Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens

Elise Bonzon

IRIT - Université Paul Sabatier
bonzon@irit.fr

13 novembre 2007

Systèmes multi-agents

Agent rationnel

- Autonome
- Capacités de raisonnement : croyances, préférences, décisions

Système multi-agents (SMA)

- Agents rationnels dans un environnement commun
- Communication : résolution de preuves, de conflits, échange d'information
- Satisfaction des préférences individuelles

$\Longrightarrow$ Interactions stratégiques entre agents

Systèmes multi-agents

Agent rationnel

- Autonome
- Capacités de raisonnement : croyances, préférences, décisions

Système multi-agents (SMA)

- Agents rationnels dans un environnement commun
- Communication : résolution de preuves, de conflits, échange d'information
- Satisfaction des préférences individuelles

$\Longrightarrow$ Interactions stratégiques entre agents

Systèmes multi-agents

Agent rationnel

- Autonome
- Capacités de raisonnement : croyances, préférences, décisions

Système multi-agents (SMA)

- Agents rationnels dans un environnement commun
- Communication : résolution de preuves, de conflits, échange d'information
- Satisfaction des préférences individuelles

$\Longrightarrow$ Interactions stratégiques entre agents

Théorie des jeux

Théorie des jeux

- Modèle formel pour l'étude des interactions entre agents
- Description de situations sociales

Jeu

- Un ensemble de joueurs
- Un ensemble de stratégies possibles pour chaque joueur
- Fonction d'utilité : valeur/combinaison de stratégies

Théorie des jeux

Théorie des jeux

- Modèle formel pour l'étude des interactions entre agents
- Description de situations sociales

Jeu

- Un ensemble de joueurs
- Un ensemble de stratégies possibles pour chaque joueur
- Fonction d'utilité : valeur/combinaison de stratégies

Théorie des jeux

Représentation d'un jeu

- Forme extensive / Forme normale
- Fonctions d'utilité décrites explicitement
  - Nombre de valeurs numériques : exponentiel en fonction du nombre d'agents
  - Quantité d'espace exponentielle

$\Longrightarrow$ Représentation compacte des préférences

Théorie des jeux

Représentation d'un jeu

- Forme extensive / Forme normale
- Fonctions d'utilité décrites explicitement
  - Nombre de valeurs numériques : exponentiel en fonction du nombre d'agents
  - Quantité d'espace exponentielle

$\Longrightarrow$ Représentation compacte des préférences

Représentation compacte de préférences

Langage de représentation compacte de préférences

- Préférences cardinales/ordinales
- Langages graphiques
- Langages logiques : logique propositionnelle...

Jeux et représentation compacte de préférences

- Jeux graphiques [Koller et Milch, 2003; Gottlob et *al*, 2005]
- Jeux booléens [Harrenstein, Van der Hoek, Meyer, Witteveen 2001, 2004]

Représentation compacte de préférences

Langage de représentation compacte de préférences

- Préférences cardinales/ordinales
- Langages graphiques
- Langages logiques : logique propositionnelle...

Jeux et représentation compacte de préférences

- Jeux graphiques [Koller et Milch, 2003; Gottlob et *al*, 2005]
- Jeux booléens [Harrenstein, Van der Hoek, Meyer, Witteveen 2001, 2004]

Introduction

Les jeux booléens, introduits par Harrenstein, Van der Hoek, Meyer, Witteveen (2001, 2004) sont des jeux

- à deux joueurs avec p variables de décision binaires
- chaque variable de décision est contrôlée par un et un seul joueur
- statiques
- à somme nulle
- les utilités des joueurs sont spécifiées par une formule propositionnelle

Introduction

Les jeux booléens, introduits par Harrenstein, Van der Hoek, Meyer, Witteveen (2001, 2004) sont des jeux

- à deux joueurs avec p variables de décision binaires
- chaque variable de décision est contrôlée par un et un seul joueur
- statiques
- à somme nulle
- les utilités des joueurs sont spécifiées par une formule propositionnelle

$\Rightarrow$ Jeux booléens à n joueurs, à somme non nulle avec des préférences binaires

Introduction

Les jeux booléens, introduits par Harrenstein, Van der Hoek, Meyer, Witteveen (2001, 2004) sont des jeux

- à deux joueurs avec p variables de décision binaires
- chaque variable de décision est contrôlée par un et un seul joueur
- statiques
- à somme nulle
- les utilités des joueurs sont spécifiées par une formule propositionnelle

$\Rightarrow$ Jeux booléens à n joueurs, à somme non nulle avec des préférences binaires
$\Rightarrow$ Jeux booléens à n joueurs, à somme non nulle avec des préférences non binaires

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

- n prisonniers (notés $1, \ldots, n$)
- La police propose deux alternatives à chacun d'entre eux
  - couvrir tes complices en te taisant (T_i, $i = 1, \ldots, n$)
  - les trahir en les dénonçant (noté $\neg T_i$, $i = 1, \ldots, n$)
- Si tu les dénonces, tu auras une remise de peine et tes partenaires purgeront le maximum (sauf si l'un d'eux t'a dénoncé aussi, auquel cas il bénéficiera comme toi d'une remise de peine).
- Mais si vous vous couvrez mutuellement, vous aurez tous une remise de peine

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

- Forme normale pour $n = 3$:

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

- n prisonniers : matrice à n-dimension, et donc 2^n n-uplets à spécifier

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

- Forme normale pour $n = 3$:

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

- Ce jeu peut être exprimé de façon beaucoup plus compacte par le jeu booléen $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$
  - $N = \{1, \ldots, n\}$
  - $V = \{T_1, \ldots, T_n\}$
  - $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, avec $\forall i$, $\gamma_i = \top$ (contraintes)
  - $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \pi_i = \{T_i\}$ (fonction d'affectation de contrôle)
  - $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, avec $\forall i$, $\varphi_i = (T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n) \vee \neg T_i$ (buts)

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

- Forme normale pour $n = 3$:

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

- $\forall i$, i a 2 stratégies possibles : $s_i = T_i$ ou $s_i = \overline{T_i}$
- la stratégie $\overline{T}_i$ est une stratégie gagnante pour i
- l'ensemble des profils de stratégies pour G est noté S : 8 profils de stratégies

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

- Forme normale pour $n = 3$:

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

- s_{-i} représente la projection de s sur $N \setminus \{i\}$
- $s = (T_1, T_2, T_3)$; $s_{-1} = (T_2, T_3)$; $s_{-2} = (T_1, T_3)$; $s_{-3} = (T_1, T_2)$

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

Equilibre de Nash en stratégies pures (PNE)

Un équilibre de Nash en stratégies pures (PNE) est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs, *i.e.* $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un PNE ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in S_i, u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, s'_i)$.

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

Equilibre de Nash en stratégies pures (PNE)

Un équilibre de Nash en stratégies pures (PNE) est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs, *i.e.* $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un PNE ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in S_i, u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, s'_i)$.

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

Equilibre de Nash en stratégies pures (PNE)

Un équilibre de Nash en stratégies pures (PNE) est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs, *i.e.* $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un PNE ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s_i' \in S_i, u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, s_i')$.

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

Equilibre de Nash en stratégies pures (PNE)

Un équilibre de Nash en stratégies pures (PNE) est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs, *i.e.* $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un PNE ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s_i' \in S_i, u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, s_i')$.

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

Version simplifiée du dilemme du prisonnier

Equilibre de Nash en stratégies pures (PNE)

Un équilibre de Nash en stratégies pures (PNE) est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs, *i.e.* $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un PNE ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in S_i, u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, s'_i)$.

$3 : T_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)

$3 : \overline{T}_3$		
1 \ 2	T_2	$\overline{T}_2$
T_1	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)
$\overline{T}_1$	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)

2 équilibres de Nash en stratégies pures : $T_1 T_2 T_3$ et $\overline{T}_1 \overline{T}_2 \overline{T}_3$

Caractérisation

Caractérisation [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

Un profil de stratégies $s \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures pour un jeu booléen G ssi pour tout i soit le but de i est satisfait par s, soit i ne peut pas le satisfaire :

- $s \models \varphi_i$
- ou $s_{-i} \models \neg\varphi_i$

Caractérisation

Caractérisation [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

Un profil de stratégies $s \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures pour un jeu booléen G ssi pour tout i soit le but de i est satisfait par s, soit i ne peut pas le satisfaire :

- $s \models \varphi_i$
- ou $s_{-i} \models \neg\varphi_i$

Exemple : $G = (N, V, \Gamma, \pi, \phi)$ avec $N = \{1,2\}$, $V = \{a,b\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\varphi_1 = a \wedge \neg b$, $\varphi_2 = \neg a \wedge b$.
G a 2 PNE:

- $s = a\bar{b}$: $s \models \varphi_1$ et $(s_{-2} = a) \models \neg\varphi_2$.
- $s = \bar{a}b$: $(s_{-1} = b) \models \neg\varphi_1$ et $s \models \varphi_2$.

Complexité [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

Cas général

Le problème de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans un jeu booléen est Σ_2^p-complet. Cette complexité est la même pour les jeux booléens à deux joueurs et à somme nulle.

Cas particulier

Soit G un jeu booléen. Si $\forall i \in N$, φ_i est en forme normale disjonctive (DNF), alors le problème de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégie pure est NP-complet.

Jusqu'ici

- Représentation compacte de jeux
- Généralisation des jeux booléens
- Equilibres de Nash en stratégies pures
- Autre concept de solution : stratégies dominées

Et maintenant

- Représentation compacte de jeux
- Généralisation des jeux booléens
- Equilibres de Nash en stratégies pures
- Autre concept de solution : stratégies dominées

Stratégies dominées

Stratégies strictement dominées

Une stratégie s_i **domine strictement** une autre stratégie s_i' si s_i est strictement meilleure que s_i' quelles que soient les stratégies des autres joueurs : $\forall s_{-i} \in S_i$, $u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i})$.

1 \ 2	b	$\overline{b}$
a	(1, 1)	(1, 0)
$\overline{a}$	(0, 1)	(0, 1)

Stratégies dominées

Stratégies strictement dominées

Une stratégie s_i **domine strictement** une autre stratégie s_i' si s_i est strictement meilleure que s_i' quelles que soient les stratégies des autres joueurs : $\forall s_{-i} \in S_i$, $u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i})$.

1 \ 2	b	$\overline{b}$
a	(1, 1)	(1, 0)
$\overline{a}$	(0, 1)	(0, 1)

a domine strictement $\overline{a}$ pour 1.

Stratégies dominées

Stratégies faiblement dominées

s_i **domine faiblement** s'_i si s_i est au moins aussi bonne que s'_i quelles que soient les stratégies des autres joueurs, et strictement meilleure que s'_i pour au moins une combinaison de stratégies : $\forall s_{-i} \in S_i$, $u_i(s'_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i})$ et $\exists s_{-i} \in S_i$ t.q. $u_i(s'_i, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i})$.

1 \ 2	b	$\overline{b}$
a	(1, 1)	(1, 0)
$\overline{a}$	(0, 1)	(0, 1)

Stratégies dominées

Stratégies faiblement dominées

s_i **domine faiblement** s'_i si s_i est au moins aussi bonne que s'_i quelles que soient les stratégies des autres joueurs, et strictement meilleure que s'_i pour au moins une combinaison de stratégies : $\forall s_{-i} \in S_i$, $u_i(s'_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i})$ et $\exists s_{-i} \in S_i$ t.q. $u_i(s'_i, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i})$.

1 \ 2	b	$\overline{b}$
a	(1, 1)	(1, 0)
$\overline{a}$	(0, 1)	(0, 1)

b domine faiblement $\overline{b}$ pour 2.

Caractérisation

Dominance faible [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

La stratégie s_i **domine faiblement** la stratégie s'_i ssi :

- $(\varphi_i)_{s'_i} \models (\varphi_i)_{s_i}$ et
- $(\varphi_i)_{s_i} \not\models (\varphi_i)_{s'_i}$

Exemple : $G = (N, V, \Gamma, \pi, \phi)$ avec $N = \{1, 2\}$, $V = \{a, b\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = \neg a \wedge b$.

La stratégie $s_2 = b$ domine faiblement $s'_2 = \overline{b}$.
$(\varphi_2)_{s'_2} = \bot$, $(\varphi_2)_{s_2} = \neg a$:

Caractérisation

Dominance faible [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

La stratégie s_i **domine faiblement** la stratégie s'_i ssi :

- $(\varphi_i)_{s'_i} \models (\varphi_i)_{s_i}$ et
- $(\varphi_i)_{s_i} \not\models (\varphi_i)_{s'_i}$

Exemple : $G = (N, V, \Gamma, \pi, \phi)$ avec $N = \{1,2\}$, $V = \{a,b\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = \neg a \wedge b$.

La stratégie $s_2 = b$ domine faiblement $s'_2 = \overline{b}$.
$(\varphi_2)_{s'_2} = \perp$, $(\varphi_2)_{s_2} = \neg a$:

- $\perp \models \neg a$

Caractérisation

Dominance faible [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

La stratégie s_i **domine faiblement** la stratégie s'_i ssi :

- $(\varphi_i)_{s'_i} \models (\varphi_i)_{s_i}$ et
- $(\varphi_i)_{s_i} \not\models (\varphi_i)_{s'_i}$

Exemple : $G = (N, V, \Gamma, \pi, \phi)$ avec $N = \{1, 2\}$, $V = \{a, b\}$,
$\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = \neg a \wedge b$.

La stratégie $s_2 = b$ domine faiblement $s'_2 = \overline{b}$.
$(\varphi_2)_{s'_2} = \bot$, $(\varphi_2)_{s_2} = \neg a$:

- $\bot \models \neg a$
- $\neg a \not\models \bot$

Complexité [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, Zanuttini, 2006]

Proposition

Décider si une stratégie s_i donnée est faiblement dominée est Σ_2^p**-complet**.

La difficulté reste valable même si φ_i est restreint aux DNF.

Jusqu'ici

- Représentation compacte de jeux
- Généralisation des jeux booléens
- Caractérisation logique des concepts de solution
- Dépendances entre joueurs

Et maintenant

- Représentation compacte de jeux
- Généralisation des jeux booléens
- Caractérisation logique des concepts de solution
- Dépendances entre joueurs

Joueurs utiles [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

Variables utiles

L'ensemble des **variables utiles** pour un joueur i, dénoté par RV_i, est l'ensemble des variables $v \in V$ utiles à i pour obtenir φ_i.

Joueurs utiles

L'ensemble des **joueurs utiles** pour un joueur i, dénoté par RP_i, est l'ensemble des joueurs $j \in N$ tels que j contrôle au moins une variable utile de i: $RP_i = \bigcup_{v \in RV_i} \pi^{-1}(v)$.

Exemple

- 3 amis (notés $(1,2,3)$) sont invités à une fête
- $V = \{F_1, F_2, F_3\}$, où F_i signifie "*i* va à la fête"
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$

Exemple

- 3 amis (notés $(1,2,3)$) sont invités à une fête
- $V = \{F_1, F_2, F_3\}$, où F_i signifie "i va à la fête"
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$

$$RV_1 = \{F_1\},\ RP_1 = \{1\}$$

Exemple

- 3 amis (notés $(1,2,3)$) sont invités à une fête
- $V = \{F_1, F_2, F_3\}$, où F_i signifie "i va à la fête"
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$

$$RV_1 = \{F_1\},\ RP_1 = \{1\}$$
$$RV_2 = \{F_1, F_2\},\ RP_2 = \{1,2\}$$

Exemple

- 3 amis (notés $(1,2,3)$) sont invités à une fête
- $V = \{F_1, F_2, F_3\}$, où F_i signifie “i va à la fête”
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$

$$RV_1 = \{F_1\}, RP_1 = \{1\}$$
$$RV_2 = \{F_1, F_2\}, RP_2 = \{1, 2\}$$
$$RV_3 = \{F_1, F_2, F_3\}, RP_3 = \{1, 2, 3\}$$

Graphe de dépendance

Graphe de dépendance [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

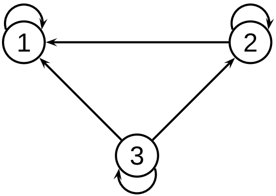
Le **graphe de dépendance d'un jeu booléen** G est un graphe orienté $\mathcal{P} = \langle N, R \rangle$ avec

- un nœud pour chaque joueur, et
- un arc de i à j si j est un joueur utile de i :

$$\forall i, j \in N, (i, j) \in R \text{ si } j \in RP_i$$

Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$,
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$



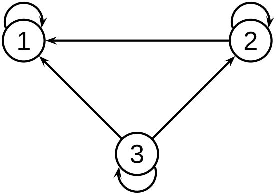
Lien entre dépendances et PNE

Propriété **[Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]**

Si G est un jeu booléen tel que la partie irréflexive du graphe de dépendance $\mathcal{P}$ de G soit acyclique, G a alors un PNE.

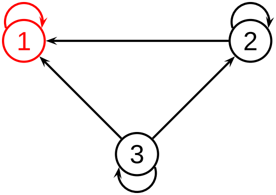
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$



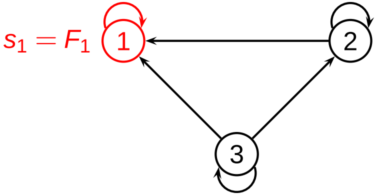
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$,
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$



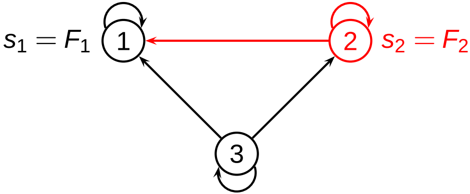
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$



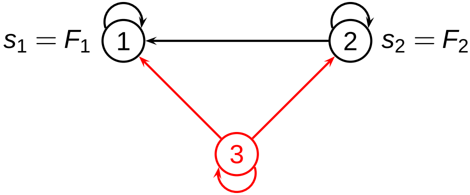
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$



Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$

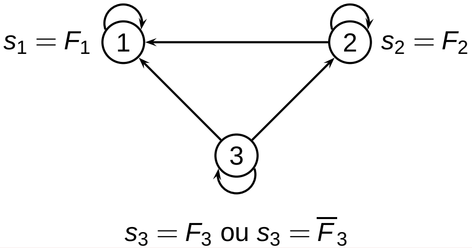


$s_3 = F_3$ ou $s_3 = \overline{F}_3$

Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{F_1, F_2, F_3\}$
- $\pi_1 = \{F_1\}$, $\pi_2 = \{F_2\}$, $\pi_3 = \{F_3\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = F_1$, $\varphi_2 = F_1 \leftrightarrow F_2$ et $\varphi_3 = \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- $RP_1 = \{1\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{1,2,3\}$

G a 2 PNEs : $\{F_1F_2F_3, F_1F_2\overline{F}_3\}$



Ensemble stable

Ensemble stable

$B \subseteq N$ est **stable** pour R ssi $R(B) \subseteq B$, *ie* $\forall j \in B$, $\forall i$ tels que $i \in R(j)$, alors $i \in B$.

Ensemble stable [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

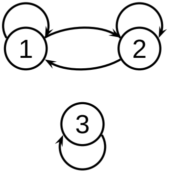
Projection

Si $B \subseteq N$ est un ensemble stable pour R, la **projection** de G sur B est définie par $G_B = (B, V_B, \Gamma_B, \pi_B, \Phi_B)$, où

- $V_B = \cup_{i \in B} \pi_i$
- $\pi_B : B \to V_B$ telle que $\pi_B(i) = \{v | v \in \pi_i\}$
- $\Gamma_B = \{\gamma_i | i \in B\}$, et
- $\Phi_B = \{\varphi_i | i \in B\}$

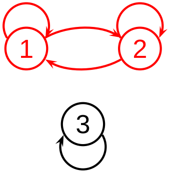
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$ et $\varphi_3 = \neg c$
- $RP_1 = \{1,2\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{3\}$



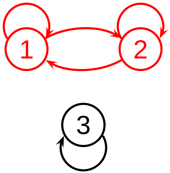
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$ et $\varphi_3 = \neg c$
- $RP_1 = \{1,2\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{3\}$



Exemple

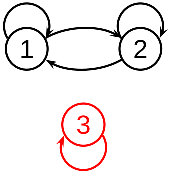
- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$ et $\varphi_3 = \neg c$
- $RP_1 = \{1,2\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{3\}$



- $G_A = (A, V_A, \pi_A, \Gamma_A, \Phi_A)$, avec $A = \{1,2\}$, $V_A = \{a,b\}$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$

Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$ et $\varphi_3 = \neg c$
- $RP_1 = \{1,2\}$, $RP_2 = \{1,2\}$, $RP_3 = \{3\}$



- $G_A = (A, V_A, \pi_A, \Gamma_A, \Phi_A)$, avec $A = \{1,2\}$, $V_A = \{a,b\}$, $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$, $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = a \leftrightarrow \neg b$
- $G_B = (B, V_B, \pi_B, \Gamma_B, \Phi_B)$, avec $B = \{3\}$, $V_B = \{c\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\gamma_3 = \top$, $\varphi_3 = \neg c$

Ensemble stable [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

Projection

Si $B \subseteq N$ est un ensemble stable pour R, la **projection** de G sur B est définie par $G_B = (B, V_B, \Gamma_B, \pi_B, \Phi_B)$, où

- $V_B = \cup_{i \in B} \pi_i$
- $\pi_B : B \rightarrow V_B$ telle que $\pi_B(i) = \{v | v \in \pi_i\}$
- $\Gamma_B = \{\gamma_i | i \in B\}$, et
- $\Phi_B = \{\varphi_i | i \in B\}$

Propriété

Si B est un ensemble stable, $G_B = (B, V_B, \pi_B, \Gamma_B, \Phi_B)$ est un jeu booléen.

Ensemble stable

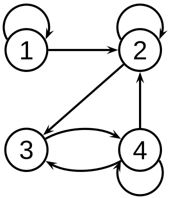
Propriété [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

Si B est un ensemble stable et s un PNE pour G, alors s_B est un PNE pour G_B.

Exemple

- $N = (1,2,3,4)$, $V = \{a,b,c,d\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\pi_4 = \{d\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow c$, $\varphi_3 = \neg d$, and $\varphi_4 = d \leftrightarrow (b \wedge c)$

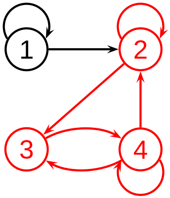
G a 2 PNEs : $\{abcd, \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\}$.



Exemple

- $N = (1,2,3,4)$, $V = \{a,b,c,d\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\pi_4 = \{d\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow c$, $\varphi_3 = \neg d$, et $\varphi_4 = d \leftrightarrow (b \wedge c)$

G a 2 PNEs : $\{abcd, \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\}$.

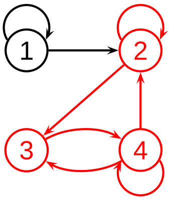


$A = \{2,3,4\}$ est un ensemble stable. G_A est un jeu booléen, avec $V_A = \{b,c,d\}$, $\pi_2 = b$, $\pi_3 = c$, $\pi_4 = d$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \top$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow c$, $\varphi_3 = \neg d$, et $\varphi_4 = d \leftrightarrow (b \wedge c)$.

Exemple

- $N = (1,2,3,4)$, $V = \{a,b,c,d\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\pi_4 = \{d\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow b$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow c$, $\varphi_3 = \neg d$, et $\varphi_4 = d \leftrightarrow (b \wedge c)$

G a 2 PNEs : $\{abcd, \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\}$.



$A = \{2,3,4\}$ est un ensemble stable. G_A est un jeu booléen, avec $V_A = \{b,c,d\}$, $\pi_2 = b$, $\pi_3 = c$, $\pi_4 = d$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \top$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow c$, $\varphi_3 = \neg d$, et $\varphi_4 = d \leftrightarrow (b \wedge c)$.
$\{bcd, \overline{b}\overline{c}\overline{d}\}$ sont 2 PNEs de G_A.

Ensemble stable

Propriété [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]

Soit A et B deux ensembles stables.
Si s_A est un PNE pour G_A et s_B un PNE pour G_B tels que $\forall i \in A \cap B$, $s_{A,i} = s_{B,i}$, alors $s_{A \cup B}$ est un PNE pour $G_{A \cup B}$.

Ensemble stable

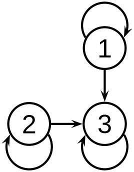
Propriété **[Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2007]**

Soit A et B deux ensembles stables.
Si s_A est un PNE pour G_A et s_B un PNE pour G_B tels que $\forall i \in A \cap B$, $s_{A,i} = s_{B,i}$, alors $s_{A \cup B}$ est un PNE pour $G_{A \cup B}$.

Cette propriété peut être facilement généralisée pour p ensembles stables couvrant l'ensemble des joueurs.

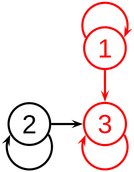
Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, et $\varphi_3 = c$



Exemple

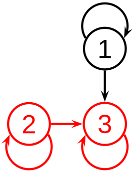
- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, et $\varphi_3 = c$



- $G_A = (A, V_A, \Gamma_A, \pi_A, \Phi_A)$, avec $A = \{1,3\}$, $V_A = \{a,c\}$, $\pi_1 = a$, $\pi_3 = c$, $\gamma_1 = \gamma_3 = \top$, $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$ et $\varphi_3 = c$. G_A a un PNE : $\{ac\}$ (denoté par $s_A = (s_{A,1}, s_{A,3})$)

Exemple

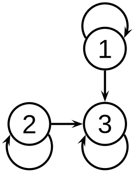
- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, et $\varphi_3 = c$



- $G_A = (A, V_A, \Gamma_A, \pi_A, \Phi_A)$, avec $A = \{1,3\}$, $V_A = \{a,c\}$, $\pi_1 = a$, $\pi_3 = c$, $\gamma_1 = \gamma_3 = \top$, $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$ et $\varphi_3 = c$. G_A a un PNE : $\{ac\}$ (denoté par $s_A = (s_{A,1}, s_{A,3})$)
- $G_B = (B, V_B, \pi_B, \Gamma_B, \Phi_B)$, avec $B = \{2,3\}$, $V_B = \{b,c\}$, $\pi_2 = b$, $\pi_3 = c$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \top$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, $\varphi_3 = c$. G_B a un PNE : $\{\overline{b}c\}$ (denoté par $s_B = (s_{B,2}, s_{B,3})$)

Exemple

- $N = (1,2,3)$, $V = \{a,b,c\}$
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \top$
- $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, et $\varphi_3 = c$



- $G_A = (A, V_A, \Gamma_A, \pi_A, \Phi_A)$, avec $A = \{1,3\}$, $V_A = \{a,c\}$, $\pi_1 = a$, $\pi_3 = c$, $\gamma_1 = \gamma_3 = \top$, $\varphi_1 = a \leftrightarrow c$ et $\varphi_3 = c$. G_A a un PNE : $\{ac\}$ (denoté par $s_A = (s_{A,1}, s_{A,3})$)
- $G_B = (B, V_B, \pi_B, \Gamma_B, \Phi_B)$, avec $B = \{2,3\}$, $V_B = \{b,c\}$, $\pi_2 = b$, $\pi_3 = c$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \top$, $\varphi_2 = b \leftrightarrow \neg c$, $\varphi_3 = c$. G_B a un PNE : $\{\bar{b}c\}$ (denoté par $s_B = (s_{B,2}, s_{B,3})$)

$A \cap B = \{3\}$ et $s_{A,3} = s_{B,3} = c$: $G_{A\cup B}$ a un PNE : $\{a\bar{b}c\}$.

Jusqu'ici

- Généralisation des jeux booléens
- Caractérisation logique des concepts de solution
- Dépendances entre joueurs
- Coalitions efficaces

Et maintenant

- Généralisation des jeux booléens
- Caractérisation logique des concepts de solution
- Dépendances entre joueurs
- Coalitions efficaces

Coalitions efficaces [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2008]

Coalitions efficaces

Une **coalition** est un groupe de joueurs.

Une coalition C est **efficace** ssi l'ensemble des joueurs dans C ont une stratégie commune leur permettant de satisfaire leurs buts, *i.e* :

$$\exists s_C \in S_C \text{ tel que } \forall s_{-C} \in S_{-C}, (s_C, s_{-C}) \models \bigwedge_{i \in C} \varphi_i$$

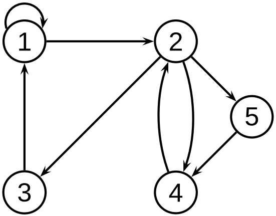
L'ensemble de toutes les coalitions efficaces de G est noté $\mathrm{EC}(G)$.

Echange de rein [Abraham, Blum, Sandholm 2007]

- n couples constitués d'un receveur R_i en attente d'un nouveau rein, et d'un donneur D_i, qui est prêt à donner un de ses reins pour sauver R_i
- Si le rein de D_i n'est pas compatible avec celui de R_i, D_i accepte de donner son rein à une autre personne ssi R_i en reçoit un
- g_{ij} signifie que D_i donne son rein à R_j
- on considère le graphe $\langle\{1,\ldots,n\},E\rangle$ qui contient
  - un nœud $i \in 1,\ldots,n$ pour chaque couple (D_i,R_i), et
  - un arc (i,j) si le rein de D_i est compatible avec celui de R_j

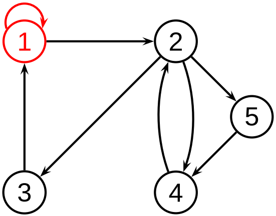
Echange de rein

$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Echange de rein

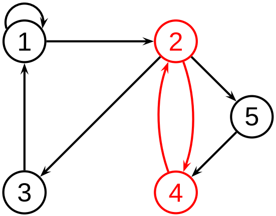
$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Coalitions efficaces : $\{1\}$

Echange de rein

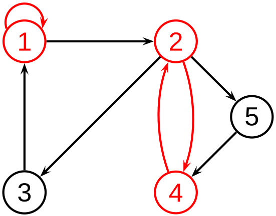
$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Coalitions efficaces : $\{1\}$,$\{2,4\}$

Echange de rein

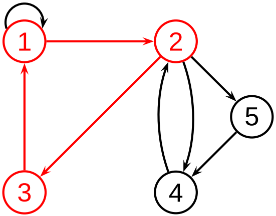
$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4), (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Coalitions efficaces : $\{1\}$,$\{2,4\}$,$\{1,2,4\}$

Echange de rein

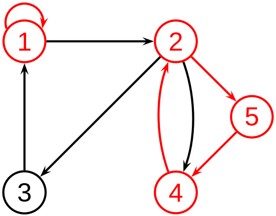
$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Coalitions efficaces : $\{1\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\}$

Echange de rein

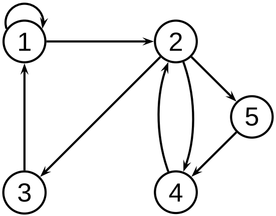
$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



Coalitions efficaces : $\{1\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{2,4,5\},\{1,2,4,5\}$.

Echange de rein

$n = 5$ et $E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),\ (2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$.



- $N = \{1,2,3,4,5\}$
- $V = \{g_{ij} | i,j \in \{1,\dots,n\}\}$
- pour tout i, $\pi_i = \{g_{ij}; 1 \leq j \leq n\}$
- pour tout i, $\gamma_i = \bigwedge_{j \neq k} \neg(g_{ij} \wedge g_{ik})$
- $\varphi_1 = g_{11} \vee g_{31}$; $\varphi_2 = g_{12} \vee g_{42}$; $\varphi_3 = g_{23}$; $\varphi_4 = g_{24} \vee g_{54}$; $\varphi_5 = g_{25}$

Caractérisation

Caractérisation [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2008]

Soit $N = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble d'agents. Un ensemble de coalitions $\mathcal{SC} \in 2^{2^N}$ satisfait ces deux propriétés :

(1) $\emptyset \in \mathcal{SC}$

(2) pour tout $I, J \in \mathcal{SC}$ tel que $I \cap J = \emptyset$ alors $I \cup J \in \mathcal{SC}$

si et seulement s'il existe un jeu booléen G sur N tel que l'ensemble des coalitions efficaces de G est $\mathcal{SC}$ (i.e. $\mathrm{EC}(G) = \mathcal{SC}$).

Jusqu'ici

- Représentation compacte de jeux (jeux booléens généralisés)
- Certains problèmes sont dichotomiques de façon naturelle
- Mais grosse perte de généralité

Et maintenant

- Représentation compacte de *préférences*
- Préférences ordinales
- 2 langages : CP-nets et buts à priorité

Indépendance préférentielle conditionnelle

Indépendance préférentielle conditionnelle **[Doyle et al. 91; Boutilier et al. 99]**

Soit X, Y et Z trois ensembles non vides disjoints formant une partition de V. X et Y sont **conditionnellement préférentiellement indépendants étant donné** Z ssi $\forall z \in D(Z)$, $\forall x_1, x_2 \in D(X)$ et $\forall y_1, y_2 \in D(Y)$ on a :

$$x_1 y_1 z \succeq x_2 y_1 z \text{ ssi } x_1 y_2 z \succeq x_2 y_2 z$$

"Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l). Je préfère du vin rouge (V_r) avec une soupe de légumes, mais du blanc (V_b) avec une soupe de poisson."

Indépendance préférentielle conditionnelle

Indépendance préférentielle conditionnelle [Doyle et al. 91; Boutilier et al. 99]

Soit X, Y et Z trois ensembles non vides disjoints formant une partition de V. X et Y sont **conditionnellement préférentiellement indépendants étant donné** Z ssi $\forall z \in D(Z)$, $\forall x_1, x_2 \in D(X)$ et $\forall y_1, y_2 \in D(Y)$ on a :

$$x_1 y_1 z \succeq x_2 y_1 z \text{ ssi } x_1 y_2 z \succeq x_2 y_2 z$$

"Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l). Je préfère du vin rouge (V_r) avec une soupe de légumes, mais du blanc (V_b) avec une soupe de poisson."
S est conditionnellement préférentiellement indépendant de V :

$$(S_l, V_r) \succeq (S_l, V_b) \text{ et } (S_p, V_r) \succeq (S_p, V_b)$$

CP-nets [Boutilier et al 99, 2004; Domshlak 02]

Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l). Je préfère du vin rouge (V_r) avec une soupe de légumes, mais du blanc (V_b) avec une soupe de poisson.

CP-nets [Boutilier et al 99, 2004; Domshlak 02]

Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l). Je préfère du vin rouge (V_r) avec une soupe de légumes, mais du blanc (V_b) avec une soupe de poisson.

$$
\begin{array}{lll}
S & S_p \succ S_l & \\
\downarrow & & \\
V & S_p: & V_b \succ V_r \\
 & S_l: & V_r \succ V_b
\end{array}
$$

CP-nets [Boutilier et al 99, 2004; Domshlak 02]

Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l). Je préfère du vin rouge (V_r) avec une soupe de légumes, mais du blanc (V_b) avec une soupe de poisson.

$$\begin{array}{ll} S & S_p \succ S_l \\ \downarrow & \\ V & \begin{array}{ll} S_p: & V_b \succ V_r \\ S_l: & V_r \succ V_b \end{array} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} S_p \wedge V_b \arrow[d] \arrow[ddd, bend left] \\ S_p \wedge V_r \arrow[d] \\ S_l \wedge V_r \arrow[d] \\ S_l \wedge V_b \end{tikzcd}$$

Exemple : CP-jeux booléens

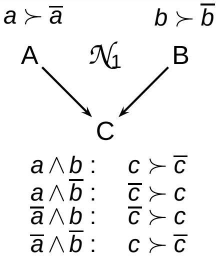
Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec :

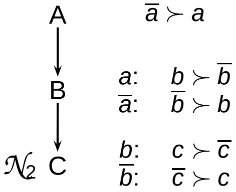
- $N = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$
- $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$

Exemple : CP-jeux booléens

Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec :

- $N = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$
- $\pi_1 = \{a, b\}, \pi_2 = \{c\}$
- $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$



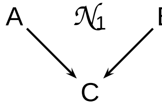


Exemple : CP-jeux booléens

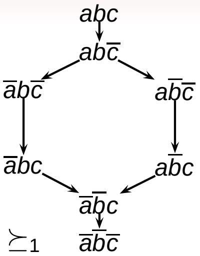
Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec :

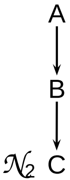
- $N = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$
- $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$

$a \succ \bar{a}$ $b \succ \bar{b}$



$a \wedge b$: $c \succ \bar{c}$
$a \wedge \bar{b}$: $\bar{c} \succ c$
$\bar{a} \wedge b$: $\bar{c} \succ c$
$\bar{a} \wedge \bar{b}$: $c \succ \bar{c}$

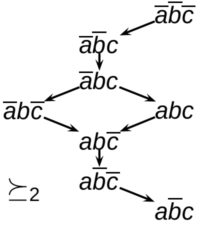




$\bar{a} \succ a$

a: $b \succ \bar{b}$
$\bar{a}$: $\bar{b} \succ b$

b: $c \succ \bar{c}$
$\bar{b}$: $\bar{c} \succ c$



Equilibre de Nash

Equilibre de Nash

Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, et $Pref_G = \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle$ l'ensemble des préférences de chaque joueur.

s est un **équilibre de Nash faible en stratégies pures** ssi :

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s_i' \in S_i, (s_i', s_{-i}) \not\succ_i (s_i, s_{-i})$

s est un **équilibre de Nash fort en stratégies pures** ssi :

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s_i' \in S_i, (s_i', s_{-i}) \preceq_i (s_i, s_{-i})$

L'ensemble des équilibres de Nash forts (resp. faibles) en stratégie pure sera noté par NE_{fort} (resp. NE_{faible}).

Equilibre de Nash

Propriété [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2006]

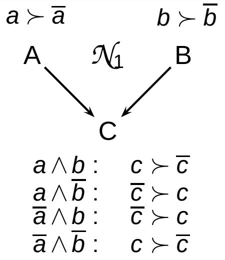
Dans un CP-jeu booléen acyclique, les équilibres de Nash faibles et forts sont identiques.

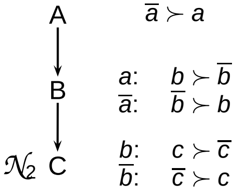
Exemple : CP-jeux booléens

Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec :

- $N = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$
- $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$

Les graphes sont acycliques, $NE_{faible} = NE_{fort} = \{abc\}$





Union des graphes [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2006]

Propriété : Union des graphes

Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$ un CP-jeu booléen tel que les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous identiques ($\forall i, j,\ \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j$) et acycliques.
Ce jeu G ainsi défini aura alors un et un seul équilibre de Nash en stratégies pures.

Union des graphes [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2006]

Propriété : Union des graphes

Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$ un CP-jeu booléen tel que les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous identiques ($\forall i, j$, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j$) et acycliques.
Ce jeu G ainsi défini aura alors un et un seul équilibre de Nash en stratégies pures.

En général, les graphes $\mathcal{G}_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ ne sont pas identiques.
Pourtant il est possible de les *rendre identiques* : union des graphes.

Exemple : CP-jeux booléens

$a \succ \overline{a}$ $\qquad$ $b \succ \overline{b}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[dr] & \mathcal{N}_1 & \mathrm{B} \arrow[dl] \\
& \mathrm{C} &
\end{tikzcd}$$

$a \wedge b$: $\quad c \succ \overline{c}$
$a \wedge \overline{b}$: $\quad \overline{c} \succ c$
$\overline{a} \wedge b$: $\quad \overline{c} \succ c$
$\overline{a} \wedge \overline{b}$: $\quad c \succ \overline{c}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[d] \\
\mathrm{B} \arrow[d] \\
\mathcal{N}_2 \ \mathrm{C}
\end{tikzcd}$$

$\overline{a} \succ a$

a: $\quad b \succ \overline{b}$
$\overline{a}$: $\quad \overline{b} \succ b$

b: $\quad c \succ \overline{c}$
$\overline{b}$: $\quad \overline{c} \succ c$

Exemple : CP-jeux booléens

$a \succ \overline{a}$ $\qquad\qquad$ $b \succ \overline{b}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & \mathcal{N}_1 & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \overline{c} \\ a \wedge \overline{b}: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge b: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge \overline{b}: & c \succ \overline{c} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ & B \arrow[d] \\ \mathcal{N}_2 & C \end{tikzcd}$$

$\overline{a} \succ a$

$$\begin{array}{ll} a: & b \succ \overline{b} \\ \overline{a}: & \overline{b} \succ b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b: & c \succ \overline{c} \\ \overline{b}: & \overline{c} \succ c \end{array}$$

Exemple : CP-jeux booléens

$a \succ \overline{a}$ $\qquad\qquad$ $b \succ \overline{b}$

$$\mathcal{N}_1 \quad \begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \overline{c} \\ a \wedge \overline{b}: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge b: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge \overline{b}: & c \succ \overline{c} \end{array}$$

$a \succ \overline{a}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ll} a: & b \succ \overline{b} \\ \overline{a}: & \overline{b} \succ b \end{array}$$

$\mathcal{N}_1$

$$\begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \overline{c} \\ a \wedge \overline{b}: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge b: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge \overline{b}: & c \succ \overline{c} \end{array}$$

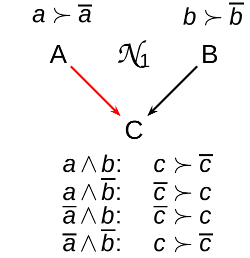
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \\ B \arrow[d] \\ \mathcal{N}_2 \; C \end{tikzcd}$$

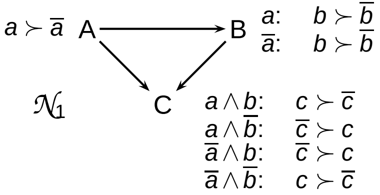
$\overline{a} \succ a$

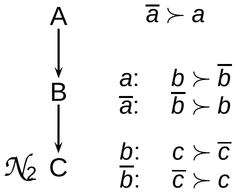
$$\begin{array}{ll} a: & b \succ \overline{b} \\ \overline{a}: & \overline{b} \succ b \end{array}$$

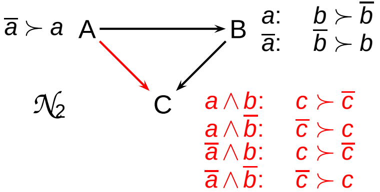
$$\begin{array}{ll} b: & c \succ \overline{c} \\ \overline{b}: & \overline{c} \succ c \end{array}$$

Exemple : CP-jeux booléens









Exemple : CP-jeux booléens

Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ avec :

- $N = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \top$
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$
- $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$

L'union des graphes est acyclique.

G a un et un seul PNE : $\{abc\}$.

$\mathcal{N}_1$

$$
\begin{tikzcd}
a \succ \bar{a} \quad A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \quad \begin{array}{ll} a: & b \succ \bar{b} \\ \bar{a}: & b \succ \bar{b} \end{array} \arrow[dl] \\
& C \quad \begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \bar{c} \\ a \wedge \bar{b}: & \bar{c} \succ c \\ \bar{a} \wedge b: & \bar{c} \succ c \\ \bar{a} \wedge \bar{b}: & c \succ \bar{c} \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{N}_2$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{a} \succ a \quad A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \quad \begin{array}{ll} a: & b \succ \bar{b} \\ \bar{a}: & \bar{b} \succ b \end{array} \arrow[dl] \\
& C \quad \begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \bar{c} \\ a \wedge \bar{b}: & \bar{c} \succ c \\ \bar{a} \wedge b: & c \succ \bar{c} \\ \bar{a} \wedge \bar{b}: & \bar{c} \succ c \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

CP-net global [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2006]

CP-net global

Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$ un CP-jeu booléen.
On appelle **CP-net global de** G le CP-net $\mathcal{N}^+ = \langle \mathcal{G}^+, \mathcal{T}^+ \rangle$ défini par :

- $\forall i \in N$, $\forall v \in \pi_i$, $CPT_i(v) \in \mathcal{T}^+$
- $\mathcal{G}^+ = \langle V, Arc_1^+ \cup \ldots \cup Arc_n^+ \rangle$, avec chaque Arc_i^+ défini par

$$Arc_i^+ = \{(w, v) \in Arc_i | v \in \pi_i\}$$

où Arc_i est l'ensemble des arcs dans $\mathcal{G}_i$

Exemple : CP-jeux booléens

$a \succ \overline{a}$ $\qquad$ $b \succ \overline{b}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{N}_1$

$$\begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \overline{c} \\ a \wedge \overline{b}: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge b: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge \overline{b}: & c \succ \overline{c} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \\ B \arrow[d] \\ C \end{tikzcd}$$

$\mathcal{N}_2$

$\overline{a} \succ a$

$$\begin{array}{ll} a: & b \succ \overline{b} \\ \overline{a}: & \overline{b} \succ b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b: & c \succ \overline{c} \\ \overline{b}: & \overline{c} \succ c \end{array}$$

Exemple : CP-jeux booléens

$\mathcal{N}_1$

A: $a \succ \overline{a}$ $\qquad$ B: $b \succ \overline{b}$

$A \rightarrow C \leftarrow B$

C:

$$\begin{array}{ll} a \wedge b: & c \succ \overline{c} \\ a \wedge \overline{b}: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge b: & \overline{c} \succ c \\ \overline{a} \wedge \overline{b}: & c \succ \overline{c} \end{array}$$

$\mathcal{N}_2$

A: $\overline{a} \succ a$

$A \rightarrow B \rightarrow C$

B:

$$\begin{array}{ll} a: & b \succ \overline{b} \\ \overline{a}: & \overline{b} \succ b \end{array}$$

C:

$$\begin{array}{ll} b: & c \succ \overline{c} \\ \overline{b}: & \overline{c} \succ c \end{array}$$

A: $a \succ \overline{a}$

B: $b \succ \overline{b}$

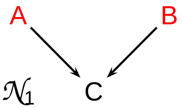
$B \rightarrow C$

C:

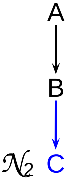
$$\begin{array}{ll} b: & c \succ \overline{c} \\ \overline{b}: & \overline{c} \succ c \end{array}$$

Exemple : CP-jeux booléens

$a \succ \bar{a}$ $\quad$ $b \succ \bar{b}$



$a \wedge b$: $\quad c \succ \bar{c}$
$a \wedge \bar{b}$: $\quad \bar{c} \succ c$
$\bar{a} \wedge b$: $\quad \bar{c} \succ c$
$\bar{a} \wedge \bar{b}$: $\quad c \succ \bar{c}$



$\bar{a} \succ a$

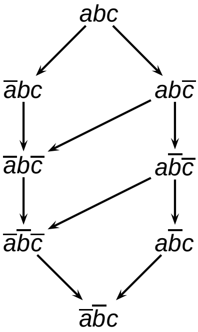
a: $\quad b \succ \bar{b}$
$\bar{a}$: $\quad \bar{b} \succ b$

b: $\quad c \succ \bar{c}$
$\bar{b}$: $\quad \bar{c} \succ c$

$a \succ \bar{a}$

$b \succ \bar{b}$

b: $\quad c \succ \bar{c}$
$\bar{b}$: $\quad \bar{c} \succ c$



CP-net global

Propriété : CP-net global [Bonzon, Lagasquie-Schiex, Lang, 2006]

Soit G un CP-jeu booléen tel que tous les graphes $\mathcal{G}_i$ sont acycliques, et $\mathcal{N}^+$ le CP-net global de G. Si $\mathcal{N}^+$ est un CP-net acyclique, on a l'équivalence suivante :
s est un équilibre de Nash si et seulement si s est une solution optimale de $\mathcal{N}^+$.

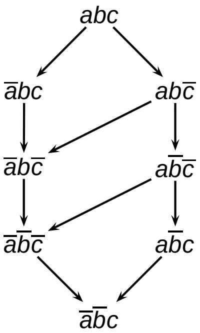
Exemple : CP-jeux booléens

A $\quad a \succ \overline{a}$

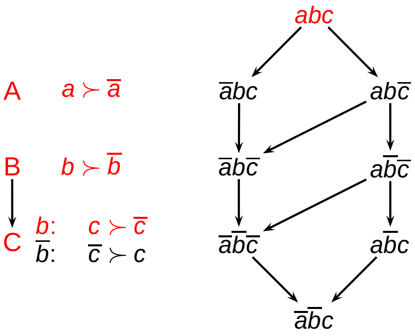
B $\quad b \succ \overline{b}$

C $\quad b: \; c \succ \overline{c}$

$\quad\;\; \overline{b}: \; \overline{c} \succ c$



Exemple : CP-jeux booléens



Jeux booléens et préférences non binaires

- CP-jeux booléens : une nouvelle classe de jeux
  - Existence et unicité des équilibres de Nash en stratégies pures
  - Calcul en temps polynomial des PNEs
- Autre langage de représentation compacte de préférences dans les jeux booléens : les buts à priorité

Jeux booléens et préférences non binaires

- CP-jeux booléens : une nouvelle classe de jeux
  - Existence et unicité des équilibres de Nash en stratégies pures
  - Calcul en temps polynomial des PNEs
- Autre langage de représentation compacte de préférences dans les jeux booléens : les buts à priorité

Jeux booléens et préférences non binaires

- CP-jeux booléens : une nouvelle classe de jeux
  - Existence et unicité des équilibres de Nash en stratégies pures
  - Calcul en temps polynomial des PNEs
- Autre langage de représentation compacte de préférences dans les jeux booléens : les buts à priorité

Jeux booléens et préférences non binaires

- CP-jeux booléens : une nouvelle classe de jeux
  - Existence et unicité des équilibres de Nash en stratégies pures
  - Calcul en temps polynomial des PNEs
- Autre langage de représentation compacte de préférences dans les jeux booléens : les buts à priorité

Conclusion

- Formalisation des interactions entre agents rationnels
- Représentation compacte de jeux
- Version logique des jeux graphiques [Koller et Milch, 2003; Gottlob et *al*, 2005]

Conclusion

- Extension des jeux booléens introduits par Harrenstein et al. avec un nombre arbitraire de joueurs et des jeux à somme non nulle ;
  - Caractérisation des équilibres de Nash et des stratégies dominées ;
  - Graphe de dépendance entre joueurs ;
  - Calcul de la complexité des problèmes associés ;
  - Coalitions efficaces ;
  - Caractérisation des fonctions d'effectivité [Moulin, 83 ; Abdou et Keiding, 91 ; Pauly, 01] dans les jeux booléens ;
- Préférences non dichotomiques
  - CP-nets
  - Buts à priorité

Quelques travaux connexes

- Jeux et programmation logique
  - Programme logique de choix [De Vos et Vermeir, 1999]
  - Programme logique avec disjonctions ordonnées [Brewka, 2002 ; Foo et *al.*, 2004]
- Planification et jeux booléens [Ben Larbi, Konieczny, Marquis 07]
- Jeux et représentation compacte : jeux graphiques
  - CP-nets et équilibres de Nash [Apt et *al.*, 2005]
  - Formes normales graphiques [Gottlob et *al.*, 2005]
  - Diagrammes d'influence multi-agents [Koller et Milch, 2003]
- Coalitions
  - Coalitions admissibles [Boella, Sauro, van der Torre, 2005,2006]
  - Jeux qualitatifs coalitionnels [Wooldridge et Dunne, 2004]
  - Logique des jeux coalitionnels [Ågotnes et *al.*, 2006]

Perspectives

- Extensions :
  - Définir et étudier les jeux booléens dynamiques
  - Définir et étudier les jeux booléens à information incomplète
  - Introduire des préférences numériques, et étudier les notions associées (équilibre de Nash en stratégies mixtes)
  - Introduire des langages d'action dans les jeux booléens,
  - Étudier le cas de partage de variables
- Applications :
  - Utiliser les jeux booléens pour résoudre des problèmes d'argumentation [Dung 95]
  - Utiliser les jeux booléens pour résoudre des problèmes de décision dans les SMAs

Merci