamma_0 p^4 + \gamma_1 p^3 + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p + \gamma_4) y + \gamma = 0$
avec :

$$\begin{cases} a_{11} y'''(0) + a_{12} y''(0) + a_{13} y'(0) + a_{14} y(0) = b_1 & (26) \\ a_{21} y'''(0) + a_{22} y''(0) + a_{23} y'(0) + a_{24} y(0) = b_2 & (27) \\ \bar{a}_{11} y'''(\ell) + \bar{a}_{12} y''(\ell) + \bar{a}_{13} y'(\ell) + \bar{a}_{14} y(\ell) = \bar{b}_1 & (28) \\ \bar{a}_{21} y'''(\ell) + \bar{a}_{22} y''(\ell) + \bar{a}_{23} y'(\ell) + \bar{a}_{24} y(\ell) = \bar{b}_2 & (29) \end{cases}$$

III 221 : 1e méthode :

Le nombre des conditions étant le même aux 2 extrémités de l'intervalle d'intégration, pour la discussion qui va suivre le choix du point de départ importe peu. On le prendra par exemple au point $x = 0$.

On cherche une relation :

$$\beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y + \beta = 0$$

La décomposition fournit pour les β_i et β les équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l}
\gamma_0\left[\beta_0\beta_1(\beta_2+2\beta_1'+\beta_0'') - \beta_0^2(\beta_1''+2\beta_2') - (\beta_1+2\beta_0')(\beta_1^2+\beta_1\beta_0'-\beta_0\beta_1'-\beta_0\beta_2)\right] \\
+\beta_0\gamma_1(\beta_1^2+\beta_1\beta_0'-\beta_0\beta_1'-\beta_0\beta_2) - \beta_0^2\beta_1\gamma_2+\beta_0^3\gamma_3 = 0 \\
\\
\gamma_0\left[\beta_0\beta_2(\beta_2+2\beta_1'+\beta_0'') - \beta_0^2\beta_2'' - (\beta_1+2\beta_0')(\beta_1\beta_2+\beta_0'\beta_2-\beta_0\beta_2')\right] \\
+\beta_0\gamma_1(\beta_1\beta_2+\beta_0'\beta_2-\beta_0\beta_2') - \beta_0^2\beta\gamma_2+\beta_0^3\gamma_4 = 0 \\
\\
\gamma_0\left[\beta_0\beta(\beta_2+2\beta_1'+\beta_0'') - \beta_0^2\beta'' - (\beta_1+2\beta_0')(\beta_1\beta+\beta_0'\beta-\beta_0\beta')\right] \\
+\beta_0\gamma_1(\beta_1\beta+\beta\beta_0'-\beta_0\beta') - \beta_0^2\beta\gamma_2+\beta_0^3\gamma = 0 \\
\\
+\ \text{une relation arbitraire entre les } \beta_i.
\end{array}\right.$$

Il faut déterminer $\beta_0(0)$, $\beta_1(0)$, $\beta_2(0)$, $\beta(0)$

$\beta_0'(0)$, $\beta_1'(0)$, $\beta_2'(0)$, $\beta'(0)$

pour achever de déterminer les fonctions auxiliaires introduites dans la résolution, et ceci à l'aide des relations (26) et (27)

Ces relations s'écrivent sous forme matricielle:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} y'''(0) \\ y''(0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 - a_{13}\,y'(0) - a_{14}\,y(0) \\ b_2 - a_{23}\,y'(0) - a_{24}\,y(0) \end{Vmatrix}$$

<u>1e cas</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

On considère le cas où la relation arbitraire entre les β_i

s'écrit simplement : $\beta_0 = -1$.

Les équations sont celles du N° I 7.

Quelle que soit la colonne des seconds membres, l'identification fournit d'une manière et d'une seule les grandeurs cherchées.

2e cas : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$

a - Relations incompatibles : Cas exclu

b - Relations se ramenant à une seule : Cas exclu

c - $a_{11} = a_{21} = 0$

Les conditions deviennent $\begin{cases} y'(0) + A\,y(0) + B = 0 \\ y''(0) + C\,y(0) + D = 0 \end{cases}$

On écrit la relation arbitraire entre les β_i : $\beta_1 = -1$.

On peut identifier et on est conduit à un système présentant un point singulier à l'origine.

d - $a_{11} = a_{12} = 0$

Les conditions deviennent : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ a_{21}\,y'''(0) + a_{22}\,y''(0) + a_{23}\,y'(0) = b_2 - a_{24}\,y_0 \end{cases}$

Il n'a pas été possible de trouver un moyen d'identification.

Il reste à résoudre : $\beta_0\,y'' + \beta_1\,y' + \beta_2\,y + \beta = 0$ (30)

avec les relations (28) et (29) à partir desquelles il faut déterminer $y(\ell)$ et $y'(\ell)$.

On a déjà résolu un problème semblable dans le cas du 3^e ordre (1,2) N° III 11.
Il suffit de calculer la dérivée de (30) au point $x = \ell$.

III 222 : 2^e méthode :

C'est la méthode du N° III 122.
L'élimination d'une condition par la méthode de décomposition de l'opérateur conduit à un problème du 3^e ordre qui peut être un problème (2,1) ou (1,2) que l'on sait traiter.
Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on élimine une condition à l'origine.
L'équation à résoudre est : $\beta_0 y''' + \beta_1 y'' + \beta_2 y' + \beta_3 y + \beta = 0$ (31)
les fonctions β_i et β sont fournies par le système différentiel du N° III 211.

Dans le 1^e cas du N° III 211 : la méthode n'introduit aucune singularité

Dans le 2^e cas c : Quelle que soit la condition à l'origine choisie pour l'identification des β_i et de β, on a : $\beta_0(0) = 0$
Cette méthode introduit une singularité à l'origine pour l'équation (31).

Dans le 2^e cas d : La 2^e condition est utilisée pour identifier les β_i et β au point $x = 0$: $\beta_0(0) \neq 0$.
La méthode n'introduit aucune singularité.

Ch IV : Conclusions tirées de l'étude des cas particuliers

Il s'agit, dans ce chapitre, de dégager des conclusions concernant l'efficacité de la méthode dans certains cas où les conditions initiales ne sont pas de la forme (5) du N° I.3.

IV.1: Problème $(1, n-1)$:

Il s'agit de la généralisation de la méthode présentée au N° III.112. L'origine est choisie au point $x = \ell$.

Soit à résoudre:

$\gamma_0 y^{(n)} + \gamma_1 y^{(n-1)} + \dots + \gamma_n y + \gamma = 0$ avec : $\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ condition à l'origine} \\ n-1 \text{ conditions à l'extrémité} \end{array}\right.$

On est conduit à résoudre le problème de conditions initiales

$$(1) \qquad \beta_0 y^{(n-1)} + \beta_1 y^{(n-2)} + \dots + \beta_{n-1} y + \beta = 0$$

avec les $n-1$ conditions à l'extrémité de l'intervalle

les β_i et β sont fournis par le système différentiel suivant:

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_0' + \beta_1 = 0 \\
\gamma_0(\beta_1' + \beta_2) + \beta_1\gamma_1 - \gamma_2\beta_0 = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - \\
\gamma_0(\beta_{n-2}' + \beta_{n-1}) + \gamma_1\beta_{n-2} - \gamma_{n-1}\beta_0 = 0 \\
\gamma_0\beta_{n-1}' + \gamma_1\beta_{n-1} - \gamma_n\beta_0 = 0 \\
\gamma_0\beta' + \gamma_1\beta - \gamma\beta_0 = 0
\end{array}\right.$$

avec des valeurs initiales obtenues par l'identification de (1) avec la condition au point $x = \ell$:

$$\bar{a}_{n-1,1}\, y^{(n-1)}(\ell) + \bar{a}_{n-1,2}\, y^{(n-2)}(\ell) + \dots + \bar{a}_{n-1,n}\, y(\ell) = \bar{b}_{n-1}$$

$\bar{a}_{n-1,2}, \dots, \bar{a}_{n-1,i}, \dots, \bar{a}_{n-1,n}$ étant nuls ou non, si $\bar{a}_{n-1,1} \neq 0$ $\beta_0(\ell)$ est $\neq 0$: la méthode n'introduit pas de singularité à l'extrémité de l'intervalle d'intégration de (1). Par contre si $\bar{a}_{n-1,1} = 0$, $\beta_0(\ell) = 0$ et la méthode introduit une singularité.

IV.2 : Problème (n.m, m) :

Pour la résolution des problèmes dont les conditions initials ne sont pas de la forme (5) du N° I.3, la méthode la plus efficace consiste à éliminer, une à une, par la méthode de décomposition de l'opérateur, certaines conditions à l'origine ou à l'extrémité de l'intervalle d'étude, suivant la forme des conditions aux limites du problème proposé.

Le processus montre que dans certains cas de conditions aux limites particulières, il n'est pas possible d'éviter l'introduction de singularités, ce qui, en dehors du phénomène d'instabilité invoqué plus haut, limite l'emploi de la méthode de décomposition de l'opérateur.

Ch. V : Une évaluation pratique de l'erreur.

On va montrer que la méthode du doublement du pas fournit une évaluation de l'erreur globale commise dans la résolution du problème posé, c'est à dire qu'elle s'applique d'une manière globale à la succession des 2 problèmes de conditions initiales qui sont résolus dans la méthode de décomposition étudiée.

Pour un problème de conditions initiales, la méthode de doublement du pas repose essentiellement sur le fait que :

$$\frac{E_2}{E_1} \# 2^q$$

si E_2 et E_1 sont les erreurs commises dans les intégrations avec les pas respectifs $2h$ et h et si q est l'ordre de la méthode choisie pour intégrer ce problème.

On admettra la validité de cette méthode d'évaluation d'erreur quant à l'erreur globale commise dans l'intégration d'un problème de conditions initiales.

Sans restreindre la généralité, on se placera dans le cas d'un problème aux limites du 2e ordre, étudié dans l'intervalle $[0, l]$.

On évalue par la méthode du doublement du pas les erreurs commises dans l'intégration des fonctions auxiliaires β_1 et β.

Soient : $h^q.b_1$ et $h^q.b$

les parties principales respectives de ces erreurs.

Dans l'intégration en retour, on commet 3 sortes d'erreurs :

- l'erreur d'intégration proprement dite
- l'erreur due au fait que β_1 et β sont faux.
- l'erreur due au fait que la valeur initiale est fausse

1e. La partie principale de l'erreur d'intégration proprement dite est en h^q.

2e. Dans l'intégration en retour, on intègre en fait :

$$y' = (\beta_1 + h^q b_1)\, y + \beta + h^q.b \qquad \text{avec } y(\ell) \text{ donné}$$

au lieu de :

$$u' = \beta_1 u + \beta \qquad \text{avec } u(\ell) \text{ donné.}$$

L'erreur commise $y - u = z$ est fournie par :

$$z' = \beta_1 z + h^q (b_1 y + b) \qquad \text{avec } z(\ell) \text{ donné}$$

dont la solution est en h^q.

3e. $$y(\ell) = \frac{\beta_1(\ell) + h^q.b_1(\ell) + r}{\beta(\ell) + h^q b(\ell) + s} \qquad (r \text{ et } s \text{ sont des constantes})$$

$$z(\ell) = y(\ell) - \frac{\beta_1(\ell) + r}{\beta(\ell) + s} = h^q \frac{b_1(\ell).\beta(\ell) - b(\ell).\beta(\ell) + s.b_1(\ell) - r b(\ell)}{(\beta(\ell) + s)\,(\beta(\ell) + h^q\, b(\ell) + s)}.$$

Donc la partie principale de l'erreur commise sur $y(\ell)$ est en h^q.

Il est à remarquer que cette erreur se traduit, à la fin de l'intégration en retour par une erreur proportionnelle $K\,z(\ell)$ dont la partie principale est encore en h^q.

Toutes les erreurs envisagées ci-dessus ont leur partie principale en h^q, ce qui justifie la validité de la méthode du doublement du pas pour le calcul de l'erreur globale dans la méthode de décomposition.

Les exemples suivants illustrent l'application de cette méthode d'évaluation d'erreur. Les résultats obtenus sur les 3 exemples étudiés montrent le gain d'une décimale sur la valeur calculée avec le pas le plus petit, gain obtenu en tenant compte de la correction apportée par la connaissance de l'erreur évaluée par la méthode du doublement du pas :

Ex. 1 : $y'' = y$ avec $\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{2} y(0) + 1 \\ y'(1) = y(1) - 2 \end{cases}$

x	$y(0,1)$	$y(0,2)$	y amélioré	y exact
1	28,603 704	28,603 274	28,603 733	28,603 732
0,8	23,821 407	23,821 092	23,821 428	23,821 427
0,6	19,995 144	19,994 907	19,995 160	19,995 159
0,4	16,971 356	16,971 167	16,971 369	16,971 368
0,2	14,628 687	14,628 526	14,628 698	14,628 697
0	12,873 118	12,872 971	12,873 128	12,873 127

Ex. 2 : $y'' = y$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

x	$y(0,1)$	$y(0,2)$	y amélioré	y exact
1	1	1	1	1
0,8	0,927 026 7	0,927 039 7	0,927 025 8	0,927 025 9
0,6	0,891 258 7	0,891 292 1	0,891 256 4	0,891 256 7
0,4	0,891 261 6	0,891 346 8	0,891 255 9	0,891 256 7
0,2	0,927 048 0	0,927 423 1	0,927 023 0	0,927 025 9
0	1	1	1	1

<u>Ex 3</u> : $y'' = 4y + 5\sin x$ avec $\begin{cases} y'(0) = y(0) + 1 \\ y'(2) = -2y(2) + 2\sin 2 + \cos 2 \end{cases}$

x	$y(0,1)$	$y(0,2)$	y amélioré	y exact
2	0,909 297 3	0,909 295 9	0,909 297 4	0,909 297 4
1,6	0,999 571 1	0,999 529 4	0,999 573 8	0,999 573 6
1,2	0,932 035 7	0,931 979 7	0,932 040 1	0,932 039 1
0,8	0,717 353 1	0,717 303 1	0,717 356 5	0,717 356 1
0,4	0,389 416 7	0,389 388 8	0,389 418 6	0,389 418 3
0	-0,000 000 7	-0,000 012 1	0,000 000 1	0

Ch. VI : Comparaison avec la méthode du TIR

VI.1: Principe de la méthode du TIR exposé sur un exemple linéaire du second ordre [1]

Soit une équation linéaire $F(y, y', y'', x) = 0$
et 2 conditions aux limites $\begin{cases} V_1(y_0, y'_0) = m_1 \\ V_2(y_1, y'_1) = m_2 \end{cases}$

Tout d'abord on résoud un problème incomplet de conditions initiales: $\begin{cases} F = 0 \\ V_1 = m_1 \end{cases}$

fournissant y^x et y^{xx}, grâce à 2 particularisations successives de la condition $V_1 = m_1$. La solution y dépend linéairement d'un paramètre. On peut donc l'exprimer au moyen de y^x et y^{xx} et l'on écrira:

$$y = \lambda y^x + \mu y^{xx} \qquad \text{avec } \lambda + \mu = 1$$

On porte y dans $V_2 = m_2$, équation qui – compte tenu de $\lambda + \mu = 1$ – fournit λ et μ en général, donc la solution y cherchée.

VI.2: Avantages de la méthode du TIR :

On a vu au N° II 1 l'exemple suivant :

---

(1): Voir à ce sujet : " The Numerical Treatment of Differential Equations " (Collatz . 3e edition)
4.3 : Reduction to initial value problems

$$y'' = y \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y'(0) = -1{,}5\, y(0) + 1 \\ y'(1) = 2\, y(1) - 2 \end{cases}$$

La méthode de décomposition n'est pas applicable quelque soit le point de départ de l'intégration des fonctions auxiliaires β_1 et β.

Par contre la méthode du TIR fournit une intégration tout à fait satisfaisante. C'est ce que montrent les résultats suivants:

$h = 0{,}1$

x	Solution Exacte	Sol approchée	Erreur $\times 10^6$
1	0,800 822	0,800 823	1
0,8	0,897 096	0,897 096	0
0,6	1,029 372	1,029 372	0
0,4	1,202 961	1,202 961	0
0,2	1,424 829	1,424 828	−1
0	1,703 881	1,703 879	−2

VI.3 : Avantages de la méthode de Décomposition

On considérera l'exemple suivant:

$$y'' - 100\,y + 101 \sin x = 0 \qquad (1)$$

avec : $\begin{cases} y'(0) = y(0) + 1 \\ y(\ell) = \sin \ell \end{cases}$

La solution est $y = \sin x$ mais la solution générale de (1) est:

$$y = C_1\, e^{10x} + C_2\, e^{-10x} + \sin x. \qquad (2)$$

Dans une intégration approchée — au bout du 1e pas déjà — la valeur trouvée n'est plus sur l'intégrale cherchée $y = \sin x$ mais sur une intégrale voisine. Celle-ci appartient à la famille (2) dans le cas où C_1 et C_2 ne sont pas simultanément nuls. Les intégrales de la famille (2) s'écartent rapidement les unes des autres à cause du facteur e^{10x}.

La méthode du TIR consiste à "viser", à partir de conditions initiales données, un point précis et à régler les conditions initiales en fonction de l'écart obtenu. Il est évident que plus le faisceau d'intégrales voisines est divergent, plus le point obtenu en fin d'intégration est différent du point visé, car une faible erreur au départ entraîne un gros écart à la fin de l'intégration.

Cet exemple est donc particulièrement défavorable pour illustrer la méthode du TIR et en fait, les résultats obtenus par cette méthode sont rapidement faux et même incohérents.

La méthode de décomposition fournit par contre pour cet exemple une solution beaucoup plus satisfaisante.

En effet il s'agit de résoudre :

$$\beta_1' = 100 - \beta_1^2 \qquad \text{avec} \quad \beta_1(0) = 1$$

$$\beta' = -\beta_1 \beta - 101 \sin x \qquad \text{avec} \quad \beta(0) = 1$$

puis $$y' = \beta_1 y + \beta \qquad \text{avec} \quad y(\ell) = \sin \ell .$$

Pour ces 3 intégrations successives, la propagation de l'erreur est réglée par la fonction β_1 :

$$\beta_1 = 10 \, \frac{11 e^{20x} - 9}{11 e^{20x} + 9}$$

Cette fonction est pratiquement égale à 10 en dehors des valeurs correspondant à $x \in [-0{,}2 \, , \, 0{,}2]$

L'intégration approchée de β_1 est très précise sauf tout au début de l'intégration parceque β_1 varie très vite.

D'autre part les facteurs de propagation (1) sont :

pour la 1e intégration : $e^{-2\int_0^x \beta_1(x)\,.\,dx}$

pour la 2e : $e^{-\int_0^x (\beta_1(x) + 101 \sin x)\,dx}$

pour la 3e : $e^{\int_\ell^{\ell-x} \beta_1(x)\,.\,dx}$ mais l'intégration a lieu en sens inverse.

L'erreur de propagation devient donc rapidement négligeable pour les 3 intégrations

β_1 est pratiquement connu exactement.

Par conséquent les intégrations de β puis de y sont, elles aussi, très précises.

Les résultats obtenus montrent en effet la supériorité de la méthode de décomposition sur la méthode du TIR dans les exemples de ce type :

---

(1) Rappel : Pour une équation différentielle $y' = Y(y,t)$, on appelle facteur de propagation : $\lambda = e^{\int_{t_0}^{t} Y'_y(y,t)\,dt}$

Ex. 1 : $\ell = 4$. $h = 0{,}05$

x	Sol. Exacte	TIR	Erreur $\times 10^6$	Décomposition	Erreur $\times 10^6$
4	$-0{,}756\,802$	$-2{,}681 \times 10^{7}$	incohérence	$-0{,}756\,803$	-1
3	$0{,}141\,120$	$-1{,}221 \times 10^{3}$	"	$0{,}141\,119$	-1
2	$0{,}909\,297$	$0{,}352\,864$	"	$0{,}909\,290$	-7
1	$0{,}841\,471$	$0{,}841\,440$	31	$0{,}841\,463$	-8
0	0	$-0{,}000\,007$	7	$0{,}000\,072$	72

Ex 2 : $\ell = 6$ - $h = 0{,}05$

x	Sol. Exacte	TIR	Erreur $\times 10^6$	Décomposition	Erreur $\times 10^6$
6	$-0{,}279\,415$	$-1{,}292 \times 10^{16}$	incohérence	$-0{,}279\,416$	-1
5	$-0{,}958\,924$	$-5{,}885 \times 10^{11}$	"	$-0{,}958\,916$	8
4	$-0{,}756\,802$	$-2{,}681 \times 10^{7}$	"	$-0{,}756\,796$	6
3	$0{,}141\,120$	$-1{,}221 \times 10^{3}$	"	$0{,}141\,119$	-1
2	$0{,}909\,297$	$0{,}352\,862$	"	$0{,}909\,290$	-7
1	$0{,}841\,471$	$0{,}841\,440$	31	$0{,}841\,463$	-8
0	0	$-0{,}000\,007$	7	$0{,}000\,072$	72

VU :

Grenoble le

Le Président de la Thèse

VU :

Grenoble le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer :

Grenoble le

Le Recteur de l'Académie de Grenoble