

*Étude et simulation numérique  
de la rupture dynamique des séismes  
par des méthodes d'éléments finis discontinus*

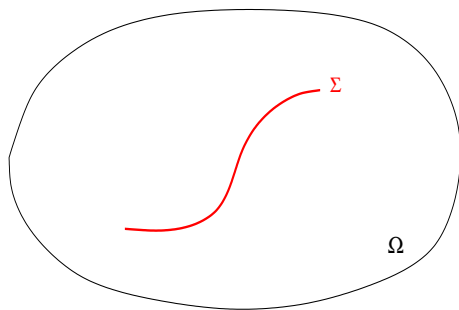
présenté par

**Mondher BENJEMAA**

sous la direction de

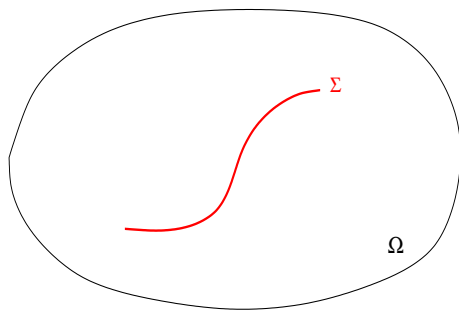
N. Glinsky-Olivier   S. Piperno   J. Virieux





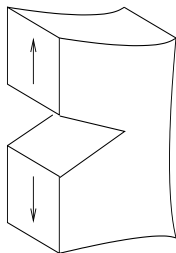
- Milieu fissuré : géométrie **prédéfinie** de la faille.

# Introduction au problème physique

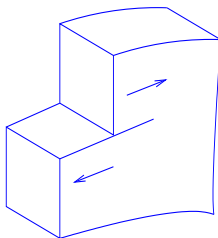


- Milieu fissuré : géométrie **prédéfinie** de la faille.
- Fracturation qui évolue en temps : **rupture dynamique**

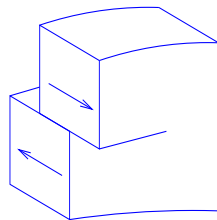
# Introduction au problème physique



Mode I



Mode II



Mode III

- Milieu fissuré : géométrie **prédéfinie** de la faille.
- Fracturation qui évolue en temps : **rupture dynamique**
- On étudie **les modes cisillants** de la rupture dynamique

[R. Madariaga, 1998 ; J. Virieux, 1986 ; S. Day et al., 2005]

- **Méthodes en différences finies (FD) :**

- ✓ Robustes, ordre élevé
- ✓ Implémentation facile
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mauvaise prise en compte d'une géométrie complexe de la faille

[R. Madariaga, 1998 ; J. Virieux, 1986 ; S. Day et al., 2005]

- **Méthodes en différences finies (FD) :**

- ✓ Robustes, ordre élevé
- ✓ Implémentation facile
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mauvaise prise en compte d'une géométrie complexe de la faille

[E. Bécache, 1993 ; H. Aochi et al., 2000]

- **Méthodes des équations intégrales de frontière (BIE) :**

- ✓ Semi analytiques
- ✓ Bonne prise en compte de la géométrie de la faille
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mal adaptées à des milieux hétérogènes

# Quelques méthodes numériques

[R. Madariaga, 1998 ; J. Virieux, 1986 ; S. Day et al., 2005]

- **Méthodes en différences finies (FD) :**

- ✓ Robustes, ordre élevé
- ✓ Implémentation facile
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mauvaise prise en compte d'une géométrie complexe de la faille

[E. Bécache, 1993 ; H. Aochi et al., 2000]

- **Méthodes des équations intégrales de frontière (BIE) :**

- ✓ Semi analytiques
- ✓ Bonne prise en compte de la géométrie de la faille
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mal adaptées à des milieux hétérogènes

[T. Belytschko, 1995 ; N. Lapusta, 2003]

- **Méthodes en éléments finis (FE) :**

- ✓ Ordre élevé
- ✓ Bonne prise en compte de la géométrie de la faille
- ✗ Coûteuses
- ✗ Mauvaise prise en compte des discontinuités au voisinage de la faille

## Objectif de la thèse

- Développer une méthode en éléments finis discontinus sur des maillages tétraédriques non structurés pour la simulation de la rupture dynamique en mode cisailant.
- Réaliser des validations et des simulations en 2D et 3D, utilisant le calcul parallèle.



- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives



- ✓ Maillages non structurés (voire non-conformes)
- ✓ Bien adaptés à des solutions discontinues
- ✓ Pas de système linéaire à inverser pour un schéma explicite
- ✓ Schémas d'ordres arbitrairement élevés
- ✓ Facilement parallélisable

- ✓ Maillages non structurés (voire non-conformes)
- ✓ Bien adaptés à des solutions discontinues
- ✓ Pas de système linéaire à inverser pour un schéma explicite
- ✓ Schémas d'ordres arbitrairement élevés
- ✓ Facilement parallélisable

- ✓ Maillages non structurés (voire non-conformes)
- ✓ Bien adaptés à des solutions discontinues
- ✓ Pas de système linéaire à inverser pour un schéma explicite
- ✓ Schémas d'ordres arbitrairement élevés
- ✓ Facilement parallélisable

- ✓ Maillages non structurés (voire non-conformes)
- ✓ Bien adaptés à des solutions discontinues
- ✓ Pas de système linéaire à inverser pour un schéma explicite
- ✓ Schémas d'ordres arbitrairement élevés
- ✓ Facilement parallélisable

- ✓ Maillages non structurés (voire non-conformes)
- ✓ Bien adaptés à des solutions discontinues
- ✓ Pas de système linéaire à inverser pour un schéma explicite
- ✓ Schémas d'ordres arbitrairement élevés
- ✓ Facilement parallélisable

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique**
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

Équations de l'élastodynamique : formulation contraintes-vitesses

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \vec{v} &= \overrightarrow{\operatorname{div} \underline{\sigma}} \\ \partial_t \underline{\sigma} &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} I_n + \mu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t)\end{aligned}$$

$n = 2, 3$  est la dimension de l'espace

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur vitesse

$\underline{\sigma} \in \operatorname{sym}_n(\mathbb{R})$  est le tenseur des contraintes

$\rho(x)$  est la masse volumique

$\lambda(x)$  et  $\mu(x)$  sont les coefficients de Lamé locaux

En trois dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



En trois dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

On introduit le changement de variables suivant :

$$\omega = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\omega' = \frac{1}{3} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})$$

$$\omega'' = \frac{1}{3} (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz})$$

# Changement de variables

En trois dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

On introduit le changement de variables suivant :

$$\omega = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\omega' = \frac{1}{3} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})$$

$$\omega'' = \frac{1}{3} (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz})$$

et on pose :

$$\vec{\sigma} = (\omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^t$$

Le système est équivalent à :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \vec{v} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}) \\ \Lambda \partial_t \vec{\sigma} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{N}_\alpha \vec{v})\end{aligned}$$

avec  $\Lambda = \text{diag} \left( \frac{3}{3\lambda+2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right)$

Le système est équivalent à :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \vec{v} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}) \\ \Lambda \partial_t \vec{\sigma} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{N}_\alpha \vec{v})\end{aligned}$$

avec  $\Lambda = \text{diag} \left( \frac{3}{3\lambda+2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right)$

- Tous les paramètres du milieu sont groupés à gauche

Le système est équivalent à :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \vec{v} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}) \\ \Lambda \partial_t \vec{\sigma} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{N}_\alpha \vec{v})\end{aligned}$$

avec  $\Lambda = \text{diag} \left( \frac{3}{3\lambda+2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right)$

- Tous les paramètres du milieu sont groupés à gauche
- $\mathbb{M}_\alpha \neq \mathbb{N}_\alpha^t \longrightarrow$  système non symétrique!

On multiplie la deuxième équation à gauche par la matrice

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\omega} & \frac{1}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} & \frac{1}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient un système pseudo-conservatif symétrique :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \vec{v} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}) \\ \Lambda_0 \partial_t \vec{\sigma} &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha^t \vec{v})\end{aligned}$$

avec  $\Lambda_0 = \mathbb{S}_0 \Lambda$

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus**
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives



- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 **Schémas Galerkin discontinus**
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

[J.S. Hesthaven, 2007 ; Kaser & Dumbser, 2007]

- Principe des méthodes GD : chercher les solutions approchées sous la forme d'une combinaison linéaire de **fonctions de base locales** dans chaque cellule.

$$\vec{v} = \sum_i \vec{v}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} v_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$$

$$\vec{\sigma} = \sum_i \vec{\sigma}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} \sigma_{ij} \vec{\psi}_{ij}$$

[J.S. Hesthaven, 2007 ; Kaser & Dumbser, 2007]

- Principe des méthodes GD : chercher les solutions approchées sous la forme d'une combinaison linéaire de **fonctions de base locales** dans chaque cellule.

$$\vec{v} = \sum_i \vec{v}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} v_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$$

$$\vec{\sigma} = \sum_i \vec{\sigma}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} \sigma_{ij} \vec{\psi}_{ij}$$

- **Aucune continuité** des champs entre les cellules n'est exigée

[J.S. Hesthaven, 2007 ; Kaser & Dumbser, 2007]

- Principe des méthodes GD : chercher les solutions approchées sous la forme d'une combinaison linéaire de **fonctions de base locales** dans chaque cellule.

$$\vec{v} = \sum_i \vec{v}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} v_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$$

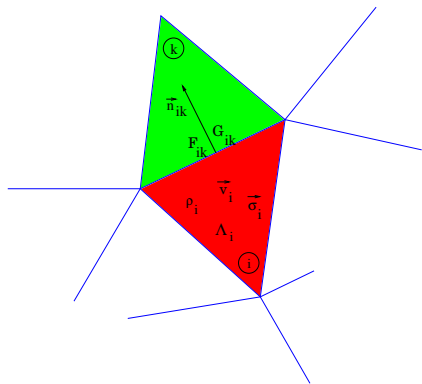
$$\vec{\sigma} = \sum_i \vec{\sigma}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} \sigma_{ij} \vec{\psi}_{ij}$$

- **Aucune continuité** des champs entre les cellules n'est exigée
- Une fonction de **flux numérique** est définie pour approcher le flux entre deux cellules voisines

# Schémas Galerkin discontinus : discrétisation spatiale

Soit  $(\mathcal{T}_i)_i$  une partition de  $\Omega$ . On désigne par :

- $V_i = \int_{\mathcal{T}_i} dS$  : volume du tétraèdre  $\mathcal{T}_i$ .
- $V(i)$  : ensemble des cellules voisines de  $\mathcal{T}_i$ .
- $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$  : interface entre les deux cellules voisines  $\mathcal{T}_i$  et  $\mathcal{T}_k$ .
- $S_{ik} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} dS$  : mesure de l'interface  $\mathcal{T}_{ik}$ .



Dans chaque élément  $\mathcal{T}_i$ , on multiplie les équations par les fonctions tests  $\vec{\varphi}_{ij}$  et  $\vec{\psi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ . On obtient :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \vec{\varphi}_{ij}^t \partial_t \vec{v}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha \vec{n} \right) \vec{\sigma}_{|\partial \mathcal{T}}$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0_i} \partial_t \vec{\sigma}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\psi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha^t \vec{v}_i + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha^t \vec{n} \right) \vec{v}_{|\partial \mathcal{T}}$$

Dans chaque élément  $\mathcal{T}_i$ , on multiplie les équations par les fonctions tests  $\vec{\varphi}_{ij}$  et  $\vec{\psi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ . On obtient :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \vec{\varphi}_{ij}^t \partial_t \vec{v}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha \vec{n} \right) \vec{\sigma}_{|\partial \mathcal{T}}$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0_i} \partial_t \vec{\sigma}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\psi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha^t \vec{v}_i + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha^t \vec{n} \right) \vec{v}_{|\partial \mathcal{T}}$$

- Flux numériques centrés

$$\vec{v}|_{\mathcal{T}_{ik}} \simeq \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}$$

$$\vec{\sigma}|_{\mathcal{T}_{ik}} \simeq \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2}$$



# Schémas Galerkin discontinus : discrétisation spatiale

On obtient le système semi-discret :

$$\begin{aligned} \rho_i \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \partial_t \vec{v}_i = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i \\ & + \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \underbrace{\left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha \vec{n}_{ik} \right)}_{\mathbb{P}_{ik}} \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2}, \quad 1 \leq j \leq d_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0i} \partial_t \vec{\sigma}_i = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\psi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha^t \vec{v}_i \\ & + \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbb{M}_\alpha^t \vec{n}_{ik} \right) \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}, \quad 1 \leq j \leq d_i \end{aligned}$$

ou en écriture matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i (\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{K}_i) \partial_t \vec{v}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{\sigma}_i + \sum_{k \in V(i)} \mathcal{F}_{ik} \\ (\Lambda_{0_i} \otimes \mathbb{K}_i) \partial_t \vec{\sigma}_i = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha^t \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{v}_i + \sum_{k \in V(i)} \mathcal{G}_{ik} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_{ik} = \frac{1}{2} [(\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i + (\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k]$$

$$\text{et } \mathcal{G}_{ik} = \frac{1}{2} [(\mathbb{P}_{ik}^t \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{v}_i + (\mathbb{P}_{ik}^t \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{v}_k]$$

$$\mathbb{K}_i : \text{matrice de masse locale de taille } \binom{\ell+3}{\ell}$$

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus**
  - discrétisation spatiale
  - **discrétisation temporelle**
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- Schéma saute-mouton en temps :

$$\partial_t \vec{v}_i \simeq \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

$$\partial_t \vec{\sigma}_i \simeq \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t}$$

On obtient finalement le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i (\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{\sigma}_i^n + \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \mathcal{F}_{ik}^n \\ (\Lambda_{0_i} \otimes \mathbb{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha^t \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} [(\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n]$$

$$\text{et } \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(\mathbb{P}_{ik}^t \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathbb{P}_{ik}^t \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}]$$

# Cas particulier : la méthode volumes finis

Dans le cas d'un schéma GD- $\mathbb{P}0$  (volumes finis), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i V_i \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathcal{F}_{ik}^n \\ \Lambda_{0i} V_i \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \mathcal{F}_{ik}^n = \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ik}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2}$$

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

# Définition et étude d'énergie

- On définit la quantité :

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \left( \underbrace{\int_{T_i} \rho_i (\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}})^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}}_{E_c} + \underbrace{\int_{T_i} (\vec{\sigma}_i^n)^t \Lambda_{0_i} \vec{\sigma}_i^n}_{E_m} \right)$$



# Définition et étude d'énergie

- On définit la quantité :

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \left( \underbrace{\int_{T_i} \rho_i (\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}})^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}}_{E_c} + \underbrace{\int_{T_i} (\vec{\sigma}_i^n)^t \Lambda_{0,i} \vec{\sigma}_i^n}_{E_m} \right)$$

## Lemme

*Sous une condition CFL sur le pas de temps,  $E^n$  est une forme quadratique définie positive (énergie discrète)*

# Définition et étude d'énergie

- La variation de l'énergie au cours d'un pas de temps s'écrit :

$$\Delta E = \Delta t \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{spéciales}}} \int_{\mathcal{I}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

# Définition et étude d'énergie

- La variation de l'énergie au cours d'un pas de temps s'écrit :

$$\Delta E = \Delta t \int_{\mathcal{I}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

*interfaces*  
~~X~~  
*spéciales*

- En l'absence de faces spéciales :  $\Delta E = 0$

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites**
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites**
  - **Conditions aux limites absorbantes**
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

- Sur  $\partial\Omega$ , on propose les flux absorbants suivants :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \bar{\sigma}_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} \bar{v}_i^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij}^t \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \bar{\sigma}_i^n$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont deux matrices symétriques positives, calculées à partir d'un décentrage amont des flux, afin d'annuler les ondes rentrantes dans le domaine.

On définit :

$$\mathcal{E}^n = E^n + \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \left[ \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{\sigma}_i^n \right)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \right]$$

On définit :

$$\mathcal{E}^n = E^n + \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \left[ \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{\sigma}_i^n \right)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \right]$$

## Lemme

*Sous la même condition CFL sur le pas de temps,  $\mathcal{E}^n$  est une forme quadratique définie positive, décroissante au cours du temps*



- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites**
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille**
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n}$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \vec{n}_{ik} \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \right)$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \vec{n}_{ik} \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \right)$$

- Fermeture du système ?

# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \vec{n}_{ik} \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \right)$$

- Fermeture du système ?

Étude de l'énergie discrète :  $\Delta E = 0 \implies$  Condition sur les vitesses



# Conditions aux limites sur la faille : cas homogène

- On s'intéresse au mode cisailant, i.e. le vecteur  $\vec{T}_T := (\underline{\sigma} \vec{n})_T$
- Conditions aux limites **homogènes** sur les tractions :

$$\vec{T}_T = \vec{0}$$

Or

$$\mathcal{F} = \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \vec{n}_{ik} \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \right)$$

- Fermeture du système ?

Étude de l'énergie discrète :  $\Delta E = 0 \implies$  Condition sur les vitesses

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ik}^t \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right)$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas non homogène

- Conditions aux limites **non homogènes** :  $\vec{T}_T \neq \vec{0}$

# Conditions aux limites sur la faille : cas non homogène

- Conditions aux limites **non homogènes** :  $\vec{T}_T \neq \vec{0}$
- On réécrit :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \mathcal{F}_{ik_N}^n + \vec{T}_{ik_T}^n$$

# Conditions aux limites sur la faille : cas non homogène

- Conditions aux limites **non homogènes** :  $\vec{T}_T \neq \vec{0}$
- On réécrit :

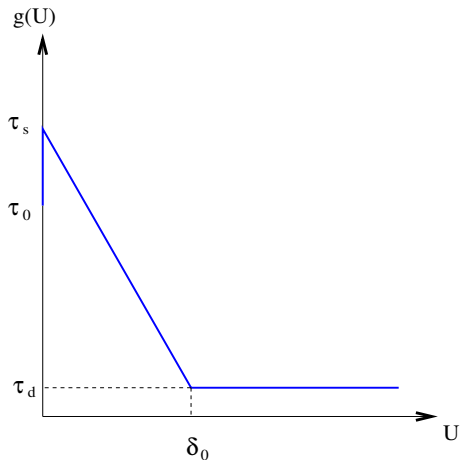
$$\mathcal{F}_{ik}^n = \mathcal{F}_{ik_N}^n + \vec{T}_{ik_T}^n$$

avec  $\vec{T}_T$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{T}_T\| < g(u) \\ \text{et} \\ \llbracket \vec{v}_T \rrbracket = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{T}_T\| = g(u) \\ \text{et} \\ \llbracket \vec{v}_T \rrbracket \neq 0 \end{array} \right.$$

où  $g$  est une fonction donnée par la loi de frottement (SWF dans notre cas)

et  $u(t, \cdot) = \int_0^t \|\llbracket \vec{v}_T \rrbracket\|$  est le déplacement tangentiel



Dans le cas d'un schéma en volumes finis, on a :

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} S_{ik} \mathcal{F}_{ik}^n$$

Dans le cas d'un schéma en volumes finis, on a :

$$\begin{aligned}\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} &= \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} S_{ik} \mathcal{F}_{ik}^n \\ &= \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in \mathcal{V}(i) \\ k \notin \Gamma}} S_{ik} \mathcal{F}_{ik}^n + \frac{\Delta t S_{ik}}{\rho_i V_i} \vec{T}_{ik_N}^n + \frac{\Delta t S_{ik}}{\rho_i V_i} \vec{T}_{ik_T}^n}_{\vec{R}_i^n}\end{aligned}$$

La discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \llbracket \vec{v}_T \rrbracket^{n+\frac{1}{2}} &:= \vec{v}_{i_T}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_T}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \llbracket \vec{v}_T \rrbracket^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_{i_T}^n - \vec{R}_{k_T}^n + \Delta t S_{ik} \left( \frac{1}{\rho_i V_i} + \frac{1}{\rho_k V_k} \right) \vec{T}_{ik_T}^n \end{aligned}$$



On pose donc :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\left( -\llbracket \vec{v}_T \rrbracket^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right) \rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)}$$

On pose donc :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\left( -\llbracket \vec{v}_T \rrbracket^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right) \rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)}$$

Et finalement :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ik_T}^n & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| < g(U^n) \\ \frac{\vec{T}_{ik_T}^n}{\|\vec{T}_{ik_T}^n\|} g(U^n) & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| \geq g(U^n) \end{cases}$$

On pose donc :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\left( -\llbracket \vec{v}_T \rrbracket^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right) \rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)}$$

Et finalement :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ik_T}^n & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| < g(U^n) \\ \frac{\vec{T}_{ik_T}^n}{\|\vec{T}_{ik_T}^n\|} g(U^n) & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| \geq g(U^n) \end{cases}$$

$\vec{T}_{ik_T}^n$  vérifie bien les conditions aux limites pour le mode cisailant

- Cas de schémas GD- $\mathbb{P}\ell$  : même raisonnement

- Cas de schémas GD- $\mathbb{P}\ell$  : même raisonnement

- On obtient après calcul une relation du type :  $Q_{ik} \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n = \vec{\mathbf{Y}}_{ik}$

avec  $\vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n \in \mathbb{P}_{\ell_*}(\mathcal{T}_{ik})$

# Conditions aux limites sur la faille : schémas GD

- Cas de schémas GD- $\mathbb{P}^l$  : même raisonnement
- On obtient après calcul une relation du type :  $Q_{ik} \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n = \vec{\mathbf{Y}}_{ik}$   
avec  $\vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n \in \mathbb{P}_{l_*}(\mathcal{T}_{ik})$
- On montre que le système admet une solution si  $l_* \leq l$

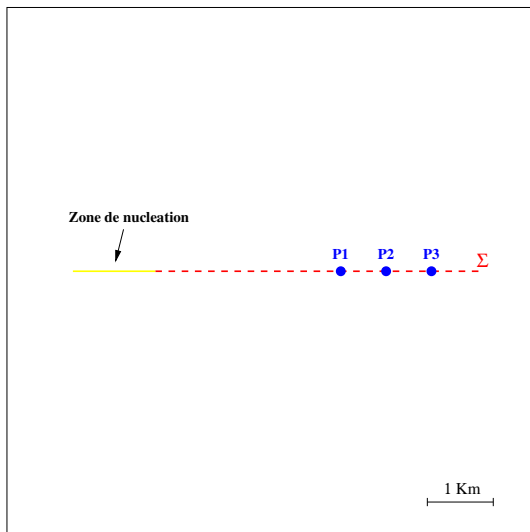
- Cas de schémas GD- $\mathbb{P}_\ell$  : même raisonnement
- On obtient après calcul une relation du type :  $Q_{ik} \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n = \vec{\mathbf{Y}}_{ik}$   
avec  $\vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n \in \mathbb{P}_{\ell_*}(\mathcal{T}_{ik})$
- On montre que le système admet une solution si  $\ell_* \leq \ell$
- Problème pour définir  $\vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n$  à partir de  $\vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n$  (surtout pour  $\ell_* > 1$ ).

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques**
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives



- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

## Faille plane spontanée



## Contrainte cisailante

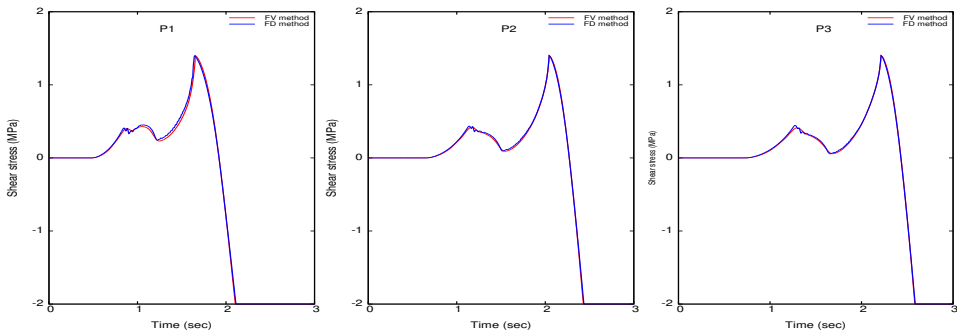


Figure: Comparaison de solutions numériques entre notre méthode *Volumes Finis* et une méthode *Différences Finies* [V.M. Cruz-Atienza & J. Virieux, 2004]

# Résultats numériques 2D : Faille plane spontanée

## Vitesse de glissement

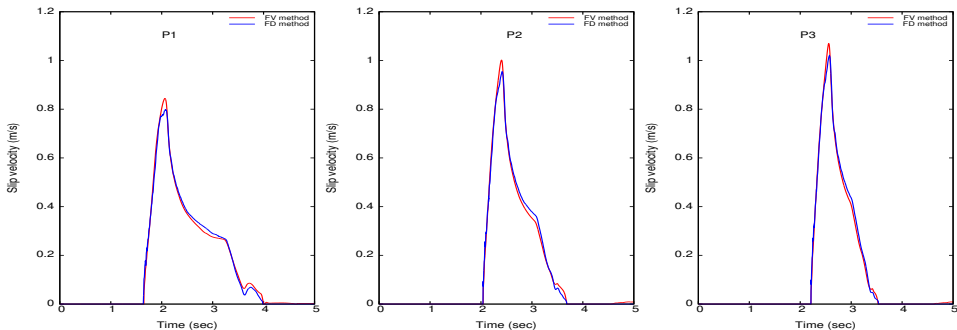
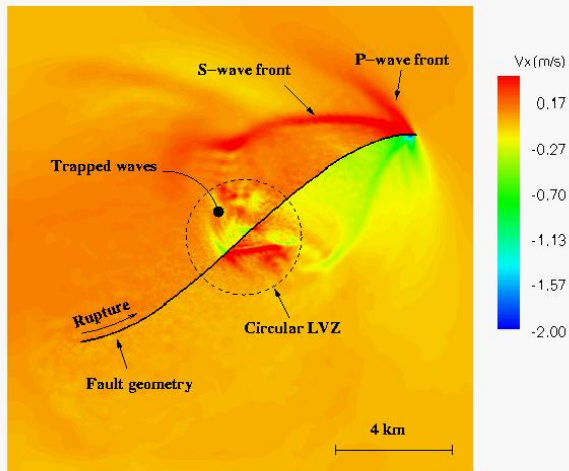


Figure: Comparaison de solutions numériques entre notre méthode *Volumes Finis* et une méthode *Différences Finies* [V.M. Cruz-Atienza & J. Virieux, 2004]



- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques**
  - Résultats numériques : 2D
  - **Résultats numériques : 3D**
- 7 Conclusion et perspectives

## Faille plane spontanée

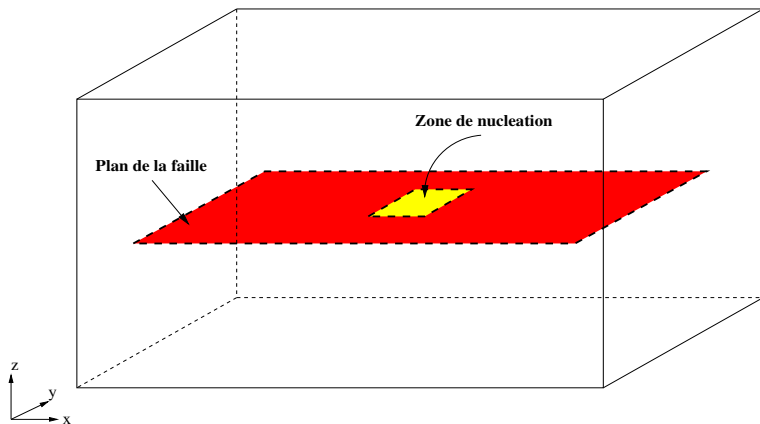


Figure: Géométrie de la faille pour le benchmark du SCEC

## Faïlle plane spontanée

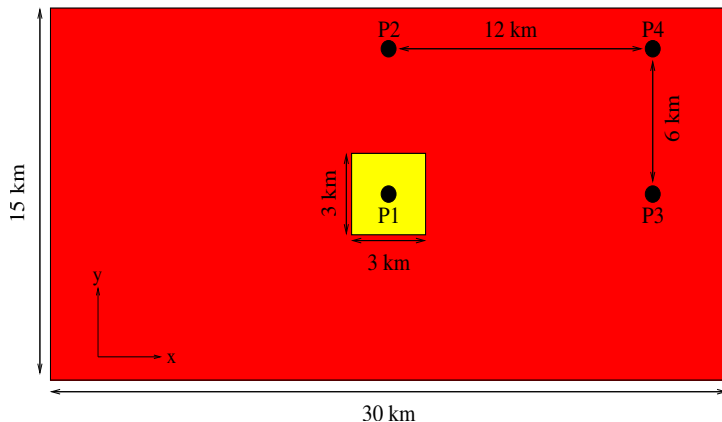


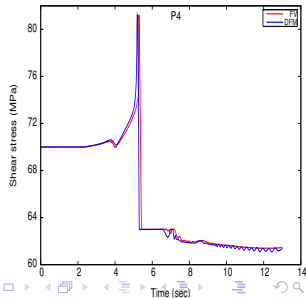
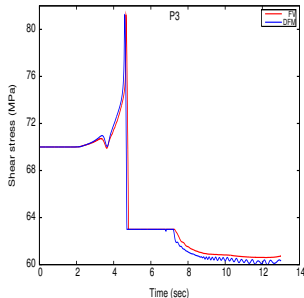
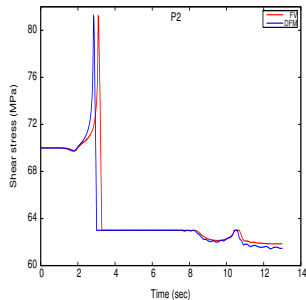
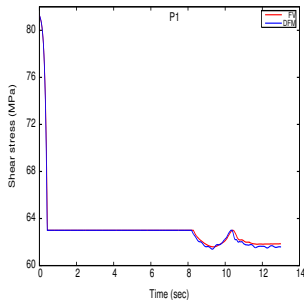
Figure: Géométrie de la faille pour le benchmark du SCEC



# Résultats numériques 3D : Faille plane spontanée

## Contrainte cisailante

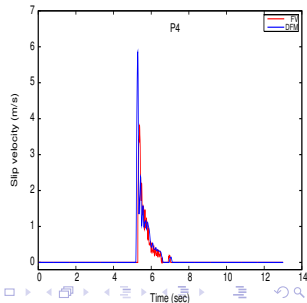
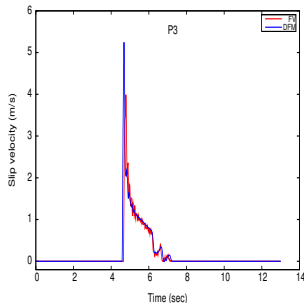
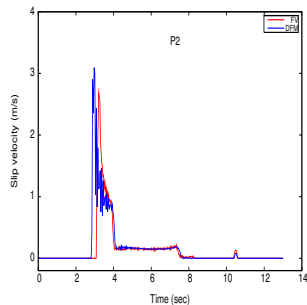
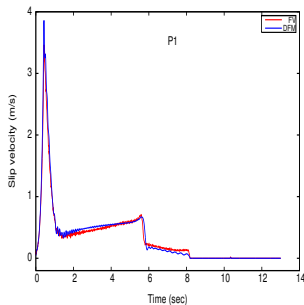
comparaison entre les résultats **Volumes Finis** et des résultats **Différences Finies** [S. Day et al., 2005]



# Résultats numériques 3D : Faille plane spontanée

## Vitesse de glissement

comparaison entre les résultats **Volumes Finis** et des résultats **Différences Finies** [S. Day et al., 2005]



# Résultats numériques 3D : Faille plane spontanée

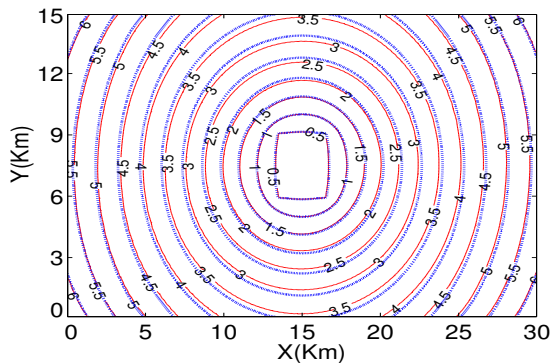


Figure: Contours du front de rupture à 0.5 s d'intervalle.

## Faïlle spontanée à géométrie courbe

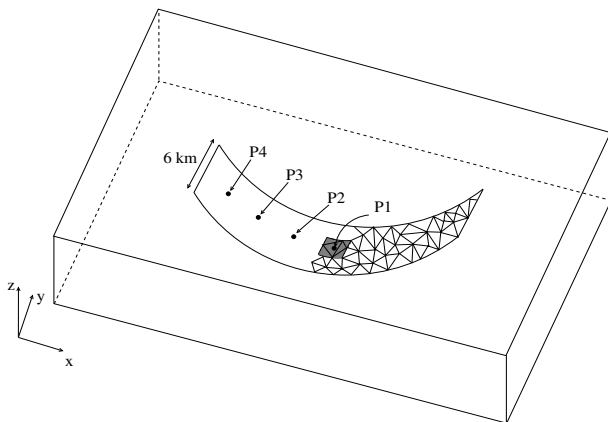
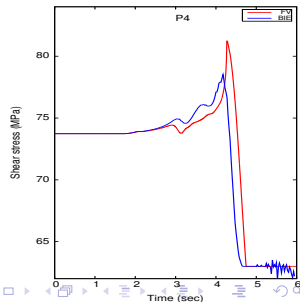
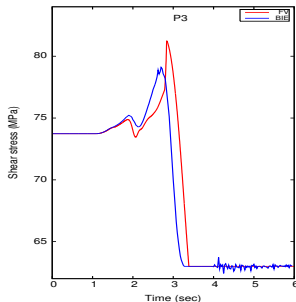
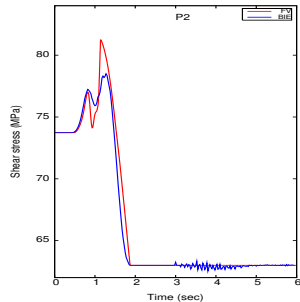
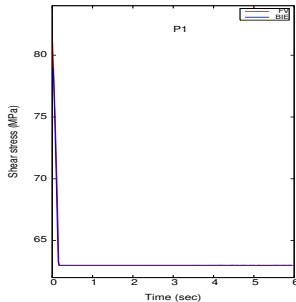


Figure: Géométrie d'une faille parabolique.

# Résultats numériques 3D : Faille spontanée courbe

## Contrainte cisillante

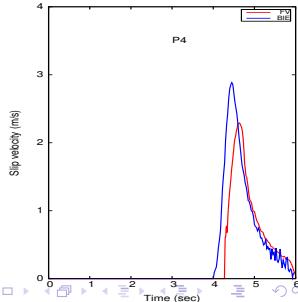
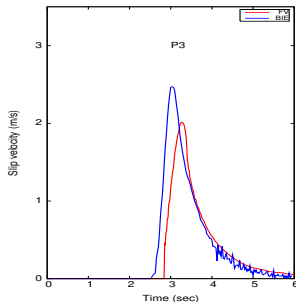
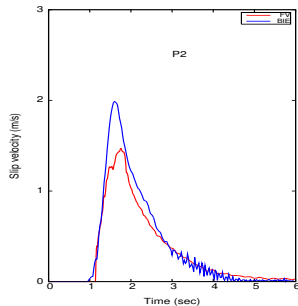
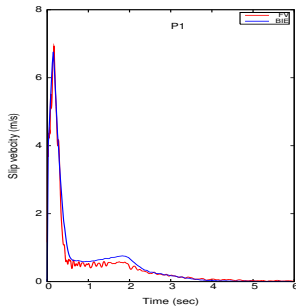
comparaison entre les résultats **Volumes Finis** et des résultats **Équations Intégrales de Frontière** [H. Aochi et al., 2000]



# Résultats numériques 3D : Faille spontanée courbe

## Vitesse de glissement

comparaison entre les résultats **Volumes Finis** et des résultats **Équations Intégrales de Frontière** [H. Aochi et al., 2000]



# Résultats numériques 3D : Faille spontanée courbe

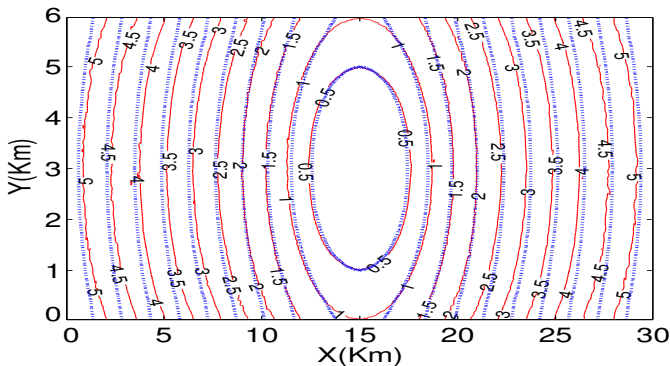


Figure: Contours du front de rupture à 0.5 s d'intervalle.







# Un mot sur le parallélisme

- Décomposition du domaine à l'aide du partitionneur de maillage ParMetis
- Programme de communication basé sur MPI (Message Passing Interface)
- Programmation en Fortran 77
- Cluster 128 processeurs, Biopteron 2GHz

---

Cas test	Nb sommets ( $10^6$ )	Nb ddl ( $10^6$ )	$\Delta t$ (s)	Nb proc	CPU
SCEC	27	160	$6.5 \cdot 10^{-3}$	100	1h30mn
Parabole	2	11	$2.1 \cdot 10^{-3}$	64	32mn

---

- 1 Motivation sur le choix de schémas GD
- 2 Système de l'élastodynamique
- 3 Schémas Galerkin discontinus
  - discrétisation spatiale
  - discrétisation temporelle
- 4 Définition et étude d'énergie
- 5 Conditions aux limites
  - Conditions aux limites absorbantes
  - Conditions aux limites sur la faille
- 6 Résultats numériques
  - Résultats numériques : 2D
  - Résultats numériques : 3D
- 7 Conclusion et perspectives

# Conclusion

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles

# Conclusion

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma

# Conclusion

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma
- Conditions aux limites

# Conclusion

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma
- Conditions aux limites
  - Sur le bord extérieur du domaine : conditions absorbantes

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma
- Conditions aux limites
  - Sur le bord extérieur du domaine : conditions absorbantes
  - Sur la faille : détermination des tractions tangentielles vérifiant les lois de frottement SWF



- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma
- Conditions aux limites
  - Sur le bord extérieur du domaine : conditions absorbantes
  - Sur la faille : détermination des tractions tangentielles vérifiant les lois de frottement SWF
- Validation des résultats numériques à travers divers cas tests.

- Schéma GD en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'une énergie discrète : stabilité du schéma
- Conditions aux limites
  - Sur le bord extérieur du domaine : conditions absorbantes
  - Sur la faille : détermination des tractions tangentielles vérifiant les lois de frottement SWF
- Validation des résultats numériques à travers divers cas tests.
- Implémentation parallèle utilisant l'interface MPI

- Résultats uniquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}0$  : extension aux schémas GD- $\mathbb{P}\ell$ .

- Résultats uniquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}0$  : extension aux schémas GD- $\mathbb{P}\ell$ .
- Détermination du vecteur traction pour des ordres  $\geq 2$ .

- Résultats uniquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}0$  : extension aux schémas GD- $\mathbb{P}\ell$ .
- Détermination du vecteur traction pour des ordres  $\geq 2$ .
- Schéma d'ordre variable, avec pas de temps local

- Résultats uniquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}0$  : extension aux schémas GD- $\mathbb{P}\ell$ .
- Détermination du vecteur traction pour des ordres  $\geq 2$ .
- Schéma d'ordre variable, avec pas de temps local
- Amélioration des conditions aux limites : PML

- Résultats uniquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}0$  : extension aux schémas GD- $\mathbb{P}\ell$ .
- Détermination du vecteur traction pour des ordres  $\geq 2$ .
- Schéma d'ordre variable, avec pas de temps local
- Amélioration des conditions aux limites : PML
- Cas test réel : séisme de Landers (Californie, 1992,  $M_W = 7.3$ )