



**HAL**  
open science

## Approches bornées pour la commande des drones

Ahmad Hably

► **To cite this version:**

Ahmad Hably. Approches bornées pour la commande des drones. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT: . tel-00235438

**HAL Id: tel-00235438**

**<https://theses.hal.science/tel-00235438>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

No. attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / / /

**T H E S E**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INP Grenoble**

**Spécialité : Automatique - Productique**

préparée au laboratoire : GIPSA-lab  
dans le cadre de l'École Doctorale : **Électronique, Électrotechnique,  
Automatique, Télécommunications et Signal**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Ahmad HABLY**

le 05 décembre 2007

Titre :

**Approches bornées pour la commande des drones**

---

Directeur de thèse : Mazen ALAMIR  
Co-directeur : Nicolas MARCHAND

---

**JURY**

M. DIDIER GEORGES	INP Grenoble	Président
M. YACINE CHITOUR	Université Paris 11	Rapporteur
M. FRÉDÉRIC MAZENC	INRA Montpellier	Rapporteur
M. ROGELIO LOZANO	CNRS Compiègne	Examinateur
M. MAZEN ALAMIR	CNRS Grenoble	Directeur de thèse
M. NICOLAS MARCHAND	CNRS Grenoble	Co-encadrant de thèse



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury, dont la renommée et la qualité scientifique honorent grandement ce travail :

- Didier Georges pour son intervention en tant que président de jury,
- Frédéric Mazenc et Yacine Chitour à qui je témoigne ma gratitude pour leur lecture attentive et détaillée de ce manuscrit ainsi pour leurs nombreux commentaires constructifs,
- Rogelio Lozano d'avoir accepté examiner mon travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mes directeurs de thèse Nicolas Marchand et Mazen Alamir qui ont encadré ce travail de recherche. Le premier pour m'avoir accordé sa confiance, et m'avoir laissé une liberté dans mes recherches tout en sachant les recentrer quand il le fallait. J'ai apprécié ses qualités humaines, son dynamisme et ses précieux conseils. Le second qui restera pour moi un vrai exemple d'un chercheur pour ses qualités humaines, son efficacité et soutien.

Je remercie également le CNRS libanais qui m'a permis de mener ma thèse dans des conditions financières favorables.

Mes remerciements s'adressent aux chercheurs et aux membres du personnel du laboratoire **gipsa-lab** pour leur accueil et leur aide en particulier : Marie-thérèse, Patricia, Virginie, le chef Daniel, Pascal, les Blancs (Didier et Thierry), Gildas, Olivier, Hassane, Suzanne, Sylviane et Christian.

Ce long travail fastidieux ponctué par des hauts et des bas a été illuminé par la présence de mes amis. Les repas au RU et les pauses cafés que je partageais avec eux m'ont permis d'échapper au stress induit par la thèse. Je tiens à remercier mes collègues : Maher (pour Barakah et Pizzano), Adib (Alzaaem), Abed Al-Kader, Bilal (pour ses conseils), Ahmed, Fethi, Samir, Ayman, Cédric (Camera man), Lyes, Bader, Walid, Firas, Zaher, Salah, Haffar, Fermi, Denis, Jonathan, Zahra, Nadia, Sophie, Siba et Amani. Je souhaitais dédier ce travail à ma famille et surtout à mon frère Abbass et ma soeur Najah qui sont mortes durant la guerre civile du Liban.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Définition . . . . .	6
1.3 État de l'art . . . . .	6
1.3.1 Commande optimale . . . . .	6
1.3.2 Commande petit gain . . . . .	8
1.3.3 Commande linéaire basée sur compensation "Anti-windup" . . . . .	9
1.3.4 Approche non-linéaire . . . . .	10
1.4 Comparaison des approches pour $n = 3$ . . . . .	11
1.4.1 Commande optimale en temps minimum pour $n = 3$ . . . . .	12
1.4.2 Simulations . . . . .	15
1.5 Amélioration de l'approche non-linéaire . . . . .	18
1.5.1 Adaptation du $\varepsilon$ à la dimension du système . . . . .	18
1.5.2 Adaptation dynamique du niveau de fonction de saturation . . . . .	21
1.5.3 Comparaison récapitulative . . . . .	21
1.6 Etude de robustesse . . . . .	23
1.6.1 Robustesse vis à vis de retard ou de mesure . . . . .	24
1.6.2 Robustesse vis à vis d'erreurs de modèle . . . . .	26
1.7 Stabilisation en temps discret . . . . .	28
1.7.1 Problématique . . . . .	29
1.7.2 Commande non-linéaire en temps discret avec des niveaux variables de saturation . . . . .	30
1.7.3 Simulations . . . . .	32
1.8 Conclusion . . . . .	33
<b>2 PVTOL</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Modèle dynamique du PVTOL . . . . .	39
2.2.1 Caractéristiques du PVTOL . . . . .	41

2.2.2	Le PVTOL sans gravité et les systèmes chaînés avec inertie . . .	43
2.3	Commande du PVTOL sans gravité . . . . .	45
2.3.1	La commande prédictive . . . . .	47
2.3.2	Commande optimale des systèmes chaînés en boucle ouverte . . .	50
2.3.3	Solutions sous-optimales du problème d'optimisation . . . . .	54
2.3.4	La commande par retour d'état . . . . .	57
2.3.5	Application numérique . . . . .	57
2.3.6	Récapitulatif sur la commande du PVTOL sans gravité . . . . .	58
2.4	Commande de PVTOL avec gravité . . . . .	64
2.4.1	Poursuite des trajectoires . . . . .	64
2.4.2	Stabilisation du PVTOL avec gravité . . . . .	66
2.5	Approche bornée pour la stabilisation du PVTOL . . . . .	70
2.5.1	Stratégie de commande . . . . .	70
2.5.2	Une étude comparative . . . . .	72
2.6	Conclusions . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Le quadrirotor</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Quadrirotor du <b>gipsa-lab</b> . . . . .	77
3.2.1	Caractéristiques physiques . . . . .	78
3.2.2	Forces et couples . . . . .	81
3.3	Modèle dynamique du quadrirotor . . . . .	85
3.3.1	L'attitude du quadrirotor . . . . .	85
3.3.2	La dynamique de translation . . . . .	87
3.4	Modèles dynamiques proposés . . . . .	88
3.4.1	Modélisation selon Euler-Lagrange . . . . .	88
3.4.2	Modélisation selon Newton-Euler . . . . .	91
3.4.3	Discrétisation du modèle du quadrirotor . . . . .	93
3.5	Commande d'attitude du quadrirotor . . . . .	98
3.5.1	Commande non-bornée d'attitude du quadrirotor . . . . .	98
3.5.2	Commande bornée d'attitude du quadrirotor . . . . .	99
3.6	Stabilisation de la position du quadrirotor . . . . .	106
3.6.1	Stabilisation de la position avec des commandes non-bornées . . .	106
3.6.2	Stabilisation de la position avec des commandes bornées . . . .	109
3.6.3	Stratégie de commande . . . . .	111
3.7	Conclusions . . . . .	116
	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>119</b>

<b>A</b>	<b>119</b>
A.1 Preuve de Théorème 1 . . . . .	119
A.2 Preuve de Théorème 3 . . . . .	121
A.3 Preuve de Théorème 5 . . . . .	122
<b>B</b>	<b>127</b>
B.1 Existence de $U$ . . . . .	127
B.2 Existence de $V$ . . . . .	128
B.3 Étude de l'effet de $n$ sur les éléments de commande . . . . .	130
B.4 Étude de stabilité . . . . .	131
B.5 Fonction de saturation . . . . .	133
B.6 Stabilité globale du PVTOL avec gravité . . . . .	134
B.6.1 Stabilité locale du PVTOL . . . . .	135
B.6.2 Stabilité globale de $\theta - \theta_d$ . . . . .	136
B.6.3 Stabilité globale de $\Sigma_t$ . . . . .	138
B.6.4 Stabilité globale du PVTOL ( $\Sigma_r + \Sigma_t$ ) . . . . .	138
<b>C</b>	<b>139</b>
C.1 La trajectoire de l'angle en appliquant une commande continue par morceaux . . . . .	139
C.2 Modèle discret du quadrirotor . . . . .	140
C.2.1 Calcul de $\Gamma$ basé sur les intégrales de Fresnel . . . . .	141
C.3 Commande bornée d'attitude du quadrirotor . . . . .	143
C.4 Stabilisation de la position du quadrirotor . . . . .	146
C.4.1 Stabilité globale de la dynamique de lacet . . . . .	146
C.4.2 Stabilité globale de $\eta_1 - \eta_{1_d}$ et $\eta_3 - \eta_{3_d}$ . . . . .	146
C.4.3 Stabilité globale du sous-système de translation . . . . .	148
C.4.4 Stabilité globale du quadrirotor . . . . .	148
<b>D</b>	<b>149</b>
D.1 Stabilité des systèmes en cascade . . . . .	149
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>





# Table des figures

1	Le quadrirotor de <b>gipsa-lab</b> . . . . .	2
1.1	Surface de commutation $V_1$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
1.2	Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande optimale en temps minimum. Le temps de convergence est inférieur à 13 secondes . . . . .	16
1.3	Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande petit gain proposée par Megretski [69] et améliorée par Lin [52]. Le temps de convergence est inférieur à 20 secondes . . . . .	17
1.4	Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande non-linéaire proposée par Teel [93] . . . . .	17
1.5	Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande non-linéaire proposée par Sussmann <i>et al.</i> [89]. Le temps de convergence est trente fois plus grand que le temps de convergence de la commande optimale en temps minimum . . . . .	18
1.6	Amélioration de la performance de l'approche non-linéaire de Sussmann <i>et al.</i> [89] : Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande non-linéaire de Sussmann <i>et al.</i> [89] avec $\varepsilon = 0.25$ (haut), la commande du Théorème 1 avec $\varepsilon = 0.5$ (milieu) et $\varepsilon = 0.618$ (bas) . . . . .	20
1.7	Adaptation dynamique du niveau des fonctions de saturation : Comparaison de performance entre le Théorème 1 et le Théorème 3 pour la même valeur de $\varepsilon = 0.618$ et pour un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ . . . . .	22
1.8	Comparaison de l'évolution de $\ x(t)\ $ pour un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant l'approche non-linéaire de Sussmann <i>et al.</i> [89] avec $\varepsilon = 0.25$ , l'approche non-linéaire de Teel [93], la commande petit gain de Megretski [69] améliorée suivant les indications de Lin [52], la commande optimale en temps minimum, et les lois de commande proposées dans le Théorème 1 et le Théorème 3 pour $\varepsilon = 0.5$ et $\varepsilon = 0.618$ . . . . .	23

1.10	La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction du retard de mesure $\tau \in [0.1, 3.1]$ pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec $\varepsilon = 0.5$ et celle du Théorème 3 avec $\varepsilon = 0.618$ . . . . .	25
1.11	La commande de la chaîne d'intégrateurs $\frac{1}{(s+a)^3}$ . . . . .	26
1.12	La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction des pôles réels de $\frac{1}{(s+a)^3}$ avec $a \in [-0.1, 0.5]$ pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec $\varepsilon = 0.5$ et celle du Théorème 3 avec $\varepsilon = 0.618$ . . . . .	27
1.13	La commande de la chaîne d'intégrateurs $\frac{1}{s(s^2+w^2)}$ . . . . .	28
1.16	Comparaison de l'approche proposée par Sussmann <i>et al.</i> [89] pour $\varepsilon = 0.25$ , Teel [93], approche de Megretski [69] amélioré suivant les indications de Lin [52], la commande optimale en temps minimum, et les loi de commande proposées dans Théorème 1 et Théorème 3 pour $\varepsilon = 0.5, 0.618$ - Evolution de $\ x(t)\ $ pour un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$	32
1.9	La commande de la chaîne d'intégrateurs $\frac{1}{s^3}$ avec un retard de sortie de $\tau$ . . . . .	34
1.14	La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction des pôles imaginaires de $\frac{1}{s(s^2+w^2)}$ avec $w \in [0, 2.5]$ pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec $\varepsilon = 0.5$ et celle du Théorème 3 avec $\varepsilon = 0.618$ . . . . .	34
1.15	Stabilisation d'une chaîne d'intégrateur pour un état initial $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ en appliquant la commande discrète du Théorème 5 pour $\theta_i = 0.618^{n-i+1}$ . . . . .	35
2.1	Relation entre le quadrirotor et le PVTOL . . . . .	38
2.2	Exemple du PVTOL : AV-8B Harrier . . . . .	38
2.3	Le PVTOL dans le plan . . . . .	40
2.4	Portrait de phase de la dynamique interne du PVTOL pour $\epsilon = 1$ . . . . .	42
2.5	Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$ en bleu et $v$ en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$ à l'état final désiré $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ avec les contraintes de saturation sur la commande $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$ et $q_{max} = 2$ . . . . .	59
2.6	Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$ en bleu et $v$ en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$ à l'état final désiré $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ avec les contraintes de saturation sur la commande $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$ et $q_{max} = 20$ . . . . .	60

2.7	Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$ en bleu et $v$ en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial singulier $y_0 = [0, 0, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$ vers un état final désiré $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ avec les contraintes de saturation sur la commande $[u^{max}, v^{max}] = [7, 7]$ et $q_{max} = 2$ . . . . .	61
2.8	Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$ en bleu et $v$ en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$ vers un état final désiré différent à zéro $y_d = [1, 0, 1, 0, 1, 0]^T$ avec les contraintes de saturation sur la commande $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$ et $q_{max} = 2$ . . . . .	62
2.9	Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$ en bleu et $v$ en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$ vers l'état final désiré $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ avec des contraintes fortes de saturation sur la commande $[u^{max}, v^{max}] = [0.05, 0.05]$ et $q_{max} = 2$ . . . . .	63
2.10	La stabilisation du PVTOL basée sur l'analyse de Lyapunov . . . . .	67
2.11	Évolution dans le temps des états du sous-système de translation $\Sigma_t$ du PVTOL : $x, \dot{x}, z$ et $\dot{z}$ . Comparaison entre la commande bornée du Théorème 10 (croix), l'approche bornée de Zavala <i>et al.</i> [104] (trait pointillé), l'approche non-bornée de Castillo <i>et al.</i> [18] (tiret-pointillé) et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73] (tiret) . . . . .	73
2.12	Évolution dans le temps des états du sous-système de translation $\Sigma_r$ du PVTOL ( $\theta$ et $\dot{\theta}$ ) et les commandes $u$ et $v$ pour stabiliser le PVTOL. Comparaison entre la commande bornée de Théorème 10 (croix), l'approche bornée de Zavala <i>et al.</i> [104] (trait pointillé), l'approche non-bornée de Castillo <i>et al.</i> [18] (tiret-pointillé) et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73] (tiret) . . . . .	74
2.13	Trajectoires du PVTOL (pour le même temps) en appliquant la commande bornée de Théorème 10, l'approche bornée de Zavala <i>et al.</i> [104], l'approche non-bornée de Castillo <i>et al.</i> [18] et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73] . . . . .	75
3.1	Le quadrirotor de <b>gipsa-lab</b> . . . . .	78
3.2	Le repère terrestre fixe $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et un repère mobile fixé au centre de masse du quadrirotor $T(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ . . . . .	80
3.3	Les portances du quadrirotor . . . . .	82
3.4	Le mouvement de roulis du quadrirotor . . . . .	83
3.5	Le mouvement de tangage du quadrirotor . . . . .	84
3.6	Le mouvement de lacet du quadrirotor . . . . .	84
3.7	Discrétisation du sous-système de l'angle de roulis $\phi$ du quadrirotor en partant de l'état initial $[-2 \ 0]^T$ vers l'origine comme un état final . . . . .	96

3.8	Discrétisation du sous-système de l'angle de tangage $\theta$ du quadrirotor en partant de l'état initial $[\pi \ 0]^T$ vers l'origine comme un état final . . .	96
3.9	Discrétisation du sous-système de l'angle de lacet $\psi$ du quadrirotor en partant de l'état initial $[\frac{\pi}{3} \ 0]^T$ vers l'origine comme un état final . . .	97
3.10	Discrétisation du sous-système de translation du quadrirotor en partant de l'état initial $[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ vers l'origine comme un état final . . .	97
3.11	Évolution dans le temps des angles d'Euler (roulis, tangage et lacet) pour un état initial $\phi = -45^\circ$ , $\theta = 50^\circ$ et $\psi = -175^\circ$ sans ajouter des perturbations externes . . . . .	103
3.12	Évolution dans le temps des vitesses angulaires du quadrirotor sans ajouter des perturbations externes . . . . .	104
3.13	Les couples bornés du Théorème 11 appliqués sur le quadrirotor avec les bornes $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T \text{ Nm}$ sans ajouter des perturbations externes . . . . .	104
3.14	La robustesse de la commande proposée vis à vis des perturbations externes : Évolution dans le temps des angles d'Euler (roulis, tangage et lacet) avec un état initial $\phi = -25^\circ$ , $\theta = 30^\circ$ et $\psi = -10^\circ$ . . . . .	105
3.15	La robustesse de la commande vis à vis des perturbations externes : Évolution dans le temps des vitesses angulaires du quadrirotor . . . . .	105
3.16	Les couples bornés du Théorème 11 appliqués sur le quadrirotor avec les bornes $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T \text{ Nm}$ . . . . .	106
3.17	Évolution dans le temps des états de sous-système de translation de modèle d'Altug <i>et al.</i> [7] en appliquant la commande bornée du Théorème 13 avec la position initiale $[x(0), y(0), z(0)] = [7, 8, 5]$ . . . . .	115
3.18	Évolution dans le temps des états de sous-système de rotation de modèle d'Altug <i>et al.</i> [7] en appliquant la commande bornée du Théorème 13 pour un état initial $[\theta(0), \phi(0), \psi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0)] = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, 2, 0]$ . . . . .	115
3.19	Les commandes bornées du Théorème 13 appliquées sur le quadrirotor	116
B.1	La fonction de saturation (bleu) avec $M = 3$ et $\alpha = 0.9$ . . . . .	134

# Introduction

## Motivation

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire d'Automatique de Grenoble devenu le département d'automatique de **gipsa**-lab au sein du projet "Drone". Les drones sont des aéronefs de faible dimension capables d'emporter une charge utile (caméra, vidéo transmetteur, etc) et d'effectuer, de manière assez autonome, une mission. Ils peuvent être classés en trois catégories principales, à savoir les avions, les dirigeables et les hélicoptères.

L'utilisation des drones peut avoir plusieurs applications que ce soit dans le domaine militaire telles que l'exploration, la surveillance et l'espionnage ; ou bien civil, telles que la surveillance des réseaux routiers, d'installations industrielles et de lignes haute tension. Le champ d'application des drones est très vaste et ceci a donné naissance à plusieurs projets de recherche à travers le monde. Des chercheurs de plusieurs communautés scientifiques, telles que la robotique, l'aéronautique, le traitement du signal et l'informatique, avec le support de l'industrie et de gouvernements, participent au développement de telles machines (de la conception à la commande en passant par la réalisation), où le but réside dans le développement de prototypes fortement manoeuvrables et extrêmement stables. On ne peut pas citer tous les projets de recherche qui traitent de la commande et du développement des drones. A titre d'exemple je cite le travail de l'EPLF -Suisse, Lakehead University - Canada, Australian National University et les projets français du laboratoire Heudiasyc de l'université de Compiègne, du LAAS-CNRS pour la commande de dirigeables souples, du CEA-LIST de Fontenay-Aux-Roses, de l'ONERA de Toulouse et le projet du LSC-Evry concernant la commande d'hélicoptères de petite taille.

Au sein du projet "Drone" de **gipsa**-lab plusieurs aspects sont traités, entre autres, on peut citer

- Le positionnement (sans GPS),
- La vision active embarquée,
- Les robots volants biomimétiques et
- La commande.

L'objectif principal de ce sujet de recherche concerne le développement des lois

de commande destinées à piloter un hélicoptère à quatre rotors (quadrirotor). Le quadrirotor est constitué de quatre rotors fixés aux extrémités d'un corps rigide en forme de croix normalement en fibre de carbone. Le rotor est constitué d'une pale à pas fixe accouplée à un moteur à courant continu par l'intermédiaire d'un engrenage. Le quadrirotor est caractérisé par son faible poids qui réduit considérablement la



FIG. 1 – Le quadrirotor de **gipsa-lab**

puissance de calcul qui peut être embarquée. En effet, la commande doit être simple et nécessiter peu de puissance de calcul, mais elle doit permettre aussi de partager les ressources avec les autres tâches que le système embarqué sera amené à traiter comme la vision, le traitement d'image, le traitement des mesures de position et la gestion de l'énergie embarquée. La commande proposée dans cette thèse satisfait deux exigences dans le cas des systèmes embarqués :

1. les contraintes sur les entrées qui jouent un rôle important pour la stabilité de systèmes, particulièrement quand ils sont petits
2. le coût de calcul qui est très réduit

## Plan

Trois parties peuvent être identifiées dans ce travail :

- La première partie concerne la stabilisation globale d'un système linéaire (chaîne d'intégrateurs linéaire) par l'application des commandes non-linéaires bornées
- Dans la deuxième partie, nous étudions la commande bornée d'un avion planaire à décollage vertical connu sous le nom de PVTOL (pour Planar Vertical Take-Off and Landing). Ce système est considéré comme la projection dans un plan vertical de quadrirotor
- La troisième partie a pour but d'appliquer les commandes non-linéaires développées dans les deux premières parties au cas du quadrirotor

Maintenant nous présentons chapitre par chapitre le contenu de ce mémoire.

Dans le chapitre 1, nous étudions la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs sous contraintes. Nous proposons une amélioration des approches non-linéaires développées par Teel [93] et Sussmann *et al.* [89] dans le cas continu. Ces derniers considèrent un contrôleur sous forme d'une somme de fonctions de saturation pondérées de coefficients de réglage. Cette approche a été améliorée à travers deux aspects. Le premier aspect consiste à lier les paramètres de réglage à la dimension du système. Le second aspect considère une dépendance entre le niveau de saturation et l'état du système. Notre contribution réside dans l'amélioration du temps de convergence de l'état avec un facteur supérieur à 3. La robustesse d'une telle approche par rapport à un retard de mesure et à des erreurs de modèle a été également établie. Les résultats obtenus ont été étendus au cas discret. L'approche développée unifie le travail original de Yang et al. (1997) et les avantages de notre approche dans le cas continu. Les commandes, dans les cas continu et discret, présentent de bonnes performances tout en gardant l'extrême simplicité des calculs et la stabilité globale du système.

Le deuxième chapitre propose des commandes pour le PVTOL sans et avec la gravité. En utilisant les transformations développées par Aneke *et al.* [8] la dynamique du PVTOL est transformée en systèmes chaînés à inertie correspondants aux objets volants dans un milieu sans gravité. La stabilisation du PVTOL (sans gravité) revient à stabiliser un système chaîné. C'est pourquoi, nous sommes également intéressés à développer une commande prédictive orientée temps minimum pour les systèmes chaînés. De tels systèmes sont difficiles à commander car ils ne satisfont pas les conditions de stabilisabilité de Brockett. Ces conditions sont nécessaires pour l'existence de commandes par retour d'état  $C^1$  et à temps invariant. Nous proposons une commande par retour d'état qui assure la stabilisation des systèmes chaînés à inertie en respectant les contraintes de saturation sur les entrées de commande. Cette approche basée sur le principe de l'horizon glissant est conçue pour être appliquée en temps réel. La théorie des systèmes en cascade a été combinée avec la commande développée dans chapitre 1 afin de concevoir des lois de commande qui stabilisent globalement le PVTOL avec gravité.

Le troisième chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, nous étudions la stabilisation de l'assiette du quadrirotor en le considérant comme un corps rigide. La commande est bornée et basée sur la représentation de quaternion. L'implémentation de cette commande en temps réel a donné des résultats très satisfaisants (avec et sans perturbations externes additionnelles). Dans la deuxième partie nous aborderons la stabilisation en position du quadrirotor en généralisant l'approche développée dans chapitre 2 pour le PVTOL avec gravité. Cette approche non-linéaire bornée satisfait également la contrainte de positivité de la poussée du quadrirotor.



## Publications

Les travaux suivants, décrits dans ce manuscrit, ont été publiés dans :

1. N. Marchand and **A. Hably**, "*Global stabilization of multiple integrators with bounded controls*", Automatica, Vol 41, No 12, pages 2147-2152, 2005
2. N. Marchand, **A. Hably** and A. Chemori, "*Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrators by means of bounded controls*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 52, No 5, 2007
3. **A. Hably**, F. Kendoul, N. Marchand and P. Castillo, "*Further Results on Global Stabilization of the PVTOL Aircraft*", In Positive Systems Theory and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 2006
4. N. Marchand and **A. Hably**, "*Improving the performance of nonlinear stabilization of multiple integrators with bounded controls*", IFAC World congress, 2005
5. **A. Hably**, N. Marchand and M. Alamir, "*Minimum-time-oriented Stabilization of Extended Chained Form Systems*", 44th joint IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05), 2005
6. J.F. Guerrero - Castellanos, **A. Hably**, N. Marchand and S. Lesecq, "*Bounded attitude stabilization : Application on four-rotor helicopter*", IEEE Conference on Robotics and Automation (ICRA'07), 2007
7. **A. Hably** and N. Marchand, "*Global stabilization of four-rotor helicopter with bounded inputs*", IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IFAC (IROS'07), 2007

# Chapitre 1

## Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs

### 1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre consiste à étudier la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs sous des commandes bornées. Ce problème est classique dans le mesure où toute application pratique implique l'utilisation de commandes bornées [11]. Plusieurs types de commande sont proposés. On peut citer la commande linéaire basée sur la compensation "anti-windup", la commande linéaire petit gain [69], la commande optimale [9] et la commande non-linéaire. Cette dernière commande a attiré beaucoup d'attention suite au travail de [93] sur les chaînes d'intégrateurs suivi par les résultats de Sussmann *et al.* [89] pour les systèmes linéaires. Les auteurs dans [89] ont prouvé que seulement les systèmes linéaires stabilisables à pôles à partie réelle négative ou nulle peuvent être globalement asymptotiquement stable par une commande bornée. Sussmann et Yang [90] ont également prouvé qu'il n'existe pas de commande linéaire qui stabilise globalement asymptotiquement une chaîne d'intégrateurs d'ordre supérieur ou égal à 3.

Notre travail vise à améliorer les performances de l'approche non-linéaire qui présente l'avantage d'être régulière et simple à implanter. Une partie de ce travail a été présentée dans [63], [62] et [64].

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous commencerons par la littérature liée au problème de stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs avec des commandes bornées dans section 1.3. Nous comparons dans section 1.4 la performance de quelques lois de commande avec la commande optimale à temps minimum. Dans section 1.5, nous présentons les améliorations apportées sur la commande non-linéaire et l'étude de robustesse dans section 1.6. Nous étudions également la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs en temps discret (section 1.7). La commande développée dans ce chapitre sera utilisée pour concevoir des lois de commande qui stabilisent globa-

lement un hélicoptère à quatre rotors dans l'espace (quadrirotor-rotor) et dans le plan pour l'avion à décollage et atterrissage vertical (dénomé PVTOL aircraft pour Planar Vertical Take-Off and Landing aircraft).

## 1.2 Définition

Une chaîne d'intégrateurs est définie par le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système, et  $u \in \mathbb{R}$  la commande. La matrice d'état  $A$  et la matrice de commande  $B$  sont définies pour  $n$  la dimension du système par :

- $A_{ij} = 1$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si  $i + 1 = j$  et  $A_{ij} = 0$  sinon
- $B_i = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  et  $B_n = 1$ .

La grandeur de commande est limitée par des considérations physiques :

$$|u| \leq \bar{u} \tag{1.2}$$

où  $\bar{u}$  est la limite connue a priori de la commande et la norme considérée est la norme infinie. Notre objectif dans ce chapitre est de trouver une loi de commande  $u$  bornée qui stabilise la chaîne d'intégrateurs (1.1) en respectant la contrainte (1.2). Dans la section suivante, nous allons présenter les différentes approches existantes dans la littérature pour résoudre ce type de problème.

## 1.3 État de l'art

Le problème de la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs avec une commande bornée a attiré beaucoup d'attention. Il existe plusieurs approches qui varient de classique, linéaire et non-linéaire. Beaucoup assurent la stabilisation globale tandis que d'autres garantissent seulement la stabilisation semi-globale.

### 1.3.1 Commande optimale

L'étude de cette approche contient deux orientations. La première orientation vise une énergie minimale tandis que la deuxième cherche à minimiser le temps de convergence du système. L'objectif général est de trouver une commande optimale qui minimise un critère qui varie selon l'orientation adoptée.

### Commande optimale bornée

Cette approche considère le critère  $J$  qui traduit l'énergie du système dépendant du vecteur d'état  $x$  et de la commande  $u$  :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (1.3)$$

où  $Q = Q^T > 0$  et  $R = R^T > 0$ .

La commande optimale bornée est la commande  $u^*$  qui minimise le critère (1.3) en respectant la contrainte sur la commande (1.2). [25] garantit pour  $t_f = \infty$  et par une approche en temps discret l'existence de cette commande et la stabilité du système bouclé. De plus, la commande peut être obtenue par optimisation sur une surface convexe, mais dans un espace de dimension infinie en temps continu. En conséquence, pour un horizon suffisamment grand, une solution stabilisante existe.

### Commande optimale en temps minimum

La commande optimale en temps minimum est celle qui minimise le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (1.4)$$

en respectant la contrainte sur la commande (1.2), ainsi que la contrainte terminale  $\|x(T)\| = 0$ . Athans et Falb [9] et Lewis et Syrrom [48] nous informent que la solution d'un tel critère existe toujours et consiste en une commande de type bang-bang ne pouvant prendre comme valeur que  $\bar{u}$ ,  $-\bar{u}$  et 0. Ce résultat est la conséquence de l'application du principe de minimum de Pontryagin donné par l'inégalité suivante :

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (1.5)$$

avec l'Hamiltonien  $H$  est défini par :

$$H = 1 + \lambda(Ax + Bu) \quad (1.6)$$

$\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange et  $\star$  dénote les quantités optimales [48]. D'après équation (1.5),  $H$  est minimum pour  $u = u^*$ . En utilisant la condition de stationnarité [48] :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda B^T = 0 \quad (1.7)$$

La commande  $u(t)$  est choisie pour obtenir  $\lambda^T B u$  le plus petit possible afin de minimiser  $H$ . La commande optimale est donnée par :

$$u = u^* = -\bar{u} \text{sign}(B^T \lambda) \quad (1.8)$$

Cette commande est le meilleur résultat qui peut être obtenu en terme de vitesse de convergence ; cependant elle n'est pas facile à calculer, particulièrement pour des systèmes à grande dimension ( $n$  grand). Par exemple pour trouver la commande optimale en temps minimum pour une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3, on a besoin de calculer des ensembles d'état qui définissent des surfaces de commutation dans l'espace d'état et d'étudier la position de la trajectoire d'état par rapport à ces surfaces. Cette idée est détaillée dans section 1.4.

### 1.3.2 Commande petit gain

La commande petit gain (en anglais "low gain design") a la forme générale dépendante du paramètre  $\varepsilon$  :

$$u = K(\varepsilon)x \quad (1.9)$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la norme  $\|K(\varepsilon)\|$  décroît pour satisfaire la contrainte sur la commande. L'idée générale est de modifier le paramètre  $\varepsilon$  pour agrandir ou réduire la région d'attraction. On peut citer le travail de Lin et Saberi [53] qui ont proposé un choix de  $K(\varepsilon)$  basé sur la méthode directe (eigen structure assignment). Cette commande malheureusement ne garantit que la stabilité semi-globale.

D'un autre côté, pour garantir la stabilité globale des commandes petit gain basées sur l'équation de Riccati sont proposées. Cette commande a la forme suivante :

$$u = -\text{sat}(k B^T P(\varepsilon)x) \quad (1.10)$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre d'ajustement. La fonction de saturation est exprimée par :

$$\text{sat}(y) = \text{sign}(y)\min(|y|, \bar{u}) \quad (1.11)$$

La matrice  $P$  est la solution de l'équation de Riccati :

$$P(\varepsilon)A + A^T P(\varepsilon) - P(\varepsilon)B B^T P(\varepsilon) = -\varepsilon I \quad (1.12)$$

Cette approche a fait l'objet de nombreuses études. Megretski [69] a proposé d'adapter  $\varepsilon$  selon la règle suivante :

$$\varepsilon(x) := \max\{\eta \in (0, 1] : x^T P(\eta)x - (B^T P(\eta)B)^{-1} \leq 1\} \quad (1.13)$$

Si l'ensemble où le maximum est pris est vide, alors  $\varepsilon = 0$ . Cette maximisation peut être résolue très efficacement avec la méthode de Newton puisqu'on peut prouver que la fonction  $(x, \eta) \rightarrow x^T P(\eta)x - (B^T P(\eta)B)^{-1}$  est strictement croissante et concave pour  $\eta \in [0, 1]$ . Le gain  $k$  est grand près de l'origine pour avoir des bonnes performances et petit loin de l'origine pour assurer la stabilité. Megretski [69] a proposé une version qui n'exige pas la résolution d'une équation algébrique de Riccati en ligne, cependant seulement la stabilité semi-globale du système est garantie. Lin

[52] a proposé de prendre  $k = \frac{1}{\varepsilon}$ . Grogard *et al.* [27] suggèrent, en combinant le travail Megretski [69] pour le choix de  $\varepsilon(x)$  et le travail de Saberi *et al.* [80] pour le choix de  $k$ , une amélioration qui amène le système dans une configuration idéale pour l'application de la loi de commande avec  $\varepsilon = k = 1$ .

Une différente forme de la commande  $u$  (1.9) a été développée par Saberi *et al.* [80] et après par Lin [51]. Cette commande est composé de deux parties :  $u_L$  la commande petit gain et  $u_H$  la commande grand gain telles que la commande  $u$  appliquée pour la stabilisation de la chaîne d'intégrateurs est définie par :

$$u = u_L + u_H \quad (1.14)$$

La version semi-globale basée sur l'équation de Riccati est proposée dans [80] :

$$u = u_L + u_H = -(1 + \rho)B^T P(\varepsilon)x \quad (1.15)$$

La version globale est développée par Lin [51] en appliquant la méthode d'adaptation  $\varepsilon(x)$  (équation (1.13)) pour la commande petit gain  $u_L$ . La commande  $u$  s'écrit comme :

$$u = u_L + u_H = -(1 + \rho(x))B^T P(\varepsilon(x))x \quad (1.16)$$

avec  $\rho(x)$  qui satisfait une certaine relation (voir Lin [51] pour plus de détails). L'inconvénient majeur de ces méthodes est le coût de calcul exorbitant de la commande qui empêche l'implémentation en temps réel sur des système rapides dotés de capacité de calcul réduites. De plus, la commande obtenue peut-être discontinue (par exemple [27]) et ce défaut est critique dans le cas de retards inconnus comme souligné par Rao et Bernstein [78].

### 1.3.3 Commande linéaire basée sur compensation "Anti-windup"

"Windup" est un mot Anglais qui décrit la piètre performance d'un système en boucle fermée lorsque une commande linéaire est appliquée sans prendre en compte les saturations sur les entrées.

La commande "anti-windup" est proposée comme solution. Des modifications non-linéaires sont ajoutées sur la commande linéaire prédéfinie de sorte qu'elle reste linéaire si il n'y a pas de saturations. Dans le cas contraire, ces modifications affaiblissent l'influence de la saturation et par conséquent la performance du système est améliorée [44]. Malheureusement et comme mentionné par Megretski [69], il n'y a pas d'étude rigoureuse sur la stabilité et la robustesse de cette approche dans le cas général.

### 1.3.4 Approche non-linéaire

Parallèlement à ces méthodes, la communauté non-linéaire s'est également intéressée au problème de stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs sous contraintes. Principalement en raison du résultat de Sussmann et Yang [90] qui ont montré que pour des systèmes à entrée unique, aucune saturation de retour d'état linéaire ne peut globalement stabiliser la chaîne d'intégrateurs d'ordre  $n$  avec  $n \geq 3$ . Ce résultat est à l'origine des deux approches Teel [93] et Sussmann *et al.* [89] qui présentent l'intérêt majeur d'être extrêmement simples à implementer. Ces approches utilisent des fonctions de saturations  $C^0$  et peuvent être généralisés à des fonctions de saturation  $C^\infty$  voire analytiques, ce que ne permettent pas les autres approches.

#### Approche de Teel [93]

Teel [93] s'intéresse aux lois de commande non-linéaires de la forme :

$$u(x) = -\text{sat}_{M_n}(h_n(x) + \text{sat}_{M_{n-1}}(h_{n-1}(x) + \dots \text{sat}_{M_1}(h_1(x)))) \quad (1.17)$$

où  $h_i$  est un changement de coordonnée linéaire et " $\text{sat}_{M_i}$ " est une fonction de saturation linéaire. Étant donné deux constantes positives  $L$  et  $M$  avec  $L \leq M$ , la fonction  $\text{sat}_M$  est une fonction croissante définie par :

1.  $p \text{sat}_M(p) > 0$  pour tous  $p \neq 0$
2.  $\text{sat}_M(p) = p$  quand  $|p| \leq L$
3.  $|\text{sat}_M(p)| \leq M$  pour tous  $p \in \mathbb{R}$

La stabilité globale de la chaîne d'intégrateurs (1.1) est garantie par l'application de la commande  $u$  (1.17) avec le changement de coordonnée linéaire donné par :

$$h_{n-i} = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} x_{n-j} \quad (1.18)$$

pour toutes constantes positives  $(M_i, L_i)$  telles que  $M_i \leq \frac{1}{2}L_{i+1}$  et  $L_i \leq M_i$ .

En appliquant le changement de coordonnée linéaire (1.18), les pôles de la chaîne d'intégrateurs en boucle fermée se situent en  $-1$  si aucun élément de saturation dans la loi de commande (1.17) est saturée. En outre, si le  $k$ -ième élément est saturé, le système en boucle fermée a  $n - k$  pôles multiples en  $-1$  et  $k$  pôles multiples en zéro [38].

Johnson et Kannan [38] ont proposé un changement de coordonnée que permet le placement de pôles tels que les pôles en boucle fermée du système non-saturé se situent en  $\{-a_1, \dots, -a_n\}$ , avec  $a_i$  positive et réelle. Dans le cas où le  $k$ -ième élément de la commande (1.17) est saturé, les pôles du système en boucle fermée se situent en  $\{-a_1, \dots, -a_{n-k}, 0, 0, \dots, 0\}$ .

### Approche de Sussmann *et al.* [89]

L'utilisation de lois de commandes avec des fonctions de saturation emboîtées (Teel [93]) a été généralisée par Sussmann *et al.* [89] pour la stabilisation globale du système linéaire "null controllable" avec des contraintes sur les entrées de commande. Les systèmes "null controllable" sont des systèmes stabilisables avec des pôles à partie réelle nulle ou négative. Également dans [89], une approche non-linéaire légèrement différente est proposée pour la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs. Ici, la commande est la somme de fonctions de saturation :

$$u = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \text{sat}_1(y_i) \quad (1.19)$$

avec  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  et  $\text{sat}_1$  est une fonction de saturation telle que  $\text{sat}_1(y) = y$  si  $|y| \leq M$  et  $\text{sat}_1(y) = \text{sign}(y)$  autrement.

Le changement de coordonnée linéaire  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$  est :

$$\begin{cases} y_n & = & h_1(x_n), \\ y_{n-1} & = & h_2(x_{n-1}, x_n) \\ \vdots & \vdots & \\ y_1 & = & h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.20)$$

avec

$$\begin{cases} h_1(s_1) & = & s_1 \\ h_2(s_1, s_2) & = & \varepsilon h_1(s_1) + h_1(s_2) \\ \vdots & \vdots & \\ h_n(s_1, s_2, \dots, s_n) & = & \varepsilon^{n-1} h_{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) + h_{n-1}(s_2, s_3, \dots, s_n) \end{cases} \quad (1.21)$$

La commande (1.19) stabilise globalement asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs (1.1). L'inconvénient de cette commande est montré par l'équation (1.19). En effet, si les  $y_i$  sont petits pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  puis pour n'importe quel grand  $y_1$  la loi de commande sera près de  $\sigma \varepsilon^n$  quand une gamme de  $\bar{u}$  peut être employée pour conduire le système plus rapidement à l'origine. Par conséquent et comme souligné par Megretski [69], plus la dimension du système est grande, plus la performance de l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] (également celle de Teel [93]) est mauvaise. De plus et pour une dimension donnée, le choix de  $\varepsilon$  influence directement les performance et la vitesse de convergence.

## 1.4 Comparaison des approches pour $n = 3$

Dans cette section, nous comparons la convergence des états d'une chaîne d'intégrateur d'ordre 3. La commande optimale en temps minimum est considérée comme



référence pour cette comparaison avec l'approche de Megretski [69] améliorée par l'approche de Lin [52], l'approche non-linéaire de Teel [93] et l'approche de Sussmann *et al.* [89]. Dans la section suivante, un algorithme pour trouver la commande optimale en temps minimum pour une chaîne d'intégrateurs est présenté.

### 1.4.1 Commande optimale en temps minimum pour $n = 3$

Considérons la chaîne d'intégrateurs (1.1) pour  $n = 3$  et  $|u| \leq 1$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad (1.22)$$

Pour trouver la commande optimale en temps minimum de ce problème, une approche basée sur l'étude d'Athans et Falb [9] a été employée. Dans [9], les auteurs ont développé une commande optimale en temps minimum pour un système de troisième ordre (deux intégrateurs et une constante de temps simple).

La première étape pour concevoir la commande optimale consiste à trouver l'Hamiltonien  $H$  du système (1.22) :

$$H = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)x_3(t) + p_3(t)u(t) \quad (1.23)$$

avec  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  et  $p_3(t)$  sont les états adjoints du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  donné par :

$$\lambda = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Les états adjoints satisfont le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) \\ \dot{p}_3(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_3} = -p_2(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

La deuxième étape est de trouver la commande qui minimise  $H$ . Dans notre cas cette commande est en fonction de  $p_3(t)$  :

$$u = -\text{sign}(p_3(t)) \quad (1.26)$$

Pour obtenir l'expression de  $p_3(t)$ , nous pouvons résoudre les équations (1.25) en fonction des états adjoints initiaux aux  $p_1(0)$ ,  $p_2(0)$  et  $p_3(0)$

$$\begin{cases} p_1(t) = p_1(0) \\ p_2(t) = -p_1(0)t + p_2(0) \\ p_3(t) = p_1(0)\frac{t^2}{2} - p_2(0)t + p_3(0) \end{cases} \quad (1.27)$$

La commande  $u$  ensuite prend la forme suivante :

$$u = -\text{sign}(p_3(t)) = -\text{sgn} \left( p_1(0) \frac{t^2}{2} - p_2(0)t + p_3(0) \right) \quad (1.28)$$

La fonction  $p_3(t)$  a au plus deux zéros, donc il existe six contrôles possibles :

$$\{+1\}, \{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\}, \{+1, -1, +1\}, \{-1, +1, -1\}$$

En mettant  $u(t) = \Delta = \pm 1$ , nous pouvons résoudre le système (1.22) et obtenir le système en fonction des états initiaux  $x_i(0)$  pour  $i = 1, 2, 3$  et du temps  $t$  :

$$\begin{cases} x_1 &= \Delta \frac{t^3}{6} + x_3(0) \frac{t^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0) \\ x_2 &= \Delta \frac{t^2}{2} + x_3(0)t + x_2(0) \\ x_3 &= \Delta t + x_3(0) \end{cases} \quad (1.29)$$

Après l'élimination le temps  $t$ , le système (1.29) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 &= x_1(0) - x_2(0)x_3(0)\Delta + \frac{1}{3}x_3^3(0) + \frac{1}{6}x_3^3 - \frac{1}{2}x_3x_3^2(0) + \Delta x_2(0)x_3 \\ x_2 &= x_2(0) + \frac{\Delta}{2}(x_3^2 - x_3^2(0)) \end{cases} \quad (1.30)$$

Ces deux équations (1.30) représentent la trajectoire dans l'espace d'état qui commence par l'état  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$  et qui est générée par la commande constante  $u = \Delta$ . La projection de cette trajectoire dans le plan  $x_1x_3$  est donnée par  $x_1$  et l'équation de  $x_2$  représente sa projection dans le plan  $x_2x_3$ .

Nous pouvons trouver deux ensembles, le premier  $\{V_2^+\}$  qui représente l'ensemble des états forcés à l'origine par la commande  $\{+1\}$  et le deuxième  $\{V_2^-\}$  est l'ensemble des états qui sont forcés à l'origine par la commande  $\{-1\}$ . L'union de ces deux ensembles donnera  $\{V_2\}$ , la surface de commutation :

$$\{V_2\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \frac{1}{6}x_3^3; x_2 = \frac{\Delta^*}{2}x_3^2\} = \{V_2^+\} \cup \{V_2^-\} \quad (1.31)$$

Tout état sur  $\{V_2\}$  peut être forcé à l'origine en appliquant la commande :

$$\Delta^* = -\text{sgn}\{x_3\} \quad (1.32)$$

Maintenant, nous allons trouver l'ensemble des états  $\{V_1\}$  qui peuvent être forcés à l'origine par la séquence de commande  $\{-\Delta^*, \Delta^*\}$ , et donc forcés à appartenir à  $\{V_2\}$  en appliquant la commande  $-\Delta^*$

Un état  $(x_{1_1}, x_{2_1}, x_{3_1}) \in \{V_1\}$  si et seulement si

$$\begin{cases} x_{1_2} &= x_{1_1} + x_{2_1}x_{3_1}\Delta^* + \frac{1}{3}x_{3_1}^3 - \frac{1}{2}x_{3_2}x_{3_1}^2 + \frac{1}{6}x_{3_2}^3 - \Delta^*x_{2_1}x_{3_2} \\ x_{2_2} &= x_{2_1} - \frac{\Delta^*}{2}(x_{3_2}^2 - x_{3_1}^2) \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $(x_{1_2}, x_{2_2}, x_{3_2}) \in \{V_2\}$ , ceci signifie :

$$\begin{cases} x_{1_2} &= \frac{1}{6}x_{3_2}^3 \\ x_{2_2} &= \frac{\Delta^*}{2}x_{3_2}^2 \end{cases} \quad (1.34)$$

et

$$u = \Delta^* = +\text{sgn}\{x_{2_2}\} \quad (1.35)$$

Nous notons que les états appartenant à l'ensemble  $\{V_1\}$  sont donnés sous forme paramétrique en fonction de l'état  $(x_{1_2}, x_{2_2}, x_{3_2})$ . En utilisant (1.33) et (1.34), nous trouvons une relation entre  $x_1, x_2$ , et  $x_3$  :

$$x_1 = x_{3_2} \left[ \frac{x_3^2}{2} + \Delta^* x_2 \right] - \Delta^* x_3 x_2 - \frac{1}{3}x_3^3 \quad (1.36)$$

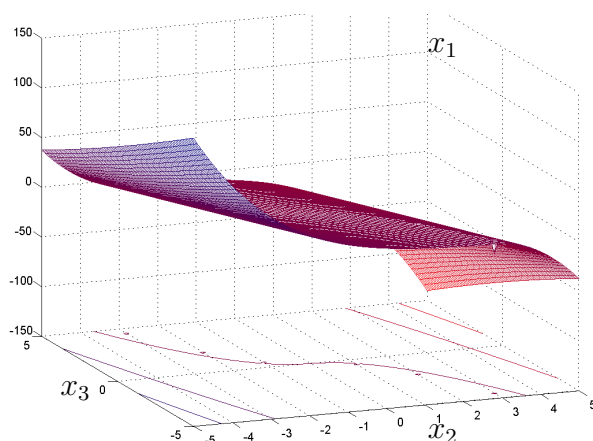
avec

$$x_{3_2} = -\Delta^* \left[ \Delta^* x_2 + \frac{x_3^2}{2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (1.37)$$

Il reste à déterminer le  $\Delta^*$  fonction de  $(x_1, x_2, x_3)$ . En utilisant la projection de  $\{V_2\}$  sur le plan  $x_2 x_3$ ,  $u$  sera

$$u = -\Delta^* = \text{sign}\left\{x_2 + \frac{1}{2}|x_3|x_3\right\} \quad (1.38)$$

Après avoir trouvé les ensembles  $\{V_1\}$  et  $\{V_2\}$ , il est facile de forcer tous les états  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$  à l'origine. Cela est fait en étudiant la position de l'état  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  par rapport à la surface de commutation  $\{V_1\}$ . Si  $\xi_1 - x_{1_1} > 0$ , alors l'application de la commande  $u = -1$  produit une trajectoire qui croise la surface  $\{V_1\}$ . Dans l'autre cas, c.à.d  $\xi_1 - x_{1_1} < 0$ , la trajectoire produite par la commande  $u = 1$  croise la surface  $\{V_1\}$ . L'algorithme employé pour obtenir la commande optimale en temps minimum pour une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 est récapitulée par la suite

FIG. 1.1 – Surface de commutation  $V_1$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ 

### Algorithme pour la commande optimale en temps minimum

1. Étudier la position de l'état  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  par rapport à la surface  $\{V_1\}$
2. Appliquer la commande  $u = \Delta_0$  avec  $\Delta_0 = -1$  si  $\xi_1 - x_1 > 0$  et  $\Delta_0 = 1$  si  $\xi_1 - x_1 < 0$  ( $x_1$  de l'équation (1.36))
3. La trajectoire, produite par la commande  $\Delta_0$ , croise la surface  $\{V_1\}$  de l'équation (1.33) en  $(x_{1_1}, x_{2_1}, x_{3_1})$
4. La commande change son signe et devient  $u = \Delta_1 = -\Delta_0$ .
5. La trajectoire, produite par la commande  $\Delta_1$ , arrive à la surface  $\{V_2\}$  (équation(1.34))
6. La commande encore change son signe et devient  $u = \Delta_2 = -\Delta_1$ .
7. La trajectoire avancera dans la surface  $\{V_2\}$  et enfin arrivera à l'origine

### 1.4.2 Simulations

Pour le même état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ , nous comparons la convergence du système (1.22) pour  $n = 3$  et  $|u| \leq 1$ , en appliquant la commande optimale en temps minimum, l'approche de Megretski [69] améliorée par l'approche de Lin [52], l'approche non-linéaire de Teel [93], et l'approche de Sussmann *et al.* [89]. Nous constatons à partir les simulations (figures 1.2-1.5) que l'approche de Sussmann *et al.* [89], bien que la plus simple, est malheureusement la moins performante. Le

temps de convergence des états en appliquant l'approche de Sussmann *et al.* [89] est cinq fois plus grand que le temps de convergence en appliquant l'approche de Teel [93] et trente fois plus grand que le temps de convergence en appliquant la commande optimale en temps minimum. Le temps de convergence de l'approche de Megretski [69] amélioré par l'approche de Lin [52] est comparable avec le temps de convergence de la commande optimale en temps minimum cependant le coût de calcul est exorbitant en comparaison de celui de l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89]. Notre travail porte sur l'amélioration de cette dernière approche [89] tout en gardant l'extrême simplicité des calculs et la stabilité globale du système.

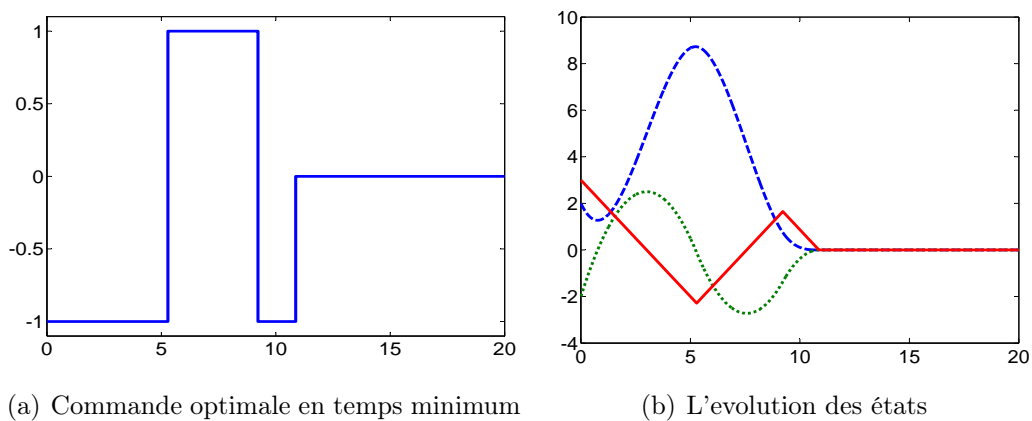


FIG. 1.2 – Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande optimale en temps minimum. Le temps de convergence est inférieur à 13 secondes

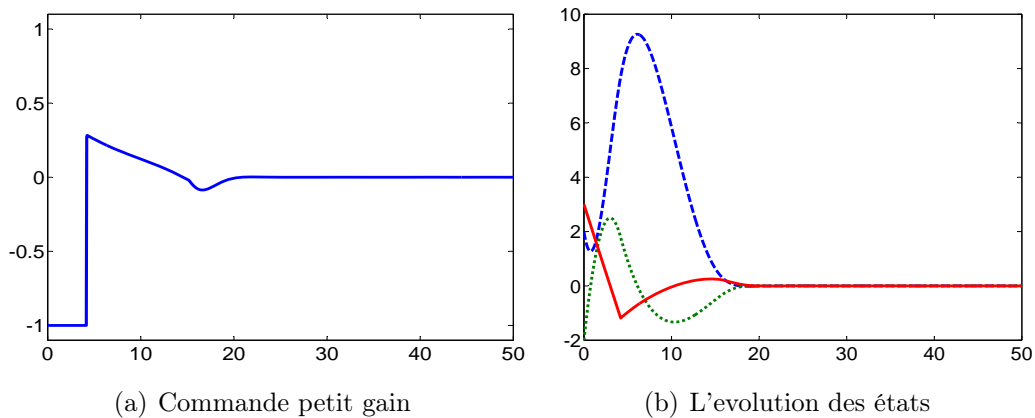


FIG. 1.3 – Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande petit gain proposée par Megretski [69] et améliorée par Lin [52]. Le temps de convergence est inférieur à 20 secondes

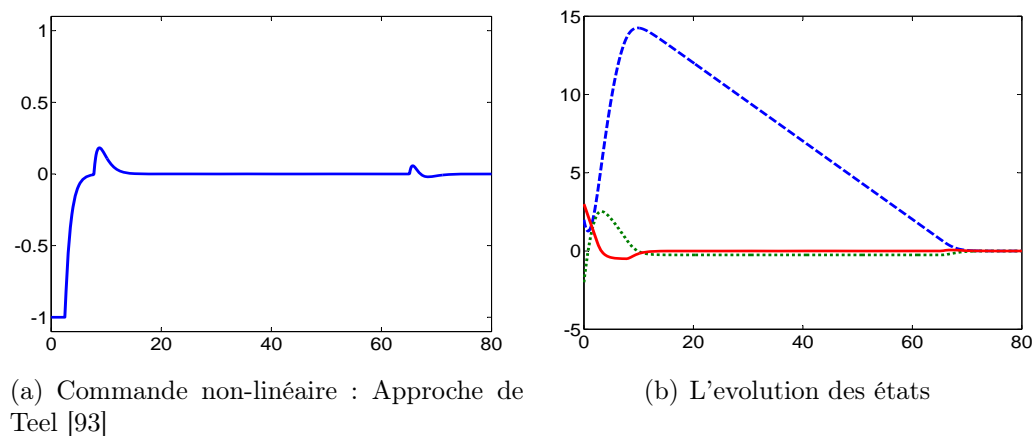


FIG. 1.4 – Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande non-linéaire proposée par Teel [93]

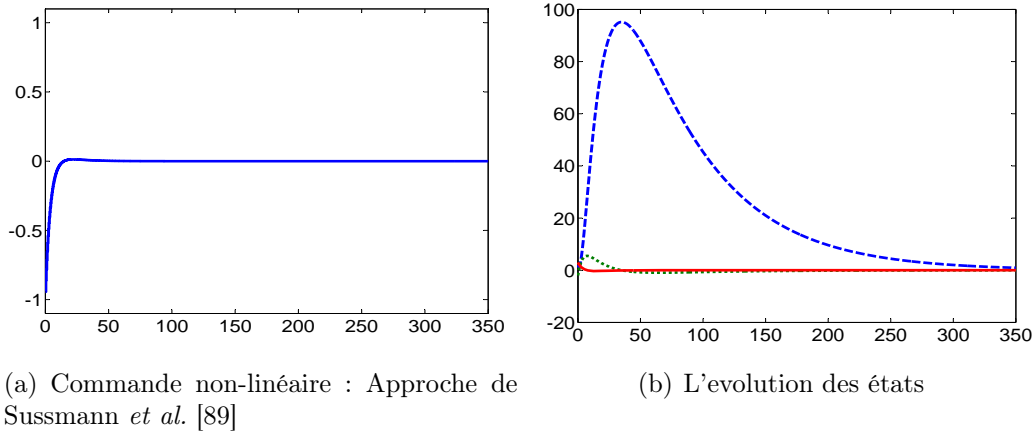


FIG. 1.5 – Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande non-linéaire proposée par Sussmann *et al.* [89]. Le temps de convergence est trente fois plus grand que le temps de convergence de la commande optimale en temps minimum

## 1.5 Amélioration de l'approche non-linéaire

Notre travail se focalise sur l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89]. Deux types d'améliorations sont apportées. Tout d'abord, nous pouvons remarquer à l'aide de simulations que plus  $\varepsilon$  est grand, plus le système bouclé avec la commande (1.19) converge rapidement. Cependant, si  $\varepsilon$  est choisi trop important, la stabilité devient seulement locale au lieu d'être globale. Notre première amélioration consiste à chercher une limite moins restrictive au paramètre  $\varepsilon$  que celle proposée dans [89]. La deuxième modification consiste à améliorer la plage de variation de la commande autorisée dans [89]. Nous avons amélioré les seuils des saturations en utilisant la marge laissée par tout état  $y_i$  ne saturant pas la fonction  $\text{sat}$  dans l'équation (1.19) au profit des autres états.

### 1.5.1 Adaptation du $\varepsilon$ à la dimension du système

L'approche non-linéaire [89] impose  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ . Dans notre travail, nous allons essayer de trouver une borne supérieure  $\bar{\varepsilon}$  en assurant la stabilité globale du système.

**Théorème 1** *La commande*

$$u = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \text{sat}_1(y_i) \quad (1.39)$$

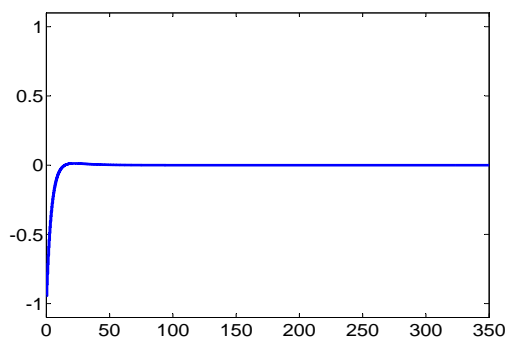
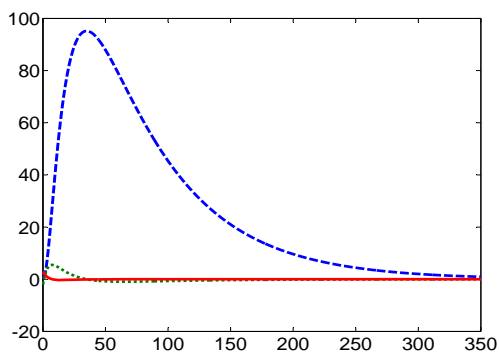
avec  $y_i$  comme dans équation (1.19) stabilise globalement asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs d'ordre  $n$  (1.1) avec  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  pour

- $\bar{\varepsilon}$  solution unique dans  $]0, 1[$  de  $\varepsilon^{n+1} - 2\varepsilon^2 + \varepsilon = 0$  si  $n > 2$
- $\bar{\varepsilon} = 1$  si  $n = 2$
- $\bar{\varepsilon} > 0$  si  $n = 1$

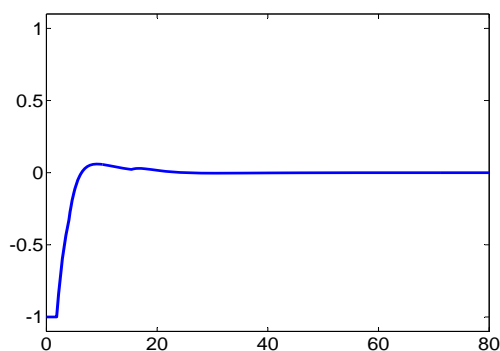
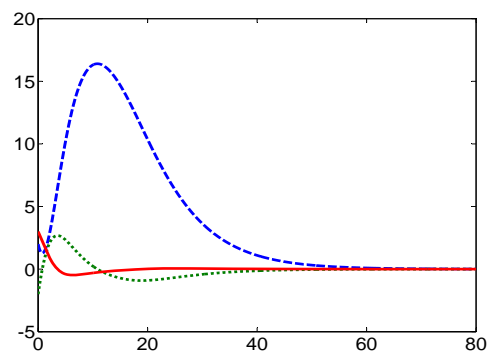
**Corollaire 2** *La loi de commande (1.39) stabilise globalement asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs (1.1) pour tous  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ .*

Le Théorème 1 est prouvé en l'Annexe A.1. Le Corollaire 2 suit directement de Théorème 1 pour tout  $n > 1$  et  $\bar{\varepsilon}(n) \leq \frac{1}{2}$ . Ce résultat est une généralisation de [89] qui impose  $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ . Cette extension améliore notablement le comportement en boucle fermée (comme nous pouvons le voir sur la figure 1.6).

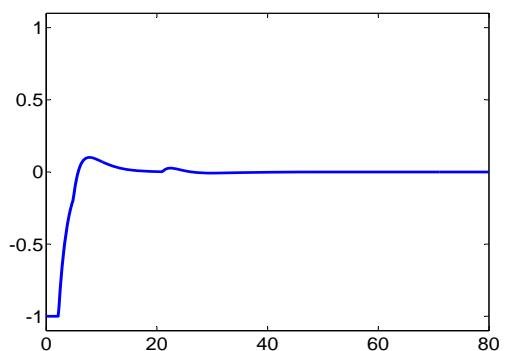
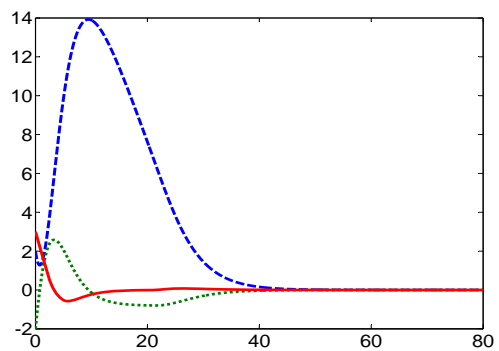


(a) Commande non-linéaire de Sussmann *et al.* [89]

(b) L'évolution des états

(c) Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.5$ 

(d) L'évolution des états

(e) Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.618$ 

(f) L'évolution des états

FIG. 1.6 – Amélioration de la performance de l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] : Stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 avec un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] avec  $\varepsilon = 0.25$  (haut), la commande du Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.5$  (milieu) et  $\varepsilon = 0.618$  (bas)

### 1.5.2 Adaptation dynamique du niveau de fonction de saturation

Cette modification vise à récupérer sur les états  $y_i$  non saturés du potentiel de commande au profit des états  $y_j$  saturés. En effet, si nous prenons le cas où  $y_n = 0$ , alors la commande ne peut pas dépasser  $\sum_{i=2}^n \varepsilon^i$  alors que l'on est autorisé à aller jusqu'à une commande valant  $\sum_{i=1}^n \varepsilon^i$ . Il faut noter avant de présenter la commande qu'il existe dans la littérature une modification différente proposée par Kaliora et Astolfi [40] pour faire varier le niveau des fonctions de saturation. Cette modification consiste à ajouter des gains multiplicatifs sur l'état  $y$ . Cependant, seulement l'existence des gains admissibles (en termes de stabilité du système en boucle fermé) est établie et il n'y a pas de méthode directe pour trouver ces gains. Nous proposons donc la modification suivante :

**Théorème 3** *Soit  $\varepsilon$  comme au Théorème 1 et les niveaux de saturation  $M_i$  soient définis par :*

$$\begin{cases} M_n &= 1 \\ M_j &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}[M_{j+1} - |\text{sat}_{M_{j+1}}(y_{j+1})|] \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.40)$$

La commande

$$u = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \text{sat}_{M_i}(y_i) \quad (1.41)$$

avec  $y_i$  comme dans (1.19) stabilise globalement asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs (1.1)

Le choix des niveaux de saturation dans équation (1.40) est fait pour que l'état  $y_i$  récupère le potentiel de commande laissé par les états  $\{y_j\}_{j=i+1, \dots, n}$ .

Le Théorème 3 est prouvé dans l'Annexe A.2. La commande et la convergence des états sont présentées sur la figure 1.7. On observe ici aussi une amélioration des performances en comparaison de celle obtenue en appliquant la commande proposée au Théorème 1.

### 1.5.3 Comparaison récapitulative

Dans cette partie et pour mieux distinguer la performance des différentes approches étudiées ci-dessus, une comparaison récapitulative est réalisée. Nous avons comparés sur la figure 1.8 la convergence de la norme des états  $\|x(t)\|$  pour un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant la commande non-linéaire proposée par Sussmann *et al.* [89] pour le paramètre d'ajustement  $\varepsilon = 0.25$ , l'approche non-linéaire de

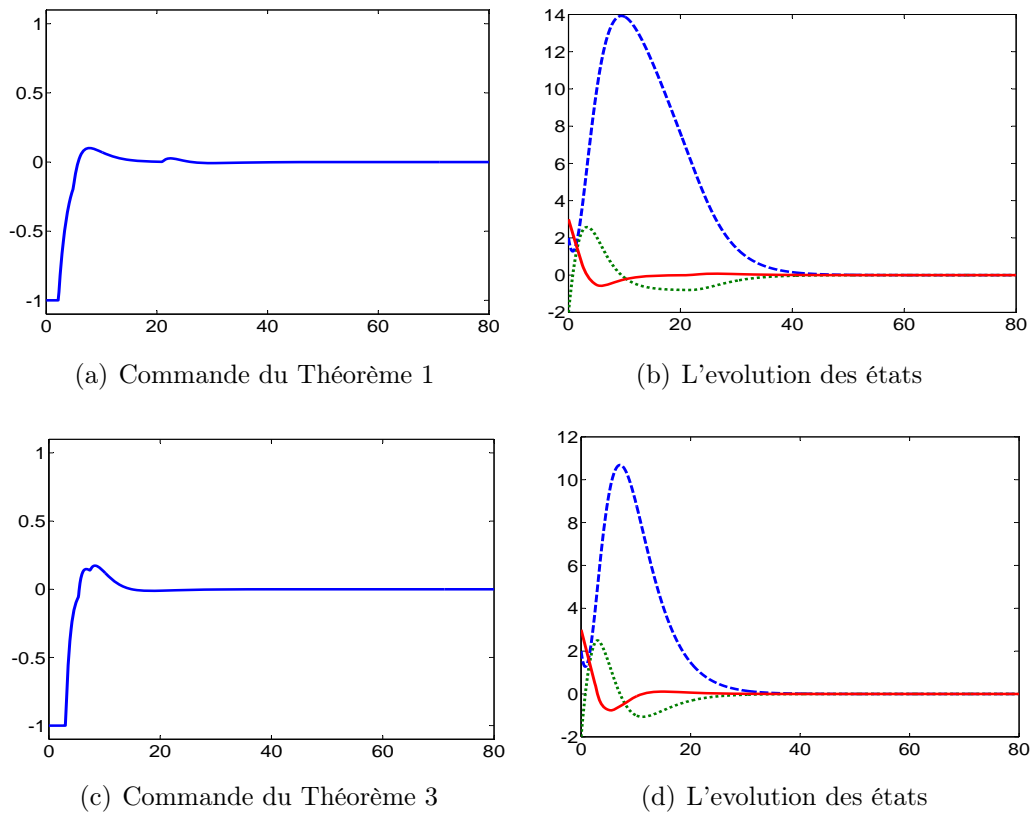


FIG. 1.7 – Adaptation dynamique du niveau des fonctions de saturation : Comparaison de performance entre le Théorème 1 et le Théorème 3 pour la même valeur de  $\varepsilon = 0.618$  et pour un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$

Teel [93], la commande petit gain de Megretski [69] amélioré suivant les indications de Lin [52], la commande optimale en temps minimum, et les lois de commande proposées dans Théorème 1 et Théorème 3 pour  $\varepsilon = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.618$ . Nous constatons que l'approche originale de Sussmann *et al.* [89] donne de mauvaises performances par rapport à celles obtenues par la commande optimale en temps minimum. Il apparaît que les méthodes faisant appel à une optimisation à chaque pas présentent de meilleures performances. En revanche, les approches proposées au Théorème 1 et au Théorème 3 présentent un très bon rapport performances sur simplicité de calcul.

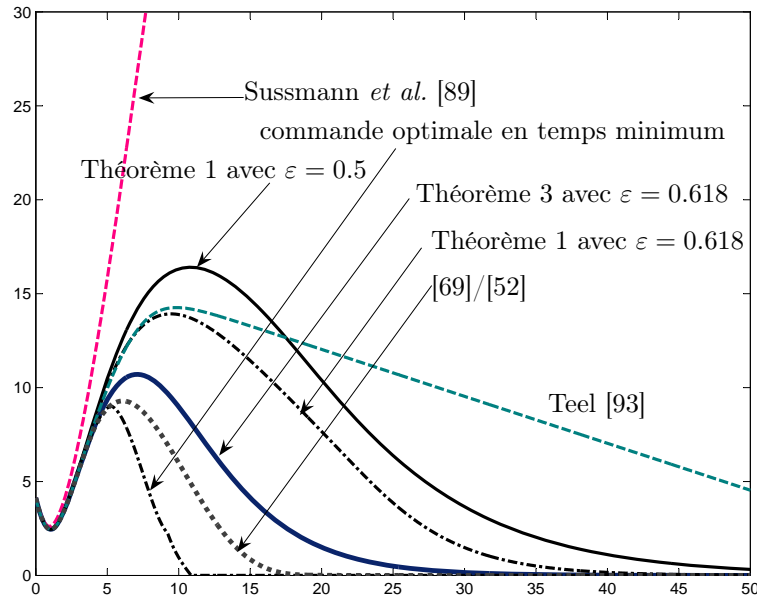


FIG. 1.8 – Comparaison de l'évolution de  $\|x(t)\|$  pour un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$  en appliquant l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] avec  $\varepsilon = 0.25$ , l'approche non-linéaire de Teel [93], la commande petit gain de Megretski [69] améliorée suivant les indications de Lin [52], la commande optimale en temps minimum, et les lois de commande proposées dans le Théorème 1 et le Théorème 3 pour  $\varepsilon = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.618$

## 1.6 Etude de robustesse

Pour analyser plus en détail la performance des approches proposées dans Théorème 1 et Théorème 3, des simulations ont été effectuées pour examiner la robustesse par rapport au retard de mesure et à l'incertitude du modèle. Ces essais sont inspirés du travail comparatif de Rao et Bernstein [78]. Dans ce travail, les auteurs appliquent une approche connue dans la littérature comme la commande naïve dans l'objectif de comparer la performance des différentes lois de commande (classique et non-linéaire) dans le contexte de la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 2 sous une commande bornée. L'idée générale de la commande naïve peut être résumée comme suit : une commande qui est initialement conçue pour un système avec des conditions idéales est évaluée par des moyens numériques pour le même système mais avec des conditions non idéales (perturbés) qui n'ont pas été considérées dans la synthèse initiale de cette loi de commande. La bonne

performance sous ces conditions non idéales peut suggérer des propriétés cachées de la commande qui n'ont pas été considérées dans son développement original. Il faut noter que cette approche est totalement différente de la commande robuste qui permet de garantir la stabilité de système par rapport aux perturbations et aux erreurs de modèle.

Dans notre étude, nous avons appliqué la même approche de Rao et Bernstein [78] pour le cas d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3. Les tests appliqués consistent à ajouter des retards de mesure et des incertitudes du modèle. Une étude comparative est réalisée entre l'approche de commande petit gain de Megretski [69] amélioré comme indiqué par Lin [52], l'approche non-linéaire proposée dans [93], la commande proposée d'après le Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.5$  qui correspond à l'amélioration de l'approche non-linéaire proposée par Sussmann *et al.* [89] et la loi de commande du Théorème 3. La commande optimale en temps minimum n'a pas été examinée en raison de sa faible robustesse comme souligné par Rao et Bernstein [78]. L'indicateur de comparaison souligné est le temps moyen d'établissement (en anglais "Achieved Settling Time (AST)"), c'est à dire le temps nécessaire pour que les états rejoignent et restent dans une boule centrée à l'origine de rayon 0.05 pour cent de la norme de l'état initial pour un ensemble donné des conditions initiales.

### 1.6.1 Robustesse vis à vis de retard ou de mesure

Le premier essai consiste à étudier la robustesse des commandes vis à vis de retards de mesure. Pour cela, un retard de sortie de  $\tau$  secondes a été inséré dans le chemin de mesure de la commande comme nous pouvons voir sur figure 1.9. Les simulations sont faites pour un  $\tau \in [0.1, 3.1]$  secondes sur une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3. La dégradation du temps d'établissement pour les différentes commandes est présenté sur figure 1.10.

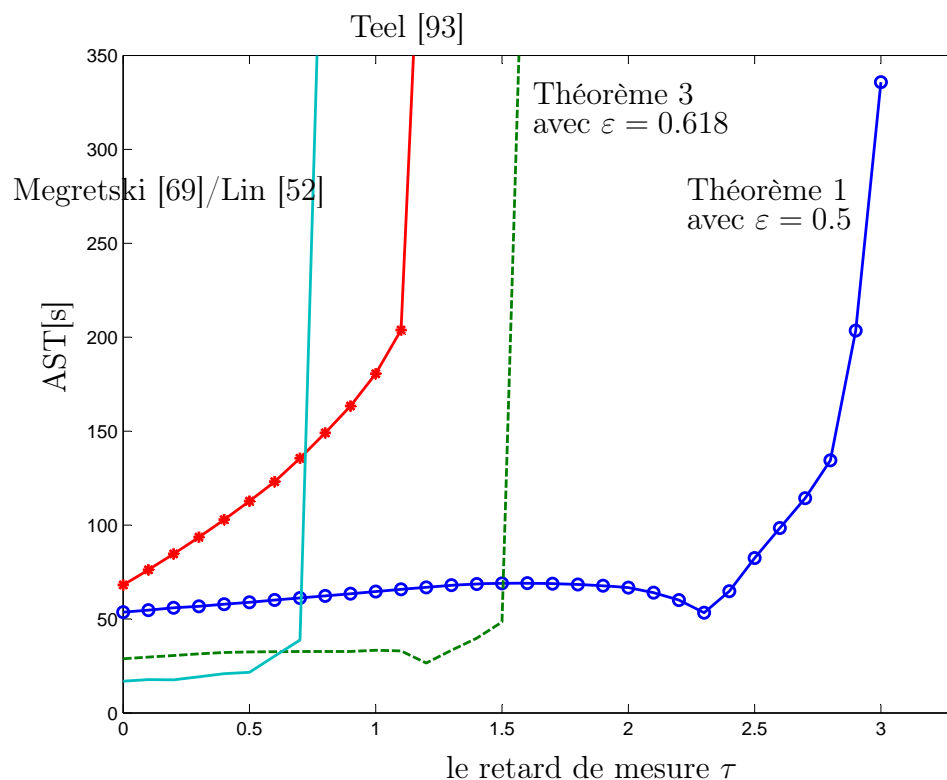


FIG. 1.10 – La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction du retard de mesure  $\tau \in [0.1, 3.1]$  pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.5$  et celle du Théorème 3 avec  $\varepsilon = 0.618$

On constate que la loi de commande petit gain proposée dans [69] et améliorée par Lin [52] ne peut pas stabiliser la chaîne d'intégrateurs pour un retard supérieur à 0.7 s. La loi de commande non-linéaire proposée dans [93] a également montré une faible performance en vue de la stabilisation de système. Elle échoue à stabiliser le système pour un retard  $\tau > 1.1$  s. D'une part, Théorème 3 a permis la stabilisation du système pour un retard  $\tau < 1.6$  s, qui est plus que le double du retard accordé par la loi de commande de Megretski [69].

Pour étudier cette robustesse vis à vis de retards de mesure d'un point de vue différent, nous analysons le rapport  $C$  entre le maximum de retard permis  $\tau_{\max}$  (avant la divergence) pour chaque commande et le temps moyen d'établissement nominal  $AST_0$  (sous les conditions idéales). Les résultats nous donnent la même indication d'une robustesse très bonne des approches proposées au Théorème 1 et

au Théorème 3. Le rapport  $C$  est donné par

$$C := \frac{\tau_{\max}}{\text{AST}_0}$$

En effet, la loi de commande [93] autorise seulement un retard de 1.16% du  $\text{AST}_0$  qui est petit comparé au rapport obtenu par l'application de la commande Megretski [69]/Lin [52] (4.15%). Le  $\text{AST}_0$  de l'approche de Teel [93] est fortement lié à la dimension de système et plus la dimension du système est grande plus  $\text{AST}_0$  grandit. Le Théorème 3 a permis un rapport de 5.56% qui peuvent être comparé au résultat du Théorème 1 (5.78%) qui a continué à stabiliser le système pour un retard  $\tau < 3$  s.

### 1.6.2 Robustesse vis à vis d'erreurs de modèle

Dans cette étude, deux types d'incertitude de modèle ont été examinés. Le premier consiste à déplacer les pôles du système le long de l'axe réel. Dans le second, les pôles sont déplacés le long de l'axe imaginaire. Davantage d'essais pourraient être réalisés, cependant, comme dans [78], tous les résultats obtenus pour une loi donnée de commande semblent donner la même indication de robustesse.

#### Déplacement des pôles réels

D'abord, les pôles d'une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 sont déplacés le long de l'axe réel tels que le système devient

$$\frac{1}{(s+a)^3} \tag{1.42}$$

pour  $a \in [-0.1, 0.5]$  (voir figure 1.12)

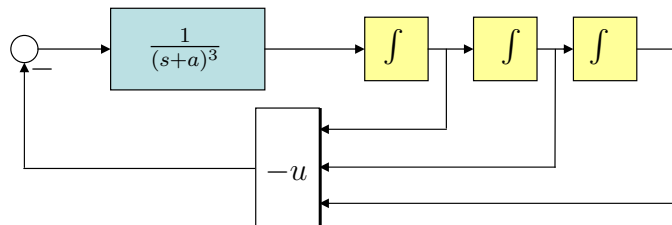


FIG. 1.11 – La commande de la chaîne d'intégrateurs  $\frac{1}{(s+a)^3}$

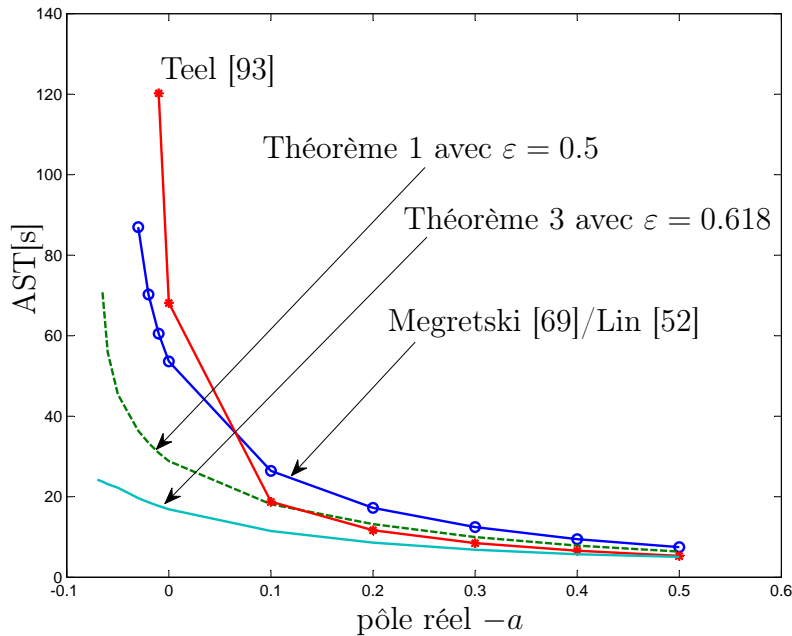


FIG. 1.12 – La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction des pôles réels de  $\frac{1}{(s+a)^3}$  avec  $a \in [-0.1, 0.5]$  pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec  $\varepsilon = 0.5$  et celle du Théorème 3 avec  $\varepsilon = 0.618$

On note que si  $-a$  est plus à gauche sur l'axe imaginaire, le système devient plus stable et l'étude de la robustesse dans ce cas-ci n'ajoutera pas plus d'information sur les performances de chaque commande. Pour des pôles réels positifs, la loi de commande proposée par Teel [93] ne peut pas stabiliser le système au delà de  $a = -0.01$  sur l'axe réel. La loi de commande du Théorème 1 est apparue un peu plus robuste avec une limite de stabilité pour  $a \simeq -0.03$ . La commande du Théorème 3 est plus performante parce que elle continue la stabilisation de la chaîne d'intégrateurs perturbée jusqu'au  $a = -0.065$ . D'une autre part, la loi de commande proposée par [69]/[52] continue à stabiliser le système pour des valeurs de  $a = -0.07$  mais ceci se paye par des phénomènes de "chattering" de la commande qui certains actionneurs peuvent ne pas supporter.



### Déplacement des pôles imaginaires

Nous avons fait varier les pôles de la chaîne d'intégrateurs d'ordre 3 sur l'axe imaginaire. Le système est :

$$\frac{1}{s(s^2 + w^2)} \quad (1.43)$$

avec  $w \in [0, 2.5]$ .

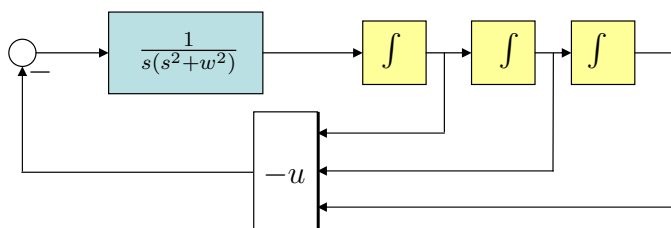


FIG. 1.13 – La commande de la chaîne d'intégrateurs  $\frac{1}{s(s^2+w^2)}$

Les lois de commande non-linéaires de [93], du Théorème 1 et du Théorème 3 ont cessé de stabiliser le système pour  $w > 2$  (voir figure 1.14). Ici encore, la loi de commande petit gain proposée par Megretski [69]/Lin [52] donne le meilleur résultat mais au prix de calculs intensifs.

## 1.7 Stabilisation en temps discret

Dans cette section, nous présentons notre travail concernant la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs en temps discret avec une commande bornée. Comme dans le cas en temps continu, la chaîne d'intégrateurs en temps discret ne peut pas être stabilisée globalement et asymptotiquement par des lois de commande linéaires si  $n$ , la dimension du système, est supérieur à 3. De plus, tous les pôles du système doivent être situés sur ou à l'intérieur du cercle unitaire [102]. Le passage de la commande non-linéaire en temps continu au cas en temps discret n'est pas trivial en raison de la saturation et le contrôleur en temps continu ne peut pas être discrétisé puisqu'il est non-linéaire. Dans la littérature, on peut trouver la version semi-globale en temps discret de la commande petit gain proposée par Lin *et al.* [54]. Également Yang *et al.* [102] ont proposé une commande non-linéaire en temps discret avec des niveaux de saturation fixes qui assure la stabilisation globale. Le but

actuel est de permettre l'adaptation dynamique de ces niveaux de saturation dans le cas de temps discret. Dans la commande proposée, les conditions imposées aux paramètres de la loi de commande sont moins restrictives que dans des approches en temps continue existantes. La loi de commande unifie des approches fixes et dynamiques. Comme dans le cas en temps continu, la loi de commande montre de bonnes performances tout en gardant l'extrême simplicité des calculs et la stabilité globale du système.

### 1.7.1 Problématique

Pour des systèmes de temps discret, deux formes de la chaîne d'intégrateurs sont généralement considérées. Toutes les deux sont traitées dans cette partie de chapitre. Elle est définie par :

$$x^+ = A^d x + B^d u \quad (1.44)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}$ . Les matrices  $(A^d, B^d)$  sont obtenus soit par la discrétisation d'Euler de la chaîne d'intégrateurs en temps continu (1.1) avec une période de échantillonnage unitaire :

- $A_{ij}^d = 1$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si  $i = j$  ou  $i + 1 = j$  et  $A_{ij}^d = 0$  autrement
- $B_i^d = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  et  $B_n^d = 1$ .

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

soit par la discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro de la chaîne d'intégrateurs en temps continu (1.1) avec une certaine période de échantillonnage  $T$  :

- $A_{ij}^d = \frac{T^{j-i}}{(j-i)!}$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si  $i \leq j$  et  $A_{ij}^d = 0$  autrement
- $B_i^d = \frac{T^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2!} & \dots & \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & T & \dots & \frac{T^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & T \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^d = \begin{pmatrix} \frac{T^n}{(n)!} \\ \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ T \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

L'objectif est d'étudier la stabilisation globale du système (1.44) avec une commande bornée par une certaine borne fixé a priori  $\bar{u}$

$$-\bar{u} \leq u \leq \bar{u} \quad (1.47)$$

Comme dans le cas en temps continu, le système est premièrement transformé en représentation d'état appropriée. La transformation proposée actuellement est la généralisation au cas continu puisque la valeur des paramètres  $\theta_i$  n'est pas fixé a priori. Ce changement de coordonnée est récapitulé dans le lemme suivant.

**Lemme 4** *Pour n'importe quelle famille des nombres réels  $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1,\dots,n}$ , soient  $(A_\Theta, B_\Theta)$  définis par :*

$$A_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ 0 & 1 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \theta_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_\Theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Alors pour n'importe quelle paire contrôlable  $(A_\Theta, B_\Theta)$ , il existe un changement de coordonnée  $y = P_\Theta x$  tel que la chaîne d'intégrateurs en temps discret (1.44) devient :

$$y^+ = A_\Theta y + B_\Theta u \quad (1.49)$$

**Preuve de lemme 4 :** Soient  $C^d$  et  $C_\Theta$  les matrices de contrôlabilité des couples  $(A^d, B^d)$  (équations (1.45 ou 1.46)) et  $(A_\Theta, B_\Theta)$  (équation (A.10)).  $C^d$  and  $C_\Theta$  sont connus pour transformer  $(A^d, B^d)$  and  $(A_\Theta, B_\Theta)$  en leur forme canonique qui sont identiques puisque les valeurs propres de  $A^d$  et de  $A_\Theta$  sont identiques. Par conséquent, la matrice de transition  $P_\Theta$  est donnée par :

$$P_\Theta = C_\Theta C^{d-1}$$

■

Notez que  $A_\Theta$  et  $B_\Theta$  sont indépendants de  $\theta_1$ . Cependant, pour faciliter les notations, la famille  $\Theta$  est définie avec  $n$  elements qui jouent tous un rôle dans l'énoncé de la loi de commande.

### 1.7.2 Commande non-linéaire en temps discret avec des niveaux variables de saturation

La commande  $u$  développée dans cette section a une structure plus générale que les approches proposées pour temps continu où les variables qui jouent le rôle du  $\theta_i$

sont souvent limitées à une structure particulière de la forme  $\theta_i = \varepsilon^{n-i+1}$  avec  $\varepsilon$  est un certain paramètre fixe. Également, les niveaux des fonctions de saturation  $M_i$  sont variables comme pour le cas de la chaîne d'intégrateurs en temps continu.

**Théorème 5** Soit  $\Theta := \{\theta_i\}_{i=1,\dots,n}$  une famille de nombres réels telle que :

- Le couple  $(A_\Theta, B_\Theta)$  de l'équation (A.10) est contrôlable
- Pour tous  $k \in \{2, \dots, n\}$ ,  $0 < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < \theta_k < 1$ , soient  $\{M_i\}_{i=1,\dots,n}$  définis par :

$$\begin{cases} M_n &= 1 \\ M_j &= 1 + \alpha_j \frac{\theta_{j+1}}{\theta_j} [M_{j+1} - |\text{sat}_{M_{j+1}}(\frac{y_{j+1}}{\sigma})|], \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.50)$$

où  $\alpha_j \in [0, 1]$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  et  $y = P_\Theta x$  avec  $P_\Theta$  comme au Lemme 4.

Soit le paramètre d'ajustement  $\sigma := \bar{u} / \sum_{i=1}^n \theta_i$ , alors, la loi de commande

$$u = -\sigma \sum_{i=1}^n \theta_i \text{sat}_{M_i} \left( \frac{y_i}{\sigma} \right) \quad (1.51)$$

stabilise globalement asymptotiquement le système 1.44 à l'origine.

Le Théorème 5 est prouvé dans l'Annexe A.3. Les  $\alpha_i$  et les  $\theta_i$  dans l'expression de loi de commande unifient les travaux originaux de Sussmann *et al.* [89] pour le temps continu et Yang *et al.* [102] dans le temps discret avec les approches qui visent à améliorer la convergence (par exemple Kaliora et Astolfi [40]) et la commande des Théorème 1 et Théorème 3. Ceci permet d'accorder le degré d'adaptation en relation avec la dégradation de robustesse permise. En effet, l'amélioration de la convergence est payée pour une moindre robustesse, en particulier concernant les retards des mesures [78].

Dans le cas où  $\alpha_i = 0$ , le niveau de saturation sera indépendant des états du système. Cette approche a été proposée par Sussmann *et al.* [89] pour les systèmes continus avec  $\theta_i$  limités à  $\theta_i < \varepsilon^{n-i+1}$  avec  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . Les  $\alpha_i$  permettent de régler le degré d'adaptation en fonction de la dégradation de robustesse autorisée. Cependant, les propriétés de robustesse restent acceptables pour la plupart des applications en prenant  $\alpha_i = 1$  qui assurent la convergence rapide des états sans présenter une complexité dans le calcul. Notez que la vitesse de convergence est connue pour être l'inconvénient principal des approches basées sur les saturations imbriquées [69]. Comme proposé dans [40], les  $\theta_i$  peuvent être choisis en utilisant un certain procédé d'optimisation contraint par les inégalités  $\{0 < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < \theta_k < 1\}_{k=2,\dots,n}$  afin d'assurer la stabilité.

### 1.7.3 Simulations

Nous présentons sur la figure 1.15 la stabilisation d'une chaîne d'intégrateur d'ordre 3 en temps discret en appliquant la commande du Théorème 5 (avec  $\theta_i = 0.618^{n-i+1}$ ) pour un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$ . La commande est appliquée dans le cadre bloqueur d'ordre zéro. Nous avons utilisé le système continu (1.1) au lieu de sa discrétisation afin de comparer l'approche non-linéaire en temps discret avec les autres approches en temps continu : les commandes saturées non-linéaires proposées dans Teel [93], Sussmann *et al.* [89] et la commande des Théorème 1 et Théorème 3, la commande optimale en temps minimum (qui est considérée comme référence), et l'approche de Megretski [69] améliorées par Lin [52]. La performance obtenue montrée sur figure 1.16 est très près de ce qui peut être obtenu en utilisant l'optimisation avec un coût semblable à une commande linéaire sans contrainte.

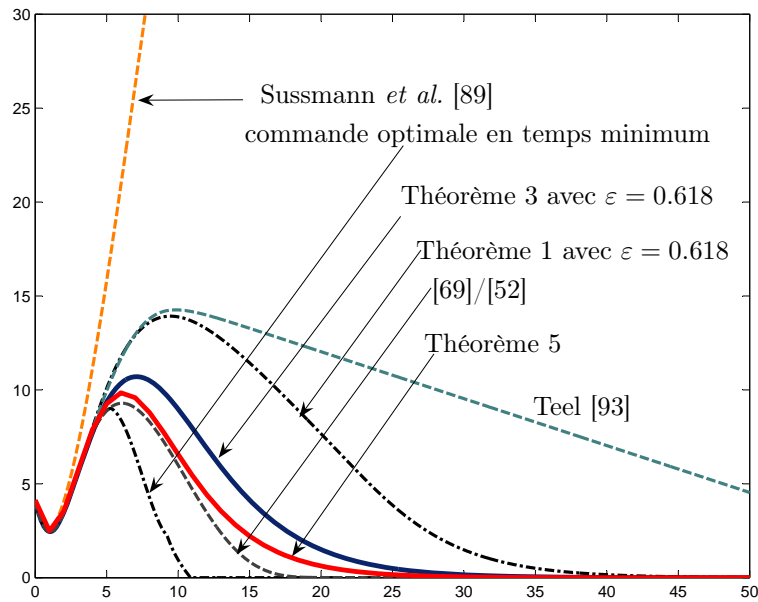


FIG. 1.16 – Comparaison de l'approche proposée par Sussmann *et al.* [89] pour  $\varepsilon = 0.25$ , Teel [93], approche de Megretski [69] amélioré suivant les indications de Lin [52], la commande optimale en temps minimum, et les loi de commande proposées dans Théorème 1 et Théorème 3 pour  $\varepsilon = 0.5, 0.618$  - Evolution de  $\|x(t)\|$  pour un état initial  $x_0 = (2 \ -2 \ 3)^T$

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs sous la commande bornée. Une étude bibliographique sur les approches existantes pour résoudre ce problème a été réalisée. Nous avons comparé la performance et le temps de calcul de ces approches et nous avons vérifié que les approches non-linéaires souffrent de piètres performances mais elles sont également caractérisées par un coût de calcul très faible. Pour cette dernière caractéristique intéressante, nous avons étudié et amélioré l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] qui prend la forme d'une somme de fonctions de saturation pondérées de coefficients de réglage. L'approche proposée opère à travers deux aspects. Le premier aspect consiste à lier les paramètres de réglage à la dimension du système. Le second aspect considère une dépendance entre le niveau de saturation et l'état du système. La contribution réside dans l'amélioration du temps de convergence de l'état avec un facteur supérieur à trois. La robustesse d'une telle approche par rapport à un retard de mesure et des erreurs de modèle a été également étudiée. Notre commande proposée semble être robuste vis à vis de retards de mesure et vis à vis de variations des pôles réels. Les résultats obtenus ont été étendus au cas discret. L'approche développée unifie le travail original de [102] et les avantages de l'approche dans le cas continu. Les commandes, dans les cas continu et discret, présentent de bonnes performances tout en gardant l'extrême simplicité des calculs et la stabilité globale du système. Ces lois de commande générales seront employées dans les chapitres suivants particulièrement dans la stabilisation de la dynamique de rotation du Quadrirotor (attitude) ainsi que pour le contrôle de sa position.

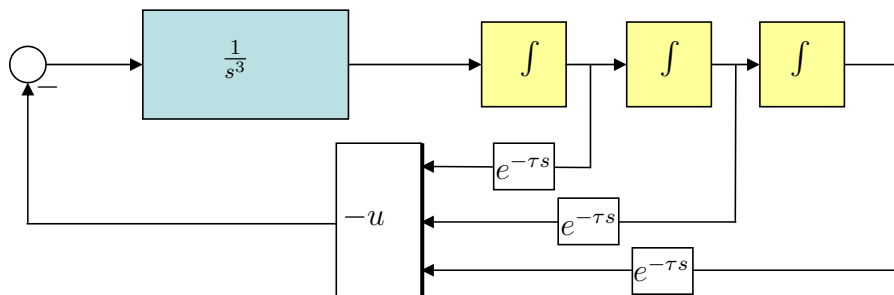


FIG. 1.9 – La commande de la chaîne d'intégrateurs  $\frac{1}{s^3}$  avec un retard de sortie de  $\tau$

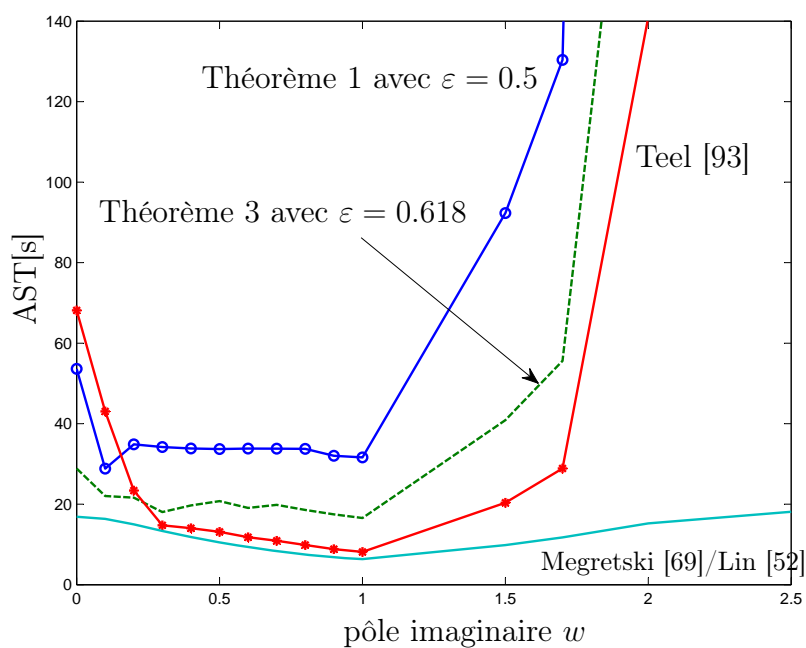


FIG. 1.14 – La dégradation du temps moyen d'établissement en fonction des pôles imaginaires de  $\frac{1}{s(s^2+w^2)}$  avec  $w \in [0, 2.5]$  pour l'approche de Teel [93], l'approche de Megretski [69]/Lin [52], la commande du Théorème 1 avec  $\epsilon = 0.5$  et celle du Théorème 3 avec  $\epsilon = 0.618$

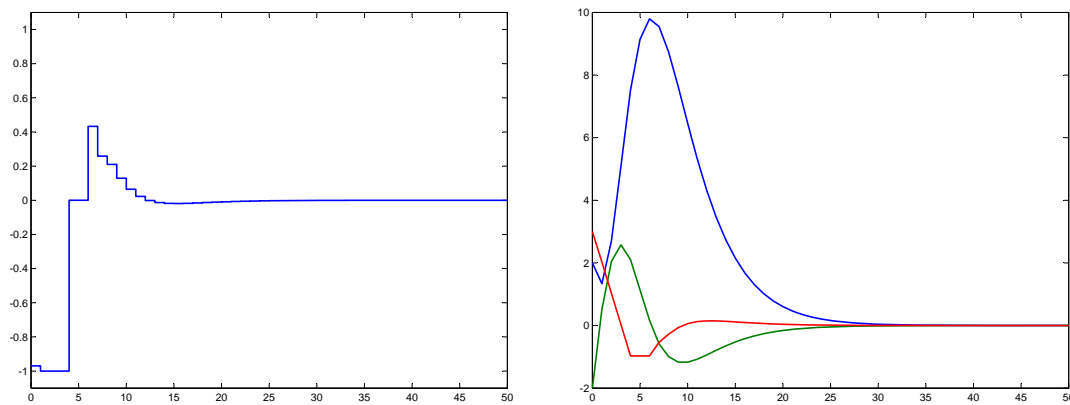


FIG. 1.15 – Stabilisation d'une chaîne d'intégrateur pour un état initial  $x_0 = (2 \quad -2 \quad 3)^T$  en appliquant la commande discrète du Théorème 5 pour  $\theta_i = 0.618^{n-i+1}$





# Chapitre 2

## PVTOL

### 2.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude de la commande des avions à décollage et atterrissage verticaux (en anglais : PVTOL (Planar Vertical Take-Off and Landing aircraft) qui correspond dans notre étude à la projection dans un plan de l'hélicoptère à quatre rotors (quadrirotor). En fait le quadrirotor peut être considéré comme deux PVTOL inter-connectés. Pour clarifier cette idée, nous considérerons le modèle du quadrirotor étudié par plusieurs chercheurs (par exemple Castillo *et al.* [17], Altug *et al.* [6] et Bouabdallah *et al.* [13]). Le modèle simplifié du quadrirotor, développé en détails dans le chapitre suivant, est donné par :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} &= v_{\theta} \\ \ddot{\phi} &= v_{\phi} \\ \ddot{\psi} &= v_{\psi} \\ \ddot{x} &= u(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} &= u(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} &= -1 + u(\cos \phi \cos \theta) \end{cases}$$

avec les quatre commandes : la poussée  $u$  et les couples ( $v_{\psi}$ ,  $v_{\theta}$  et  $v_{\phi}$ ). La position du quadrirotor est représentée par  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le lacet  $\psi$ , le tangage  $\theta$  et le roulis  $\phi$  décrivent l'orientation du quadrirotor. La projection du quadrirotor dans un plan implique que le tangage  $\theta$  et le lacet  $\psi$  sont déjà stabilisés ( $\theta = \psi = 0$ ). On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} &= v_{\phi} \\ \ddot{y} &= -u \sin \phi \\ \ddot{z} &= -1 + u \cos \phi \end{cases}$$

Ce système représente dans la littérature la dynamique des avions à décollage et atterrissage verticaux. La seule différence par rapport au modèle original est un

paramètre de couplage  $\epsilon$  entre la dynamique de rotation et la dynamique de translation. Le modèle dynamique complet du PVTOL et ses caractéristiques sont présentés dans section 2.2. Le modèle du PVTOL a été utilisé au niveau pratique pour décrire

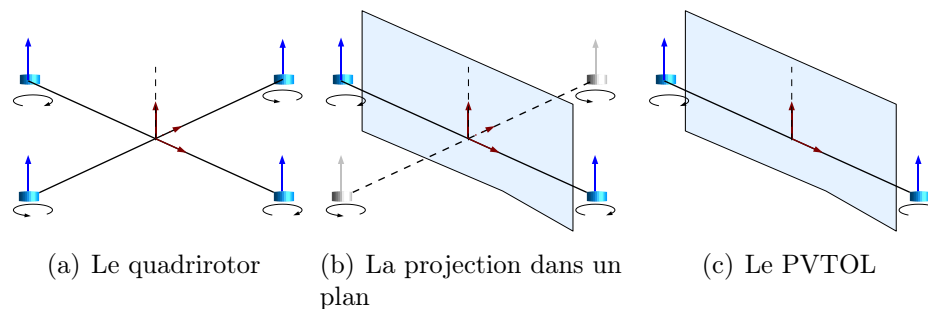


FIG. 2.1 – Relation entre le quadrirotor et le PVTOL

la projection dans un plan des avions à décollage et atterrissage court (en anglais : V/STOL : Vertical and Short Takeoff and Landing aircrafts). Le V/STOL est un avion muni de dispositifs le rendant capable d'utiliser des pistes d'envol et d'atterrissage de longueur très limitée [35]. En 1954, Lockheed a examiné le XVW-1, un avion de V/STOL qui peut se lever directement vers le haut pendant le décollage. Vers la fin des années 50 et du début des années 60, plusieurs V/STOL ont été développés. Dassault a développé deux versions du mirage III-V. Récemment, la production du V-22 Osprey a été formellement approuvée par le Pentagone. Cet avion, construit par Bell et Boeing, est un avion militaire à missions multiples avec des possibilités de décollage et d'atterrissage verticaux. Un exemple de PVTOL est l'AV-8B Harrier construits par la compagnie de Mcdonnell Douglas, montrée sur la figure 2.2.

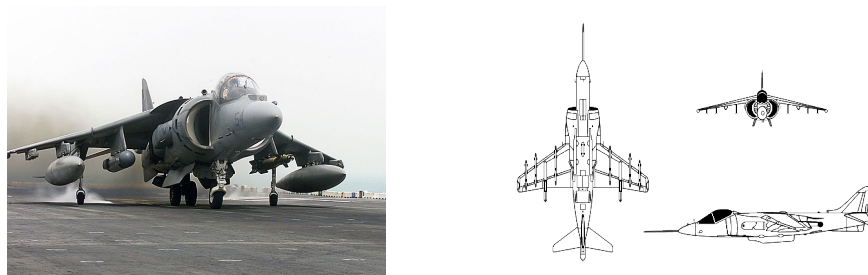


FIG. 2.2 – Exemple du PVTOL : AV-8B Harrier

Ce chapitre est organisé en deux parties : 1) Le PVTOL sans gravité puis 2) Le PVTOL avec gravité. Dans la première partie (section 2.3), la dynamique du PVTOL est transformée en un système chaîné à inertie correspondant aux objets volants dans un milieu sans gravité. La stabilisation du PVTOL (sans gravité) revient à stabiliser un système chaîné. La commande proposée est basée sur le principe de l'horizon glissant et conçue pour être appliquée en temps réel. Dans la deuxième partie, nous présentons dans la section 2.4 l'état de l'art sur les différentes commandes pour PVTOL avec gravité. Ensuite, nous appliquons en la section 2.5 l'analyse de Lyapunov pour construire une commande bornée pour la stabilisation globale du PVTOL avec gravité.

## 2.2 Modèle dynamique du PVTOL

Un modèle complet du PVTOL doit prendre en compte plusieurs aspects comme les effets aéroélastiques, contrôle des surfaces des actionneurs, la dynamique interne du moteur, et la flexibilité des ailes du PVTOL. En conséquence, la conception de la commande est difficile. Dans la suite nous présentons le modèle initialement développé par Hauser *et al.* [35] et également par Fliess *et al.* [24]. Ce modèle a un nombre réduit d'états et d'entrées, mais suffisamment pour représenter les caractéristiques principales d'un véritable avion. Nous avons deux repères, le repère fixe  $(\vec{i}, \vec{k})$  et le repère mobile du corps du PVTOL  $(\vec{i}_b, \vec{k}_b)$ . L'angle  $\theta$  est l'angle entre les deux repères. Les forces agissant sur le système sont :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= (\cos \alpha \vec{k}_b + \sin \alpha \vec{i}_b) F_1 \\ \vec{F}_2 &= (\cos \alpha \vec{k}_b - \sin \alpha \vec{i}_b) F_2 \\ m\vec{g} &= -mg\vec{k}\end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un angle fixe. Le poids  $m\vec{g}$  est appliqué sur le centre de masse  $C$  du PVTOL. Les poussées  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont appliquées sur les points  $M_1$  et  $M_2$

$$\begin{aligned}C\vec{M}_1 &= l\vec{i}_b - h\vec{k}_b \\ C\vec{M}_2 &= -l\vec{i}_b - h\vec{k}_b\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont écrites par rapport au centre de masse  $C$  :

$$\begin{aligned}m\dot{\vec{V}}_C &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} \\ \dot{\vec{\sigma}}_C &= C\vec{M}_1 \wedge \vec{F}_1 + C\vec{M}_2 \wedge \vec{F}_2\end{aligned}$$

où  $\vec{V}_C$  est la vitesse du point  $C$  et  $\vec{\sigma}_C$  est le mouvement angulaire autour  $C$ .

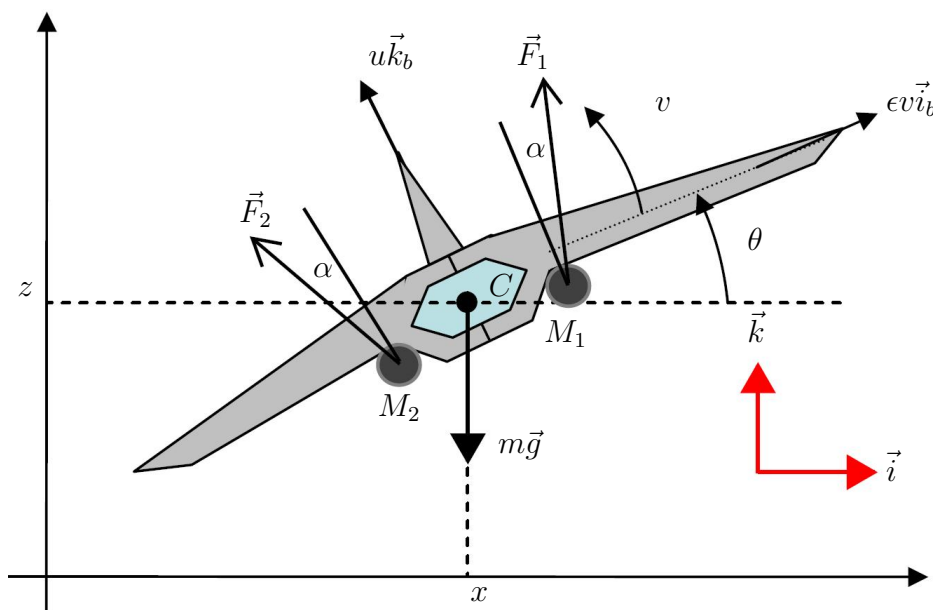


FIG. 2.3 – Le PVTOL dans le plan

La projection de ces équations sur les axes fixes donne :

$$m\ddot{x}_C = (F_1 + F_2) \cos \alpha \sin \theta + (F_1 - F_2) \sin \alpha \cos \theta \quad (2.1)$$

$$m\ddot{z}_C = (F_1 + F_2) \cos \alpha \cos \theta + (F_2 - F_1) \sin \alpha \sin \theta - mg \quad (2.2)$$

$$J\ddot{\theta} = (F_2 - F_1)(l \cos \alpha + h \sin \alpha) \quad (2.3)$$

En prenant  $l = \frac{M_1 M_2}{2}$  et  $h$  la distance entre le point  $C$  et la droite  $M_1 M_2$  avec

$$\begin{aligned} \epsilon &= \left( \frac{\sin \alpha}{l \cos \alpha + h \sin \alpha} \right) \frac{J}{mg} \\ u &= \frac{\cos \alpha}{mg} (F_1 + F_2) \\ v &= \frac{l \cos \alpha + h \sin \alpha}{J} (F_2 - F_1) \\ x &= \frac{x_C}{g} \\ z &= \frac{z_C}{g} \end{aligned}$$

on obtient le modèle simplifié du PVTOL :

$$\ddot{x} = -u \sin \theta + \epsilon v \cos \theta \quad (2.4)$$

$$\ddot{z} = u \cos \theta + \epsilon v \sin \theta - 1 \quad (2.5)$$

$$\ddot{\theta} = v \quad (2.6)$$

Dans le cas de vrai PVTOL, le paramètre  $\epsilon$  est sans dimension et en général négligé parce que l'angle  $\alpha$  est petit par construction. Ce coefficient caractérise le couplage entre le couple et l'accélération latérale de l'avion.  $x$  et  $z$  sont des valeurs normalisées et représentent les distances divisées par la gravité  $g$ , par conséquent une distance normalisée de 1 représente une distance réelle d'environ 10 mètres. Les deux commandes  $u$  et  $v$  représentent respectivement les quantités normalisées liées à la poussée verticale dirigée vers le haut de l'avion et le couple ou l'accélération angulaire. Selon [35], le paramètre de couplage  $\epsilon = 0.01$  est typique pendant le décollage, toutefois il n'est pas facile de le mesurer exactement pour beaucoup d'avions.

### 2.2.1 Caractéristiques du PVTOL

Le système du PVTOL représenté par les equations (2.4 -2.6) a attiré beaucoup d'attention et est devenu un cas test pour plusieurs méthodologies de commande. Le PVTOL est un système sous-actionné puisque le nombre d'entrées de commande (2) est plus petit que le nombre de degrés de liberté de l'avion (3).

Le PVTOL appartient à la classe des systèmes non-linéaires dits à déphasage non-minimal, c'est à dire à dynamique des zéros instable. La dynamique des zéros est la dynamique interne du système non-linéaire avec la contrainte que toutes les sorties et leurs dérivés soient toujours nulles. La linéarisation entrée/sortie du système (2.4-2.6) avec le retour d'états suivant :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta}{\epsilon} & \frac{\sin \theta}{\epsilon} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.7)$$

nous donne :

$$\ddot{x} = v_1 \quad (2.8)$$

$$\ddot{z} = v_2 \quad (2.9)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\epsilon} (\sin \theta + \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) \quad (2.10)$$

Pour  $x = 0$  et  $z = 0$ , la dynamique des zéros du PVTOL prend la forme d'une équation d'un pendule amorti :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\epsilon} \sin \theta \quad (2.11)$$

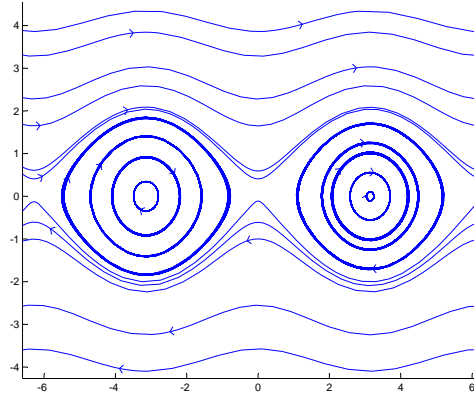


FIG. 2.4 – Portrait de phase de la dynamique interne du PVTOL pour  $\epsilon = 1$

Si la méthode d'inversion est employée, elle mène à un système entrée-sortie linéaire et découplé. En revanche, nous perdons l'observabilité de la dynamique de rotation instable. Figure 2.4 montre le portrait de phase  $(\dot{\theta}, \theta)$  d'un pendule amorti (2.11) avec  $\epsilon = 1$ . Le portrait de phase pour  $\epsilon < 0$  est simplement la translation de  $\pi$  de la figure 2.4. Ainsi, pour  $\epsilon > 0$ , le point d'équilibre  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  est instable et le point d'équilibre  $(\pi, 0)$  est stable (pas asymptotiquement stable) et entouré par une famille d'orbites périodiques avec des périodes commençant par  $2\pi\sqrt{\epsilon}$  à  $\infty$ . En dehors de ces orbites périodiques se trouve une famille de trajectoires non-bornées. Ainsi, selon les conditions initiales, le PVTOL soit secouera d'un côté à l'autre ou tournera sans interruption dans une direction (sauf aux équilibres isolés)[35].

Le PVTOL est également un système plat. Un système non-linéaire est plat s'il existe un vecteur de fonctions indépendantes appelées les sorties plates, de la même dimension que le vecteur des entrées de commande, qui sont des fonctions différentielles de l'état du système. Ces sorties plates sont des fonctions des variables d'état et également d'un nombre fini de leurs dérivés. En plus, chaque variables du système c.-à-d., les états, les sorties originales et les entrées peuvent alternativement être exprimée en tant que fonction différentielle des sorties plates [86]. Dans le cas du PVTOL, les sorties plates représentent un ensemble de points connus par les mécaniciens comme le centre de l'oscillation de Huygens et prennent la forme suivante :

$$\chi = \left( x - \frac{\epsilon}{\lambda} \sin \theta, z + \frac{\epsilon}{\lambda} \cos \theta \right) \quad (2.12)$$

où  $\lambda$  est un paramètre. Comme résultat, le système entrée/sortie n'a pas de dynamique de zéros. Les états et les entrées du systèmes sont exprimés comme des

fonctions de  $\chi$  et de ses dérivées :

$$(\chi_1 - x)^2 + (\chi_2 - z)^2 = \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^2 \quad (2.13)$$

$$\ddot{\chi}_1(\chi_2 - z) + (\ddot{\chi}_2 + 1)(\chi_1 - x) = 0 \quad (2.14)$$

$$\ddot{\chi}_1 \cos \theta - (\ddot{\chi}_2 + 1) \sin \theta = 0 \quad (2.15)$$

cette propriété de platitude est employée dans plusieurs approches pour la poursuite de trajectoire d'un PVTOL ([65], [86]).

Olfati-Saber [73] a proposé un changement de coordonnées rendant le modèle indépendant de  $\epsilon$  mais qui nécessite de connaître ce paramètre :

$$\bar{x} = x - \epsilon \sin(\theta) \quad (2.16)$$

$$\bar{z} = z + \epsilon(\cos(\theta) - 1) \quad (2.17)$$

aboutissant à la dynamique suivante exprimée dans les nouvelles coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y}, \theta)$  :

$$\ddot{\bar{x}} = -\sin(\theta)\bar{u} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\bar{z}} = \cos(\theta)\bar{u} - 1 \quad (2.19)$$

$$\ddot{\theta} = v \quad (2.20)$$

avec  $\bar{u} = u - \epsilon\dot{\theta}^2$

La représentation obtenue est identique à celle d'origine avec  $\epsilon = 0$ . En revanche, il devient plus difficile de tenir compte des contraintes sur les entrées de commande.

## 2.2.2 Le PVTOL sans gravité et les systèmes chaînés avec inertie

Aneke *et al.* [8] ont pris le PVTOL comme un exemple dans leur étude pour la stabilisation des systèmes chaînés. Ils ont présenté des changements de coordonnées et de commande pour transformer le PVTOL en une forme chaînée de second ordre. Dans cette partie, nous présentons ce travail. En fait, le PVTOL peut être vu comme un cas spécial d'un système non-holônôme du second degré dans le sens que le système est sujet à une contrainte non-intégrable d'accélération.

Rappelons le modèle simplifié du PVTOL (équations (2.4-2.6)) :

$$\ddot{x} = -u \sin \theta + \epsilon v \cos \theta$$

$$\ddot{z} = u \cos \theta + \epsilon v \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = v$$

Si le système n'est pas influencé par la gravité  $-1$ , l'approximation linéaire autour le point d'équilibre est incontrôlable et le système du PVTOL ne peut pas être stabilisé



par un retour d'état statique  $C^0$ . Les changements de coordonnées et de commande proposés dans [8] pour transformer le PVTOL sans la gravité en une forme chaînée de second ordre sont développés dans la suite.

Premièrement, la dynamique de translation du PVTOL  $(x, z)$  est linéarisé autour du point d'équilibre  $q_e = [x_e, z_e, \theta_e]$  par l'application de la commande :

$$\begin{aligned} u &= -u_x \sin \theta + u_z \cos \theta \\ v &= \frac{1}{\epsilon}(u_x \cos \theta + u_z \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le système du PVTOL peut alors être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u_x \\ \ddot{z} &= u_z \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{\epsilon}(u_x \cos \theta + u_z \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deuxièmement, un nouveau changement de variables d'état et de commande est appliqué :

$$\begin{aligned} \zeta_x &= z + \epsilon(\cos \theta - \sin \theta_e) \\ \zeta_z &= -x + \epsilon(\sin \theta - \cos \theta_e) \\ u_x &= -u \sin \theta + \epsilon v \cos \theta - \epsilon \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ u_z &= -u \cos \theta + \epsilon v \sin \theta - \epsilon \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

le système du PVTOL devient simplement :

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_x &= u \cos \theta \\ \ddot{\zeta}_z &= u \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= v \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec  $(\zeta_x, \zeta_z)$  comme sorties plates du système.

Ensuite, pour  $|\theta - \theta_e| < \frac{\pi}{2}$ , considérons le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \theta_e(\zeta_x - z_e) + \sin \theta_e(\zeta_z + x_e) \\ \xi_2 &= \tan(\theta - \theta_e) \\ \xi_3 &= -\sin \theta_e(\zeta_x - z_e) + \cos \theta_e(\zeta_z + x_e) \end{aligned} \quad (2.25)$$

et la commande :

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_1}{\cos(\theta - \theta_e)} \\ v &= \cos(\theta - \theta_e)^2 u_2 - 2 \tan(\theta - \theta_e) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalement dans le nouveau repère, on obtient un système sous la forme chaînée de second ordre suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= u_1 \\ \ddot{\xi}_2 &= u_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 u_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ce système représente une classe spécifique de systèmes non-holônomes de second ordre. Cette classe représente les systèmes qui ont des contraintes non-intégrables sur les accélérations. Plusieurs systèmes mécaniques et robotiques peuvent être inclus sous cette classe, nous pouvons citer

- le robot de type unicycle, voiture, chariot avec remorques
- le sous-marin sous-actionné ([19],[99]) et vaisseau de surface ([74], [79])
- les manipulateurs PPR [37], et les manipulateurs RRR [103]
- le PVTOL

Comme on a vu pour le cas du PVTOL, ces systèmes peuvent être transformés par des changements de coordonnées et de commande en une forme chaînée de second ordre décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 &= u \\ \ddot{x}_1 &= v \\ \ddot{x}_i &= x_{i-1}u \quad i \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad (2.28)$$

$x_{0,\dots,m}$  représentent les états et  $u, v$  sont les entrées des commandes.

Dans la suite, nous étudions dans la section 2.3 la commande bornée du PVTOL sans gravité représenté par le système (2.28). Ensuite dans section 2.4, nous présenterons les résultats pour la stabilisation du PVTOL avec gravité (équations (2.4)-(2.6)) en appliquant une commande bornée.

## 2.3 Commande du PVTOL sans gravité

Dans cette partie de chapitre nous étudions le développement de lois de commande pour système (2.28). La stabilisation de ce système n'est pas aisée parce qu'il ne satisfait pas les conditions de Brockett [16]. Ces conditions sont nécessaires pour l'existence de commandes par retour d'état statique  $C^0$  et autonomes. De plus, il diffère des systèmes en forme chaînée du premier ordre initialement proposés par [71] parce qu'il contient une composante de dérive. Pour ces raisons, le système (2.28) a attiré beaucoup d'attention au cours de ces dernières années dans la littérature de la commande non-linéaire.

Dans [46], les auteurs ont présenté une commande discontinue pour stabiliser exponentiellement l'origine d'une version généralisée du système (2.28). Système (2.28) était également le sujet d'étude dans [95] où la stabilité exponentielle est garantie en appliquant une loi de commande continue variable dans le temps. Yamada *et al.* [101] ont étudié la stabilisation de (2.28) par un retour d'état et de sortie basés sur la commande échantillonnée (sampled data control).

Dans le cas où  $i = 2$ , système (2.28) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = u \\ \ddot{x}_1 = v \\ \ddot{x}_2 = x_1 u \end{cases} \quad (2.29)$$

Ce système particulier a été étudié par plusieurs auteurs. Ge *et al.* [26] ont formulé les conditions pour que système (2.29) soit linéarisable par une transformation d'état et de commande discontinue. Dans [8], la stabilité de type Lyapunov et la convergence exponentielle à l'origine pour le système (2.29) ont été assurées par une loi de commande homogène, continue et variable dans le temps. Récemment, Morin et Samson [70] ont étudié la stabilisation pratique d'une classe des systèmes sous actionnés qui inclut les systèmes chaînés par l'application d'une approche basée sur la fonction transverse tandis que Lizarraga et Sosa [55] ont appliqué l'approche de la fonction transverse verticale comme prolongation de l'approche de la fonction transverse pour les systèmes de second ordre.

Malgré la littérature riche sur le sujet, le problème de la stabilisation du système (2.28) en respectant les contraintes de saturation sur les entrées de commande n'est pas explicitement traité. Ce problème est seulement traité pour les systèmes chaînés de premier ordre par l'approche discontinue proposée dans [58] en surveillant les paramètres de commande et par l'approche proposée par Alamir et Marchand [5] en utilisant la commande prédictive.

Le travail présenté dans ce chapitre peut être considéré comme généralisation de ce dernier travail pour le cas des systèmes chaînés de second ordre avec des contraintes de saturation définies comme suit :

$$-u^{max} \leq u \leq u^{max} \quad (2.30)$$

$$-v^{max} \leq v \leq v^{max} \quad (2.31)$$

La commande proposée est basée, comme le travail de [5], sur le principe de la commande prédictive, parfois appelée la commande à horizon glissant "Receding Horizon Control (RHC)". Une partie de ce travail a été présentée dans [33].

Cette partie de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.3.1, le principe général de la commande prédictive est présenté. Cette commande sera appliquée au cas du système chaîné (2.28). La formulation de la commande optimale en boucle ouverte est présentée dans section 2.3.2. Un algorithme rapide pour choisir les solutions sous-optimales est développée dans section 2.3.3. Le retour d'état avec les résultats de stabilité sont traités respectivement dans sections 2.3.4 et l'annexe B.4. Cette partie finit avec quelques simulations numériques pour le cas du système 2.29 en montrant l'efficacité de la commande proposée même pour les cas où des conditions initiales classiquement classifiées comme singulières.

### 2.3.1 La commande prédictive

La commande prédictive est reconnue comme l'une des approches les plus puissantes et les plus générales pour aborder des processus non-linéaires où des contraintes et la performance doivent être considérées. Cette technique est très utilisée dans l'industrie et en particulier dans l'industrie pétrochimique. La philosophie de la commande prédictive peut être énoncée d'une façon informelle comme suit : le modèle du système (linéaire ou non-linéaire) est utilisé pour résoudre en-ligne, à chaque pas d'échantillonnage, un problème de commande en boucle ouverte sur un horizon fini de prédiction. La meilleure décision au sens d'un certain coût tout en respectant les contraintes sur les états et les commandes est appliquée durant la période d'échantillonnage  $[k, k + 1[$  et le processus est répété pour les pas d'échantillonnage suivants.

Afin de définir formellement la commande prédictive, un certain nombre de définitions seront présentées dans la section suivante.

#### Définitions

Dans notre cas, le modèle utilisé est non-linéaire échantillonné décrit par l'équation aux différences suivante :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (2.32)$$

où  $x \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur d'état du système,  $u \in \mathbb{R}^M$  est le vecteur des entrées de commande, et  $f$  est une application continue.  $k$  est associé à la  $k$ ième période d'échantillonnage constante  $\delta$ . L'horizon de prédiction de longueur  $n$  est représenté par  $\tilde{t}$

$$\tilde{t} = (0 \quad \delta \quad \dots \quad n\delta) \quad (2.33)$$

la suite correspondante des commandes, constantes par morceaux, est donnée par (dans le cas où l'horizon de commande est égal à l'horizon de prédiction)

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-1}) \quad (2.34)$$

Le profil de commande candidat pour la solution du problème de la commande optimale en boucle ouverte est désigné par  $U(\cdot, \tilde{t}, \tilde{u})$  et défini comme suit

$$\forall t \in [\tilde{t}_{j-1}, \tilde{t}_j[ \quad U(t, \tilde{t}, \tilde{u}) = \tilde{u}_j \quad (2.35)$$

$U(\cdot, \tilde{t}, \tilde{u})$  est admissible si  $\forall k \geq 0$  la condition suivante est vérifiée

$$\tilde{u}_k \in \mathbb{U}_{ad} \subset \mathbb{R}^m \quad (2.36)$$

où  $\mathbb{U}_{ad}$ , l'ensemble des entrées admissibles, est compact, convexe et contient l'origine. La solution de l'équation (2.32) partant de l'état initial  $x_0$  à l'instant  $i$  et sous la commande  $U$  est notée par  $X(i; x_0, U)$ .

### La fonction de coût

La fonction de coût varie selon la stratégie de commande demandé. Dans la littérature, la fonction de coût lorsque le système se trouve à l'état  $x_k$  est définie de la façon suivante

$$V_n(x_k, U_k) = F(x_{k+n}) + \sum_{i=k}^{k+n-1} L(x_i, u_i) \quad (2.37)$$

où

- $n$  est l'horizon de prédiction.
- $U_k$  est le profil de commande donné par

$$U_k = (u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+n-1}) \quad (2.38)$$

- $x_i$  représente l'état du système à l'instant  $i$  lorsque le profil de commande  $U_k$  est appliqué, à savoir

$$x_i = X(i; x_k, U); \quad i \in \{k, \dots, k+n\} \quad (2.39)$$

- $F(x_{k+n})$  représente une pénalisation sur l'état final  $x_{k+n}$ . Des fois, une contrainte finale explicite est utilisée

$$x_{k+n} \in X_f \subset \mathbb{X} \quad (2.40)$$

$X_f$  où est un sous-ensemble fermé et convexe de  $\mathbb{X}$ . Cet ensemble  $\mathbb{X}$  traduit divers types de contraintes, à savoir des contraintes de sécurité, des contraintes de respect des spécifications ou tout simplement de validité du modèle.

- $\sum_{i=k}^{k+n-1} L(x_i, u_i)$  représente un terme intégral sur la trajectoire.

Dans la littérature, il existe plusieurs formulations dans lesquelles la fonction de coût prend la forme (2.37). Chaque formulation est caractérisée par le choix les différents paramètres du problème d'optimisation :

1. la longueur de l'horizon de prédiction  $n$
2. la pondération finale  $F(\cdot)$
3. l'ensemble final  $X_f$
4. la pondération  $L(\cdot, \cdot)$

On peut citer quelques formulations classiques avec l'horizon de prédiction fixe

- formulation avec contrainte finale d'égalité
- formulation avec ensemble terminal et sans pondération finale
- formulation avec ensemble terminal et pondération finale

Pour plus de détails sur chacune de ces formulations avec les conditions suffisantes de stabilité de la boucle fermée, le lecteur est invité à consulter l'excellent travail de [66] et les références qui s'y trouvent.

Dans notre travail, nous choisissons une formulation différente avec un horizon de prédiction variable. Dans cette formulation, connue comme la formulation contractive, la variation de l'horizon et la suite des commandes forment la variable de décision. Notre objectif est de concevoir une commande qui stabilise le système avec une philosophie de type temps minimum.

### Définition de la commande prédictive

Comme nous l'avons énoncé avant, dans la commande prédictive un problème de commande optimale et boucle ouverte doit être résolu. Ce problème peut alors être défini pour le système à l'état  $x_k$  à l'instant  $k$

$$P_n(x_k) : \min_U \{ V_n(x_k, U) \mid U \in U_n(x_k) \} \quad (2.41)$$

avec  $U_n(x_k)$  est l'ensemble des profils de commande admissibles est donné par

$$U_n(x_k) = \{U \in \mathbb{U}_{ad} \mid X(k+n, x_k) \in X_f \text{ et } \forall i \in \{k, \dots, k+n\} \quad X(i, x_k) \in \mathbb{X}\} \quad (2.42)$$

La suite de commande optimale notée par  $U_n^0(x_k)$  est la solution du problème d'optimisation  $P_n(x_k)$

$$U_n^0(x_k) = (u^0(k, x_k) \quad u^0(k+1, x_k) \dots \quad u^0(k+n-1, x_k)) \quad (2.43)$$

Dans notre cas, la fonction de coût  $V_n$  est l'horizon de prédiction. L'ensemble final  $X_f$  est  $x_d$  l'état final désiré. De plus, il n'y a pas de contrainte sur les états du système  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ . Notre problème d'optimisation  $P_n(x_k)$  en boucle ouverte est ainsi :

$$P_n(x_k) : \min_{\tilde{t}, \tilde{u}} \{n\delta \mid U(\cdot, \tilde{t}, \tilde{u}) \in \mathbb{U}_{ad} \text{ et } X(n\delta; x_k; U(\cdot, \tilde{t}, \tilde{u})) = x_d\} \quad (2.44)$$

Il est tout à fait difficile de trouver la solution exacte de (2.44) en temps réel. Par conséquent, une solution sous-optimale rapide peut être développée afin que la stratégie globale de commande à horizon fini soit réalisable en temps réel. La solution sous-optimale rapide est calculée en deux étapes :

Étape 1 : D'abord, une solution admissible est calculée, à savoir, une solution qui respecte la contrainte finale en (2.44).

Étape 2 : Puis, la solution admissible est améliorée par rapport la fonction de coût en (2.44), à savoir, le temps  $n\delta$ .

La faisabilité de la contrainte finale en (2.44) conduit à des horizons de prédiction très longs dans nombreuses formulations de commande prédictive. En conséquence,

la dimension de la variable de décision peut devenir très grande. Une solution est d'utiliser la paramétrisation des profils de commande [4]. Ceci signifie que la commande  $U_n^0(x_k)$  solution du problème  $P(x_k)$  peut être employé comme une suite candidate pour le problème  $P(x_{k+1})$ .

Le problème de la commande prédictive consiste à appliquer pendant la période d'échantillonnage  $[k, k + 1]$  la première commande de la suite optimale,  $u^0(k, x_k)$ , ce qui définit clairement un retour d'état

$$\kappa(x_k) = u^0(k, x_k) \quad (2.45)$$

et la procédure est répétée pour  $x_{k+1}$ ,  $x_{k+2}$ , etc.

### 2.3.2 Commande optimale des systèmes chaînés en boucle ouverte

Les principes généraux de la commande prédictive présentés dans la section précédente seront appliqués pour le cas des systèmes chaînés (2.28).

Le système peut être divisé en deux sous-systèmes. Le premier sous-système  $\Sigma_1$  est linéaire et il prend la forme de double intégrateur avec  $u$  comme commande et

$$\eta = (\eta^1, \eta^2) = (x_0, \dot{x}_0)^T$$

comme vecteur d'état.

Le deuxième sous-système  $\Sigma_2$  est linéaire variable dans le temps - si  $u$  est pris comme fonction de temps - avec  $v$  comme commande et

$$z = (z^1, \dots, z^m) = (x_m, \dot{x}_m, \dots, x_1, \dot{x}_1)^T$$

comme vecteur d'état.

Pour le système (2.29) par exemple dans le cas  $m = 2$ , nous avons les deux sous-systèmes suivants :

$$\Sigma_1 : \dot{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.46)$$

$$\Sigma_2 : \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (2.47)$$

Dans ce cas, la suite de commandes continues par morceaux (2.34) est définie par

$$W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \right) \quad (2.48)$$

pour l'horizon de temps pour la période d'échantillonnage constante  $\delta$  :

$$\tilde{t} = (0 \quad \delta \quad \dots \quad n\delta) \quad (2.49)$$

Dans la suite, une paramétrisation claire de (2.48) est présentée.  $y = (\eta, z)^T$  représente l'état du système.  $u_i$  et  $v_i$  représentent les entrées de commande à appliquer au système au temps  $i$  pour diriger l'état du système de  $y_i$  à  $y_{i+1}$ . L'objectif final de cette commande est d'orienter le système (2.28) vers l'état désiré final  $y_d = (\eta_d, z_d)^T$  à partir de l'état initial  $y_0 = (\eta_0, z_0)^T$ .

### Le profil de $U$

Le sous-système  $\Sigma_1$  est exprimé dans l'équation suivante :

$$\Sigma_1 : \dot{\eta} = A_{\Sigma_1} \eta + B_{\Sigma_1} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.50)$$

Nous proposons que  $u_i$  prenne la forme suivante linéaire en  $i = 0, \dots, n-1$

$$u_i = \alpha i + \beta = [i \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$\alpha$  et  $\beta$  de (2.51) sont des fonctions de l'état initial  $\eta_0$  et l'état final  $\eta_n$ . Une méthode pour trouver ces paramètres est de discrétiser  $\Sigma_1$  tout au long de l'horizon de prédiction à partir de l'état initial  $\eta_0$ . Les matrices d'état  $A_1$  et de commande  $B_1$  de  $\Sigma_1$  obtenus par la discrétisation prennent la forme suivante en fonction de la période d'échantillonnage  $\delta$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{2} \\ \delta \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

En appliquant la commande correspondante  $u_i$ ,  $\Sigma_1$  atteindra l'état final  $\eta_n$  à partir de  $\eta_0$  :

$$\eta_n = A_1^n \eta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (A_1)^{n-1-i} B_1 u_i \quad (2.53)$$

En utilisant la définition de  $u_i$  (2.51), l'état final après  $n$  périodes d'échantillonnage (2.53) s'écrit :

$$\eta_n = A_1^n \eta_0 + \Gamma_n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

avec la matrice carrée

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (A_1)^{n-1-i} B_1 [i \quad 1] \quad (2.55)$$

Dans la section suivante, nous présentons les conditions nécessaires pour l'existence de la commande  $U$ .



### Existence de $U$

Pour réaliser notre objectif pour orienter le sous-système  $\Sigma_1$  de l'état initial  $\eta_0$  vers un état final  $\eta_n$  égal à l'état désiré  $\eta_d$  en  $n$  périodes d'échantillonnage,  $\Gamma_n$  doit être de rang plein et ceci est étudié dans le lemme suivant.

**Lemme 6**  $\forall n > 1$ , la matrice carrée  $\Gamma_n$  est de rang plein.

L'application de ce lemme, prouvé dans l'Annexe B.1, nous donne les éléments  $u_i$  (équation (2.51)) de la commande continue par morceaux  $U$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  définis par :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \Gamma_n^{-1}[\eta_d - A_1^n \eta_0] \quad (2.56)$$

Cette commande amène le sous-système  $\Sigma_1$  en  $n$  périodes d'échantillonnage de l'état initial  $\eta_0$  vers un état final égal à l'état désiré  $\eta_n = \eta_d$ .

### Le profil de $V$

Le deuxième sous-système peut être écrit comme suit :

$$\Sigma_2 : \dot{z} = A_{\Sigma_2} z + B_{\Sigma_2} v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & u & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & u \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (2.57)$$

avec  $A_{\Sigma_2} \in R^{2m \times 2m}$  et  $B_{\Sigma_2} \in R^{2m \times 1}$ .

On suit la même démarche pour établir la commande  $V$  (sans forme spéciale). Par discrétisation, les états discrets de  $\Sigma_2$  sont à chaque période d'échantillonnage  $\delta$  :

$$\begin{cases} z_1 = A_{2_0} z_0 + B_{2_0} v_0 \\ z_2 = A_{2_1} z_1 + B_{2_1} v_1 \\ \vdots \\ z_n = A_{2_{n-1}} z_{n-1} + B_{2_{n-1}} v_{n-1} \end{cases} \quad (2.58)$$

$A_{2_i}$  et  $B_{2_i}$  sont issues de la discrétisation de  $A_{\Sigma_2}$  et  $B_{\Sigma_2}$  avec  $u = u_i$ .

$$A_{2_i} = \begin{bmatrix} 1 & u_i \delta & u_i^2 \frac{\delta^2}{2!} & \dots & u_i^{2m-3} \frac{\delta^{2m-3}}{(2m-3)!} & u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-2}}{(2m-2)!} & u_i^{2m-1} \frac{\delta^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ 0 & 1 & u_i \delta & \dots & u_i^{2m-4} \frac{\delta^{2m-4}}{(2m-4)!} & u_i^{2m-3} \frac{\delta^{2m-3}}{(2m-3)!} & u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-2}}{(2m-2)!} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & u_i \delta & u_i^2 \frac{\delta^2}{2!} \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 & u_i \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$B_{2_i} = \begin{bmatrix} u_i^{2m-1} \frac{\delta^{2m}}{2m!} \\ u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ \vdots \\ u_i^2 \frac{\delta^3}{3!} \\ u_i \frac{\delta^2}{2!} \\ \delta \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

L'état final  $z_n$  après  $n$  périodes d'échantillonnage prend la forme suivante dépendante de  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$  :

$$z_n = \Phi_n z_0 + \Psi_n V \quad (2.61)$$

où  $\Psi_n$ ,  $\Phi_n$  et  $V$  sont donnés par :

$$\Psi_n = [A_{2_{n-1}} A_{2_{n-2}} \dots A_{2_1} B_{2_0}, A_{2_{n-1}} A_{2_{n-2}} \dots A_{2_2} B_{2_1}, \dots, A_{2_{n-1}} B_{2_{n-2}}, B_{2_{n-1}}] \quad (2.62)$$

$$\Phi_n = \prod_{j=0}^{n-1} A_{2_j} \quad (2.63)$$

$$V = [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}]^T \quad (2.64)$$

### Existence de $V$

Pour trouver les éléments de  $V$  (2.64),  $\Psi_n$  doit être le plein rang. Cette question est étudiée dans le lemme suivant.

**Lemme 7** *Si  $\eta_d \neq \eta_0$ , alors  $\Psi_n$  est de rang plein pour  $n > 2m$*

La preuve de ce lemme est présentée dans l'Annexe B.2. Elle est issue de considérations de controlabilité.

En appliquant Lemme 7, la commande continue par morceaux  $V$  oriente  $\Sigma_2$  de l'état initial  $z_0$  vers un état  $z_n = z_d$  dans  $n$  périodes d'échantillonnage

$$V = \Psi_n^+ (z_d - \Phi_n z_0) \quad (2.65)$$

où  $\Psi_n^+$  est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $\Psi_n$  :  $\Psi_n^+ = \Psi_n^T (\Psi_n \Psi_n^T)^{-1}$ . La commande globale obtenue, dénotée par  $W = [U \ V]^T$ , oriente le système (2.28) d'un état initial  $y_0$  à n'importe quel état désiré final  $y_d$  sans prendre en considération les contraintes de saturation (2.30-2.31). Le but de la section suivante est de développer un algorithme qui converge itérativement vers une suite de commande admissible (c.à.d la commande qui respecte les contraintes imposées).

### 2.3.3 Solutions sous-optimales du problème d'optimisation

L'objectif de cette partie est de trouver les commandes  $u_i$  et  $v_i$  (à chaque période d'échantillonnage) telles que les contraintes de saturation (2.30) et (2.31) soient satisfaites. Les entrées de cet algorithme sont l'état réel  $y_0$  et l'état désiré final après  $n$  périodes d'échantillonnage  $y_n = y_d = (\eta_d, z_d)$ . Un algorithme  $A(y_0)$  basé sur le lemme suivant est développé.

**Lemme 8** *Nous avons* :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U\| \rightarrow 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V\| \rightarrow 0$ .

L'importance de ce lemme vient du fait qu'il relie la grandeur des éléments de la commande avec la longueur de l'horizon  $n$ . Si  $n$  augmente, la grandeur des éléments de  $U$  et  $V$  tendent vers zéro. Le preuve est détaillé dans l'Annexe B.3

#### Algorithme $A(y_0)$

L'algorithme  $A(y_0)$  est composé des étapes suivantes

1. Initialisation de l'horizon de prédiction  $n$
2. Calculer de  $\Gamma_n$ ,  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$  données par (2.55), (2.63) et (2.62)
3. Déterminer les commandes  $U$  et  $V$  au moyen de (2.51) et (2.65)
4. Tester le respect des contraintes de saturation (2.30) et (2.31)
5. Dans le cas contraire de l'étape (4), augmenter la longueur de l'horizon de prédiction : par exemple  $n = n + 1$
6. Répéter l'algorithme (de l'étape (2)) jusqu'à la satisfaction des contraintes de saturation

L'application de cet algorithme nous donne les séquences de commandes admissibles  $\hat{W}$  :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{v}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{u}_{\hat{n}-1} \\ \hat{v}_{\hat{n}-1} \end{pmatrix} \right) \quad (2.66)$$

qui sont à appliquer pendant l'horizon de temps :

$$\hat{t}_{\hat{n}}(y_0) = (0 \quad \delta \quad \dots \quad \hat{n}\delta) \quad (2.67)$$

où  $\hat{n}$  dénote la longueur de l'horizon de prédiction en utilisant l'algorithme  $A(y_0)$ . Les entrées de commande issues de l'algorithme ci-dessus assurent le contrôle du système chaîné de l'état initial  $y_0$  à l'état désiré final  $y_{\hat{n}} = y_d$  en  $\hat{n}$  périodes d'échantillonnage tout en satisfaisant les contraintes de saturation. La seule limitation de cet algorithme survient quand  $u$  est égal à zéro. Dans ce cas, la contrôlabilité du deuxième sous-système  $\Sigma_2$  est perdue et donc celle du système entier. Les approches discontinues cherchent par exemple à s'éloigner de cette singularité. A partir de sa définition,  $u = 0$  signifie que  $\alpha$  et  $\beta$  de (2.51) sont égaux à zéro, d'autres termes, que l'égalité  $\eta_d = (A_1)^n \eta_0$  (équation (2.54)) est satisfaite. Afin d'éviter cette situation, une étape additionnelle est d'abord appliquée avant d'exécuter l'algorithme  $A(y_0)$ . Cette étape aide également à augmenter la vitesse de convergence de l'état en commençant de l'état initial  $y_0$  vers l'état final désiré  $y_d$ . Ainsi, une commande constante  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  est d'abord appliquée pendant 0 à  $q_{max}$  périodes d'échantillonnage :

$$w_{q,\varepsilon}(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon u^{max} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \tau \in [0, q\delta] \quad (2.68)$$

L'application de cette commande pendant  $q$  périodes d'échantillonnage oriente l'état du système vers un état intermédiaire  $\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon) = Y(q\delta; 0; y_0; w_{q,\varepsilon}(\cdot))$ . Ensuite, le système est orienté vers l'état désiré final  $y_n = y_d$  par l'application de l'algorithme  $A(\tilde{y})$ .

En conséquence, nous obtenons un ensemble de suites de commande qui correspond à l'ensemble des trajectoires :

- Traj( $q, A(y_0)$ ) avec une durée  $q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{x}(x_0, q, \varepsilon))$  pour  $q = 0$
  - Traj( $q, A(\tilde{y}(q, \varepsilon))$ ) avec une durée  $q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$  pour ( $q = 1, \varepsilon = 1$ )
  - Traj( $q, A(\tilde{y}(q, \varepsilon))$ ) avec une durée  $q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$  pour ( $q = 1, \varepsilon = -1$ )
  - ...
  - Traj( $q, A(\tilde{y}(q, \varepsilon))$ ) avec une durée  $q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$  pour ( $q = q_{max}, \varepsilon = 1$ )
  - Traj( $q, A(\tilde{y}(q, \varepsilon))$ ) avec une durée  $q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$  pour ( $q = q_{max}, \varepsilon = -1$ )
- avec  $\hat{t}_{\hat{n}}(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$  obtenu par l'application de  $A(\tilde{y}(y_0, q, \varepsilon))$ .

Notre but est de stabiliser le système en un temps minimum et pour cela la trajectoire avec la plus courte durée est choisie. Donc, l'objectif est de trouver la

commande optimale et admissible en boucle ouverte  $w^{opt}(y_0)$  qui correspond à la solution du problème d'optimisation suivant

$$(\hat{q}(y_0), \hat{\varepsilon}(y_0)) = \text{Arg} \min_{(q, \varepsilon) \in \mathcal{A}(x_0)} q\delta + \hat{t}_{\hat{n}}(y_f(y_0, q, \varepsilon)) \quad (2.69)$$

avec

$$\mathcal{A}(x_0) = \{(q, \varepsilon) \in \{0, \dots, q_{max}\} \times \{-1, 1\} \mid \hat{t}_{\hat{n}}(y_f(y_0, q, \varepsilon)) < \hat{t}_{\hat{n}}(x_0) - q\delta\}$$

La commande  $w^{opt}(y_0)$  prend la forme suivante

$$w^{opt}(y_0) = \begin{bmatrix} u^{opt}(y_0) \\ v^{opt}(x_0) \end{bmatrix} = (w_0^{opt}, \dots, w_{\hat{q}(y_0)}^{opt}, \hat{W}(y_f)) \quad (2.70)$$

avec, pour  $j = 1, \dots, \hat{q}(y_0)$  :

$$w_j^{opt} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}(y_0)u^{max} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette commande sera appliquée pour l'horizon de temps suivante

$$t^{opt}(y_0) = (0, \delta, \dots, \delta\hat{q}(y_0), \hat{t}_{\hat{n}}(y_f)) \quad (2.71)$$

avec

$$\hat{t}_{\hat{n}}(y_f) = ((\hat{q}(y_0) + 1)\delta, \dots, (\hat{q}(y_0) + \hat{n}(y_0))\delta) \quad (2.72)$$

$\hat{W}(y_f)$  est la commande obtenue à partir de l'exécution de l'algorithme  $A(y_f)$ . L'algorithme de commande à appliquer est donc :

### Algorithme $B(y_0)$

Cet algorithme est appliqué pour trouver les entrées de la commande sous-optimale en boucle ouverte qui dirigent le système (2.28) de l'état initial  $y_0$  vers l'état final désiré  $y_d$  tout en respectant les contraintes de saturation sur les entrées de commande (2.30-2.31).

1. Décomposer le système (2.28) en  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$
2. Pour  $n, q \leq q_{max}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , trouver l'ensemble des suites de commande en appliquant la commande constante plus l'algorithme  $A(y_0)$
3. Prendre la commande qui correspond à la solution du problème d'optimisation (2.69)

On peut noter que il n'y a aucun traitement spécial pour le cas singulier qui est traité dans le problème d'optimisation. En fait, il n'y a pas non plus d'optimisation mais simplement un choix dans un ensemble fini de solutions. Dans la section suivante, la commande par retour d'état est définie.

### 2.3.4 La commande par retour d'état

En utilisant les principes de la commande prédictive, on obtient la commande par retour d'état suivante

**Théorème 9** *La loi de commande par retour d'état en temps discret définie pour  $\sigma \in [0, \delta[$  :*

$$w(k\delta + \sigma) = w_1^{opt}(y_k) \quad (2.73)$$

où  $w_1^{opt}(y_k)$  est le premier élément de la suite de commande en boucle ouverte (Algorithme B( $y_0$ ) de la section 2.3.3), stabilise globalement le système chaîné (2.28) à partir l'état initial  $y_0$  vers l'état désiré final  $y_d$ .

La preuve de ce théorème est détaillée dans l'Annexe B.4.

### 2.3.5 Application numérique

Pour démontrer l'efficacité de la commande proposée, nous considérons la stabilisation du système (2.29) :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{\eta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \Sigma_2 : \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

Cinq études de simulations ont été effectuées.

- Dans la première et la deuxième simulation, nous avons étudié l'effet de la valeur de  $q_{max}$ . Nous avons tracé l'évolution du système chaîné de l'état initial  $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  vers l'état final  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  sous les contraintes  $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$  avec  $q_{max} = 2$  dans la première simulation (figure 2.5) et  $q_{max} = 20$  dans la deuxième simulation (figure 2.6). Nous notons que la valeur de  $q_{max}$  n'affecte que peu la performance de la commande proposée et cela est dû au fait qu'en commande prédictive, seul le premier échantillon est appliqué
- Dans la troisième simulation, nous avons étudié le cas où nous commençons à partir d'un état initial singulier  $y_0 = [0, 0, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  avec les contraintes de saturation sur les entrées  $[u^{max}, v^{max}] = [7, 7]$ . Nous pouvons observer que notre commande réussit à stabiliser le système à l'état final  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  (figure 2.7)

- La quatrième simulation prouve que la commande proposée peut orienter le système chaîné de l'état initial  $y_0$  à n'importe quel état désiré différent de l'origine avec des vitesses égales à zéro (figure 2.8)
- Dans la dernière simulation l'état désiré est l'origine  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  et les contraintes de commande d'entrée sont  $[u^{max}, v^{max}] = [0.05, 0.05]$ . Ces contraintes feront converger la loi de commande vers un comportement de type Bang-Bang bien connu en commande optimale en temps minimum (figure 2.9)

### 2.3.6 Récapitulatif sur la commande du PVTOL sans gravité

Dans cette partie de chapitre, une commande par retour d'état qui assure la stabilisation asymptotique des systèmes chaînés sous les contraintes de saturation vers n'importe quelle position a été proposée. Cette approche basée sur le principe de l'horizon glissant est conçue pour être appliquée en temps réels sans aucun traitement spécial pour les situations singulières. Par exemple, en utilisant MATLAB<sup>©</sup> la durée moyenne de calcul pour chaque itération nécessite 0.02 seconde dans le cas commençant de  $y_0 = [0, 0, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  pour arriver à l'état final  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  sous les contraintes de saturation  $[u^{max}, v^{max}] = [7, 7]$  avec  $q_{max} = 2$ . Cette durée peut être réduite par un facteur de 10 à 100 si la commande est programmée sous FORTRAN ou C.

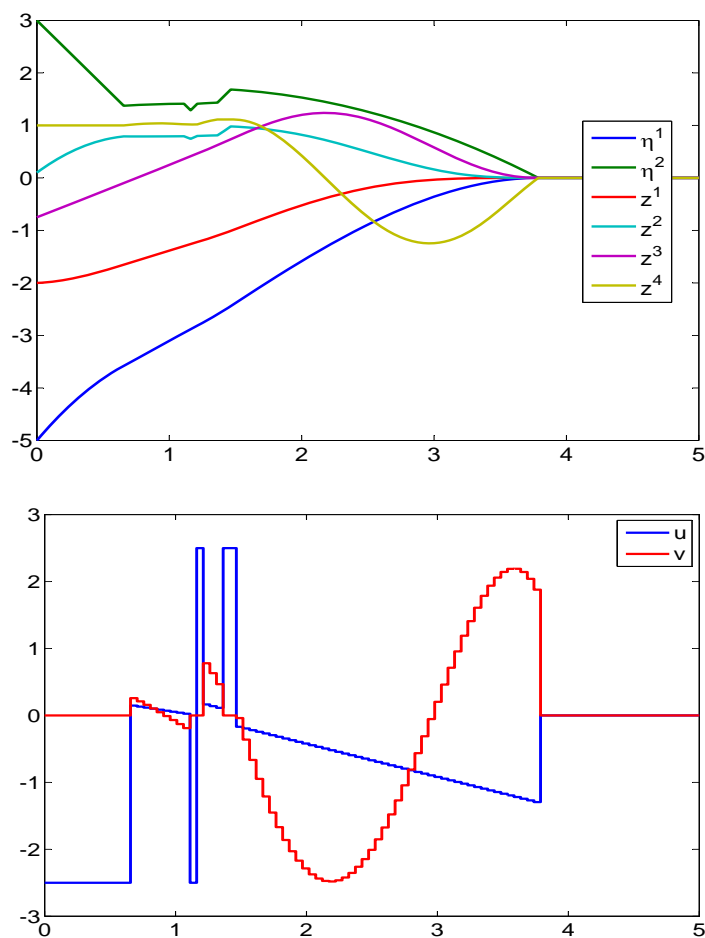


FIG. 2.5 – Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$  en bleu et  $v$  en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial  $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  à l'état final désiré  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  avec les contraintes de saturation sur la commande  $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$  et  $q_{max} = 2$



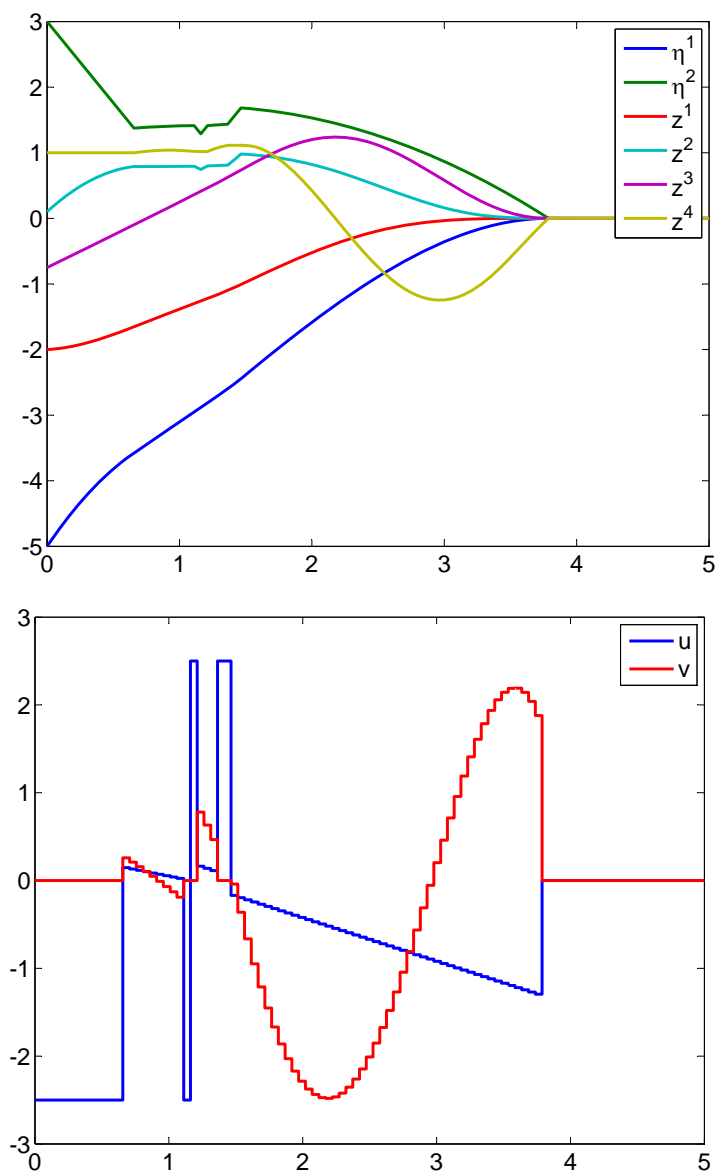


FIG. 2.6 – Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$  en bleu et  $v$  en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial  $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  à l'état final désiré  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  avec les contraintes de saturation sur la commande  $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$  et  $q_{max} = 20$

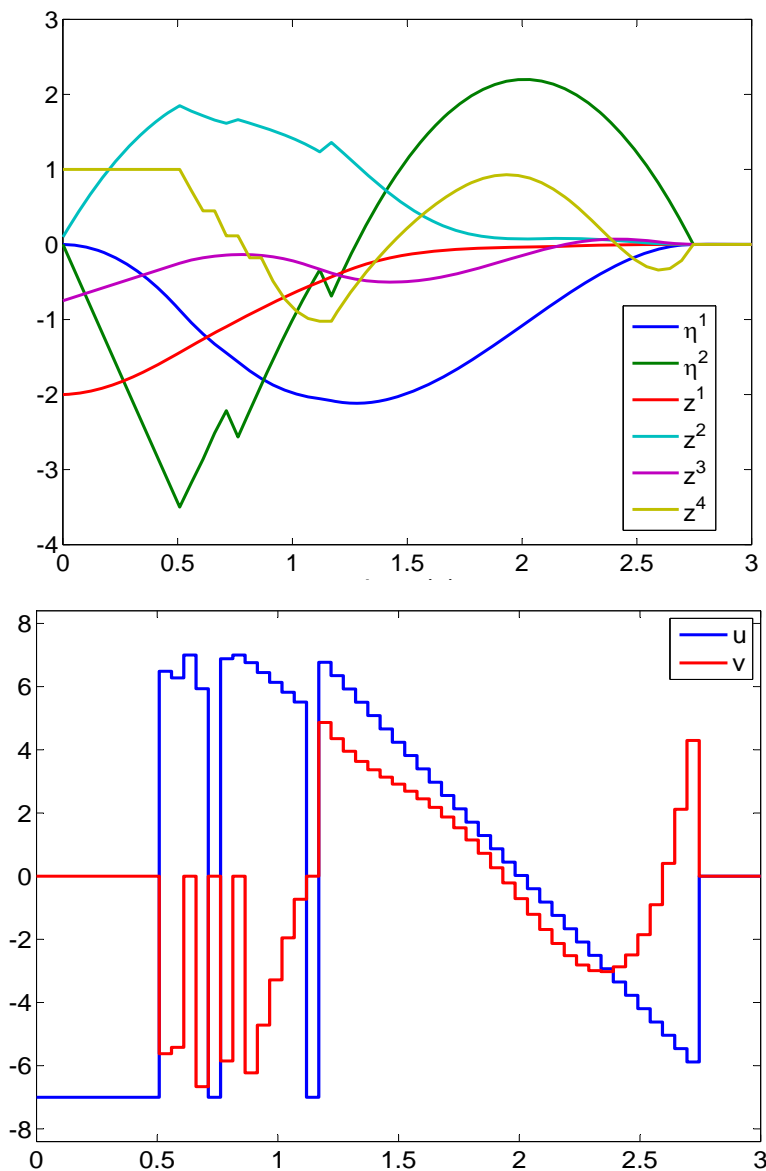


FIG. 2.7 – Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$  en bleu et  $v$  en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial singulier  $y_0 = [0, 0, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  vers un état final désiré  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  avec les contraintes de saturation sur la commande  $[u^{max}, v^{max}] = [7, 7]$  et  $q_{max} = 2$

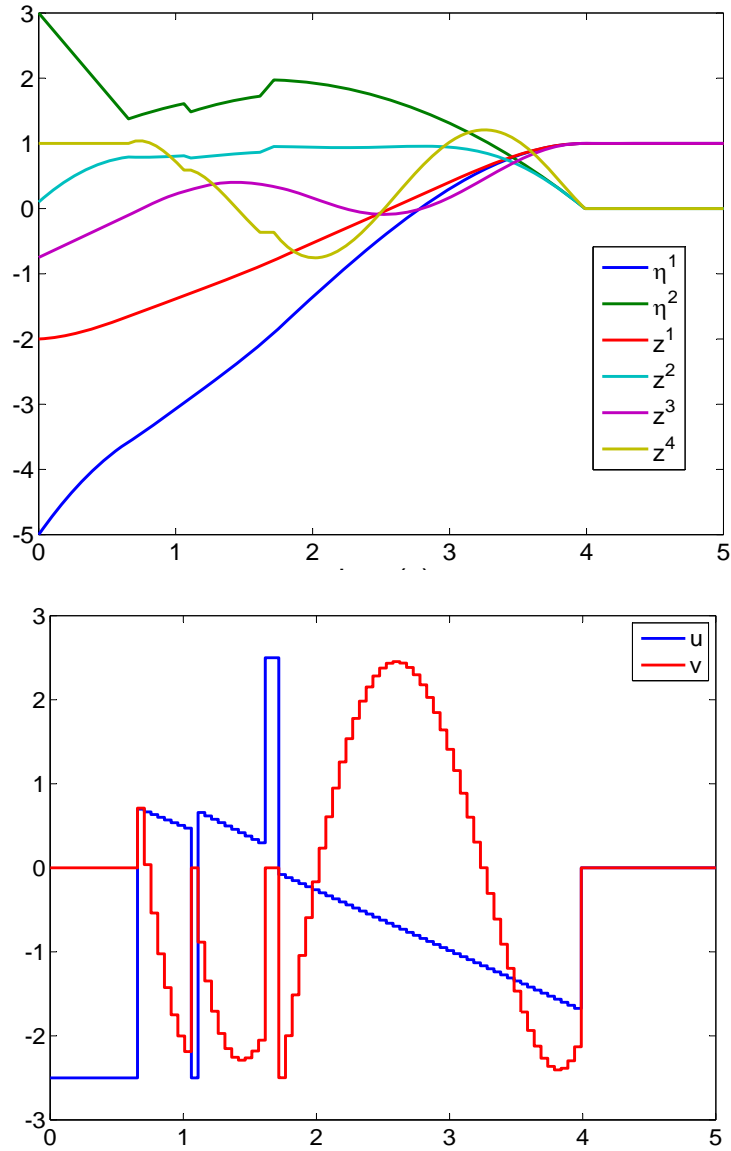


FIG. 2.8 – Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$  en bleu et  $v$  en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial  $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  vers un état final désiré différent à zéro  $y_d = [1, 0, 1, 0, 1, 0]^T$  avec les contraintes de saturation sur la commande  $[u^{max}, v^{max}] = [2.5, 2.5]$  et  $q_{max} = 2$

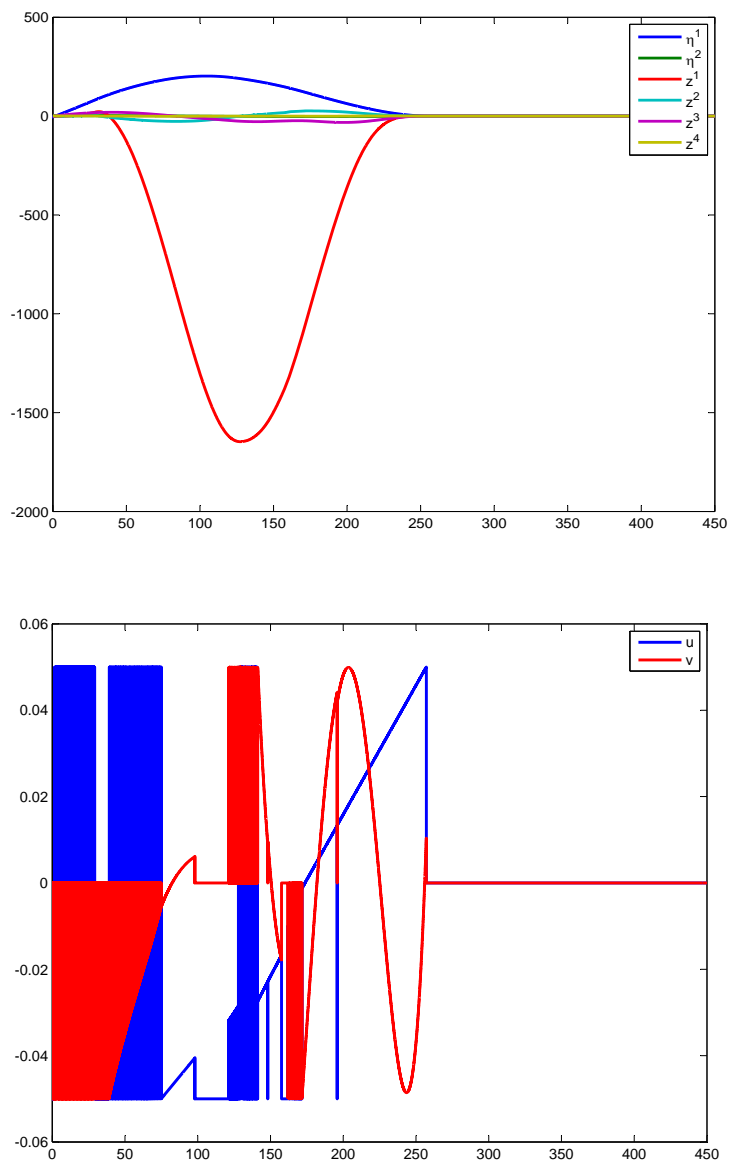


FIG. 2.9 – Évolution des états (haut) et des entrées de commande ( $u$  en bleu et  $v$  en rouge (bas)) du système chaîné du second ordre à partir de l'état initial  $y_0 = [-5, 3, -2, 0.1, -0.75, 1]^T$  vers l'état final désiré  $y_d = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  avec des contraintes fortes de saturation sur la commande  $[u^{max}, v^{max}] = [0.05, 0.05]$  et  $q_{max} = 2$

## 2.4 Commande de PVTOL avec gravité

Dans cette partie de chapitre nous revenons sur le modèle simplifié du PVTOL avec la gravité :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u \sin \theta + \epsilon v \cos \theta \\ \ddot{z} &= u \cos \theta + \epsilon v \sin \theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= v\end{aligned}$$

Ce système de PVTOL a plusieurs caractéristiques qui peuvent être employées pour concevoir des commandes. Lin *et al.* [49] ont proposé quatre exigences que n'importe quelle commande devrait satisfaire afin de pouvoir être appliquée à des PVTOL réels. Ces conditions sont :

- L'altitude  $z$  de PVTOL, en mode décollage, devrait avoir une déviation très petite de l'altitude de référence. Les PVTOL réels comme Harrier YAV-8B sont conçus pour être manoeuvrés à proximité du sol. Par conséquent il est souhaitable de trouver une loi de commande qui fournit une poursuite exacte de l'altitude
- $u \geq 0$ , parce que la poussée est toujours dirigée vers le haut du PVTOL.
- $|\theta| \ll \pi/2$ , parce que la plupart d'avion de V/STOL n'ont pas un grand rapport poussée/poids pour maintenir l'altitude avec de grand angle  $\theta$
- Les grandes entrées de commande ne sont pas acceptables en raison des limitations de poussée et du moment de rotation

Les approches de commande proposées dans la littérature pour le PVTOL peuvent être classifiées en deux familles principales, à savoir les approches de poursuite de trajectoire et celles qui traitent un problème de stabilisation. Chaque commande vérifie une ou plusieurs des caractéristiques du PVTOL citées au dessus. Ces deux types de commande sont présentées dans la suite.

### 2.4.1 Poursuite des trajectoires

Le problème de poursuite de trajectoire consiste à trouver une commande telle que la sortie du système suive n'importe quelle trajectoire de référence.

Dans le cas des systèmes à déphasage minimal, le problème de poursuite peut facilement être résolu par la linéarisation entrée-sortie [43]. Malheureusement, pour le PVTOL, ce n'est pas le cas, puisque le système est à déphasage non-minimal (voir section 2.2.1). Les auteurs dans [35] ont proposé une approche pour la poursuite de trajectoire du PVTOL : l'approximation du système à déphasage non-minimal de phase par un système à déphasage minimal. La commande proposée peut se résumer à :

1. Approximation du PVTOL avec  $\epsilon = 0$ , pour supprimer le couplage entre le moment de rotation et l'accélération latérale

2. Prendre  $u_1$  et  $\dot{u}_1$  comme états et différentier les équations (2.4) et (2.5) deux fois pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} x^{(4)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \dot{\theta}^2 u - 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{u} \\ -\cos \theta \dot{\theta}^2 u - 2 \sin \theta \dot{\theta} \dot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta u \\ \cos \theta & -\sin \theta u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ v \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

3. Linéariser le système (avec  $\epsilon = 0$ ) par les entrées suivantes :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta u \\ \cos \theta & -\sin \theta u \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} \sin \theta \dot{\theta}^2 u - 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{u} \\ -\cos \theta \dot{\theta}^2 u - 2 \sin \theta \dot{\theta} \dot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.75)$$

4. Comme résultat, le système en boucle fermé sera :

$$\begin{bmatrix} x^{(4)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Le système obtenu est à phase minimale avec dynamique de zéros stable.

Cette commande fournit de bons résultats quand le paramètre de couplage  $\epsilon$  est zéro ou petit ( $\epsilon < 0.6$ ), cependant la performance se détériore lorsque la valeur de  $\epsilon$  augmente. Un autre inconvénient d'une telle approche est la restriction à l'angle  $\theta$  à  $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ .

La platitude du PVTOL (2.12) a été utilisée pour la poursuite de trajectoire dans le travail de [65]. D'abord, la sortie plate est employée pour concevoir la poursuite d'état basée sur la linéarisation exacte par le retour d'état dynamique :

$$u = \zeta + \frac{\epsilon}{\lambda} \dot{\theta}^2 \quad (2.77)$$

$$v = \frac{1}{\lambda \zeta} (-w_1 \cos \theta - w_2 \sin \theta - 2\zeta \dot{\theta}) \quad (2.78)$$

$$\ddot{\zeta} = -w_1 \sin \theta + w_2 \cos \theta + \zeta \dot{\theta}^2 \quad (2.79)$$

où  $\zeta = u - \frac{\epsilon}{\lambda} \dot{\theta}^2$ . Le système linéarisé s'écrit sous la forme de deux chaînes d'intégrateurs d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \chi_1^{(4)} &= w_1 \\ \chi_2^{(4)} &= w_2 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Ensuite le placement de pôles ou une des commandes développées dans le chapitre précédent pour la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs peut être employée pour construire une poursuite d'état stable. Ainsi la poursuite de sortie est commandée par la sortie plate.

Al-Hiddabi et McClamroch [1, 3, 2] ont traité le problème de poursuite de

trajectoire de PVTOL par l'approche de décomposition. L'idée principale est de décomposer du PVTOL, après un changement de coordonnées, en deux sous-systèmes d'entrée-sortie. Le premier sous-système est linéaire avec une dynamique interne négligeable pour la commande dynamique de  $z$  (système à déphasage minimal). Le deuxième est avec une dynamique interne instable pour la commande de la dynamique couplée entre  $x$  et  $\theta$  (système à déphasage non-minimal). L'approche de commande proposée est applicable seulement au cas où le paramètre de couplage  $\epsilon$  est grand.

### 2.4.2 Stabilisation du PVTOL avec gravité

La stabilisation du PVTOL vise à conduire les états de système de n'importe quelle configuration vers l'origine.

Teel [94] a illustré son résultat central du théorème du petit gain (non-linear small gain theorem) en utilisant le PVTOL comme exemple. Son théorème fournit un formalisme pour analyser le comportement des systèmes de commande sous contraintes (saturation). Il a établi un algorithme de stabilisation pour les systèmes non-linéaires sous la forme "feedforward" dont fait partie le PVTOL.

La stabilisation du PVTOL basée sur l'analyse de Lyapunov a été utilisée par plusieurs auteurs. Dans cette approche, deux stratégies sont utilisées. Dans la première, la commande  $u$  stabilise l'altitude  $z$  tandis que la commande  $v$  stabilise l'angle de roulis  $\theta$  et en même temps le déplacement  $x$ . Dans la deuxième stratégie, la dynamique du PVTOL est considérée comme un système en cascade composée de  $\Sigma_t$ , sous-système de translation et  $\Sigma_r$ , sous-système de rotation.  $\Sigma_r$  est stabilisé en utilisant  $v$  tandis que  $\Sigma_t$  est stabilisé grâce à la commande  $u$  et  $\theta$  comme entrée fictive.

#### Première stratégie

Dans cette partie, nous présentons le travail de Fantoni *et al.* [21] qui ont présenté une commande simple pour la stabilisation du PVTOL avec  $\epsilon = 0$ . Les commandes proposées prennent la forme suivante :

$$u = \frac{1}{\cos \theta} (1 + r_z) \quad (2.81)$$

$$v = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} [-2\dot{\theta}^2 \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) - \ddot{r}_x - 2(1 + \tan^2 \theta)\dot{\theta} - 2\dot{r}_x - \tan \theta - r_x] \quad (2.82)$$

L'application de  $u$  (équation 2.81) nous donne :

$$\ddot{x} = -\tan \theta (1 + r_z) = r_x (1 + r_z) - (\tan \theta + r_x) (1 + r_z)$$

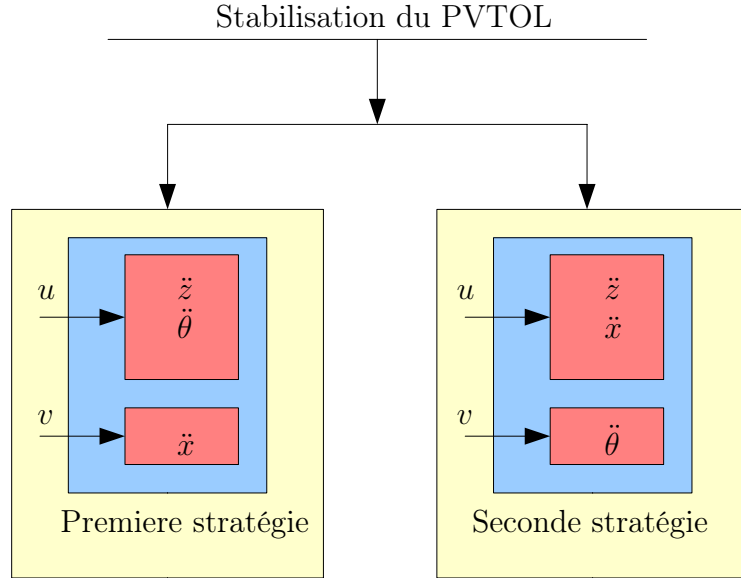


FIG. 2.10 – La stabilisation du PVTOL basée sur l’analyse de Lyapunov

La commande  $v$  de équation (2.82) est choisie afin d’assurer que  $(\tan \theta + r_x)$  de  $\ddot{x}$  tend vers zéro en considérant en même temps que  $\tan \theta$  est borné.

Pour la version non-bornée,  $r_x$  et  $r_z$  sont définis par :

$$r_x = -2\dot{x} - x \quad (2.83)$$

$$r_z = -2\dot{z} - z \quad (2.84)$$

Une version bornée de  $r_x$  et  $r_z$  a été proposée par Castillo et al. dans [18]. Le choix est basé sur l’approche non-linéaire proposée par Teel [93] pour la stabilisation d’une chaîne d’intégrateurs et présentée au chapitre 1.  $r_x$  et  $r_z$  sont définis par :

$$\begin{aligned} r_x &= \text{sat}_1(-\dot{x} - k\text{sat}_1(x + \dot{x})) \\ r_z &= \text{sat}_1(-\dot{z} - k\text{sat}_1(z + \dot{z})) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les commandes proposées garantissent la stabilité asymptotique de l’origine. L’inconvénient principal de cette approche est qu’elle est limitée à  $\theta \in ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Dans le même esprit, Lozano *et al.* [57] ont proposé une forme différente de commande pour stabiliser le PVTOL après l’application du changement de coordonnées (2.16 -



2.17) :

$$u = \frac{1}{\cos(\text{sat}_p(\theta))}(1 + r_z) \quad (2.86)$$

$$v = -\text{sat}_a(\dot{\theta} + \text{sat}_b(\theta + \dot{\theta} + \text{sat}_c(2\theta + \dot{\theta} - \dot{\bar{x}} + \text{sat}_d(3\theta + \dot{\theta} - 3\dot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}})))) \quad (2.87)$$

où  $\text{sat}_a$  est une fonction de saturation entre  $-a$  et  $a$  avec  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ .

La composante  $r_z$  de la commande  $u$  prend la forme suivante :

$$r_z = -a_1 \ddot{z} - a_2(\ddot{z} - z_d) \quad (2.88)$$

avec  $z_d$  l'altitude désirée.  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes positives telles que le polynôme  $s^2 + a_1 s + a_2$  soit stable. La stabilité du système est garantie si les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  de commande vérifient certaines relations détaillées dans [57].

### Seconde stratégie

L'objectif de cette stratégie, initialement proposée par [83], est de profiter des propriétés trigonométriques du PVTOL et transformer le sous-système de translation  $\Sigma_t$  en 2 chaînes d'intégrateurs d'ordre 2. L'idée est de conduire l'angle du système  $\theta(t)$  vers un angle désiré  $\theta_d(t)$  donné par l'équation suivante :

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{-r_x}{r_z + 1}\right) \quad (2.89)$$

Dans ce cas là, l'application de la poussée positive de la forme suivante

$$u = \sqrt{r_x^2 + (r_z + 1)^2} \quad (2.90)$$

avec  $\theta$  comme entrée imaginaire pour  $\Sigma_t$ , transforme le sous-système de translation en 2 chaînes d'intégrateurs d'ordre 2

$$\ddot{x} = r_x \quad (2.91)$$

$$\ddot{z} = r_z \quad (2.92)$$

pour  $t \rightarrow \infty$ . Dans cette stratégie, on a une singularité de la division par zéro dans équation (2.89) quand  $r_z$  est égal à  $-1$ . Une solution, proposée par Olfati-Saber [73], est de prendre  $r_z$  bornée telle que  $(-1 < r_z < 1)$ . Les approches de commande de cette stratégie se divisent en 2 classes selon le choix de  $r_x$ ,  $r_z$  et  $v$ .

**Approche non-bornée** Dans cette approche, plusieurs commandes sont proposées. Saeki et Sakaue [81] ont proposé une commande utilisant une approximation linéaire de type grand gain. La loi de commande se présente sous la forme :

$$u = -r_x \sin \theta + (r_z + 1) \cos \theta + \epsilon \dot{\theta}^2 \quad (2.93)$$

$$v = -k_{32} \dot{\theta} - k_{31}(\theta - \theta_d) \quad (2.94)$$

avec

$$\begin{aligned} r_x &= -k_{12}(\dot{x} - \epsilon\dot{\theta} \cos \theta) - k_{11}(x - \epsilon \sin \theta - x_r) \\ r_z &= -k_{22}(\dot{z} - \epsilon\dot{\theta} \sin \theta) - k_{21}(z + \epsilon \cos \theta - z_r - \epsilon) \end{aligned}$$

et  $k_{ij}$  pour ( $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ ) gains positifs. Le but de l'approche est d'assurer la poursuite asymptotique de  $(x(t), z(t))$  avec un trajectoire de référence  $(x_r(t), z_r(t))$ . Les auteurs dans [83] ont étudié l'approximation des systèmes à déphasage non-minimal dont le PVTOL et appliqué une commande à grand gain

$$\begin{aligned} r_x &= -k_{11}x - k_{12}\dot{x} \\ r_z &= -k_{21}z - k_{22}\dot{z} \\ v &= -k_1k^2(\theta - \theta_d) - k_2k\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.95)$$

où  $0 < k_1, k_2 \leq 1$ ,  $k$  est un grand gain,  $k_{ij}$  sont des gains positifs et  $\theta_d$  est défini par (2.89).

Pour le choix de  $r_x$  et  $r_z$ , Fantoni *et al.* [22] ont adopté l'approche bornée proposée par Teel [93] pour la stabilisation non-linéaire d'une chaîne d'intégrateurs :

$$\begin{aligned} r_x &= -\text{sat}_{M_{12}}(\dot{x} + \text{sat}_{M_{11}}(x + \dot{x})) \\ r_z &= -\text{sat}_{M_{22}}(\dot{z} + \text{sat}_{M_{21}}(z + \dot{z})) \end{aligned} \quad (2.96)$$

avec la commande non bornée

$$v = \ddot{\theta}_d - \text{sat}_{M_{32}}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d + \text{sat}_{M_{31}}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d + \theta - \theta_d)) \quad (2.97)$$

Les fonctions  $\text{sat}_{M_{ij}}$  pour ( $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ ) sont des fonctions de saturation. Olfati-Saber [73] a suivi une démarche différente en appliquant :

$$\begin{aligned} r_x &= c_{11}\bar{x} + c_{12}\dot{\bar{x}} \\ r_z &= c_0 \tanh(c_{21}\bar{z} + c_{22}\dot{\bar{z}}) \\ v &= \ddot{\theta}_d - k_{31}(\theta - \theta_d) - k_{32}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \end{aligned} \quad (2.98)$$

où  $c_{i1}, c_{i2}$  pour  $i = 1, 2$  sont des coefficients d'un polynôme d'Hurwitz et  $0 < c_0 < 1$ . Les états  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\dot{\bar{x}}$  et  $\dot{\bar{z}}$  sont définis par les équations (2.18 - 2.20). La commande  $r_z$  est choisie bornée entre  $-1$  et  $1$  pour éviter la singularité de la division par zéro dans l'équation de  $\theta_d$  (2.89).

**Approche bornée** Dans cette approche on trouve le travail de Zavala *et al.* [104] qui est l'extension de [22]. La différence principale est la forme de  $v$  et le choix des fonctions de saturation :

$$v = \text{sat}_{M_{22}}(\ddot{\theta}_d) - \text{sat}_{M_{32}}(\dot{\theta} - \text{sat}_{M_{42}}(\dot{\theta}_d) + \text{sat}_{M_{31}}(\dot{\theta} - \text{sat}_{M_{43}}(\dot{\theta}_d) + \theta - \theta_d)) \quad (2.99)$$

avec

$$r_x = -ksat_{M_{12}}(\dot{x} + sat_{M_{11}}(kx + \dot{x})) \quad (2.100)$$

$$r_z = -sat_{M_{22}}(\dot{z} + sat_{M_{21}}(z + \dot{z})) \quad (2.101)$$

$r_x$  dépend d'une constante positive  $k$  qui peut être choisie a priori pour assurer la stabilité globale de l'approche proposée. Les fonctions de saturation dans  $r_x$  et  $r_z$  sont linéaires à deux niveaux.

## 2.5 Approche bornée pour la stabilisation du PVTOL

Nous avons proposé une commande bornée basée sur l'analyse de Lyapunov et les systèmes en cascade. Le système de PVTOL est clairement en cascade car l'évolution de la dynamique de rotation est indépendante de la dynamique de translation alors que la dynamique de translation dépend de l'angle. Notre approche est similaire à celle adoptée dans [104], cependant la performance est largement améliorée. L'idée derrière ceci est d'assurer la convergence rapide du PVTOL en utilisant les résultats du chapitre 1 concernant la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs par commande bornée. Comme nous avons vu dans chapitre 1 de ce mémoire, que l'application de l'approche de Sussmann *et al.* [89] améliorée par Théorème 1 et Théorème 3 donne des meilleurs résultats en comparaison avec les résultats obtenus par l'application de l'approche de Teel [93] qui a été adoptée par [104] pour la stabilisation bornée du PVTOL. Ce résultat a fait l'objet d'un chapitre de livre [31]. Le développement de  $r_x$ ,  $r_z$  et  $v$  est présenté dans la section suivante.

### 2.5.1 Stratégie de commande

Nous détaillons ici les commandes bornées pour la stabilisation du PVTOL. Soit  $\theta_d := \eta_d$ ,  $p := (p_1, p_2, p_3, p_4) = (x, \dot{x}, z, \dot{z})$  le vecteur d'état du sous-système de translation  $\Sigma_t$  et  $\eta := (\eta_1, \eta_2) = (\theta, \dot{\theta})$  le vecteur d'état du sous-système de rotation  $\Sigma_r$ . Pour  $\epsilon = 0$ ,  $\Sigma_t : \dot{z} = f(z, \eta)$  s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -u \sin(\eta_1) \\ \dot{p}_3 = p_4 \\ \dot{p}_4 = u \cos(\eta_1) - 1 \end{cases} \quad (2.102)$$

et  $\Sigma_r : \dot{\eta} = g(\eta, u)$  peut être exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = v \end{cases} \quad (2.103)$$

Le choix de  $r_x$  et  $r_z$  est basé sur les résultats du second chapitre pour la stabilisation bornée d'un chaîne d'intégrateurs avec des commandes bornées :

$$r_x = -\varepsilon_x \text{sat}_1(p_2) - \varepsilon_x^2 \text{sat}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2) \quad (2.104)$$

$$r_z = -\varepsilon_z \text{sat}_1(p_4) - \varepsilon_z^2 \text{sat}_1(\varepsilon_z p_3 + p_4) \quad (2.105)$$

$\varepsilon_{x,z}$  sont de paramètres positifs inférieurs à 1 et  $\text{sat}_1(\cdot)$  est une fonction de saturation différentiable d'ordre 2 bornée entre  $\pm 1$  (Annexe B.5).

L'application de la poussée

$$u = \sqrt{r_x^2 + (r_z + 1)^2} \quad (2.106)$$

avec  $\eta_1 = \eta_d$  de l'équation (2.89) le sous-système  $\Sigma_t$  se transforme en 2 chaînes d'intégrateurs d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 = r_x \\ \ddot{p}_3 = r_z \end{cases} \quad (2.107)$$

Pour  $\Sigma_r$  (2.103), définissons  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T = (\bar{\theta}, \dot{\theta})^T$  où  $\bar{\theta} = \eta_1 - \eta_d$ . La commande  $v$  est définie par

$$v = \text{sat}_{\beta_\theta}(\ddot{\eta}_d) - \varepsilon_\theta \text{sat}_1(\eta_2 - \dot{\eta}_d) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(\varepsilon_\theta(\eta_1 - \eta_d) + (\eta_2 - \dot{\eta}_d)) \quad (2.108)$$

où  $\text{sat}_{\beta_\theta}(\cdot) = \beta_\theta \text{sat}_1(\cdot)$  pour un certain paramètre positif  $\beta_\theta$ .

Les commandes  $u$  et  $v$  doivent respecter les contraintes sur les entrées  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  par la relation

$$1 < u \leq \bar{U} \quad (2.109)$$

$$-\bar{V} < v \leq \bar{V} \quad (2.110)$$

La première condition est une condition nécessaire pour que le PVTOL soit stabilisable à n'importe quelle position désirée. En effet, n'importe quelle condition statique implique que le poids ( $-1$  dans le modèle simplifié) soit compensé. De plus, la contrainte sur  $r_z$  doit être inférieure à 1 afin de garantir que  $|r_z| < 1$  et donc la continuité et la bornitude de  $\eta_d$  et de ses dérivées temporelles successives.

La stabilisation globale du PVTOL par la commande bornée basée sur l'approche non-linéaire proposée par [89] et améliorée dans chapitre 1 de ce mémoire est récapitulé par le théorème suivant.

**Théorème 10** *Le système du PVTOL pour le paramètre de couplage  $\epsilon = 0$  est globalement asymptotiquement stabilisé par l'application de la poussée bornée  $u$  (2.106) et du couple borné  $v$  (2.108). Les paramètres de réglage de la commande  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  et  $\varepsilon_\theta$  sont choisis tels que les commandes satisfassent les contraintes  $\bar{U} > 1$ ,  $\bar{V} > 0$  et  $|r_z| < 1$ .*

Ce théorème est prouvé dans l'Annexe B.6

### 2.5.2 Une étude comparative

Dans cette section, nous présenterons une simulation comparative entre la commande de Théorème 10 et les trois commandes suivantes : L'approche bornée de Zavala *et al.* [104] (équations(2.99-2.100)), et les approches non-bornée de Castillo *et al.* [18] (équations (2.81-2.82-2.85)), d'Olfati-Saber [73] (équations (2.98)). Nous avons pris les mêmes valeurs numériques des paramètres données par Zavala *et al.* [104] et Castillo *et al.* [18]. En revanche, les paramètres de l'approche d'Olfati-Saber [73] n'étant pas donnés, nous avons essayé de trouver les réglages optimaux.

La simulation que nous proposons consiste en la stabilisation de PVTOL (avec  $\epsilon = 0$ ) en utilisant ces quatre approches différentes, à partir du même état initial  $(x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta})^T = (50 \ 0 \ 50 \ 0 \ \frac{3\pi}{5} \ 0)^T$ . Ce choix l'état initial est intéressant puisqu'il inclut de grandes valeurs sur  $x$  et  $y$  et une valeur sur  $\theta$  qui excède  $\frac{\pi}{2}$ . Les résultats de simulation sont présentés dans les figures 2.11-2.12. Sur la figure 2.11, la position  $x$ , la vitesse  $\dot{x}$ , la position verticale  $z$  et la vitesse  $\dot{z}$  du PVTOL sont tracées. L'angle  $\theta$ , la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et les commande  $u$  et  $v$  sont dépeintes dans la figure 2.12. Une observation des résultats de simulation obtenus pour les quatre approches comparées nous permet de faire les remarques suivantes :

- Pour une même durée de temps, le PVTOL est déjà stabilisé par notre approche (Théorème 10), alors qu'il est encore en phase de stabilisation dans l'approche de Zavala *et al.* [104]. La position  $x$ , dans l'approche de Zavala *et al.* [104], exige plus que 3000 unités de temps pour converger à 0. Ceci peut être expliqué par le fait que nous avons adopté l'approche de Sussmann *et al.* [89] améliorée dans Théorème 1 pour concevoir les commande  $r_x$ ,  $r_z$ , et  $v$  tandis que Zavala *et al.* [104] ont employé l'approche de Teel [93]. Dans le chapitre précédent (Section 1.4), nous avons présenté une comparaison entre ces deux approches. Pour la simulation, nous avons seulement présenté les premières 200 unités de temps.
- L'approche d'Olfati-Saber [73], qui est non-bornée, stabilise le système plus rapidement que les trois autres approches mais avec des commandes plus grandes.
- Sur la figure 2.12, l'angle  $\theta$  est stabilisé avec  $\pi$  pour l'approche de [18] c.à.d la stabilisation du PVTOL qui se fait à l'envers qui est considéré comme singularité.
- Pour les quatre approches,  $u$  est telle que  $1 < |u| < 3$ , et  $v$  reste dans l'intervalle  $-2 < |v| < 2$

Pour mettre en relief la performance de notre approche nous avons tracé la position et l'orientation du PVTOL au cours de la stabilisation pour les quatre approches dans la figure 2.13.

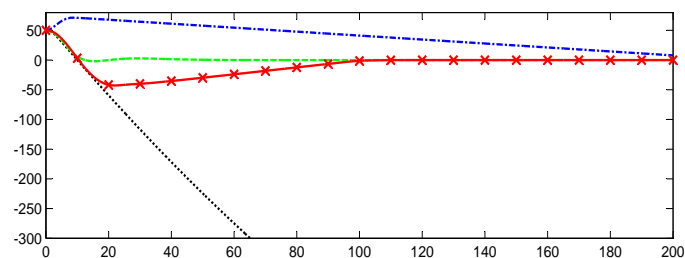
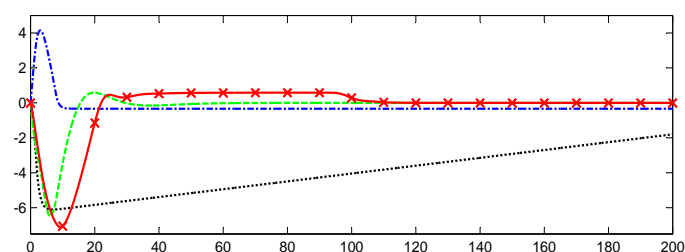
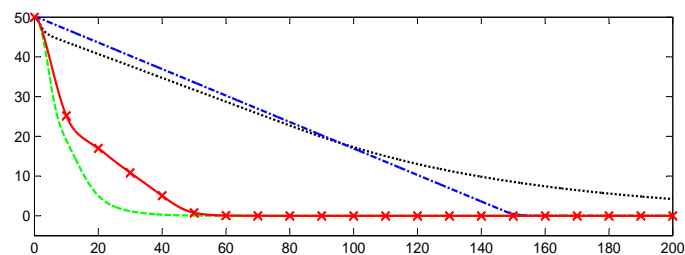
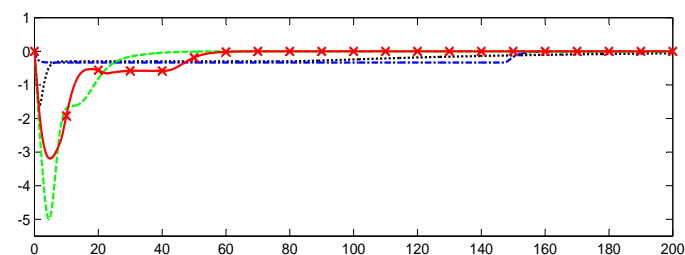
(a)  $x$ (b)  $\dot{x}$ (c)  $z$ (d)  $\dot{z}$ 

FIG. 2.11 – Évolution dans le temps des états du sous-système de translation  $\Sigma_t$  du PVTOL :  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $z$  et  $\dot{z}$ . Comparaison entre la commande bornée du Théorème 10 (croix), l'approche bornée de Zavala *et al.* [104] (trait pointillé), l'approche non-bornée de Castillo *et al.* [18] (tiret-pointillé) et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73] (tiret)

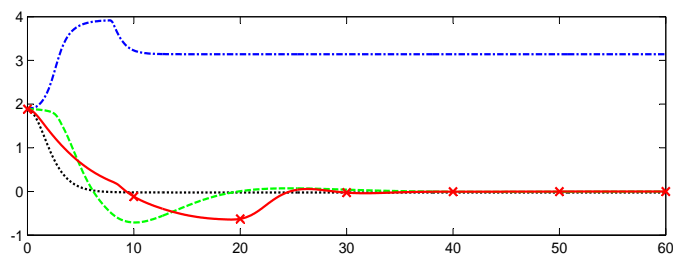
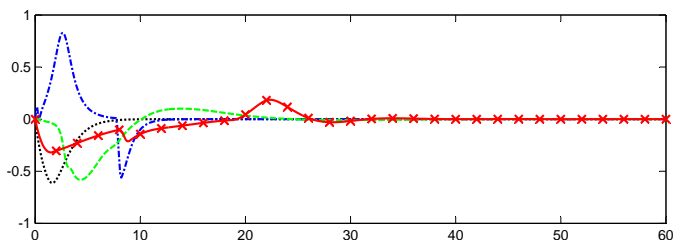
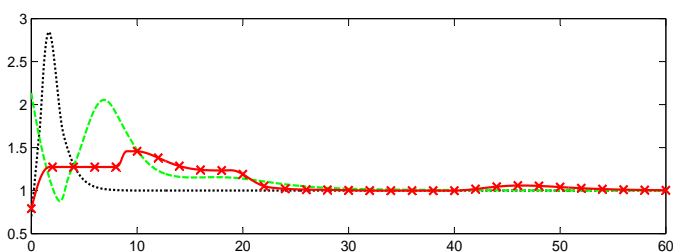
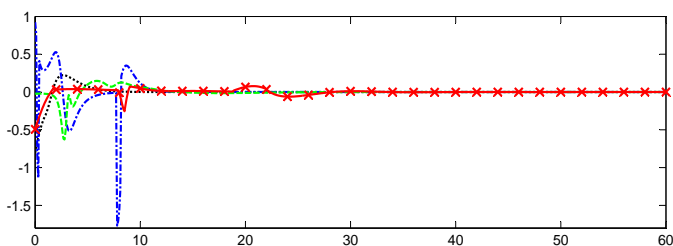
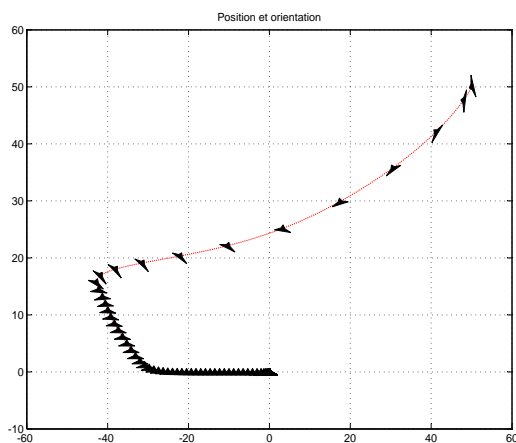
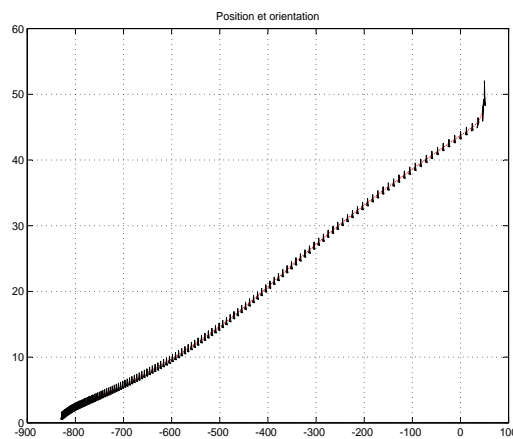
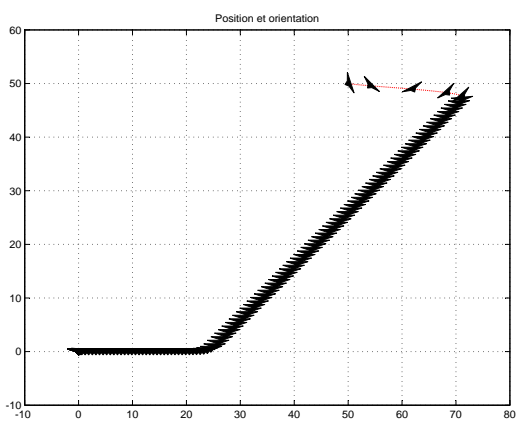
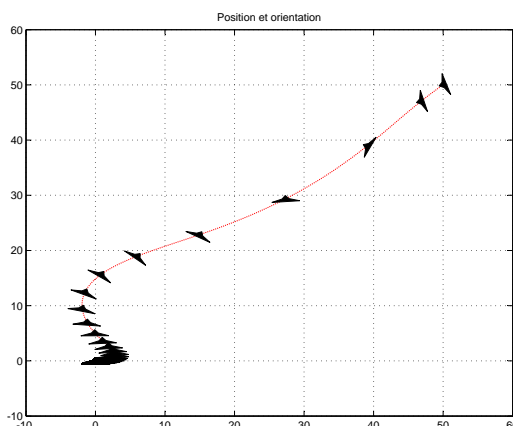
(a)  $\theta$ (b)  $\dot{\theta}$ (c)  $u$ (d)  $v$ 

FIG. 2.12 – Évolution dans le temps des états du sous-système de translation  $\Sigma_r$  du PVTOL ( $\theta$  et  $\dot{\theta}$ ) et les commandes  $u$  et  $v$  pour stabiliser le PVTOL. Comparaison entre la commande bornée de Théorème 10 (croix), l'approche bornée de Zavala *et al.* [104] (trait pointillé), l'approche non-bornée de Castillo *et al.* [18] (tiret-pointillé) et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73] (tiret)



(a) la commande bornée de Théorème 10

(b) Zavala *et al.* [104](c) Castillo *et al.* [18]

(d) Olfati-Saber [73]

FIG. 2.13 – Trajectoires du PVTOL (pour le même temps) en appliquant la commande bornée de Théorème 10, l'approche bornée de Zavala *et al.* [104], l'approche non-bornée de Castillo *et al.* [18] et l'approche non-bornée d'Olfati-Saber [73]

## 2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié la commande des avions à décollage et atterrissage verticaux (PVTOL). Le problème de la stabilisation de ce système sous-actionné a attiré beaucoup d'attention parce qu'il est considéré comme une



première étape pour développer des lois de commande pour les avions réels et les VTOL en général. Par exemple, le PVTOL est la projection dans un plan des avions à décollage et atterrissage court et le quadrirotor.

En premier lieu, on a considéré la commande bornée de PVTOL sans gravité, c'est à dire le système chaîné à inertie. Nous avons appliqué une commande prédictive rapide basée sur la formulation contractive et la paramétrisation des profils de commande [4]. Plusieurs configurations ont été examinées avec succès même en commençant par des conditions singulières. Les simulations ont également montré que cette commande est apte pour les applications embarquées qui nécessitent un temps de calcul très réduit.

En second lieu, nous avons classifié les commandes pour le PVTOL avec gravité et nous avons proposé une loi de commande non-linéaire bornée pour stabiliser le PVTOL. Cette commande est basée sur la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs sous la commande bornée (somme de fonctions de saturation) et sur l'analyse de Lyapunov pour les systèmes en cascades. Des simulations numériques ont montré l'efficacité de la commande proposée en comparaison avec les approches existantes (bornées et non-bornées).

Dans le chapitre suivant, la commande non-linéaire appliquée au PVTOL avec gravité sera généralisée pour la stabilisation du quadrirotor dans l'espace.

# Chapitre 3

## Le quadrirotor

### 3.1 Introduction

Nous avons étudié au chapitre 1 la stabilisation globale d'une chaîne d'intégrateurs par l'application des commandes non-linéaires bornées. Une de ces commandes a été appliquée combinée avec la théorie des systèmes en cascade au chapitre 2 pour établir la stabilité globale du PVTOL qui représente la projection d'un quadrirotor dans le plan. Dans ce chapitre, nous généralisons ces résultats au cas de la stabilisation globale du quadrirotor. Nous présenterons d'abord le modèle dynamique du quadrirotor étudié par plusieurs équipes de recherche. Ce modèle récapitule les relations entre les forces et les couples produites par le quadrirotor d'une côté et les mouvements de l'aéronef dans l'espace (translation et rotation) d'une autre côté. Ce modèle sera utilisé dans notre étude pour synthétiser les lois de commande. Nous aborderons ensuite le problème de stabilisation globale de l'orientation du quadrirotor par des commandes bornées. Ce problème est une application directe d'un problème plus général connu par les automaticiens sous le titre "stabilisation de l'attitude d'un corps rigide". Cette commande a été mise en pratique avec succès sur le quadrirotor du **gipsa-lab** dans le cadre de la thèse de J.F. Guerrero Castellanos [29]. Nous étudierons également la stabilisation globale de la position du quadrirotor en généralisant l'approche non-linéaire appliquée dans le cas du PVTOL.

### 3.2 Quadrirotor du **gipsa-lab**

Dans cette section, nous présentons certaines caractéristiques physiques des quadrirotors dont celui de **gipsa-lab** représenté sur la figure 3.1. Le quadrirotor est constitué de quatre rotors fixés aux extrémités d'un corps rigide en forme de croix normalement en fibre de carbone. Le rotor est constitué d'une pale à pas fixe accouplée à un moteur à courant continu ou brushless par l'intermédiaire d'un engrenage.

Dans le système actuel, le sens de la rotation de chaque rotor est fixé mais ceci peut



FIG. 3.1 – Le quadrirotor de **gipsa**-lab

être changé dans des travaux futurs. Dans notre prototype actuel, les sens de rotation des rotors (avant-arrière) et (droite-gauche) sont opposés. En conséquence, les effets gyroscopiques tendent à s'annuler en vol stationnaires comme souligné par Castillo *et al.* [17]. L'électronique de commande (module de capteur d'attitude et module de communication) avec la batterie sont placés au centre du corps du quadrirotor.

### 3.2.1 Caractéristiques physiques

Les caractéristiques physiques du quadrirotor présentées dans cette section ont été étudiées en détail par McKerrow [68]. La masse totale du quadrirotor  $m$  est la somme de la masse de la croix ( $m_c$ ), les masses des quatre rotors considérés comme identiques ( $m_i$   $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) et la masse de l'électronique et batterie ( $m_b$ ) :

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c + m_b$$

La structure du quadrirotor est considérée parfaitement symétrique et en conséquence la matrice d'inertie  $J$  est diagonale :

$$J = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

avec  $I_x$  représente l'inertie autour l'axe  $\vec{t}_1$  qui passe entre le centre de la croix et les rotors (avant-arrière),  $I_y$  représente l'inertie autour l'axe  $\vec{t}_2$  qui passe entre le centre de la croix et les rotors (droite-gauche) et finalement  $I_z$  représente l'inertie autour l'axe  $\vec{t}_3$  perpendiculaire au plan de  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  (voir figure 3.2).

L'inertie  $I_x$  est la somme de l'inertie de la croix ( $I_{cx}$ ), l'inertie des quatre moteurs ( $I_{mx1}$ ,  $I_{mx2}$ ,  $I_{mx3}$  et  $I_{mx4}$ ) et l'inertie de l'électronique ( $I_{bx}$ ) autour du point d'intersection de la croix :

$$I_x = I_{cx} + I_{mx1} + I_{mx2} + I_{mx3} + I_{mx4} + I_{bx} \quad (3.2)$$

On peut suivre la même démarche pour trouver les expressions des inerties  $I_y$  et  $I_z$ . L'inertie du croix autour le point d'intersection est donnée par :

$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{m_c(2l)^2}{12} + \frac{m_c d^2}{2} \quad (3.3)$$

$$I_{cz} = \frac{m_c(2l)^2}{6} \quad (3.4)$$

où  $d$  est le diamètre des poutres qui constituent la croix et  $l$  est la distance entre le centre de la croix et un de quatre rotors. Pour trouver les inerties des moteurs McKerrow [68] considère le moteur comme un cylindre de longueur  $p_m$  avec un rayon  $r_m$ , alors l'inertie du moteur d'avant autour le point d'intersection du croix est :

$$I_{mx1} = \frac{m_1 r_m^2}{4} + \frac{m_1 p_m^2}{3} \quad (3.5)$$

$$I_{my1} = \frac{m_1 r_m^2}{4} + \frac{m_1 p_m^2}{3} + m_1 l^2 \quad (3.6)$$

$$I_{mz1} = \frac{m_1 r_m^2}{2} + m_1 l^2 \quad (3.7)$$

L'électronique et la batterie s'accrochant au-dessous de l'intersection à une distance  $l_0$  sont modélisées par un parallélépipède rectangulaire avec des dimensions  $a_b$ ,  $w_b$ , et  $h_b$

$$I_{bx} = \frac{m_b(w_b^2 + h_b^2)^2}{12} + m_b l_0^2 \quad (3.8)$$

$$I_{by} = \frac{m_b(a_b^2 + h_b^2)^2}{12} + m_b l_0^2 \quad (3.9)$$

$$I_{bz} = \frac{m_b(w_b^2 + a_b^2)^2}{12} \quad (3.10)$$

Pour le quadrirotor considéré comme un corps rigide, nous définissons deux repères : Le repère terrestre fixe  $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un repère mobile fixé au centre de masse du

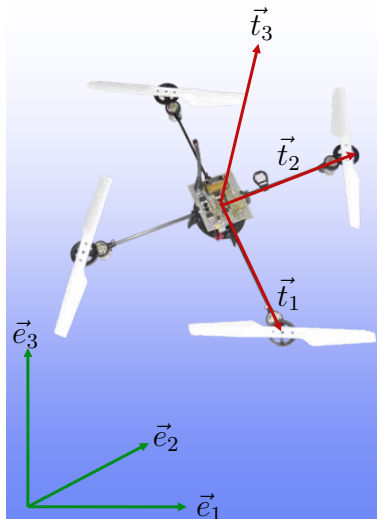


FIG. 3.2 – Le repère terrestre fixe  $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un repère mobile fixé au centre de masse du quadrirotor  $T(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$

quadrirotor  $T(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$  (voir figure 3.2). Pour le passage entre les deux repères la communauté d'aéronautique utilise généralement la rotation premièrement autour de l'axe  $\vec{t}_3$ , ensuite autour de l'axe  $\vec{t}_2$  et finalement autour de l'axe  $\vec{t}_1$ . Ces rotations sont exprimées respectivement par trois matrices de rotation  $R(\vec{t}_1, \phi)$ ,  $R(\vec{t}_2, \theta)$  et  $R(\vec{t}_3, \psi)$ .

Premièrement la matrice de rotation  $R(\vec{t}_1, \phi)$  d'angle de roulis  $\phi$  autour l'axe  $\vec{t}_1$  avec  $-\pi < \phi < \pi$  :

$$R(\vec{t}_1, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Deuxièmement la rotation d'angle de tangage  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{t}_2$  avec  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  :

$$R(\vec{t}_2, \theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et finalement la rotation d'angle de lacet  $\psi$  autour de l'axe  $\vec{t}_3$  avec  $-\pi < \psi < \pi$  :

$$R(\vec{t}_3, \psi) = \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Le passage du repère fixe  $E$  vers le repère  $T$  est fait à travers  $R = R(\phi, \theta, \psi)$ , la matrice de rotation totale :

$$R = R(\vec{t}_3, \psi)R(\vec{t}_2, \theta)R(\vec{t}_1, \phi) = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où  $c_\theta$  et  $s_\theta$  dans l'équation (3.14) dénotent respectivement  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

### 3.2.2 Forces et couples

Dans cette section nous présentons les forces aérodynamiques et les couples externes qui sont appliqués sur le quadrirotor. Pour les forces, nous avons le poids du quadrirotor plus les forces produites par la rotation des rotors. La vitesse de rotation des rotors  $s_i$  génère des forces aérodynamiques pour décoller, tourner et faire atterrir le quadrirotor. Les qualités aérodynamiques du rotor sont déterminées par le profil des pales. Ce profil est une coupe de la pale perpendiculaire à l'axe de la pale. La force aérodynamique peut être décomposée en deux forces projetées suivant deux axes :

- La traînée  $D_i$  parallèle au plan de rotation de la pale
- La portance  $F_i$  suivant la perpendiculaire du plan de rotation de la pale

La traînée correspond à la résistance à l'avancement dans l'air (à cause de l'accélération de la masse d'air soumise à la rotation des pales). La portance assure la sustentation, c'est grâce à elle que le quadrirotor compense le poids, décolle et se maintient dans l'air.

Le calcul de la portance d'un rotor constitue la première étape dans le processus d'estimation des effort agissant sur la structure de l'engin. D'après Mahony et Hamel [61], la portance  $F_i$  produite par un rotor  $i$  est donné par :

$$F_i = C_\alpha s_i^2 (\alpha_i - \beta_i) \quad (3.15)$$

où  $s_i$  est la vitesse de rotation des pales,  $\alpha_i$  le pas collectif et  $\beta_i$  l'angle d'incidence (angle d'inclinaison des pales par rapport au vent relatif). Le coefficient  $C_\alpha$  est une constante qui dépend de la masse volumique de l'air  $\rho$ , du rayon des pales  $r$  et leur nombre  $n$ , de la longueur de corde des pales  $c$  et de la pente de la courbe de portance par radian  $a$  :

$$C_\alpha = \frac{1}{4} \rho r^3 c a \quad (3.16)$$

Dans les conditions proche du vol stationnaire, l'expression de la portance peut être ré-écrite comme suit [61] :

$$F_i = C_\alpha s_i^2 \alpha_i - C_\beta s_i \sqrt{F_i} \quad (3.17)$$

où  $C_\beta = \frac{C_\alpha}{r\sqrt{2\rho S}}$  et  $S$  désigne la surface du disque du rotor. Les constantes  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  ne sont pas connues de façon précise et dépendent de plusieurs facteurs entre autres la densité de l'air, l'humidité et la proximité du sol. La relation entre la portance  $F_i$  et le pas collectif  $\alpha_i$  est non-linéaire et ceci rend le contrôle de la portance difficile pour la plupart des configurations d'hélicoptères existantes. Dans le cas du quadrirotor, le pas collectif de chaque rotor est fixé à une valeur constante. La relation (3.17) s'écrit :

$$F_i = k_l s_i^2 \quad (3.18)$$

où

$$k_l = \frac{4C_\alpha^2 \alpha_i}{(C_\beta + \sqrt{(4C_\alpha \alpha_i + C_\beta^2)})^2} \quad (3.19)$$

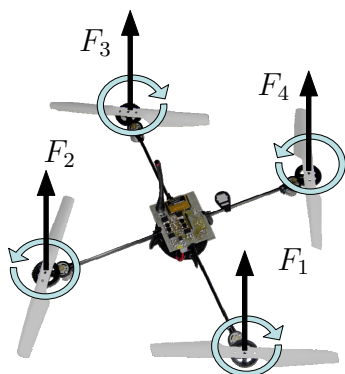


FIG. 3.3 – Les portances du quadrirotor

Pour la traînée  $D_i$ , Poutry [77] propose la forme suivante :

$$D_i = C_d \rho s_i^2 = k_d s_i^2 \quad (3.20)$$

où  $C_d$  représente le coefficient de traînée multiplié par la surface de pales et  $\rho$  est la masse volumique de l'air.

L'action de l'air sur chaque rotor, crée un couple de contre-rotation agissant suivant l'axe de pivot de chaque rotor. Dans notre cas où le pas collectif est fixe, l'action de l'air sur les pales d'un rotor est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de ces pales. Alors, l'expression d'anti-couple s'écrit [61] :

$$\Gamma_i = d s_i^2 \quad (3.21)$$

où  $d$  est une constante positive "difficilement" mesurable. Il faut noter que les rotors du quadrirotor ont un profil circulaire. Avec ce profil, la portance et la traînée augmentent avec l'angle d'incidence. Dans notre cas, le quadrirotor a des pales à pas fixe mais ces pales sont tout à fait flexibles et probablement l'angle d'incidence change pendant l'accélération et la rotation.

### Les mouvements de rotation

L'étude des portances et traînées de chaque rotor nous aide à identifier les couples actifs et par conséquent les mouvements de rotation du quadrirotor dans le repère mobile  $T(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ .

La différence entre les portances gauche et droite produit le couple  $\Gamma_r$  responsable du mouvement de roulis :

$$\Gamma_r(s_2, s_4) = l(F_4 - F_2) = k_l l(s_4^2 - s_2^2) \quad (3.22)$$

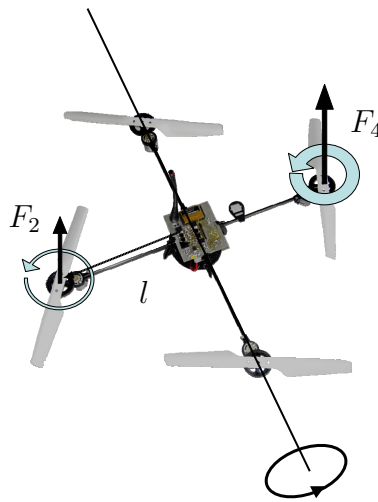


FIG. 3.4 – Le mouvement de roulis du quadrirotor

Le mouvement de tangage est produit par le couple  $\Gamma_p$  causé par la dissymétrie entre les portances produites par le rotor avant et arrière :

$$\Gamma_p(s_1, s_3) = l(F_3 - F_1) = k_l l(s_3^2 - s_1^2) \quad (3.23)$$



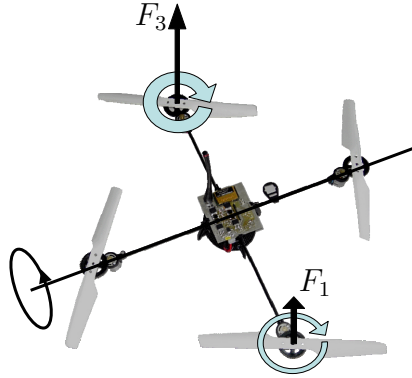


FIG. 3.5 – Le mouvement de tangage du quadrirotor

Le mouvement de lacet est le résultat de la somme des couples résistants générés par les traînée  $D_i$ ,  $i = 1 \dots 4$  autour du centre de l'engin puisque l'axe de rotation des pales est loin du centre du quadrirotor :

$$\Gamma_y(s_1, s_2, s_3, s_4) = \Gamma_2 + \Gamma_4 - \Gamma_1 - \Gamma_3 = d(s_2^2 + s_4^2 - s_1^2 - s_3^2) \quad (3.24)$$

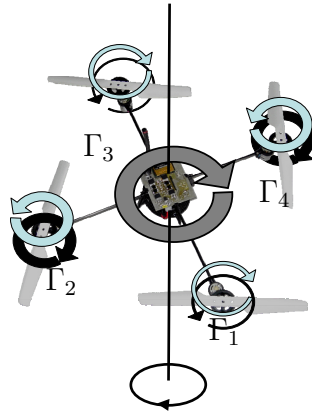


FIG. 3.6 – Le mouvement de lacet du quadrirotor

Ces trois couples forment le couple actif  $\Gamma_a$  :

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_r(s_2, s_4) \\ \Gamma_p(s_1, s_3) \\ \Gamma_y(s_1, s_2, s_3, s_4) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

En considérant chaque rotor comme étant un disque rigide tournant à la vitesse  $s_i$  autour de l'axe  $t_3$  de la structure, le rotor subit les rotations du fuselage. Alors, les couples gyroscopiques  $\Gamma_g$  sont exprimés sous la forme :

$$\Gamma_g = - \sum_i I_r \vec{\omega}^\times \vec{t}_3 s_i \quad (3.26)$$

Les couples gyroscopiques sont la conséquence de la rotation simultanée de la structure du quadrirotor et de la rotation à grande vitesse des rotors qui possèdent une certaine inertie  $I_r$ .

Le vecteur  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  dans l'équation (3.26) représente le vecteur des vitesses angulaires du quadrirotor dans le repère mobile.  $\vec{\omega}^\times$  représente la matrice anti-symétrique de vecteur  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{\omega}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Le vecteur  $\vec{\omega}$  est exprimé par rapport aux vitesses de rotations  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  dans  $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(x, \phi)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + (R(y, \theta)R(x, \phi))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.3 Modèle dynamique du quadrirotor

Plusieurs auteurs ont étudié la modélisation du quadrirotor. Cette étape est considérée comme le premier pas pour construire des lois de commande. Le modèle dynamique obtenu représente la relation d'un part entre les forces et les couples aérodynamiques provoqués par la rotation des rotors et l'engin, et d'autre part les accélérations de translation et de rotation du centre de masse du quadrirotor. Nous présenterons d'abord la dynamique de rotation qui décrit l'attitude du quadrirotor et son orientation dans le repère terrestre fixe  $E$ . Ensuite la dynamique de translation des coordonnées cartésiennes de la position  $\vec{p}$  et la vitesse  $\vec{v}$  exprimés dans le repère terrestre fixe  $E$  est présentée.

#### 3.3.1 L'attitude du quadrirotor

L'orientation du quadrirotor, ou l'attitude, est fondamentalement représentée par un ensemble de deux équations. La première est l'équation dynamique d'Euler, qui décrit l'évolution temporelle du vecteur de vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . La deuxième

est l'équation cinématique qui relie les dérivés temporelles des angles d'orientation avec le vecteur de vitesse angulaire. Plusieurs paramétrisations cinématiques (ou représentations) existent pour décrire l'orientation du quadrirotor [84]. Les représentations généralement utilisées sont les angles d'Euler et les paramètres d'Euler connus sous le nom de quaternion unitaire.

### Représentation de l'attitude par les angles d'Euler

La représentation de l'attitude par les angles d'Euler est faite en appliquant trois rotations successives des angles d'Euler (exprimé dans  $T$ ) autour  $\vec{t}_3, \vec{t}_1$  et à nouveau  $\vec{t}_3$ . Le modèle dynamique décrivant l'attitude du quadrirotor contient une composante gyroscopique additionnelle provoquée par la combinaison des rotations du fuselage et les quatre rotors. Dans le cas où la composante gyroscopique est nulle, ce modèle dynamique se réduit au modèle bien connu utilisé dans la littérature pour la commande d'attitude d'un corps rigide. Le modèle dynamique de rotation du quadrirotor en utilisant la représentation par les angles d'Euler s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{R} &= R\vec{\omega}^\times \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{\text{tot}} \end{cases} \quad (3.29)$$

$\Gamma_{\text{tot}}$  est l'ensemble des couple s'exerçant sur la structure du quadrirotor :

$$\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_g + \Gamma_{\text{pert}} + \Gamma_a \quad (3.30)$$

avec  $\Gamma_a$  défini par équation (3.25) et  $\Gamma_g$  défini par équation (3.26)

### Représentation de l'attitude par le quaternion

Les représentations à trois paramètres comme les angles d'Euler montrent toujours des orientations singulières. Cette singularité est connue en anglais sous le nom de "gimbal lock" ou serrure de Cardan. En conséquence, plusieurs auteurs choisissent le quaternion unitaire (ou paramètres d'Euler). Cette représentation est une des représentations à quatre paramètres qui représentent globalement l'attitude d'un corps rigide dans l'espace sans singularité. Cependant, une équation additionnelle de contrainte est ajoutée. Le quaternion est définie par :

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \vec{k} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad (3.31)$$

avec

$$\mathbb{H} = \{q \mid q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1, q = [q_0 \ \vec{q}]^T, q_0 \in \mathbb{R}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.32)$$

$\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  et  $q_0$  sont respectivement la valeur vectorielle et la valeur scalaire du quaternion,  $\beta$  représente l'angle de rotation autour l'axe  $\vec{k}$  et  $q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1$  est

l'équation additionnelle de contrainte.

La dynamique de rotation du quadrirotor en fonction du quaternion prend donc la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega})q = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{\text{tot}} \end{cases} \quad (3.33)$$

avec

$$\Omega(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\omega}^T \\ \vec{\omega} & -\vec{\omega}^\times \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

et

$$\Xi(q) = \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_{3 \times 3}q_0 + \vec{q}^\times \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

La matrice de rotation  $R$  est liée avec le quaternion en utilisant la formule de Rodrigues comme donné par Tayebi et McGillvray [91] :

$$R = I_{3 \times 3} + 2q_0\vec{q}^\times + 2(\vec{q}^\times)^2 \quad (3.36)$$

$$= I_{3 \times 3} + \sin \beta \vec{k}^\times + (1 - \cos \beta)(\vec{k}^\times)^2 \quad (3.37)$$

Nous pouvons trouver la partie vectorielle du quaternion  $\vec{q}$  en appliquant l'équation donnée par Lizarralde et Wen [56] :

$$\vec{q}^\times = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}R}}(R - R^T) \quad (3.38)$$

où  $\text{tr}R$  est la trace de la matrice  $R$ . La valeur scalaire du quaternion  $q_0$  est déduite d'après l'équation de la contrainte  $q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1$ . Bien que la représentation par le quaternion soit non singulière, elle contient une ambiguïté de signe. Les deux couples  $(q_0, \vec{q})$  et  $(-q_0, -\vec{q})$  donnent la même orientation.

### 3.3.2 La dynamique de translation

La dynamique de translation du quadrirotor est représentée par l'équation dynamique de Newton qui relie l'accélération linéaire du centre de masse du quadrirotor avec les forces externes agissant sur le quadrirotor ([72] et [76])

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}} &= \vec{v} \\ m\dot{\vec{v}} &= -mg\vec{e}_3 + R(\sum_i F_i(s_i)\vec{t}_3) \end{cases} \quad (3.39)$$

avec le vecteur de position  $\vec{p} = (x, y, z)$  et le vecteur de vitesse linéaire  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . La somme des portances  $F_i$  est la poussée  $u$  :

$$u = \sum_i F_i(s_i) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (3.40)$$

## 3.4 Modèles dynamiques proposés

Dans cette section, nous présentons différents modèles dynamiques du quadrirotor développés dans la littérature qui peuvent être classés en deux catégories : la modélisation selon Euler-Lagrange et la modélisation selon Newton-Euler.

### 3.4.1 Modélisation selon Euler-Lagrange

Le développement de la dynamique de rotation du quadrirotor est basé sur le calcul de variation de Euler-Lagrange des coordonnées généralisées

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \quad (3.41)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentent la position du centre de masse du quadrirotor. Les angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  représentent l'orientation du quadrirotor dans le repère mobile. Dans cet étude, le Lagrangien dénoté par  $L$  est la différence entre l'énergie cinétique  $T$  (provoquée par les vitesse angulaire et la vitesse linéaire de translation) et l'énergie potentielle  $V$  :

$$L = T - V$$

#### Modèle de Castillo *et al.* [17]

Nous présentons dans cette partie le travail de Castillo *et al.* [17] qui utilise l'approche d'Euler-Lagrange pour modéliser le quadrirotor. Dans ce travail, l'objectif est de trouver Lagrangien ( $L$ ). L'énergie cinétique est composée de deux termes. Le premier terme est l'énergie cinétique de translation donnée par :

$$T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (3.42)$$

avec  $\xi := (x, y, z)$  et  $m$  est la masse de l'appareil. L'énergie cinétique de rotation est le deuxième terme et s'écrit par :

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (3.43)$$

où  $J$  est la matrice d'inertie du quadrirotor (équation (3.1)) et  $\eta := (\psi, \theta, \phi)$ . L'énergie potentielle dans ce travail dépend seulement de l'altitude  $z$  :

$$V = mgz \quad (3.44)$$

On a donc l'expression de Lagrangien :

$$L = T_{trans} + T_{rot} - V = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} - mgz \quad (3.45)$$

En utilisant les équations de Euler-Lagrange avec la force généralisée externe, on peut trouver la dynamique du quadrirotor

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F \quad (3.46)$$

où  $F$  représente la force généralisée externe composée de la portance  $F_\xi$  (exprimée dans le repère fixe  $E$ ) et  $\Gamma_a$  le couple actif (équation (3.25)). Dans ce travail, les auteurs négligent les petites forces parce qu'elles sont généralement d'une grandeur beaucoup plus petite que les entrées de commande. La portance est donc obtenue par la multiplication entre la matrice de transformation  $R$  et  $\hat{F}$  :

$$F_\xi = R\hat{F} \quad (3.47)$$

avec

$$\hat{F} = (0, 0, u)^T \quad (3.48)$$

où  $u$  est la somme des portances des quatre rotors

$$u = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Puisque le Lagrangien ne contient aucun terme dans l'énergie cinétique combinant  $\dot{\xi}$  et  $\dot{\eta}$ , l'équation de Euler-Lagrange peut être divisée en deux parties : la dynamique des coordonnées  $\xi$  et la dynamique de  $\eta$ . On obtient :

$$m\ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi \quad (3.49)$$

$$J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \Gamma_a \quad (3.50)$$

On obtient finalement :

$$m\ddot{\xi} = u \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$J\ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \Gamma_a \quad (3.52)$$

La matrice de Coriolis  $C(\eta, \dot{\eta}) = (\dot{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J))$  contient les termes gyroscopiques et centrifuges liés à  $\eta$ .

### Modèle de Bouabdallah *et al.* [14]

Dans cette approche, l'équation de Euler-Lagrange est employée pour obtenir la dynamique de rotation du quadrirotor. L'énergie cinétique du quadrirotor est exprimée par :

$$T = \frac{1}{2} [I_x(\dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta)^2 + I_y(\dot{\theta}c_\phi + \dot{\psi}s_\phi c_\theta)^2 + I_z(\dot{\theta}s_\phi - \dot{\psi}c_\phi c_\theta)^2] \quad (3.53)$$

L'énergie potentielle est exprimée dans le repère fixe  $E$  par :

$$V = \int x dm(x)(-gs_\theta) + \int y dm(y)(gs_\phi c_\theta) + \int z dm(z)(gc_\phi c_\theta) \quad (3.54)$$

L'équation de Euler-Lagrange prend la forme suivante avec  $f_i$  les forces externes et  $q_i$  les coordonnées généralisées :

$$f_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.55)$$

Pour le roulis, le calcul de la partie gauche de l'équation de Euler-Lagrange nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= I_x \dot{\omega}_1 - (I_y - I_z) \omega_2 \omega_3 \\ &+ \int y dm(y) \cdot (-gc_\phi c_\theta) + \int z dm(z) (gs_\phi c_\theta) \end{aligned}$$

Pour le tangage, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -s_\phi (\dot{\omega}_3 I_z - \omega_x \omega_y (I_x - I_y)) + c_\phi (\dot{\omega}_2 I_y - \omega_1 \omega_3 (I_z - I_x)) \\ &+ \int x dm(x) (-gc_\theta) - \int y dm(y) (gs_\phi s_\theta) - \int z dm(z) (gc_\phi s_\theta) \end{aligned}$$

et enfin pour le lacet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -s\theta (\dot{\omega}_1 I_x - \omega_2 \omega_3 (I_y - I_z)) + s_\phi c_\theta (\dot{\omega}_2 I_y - \omega_1 \omega_3 (I_z - I_x)) \\ &+ c_\phi c_\theta (\dot{\omega}_3 I_z - \omega_1 \omega_2 (I_x - I_y)) \end{aligned}$$

Pour les couples nous avons  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_y$  plus les couples produits par les effets gyroscopiques lors de la rotation autour de l'axe  $\vec{t}_1$  ou  $\vec{t}_2$ . Lors d'une rotation autour de  $\vec{t}_1$ , le couple gyroscopique sur l'axe  $\vec{t}_2$  est :

$$\Gamma_g^y = J_r \omega_1 (-s_1 - s_3 + s_2 + s_4) \quad (3.56)$$

De la même manière, nous obtenons le couple gyroscopique sur l'axe  $\vec{t}_1$  :

$$\Gamma_g^x = J_r \omega_2 (s_2 + s_4 - s_1 - s_3) \quad (3.57)$$

En isolant l'accélération et en appliquant l'approximation des petits angles, où les vitesses des angles d'Euler sont identiques aux vitesses angulaires dans le repère mobile, on obtient :

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega + \frac{\Gamma_r}{I_x} \quad (3.58)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) - \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi} \Omega + \frac{\Gamma_p}{I_y} \quad (3.59)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{\Gamma_y}{I_z} \quad (3.60)$$

avec

$$\Omega = s_2 + s_4 - s_1 - s_3 \quad (3.61)$$

Ce modèle présente l'inconvénient d'être basé sur une hypothèse de petit angle ce qui limite son application.

### 3.4.2 Modélisation selon Newton-Euler

Dans cette approche, l'équation (3.39) est employée pour décrire la dynamique de translation tandis que l'équation (3.29) est employée pour décrire la dynamique de rotation. Pour récapituler, nous avons les quatre équations suivantes :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} \quad (3.62)$$

$$m \dot{\vec{v}} = -mg \vec{e}_3 + R \left( \sum_i F_i(s_i) \vec{t}_3 \right) \quad (3.63)$$

$$\dot{R} = R \vec{\omega}^\times \quad (3.64)$$

$$J \dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \Gamma_{\text{tot}} \quad (3.65)$$

Ce modèle dynamique est adopté par plusieurs auteurs comme Hamel *et al.* [34], Pounds *et al.* [76] et Bouabdallah *et al.* [13].



**Modèle de Bouabdallah *et al.* [13]**

Le modèle complet est obtenu en développant les équations (3.62-3.65) :

$$\ddot{x} = \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \quad (3.66)$$

$$\ddot{y} = \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \quad (3.67)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{u}{m}(\cos \phi \cos \theta) \quad (3.68)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega + \frac{\Gamma_r}{I_x} \quad (3.69)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) - \frac{J_r}{I_y}\dot{\phi}\Omega + \frac{\Gamma_p}{I_y} \quad (3.70)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{\Gamma_y}{I_z} \quad (3.71)$$

avec

$$u = k_l(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$\Omega = s_2 + s_4 - s_1 - s_3$$

**Modèle de Altug *et al.* [7]**

Altug *et al.* [7] ont développé un modèle semblable au modèle Bouabdallah *et al.* [13] en utilisant l'équilibre entre les forces et les moments. Ce modèle peut être employé dans le cas de vitesses basses où la traînée peut être négligée :

$$\ddot{x} = \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) - \frac{k_1}{m}\dot{x} \quad (3.72)$$

$$\ddot{y} = \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) - \frac{k_2}{m}\dot{y} \quad (3.73)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{u}{m}(\cos \phi \cos \theta) - \frac{k_3}{m}\dot{z} \quad (3.74)$$

$$\ddot{\theta} = lv_1 - l\frac{k_4}{I_y}\dot{\theta} \quad (3.75)$$

$$\ddot{\phi} = lv_2 - l\frac{k_5}{I_x}\dot{\phi} \quad (3.76)$$

$$\ddot{\psi} = v_3 - \frac{k_6}{I_z}\dot{\psi} \quad (3.77)$$

avec

$$v_1 = (-F_1 - F_2 + F_3 + F_4)/I_y$$

$$v_2 = (-F_1 + F_2 + F_3 - F_4)/I_x$$

$$v_3 = C(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)/I_z$$

la constante  $C$  est le facteur entre la force et le moment et  $\{k_i\}_{i=1,\dots,6}$  sont les coefficients de traînée. Ce modèle sera utilisé dans notre travail pour la stabilisation du quadrirotor.

### 3.4.3 Discrétisation du modèle du quadrirotor

Nous finissons cette section en présentant notre travail sur la discrétisation du modèle du quadrirotor. Ce travail n'est pas employé dans cette thèse mais il peut être employé dans le développement des lois de commande pour la stabilisation du quadrirotor (par exemple prédictive) avec un coût de calcul très réduit. Ce travail est le prolongement naturel du travail sur le PVTOL présenté par Poulin *et al.* [75]. Considérons le modèle du quadrirotor proposé par Altug *et al.* [7] (équations (3.72-3.77)) en négligeant les coefficients de la traînée et en prenant par soucis de normalisation la masse du quadrirotor égale à l'unité :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} &= u(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} &= -g + u(\cos \phi \cos \theta) \\ \ddot{\theta} &= v_\theta \\ \ddot{\phi} &= v_\phi \\ \ddot{\psi} &= v_\psi\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}v_\theta &= lv_1 \\ v_\phi &= lv_2 \\ v_\psi &= v_3\end{aligned}$$

Le même travail peut être mené sur le modèle de Bouabdallah *et al.* [13]. La première étape consiste à découpler le produit des sinus et des cosinus présents dans les équations de  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  et  $\ddot{z}$  par l'application des formules de Werner. Pour deux angles quelconques  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons :

$$\begin{aligned}2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \\ 2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\ddot{x} = \frac{u}{4}[\sin(\vartheta^1) - \sin(\vartheta^2) + \sin(\vartheta^3) - \sin(\vartheta^4) + 2 \cos(\varphi^1) - 2 \cos(\varphi^2)] \quad (3.78)$$

$$\ddot{y} = \frac{u}{4}[\cos(\vartheta^1) - \cos(\vartheta^2) - \cos(\vartheta^3) + \cos(\vartheta^4) - 2 \sin(\varphi^1) - 2 \sin(\varphi^2)] \quad (3.79)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{u}{2}[\cos(\varphi^3) + \cos(\varphi^4)] \quad (3.80)$$

$$\ddot{\phi} = v_\phi \quad (3.81)$$

$$\ddot{\theta} = v_\theta \quad (3.82)$$

$$\ddot{\psi} = v_\psi \quad (3.83)$$

avec

$$\vartheta^1 := \phi - \psi + \theta$$

$$\vartheta^2 := \phi - \psi - \theta$$

$$\vartheta^3 := \phi + \psi + \theta$$

$$\vartheta^4 := \phi + \psi - \theta$$

$$\varphi^1 := \phi - \psi$$

$$\varphi^2 := \phi + \psi$$

$$\varphi^3 := \phi - \theta$$

$$\varphi^4 := \phi + \theta$$

La discrétisation du quadrirotor est faite en appliquant les entrées de commande constantes par morceaux pour un horizon fini  $t_f$ , tel que  $t_f = NT$  où  $T$  est une période d'échantillonnage et  $N$  est le nombre de périodes :

$$U = (u^0, u^1 \dots u^{N-1})^T \quad (3.84)$$

$$V_\phi = (v_\phi^0, v_\phi^1 \dots v_\phi^{N-1})^T \quad (3.85)$$

$$V_\theta = (v_\theta^0, v_\theta^1 \dots v_\theta^{N-1})^T \quad (3.86)$$

$$V_\psi = (v_\psi^0, v_\psi^1 \dots v_\psi^{N-1})^T \quad (3.87)$$

Dans ce cas-ci, la dynamique de trois angles  $(\phi, \theta, \psi)$  pendant l'intervalle  $[t + kT, \tau]$  avec  $t + kT < \tau \leq t + (k + 1)T$  peut être exprimée par des équations quadratiques en  $\tau \in [t + kT, t + (k + 1)T]$  (plus des détails sont dans Annexe C.1) :

$$\phi = \alpha_k^\phi + \beta_k^\phi[\tau - (t + kT)] + \gamma_k^\phi[\tau - (t + kT)]^2 \quad (3.88)$$

$$\theta = \alpha_k^\theta + \beta_k^\theta[\tau - (t + kT)] + \gamma_k^\theta[\tau - (t + kT)]^2 \quad (3.89)$$

$$\psi = \alpha_k^\psi + \beta_k^\psi[\tau - (t + kT)] + \gamma_k^\psi[\tau - (t + kT)]^2 \quad (3.90)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k^\phi := \phi(t + kT) \\ \beta_k^\phi := \dot{\phi}(t + kT) \\ \gamma_k^\phi := \frac{1}{2}v_\phi(t + kT) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k^\theta := \theta(t + kT) \\ \beta_k^\theta := \dot{\theta}(t + kT) \\ \gamma_k^\theta := \frac{1}{2}v_\theta(t + kT) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k^\psi := \psi(t + kT) \\ \beta_k^\psi := \dot{\psi}(t + kT) \\ \gamma_k^\psi := \frac{1}{2}v_\psi(t + kT) \end{array} \right\}$$

sont constants sur chaque période d'échantillonnage.

Si on prend  $\vartheta^1 := \phi - \psi + \theta$  comme un exemple, on peut facilement trouver sa trajectoire comme suit :

$$\vartheta^1 = \alpha_k^{\vartheta^1} + \beta_k^{\vartheta^1}[\tau - (t + kT)] + \gamma_k^{\vartheta^1}[\tau - (t + kT)]^2 \quad (3.91)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_k^{\vartheta^1} &:= \alpha_k^\phi - \alpha_k^\psi + \alpha_k^\theta \\ \beta_k^{\vartheta^1} &:= \beta_k^\phi - \beta_k^\psi + \beta_k^\theta \\ \gamma_k^{\vartheta^1} &:= \gamma_k^\phi - \gamma_k^\psi + \gamma_k^\theta \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ceci peut être également appliqué pour les autres angles  $\{\vartheta^i\}_{i=2,3,4}$  et  $\{\varphi^i\}_{i=1,\dots,4}$ . Des calculs fastidieux nous permettent d'obtenir le système discret global :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_f \\ \dot{x}_f \\ y_f \\ \dot{y}_f \\ z_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g\frac{t_f^2}{2} \\ -gt_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ y_0 \\ \dot{y}_0 \\ z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \\ &+ \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} D_N \right) \frac{U}{4} \end{aligned}$$

Les matrices  $H_1, H_2, H_3, H_4$  et  $D_N$  sont détaillées en annexe C.2. Nous présentons un exemple de discrétisation du système du quadrirotor avec l'état initial  $[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0 \ \pi \ 0 \ \frac{\pi}{3} \ 0]^T$  vers l'origine avec les commandes correspondantes en boucle ouverte pour une période d'échantillonnage  $T = 0.1 \text{ s}$ . Sur les figures (3.10-3.9), l'évolution dans le temps des états de système est tracée, ainsi que l'entrée de commande.

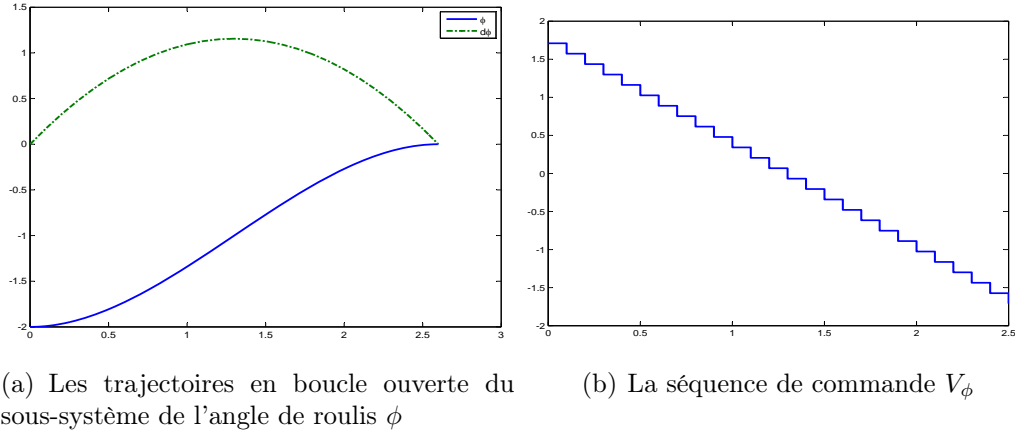


FIG. 3.7 – Discrétisation du sous-système de l'angle de roulis  $\phi$  du quadrirotor en partant de l'état initial  $[-2 \ 0]^T$  vers l'origine comme un état final

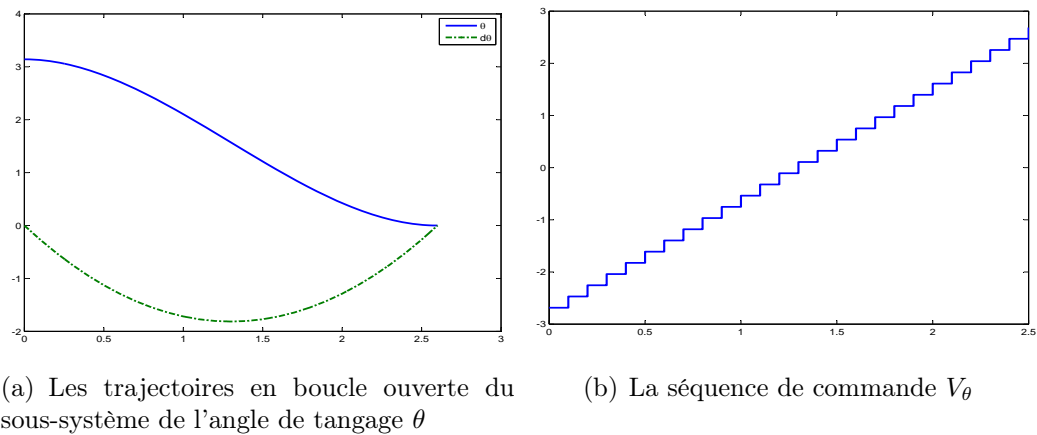


FIG. 3.8 – Discrétisation du sous-système de l'angle de tangage  $\theta$  du quadrirotor en partant de l'état initial  $[\pi \ 0]^T$  vers l'origine comme un état final

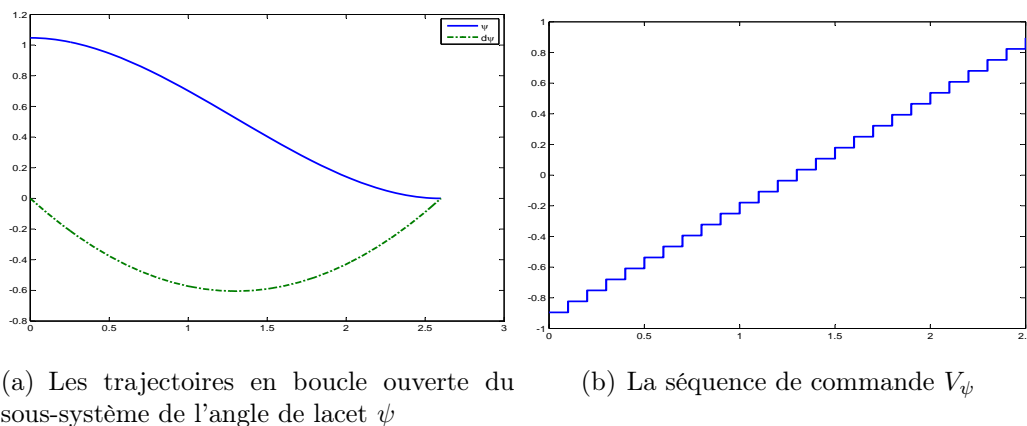


FIG. 3.9 – Discrétisation du sous-système de l'angle de lacet  $\psi$  du quadrirotor en partant de l'état initial  $[\frac{\pi}{3} \ 0]^T$  vers l'origine comme un état final

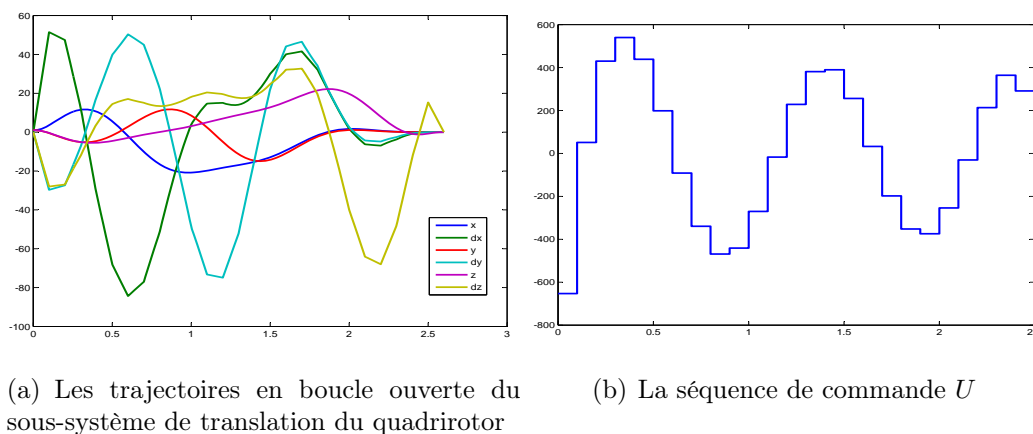


FIG. 3.10 – Discrétisation du sous-système de translation du quadrirotor en partant de l'état initial  $[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$  vers l'origine comme un état final

### 3.5 Commande d'attitude du quadrirotor

La commande d'attitude est une étape essentielle pour développer une commande complète pour le quadrirotor. Cette commande est considérée comme une application directe d'un problème plus général de la commande d'attitude d'un corps rigide représenté soit par les angles d'Euler :

$$\begin{cases} \dot{R} &= R\vec{\omega}^\times \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{\text{tot}} \end{cases} \quad (3.93)$$

soit par le quaternion :

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega})q = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma \end{cases} \quad (3.94)$$

Ce problème de la commande d'attitude d'un corps rigide a attiré un intérêt considérable depuis les années 50 dans les communautés scientifiques de l'aéronautique, de l'automatique et la robotique. Plusieurs systèmes comme vaisseaux spatiaux, satellites, hélicoptères, missiles tactiques, les manipulateurs de robot, sous-marins et d'autres entrent dans cadre de corps rigide avec le besoin de commande d'attitude. Plusieurs approches pour le corps rigide ont été appliquées : la commande optimale en temps minimum [82], la commande basée sur la représentation du quaternion ([23], [39] et [97]), la commande prédictive (appliquée au vaisseau spatial dans [98] et au micro satellite dans [36]), backstepping ([45] et [85]) et la commande robuste appliquée aux missiles tactiques [87].

Dans le cas de quadrirotor, quelques approches ont été également développées. Elles sont classifiées en deux ensembles : bornée et non-bornée.

#### 3.5.1 Commande non-bornée d'attitude du quadrirotor

Dans la représentation des angles d'Euler, on trouve le travail d'Autonomous Systems Laboratory de EPFL ([14] et [15]). Dans [14], un correcteur de type PID et une commande adaptative optimale (en utilisant d'abord la méthode de Pearson et puis la méthode de Sage Einsenberg) sont appliquées pour le placement des pôles de système à gauche de l'axe imaginaire. Dans [15], la commande par mode glissant est proposée.

La seule commande d'attitude basée sur la représentation du quaternion est proposée par Tayebi et McGilvray [91]. Les auteurs ont proposé deux commandes non-bornées. La première commande est de la forme  $PD^2$  où l'action proportionnelle est en termes du vecteur de quaternion et les deux actions dérivées sont en termes de la vitesse angulaire et de la vitesse de quaternion. Cette commande contient un terme de compensation  $\vec{\omega} \times J\vec{\omega}$  qui linéarise la dynamique de  $\vec{\omega}$  :

$$\Gamma = \vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_g + J\dot{\vec{\omega}} - \Gamma_2\tilde{\omega} - \alpha\vec{q}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \vec{\omega} - \bar{\omega} \\ \bar{\omega} &= -\Gamma_1 \vec{q} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\Gamma_1 \dot{\vec{q}} = -\frac{1}{2} \Gamma_1 (q_0 I_{3 \times 3} + \vec{q}^\times) \vec{\omega}\end{aligned}$$

Les matrices  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont symétriques définies positives et  $\alpha$  est un paramètre positif. La deuxième commande proposée est indépendante du modèle dynamique sans compensation du couple gyroscopique :

$$\Gamma = -\Gamma_4 \vec{\omega} - \alpha \vec{q}$$

où  $\Gamma_4$  est une matrice symétrique définie et  $\alpha$  un paramètre positif. Ces deux commandes sont appliqués au quadrirotor dans [92].

### 3.5.2 Commande bornée d'attitude du quadrirotor

Peu de publications ont traité le problème de la commande bornée de l'attitude d'un corps rigide. Dans [96], la stabilisation d'attitude d'un vaisseau spatial rigide sous-actionné avec une commande discontinue bornée a été étudiée. Dans [10], une loi de commande qui conduit un véhicule sous-marin rigide entre deux régions arbitraires de l'espace d'état tout en respectant des limites sur la commande et l'état a été proposée. Les auteurs de [12] ont étudié la commande robuste par mode glissant de l'attitude d'un engin spatial en présence d'entrée de la saturation en se basant sur la commande VSC (en anglais "variable structure control"). Malheureusement, les lois de commande proposées au-dessus sont discontinues ce qui rend difficile leur implementation pratique. Notre objectif dans cette section est de concevoir une loi de commande bornée qui évite ce type de problème. Cette commande conduit l'attitude d'un corps rigide vers une orientation constante donnée et se maintient dans cette orientation, c'est à dire que le vecteur de vitesse angulaire doit être égal à zéro :

$$q \rightarrow q_d, \quad \vec{\omega} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \quad (3.95)$$

où  $q_d$  dénote l'orientation désirée constante du corps rigide. La différence entre l'attitude actuelle et le quaternion de référence (l'orientation désirée) peut être mesurée par le quaternion d'erreur  $q_e$  qui représente l'erreur d'attitude entre l'orientation courante et désirée :

$$q_e = q \otimes q_d^{-1} \quad (3.96)$$

où l'opérateur  $\otimes$  dénote la multiplication de quaternion et  $q^{-1}$  est la rotation complémentaire du quaternion  $q$ , qui est le conjugué de quaternion [84].

Si le repère terrestre fixe  $E$  est choisi et le quaternion désiré est  $q_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , le



quaternion d'erreur d'après l'équation (3.96) coïncide avec le quaternion d'attitude courante et nous avons  $q_e = q$ . L'objectif de la commande est récapitulé dans la relation suivante :

$$q \rightarrow [\pm 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \vec{\omega} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (3.97)$$

Dans cette étude, nous avons seulement choisi le cas où  $q_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  qui représente le cas où l'attitude est alignée avec les axes du repère terrestre fixe. Néanmoins, les résultats peuvent être appliqués sur l'une ou l'autre orientation désirée.

Cette commande est développée en collaboration avec J.F. Guerrero Castellanos qui travail sur l'estimation et la commande d'attitude du quadrirotor et a été présentée dans [30]. Également, une expérimentation a été conduite avec succès [29]. La commande est dans l'esprit de la commande proposée par Teel [93] pour la commande bornée d'une chaîne d'intégrateurs. Dans la suite, nous présenterons la version générale de la commande d'attitude d'un corps rigide et ensuite l'application de cette commande pour le cas du quadrirotor.

**Théorème 11** *Considérons la dynamique d'un corps rigide décrit par équation (3.94) avec la commande bornée suivante  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]^T$  telle que*

$$\Gamma_j = -\alpha \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_j + \text{sat}_{M_1}(q_j)]), \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.98)$$

où  $\text{sat}_{M_1}$  et  $\text{sat}_{M_2}$  sont des fonctions de saturation avec  $M_1 \geq 1$ ,  $M_2 \geq \lambda(2M_1 + \epsilon)$  et  $\epsilon > 1$ .  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des paramètres de réglage positifs. La commande (3.98) stabilise globalement asymptotiquement la dynamique du corps rigide à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0$  et  $\vec{\omega} = 0$ ).

Cette commande peut être étendue au quadrirotor dans la représentation de quaternion. Par rapport au corps rigide, le quadrirotor possède le terme gyroscopique de la forme suivante :

$$\Gamma_g = - \sum_i I_r \vec{\omega}^\times \vec{t}_3 s_i$$

**Théorème 12** *Considérons la dynamique de rotation du quadrirotor décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2} \Omega(\vec{\omega}) q = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \\ J \dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \Gamma_{tot} \end{cases} \quad (3.99)$$

avec les commande bornées

$$\begin{aligned}\Gamma_r &= -\alpha \text{sat}_{M_\phi}(\lambda_1[\omega_1 + \text{sat}_M(q_1)]) \\ \Gamma_p &= -\alpha \text{sat}_{M_\theta}(\lambda_2[\omega_2 + \text{sat}_M(q_2)]) \\ \Gamma_y &= -\alpha \text{sat}_{M_\psi}(\lambda_3[\omega_3 + \text{sat}_M(q_3)])\end{aligned}\quad (3.100)$$

où  $\text{sat}_M$  et  $\text{sat}_{M_{\phi,\theta,\psi}}$  sont des fonctions de saturation avec

$$\begin{aligned}M &\geq 1 \\ M_\phi &\geq \lambda_1(2M + \epsilon) \\ M_\theta &\geq \lambda_2(2M + \epsilon) \\ M_\psi &\geq \lambda_3(2M + \epsilon)\end{aligned}$$

où  $\epsilon > 1$ ,  $\alpha$  et  $\lambda_{1,2,3}$  sont des paramètres positifs. Les commandes (3.100) stabilisent donc globalement la dynamique du quadrirotor à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0$  et  $\vec{\omega} = 0$ )

Les preuves des Théorèmes 11 et 12 sont développées dans annexe C.3

### Application numérique

Dans cette section, nous étudions par simulation la performance de la commande d'attitude bornée du Théorème 12. Nous savons à partir des équations des couples  $\Gamma_r$  (3.22),  $\Gamma_p$  (3.23) et  $\Gamma_y$  (3.24) avec l'équation de la poussée  $u$  (3.40) qu'il y a une relation entre la vitesse de rotation des rotors et ces couples et forces. Cette relation peut être écrite sous la forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \Gamma \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_l l & 0 & k_l l \\ -k_l l & 0 & k_l l & 0 \\ -d & d & -d & d \\ k_l & k_l & k_l & k_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \\ s_3^2 \\ s_4^2 \end{pmatrix}\quad (3.101)$$

Le mouvement de rotation du quadrirotor est le résultat des couples fonction de la vitesse de rotation du rotors (3.101). Par conséquent, le maximum du couple dépend de la vitesse de rotation la plus élevée des moteurs qui sont utilisés. Nous avons pris les données de Tayebi et McGilvray [92] qui ont utilisé des moteurs à courant continu dont la tension maximum est de 9 V. Quand cette tension est appliquée au moteur, la vitesse maximale de rotation est  $s_{i,max} = 260 \text{ rad/sec}$ . En conséquence, le couple maximum appliqué pour influencer le mouvement de rotation du quadrirotor est donné par :

$$\bar{\Gamma}_1 = 0.40 \text{ Nm} \quad \bar{\Gamma}_2 = 0.40 \text{ Nm} \quad \bar{\Gamma}_3 = 0.15 \text{ Nm}$$

Noter que ces couples ne sont pas identiques.

En fait, les entrées de commande du quadrirotor sont les quatre couples électromécaniques des quatre rotors  $\tau_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . L'objectif de ces couples est de forcer la vitesse réelle  $s_i$  à poursuivre un profil de référence désiré  $s_{d_i}$ . Puisque nous employons des moteurs à courant continu, la dynamique de ces moteurs s'écrit par une équation du premier ordre par rapport au courant d'armature et de la vitesse d'axe. Le modèle mécanique de moteur peut être exprimé par :

$$I_r \dot{s}_d = \tau_i - D_i, \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.102)$$

où la traînée  $D_i$  est donnée par équation (3.20) et  $I_r$  est le moment d'inertie de chaque rotor. La vitesse désirée pour les quatre rotors est obtenue à partir de équation (3.101).

Il s'en suit que la poussée  $u$  doit respecter la contrainte  $u = mg$ . Quand la stabilisation d'attitude est réalisée, la poussée peut être changée ( $u \leq mg$  or  $u \geq mg$ ) afin de stabiliser l'altitude. Cependant, ce problème n'est pas discuté pour l'instant. Supposons que les paramètres de moteur sont bien connus, la stabilité de l'erreur de vitesse  $\tilde{s}_i = s_i - s_{d_i}$  peut être atteinte par l'application la commande suivante [92] :

$$\tau_i = D_i + I_r s_{d_i} - \gamma_i \tilde{s} \quad (3.103)$$

où  $\gamma_i$  est un paramètre positif.

Afin de montrer la performance de la commande proposée, plusieurs études de simulations sont effectuées. Dans le cadre de la thèse de J.F. Guerrero Castellanos [29], une étude a été effectuée sur la robustesse de la commande d'attitude du Théorème 12. Les résultats montrèrent que la stabilité de la commande est indépendante de la matrice d'inertie  $J$  du quadrirotor et la commande est robuste vis à vis de mesure saturée de  $\omega$  dû à la limitation des capteurs de mesure. Dans l'étude présentée ici, la poussée désirée est donnée par  $T = mg = 4.59N$ . Le couple maximum d'armature de quatre-rotor appliqué est  $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T Nm$ .

Premièrement nous considérons la stabilisation d'attitude sans ajouter des perturbations externes. Les conditions initiales sont choisies suffisamment loin de l'origine pour montrer l'efficacité de la commande. Nous avons  $\phi = -45^\circ$ ,  $\theta = 50^\circ$  et  $\psi = -175^\circ$ . La convergence des angles d'Euler (roulis, tangage et lacet) est tracée sur figure 3.11. La vitesse angulaire du quadrirotor et les couples de commande appliqués sont montrés respectivement sur figure 3.12 et figure 3.13. Comme prévu, l'attitude désirée est atteinte dans un temps approprié pour l'implémentation pratique tandis que la commande reste dans les bornes pré-exigées.

Dans le deuxième cas d'étude, les conditions initiales considérées sont :  $\phi = -25^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  et  $\psi = -10^\circ$  comme dans Tayebi et McGilvray [91]. Dans cette simulation la robustesse de la commande proposée vis à vis des perturbations externes est étudiée. Les perturbations sont ajoutées après que la stabilisation d'attitude du

quadrirotor soit réalisée. On peut voir sur figure 3.14 que la commande atteint sa limite et agit sur le système pour surmonter les perturbations. Ce deuxième cas prouve que la commande est robuste vis à vis des perturbations externes. Cette propriété est essentielle pour l'implantation en temps réel où les couples aérodynamiques de perturbation ne sont pas triviaux.

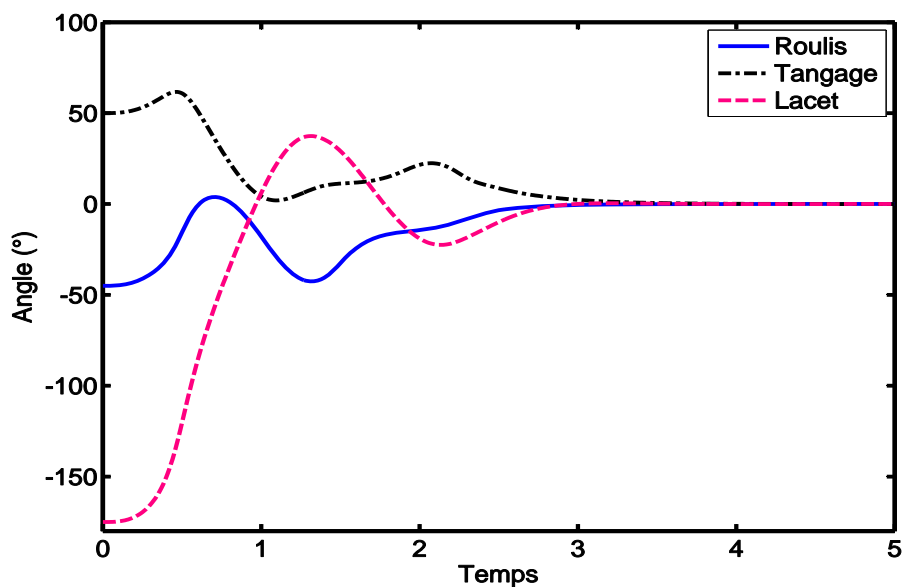


FIG. 3.11 – Évolution dans le temps des angles d'Euler (roulis, tangage et lacet) pour un état initial  $\phi = -45^\circ$ ,  $\theta = 50^\circ$  et  $\psi = -175^\circ$  sans ajouter des perturbations externes

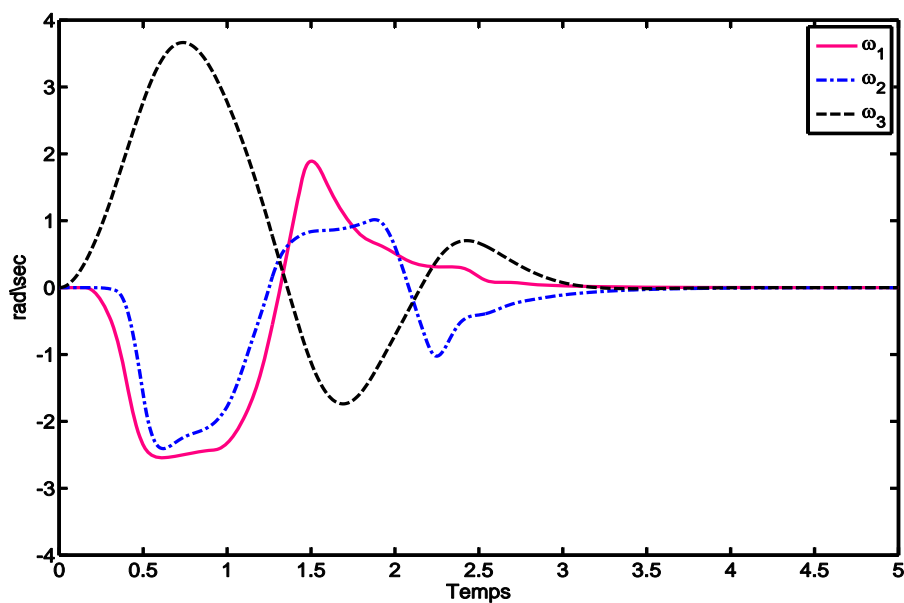


FIG. 3.12 – Évolution dans le temps des vitesses angulaires du quadrirotor sans ajouter des perturbations externes

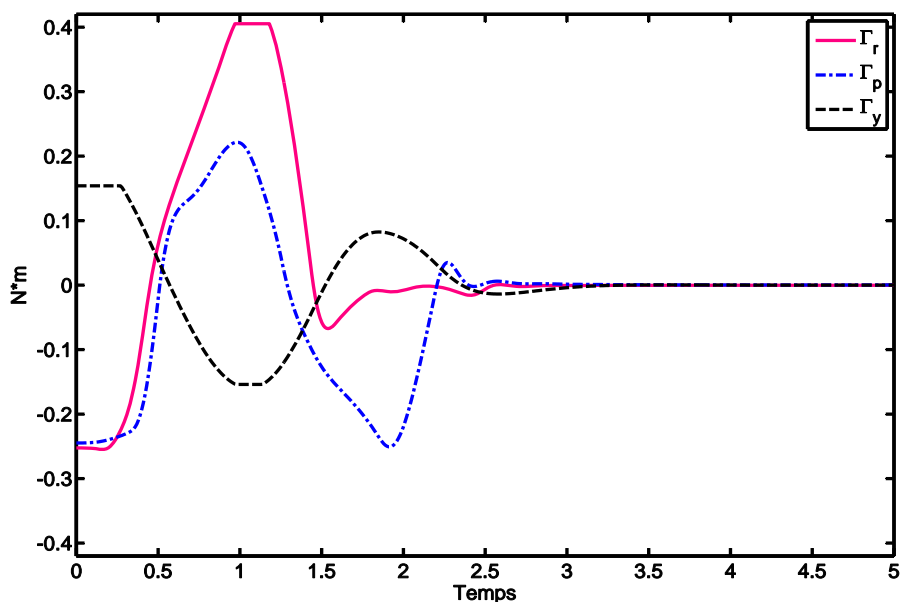


FIG. 3.13 – Les couples bornés du Théorème 11 appliqués sur le quadrirotor avec les bornes  $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T \text{ Nm}$  sans ajouter des perturbations externes

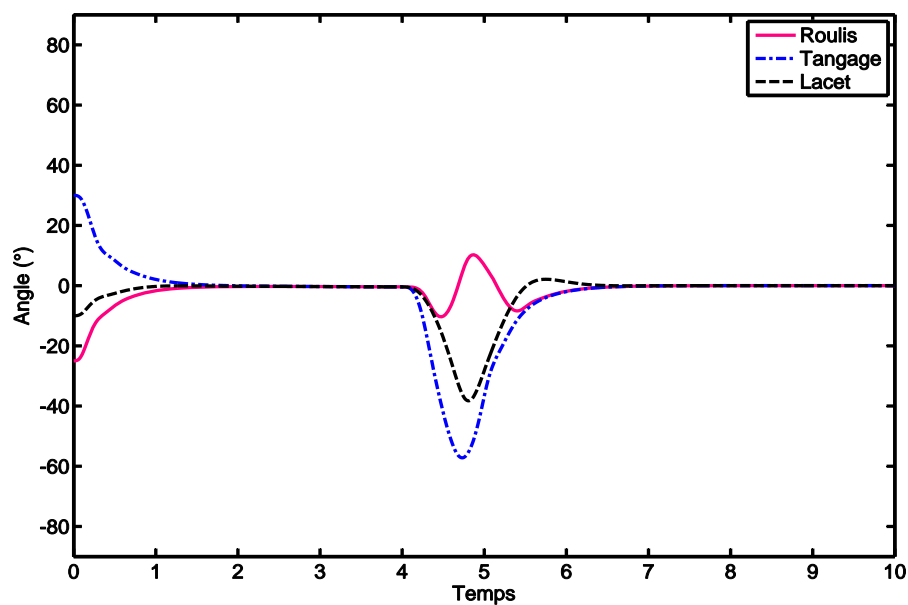


FIG. 3.14 – La robustesse de la commande proposée vis à vis des perturbations externes : Évolution dans le temps des angles d’Euler (roulis, tangage et lacet) avec un état initial  $\phi = -25^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  et  $\psi = -10^\circ$

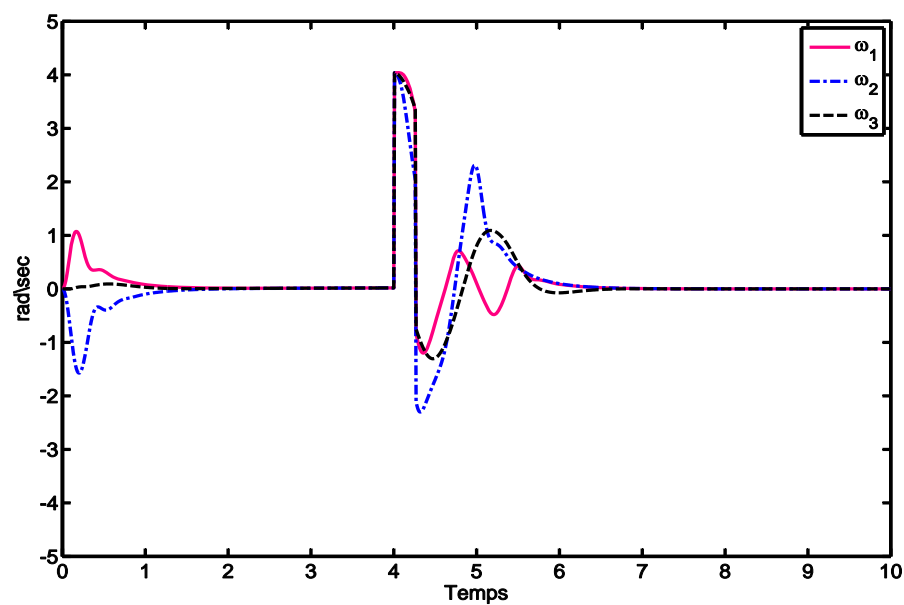


FIG. 3.15 – La robustesse de la commande vis à vis des perturbations externes : Évolution dans le temps des vitesses angulaires du quadrirotor

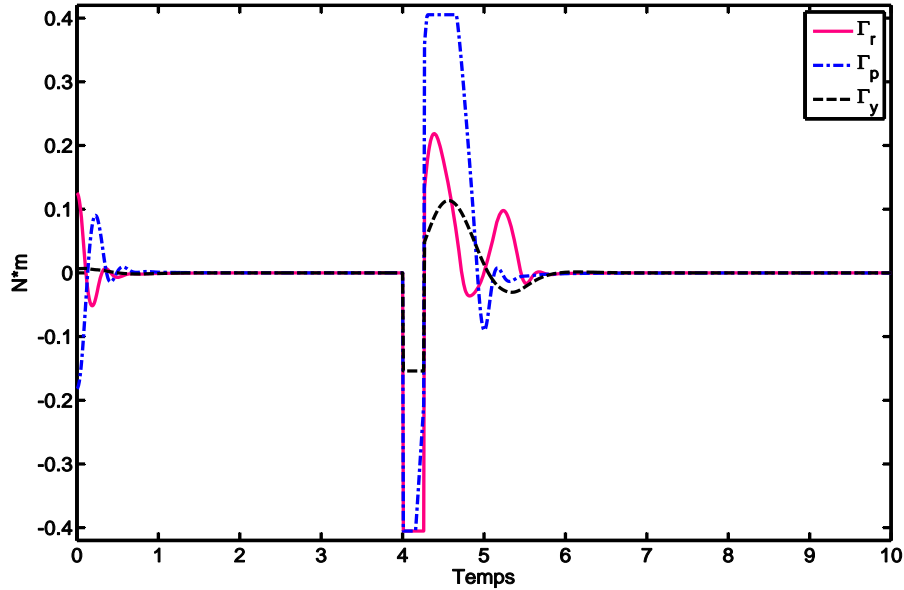


FIG. 3.16 – Les couples bornés du Théorème 11 appliqués sur le quadrirotor avec les bornes  $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T \text{ Nm}$

## 3.6 Stabilisation de la position du quadrirotor

Le problème de stabilisation de la position du quadrirotor est la deuxième étape qui suit la commande d'attitude. On considère donc la dynamique de rotation (équations (3.29) pour la représentation par les angles d'Euler où équations (3.33) pour la représentation par le quaternion) avec la dynamique de translation (équations (3.39)) afin de développer la commande. Différents types de commande ont été proposés : linéaires, non-linéaires, bornées et non-bornées. Dans la section suivante, nous présenterons une courte description de l'état de l'art concernant ce problème.

### 3.6.1 Stabilisation de la position avec des commandes non-bornées

En considérant le modèle dynamique de Castillo *et al.* [17] après une transformation de coordonnées sur le sous-système de rotation du quadrirotor :

$$m\ddot{\xi} = u \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$$\ddot{\eta} = J^{-1}(-C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \Gamma_a) = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_\psi \\ \bar{\tau}_\theta \\ \bar{\tau}_\phi \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

les auteurs dans [17] et [47] ont développé une commande non-linéaire et non-bornée de type Lyapunov en se basant sur l'idée que le quadrirotor est considéré comme deux PVTOL inter-connectés. Premièrement l'altitude est stabilisée par l'application de la poussée  $u$  de la forme suivante :

$$u = \frac{-a_{z_1}\dot{z} - a_{z_2}(z - z_d) + mg}{\cos \theta \cos \phi}$$

avec la commande du lacet :

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\psi_1}\dot{\psi} - a_{\psi_2}(\psi - \psi_d)$$

Pour les deux PVTOL  $(y, \phi)$  et  $(x, \theta)$ , l'approche de Teel [93] pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs a été adoptée pour construire respectivement la commande du roulis  $\phi$  avec la position  $y$  et la commande du tangage  $\theta$  avec la position  $x$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\phi &= -\text{sat}_{\phi_1}(\dot{\phi} + \text{sat}_{\phi_2}(\phi + \dot{\phi} + \text{sat}_{\phi_3}(2\phi + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} + \text{sat}_{\phi_4}(\dot{\phi} + 3\phi + 3\frac{\dot{y}}{g} + \frac{y}{g})))) \\ \tilde{\tau}_\theta &= -\text{sat}_{\theta_1}(\dot{\theta} + \text{sat}_{\theta_2}(\theta + \dot{\theta} + \text{sat}_{\theta_3}(2\theta + \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{g} + \text{sat}_{\theta_4}(\dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{x}{g})))) \end{aligned}$$

Cette commande est appliquée sur le quadrirotor dans plusieurs articles [17], [47] et [20].

La technique de backstepping est également appliquée pour la stabilisation de la position du quadrirotor. Bouabdallah et Siegwart [15] ont proposé les couples suivants pour stabiliser la dynamique de la rotation du quadrirotor en se basant sur les trois dernières équations (3.69-3.71) du modèle de Bouabdallah *et al.* [13] :

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= I_x(z_1 - (\frac{I_y - I_z}{I_x})\dot{\theta}\dot{\psi}) + (\frac{J_r}{I_x})\dot{\theta}\Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_2 z_1) - \alpha_2 z_2 \\ \Gamma_p &= I_y(z_3 - (\frac{I_z - I_x}{I_y})\dot{\phi}\dot{\psi}) - (\frac{J_r}{I_y})\dot{\phi}\Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4 \\ \Gamma_y &= \frac{I_z}{l}(z_5 - (\frac{I_x - I_y}{I_z})\dot{\phi}\dot{\theta}) - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6 \end{aligned}$$



où  $\alpha_{1,\dots,6}$  sont des paramètres positifs et  $z_{1,\dots,6}$  représentent les erreurs de poursuite entre l'état actuel et l'état désiré :

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_d - \phi \\ z_2 &= \dot{\phi} - \dot{\phi}_d - \alpha_1 z_1 \\ z_3 &= \theta_d - \theta \\ z_4 &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_d - \alpha_3 z_3 \\ z_5 &= \psi_d - \psi \\ z_6 &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_d - \alpha_5 z_5 \end{aligned}$$

Pour la dynamique de translation du quadrirotor (équations (3.66-3.68 du modèle de Bouabdallah *et al.* [13]), l'altitude  $z$  est premièrement commandée par la poussée suivante :

$$u = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} (z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8)$$

pendant que la position horizontale  $(x, y)$  est stabilisée par :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{m}{u} (z_9 - \alpha_9(z_{10}x + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10}) \\ u_y &= \frac{m}{u} (z_{11} - \alpha_{11}(z_{12}x + \alpha_{11} z_{11}) - \alpha_{12} z_{12}) \end{aligned}$$

avec les erreurs de poursuite suivantes :

$$\begin{aligned} z_7 &= \dot{z}_d - z \\ z_8 &= \dot{z} - \dot{z}_d - \alpha_7 z_7 \\ z_9 &= x_d - x \\ z_{10} &= \dot{x} - \dot{x}_d - \alpha_9 z_9 \\ z_{11} &= y_d - y \\ z_{12} &= \dot{y} - \dot{y}_d - \alpha_{11} z_{11} \end{aligned}$$

avec les paramètres positifs  $\alpha_{7,\dots,12}$ .

La technique de backstepping est également appliquée dans [28] pour la stabilisation de la position du quadrirotor représenté cette fois par l'approche de Newton-Euler (équations (3.62-3.65)) :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \vec{v} \\ m\dot{\vec{v}} &= -mg\vec{e}_3 + R\left(\sum_i F_i(s_i)\vec{t}_3\right) \\ \dot{R} &= R\vec{\omega}^\times \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{\text{tot}} \end{aligned}$$

L'objectif de la loi de commande est de faire converger la vitesse du centre de gravité ainsi que l'angle du lacet du quadrirotor vers la vitesse  $\vec{v}_d$  et le lacet désirés fournis par l'utilisateur. La poussée est donnée par l'équation suivante :

$$u = \|\ -m(\dot{\vec{v}}_d - g\vec{e}_3) + k_1 \text{sat}(\varepsilon)\|$$

avec  $\varepsilon = \vec{v} - \vec{v}_d$ . Le couple actif s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{tot}} &= \vec{\omega}^\times J \vec{\omega} - \Gamma_g \\ &+ \frac{J}{\gamma} (\dot{\vec{\omega}}_d + R_d^T (-k_\sigma \sigma - \frac{1}{2} q_0 \vec{q} + k_q \vec{q}^T \tilde{\Omega} \vec{q} - (R_d \vec{\omega}_d^\times R_d^T + k_q q_0^2 I_{3 \times 3} + K_q q_0 \vec{q}^\times) \tilde{\Omega})) \end{aligned}$$

où  $\tilde{\Omega} = R_d(\vec{\omega} - \vec{\omega}_d)$  est la différence entre les vitesses angulaires,  $R_d$  est la matrice désirée de rotation,  $\tilde{\Omega}^v = 2k_q q_0 \vec{q}$  est la commande virtuelle et finalement  $\sigma = \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}^v$ .

Dans Madani et Benallegue [60] et [59], le système du quadrirotor est divisé en deux sous-systèmes : un sous-système sous-actionné qui représente la relation entre l'angle de tangage et de roulis avec la position horizontale  $x$  et  $y$  et un sous-système qui représente le comportement dynamique de la position verticale et l'angle de lacet. Ces deux sous-systèmes sont considérés avec la dynamique des quatre rotors pour synthétiser une commande basée sur la méthode du backstepping afin de faire converger la position et l'angle du lacet du quadrirotor vers une position et un lacet désirés. La même décomposition est utilisée par Xu et Ozguner [100] afin d'appliquer une commande par mode glissant pour stabiliser le quadrirotor vers une position et un angle de lacet désirés tout en gardant les angles de tangage et de roulis égaux à zéro.

### 3.6.2 Stabilisation de la position avec des commandes bornées

Kendoul *et al.* [42] sont les premiers, à notre connaissance, à avoir proposé une commande bornée pour la stabilisation de la position. Cette approche est la suite du travail initié par [17] et appliqué sur le modèle de Castillo *et al.* [17] après une transformation de coordonnées. La commande de l'angle de lacet est basée sur l'approche de [93] pour la commande bornée d'une chaîne d'intégrateurs :

$$\tilde{\tau}_\psi = -\sigma_{\psi_1} (k_{\psi_1} \dot{\psi} + \sigma_{\psi_2} (k_{\psi_2} \dot{\psi} + k_{\psi_1} k_{\psi_2} (\psi - \psi_d)))$$

la poussée proposée s'écrit par :

$$u = \frac{mr + mg}{\cos \sigma_p(\theta) \cos \sigma_p(\phi)}$$

avec

$$r = -\sigma_{r_1}(k_{r_1}\dot{z} + \sigma_{r_2}(k_{r_2}\dot{z} + k_{r_1}k_{r_2}(z - z_d)))$$

Le quadrirotor est considéré comme dans [17] par deux PVTOL  $:(\theta, x)$  et  $(\phi, y)$ . La commande pour  $\xi = (x, y)^T$ ,  $\eta = (\theta, \phi)^T$  et  $v = (\tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi)^T$  est :

$$v = -\sigma_a \left[ K_1 \dot{\eta} + \sigma_b \left( K_2 z_2 + \sigma_c \left( K_3 z_3 + \sigma_d \left( K_4 (z_3 + K_3 \eta + K_3 (K_1 + K_2) A^{-1} \dot{\xi} + K_3 K_2 K_1 A^{-1} \xi) \right) \right) \right) \right] \quad (3.106)$$

où

$$z_2 = \dot{\eta} + K_1 \eta \quad (3.107)$$

$$z_3 = z_2 + K_2 \eta + K_2 K_1 A^{-1} \dot{\xi} \quad (3.108)$$

$$A = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

Les niveaux  $(a, b, c, d)$  de saturation sont liés aux coefficients  $(K_1, K_2, K_3)$  par une certaine relation détaillée dans [42]. La commande de l'équation (3.106) est une modification de l'approche de Teel [93] pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateur avec des paramètres de réglage dans l'expression des fonctions de saturation.

Nous avons également développé une commande bornée pour la stabilisation de la position du quadrirotor [32]. Nous avons considéré le modèle proposé par Altug *et al.* [7] mais les résultats obtenus peuvent être appliqués aux autres modèles du quadrirotor comme le modèle de Bouabdallah *et al.* [13]. L'avantage d'utiliser le modèle d'Altug *et al.* [7] est qu'il prend en compte les effets de traînée et le couplage des trois angles  $\psi$ ,  $\phi$  et  $\theta$  avec la dynamique de translation du quadrirotor ce qui n'est pas le cas dans l'approche de Kendoul *et al.* [42] basée sur le modèle de Castillo *et al.* [17] qui néglige l'effet de  $\psi$  dans la dynamique de translation du quadrirotor. Une différence additionnelle entre notre travail et les résultats de Kendoul *et al.* [42] est que la commande (3.106) est obtenue après une transformation de coordonnées qui compense les termes gyroscopiques et centrifuges. Notre commande est synthétisée sans aucune transformation de coordonnées et peut être considérée comme la généralisation des résultats présentés dans les chapitres précédents pour la stabilisation globale d'un PVTOL, la projection du quadrirotor dans le plan.

Considérons le modèle proposé par Altug *et al.* [7] (équations (3.72-3.77)) 1) simplifié en négligeant la traînée et 2) normalisé en prenant la gravité  $g$  dans le

modèle égale à 1 :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= u(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} &= u(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} &= -1 + u(\cos \phi \cos \theta) \\ \ddot{\theta} &= v_\theta \\ \ddot{\phi} &= v_\phi \\ \ddot{\psi} &= v_\psi \end{cases} \quad (3.110)$$

Rappelons que  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentent maintenant les coordonnées cartésiennes normalisées du centre de masse du quadrirotor et  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  représentent les angles d'Euler normalisés. Ce système (équation 3.110) sera employé pour la construire les commandes bornées contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq \bar{u} \\ -\bar{v}_\theta &\leq v_\theta \leq \bar{v}_\theta \\ -\bar{v}_\phi &\leq v_\phi \leq \bar{v}_\phi \\ -\bar{v}_\psi &\leq v_\psi \leq \bar{v}_\psi \end{aligned} \quad (3.111)$$

### 3.6.3 Stratégie de commande

D'après les équations du système (3.110), on peut noter que l'évolution de la dynamique de rotation du quadrirotor est indépendante de la dynamique de translation tandis que la dynamique de translation dépend des angles. Pour cela, nous suivrons la même approche appliquée dans le cas du PVTOL pour synthétiser les entrées de commande. La dynamique de rotation sera d'abord stabilisée vers une configuration désirée (déterminée dans la suite) et, dans un deuxième temps, les angles  $\theta$ ,  $\phi$ , et  $\psi$  seront pris en tant qu'entrées virtuelles pour la dynamique de translation avec la poussée  $u$  positive bornée. Par conséquent, le système (3.110) se décompose en deux sous-systèmes. Le premier sous-système  $\Sigma_t$ , composé des trois premières équations, représente la dynamique de translation de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le deuxième  $\Sigma_r$ , composé de trois dernières équations, représente le mouvement de rotation.

La stratégie de commande est basée sur l'idée qu'on peut stabiliser la dynamique de lacet ( $\psi$  et  $\dot{\psi}$ ) pour obtenir après un temps suffisamment long le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= u \cos \phi \sin \theta \\ \ddot{y} &= -u \sin \phi \\ \ddot{z} &= -1 + u \cos \phi \cos \theta \\ \ddot{\theta} &= v_\theta \\ \ddot{\phi} &= v_\phi \end{cases} \quad (3.112)$$

On peut obtenir le même modèle que (3.112) en prenant le modèle de Bouabdallah *et al.* [13] sans les frottements fluides lorsque  $\phi = \dot{\phi} = 0$ . Sachant que le partie droite

du système (3.110) est bornée, le système ne peut pas diverger pendant ce temps. Ensuite, comme nous avons fait dans le cas du PVTOL, on profite des propriétés trigonométriques du système (3.112) pour transformer le sous-système de translation  $\Sigma_t$  en 3 chaînes d'intégrateurs d'ordre 2. Dans les sections suivantes, nous présenterons en détails les entrées de commande à appliquer afin de stabiliser le quadrirotor.

### Stabilisation de la dynamique de l'angle de lacet $\psi$

L'approche développée au chapitre 1 pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs avec des commandes bornées (Théorème 1) est appliquée pour synthétiser le couple  $v_\psi$  :

$$v_\psi = \frac{\bar{v}_\psi}{\varepsilon_\psi + \varepsilon_\psi^2} (-\varepsilon_\psi \text{sat}_1(\dot{\psi}) - \varepsilon_\psi^2 \text{sat}_1(\varepsilon_\psi \psi + \dot{\psi})) \quad (3.113)$$

où  $0 < \varepsilon_\psi < 1$  est un paramètre de réglage et  $\text{sat}_1$  est une fonction de saturation. Ce choix assure la stabilisation globale asymptotique de  $(\psi, \dot{\psi})$  (voir la preuve du Théorème 1).

### Stabilisation du quadrirotor dans le cas où $\psi = 0$

Soit  $p := (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})$  et  $\eta := (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi})$ . Le sous-système de translation  $\Sigma_t$  et celui de rotation  $\Sigma_r$  de (3.112) s'écrivent alors :

$$\Sigma_t : \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = u \cos \eta_3 \sin \eta_1 \\ \dot{p}_3 = p_4 \\ \dot{p}_4 = -u \sin \eta_3 \\ \dot{p}_5 = p_6 \\ \dot{p}_6 = -1 + u \cos \eta_3 \cos \eta_1 \end{cases} \quad \Sigma_r : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = v_\theta \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = v_\phi \end{cases} \quad (3.114)$$

L'idée est de choisir des commandes bornées  $v_\theta$  et  $v_\phi$  pour faire converger  $\eta_1$  et  $\eta_3$  vers des angles désirés  $\eta_{1_d}$  et  $\eta_{3_d}$ . Avec un choix approprié de ces angles, il sera possible pour transformer  $\Sigma_t$  en 3 chaînes d'intégrateurs indépendantes d'ordre 2. Nous prenons :

$$\eta_{1_d} = \arctan \left( \frac{r_x}{1 + r_z} \right) \quad (3.115)$$

$$\eta_{3_d} = \arctan \left( \frac{-r_y}{\sqrt{r_x^2 + (1 + r_z)^2}} \right) \quad (3.116)$$

La poussée positive  $u$  est choisie telle que :

$$u = \sqrt{(1 + r_z)^2 + r_x^2 + r_y^2} \quad (3.117)$$

Les commandes  $r_x, r_y$  et  $r_z$  seront définis plus tard. Donc, le sous-système  $\Sigma_t$  devient :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 = r_x \\ \ddot{p}_3 = r_y \\ \ddot{p}_5 = r_z \end{cases} \quad (3.118)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique globale de (3.118), on choisi la commande proposée au Théorème 1 :

$$r_x = \frac{\bar{r}_x}{\varepsilon_x + \varepsilon_x^2} (-\varepsilon_x \text{sat}_1(p_2) - \varepsilon_x^2 \text{sat}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2)) \quad (3.119)$$

$$r_y = \frac{\bar{r}_y}{\varepsilon_y + \varepsilon_y^2} (-\varepsilon_y \text{sat}_1(p_4) - \varepsilon_y^2 \text{sat}_1(\varepsilon_y p_3 + p_4)) \quad (3.120)$$

$$r_z = \frac{\bar{r}_z}{\varepsilon_z + \varepsilon_z^2} (-\varepsilon_z \text{sat}_1(p_6) - \varepsilon_z^2 \text{sat}_1(\varepsilon_z p_5 + p_6)) \quad (3.121)$$

où  $0 < \varepsilon_{x,y,z} < 1$  sont des paramètres de réglage. Les bornes supérieures  $\bar{r}_x, \bar{r}_y$  et  $\bar{r}_z$  sont choisies telles que :

$$\bar{u} = \sqrt{(1 + \bar{r}_z)^2 + \bar{r}_x^2 + \bar{r}_y^2} \quad (3.122)$$

Noter que ceci implique implicitement que  $\bar{u} > 1$  qui est une contrainte naturelle si on veut compenser l'effet de la gravité. Finalement, pour faire converger les angles  $\eta_1$  et  $\eta_3$  vers les angles désirés  $\eta_{1_d}$  et  $\eta_{3_d}$ , on applique :

$$v_\theta = \frac{\bar{v}_\theta}{\beta_\theta + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2} [\text{sat}_{\beta_\theta}(\ddot{\eta}_{1_d}) - \varepsilon_\theta \text{sat}_1(\eta_2 - \dot{\eta}_{1_d}) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(\varepsilon_\theta(\eta_1 - \eta_{1_d}) + (\eta_2 - \dot{\eta}_{1_d}))] \quad (3.123)$$

$$v_\phi = \frac{\bar{v}_\phi}{\beta_\phi + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2} [\text{sat}_{\beta_\phi}(\ddot{\eta}_{3_d}) - \varepsilon_\phi \text{sat}_1(\eta_4 - \dot{\eta}_{3_d}) - \varepsilon_\phi^2 \text{sat}_1(\varepsilon_\phi(\eta_3 - \eta_{3_d}) + (\eta_4 - \dot{\eta}_{3_d}))] \quad (3.124)$$

avec, pour  $\beta > 0$ ,  $\text{sat}_\beta(\cdot) := \beta \text{sat}_1(\cdot)$  et comme précédemment, les paramètres de réglage  $\varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_\phi$  sont choisi tels que  $0 < \varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi < 1$ . Le paramètre  $\beta$  doit vérifier une certaine relation détaillée en Annexe C.4.2. La stabilisation globale du quadrirotor par la commande bornée basée sur l'approche non-linéaire du chapitre 1 est récapitulée par le théorème suivant :

**Théorème 13** *Considérons le quadrirotor (3.110) avec la poussée  $u$  donnée par équation (3.117) et les couples  $v_\psi, v_\theta$  et  $v_\phi$  définis respectivement par les équations (3.113), (3.123) et (3.124). Ces commandes stabilisent globalement asymptotiquement le quadrirotor (3.110) vers l'origine en respectant les bornes sur la commande  $\bar{u} > 1$  et  $\bar{v}_\psi, \bar{v}_\phi, \bar{v}_\theta > 0$ .*

La preuve de ce théorème est détaillée dans l'Annexe C.4.

### Étude numérique

Dans cette section, on applique la commande de position développée dans les sections précédentes sur le modèle d'Altug *et al.* [7] :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) - \frac{k_1}{m} \dot{x} \\
 \ddot{y} &= \frac{u}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) - \frac{k_2}{m} \dot{y} \\
 \ddot{z} &= -g + \frac{u}{m}(\cos \phi \cos \theta) - \frac{k_3}{m} \dot{z} \\
 \ddot{\theta} &= v_\theta - l \frac{k_4}{I_y} \dot{\theta} \\
 \ddot{\phi} &= v_\phi - l \frac{k_5}{I_x} \dot{\phi} \\
 \ddot{\psi} &= v_\psi - \frac{k_6}{I_z} \dot{\psi}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 v_\theta &= l(-F_1 - F_2 + F_3 + F_4)/I_y \\
 v_\phi &= l(-F_1 + F_2 + F_3 - F_4)/I_x \\
 v_\psi &= C(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)/I_z
 \end{aligned}$$

La position initiale du sous-système de translation est  $[x(0), y(0), z(0)] = [7, 8, 5]$  avec une vitesse initiale nulle. Pour le sous-système de rotation la condition initiale proposée est  $[\theta(0), \phi(0), \psi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0)] = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, 2, 0]$ . Rappelons qu'il n'y a pas de singularité dans l'approche proposée et elle peut être appliquée pour différentes conditions initiales. Les paramètres nominaux des équations précédentes sont les même que les paramètres employés par Xu et Ozguner [100] :

$$\begin{aligned}
 I_x = I_y &= 1.25Ns^2/rad & I_z &= 2.5Ns^2/rad \\
 k_1 = k_2 = k_3 &= 0.01Ns/m & m &= 2kg \\
 k_4 = k_5 = k_6 &= 0.012Ns/rad & l &= 0.2 \\
 g &= 9.81m/s^2 & \bar{s} &= 604rad/s^2
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

Les valeurs numériques utilisées pour les paramètres de réglage dans les expressions des entrées de commande sont :  $\varepsilon_\psi = 1$ ,  $\beta_\theta = \beta_\phi = 0.04$ ,  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = 0.9$ ,  $\varepsilon_x = 0.4$ ,  $\varepsilon_y = 0.4$  et  $\varepsilon_z = 0.99$ . L'évolution dans le temps des états sous-système de translation de modèle d'Altug *et al.* [7] est tracée sur figure 3.17. Les variations des états de sous-système de rotation de modèle d'Altug *et al.* [7] sont tracées sur la figure 3.18. Les commandes bornées sont représentées sur figure 3.19.

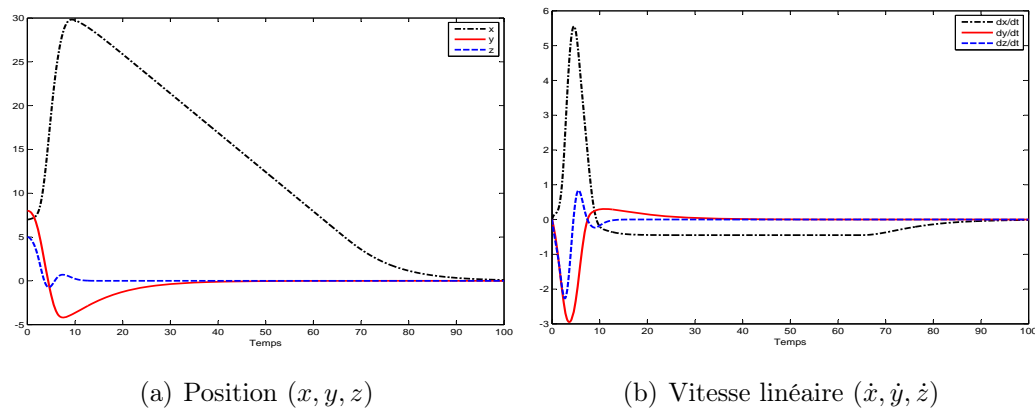


FIG. 3.17 – Évolution dans le temps des états de sous-système de translation de modèle d’Altug *et al.* [7] en appliquant la commande bornée du Théorème 13 avec la position initiale  $[x(0), y(0), z(0)] = [7, 8, 5]$

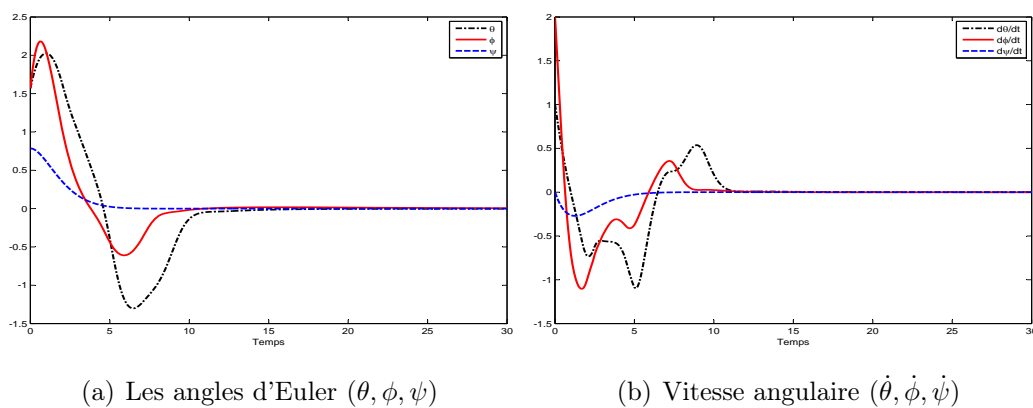


FIG. 3.18 – Évolution dans le temps des états de sous-système de rotation de modèle d’Altug *et al.* [7] en appliquant la commande bornée du Théorème 13 pour un état initial  $[\theta(0), \phi(0), \psi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0)] = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, 2, 0]$



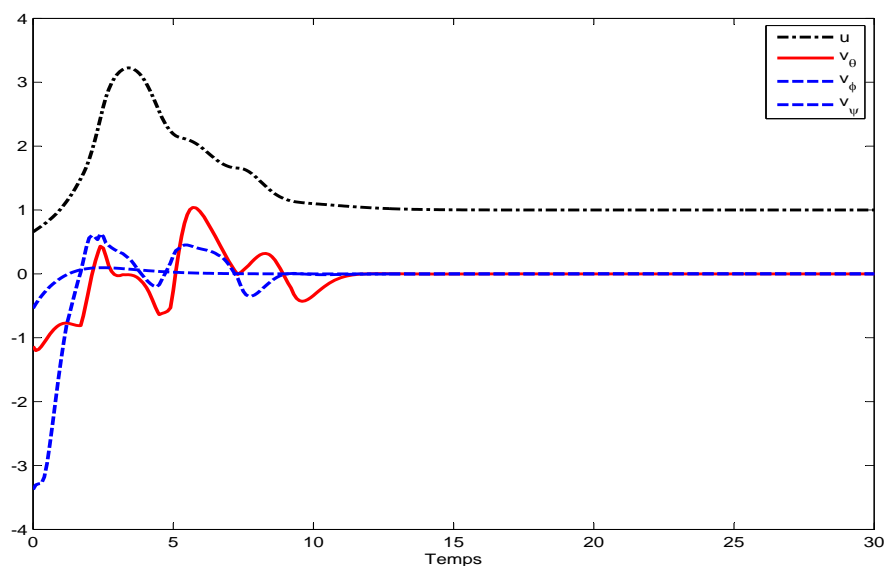


FIG. 3.19 – Les commandes bornées du Théorème 13 appliquées sur le quadrirotor

## 3.7 Conclusions

Dans ce chapitre, trois parties principales ont été abordées. Dans la première partie, une description globale du quadrirotor a été présentée. Nous avons analysé les forces aérodynamiques et les couples agissant sur la dynamique du quadrirotor. Nous avons également étudié les modèles dynamiques du quadrirotor proposés dans la littérature. Dans la deuxième partie, nous avons développé une commande bornée pour la stabilisation d'attitude du quadrirotor. Cette commande est basée sur la stabilisation d'une chaîne d'intégrateur en appliquant l'approche non-linéaire de Sussmann *et al.* [89] étudiée dans chapitre 1. Dans la dernière partie de ce chapitre, la commande bornée pour la stabilisation du PVTOL a été généralisée pour le cas du quadrirotor. Cette commande a été appliquée sur le modèle d'Altug *et al.* [7].

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Durant ces dernières années, la robotique aérienne a fait de grand progrès. Cet intérêt est justifié par les avancées technologiques récentes qui rendent possibles la conception et la construction des mini-drones et par le domaine d'application civile et militaire très vaste de ces aéronefs. Les drones sont classifiés en trois catégories principales : les avions, les dirigeables et les hélicoptères. Le travail réalisé dans cette thèse rentre dans ce cadre de recherche sur la commande de mini-véhicules aériens capables de réaliser du vol stationnaire et en particulier du quadrirotor. Notre objectif est de développer des commandes bornées qui prennent en compte différents types de contraintes telles que les contraintes sur les actionneurs, le coût de calcul très réduit et la limitation énergétique.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à la stabilisation globale d'un système linéaire comme la chaîne d'intégrateurs en utilisant la commande bornée. Nous avons étudié la commande non-linéaire proposée par Teel [93] basée sur une série de saturations imbriquées ensuite généralisée et étendue à une commande basée sur des sommes de saturation par Sussmann *et al.* [89]. Ces lois de commande sont peu coûteuses en terme de calcul et donc adaptées à une utilisation sur les micro-drones avec une faible capacité de calcul. Deux améliorations ont été proposées. La première amélioration considère les paramètres de réglage de la commande et la deuxième vise à faire varier de manière dynamique le niveau des saturations afin de pallier au manque de performance intrinsèque aux approches de type saturations fixes. Les résultats obtenus ont été étendus au cas discret. Nous avons également testé la robustesse des commandes proposées en temps continu vis à vis de retard sur la mesure et vis à vis de perturbations de pôles (tant réels qu'imaginaires). Il s'avère que les commandes à base de saturations à seuils variables sont légèrement moins robustes que celles à seuils fixe mais dans des proportions qui les maintiennent très compétitives par rapport à la plupart des autres méthodes. Le gain de performance ne se paye donc que très peu par une perte de robustesse.

La théorie des systèmes en cascade a été combinée avec la commande développée ci-dessus afin de concevoir des lois de commande qui stabilisent globalement un hé-

licoptère à quatre rotors dans l'espace (quadrirotor) et dans le plan (dénomé PVTOL pour Planar Vertical Take-Off and Landing). Nous avons étudié la stabilisation de l'attitude du quadrirotor en le considérant comme un corps rigide par l'application des commande non-linéaires bornées.

Un autre résultat concernant la stabilisation des systèmes chaînés d'ordre 2 (à inertie) a été obtenu en se basant sur une loi de commande prédictive orientée temps minimum [5]. En utilisant les transformations présentées dans Aneke *et al.* [8] nous pouvons transformer la dynamique du PVTOL en systèmes chaînés à inertie correspondants aux objets volants dans un milieu sans gravité [71]. Nous avons proposé une commande par retour d'état qui assure la stabilisation du système chaînés à inertie en respectant les contraintes de saturation sur les entrées de commande. Cette approche basée sur le principe de l'horizon glissant prend en compte la réalisation en temps réel et la rapidité du système.

## Perspectives

Dans cette section, l'ensemble des perspectives que nous estimons abordables seront présentées. Elles peuvent apporter soit des améliorations, soit des nouveautés aux contributions apportées par ce travail.

La stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs par la commande non-linéaire bornée peut être améliorée en appliquant le placement de pôles de [38]. Dans leur travail, Johnson et Kannan [38] ont proposé une adaptation de la commande proposée par Teel (1992) permettant de placer les pôles de la boucle fermée ailleurs qu'en  $\{-1, \dots, -1\}$ . Cela permet d'accélérer la convergence du système une fois que les saturations ne sont plus effectives.

Le choix des paramètres de réglage de la commande non-linéaire proposée pour la stabilisation du PVTOL et du quadrirotor n'est pas optimisé en l'état actuel. Il est par conséquent tout à fait envisageable d'optimiser ces choix dans le but d'améliorer le comportement global du système, de renforcer la stabilité ou encore d'améliorer la robustesse de la commande.

Dans notre travail, nous avons considéré la stabilisation de quadrirotor dans le cas idéal sans prendre en compte par exemple les erreurs de modélisation de drone, la présence de perturbations imprévisibles telles que les rafales de vent. En effet, comme perspective, ces conditions réelles peuvent être considérées dans l'élaboration de la commande dans le but d'augmenter le domaine de fonctionnement du quadrirotor (à l'intérieur ou bien à l'extérieur). Dans le même esprit, nous n'avons pas considéré le problème des retards de mesure ou de communication entre le drone et la base de contrôle. Il nous semble envisageable de considérer ce problème en se basant sur les résultats obtenus pour la stabilisation par commandes bornées de systèmes avec retard [41] et particulièrement la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs [67].

# Annexe A

Dans ce chapitre, les preuves des théorèmes présentés au Chapitre 2 pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateur sont développées.

## A.1 Preuve de Théorème 1

**Théorème 1** *La commande bornée*

$$u = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \text{sat}_1(y_i) \quad (\text{A.1})$$

*stabilise globalement asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs d'ordre  $n$  avec  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  pour*

- $\bar{\varepsilon}$  solution unique dans  $]0, 1[$  de  $\varepsilon^{n+1} - 2\varepsilon^2 + \varepsilon = 0$  si  $n > 2$
- $\bar{\varepsilon} = 1$  si  $n = 2$
- $\bar{\varepsilon} > 0$  si  $n = 1$

Commençons la preuve de Théorème 1 avec un lemme préliminaire qui évite d'employer un argument de type globalement lipschitz utilisé par Teel [93] ou Lin [50] pour justifier que la trajectoire du système de boucle fermée ne peut pas diverger en temps fini. Ce résultat doit sûrement exister quelque part dans la littérature mais malheureusement nous ne l'avons pas trouvé.

**Lemme 14** *Sous une commande bornée les trajectoires en boucle fermée de n'importe quel système linéaire sont définies.*

### Preuve de Lemme 14

Pour un système linéaire,  $\dot{x} = Ax + Bu$  où  $u$  est telle que  $\|u\| \leq M$ . Alors, nous avons :

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = 2x^T Ax + 2x^T Bu \leq 2\lambda_{max}^A \|x\|^2 + 2\lambda_{max}^B M \|x\|$$

où  $\lambda_{max}^P$  dénote la plus grande valeur singulière d'une matrice donnée  $P$ . En utilisant une équation ordinaire de Bernoulli, il suit :

$$\|x(t)\|^2 \leq \left[ \frac{\lambda_{max}^B M}{\lambda_{max}^A} \left( e^{(\lambda_{max}^A)t} - 1 \right) + \|x(0)\| e^{(\lambda_{max}^A)t} \right]^2$$

Ceci termine la preuve, le système ne peut pas diverger en temps fini. Noter que le résultat suppose seulement l'existence d'une trajectoire de boucle fermée. ■

Avant de prouver la stabilité nous considérons le changement de coordonnées  $z := \frac{1}{\sigma}x$  et  $v := \frac{1}{\sigma}u$ , alors le système se transforme en  $\dot{z} = Az + Bv$  avec la contrainte  $|v| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon^i$ . Nous appliquons le changement de coordonnées (1.20) et (1.21) présenté dans le travail de Sussmann *et al.* [89] entre  $y$  et  $z$  pour obtenir :

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \dots & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^{n-2} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (\text{A.2})$$

Ce système (A.2) sera utilisé dans la preuve de Théorème 1.

### Preuve de Théorème 1

Considérons le système (A.2) et  $|y_n| \geq 1$ . Nous allons montrer que  $y_n$  rejoint nécessairement l'intervalle  $[-1, 1]$  en temps fini. Soit la fonction de Lyapunov  $V_n := \frac{1}{2}y_n^2$ . La dérivée de  $V_n$  est donnée par :

$$\dot{V}_n = -y_n \varepsilon \text{sat}_1(y_n) - y_n [\varepsilon^2 \text{sat}_1(y_{n-1}) + \dots + \varepsilon^n \text{sat}_1(y_1)]$$

Évidemment, la décroissance de la fonction de Lyapunov  $V_n$  tient si  $|y_n| \geq 1$  et  $\varepsilon > \sum_{i=2}^n \varepsilon^i$ . Mais nous avons :

$$\varepsilon > \sum_{i=2}^n \varepsilon^i \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^n > 0$$

et  $p(\varepsilon) = \varepsilon^n - 2\varepsilon + 1$  a un extremum unique pour  $\varepsilon = \sqrt[n-1]{\frac{2}{n}}$ . Il est possible de vérifier que pour  $n > 2$ , cet extremum reste nécessairement dans  $]0, 1[$  parce que  $p(0) = 1$ ,  $\frac{dp}{d\varepsilon}(0) = -2 < 0$ ,  $p(1) = 0$  et  $\frac{dp}{d\varepsilon}(1) = -2 + n > 0$ .

Par conséquent, pour tout  $n > 2$ ,  $p(\varepsilon)$  a nécessairement une et seulement une racine  $\bar{\varepsilon}(n)$  dans l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  et  $p(\varepsilon) > 0$  pour tout  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}(n)$  et  $p(\varepsilon) < 0$  si  $\varepsilon > \bar{\varepsilon}(n)$ . On peut noter que ceci est également vérifié pour  $n = 2$ . Par conséquent,  $y_n$  rejoint nécessairement  $[-1, 1]$  en temps fini. Pendant ce temps, les

autres états ne peuvent pas diverger ( Lemme 14).

Une fois  $y_n$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , l'évolution de  $V_{n-1} := y_{n-1}^2$  satisfait :

$$\dot{V}_{n-1} = -y_{n-1}\varepsilon^2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - y_{n-1}[\varepsilon^3 \text{sat}_1(y_{n-2}) + \cdots + \varepsilon^n \text{sat}_1(y_1)]$$

Avec la même argumentation que ci-dessus on peut montrer que,  $y_{n-1}$  rejoint  $[-1, 1]$  en temps fini. Par conséquent, après une certaine temps fini, tous  $y_i$  sont dans l'intervalle  $[-1, 1]$  où le système est linéaire avec des valeurs propres strictement négatives :

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varepsilon^n & -\varepsilon^{n-1} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon^n & -\varepsilon^{n-1} & \cdots & -\varepsilon^2 & -\varepsilon \end{pmatrix} y \quad (\text{A.3})$$

Système (A.3) est évidemment stable et comme résultat quand  $t$  tend vers l'infini les états  $y$  tendent vers l'origine et celle-ci achève la preuve. ■

## A.2 Preuve de Théorème 3

**Théorème 3** Soient  $\varepsilon$  comme au Théorème 1 et les niveaux de saturation  $M_i$  définis par :

$$\begin{cases} M_n = 1 \\ M_j = 1 + \frac{1}{\varepsilon}[M_{j+1} - |\text{sat}_{M_{j+1}}(y_{j+1})|] \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La commande

$$u = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \text{sat}_{M_i}(y_i) \quad (\text{A.5})$$

avec  $y_i$  comme dans (1.19) stabilise asymptotiquement la chaîne d'intégrateurs (1.1)

Supposons que  $|y_n| > 1$  pour le système (A.2). Pour la fonction de Lyapunov  $V_n := \frac{1}{2}y_n^2$ , il suit :

$$\dot{V}_n = -y_n \varepsilon \text{sat}_{M_n}(y_n) - y_n[\varepsilon^2 \text{sat}_{M_{n-1}}(y_{n-1}) + \cdots + \varepsilon^n \text{sat}_{M_1}(y_1)]$$

La décroissance de la fonction de Lyapunov est assurée si

$$|\text{sat}_{M_n}(y_n)| > \left| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-i} \text{sat}_{M_i}(y_i) \right| \quad (\text{A.6})$$

Mais, l'utilisation de  $M_i$  du Théorème 3 nous donne

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-i} \text{sat}_{M_i}(y_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-i} |\text{sat}_{M_i}(y_i)| \\
&\leq \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon^{n-i} |\text{sat}_{M_i}(y_i)| + \varepsilon^{n-1} M_1 \\
&\leq \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon^{n-i} |\text{sat}_{M_i}(y_i)| + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} [M_2 - |\text{sat}_{M_2}(y_2)|] \\
&\leq \sum_{i=3}^{n-1} \varepsilon^{n-i} |\text{sat}_{M_i}(y_i)| + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} M_2 \\
&\quad \vdots \\
&\leq \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \dots + \varepsilon^2 + \varepsilon M_{n-1}
\end{aligned}$$

Comme  $|y_n| > 1$ ,  $M_{n-1} = 1$  il suit :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-i} \text{sat}_{M_i}(y_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^i$$

Un choix de  $\varepsilon$  strictement inférieur  $\bar{\varepsilon}(n)$  assurant que  $\varepsilon > \sum_{i=2}^n \varepsilon^i$  assurera également l'équation (A.6). Par conséquent, ici encore,  $y_n$  rejoint nécessairement  $[-1, 1]$  en temps fini. Pendant ce temps, les autres états ne peuvent aller vers l'infini (Lemme 14).

Le même raisonnement appliqué pour tous les états assure que tous les  $y_i$  rejoignent  $[-1, 1]$  en temps fini où le système prend la forme (A.3). Ce système est linéaire et asymptotiquement stable ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

## A.3 Preuve de Théorème 5

**Théorème 5** Soit  $\Theta := \{\theta_i\}_{i=1, \dots, n}$  une famille de nombres réels telle que :

- Le couple  $(A_\Theta, B_\Theta)$  de l'équation (A.10) est contrôlable
- Pour tous  $k \in \{2, \dots, n\}$ ,  $0 < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < \theta_k < 1$ , soient  $\{M_i\}_{i=1, \dots, n}$  définis par :

$$\begin{cases} M_n &= 1 \\ M_j &= 1 + \alpha_j \frac{\theta_{j+1}}{\theta_j} [M_{j+1} - |\text{sat}_{M_{j+1}}(\frac{y_{j+1}}{\sigma})|] , \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où  $\alpha_j \in [0, 1]$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  et  $y = P_\Theta x$  avec  $P_\Theta$  de Lemme 4.

Soit le paramètre d'ajustement  $\sigma := \bar{u} / \sum_{i=1}^n \theta_i$ , alors, la loi de commande

$$u = -\sigma \sum_{i=1}^n \theta_i \text{sat}_{M_i} \left( \frac{y_i}{\sigma} \right) \quad (\text{A.8})$$

stabilise globalement asymptotiquement le système (1.44) à l'origine.

Considérons le système

$$y^+ = A_{\Theta} y + B_{\Theta} u \quad (\text{A.9})$$

avec  $A_{\Theta}$  et  $B_{\Theta}$

$$A_{\Theta} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ 0 & 1 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \theta_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{\Theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

En appliquant le changement de coordonnée  $z := \frac{1}{\sigma} y$  et  $v := \frac{1}{\sigma} u$ , le système (A.9) devient :

$$z^+ = A_{\Theta} z + B_{\Theta} v \quad (\text{A.11})$$

avec

$$v = -\sum_{i=1}^n \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \quad (\text{A.12})$$

Supposons que  $z_n \notin [-1, 1]$ . Nous allons montrer que  $z_n$  rejoint nécessairement  $[-1, 1]$  après un nombre fini de périodes d'échantillonnage et reste ensuite dans cet intervalle. En effet, définissant  $V_n := z_n^2$ , il suit de l'équation (A.11) :

$$V_n^+ - V_n = (z_n + v)^2 - z_n^2 = v^2 + 2z_n v \quad (\text{A.13})$$

Clairement, grâce à l'inégalité  $\theta_n > \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$  et la définition (A.12) de la commande  $v$ ,  $z_n v$  est nécessairement négatif. Par conséquent équation (A.13) peut être réécrit :

$$V_n^+ - V_n = v^2 - 2|z_n v| \quad (\text{A.14})$$

Avec la définition (A.12) de la commande  $v$  nous avons :

$$|v| \geq \theta_n |\text{sat}_{M_n}(z_n)| - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)|$$



Quand  $z_n \notin [-1, 1]$ ,  $|\text{sat}_{M_n}(z_n)| = 1$ , en utilisant la définition des niveaux de saturation

$$\begin{cases} M_n &= 1 \\ M_j &= 1 + \alpha_j \frac{\theta_{j+1}}{\theta_j} [M_{j+1} - |\text{sat}_{M_{j+1}}(\frac{y_{j+1}}{\sigma})|] \end{cases}, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.15})$$

il suit que :

$$\begin{aligned} |v| &\geq \theta_n - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| \\ &\geq \theta_n - \sum_{i=2}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| - \theta_1 M_1 \\ &\geq \theta_n - \sum_{i=2}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| - \theta_1 \left( 1 + \alpha_1 \frac{\theta_2}{\theta_1} [M_2 - |\text{sat}_{M_2}(z_2)|] \right) \\ &\geq \theta_n - \theta_1 - \sum_{i=3}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| - \theta_2 M_2 + \theta_2 (1 - \alpha_1) [M_2 - |\text{sat}_{M_2}(z_2)|] \end{aligned}$$

Puisque  $\theta_2(1 - \alpha_1) [M_2 - |\text{sat}_{M_2}(z_2)|] \geq 0$ , il suit

$$|v| \geq \theta_n - \theta_1 - \sum_{i=3}^{n-1} \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| - \theta_2 M_2$$

En continuant le même raisonnement, on obtient :

$$|v| \geq \theta_n - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i > 0 \quad (\text{A.16})$$

Mais également :

$$\begin{aligned} |v| &\leq \sum_{i=1}^n \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| \\ &\leq \sum_{i=2}^n \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| + \theta_1 \left( 1 + \alpha_1 \frac{\theta_2}{\theta_1} [M_2 - |\text{sat}_{M_2}(z_2)|] \right) \\ &\leq \theta_1 + \sum_{i=3}^n \theta_i |\text{sat}_{M_i}(z_i)| + \theta_2 M_2 \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^n \theta_i \end{aligned}$$

Puisque  $\theta_n < 1$ , on a :

$$|v| \leq \theta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \leq 2 - \theta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$$

et donc, puisque  $z_n \notin [-1, 1]$  :

$$|v| - 2|z_n| \leq -\theta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i < 0 \quad (\text{A.17})$$

A partir des inégalités (A.16) et (A.17), nous avons (A.14) telle que :

$$V_n^+ - V_n \leq - \left( \theta_n - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \right)^2$$

Par conséquent, on peut conclure que  $V_n$  décroît strictement tant que  $z_n \notin [-1, 1]$  et  $z_n$  rejoint nécessairement  $[-1, 1]$  après un nombre fini des périodes d'échantillonnage. Une fois que  $z_n$  a rejoint  $[-1, 1]$ , on a :

$$|z_n^+| \leq |(1 - \theta_n)z_n| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \right| \leq 1 - \theta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i < 1$$

Par conséquent, une fois que  $z_n$  a rejoint  $[-1, 1]$ , il reste dans cet intervalle pour tous les futurs pas de temps.

Supposons maintenant que  $z_n \in [-1, 1]$  et que  $z_{n-1} \notin [-1, 1]$ . On sait déjà que  $z_n$  reste dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , nous allons montrer que  $z_{n-1}$  rejoint également cet intervalle après un nombre fini de périodes d'échantillonnage. En effet, définissant  $V_{n-1} := z_{n-1}^2$ , il suit de (A.11) :

$$V_{n-1}^+ - V_{n-1} = (z_{n-1} + \theta_n z_n + v)^2 - z_{n-1}^2 \quad (\text{A.18})$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \right]^2 - 2z_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \quad (\text{A.19})$$

Avec les mêmes arguments que pour les équations (A.16) et (A.17), nous avons :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \right| \geq \theta_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i > 0 \quad (\text{A.20})$$

et

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \right| \leq \theta_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i \leq 2|z_{n-1}| - \theta_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i \quad (\text{A.21})$$

La différence (A.19) s'écrit :

$$V_{n-1}^+ - V_{n-1} \leq - \left( \theta_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i \right)^2$$

Par conséquent,  $z_{n-1}$  rejoint nécessairement  $[-1, 1]$  après un nombre fini d'étapes de temps et donc  $z_{n-1}^+$  vérifie alors :

$$|z_{n-1}^+| \leq |(1 - \theta_{n-1})z_{n-1}| + \left| \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i \text{sat}_{M_i}(z_i) \right| \leq 1 - \theta_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i < 1$$

En conséquence,  $z_{n+1}$  reste dans l'intervalle  $[-1, 1]$  pour tous les futurs pas de temps. Continuant le même raisonnement pour tout  $z_i$ , on peut conclure que l'état  $z$  rejoint nécessairement une boule unitaire autour de l'origine après un nombre fini d'itérations. Une fois dans la boule unitaire, la loi de commande (A.12) est linéaire et le système en boucle fermé est donnée par :

$$z^+ = \begin{pmatrix} 1 - \theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta_1 & 1 - \theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 - \theta_{n-1} & 0 \\ -\theta_1 & \cdots & & -\theta_{n-1} & 1 - \theta_n \end{pmatrix} z$$

qui est évidemment asymptotiquement stable pour tous  $0 < \theta_i < 1$  avec  $i \in [1, n]$ . ■

# Annexe B

## B.1 Existence de $U$

Dans cette section nous étudions le rang de la matrice carrée  $\Gamma_n$ . Si la matrice  $\Gamma_n$  est de rang plein alors son inverse  $\Gamma_n^{-1}$  et la commande continue par morceaux  $U$  existent. Rappelons que  $\Gamma_n$  est une matrice carrée donnée par l'équation suivante :

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (A_1)^{n-1-i} B_1 \begin{bmatrix} i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{2} \\ \delta \end{bmatrix}$$

**Lemme**  $\forall n > 1$ ,  $\Gamma_n$  est de rang plein.

**Preuve:** D'après équation (B.1), la matrice  $\Gamma_n$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{\delta^2}{2} + (n-1-i)\delta^2]i & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^2}{2} + (n-1-i)\delta^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} i\delta & \sum_{i=0}^{n-1} \delta \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le développement des quatre éléments de (B.2) nous donne :

$$\Gamma_n^{11} = \frac{\delta^2 n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{2} - \delta^2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_n^{12} = \frac{\delta^2 n^2}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_n^{21} = \frac{\delta n(n-1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_n^{22} = \delta n \quad (\text{B.6})$$

Grâce à (B.5),  $\Gamma_n$  est de rang plein dès que  $\Gamma_n^{11} \neq \frac{n-1}{2}\Gamma_n^{12}$ . La preuve de ceci est basée sur le calcul de différence  $\Gamma_n^{11} - \frac{n-1}{2}\Gamma_n^{12}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{11} - \frac{n-1}{2}\Gamma_n^{12} &= \frac{\delta^2 n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{2} - \delta^2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \frac{\delta^2 n^2(n-1)}{4} \quad (\text{B.7}) \\ &= -\delta^2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{n\delta^2}{4}(n-1)^2 \end{aligned}$$

Pour  $I_n := \sum_{i=0}^n i^2$  et  $J_n := \frac{(n+1)n^2}{4}$ , alors

$$\Gamma_n^{11} - \frac{n-1}{2}\Gamma_n^{12} = \delta^2(J_{n-1} - I_{n-1}) \quad (\text{B.8})$$

Nous avons également

$$\Delta I_n = I_n - I_{n-1} = n^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta J_n = J_n - J_{n-1} = \frac{3n^2}{4} - \frac{n}{4} \quad (\text{B.10})$$

Il est évident que  $\Delta I_n > \Delta J_n$  et puisque  $I_1 > J_1$  on a que  $\forall n > 0$ ,  $I_n > J_n$ . Par conséquent,  $\Gamma_n^{11} \neq \frac{n-1}{2}\Gamma_n^{12}$  et  $\Gamma_n$  est de rang plein  $\forall n > 1$ . ■

## B.2 Existence de $V$

L'existence de la commande  $V$  est étudié. Nous trouvons une relation entre le longueur d'horizon de prediction  $n$  avec la dimension du système  $m$  telle que la matrice  $\Psi_n$  est de rang plein.

**Lemme** *Si  $\eta_d \neq \eta_0$ , alors  $\Psi_n$  est de rang plein pour  $n > 2m$ .*

**Preuve:**

On démontre la relation suivante ( $\alpha = \beta = 0 \leftrightarrow \eta_d = \eta_0$ ). Cette relation signifie que la commande ( $u$ ) s'annule seulement quand l'état désiré est égal à l'état initial. Supposons premièrement que  $\alpha = \beta = 0$ , alors nécessairement et grâce à (B.14), nous avons la relation suivante entre l'état initial et l'état désiré :

$$\eta_d = A_1^n \eta_0 = A_1^n \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

L'état désiré  $\eta_d$  (B.11) s'écrit donc :

$$\eta_d = \begin{pmatrix} \eta_d^1 \\ \eta_d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0^1 + n\delta\eta_0^2 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Puisque la stabilisation en position est considérée,  $\eta_d$  est de la forme  $[\eta_d^1 \ 0]^T$  où  $\eta_d^1$  est le position désiré à atteindre avec une vitesse nulle  $\eta_d^2 = 0$ . Par conséquent, nous obtenons que l'état désiré est égal à l'état initial ( $\eta_0^2 = \eta_d^2 = 0$  et  $\eta_0^1 = \eta_d^1$ ).

Dans le cas où l'état initial est différent de l'état désiré ( $\eta_0 \neq \eta_d$ ), alors on a  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ . La question est de savoir si  $\alpha$  et  $\beta$  sont en même temps différents de zéro. La réponse est basée sur les caractéristiques de la commande  $u_i$ . On sait que la commande  $u_i$  peut s'annuler seulement une fois pendant l'horizon  $n$  parce qu'elle prend la forme d'une ligne droite continue par morceaux. En effet, s'il existe deux instants différents de temps  $i_1$  et  $i_2$  ( $i_1 \neq i_2$ ) tels que les commandes correspondantes  $u_{i_1}$  et  $u_{i_2}$  s'annulent ( $u_{i_1} = u_{i_2} = 0$ ), alors en appliquant la définition d' $\alpha$  et  $\beta$  (2.51) nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \alpha i_1 + \beta = 0 \\ \alpha i_2 + \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Dans ce cas-ci  $\alpha$  et  $\beta$  s'annulent. Ceci correspond à une contradiction parce qu'on a  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ . La commande  $u_i$  donc s'annule seulement une fois pendant l'horizon  $n$  et les deux instants de temps  $i_1$  et  $i_2$  sont égaux ( $i_1 = i_2$ ). Donc, nous obtenons que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux à zéro si et seulement si l'état initial est identique à l'état désiré  $\eta_d = \eta_0$ .

Nous sommes sûrs maintenant que dans le cas où on part d'un état initial différent de l'état désiré, un seul élément de  $U$  peut s'annuler.

Rappelons maintenant les expressions de  $A_{2_i}$ ,  $B_{2_i}$  et  $\Psi_n$  :

$$A_{2_i} = \begin{bmatrix} 1 & u_i \delta & u_i^2 \frac{\delta^2}{2!} & \dots & u_i^{2m-3} \frac{\delta^{2m-3}}{(2m-3)!} & u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-2}}{(2m-2)!} & u_i^{2m-1} \frac{\delta^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ 0 & 1 & u_i \delta & \dots & u_i^{2m-4} \frac{\delta^{2m-4}}{(2m-4)!} & u_i^{2m-3} \frac{\delta^{2m-3}}{(2m-3)!} & u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-2}}{(2m-2)!} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & u_i \delta & u_i^2 \frac{\delta^2}{2!} \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 & u_i \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{2_i} = \begin{bmatrix} u_i^{2m-1} \frac{\delta^{2m}}{2m!} \\ u_i^{2m-2} \frac{\delta^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ \vdots \\ u_i^2 \frac{\delta^3}{3!} \\ u_i \frac{\delta^2}{2!} \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\Psi_n = [A_{2_{n-1}} A_{2_{n-2}} \dots A_{2_1} B_{2_0}, A_{2_{n-1}} A_{2_{n-2}} \dots A_{2_2} B_{2_1}, \dots, A_{2_{n-1}} B_{2_{n-2}}, B_{2_{n-1}}]$$

La dimension de la matrice  $\Psi_n$  est clairement  $2m \times n$ . Si nous choisissons la longueur d'horizon  $n$  deux fois plus grande que la dimension de  $\Sigma_2$  ( $n > 2m$ ), on peut assurer qu'il y a au moins  $2m$  des périodes de temps où  $u_i \neq 0$ . Dans ce cas on peut garantir l'existence au moins  $2m$  paires contrôlables  $[A_{2i}, B_{2i}]$  de la matrice  $\Psi_n$ . Donc on peut conclure que  $\Psi_n$  est de rang plein si  $\eta_d \neq \eta_0$  et  $n > 2m$ . ■

### B.3 Étude de l'effet de $n$ sur les éléments de commande

On peut prouver que il y a une relation entre la longueur d'horizon  $n$  et la grandeur des éléments de la commande. En effet, si  $n$  augmente, les éléments de  $U$  et  $V$  tendent vers zéro.

**Lemme** On a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U\| \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|V\| \rightarrow 0.$

**Preuve:** Premièrement pour  $u_i$ , l'expression des paramètres  $\alpha$  and  $\beta$  dépend du produit de deux termes  $\Gamma_n^{-1}$  et  $(\eta_n - (A_1)^n \eta_0)$ . Où  $\eta_n$  est l'état final,  $\eta_0$  l'état initial du système et  $n$  la longueur de l'horizon de prédiction.

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \Gamma_n^{-1} [\eta_n - (A_1)^n \eta_0] \quad (\text{B.14})$$

La matrice  $\Gamma_n^{-1}$  s'écrit :

$$\Gamma_n^{-1} = \frac{1}{\det \Gamma_n} \begin{bmatrix} \delta n & \frac{-1}{2}(\delta^2 n^2) \\ \frac{-1}{2}(\delta n(n-1)) & \frac{n\delta^2}{6}[10n^2 - 21n + 5] \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

avec

$$\det \Gamma_n = \frac{17}{12}(\delta^3 n^4) - \frac{39}{12}(\delta^3 n^3) + \frac{5}{6}(\delta^3 n^2) \quad (\text{B.16})$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$

$$\Gamma_n^{-1} \sim \frac{1}{n^4} \begin{bmatrix} n & n^2 \\ n^2 & n^3 \end{bmatrix}$$

Pour  $(\eta_n - (A_1)^n \eta_0)$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on a :

$$(\eta_n - (A_1)^n \eta_0) \sim \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc l'expression du produit des deux termes  $\Gamma_n^{-1}$  et  $(\eta_n - (A_1)^n \eta_0)$  quand  $n \rightarrow \infty$  est donnée par :

$$\Gamma_n^{-1} [\eta_n - (A_1)^n \eta_0] \sim \frac{1}{n^4} \begin{bmatrix} n^2 \\ n^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

En conséquence, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  décroissent avec l'augmentation de  $n$ . La commande  $u_i$  satisfera donc la contrainte de saturation  $u^{max}$  en augmentant  $n$  suffisamment.

Pour  $v_i$ , la preuve est semblable mais plus fastidieuse. L'idée est de trouver une relation entre la longueur d'horizon  $n$  et les matrices  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$ . Pour une période d'échantillonnage fixe et une dimension de  $\Sigma_2$  donnée, la grandeur des différents éléments de  $A_{2_i}$  et  $B_{2_i}$  ne dépendent que de la valeur de  $u_i$  la commande de  $\Sigma_1$ . Ainsi, la norme de  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$  (fonctions de  $A_{2_i}$  et  $B_{2_i}$ ) dépend nécessairement de la valeur de  $u_i$ . On a prouvé que si  $n$  augmente alors la valeur de  $u_i$  décroît et par conséquent on peut prouver le même résultat pour la norme de  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$ . Rappelons que  $V$  vérifie la relation suivante :

$$V = \Psi_n^+ (z_d - \Phi_n z_0)$$

Donc si  $n$  augmente la norme de  $V$  décroît et commande  $v_i$  satisfera donc la contrainte de saturation  $v^{max}$ . ■

## B.4 Étude de stabilité

Dans cette section, la stabilité globale en boucle fermée du système chaîné est établie.

**Théorème 9** *La loi de commande par retour d'état en temps discret définie pour  $\sigma \in [0, \delta[$  :*

$$w(k\delta + \sigma) = w_1^{opt}(y_k) \tag{B.18}$$

où  $w_1^{opt}(y_k)$  est le premier élément de la séquence de commande en boucle ouverte (Algorithme B( $y_0$ )) de la section 2.3.3, stabilise globalement le système chaîné (2.28) à partir l'état initial  $y_0$  vers l'état désiré final  $y_d$ .

L'état  $y_{cl}(\cdot)$  dénote les trajectoires en boucle fermée sous l'action de la commande de Théorème 9.

**Proposition 15** *Pour  $\delta$  positif et constant il existe une fonction scalaire  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec les propriétés suivantes*

1.  $(V(y) = 0) \Leftrightarrow (y = y_d)$
2.  $V$  est radialement non-bornée
3.  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$V(y_{cl}(k+1)) - V(y_{cl}(k)) \leq -\delta \text{ dès que } V(y_{cl}(k)) > \delta \tag{B.19}$$



**Preuve:** Dans notre cas, la fonction  $V$  :

$$V(y) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{t_i^{opt}(y) \mid X(t_i^{opt}(y); 0; x; W(\cdot, t^{opt}(y_0), w^{opt}(y_0))) = 0\} \quad (\text{B.20})$$

satisfait Proposition 15. Noter qu'à partir des définitions de  $(t^{opt}(y), w^{opt}(y))$  (équations (2.70) et (2.71)), nous savons que  $V(y)$  est bien défini et telle que  $V(y) \leq t_n^{opt}(y)$ .

Les caractéristiques de  $V(y)$  de Proposition 15 sont prouvées de la façon suivante.

1.  $(V(y) = 0) \Leftrightarrow (y = y_d)$  résulte directement du fait qui sous la commande bornée, l'état de système ne peut pas être orienté de  $y_0 \neq y_d$  à  $y_d$  infiniment rapidement.
2.  $V$  est radialement non-bornée résulte du fait qui sous la commande bornée, le temps nécessaire pour orienter l'état de  $y_0$  à  $y_d$  tend vers l'infini quand  $\|y_0\|$  tend vers l'infini.
3. Nous employons la solution du problème d'optimisation

$$(\hat{q}(y_0), \hat{\varepsilon}(y_0)) = \text{Arg} \min_{(q, \varepsilon) \in \mathcal{A}(x_0)} q\delta + \hat{t}_n(y_f(y_0, q, \varepsilon))$$

comme une fonction de coût notamment

$$J(q, \varepsilon, y_0) = q\delta + \hat{t}_n(y_f(y_0, q, \varepsilon)) \quad (\text{B.21})$$

et employons  $(\hat{q}_k, \hat{\varepsilon}_k)$  pour dénoter  $(\hat{q}(y_{cl}(k)), \hat{\varepsilon}(y_{cl}(k)))$ . Deux cas doivent être considérés :

- **Cas 1** :  $\hat{q}_k > 0$ .

Dans ce cas-ci, on définit

$$y^+(k) := X(\hat{q}_k\delta; 0; y_{cl}(k); u_{\hat{q}_k, \hat{\varepsilon}_k}(\cdot))$$

Par définition,  $V(y_{cl}(k))$  est donné par :

$$V(y_{cl}(k)) = \hat{q}_k\delta + \hat{t}_{i_0}(y^+(k)) \quad \text{pour } i_0 \leq n \quad (\text{B.22})$$

Sachant que

$$X(\tilde{q}_{k+1}\delta; 0; y_{cl}(k+1); w_{\tilde{q}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_{k+1}}(\cdot)) = y^+(k) \quad (\text{B.23})$$

avec les solutions sous-optimales

$$(\tilde{q}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_{k+1}) = (\hat{q}_k - 1, \hat{\varepsilon}_k)$$

Par conséquent, avec (B.22)

$$\begin{aligned} V(y_{cl}(k+1)) &\leq J(\tilde{q}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_{k+1}, y_{cl}(k+1)) \\ &\leq (\hat{q}_k - 1)\delta + \hat{t}_{i_0}(y^+(k)) \\ &\leq V(y_{cl}(k)) - \delta \end{aligned}$$

L'inégalité (B.19) est donc vérifiée.

• **Cas 2 :**

$\hat{q}_k = 0$ . Dans ce cas-ci, l'état suivant de la trajectoire en boucle fermée est clairement donné par

$$y_{cl}(k+1) = X\left(\delta; 0; y_{cl}(k); W(0, t^{opt}(y_k), w_0^{opt}(y_k))\right)$$

Maintenant, observons que choisir la solution sous-optimale  $(\tilde{q}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_{k+1}) = (0, \hat{\varepsilon}_k)$  implique que :

$$J(\tilde{q}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_{k+1}, y_{cl}(k+1)) = \hat{t}_n(y_{cl}(k+1)) \quad (\text{B.24})$$

mais on a

$$\hat{t}_n(y_{cl}(k+1)) = \hat{t}_n(y_{cl}(k)) - \delta \quad (\text{B.25})$$

Ceci avec (B.24) montre que dans tous les cas quand  $V(x_{cl}(k)) > \delta$ , le temps nécessaire pour aller de  $y_{cl}(k+1)$  à  $y_d$  est inférieur d'au moins une période  $\delta$  au temps nécessaire pour aller de  $y_{cl}(k)$  à  $y_d$ . Ici encore l'inégalité (B.19) est vérifiée.

■

## B.5 Fonction de saturation

La fonction de saturation  $\text{sat}_M$ , utilisée dans la commande bornée du PVTOL, dépend d'un paramètre positif  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$  :

$$\text{sat}_M(s) = \begin{cases} -M & \text{si } s < -M - \alpha \\ p_1(s) = a_1 s^2 + b_1 s + c_1 & \text{si } s \in [-M - \alpha, -M + \alpha] \\ s & \text{si } s \in [-M + \alpha, M + \alpha] \\ p_2(s) = a_2 s^2 + b_2 s - c_2 & \text{si } s \in ]M - \alpha, M + \alpha] \\ +M & \text{si } s > M + \alpha \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -a_2 = \frac{M}{4\alpha} \\
 b_1 &= b_2 = \frac{M}{2} + \frac{M}{2\alpha} \\
 c_1 &= -M + \frac{\alpha}{2} + b_1 M - a_1(M^2 + \alpha^2) \\
 c_2 &= M - \frac{\alpha}{2} - b_2 M - a_2(M^2 + \alpha^2)
 \end{aligned}$$

Le niveau de la saturation est représenté par  $M$ . Pour  $M = 1$  la fonction de saturation  $\text{sat}_M$  simplement s'écrit  $\text{sat}_1$ . Le choix de  $\alpha$  change la forme de la courbure. Pour  $\alpha$  très petit, on obtient la fonction classique de saturation. Tous les résultats du chapitre 1 établis pour des saturations classiques ( $\alpha = 0$ ) restent valables par continuité pour ( $\alpha \neq 0$ ) avec  $\alpha$  suffisamment petit.

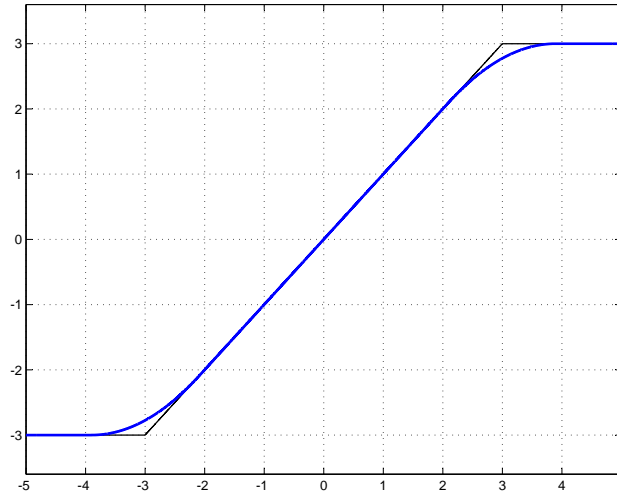


FIG. B.1 – La fonction de saturation (bleu) avec  $M = 3$  et  $\alpha = 0.9$

## B.6 Stabilité globale du PVTOL avec gravité

Les résultats de stabilité sont basés sur la théorie des systèmes en cascade. La preuve suivante est divisée en plusieurs parties. D'abord, la stabilité locale est étudiée. En second lieu, on montre que  $\theta$  converge vers l'angle désiré  $\theta_d$ . La stabilité asymptotique globale de  $\Sigma_t$  est alors prouvée. En conclusion, la stabilité asymptotique globale du système global est obtenue grâce à un résultat de Sontag [88].

### B.6.1 Stabilité locale du PVTOL

Pour démontrer la stabilité locale, nous allons appliquer la méthode de linéarisation au PVTOL au voisinage de l'origine en utilisant les définitions de  $\text{sat}_1$  and  $\text{sat}_{\beta_\theta}$ . Au voisinage de l'origine les commande  $r_x$ ,  $r_z$  et  $v$  sont écrites sous la forme suivant

$$r_x = -a_x p_1 - b_x p_2 \quad (\text{B.27})$$

$$r_z = -a_z p_2 - b_z p_4 \quad (\text{B.28})$$

$$v = \beta_\theta(\ddot{\eta}_d) - a_\theta(\eta_1 - \eta_d) - b_\theta(\eta_2 - \dot{\eta}_d) \quad (\text{B.29})$$

pour

$$a_{\{x,z,\theta\}} := \varepsilon_{\{x,z,\theta\}}^3 \quad \text{et} \quad b_{\{x,z,\theta\}} := \varepsilon_{\{x,z,\theta\}} + \varepsilon_{\{x,z,\theta\}}^2$$

Le système du PVTOL prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = h(p, \eta) = \begin{pmatrix} p_2 \\ -u \sin(\eta_1) \\ p_4 \\ u \cos(\eta_1) - 1 \\ \eta_2 \\ \beta_\theta(\ddot{\eta}_d) - a_\theta(\eta_1 - \eta_d) - b_\theta(\eta_2 - \dot{\eta}_d) \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

La matrice jacobienne  $\mathcal{A}$  au voisinage de l'origine

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_z & -b_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_\theta a_x & b_\theta a_x + a_\theta b_x & 0 & 0 & -\beta_\theta a_x - b_\theta b_x - a_\theta & -\beta_\theta b_x - b_\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

L'équation caractéristique de  $\mathcal{A}$  donnée par :

$$P(\lambda) = |\lambda I - \mathcal{A}| \quad (\text{B.32})$$

$$= (\lambda^2 + \lambda b_z + a_z) \quad (\text{B.33})$$

$$(\lambda^4 + \lambda^3(\beta_\theta b_x + b_\theta) + \lambda^2(\beta_\theta a_x + b_\theta b_x + a_\theta) + \lambda(b_\theta a_x + a_\theta b_x) + a_\theta a_x)$$

a des racines stables pour  $\varepsilon_{\{x,z,\theta\}} \leq 1$ . En conséquence, la stabilité locale de la commande proposée est établie.

### B.6.2 Stabilité globale de $\theta - \theta_d$

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale de  $\Sigma_r$  (2.103). La preuve est basée sur l'idée que  $\ddot{\eta}_d$  est borné. Rappelons que  $\eta_d$  prend la forme suivante :

$$\eta_d = \arctan\left(\frac{-r_x}{r_z + 1}\right)$$

et la poussée :

$$u = \sqrt{r_x^2 + (r_z + 1)^2}$$

avec  $r_x$  et  $r_z$  données par :

$$\begin{aligned} r_x &= -\varepsilon_x \text{sat}_1(p_2) - \varepsilon_x^2 \text{sat}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2) \\ r_z &= -\varepsilon_z \text{sat}_1(p_4) - \varepsilon_z^2 \text{sat}_1(\varepsilon_z p_3 + p_4) \end{aligned}$$

La fonction  $\text{sat}_1$  est une fonction de saturation (équation B.26) avec  $M = 1$ . Les dérivées (première et seconde) de  $\eta_d$  sont :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_d &= \frac{r_x \dot{r}_z - (1 + r_z) \dot{r}_x}{u^2} = \frac{r_x \dot{r}_z - (1 + r_z) \dot{r}_x}{r_x^2 + (r_z + 1)^2} \\ \ddot{\eta}_d &= \frac{r_x \ddot{r}_z - (1 + r_z) \ddot{r}_x - 2\dot{\eta}_d (r_x \dot{r}_x + (1 + r_z) \dot{r}_z)}{r_x^2 + (r_z + 1)^2} \end{aligned}$$

Les dérivées premières de  $r_x$ ,  $r_z$  et  $u$  :

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= -\varepsilon_x \dot{\text{sat}}_1(p_2)(-u \sin \eta_1) - \varepsilon_x^2 \dot{\text{sat}}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2)(\varepsilon_x p_2 - u \sin \eta_1) \\ \dot{r}_z &= -\varepsilon_z \dot{\text{sat}}_1(p_4)(u \cos \eta_1 - 1) - \varepsilon_z^2 \dot{\text{sat}}_1(\varepsilon_z p_3 + p_4)(\varepsilon_z p_4 + u \cos \eta_1 - 1) \\ \dot{u} &= \frac{r_x \dot{r}_x + (1 + r_z) \dot{r}_z}{u} \end{aligned}$$

Les dérivées secondes de  $r_x$  et  $r_z$  :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_x &= -\varepsilon_x \ddot{\text{sat}}_1(p_2)(-u \sin \eta_1)^2 - \varepsilon_x \dot{\text{sat}}_1(p_2)(-\dot{u} \sin \eta_1 - u \eta_2 \cos \eta_1) \\ &\quad - \varepsilon_x^2 \ddot{\text{sat}}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2)(\varepsilon_x p_2 - u \sin \eta_1)^2 \\ &\quad - \varepsilon_x^2 \dot{\text{sat}}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2)(\varepsilon_x (u \sin \eta_1) - \dot{u} \sin \eta_1 - u \eta_2 \cos \eta_1) \\ \ddot{r}_z &= -\varepsilon_z \ddot{\text{sat}}_1(p_4)(u \cos \eta_1 - 1)^2 - \varepsilon_z \dot{\text{sat}}_1(p_4)(\dot{u} \cos \eta_1 - \eta_2 u \sin \eta_1) \\ &\quad - \varepsilon_z^2 \ddot{\text{sat}}_1(\varepsilon_z p_3 + p_4)(\varepsilon_z p_4 + u \cos \eta_1 - 1)^2 \\ &\quad - \varepsilon_z^2 \dot{\text{sat}}_1(\varepsilon_z p_3 + p_4)(\varepsilon_z (u \cos \eta_1 - 1) + \dot{u} \cos \eta_1 - u \eta_2 \sin \eta_1) \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que  $\dot{\eta}_d$  dépend de  $r_x$ ,  $r_z$ ,  $\dot{r}_x$  et  $\dot{r}_z$ . Les commandes  $r_x$  et  $r_z$  sont bornées. Les dérivées premières  $\dot{r}_x$  et  $\dot{r}_z$  sont composées d'éléments bornés ( $\cos$ ,  $\sin$  et  $\text{sat}_1$ ) et respectivement  $p_2$  et  $p_4$ . On applique Lemme 14 pour prouver que les

états  $p_2$  et  $p_4$  sont aussi bornés et ne peuvent pas diverger en temps fini sous les commandes bornées  $r_x$  et  $r_z$ . Comme résultat  $\dot{\eta}_d$  est borné.

On peut reprendre la même argumentation pour  $\ddot{\eta}_d$  qui est composé par des éléments bornés ( $r_x, r_z, u, \dot{r}_x, \dot{r}_z$  et  $\dot{\eta}_d$ ) et les dérivées secondes  $\ddot{r}_x$  et  $\ddot{r}_z$ . Ces deux derniers éléments sont bornés par l'application Lemme 14 pour  $\eta_2, p_2$  et  $p_4$ . Par conséquent  $\ddot{\eta}_d$  est borné.

Nous appliquons maintenant le changement classique de coordonnées (1.20-1.21) pour obtenir le nouveau système  $y_1, y_2$  ayant la même propriété de stabilité du système  $\eta_1, \eta_2$  :

$$\begin{cases} y_1 &= \varepsilon_\theta \eta_1 + \eta_2 \\ y_2 &= \eta_2 \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

pour obtenir :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \varepsilon_\theta y_2 + v \\ \dot{y}_2 &= v \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Soit :

$$\begin{aligned} y_1^d &:= \varepsilon_\theta \eta_d + \dot{\eta}_d \\ y_2^d &:= \dot{\eta}_d \\ v^d &:= \ddot{\eta}_d \end{aligned}$$

La commande  $v$

$$v = \text{sat}_{\beta_\theta}(\ddot{\eta}_d) - \varepsilon_\theta \text{sat}_1(\eta_2 - \dot{\eta}_d) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(\varepsilon_\theta(\eta_1 - \eta_d) + (\eta_2 - \dot{\eta}_d)) \quad (\text{B.36})$$

s'écrit :

$$v = \sigma_{\beta_\theta}(v^d) - \varepsilon_\theta \sigma(y_2 - y_2^d) - \varepsilon_\theta^2 \sigma(y_1 - y_1^d) \quad (\text{B.37})$$

Nous allons montrer que les états  $y_2$  and  $y_1$  sont bornés après un temps fini. Pour cela, considérons la fonction de Lyapunov  $V_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_2^d)^2$  c'est-à-dire  $\dot{V}_2 = (y_2 - y_2^d)(\dot{y}_2 - \dot{y}_2^d) = (y_2 - y_2^d)(v - v^d)$ . Sachant que pour toute constante positive suffisamment petite  $\delta > 0$ , il existe  $t_\delta$  tel que pour tous  $t > t_\delta$  nous avons d'après l'analyse de  $\ddot{\eta}_d$  :

$$|v^d| = \left| \frac{d^2}{dt^2} \arctan\left(\frac{-r_x}{r_z + 1}\right) \right| < \delta \quad (\text{B.38})$$

Par conséquent, si  $|y_2 - y_2^d| > 1$  et  $\beta_\theta + \delta + \varepsilon_\theta^2 < \varepsilon_\theta$ , on a :

$$|\sigma_{\beta_\theta}(v^d) - v^d - \varepsilon_\theta^2 \sigma(y_1 - y_1^d)| \leq \beta + \delta + \varepsilon_\theta^2 < \varepsilon_\theta = |\varepsilon_\theta \sigma(y_2 - y_2^d)| \quad (\text{B.39})$$

Il suit que  $v - v^d$  est de signe opposé à  $\sigma(y_2 - y_2^d)$  et par conséquent à  $y_2 - y_2^d$ . Ceci assure que  $\dot{V}_2 < 0$  et en conséquence,  $y_2$  rejoindra l'intervalle  $[-1 + y_2^d, 1 + y_2^d]$  après

un temps fini  $t_1 > t_\delta$ . Pendant ce temps, grace au Lemme 14,  $y_1 - y_1^d$  ne peut pas diverger. Par conséquent,  $v$  prendra la forme suivante :

$$v = \sigma_{\beta_\theta}(v^d) - \varepsilon_\theta(y_2 - y_2^d) - \varepsilon_\theta^2 \sigma(y_1 - y_1^d) \quad (\text{B.40})$$

A partir du changement de coordonnées (B.35),  $\dot{y}_1$  peut s'écrire

$$\dot{y}_1 = \varepsilon_\theta y_2^d + v^d + \sigma_{\beta_\theta}(v^d) - \varepsilon_\theta^2 \sigma(y_1 - y_1^d) - v^d \quad (\text{B.41})$$

Pour  $y_1$  n'appartenant pas  $[-1 + y_1^d, 1 + y_1^d]$ , supposons que  $\beta_\theta + \delta < \varepsilon_\theta^2$  est vérifié. Alors la décroissance de la fonction de Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_{1d})^2$  est assurée par l'inégalité suivante

$$|\sigma_{\beta_\theta}(v^d) - v^d| < |\varepsilon_\theta^2 \sigma(y_1 - y_1^d)| \quad (\text{B.42})$$

ce qui signifie qu'après un temps fini  $t_2 > t_1 > t_\delta$ ,  $y_1$  joindra l'intervalle  $[-1 + y_1^d, 1 + y_1^d]$ . Là encore,  $v$  peut s'écrire :

$$v = \sigma_{\beta_\theta}(v^d) - \varepsilon_\theta(y_2 - y_2^d) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_1^d) \quad (\text{B.43})$$

Pour  $\beta_\theta > \delta$ , la commande  $v$  prend la forme suivante

$$v = v^d - \varepsilon_\theta(y_2 - y_2^d) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_1^d) \quad (\text{B.44})$$

$\forall t > t_2$ , le système d'erreur est par conséquent donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - \dot{y}_{1d} &= -\varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1d}) \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_{2d} &= -\varepsilon_\theta(y_2 - y_{2d}) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1d}) \end{cases}$$

ce qui donne clairement que  $\theta(t) \rightarrow \theta_d(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### B.6.3 Stabilité globale de $\Sigma_t$

Le sous-système  $\Sigma_t$ , dans le cas où  $\theta(t) = \theta_d(t)$ , prend la forme de deux chaînes d'intégrateurs d'ordre 2

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= -\varepsilon_x \sigma(p_2) - \varepsilon_x^2 \sigma(\varepsilon p_1 + p_2) \\ \dot{p}_3 &= p_4 \\ \dot{p}_4 &= -\varepsilon_z \sigma(p_4) - \varepsilon_z^2 \sigma(\varepsilon p_3 + p_4) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

La stabilité globale du sous-système (B.45) est garanti pour  $\varepsilon_{x,z} < 1$  (voir preuve Théorème 1).

### B.6.4 Stabilité globale du PVTOL ( $\Sigma_r + \Sigma_t$ )

Sachant que les solution de  $\Sigma_r$  sont bornées, la condition Converging Input Bounded state (CIBS) développé par [88] est vérifiée. Donc la stabilité globale asymptotique est garanti pour les systèmes en cascade (voir Annexe D.1).

# Annexe C

## C.1 La trajectoire de l'angle en appliquant une commande continue par morceaux

Dans cette section, nous présentons la trajectoire suivie par un angle  $\theta$  si une commande continue par morceaux  $v$  est appliquée à la dynamique exprimée par l'équation d'intégrateur double  $\ddot{\theta} = v$ . La première intégration entre  $t + kT$  et  $\tau$  donnera :

$$\dot{\theta}(\tau) = v(t + kT)[\tau - (t + kT)] + \dot{\theta}(t + kT) \quad (\text{C.1})$$

Pour trouver  $\theta$ , il faut intégrer une deuxième fois entre  $t + kT$  et  $\tau$  :

$$\theta(\tau) = \int_{(t+kT)}^{\tau} \dot{\theta}(s) ds + \theta(t + kT) \quad (\text{C.2})$$

En utilisant équation (C.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= \int_{(t+kT)}^{\tau} \{v(t + kT)[s - (t + kT)] + \dot{\theta}(t + kT)\} ds + \theta(t + kT) \\ &= v(t + kT) \left[ \frac{1}{2}s^2 - (t + kT)s + \dot{\theta}(t + kT)s \right]_{(t+kT)}^{\tau} + \theta(t + kT) \\ &= v(t + kT) \left[ \frac{1}{2}\tau^2 - (t + kT)\tau - \frac{1}{2}(t + kT)^2 + (t + kT)(t + kT) \right] \\ &\quad + \dot{\theta}(t + kT)[\tau - (t + kT)] + \theta(t + kT) \\ &= v(t + kT) \left[ \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}(t + kT)^2 - (t + kT)\tau \right] \\ &\quad + \dot{\theta}(t + kT)[\tau - (t + kT)] + \theta(t + kT) \\ &= \frac{1}{2}v(t + kT)[\tau^2 - 2(t + kT)\tau + (t + kT)^2] \\ &\quad + \dot{\theta}(t + kT)[\tau - (t + kT)] + \theta(t + kT) \\ &= \frac{1}{2}v(t + kT)[\tau - (t + kT)]^2 + \dot{\theta}(t + kT)[\tau - (t + kT)] + \theta(t + kT) \end{aligned}$$



## C.2 Modèle discret du quadrirotor

Le modèle discret du quadrirotor s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_f \\ \dot{x}_f \\ y_f \\ \dot{y}_f \\ z_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g\frac{t_f^2}{2} \\ -gt_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ y_0 \\ \dot{y}_0 \\ z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \\ + \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} D_N \right) \frac{U}{4}$$

Les matrices  $H_1, H_2, H_3, H_4$  et  $D_N$  dependent de l'horizon d'échantillonnage et des matrices de permutation  $Q_1$  à  $Q_{12}$  fonction de la base unitaire ortonormale  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  telle que :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ e_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 0) \\ e_3 &= (0 \ 0 \ 1 \ 0) \\ e_4 &= (0 \ 0 \ 0 \ 1) \end{aligned} \tag{C.3}$$

Les matrices de permutation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = (e_4, e_2, e_3, e_1)^T \\ Q_3 = (e_4, e_2, -e_3, -e_1)^T \\ Q_5 = (e_3, e_1, -e_4, -e_2)^T \\ Q_7 = (e_2, 0_{1 \times 4}, e_1, 0_{1 \times 4})^T \\ Q_9 = (e_2, 0_{1 \times 4}, -e_1, 0_{1 \times 4})^T \\ Q_{11} = (e_1, 0_{1 \times 4}, -e_2, 0_{1 \times 4})^T \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} Q_2 = (-e_4, -e_2, -e_3, -e_1)^T \\ Q_4 = (-e_4, -e_2, e_3, e_1)^T \\ Q_6 = (-e_3, -e_1, -e_4, -e_2)^T \\ Q_8 = (-e_2, 0_{1 \times 4}, -e_1, 0_{1 \times 4})^T \\ Q_{10} = (-e_2, 0_{1 \times 4}, e_1, 0_{1 \times 4})^T \\ Q_{12} = (-e_1, 0_{1 \times 4}, -e_2, 0_{1 \times 4})^T \end{array} \right\} \tag{C.4}$$

La matrice diagonale  $D_N$  est donnée par :

$$D_N = \text{diag}(N-1, N-2, \dots, 1, 0) \tag{C.5}$$

Les matrices  $H_1$  à  $H_4$  dependent des matrice de permutations et de la matrice  $\Gamma$  qui est une matrice constante basée sur les intégrales de Fresnel :

$$H_1 = [Q_1\Gamma^{\vartheta^1} + Q_2\Gamma^{\vartheta^2} + Q_3\Gamma^{\vartheta^3} + Q_4\Gamma^{\vartheta^4} + 2Q_5\Gamma^{\varphi^1} + +2Q_6\Gamma^{\varphi^2}]$$

$$H_2 = 2 \begin{bmatrix} \Gamma^{\varphi^3}(3, :) \\ \Gamma^{\varphi^3}(1, :) \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \Gamma^{\varphi^4}(3, :) \\ \Gamma^{\varphi^4}(1, :) \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

$$H_3 = Q_7\Gamma^{\vartheta^1} + Q_8\Gamma^{\vartheta^2} + Q_9\Gamma^{\vartheta^3} + Q_{10}\Gamma^{\vartheta^4} + 2Q_{11}\Gamma^{\varphi^1} + 2Q_{12}\Gamma^{\varphi^2}$$

$$H_4 = 2 \begin{bmatrix} \Gamma^{\varphi^3}(1, :) \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \Gamma^{\varphi^4}(1, :) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul de la matrice  $\Gamma$  est présenté dans la section suivante.

### C.2.1 Calcul de $\Gamma$ basé sur les intégrales de Fresnel

La matrice  $\Gamma^\mu$  est donnée pour un angle  $\mu$  quelconque :

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} c_0^\mu & c_1^\mu & \dots & c_{N-1}^\mu \\ s_0^\mu & s_1^\mu & \dots & s_{N-1}^\mu \\ C_0^\mu & C_1^\mu & \dots & C_{N-1}^\mu \\ S_0^\mu & S_1^\mu & \dots & S_{N-1}^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

avec, pour  $k = 0, \dots, N - 1$

$$s_k^\mu = \int_0^T \sin(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu v + \gamma_k^\mu v^2) dv \quad (\text{C.8})$$

$$c_k^\mu = \int_0^T \cos(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu v + \gamma_k^\mu v^2) dv \quad (\text{C.9})$$

$$S_k^\mu = \int_0^T \int_0^{v_2} \sin(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu v_1 + \gamma_k^\mu v_1^2) dv_1 dv_2 \quad (\text{C.10})$$

$$C_k^\mu = \int_0^T \int_0^{v_2} \cos(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu v_1 + \gamma_k^\mu v_1^2) dv_1 dv_2 \quad (\text{C.11})$$

Il faut noter que, contrairement à ce que l'on pourrait penser dans un premier temps, le calcul des matrices  $H_1$  à  $H_4$  n'est pas coûteux étant donné qu'il ne nécessite pas d'intégrer les équations de  $s_k^\mu$ ,  $c_k^\mu$ ,  $S_k^\mu$  et  $C_k^\mu$ . En effet, l'idée consiste à utiliser les intégrales de Fresnel [105] bien connues en électromagnétisme ou en optique (diffraction) et également utilisées pour le calcul des courbures des autoroutes et des lignes de voies ferrées.

$$s(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv \quad c(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv \quad (\text{C.12})$$

Il existe pour leur calcul des suites numériques dont la convergence vers la valeur de l'intégrale est extrêmement rapide et peu coûteuse en terme de calcul : voir Zhang et Jin [106]. Des routines, tant en FORTRAN que sous Matlab sont disponibles sur les sites de partage dédiés. Ainsi, pour une précision de  $10^{-20}$ , la routine utilisée par Zhang et Jin [106] nécessite 22 itérations pour un temps de calcul de l'ordre de  $5e^{-5}$  seconde sous Matlab pour le calcul des deux intégrales (C.12) sur un Pentium 1.8 GHz avec 1 Go de RAM. On évite ainsi l'intégration des termes  $c_k^\mu$ ,  $s_k^\mu$ ,  $C_k^\mu$  et  $S_k^\mu$ .

On a alors, si  $\gamma_k^\mu \neq 0$ , en prenant  $a_k := \frac{\beta_k^\mu}{2\gamma_k^\mu}$  et  $b_k := \alpha_k^\mu - \frac{\beta_k^{\mu 2}}{4\gamma_k^\mu}$  on obtient :

$$\begin{aligned}
s_k^\mu &= \frac{1}{\gamma_k^\mu} \sqrt{\frac{\pi |\gamma_k^\mu|}{2}} \cos(b_k) \left[ s \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} (T + a_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - s \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} a_k \right) \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2 |\gamma_k^\mu|}} \sin(b_k) \\
&\quad \times \left[ c \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} (T + a_k) \right) - c \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} a_k \right) \right] \\
c_k^\mu &= \sqrt{\frac{\pi}{2 |\gamma_k^\mu|}} \cos(b_k) \left[ c \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} (T + a_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - c \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} a_k \right) \right] - \frac{1}{\gamma_k^\mu} \sqrt{\frac{\pi |\gamma_k^\mu|}{2}} \sin(b_k) \\
&\quad \times \left[ s \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} (T + a_k) \right) - s \left( \sqrt{\frac{2 |\gamma_k^\mu|}{\pi}} a_k \right) \right]
\end{aligned}$$

Les termes  $S_k^\mu$  and  $C_k^\mu$  peuvent être obtenus en intégrant par partie  $s_k^\mu$  et  $c_k^\mu$  :

$$\begin{aligned}
S_k^\mu &= \left( T + \frac{\beta_k^\mu}{2\gamma_k^\mu} \right) s_k^\mu + \frac{1}{2\gamma_k^\mu} \\
&\quad \times [(\cos(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu T + \gamma_k^\mu T^2) - \cos(\alpha_k^\mu))] \\
C_k^\mu &= \left( T + \frac{\beta_k^\mu}{2\gamma_k^\mu} \right) c_k^\mu - \frac{1}{2\gamma_k^\mu} \\
&\quad \times [(\sin(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu T + \gamma_k^\mu T^2) - \sin(\alpha_k^\mu))]
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Si  $\gamma_k^\mu = 0$  et  $\beta_k^\mu \neq 0$ , les calculs sont triviaux et on a :

$$\begin{aligned}
s_k^\mu &= \frac{1}{\beta_k^\mu} [\cos(\alpha_k^\mu) - \cos(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu T)] \\
c_k^\mu &= \frac{1}{\beta_k^\mu} [\sin(\alpha_k^\mu + \beta_k^\mu T) - \sin(\alpha_k^\mu)]
\end{aligned} \tag{C.14}$$

et

$$\begin{aligned}
S_k^\mu &= -\frac{1}{\beta} (c_k^\mu - T \cos(\alpha_k^\mu)) \\
C_k^\mu &= \frac{1}{\beta} (s_k^\mu - T \sin(\alpha_k^\mu))
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Enfin, si  $\gamma_k^\mu = 0$  et  $\beta_k^\mu = 0$ , alors

$$\begin{aligned} s_k^\mu &= T \sin(\alpha_k^\mu) \\ c_k^\mu &= T \cos(\alpha_k^\mu) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

et

$$\begin{aligned} S_k^\mu &= \frac{T^2}{2} \sin(\alpha_k^\mu) \\ C_k^\mu &= \frac{T^2}{2} \cos(\alpha_k^\mu) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

### C.3 Commande bornée d'attitude du quadrirotor

**Théorème 11** *Considérons la dynamique d'un corps décrit par les équations suivantes*

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega})q = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

avec la commande bornée suivante  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]^T$  telle que pour  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\Gamma_j = -\alpha \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_j + \text{sat}_{M_1}(q_j)]) \quad (\text{C.19})$$

où  $\text{sat}_{M_1}$  et  $\text{sat}_{M_2}$  sont des fonctions de saturation avec  $M_1 \geq 1$ ,  $M_2 \geq \lambda(2M_1 + \epsilon)$  et  $\epsilon > 1$ .  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des paramètres de réglage positifs. Alors La commande (C.19) stabilise globalement asymptotiquement la dynamique du corps rigide à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0$  and  $\vec{\omega} = 0$ ).

Avant de développer la preuve de ce théorème, il faut rappeler que le quaternion et son négatif représente la même rotation et il existe deux points d'équilibre  $[q_0 = \pm 1, \vec{q} = 0]^T$ . Le système peut rejoindre le point d'équilibre ( $q_0 = -1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0$ ) par l'application de la commande  $\Gamma_j = -\alpha \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_j - \text{sat}_{M_1}(q_j)])$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Donc, l'application de  $\Gamma_j = -\alpha \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_j + \text{sign}(q_0)\text{sat}_{M_1}(q_j)])$  assure qu'entre les deux rotations équivalentes  $\beta$  et  $2\pi - \beta$ , celle avec le plus petit angle est choisie. Ceci peut être démontré en adaptant la preuve suivante.

#### Preuve de Théorème 11

Considérons la fonction de Lyapunov  $V$ , définie positive, radialement non-bornée et qui appartient à la classe  $C^2$ . La fonction  $V$  représente l'énergie totale du système :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J\vec{\omega} + \kappa((1 - q_0)^2 + \vec{q}^T \vec{q}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J\vec{\omega} + 2\kappa(1 - q_0) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Le paramètre  $\kappa > 0$  reste à déterminer. La dérivée de l'équation (C.20) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - 2\kappa \dot{q}_0 \\ &= \vec{\omega}^T (-\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \Gamma) + \kappa \vec{q}^T \dot{\vec{\omega}} \\ &= \underbrace{\omega_1 \Gamma_1 + \kappa q_1 \omega_1}_{\dot{V}_1} + \underbrace{\omega_2 \Gamma_2 + \kappa q_2 \omega_2}_{\dot{V}_2} + \underbrace{\omega_3 \Gamma_3 + \kappa q_3 \omega_3}_{\dot{V}_3}\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

La dérivée  $\dot{V}$  est la somme de trois termes ( $\dot{V}_1$ ,  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{V}_3$ ). Le terme  $\dot{V}_1$  est analysé premièrement. D'après l'équation de  $\Gamma_1$  (C.19) et équation (C.21), on obtient :

$$\dot{V}_1 = -\alpha \omega_1 \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1)]) + \kappa q_1 \omega_1 \quad (\text{C.22})$$

Supposons que  $|\omega_1| > |M_1 + \epsilon|$ , c'est-à-dire  $|\omega_1| \in [M_1 + \epsilon, +\infty[$ . Il s'ensuit que  $|\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1)| \geq \epsilon$  et  $\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1)$  ont le même signe que  $\omega_1$ . D'après équation (C.22) et la condition de norme sur le quaternion, la dérivée  $\dot{V}_1$  prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\alpha \omega_1 \text{sat}_{M_2}(\lambda[\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1)]) + \kappa \omega_1 q_1 \\ &\leq -\alpha |\omega_1| \text{sat}_{M_2}(\lambda \epsilon) + \kappa |\omega_1|\end{aligned}\quad (\text{C.23})$$

Pour  $M_2 > \lambda \epsilon$  et  $\kappa$  choisi tel que  $\kappa < \alpha \lambda \epsilon$ , on peut assurer la décroissance de  $V_1$  c'est-à-dire  $\dot{V}_1 < 0$ . En conséquence,  $\omega_1$  rejoint  $\Phi_1 = \{\omega_1 : |\omega_1| \leq M_1 + \epsilon\}$  en temps fini  $t_1$  et reste dedans par la suite. Dans ce cas,  $\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1) \in [-2M_1 - \epsilon, 2M_1 + \epsilon]$ . Choisissons  $M_2$  vérifiant l'inégalité suivante  $M_2 > \lambda(2M_1 + \epsilon)$ . Pour un temps  $t_2$  tel que  $t_2 > t_1$ , l'argument de  $\text{sat}_{M_2}$  sera borné comme suit :

$$|\lambda(\omega_1 + \text{sat}_{M_1})| \leq \lambda(2M_1 + \epsilon) < M_2 \quad (\text{C.24})$$

En conséquence,  $\text{sat}_{M_2}$  fonctionne dans la région linéaire :

$$\Gamma_1 = -\alpha \lambda [\omega_1 + \text{sat}_{M_1}(q_1)] \quad (\text{C.25})$$

L'expression de  $\text{sat}_{M_1}$  est maintenue dans l'équation (C.25) pour laisser la liberté d'ajouter des coefficients devant  $q$ .

Donc équation (C.22) devient :

$$\dot{V}_1 = -\alpha \lambda \omega_1^2 - \alpha \lambda \omega_1 \text{sat}_{M_1}(q_1) + \kappa q_1 \omega_1 \quad (\text{C.26})$$

Comme  $M_1 \geq 1$ , et  $\text{sat}_{M_1}(q_1)$  n'est pas saturé

$$\dot{V}_1 = -\alpha \lambda \omega_1^2 - \alpha \lambda q_1 \omega_1 + \kappa q_1 \omega_1 \quad (\text{C.27})$$

En choisissant  $\kappa = \alpha\lambda$  ce qui satisfait l'inégalité  $\kappa < \lambda\epsilon$  pour  $\epsilon > 1$ , on obtient :

$$\dot{V}_1 = -\lambda\alpha\omega_1^2 \leq 0 \quad (\text{C.28})$$

Le même argument peut être appliqué pour  $\dot{V}_2$  et  $\dot{V}_3$ . Finalement la dérivée (C.21) devient :

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (\text{C.29})$$

$$= -\lambda\alpha\omega_1^2 - \lambda\alpha\omega_2^2 - \lambda\alpha\omega_3^2 \quad (\text{C.30})$$

$$= -\vec{\omega}^T A \vec{\omega} \leq 0 \quad (\text{C.31})$$

avec

$$A = \alpha\lambda I_{3 \times 3} \quad (\text{C.32})$$

où  $I_{3 \times 3}$  est la matrice d'identité. Le principe d'invariance de LaSalle est invoqué pour achever la preuve. Toutes les trajectoires convergent vers le plus grand ensemble invariant  $\bar{\Omega}$  compris dans  $\Omega = \{(\vec{q}, \vec{\omega}) : \dot{V} = 0\} = \{(\vec{q}, \vec{\omega}) : \vec{\omega} = 0\}$ . Dans cet ensemble invariant,  $J\vec{\omega} = -\alpha\lambda[\text{sat}_{M_1}(q_1) \quad \text{sat}_{M_1}(q_2) \quad \text{sat}_{M_1}(q_3)]^T = 0$ , c'est-à-dire,  $\bar{\Omega}$  est réduit à l'origine. Ceci finit la démonstration de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. ■

Nous présentons la commande appliquée dans le cas du quadrirotor.

**Théorème 12** *Considérons la dynamique de rotation du quadrirotor décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega})q = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ J\dot{\vec{\omega}} &= -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{tot} \end{cases}$$

avec les commande bornées

$$\Gamma_r = -\alpha \text{sat}_{M_\phi}(\lambda_1[\omega_1 + \text{sat}_M(q_1)])$$

$$\Gamma_p = -\alpha \text{sat}_{M_\theta}(\lambda_2[\omega_2 + \text{sat}_M(q_2)])$$

$$\Gamma_y = -\alpha \text{sat}_{M_\psi}(\lambda_3[\omega_3 + \text{sat}_M(q_3)])$$

où  $\text{sat}_M$  and  $\text{sat}_{M_{\phi,\theta,\psi}}$  sont des fonctions de saturation avec

$$M \geq 1$$

$$M_\phi \geq \lambda_1(2M + \epsilon)$$

$$M_\theta \geq \lambda_2(2M + \epsilon)$$

$$M_\psi \geq \lambda_3(2M + \epsilon)$$

où  $\epsilon > 1$ ,  $\alpha$  et  $\lambda_{1,2,3}$  sont des paramètres de réglage positifs. Les commandes (3.100) stabilisent donc globalement la dynamique du quadrirotor à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0$  or  $\vec{\omega} = 0$ )

### Preuve de Théorème 12

Les niveaux de saturation  $M_{\phi, \theta, \psi}$  sont choisis pour satisfaire l'équation suivante :

$$\bar{\Gamma}_1 = \alpha M_\phi \quad \bar{\Gamma}_2 = \alpha M_\theta \quad \bar{\Gamma}_3 = \alpha M_\psi$$

Cette preuve est identique à celle du Théorème 11. En effet, la seule différence se situe dans  $\Gamma_g$  :

$$\Gamma_g = - \sum_i I_r \bar{\omega}^\times \vec{t}_3 s_i \quad (\text{C.33})$$

$\Gamma_g$  ajoute un terme dans équation (C.21). Cependant, ce terme s'annule d'après l'équation suivante :

$$\bar{\omega}^T \Gamma_g = -\bar{\omega}^T \sum_i I_r \bar{\omega}^\times \vec{t}_3 s_i = 0$$

## C.4 Stabilisation de la position du quadrirotor

Comme pour le PVTOL, les résultats de stabilité de cette section sont basés sur la théorie des systèmes en cascade. La preuve suivante se divise en trois étapes principales. D'abord, la stabilité asymptotique de la dynamique de lacet est établie. Puis, on montre que les angles  $\eta_1$  et  $\eta_3$  convergent vers les angles désirés  $\eta_{1_d}$  et  $\eta_{3_d}$ . En conclusion, la stabilité asymptotique globale de  $\Sigma_t$  est prouvée. La stabilité asymptotique globale du système est alors obtenue grâce à un résultat de Sontag [88].

### C.4.1 Stabilité globale de la dynamique de lacet

C'est une application directe de la preuve du Théorème 1.

### C.4.2 Stabilité globale de $\eta_1 - \eta_{1_d}$ et $\eta_3 - \eta_{3_d}$

Pour  $\psi = 0$ , le sous-système de rotation  $\Sigma_r$  est décomposé de deux sous-systèmes indépendants :  $\Sigma_{r_\theta}$   $\Sigma_{r_\phi}$ . La stabilité globale de  $\Sigma_{r_\theta}$  est premièrement considérée.

$$\Sigma_{r_\theta} : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = v_\theta \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

Supposons que

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\beta_\theta + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}{\bar{v}_\theta} \eta \\ u_\theta &= \frac{\beta_\theta + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}{\bar{v}_\theta} v_\theta \end{aligned}$$

En appliquant le changement classique de coordonnées :

$$\begin{cases} y_1 = \varepsilon_\theta \xi_1 + \xi_2 \\ y_2 = \xi_2 \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \varepsilon_\theta y_2 + u_\theta \\ \dot{y}_2 &= u_\theta \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

Soit  $y_{1_d} := \varepsilon_\theta \eta_{1_d} + \dot{\eta}_{1_d}$ ,  $y_{2_d} := \dot{\eta}_{1_d}$  et  $u_{\theta_d} := \ddot{\eta}_{1_d}$ . La commande  $u_\theta$  s'écrit :

$$u_\theta = \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - \varepsilon_\theta \text{sat}_1(y_2 - y_{2_d}) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(y_1 - y_{1_d}) \quad (\text{C.37})$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov  $V_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_{2_d})^2$ . Donc,  $\dot{V}_2 = (y_2 - y_{2_d})(\dot{y}_2 - \dot{y}_{2_d}) = (y_2 - y_{2_d})(u_\theta - u_{\theta_d})$ . Comme dans le cas du PVTOL, il existe un temps  $t_{\delta_\theta}$  tel que pour tous  $t > t_{\delta_\theta}$ ,  $u_{\theta_d}$  est bornée :

$$\left| u_{\theta_d} \right| = \left| \frac{d^2}{dt^2} \arctan \left( \frac{r_x}{1 + r_z} \right) \right| < \delta_\theta \quad (\text{C.38})$$

Par conséquent, si  $|y_2 - y_{2_d}| > 1$  et  $\beta_\theta + \delta_\theta + \varepsilon_\theta^2 < \varepsilon_\theta$ , il suit

$$\left| \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - u_{\theta_d} - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(y_1 - y_{1_d}) \right| < \left| \varepsilon_\theta \text{sat}_1(y_2 - y_{2_d}) \right| \quad (\text{C.39})$$

Il suit que  $u_\theta - u_{\theta_d}$  est de signe opposé à  $\text{sat}_1(y_2 - y_{2_d})$  et par conséquent à  $y_2 - y_{2_d}$ . Ceci assure la décroissance de  $V_2$  et en conséquence,  $y_2 - y_{2_d}$  rejoint l'intervalle  $[-1, 1]$  après un temps fini  $t_1 > t_{\delta_\theta}$  et y reste ensuite. L'état  $y_1 - y_{1_d}$  ne diverge pas en appliquant le résultat de Lemme 14. Dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , la commande  $u_\theta$  s'écrit :

$$u_\theta = \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - \varepsilon_\theta(y_2 - y_{2_d}) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(y_1 - y_{1_d}) \quad (\text{C.40})$$

$\dot{y}_1$  peut être écrit :

$$\dot{y}_1 = \varepsilon_\theta y_{2_d} + u_{\theta_d} + \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(y_1 - y_{1_d}) - u_{\theta_d} \quad (\text{C.41})$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_{1_d})^2$ . Dans le cas où  $y_1 - y_{1_d}$  n'est pas dans  $[-1, 1]$ , avec  $\beta_\theta + \delta_\theta < \varepsilon_\theta^2$  assurera la décroissance de  $V_1$ . Donc pour équation (C.39) on obtient :

$$\left| \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - u_{\theta_d} \right| < \left| \varepsilon_\theta^2 \text{sat}_1(y_1 - y_{1_d}) \right| \quad (\text{C.42})$$

ce qui signifie que après un temps fini  $t_2 > t_1 > t_{\delta_\theta}$ ,  $y_1 - y_{1_d}$  rejoint l'intervalle  $[-1, 1]$  où la commande  $u_\theta$  s'écrit :

$$u_\theta = \text{sat}_{\beta_\theta}(u_{\theta_d}) - \varepsilon_\theta(y_2 - y_{2_d}) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1_d}) \quad (\text{C.43})$$

$\beta_\theta > \delta_\theta$  est choisi, la commande  $u_\theta$  prend la forme suivante :

$$u_\theta = u_{\theta_d} - \varepsilon_\theta(y_2 - y_{2_d}) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1_d}) \quad (\text{C.44})$$



$\forall t > t_2$ , le système d'erreur est par conséquent donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - \dot{y}_{1_d} &= -\varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1_d}) \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_{2_d} &= -\varepsilon_\theta(y_2 - y_{2_d}) - \varepsilon_\theta^2(y_1 - y_{1_d}) \end{cases}$$

ce qui donne clairement que  $\eta_1(t) \rightarrow \eta_{1_d}(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Une preuve semblable peut être appliquée pour  $\Sigma_{r_\phi}$  pour obtenir la convergence  $\eta_3(t)$  tend vers  $\eta_{3_d}(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini. Pour résumer, le choix de  $\beta_\theta$ ,  $\beta_\phi$ ,  $\delta_\theta$ ,  $\delta_\phi$ ,  $\varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_\phi$  doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_\theta + \delta_\theta + \varepsilon_\theta^2 &< \varepsilon_\theta \\ \beta_\theta + \delta_\theta &< \varepsilon_\theta^2 \\ \delta_\theta &< \beta_\theta \\ \beta_\phi + \delta_\phi + \varepsilon_\phi^2 &< \varepsilon_\phi \\ \beta_\phi + \delta_\phi &< \varepsilon_\phi^2 \\ \delta_\phi &< \beta_\phi \end{aligned} \tag{C.45}$$

### C.4.3 Stabilité globale du sous-système de translation

Dans le cas où les angles rejoignent les angles désirés, c'est-à-dire  $\eta_1(t) = \eta_{1_d}(t)$  et  $\eta_3(t) = \eta_{3_d}(t)$ , le sous-système  $\Sigma_t$  prend la forme de trois chaîne d'intégrateurs d'ordre 2. La stabilité globale par l'application des commandes

$$r_x = \frac{\bar{r}_x}{\varepsilon_x + \varepsilon_x^2} (-\varepsilon_x \text{sat}_1(p_2) - \varepsilon_x^2 \text{sat}_1(\varepsilon_x p_1 + p_2)) \tag{C.46}$$

$$r_y = \frac{\bar{r}_y}{\varepsilon_y + \varepsilon_y^2} (-\varepsilon_y \text{sat}_1(p_4) - \varepsilon_y^2 \text{sat}_1(\varepsilon_y p_3 + p_4)) \tag{C.47}$$

$$r_z = \frac{\bar{r}_z}{\varepsilon_z + \varepsilon_z^2} (-\varepsilon_z \text{sat}_1(p_6) - \varepsilon_z^2 \text{sat}_1(\varepsilon_z p_5 + p_6)) \tag{C.48}$$

est assurée par Théorème 1.

### C.4.4 Stabilité globale du quadrirotor

La condition Converging Input Bounded State (CIBS) développé par [88] est vérifiée dans notre cas parce que les solutions de  $\Sigma_r$  sont bornées. Donc la stabilité globale asymptotique est garanti pour les systèmes en cascade (voir Annexe D.1).

# Annexe D

Dans cette annexe, nous présentons les résultats de Sontag [88] concernant la stabilité globale des systèmes en cascade.

## D.1 Stabilité des systèmes en cascade

Considérons le système en cascade suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(y) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  et les fonctions  $f$  et  $g$  sont régulières. La condition CIBS (en anglais *Converging Input Bounded State*) décrit la bornitude des états  $x$  et  $y$  du système (D.1) :

CIBS : Pour chaque entrée  $y$  en  $[0, +\infty)$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} y = 0$  et pour chaque état initial  $x_0$ , la solution de  $\dot{x} = f(x, y)$  en partant de  $x(0) = x_0$  existe pour  $t \geq 0$  et elle est bornée.

La stabilité asymptotique globale du système (D.1) est établie dans le théorème suivant de [88].

**Théorème 16** *Le système (D.1) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si les deux sous-systèmes  $\dot{x} = f(x, 0)$  et  $\dot{y} = g(y)$  sont globalement asymptotiquement stable et la condition CIBS est vérifiée.*

Ce théorème est appliqué pour prouver la stabilité globale de notre commande proposée dans le cas du PVTOL et du quadrirotor.



# Bibliographie

- [1] S. AL-HIDDABI et N. H. MCCLAMROCH : A decomposition approach to output tracking for multivariable nonlinear non-minimum phase systems. *In Proc. American Control Conference*, pages 1128–1132, June 1998.
- [2] S. AL-HIDDABI et N. H. MCCLAMROCH : Tracking and maneuver regulation control for nonlinear non-minimum phase systems : application to flight control. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 10(6):780–792, 2002.
- [3] S. AL-HIDDABI et N.H. MCCLAMROCH : Output tracking for nonlinear non-minimum phase vtol aircraft. *In 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'98*, 1998.
- [4] M. ALAMIR : *Stabilization of Nonlinear Systems by Receding-Horizon Control Schemes : Parametrized Approach for Fast Systems*. Springer, 2006.
- [5] M. ALAMIR et N. MARCHAND : Constrained minimum-time-oriented feedback control for the stabilization of nonholonomic systems in chained form. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(2):229–244, 2003.
- [6] E. ALTUG, J. P. OSTROWSKI et C.J. TAYLOR : Quadrotor control using dual camera visual feedback. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA'03*, 2003.
- [7] E. ALTUG, J. P. OSTROWSKI et R. MAHONY : Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA'02*, 2002.
- [8] N. P. I. ANEKE, D. A. LIZARRAGA et H. NIJMEIJER : Homogeneous stabilization of the extended chained form system. *In IFAC World Congress*, numéro T-Tu-A08-1, 2002.
- [9] M. ATHANS et P.L. FALB : *Optimal control : an introduction to the theory and its applications*. McGraw Hill, 1966.

- 
- [10] C. BELTA : On controlling aircraft and underwater vehicles. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA'04*, 2004.
- [11] D. S. BERNSTEIN et A. N. MICHEL : *Special issue on Saturating Actuators*, volume 5. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 1995.
- [12] J.D. BOSKOVIC, S.-M. LI et R.K. MEHRA : Robust stabilization of spacecraft in the presence of control input saturation using sliding mode control. *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 1999.
- [13] S. BOUABDALLAH, P. MURRIERI et R. SIEGWART : Design and control of an indoor micro quadrotor. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA'04*, 2004.
- [14] S. BOUABDALLAH, A. NOTH et R. SIEGWART : PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 3:2451–2456, 2004.
- [15] S. BOUABDALLAH et R. SIEGWART : Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA'05*, 2005.
- [16] R. W. BROCKETT : Asymptotic stability and feedback stabilization. *In R. W. BROCKETT, R. S. MILLMAN et H. S. SUSSMANN, éditeurs : Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.
- [17] P. CASTILLO, A. DZUL et R. LOZANO : Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE transactions on Control Systems Technology*, 12(4):510–516, 2004.
- [18] P. CASTILLO, R. LOZANO, I. FANTONI et A. DZUL : Control design for the PVTOL aircraft with arbitrary bounds on the acceleration. *In 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'02*, 2002.
- [19] O. EGELAND et E. BERGLUND : Control of an underwater vehicle with non-holonomic acceleration constraints. *In IFAC Conference on Robot Control*, 1994.
- [20] J. ESCARENO, S. SALAZAR-CRUZ et R. LOZANO : Embedded control of a four-rotor uav. *In Proc. American Control Conference*, pages 3936–3941, 2006.
- [21] I. FANTONI, R. LOZANO et P. CASTILLO : A simple stabilization algorithm for the PVTOL aircraft. *In IFAC World Congress*, 2002.

- [22] I. FANTONI, A. ZAVALA et R. LOZANO : Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control*, pages 4462–4467, 2002.
- [23] O. FJELLSTAD et T. FOSSEN : Quaternion feedback regulation of underwater vehicles. *In 3rd IEEE Conference on Control Application*, pages 24–26, 1994.
- [24] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON : A lie-bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(5):922–937, 1999.
- [25] J.P. GAUTHIER et G. BORNARD : Commande multivariable en présence de contraintes de type inégalité. *Revue d'Automatique, d'Informatique et de recherche opérationnelle (RAIRO)*, 17(3):205–222, 1983.
- [26] S. S. GE, Z. SUN, T. H. LEE et M. W. SPONG : Feedback linearization and stabilization of second-order non-holonomic chained systems. *Int. Journal of Control*, 74(14):1383–1392, 2001.
- [27] F. GROGNARD, R. SEPULCHRE et G. BASTIN : Improved performance of low-gain designs for bounded control of linear systems. *Automatica*, 38(10):1777–1782, 2002.
- [28] N. GUENARD, T. HAMEL et V. MOREAU : Dynamic modeling and intuitive control strategy for an X4-flyer. *In International Conference on Control and Automation, ICCA 05*, 2005.
- [29] J.F. GUERRERO-CASTELLANOS : *Estimation et commande bornée d'attitude : Application à l'hélicoptère à quatre rotors*. Thèse de doctorat, **gipsa-lab-INPG**, Grenoble, France, 2007.
- [30] J.F. GUERRERO-CASTELLANOS, A. HABLY, N. MARCHAND et S. LESECQ : Bounded attitude stabilization : Application on four-rotor helicopter. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA '07*, 2007.
- [31] A. HABLY, F. KENDOUL, N. MARCHAND et P. CASTILLO : *Positive Systems*, volume 341 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapitre Further results on global stabilization of the PVTOL aircraft, pages 303–310. Springer Verlag, 2006.
- [32] A. HABLY et N. MARCHAND : Global stabilization of four-rotor helicopter with bounded inputs. *In Intelligent Robots and Systems, 2007 IEEE/RSJ International Conference on*, 2007.

- [33] A. HABLY, N. MARCHAND et M. ALAMIR : Constrained minimum time oriented stabilization of extended chained form systems. *In The joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*, 2005.
- [34] T. HAMEL, R. MAHONY, R. LOZANO et J. OSTROWSKI : Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. *In IFAC World Congress*, 2002.
- [35] J. HAUSER, S. SASTRY et G. MEYER : Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems : Application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 28:665–679, 1992.
- [36] O. HEGRENAS, J.T. GRAVDAHL et P. TONDEL : Attitude control by means of explicit model predictive control, via multi-parametric quadratic programming. *In American Control Conference*, volume 2, pages 901–906, 2005.
- [37] J. IMURA, K. KOBAYASHI et T. YOSHIKAWA : Non-holonomic control of a 3 link planar manipulator with a free joint. *In 35<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'96*, 1996.
- [38] E.N. JOHNSON et S.K. KANNAN : Nested saturation with guaranteed real poles. *In Proc. American Control Conference*, volume 1, pages 497–502, 2003.
- [39] S.M. JOSHI, A.G. KELKAR et J.T. WEN : Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(10):1800–1803, 1995.
- [40] G. KALIORA et A. ASTOLFI : Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(11):1975–1990, 2004.
- [41] Y. KARIM et Y. CHITOUR : Stabilization and finite-gain stabilizability of continuous-time delay linear systems subject to input saturation. *In The joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*, 2005.
- [42] F. KENDOUL, D. LARA, I. FANTONI et R. LOZANO : Nonlinear control for systems with bounded inputs : Real-time embedded control applied to UAVs. *In 45<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'06*, 2006.
- [43] H. K. KHALIL : *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, London, UK, 1996.
- [44] M. V. KOTHARE, P. J. CAMPO, M. MORARI et C. N. NETT : A unified framework for the study of antiwindup designs. *Automatica*, 30(12):1869–1883, 1994.
- [45] R. KRISTIANSEN et P. J. NICKLASSON : Satellite attitude control by quaternion-based backstepping. *In American Control Conference (ACC)*, 2005.

- 
- [46] M. C. LAIOU et A. ASTOLFI : Discontinuous control of high-order generalized chained systems. *Systems & Control Letters*, 37(5):309–322, Aug. 1999.
- [47] D. LARA, A. SANCHEZ, R. LOZANO et P. CASTILLO : Real-time embedded control system for vtol aircrafts : Application to stabilize a quad-rotor helicopter. *In International Conference on Control and Automation, ICCA 06*, 2006.
- [48] F. LEWIS et V. SYROM : *Optimal Control*. John WileySons Inc., 1995.
- [49] F. LIN, W. ZHANG et R. D. BRANDT : Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 7(3):343–351, 1999.
- [50] Z. LIN : Global stabilization and restricted tracking for linear systems subject to input and measurement saturation—a chain of integrators case. *In Proc. American Control Conference*, volume 4, pages 2488–2492, 1995.
- [51] Z. LIN : Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, 34(7):897–905, 1998.
- [52] Z. LIN : Semi-global stabilization of discrete-time linear systems with position and rate limited actuators. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control*, volume 1, pages 395–400, 1998.
- [53] Z. LIN et A. SABERI : Semiglobal exponential stabilisation of linear systems subject to input saturation via linear feedbacks. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 21(3):225–239, 1993.
- [54] Zongli LIN, A. SABERI et A. STOORVOGEL : Semiglobal stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation, via linear feedback—an are-based approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(8):1203–1207, 1996.
- [55] D.A LIZARRAGA et J. SOSA : Vertically transverse functions as an extension of the transverse function control approach for second-order systems. *In 44<sup>th</sup> IEEE conf. on Decision and Control and the European Control Conference 2005, CDC-ECC'05*, 2005.
- [56] F. LIZARRALDE et J.T. WEN : Attitude control without angular velocity measurement : A passivity approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):468–472, 1996.
- [57] R. LOZANO, P. CASTILLO et A. DZUL : Global stabilization of the PVTOL : Real-time application to a mini-aircraft. *International Journal of Control*, 77(8):735–740, May 2004.



- [58] J. LUO et P. TSOTRAS : Control design for chained-form systems with bounded inputs. *Systems & Control Letters*, 39(2):123–131, Feb. 2000.
- [59] T. MADANI et A. BENALLEGUE : Backstepping control for a quadrotor helicopter. *In Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3255–3260, Oct. 2006.
- [60] T. MADANI et A. BENALLEGUE : Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. *In 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1515–1520, 13-15 Dec. 2006.
- [61] R. MAHONY et T. HAMEL : Adaptive compensation of aerodynamic effects during takeoff and landing manoeuvres for a scale model autonomous helicopter. *In European Journal of Control*, volume 7(1), pages 43–58, 2001.
- [62] N. MARCHAND et A. HABLY : Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12):2147–2152, 2005.
- [63] N. MARCHAND et A. HABLY : Improving the performance of nonlinear stabilization of multiple integrators with bounded controls. *In IFAC World Congress*, jul. 2005.
- [64] N. MARCHAND, A. HABLY et A. CHEMORI : Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrators by means of bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(5), 2007.
- [65] P. MARTIN, S. DEVASIA et B. PADEN : A different look at output tracking : control of a VTOL aircraft. *Automatica*, 32(1):101–107, 1996.
- [66] D.Q. MAYNE, J.B. RAWLINGS, C.V. RAO et P.O.M. SCOKAERT : Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36:789–814, 2000.
- [67] F. MAZENC, S. MONDIE et S. NICULESCU : Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input. *In IEEE Trans. on Automatic Control*, volume 48(1), pages 57–63, 2003.
- [68] P. MCKERROW : Modelling the dragonflyer four-rotor helicopter. *In IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA '04*, 2004.
- [69] A. MEGRETSKI :  $L_2$  BIBO output feedback stabilization with saturated control. *In Proc. 13th IFAC World Congress*, volume D, pages 435–440, 1996.
- [70] P. MORIN et C. SAMSON : Control of underactuated mechanical systems by the transverse function approach. *In 44<sup>th</sup> IEEE conf. on Decision and Control and the European Control Conference 2005, CDC-ECC'05*, 2005.

- 
- [71] R. M. MURRAY et S. SASTRY : Nonholonomic motion planning : Steering with sinusoids. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38:700–716, 1993.
- [72] R. OLFATI-SABER : *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics Aerospace Vehicles*. Thèse de doctorat, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2001.
- [73] R. OLFATI-SABER : Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. *IEEE transactions on Automatic Control*, 47(11): 1949–1952, 2002.
- [74] K. Y. PETTERSEN et O. EGELAND : Exponential stabilization of an underactuated surface vessel. *Model. Identif. Control*, 18(3):239–248, 1997.
- [75] G. POULIN, A. CHEMORI et N. MARCHAND : Minimum energy oriented global stabilizing control of the pvtol aircraft. *Int. Journal of Control*, 80(3):430–442, 2007.
- [76] P. POUNDS, R. MAHONY, P. HYNES et J. ROBERTS : Design of a four-rotor aerial robot. *In Australian Conference on Robotics and Automation*, 2002.
- [77] R. POUTRY : *Helicopter performance, stability, and control*. 2002, Reprint with addition, original edition 1986.
- [78] V.G. RAO et D.S. BERNSTEIN : Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine*, 21:86–97, Oct. 2001.
- [79] M. REYHANOGLU, A.J. Van der SCHAFT, NH. McCLAMROCH et I. KOLMANOVSKY : Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(9):1663–1671, 1999.
- [80] A. SABERI, Z. LIN et A. R. TEEL : Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):368–378, 1996.
- [81] M. SAEKI et Y. SAKAUE : Flight control design for a nonlinear non-minimum phase VTOL aircraft via two-step linearization. *In 40<sup>th</sup> IEEE conference on Decision and Control, CDC'01*, 2001.
- [82] S.L. SCRIVENER et R.C. THOMPSON : Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17(2):225–233, 1994.
- [83] R. SEPULCHRE, M. JANKOVIC et P. KOKOTOVIC : *Constructive nonlinear control*. Springer-Verlag, 1997.
- [84] M.D. SHUSTER : A survey of attitude representations. *Journal of the astronomical sciences*, 41(4):439–517, 1993.

- [85] S.N. SINGH et W. YIM : Nonlinear adaptive backstepping design for spacecraft attitude control using solar radiation pressure. *In 41<sup>st</sup> IEEE conference on Decision and Control, CDC'02*, 2002.
- [86] H. SIRA-RAMIREZ et M. FLIESS : Regulation of non-minimum phase outputs in a pvtol aircraft. *In 37<sup>th</sup> IEEE conference on Decision and Control, CDC'98*, 1998.
- [87] C. SONG, S.-J. KIM, S.-H. KIM et H.S. NAM : Robust control of the missile attitude based on quaternion feedback. *Control Engineering Practice*, 14:811–818, 2005.
- [88] E. SONTAG : Remarks on stabilization and input-to-state stability. *In 28<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'89*, 1989.
- [89] H.J. SUSSMANN, E.D. SONTAG et Y. YANG : A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 39(12):2411–2425, Dec. 1994.
- [90] H.J. SUSSMANN et Y. YANG : On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. *In Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 70–73, Brighton, UK, Dec. 1991.
- [91] A. TAYEBI et S. MCGILVRAY : Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot. *In 43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'04*, 2004.
- [92] A. TAYEBI et S. MCGILVRAY : Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571, 2006.
- [93] A.R. TEEL : Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18:165–171, 1992.
- [94] A.R. TEEL : A non-linear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE transactions on Automatic Control*, 41:1256–1270, 1996.
- [95] Y. P. TIAN et S. LI : Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control. *Automatica*, 38:1139–1146, 2002.
- [96] P. TSIOTRAS et J. LUO : Control of underactuated spacecraft with bounded inputs. *Aut.*, 36(8):1153–1169, 2000.
- [97] J.T. WEN et K. KREUTZ-DELGADO : The attitude control problem. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(11):1148–1162, 1991.

- 
- [98] J.T. WEN, S. SEEREERAM et D.S. BAYARD : Nonlinear predictive control applied to spacecraft attitude control. *In American Control Conference*, volume 3, pages 1899–1903, 1997.
- [99] K.Y. WICHLUND, O. J. SORDALEN et O. EGELAND : Control of vehicles with second-order nonholonomic constraints : Underactuated vehicles. *In Proc. European Control Conf.*, pages 3086–3091, 1995.
- [100] R. XU et U. OZGUNER : Sliding mode control of a quadrotor helicopter. *In 45<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'06*, 2006.
- [101] M. YAMADA, S. OHTA et Y. FUNAHASHI : State and output feedback stabilization for second-order nonholonomic chained systems based on sampled data control approach. *In American-Control-Conference 2003, ACC'03*, 2003.
- [102] J. Y. YANG, E. D. SONTAG et H. J. SUSSMANN : Global stabilization of linear discrete-time systems with bounded feedback. *Systems & Control Letters*, 30:273–281, 1997.
- [103] T. YOSHIKAWA, K. KOBAYASHI et T. WATANABE : Design of desirable trajectory with convergent control for 3-d.o.f manipulator with a non-holonomic constraint. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1805–1810, 2000.
- [104] A. ZAVALA, I. FANTONI et R. LOZANO : Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded inputs. *Int. Journal of Control*, 76(18):1833–1844, 2003.
- [105] S. ZHANG et J. JIN : Computation of special functions. *In <http://iris-lee3.ece.uiuc.edu/~jjin/routines/routines.html>*, 1996.
- [106] S. ZHANG et J. JIN : *Computation of Special Functions*. Wiley, 1996.



---

**Résumé :** Les drones et les micro-drones font actuellement l'objet de développements très rapides. L'objectif principal de ce sujet de recherche est le développement de lois de commande permettant de contrôler deux systèmes sous actionnés classiques : l'avion à décollage et à atterrissage verticaux et le "quadrirotor" ou hélicoptère à quatre rotors fixes.

La spécificité des approches développées est que les limites des actionneurs sont prises en compte tout en assurant un coût de calcul compatible avec une implantation et une exécution en temps réel sur un système informatique embarqué. La commande de l'assiette et de la position sont abordées dans ce travail. Les commandes proposées sont basées sur la stabilisation globale des chaînes d'intégrateurs linéaires et sur les techniques de commande prédictive rapide.

---

**Mot-clés :** Drone, chaîne d'intégrateurs, quadrirotor, PVTOL, commande prédictive, commande Lyapunov, commande bornée, saturation, stabilité.

---

**Abstract :** The control and design of mini aerial robots have received much attention within the automatic control community throughout the last decade. The main objective of this thesis is the control of two classical under-actuated systems : Planar Vertical Take-Off and Landing aircraft (PVTOL) and the quadrotor, a helicopter with four fixed rotors.

The control laws developed take into consideration the bounds on the inputs with a very low computational cost which is crucial in real-time applications with limited embedded capabilities. Both the attitude and position control are considered in this thesis. The control laws are based on the global stabilization of multiple integrators with bounded control and fast predictive control.

---

**Keywords :** UAV, chain of integrators, quadrotor, PVTOL, predictive control, Lyapunov, bounded control, saturation, under-actuated, stability.

---