Etude des structures statistiques associées aux lois de Von Mises

Serge Dégerine

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
«MATHEMATIQUES APPLIQUEES»

Serge DEGERINE

ETUDE DES STRUCTURES STATISTIQUES ASSOCIEES AUX LOIS DE VON MISES

Soutenue le 12 mars 1975 devant la Commission d'Examen

Président : Monsieur J.R. BARRA

Examinateurs
Monsieur H. CAUSSINUS
Monsieur G. ROMIER
Monsieur B. VAN CUTSEM

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE		INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
M. Michel SOUTIF	Présidents	M. Louis NEEL
M. Gabriel CAU	Vice-Présidents	MM. Lucien BONNETAIN Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligrap
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	ELectrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrométallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	ELectronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND Françis	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	ELectrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophisique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIERE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées

Fait à Saint Martin d'Hères JANVIER 1974

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur J.R. BARRA pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Messieurs les Professeurs H. CAUSSINUS, Directeur du Laboratoire de Statistique à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et G. ROMIER qui ont bien voulu accepter de prendre part au jury.

Monsieur le Professeur B. VAN CUTSEM qui, par ses conseils et encouragements, m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie Mademoiselle ROCHE qui a assuré la dactylographie du manuscrit, ainsi que le personnel du service de reprographie du Laboratoire qui a réalisé le tirage.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici concerne un domaine très particulier de la statistique : celui dans lequel les observations sont des directions.

Lorsque ces directions sont coplanaires, elles sont naturellement représentées par des points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, de même la sphère unité de $\mathbb{R}^s$ s'identifie à l'ensemble des directions de l'espace $\mathbb{R}^s$.

Les lois de probabilité de von Mises décrivent certains de ces phénomènes aléatoires directionnels et semblent devoir jouer, dans ce domaine, un rôle analogue à celui que tiennent les lois normales pour des observations ponctuelles.

La loi de von Mises s-dimensionnelle est une sorte de loi d'erreur par rapport à une direction privilégiée appelée direction modale ; elle est de révolution, c'est-à-dire invariante par rotation autour de cette direction. La "densité" de probabilité est maximum au voisinnage de la direction modale et va en diminuant lorsqu'on se rapproche de la direction opposée, parfois appelée antimode ; cette asymétrie est mesurée par un paramètre dit de concentration. Celui-ci varie entre zéro et l'infini ; la valeur zéro correspond à la répartition uniforme qui est un cas singulier dans lequel la direction modale n'est évidemment pas définie ; lorsque ce paramètre augmente, la masse de probabilité se concentre au voisinage de la direction modale.

La loi de von Mises est apparue en 1918 dans le cas particulier des directions coplanaires. Etant donné un certain nombre de directions, représentées par des points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, on définit la direction moyenne comme étant celle de la résultante des vecteurs unitaires correspondants.
Von Mises montra alors que la loi de probabilité définie sur $[0,2\pi[$ par la densité :

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_o(k)} \exp\{k \cos(\theta-\theta_o)\}$$

était la seule loi d'erreur qui, sous certaines hypothèses de régularité, admettait comme estimateur de maximum de vraisemblance de sa direction modale θ_o, la direction moyenne donnée par la résultante. Cette idée lui fût suggérée par la propriété analogue satisfaite par la loi normale sur $\mathbb{R}$ que GAUSS avait mise en évidence. Un exposé de la méthode de VON MISES est donné dans [10].

En 1931, PÓLYA ([24]) établit une caractérisation de la loi de GAUSS à partir de deux manières d'estimer le paramètre de localisation dans une loi d'erreur ; il précise également que la méthode conduit, dans le cas de variables angulaires, à la loi de von Mises sur le cercle.

Ces similitudes conduirent GUMBEL, GREENWOOD et DURAND en 1953 à la baptiser "loi circulaire normale" ; dans cet article ([10]), les auteurs donnent l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de concentration k ainsi qu'une table permettant de le calculer.

En utilisant la même méthode que VON MISES, ARNOLD ([1]) obtient en 1941 la loi sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ définie par la densité :

$$f(\theta,\varphi) = \frac{k \sin\theta}{4\pi \operatorname{sh} k} \exp k\{\cos\theta \cos\theta_o + \sin\theta \sin\theta_o \cos(\varphi-\varphi_o)\} \quad ;$$

il s'agit de la loi de von Mises 3-dimensionnelle ; elle porte également le nom de FISHER, qui fut le premier, en 1953, à entreprendre son étude ([7]) .

Dans sa thèse, ARNOLD examine également les lois obtenues sur le cercle et la sphère de $\mathbb{R}^3$ comme solutions des équations de diffusion de la chaleur ; cette méthode, équivalente à l'étude du mouvement Brownien, conduit à la loi normale sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$; par contre, elle n'aboutit pas aux lois de von Mises ou Fisher dans le cas du cercle ou de la sphère ; sur le cercle, elle donne la loi normale enroulée.

Les lois de von Mises et Fisher ont été généralisées à la sphère unité de $\mathbb{R}^s$ par STEPHENS en 1962 ([27]) ; la loi de von Mises s-dimensionnelle est alors définie par sa densité en coordonnées sphériques :

$$f(a_1,\ldots,a_{s-1}) = \frac{k^{\frac{s-2}{2}}}{(2\pi)^{s/2}} \; \frac{\prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1}}{I_{\frac{s-2}{2}}(k)} \exp k \cos a_1$$

où $a_1 = 0$ définit la direction modale.

DOWNS montre en 1965 ([3],[4]) que les lois de von Mises se conservent par certains conditionnements, et que celles de grandes dimensions peuvent être obtenues par rotation de celles de dimensions plus faibles. DOWNS et GOULD donnent en 1967 ([5]) une caractérisation de la loi normale sphérique sur $\mathbb{R}^s$ au moyen des lois de von Mises.

L'étude statistique des lois de von Mises est également très avancée pour ce qui concerne le cercle et la sphère de $\mathbb{R}^3$. Une partie importante est dûe à STEPHENS, qui s'est particulièrement intéressé aux problèmes numériques ; les résultats de sa thèse ([27]) ont, pour la plupart, été publiés ; nous donnons en bibliographie les références de ceux qui se rapportent aux tests et à l'estimation ([28],...,[33]). Les tests d'adéquation, ainsi que ceux portant sur plusieurs échantillons, sont dûs essentiellement à G.S. WATSON.

Le livre de MARDIA ([20]), paru en 1972, regroupe la quasi totalité de la littérature ayant trait aux statistiques de directions, et donne une bibliographie très détaillée sur ce sujet.

De notre côté, nous avons tout d'abord songé à étudier la loi de von Mises dans $\mathbb{R}^2$ comme loi de probabilité sur le groupe des rotations. En parcourant la littérature dans ce domaine ([9],[21],[34],[35]), nous nous sommes aperçus que l'étude des lois de probabilité sur les groupes n'était pas du tout adaptée aux problèmes statistiques : les notions de moyenne et de variance ne sont pas définies. Notons toutefois le travail de RUHIN ([25]) concernant l'estimation d'un paramètre de localisation sur un groupe commutatif ; dans cet article, l'auteur montre que la direction de la résultante des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ est, en un certain sens, un estimateur sans biais de la direction modale de la loi de von Mises.

Une autre approche consiste à définir la loi de von Mises s-dimensionnelle comme loi de probabilité singulière sur l'espace $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$. Le support de cette loi est la sphère unité $S(s,1)$ de $\mathbb{R}^s$:

$$S(s,1) = \{x \in \mathbb{R}^s, \|x\|=1\} .$$

La loi de von Mises s-dimensionnelle est alors exponentielle canonique par rapport à la loi uniforme U_s sur $S(s,1)$:

$$\frac{dP_\theta}{dU_s} = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{L_{U_s}(-\theta)} \quad ;$$

la direction et la norme du vecteur θ représentent respectivement la direction modale et le paramètre de concentration.

C'est sur cette idée que repose tout notre travail ; elle permet en effet d'exposer directement en dimension s l'étude probabiliste et statistique des lois de von Mises. L'estimation et les tests apparaissent de façon naturelle com me applications des méthodes de la statistique classique, et leurs qualités sont mises en évidence. Nous retrouvons ainsi, en les précisant, les résultats connu dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, bien souvent même sous une forme plus générale.

Nous étudions au chapitre I les lois de probabilité qui se rattachent à la résultante X de n vecteurs indépendants de même loi uniforme sur la sphère $S(s,1)$ de $\mathbb{R}^s$. Soit R la norme de X ; en 1906, KLUYVER ([16]) calcule la probabilité $P(R \leq r)$ pour $s = 2$ en résolvant le problème des marches au hasard introduit par PEARSON ([22]). LORD RAYLEIGH ([19]) traite en 1919 le cas $s = 3$ en introduisant le facteur de discontinuité suivant :

$$r\int_0^\infty J_1(rt)\, J_o(\rho t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho < r \\ 0 & \text{si } \rho > r \end{cases} \quad ;$$

cette méthode est reprise par G.N. WATSON ([38], p.419) et étendue aux autres valeurs de s. DURAND et GREENWOOD ([6]) examinent une approximation lorsque $s = 2$ et utilisent la fonction caractéristique pour le calcul des lois marginales dans ce même cas ([8]).

Pour notre part, nous suivons le cheminement suivant : nous définissons la loi uniforme sur $S(s,1)$ comme loi de probabilité sur l'espace $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; nous calculons sa transformée de Laplace et sa fonction caractéristique.

A partir d'un résultat de VAN DER VAART (théorème I.9.), nous donnons un procédé d'inversion de la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sphérique applicable en particulier lorsque cette fonction n'est pas intégrable en module (corollaire I.11.). Nous obtenons alors directement les lois de X, R et des projections de X sur des sous-espaces.

Le second chapitre est consacré à l'étude probabiliste de la loi de von Mises s-dimensionnelle. Sa forme exponentielle canonique par rapport à la loi uniforme U_s permet d'obtenir sans effort la plupart des résultats comme simple application du chapitre X du livre de BARRA ([2]) . Nous donnons ainsi pour la première fois sa fonction caractéristique. X désignant encore la résultante d'un échantillon issu de cette loi, les lois de probabilité de X, $\|X\|$ et de la projection de X sur un sous-espace vectoriel quelconque sont calculées.

FISHER ([7]) fut le premier, en 1953, à calculer la loi de X lorsque $s = 3$. Il l'obtint en remarquant que la projection Y de X sur la direction modale était exhaustive par rapport au paramètre de concentration. La méthode est utilisée dans les autres dimensions pour calculer les lois de X, $\|X\|$ et Y . On trouve également l'utilisation de la fonction caractéristique de la loi de Y ([8],[27]) en particulier dans le livre de MARDIA ([20]) , où figurent les lois marginales de X pour $s = 2$.

Nous calculons aussi dans ce chapitre les lois de probabilité conditionnelles (paragraphe 3). A partir de X , ou de sa projection sur un sous-espace, on retrouve les lois de von Mises par certains conditionnements ; les résultats de DOWNS ([41]) constituent le cas particulier d'un échantillon de taille 1.

L'introduction des structures statistiques dans ce domaine est nouvelle. Elle est faite à la fin de ce chapitre en même temps que l'étude des propriétés de ces structures.

Les tests unilatéraux et bilatéraux sur structure du type Pólya jouent un rôle essentiel dans l'étude du paramètre de concentration : ils font l'objet du chapitre III. Ce chapitre ne contient aucun résultat nouveau ; néanmoins, il nous a paru nécessaire de les reproduire ici, afin de ne pas détruire l'unité de ce travail.

Les structures du type Pólya constituent une généralisation des structure exponentielles. Elles sont étudiées sous un aspect très général, qui dépasse d loin nos préoccupations, par KARLIN ([11],[12],[13]). De ce fait, il était diff cile de retrouver les résultats précis dont nous avions besoin.

Nous reprenons les définitions et les propriétés importantes données par KARLIN pour nous consacrer ensuite uniquement au cas des tests unilatéraux et bilatéraux. Pour ce faire, nous prenons modèle sur la partie du chapitre XI du livre de BARRA ([2]), qui traite le même sujet dans le cadre des structures exponentielles ; nous pouvons remarquer que la transposition se fait aisément au moyen de quelques modifications.

Le chapitre IV étudie le paramètre de concentration k et se présente comme une application directe du chapitre précédent.

La projection de la résultante sur la direction modale est une statistique exhaustive (pour k) et induit une structure exponentielle scalaire. Ceci permet, lorsque la direction modale est connue, de construire des tests U.M.P. ou U.M.P.B. analogues à ceux que l'on connait sur la moyenne d'une loi normale lorsque la vairance est connue.

Lorsque la direction modale est inconnue, le problème est invariant par rotation et la norme R de la résultante est une statistique invariante maximale Nous montrons alors que la structure induite par R est du type Pólya ; les tests sont alors U.M.P. ou U.M.P.B. parmi les tests invariants. Nous montron en fait qu'ils sont en général les seuls qui puissent être U.M.P. ou U.M.P.B. parmi l'ensemble de tous les tests, et ce résultat est nouveau même dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

STEPHENS a donné des tables et des approximations des tests de $k = k_o$ contre $k > k_o$ ou $k = k_o$ contre $k \neq k_o$ dans $\mathbb{R}^2$ ([31]) et $\mathbb{R}^3$ ([32]). MARDIA en a étudié les propriétés ([20]).

Ce chapitre se termine sur l'estimation du paramètre de concentration.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à la direction modale. Celle-ci est représentée par un vecteur unitaire M de $\mathbb{R}^s$. Nous examinons les trois problèmes suivants : tester $M = M_o$ contre $M = M_1$, l'appartenance ou non de M à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ et le test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$.

Lorsque le paramètre de concentration k est connu, les tests se font conditionnellement à la norme de la résultante selon le principe ancillaire de Fisher, sinon il convient de se restreindre à l'ensemble des tests libres par rapport à k . La notion d'invariance est également très utilisée.

G.S. WATSON et WILLIAMS ([39]) construisent le test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$ avec k inconnu dans $\mathbb{R}^2$ en 1956, FISCHER avait déjà résolu ce problème dans $\mathbb{R}^3$ en 1953 ([7]) . STEPHENS donne des tables et des approximations ([28], [29]) . MARDIA ([20]) utilise le principe ancillaire lorsque k est connu, il dégage les propriétés des tests existants et considère le test de $M = M_c$ contre $M = M_1$.

Mis à part l'estimation de la direction modale abordée au chapitre V, la loi de von Mises s-dimensionnelle gagne à être présentée comme loi de probabilité singulière sur l'espace $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$. Sa forme exponentielle simplifie son étude probabiliste mais aussi les problèmes statistiques concernant le paramètre de concentration. A ce sujet, il apparaît que les structures du type Polya-2 (resp. Polya-3) se présentent comme le cadre naturel de l'étude des tests unilatéraux (resp. bilatéraux).

Les notions d'invariance, de statistique ancillaire et de liberté jouent également un rôle important mis en valeur par l'emploi de formalisme de la statistique mathématique introduit par BARRA ([2]). En particulier, l'utilisation systématique des structures statistiques permet de souligner l'introduction de chacune de ces notions dans l'élaboration des différents résultats.

CHAPITRE I

LOI DE PROBABILITE UNIFORME SUR UNE SPHERE DE $\mathbb{R}^s$

Nous étudions ici les lois de probabilité relatives à la somme de vecteurs aléatoires indépendants distribués uniformément sur une sphère.

Dans le premier paragraphe nous définissons la loi de probabilité uniforme sur une sphère de $\mathbb{R}^s$ en tant que loi de probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; nous calculons sa transformée de Laplace et donnons sa fonction caractéristique ainsi que ses premiers moments.

Au paragraphe suivant nous donnons la définition et une caractérisation des lois de probabilité sphériques ; nous obtenons ensuite un procédé d'inversion qui permet de calculer leurs densités à partir de la fonction caractéristique même lorsque celle-ci n'est pas intégrable en module.

Cette méthode, appliquée dans le dernier paragraphe, fournit les densités des lois de probabilité de la somme de vecteurs aléatoires indépendants distribués uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}^s$ et des projections de celle-ci sur des sous-espaces.

Nous notons $\mathcal{B}_E$ la tribu des boréliens d'un espace topologique E.
Pour tout entier k , k' désigne la quantité $\frac{k-2}{2}$.

Une fonction $f(x)$, définie sur $\mathbb{R}^s$, est dite radiale lorsqu'elle ne dépend que de $\|x\|$; nous conservons le même symbole f pour représenter la fonction qu'elle définit sur $\mathbb{R}^+$.

§1 DEFINITION ET PROPRIETES IMMEDIATES

Nous désignons par $S(s,r)$ la sphère de $\mathbb{R}^s$ centrée à l'origine et de rayon r :

$$S(s,r) = \{x \in \mathbb{R}^s ; \|x\|=r\} , \quad s \geq 1 .$$

Soit A_s le sous-espace de $\mathbb{R}^{s-1}$:

$$A_s = [0,\pi]^{s-2} \times [0,2\pi[, \quad s \geq 2 \ ;$$

nous considérons l'application T_r de A_s sur $S(s,r)$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_r : A_s &\longrightarrow S(s,r) \\ a &\longmapsto x = T_r(a) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} x_j = r \cos a_j \prod_{i=1}^{j-1} \sin a_i , & j = 1,\dots,s-1 , \\ x_s = r \prod_{i=1}^{s-1} \sin a_i \ ; \end{cases}$$

T_r est une application bijective bicontinue, donc bimesurable, de $(A_s, \mathcal{B}_{A_s})$ sur $(S(s,r), \mathcal{B}_{S(s,r)})$ admettant pour Jacobien :

$$\mathcal{J}_r(a) = r^{s-1} \prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1} .$$

I.1. <u>Définition</u>.

<u>Soit ν la mesure sur</u> $(A_s, \mathcal{B}_{A_s})$ <u>de densité par rapport à la mesure de Lebesgue</u> :

$$\frac{d\nu}{da} = \frac{\Gamma(s'+1)}{2\,\pi^{s'+1}} \mathcal{J}_1(a) ,$$

où $\Gamma(\zeta)$ est la fonction gamma :

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\zeta-1}\, dt \ , \quad Re(\zeta) > 0 \ , \quad \Gamma(0) = 1 \ ;$$

on appelle loi de probabilité uniforme sur la sphère $S(s,r)$ la loi de probabilité ${}_rU_s$ définie sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ par :

$$\forall B \ , \ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} \ , \ {}_rU_s(B) = \nu[T_r^{-1}(B \cap S(s,r))] \ .$$

${}_rU_1$ sera la loi de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ affectant la valeur $1/2$ à chacune des parties $\{-r\}$ et $\{r\}$; nous noterons simplement U_s la loi ${}_1U_s$ et T l'application T_1 .

Rappelons une propriété classique des lois images très utile ici :

I.2. Proposition.

Pour toute fonction mesurable f , définie sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, à valeurs réelles ou complexes, on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x)\, {}_rU_s(dx) = \int_{A_s} (f \circ T_r)(a)\, d\nu(a) \ ,$$

cette égalité étant prise au sens où, si l'une des intégrales existe, alors l'autre existe et lui est égale .

I.3. Définition ([2], p.164)

Soit m une mesure positive sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, on note D_m le domaine convexe de $\mathbb{R}^s$ définie par :

$$\theta \in D_m \iff \int_{\mathbb{R}^s} e^{-\langle \theta, x\rangle} dm(x) < \infty \ ;$$

si D_m est non vide on appelle transformée de Laplace de m la fonction définie par :

$$L_m(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \zeta, x\rangle} dm(x)$$

dans la bande de $\mathbb{C}^s$:

$$B_m = \{\mathrm{Re}(\zeta) \in D_m\} .$$

I.4. Proposition

La transformée de Laplace de ${}_rU_s$ est définie sur $\mathbb{C}^s$ par :

$$L_{{}_rU_s}(\zeta) = {}_0F_1(s'+1; \frac{r^2}{4}\langle\zeta,\bar{\zeta}\rangle) \quad , \quad s \geq 1$$

où ${}_0F_1(\nu,\zeta)$ est la série hypergéométrique généralisée :

$${}_0F_1(\nu,\zeta) = \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\Gamma(\nu+n)n!} \quad , \quad (\nu,\zeta) \in \mathbb{C}^2 .$$

Démonstration :

Il est immédiat (théorème de Fubini) de vérifier que $L_{U_s}(\zeta)$ est définie en tout point ζ de $\mathbb{C}^s$ et s'exprime par la série :

$$L_{U_s}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^s} \langle\zeta,x\rangle^n \, dU_s(x) \quad , \quad s \geq 2 \quad ; \qquad (1)$$

la mesure U_s étant invariante par rotation autour de l'origine nous pouvons toujours nous ramener au cas où ζ est de la forme :

$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$$

avec :

$${}^t\zeta_1 = (0,\ldots,0,\|\zeta_1\|,0) \quad , \quad {}^t\zeta_2 = (0,\ldots,0,\|\zeta_2\|\cos\varphi,\|\zeta_2\|\sin\varphi)$$

φ étant l'angle orienté de ζ_1 vers ζ_2 entre ces deux vecteurs dans le plan qu'ils définissent.

Faisant appel à la proposition I.2. il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^s} \langle \zeta , x \rangle^n dU_s(x) = \frac{\Gamma(s'+1)}{2\pi^{s'+1}} \int_{A_s} [\prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^n][\alpha \cos a_{s-1} + \beta \sin a_{s-1}]^n \mathcal{J}_1(a)\, da =$$

$$= \frac{\Gamma(s'+1)\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+s}{2})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta]^n d\theta ,$$

avec :

$$\alpha = \|\zeta_1\| + i\|\zeta_2\| \cos \varphi \quad ; \quad \beta = i\|\zeta_2\| \sin \varphi \quad ;$$

l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} [\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta]^n d\theta$$

est nulle lorsque n est impair et :

$$\int_0^{2\pi} [\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta]^{2n} d\theta = 4 \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \alpha^{2k} \beta^{2(n-k)} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(n-k)} d\theta ;$$

nous reconnaissons dans les intégrales du second membre les fonctions bêta :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(n-k)} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n} \frac{(2k)!(2(n-k))!}{k!n!(n-k)!}$$

et par suite :

$$\int_0^{2\pi} [\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta]^{2n} d\theta = \frac{2\pi (2n)!}{2^{2n} (m!)^2} (\alpha^2 + \beta^2)^n \quad ;$$

nous obtenons le résultat pour U_s en reportant ces valeurs dans (1) après avoir remarqué que la quantité $(\alpha^2 + \beta^2)$ n'est autre que $\langle \zeta , \bar{\zeta} \rangle$.

Il est aisé d'en déduire $L_{rU_s}(\zeta)$ et de vérifier que pour $s = 1$ les expressions ${}_0F_1(s'+1; \frac{r^2}{4} \langle \zeta , \bar{\zeta} \rangle)$ et $ch(r\zeta)$ sont identiques.

I.5. Corollaire.

La fonction caractéristique ${}_r\Omega_s(t)$ de la loi de probabilité ${}_rU_s$ est définie sur $\mathbb{R}^s$ par :

$$\forall t , \quad t \in \mathbb{R}^s , \quad {}_r\Omega_s(t) = 2^{s'} \Gamma(s'+1) \frac{J_{s'}(r\|t\|)}{(r\|t\|)^{s'}}$$

où $J_\nu(\zeta)$ est la fonction de Bessel ordinaire d'ordre ν définie pour tout couple (ν,ζ) de $\mathbb{C}^2$ par :

$$J_\nu(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\zeta}{2})^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} .$$

I.6. Corollaire.

Soit U un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité ${}_rU_s$; U est centré et admet pour matrice de variance-covarian

$${}_r\Lambda_s = \frac{r^2}{s}\, \mathbb{I}_s$$

où $\mathbb{I}_s$ est la matrice unité de $\mathbb{R}^s$.

§2 REMARQUE SUR LES LOIS DE PROBABILITE SPHERIQUES

I.7. Définition.([14])

Un vecteur aléatoire X , à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, suit une loi de probabilité sphérique (ou radiale) si et seulement si, pour toute matrice orthonormale A , le vecteur aléatoire AX a la même loi que X .

Si P est la loi de X définie ci-dessus, nous appellerons profil de P , noté $\widetilde{P}$, la loi de $\|X\|$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$.

Un théorème de SCHOENBERG ([26]) permet d'établir une correspondance biunivoque entre les lois de probabilité sphériques sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ et les lois de probabilité sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$:

I.8. Théorème.

Une fonction radiale $\varphi(t)$, définie sur $\mathbb{R}^s$, est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sphérique P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ si et seulement si il existe une loi de probabilité $\widetilde{P}$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ telle que :

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \Omega_s(r\|t\|)\, d\widetilde{P}(r) ,$$

où $\Omega_s(t)$ est la fonction caractéristique (radiale) de la loi uniforme U_s sur la sphère unité de $\mathbb{R}^s$; $\widetilde{P}$ est alors le profil de P .

R.D. LORD ([18]) a étudié les lois de probabilité sphériques P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue ; en particulier si la fonction caractéristique φ de P est intégrable en module, P admet comme unique détermination continue (bornée) de sa densité la fonction radiale :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^\infty \widetilde{\varphi}(\rho) \frac{J_{s'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{s'}} \rho^{s-1}\, d\rho .$$

Nous nous intéressons ici au problème d'inversion de la fonction caractéristique, lorsque celle-ci n'est pas intégrable en module, en nous appuyant sur un résultat de H.R. VAN DER VAART ([37]) :

I.9. Théorème.

Soit φ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, alors

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(t) e^{-i\langle t,x\rangle} e^{-\frac{1}{2}\left\|\frac{t}{r}\right\|^2} dt$$

existe pour presque tout x (pour la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$) et la fonction ainsi définie presque partout est une détermination de la densité de la partie de P absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$.

L'application aux lois de probabilité sphériques donne immédiatement par passage en coordonnées polaires :

I.10. Corollaire.

Soit φ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sphérique P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, alors la partie de P absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue admet comme détermination de sa densité la fonction radiale f définie presque partout par :

$$f(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^\infty \varphi(\rho) \frac{J_{s'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{s'}} e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}} \rho^{s-1} \, d\rho \tag{1}$$

I.11. Corollaire.

Soit φ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sphérique P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; si la limite :

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^A \varphi(\rho) \frac{J_{s'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{s'}} \rho^{s-1} \, d\rho \tag{2}$$

existe pour presque tout x, la fonction ainsi définie presque partout est une détermination de la densité de la partie de P absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$.

Démonstration

Plaçons-nous en un point x pour lequel (2) existe et posons :

$$g(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \varphi(\rho) \frac{J_{s'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{s'}} \rho^{s-1} \quad ;$$

g est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, $e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'après la seconde formule de la moyenne, pour tout segment $[A,A']$ de $\mathbb{R}^+$, nous avons l'égalité :

$$\int_A^{A'} g(\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}\, d\rho = e^{-\frac{A^2}{2r^2}} \int_A^{A''} g(\rho)\, d\rho \quad , \quad A \le A'' \le A' \quad ;$$

soit $\varepsilon > 0$, la convergence de (2) assure l'existence de A_ε tel que :

$$\forall A' \ , \ A' \ge A_\varepsilon \ , \quad \left|\int_{A_\varepsilon}^{A'} g(\rho)\, d\rho\right| \le \varepsilon \quad ;$$

d'où la majoration :

$$\left|\int_0^\infty g(\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}\, d\rho - \lim_{A\to\infty} \int_0^A g(\rho)\, d\rho\right| \le \left|\int_0^{A_\varepsilon} g(\rho)\left[e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}} - 1\right] d\rho\right| + \left|\int_{A_\varepsilon}^\infty g(\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}\, d\rho\right| + \varepsilon$$

il est possible de choisir r_0 tel que :

$$\forall r \ , \ r \ge r_0 \quad \left|\int_0^{A_\varepsilon} g(\rho)\left[e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}} - 1\right] d\rho\right| \le \varepsilon \ ,$$

$$\left|\int_{A_\varepsilon}^\infty g(\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}\, d\rho\right| = \lim_{A\to\infty}\left|\int_{A_\varepsilon}^{A} g(\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}\, d\rho\right| \le \lim_{A\to\infty} e^{-\frac{A^2}{2r^2}} \left|\int_{A_\varepsilon}^{A'} g(\rho)\, d\rho\right| \le \varepsilon$$

ainsi la limite de (1) existe et est égale à celle de (2) d'où le résultat.

I.12. <u>Remarque</u> .

La fonction définie par l'un des deux corollaires précédents est d'intégrale égale à l'unité si et seulement si la loi de probabilité P dont il est question est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$.

§ 3 ETUDE DE LA RESULTANTE

Soient $X_1,\ldots,X_n$ n vecteurs aléatoires indépendants de même loi U_s sur $(\mathbb{R}^s,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; nous appellons résultante de ces vecteurs le vecteur aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}^s,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ défini par :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

I.13. Proposition.

X désignant le vecteur aléatoire défini ci-dessus, les trois assertions suivantes sont vérifiées :

i) La loi de probabilité Q_n de X est sphérique et a pour fonction caractéristique :

$$\psi_X(t) = [\Omega_s(t)]^n = \{2^{s'}\Gamma(s'+1)\frac{J_{s'}(\|t\|)}{\|t\|^{s'}}\}^n \ , \quad t \in \mathbb{R}^s \ ;$$

ii) X est un vecteur aléatoire centré de matrice de variance-covariance :

$$\Lambda_X = \frac{n}{s}\mathbb{I}_s \quad ;$$

iii) pour $n \geq 2$ et $s \geq 2$ Q_n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ et admet comme détermination de sa densité :

$$q_n(x) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{s'+1}}\int_0^\infty \{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\}^n \frac{J_{s'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{s'}}\rho^{s-1}\,d\rho \qquad (1)$$

Démonstration

Seul le troisième point nécessite une justification ; l'intégrale dans le second membre de (1) est absolument convergente si $(n-1)(s-1) > 2$ sauf pour $x = 0$ lorsque $(n-2)(s-1) \leq 2$; dans les autres cas nous avons une intégrale du type Weber-Schafheitlin ou une de ses généralisations, elle est alors semi-convergente sauf peut-être pour $x = 0$ ou $x = n$ ([38], CH XIII). Il nous suffit donc de montrer, en vertu du corollaire I.11., que Q_n est absolument continue ; pour $n = 2$ (1) devient ([38], p. 411) :

$$q_2(x) = \frac{[\Gamma(\frac{s}{2})]^2}{2^{s-2}\pi^{\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s-1}{2})} \frac{(4-\|x\|^2)^{\frac{s-3}{2}}}{\|x\|} \mathbb{1}_{]0,2[}(\|x\|) \quad ,$$

le changement de variable $u = \|\frac{x}{2}\|^2$ indique que la variable aléatoire $\|\frac{X}{2}\|^2$ suit, pour $n = 2$, une loi Bêta de paramètres $\frac{s-1}{2}$ et $\frac{s-1}{2}$, par suite la la loi Q_2 de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, il en sera alors de même pour Q_n comme convolution de Q_2 avec Q_{n-2}.

I.14. Corollaire.

Avec les notations précédentes la variable aléatoire $R = \|X\|$ suit une loi de probabilité $\tilde{Q}_n$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ dont la densité admet pour détermination :

$$\tilde{q}_n(r) = [2^{s'}\Gamma(s'+1)]^{n-1} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{s'}(\rho r)}{(\rho r)^{s'}} (\rho r)^{s-1} d\rho \ .$$

I.15. Proposition.

X désignant toujours la résultante définie au début de ce paragraphe, la loi de probabilité ${}_hQ_n$ de la projection orthographe Y de X sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h ne dépend que de h ; c'est une loi de probabilité sphérique sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité admet pour détermination :

$$ {}_h q_n(y) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho\|y\|)}{(\rho\|y\|)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho \quad , $$

avec :

$s \geq 2$, $1 \leq h < s$, $n \geq 1$.

La démonstration est semblable à la précédente, la fonction caractéristique de la loi de Y gardant la même forme que celle de la loi de X :

$$ \psi_Y(t) = \left\{2^{s'}\Gamma(s'+1) \frac{J_{s'}(\|t\|)}{\|t\|^{s'}}\right\}^n \quad , \quad t \in \mathbb{R}^h \ . $$

I.16. Remarque.

Pour $n = 1$ nous obtenons la densité des lois marginales de U_s en tenant compte du résultat de l'intégrale de Weber-Schafheitlin ([38], p.411) :

$$ {}_h q(y) = \frac{\Gamma(s'+1)}{\pi^{h'+1}\Gamma(s'-h')} (1-\|y\|^2)^{s'-h'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(\|y\|) \quad . $$

I.17. Corollaire.

Avec les notations de la proposition I.15. la vairable aléatoire $V = \|Y\|$ suit une loi de probabilité ${}_h\tilde{Q}_n$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ dont la densité admet pour détermination :

$$ {}_h\tilde{q}_n(v) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{2^{h'}\Gamma(h'+1)} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} (\rho v)^{h-1} d\rho \ . $$

I.18. Corollaire.

Avec l'ensemble des notations introduites ci-dessus la variable aléatoire $\frac{V^2}{R^2}$ suit la loi de probabilité Bêta de paramètres $\frac{h}{2}$ et $\frac{s-h}{2}$.

Démonstration :

La loi de probabilité de X est sphérique sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ sans masse à l'origine, $\frac{X}{R}$ suit donc la loi U_s et $\frac{Y}{R}$, qui est la projection orhtogonale de $\frac{X}{R}$ sur un sous-espace de $\mathbb{R}^s$ de dimension h , suit la loi dont la densité est donnée dans la remarque I.16. ; il est alors immédiat d'en déduire la densité de la loi de probabilité de $\frac{V^2}{R^2}$ pour conclure.

Notons que pour $n \geq 2$ l'existence d'une densité pour la loi de X et le théorème 11 de D.KELKER ([14]) justifient le corollaire I.18. ; le cas $n = 1$ montre que ce théorème s'étend aux lois de probabilité sphériques qui n'affectent aucune masse à l'origine :

I.19. Théorème .

Soient X un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité sphérique P et Y la projection orthogonale de X sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h ; si P n'affecte aucune masse à l'origine la variable aléatoire $\|Y\|^2/\|X\|^2$ suit une loi Beta de paramètres $\frac{h}{2}$ et $\frac{s-h}{2}$.

CHAPITRE II

LOI DE VON MISES S-DIMENSIONNELLE

L'ensemble des lois de probabilité de von Mises s-dimensionnelles constitue la famille exponentielle canonique ([2], p.167) par rapport à la loi uniforme U_s sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; une étude détaillée de ces familles est donnée au chapitre X de [2] et les résultats que nous présentons ici en seront, pour la plupart, des applications immédiates.

Le premier paragraphe est consacré à la définition de la loi de von Mises s-dimensionnelle ainsi qu'aux expressions de sa fonction caractéristique et de ses premiers moments.

Dans le deuxième paragraphe, nous examinons les diverses lois de probabilité qui se rattachent à la résultante de n vecteurs aléatoires indépendants de même loi, cette loi étant de von Mises s-dimensionnelle.

Le paragraphe suivant est entièrement réservé au cas particulier des lois de probabilité conditionnelles.

Enfin, le dernier paragraphe présente les diverses structures statistiques que nous aurons à envisager par la suite et dégage leurs premières propriétés.

Lorsque cela ne sera pas ambigü, nous utiliserons les notations introduites au chapitre I sans autres précisions ; les références figurant entre crochets renvoient au chapitre X de [2] , par exemple [théorème 2 §2] désigne le théorème 2 du paragraphe 2 du chapitre X de [2].

§1 DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

II.1. Définition.

On appelle loi de probabilité de von Mises s-dimensionnelle toute loi définie sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ ayant pour densité par rapport à la loi uniforme U_s :

$$\frac{dP_\theta}{dU_s} = \frac{e^{\langle \theta, x\rangle}}{L_{U_s}(-\theta)} \ , \quad \theta \in \mathbb{R}^s \ ,$$

où $L_{U_s}(-\theta)$ est la valeur en $-\theta$ de la transformée de Laplace de U_s.

Le paramètre θ, lorsqu'il est est différent de zéro, se met sous la forme $\theta = kM$ où k est la norme de θ et M le vecteur unitaire $\frac{\theta}{\|\theta\|}$ de $\mathbb{R}^s$. La direction orientée définie par M est appelée direction modale de la loi de von Mises ; l'ensemble de telles directions est en correspondance bijective avec la sphère unité de $\mathbb{R}^s$, M désignera donc indifféremment un point de $S(s,1)$, un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^s$ ou une direction orientée. La quantité k de $\mathbb{R}^+$ est dite paramètre de concentration, elle croît à mesure que la mass de probabilité de P_θ se concentre au voisinage de M. La loi uniforme U_s est un cas particulier de loi de von Mises s-dimensionnelle pour lequel la direction modale n'est pas définie et le paramètre de concentration est nul.

$L_{U_s}(-\theta)$, calculé dans la proposition I.4., prend ici la forme :

$$L_{U_s}(-\theta) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{k^{s'}} I_{s'}(k) \ ,$$

où $I_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν définie pour tout couple (ν, z) de $\mathbb{C}^2$ par :

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \quad .$$

Par la suite, nous identifierons systématiquement les espaces du paramètre θ et de la variable x de la définition II.1.

Il est simple de revenir à l'espace $(A_s, \mathcal{B}_{A_s})$ de sorte que la direction M soit définie par $a_1 = 0$ et de retrouver ainsi l'expression de la densité de la loi de von Mises s-dimensionnelle donnée par M.A. STEPHENS([27], chapitre X) :

$$\frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)} e^{k \cos a_1} \prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1} \quad .$$

Nous noterons s-D.M.D.(θ) ou s-D.M.D.(k,M) la loi de von Mises s-dimensionnelle de paramètre $\theta = kM$.

II.2. Proposition.

Soit U un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité s-D.M.D.(k,M) , la fonction caractéristique de U est égale à :

$$\forall t \in \mathbb{R}^s \; , \quad \varphi(t) \; = \; \frac{k^{s'} \, {}_0F_1[s'+1; \frac{1}{4}(k^2 + 2ik\langle M,t\rangle - \|t\|^2)]}{2^{s'}\,\Gamma(s'+1)\, I_{s'}(k)} \quad ;$$

U a des moments de tout ordre, en particulier :

$$E(U) = \frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} M \; ,$$

$$\Lambda_U = \frac{I_{s'+2}(k)}{I_{s'}(k)} M\,{}^tM + \frac{1}{k} \frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} \mathbb{I}_s - E(U)\,{}^tE(U)$$

où Λ_U est la matrice de variance-covariance de U et $\mathbb{I}_s$ la matrice unité de $\mathbb{R}^s$.

Ce résultat est une application immédiate du [théorème 2 §2] utilisant l'expression de la transformée de Laplace de U_s (proposition I.4.) et la relation ([38], p.79) :

$$\frac{d}{dz} \frac{I_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(z)}{z^\nu} .$$

§2 ETUDE DE LA RESULTANTE

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n vecteurs aléatoires indépendants de même loi s.D.M.D.(θ) sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$; nous appelons <u>résultante</u> de ces vecteurs le vecteur aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ défini par :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Le [théorème 4 §2] et la proposition I.13. permettent d'énoncer :

II.3. <u>Proposition</u>.

<u>Pour</u> $n \geq 2$ <u>et</u> $s \geq 2$ <u>la loi de probabilité</u> P_θ^{*n} <u>de la résultante</u> X <u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur</u> $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ <u>et admet pour densité</u> :

$$f_\theta^{*n}(x) = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{[L_{U_s}(-\theta)]^n} \, q_n(x) \quad .$$

II.4. <u>Corollaire</u>.

<u>La loi de probabilité</u> $\tilde{P}_k^n$ <u>de la variable aléatoire</u> $R = \|X\|$ <u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur</u> $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ <u>et admet pour densité</u> :

$$\tilde{f}_k^{*n}(r) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{[L_{U_s}(k)]^n} \, \frac{I_{s'}(kr)}{(kr)^{s'}} \, \tilde{q}_n(r) \quad .$$

<u>où</u> $L_{U_s}(k)$ <u>est un abus d'écriture désignant</u> $L_{U_s}(-\theta)$ <u>qui n'est fonction que de</u> <u>$k = \|\theta\|$</u> .

II.5. Proposition.

Avec les notations précédentes, désignons par Y et Z respectivement les vecteurs des h premières composantes de X et des ℓ dernières ($h+\ell = s$) et décomposons de la même façon θ en $\theta = (\lambda, \mu)$; supposons en outre que le vecteur μ est nul :

i) la loi de probabilité ${}_h P^{*n}_{(\lambda,0)}$ de Y est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ et admet pour densité :

$$ {}_h f^{*n}_{(\lambda,0)}(y) = \frac{e^{\langle \lambda, y\rangle}}{[L_{U_s}(\|\lambda\|)]^n}\, {}_h q_n(y) \quad , \quad n \geq 1 \quad ; $$

ii) Z suit une loi de probabilité sphérique ${}_\ell P^{*n}_{(0,\lambda)}$ sur $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^\ell})$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité :

$$ {}_\ell f^{*n}_{(0,\lambda)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell'+1}} \left\{\frac{\|\lambda\|^{s'}}{I_{s'}(\|\lambda\|)}\right\}^n \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-\|\lambda\|^2)^{1/2}]}{(\rho^2-\|\lambda\|^2)^{s'/2}}\right\}^n \frac{J_{\ell'}(\rho\|z\|)}{(\rho\|z\|)^{\ell'}}\, \rho^{\ell-1}\, d\rho \quad . \qquad (1) $$

Démonstration

Le premier point est une conséquence immédiate de la forme de la densité de la loi de X par rapport à Q_n et du calcul des lois marginales de cette dernière (proposition I.15.).

La fonction caractéristique de Z pour $n = 1$ est donnée par la proposition II.2. :

$$ \forall t \in \mathbb{R}^\ell \ , \quad \varphi_Z(t) = \frac{\|\lambda\|^{s'}\, {}_0F_1[s'+1; \frac{1}{4}(\|\lambda\|^2-\|t\|^2)]}{2^{s'}\Gamma(s'+1)\, I_{s'}(\|\lambda\|)} $$

$$ = \frac{\|\lambda\|^{s'}}{I_{s'}(\|\lambda\|)} \frac{J_{s'}[(\|t\|^2-\|\lambda\|^2)^{1/2}]}{(\|t\|^2-\|\lambda\|^2)^{s'/2}} \quad ; $$

lorsque n est différent de 1, il suffit d'élever la fonction ci-dessus à la puissance n, cette fonction caractéristique étant radiale, la loi de probabilité de Z est sphérique.

L'intégrale dans le second membre de (1) est absolument convergente lorsque $n \geq 3$ sauf peut-être en $z = 0$; pour $n = 1$, il s'agit d'une intégrale de Sonine ([38], p.415) qui est semi-convergente sauf peut-être en $z = 0$ et $\|z\| = 1$; si $n=2$ et $z \neq 0$ la relation ([38], p.45) :

$$\frac{d}{dt} J_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} J_\nu(t)$$

et le comportement de $J_\nu(t)$ à l'infini montrent que l'intégrale suivante est semi-convergente :

$$\int_A^\infty J_{\ell'}(\rho\|z\|)\, d\rho \ , \quad A > 0 \ ;$$

la fonction :

$$\left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-\|\lambda\|^2)^{1/2}]}{(\rho^2-\|\lambda\|^2)^{s'/2}}\right\}^2 \frac{\rho^{\ell-1}}{(\rho\|z\|)^{\ell'}}$$

étant positive bornée sur $[A,+\infty[$, $A > 0$, l'intégrale dans le second membre de (1) est encore semi-convergente. D'après le corollaire I.11., il suffit de montrer l'absolue continuité de ${}_\ell P^{*n}_{(0,\lambda)}$ pour conclure et plus simplement encore lorsque $n = 1$; nous l'admettrons pour l'instant et vérifierons que la densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\|Z\|$ obtenue à partir de ce résultat est d'intégrale égale à 1 .

II.6. <u>Remarque</u> :

Pour $n = 1$, nous obtenons les lois marginales particulières $(\mu = 0)$ de la loi de von Mises s-dimensionnelle qui, compte tenu de la remarque I.16. et de l'intégrale de Sonine ([38], p.415), se mettent sous la forme :

$$h^f_{(\lambda,0)}(y) = \frac{1}{2^{s'}\pi^{h'+1}\Gamma(s'-h')} \frac{\|\lambda\|^{s'}}{I_{s'}(\|\lambda\|)} e^{\langle\lambda,y\rangle}(1-\|y\|^2)^{s'-h'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(\|y\|) \ ,$$

$$\ell^f_{(0,\lambda)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell'+1}} \frac{\|\lambda\|^{s'}}{I_{s'}(\|\lambda\|)} \frac{I_{s'-\ell'-1}[\|\lambda\|(1-\|z\|^2)^{1/2}]}{[\|\lambda\|(1-\|z\|^2)^{1/2}]^{s'-\ell'-1}} (1-\|z\|^2)^{s'-\ell'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(\|z\|) \ .$$

II.7. Corollaire.

Avec les notations de la proposition II.5. on pose $V = \|Y\|$, $W = \|Z\|$ $a = \|\lambda\|$ et $b = \|\mu\|$, on supposera encore que $b = 0$; les lois de probabilité ${}_h\tilde{P}^{*n}_{(a,0)}$ et ${}_\ell\tilde{P}^{*n}_{(0,a)}$ respectivement de V et W sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ et admettent pour densités respectives :

$$ {}_h\tilde{f}^{*n}_{(a,0)}(v) = \frac{2^{h'}\Gamma(h'+1)}{[L_{U_s}(a)]^n} \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} \, {}_h\tilde{q}_n(v) , $$

$$ {}_\ell\tilde{f}^{*n}_{(0,a)}(w) = \frac{1}{2^{\ell'}\Gamma(\ell'+1)} \left\{\frac{a^{s'}}{I_{s'}(a)}\right\}^n \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-a^2)^{1/2}]}{(\rho^2-a^2)^{s'/2}}\right\}^n \frac{J_{\ell'}(\rho w)}{(\rho w)^{\ell'}} (\rho w)^{\ell-1} d\rho \quad ; $$

dans le cas particulier où $n = 1$ elles deviennent :

$$ {}_h\tilde{f}_{(a,0)}(v) = \frac{1}{2^{s'-h'-1}\Gamma(s'-h')} \frac{a^{s'}}{I_{s'}(a)} \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} v^{h-1}(1-v^2)^{s'-h'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(v) \quad , $$

$$ {}_\ell\tilde{f}_{(0,a)}(w) = \frac{1}{2^{\ell'}\Gamma(\ell'+1)} \frac{a^{s'}}{I_{s'}(a)} \frac{I_{s'-\ell'-1}[a(1-w^2)^{1/2}]}{[a(1-w^2)^{1/2}]^{s'-\ell'-1}} w^{\ell-1}(1-w^2)^{s'-\ell'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(w) . $$

Nous pouvons maintenant vérifier que :

$$ \int_0^1 {}_\ell\tilde{f}_{(0,a)}(w)\, dw = 1 $$

il suffit pour cela de faire le changement de variable $w = \cos\theta$ et d'utiliser la première intégrale finie de Sonine([38], p.373).

II.8. Proposition.

Avec les notations de la proposition II.5. et (λ,μ) quelconque, la loi de probabilité ${}_hP^{*n}_{(\lambda,\mu)}$ de Y est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ et admet pour densité :

$$ {}_hf^{*n}_{(\lambda,\mu)}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{h'+1}} \left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n e^{\langle\lambda,y\rangle} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[\rho^2-\|\mu\|^2)^{1/2}]}{(\rho^2-\|\mu\|^2)^{s'/2}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho\|y\|)}{(\rho\|y\|)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho \ . $$

où $k = (\|\lambda\|^2+\|\mu\|^2)^{1/2}$, et si $n = 1$:

$$ {}_hf_{(\lambda,\mu)}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{h'+1}} \frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)} e^{\langle\lambda,y\rangle} \frac{I_{s'-h'-1}[\|\mu\|(1-\|y\|^2)^{1/2}]}{[\|\mu\|(1-\|y\|^2)^{1/2}]^{s'-h'-1}} (1-\|y\|^2)^{s'-h'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(\|y\|) $$

Démonstration :

La densité de la loi de probabilité du couple (Y,Z) par rapport à Q_n est de la forme :

$$ \frac{d\,{}_hP^{*n}_{(\lambda,\mu)}}{dQ_n} = C(\lambda,\mu)\, e^{\langle\lambda,y\rangle} e^{\langle\mu,z\rangle} \ . $$

où $C(\lambda,\mu)$ n'est fonction que de λ et μ ; la loi marginale en Y s'obtient par intégration :

$$ {}_hf^{*n}_{(\lambda,\mu)}(y) = C(\lambda,\mu)\, e^{\langle\lambda,y\rangle} \int_{\mathbb{R}^{s-h}} e^{\langle\mu,z\rangle} q_n(y,z)\, dz \ , $$

pour $\lambda = 0$ nous retrouvons ${}_hf^{*n}_{(0,\mu)}(y)$ donné en ii) de la proposition II.5., ce qui permet d'avoir l'intégrale ci-dessus par identification.

II.9. Corollaire.

Avec les notations du corollaire II.7. et (a,b) quelconque, la loi de probabilité ${}_hP^{*n}_{(a,b)}$ de V est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ et admet pour densité :

$$ {}_h\tilde{f}^{\star n}_{(a,b)}(v) = \left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho^2-b^2)^{1/2}]}{(\rho^2-b^2)^{s'/2}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} (\rho v)^{h-1} d\rho $$

où $k = (a^2+b^2)^{1/2}$, et si $n = 1$.

$$ {}_h\tilde{f}_{(a,b)}(v) = \frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)} \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} \frac{I_{s'-h'-1}[b(1-v^2)^{1/2}]}{[b(1-v^2)^{1/2}]^{s'-h'-1}} v^{h-1}(1-v^2)^{s'-h'-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(v) . $$

§3 LOIS DE PROBABILITE CONDITIONNELLES

II.10. Proposition.

Soit X un vecteur aléatoire sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité normale d'espérance η et de matrice de variance-covariance la matrice unité $\mathbb{I}_s$ de $\mathbb{R}^s$; on désigne par R et Ψ les variables aléatoires respectivement à valeurs dans $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ et $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ définies par :

$$ R = \|X\| \ , \quad \Psi = \frac{X}{\|X\|} \ ; $$

la loi de probabilité conditionnelle de Ψ à R , notée $P^r_{\Psi/R}(B)$, est la fonction sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}$ donnée par :

$$ \forall r \in \mathbb{R}^+ \ , \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} \quad P^r_{\Psi/R}(B) = P_{r\eta}(B) \ , $$

où $P_{r\eta}$ est la loi de probabilité de von Mises s-dimensionnelle de paramètre $r\eta$.

Démonstration :

Soient U_s la loi de probabilité uniforme sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ et m la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$; la loi du couple (Ψ, R) admet pour densité par rapport à la mesure produit $U_s \otimes m$:

$$ \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} e^{\langle r\eta, \psi \rangle} e^{-\frac{r^2+\|\eta\|^2}{2}} \ ; $$

la densité par rapport à m de la loi de R est égale à :

$$\frac{1}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{r^2+\eta^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{\langle r\eta,\psi\rangle} dU_s(\psi) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{r^2+\eta^2}{2}} L_{U_s}(-r\eta) \quad ,$$

d'où :

$$\frac{dP^r_{\psi/R}}{dU_s} = \frac{e^{\langle r\eta,\psi\rangle}}{L_{U_s}(-r\eta)}$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, les quantités $X,R,Y,V,Z,W,\theta,\lambda,\mu,k,a$ et b sont celles définies au paragraphe précédent et ψ la variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ égale à Y/V ; U_h est la loi de probabilité uniforme sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ et m la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$.

II.11. Proposition.

La loi de probabilité conditionnelle $P^v_{\psi/V}(B)$ *de* ψ *à* V *est définie sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ *par* :

$$\forall v \in \mathbb{R}^+ \; , \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} \quad P^v_{\psi/V}(B) = P_{v\lambda}(B) \; ,$$

$P_{v\lambda}$ *désignant la loi* h-D.M.D$(v\lambda)$.

Démonstration

La proposition II.8. et le corollaire II.9. indiquent que la densité de la loi du couple (ψ,V) par rapport à $U_h \otimes m$ est égale à :

$$\frac{1}{2^{h'}\Gamma(h'+1)} \frac{(av)^{h'}}{I_{h'}(av)} e^{\langle v\lambda,\psi\rangle} \, {}_h\tilde{f}^{*n}_{(a,b)}(v)$$

et par suite :

$$\frac{dP^v_{\psi/V}}{dU_h} = \frac{e^{\langle v\lambda,\psi\rangle}}{L_{U_h}(-v\lambda)} \quad .$$

II.12. Remarque.

La proposition précédente subsiste en particulier pour $h = s$, c'est-à-dire $Y = X$ et $V = R$, et $n \geq 2$ la démonstration étant la même à partir de la proposition II.3. et du corollaire II.4.

II.13. Proposition.

La loi de probabilité conditionnelle $P^{(v,z)}_{\psi/(V,Z)}(B)$ de ψ à (V,Z) est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{\ell} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^+ \ , \quad \forall z \in \mathbb{R}^{\ell} \ , \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} \ , \quad P^{(v,z)}_{\psi/(V,Z)}(B) = P_{v\lambda}(B)$$

$P_{v\lambda}(B)$ désignant la loi h-D.M.D.$(v\lambda)$.

Démonstration :

Soit ν la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^{\ell}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\ell}})$; la densité de la loi de (ψ, V, Z) par rapport à $U_h \otimes m \otimes \nu$ s'obtient à partir de la proposition II.3. :

$$\frac{2\pi^{h'+1}}{\Gamma(h'+1)} v^{h-1} \frac{e^{\langle v\lambda, \psi\rangle}}{[L_{U_s}(-\theta)]^n} e^{\langle \mu, z\rangle} q_n[(v^2+\|z\|^2)^{1/2}] \ ,$$

la loi marginale en (V,Z) a donc pour densité par rapport à $m \otimes \nu$:

$$\frac{2\pi^{h'+1}}{\Gamma(h'+1)} v^{h-1} \frac{L_{U_h}(-v\lambda)}{[L_{U_s}(-\theta)]^n} e^{\langle \mu, z\rangle} q_n[(v^2+\|z\|^2)^{1/2}]$$

et :

$$\frac{dP^{(v,z)}_{\psi/(V,Z)}}{dU_h} = \frac{e^{\langle v\lambda, \psi\rangle}}{L_{U_h}(-v\lambda)} \ .$$

II.14. Remarques :

Bien que le résultat soit encore exact, la démonstration ci-dessus n'est pas valable lorsque $n = 1$ car la loi de (ψ, V, Z) est singulière par rapport à $U_h \otimes m \otimes \nu$; il suffit alors de vérifier, en utilisant les coordonnées polaires, que $P_{v\lambda}(B)$, comme fonction de (v,z) , est une détermination de $P(\psi^{-1}(B)\,|\,(V,$

La proposition II.13. nous montre que la direction ψ de la variable aléatoire Y est indépendante de Z conditionnellement à sa norme V .

La proposition II.11. avec $h = s$ et la proposition II.8. conduisent au résultat :

II.15. Proposition .

La loi de probabilité conditionnelle $P^r_{Y/R}(B)$ de Y à R est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ pour $1 \leq h < s$ par :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ , \quad \frac{dP^r_{Y/R}}{d\nu} = \frac{1}{(2\pi)^{h'+1}} \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} e^{\langle \lambda , y\rangle} \frac{I_{\ell'}[b(r^2-\|y\|^2)^{1/2}]}{[b(r^2-\|y\|^2)^{1/2}]^{\ell'}} \frac{1}{r^{s-2}} (r^2-\|y\|^2)^{\ell'} \mathbb{1}_{]0,r]}(\|y\|$$

où ν est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ et $\ell = s - h$.

II.16. Corollaire.

La loi de probabilité conditionnelle $P^r_{V/R}(B)$ de V à R est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ pour $1 \leq h < s$ par :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ , \quad \frac{dP_{V/R}}{dm} = \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} \frac{I_{\ell'}[b(r^2-v^2)^{1/2}]}{[b(r^2-v^2)^{1/2}]^{\ell'}} \frac{v^{h-1}}{r^{s-2}} (r^2-v^2)^{\ell'} \mathbb{1}_{]0,r[}(v) \ .$$

§4 LES STRUCTURES STATISTIQUES

II.17. Définition [définition 2 §2] .

Soit m une mesure positive modérée sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, on appelle structure exponentielle canonique associée à m , toute structure de la forme :

$$\left\{\mathbb{R}^s , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \ \frac{dP_\theta}{dm} = \frac{e^{\langle \theta , x\rangle}}{L_m(-\theta)} , \quad \theta \in D'_m\right\} ,$$

où D'_m désigne le symétrique de D_m par rapport à l'origine.

Cette définition est liée à la définition I.3. ; notons qu'une loi de probabilité sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ est une mesure modérée au sens de la [définition 3 §1].

L'étude statistique de la loi de von Mises s-dimensionnelle repose sur la structure exponentielle canonique associée à la loi uniforme U_s ou, plus exactement, sur l'échantillon :

$$\left\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_\theta}{dU_s} = \frac{e^{\langle \theta, x\rangle}}{L_{U_s}(-\theta)} , \quad \theta \in \mathbb{R}^s\right\}^n , \qquad (1)$$

II.18. Proposition.

La structure (1) admet la statistique exhaustive ρ-minimum :

$$X(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ;$$

cette statistique induit la structure exponentielle canonique complète :

$$\left\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_X^\theta}{dQ_n} = \frac{e^{\langle \theta, x\rangle}}{L_{Q_n}(-\theta)} , \quad \theta \in \mathbb{R}^s\right\} , \qquad (2)$$

avec :

$$L_{Q_n}(-\theta) = [L_{U_s}(-\theta)]^n .$$

Cette proposition découle des [théorèmes 1 et 2 §3] et du [théorème 1 §2].

II.19. Proposition.

Si dans la structure (2) θ appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, la statistique $Y(x)$, projection orthogonale de x sur ce sous-espace, est exhaustive ρ-minimum ; elle induit la structure exponentielle canonique complète :

$$\left\{\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP_Y^\lambda}{d_hQ_n} = \frac{e^{\langle \lambda, y\rangle}}{L_{{}_hQ_n}(-\lambda)} , \quad \lambda \in \mathbb{R}^h\right\} ,$$

où λ est le paramètre θ exprimé dans $\mathbb{R}^h$ et :

$$L_{{}_hQ_n}(-\lambda) = [L_{U_s}(\|\lambda\|)]^n .$$

Le théorème de factorisation de Neyman ([2], p.16), les propriétés des structures exponentielles canoniques déjà utilisées pour la proposition précédente ainsi que la proposition II.5. justifient ce résultat.

II.20. Remarques.

Si dans la structure (2) la direction modale $M = \frac{\theta}{\|\theta\|}$ est entièrement connue, la statistique $Y(x)$, projection orthogonale de x sur le sous-espace vectoriel engendré par M, est exhaustive ρ-minimum pour le paramètre de concentration $k = \|\theta\|$; elle induit la structure exponentielle scalaire complète

$$\left\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_Y^k}{d\,{}_1Q_n} = \frac{e^{ky}}{L_{{}_1Q_n}(-k)} , \quad k \in \mathbb{R}^+\right\} .$$

Lorsque le paramètre de concentration k est connu, la structure statistique (2) est exponentielle canonique incomplète par liaison, cette liaison est du type **quadratique** :

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = k^2 \quad ;$$

d'après le [théorème 2 §3], la structure est encore exhaustive ρ-minimum et par conséquent elle n'admet pas de statistique exhaustive non triviale.

II.21. Proposition.

Soit la structure statistique :

$$\left\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_X^\theta}{dQ_n} = \frac{e^{\langle \theta, x\rangle}}{L_{Q_n}(-\theta)} , \quad \theta = (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^\ell\right\} ;$$

la statistique $Y(x)$, projection orthogonale de x sur $\mathbb{R}^h$, est exhaustive ρ-minimum par rapport au paramètre k, **elle induit la structure statistique exponentielle canonique complète (resp. incomplète) lorsque** $k = \|\theta\|$ est inconnu (resp. connu).

$$\left\{\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} \; ; \; \frac{dP_Y^\lambda}{dP_\mu} = \frac{e^{\langle \lambda , y \rangle}}{L_{P_\mu}(-\lambda)} \; , \quad \lambda \in \mathbb{R}^h\right\}$$

avec :

$$\frac{dP_\mu}{dy} = h^{f^{*n}_{(0,\mu)}}(y) \; , \quad L_{P_\mu}(-\lambda) = \left\{\frac{I_{s'}(k)}{k^{s'}} \; \frac{\|\mu\|^{s'}}{I_{s'}(\|\mu\|)}\right\}^n \; .$$

CHAPITRE III

TESTS UNILATERAUX ET BILATERAUX SUR STRUCTURE DU TYPE PÓLYA

Nous présentons ici la partie du chapitre XI de [2] consacrée aux tests optimaux sur structure exponentielle scalaire en nous plaçant dans le cadre plus général des structures du type Pólya.

Dans le premier paragraphe, nous reprenons les définitions et quelques propriétés essentielles de [12] en précisant notamment la définition d'un point de changement de signe d'une fonction et la validité du théorème III.6. en présence de points de changement doubles.

Les trois paragraphes suivants traitent successivement les tests unilatéraux, bilatéraux et optimaux sur structure du type Pólya.

§1 STRUCTURES DU TYPE PÓLYA

Soit la structure statistique :

$$\left\{X, \mathcal{B}_X \; ; \; \frac{dP_\theta}{dm} = p(\theta, x) \; , \; \theta \in \Theta\right\} , \tag{1}$$

où X et Θ sont deux intervalles finis ou infinis de $\mathbb{R}$, m une mesure positive sigma-finie sur X et $p(\theta,x)$ une fonction continue par rapport à chacune des variables.

Nous supposerons que X contient le support de m à l'exception, peut-être, de ses points extrêmaux si ceux-ci sont ρ-négligeables, ce qui ne restreint en rien la généralité.

Pour tout entier $n > 0$ on note $D(\theta_1, \ldots, \theta_n ; x_1, \ldots x_n)$ le détermina

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_n ; x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Det}\ (p(\theta_i, x_j))$$

où les θ_i et x_j sont pris respectivement dans Θ et dans X.

III.1. Définition.

On dit que la structure (1) est du type Pólya-n (resp. Pólya-n strict) si elle satisfait :

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_k ; x_1, \ldots, x_k) \geq 0 \quad (\text{resp.} > 0) \quad ,$$

pour tout k, $1 \leq k \leq n$, et tout choix des θ_i et x_j vérifiant :

$$\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k \ , \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_k \ .$$

Nous dirons que la famille de lois de probabilité $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ou, plus simplement, que $p(\theta, x)$ est du type Pólya-n ou Pólya-n strict lorsqu'il en ser de même pour la structure (1) ; si cette structure est du type Pólya-n (resp. Pólya-n strict) pour tout n, nous la dirons du type Pólya-∞ (resp. Pólya-∞ strict).

Pólya-1 strict indique que le domaine $\{x \in X \mid p(\theta, x) > 0\}$ ne dépend pas de θ ; Pólya-2 correspond à la notion de rapport de vraisemblance monotone.

Outre les familles exponentielles qui sont du type Pólya-∞ strict, les lois gamma et bêta décentrées sont du type Pólya-∞ (cf. [11]) ; la loi de Cauchy est un exemple de loi qui n'est pas du type Pólya.

III.2. Lemme.

Soient $p(\theta,x)$, supposé $(n-1)$ fois continuement dérivable par rapport à θ à l'intérieur de Θ pour tout x de X , et $q_k(\theta,x_k,\ldots,x_1)$, $k = 1,\ldots,n$, les fonctions définies par :

$$q_1(\theta,x_1) = p(\theta,x_1) \quad ,$$

$$q_k(\theta,x_k,\ldots,x_1) = \frac{d}{d\theta}\,\frac{q_{k-1}(\theta,x_k,x_{k-2},\ldots,x_1)}{q_{k-1}(\theta,x_{k-1},\ldots,x_1)} \qquad k = 2,\ldots,n \quad ;$$

une condition suffisante pour que $p(\theta,x)$ soit du type Pólya-n strict est que ces fonctions vérifient :

$$q_1(\theta,x_1) > 0 \;,\quad \theta\in\Theta \;,\quad x_1\in X \;,$$

$$q_k(\theta,x_k,\ldots,x_1) > 0 \;,\quad \theta\in\Theta \;,\quad x_i\in X \;,\quad k=2,\ldots,n$$

avec :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k \quad .$$

Démonstration :

Pour tout entier $n > 0$ et k , $1 \leq k \leq n$, on note ${}_nQ_k(\theta_1,\ldots,\theta_k;x_1,\ldots,x_n)$ le déterminant d'ordre k :

$${}_nQ_k(\theta_1,\ldots,\theta_k;x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Det}\,(q_{n-k+1}(\theta_i,x_{n-k+j},x_{n-k},\ldots,x_1)) \quad ,$$

et $\mathrm{sgn}(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad .$$

Notons que les hypothèses de dérivabilité de $p(\theta,x)$ et la stricte positivité de q_k justifient la définition de q_{k+1} .

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme par récurrence sur n ; pour $n = 1$ la propriété est triviale, examinons donc le cas $n = 2$:

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} p(\theta_1,x_1) & p(\theta_1,x_2) \\ p(\theta_2,x_1) & p(\theta_2,x_2) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{p(\theta_1,x_2)}{p(\theta_1,x_1)} \\ 1 & \dfrac{p(\theta_2,x_2)}{p(\theta_2,x_1)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\left\{\frac{p(\theta_2,x_2)}{p(\theta_2,x_1)} - \frac{p(\theta_1,x_2)}{p(\theta_1,x_1)}\right\},$$

les égalités ci-dessus résultent de l'hypothèse $q_1 > 0$ et la formule des accr sements finis, appliquée à la fonction $p(\theta,x_2)/p(\theta,x_1)$, assure l'existence d ${}_2\theta_1$ tel que :

$$\operatorname{sgn} D(\theta_1,\theta_2;x_1,x_2) = \operatorname{sgn} q_2({}_2\theta_1,x_2,x_1) \ , \quad \theta_1 < {}_2\theta_1 < \theta_2 \ ;$$

nous pouvons remarquer dès à présent que la condition de ce lemme n'est pas nécessaire, car il n'est pas certain pour ${}_2\theta_1$, x_1 et x_2 donnés de trouv θ_1 et θ_2 satisfaisant l'égalité ci-dessus (la fonction $p(\theta,x_2)/p(\theta,x_1)$ peut présenter un point d'inflexion à tangente horizontale).

Par hypothèse de récurrence, la propriété est vraie pour $1,2,\dots,n-1$ les $p(\theta_i,x_1)$ sont donc strictement positifs et impliquent :

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} p(\theta_1,x_1) & \dots & p(\theta_1,x_n) \\ \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ p(\theta_n,x_1) & \dots & p(\theta_n,x_n) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{p(\theta_1,x_2)}{p(\theta_1,x_1)} & \dots & \dfrac{p(\theta_1,x_n)}{p(\theta_1,x_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ 1 & \dfrac{p(\theta_n,x_2)}{p(\theta_n,x_1)} & \dots & \dfrac{p(\theta_n,x_n)}{p(\theta_n,x_1)} \end{vmatrix} ,$$

en développant le déterminant du second membre par rapport à la dernière ligne après lui avoir retranché la précédente, celui-ci apparait comme l'accroissemen entre θ_{n-1} et θ_n d'une fonction de θ à laquelle on peut appliquer le théo rème des accroissements finis ; ceci permet de remplacer la dernière ligne par

$$(0,q_2({}_2\theta_{n-1},x_2,x_1),\dots,q_2({}_2\theta_{n-1},x_n,x_1)) \ , \quad \theta_{n-1} < {}_2\theta_{n-1} < \theta_n \ ;$$

on remplace ainsi successivement chaque ligne sauf la première et on dévelop le déterminant obtenu par rapport à la première colonne

$$\operatorname{sgn} D(\theta_1,\dots,\theta_n;x_1,\dots,x_n) = \operatorname{sgn} {}_nQ_{n-1}({}_2\theta_1,\dots,{}_2\theta_{n-1};x_1,\dots,x_n) \ , \quad \theta_{i-1} < {}_2\theta_i < \theta_i$$

les fonctions $q_2(\theta, x_i, x_1)$ sont (n-2) fois continuement dérivables par rapport à θ dans $\mathcal{B}$ et strictement positives par hypothèse de récurrence, la méthode précédente s'applique à nouveau à ${}_nQ_{n-1}({}_2\theta_1, \dots, {}_2\theta_{n-1}; x_1, \dots, x_n)$ et donne :

$$\operatorname{sgn} D(\theta_1, \dots, \theta_n; x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} {}_nQ_{n-2}({}_3\theta_1, \dots, {}_3\theta_{n-1}; x_1, \dots, x_n) , {}_2\theta_{i-1} < {}_3\theta_{i-1} < {}_2\theta_i$$

et finalement :

$$\operatorname{sgn} D(\theta_1, \dots, \theta_n; x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} {}_nQ_1({}_n\theta_1; x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} q_n({}_n\theta_1, x_n, \dots, x_1), {}_n\theta_1 \in \mathcal{E}$$

Dans la suite, nous noterons ρ_n l'ensemble des hypothèses de ce lemme

III.3. Remarques.

Sous l'hypothèse ρ_n et pour tout k, $1 \leq k \leq n$, la fonction de x, $q_k(\theta, x, x_{k-1}, \dots, x_1)$ où $x_1, \dots, x_{k-1}$ et θ sont fixés et vérifient $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}$, s'annule en changeant de signe en chaque x_i, $i = 1, \dots, k-1$, et est différente de zéro partout ailleurs.

De même, toujours avec l'hypothèse ρ_n, pour tout k, $1 \leq k \leq n$, et pour tout choix des θ_i et x_j, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$ tel que $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ la quantité ${}_nQ_k(\theta_1, \dots, \theta_k; x_1, \dots, x_n)$ définie dans la démonstration du lemme III.2. est non nulle ; en effet, on a encore l'égalité :

$$\operatorname{sgn} {}_nQ_k(\theta_1, \dots, \theta_k; x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} q_n(\theta, x_n, \dots, x_1) , \quad \theta \in \mathcal{B} .$$

Il est clair que les hypothèses Pólya-n , Pólya-n strict et ρ_n impliquent respectivement les hypothèses Pólya-k , Pólya-k strict et ρ_k pour tout k inférieur à n .

Les notions de Pólya-n strict et ρ_n n'ont pas d'intérêt si la mesure m est concentrée en (n-1) points au plus ; en effet, on ne modifie pas la famille des lois de probabilité $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ en annulant $p(\theta, x)$ en un point extérieur au support de m mais la définition III.1. n'est plus satisfaite ; nous sous-entendrons donc dans les hypothèses Pólya-n strict et ρ_n que le support de m contient au moins n points.

III.4. Définition .

On appelle nombre de changement de signe $V(h)$ d'une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, le nombre, éventuellement infini, donné par :

$$\text{Sup}\ \{N[h(x_i)]\ ;\ x_1 < x_2 < \ldots < x_k\ ,\quad k \in \mathbb{N}^*\}\ ,$$

où $N[h(x_i)]$ est le nombre de changement de signe dans la suite :

$$h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_k)\quad .$$

III.5. Définition.

Un point x_o est dit point de changement d'une fonction h pour laquelle $V(h)$ est fini si et seulement si il existe un intervalle $[x_1, x_2]$ tel que :

$$h(x_1)h(x_2) < 0\ ,\quad h(x)h(x') \leq 0\ ,\quad x_1 \leq x \leq x_o \leq x' \leq x_2\quad ,$$

h étant non nul sur $]x_o, x_2]$ lorsque x_o et x_2 sont distincts.

La fonction h ne peut changer de signe qu'au plus deux fois en un même point de changement x_o , celui-ci est alors dit double.

III.6. Théorème.

Soient $p(\theta, x)$ satisfaisant $\mathcal{P}_{n+1}$ et h une fonction $\mathcal{B}_X$-mesurable changeant de signe n fois ; si la fonction :

$$g(\theta) = \int_X h(x)p(\theta, x)\,dm(x)\quad ,$$

peut être dérivée n fois sous le signe intégral, alors elle change de signe au plus n fois et a au plus n zéros compte tenu de leur ordre de multiplicité ou est identiquement nulle. La fonction g est identiquement nulle si et seulement si h est nul m-presque partout.

Démonstration :

Soient $x_1,\dots,x_n$ les points de changement de h supposés simples et indicés par ordre croissant ; l'hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$ et la possibilité de dériver sous le signe intégral justifient les définitions et identités suivantes :

$$q_2^*(\theta,x_1) = \frac{d}{d\theta}\frac{g(\theta)}{p(\theta,x_1)} = \int_X q_2(\theta,x,x_2)h(x)dm(x) \quad ,$$

et pour $k = 3,\dots,n+1$:

$$q_k^*(\theta,x_{k-1},\dots,x_1) = \frac{d}{d\theta}\frac{q_{k-1}^*(\theta,x_{k-2},\dots,x_1)}{q_{k-1}(\theta,x_{k-1},\dots,x_1)} = \int_X q_k(\theta,x,x_{k-1},\dots,x_1)h(x)dm(x) \quad ;$$

$q_{n+1}(\theta,x,x_n,\dots,x_1)$ change de signe en même temps que h et le produit $q_{n+1}\times h$ garde donc un signe constant qui ne dépend pas de θ ; l'égalité :

$$q_{n+1}^*(\theta,x_n,\dots,x_1) = \int_X q_{n+1}(\theta,x,x_n,\dots,x_1)h(x)dm(x)$$

implique que q_{n+1}^* soit ne s'annule jamais, soit est identiquement nul si $q_{n+1}\times h$ est nul m-presque partout ; l'autre expression de q_{n+1}^* :

$$q_{n+1}^*(\theta,x_n,\dots,x_1) = \frac{d}{d\theta}\frac{q_n(\theta,x_{n-1},\dots,x_1)}{q_n(\theta,x_n,\dots,x_1)}$$

indique que q_n^* a au plus un zéro, compte tenu de l'ordre de multiplicité, ou est identiquement nul, auquel cas son expression intégrale se réduit à :

$$q_n^*(\theta,x_{n-1},\dots,x_1) = q_n(\theta,x_n,\dots,x_1)h(x_n)m(\{x_n\}) \quad ,$$

et $q_n\times h$ est nul m-presque partout. Ce raisonnement conduit, par étapes, aux conclusions du théorème car g étant continue ne peut changer de signe qu'en s'annulant et $p(\theta,x)h(x)$ est nul m-presque partout si et seulement si h l'est.

En présence de points de changement doubles, la démonstration ci-dessu issue de [12], n'est plus valable sauf si ces points sont de m-mesure nulle ; il est possible de montrer, par une autre méthode, que les conclusions du théorème sont exactes sans tenir compte de l'ordre de multiplicité des zéros. Par la suite, nous n'utiliserons ce résultat que pour $n \leq 2$ et nous donnons ci-dessous une démonstration dans le cas $n = 2$ avec un point de changement double.

Soient $X = (a,b)$ et x_o le point de changement double de h , ave
les notations précédentes, on a :

$$q_2^*(\theta,x_o) = \int_{(a,x_o[} q_2(\theta,x,x_o)h(x)dm(x) + \int_{]x_o,b)} q_2(\theta,y,x_o)h(y)dm(y)$$

notons, dans l'ordre, $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ les intégrales du second membre, ces fonctions gardent des signes constants et opposés, $g_1(\theta)$ ne s'annule que si est nul m-presque partout sur $(a,x_o[$ et donc égale, m-presque partout sur à une fonction qui ne change de signe qu'au plus une fois ; en supposant $g_1($ non nul, on peut écrire :

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{q_2^*(\theta,x_o)}{g_1(\theta)} = -\left\{\frac{1}{g_1(\theta)}\right\}^2 \int_{]x_o,b)} h(y)[q_2(\theta,y,x_o)]^2 \int_{(a,x_o[} q_3(\theta,x,y,x_o)h(x)dm(x)dm(y)$$

cette expression est soit strictement positive quelque soit θ et alors $q_2^*(\theta,x_c$ a au plus un zéro simple, soit identiquement nulle si h est nul m-presque partout sur $]x_o,b)$.

II.7. Définition.

On dit que la famille $\{p(\theta,x)\ ,\ \theta\in\Theta\}$ satisfait $\mathcal{H}_n$ si elle vérifie l'hypothèse $\mathcal{P}_n$ et si la fonction :

$$\int_X p(\theta,x)dm(x)$$

peut être dérivée (n-1) fois sous le signe intégral.

Citons deux théorèmes auxquels nous aurons à nous référer :

III.8. Théorème ([2], p.63)

Soient μ une mesure positive sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et $f_1,\dots f_k$, k fonctions réelles mesurables sur $(\Omega,\mathcal{A})$, μ-intégrables ; à toute fonction Φ mesurable sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeurs dans $[0,1]$ on associe le point S_Φ de $\mathbb{R}^k$ de coordonnées :

$$\beta_\Phi^1 = \int\Phi f_1\,d\mu,\dots,\beta_\Phi^k = \int\Phi f_k\,d\mu\ .$$

Le lieu des points S_Φ est un domaine D convexe, borné, fermé de $\mathbb{R}^k$; si S_Φ est un point frontière de D, il existe des constantes $a_1,\dots,a_k$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(\omega)a_j > 0 \implies \Phi = 1 \quad \mu\text{-p.p.}$$

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(\omega)a_j < 0 \implies \Phi = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Enfin, si S_Φ est un point extrémal de D et si les fonctions $f_1,\dots,f_k$ sont positives, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ tel que :

$$S_\Phi = S_{\mathbb{1}_A} .$$

III.9. Thécrème .(Lemme de Neyman et Pearson, [2], p.68)

Soient $P_o, P_1, \dots, P_N$, $N+1$ lois de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $p_o, \dots, p_N$ leurs densités de probabilité par rapport à une mesure μ positive ; quelles que soient les constantes $\lambda_o, \dots, \lambda_{N-1}$ non négatives (resp. positives) tout test Φ tel que :

$$p_N(\omega) > \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j\, p_j(\omega) \implies \Phi(\omega) = 1$$

$$p_N(\omega) < \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j\, p_j(\omega) \implies \Phi(\omega) = 0$$

est quasi admissible (resp. admissible) comme test de $\mathcal{P}_o = \{P_o, \dots, P_{N-1}\}$ contre P_N .

Nous suivons, ci-dessous, les trois premiers paragraphes du chapitre XI de [2] en indiquant les démonstrations uniquement dans les cas où un changemen notable intervient, ou bien encore lorsqu'il y sera fait référence par la suite.

III.10. Lemme.

Soit une structure statistique du type Pólya-n dans laquelle la famille $\{p(\theta,x),\ \theta \in \Theta\}$ satisfait $\mathcal{H}_n$; l'image $\beta_\Phi(\theta)$ de tout test Φ est $(n-1)$ fois continuement dérivable à l'intérieur de Θ .

III.11. Lemme.

Soit Φ un test sur une structure du type Pólya-1 strict ; s'il existe un valeur θ pour laquelle on ait :

$$\beta_{\Phi}(\theta) = 1 \text{ (resp.0)} ,$$

alors :

$$\Phi = 1 \text{ (resp.0)} \quad \text{m-p.p.}$$

§2 TESTS UNILATERAUX SUR STRUCTURE DU TYPE PÓLYA-2

Nous nous plaçons, dans tout ce paragraphe, sur une structure du type Pólya-2 :

$$\{X, \mathcal{B}_X ; \frac{dP_\theta}{dm} = p(\theta,x), \theta \in \Theta\} ,$$

dans laquelle la famille $\{p(\theta,x), \theta \in \Theta\}$ satisfait $\mathcal{H}_2$.

III.12. Définition.

On appelle test unilatéral droit (resp. gauche) tout test Φ tel que :

$$\forall \theta \in \Theta \quad 0 < \beta_{\Phi}(\theta) < 1 ,$$

et qu'il existe une constante C telle que :

$$x > C \implies \Phi = 1 \text{ (resp.0)} ,$$

$$x < C \implies \Phi = 0 \text{ (resp.1)} .$$

III.13. Lemme.

Quels que soient les deux points $\theta < \theta'$ de Θ tout test unilatéral droit (resp.gauche) est admissible comme test de θ contre θ' (resp. de θ' contre θ)

Démonstration

Soient Φ un test unilatéral droit et C la constante associée, posons

$$A = \frac{p(\theta',C)}{p(\theta,C)} ,$$

on a :

$$p(\theta',.) > A\ p(\theta,.) \implies \Phi = 1 ,$$

$$p(\theta',.) < A\ p(\theta,.) \implies \Phi = 0 ;$$

en effet $p(\theta,x)$ étant strictement positif (Pólya-1 strict) $D(\theta,\theta';C,x)$ et $p(\theta',x) - A\ p(\theta,x)$ sont de même signe et s'annulent en même temps ; lorsque $D(\theta,\theta';C,x)$ n'est pas nul, son signe et l'hypothèse Pólya-2 indiquent la position de x par rapport à C et donc la valeur de Φ .

Puisque A est strictement positif, le théorème III.9. assure l'admissibilité de Φ .

III.14. Corollaire.

L'image de tout test unilatéral droit (resp. gauche) est strictement croissante (resp. décroissante).

Démonstration :

Celle donnée dans [2] reste valable avec la seule hypothèse Pólya-2 strict qui assure la distinguabilité de P_θ et $P_{\theta'}$, la mesure m étant supposée non concentrée en un point.

L'hypothèse $\mathcal{H}_2$ permet de faire la démonstration suivante :

soient Φ un test unilatéral et $\alpha \in]0,1[$, la fonction $\Phi - \alpha$ est bornée et change de signe une fois ; d'après le théorème III.6. $\beta_\Phi - \alpha$ a au plus un zéro Φ ne pouvant être égal à α qu'en un point en lequel m ne peut pas être concentré. β_Φ est donc strictement monotone puisque continue ; son sens de variation est indiqué par le lemme III.13. en comparant Φ avec le test trivial de même niveau.

III.15. Corollaire.

Quels que soient $\theta \in \Theta$ et $\alpha \in]0,1[$, il existe un test unilatéral droit Φ' et un test unilatéral gauche Φ tels que :

$$\beta_{\Phi}(\theta) = \beta_{\Phi'}(\theta) = \alpha \ . \tag{1}$$

Ces deux tests sont uniques, m-presque partout, et on les appelle test unilatéraux de niveau α au point θ .

De plus, quel que soit un autre test Ψ satisfaisant à (1) , on a :

$$\beta_{\Phi'}(\theta') < \beta_{\Psi}(\theta') < \beta_{\Phi}(\theta') \qquad \text{si} \quad \theta' < \theta$$

$$\beta_{\Phi}(\theta') < \beta_{\Psi}(\theta') < \beta_{\Phi'}(\theta') \qquad \text{si} \quad \theta' > \theta \ .$$

Démonstration :

Soient $F_\theta(x)$ la fonction de répartition de la loi P_θ et Φ un test unilatéral gauche, on a :

$$\beta_{\Phi}(\theta) = F_\theta(C) + \Phi(C)[F_\theta(C+0) - F_\theta(C)] \quad ,$$

et donc, $F_\theta(x)$ étant non décroissante et continue à gauche, on se trouve dan l'un des deux cas suivants :

a) il existe une valeur C telle que :

$$F_\theta(C) = F_\theta(C+0) = \alpha \quad ,$$

et Φ est le test unilatéral gauche défini par C .

b) il existe une valeur C telle que :

$$F_\theta(C) \leq \alpha \leq F_\theta(C+0) \quad ,$$

et le test cherché est défini par :

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < C \\ 0 & \text{si} \quad x > C \\ \dfrac{\alpha - F_\theta(C)}{F_\theta(C+0) - F_\theta(C)} & \text{si} \quad x = C \ . \end{cases}$$

Dans tous les cas, puisque α est différent de 0 et de 1 , la condition :

$$0 < \beta_{\Phi}(\theta) < 1$$

est remplie puisque, d'après le lemme III.11., on aurait sinon :

$$\beta_{\Phi} = 0 \quad \text{ou} \quad \beta_{\Phi} = 1 \ .$$

Soit Ψ un test satisfaisant (1) , la fonction $\Phi-\Psi$ est bornée et change de signe au plus une fois ; d'après le théorème III.6. $\beta_{\Phi}-\beta_{\Psi}$ a au plus un zéro simple ou est identiquement nul. Dans le premier cas, le zéro ne peut être que θ et le sens des inégalités est indiqué par l'admissibilité de Φ ; dans le second cas $\Phi = \Psi$ m-presque partout, ce qui assure la m-unicité de Φ .

§3 TESTS BILATERAUX SUR STRUCTURE DU TYPE PÓLYA-3

Nous considérons, dans ce paragraphe, une structure statistique du type Pólya-3 dans laquelle la famille $\{p(\theta,x), \theta\in\Theta\}$ satisfait $\aleph_3$.

III.16. Définition

On appelle test bilatéral tout test Φ , qui n'est m-presque partout égal ni à un test unilatéral, ni à 0 , ni à 1 , et tel qu'il existe deux constantes C et C' telles que :

$$C < x < C' \quad \Longrightarrow \quad \Phi = 1 \ ,$$

$$x < C \ \text{ou} \ x > C' \quad \Longrightarrow \quad \Phi = 0 \ .$$

III.17. Lemme.

Quelles que soient les trois valeurs $\theta < \theta_1 < \theta'$ dans Θ , tout test bilatéral est admissible comme test de (θ,θ') contre θ_1 .

Démonstration :

Soient C et C' les deux constantes associées au test bilatéral Φ considéré et soient A et A' les solutions du système linéaire :

$$A\,p(\theta,C) + A'\,p(\theta',C) = p(\theta_1,C)$$

$$A\,p(\theta,C') + A'\,p(\theta',C') = p(\theta_1,C') \quad .$$

Pólya-2 strict assure l'existence et la stricte positivité des constantes A et A' ainsi que celle de $D(\theta,\theta';C,C')$; on a :

$$D(\theta,\theta_1,\theta';C,x,C') = D(\theta,\theta';C,C')[p(\theta_1,x)-A\,p(\theta,x)-A'\,p(\theta',x)] \quad ,$$

l'hypothèse Pólya-3 et le signe de $D(\theta,\theta_1,\theta';C,x,C')$ indiquent la position de x par rapport aux constantes C et C' et par suite :

$$p(\theta_1,.) > A\,p(\theta,.) + A'\,p(\theta',.) \implies \Phi = 1$$

$$p(\theta_1,.) < A\,p(\theta,.) + A'\,p(\theta',.) \implies \Phi = 0 \quad ,$$

et donc, d'après le théorème III.9., Φ est admissible.

III.18. Corollaire.

L'image d'un test bilatéral est soit strictement monotone, soit strictement croissante à gauche d'un point θ^* de Θ et strictement décroissante à droite.

Démonstration :

L'hypothèse Pólya-3 strict suffit pour justifier ce corollaire, car elle suppose que le support de m contient au moins trois points et interdit toute dépendance linéaire entre trois éléments distincts quelconques de la famille $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$. La démonstration figurant dans [2] peut donc s'appliquer, mais utilisant $\mathcal{H}_3$, nous avons :
soit Φ un test bilatéral et $\alpha \in]0,1[$ la fonction $\Phi - \alpha$ change de signe deux fois ; d'après le théorème III.6. $\beta_\Phi - \alpha$ a au plus deux zéros, compte tenu de l'ordre de multiplicité, ou est identiquement nul ; la deuxième solution n'est pas acceptable car $\Phi - \alpha$ ne peut s'annuler qu'en C et C' et m n'est pas concentrée en ces deux points ; la première permet de conclure car β_Φ est continue et, quels que soient $\theta < \theta_1 < \theta' \in \Theta$, le lemme III.1

donne l'inégalité :

$$\beta_\Phi(\theta_1) \geq \mathrm{Inf}\,[\beta_\Phi(\theta), \beta_\Phi(\theta')] \quad .$$

III.19. Lemme.

Quels que soient $\theta < \theta'$ deux points de Θ et $\alpha \in \,]0,1[$, il existe un test bilatéral Φ tel que :

$$\beta_\Phi(\theta) = \beta_\Phi(\theta') = \alpha \quad ; \qquad (1)$$

on appellera ce test, m-p.p. unique, test bilatéral de niveau α aux points (θ,θ') . Il existe un point θ^* de $]\theta,\theta'[$ tel que β_Φ est strictement croissante à gauche de θ^* , décroissante à droite. De plus, quel que soit un autre test Ψ satisfaisant à (1) on a :

$$\beta_\Phi(\theta_1) < \beta_\Psi(\theta_1) \qquad \text{si} \quad \theta_1 \in \Theta - [\theta,\theta']$$

$$\beta_\Psi(\theta_1) < \beta_\Phi(\theta_1) \qquad \text{si} \quad \theta_1 \in \,]\theta,\theta'[\quad .$$

Démonstration :

Soient θ_1 un point distinct de θ et θ' et $\mathcal{R}$ le lieu dans $\mathbb{R}^3$ des points :

$$\overline{\beta}_\Phi = [\beta_\Phi(\theta), \beta_\Phi(\theta'), \beta_\Phi(\theta_1)]$$

où Φ est un test quelconque ; $\mathcal{R}$ est un convexe fermé borné (théorème III.8.) symétrique par rapport à $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et contenant le segment $\{\alpha',\alpha',\alpha'),\alpha'\in[0,1]\}$

La droite (1) coupe $\mathcal{R}$ suivant un intervalle fermé dont on désigne par $\overline{\beta}_\Phi$ et $\overline{\beta}_{\Phi'}$ les deux extrémités ; $\overline{\beta}_\Phi$ et $\overline{\beta}_{\Phi'}$ sont distincts sinon la droite (1) serait tangente à $\mathcal{R}$ en (α,α,α) , $\mathcal{R}$ serait de dimension 2 et l'on aurait une relation linéaire entre P_θ , $P_{\theta'}$ et P_{θ_1} contredisant l'hypothèse Pólya-3 strict. D'après le théorème III.8., il existe des constantes A, A', B, B', C, C' telles que :

$$A\,p(\theta_1,.) > B\,p(\theta,.) + C\,p(\theta',.) \implies \Phi = 1$$
m.p.p.
$$A\,p(\theta_1,.) < B\,p(\theta,.) + C\,p(\theta',.) \implies \Phi = 0$$

$$A'\,p(\theta_1,.) > B'\,p(\theta,.) + C'\,p(\theta',.) \implies \Phi' = 1$$
m.p.p.
$$A'\,p(\theta_1,.) < B'\,p(\theta,.) + C'\,p(\theta',.) \implies \Phi' = 0$$

Considérons, par exemple, la fonction :

$$A\,p(\theta_1,x) - B\,p(\theta,x) - C\,p(\theta',x) \quad ,$$

elle est continue et admet au plus deux zéros distincts, sinon, $x_1 < x_2 < x_3$ désignant trois zéros, $D(\theta,\theta_1,\theta';x_1,x_2,x_3) = 0$ et l'hypothèse Pólya-3 strict ne serait pas respectée. Ainsi Φ et Φ' sont les indicatrices d'un intervalle ou de son complémentaire, comme d'autre part un test unilatéral ne peut, d'aprè le corollaire III.14., satisfaire (1) , il reste comme seule possibilité que Φ o $1-\Phi$ et Φ' ou $1-\Phi'$ soient bilatéraux. Remarquons maintenant que α est point intérieur de l'intervalle $[\beta_{\Phi'}(\theta_1),\beta_{\Phi}(\theta_1)]$, et on peut supposer sans restreindre la généralité que :

$$\beta_{\Phi}(\theta_1) > \alpha > \beta_{\Phi'}(\theta_1) \quad ;$$

alors, d'après le corollaire III.18., Φ et $1-\Phi'$ sont bilatéraux si $\theta_1 \in]\theta,\theta'$ et vice versa si θ_1 est extérieur à $]\theta,\theta'[$. Ainsi donc, des deux tests Φ et Φ' , l'un est bilatéral, l'autre complémentaire d'un test bilatéral et on a donc bien trouvé un test bilatéral satisfaisant à (1) ; son image ne peut être strictement monotone, à cause de (1).

Considérons maintenant un test bilatéral Φ satisfaisant à (1); il est clair , d'après le lemme III.17., qu'il satisfait aux inégalités (non strictes) de l'énoncé ; si Ψ est un autre test satisfaisant (1), la fonction :

$$h(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

change de signe au plus deux fois ; d'après le théorème III.6., $\beta_\Phi - \beta_\Psi$ a au plus deux zéros ou est identiquement nulle, or θ et θ' sont des zéros de $\beta_\Phi - \beta_\Psi$ et, soit les inégalités sont partout strictes, soit Φ et Ψ ont mêmes images et $\Phi = \Psi$ m-p.p. ce qui prouve la m-unicité de Φ et achève la démonstration.

III.20. Lemme.

Soient θ_1 un point intérieur de Θ , $\theta_2 > \theta_1$ et $p'(\theta,x)$ la dérivée, par rapport à θ , de $p(\theta,x)$; pour tout choix dans X du triplet ordonné $x_1 < x_2 < x_3$ on a :

$$D'(\theta_1,\theta_1,\theta_2;x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} p(\theta_1,x_1) & p(\theta_1,x_2) & p(\theta_1,x_3) \\ p'(\theta_1,x_1) & p'(\theta_1,x_2) & p'(\theta_1,x_3) \\ p(\theta_2,x_1) & p(\theta_2,x_2) & p(\theta_2,x_3) \end{vmatrix} > 0 .$$

Démonstration :

On peut écrire, pour tout θ différent de θ_1 :

$$\frac{1}{\theta-\theta_1} D(\theta_1,\theta,\theta_2;x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} p(\theta_1,x_1) & p(\theta_1,x_2) & p(\theta_1,x_3) \\ \dfrac{p(\theta,x_1)-p(\theta_1,x_1)}{\theta-\theta_1} & \dfrac{p(\theta,x_2)-p(\theta_1,x_2)}{\theta-\theta_1} & \dfrac{p(\theta,x_3)-p(\theta_1,x_3)}{\theta-\theta_1} \\ p(\theta_2,x_1) & p(\theta_2,x_2) & p(\theta_2,x_3) \end{vmatrix}$$

compte tenu du signe du premier membre de l'égalité ci-dessus (Pólya-3) et faisant tendre θ vers θ_1 on obtient, en développant le déterminant du second membre par rapport à la troisième ligne :

$$D'(\theta_1,\theta_1,\theta_2;x_1,x_2,x_3) = \lambda_1\, p(\theta_2,x_1) - \lambda_2\, p(\theta_2,x_2) + \lambda_3\, p(\theta_2,x_3) \geq 0 .$$

Soit $g(\theta)$ la fonction définie par :

$$g(\theta) = D'(\theta_1,\theta_1,\theta;x_1,x_2,x_3) ,$$

nous venons de voir que $g(\theta)$ est négative à gauche de θ_1 et positive à droite, si elle admet un autre zéro que θ_1 elle reste nulle entre les deux puisqu'elle est continue ; l'autre expression de $g(\theta)$:

$$g(\theta) = \lambda_1\, p(\theta,x_1) - \lambda_2\, p(\theta,x_2) + \lambda_3\, p(\theta,x_3)$$

indique qu'elle a au plus deux zéros (Pólya-3 strict), les constantes $\lambda_i, i = 1,2,3$ étant strictement positives d'après $\mathcal{H}_2$ car on a par exemple :

$$\lambda_1 = [p(\theta_1,x_2)]^2 q_2(\theta_1,x_3,x_2) .$$

III.21. Lemme.

Quels que soient $\theta \in \Theta$ et $\alpha \in]0,1[$ il existe un test bilatéral Φ unique m-p.p. , tel que :

$$\beta_\Phi(\theta) = \alpha \quad \frac{d}{d\theta}\beta_\Phi(\theta) = 0 \quad ; \qquad (1)$$

on l'appelle test bilatéral de niveau α au point θ . Son image est strictemen croissante à gauche de θ , décroissante à droite. De plus, quel que soit un autre test Ψ satisfaisant à (1) on a :

$$\beta_\Psi(\theta_1) > \beta_\Phi(\theta_1) \ , \quad \theta_1 \neq \theta \ .$$

Démonstration :

La démonstration est analogue à celle du lemme III.19. Soient θ' un point quelconque de Θ , différent de θ et $\mathcal{R}'$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par les points :

$$\overline{\beta}'_\Phi = [\beta_\Phi(\theta), \frac{d}{d\theta}\beta_\Phi(\theta), \beta_\Phi(\theta')]$$

où Φ est un test quelconque. Le domaine $\mathcal{R}'$ est un convexe fermé borné (théorème III.8.) de dimension 3 (lemme III.20.). La droite (1) coupe $\mathcal{R}'$ suivan un intervalle fermé d'intérieur non vide ; notons cet intervalle $(\overline{\beta}'_\Phi, \overline{\beta}'_{\Phi'})$, où

$$\beta_\Phi(\theta') < \alpha < \beta_{\Phi'}(\theta') \quad . \qquad (2)$$

D'après le théorème III.8., il existe des constantes A, A', B, B', C, C' telles que :

$$\left.\begin{array}{lcl} A\,p'(\theta,.) > B\,p(\theta,.) + C\,p(\theta',.) & \Longrightarrow & \Phi = 1 \\ A\,p'(\theta,.) < B\,p(\theta,.) + C\,p(\theta',.) & \Longrightarrow & \Phi = 0 \end{array}\right\} \text{m.p.p.}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} A'p'(\theta,.) > B'p(\theta,.) + C'p(\theta',.) & \Longrightarrow & \Phi' = 1 \\ A'p'(\theta,.) < B'p(\theta,.) + C'p(\theta',.) & \Longrightarrow & \Phi' = 0 \end{array}\right\} \text{m.p.p.}$$

De telles inégalités définissent toujours un intervalle ou son complémentaire (lemme III.20) ; d'après le corollaire III.14. un test unilatéral ne peut satisfaire simultanément (1) et (2) ; le corollaire III.18. et les inégalités (2) montrent alors que Φ et $1-\Phi'$ sont bilatéraux et que leurs images ne sont pas strictement monotones.

Soient maintenant Φ un test bilatéral et Ψ un test quelconque satisfaisant tous deux à (1) ; la fonction $\Phi-\Psi$ change de signe au plus deux fois et $\beta_\Phi-\beta_\Psi$ a un zéro d'ordre 2 en θ ; d'après le théorème III.6., soit l'image de Ψ est strictement supérieure à celle de Φ en dehors de θ (admissibilité de Φ) , soit elle lui est constamment égale et $\Psi=\Phi$ m-p.p. ce qui prouve la m-unicité de Φ et achève la démonstration.

Nous donnons ci-dessous la méthode de construction d'un test bilatéral indiquée dans [2] .

Soit $F_\theta(x)$ la fonction de répartition continue à gauche de la loi de probabilité P_θ ; déterminer effectivement un test bilatéral de niveau α aux points (θ,θ') $(\theta<\theta')$, c'est résoudre le système :

$$0 \le \gamma \le \gamma' \le 1$$

$$F_\theta(C') - F_\theta(C+0) + \gamma[F_\theta(C+0)-F_\theta(C)] + \gamma'[F_\theta(C'+0)-F_\theta(C')] = \alpha \qquad (1)$$

$$F_{\theta'}(C') - F_{\theta'}(C+0) + \gamma[F_{\theta'}(C+0)-F_{\theta'}(C)] + \gamma'[F_{\theta'}(C'+0)-F_{\theta'}(C')] = \alpha \qquad (2)$$

dans le cas d'un test bilatéral de niveau α au point θ , on remplace l'équation (2) par la condition désignée par (3), exprimant que la puissance du test a une dérivée nulle en θ . Remarquons qu'un test bilatéral est la différence de deux tests unilatéraux, gauches par exemple, et introduisons la variable auxiliaire y :

$$1 \ge y \ge \alpha \quad F_\theta(C') + \gamma'[F_\theta(C'+0)-F_\theta(C')] = y \quad ; \qquad (4)$$

l'équation (1) devient alors :

$$F_\theta(C) + (1-\gamma)[F_\theta(C+0)-F_\theta(C)] = y-\alpha \quad . \qquad (5)$$

III.22. Lemme.

Soient θ un point intérieur de $\Theta, \tilde{\beta}_w(\tau)$ l'image commune de tous les tests unilatéraux gauches de niveau w au point θ, et $K(w)$ et $H(w)$ les fonctions définies par :

$$\forall w \in [0,1] \quad K(w) = \left.\frac{d\tilde{\beta}_w}{d\tau}\right|_{\tau=0} \quad , \quad H(w) = \tilde{\beta}_w(\theta')$$

où θ' est un point de Θ supérieur à θ ; les fonctions $K(w)$ et $H(w)$ sont continues et strictement convexes, et l'on a :

$$K(0) = K(1) = 0 \ , \quad H(0) = 0 \ , \quad H(1) = 1 \ ,$$

$$\forall w \in]0,1[\quad K(w) < 0 \ , \quad w > H(w) > 0 \ .$$

La démonstration qui figure dans [2] utilise la propriété suivante : si Φ est un test d'image $\beta_\Phi(\tau)$ et s'il existe τ_o tel que $\beta_\Phi(\tau_o) = \tilde{\beta}_w(\tau)$ alors :

$$\beta_\Phi(\tau) < \tilde{\beta}_w(\tau) \qquad \tau < \tau_o$$

$$\beta_\Phi(\tau) > \tilde{\beta}_w(\tau) \qquad \tau > \tau_o \ .$$

Ce résultat est indiqué dans le corollaire III.15.

Revenons maintenant à la détermination des tests bilatéraux, il est clair que l'équation (2) dévient :

$$H(y) - H(y-\alpha) = \alpha \qquad 1 \geq y \geq \alpha \tag{6}$$

et la condition (3) s'écrit de même :

$$K(y) - K(y-\alpha) = 0 \qquad 1 \geq y \geq \alpha \ ; \tag{7}$$

or d'après le lemme III.22. on peut voir que chacune de ces équations à une solution unique ; y étant donc déterminé par (6) ou (7), les équations (3) et (5) déterminent alors C', γ', C, γ comme cela a été vu à propos du corollaire III.15.

§4 TESTS OPTIMAUX SUR STRUCTURE DU TYPE PÓLYA-3

Les hypothèses dans ce paragraphe sont celles faites au début du paragraphe précédent. Nous ne ferons qu'énoncer les résultats de [2] , les démonstrations étant rigoureusement identiques.

III.23. Théorème.

Soient Θ_o une partie non vide de Θ , θ_1 un point de $\Theta - \Theta_o$ et α un réel de $]0,1[$; il existe un test Φ , strictement U.M.P. comme test de Θ_o contre θ_1 et de niveau α , défini comme suit :

a) si $\Theta_o \subset (-\infty, \theta_1[$, (resp. $\Theta_o \subset]\theta_1, +\infty)$) , en désignant par :

$$\theta_o = \sup\{\theta \mid \theta \in \Theta_o\}, \text{ (resp. } \inf\{\theta \mid \theta \in \Theta_o\})$$

Φ est alors le test unilatéral droit (resp.gauche) de niveau α au point θ_o ;

b) sinon, soient :

$$\theta'_o = \sup\{\theta \mid \theta \in \Theta_o, \theta \leq \theta_1\}$$

$$\theta''_o = \inf\{\theta \mid \theta \in \Theta_o, \theta \geq \theta_1\} ,$$

si $\theta'_o \neq \theta''_o$, Φ est le test bilatéral de niveau α aux points (θ'_o, θ''_o)

si $\theta'_o = \theta''_o$, Φ est le test bilatéral de niveau α au point θ_1 .

III.24. Corollaire.

Soient Θ_o et Θ_1 deux hypothèses disjointes de Θ , il existe un test U.M.P. de Θ_o contre Θ_1 si et seulement si l'enveloppe convexe de Θ_1 est disjointe de Θ_o ; dans ce cas, le test est alors strictement U.M.P.

III.25. Théorème.

Soient Θ_o et Θ_1 deux hypothèses disjointes de Θ telles qu'il exist deux points (θ'_o, θ''_o), (resp. un point θ_o) tels que :

$$\Theta_o \subset [\theta'_o, \theta''_o] \quad , \quad \Theta_1 \subset \complement]\theta'_o, \theta''_o[\quad , \quad \overline{\Theta}_1 \cap \overline{\Theta}_o = \{\theta'_o, \theta''_o\} \quad ,$$

(resp. $\Theta_o = \{\theta_o\}$, $\theta_o \in \overline{\Theta}_1$, θ_o intérieur à l'enveloppe convexe de Θ_1) . Alor le test Φ , complémentaire du test bilatéral de niveau $1-\alpha$ aux points $(\theta'_o, \theta''_o$ (resp. θ_o) est strictement U.M.P.B. de niveau α comme test de Θ_o contre

III.26. Remarque.

Si la condition $\overline{\Theta}_o \cap \overline{\Theta}_1 = \{\theta'_o, \theta''_o\}$ n'est pas réalisée, il n'y a pas de test U.M.P.B. .

CHAPITRE IV

TESTS ET ESTIMATION DU PARAMETRE DE CONCENTRATION

Nous construisons, à partir d'un échantillon de taille n issu d'une variable aléatoire de loi s-D.M.D.(k,M), des tests et estimateurs du paramètre de concentration k. Nous avons déjà remarqué au chapitre II (proposition II.8.) que cet échantillon admet le résumé exhaustif :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}; \frac{dP_X^{(k,M)}}{dQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(-kM)}, \quad k \in \mathbb{R}^+ , \quad M \in S(s,1)\} .$$

Nous supposerons, dans le premier paragraphe, que la direction modale M est connue. La statistique $\langle M,x\rangle$ est alors exhaustive et induit une structure exponentielle scalaire, nous pouvons donc énoncer, en utilisant le chapitre précédent, des tests généraux sur le paramètre de concentration k.

Nous reprenons ces tests, au paragraphe suivant, avec l'hypothèse à priori que M appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, $1 \leq h \leq s$. La notion d'invariance permet d'introduire une structure du type Pólya-3 et d'appliquer à nouveau les résultats du chapitre III.

Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'estimateur sans biais de variance minimum de k lorsque la direction modale est connue, ainsi que les estimateurs de maximum de vraisemblance.

§1 TESTS SUR LE PARAMETRE DE CONCENTRATION LORSQUE LA DIRECTION MODALE EST CONNUE

Nous avons vu au chapitre II (remarques II.20.) qu'il convient de considérer la structure statistique :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}; \frac{dP_k}{d_1Q_n} = \frac{e^{kx}}{L_{_1Q_n}(-k)} \quad , \quad k \in \mathbb{R}^+\} \ . \tag{1}$$

Rappelons que ${}_1Q_n$ désigne la loi de probabilité de la projection orthogonale, sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension 1, de la résultante de n vecteurs aléatoires indépendants de même loi uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^s$. ${}_1Q_n$ admet une densité ${}_1q_n(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (proposition I.15.) :

$${}_1q_n(x) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{\pi} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \cos(\rho x)\, d\rho \quad .$$

$L_{_1Q_n}(-k)$ est la transformée de Laplace de ${}_1Q_n$ au point $-k$:

$$L_{_1Q_n}(-k) = \left\{2^{s'}\Gamma(s'+1)\, \frac{I_{s'}(k)}{k^{s'}}\right\}^n \quad .$$

IV.1. Proposition.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la structure statistique (1) satisfait $\mathcal{H}_n$ (définition III.7.) ; en particulier , cette structure est du type Pólya-∞ strict.

Démonstration :

En reprenant les notations du lemme III.2., il est facile d'établir par récurrence que :

$$q_n(k, x_n, \ldots, x_1) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)}{\prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i)}\, e^{k(x_n - x_{n-1})} \quad ;$$

l'ensemble des conditions contenues dans l'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est alors aisément vérifiable.

Soit $F_n(s,k,x)$ la fonction de répartition de la loi de probabilité P_k :

$$F_n(s,k,x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n \int_{-\infty}^{x} e^{ku} \int_0^{\infty} \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \cos(\rho u)\, d\rho\, du \quad ;$$

$F_n(s,k,x)$ établit une bijection entre $]-n,+n[$ et $]0,1[$, elle assure l'unicité des constantes de définition des différents test ainsi que le caractère déterministe de ces derniers.

Le théorème III.23. et son corollaire justifient les deux propositions suivantes :

IV.2. Proposition.

Soient deux hypothèses disjointes K' et K'' de $\mathbb{R}^+$, éventuellement réduites à un point, telles que :

$$k' = \sup\{k | k\in K'\} \le k'' = \inf\{k | k \in K''\} \ .$$

Quel que soit α de $]0,1[$, le test de région critique $[C',+\infty)$ (resp. $(-\infty;C'']$) est strictement U.M.P. de niveau α comme test de K' contre K'' (resp. de K'' contre K') ; la constante C' (resp. C'') est déterminée par :

$$F_n(s,k',C') = 1-\alpha \quad (\text{resp. } F_n(s,k'',C'')=\alpha) \ .$$

IV.3. Proposition.

Soient deux hypothèses disjointes K' et K'' de $\mathbb{R}^+$ telles que les ensembles suivants soient non vides :

$$K'_g = \{k'\in K' | k' < k'', k''\in K''\} \ , \quad K'_d = \{k'\in K' | k' > k'', k''\in K''\} \ .$$

Désignons par k'_g (resp. k'_d) la borne supérieure de K'_g (resp. inférieure de K'_d) .

Quel que soit α de $]0,1[$ il existe deux constantes uniques $C_1 < C_2$ telles que le test de région critique $[C_1,C_2]$ est strictement U.M.P. de niveau α comme test de K' contre K'' . Il s'agit du test bilatéral de niveau α aux points (k'_g, k'_d) , les constantes C_1 et C_2 étant déterminées comme il a été précisé à la fin du paragraphe 3 du chapitre III.

IV.4. Proposition.

Avec les notations de la propostion IV.3. et la condition :

$$\overline{K'} \cap \overline{K''} = \{k'_g , k'_d\} \quad , \qquad (1)$$

le test complémentaire du précédent est strictement U.M.P.B. de niveau $1-\alpha$ comme test de K'' contre K'.

Le théorème III.25. est à l'origine de cette proposition et la remarque qui le suit nous précise que, sans la condition (1), il n'existe pas de tests U.M.P.B. de K'' contre K'.

Nous laissons le soin au lecteur d'apprécier la forme et les propriétés de la fonction puissance des différents tests qui viennent d'être présentés à l'aide des résultats du chapitre III.

§2 TESTS SUR LE PARAMETRE DE CONCENTRATION LORSQUE LA DIRECTION MODALE N'EST PAS CONNUE

Afin d'être très général, nous supposerons à priori que la direction modale M appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, $1 \leq h \leq s$; la structure statistique à retenir est donc la suivante (proposition II.19.) :

$$\{\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP_\theta}{d_h Q_n} \doteq \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{{}_hQ_n}(k)} , \quad \theta = (k,M) \in \mathbb{R}^+ \times S(h,1)\} \quad . \qquad (1)$$

${}_hQ_n$ est la loi de probabilité de la projection orthogonale, sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, de la résultante de n vecteurs aléatoires indépendants de même loi uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^s$.

Pour $n > 1$ ou $h < s$, ${}_hQ_n$ admet une densité ${}_hq_n(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h})$ (proposition I.15.) :

$$ {}_h q_n(x) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho\|x\|)}{(\rho\|x\|)^{h'}} \rho^{h-1}\, d\rho \quad . $$

$L_{{}_hQ_n}(k)$ est un abus d'écriture désignant la transformée de Laplace de ${}_hQ_n$ au point $-kM$:

$$ L_{{}_hQ_n}(k) = \left\{2^{s'}\Gamma(s'+1)\,\frac{I_{s'}(k)}{k^{s'}}\right\}^n \quad . $$

La direction modale M dans la structure (1) est un paramètre fantôme puisque nous ne nous intéressons qu'au paramètre de concentration k . La méthode des tests conditionnels ([2], p.70) ne peut pas être utilisée ici, car il n'existe pas de statistique exhaustive non trivial pour M sur la structure (1) (remarques II.20).

La notion d'invariance ([17], chapitre IV), par contre, est tout indiquée ; en effet, tout problème décisionnel relatif à k est invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^h$ (symétrie par rapport à l'origine si $h=1$) ; jusqu'à la fin de ce paragraphe, l'invariance sera entendue au sens de ce groupe.

La statistique $R(x) = \|x\|$, définie sur (1) , est invariante maximale et induit la structure statistique suivante (corollaire II.7.) :

$$ \left\{\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} ; \frac{dP_k}{d\,{}_h\tilde{Q}_n} = \frac{L_{U_h}(kr)}{L_{{}_hQ_n}(k)} \ , \quad k \in \mathbb{R}^+\right\} \tag{2} $$

où :

$$ L_{U_h}(kr) = 2^{h'}\Gamma(h'+1)\,\frac{I_{h'}(kr)}{(kr)^{h'}} \quad . $$

${}_h\tilde{Q}_n$ est le profil de ${}_hQ_n$ et admet une densité ${}_h\tilde{q}_n(r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ (corollaire I.17.) :

$$ {}_h\tilde{q}_n(r) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{2^{h'}\Gamma(h'+1)} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho r)}{(\rho r)^{h'}} (\rho r)^{h-1}\, d\rho \quad . $$

$R(x)$ n'est pas exhaustive pour k et la structure (2) est complète puisque (1) l'est.

IV.5. <u>Lemme</u>.

<u>Soit</u> $g(x)$ <u>la fonction définie sur</u> $\mathbb{R}^+$ <u>par</u> :

$$g(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{Log} L_{U_h}(x) \quad ;$$

g <u>et ses deux premières dérivées vérifient les propriétés suivantes</u> :

a) $g(x) > 0 \ , \quad x > 0 \quad ; \quad g(0) = 0 \quad ;$

b) $g'(x) > 0 \ , \quad x \geq 0 \quad ; \quad g''(x) < 0 \ , \quad x > 0 \quad ;$

c) $g'(x) = 1 - \frac{h-1}{x} g(x) - g^2(x) \ , \quad x \geq 0 \quad .$

<u>Démonstration</u> :

c) est une conséquence immédiate des deux relations ([38], p.79) :

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) \\ I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) &= 2 I'_\nu(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $h = 1$ a) et b) se déduisent de la forme particulière de g :

$$g(x) = \operatorname{ch} x \ .$$

Soit $h \geq 2$ et T un vecteur aléatoire de loi h-D.M.D.(x, M) ; si U désigne la projection orthogonale de T sur le sous-espace engendré par la direction modale M, ses trois premiers moments centrés s'expriment au moyen de g et de ses dérivées :

$$E(U) = g(x) \ , \quad \sigma^2(U) = g'(x) \ , \quad E[(U-E(U))^3] = g''(x) \quad .$$

Il reste ainsi à montrer que le moment centré d'ordre trois est strictement négatif dès que x est strictement positif ; utilisant les relations (1), il se met sous la forme :

$$g''(x) = \frac{I_{h'+1}(x)}{I_{h'}(x)} \left\{ \frac{I_{h'+2}(x)}{I_{h'+1}(x)} \left\{ \frac{I_{h'+3}(x)}{I_{h'+2}(x)} - \frac{I_{h'+2}(x)}{I_{h'+1}(x)} \right\} + \left\{ \frac{I_{h'+2}(x)}{I_{h'+1}(x)} - \frac{I_{h'+1}(x)}{I_{h'}(x)} \right\} \left\{ \frac{I_{h'}(x)}{I_{h'+1}(x)} - \frac{I_{h'-1}(x)}{I_{h'}(x)} + \frac{1}{x} \right\} \right.$$

le résultat s'obtient avec l'inégalité suivante ([23], p.97) :

$$I_\nu^2(x) - I_{\nu-1}(x)\, I_{\nu+1}(x) \geq 0 \ , \quad x \geq 0 \ .$$

En effet $g''(x)$ ne s'annule, pour x strictement positif, que si on a :

$$\frac{I_{h'+3}(x)}{I_{h'+2}(x)} = \frac{I_{h'+2}(x)}{I_{h'+1}(x)} = \frac{I_{h'+1}(x)}{I_{h'}(x)}$$

qui est en contradiction avec l'identité :

$$I^2_{h'+2}(x) - I_{h'+1}(x)\, I_{h'+3}(x) = I_{h'+2}(x)\, I_{h'}(x) - I^2_{h'+1}(x) + \frac{2}{x} I_{h'+2}(x)\, I_{h'+1}(x) \ .$$

IV.6. Proposition.

La structure statistique (2) satisfait $\mathcal{H}_3$ et, par conséquent, est du type Pólya-3 strict.

Démonstration :

La seule difficulté est de démontrer la stricte positivité des fonctions $q_1(k,r_1)$, $q_2(k,r_2,r_1)$ et $q_3(k,r_3,r_2,r_1)$ définies dans le lemme III.2. .

$$q_1(k,r_1) = \frac{L_{U_h}(k,r_1)}{L_{{}_hQ_n}(k)} > 0 \ ;$$

$$q_2(k,r_2,r_1) = \frac{L_{U_h}(kr_2)}{L_{U_h}(kr_1)} \{r_2\, g(kr_2) - r_1\, g(kr_1)\}$$

$q_2(k,r_2,r_1)$ est strictement positif, car k et $L_{U_h}(kr_i)$, $i = 1,2,$ le sont et la fonction g est strictement croissante (lemme IV.5,b)) ;

$$q_3(k,r_3,r_2,r_1) = \frac{d}{dk}\left\{\frac{L_{U_h}(kr_3)}{L_{U_h}(kr_2)} \ \frac{r_3\, g(kr_3) - r_1\, g(kr_1)}{r_2\, g(kr_2) - r_1\, g(kr_1)}\right\}$$

$q_3(k,r_3,r_2,r_1)$ sera strictement positif si on a :

$$\frac{\delta^2}{\delta r\,\delta k} \text{ Log } \{L_{U_h}(kr)\,[rg(kr) - r_1 g(kr_1)]\} > 0$$

utilisant la relation c) du lemme IV.5., il vient :

$$\frac{\delta}{\delta k} \text{ Log } \{L_{U_h}(kr)\,[rg(kr) - r_1 g(kr_1)]\} = r_1 g(kr) - \frac{h-1}{k} + \frac{r^2 - r_1^2}{rg(kr) - r_1 g(kr_1)} \quad ,$$

posons :

$$\ell(r) = \frac{rg(kr) - r_1 g(kr_1)}{r^2 - r_1^2} \quad ,$$

il nous suffit de montrer :

$$\ell'(r) = \frac{d}{dr}\,\ell(r) < 0 \quad ;$$

écrivons $\ell(r)$ sous la forme :

$$\ell(r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{g(kr) - g(kr_1)}{r - r_1} + \frac{g(kr) + g(kr_1)}{r + r_1}\right\}$$

d'où :

$$\ell'(r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(r-r_1)k\,g'(kr) - (g(kr) - g(kr_1))}{(r-r_1)^2} + \frac{(r+r_1)k\,g'(kr) - (g(kr) + g(kr_1))}{(r+r_1)^2}\right\} \quad ;$$

le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$g(kr) - g(kr_1) = k(r-r_1)\,g'(kr') \quad , \quad r_1 < r' < r \quad ,$$
$$g(kr) = g(kr) - g(0) = kr\,g'(kr'') \quad , \quad 0 < r'' < r \quad ,$$
$$g(kr_1) = g(kr_1) - g(0) = kr_1\,g'(kr'_1) \quad , \quad 0 < r'_1 < r_1 < r \quad ;$$

reportons ces résultats dans l'expression de $\ell'(r)$:

$$\ell'(r) = \frac{k}{2}\left\{\frac{g'(kr) - g'(kr')}{r - r_1} + \frac{r(g'(kr) - g'(kr'')) + r_1(g'(kr) - g'(kr'_1))}{(r + r_1)^2}\right\}$$

la stricte décroissance de la fonction g' (lemme IV.5.,b)) achève la démonstration.

Toute partie K de $\mathbb{R}^+$ désigne l'hypothèse K de $\mathbb{R}^+$ (resp. $K \times S(h,1)$ de $\mathbb{R}^+ \times S(h,1)$ lorsque l'on se place sur la structure statistique (2) (resp.(1)).

A tout test Φ_2, défini sur (2), correspond, de façon naturelle, le test Φ_1 sur (1) par :

$$\Phi_1(x) = (\Phi_2 \circ R)(x) = \Phi_2(\|x\|) ,$$

et les images correspondantes satisfont :

$$\beta_{\Phi_1}(\theta) = \beta_{\Phi_2}(\|\theta\|) .$$

IV.7. Proposition.

Soit Φ un test sur (1) et $\tilde{\Phi}$ le test sur (2) défini par :

$$\tilde{\Phi}(r) = \int_{\mathbb{R}^h} \Phi(rx)\, dU_h(x) , \quad r \in \mathbb{R}^+ ;$$

alors, l'image $\beta_{\tilde{\Phi}}$ de $\tilde{\Phi}$ est égale à :

$$\beta_{\tilde{\Phi}}(k) = \int_{\mathbb{R}^h} \beta_{\Phi}(ku)\, dU_h(u) , \quad k \in \mathbb{R}^+ ,$$

où β_Φ est l'image de Φ .

Démonstration :

Il est clair que les conditions de mesurabilité et d'intégrabilité sont satisfaites et la proposition II.11. permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^h} \beta_\Phi(ku)\, dU_h(u) = \int_{\mathbb{R}^h}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^h} \Phi(rx) \frac{e^{\langle kru,x\rangle}}{L_{U_h}(-kru)}\, dU_h(x)\, dP_{k\|u\|}(r)\, dU_h(u) ,$$

en appliquant le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on intègre d'abord par rapport à u :

$$\int_{\mathbb{R}^h} \beta_\Phi(ku)\, dU_h(u) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^h} \Phi(rx) \frac{L_{U_h}(-krx)}{L_{U_h}(kr)}\, dU_h(x)\, dP_k(r)$$

où $L_{U_h}(kr)$ est la valeur commune aux $L_{U_h}(-kru)$ dans lesquels $\|u\|=1$;

l'intégration par rapport à x termine la démonstration :

$$\int_{\mathbb{R}^h} \beta_{\Phi}(ku)\, dU_h(u) = \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{\Phi}(r)\, dP_k = \beta_{\tilde{\Phi}}(k) \quad .$$

IV.8. Corollaire.

Soient K_o et K_1 deux hypothèses disjointes de $\mathbb{R}^+$ et Φ_2 un tes sur (2) admissible comme test de K_o contre K_1 ; alors le test Φ_1 sur (1) associé naturellement à Φ_2 est encore admissible comme test de K_o contre

Démonstration :

Elle se fait par l'absurde : soit Ψ un test sur (1) strictement supérieu à Φ_1, la continuité de l'image des tests et la propostion IV.7. montrent que le test $\tilde{\Psi}$ défini sur (2) par :

$$\tilde{\Psi}(r) = \int_{\mathbb{R}^h} \Psi(rx)\, dU_h(x)$$

est strictement supérieur à Φ_2 et contredit l'admissibilité de ce dernier.

En d'autres termes, le corollaire précédent indique que tout test admissi parmi les tests invariants est admissible.

IV.9. Corollaire.

Soient K_o et K_1 deux hypothèses disjointes de $\mathbb{R}^+$; si il existe u test Φ sur (1) qui soit U.M.P. (resp. U.M.P.B.) comme test de K_o contre K_1, alors il existe un test invariant $\tilde{\Phi}_1$ sur (1) de niveau inférieur ou égal à celui de Φ qui reste U.M.P. (resp. U.M.P.B) comme test de K_o contre K_1 ce test est défini par :

$$\tilde{\Phi}_1(x) = \int_{\mathbb{R}^h} \Phi(\|x\|u)\, dU_h(u) \quad .$$

Démonstration :

Soient Φ un test sur (1) U.M.P. comme test de K_o contre K_1 et α_Φ son niveau de signification. On définit successivement les tests $\tilde{\Phi}_2$ et $\tilde{\Phi}_1$ par :

$$\tilde{\Phi}_2(r) = \int_{\mathbb{R}^h} \Phi(rx)\, dU_h(x) \quad ,$$

$$\tilde{\Phi}_1(x) = \Phi_2(\|x\|) \quad ;$$

si $\alpha_{\tilde{\Phi}}$ désigne le niveau de signification de $\tilde{\Phi}_1$, la proposition IV.7. assure l'inégalité :

$$\alpha_{\tilde{\Phi}_1} \leq \alpha_{\tilde{\Phi}} \quad ;$$

Φ étant U.M.P. , on a la majoration :

$$\beta_{\tilde{\Phi}_1}(\theta) \leq \beta_\Phi(\theta) \quad , \quad \theta \in K_1 \times S(h,1)$$

utilisant à nouveau la proposition IV.7. il vient :

$$\beta_{\tilde{\Phi}_2}(\|\theta\|) = \beta_{\tilde{\Phi}_1}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^h} \beta_{\tilde{\Phi}_1}(\|\theta\|) dU_h(u) \leq \int_{\mathbb{R}^h} \beta_\Phi(\|\theta\|) dU_h(u) = \beta_{\tilde{\Phi}_2}(\|\theta\|) \quad , \quad \|\theta\| \in K_1$$

les fonctions $\beta_{\tilde{\Phi}_1}$ et β_Φ étant continues, elles coïncident sur $K_1 \times S(h,1)$.

Si Ψ est un autre test de niveau inférieur ou égal à $\tilde{\alpha}_{\Phi_1}$ et donc à α_Φ sa fonction puissance est majorée sur $K_1 \times S(h,1)$ par celle de Φ et donc par celle de $\tilde{\Phi}_1$. La démonstration est identique pour un test U.M.P.B.

IV.10. Remarque.

Si, dans le corollaire IV.9. $\bar{K}_o \cap \bar{K}_1 \neq \emptyset$, les tests Φ et $\tilde{\Phi}_1$ sont de même niveau égal à la valeur commune de β_Φ et $\beta_{\tilde{\Phi}_1}$ sur $\bar{K}_o \cap \bar{K}_1$.

Nous reprenons, ci-dessous , les tests présentés au paragraphe 1 . Rappelons que la famille des tests invariants définis sur la structure statistique (1) s'identifie à l'ensemble des tests définis sur la structure (2) et que cette dernière satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}_3$.

On note $F_n(s,h,k,r)$ la fonction de répartition de la loi de probabilité

$$F_n(s,h,k,r) = \left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n \int_0^r \frac{I_{h'}(ku)}{(ku)^{h'}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho u)}{(\rho u)^{h'}} (\rho u)^{h-1} \, d\rho \, du \quad .$$

IV.11. Proposition.

Soient deux hypothèses disjointes K' et K'' de $\mathbb{R}^+$, éventuellement réduites à un point, telles que :

$$k' = \sup\{k \mid k \in K'\} \leq k'' = \inf\{k \mid k \in K''\} \quad .$$

Quel que soit α de $]0,1[$, le test de région critique $\{\|x\| \geq C'\}$ (resp. $\{\|x\| \leq C''\}$ est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants, comme test de K' contre K'' (resp. de K'' contre K') ; la constante C' (resp. C'') est déterminée par :

$$F_n(s,h,k',C') = 1 - \alpha \quad (\text{resp. } F_n(s,h,k'',C'') = \alpha) \; .$$

De plus, ce test est admissible et est le seul, à un ensemble de ${}_hQ_n$-mesure nulle près, qui puisse être U.M.P. ou U.M.P.B. de niveau α comme test de K' contre K'' (resp. de K'' contre K') sauf peut être dans le cas où $K'' = \{k''\} = \{k'\}$ (resp. $K' = \{k'\} = \{k''\}$) .

Démonstration :

La première partie de la proposition est due au théorème III.23. et à son corollaire ; l'admissibilité est une conséquence du corollaire IV.8.

Soient Φ le test de région critique $\{\|x\| \geq C'\}$ et Ψ un test de niveau α supposé U.M.P. comme test de K' contre K'' ; d'après le corollaire IV.9 le test invariant Ψ_1 défini par :

$$\Psi_1(x) = \int_{\mathbb{R}^h} \Psi(\|x\| u) \, dU_h(u)$$

est U.M.P. de niveau $\tilde{\alpha} \leq \alpha$ comme test de K' contre K'' . le début de la proposition assure l'existence d'une constante C_1 telle que le test Φ_1 , de région critique $\{\|x\| \geq C_1\}$, soit U.M.P. de niveau $\tilde{\alpha}$ comme test de K' contre K'' . Les tests Ψ_2 et Φ_2 définis sur la structure (2) par Ψ_1 et Φ_1

ont donc la même image sur K" et au moins en un point de $\overline{K'}$, ils sont alors égaux ${}_h\tilde{Q}_n$-p.p. (corollaire III.15.) ; par suite Ψ vérifie nécessairement

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \geq C_1 \implies \Psi(x) = 1 \\ \|x\| < C_1 \implies \Psi(x) = 0 \end{array}\right. \quad {}_hQ_n\text{-p.p.} ,$$

d'où $\alpha = \tilde{\alpha}$, $C_1 = C'$ et $\Psi = \Phi$ ${}_hQ_n$-p.p.

La démonstration pour un test U.M.P.B. est identique.

On démontre de manière analogue les deux propositions suivantes.

IV.12. Proposition.

Soient deux hypothèses disjointes K' et K" de $\mathbb{R}^+$ telles que les ensembles suivants soient non vides :

$$K'_g = \{k' \in K' | k' < k",\ k" \in K"\} , \quad K'_d = \{k' \in K' | k' > k",\ k" \in K"\} .$$

Désignons par k'_g (resp. k'_d) la borne supérieure de K'_g (resp. inférieure de K'_d) .

Quel que soit α de $]0,1[$, il existe deux constantes uniques $C_1 < C_2$ telles que le test de région critique $\{C_1 \leq \|x\| \leq C_2\}$ est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants comme test de K' contre K" .

Les constantes C_1 et C_2 sont celles associées au test bilatéral de niveau α aux points (k'_g , k'_d) sur la structure (2) .

De plus, ce test est admissible et est le seul, à un ensemble de ${}_hQ_n$-mesure nulle près, qui puisse être U.M.P. ou U.M.P.B. de niveau α comme test de K' contre K" , sauf peut-être dans le cas où $K" = \{k'_g , k'_d\}$

IV.13. Proposition.

Avec les notations de la proposition IV.11. et la condition :

$$\overline{K'} \cap \overline{K"} = \{k'_g , k'_d\} ,$$

le test complémentaire du précédent est strictement U.M.P.B. de niveau $1 - \alpha$ parmi les tests invariants comme test de K" contre K' .

De plus, ce test est admissible et est le seul, à un ensemble de ${}_hQ_n$-mesure nulle près, qui puisse être U.M.P. ou U.M.P.B. de niveau $1-\alpha$ comme test de K'' contre K' sauf peut-être dans le cas où $K' = \{k'_g, k'_d\}$.

Sans la condition $\overline{K'} \cap \overline{K''} = \{k'_g, k'_d\}$ il n'existe pas de test U.M.P.B de K'' contre K' . La fonction puissance des tests de ce paragraphe est toujours radiale, sa forme et ses propriétés sont indiquées par la fonction correspondante sur $\mathbb{R}^+$ et les résultats du chapitre III.

§3 ESTIMATION DU PARAMETRE DE CONCENTRATION

Lorsque la direction modale est connue, nous considérons la structure statistique utilisée au paragraphe 1 :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}; \frac{dP_k}{d_1Q_n} = \frac{e^{kx}}{L_{{}_1Q_n}(-k)} , \quad k \in \mathbb{R}^+\} . \tag{1}$$

IV.14. Proposition.

Pour tout couple (n,s) , vérifiant $n(s-1) > 6$, la statistique définie sur (1) par :

$$G(x) = \frac{\int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \sin(\rho x)\, \rho\, d\rho}{\int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \cos(\rho x)\, d\rho} ,$$

est l'unique estimateur sans biais de variance minimum du paramètre de concentration k .

Démonstration :

La condition $n(s-1) > 6$ assure l'existence et la continuité des deux premières dérivées de ${}_1q_n(x)$; la fonction caractéristique de P_k est égale à (proposition II.2.) :

$$\left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)} \frac{J_{s'}(-t+ik)}{(-t+ik)^{s'}}\right\}^n ,$$

les conditions du corollaire 3.4.2. de [41] sont donc satisfaites et son application donne le résultat.

Cet estimateur n'est pas d'efficacité maximum, car seules les statistiques de la forme $ax + b$, où a et b sont constants, sont des extimateurs d'efficacité maximum de leurs images ([2], p.175) , à savoir :

$$n\,a\,\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} + b \quad .$$

IV.15. <u>Proposition</u>.

<u>L'estimateur de maximum de vraisemblance de</u> k <u>est défini par</u> :

$$\max\,(o,y) \quad ,$$

<u>où</u> y <u>est l'unique solution de l'équation</u> :

$$\frac{I_{s'+1}(y)}{I_{s'}(y)} = \frac{x}{n} \quad ; \qquad (1)$$

<u>la distribution asymptotique de cet estimateur est normale de moyenne</u> k <u>et de variance</u> :

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{I_{s'+2}(k)}{I_{s'}(k)} + \frac{1}{k}\,\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} - \left\{\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)}\right\}^2\right\}^{-1} \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

La dérivée logarithmique de la fonction de vraisemblance est égale à :

$$x - n\,\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} \quad ;$$

$I_{s'+1}(y)/I_{s'}(y)$ est une fonction impaire dont nous avons déjà étudié le comportement sur $\mathbb{R}^+$ (lemme IV.5.) ; la relation (1) défini donc y comme une fonction dérivable de x , $\max\,(o,y)$ est alors mesurable et représente l'unique valeur maximisant la fonction de vraisemblance. Les propriétés des structures exponentielles et le comportement asymptotique de l'estimateur de maximum de vraisemblance ([40), p.360) achève la démonstration compte tenu de la proposition II.2.

Dans le cas où la direction modale n'est pas connue et appartient à un sous-espace vectoriel de dimension h , $1 \leq h \leq s$, nous reprenons la structu

$$\{\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}; \frac{dP_\theta}{d_hQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{{}_hQ_n}(k)} \quad , \quad \theta = (k,M) \in \mathbb{R}^+ \times S(h,1)\} \quad .$$

IV.16. Proposition.

L'estimateur de maximum de vraisemblance de k est défini comme l'unique solution y de l'équation :

$$\frac{I_{s'+1}(y)}{I_{s'}(y)} = \frac{\|x\|}{n} \quad ;$$

la distribution asymptotique de cet estimateur est normale de moyenne k et de variance :

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{I_{s'+2}(k)}{I_{s'}(k)} + \frac{1}{k}\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} - \left\{\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)}\right\}^2\right\}^{-1}$$

Démonstration :

La fonction de vraisemblance est maximum au point $y \frac{x}{\|x\|}$, où y est l'unique solution de (2) ; le principe d'invariance ([41],p.223) implique que y est l'estimateur de maximum de vraisemblance. La loi asymptotique est obtenue en regardant y comme fonction de la moyenne empirique ([40],p260) , la matrice de variance covariance de x se déduisant de la proposition II.2. .

CHAPITRE V

TESTS ET ESTIMATION DE LA DIRECTION MODALE

Ici encore, l'étude de la direction modale nous amène à considérer la structure statistique :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}; \frac{dP_X^{(k,M)}}{dQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(-kM)} \;,\quad k \in \mathbb{R}^{+*} \;,\quad M \in S(s,1)\} \quad .$$

Nous avons sélectionné les quelques tests qui nous sont apparus comme les plus importants quant au choix des hypothèses ; nous verrons, en effet , que ces tests sont très fortement liés à la forme des hypothèses et qu'il est, par conséquent, difficile de les insérer dans des schémas généraux.

Nous testons donc successivement une direction contre une autre, l'appartenance ou non de la direction modale à un sous-espace vectoriel, et enfin $M = M_o$ contre $M \neq M_o$.

Dans le premier paragraphe, nous supposons que le paramètre de concentration est connu ; le conditionnement par des statistiques libres, selon le principe ancillaire de FISHER, permet de dégager des procédures satisfaisantes.

Lorsque le paramètre de concentration k n'est pas connu, on recherche un test optimal dans la famille des tests libres par rapport à k , c'est ce que nous ferons au paragraphe 2 .

Enfin, nous étudions, dans le dernier paragraphe, l'estimateur de maximum de vraisemblance de la direction modale.

§1 TESTS SUR LA DIRECTION MODALE LORSQUE LE PARAMETRE DE CONCENTRATION EST CONNU

Le paramètre de concentration k est fixé non nul et la structure statistique que nous devons considérer s'écrit :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}; \frac{dP_M}{dQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(k)} \quad , \quad M \in S(s,1)\} \quad , \tag{1}$$

$L_{Q_n}(k)$ désigne encore la transformée de Laplace de Q_n au point $-kM$ et ne dépend pas de M .

V.1. Proposition.

Soient M_o et M_1 deux hypothèses simples distinctes de $S(s,1)$. Quel que soit α de $]0,1[$ le test défini sur la structure (1) par la région critique :

$$\langle x, M_1 - M_o\rangle \geq C\|M_1 - M_o\|$$

est strictement U.M.P. de niveau α comme test de M_o contre M_1 . La constante C est l'unique solution de :

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n \int_C^\infty e^{-\lambda y} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-\mu^2)^{1/2}]}{(\rho^2-\mu^2)^{s'/2}}\right\}^n \cos(\rho y)\, d\rho\, dy = \alpha$$

avec :

$$\lambda = k\,\frac{\langle M_1, M_1 - M_o\rangle}{\|M_1 - M_o\|} \quad , \quad \mu = (k^2-\lambda^2)^{1/2} \quad .$$

Démonstration :

Si $M_1 = -M_o$ la statistique définie sur (1) par :

$$Y(x) = \frac{\langle x, M_1 - M_o \rangle}{\|M_1 - M_o\|}$$

est exhaustive pour le couple $\{M_o, M_1\}$ et induit la structure exponentielle scalaire (proposition II.19.) :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_Y}{d\,{}_1Q_n} = \frac{e^{\theta y}}{L_{{}_1Q_n}(k)} , \quad \theta \in \{-k, k\}\} \tag{2}$$

Le test de M_o contre M_1 sur la structure (1) se traduit sur (2) par le test de $-k$ contre k et la solution est donnée par le théorème III.23. .

Dans les autres cas, posons, en plus des notations déjà introduites :

$$Z(x) = \frac{\langle x, M_1 + M_o \rangle}{\|M_1 + M_o\|} ,$$

le couple (Y,Z) est exhaustif pour $\{M_o, M_1\}$ et induit la structure exponentielle (proposition II.19.) :

$$\{\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} ; \frac{dP_{(Y,Z)}}{d\,{}_2Q_n} = \frac{e^{\theta y + \mu z}}{L_{{}_2Q_n}(k)} , \quad \theta \in \{-\lambda, \lambda\}\} . \tag{3}$$

Tester M_o contre M_1 sur la structure (1) est donc équivalent à tester $\theta = -\lambda$ contre $\theta = \lambda$ sur (3) ; Y est alors exhaustif et induit à nouveau une structure exponentielle scalaire :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_Y}{dP_\mu} = \frac{e^{\theta y}}{L_{P_\mu}(\lambda)} , \quad \theta \in \{-\lambda, \lambda\}\} , \tag{4}$$

la mesure dominante P_μ et $L_{P_\mu}(\lambda)$ sont donnés par la proposition II.8.

$$\frac{dP_\mu}{dy} = \frac{1}{\pi} \left\{\frac{\mu^{s'}}{I_{s'}(\mu)}\right\}^n \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2 - \mu^\rho)^{1/2}]}{(\rho^2 - \mu^2)^{s'/2}}\right\}^n \cos(\rho y)\, d\rho$$

$$L_{P_\mu}(\lambda) = \left\{ \frac{I_{s'}(k)}{k^{s'}} \quad \frac{\mu^{s'}}{I_{s'}(\mu)} \right\}^n$$

le test de $-\lambda$ contre λ sur la structure (4) est encore précisé par le théorème III.23. .

Soient R et Ψ les statistiques définies sur la structure (1) par :

$$R(x) = \|x\| \ , \qquad \Psi(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad ;$$

le couple (Ψ, R) est exhaustif et, k étant connu, R est libre, bien que Ψ ne soit pas exhaustif. En fait R précise, en quelque sorte, la qualité de l'information sur M contenue dans Ψ ; ceci suggère de raisonner conditionnellement à R : c'est le principe ancillaire de FISHER ([15],p.217) .

Nous pouvons alors énoncer un autre test entre les hypothèses M_o et M_1

V.2. Proposition.

Quel que soit α de $]0,1[$ le test défini sur (1) par la région critique

$$\langle x, M_1 - M_o \rangle \geq C_\alpha(\|x\|) \|M_1 - M_o\|$$

est strictement supérieur à tout test de M_o contre M_1 de niveau α conditionnellement à R. La fonction $C_\alpha(r)$ est définie par la relation :

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \ \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \ \frac{1}{r^{s-2}} \int_{C_\alpha(r)}^{r} e^{-\lambda y} \frac{I_{s'-1/2}[\mu(r^2-y^2)^{1/2}]}{[\mu(r^2-y^2)^{1/2}]^{s'-1/2}} (r^2-y^2)^{s'-1/2} dy = \alpha$$

λ et μ gardant la même signification que dans la proposition V.1. .

Démonstration :

Soit la structure conditionnelle (proposition II.11.) :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP^r_{\Psi/R}}{dU_s} = \frac{e^{kr\langle M,\Psi\rangle}}{L_{U_s}(kr)} \ , \quad M \in \{M_o, M_1\}\} \quad ;$$

quel que soit α de $]0,1[$ il existe un test sur cette structure qui est strictement U.M.P. de niveau α comme test de M_o contre M_1 : ce test est obtenu comme dans la proposition V.1. et sa région critique peut s'écrire :

$$r\langle \Psi, M_1 - M_o \rangle \geq C_\alpha(r) \| M_1 - M_o \| \quad ,$$

$C_\alpha(r)$ est déterminé à partir de la loi de probabilité conditionnelle de Y à R indiquée dans la proposition II.15. , Y étant définie comme plus haut par :

$$Y(x) = \frac{\langle x, M_1 - M_o \rangle}{\| M_1 - M_o \|} \quad .$$

Il suffit enfin de remonter ces tests sur la structure (1) en remarquant que la fonction $C_\alpha(r)$ est dérivable, donc mesurable.

Le test que nous venons de construire est strictement inférieur à celui de même niveau donné par la proposition V.1., car sa projection sur la statistique Y est un test stochastique équivalent qui satisfait donc les inégalités du corollaire III.15..

Lorsque $M_1 \neq -M_o$ nous pouvons reprendre le raisonnement précédent au niveau de la structure (3) en utilisant la statistique ancillaire :

$$V(x) = [(Y(x))^2 + (Z(x))^2]^{1/2} \quad :$$

V.3. <u>Proposition</u>.

<u>Quel que soit</u> α <u>de</u> $]0,1[$ <u>le test défini sur</u> (1) <u>par la région critique</u> :

$$\langle x, M_1 - M_o \rangle \geq C_\alpha(V(x)) \| M_1 - M_o \|$$

<u>est strictement supérieur à tout test de</u> M_o <u>contre</u> M_1 <u>de niveau</u> α <u>conditionnellement à</u> V . <u>La fonction</u> $C_\alpha(v)$ <u>est définie par la relation</u> :

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{I_o(kv)} \int_{C_\alpha(v)}^{v} e^{-\lambda y} \frac{ch[\mu(v^2 - y^2)^{1/2}]}{(v^2 - y^2)^{1/2}} dy = \alpha$$

<u>où</u> λ <u>et</u> μ <u>sont donnés dans la proposition</u> V.1..

Ce test est également strictement inférieur à celui de même niveau donné par la proposition V.1. .

Enfin, en considérant sur la structure (4) la statistique ancillaire $|Y(x)|$ nous obtenons, compte tenu de la proposition V.1., un test simple dont le niveau est majoré :

V.4. Proposition.

Quel que soit α de $]0,1/2]$ le test défini sur (1) par la région critique :

$$\langle x, M_1 - M_o\rangle \geq \left(\frac{1}{2k} \operatorname{Log} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) / \langle M_1, M_1 - M_o\rangle$$

est strictement U.M.P. de niveau strictement inférieur à α comme test de M_o contre M_1 .

Nous voyons sur cet exemple que l'utilisation de statistiques ancillaires peut affaiblir les résultats ; cependant, les procédures sont souvent simplifiées et restent parfois les seules, comme ci-dessous, que nous sachions mener à bie

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h , $1 \leq h \leq s$ nous cherchons à tester l'hypothèse $M \in H$ contre $M \notin H$ sur la structure satistique (1). On note respectivement $R(x), Y(x)$ et $V(x)$ les statistiques définies sur (1) respectivement par la norme de x , la projection orthogonale de x sur l'orthogonal de H et la norme de cette projection. De même, on désigne par λ la projection orthogonale de kM sur l'orthogonal de H et on pose :

$$a = \|\lambda\| \ , \quad b = (k^2 - a^2)^{1/2} \quad .$$

Notre problème de test est invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^s$ qui laissent H globalement invariant ; l'invariance sera entendue au sens de ce groupe tant qu'il sera question de tester $M \in H$ contre $M \notin H$.

Le couple (V,R) constitue une statistique invariante maximale, la loi P_R de R et la loi de probabilité conditionnelle. $P^r_{V/R}$ de V à R sont données par les corollaires II.4. et II.16. :

$$\frac{dP_R}{dr} = \tilde{f}_k^{*n}(r) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{[L_{U_s}(k)]^n} \frac{I_{s'}(kr)}{(kr)^{s'}} \tilde{q}_n(r)$$

$$\frac{dP^r_{V/R}}{dv} = g_{(a,r)}(v) = \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \frac{I_{\ell'}(av)}{(av)^{\ell'}} \frac{I_{h'}[b(r^2-v^2)^{1/2}]}{[b(r^2-v^2)^{1/2}]^{h'}} \frac{v^{\ell-1}}{r^{s-2}}(r^2-v^2)^{h'} \mathbb{1}_{]0,r[}(v) \quad .$$

Nous sommes ainsi conduits à tester $a = 0$ contre $a > 0$ sur la structure :

$$\{(\mathbb{R}^+)^2, \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^+)^2} ; \frac{dP_{(V,R)}}{dv \otimes dr} = g_{(a,r)}(v)\, \tilde{f}_k^{*n}(r) \quad , \quad a \in [0,k]\} \quad ;$$

pour toute constante C non négative, l'application du lemme du Neyman et Pearson ([2],p.67) introduit l'inégalité :

$$\frac{I_{\ell'}(av)}{(av)^{\ell'}} \frac{I_{h'}[b(r^2-v^2)^{1/2}]}{[b(r^2-v^2)^{1/2}]^{h'}} > \frac{C}{2^{\ell'}\Gamma(\ell'+1)} \frac{I_{h'}[k(r^2-v^2)^{1/2}]}{[k(r^2-v^2)^{1/2}]^{h'}} \quad .$$

Nous voyons ici la nécessité de recourir à la statistique ancillaire R et de se placer sur la structure conditionnelle :

$$\{\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} ; \frac{dP^r_{V/R}}{dv} = g_{(a,r)}(v) \quad , \quad a \in [0,k]\} \quad .$$

Le lemme de Neyman et Pearson redonne la même inégalité, mais dans laquelle r est un paramètre ; le lemme IV.5. permet d'affirmer que cette inégalité définit un intervalle de $\mathbb{R}^+$ de la forme $]v_o, r]$ et nous pouvons énoncer

V.5. Proposition.

Quel que soit α de $]0,1[$ le test défini sur la structure (1) par la région critique :

$$V(x) \geq C_\alpha(R(x))$$

est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants de niveau α conditionnellement à R , comme test de $M \in H$ contre $M \notin H$. La fonction $C_\alpha(r)$ est définie par la relation :

$$\frac{1}{2^{\ell'}\Gamma(\ell'+1)} \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \frac{1}{r^{s-2}} \int_{C_\alpha(r)}^{r} \frac{I_{h'}[k(r^2-v^2)^{1/2}]}{[k(r^2-v^2)^{1/2}]^{h'}} (r^2-v^2)^{h'} v^{\ell-1} dv = \alpha \quad .$$

Examinons maintenant un test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$ où M_o est une direction donnée. Soient H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ à une dimension de vecteur unitaire M_o et $H^\perp$ son orthogonal. $R(x)$ désigne encoı la statistique définie sur la structure (1) par la norme de x et $Y(x)$ représente la projection orthogonale de x sur H. La démarche à suivre est identique à celle menant à la proposition V.5.. Le problème est ici invariant par le groupe des rotations de $H^\perp$ et le couple (Y,R) est une statistique invariante maximale. La loi de probabilité conditionnelle $P^r_{Y/R}$ de Y à R est donnée par la proposition II.15. :

$$\frac{dP^r_{Y/R}}{dy} = g_{(\lambda,r)}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \frac{1}{r^{s-2}} e^{\lambda y} \frac{I_{s'-1/2}[b(r^2-y^2)^{1/2}]}{[b(r^2-y^2)^{1/2}]^{s'-1/2}} (r^2-y^2)^{s'-1/2} \mathbb{1}_{]0,r[}$$

où λ est la projection orthogonale de kM sur H et $b = (k^2-\lambda^2)^{1/2}$.

Nous devons donc tester $\lambda = k$ contre $\lambda < k$ sur la structure conditionnelle :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \, ; \frac{dP^r_{Y/R}}{dy} = g_{(\lambda,r)}(y) \, , \quad \lambda \in [-k,k]\} \quad ;$$

le lemme de Neyman et Pearson conduit à l'inégalité :

$$e^{(\lambda-k)y} \frac{I_{s'-1/2}[b(r^2-y^2)^{1/2}]}{[b(r^2-y^2)^{1/2}]^{s'-1/2}} > \frac{C}{2^{s'-1/2}\Gamma(s'+1/2)}$$

qui définit un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[-r, y_o[$.

V.6. Proposition.

Quel que soit α de $]0,1[$ le test défini sur la structure (1) par la région critique :

$$Y(x) \leq C_\alpha(R(x))$$

est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants de niveau α conditionnellement à R, comme test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$. La fonction $C_\alpha(r)$ est définie par la relation :

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{2^{s'-1/2}\Gamma(s'+1/2)} \frac{1}{r^{s-2}} \frac{(kr)^{s'}}{I_{s'}(kr)} \int_{-r}^{C_\alpha(r)} e^{ky}(r^2-y^2)^{s'-1/2} dy = \alpha \quad .$$

V.7. Remarque.

On peut tester de la même manière le cône des directions M satisfaisant $\langle M,M_o\rangle \geq e$, $-1 < e \leq 1$, contre $\langle M,M_o\rangle < e$. L'invariance est la même, ainsi que la structure conditionnelle sur laquelle nous devons tester $\lambda \geq ke$ contre $\lambda < ke$; il suffit de remarquer que cette structure satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}_2$ (et par conséquent est du type Pólya-2 strict), le test s'énonc comme dans la proposition V.6. ; la fonction $C_\alpha(r)$ est déterminée par :

$$\int_{-r}^{C_\alpha(r)} g_{(ke,r)}(y)\, dy = \alpha \quad .$$

§2 TESTS SUR LA DIRECTION MODALE LORSQUE LE PARAMETRE DE CONCENTRATION EST INCONNU

La structure statistique fondamentale pour ce paragraphe est la suivante :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_{(k,M)}}{d\,Q_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(k)} \quad , \quad M \in S(s,1) \quad , \quad k \in \mathbb{R}^{+*}\} \quad , \qquad (1)$$

k est un paramètre fantôme, c'est pourquoi nous nous restreindrons souvent dans la suite à l'étude des tests libres par rapport à k. Une partie P de $S(s,1)$ représentera toujours l'hypothèse $P \times \mathbb{R}^{+*}$ correspondante.

Soient M_o et M_1 deux hypothèses simples disjointes de $S(s,1)$; dans le cas particulier où $M_1 = -M_o$, la projection orthogonale $Y(x)$ de x

sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ à une dimension de vecteur unitaire M_o est exhaustive pour $\{M_o, M_1\}$. Y induit sur $\mathbb{R}$ la structure exponentielle scalaire :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_\theta}{d\,{}_1Q_n} = \frac{e^{\theta y}}{L_{{}_1Q_n}(-\theta)} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}^*\} \quad ;$$

la densité de ${}_1Q_n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est donn par la proposition I.15.

$$\frac{d\,{}_1Q_n}{dy} = {}_1q_n(y) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{\pi} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \cos(\rho y)\, d\rho \quad .$$

V.8. <u>Proposition</u>.

<u>Quel que soit</u> α <u>de</u> $]0,1[$ <u>le test défini sur</u> (1) <u>par la région critique</u>

$$\langle x, M_o \rangle > C$$

<u>est strictement</u> U.M.P. <u>de niveau</u> α <u>comme test de</u> $M = M_o$ <u>contre</u> $M = -M$
<u>La constante</u> C <u>est solution de</u> :

$$\int_C^\infty {}_1q_n(y)\, dy = \alpha \quad .$$

Lorsque M_1 est distinct de $-M_o$, on appelle H , le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension 2 contenant M_o et M_1 , et Z(x) , **la pro**jection orthogonale de x sur l'orthogonal de M_o dans H orienté comme M_1 par rapport à M_o . (Y,Z) est une statistique exhaustive pour $\{M_o, M_1\}$ et induit la structure exponentielle suivante :

$$\{\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} ; \frac{dP_{(k,M)}}{d\,{}_2Q_n} = \frac{e^{k\langle M,\, {}^t(y,z)\rangle}}{L_{{}_2Q_n}(k)} \quad , \quad M \in \{M_o, M_1\} \quad , \quad k \in \mathbb{R}^{+*}\}$$

avec :

$$\frac{d\,{}_2Q_n}{dy \otimes dz} = {}_2q_n(y,z) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{2\pi} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n J_o[\rho(y^2+z^2)^{1/2}]\, \rho\, d\rho \quad .$$

V.9. Lemme.

Soit Φ un test de M_o contre M_1 défini sur la structure (1) ; si Φ est libre (relativement à k), il est libre conditionnellement à Y .

Il suffit de remarquer que Y est complète (relativement à k) lorsque $M = M_o$ et d'utiliser un résultat de [2] (théorème 3, p.19) .

V.10 . Proposition.

Pour tout α de $]0,1[$, le test défini sur (1) par la région critique :

$$Z(x) \geq C_\alpha(Y(x))$$

est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests libres de M_o contre M_1
La fonction $C_\alpha(y)$ est déterminée par :

$$\int_{C_\alpha(y)}^{\infty} {}_2q_n(y,z)\,dz = \alpha\ {}_1q_n(y) \quad .$$

Démonstration :

Soit $\mu = Z(M_1)$, l'image de M_1 par l'application Z ; la loi de probabilité conditionnelle $P^y_{Z/Y}$ de Z à Y est obtenue à l'aide de la proposition II.8.

$$\frac{dP^y_{Z/Y}}{dz} = g_{(\theta,y)}(z) = \frac{\pi e^{k\theta z}}{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n} \quad \frac{{}_2q_n(y,z)}{\displaystyle\int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-k^2\theta^2)^{1/2}]}{(\rho^2-k^2\theta^2)^{s'/2}}\right\}^n \cos(\rho y)\,d\rho}$$

où θ prend les valeurs μ ou 0 selon que $M = M_1$ ou $M = M_o$.

Examinons un test de $\theta = 0$ contre $\theta = \mu$ sur la structure conditionnelle :

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \,;\, \frac{dP^y_{Z/Y}}{dz} = g_{(\theta,y)}(z) \ , \quad \theta \in \{0,\mu\} \ , \quad k \in \mathbb{R}^{+*}\} \quad ;$$

le lemme de Neyman et Pearson montre que le test, défini sur cette structure par la région critique :

$$z \geq C_\alpha(y)$$

où $C_\alpha(y)$ est donné dans l'énoncé de la proposition, est strictement U.M.P. de niveau α comme test de $\theta = 0$ contre $\theta = \mu$. Le lemme V.9. achève la démonstration.

Soient H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h , $1 \leq h \leq$ et $H^\perp$ son orthogonal. On note $V(x)$ (resp. $W(x)$) la norme de la projection orthogonale de x sur H (resp. $H^\perp$) . Tester $M \in H$ contre $M \notin H$ est un problème invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^s$ qui laissent H globalement invariant et (V,W) est une statistique invariante maximale.

La loi P_V de V et la loi de probabilité conditionnelle $P^v_{W/V}$ de W à V sont obtenues à partir des corollaires II.4., II.9., et II.16. :

$$\frac{dP_V}{dv} = h^{f^{*n}_{(a,b)}}(v) = \left\{\frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)}\right\}^n \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-b^2)^{1/2}]}{(\rho^2-b^2)^{1/2}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} (\rho v)^{h-1} d\rho$$

$$\frac{dP^v_{W/V}}{dw} = g_{(b,v)}(w) = \frac{(2\pi)^{s'+1}}{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n} \frac{I_{\ell'}(bw)}{(bw)^{\ell'}} \frac{w^{\ell-1} \qquad q_n(v,w)}{\int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}[(\rho^2-b^2)^{1/2}]}{(\rho^2-b^2)^{s'/2}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho}$$

où a (resp. b) est la norme de la projection orthogonale de kM sur H (resp. $H^\perp$) et :

$$q_n(v,w) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{s'}[\rho(v^2+w^2)^{1/2}]}{[\rho(v^2+w^2)^{1/2}]^{s'}} \rho^{s-1} d\rho \quad .$$

L'invariance nous conduit à tester $b = 0$ contre $b > 0$ sur la structure

$$\{(\mathbb{R}^+)^2, \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^+)^2} ; \frac{dP_{(a,b)}}{dv \otimes dw} = g_{(b,v)}(w)\, h^{f^{*n}_{(a,b)}}(v) \ , \quad (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 - \{(0,0)\}\} \quad .$$

V.11. <u>Lemme.</u>

<u>Soit</u> Φ <u>un test de</u> $M \in H$ <u>contre</u> $M \notin H$ <u>défini sur la structure</u> (1) ; <u>si</u> Φ <u>est invariant et libre relativement à</u> k , <u>il est libre conditionnellement à</u> V .

En effet, Φ n'est fonction que de (V,W), V est complète relativement à a et $a = k$ $(b = 0)$ lorsque $M \in H$.

Notons que, lorsque $b = 0$, $g_{(0,v)}(w)$ s'écrit :

$$g_{(0,v)}(w) = \frac{2\pi^{\ell'+1}}{\Gamma(\ell'+1)} w^{\ell-1} \frac{q_n(v,w)}{{}_hq_n(v)}$$

avec :

$${}_hq_n(v) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{\frac{J_{s'}(\rho)}{\rho^{s'}}\right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho \quad .$$

On peut enfin montrer, comme pour la proposition V.10., le résultat suivant :

V.12. Proposition.

Pour tout α de $]0,1[$ le test défini sur la structure (1) par la région critique :

$$W(x) \geq C_\alpha(V(x))$$

est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants et libres relativement à k comme test de $M \in H$ contre $M \notin H$. La fonction $C_\alpha(v)$ est déterminée par :

$$\frac{2\pi^{\ell'+1}}{\Gamma(\ell'+1)} \int_{C_\alpha(v)}^\infty q_n(v,w)\, w^{\ell-1}\, dw = \alpha\ {}_hq_n(v) \quad .$$

Pour tester $M = M_o$ contre $M \neq M_o$ on note encore H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ à une dimension de vecteur unitaire M_o et $H^\perp$ son orthogonal. $Y(x)$ représente la projection orthogonale de x sur H et $W(x)$ la norme de la projection orthogonale de x sur $H^\perp$. L'invariance est ici relative au groupe des rotations de $H^\perp$ et (W,Y) constitue une statistique invariante maximale. La démarche est ensuite identique à celle du cas précédent.

La loi de probabilité conditionnelle $P^y_{W/Y}$ de W à Y est caractérisée par :

$$\frac{dP^{y}_{W/Y}}{dw} = \frac{\pi(2\pi)^{s'+1/2}}{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^{n}} \; \frac{I_{s'-1/2}(bw)}{(bw)^{s'-1/2}} \; \frac{w^{s-2} \quad q_n(y^2,w)}{\int_0^{\infty}\left\{\frac{J_{s'}(\rho^2-b^2)^{1/2}}{(\rho^2-b^2)^{s'/2}}\right\}^{n}\cos(\rho y)\,d\rho} ,$$

où b est la norme de la projection orthogonale de kM sur $H^{\perp}$ et $q_n(y^2,w)$ la fonction $q_n(v,w)$ définie plus haut dans laquelle v est remplacé par y^2 .

V.13. Lemme.

Soit Φ un test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$ défini sur la structure (1 si Φ est invariant et libre (relativement à k) , il est libre conditionnellement à Y .

V.14. Proposition.

Pour tout α de $]0,1[$ le test défini sur la structure (1) par la région critique.

$$W(x) \geq C_{\alpha}(Y(x))$$

est strictement U.M.P. de niveau α parmi les tests invariants et libres (relativement à k) comme test de $M = M_o$ contre $M \neq M_o$. La fonction $C_{\alpha}(y)$ est déterminée par :

$$\frac{2\pi^{s'+1/2}}{\Gamma(s'+1/2)} \int_{C_{\alpha}(y)}^{+\infty} q_n(y^2,w)w^{s-2}\,dw = \alpha \; {}_1q_n(y) \quad .$$

§3 ESTIMATION DE LA DIRECTION MODALE

Rappelons la structure statistique de base :

$$\{\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_{(k,M)}}{dQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(k)} , \quad M \in S(s,1) \; , \quad k \in \mathbb{R}^{+*}\} \tag{1}$$

V.15. <u>Propostion</u>.

<u>La statistique</u> $\overline{X}(x) = \frac{x}{n}$ <u>définie sur</u> (1) <u>est un estimateur sans biais d'efficacité maximum de son image</u> :

$$\frac{I_{s'+1}(k)}{I_{s'}(k)} M \quad ;$$

<u>c'est également un estimateur de maximum de vraisemblance</u>.

Il s'agit de propriétés classiques des structures exponentielles et il est aussi aisé d'établir le résultat suivant :

V.16. <u>Proposition</u>.

<u>La statistique</u> $\Psi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ <u>définie sur</u> (1) <u>est l'estimateur de maximum de vraisemblance de la direction modale</u> M , <u>elle le reste également lorsque</u> k <u>est connu</u>.

L'étude des propriétés optimales de cet estimateur n'entre pas dans le cadre des méthodes habituelles, en particulier la notion de biais n'est pas utilisable. Nous pouvons tout de même remarquer, à l'aide de la proposition II.11., que la loi de probabilité conditionnelle de Ψ à $R(x) = \|x\|$ étant la loi s-D.M.D.$(k\|x\|,M)$, la loi de Ψ sera unimodale de direction modale M .

V.17. <u>Remarque</u>.

Les résultats de ce chapitre sont aisément transposables au cas où l'on sait, à priori, que la direction modale appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h ; il suffit pour cela de considérer au départ la structure statistique :

$$\{\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP_{(k,M)}}{d\,{}_hQ_n} = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{{}_hQ_n}(-kM)} \quad , \quad k \in \mathbb{R}^{+*} \quad , \quad M \in s(h,1)\} \quad .$$

[13] KARLIN, S. — Polya type distribution III.
(1957) - Ann. Math. Statist. 28, 839-60.

[14] KELKER, D. — Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization.
(1969) - Sankhyä : the Indian Journal of Statistics A, 419-30.

[15] KENDALL, M.G., STUART, A — The Advanced Theory of Statistics.
(1967) - Vol.2, (2nd edn.) Griffin, London.

[16] KLUYVER, J.C. — A local probability theorem.
(1906) - Ned. Akad. Wet. Proc. A8, 341-50.

[17] LEHMANN, E.L. — Testing Statistical Hypotheses.
(1959) - John Wiley and Sons, New York.

[18] LORD, R.D. — The use of the Hankel transform in statistics, I general theory and examples.
(1954) - Biometrika, 41, 44-55.

[19] LORD. RAYLEIGH — On the problem of random vibrations, and of randor flights in one, two, or three dimensions.
(1919) - Phil. Mag. (6), 37, 321-47.

[20] MARDIA, K.V. — Statistics of directional data.
(1972) - Academic Press, London and New York.

[21] PARTHASARATHY, K.R. — Probability Measures on Metric Spaces.
(1967) - Academic Press, New York and London.

[22] PEARSON, K. — A Mathematical Theory of Random Migration.
(1906) - Draper's compagny research memoirs. Biometric Series, III, 15.

[23] PETIAU, G. — La théorie des fonctions de Bessel.
(1955) - Monographie C.N.R.S.

[24] POLYA, G. — Sur quelques points de la théorie des probabilités, I sur une propriété caractéristique de la loi de Gau
(1931) - Ann. Inst. H.Poincaré 1, 117-32.

[25] RUHIN, A.L. — Some statistical and probabilistic problems on group
(1970) - Proc. Steklov Inst. Math. 111, 59-129.

[26] SCHOENBERG, I.J. — Metric spaces and completely monotone functions.
(1938) - Ann. Math. 39, 811-41.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD, K.J. — On spherical probability distributions. (1941) - Dissertation, Massachussets Institute of Technology.

[2] BARRA, J.R. — Notions fondamentales de statistique mathématique. (1971) - Dunod éditeur Paris.

[3] DOWNS, T.D. — The von Mises distribution : derived distribution, regression ... (1965) - Ph.D. Thesis, University of Michigan.

[4] DOWNS, T.D. — Somme relationships among the von Mises distribution of different dimensions. (1966) - Biometrika, 53, 269-72.

[5] DOWNS, T.D., GOULD, A.L. — Some relationships between the normal and von Mises distributions. (1967) - Biometrika, 54, 684-7.

[6] DURAND, D., GREENWOOD, J.A. — Random unit vectors II : usefulness of Gram-Charlier and related series in approximating distributions. (1957) - Ann. Math. Statist., 28, 978-86.

[7] FISCHER, R.A. — Dispersion on a sphere. (1953) - Proc. Roy. Soc. London, A217, 295-305.

[8] GREENWOOD, J.A., DURAND, D. — The distribution of length and components of the sum of n random unit vectors. (1955) - Ann. Math. Statist. 26, 233-46.

[9] GRENANDER, U. — Probabilities on algebric structures. (1963) - Almqvist and Wiksell, Stockolm.

[10] GUMBEL, E.J., GREENWOOD, J.A., DURAND, D. — The circular normal distribution : theory and tables. (1953) - J. Amer. Statist. Ass., 48, 131-52.

[11] KARLIN, S. — Decision theory for Polya type distributions, case of two actions, I. (1956) - Proc. Third Berkeley Symp. prob. statist. Vol. I, University of California Press, 115-29.

[12] KARLIN, S. — Polya type distribution II. (1957) - Ann. Math. Statist., 28, 281-308.

[27] STEPHENS, M.A. The statistics of directions : the von Mises and Fish distributions.
(1962) - Ph.D.Thesis, University of Toronto.

[28] STEPHENS, M.A. Exact and approximate tests for directions I.
(1962) - Biometrika, 49, 463-77.

[29] STEPHENS, M.A. Exact and approximate test for directions II.
(1962) - Biometrika, 49, 547-52.

[30] STEPHENS, M.A. Random walk on a circle.
(1963) - Biometrika, 50, 385-90.

[31] STEPHENS, M.A. The testing of unit vectors for randomness .
(1964) - J. Amer. Statist. Ass., 59, 160-7.

[32] STEPHENS, M.A. Tests for the dispersion and for the modal vector of a distribution on a sphere.
(1967) - Biometrika, 54, 211-23.

[33] STEPHENS, M.A. Tests for the von Mises distribution.
(1969) - Biometrika, 56, 149-60.

[34] TORTRAT, A. Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique.
(1965) - Ann. Inst. H.Poincaré, 1, 217-37.

[35] TORTRAT, A. Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X .
(1966) - Ann. Inst. H.Poincaré, 2, 279-98.

[37] VAN DER VAART, H.R. Determining the absolutely continuous component of a probability distribution from its Fourier-Stieftjes transform.
(1967) - Arkiv För Mathematik, Band 7, nr 24, 331-42

[38] WATSON, G.N. A treatise on the theory of Bessel functions.
(1944) - (2 nd edn.) Cambridge University Press.

[39] WATSON, G.S. WILLIAMS, E.J. On the construction of significance tests on the circl and the sphere.
(1956) - Biometrika, 43, 344-52.

[40] WILKS, S.S. Mathematical Statistics.
(1962) - John Wiley and Sons, New York.

[41] ZACKS, S. The theory of Statistical Inference.
(1971) - John Wiley and Sons, New York.