



HAL
open science

Optimisation de forme dans la classe des corps de largeur constante et des rotors.

Térence Bayen

► **To cite this version:**

Térence Bayen. Optimisation de forme dans la classe des corps de largeur constante et des rotors.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00212070

HAL Id: tel-00212070

<https://theses.hal.science/tel-00212070>

Submitted on 22 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation de formes dans la classe des corps de largeur constante et des rotors

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 1^{er} juin 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie – Paris 6
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Térence Bayen

Composition du jury

<i>Directeur de thèse :</i>	Myriam Comte	(Université Paris 6)
<i>Rapporteurs :</i>	Giuseppe Buttazzo	(Université de Pise)
	Emmanuel Trélat	(Université d'Orléans)
<i>Examineurs :</i>	Frédéric Bonnans	(INRIA)
	Guillaume Carlier	(Université Paris Dauphine)
	Patrick Louis Combettes	(Université Paris 6)



*A ma famille,
à Claire.*

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite rendre hommage à Thomas Lachand-Robert, qui nous a quittés en février 2006. Son décès soudain a été une grande perte pour l'ensemble de la communauté scientifique. Je conserve de lui le souvenir de quelqu'un de passionné qui menait de front, avec énergie, ses divers projets scientifiques et avait à coeur les responsabilités nombreuses qu'il exerçait au sein de l'Université de Savoie.

J'ai commencé à travailler sous la direction de Thomas Lachand-Robert et Myriam Comte au cours de l'année 2004 et je voudrais, en premier lieu, leur exprimer mes remerciements pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Mes pensées vont à Thomas Lachand-Robert, qui m'a offert la chance d'être accueilli à Chambéry en 2004, et qui a su me faire partager son enthousiasme pour la recherche. Ses nombreux conseils ont été précieux.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Myriam Comte pour le soutien constant qu'elle m'a apporté au long de ma thèse, en particulier après le décès de Thomas Lachand-Robert. Elle a su se rendre disponible pour me proposer de nouveaux axes de travail et me diriger vers de nouvelles collaborations. Je remercie le Laboratoire Jacques Louis Lions de m'avoir accueilli cette année, dans les meilleures conditions, pour terminer ma thèse.

Je tiens également à adresser mes remerciements à Emmanuel Trélat pour l'intérêt qu'il a porté à ma recherche et pour son aide et ses conseils, ainsi qu'à Giuseppe Buttazzo pour les divers échanges que nous avons eus. Je leur suis reconnaissant d'avoir bien voulu être rapporteurs de ma thèse. Je dois aussi remercier Frédéric Bonnans, Patrick-Louis Combettes Guillaume Carlier de me faire l'honneur de participer à mon jury.

J'aimerais remercier Bertrand Maury qui, du fait de sa collaboration avec Thomas Lachand-Robert, a pu me suggérer de nouveaux problèmes. Je tiens encore à remercier Jean-Pierre François avec qui j'ai eu des échanges précieux sur mon sujet ainsi que Laurent Dumas avec qui j'ai pu avancer dans mes recherches numériques et théoriques.

Je remercie aussi tous ceux que j'ai côtoyés et avec qui j'ai pu avoir des discussions intéressantes, notamment Edouard Oudet, Christophe Raffalli, Didier Bresch, Laurent Vuillon ainsi que toute l'équipe de Chambéry. Merci aussi aux thésards et jeunes docteurs de l'Université de Savoie : Thomas, Frédéric, Patrick, Jean, Serge, Ali, Mayad, Farah...pour l'ambiance de travail et pour les agréables moments passés ensemble. Je n'oublie pas non plus les thésards et jeunes docteurs du Laboratoire Jacques Louis Lions pour leur soutien et leur amitié, en particulier mes collègues du bureau 3D23 : Jérôme, Vincent, Martin, Radu, Evelyne, Benjamin, Emmanuel, Matthieu, Driss, Mouna, Minh et tous les autres...

Un grand merci aussi à toute l'équipe administrative et technique du Laboratoire d'analyse numérique pour son aide précieuse et efficace.

Je remercie enfin ma famille et mes amis pour leur soutien durant ces trois années. Mes derniers remerciements iront à Claire, qui a été très attentive au cours de cette thèse. Son soutien m'a été essentiel et je veux lui dire à quel point je l'aime.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à des problèmes de minimisation de fonctionnelles relatives à des objets géométriques en dimension 2 et 3 sous contraintes de bord.

Dans le chapitre 2, nous considérons les corps de largeur constante en dimension 2 et nous redémontrons le théorème de Blaschke-Lebesgue par la théorie du contrôle optimal (principe du maximum de Pontryagin). Nous étudions également, en dimension 3, le problème de minimisation du volume dans la classe des corps de largeur constante et à symétrie de révolution. Nous abordons également ce problème par la théorie du contrôle optimal et l'utilisation du principe de Pontryagin fournit des conditions nécessaires pour un minimiseur.

Dans le chapitre 3, nous étudions le problème de minimisation de l'aire dans la classe des rotors. Grâce au principe de Pontryagin, nous prouvons que la frontière d'un minimiseur est formé d'une réunion finie d'arcs de cercles de rayon r_i où les r_i prennent des valeurs particulières.

Dans le chapitre 4, nous étudions des propriétés d'optimalité locale des rotors réguliers pour la fonctionnelle d'aire, et pour un certain type de perturbations. Par le théorème de Kuhn-Tucker, nous généralisons au cas des rotors un résultat de Firey. Nous montrons ainsi que pour ce type de perturbations les rotors réguliers du triangle équilatéral sont des maxima locaux de l'aire, et que les rotors réguliers d'un polygone à $n \geq 5$ côtés sont des points selles.

Dans le chapitre 5, nous abordons le problème de minimisation du volume dans la classe des corps de largeur constante en dimension 3. Nous introduisons un espace fonctionnel permettant de représenter analytiquement ces objets. Puis nous en déduisons des conditions d'optimalité faibles pour un minimiseur.

Mots-Clés : calcul des variations, minimisation sous contraintes globales, contrôle optimal, optimisation de formes, corps de largeur constante, rotors, convexité, courbure géométrique.

Abstract

In this dissertation, we study the minimization of a geometrical functional in dimension 2 and 3 under boundary constraints.

In the second part, we study constant width bodies in dimension 2 and we prove the Blaschke-Lebesgue's theorem by the optimal control theory (Pontryagin maximum principle). In dimension 3, we study the problem of minimizing the volume in the class of constant width bodies which have an axis of revolution. By Pontryagin's principle, we derive necessary conditions satisfied by a minimizer.

In the third part, we study the problem of minimizing the area in the class of rotors. By Pontryagin's principle, we show that the boundary of a minimizer is a finite union of arcs of circle whose radii have prescribed values.

In the fourth part, we investigate optimal locality properties of the area for regular rotors under a certain type of perturbations. Thanks to Kuhn-Tucker's theorem, we generalize a result of Firey in the case of rotors. We thus show that the regular rotors of the equilateral triangle are local maximizers of the area, whereas the rotors in a regular polygon with $n \geq 5$ sides are saddle points.

In the fifth part, we study the problem of minimizing the volume among constant width bodies in dimension 3. We present a complete analytic parametrization of the constant width bodies. We derive weak optimality conditions for a minimizer of the functional.

Keywords : calculus of variation, minimization under global constraints, optimal control theory, shape optimization, constant width bodies, rotors, convexity, geometric curvature.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Corps de largeur constante en dimension 2	1
1.2	Minimisation de l'aire dans la classe des rotors	7
1.3	Optimalité locale des rotors réguliers	9
1.4	Minimisation du volume dans la classe des objets de largeur constante de \mathbb{R}^3	11
2	Corps de largeur constante dans \mathbb{R}^2	15
2.1	Preuve du théorème de Blaschke-Lebesgue par le contrôle optimal	15
2.1.1	Introduction au contrôle optimal pour la résolution de ces problèmes	15
2.1.2	Rappels sur la fonction d'appui	17
2.1.3	Propriétés des corps de largeur constante	20
2.1.4	Reformulation du problème de minimisation	25
2.1.5	Résolution du problème de contrôle	27
2.2	Objets de largeur constante en dimension 3 à symétrie de révolution	32
2.2.1	Paramétrisation du problème sur $[0, \frac{\pi}{2}]$	32
2.2.2	Expression du problème de minimisation	35
2.2.3	Optimalité locale du triangle de Reuleaux tourné	37
2.2.4	Analyse du problème de contrôle associé au problème de minimisation	39
2.2.5	Résolution du problème de contrôle	40
3	Minimisation de l'aire des rotors	47
3.1	Introduction	47
3.2	Construction of a rotor	49
3.2.1	Support function of a convex body	49
3.2.2	Construction theorem	52
3.2.3	Formulation of the constraints on $[0, 2\delta]$	54
3.3	Optimality conditions for a minimizer	58
3.3.1	Simplification of the functional	59
3.3.2	Geometrical Consequences	63
3.3.3	Fourier series of regular rotors	66
3.3.4	Formulation in terms of a control problem and first consequences of the PMP	68
3.3.5	Computation of the optimal control	72
3.3.6	Determination of the number of switching points	75
3.3.7	Geometrical consequences	78
3.4	Conclusion	79

4	Optimalité locale des rotors réguliers	81
4.1	Optimalité locale des polygones réguliers de Reuleaux	81
4.1.1	Introduction au problème	81
4.1.2	Calcul de la fonctionnelle pour des fonctions créneaux	84
4.2	Optimalité locale des rotors réguliers	91
4.2.1	Rotors réguliers et séries de Fourier	91
4.2.2	Locale optimalité des rotors réguliers	93
4.3	Rotors tournant dans des polygones non réguliers	105
4.3.1	Condition sur la fonction d'appui.	105
4.3.2	Lien entre les rotors d'un n-gone et les Δ -courbes	107
5	Paramétrisation analytique des corps de largeur constante en dimension 3	111
5.1	Introduction	111
5.2	The Median Surface	112
5.2.1	Definition and basics	112
5.2.2	Construction of constant width sets	113
5.2.3	Smooth median surface	116
5.3	Parametrizations	118
5.3.1	Isothermal parametrization of the sphere	118
5.3.2	Parametrization of the median surface	120
5.3.3	Regularity of the parametrization	123
5.3.4	Surface area and volume	125
5.3.5	Description of Meissner's tetrahedron	128
5.3.6	Local optimality	128
6	Appendice	133
6.1	Développement en série de Fourier des polygones de Reuleaux	133
7	Conclusion et perspectives	135
7.1	Conclusion	135
7.2	Perspectives	136
	Bibliographie	141

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, j'ai étudié différents problèmes de minimisation sous contraintes globales. Il s'agit de minimiser une fonctionnelle de coût $J(u)$ dans une classe de fonctions admissibles $u \in \mathcal{C}$. La contrainte globale porte sur les valeurs ponctuelles de u ou de ses dérivées et rend l'utilisation de méthodes classiques en calcul des variations (Equation d'Euler-Lagrange,...) inadéquate. Je me suis intéressé à plusieurs problèmes d'optimisation où les contraintes sur les fonctions admissibles sont globales pour lesquels nous avons développé des méthodes spécifiques afin de les résoudre théoriquement ou numériquement. Nous présentons dans l'introduction les quatre chapitres dont est constituée la thèse.

1.1 Corps de largeur constante en dimension 2

Le premier type de problème étudié est issu de la géométrie. On s'intéresse à la minimisation d'une fonctionnelle géométrique (aire ou volume) dans une classe d'objets convexes qui satisfont des contraintes de bord. La fonctionnelle géométrique jouera le rôle de la fonctionnelle de coût à minimiser. Les contraintes de bord et la prise en compte de la convexité de ces objets fourniront l'espace des fonctions admissibles sur lequel on minimise la fonctionnelle de coût. Nous établirons une bijection entre les contraintes géométriques et ces espaces fonctionnels pour chacun des problèmes de minimisation.

On s'intéresse d'abord à l'étude de la classe des corps convexes de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (i.e. compacts convexes non vides) qui sont de largeur constante. Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^n . Pour une direction $\nu \in \mathcal{S}^{n-1}$ donnée, on définit les deux hyperplans d'appui à K , H_ν et $H_{-\nu}$ de vecteur normal ν et $-\nu$.

Définition 1.1. *On dit que K est de largeur constante α si et seulement si pour toute direction ν , la distance entre les deux hyperplans H_ν et $H_{-\nu}$ est constante égale et à α .*

On appellera \mathcal{W}_α^n l'ensemble des corps de \mathbb{R}^n de largeur constante.

Les objets de largeur constante ont été largement étudiés depuis les années 1900 pour leurs propriétés géométriques et mécaniques (voir [6], [7], [9], [37], [45], [56]). En dimension 2, un objet de largeur constante tourne dans un carré en restant en contact à chaque instant aux 4 côtés du carré. Nous examinerons plus précisément dans les chapitres 2 et 3 les propriétés géométriques de ces objets en dimension 2 (périmètre constant, stricte convexité,...) à l'aide de la fonction d'appui.

Un problème classique posé par Blaschke et Lebesgue (voir [6], [37]) au début des années 1900

est celui de la minimisation du volume dans cette classe d'objets :

$$\min_{K \in \mathcal{W}_\alpha^n} \text{Vol}(K) \tag{1.1}$$

où $\text{Vol}(K)$ désigne le volume de K . Le problème de maximisation n'offre pas d'intérêt puisque l'on trouve la boule. C'est par exemple une application de l'inégalité isopérimétrique. Nous nous intéresserons donc uniquement au problème de minimisation. Le problème (1.1) est pertinent car tout corps de largeur constante est strictement convexe (voir [56]) et donc le minimum pour (1.1) n'est pas 0. Le problème (1.1) admet une solution dans \mathcal{W}_α^n pour des raisons de compacité.

En dimension 2, le problème (1.1) a été résolu dans les années 1900 simultanément par Blaschke et Lebesgue de façon géométrique, et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème de Blaschke-Lebesgue. *Dans la classe des objets de largeur constante 1, le corps d'aire minimale est le triangle de Reuleaux.*

Le triangle de Reuleaux est constitué de l'intersection de trois arcs de cercle centrés sur les sommets d'un triangle équilatéral et rejoignant les deux sommets opposés (voir figure 1.1). C'est F. Reuleaux qui, en 1875, a mis en évidence un corps convexe autre que la boule et qui possède la même propriété d'être de largeur constante (voir [45]). Le triangle de Reuleaux est utilisé en mécanique pour creuser des trous carrés et il est utilisé dans certains moteurs.

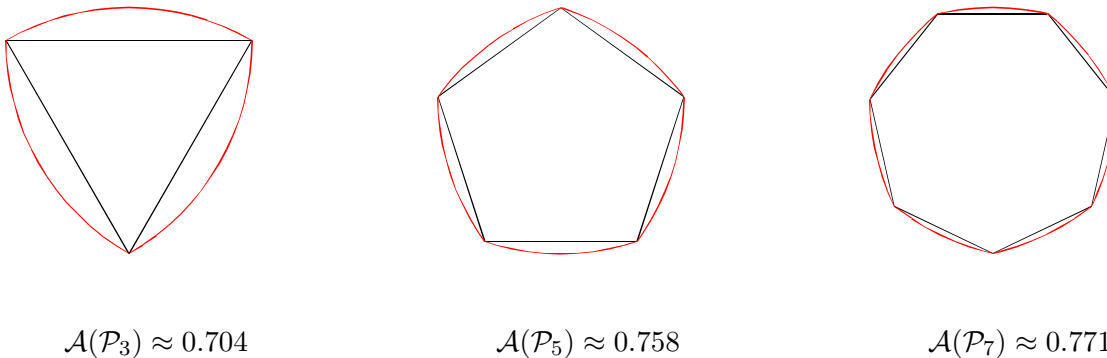


FIG. 1.1 – Aire des polygones de Reuleaux impairs \mathcal{P}_N : $\mathcal{A}(\mathcal{P}_N) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2N}\right)\right)$ pour $N = 3, 5, 7$.

Plus généralement, ce dernier a défini les polygones de Reuleaux :

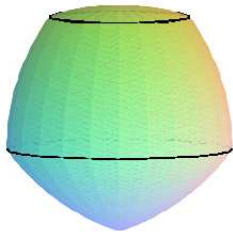
Définition 1.2. *Un polygone de Reuleaux régulier de largeur 1 est constitué de l'intersection des $2n + 1$ arcs de cercle de rayon 1 ($n \geq 1$), centrés sur les sommets d'un polygone régulier à $2n + 1$ côtés, et rejoignant les deux sommets opposés.*

Bien que le résultat en dimension 2 soit simple, sa démonstration est un peu moins aisée. Une des démonstrations originales (voir [56]) repose sur l'inscription des objets de largeur constante à l'intérieur de polygones réguliers et exige ainsi une connaissance a priori du minimiseur. Nous verrons que les méthodes "modernes" (par le contrôle optimal ou le calcul des variations) permettent de s'affranchir de la connaissance a priori du minimiseur, et on peut donc envisager de les utiliser afin de résoudre d'autres problèmes.

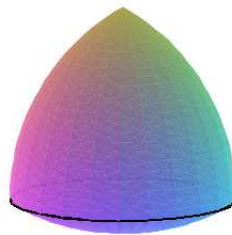
En dimension 3, le problème de trouver le corps de largeur constante de volume minimal est

ouvert depuis les années 1930. Nous pouvons former à l'aide des polygones de Reuleaux impairs toute une série d'objets de largeur constante à symétrie de révolution en les faisant tourner autour d'un de leurs axes de symétrie (voir figure 1.2). Cette construction ne fournit pas des objets de largeur constante d'aire minimale. En effet, en 1934, Meissner a construit un solide appelé *volume de Meissner* dont on détaillera la construction dans le chapitre 5 et qui possède un volume inférieur (voir [40], [41], [42], [43]). L'idée est de considérer l'équivalent du triangle de Reuleaux en dimension 3, c'est à dire l'intersection des 4 sphères centrées sur un tétraèdre régulier et joignant les trois sommets opposés. Cet objet n'est pas de largeur constante, il existe en effet des directions où sa largeur dépasse 1. Ainsi, en lissant 3 de ses arêtes adjacentes, on peut construire un objet de largeur constante 1 qui ne possède pas la symétrie de révolution (voir figure 1.2). On doit donc à Meissner en 1934 la conjecture suivante :

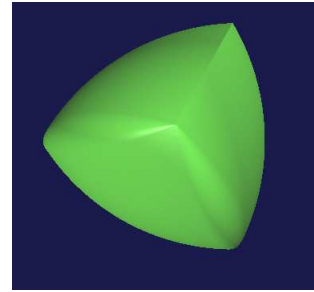
Conjecture 1.1. *L'objet de largeur constante 1 et de volume minimal dans \mathbb{R}^3 est le volume de Meissner.*



$\mathcal{A} \approx 3,089$



$\mathcal{A} \approx 2,993$



$\mathcal{A} \approx 2,934$

FIG. 1.2 – Valeurs de la surface du pentagone de Reuleaux tourné, du triangle de Reuleaux tourné, et du volume de Meissner.

Ces problèmes en dimension 2 et 3 peuvent être abordés de façon analytique à l'aide de la fonction d'appui qui permet de représenter la frontière d'un objet convexe dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.3. *Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^n . On appelle fonction d'appui de K l'application h_K de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par pour $\nu \in \mathbb{R}^n$:*

$$h_K(\nu) = \sup\{x \cdot \nu, x \in K\}. \tag{1.2}$$

Dans toute la suite, nous utiliserons la notion de fonction d'appui pour étudier ces problèmes d'optimisation géométriques. Nous verrons que la fonction d'appui permet de caractériser un corps convexe et de prendre en compte les contraintes de type largeur. Par ailleurs, les fonctionnelles géométriques comme l'aire ou le volume s'expriment simplement en termes de la fonction d'appui.

La fonction d'appui représente la distance d'un hyperplan d'appui à K de normale ν à l'origine (voir figure 1.3). Nous examinerons dans les chapitres 2 et 5 certaines propriétés de la fonction d'appui dont nous aurons besoin. Nous verrons notamment que la fonction d'appui d'un corps de

largeur constante est de classe $C^{1,1}$ (voir chapitre 5). Le volume d'un corps K de \mathbb{R}^n s'exprime à l'aide de la fonction d'appui (voir [7]). On note dS l'élément de surface d'un corps convexe K .

$$Vol(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} h dS \quad (1.3)$$

En notant formellement $h_{\nu_i \nu_j}$ la dérivée seconde $\frac{\partial^2 h}{\partial \nu_i \partial \nu_j}$ et $D_{n-1}(h)$ la somme des $n - 1$ mineurs

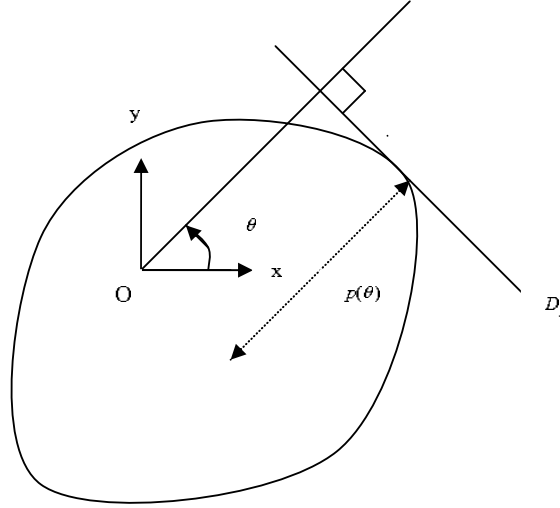


FIG. 1.3 – La fonction d'appui d'un corps convexe de \mathbb{R}^2 représente la distance $p(\theta)$ entre une droite d'appui D_θ de vecteur normal $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et l'origine.

principaux de la matrice $(h_{\nu_i \nu_j})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$, (1.3) se réécrit (voir [7]) :

$$Vol(K) = \int_{S^{n-1}} h D_{n-1}(h) d\omega. \quad (1.4)$$

Définition 1.4. Soit K un corps de \mathbb{R}^n et h sa fonction d'appui. La largeur de K dans la direction ν est donnée par :

$$w(\nu) = h(\nu) + h(-\nu).$$

Un corps de largeur constante se définit donc de façon équivalente par la définition suivante :

Définition 1.5. Soit K un corps de \mathbb{R}^n et h sa fonction d'appui. Alors, K est de largeur constante 1 si et seulement si

$$\forall \nu \in S^{n-1}, w(\nu) = 1.$$

Dans le second chapitre, nous étudions le cas de la dimension 2 et dans le chapitre 5 nous étudions le cas de la dimension 3. En dimension 2, on notera p la fonction d'appui d'un corps convexe K qui est de classe $C^{1,1}$ et 2π -périodique. L'aire de K s'écrit alors

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 - p'^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p''). \quad (1.5)$$

où $p + p''$ désigne le rayon de courbure géométrique de la frontière du corps K . Si K est de largeur constante 1, nous montrerons que la fonction d'appui doit vérifier les contraintes :

$$\begin{cases} p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, & \forall \theta \in \mathbb{R} \\ p + p'' \geq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

On notera \mathcal{C} l'ensemble des fonctions p de classe $C^{1,1}$, 2π -périodiques et qui satisfont les deux conditions précédentes. La première contrainte sur p dans (1.6) exprime la largeur constante du corps K . La seconde contrainte exprime la convexité du corps K par la positivité du rayon de courbure géométrique de sa frontière. Ainsi, le problème géométrique peut se reformuler sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes :

$$\min_{p \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 - p'^2. \quad (1.7)$$

L'espace des contraintes \mathcal{C} est un ensemble convexe par rapport à la fonction p .

Dans le chapitre 1, nous redémontrons le théorème de Blaschke-Lebesgue par la théorie du contrôle optimal dans \mathbb{R}^2 et nous verrons que cette méthode est bien adaptée pour étudier ce type de problèmes. Cette démonstration par le contrôle optimal a été abordée par Ghandehari (voir [19]) et par Malagoli dans sa thèse de doctorat. Cependant, il me semble que leur preuve présente une inexactitude : ils supposent que le maximum de la solution entre deux points de saut consécutifs du contrôle optimal est indépendant des switches.

Nous prenons comme contrôle le rayon de courbure de la frontière d'un corps K donné par

$$R = p + p''. \quad (1.8)$$

La convexité et la largeur constante 1 imposent les inégalités suivantes :

$$0 \leq R \leq 1 \quad (1.9)$$

Par suite, nous pouvons reformuler (1.7) comme un problème de contrôle optimal où la fonctionnelle de coût est donnée par (1.5), le système d'état est donné par (1.8) et le contrôle vérifie (1.9).

L'application du principe de Pontryagin permet de montrer qu'une trajectoire extrémale et minimisante est "bang-bang" : elle sature le rayon de courbure de la frontière du corps K . Ce dernier prend donc les valeurs 0 ou 1 presque partout. Lorsque $R = 0$, le corps présente un coin, lorsque $R = 1$, la frontière présente un arc de cercle. Nous démontrons ensuite qu'il n'y a pas de trajectoires singulières et que le contrôle bascule un nombre fini de fois de 0 à 1. De plus, on montre que la distance entre deux sauts consécutifs du contrôle est constante. Le corps convexe ainsi obtenu est donc un polygone de Reuleaux impair et par suite, celui d'aire minimale est le triangle de Reuleaux. Cette preuve rejoint celle de Harrell (voir [26]) qui redémontre le théorème de Blaschke par minimisation sous contraintes. Il établit en effet que si le rayon de courbure de la frontière d'un corps K d'aire minimale ne sature pas les contraintes, alors on peut diminuer son aire. Pour étudier les problèmes de contrôle optimal en dimension finie, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.6. *Etant donné un problème de contrôle optimal sur un intervalle $[0, T]$ où $u \in \mathbb{R}^m$ désigne le contrôle, on dit qu'un point τ de l'intervalle $[0, T]$ est un switching point (ou switch) ssi u est discontinue en τ , i.e. ssi il existe $u_1 \in \mathbb{R}^m$ et $u_2 \in \mathbb{R}^m$ avec $u_1 \neq u_2$ tels que*

$$u(\tau^-) = u_1, \quad u(\tau^+) = u_2.$$

L'étude de l'espacement des points de saut d'un contrôle optimal est délicate, notamment pour les problèmes (1.12) et (1.15). On s'attend en effet à ce que ces points de sauts soient régulièrement espacés dans l'intervalle $[0, T]$ pour les trajectoires "bang-bang". Cette dernière propriété n'est pas évidente à obtenir pour les problèmes que j'ai étudiés.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons également au problème de minimisation du volume dans la classe des objets de largeur constante en dimension 3 à symétrie de révolution. On note $W_\alpha^{2,sym}$ l'ensemble des corps de largeur constante α en dimension 2 et qui possèdent un axe de symétrie. Nous considérons donc la classe des corps de \mathbb{R}^3 qui sont obtenus par la rotation d'un élément de $W_\alpha^{2,sym}$ autour d'un axe de symétrie. Sur la figure 1.2, nous avons représenté le triangle de Reuleaux tourné et le pentagone de Reuleaux tourné.

On s'attend naturellement au résultat suivant :

Conjecture 1.2. *Dans la classe des objets de largeur constante en dimension 3 à symétrie de révolution, celui de volume minimal est le triangle de Reuleaux tourné.*

Ce problème est un sous problème du problème (1.1) dans le cas $n = 3$ et peut se reformuler comme un problème de contrôle en dimension 2 du même type que le problème (1.7). Soit K un corps de largeur constante de \mathbb{R}^3 à symétrie de révolution et p la fonction d'appui du corps $K_0 \in W_\alpha^{2,sym}$ correspondant, 2π -périodique et de classe $C^{1,1}$. Les contraintes satisfaites par p sont les suivantes :

$$\begin{cases} p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, & \forall \theta \in \mathbb{R} \\ p(\theta) = p(\pi - \theta), & \forall \theta \in \mathbb{R} \\ p + p'' \geq 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

On notera \mathcal{C}' l'ensemble des fonctions p de classe C^1 , 2π -périodiques et qui satisfont les trois contraintes précédentes. La seconde contrainte exprime le fait que le corps K_0 décrit ait un axe de symétrie perpendiculaire à la droite d'appui repérée par $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'espace \mathcal{C}' est un sous-ensemble de \mathcal{C} et est également convexe. Nous montrons que la fonctionnelle qui représente la surface du corps peut s'écrire pour $p \in \mathcal{C}'$ de la façon suivante :

$$J(p) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(p(\theta) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} p'(\theta)^2 \right) \cos(\theta) d\theta + \pi. \quad (1.11)$$

En dimension 3, le problème de minimisation du volume dans la classe des corps de largeur constante est équivalent au problème de minimisation de la surface des corps de largeur constante. Ceci résulte d'un théorème de Blaschke (voir théorème 5.1, Chapitre 5) que nous démontrons dans le chapitre 5.

Le problème de minimisation sous contraintes se reformule donc de la façon suivante :

$$\min_{p \in \mathcal{C}'} J(p). \quad (1.12)$$

Nous démontrons d'abord que le triangle de Reuleaux tourné est un minimum local dans la classe des objets de largeur constante à symétrie de révolution (voir Théorème 2.8, Chapitre 2).

Nous pouvons également utiliser la théorie du contrôle optimal pour trouver des conditions nécessaires sur le minimiseur de J dans \mathcal{C}' . Le principe de Pontryagin permet d'obtenir la saturation du rayon de courbure de la frontière du minimiseur. Nous montrons que pour une trajectoire extrémale et minimisante, alors le rayon de courbure prend les valeurs $R = 0$ ou $R = 1$ presque partout. Nous avons pu éliminer la variable duale dans le système de Pontryagin et obtenir un système qui fournit les switching point d'un contrôle optimal. Dans le cas où il n'y a qu'un seul switching point, nous trouvons le triangle de Reuleaux tourné. Le système qui fournit la valeur des switchs est plus compliqué dans ce cas que pour le problème (1.7). Le système n'étant plus autonome, il n'y a pas de quantités simples conservées le long des trajectoires extrémales comme le Hamiltonien.

1.2 Minimisation de l'aire dans la classe des rotors

Le second chapitre fait l'objet d'un article en cours de soumission (voir [4]) et dans lequel j'ai étudié un problème analogue à (1.7) dans la classe des rotors. Dans ce chapitre, le problème de minimisation que nous considérons est également abordé par la théorie du contrôle optimal et du principe du maximum de Pontryagin.

Etant donné un entier $n \geq 3$, on appellera n -gone tout polygone régulier à n côtés.

Définition 1.7. *Un rotor est un corps convexe qui tourne à l'intérieur d'un n -gone en restant en contact à chaque instant avec tous les côtés du polygone.*

Comme pour le cas des objets de largeur constante, nous montrerons dans le chapitre 3 que la fonction d'appui d'un rotor est de classe $C^{1,1}$ et 2π -périodique. On appelle r le rayon du cercle inscrit à un polygone régulier à n côtés. Nous rappellerons le théorème suivant qui permet de construire un rotor à l'aide de sa fonction d'appui (voir Théorème 3.2, Chapitre 3) :

Théorème 1.1. *Un rotor en dimension 2 est la donnée d'une fonction p de classe $C^{1,1}$, 2π -périodique et qui vérifie*

$$p + p'' \geq 0, \quad (1.13)$$

ainsi que la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S_n(p)(\theta) =: p(\theta) - 2 \cos(\delta)p(\theta + \delta) + p(\theta + 2\delta) = C_n \quad (1.14)$$

où $\delta = \frac{2\pi}{n}$ et la constante C_n vaut $C_n = 4r \sin^2(\frac{\delta}{2})$.

La relation (1.14) est une généralisation de (1.6) obtenue pour les objets de largeur constante et exprime que les normales aux points de contact du n -gone concourent en le centre instantané de rotation (propriété mécanique). Lorsque $n = 4$ et $r = \frac{1}{2}$, (1.14) redonne la relation $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1$.

Soit \mathcal{C}'' l'ensemble des fonctions p de classe $C^{1,1}$, 2π -périodique, et qui vérifient les contraintes (1.13) et (1.14). Nous étudions dans le chapitre 3 le problème d'optimisation sous contraintes

$$\min_{p \in \mathcal{C}''} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 - p'^2. \quad (1.15)$$

Ce problème a été résolu géométriquement dans les années 1900 par Blaschke, Lebesgue et Fujiwara dans le cas $n = 3$ et $n = 4$ (voir [6], [16], [18], [37]). Dans le cas où $n = 3$, un rotor dans un triangle équilatéral s'appelle plus communément une Δ -courbe. Comme les objets de largeur constante, ce cas a été largement étudié par les géomètres. Pour $n = 3$, le minimiseur est la lunule ou lentille (voir figure 1.4). Il s'agit de deux arcs de cercle symétriques, de rayon $3r$ et d'angle $\pi/3$. Lorsque $n = 4$, il s'agit du triangle de Reuleaux (voir figure 1.4). Dans ces deux cas, le minimiseur est une intersection d'arcs de cercles et le rayon sature la contrainte :

– $n = 3$: le rayon de courbure de la frontière prend la valeur 0 ou $3r$ (voir figure 1.4).

– $n = 4$: le rayon de courbure de la frontière prend la valeur 0 ou $2r$ (voir figure 1.4).

Goldberg a décrit une famille de rotors réguliers $O_n^{ln \pm 1}$, $l \in \mathbb{N}^*$, tournant dans un n -gone et analogues aux polygones de Reuleaux (voir [21], [22], [23]). Ces rotors réguliers sont appelés rotors à crémaillère (trammel rotors) et sont formés de l'intersection de disques de rayon r_i où les r_i sont

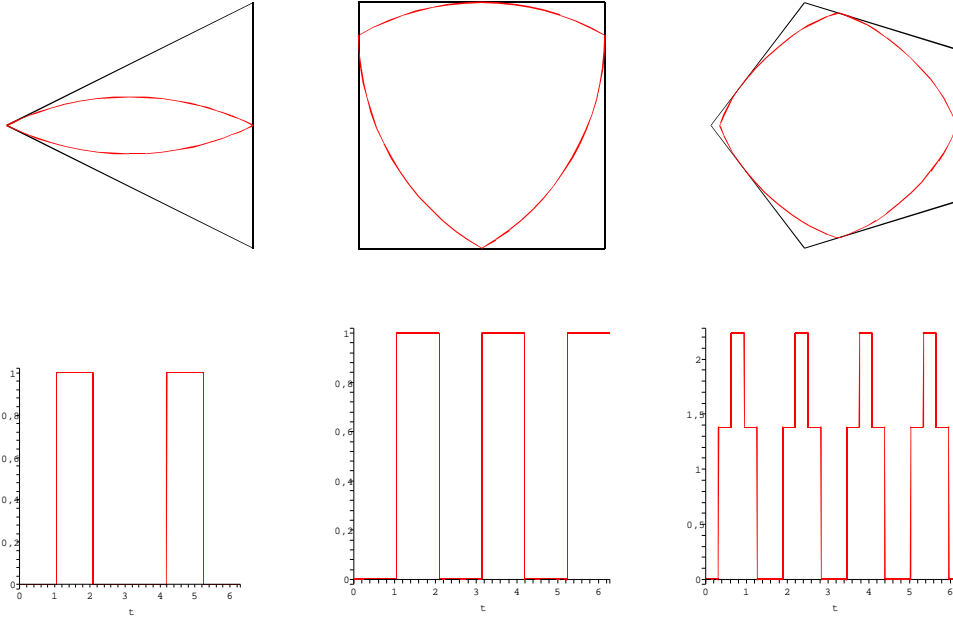


FIG. 1.4 – Lunule, Triangle de Reuleaux et O_n^{n-1} et leurs rayons de courbure sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

les distances des diagonales du n -gone aux côtés parallèles. Le rayon de courbure de $O_n^{ln\pm 1}$ est périodique de période $\frac{2\pi}{ln\pm 1}$ et possède $2(ln\pm 1)$ symétries. Lorsque $n = 4$, on retrouve les polygones de Reuleaux impairs. Nous détaillerons leur construction plus précisément dans le chapitre 3. Sur la figure 1.4, nous avons représenté le rayon de courbure de la frontière de O_n^{n-1} .

Dans le cas général, $n \geq 5$, le problème de minimisation de l'aire est plus difficile à traiter géométriquement. Comme dans le cas des objets de largeur constante, on s'attend à ce que le minimum global de l'aire dans la classe des rotors soit l'élément de la famille $O_n^{ln\pm 1}$ d'aire minimale. Nous redémontrerons que l'élément de la famille $O_n^{ln\pm 1}$ d'aire minimale est O_n^{n-1} qui est composé d'un nombre minimal d'arcs de cercle parmi les éléments de la famille $O_n^{ln\pm 1}$ (comme dans le cas des polygones de Reuleaux). La conjecture suivante est due à Goldberg dans les années 1960 :

Conjecture 1.3. *Le rotor d'aire minimale tournant dans un n -gone est O_n^{n-1} .*

Nous abordons ce problème de minimisation sous contraintes par la théorie du contrôle optimal en suivant une idée de Klötzler ([32]) pour la reformulation analytique. Dans [32], l'auteur aborde en effet ce problème, mais il laisse deux points en suspens. L'auteur semble utiliser le fait qu'un minimum local de l'aire dans la classe des rotors est nécessairement un élément de $O_n^{ln\pm 1}$. Par ailleurs, lorsqu'il examine le problème de minimisation parmi les éléments du bord des contraintes (i.e. pour lesquels le rayon de courbure de la frontière sature la contrainte de convexité), il effectue des perturbations convexes de ces éléments. Or l'ensemble des éléments du bord des contraintes n'a aucune structure de convexité. Ainsi, ce type de perturbations n'est pas admissible si l'on travaille sur l'ensemble des éléments du bord des contraintes.

Pour aborder le problème (1.15) nous procédons comme dans le chapitre 1 pour effectuer la démonstration du théorème de Blaschke en prenant comme contrôle le rayon de courbure de la frontière d'un rotor. Cependant, à la différence du cas $n = 4$, la contrainte de convexité associée à la contrainte $S_n(p) = C_n$ impose le choix d'un contrôle Z prenant ses valeurs dans le plan complexe.

En effet, le cas $n = 4$ est un cas particulier où la relation $S_n(p) = C_n$ ne fait apparaître que deux termes, ce qui simplifie le problème.

Dans le chapitre 3, nous montrons que le problème (1.15) se reformule sous la forme d'un problème de contrôle optimal. A l'aide du principe du maximum de Pontryagin, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Dans la classe des rotors, celui d'aire minimal est une intersection finie d'arcs de cercles de rayon r_i où les r_i sont les distances des diagonales du n -gone aux côtés parallèles.*

Nous avons également démontré qu'une solution de Pontryagin associée au problème (1.15) possédait la même structure qu'un élément de $O_n^{ln\pm 1}$ (voir Théorème 3.10, Chapitre 2). Autrement dit, le nombre de switching point s du contrôle optimal associé à une solution de (1.15) vérifie $s + 1 \equiv \pm 1[n]$.

Nous n'avons pas démontré pour le moment que le rotor d'aire minimale est régulier. Le point délicat consiste à montrer que les switchs sont régulièrement espacés.

1.3 Optimalité locale des rotors réguliers

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à certaines propriétés locales des rotors réguliers : déformation locale et optimalité locale. Dans [13], Firey s'est intéressé à des propriétés d'optimalité locale des polygones de Reuleaux. Soit $\mathcal{A}(K)$ l'aire d'un corps convexe K et soit T le triangle de Reuleaux. Il démontre géométriquement qu'on peut approcher le triangle de Reuleaux à ε près par un polygone de Reuleaux :

Théorème 1.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, pour tout $n \geq 1$, il existe un polygone de Reuleaux P à $2n + 1$ côtés vérifiant*

$$\mathcal{A}(T) \leq \mathcal{A}(P) \leq \mathcal{A}(T) + \varepsilon.$$

On note $(\mathcal{P}_{2n+1}^{reg})_{n \geq 2}$ le polygone régulier de Reuleaux à $2n+1$ côtés. On appellera plus généralement polygone de Reuleaux à $2n+1$ côtés, un corps de largeur constante formé de l'intersection de $2n+1$ arcs de cercle de rayon 1. Firey démontre également géométriquement le résultat suivant :

Théorème de Firey. *Dans la classe des polygones de Reuleaux à $2n+1$ côtés ($n \geq 2$), celui d'aire maximale est le polygone régulier de Reuleaux \mathcal{P}_{2n+1}^{reg} .*

Avant d'étudier le cas des rotors réguliers, nous redémontrons le résultat de Firey à l'aide du théorème de Kuhn-Tucker qui fournit une condition suffisante pour qu'un point soit un extremum d'une fonctionnelle. Dans le cas des polygones impairs de Reuleaux à $2n + 1 \geq 5$ côtés, nous montrons que la fonctionnelle d'aire s'écrit sous la forme :

$$F = F(x_1, \dots, x_{2n+1}) = \frac{\pi}{2} + \sum_{2 \leq k \leq 2n+2} \sum_{1 \leq j \leq k-1} (-1)^{j+k} \sin(x_k - x_j). \quad (1.16)$$

Les contraintes vérifiées par les points $(x_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ sont les suivantes :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2k} < x_{2k+1} < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} \leq x_{2n+2} = \pi \quad (1.17)$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^{j-1} e^{ix_j} = 0. \quad (1.18)$$

La contrainte (1.18) exprime le fait que la courbe définissant le rotor est fermée. Soit alors E_n l'ensemble des points $x = (x_k)_{0 \leq k \leq 2n+2}$ vérifiant (1.17) et (1.18). Pour $n \geq 2$, nous étudions donc le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{x \in E_n} F(x). \quad (1.19)$$

Nous montrons d'abord que l'on peut perturber un polygone régulier de Reuleaux (obtenu pour la subdivision régulière $x^0 = (\frac{j\pi}{2n+1})_{1 \leq j \leq 2n+1}$) en restant dans E_n . Ensuite on montre que les polygones de Reuleaux sont des points critiques de (1.16) sous la contrainte (1.18) que l'on note (C_1, C_2) :

Propriété 1.1. *Il existe un couple de multiplicateurs de Lagrange $(\lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^2$ tel que :*

$$\nabla F(x^0) + \lambda^0 \nabla C_1(x^0) + \mu^0 \nabla C_2(x^0) = 0.$$

Soit alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ le lagrangien associé au problème d'optimisation. Une condition nécessaire et suffisante pour que le polygone de Reuleaux soit un maximum local de l'aire sous la contrainte (C_1, C_2) est que :

$$\nabla \mathcal{L}_{xx}(x^0, \lambda^0, \mu^0)(d, d) \leq 0, \quad (1.20)$$

pour tout vecteur d orthogonal aux gradients des deux contraintes $\nabla C_1(x^0), \nabla C_2(x^0)$. Nous avons utilisé matlab pour calculer les valeurs propres de la hessienne du Lagrangien sur le sous-espace vectoriel orthogonal au gradient des deux contraintes. Numériquement, le calcul de ces valeurs propres a été possible pour des valeurs de n pas trop grandes et pour ces valeurs de n nous avons vérifié (1.20).

Nous avons ensuite généralisé ce résultat au cas des rotors réguliers O_n^{ln-1} , avec $l > 1$. Nous montrons d'abord que l'on peut perturber un rotor régulier O_n^{ln-1} en conservant le même nombre de switches et les mêmes rayons de courbure (voir Proposition 4.13). Dans le cas des rotors, nous montrons que les rotors réguliers de la forme O_n^{ln-1} sont des points critiques de l'aire (voir théorème 4.5). Pour étudier l'optimalité locale des rotors réguliers, nous mettons en place la matrice hessienne de la fonctionnelle et nous étudions numériquement (avec Matlab) son spectre sur le sous-espace orthogonal au gradient des contraintes. Nous en déduisons que les rotors réguliers sont des points selles pour l'aire et nous vérifions ainsi la conjecture 4.2 pour des valeurs du couple (l, n) telles que le produit ln ne dépasse pas 200 environ (pour avoir un résultat en temps raisonnable).

Dans ce chapitre, nous étudions également certaines propriétés des rotors réguliers. Nous montrons en particulier le lien entre la série de Fourier d'un rotor régulier et celle du n-gone (voir Théorème 4.2). Ce résultat peut constituer une manière de définir les rotors dont la série de Fourier s'obtient en dérivant celle du n-gone.

Enfin, nous étudions dans la troisième partie le lien entre les rotors et les Δ -courbes tournant dans un triangle non équilatéral. Nous redémontrons un théorème de Lyusternik (voir Théorème 4.10, Chapitre 4) :

Théorème de Lyusternik. *Il existe des rotors différents du disque tournant dans un polygone à n côtés si et seulement si les angles du polygone sont commensurables à π .*

Ensuite, nous démontrons que le problème de minimisation de l'aire dans la classe des rotors tournant dans un triangle non équilatéral, et dont les trois angles sont commensurables à π , est équivalent au problème de minimisation de l'aire dans la classe des rotors tournant dans un certain n-gone (voir Théorème 4.9, Chapitre 4).

1.4 Minimisation du volume dans la classe des objets de largeur constante de \mathbb{R}^3

Cette partie fait l'objet d'un article (voir [5]) accepté dans la revue ARMA (Archive for Rational Mechanics and Analysis) en collaboration avec Thomas Lachand-Robert et Edouard Oudet (Université de Savoie). Nous étudions le problème de minimisation du volume dans la classe des corps de largeur constante de \mathbb{R}^3 . Nous définissons un espace fonctionnel qui nous permet d'étudier correctement le problème de minimisation. Nous démontrons des conditions d'optimalité faibles sur un corps de largeur constante et de volume minimal, qui sont vérifiées par le volume de Meissner.

Dans \mathbb{R}^3 , la fonction d'appui h dépend de θ et ϕ (voir [2]) : on note A la paramétrisation de la sphère suivante :

$$A = \left\{ (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \right\}$$

et on note formellement R , σ et T les coefficients de la matrice de la seconde forme fondamentale. Ces coefficients peuvent s'exprimer (sous des hypothèses de régularité) à l'aide de la fonction d'appui (voir [2]) :

$$R = h_{\phi, \phi} + h, \quad \sigma = \frac{1}{\sin(\phi)} h_{\phi \theta} - \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)^2} h_{\theta}, \quad T = \frac{1}{\sin(\phi)^2} h_{\theta \theta} + \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} h_{\phi} + h. \quad (1.21)$$

La surface d'un corps convexe K donnée par (1.3) devient alors (voir [2], [7]) :

$$\mathcal{S}(K) = \int_A \left(h^2 - \frac{1}{2} h_{\phi}^2 - \frac{1}{2 \sin(\phi)^2} h_{\theta}^2 \right) \sin(\phi) d\theta d\phi. \quad (1.22)$$

Trouver l'objet de largeur constante et de surface minimale en dimension 3 revient donc à minimiser (1.22) sous la contrainte de largeur et de convexité. La contrainte de largeur s'exprime à l'aide de la fonction d'appui :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \forall \phi \in [0, 2\pi], \quad h(\theta, \phi) + h(\pi - \theta, \phi + \pi) = 1.$$

La contrainte de convexité pose le plus de problèmes car il s'agit de contraintes non linéaires sur h . On doit donc exprimer que la matrice de la seconde forme fondamentale est positive en tout point de \mathcal{S}^{n-1} , c'est à dire :

$$R \geq 0, \quad RT - \sigma^2 \geq 0.$$

De façon équivalente, la convexité de la surface s'exprime par la positivité de la courbure moyenne et de la courbure de Gauss. En dimension 2, nous avons pu mettre en bijection les corps de largeur constante et un certain espace de fonctions admissibles pour la restriction du rayon de courbure de la frontière sur $[0, \pi]$. Autrement dit nous avons trouvé des conditions nécessaires et suffisantes sur le rayon de courbure pour reconstruire un corps de largeur constante. Ceci nous fournissait une bonne façon d'aborder le problème de minimisation de l'aire. En dimension 3, il est délicat de reconstruire un corps de largeur constante à l'aide de la donnée de la seconde forme fondamentale comme le souligne Harrell (voir [26]). Cet obstacle rend l'étude du problème de minimisation difficile.

Dans le chapitre 5, on s'intéresse donc à ce problème, mais avec une paramétrisation isothermale de la sphère qui permet de s'affranchir des problèmes de définition de (1.21) et (1.22). Les définitions suivantes (voir Chapitre 5) donnent un cadre analytique au problème (1.1) en dimension 3 et permettent de mettre en place un espace fonctionnel de fonctions admissibles sur lequel on

minimise le volume. Autrement dit, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction d'appui en dimension 3 pour reconstruire un corps de largeur constante. Nous montrons en particulier que la fonction d'appui d'un corps de largeur constante en dimension 3 est de classe $C^{1,1}$.

On considère l'ensemble Ω défini par :

$$\Omega = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R} \right\}$$

et σ l'application de Ω dans Ω qui à (u, v) associe le couple $(u + \pi, -v)$.

Définition 1.8. *L'application de Ω dans \mathcal{S}^2 qui à un couple (u, v) associe*

$$\nu = \nu(u, v) = \left(\frac{\cos(u)}{\cosh(v)}, \frac{\sin(u)}{\cosh(v)}, \tanh(v) \right)$$

est une représentation isothermale de la sphère \mathcal{S}^2 et $\nu(\Omega) = \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$.

Notons que $\nu \circ \sigma = -\nu$. Soit λ l'application définie par $\lambda(v) = \cosh(v)$ et soit U l'opérateur défini par :

$$U[h] := D^2h + \lambda^{-2}hId + \lambda^{-1}\nabla\lambda \otimes \nabla h - \lambda^{-1}\nabla^\perp\lambda \otimes \nabla^\perp h \quad (1.23)$$

où pour $w \in \mathbb{R}^2$, $(u, v)^\perp = (-v, u)$.

Définition 1.9. *Soit $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}$ l'ensemble des applications $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ telles que $h \circ \sigma = -h$ et telles que*

$$-\frac{\alpha}{2\lambda^2}Id \leq U[h] \leq \frac{\alpha}{2\lambda^2}Id. \quad (1.24)$$

Nous précisons (1.24) dans [5] (voir Chapitre 5, Définition 5.1). Nous établissons dans [5] une bijection entre les corps de largeur constante en dimension 3 et les éléments de $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}$ (voir Théorème 8, Chapitre 4) par l'utilisation de la surface médiane. La surface médiane d'un corps K de largeur constante α est la surface qui se trouve à distance $\frac{\alpha}{2}$ de la frontière de K .

Les deux inéquations différentielles données par (1.24) expriment la convexité du corps de largeur constante K qui correspond à la fonction h . Par ailleurs, l'aire s'exprime simplement à l'aide de la paramétrisation isothermale. A une constante près cette fonctionnelle s'écrit :

$$S(h) := \int_{\Omega} \lambda^{-2}h^2 - \frac{1}{2}|\nabla h|^2. \quad (1.25)$$

Notons l'analogie entre (1.25) et (1.11). L'aire d'un objet de largeur constante en dimension 3 à symétrie de révolution est un cas particulier de (1.25) lorsque la fonctionnelle (1.25) ne dépend pas de v . En effet, lorsque celle-ci ne dépend pas de l'angle équatorial, il s'agit du problème de minimisation dans la classe des objets à symétrie de révolution. Ainsi, on retrouve (1.11) par (1.25) en supposant que h ne dépend pas de v et en passant de la paramétrisation trigonométrique de la sphère à celle isothermale.

Etant donné K un corps convexe de \mathbb{R}^3 , on notera $|K|$ son volume et $|\partial K|$ l'aire de sa surface. Nous redémontrons également le théorème de Blaschke :

Théorème de Blaschke. *Soit K un corps de largeur constante α en dimension 3. Alors son volume et sa surface vérifient la relation :*

$$|K| = \frac{\alpha}{2}|\partial K| - \frac{\pi\alpha^3}{3}. \quad (1.26)$$

Le théorème de Blaschke montre que la minimisation du volume ou de l'aire dans la classe \mathcal{W}_α^3 sont équivalents. Ainsi, le problème (1.1) est équivalent au problème de minimisation sous contraintes :

$$\min_{h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}} S(h) \tag{1.27}$$

Nous démontrerons dans [5] qu'un minimiseur du problème (1.27) sature la contrainte (1.24) en un certain sens que nous préciserons (voir Chapitre 5, Théorème 5.5).

Pour ce qui est de l'étude du problème (1.1) dans la classe des objets de largeur constante ou des rotors, il est important de noter le point suivant. D'après le théorème de Brunn-Minkowski, l'application qui, à un corps convexe K de \mathbb{R}^n associe $\text{Vol}(K)^{1/n}$ est concave par rapport à l'addition de Minkowski de convexes. Nous pouvons par ailleurs noter que les ensembles \mathcal{C} , \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' et $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}$ sont des ensembles convexes. Or, l'addition de Minkowski de deux convexes K_1 et K_2 correspond à l'addition de leur fonction d'appui h_1 et h_2 . Ainsi, le problème (1.1) revient à minimiser une fonctionnelle concave sous contraintes convexes. On s'attend donc à ce que le minimiseur sature les contraintes. C'est ce que la théorie du contrôle optimal fournit pour les problèmes en dimension 2 à l'aide du principe du maximum de Pontryagin (extrémales bang-bang).

Chapitre 2

Corps de largeur constante dans \mathbb{R}^2

Dans ce chapitre, nous étudions à l'aide de la théorie du contrôle optimal les deux problèmes suivants :

- Minimisation de l'aire dans la classe des objets de largeur constante de \mathbb{R}^2 (redémonstration du théorème de Blaschke-Lebesgue).
- Minimisation de la surface dans la classe des objets de largeur constante de \mathbb{R}^3 à symétrie de révolution.

Le premier problème est un cas particulier de celui étudié dans le chapitre 3 lorsque le nombre de côtés du n-gone vaut 4 et pour lequel il est plus facile de résoudre le problème. Nous redémontrons donc le théorème de Blaschke-Lebesgue par la théorie du contrôle optimal avant d'étudier le cas général de la minimisation de l'aire dans la classe des rotors dans le chapitre 3.

2.1 Preuve du théorème de Blaschke-Lebesgue par le contrôle optimal

2.1.1 Introduction au contrôle optimal pour la résolution de ces problèmes

On considère un problème d'optimisation sous contraintes et on suppose démontré que ce problème admet une solution. On suppose également que ce problème peut se reformuler sous la forme d'un problème de contrôle optimal. Si l'on peut appliquer le principe du maximum de Pontryagin (PMP), ce principe fournit des conditions nécessaires sur la solution de ce problème.

Nous énonçons une version forte du principe du maximum de Pontryagin (voir [44], [50]) que nous utilisons dans ce chapitre et dans le chapitre suivant.

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où le contrôle u est une application mesurable bornée définie sur un intervalle $[0, T]$ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soit M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < T$.

Par ailleurs on définit la fonctionnelle de coût d'un contrôle u sur $[0, T]$ par

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)) \quad (2.2)$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (2.1) associée au contrôle u . On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire soumise à (2.1) reliant M_0 à M_1 et minimisant la fonctionnelle de coût. Le temps final peut être fixé ou non. On définit le Hamiltonien du système H sur $[0, T]$ par

$$H = H(t, x, p, p_0, u) = (p, f(t, x, u)) + p_0 f^0(t, x, u) \quad (2.3)$$

où $p \in \mathbb{R}^n$ désigne la variable duale et $p_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que le problème admet une solution. Des conditions d'existence d'un contrôle optimal sont données dans [1]. Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) met d'abord en place l'existence d'un vecteur adjoint, puis on a la condition de maximisation du Hamiltonien et enfin on a des conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Théorème 2.1. *Si le contrôle u associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, il existe un réel $p_0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ soit non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)). \end{cases} \quad (2.4)$$

De plus, on a la condition de maximisation (principe du maximum)

$$\forall t \in [0, T], \quad H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p_0, v). \quad (2.5)$$

Si le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (2.6)$$

Si M_0 et M_1 sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$ notés $T_{x(0)}M_0$ et $T_{x(T)}M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad p(T) - p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1. \quad (2.7)$$

Un quadruplet (x, p, p_0, u) qui satisfait les conditions du théorème précédent sera appelé **trajectoire extrémale** ou extrémale.

Nous rappelons quelques propriétés standards qui découlent du principe de Pontryagin. Si le système est autonome (i.e. si f et f_0 ne dépendent pas de t), alors H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [0, T], \quad \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p_0, v) = Cste.$$

Si la condition initiale est fixée, alors on n'a pas de condition sur $p(0)$. Au contraire, si on n'a pas de contraintes sur $x(0)$, alors $p(0) = 0$. Si les conditions aux limites sont du type $(x(0), x(T)) \in M$, où M est une variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors les conditions de transversalité s'écrivent :

$$(-p(0), p(T)) \in T_{x(0), x(T)}M$$

où $T_{x(0),x(T)}M$ est l'espace tangent à M au point $(x(0), x(T))$ (voir [1]). Nous utiliserons cette expression des conditions de transversalité dans le chapitre 3.

Si $p_0 = 0$, on dit que l'extrémale est **anormale** et si $p_0 \neq 0$, l'extrémale est dite normale. Lorsque $p_0 = 0$, la fonctionnelle ne joue aucun rôle sur les trajectoires optimales. Nous verrons que cela n'est pas le cas pour les problèmes que nous étudions.

Définition 2.1. *Soit (x, p, u) une trajectoire extrémale du système précédent. On dit que (x, p, u) est singulière s'il n'y a aucune contraintes sur le contrôle u .*

2.1.2 Rappels sur la fonction d'appui

Avant d'étudier les objets de largeur constante, nous rappelons quelques propriétés de la fonction d'appui que nous utiliserons dans la suite. La fonction d'appui est en effet un bon outil pour décrire la frontière d'un convexe de \mathbb{R}^n . Les propriétés suivantes se trouvent dans de nombreux ouvrages traitant de la convexité (voir [7], [9], [39], [47], [56]).

Définition 2.2. *On appellera corps de \mathbb{R}^n tout compact de \mathbb{R}^n non vide.*

Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^n .

Définition 2.3. *La fonction d'appui de K est l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}^n$ par :*

$$h(\nu) = \sup_{x \in K} x \cdot \nu. \quad (2.8)$$

La fonction d'appui est homogène de degré 1. On peut donc se la donner de manière équivalente sur la sphère \mathcal{S}^{n-1} .

Définition 2.4. *On appelle hyperplan d'appui d'un corps K en un point $x \in K$ tout hyperplan H tel que x soit dans $H \cap K$, et tel que K soit contenu dans un des deux demi-espace défini par H .*

Soit $\nu \in \mathcal{S}^{n-1}$ est H_ν un hyperplan d'appui à K dont la normale est ν . Si on place l'origine à l'intérieur de K , alors $h(\nu)$ est positive et représente la distance entre H_ν et K . On peut définir la fonction d'appui d'un corps K non nécessairement convexe par (2.8). Dans ce cas, la fonction d'appui de K coïncide avec celle de l'enveloppe convexe de K .

Propriété 2.1. *La fonction d'appui h d'un corps convexe K vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(\lambda\nu) = \lambda h(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda > 0 \\ h(\nu + \nu') \leq h(\nu) + h(\nu'), \quad \forall \nu, \nu' \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.9)$$

La fonction d'appui d'un corps K est donc convexe et si L est un autre corps convexe, on a immédiatement $K \subset L$ si et seulement si $h_K \leq h_L$. La fonction d'appui de la sphère \mathcal{S}^{n-1} de rayon 1 est donnée sur \mathcal{S}^{n-1} par : $h(\nu) = 1 + a \cdot \nu$, où $\nu \in \mathcal{S}^{n-1}$ et $a \in \mathbb{R}^n$ est le centre de la sphère. Etant donné un corps K et h sa fonction d'appui, on a :

$$h(\nu) = z \cdot \nu$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $K = \{z\}$. La proposition suivante permet de caractériser un corps convexe de manière unique par sa fonction d'appui (voir [7] ou [47] pour la preuve).

Proposition 2.1. *Soit h une application de \mathcal{S}^{n-1} qui vérifie (2.9). Alors il existe un seul et unique corps K de \mathbb{R}^n tel que h soit la fonction d'appui de K .*

Lorsque l'on translate un corps K , cela modifie sa fonction d'appui de la façon suivante :

Propriété 2.2. *Si K est un corps convexe dont la fonction d'appui est h , et si $a \in \mathbb{R}^n$, alors la fonction $\tilde{h} : \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\tilde{h}(\nu) = h(\nu) + a \cdot \nu, \quad \nu \in \mathcal{S}^{n-1}$$

est la fonction d'appui d'un corps convexe \tilde{K} qui se déduit de K par la translation de vecteur a .

Les deux propriétés suivantes établissent le lien entre la convexité de K et la régularité de la fonction d'appui. Nous les utiliserons dans toute la suite.

Propriété 2.3. *Soit h la fonction d'appui d'un corps convexe K . On suppose que l'intersection entre tout hyperplan d'appui à K et K est réduite à un point. Alors, h est de classe C^1 .*

Proposition 2.2. *Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^n et h sa fonction d'appui. Alors, K est strictement convexe si et seulement si h est de classe C^1 .*

□ Preuve. La preuve du sens direct se trouve dans [7] ou [47]. Les auteurs démontrent simultanément la propriété 2.3 et la régularité C^1 de la fonction d'appui. Soit donc K un corps strictement convexe. Pour tout $\nu \in \mathcal{S}^{n-1}$ on appelle H_ν l'hyperplan d'appui de normale ν et $F_\nu = H_\nu \cap K$ qui est un singleton par la stricte convexité de K . On montre ensuite que la dérivée partielle de h_K existe au point ν et vérifie :

$$\frac{\partial h_K}{\partial x}(\nu) = h_{F_\nu}(x)$$

où h_{F_ν} est la fonction d'appui de l'ensemble F_ν . Comme h_K est convexe, h_K admet une dérivée partielle directionnelle dans toute direction x notée $h'_K(\nu, x)$. Plus précisément :

$$h'_K(\nu, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h_K(\nu + \lambda x) - h_K(\nu)}{\lambda}.$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, l'application $x \mapsto h'_K(\nu, x)$ est homogène de degré 1 et sous-additive par rapport à x (propriété de la dérivée directionnelle d'une fonction convexe). Par la propriété 2.1, $h'_K(\nu, \cdot)$ est donc la fonction d'appui d'un corps convexe K' de \mathbb{R}^n . De plus, par la propriété de sous-additivité on a :

$$h'_K(\nu, x) \leq h_K(\nu), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donc, $K' \subset K$. Soit maintenant $y \in K'$. On a donc $(y, \nu) \leq h_K(\nu)$ et de même $(y, -\nu) \leq h'_K(\nu, -\nu)$. De plus, par définition de $h'_K(\nu, -\nu)$, on a aisément $h'_K(\nu, -\nu) = -h_K(\nu)$ et donc $(y, \nu) = h_K(\nu)$. Donc y est dans F_ν et comme ce dernier est réduit à un point, on a :

$$K' = F_\nu.$$

Pour montrer que h_K est de classe C^1 , il suffit de montrer que ses dérivées partielles sont continues, i.e. $h'_K(\nu, x) = -h'_K(\nu, -x)$. Or, par ce qui précède, comme F_ν est réduit à un point $\{z\}$, on a $h_{F_\nu}(x) = (z, x)$ et donc $h'_K(\nu, x) = -h'_K(\nu, -x)$.

Nous démontrons la réciproque. Supposons h de classe C^1 . Montrons que K est strictement convexe.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un segment $[x, y]$ inclu dans ∂K . Soit ν_0 une direction orthogonale à $[x, y]$ et $x_t = tx + (1 - t)y$ le point courant du segment. Par définition de la fonction d'appui, on a :

$$\forall t \in [0, 1], \quad x_t \cdot \nu_0 = h(\nu_0).$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ non orthogonale à ν_0 et posons $\nu = \nu_0 + \varepsilon v$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}$. On a de même

$$\forall t \in [0, 1], \quad x_t \cdot \nu \leq h(\nu).$$

On en déduit donc

$$\varepsilon x_t \cdot v \leq h(\nu) - h(\nu_0).$$

Ainsi, en faisant tendre ε vers 0 par valeurs positives et négatives, on en déduit que :

$$x_t \cdot v \leq \frac{\partial h}{\partial v}(\nu_0) \leq x_t \cdot v.$$

On doit donc avoir pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{\partial h}{\partial v}(\nu_0) = x_t \cdot v$. Ceci est absurde car le produit scalaire $x_t \cdot v$ n'est pas constant pour $t \in [0, 1]$ car v et ν_0 ne sont pas orthogonaux. \square

On rappelle maintenant le lien entre l'addition de Minkowski de deux corps convexes et leurs fonctions d'appui (voir [7] ou [56], [47]). Etant donné deux corps convexes de \mathbb{R}^n , K_1 et K_2 , on définit leur somme de Minkowski par :

$$K_1 + K_2 = \left\{ a + b, \quad a \in K_1, \quad b \in K_2 \right\}$$

qui est un corps convexe de \mathbb{R}^n . Dans la proposition suivante, on note h_K la fonction d'appui d'un corps convexe K .

Proposition 2.3. *Soit K_1 et K_2 deux corps convexes de \mathbb{R}^n et $t \in [0, 1]$. Alors la fonction d'appui de $(1 - t)K_1 + tK_2$ vérifie :*

$$h_{tK_1+(1-t)K_2} = th_{K_1} + (1 - t)h_{K_2}.$$

La remarque suivante (voir dernier paragraphe de l'introduction) éclaire les résultats de la suite concernant les problèmes de minimisation de l'aire ou du volume dans la classe des corps de largeur constante.

Le théorème de Brunn-Minkowski s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.2. *Le volume d'un corps K de \mathbb{R}^n à la puissance $1/n$ est concave par rapport à l'addition de Minkowski des convexes.*

Or, nous verrons par la suite que les contraintes vérifiées par les fonctions d'appui des corps de largeur constante forment un espace convexe. Ainsi, nous serons amenés à minimiser la fonctionnelle de volume sur un ensemble convexe. On s'attend ainsi à ce que le minimiseur sature les contraintes (i.e. un minimiseur se retrouve sur le bord de l'ensemble des contraintes). La théorie du contrôle optimal et le principe du maximum de Pontryagin permet de formaliser cette idée.

Un corps convexe de \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne peut s'écrire comme l'enveloppe convexe de ses droites d'appui. Nous démontrons le théorème suivant que nous utiliserons dans toute la suite.

Théorème 2.3. *Soit K un corps strictement convexe de \mathbb{R}^2 dont la frontière est lipschitzienne. Alors, on peut représenter sa frontière par les équations paramétriques :*

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{cases} \quad (2.10)$$

où p est la fonction d'appui de K .

Ceci s'écrit de façon équivalente en posant $z = x + iy$:

$$z(\theta) = (p(\theta) + ip'(\theta))e^{i\theta}.$$

□ Preuve. On appelle u_θ le vecteur $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. La fonction d'appui de K est définie par :

$$p(\theta) = \max_{x \in K} x \cdot u_\theta$$

et est de classe C^1 par la stricte convexité. Comme K est compact, ce maximum est atteint par un point $(x(\theta), y(\theta))$ de la frontière de K qui se trouve sur la droite d'appui à K d'équation : $X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = p(\theta)$. On a donc :

$$x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta) = p(\theta).$$

Comme la frontière est lipschitzienne, les fonctions x' et y' existent presque partout (théorème de Rademacher), et on a au premier ordre :

$$\left(x(\theta) + x'(\theta)d\theta \right) \left(\cos(\theta) - \sin(\theta)d\theta \right) + \left(y(\theta) + y'(\theta)d\theta \right) \left(\sin(\theta) + \cos(\theta)d\theta \right) = p(\theta) + p'(\theta)d\theta.$$

Or par définition, la droite d'appui a pour vecteur normal \vec{u}_θ , donc

$$(x'(\theta), y'(\theta)) \cdot \vec{u}_\theta = 0.$$

Ainsi, le couple $(x(\theta), y(\theta))$ vérifie l'équation :

$$-x(\theta) \sin(\theta) + y(\theta) \cos(\theta) = p'(\theta).$$

Nous trouvons donc que $(x(\theta), y(\theta))$ est donné par (2.10). □

2.1.3 Propriétés des corps de largeur constante

Les objets de largeur ont été largement étudiés en dimension 2 ou 3. Les principales propriétés géométriques de ces objets sont abordés dans [6], [9], [56], [39], [36]. Nous rappelons certaines d'entre elles.

Définition 2.5. *Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^n dont la fonction d'appui est h . La largeur de K dans la direction $\nu \in \mathcal{S}^{n-1}$ est par définition la quantité*

$$w(\nu) = h(\nu) + h(-\nu).$$

Définition 2.6. *Un objet de largeur constante α est un corps convexe qui possède la même largeur dans toutes les directions :*

$$w(\nu) = h(\nu) + h(-\nu) = \alpha, \quad \forall \nu \in \mathcal{S}^{n-1}.$$

Les objets de largeur constante en dimension 2 sont appelés parfois orbiformes et en dimension 3, ils sont appelés sphéroformes.

Soit K un corps de largeur constante en dimension 2 et p sa fonction d'appui définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique. La largeur de K dans une direction θ s'écrit, $w(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi)$. Ainsi, un corps K est de largeur constante 1 ssi

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Un objet de largeur constante dans \mathbb{R}^n vérifie les deux propriétés suivantes (voir [30], [39], [56] et [36] pour la preuve).

Propriété 2.4. *Un corps de largeur constante est strictement convexe.*

□ Preuve. Soit K un corps de largeur constante. On note ∂K sa frontière. Supposons qu'il existe un segment $[x, y]$ inclu dans ∂K , avec $x \neq y$. Soit $x_t = tx + (1-t)y$ un point courant du segment $[x, y]$, H un hyperplan d'appui à K au point x_t et ν le vecteur normal à l'hyperplan H . L'hyperplan H contient le segment $[x, y]$, donc :

$$h(\nu) = x_t \cdot \nu, \quad \forall \nu \in \mathcal{S}^{n-1}.$$

D'autre part, il existe $z \in \partial K$ tel que $h(-\nu) = -z \cdot \nu$ par définition de la fonction d'appui. Comme K est de largeur constante :

$$\alpha = h(\nu) + h(-\nu) = (x_t - z) \cdot \nu \leq |x_t - z|$$

où pour $v \in \mathbb{R}^n$, on note $|v|$ la norme euclidienne de v . Or, on a $|x_t - z| \leq \alpha$ car sinon, la largeur de K dans la direction ν dépasserait strictement α . Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre donc que

$$x_t - z = \alpha \nu, \quad \forall t \in [0, 1]$$

ce qui est absurde car x_t n'est pas constant. □

Propriété 2.5. *Soit K un corps de largeur constante 1. Alors son diamètre vaut 1. De plus, étant donné H, H' deux hyperplans d'appui à K parallèles et x, x' les points de contacts entre K et H et K et H' , alors le segment $x' - x$ est perpendiculaire à H et H' .*

□ Preuve. On reprend la démonstration de la propriété précédente. Soit $x \in \partial K$ et H un hyperplan d'appui à K en x de normale ν . Par définition, il existe $x' \in \partial K$ tel que

$$h(-\nu) = -x' \cdot \nu.$$

Par ce qui précède, on a $x - x' = \alpha \nu$. Donc, $x - x'$ est orthogonal à l'hyperplan H . Montrons que le diamètre de K vaut 1. Soit F_x l'ensemble défini par :

$$F_x = \{x' \in K, |x - x'| = \max_{y \in K} |x - y|\}.$$

L'ensemble F_x n'est pas vide par compacité, et par la démonstration précédente, on a :

$$\forall x' \in F_x, |x - x'| \leq \alpha$$

et cette valeur est atteinte. D'où le résultat. □

Ces deux propriétés sont très importantes. Nous les utiliserons dans la partie suivante pour fixer des conditions initiales et finales sur la fonction d'appui. Le résultat suivant précise la régularité de la fonction d'appui d'un corps de largeur constante K . Ce résultat est démontré par Howard (voir [30]) ou dans le chapitre 5 (théorème 5.3). Notre démonstration est différente de celle de Howard qui utilise la notion de "freely sliding bodies" (voir [30]).

Théorème 2.4. *La fonction d'appui d'un corps de largeur constante est de classe $C^{1,1}$.*

□ Preuve en **dimension 2**. Nous démontrons que la dérivée de la fonction d'appui d'un corps de largeur constante en dimension 2 est lipschitzienne. Cette preuve (plus simple en dimension 2) met en lumière celle effectuée en dimension 3 dans le chapitre 5. Soit K un corps de largeur constante et p sa fonction d'appui. On sait que p est de classe C^1 car K est strictement convexe. Par définition de la fonction d'appui, on a :

$$\forall \theta' \in [0, 2\pi], \quad (x(\theta'), y(\theta')) \cdot u_\theta \leq p(\theta).$$

Donc, par (2.10) on a :

$$p'(\theta') \sin(\theta - \theta') \leq p(\theta) - p(\theta') \cos(\theta - \theta').$$

Donc, en intervertissant θ et θ' , on en déduit que :

$$p'(\theta) \sin(\theta' - \theta) \leq p(\theta') - p(\theta) \cos(\theta' - \theta).$$

Il vient alors :

$$(p'(\theta') - p'(\theta)) \sin(\theta - \theta') \leq (p(\theta) + p(\theta')) (1 - \cos(\theta - \theta')).$$

On utilise maintenant le fait que K est de largeur constante dans la dernière inégalité en changeant θ en $\theta + \pi$, θ' en $\theta' + \pi$:

$$(-p'(\theta') + p'(\theta)) \sin(\theta - \theta') \leq (2 - p(\theta) - p(\theta')) (1 - \cos(\theta - \theta')).$$

La fonction d'appui est positive car l'origine est à l'intérieur de K et elle est minorée par 1. Grâce aux deux inégalités précédentes, il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que :

$$|(p'(\theta') - p'(\theta)) \sin(\theta - \theta')| \leq C(1 - \cos(\theta - \theta')).$$

On en déduit l'inégalité :

$$\forall (\theta, \theta') \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad |p'(\theta') - p'(\theta)| \leq C \left| \tan \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|.$$

Pour conclure, nous distinguons deux cas. Supposons d'abord que $|\theta - \theta'| \leq \frac{\pi}{2}$. On en déduit par l'inégalité précédente que :

$$|p'(\theta') - p'(\theta)| \leq C\sqrt{2} \frac{|\theta - \theta'|}{2}.$$

Et si $|\theta - \theta'| \geq \frac{\pi}{2}$, alors on a simplement

$$|p'(\theta') - p'(\theta)| \leq 2 \|p'\|_\infty \frac{2}{\pi} |\theta - \theta'|$$

car p est de classe C^1 . Donc p' est lipschitzienne. □

Par un théorème de Rademacher, la fonction d'appui d'un corps de largeur constante est dérivable deux fois presque partout. Si K est un corps de largeur constante dans \mathbb{R}^2 de fonction d'appui p , nous pourrions supposer désormais que le rayon de courbure $f = p + p''$ existe presque partout et est borné.

On peut caractériser un objet de largeur constante dans \mathbb{R}^2 à l'aide de sa fonction d'appui :

Théorème 2.5. *Un objet de largeur constante 1 dans \mathbb{R}^2 est la donnée d'une fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$, 2π -périodique vérifiant :*

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

et l'inégalité

$$p + p'' \geq 0. \quad (2.12)$$

□ Preuve. Un corps de largeur constante étant strictement convexe, sa fonction d'appui est de classe C^1 par la propriété (2.3). Le théorème 2.4 montre que p est de classe $C^{1,1}$. Ainsi, la fonction d'appui p d'un corps K de largeur constante 1 est de classe $C^{1,1}$ et 2π -périodique. L'égalité (2.11) exprime la largeur constante et l'inégalité (2.12) exprime la convexité du corps K par la positivité du rayon de courbure de sa frontière.

Réciproquement, supposons que la fonction d'appui d'un corps K vérifie les hypothèses du théorème 2.5. Montrons que K est de largeur constante. Soit γ la courbe paramétrée par $(x(\theta), y(\theta))$ où :

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{cases}$$

La courbe γ est fermée par 2π -périodicité. Comme p est de classe $C^{1,1}$, le vecteur tangent \vec{t} à la courbe est donné par

$$\vec{t} = (p(\theta) + p''(\theta))\vec{v}_\theta$$

où $\vec{v}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Et donc, comme $p + p'' \geq 0$, la courbe est convexe. Enfin la relation (2.11) assure que la largeur de K est constante et indépendante de la direction. □

La fonction d'appui étant 2π -périodique, on peut s'intéresser à son développement en série de Fourier. Nous détaillerons ce point au cours du chapitre 3 dans le cas général des rotors, et dans l'appendice dans le cas particulier des polygones de Reuleaux pour lesquels la série de Fourier est lacunaire.

Proposition 2.4. *Soit K un corps de \mathbb{R}^2 strictement convexe et p sa fonction d'appui. Alors, son aire est donnée par :*

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 - p'^2 \quad (2.13)$$

□ Preuve. A l'aide de la formule de Stokes, l'aire du corps K , $\mathcal{A}(K)$ est donnée par :

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} xdy - ydx.$$

En utilisant (2.10), on trouve (2.13). □

On notera indifféremment $\mathcal{A}(K)$ ou $\mathcal{A}(p)$ l'aire d'un corps K strictement convexe dont la fonction d'appui est p . Remarquons que dans le cas où p est la fonction d'appui d'un corps strictement convexe, $p + p''$ est une mesure de Radon positive et on peut écrire l'aire de K sous la forme :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p''). \quad (2.14)$$

Pour un corps de largeur constante et dans le cas des rotors (voir Chapitre 3), la fonction d'appui est de classe $C^{1,1}$. Nous utiliserons (2.14) pour exprimer l'aire.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des applications p données par le théorème 2.5. Nous nous intéressons donc au problème suivant :

$$\min_{p \in \mathcal{C}} \mathcal{A}(p). \quad (2.15)$$

Nous verrons que pour un élément $p \in \mathcal{C}$, la contrainte de convexité associée à la contrainte de largeur constante s'exprime sous la forme $0 \leq f = p + p'' \leq 1$. On s'attend d'après le théorème de Brunn-Minkowski à ce que le minimiseur sature cette contrainte, autrement dit qu'il vérifie $f \in \{0, 1\}$, p.p. $x \in [0, 2\pi]$. Nous retrouverons ce résultat précisément par le principe de Pontryagin. Pour le cas des rotors, nous verrons que la saturation des contraintes est similaire (chapitre 3).

Avant de reformuler le théorème 2.5, montrons l'existence par compacité d'un minimiseur au problème (2.15).

Proposition 2.5. *Il existe un minimiseur de l'aire dans la classe des objets de largeur constante.*

□ Preuve. Nous allons démontrer ce résultat en utilisant la convergence au sens de Hausdorff d'une suite de compacts convexes de \mathbb{R}^2 , mais on peut également utiliser la théorie des opérateurs compacts.

Soit K_i une suite de corps de largeur constante et p_i leurs fonctions d'appui. On suppose que $\mathcal{A}(p_i)$ converge vers $\alpha := \inf_{p \in \mathcal{C}} \mathcal{A}(p)$. On peut supposer que les corps K_i sont uniformément bornés. Donc il existe une sous-suite (appelée K_i) qui converge au sens la métrique de Hausdorff (voir [47], [56]) vers un corps convexe K non vide. Soit p la fonction d'appui de K . Par continuité de l'aire sur l'ensemble des domaines convexes (voir [51]), on a $\alpha = \mathcal{A}(p)$. Par ailleurs, la distance de Hausdorff entre deux convexes A et B de \mathbb{R}^n de fonctions d'appui p_A et p_B peut s'écrire (voir [7]) :

$$\delta(A, B) = \sup_{\nu \in \mathcal{S}^{n-1}} |p_A(\nu) - p_B(\nu)|.$$

Ainsi, la fonction d'appui de K vérifie (2.11) en passant à la limite ponctuellement. □

La proposition s'adapte sans problèmes aux rotors en général. Rappelons le théorème de Blaschke-Lebesgue :

Théorème 2.6. *(Blaschke-Lebesgue) Dans la classe des objets de largeur constante en dimension 2, celui d'aire minimale est le triangle de Reuleaux.*

L'aire d'un triangle de Reuleaux de largeur α vaut

$$\mathcal{A}(T_{reul}) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \alpha^2.$$

La différence d'aire entre un triangle de Reuleaux de largeur α et le disque de rayon $\frac{\alpha}{2}$ vaut approximativement 10%.

Ce théorème a été démontré géométriquement par Blaschke et Lebesgue (voir [6], [37]). La première preuve analytique est due à Fujiwara (voir [16], [18]). On trouve de nombreuses preuves par la suite, notamment par Weissbach (voir [55]). Ces preuves ont l'inconvénient que les auteurs avaient une connaissance a priori du minimiseur, ce qui n'est pas forcément le cas en dimension 3, ou pour des problèmes similaires. La première utilisant le calcul des variations sous contraintes est due à Harrell en 2002 (voir [26]). Ghandehari (voir [19]) a également abordé le problème par la théorie du contrôle

optimal ainsi que Malagoli dans sa thèse de doctorat. Mais dans la preuve, ils supposent que le maximum de la solution entre deux switches consécutifs est indépendant des switches. La solution du problème vérifie cette propriété, mais on ne peut le supposer à priori. La formulation de (2.15) sous la forme d'un problème de contrôle optimal est proche de la formulation par Harrell.

Dans l'étude de la minimisation de l'aire des corps de largeur constante, on sait que le problème admet une solution (voir proposition 2.5). Un choix naturel pour le contrôle est de prendre le rayon de courbure $f = p + p''$ d'un rotor où p est la fonction d'appui du rotor. En effet, tant que le rayon de courbure f satisfait l'inégalité $f \geq 0$, on peut reconstruire un corps convexe. En trois dimensions, la situation est plus délicate et nous n'envisagerons pas ce cas là.

Le PMP fonctionne bien avec des contraintes sur le contrôle u du type $u \in \Omega$ où Ω est un convexe de \mathbb{R}^p , $p \geq 1$. Les trajectoires extrémales et minimisantes sont "bang-gang" : le contrôle sature les inégalités et prend les valeurs extrémales de l'ensemble Ω . Etant donné les contraintes sur la fonction d'appui du type $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1$, cela fournit des contraintes sur la fonction d'état. Le PMP s'applique également avec des contraintes sur la fonction d'état, mais son application est plus délicate. Ainsi, pour éviter les contraintes sur la fonction d'état, nous transformons le problème sur $[0, \pi]$ pour les objets de largeur constante et sur $[0, \frac{4\pi}{n}]$ pour les rotors (voir Chapitre 3) en ajoutant des conditions initiales et finales adéquates qui permettent ensuite de reconstruire l'objet sur $[0, 2\pi]$. Nous évitons ainsi d'utiliser des contraintes sur la fonction d'état.

2.1.4 Reformulation du problème de minimisation

On reformule le problème de minimisation sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour éviter la contrainte (2.11).

Proposition 2.6. *Soit p une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe $C^{1,1}$ et 2π -périodique. Alors p est la fonction d'appui d'un objet de largeur constante 1 si et seulement si sa restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est de classe $C^{1,1}$ et vérifie :*

$$\begin{cases} 0 \leq p + p'' \leq 1 \\ p(0) = p(\pi) = \frac{1}{2}, \quad p'(0) = p'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

□ Preuve. Si p est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante K , alors $p + p'' \geq 0$ et par (2.11), on en déduit que $p(\theta) + p''(\theta) + p(\theta + \pi) + p''(\theta + \pi) = 1$. D'où $p + p'' \leq 1$. On choisit comme origine le milieu d'un diamètre de K par la propriété 2.5. On prend l'axe des abscisses confondu avec ce diamètre, et on prend l'axe des ordonnées perpendiculaire au diamètre. On aura alors dans ce repère : $x(0) = \frac{1}{2} = -x(\pi)$ et $y(0) = y(\pi) = 0$. Or, par (2.10), on a $x(0) = p(0)$, $x(\pi) = -p(\pi)$ et $y(0) = p'(0)$, $y(\pi) = -p'(\pi)$. Nous déduisons donc que

$$p(0) = p(\pi) = \frac{1}{2}, \quad p'(0) = p'(\pi) = 0.$$

Réciproquement, soit \tilde{p} une fonction définie sur $[0, \pi]$ et qui vérifie (2.16). Posons

$$\begin{cases} p(\theta) = \tilde{p}(\theta), & \theta \in [0, \pi] \\ p(\theta) = 1 - \tilde{p}(\theta - \pi), & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

et on prolonge p par 2π -périodicité. Montrons que p est de classe C^1 sur \mathbb{R} . On a au point π :

$$p(\pi^-) = \tilde{p}(\pi) = \frac{1}{2}, \quad p(\pi^+) = 1 - \tilde{p}(0) = \frac{1}{2}$$

et

$$p'(\pi^-) = \tilde{p}'(\pi) = 0, \quad p'(\pi^+) = -\tilde{p}'(0) = 0$$

et donc p est de classe C^1 au point π . On montre de la même manière que $p(2\pi) = p(0)$ et $p'(2\pi) = p'(0)$. Ainsi p est de classe C^1 sur \mathbb{R} et vérifie (2.11) par construction. Par ailleurs, \tilde{p} étant de classe $C^{1,1}$ sur $[0, \pi]$, il en est de même de p sur $[0, 2\pi]$. Puisque l'on a $0 \leq \tilde{p} + \tilde{p}'' \leq 1$, on en déduit que p vérifie : $p + p'' \geq 0$ et donc la fonction p ainsi définie est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante. \square

Soit p la fonction d'appui d'un objet de largeur constante 1 et f le rayon de courbure de sa frontière. La fonctionnelle devient alors :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} fp = \frac{1}{2} \int_0^\pi fp + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\theta + \pi)p(\theta + \pi)d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi fp + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1-p)(1-f).$$

Donc par (2.16), la fonctionnelle d'aire s'écrit sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la manière suivante :

$$\mathcal{A}(p) = \int_0^\pi p(f-1) + \frac{\pi}{2} \tag{2.17}$$

Ainsi, en posant : $x_1 = 2(p - \frac{1}{2})$, $x_2 = \dot{x}_1$, $x = (x_1, x_2)$, $u = 2(f - \frac{1}{2})$, et $J(x, u) = \frac{1}{4} \int_0^\pi x_1 u$, on obtient :

$$J(x, u) = \mathcal{A}(p) - \frac{\pi}{4}.$$

Par ailleurs, (2.16) devient

$$\begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ x_1(0) = x_1(\pi) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(\pi) = 0. \end{cases}$$

On effectue ce changement de variable pour se ramener à un contrôle prenant ses valeurs entre -1 et 1 . Le problème de minimisation (2.15) est donc équivalent au problème de contrôle suivant :

$$\min J(x, u) =: \int_0^\pi x_1 u \tag{2.18}$$

où x et u sont liées par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \tag{2.19}$$

avec comme conditions initiales et finales

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(\pi) = 0, \quad x_2(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

et le contrôle vérifie

$$|u| \leq 1. \tag{2.21}$$

L'ensemble des trajectoires vérifiant (2.19), (2.20), (2.21) n'est pas vide puisque la trajectoire nulle correspondant à $x_1 = 0$ satisfait ces contraintes. Cette trajectoire représente le disque unité car si $x_1 = 0$, alors $p = \frac{1}{2}$. Ainsi elle n'est pas minimale car on sait que le disque maximise l'aire dans la classe des corps de largeur constante (voir proposition 3.7).

Nous savons qu'il existe une solution à ce problème de minimisation. Par application du principe du maximum de Pontryagin, nous allons obtenir des conditions nécessaires sur cette solution.

2.1.5 Résolution du problème de contrôle

Théorème 2.7. *Soit (x, u) un minimiseur de (2.18) où le couple (x, u) vérifie (2.19), (2.20), (2.21). Alors, il existe $0 < \alpha < \pi$ et il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que le contrôle optimal u satisfait :*

$$\begin{cases} u_R = +\varepsilon & [0, \alpha] \\ u_R = -\varepsilon & [\alpha, \alpha + \frac{\pi}{3}] \\ u_R = +\varepsilon & [\alpha + \frac{\pi}{3}, \alpha + \frac{2\pi}{3}] \\ u_R = -\varepsilon & [\alpha + \frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases} \quad (2.22)$$

Remarque 2.1. *Le paramètre α provient du fait que l'on peut représenter les corps de largeur constante en fonction de leur rayon de courbure à une translation près.*

Dans le cas où $\alpha = 0$ et $\varepsilon = +1$, si on pose $f_R = \frac{1}{2}u_R + \frac{1}{2}$, et si on prolonge f_R à l'intervalle $[0, 2\pi]$ en posant :

$$\begin{cases} f_R(t) = f_R(t), & t \in [0, \pi] \\ f_R(t) = 1 - f_R(t), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

alors f_R représente le rayon de courbure de la frontière du triangle de Reuleaux :

$$f_R = 1_{[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]} + 1_{[\pi, \frac{4\pi}{3}]} + 1_{[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]}$$

Preuve. On introduit le Hamiltonien H associé au système.

$$H(x, p, p_0, u) := p_1 x_2 + p_2(-x_1 + u) + p_0 x_1 u \quad (2.23)$$

où p désigne la variable duale.

D'après le PMP, il existe une application $x : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ absolument continue, il existe une application $p : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ absolument continue, il existe une constante $p_0 \leq 0$, et il existe un contrôle optimal noté $u(t)$ tels que :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (2.24)$$

ce qui donne le système (2.19) pour x et le système

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 - p_0 u \\ \dot{p}_2 = -p_1 \end{cases} \quad (2.25)$$

pour la variable duale p . De plus, le couple (p, p_0) n'est pas trivial. Les fonctions $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto p_2(t)$ sont de classe $C^{1,1}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ car on a $\ddot{x}_1 + x_1 = u$ et $\ddot{p}_2 + p_2 = p_0 u$ et $u(t)$ est bornée sur l'intervalle $[0, \pi]$.

De plus, x vérifie les conditions finales et initiales (2.20) et il n'y a pas de conditions de transversalité. Le principe du maximum s'écrit :

$$H(x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{|v| \leq 1} H(x(t), p(t), p_0, v) \quad (2.26)$$

Enfin, le Hamiltonien du système est conservé le long des trajectoires extrémales car le système et la fonctionnelle sont autonomes.

La fonction $p_2 + p_0 x_1$ est appelée fonction de commutation : ses zéros fournissent les switching point. On montre maintenant que les trajectoires extrémales du système ne sont pas anormales.

Lemme 2.1. *La constante p_0 vérifie : $p_0 \neq 0$.*

□ Preuve du lemme. Supposons que $p_0 = 0$. Alors, sur l'intervalle $[0, \pi]$, p_2 est de la forme

$$p_2(t) = a \cos(t) + b \sin(t).$$

Par le principe du maximum appliqué pour $v = 0$, on déduit que pour presque tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$p_2(t)u(t) \geq 0$$

et donc, $\int_0^\pi p_2(t)u(t)dt \geq 0$. Par ailleurs, on a :

$$\int_0^\pi p_2(t)u(t)dt = \int_0^\pi p_2(t)(x_1(t) + \ddot{x}_1(t))dt.$$

D'où en faisant une intégration par partie (car $p_2(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$), il ne reste que les termes de bord. On déduit :

$$\int_0^\pi p_2(t)u(t)dt = -a(x_2(0) + x_2(\pi)) + b(x_1(\pi) + x_1(0)).$$

En tenant compte des conditions initiales et finales sur x , on en déduit que

$$\int_0^\pi p_2(t)u(t)dt = 0$$

et donc la fonction p_2u est nulle presque partout. Enfin, par le PMP, u est donné par $u = \text{sign}(p_2)$ car $p_0 = 0$. On en déduit que $p_2 = 0$. Donc, $p_1 = 0$ et ceci contredit le principe de Pontryagin car la paire (p, p_0) n'est pas triviale. □

Donc, on peut supposer que $p_0 = -1$ quitte à normaliser. La fonction de commutation s'écrit alors $p_2 - x_1$.

Lemme 2.2. *Les trajectoires extrémales du système ne sont pas singulières.*

□ Comme $p_0 = -1$, les trajectoires singulières sont obtenus lorsque $p_2 - x_1 = 0$. La fonction $y =: p_2 + x_1$ vérifie sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Donc, il existe deux constantes α, β telles que pour tout $t \in [0, \pi]$, on ait :

$$p_2(t) = -x_1(t) + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t).$$

Donc, la fonction x_1 s'écrit sur $[0, \pi]$:

$$x_1(t) = \frac{\alpha}{2} \cos(t) + \frac{\beta}{2} \sin(t).$$

Nous obtenons donc $u = 0$ sur $[0, \pi]$. Cette extrémale représente donc le cercle (en revenant au paramétrage initial en terme de fonction d'appui). Or cette trajectoire est maximale car le disque maximise l'aire dans la classe des corps de largeur constante (voir proposition 3.7), donc elle n'est pas minimale. □

Par (2.26), on en déduit que les trajectoires extrémales solutions du problème sont "bang-bang" :

$$\begin{cases} u(t) = +1 & \iff p_2(t) - x_1(t) > 0 \\ u(t) = -1 & \iff p_2(t) - x_1(t) < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

ce qui va définir des switching point dans l'intervalle $[0, \pi]$, cad des points où la fonction $p_2 - x_1$ s'annule et donc où le contrôle passe de 1 à -1 . Ainsi entre deux switching point consécutifs, le contrôle est de signe constant.

Lemme 2.3. *Il y a un nombre fini de switching point dans l'intervalle $[0, \pi]$.*

□ Preuve du lemme. Supposons au contraire qu'il y ait un nombre infini de *switching point* de la fonction $z := p_2 - x_1$ dans l'intervalle $[0, \pi]$. Appelons $(\tau_j)_{j \geq 0}$ une suite de *switching point* qui converge vers un point $\tau \in [0, \pi]$. Comme $\ddot{x}_1 + x_1 = u$ et $\ddot{p}_2 + p_2 = -u$, on a $\ddot{z} + z = -2u$. Ainsi, la fonction de commutation vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + z + 2\text{sign}(z) = 0.$$

Il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2|z| = C \quad (2.28)$$

Si $C = 0$, alors $z = 0$ et donc $p_2 = x_1$. Donc, comme $\ddot{y} + y = 0$, on en déduit que x_1 peut s'écrire sous la forme : $x_1(\theta) = \frac{\alpha}{2} \cos(\theta) + \frac{\beta}{2} \sin(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Par suite $u = 0$, mais on a vu que $u = 0$ n'était pas une solution du problème de contrôle ($u = 0$ sur $[0, \pi]$ correspond au disque unité). Ainsi, la constante C vérifie $C > 0$.

Comme $z(\tau_j) = 0$ et que z est continue, on en déduit que $z(\tau) = 0$. Et $z'(\tau) = 0$ car $z'(\tau)$ est la limite quand j tend vers l'infini de $\frac{z(\tau_j) - z(\tau)}{\tau_j - \tau}$ et ce taux d'accroissement est nul. La fonction $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2|z|$ s'annule donc au point τ . Par (2.28), la constante C est nulle, mais ceci est impossible. Donc, il y a un nombre fini de switching point pour la fonction z dans l'intervalle $[0, \pi]$. □

Soit $(\tau_j)_{0 \leq j \leq r+1}$ les *switching point* de z dans l'intervalle $[0, \pi]$ avec $\tau_0 = 0$ et $\tau_{r+1} = \pi$ et $\tau_j < \tau_{j+1}$.

Remarque 2.2. *On a donc deux intégrales premières pour les trajectoires optimales du système : d'une part le Hamiltonien est constant le long des trajectoires optimales et d'autre part, par (2.28), la quantité :*

$$\Psi = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 + 2|z|$$

est conservée le long des trajectoires optimales. Un calcul montre que les deux intégrales premières sont équivalentes à l'expression d'un switch : pour $1 \leq j \leq r$

$$z(\tau_j) = 0 \iff H(\tau_j^-) = H(\tau_j^+) \iff \Psi(\tau_j^-) = \Psi(\tau_j^+).$$

Par (2.28), on a $|\dot{z}(\tau_j)| = \sqrt{2C}$ pour $1 \leq j \leq r$ et donc $|\dot{z}(\tau_j)|$ est constant indépendant des switches.

Fin de la preuve du théorème 2.7. Dans ce qui suit, on suppose qu'il y a au moins 3 switches dans l'intervalle $[0, \pi]$ et nous prouvons la relation

$$0 < \tau_1 < \tau_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_3) < \tau_3. \quad (2.29)$$

ce qui prouvera qu'un minimiseur est nécessairement un polygone impair de Reuleaux (à translation près car τ_1 est arbitraire). En effet, (2.29) montre que $\tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2$. Et par suite on aura également $\tau_{j+1} - \tau_j = \dots = \tau_2 - \tau_1$ pour $1 \leq j \leq r - 1$.

La preuve de (2.29) résulte de manipulations algébriques sur le système de trois switches

$$\begin{cases} z(\tau_1) = 0 \\ z(\tau_2) = 0 \\ z(\tau_3) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Preuve de (2.29).

Soit $\varepsilon = \pm 1$ la valeur du contrôle sur l'intervalle $[0, \tau_1]$. Nous écrivons x_1 sur les trois premiers intervalles en tenant compte du fait que x_1 est de classe C^1 aux switches.

$$\begin{cases} x_1(t) = \varepsilon + A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t), & t \in [0, \tau_1] \\ x_1(t) = -\varepsilon + A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1), & t \in [\tau_1, \tau_2] \\ x_1(t) = \varepsilon + A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1) - 2\varepsilon \cos(t - \tau_2), & t \in [\tau_2, \tau_3]. \end{cases}$$

Par les conditions initiales, on obtient $A_0 = -\varepsilon$ et $B_0 = 0$. La fonction de commutation s'écrit en fonction de x_1 par élimination de la variable duale :

$$z(t) = -2x_1(t) + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t).$$

Ainsi, en posant :

$$\begin{cases} \alpha - 2A_0 = a \\ \beta - 2B_0 = b \end{cases}$$

on en déduit que (2.30) est équivalent à

$$\begin{cases} a \cos(\tau_1) + b \sin(\tau_1) = 2\varepsilon \\ a \cos(\tau_2) + b \sin(\tau_2) = -2\varepsilon + 4\varepsilon \cos(\tau_1 - \tau_2) \\ a \cos(\tau_3) + b \sin(\tau_3) = 2\varepsilon + 4\varepsilon \cos(\tau_3 - \tau_1) - 4\varepsilon \cos(\tau_3 - \tau_2). \end{cases}$$

Des deux premières équations, en éliminant b et en linéarisant le produit $\sin(\tau_1) \cos(\tau_1 - \tau_2)$ on tire :

$$a \sin(\tau_1 - \tau_2) = -2\varepsilon \sin(\tau_1) + 2\varepsilon \sin(2\tau_1 - \tau_2). \quad (2.31)$$

De la première et dernière équation, en éliminant b et en linéarisant les produits $\sin(\tau_1) \cos(\tau_3 - \tau_1)$, $\sin(\tau_1) \cos(\tau_3 - \tau_2)$ on tire :

$$a \sin(\tau_1 - \tau_3) = 2\varepsilon \sin(\tau_1) + 2\varepsilon \sin(2\tau_1 - \tau_3) - 2\varepsilon \sin(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3) - 2\varepsilon \sin(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3). \quad (2.32)$$

En multipliant (2.31) par $\sin(\tau_1 - \tau_3)$ et en linéarisant les produits de sinus et cosinus, on trouve :

$$a \sin(\tau_1 - \tau_2) \sin(\tau_1 - \tau_3) = -\varepsilon \cos(\tau_3) + \varepsilon \cos(2\tau_1 - \tau_3) + \varepsilon \cos(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3) - \varepsilon \cos(3\tau_1 + \tau_2 - \tau_3).$$

En multipliant (2.32) par $\sin(\tau_1 - \tau_2)$, on trouve de même :

$$\begin{aligned} a \sin(\tau_1 - \tau_2) \sin(\tau_1 - \tau_3) = & \varepsilon \cos(\tau_2) - \varepsilon \cos(2\tau_1 - \tau_2) - \varepsilon \cos(3\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) \\ & + \varepsilon \cos(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) - \varepsilon \cos(\tau_3) + \varepsilon \cos(2\tau_1 - 2\tau_2 + \tau_3) \end{aligned}$$

$$-\varepsilon \cos(2\tau_2 - \tau_3) + \varepsilon \cos(2\tau_1 - \tau_3).$$

Posons pour simplifier $\tau_1 = x$, $\tau_2 = y$ et $\tau_3 = z$. En égalant les deux équations précédentes, on déduit que les trois réels (x, y, z) doivent vérifier : $0 < x < y < z \leq \pi$ et

$$\cos(x + y - z) - \cos(x - y + z) + \cos(y) - \cos(2x - y) + \cos(2x - 2y + z) - \cos(2y - z) = 0.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} \cos(x + y - z) - \cos(x - y + z) = -2 \sin(x) \sin(y - z) \\ \cos(2x - 2y + z) - \cos(2y - z) = -2 \sin(x) \sin(x - 2y + z) \\ \cos(y) - \cos(2x - y) = -2 \sin(x) \sin(y - x). \end{cases}$$

Donc le triplet (x, y, z) vérifie l'équation :

$$\sin(y - z) + \sin(x - 2y + z) + \sin(y - x) = 0.$$

Et on a :

$$\begin{cases} \sin(x - 2y + z) = 2 \sin\left(\frac{x+z}{2} - y\right) \cos\left(\frac{x+z}{2} - y\right) \\ \sin(y - z) + \sin(y - x) = 2 \sin\left(y - \frac{x+z}{2}\right) \cos\left(\frac{x-z}{2}\right). \end{cases}$$

Donc le système (2.30) est équivalent à

$$\sin\left(\frac{x+z}{2} - y\right) \left(\cos\left(\frac{x+z}{2} - y\right) - \cos\left(\frac{x-z}{2}\right) \right).$$

On démontre aisément que cette dernière équation n'a qu'une seule solution (x, y, z) satisfaisant l'inégalité $0 < x < y < z \leq \pi$:

$$\sin\left(\frac{x+z}{2} - y\right) = 0 \iff y = \frac{x+z}{2}.$$

L'autre solution conduit en effet à $x = y$ ou $y = z$ ce qui n'est pas possible. En revenant aux variables initiales $(\tau_j)_{1 \leq j \leq r}$, on a donc montré que si le nombre de switches dépasse 3 dans l'intervalle $[0, \pi]$, alors :

$$\tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1.$$

Par les mêmes calculs, on démontre que $\tau_{j+1} - \tau_j = \tau_2 - \tau_1$ pour $1 \leq j \leq r$. Ainsi, les intervalles où la fonction de commutation est de signe constant ont la même longueur. Autrement dit, les longueurs des intervalles où le rayon de courbure sature la contrainte sont égaux (à part le premier à cause de la translation). La trajectoire extrémale minimisante représente donc un polygone de Reuleaux à $2p + 1$ côtés, $p \geq 1$. On sait que le polygone régulier de Reuleaux d'aire minimale est le triangle de Reuleaux (voir [13], [15], [26]). Nous redémontrerons ce résultat dans le chapitre 2 dans le cadre général des rotors réguliers à l'aide des séries de Fourier (proposition 3.17).

S'il y a seulement deux switches dans l'intervalle $[0, \pi]$, alors, on peut utiliser l'expression de x_1 dans l'intervalle $[\tau_2, \pi]$:

$$x_1(t) = \varepsilon + A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1) - 2\varepsilon \cos(t - \tau_2), \quad t \in [\tau_2, \pi].$$

Comme $x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0$, on en déduit que les points τ_1 et τ_2 vérifient les relations :

$$\begin{cases} 1 - \cos(\tau_1) + \cos(\tau_2) = 0 \\ \sin(\tau_1) = \sin(\tau_2). \end{cases}$$

On obtient dans ce cas $\tau_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\tau_2 = \pi - \tau_1 = \frac{2\pi}{3}$ ce qui définit le triangle de Reuleaux. Ainsi, lorsqu'il y a seulement deux switchs dans l'intervalle $[0, \pi]$, l'extrémale minimisante représente le triangle de Reuleaux.

Enfin, s'il y a seulement un seul switch τ_1 dans l'intervalle $[0, \pi]$, alors de même on a :

$$x_1(t) = -\varepsilon + A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1), \quad t \in [\tau_1, \pi].$$

En utilisant $x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0$, on trouve que τ_1 vérifie $\cos(\tau_1) = \sin(\tau_1) = 0$ ce qui est impossible. Une extrémale a donc au moins deux switchs dans $[0, \pi]$. Ceci termine la preuve du théorème de Blaschke-Lebesgue. \square

2.2 Objets de largeur constante en dimension 3 à symétrie de révolution

Dans cette partie nous étudions le problème de minimisation du volume dans la classe des objets de largeur constante en dimension 3, à symétrie de révolution, par la théorie du contrôle optimal. On appelle $W_\alpha^{2,sym}$ l'ensemble des corps de largeur constante α en dimension 2 et qui possèdent un axe de symétrie.

Définition 2.7. *On appelle \mathcal{K}_{rot}^α l'ensemble des corps convexes de \mathbb{R}^3 obtenus par rotation autour d'un des axes de symétrie d'un élément de $W_\alpha^{2,sym}$.*

L'ensemble \mathcal{K}_{rot}^α est un sous ensemble de W_α^3 par construction. Il contient par exemple la boule et les polygones de Reuleaux impairs tournés autour d'un de leur axes de symétrie.

Nous étudions donc le problème :

$$\min_{K \in \mathcal{K}_{rot}^\alpha} \mathcal{A}(K) \tag{2.33}$$

Autrement dit, on cherche dans cette sous classe de W_α^3 le corps convexe de volume minimal ou d'aire minimale. Ces deux problèmes sont équivalents par le théorème de Blaschke-Lebesgue (voir théorème 5.1 chapitre 5). Nous allons donc étudier le problème (2.33). Le problème de minimisation (2.33) a été abordé de façon géométrique par Campi, Colesanti et Gronchi (voir [8]).

2.2.1 Paramétrisation du problème sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Dans la suite, pour paramétrer un objet de largeur constante $K \in \mathcal{K}_{rot}^\alpha$, on considérera un corps K_0 de largeur constante en dimension 2 et possédant un axe de symétrie et qui engendre K par rotation autour de cet axe. On s'intéresse d'abord à la description des objets de largeur constante en dimension 2 qui possèdent un axe de symétrie.

Proposition 2.7. *Un corps de largeur constante à symétrie de révolution K est la donnée d'une fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^{1,1}$, 2π -périodique et qui vérifie :*

$$\begin{cases} p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1 \\ p(\theta) = p(\pi - \theta) \\ p + p'' \geq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

□ Soit K un corps de largeur constante et à symétrie de révolution dans \mathbb{R}^3 et K_0 le corps correspondant dans \mathbb{R}^2 . Par définition, K_0 possède un axe de symétrie que l'on prend comme axe des ordonnées. Dans la direction perpendiculaire à cet axe, il existe un diamètre de K_0 de largeur 1 car K_0 est de largeur constante. On prend cet axe comme axe des abscisses. Soit p la fonction d'appui de K_0 . On sait que p est de classe $C^{1,1}$ par le théorème 2.4. La convexité impose alors $p + p'' \geq 0$. K_0 étant de largeur constante 1, on doit avoir $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Enfin la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées impose la relation $x(\theta) = -x(\pi - \theta)$ et $y(\theta) = y(\pi - \theta)$ pour tout θ dans \mathbb{R} . Ainsi, on déduit que

$$p(\theta) = p(\pi - \theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si p vérifie (2.34), alors on reconstruit un corps de largeur constante K_0 dont la fonction d'appui est p . De plus, si on appelle $(x(\theta), y(\theta))$ les coordonnées de ∂K_0 données par (2.10), la relation $p(\theta) = p(\pi - \theta)$ entraîne $x(\pi - \theta) = -x(\theta)$ et $y(\pi - \theta) = y(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, la perpendiculaire à la droite d'appui pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui passe par un diamètre de K_0 est un axe de symétrie. □

Etant donné un corps K de largeur constante en dimension 2 et possédant un axe de symétrie Δ , on prendra comme repère orthonormé le suivant : l'axe des ordonnées est l'axe Δ ; l'axe des abscisses est le diamètre de largeur α perpendiculaire à Δ et l'origine est choisie au milieu de ce diamètre. On appellera un tel repère **repère adapté** à K . Ce choix a des conséquences sur les valeurs initiales et finales de la fonction d'appui de K .

Soit \tilde{f} une application définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On appelle f le prolongement de \tilde{f} sur \mathbb{R} obtenu sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par $f(\theta) = \tilde{f}(\pi - \theta)$ et sur $[0, 2\pi]$ par $f(\theta) = 1 - \tilde{f}(\theta - \pi)$ et par 2π périodicité sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} f(\theta) = \tilde{f}(\theta), & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ f(\theta) = \tilde{f}(\pi - \theta), & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ f(\theta) = 1 - \tilde{f}(\theta - \pi), & \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (2.35)$$

On reformule la proposition (2.7) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ à l'aide du rayon de courbure.

Proposition 2.8. *Soit \tilde{f} une application de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans \mathbb{R} et qui vérifie :*

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{f} \leq 1 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{f}(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.36)$$

On appelle f le prolongement de \tilde{f} sur \mathbb{R} défini ci-dessus. Alors, toute fonction p satisfaisant $f = p + p''$ et $p(0) = 1/2$ et $p'(0) = 0$ est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante ayant un axe de symétrie.

□ On appelle f le prolongement de \tilde{f} défini ci-dessus. On a facilement :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta = 4i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{f}(\theta) \sin(\theta) d\theta - 2i$$

et donc $c_1(f) = 0$ et toute solution de $f = p + p''$ est de classe C^1 et 2π -périodique. La fonction f ainsi définie vérifie

$$0 \leq f \leq 1$$

ce qui assure la convexité. Notons que p s'écrit nécessairement :

$$p(\theta) = \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt + \frac{1}{2} \cos(\theta)$$

Montrons que p vérifie (2.34). La fonction f vérifie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Et donc $p'(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(t) dt - 1/2 = 0$. On a par changement de variable :

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(t) dt = 1, \quad \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = 0.$$

Montrons que $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$p(\theta + \pi) = \int_0^{\theta+\pi} f(t) \sin(\theta + \pi - t) dt - \frac{1}{2} \cos(\theta).$$

L'intégrale se réécrit par le changement de variable $t \leftarrow t - \pi$

$$\int_0^{\theta+\pi} f(t) \sin(\theta + \pi - t) dt = \int_{-\pi}^\theta (1 - f(t)) \sin(\theta - t) dt.$$

On découpe en deux cette dernière intégrale :

$$\int_{-\pi}^\theta (1 - f(t)) \sin(\theta - t) dt = \int_{-\pi}^0 (1 - f(t)) \sin(\theta - t) dt + \int_0^\theta (1 - f(t)) \sin(\theta - t) dt.$$

Après simplification, la première intégrale vaut $\cos(\theta)$ et on a :

$$\int_0^\theta (1 - f(t)) \sin(\theta - t) dt = - \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt + 1 - \cos(\theta).$$

Nous obtenons donc :

$$p(\theta + \pi) = - \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt + 1.$$

D'où le résultat.

Montrons que $p(\theta) = p(\pi - \theta), \forall \theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$p(\pi - \theta) = \int_0^{\pi-\theta} f(t) \sin(\theta + t) dt - \frac{1}{2} \cos(\theta).$$

D'où en faisant le changement de variable $t \leftarrow \pi - t$, on obtient :

$$p(\pi - \theta) = \int_\theta^\pi f(t) \sin(t - \theta) dt - \frac{1}{2} \cos(\theta)$$

ou encore :

$$p(\pi - \theta) = \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt + \int_0^\pi f(t) \sin(t - \theta) dt - \frac{1}{2} \cos(\theta).$$

Mais, par ce qui précède, on a :

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t - \theta) dt = \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt \cos(\theta) - \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt \sin(\theta) = \cos(\theta)$$

Donc on a bien $p(\theta) = p(\pi - \theta)$. \square

2.2.2 Expression du problème de minimisation

Dans cette partie, nous exprimons analytiquement le problème (2.33) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en terme de la fonction d'appui. Soit $K \in \mathcal{K}_{rot}^\alpha$ et p la fonction d'appui du corps K_0 correspondant dans \mathbb{R}^2 et f son rayon de courbure. On choisit comme repère le repère adapté à K_0 . On a alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(t) dt = p(0) - p'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}. \quad (2.37)$$

La frontière de K étant représentée par (2.10), on en déduit que :

$$x(0) = p(0), \quad y(0) = p'(0), \quad x(\frac{\pi}{2}) = -p'(\frac{\pi}{2}), \quad y(\frac{\pi}{2}) = p(\frac{\pi}{2}).$$

D'où les valeurs initiales et finales de la fonction d'appui :

$$p(0) = \frac{1}{2}, \quad p'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad p'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad p(\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}.$$

On notera que la valeur finale $p(\frac{\pi}{2})$ est indéterminée dans notre problème. Soit F l'ensemble des applications p de classe $C^{1,1}$ définies sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et qui vérifient :

$$\begin{cases} p(0) = \frac{1}{2}, \quad p'(0) = 0, \quad p'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad p(\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R} \\ f = p + p'' \in L^\infty([0, \frac{\pi}{2}]), \quad 0 \leq f \leq 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

Notons que si f est dans F , alors f vérifie (2.37).

Proposition 2.9. *Le problème (2.33) est équivalent au problème suivant :*

$$\min_{p \in F} J(p) =: \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p^2(\theta) - \frac{1}{2}p'(\theta)^2) \cos(\theta) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (2.39)$$

□ Soit $p \in F$ et $f = p + p''$. On désigne également par f son prolongement à \mathbb{R} défini par (2.35). Soit alors K_0 le corps convexe dont la fonction d'appui est p et Δ son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées dans le repère adapté pour K_0 . On calcule la surface engendrée par la rotation de K_0 autour de l'axe Δ . Soit $x(\theta)$ la distance entre un point courant de la frontière de K_0 et l'axe Δ . La surface de K engendrée par la rotation de K_0 autour de Δ est donnée par :

$$\mathcal{A}(K) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\theta) f(\theta) d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (p(\theta) + p''(\theta))(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta)) d\theta$$

On effectue des changements de variable pour ramener l'intégrale entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 à une intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En faisant successivement les changements de variable $\theta \leftarrow \pi + \theta$ et $\theta \leftarrow \pi - \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\theta)(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta)) d\theta = \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 - f(\theta))(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

Et puis on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 - f(\theta))(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta)) d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - f(\theta))(-p(\theta) \cos(\theta) + p'(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta))d\theta$$

Et cette dernière intégrale se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - f(\theta))(-p(\theta) \cos(\theta) + p'(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta))d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta))d\theta \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-p(\theta) \cos(\theta) + p'(\theta) \sin(\theta))d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - f(\theta)) \cos(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -p(\theta) \cos(\theta) + p'(\theta) \sin(\theta)d\theta = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos(\theta)d\theta + p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - f(\theta)) \cos(\theta)d\theta = 1 - p\left(\frac{\pi}{2}\right) + p'(0).$$

En tenant compte de $p'(0) = 0$, on obtient finalement :

$$\mathcal{A}(K) = 2\pi \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta))d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos(\theta)d\theta + 1 \right). \quad (2.40)$$

On effectue maintenant des intégrations par parties pour se ramener à une fonctionnelle quadratiques en (p, p') . On a par intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)p''(\theta) \cos(\theta)d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} p'^2(\theta) \cos(\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)p'(\theta) \sin(\theta)d\theta$$

et de même :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p'(\theta)p''(\theta) \sin(\theta)d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p'(\theta)^2 \cos(\theta)d\theta.$$

D'où l'on déduit :

$$\mathcal{A}(K) = 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(p^2(\theta) - \frac{1}{2}p'(\theta)^2) \cos(\theta)d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos(\theta)d\theta + 1 \right).$$

Ainsi, $\mathcal{A}(K) = 4\pi J(p) + 2\pi$ et donc les problèmes (2.33) et (2.39) sont équivalents. \square

Par commodité, nous allons reexprimer la fonctionnelle $J(p)$ en posant :

$$\begin{cases} q =: p - \frac{1}{2} \\ u =: q + q'' = p + p'' - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.41)$$

On a par (2.39) :

$$J(p) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (q^2(\theta) - \frac{1}{2}q'^2(\theta) \cos(\theta))d\theta + \pi.$$

Par ailleurs, par les mêmes intégrations par parties effectuées plus haut avec q au lieu de p , on trouve :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (q^2(\theta) - \frac{1}{2}q'^2(\theta) \cos(\theta)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta)(q(\theta) \cos(\theta) - q'(\theta) \sin(\theta))d\theta$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A}(K) = \pi + 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta)(q(\theta) \cos(\theta) - q'(\theta) \sin(\theta))d\theta = \pi + 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (q^2(\theta) - \frac{1}{2}q'^2(\theta)) \cos(\theta)d\theta. \quad (2.42)$$

Soit G l'ensemble des applications q définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, de classe C^1 et qui vérifient :

$$\begin{cases} q(0) = 0, & q'(0) = 0, & q'(\frac{\pi}{2}) = 0, & q(\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R} \\ u = q + q'' \in L^2([0, \frac{\pi}{2}]), & -\frac{1}{2} \leq u \leq +\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Nous avons donc démontré la proposition :

Proposition 2.10. *Les problèmes (2.33) et (2.39) sont équivalents au problème suivant :*

$$\min_{q \in G} J_1(q) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta)(q(\theta) \cos(\theta) - q'(\theta) \sin(\theta))d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (q^2(\theta) - \frac{1}{2}q'^2(\theta)) \cos(\theta)d\theta. \quad (2.44)$$

Nous utiliserons cette formulation pour étudier (2.33) par la théorie du contrôle optimal. Pour la boule et le triangle de Reuleaux tourné, (2.42) fournit :

- Pour la boule B de rayon $\frac{1}{2}$, $q = u = 0$ et $\mathcal{A}(B) = \pi \approx 3,14$
- pour T_{rot} , le triangle de Reuleaux tourné, on trouve $\mathcal{A}(T_{rot}) = 2\pi - \frac{\pi^2}{3} \approx 2,99$.

Il y a une différence de surface de 4,7% entre la surface de la boule et celle du triangle de Reuleaux tourné et de 6,6% entre la surface de la boule et celle du volume de Meissner (qui n'est pas à symétrie de révolution).

Notons l'analogie entre (2.44) et (5.50). La formule (5.50) représente la surface d'un corps de largeur constante dans \mathbb{R}^3 . Lorsque celui-ci est à symétrie de révolution, la fonction $h \in C^{1,1}(\Omega)$ ne dépend plus de u et on retrouve (2.44) en passant de la paramétrisation isothermale de la sphère à la paramétrisation usuelle de la sphère.

2.2.3 Optimalité locale du triangle de Reuleaux tourné

Dans cette partie, nous démontrons que le triangle de Reuleaux tourné autour de l'un de ses axes de symétrie est un minimum local du volume dans la classe des corps de largeur constante de \mathbb{R}^3 à symétrie de révolution. Nous effectuons pour cela une petite perturbation du rayon de courbure du triangle de Reuleaux et nous en déduisons que la variation d'aire est positive. Soit p_R la fonction d'appui du triangle de Reuleaux et f_R son rayon de courbure. Les fonctions p_R et f_R sont données sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f_R = p_R + p_R'' = 0, & p_R = \frac{1}{2} \cos(\theta), & \theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ f_R = p_R + p_R'' = 1, & p_R = 1 + \frac{1}{2} \cos(\theta) - \cos(\theta - \frac{\pi}{3}), & \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (2.45)$$

et p_R vérifie $p_R(\theta) = p_R(\pi - \theta)$, $p_R(\theta) + p_R(\theta + \pi) = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Nous étudions donc comment la fonctionnelle définie pour $p \in F$ par :

$$J(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p(\theta) + p''(\theta))(p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos(\theta)d\theta$$

varie au voisinage de p_R . Dans la proposition suivante nous décrivons les perturbations admissibles de p_R que nous considérons dans la suite.

Proposition 2.11. *On considère une fonction q de classe $C^{1,1}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $q(0) = 0$ et $q'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et on suppose que la fonction $g = q + q''$ vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} g \geq 0, & \text{sur } [0, \frac{\pi}{3}] \\ g \leq 0, & \text{sur } [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin(t) dt = 0. \end{cases}$$

Alors, la fonction q vérifie $q'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, la fonction $p_R + \varepsilon q$ soit dans F .

□ Comme $q(0) = q'(\frac{\pi}{2}) = 0$, la fonction q est donnée par :

$$q(\theta) = \int_0^\theta g(t) \sin(\theta - t) dt.$$

Donc, $q'(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin(t) dt = 0$. Notons $\phi_\varepsilon = p_R + \varepsilon q$. On a donc $\phi_\varepsilon(0) = \frac{1}{2}$, $\phi'_\varepsilon(0) = 0$ et $\phi'_\varepsilon(\frac{\pi}{2}) = 0$.

De plus, pour ε suffisamment petit, on a $f_R + \varepsilon g \leq 1$ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ et donc, $0 \leq f_R + \varepsilon g \leq 1$ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. De même, pour ε petit, $f_R + \varepsilon g \geq 0$ dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $0 \leq f_R + \varepsilon g \leq 1$ dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Pour ε suffisamment petit, la fonction $p_R + \varepsilon q$ est dans F et est admissible. □

Nous dirons dans la suite que les fonctions admissibles sont les fonctions q définies sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et qui satisfont la proposition 2.11. On montre maintenant le théorème suivant qui constitue notre résultat d'optimalité locale pour le triangle de Reuleaux :

Théorème 2.8. *Pour toute fonction q admissible, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on ait :*

$$J(p_R + \varepsilon q) \geq J(p_R).$$

□ Preuve. On pose $p = p_R$, $f = f_R$ et $x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta)$. On a :

$$J(p + \varepsilon q) = J(p) + \varepsilon \delta(g) + \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) (q(\theta) \cos(\theta) - q'(\theta) \sin(\theta)) d\theta$$

où $\delta(g)$ vérifie :

$$\delta(g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x(\theta) g(\theta) - f(\theta) \int_0^\theta g(t) \sin(t) dt \right) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \int_0^\theta g(t) \sin(\theta - t) dt d\theta. \quad (2.46)$$

Nous montrons maintenant que pour toute fonction q admissible, $\delta(g) > 0$. Pour cela, on transforme (2.46). Par une intégration par parties, le second terme se réécrit :

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \int_0^\theta g(t) \sin(t) dt d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\theta f(t) dt \right) \sin(\theta) g(\theta) d\theta.$$

En développant le facteur $\sin(\theta - t)$, le troisième terme se réécrit :

$$\begin{aligned} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\theta) \cos(\theta) d\theta &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\int_0^\theta g(t) \cos(t) dt \right) d\theta \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \left(\int_0^\theta g(t) \sin(t) dt \right) d\theta \end{aligned}$$

En effectuant deux intégrations par parties, ce dernier terme se réécrit :

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\theta) \cos(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \sin(\theta) \right) g(\theta) d\theta$$

et finalement $\delta(g)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\delta(g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\theta) g(\theta) d\theta$$

où

$$\psi(\theta) = \sin(\theta) \int_0^\theta f(t) dt + x(\theta) - \frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \sin(\theta).$$

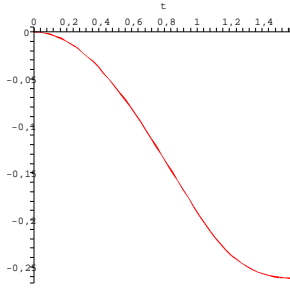
La fonction ψ est très simple : ψ décroît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (voir figure 2.1)

$$\begin{cases} \psi(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \sin(\theta), & \theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ \psi(\theta) = \sin(\theta)(\theta - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \sin(\theta), & \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

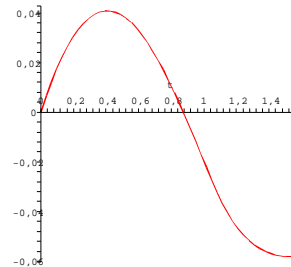
En utilisant le fait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin(t) dt = 0$, $\delta(g)$ peut se réécrire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\delta(g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\psi(t) + \lambda \sin(t)) g(t) dt.$$

Prenons λ_0 tel que : $\psi(\frac{\pi}{3}) + \lambda_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, i.e. $\lambda_0 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}$. Alors la fonction $\phi : t \mapsto \psi(t) + \lambda_0 \sin(t)$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ (voir figure 2.1). On en déduit que $\delta(g) > 0$ car le produit ϕg est toujours positif sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et non nul. On a donc montré le résultat. \square



La fonction ψ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$



La fonction ϕ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

FIG. 2.1 – Les fonctions ψ et ϕ

2.2.4 Analyse du problème de contrôle associé au problème de minimisation

Dans cette partie, nous étudions le problème (2.33) à l'aide de la théorie du contrôle optimal de la même manière que pour traiter le théorème de Blaschke-Lebesgue. Par (2.39) et (2.42), l'étude du problème de minimisation se reformule de la façon suivante :

$$\min J(x, u) =: \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x_1^2(\theta) - \frac{1}{2} x_2^2(\theta) \right) \cos(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta) \left(x_1(\theta) \cos(\theta) - x_2(\theta) \sin(\theta) \right) d\theta. \quad (2.47)$$

où (x_1, x_2) satisfait :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad (2.48)$$

avec comme conditions initiales et finales :

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.49)$$

et le contrôle u varie dans l'ensemble

$$\left\{ u \in L^2\left([0, \frac{\pi}{2}]\right), \quad |u| \leq 1 \right\}. \quad (2.50)$$

Nous utiliserons la première expression de la fonctionnelle bien que la deuxième expression soit plus symétrique. Nous conjecturons que le minimiseur du problème (2.33) est le triangle de Reuleaux tourné autour de l'un de ses axes de symétrie (voir [8]). Autrement dit, pour ce qui est du problème (2.47), nous conjecturons le résultat suivant :

Conjecture 2.1. *Soit (x, u) une trajectoire extrémale pour le problème de contrôle précédent et qui minimise (2.47). Alors, le contrôle optimal vérifie :*

$$\begin{cases} u = -1 & [0, \frac{\pi}{3}] \\ u = +1 & [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (2.51)$$

Le contrôle optimal défini par (2.51) correspond au triangle de Reuleaux. En effet, si l'on prolonge x_1 sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par

$$x_1(\theta) = x_1(\pi - \theta), \quad \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

puis sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ par

$$x_1(\theta) = x_1(\theta - \pi), \quad \theta \in [\pi, 2\pi]$$

alors la fonction $p = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$ est la fonction d'appui du triangle de Reuleaux.

2.2.5 Résolution du problème de contrôle

On appelle $x = (x_1, x_2)$ la variable d'état et $p = (p_1, p_2)$ la variable duale. Le Hamiltonien du système s'écrit :

$$H = H(x, p, p_0, u) = p_1 x_2 - p_2 x_1 + p_0 \cos(\theta) \left(x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right) + p_2 u \quad (2.52)$$

On applique le principe du maximum de Pontryagin. Il existe une application $x : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ absolument continue, il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ absolument continue, il existe une constante $p_0 \leq 0$ et il existe $u = u(t)$ un contrôle optimal associé à cette solution tels que :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

et

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.53)$$

et tels que le principe du maximum soit vérifié :

$$\max_{|v| \leq 1} H(x(\theta), p(\theta), p_0, v) = H(x(\theta), p(\theta), p_0, u(\theta)). \quad (2.54)$$

Le couple (p, p_0) est non trivial. De plus, x vérifie les conditions initiales et finales et p vérifie la condition de transversalité :

$$p_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (2.55)$$

car $x(0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. On a $\ddot{x}_1 + x_1 = u$ et donc x_1 est de classe $C^{1,1}$. La fonction de commutation pour ce problème est p_2 . Avant d'étudier les switches, nous montrons que les trajectoires optimales ne sont ni anormales, ni singulières.

Lemme 2.4. *La constante p_0 est non nulle.*

□ Preuve. si $p_0 = 0$, alors le système dual vérifié par le couple (p_1, p_2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \end{cases}$$

de sorte que l'on a $\ddot{p}_2 + p_2 = 0$ et donc, il existe deux constantes a et b telles que

$$p_2(\theta) = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$$

pour tout θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mais

$$p_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 = a$$

et donc $a = 0$. Par le principe du maximum appliqué pour $v = 0$, on obtient pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$p_1(\theta)x_2(\theta) - p_2(\theta)x_1(\theta) \leq p_1(\theta)x_2(\theta) - p_2(\theta)x_1(\theta) + p_2(\theta)u(\theta).$$

D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_2 u \geq 0.$$

Or, comme $\ddot{x}_1 + x_1 = u$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_2 u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin(\theta) (\ddot{x}_1(\theta) + x_1(\theta)) d\theta$$

et en intégrant par partie et en utilisant les conditions initiales sur (x_1, x_2) , on trouve :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_2 u = 0.$$

Nous en déduisons que la fonction $p_2 u$ est nulle presque partout. Donc $p_2 = 0$ et $p_1 = 0$ ce qui contredit le fait que le couple (p, p_0) est non trivial. Donc, la constante p_0 est non nulle. □

Donc, on peut supposer que $p_0 = -1$ par normalisation. Ainsi le système dual peut se réécrire :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 + 2 \cos(\theta)x_1 \\ \dot{p}_2 = -p_1 - \cos(\theta)x_2. \end{cases} \quad (2.56)$$

de sorte que les équations différentielles vérifiées par (p_1, p_2) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + p_1 = \cos(\theta)x_2 - 2\sin(\theta)x_1 \\ \ddot{p}_2 + p_2 = \sin(\theta)x_2 - \cos(\theta)x_1 - \cos(\theta)u. \end{cases}$$

La fonction $\theta \mapsto p_2(\theta)$ est donc de classe $C^{1,1}$ car le contrôle $u(\theta)$ est borné. La fonction $\theta \mapsto p_1(\theta)$ est de classe C^2 car $\theta \mapsto \cos(\theta)x_2(\theta) - 2\sin(\theta)x_1(\theta)$ est continue.

Lemme 2.5. *Soit (x, p, u) une extrémale singulière solution du système de Pontryagin. Alors, la trajectoire n'est pas minimisante.*

□ Preuve. Les trajectoires singulières du système pour lesquelles il n'y a aucune contrainte sur le contrôle sont données par $p_2 = 0$. On en déduit par ce qui précède

$$\sin(\theta)x_2 - \cos(\theta)x_1 - \cos(\theta)u = 0.$$

La fonction d'état x_1 vérifie donc l'équation différentielle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\cos(\theta)\ddot{x}_1 - \sin(\theta)\dot{x}_1 + 2\cos(\theta)x_1 = 0.$$

Une solution évidente de cette équation est $x_1 = \sin(\theta)$. L'autre solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$y_0(\theta) = \sin(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ds}{\cos(s)\sin(s)^2}.$$

où $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ pour que la primitive de $s \mapsto \frac{1}{\cos(s)\sin(s)^2}$ soit bien définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$x_1(\theta) = \alpha \sin(\theta) + \beta y_0(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Par les conditions initiales, on doit avoir $\dot{x}_1(0) = 0$. Cette dernière condition va imposer que les deux coefficients α et β sont nuls. En effet, la dérivée de x_1 s'écrit :

$$\dot{x}_1(\theta) = \alpha \cos(\theta) + \beta \cos(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ds}{\cos(s)\sin(s)^2} + \beta \frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta)}.$$

Donc, x_1 a une limite finie en 0 à condition que $\beta = 0$ et donc $\dot{x}_1(0) = \alpha = 0$. Le contrôle optimal associé à cette solution est donc nul car $u = x_1 + \ddot{x}_1$. Cette trajectoire singulière représente le disque qui n'est pas une trajectoire minimisante mais maximisante pour la fonctionnelle J . □

Notons que le Hamiltonien du système n'est pas conservé le long des trajectoires extrémales du système (fonctionnelle non autonome). Le long des trajectoires extrémales, on obtient :

$$\frac{dH}{d\theta}(x(\theta), p(\theta), p_0, u(\theta)) = \left(x_1^2(\theta) - \frac{1}{2}x_2^2(\theta) \right) \sin(\theta).$$

Par (2.54), les trajectoires extrémales et minimisantes que nous recherchons sont donc "bang-bang". Le contrôle optimal associé à ces trajectoires satisfait :

$$\begin{cases} u = +1 \iff p_2 > 0 \\ u = -1 \iff p_2 < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

ce qui définit des "switching point" τ_j dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ où le contrôle optimal u saute de -1 à $+1$ et tels qu'entre deux switching point consécutifs, le signe de p_2 est fixe.

Lemme 2.6. *Le nombre de “switching point” d’une solution optimale est fini dans tout intervalle de la forme $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ avec $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.*

□ Preuve. Supposons qu’il y ait un nombre infini de switching point dans l’intervalle $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$. Quitte à extraire une sous suite, nous les notons $(\theta_n)_{n \geq 0}$ et on peut supposer que θ_n converge vers $\tilde{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$. Par l’équation différentielle vérifiée par p_2 (le second membre étant dans $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$), la fonction p_2 est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi par continuité, on a $p_2(\tilde{\theta}) = 0$. Par ailleurs le taux d’accroissement

$$\frac{p_2(\theta_n) - p_2(\tilde{\theta})}{\theta_n - \tilde{\theta}} = 0$$

est constant égal à zéro et converge vers $p_2'(\tilde{\theta})$. Ainsi on a également $p_2(\tilde{\theta}) = 0$.

La fonction p_2 vérifie :

$$\ddot{p}_2 + p_2 = \sin(\theta)x_2 - \cos(\theta)x_1 - \cos(\theta)\text{sign}(p_2). \quad (2.58)$$

On a :

$$x_2(\theta) \sin(\theta) - x_1(\theta) \cos(\theta) = \int_0^\theta u(t) \sin(t) dt$$

et donc :

$$\ddot{p}_2 + p_2 = \int_0^\theta \text{sign}(p_2(t)) \sin(t) dt - \cos(\theta)\text{sign}(p_2)$$

que l’on multiplie par \dot{p}_2 dans le but d’obtenir une intégrale première :

$$\int_0^\theta \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} p_2^2 \right) d\theta = \int_0^\theta \dot{p}_2(t) \int_0^t \text{sign}(p_2(s)) \sin(s) ds dt - \int_0^\theta \cos(t) \frac{d}{dt} |p_2(t)| dt.$$

Les deux termes précédent s’intègrent par parties :

$$\int_0^\theta \cos(t) \frac{d}{dt} |p_2(t)| = \cos(\theta) |p_2(\theta)| - |p_2(0)| + \int_0^\theta \sin(t) |p_2(t)| dt$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \dot{p}_2(t) \int_0^t \text{sign}(p_2(s)) \sin(s) ds dt &= p_2(\theta) \int_0^\theta \text{sign}(p_2(s)) \sin(s) ds - \\ &\quad \int_0^\theta p_2(t) \text{sign}(p_2(t)) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{2} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \cos(\theta) |p_2(\theta)| - p_2(\theta) \int_0^\theta \text{sign}(p_2(s)) \sin(s) ds + 2 \int_0^\theta |p_2(t)| \sin(t) dt = C. \quad (2.59)$$

Par suite on a pour tout n :

$$\frac{1}{2} \dot{p}_2(\theta_n)^2 + 2 \int_0^{\theta_n} |p_2(t)| \sin(t) dt = C$$

et pour $\theta = \tilde{\theta}$ on obtient :

$$2 \int_0^{\tilde{\theta}} |p_2(t)| \sin(t) dt = C.$$

Donc on a :

$$\frac{1}{2}\dot{p}_2(\theta_n)^2 = 2 \int_{\theta_n}^{\frac{\pi}{2}} |p_2(t)| \sin(t) dt$$

et à la limite :

$$\frac{1}{2}\dot{p}_2(\tilde{\theta})^2 = 2 \int_{\tilde{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} |p_2(t)| \sin(t) dt > 0$$

Or on a $\dot{p}_2(\tilde{\theta}) = 0$, ce qui est absurde. D'où le résultat. \square

Il reste à montrer que $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$ est impossible. Soit on effectue une démonstration similaire à la précédente, soit on arrive à démontrer que l'écart entre deux switches consécutifs est minoré par une constante strictement positive (indépendante du switch). Ou bien on démontre qu'une trajectoire qui a un nombre infini de switches ne peut être optimale. Ce point a été laissé de côté pour le moment.

Dans la suite, nous supposons qu'il y a un nombre fini de switch dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On exprime l'annulation de la fonction de commutation en chaque switch afin de trouver un système vérifié par ces points. On suppose donc qu'il y a un nombre fini de switching point dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on les note $(\tau_j)_{1 \leq j \leq r}$:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots < \tau_r < \tau_{r+1} = \frac{\pi}{2}.$$

On note $u = \varepsilon$ la valeur du contrôle dans le premier intervalle $]0, \tau_1[$ de sorte que dans chaque intervalle $]\tau_j, \tau_{j+1}[$,

$$u = u_j = \varepsilon(-1)^j \quad (2.60)$$

pour $0 \leq j \leq r$.

Théorème 2.9. *Soit (x, p) une solution de (2.48) et (2.56) associé au contrôle optimal donné par (2.60). Alors, les fonctions x_1 et p_2 sont données par :*

$$\begin{cases} x_1(\theta) = u_j + A_0 \cos(\theta) + B_0 \sin(\theta) + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \cos(\theta - \tau_k) \\ p_2(\theta) = -u_j \cos(\theta) + (\mu_0 + 2 \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \tau_k) \sin(\theta) - u_j \theta \sin(\theta) - A_j. \end{cases} \quad (2.61)$$

où $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

\square Preuve. Nous calculons d'abord la variable d'état (x_1, x_2) .

Expression de (x_1, x_2) en fonction des switches (τ_j) .

Posons :

$$x_1(\theta) = u_j + A_j \cos(\theta) + B_j \sin(\theta), \quad \theta \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$$

On a $A_0 = -\varepsilon$ et $B_0 = 0$ par les conditions initiales et en utilisant le fait que la fonction x_1 est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a en chaque point $(\tau_j)_{0 \leq j \leq r-1}$:

$$\begin{cases} A_{j+1} = A_j + 2u_j \cos(\tau_{j+1}) \\ B_{j+1} = B_j + 2u_j \sin(\tau_{j+1}) \end{cases}$$

d'où pour $1 \leq j \leq r$

$$\begin{cases} A_j = A_0 + 2 \sum_{1 \leq k \leq j} u_{k-1} \cos(\tau_k) \\ B_j = B_0 + 2 \sum_{1 \leq k \leq j} u_{k-1} \sin(\tau_k) \end{cases}$$

et finalement on obtient :

$$\begin{cases} x_1(\theta) = \varepsilon(-1)^j + A_0 \cos(\theta) + B_0 \sin(\theta) + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \cos(\theta - \tau_k) \\ x_2(\theta) = -A_0 \sin(\theta) + B_0 \cos(\theta) + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \sin(\theta - \tau_k) \end{cases} \quad (2.62)$$

et la condition $x_2(\frac{\pi}{2}) = 0$ fournit la relation suivante entre les switching point :

$$2 \sum_{1 \leq k \leq r} (-1)^{k+1} \cos(\tau_k) = 1. \quad (2.63)$$

Calcul de la variable duale p_2 .

Dans l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, on a :

$$x_2(\theta) \sin(\theta) - x_1(\theta) \cos(\theta) = -A_j - u_j \cos(\theta)$$

et donc p_2 est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{p}_2 + p_2 = -A_j - 2u_j \cos(\theta).$$

On cherche donc dans $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $0 \leq j \leq r$ la fonction p_2 sous la forme :

$$p_2(\theta) = \lambda_j \cos(\theta) + \mu_j \sin(\theta) - A_j - u_j \theta \sin(\theta), \quad \theta \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$$

Les coefficients (λ_0, μ_0) dans l'intervalle $[0, \tau_1]$ sont à priori inconnus.

La fonction p_2 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour calculer les coefficients λ_j et μ_j , nous exprimons donc $p_2(\tau_j^-) = p_2(\tau_j^+)$ et $\dot{p}_2(\tau_j^-) = \dot{p}_2(\tau_j^+)$. On trouve :

$$\begin{cases} \lambda_{j+1} = \lambda_j + 2u_j \\ \mu_{j+1} = \mu_j - 2u_j \tau_{j+1} \end{cases}$$

et donc pour $1 \leq j \leq r$:

$$\begin{cases} \lambda_j = \lambda_0 + \varepsilon(1 - (-1)^j) \\ \mu_j = \mu_0 + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j-1} (-1)^{k-1} \tau_k. \end{cases}$$

Ceci donne pour $1 \leq j \leq r$, $\theta \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$:

$$p_2(\theta) = (\lambda_0 + \varepsilon(1 - (-1)^j)) \cos(\theta) + (\mu_0 + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \tau_k) \sin(\theta) - \varepsilon(-1)^j \theta \sin(\theta) - A_j.$$

Calcul de la variable duale p_1 .

En utilisant $p_1 = -\dot{p}_2 - \cos(\theta)x_2$ on trouve :

$$\begin{aligned} p_1(\theta) &= (\lambda_0 + \varepsilon(1 - (-1)^j)) \sin(\theta) - (\mu_0 + 2\varepsilon \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \tau_k) \cos(\theta) + \varepsilon(-1)^j \sin(\theta) \\ &+ \varepsilon(-1)^j \theta \cos(\theta) - \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta) - 2\varepsilon \cos(\theta) \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \sin(\theta - \tau_k) \end{aligned}$$

En utilisant la condition de transversalité $p_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \iff \dot{p}_2(\frac{\pi}{2}) = 0$ on déduit que $\lambda_0 = -\varepsilon$ et finalement $\lambda_j = -u_j$ pour $1 \leq j \leq r$. La fonction de commutation devient :

$$p_2(\theta) = -u_j \cos(\theta) + (\mu_0 + 2 \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \tau_k) \sin(\theta) - \varepsilon(-1)^j \theta \sin(\theta) - A_j. \quad (2.64)$$

□

Nous exprimons maintenant l'annulation de la fonction de commutation aux points $(\tau_j)_{1 \leq j \leq r}$.

La fonction de commutation vérifie $p_2(\tau_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq r$ par définition des switching point. Donc en posant $\alpha = \frac{\mu_0}{\varepsilon}$, on obtient pour $1 \leq j \leq r$:

$$(-1)^{j+1} \cos(\tau_j) + (\alpha + 2 \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^{k-1} \tau_k + (-1)^j \tau_j) \sin(\tau_j) - 2 \sum_{1 \leq k \leq j} (-1)^k \cos(\tau_k) = 1. \quad (2.65)$$

Corollaire 2.1. *Pour $j = 1, 2, 3$, le système $p_2(\tau_1) = 0$, $p_2(\tau_2) = 0$, $p_2(\tau_3) = 0$ s'écrit :*

$$\begin{cases} -\cos(\tau_1) + (\alpha - \tau_1) \sin(\tau_1) + 1 = 0 \\ \cos(\tau_2) + (\alpha - 2\tau_1 + \tau_2) \sin(\tau_2) - 2\cos(\tau_1) + 1 = 0 \\ -\cos(\tau_3) + (\alpha - 2\tau_1 + 2\tau_2 - \tau_3) \sin(\tau_3) + 2\cos(\tau_2) - 2\cos(\tau_1) + 1 = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

□ Preuve. Le système (2.66) s'obtient par (2.65) en faisant $j = 1, 2, 3$. □

La première équation de (2.66) donne :

$$\tan\left(\frac{\tau_1}{2}\right) = \tau_1 - \alpha.$$

Il y a $r + 1$ inconnues : les r switching point, et le réel $\alpha = \frac{\mu_0}{\varepsilon}$. Il y a $r + 1$ équations données par (2.65) pour $1 \leq j \leq r$ et par (2.63).

Nous trouvons par (2.66) les relations suivantes sur les switches :

$$(\tau_2 - \tau_1) \sin(\tau_1) \sin(\tau_2) = \sin(2\tau_1) + \sin(\tau_2) - \sin(\tau_1) - \sin(\tau_1 + \tau_2)$$

et

$$\begin{aligned} (\tau_3 - \tau_2) \sin(\tau_2) \sin(\tau_3) = & -\sin(\tau_2 + \tau_3) + \sin(\tau_3 + \tau_1) + \sin(\tau_3 - \tau_1) - \sin(\tau_3) + \sin(2\tau_2) \\ & + \sin(\tau_2) - \sin(\tau_1 + \tau_2) - \sin(\tau_2 - \tau_1). \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Si $r = 1$, il n'y a qu'un seul switch et par (2.63) on trouve $\cos(\tau_1) = \frac{1}{2}$, i.e. $\tau_1 = \frac{\pi}{3}$. Si on ne peut montrer qu'il y a un seul switch, il faut démontrer qu'une solution du système (2.66) satisfait $\tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1$ pour montrer l'égalité des créneaux.*

Chapitre 3

Minimisation de l'aire des rotors

Abstract. Curves that can be rotated freely in a n -gon (that is a regular polygon with n sides) so that they always remain in contact with all sides of the n -gon are called rotors. We prove using optimal control theory that in the class of the rotors, the one that has minimal area consists of a finite intersection of arcs of circle. The radii of these arcs are exactly the distances of the diagonals of the n -gon from the parallel sides. We derive from the Pontryagin principle necessary conditions satisfied by a minimizer.

3.1 Introduction

In this paper we investigate properties of convex curves that can be freely rotated inside a regular polygon P_n with n sides, $n \geq 3$ while remaining in contact with every side of P_n . Such convex curves are called rotors. When $n = 4$, a convex curve that can be freely rotated in a square of side α is called a curve of constant width α or an orbiform. When $n = 3$ a convex curve that can freely rotate inside an equilateral triangle is called a Δ -curve. There are infinitely many such curves besides the circle.

Orbiforms have been studied a lot since the nineteenth century and after, particularly by Reuleaux whose name is now attached to those orbiforms you get by intersecting a finite number of disks of equal radii α . The Reuleaux triangle is the most famous of these orbiforms : it consists of the intersection of three circles of radius 1 and whose centers are on the vertices of an equilateral triangle of side 1. The orbiforms have many interesting properties and applications in mechanics (see [7], [9], [56]) and they have been studied a lot in the nineteenth century by W. Blaschke (see [6]), Meissner (see [40],[41], [42], [43]) and by Lebesgue. For example, Reuleaux triangles are used in boring square holes by their property of rotation inside of a square. They were also used in some rotary engines in certain cars (for instance Mazda) which Wankel conceived in the 1960's. In the Wankel engine, the housing is oval and surrounds a Reuleaux triangle which turns and moves within the housing for the cycles. In mechanics, Reuleaux triangles are used to convert rotation into a linear motion.

An interesting question is the problem of determining the convex body that has the maximal or minimal area in the class of rotors. It is easy to show that the ball has always maximal area in the class of rotors. This is a consequence of the isoperimetric inequality as all rotors have the same perimeter (Barbier's theorem). The question of finding a rotor of least area is much more difficult. First, we need to make a requirement to state correctly the problem since one can remove

the interior of a body to decrease its area. From now on, we will deal with convex bodies. In this situation, the problem of minimizing the area is well posed. This question has been solved geometrically for $n = 4$ (that is in the case of orbiforms) by Blaschke using the mixed-volume (see [6]) and Lebesgue. They show that the Reuleaux triangle has the least area in the class of the constant width bodies of \mathbb{R}^2 . Fujiwara has given the first analytic proof of this result (see [16]). More recently Harrell gave a modern proof using minimization under constraints (see [26]).

Properties of Δ -curves have been also studied a lot. One can have an overview of the geometrical properties of these curves in [9] or in [56]. Fujiwara gave an analytic proof in [16] that among all Δ -curve inscribed in an equilateral triangle of side 1, the one that has the least area is the Δ -biangle or lens. It consists of two circular arcs of radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$ and of length $\frac{\pi}{3}$. This result was established by Blaschke in a geometrical treatment and also by Weissbach (see [52]).

Whereas the case $n = 3$ and $n = 4$ have received a lot of attention, the question of finding the rotor of least area for $n \geq 5$ seems to be much more complicated. Standard geometrical proofs cannot be applied in this case. Fujiwara pointed out the difficulties of the problem of finding the rotor that has the least area (see [18]). In [22] and [23], Goldberg constructs a family of "trammel" rotors in a regular polygon, $O_n^{ln\pm 1}$ that have $2(ln \pm 1)$ symmetries, and his conjecture for the minimizer is a rotor with $n - 1$ lobes called O_n^{n-1} . This rotor consists of a finite intersection of arcs of circles of different radii r_i . An analytic description of these regular rotors is given in [15] by Focke. In 1975, Klötzler studied the minimization problem using a different approach that uses optimal control theory and the Pontryagin Principle (see [32], [2], [3]) and he showed partially that a minimizer consists of the intersection of circle of radii r_i . His idea consists in reformulating the initial minimization problem into an optimal control problem by choosing the radius of curvature for the control. Unfortunately, he seems to prove that the regular rotors $O_n^{ln\pm 1}$ are local minimizers of the area in the class $\mathcal{R}_n^{ln\pm 1}$ of the rotors having the same number of switches and the same radii of curvature. In this way, he uses convex perturbation of a regular rotor. This result contradicts the result of Firey (see [13]) in the case $n = 4$ where the author shows that regular Reuleaux polygons maximize the area in the class of Reuleaux polygons with the same number of sides. Moreover, performing a convex perturbation of a regular rotor $O_n^{ln\pm 1}$ increases the area by the concavity of the functional (Brunn-Minkowski's theorem).

In this paper, I use the same parametrization of rotors than the one used by Klötzler (see [32]) to formulate the problem into an optimal control problem. However, the analysis of the control problem is completely different. We show at last the following Theorem which is the aim of the article :

Theorem 3.1. *Among all rotors in a n -gon ($n \geq 3$), a rotor of least area consists of a finite intersection of circle of radius r_i . The r_i are precisely equal to the distances of the diagonals of the n -gon from the parallel sides.*

We will give a detailed proof of this result that uses the Pontryagin Maximum Principle. And we derive necessary conditions satisfied by a minimizer given by the Pontryagin principle. In section 2, we recall basic properties of rotors (like Barbier's theorem, construction of rotors,...) and we will explain how we parameterize any rotor (see theorem 3.2). In section 3, we reformulate the minimization problem as an optimal control problem and we prove Theorem 3.1.

The idea of the proof is the following. Minimizing the area among rotors is equivalent to minimize the square root of the area. The Brunn-Minkowski theorem says that in dimension n , the

volume to the power $1/n$ is a concave function with respect to the Minkowski sum of convex bodies. Hence the problem consists in minimizing the square root of the area under additional convex constraints. Hence a minimizer should saturate these constraints. In other words, a minimizer will consist of an intersection of arcs of circle with precise radii. This result will come from the Pontryagin Principle : we will show that extremal trajectories of the problem that minimize the area are "bang-bang".

3.2 Construction of a rotor

3.2.1 Support function of a convex body

A body in \mathbb{R}^N , $N \geq 2$ is a compact connected subset. Let K be a convex body. The support function of K is the map $h_K : \mathcal{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$h_K(\nu) := \max_{x \in K} x \cdot \nu.$$

A convex body is uniquely determined by its support function (see [7] p.29 or [30]). If K is convex of non empty interior and if the origin is inside of K , the support function $h_K(\nu)$ can be interpreted as the distance of the origin to the support hyperplane of K which normal vector is ν (see figure 4.1). Recall that for a convex body, a hyperplane H is a hyperplane of support for K if there exists $x \in K \cap H$ such that K is included in one of the half-spaces limited by H . The support function is non negative if and only if the origin is put inside K . Moreover, the regularity of the support function is contained in the next proposition (see [7] p.28 or [47])

Proposition 3.1. *Let K be a convex body of \mathbb{R}^N and p its support function. Then p is of class C^1 if and only if K is strictly convex.*

In the following of the paper, we study convex bodies of \mathbb{R}^2 such as rotors and we will see that their support function is of class $C^{1,1}$ (see theorem 3.4).

In dimension 2, the support function of a convex body K will be noted $p_K(\theta) := h_K(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$ or $p(\theta)$ to shorten. The function p_K is 2π -periodic. If K is a convex body, we denote by ∂K its boundary, which is the envelope of all support lines of equations

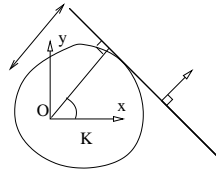


FIG. 3.1 – *The support function of a convex body K is the distance between the tangent to K and the origin.*

$$X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = p(\theta). \tag{3.1}$$

More precisely, we show the following proposition

Proposition 3.2. *Let K be a strictly convex body and p be its support function. We assume that the boundary of K is lipschitz. Then, it can be described by the equations :*

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{cases} \quad (3.2)$$

□ Proof. Let u_θ be the vector of coordinates $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. The support function $p(\theta)$ is defined by :

$$p(\theta) = \max_{x \in K} x \cdot u_\theta$$

and p is of class C^1 by the strict convexity. As K is compact, the maximum is obtained by a point of coordinates $(x(\theta), y(\theta))$ and we have :

$$x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta) = p(\theta).$$

As the boundary of K is Lipschitz, the functions (x, y) are differentiable almost everywhere (Rademacher's Theorem). We can expand the last formula :

$$\left(x(\theta) + x'(\theta)d\theta \right) \left(\cos(\theta) - \sin(\theta)d\theta \right) + \left(y(\theta) + y'(\theta)d\theta \right) \left(\sin(\theta) + \cos(\theta)d\theta \right) = p(\theta) + p'(\theta)d\theta.$$

As the normal vector to the support line given by (3.1) is $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, we have :

$$(x'(\theta), y'(\theta)) \cdot \vec{u}_\theta = 0.$$

Hence, the vector $(x(\theta), y(\theta))$ satisfies the equation :

$$-x(\theta) \sin(\theta) + y(\theta) \cos(\theta) = p'(\theta).$$

Thus, we get (3.2) □

The formula (3.2) can be written by : $z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta) = (p(\theta) + ip'(\theta))e^{i\theta}$. From now on, we assume that the support function of the convex bodies that we consider is of class $C^{1,1}$ (see theorem 3.4). We will see that rotors satisfy this assumption.

Proposition 3.3. *Let K be a convex body and p be its support function. We assume that p is of class $C^{1,1}$. Then, the radius of curvature f of the boundary ∂K exists almost everywhere and we have :*

$$f(\theta) = p(\theta) + p''(\theta) \geq 0. \quad (3.3)$$

□ Proof. As p is of class $C^{1,1}$, the functions $(x(\theta), y(\theta))$ are differentiable almost everywhere and by standard formulas, the radius of curvature f of ∂K is given by $f = p + p''$. As the body K is convex, f must be non negative and consequently $f = p + p'' \geq 0$. □

If K is a convex body of support function p and if p is of class $C^{1,1}$, the tangent vector to ∂K is given by

$$z'(\theta) = i(p(\theta) + p''(\theta))e^{i\theta}.$$

When $p + p'' = 0$ on a set A of measure positive, then we have $z' = 0$. Geometrically speaking, this means that the boundary ∂K has a corner : for $\theta \in A$, the point $z(\theta)$ is stationary.

For a given function $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and 2π -periodic, we note :

$$c_1(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$$

the first Fourier coefficient of f .

Proposition 3.4. *Let $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be a 2π -periodic function. Then, any function p that satisfies $f = p + p''$ is of class $C^{1,1}$ and p is 2π -periodic if and only if $c_1(f) = 0$.*

□ Proof. Let $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be a 2π -periodic function. A function p satisfies $f = p + p''$ if and only if there exists $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ such that :

$$p(\theta) = \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt + a \cos(\theta) + b \sin(\theta). \quad (3.4)$$

By (3.4), any function p that satisfies $f = p + p''$ is of class $C^{1,1}$. A function p given by (3.4) is 2π -periodic if and only if

$$p(0) = p(2\pi), \quad p'(0) = p'(2\pi).$$

But we have :

$$\int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) e^{i\theta} d\theta = p'(2\pi) - p'(0) - i(p(2\pi) - p(0)).$$

Hence, p is 2π -periodic if and only if $c_1(f) = 0$. □

If we deal with f instead of p , we get an additional condition $c_1(f) = 0$ which says that the boundary ∂K given by equation (3.2) is closed. The next proposition is a consequence of the two previous propositions.

Proposition 3.5. *Let K be a strictly convex body of \mathbb{R}^2 and let p be its support function. If p is of class $C^{1,1}$, then $p + p'' \geq 0$. Conversely, let $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be a 2π -periodic function such that $f \geq 0$ and $c_1(f) = 0$. If p is a function satisfying $f = p + p''$, then p is 2π -periodic of class $C^{1,1}$ and p is the support function of a strictly convex body.*

Let K be a strictly convex body. We denote by p its support function and by f the radius of curvature of its boundary and by $\mathcal{A}(p)$ its area. By Stoke's formula, we have :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} (x dy - y dx).$$

And using (3.2) we get

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2(\theta) - p'^2(\theta)) d\theta. \quad (3.5)$$

If p is of class $C^{1,1}$, recall that by a theorem of Rademacher, p'' exists a.e. and $p'' \in L^\infty$. The area becomes by integrating by parts :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta)(p(\theta) + p''(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta) f(\theta) d\theta. \quad (3.6)$$

where $f = p + p''$. This can be written equivalently :

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta f(\theta) f(t) \sin(\theta - t) dt d\theta.$$

The previous expression of the area depends only of the radius of curvature of the boundary. If p is only of class C^1 , $p + p''$ is a positive Radon measure, and (3.6) can be interpreted as the product of a positive Radon measure and a continuous function.

We formulate now the invariance of the area $\mathcal{A}(p)$ with respect to a translation of the convex body K .

Proposition 3.6. *Let $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ and K be a strictly convex body of \mathbb{R}^2 and p its support function. We assume that p is of class $C^{1,1}$. Let us denote by \tilde{K} the translated of K by the translation of vector u and \tilde{p} its support function. We have :*

$$\tilde{p}(\theta) = p(\theta) + a \cos(\theta) + b \sin(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

and

$$\mathcal{A}(\tilde{p}) = \mathcal{A}(p).$$

□ Proof. The first point comes from the parametrization of the boundary of K given by (3.2). We can check that $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(\tilde{p})$. Indeed, one has $f = p + p'' = \tilde{p} + \tilde{p}''$ and

$$\mathcal{A}(\tilde{p}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(\theta) \tilde{f}(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta) + a \cos(\theta) + b \sin(\theta)) f(\theta) d\theta = \mathcal{A}(p)$$

as $c_1(f) = 0$. □

3.2.2 Construction theorem

In this section, we recall classical definitions and properties about rotors. Let K be a convex domain and P be a convex polygon. P will be called a **tangential polygon** of K and K an **osculating domain** in P , if $K \subset P$ and every side of P has a non empty intersection with K (see [24]). We say that a polygon P is **equiangular** if all its interior angles at the vertices are equal. We say that a convex polygon P is a **n-gon** if it is a regular polygon with n sides.

Definition 3.1. *A convex domain K will be called a rotor in a polygon Q if for every rotation ρ , there exists a translation vector p_ρ such that $\rho K + p_\rho$ is an osculating domain in Q .*

In the rest of the paper, we assume that Q is a regular polygon with $n \geq 3$ sides, that is we consider rotor inside a regular polygon. Hence, K is a rotor in a regular n-gon Q exactly if all tangential equiangular n-gons are regular and have equal perimeters. A rotor of a n-gon P_n has the property to rotate inside P_n while remaining in contact with all sides of P_n . A rotor is a strictly convex domain, as for constant width sets. Consequently the support function of a rotor is of class C^1 . We assume that its support function is of class $C^{1,1}$ so that its radius of curvature is in $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ (see theorem 3.4).

Let r be the radius of the inscribed circle of the n-gon P_n and $\delta = \frac{2\pi}{n}$. The next characterization of a rotor is well-known (see [9], [15], [32]). We recall briefly the mechanical origin of (3.7).

Theorem 3.2. *Let K be a strictly convex body of non empty interior and p be its support function. Then, K is a rotor if and only if its support function p is of class $C^{1,1}$, 2π -periodic, and satisfies (3.3) and*

$$p(\theta) - 2 \cos(\delta) p(\theta + \delta) + p(\theta + 2\delta) = 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.7)$$

Before doing the proof of the theorem we set some notations :

$$S_n(p) := p(\theta) - 2 \cos(\delta) p(\theta + \delta) + p(\theta + 2\delta), \quad C_n = 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

□ Proof. If K is a rotor, its support function p is of class $C^{1,1}$ and 2π -periodic. By the convexity of K , we must have $p + p'' \geq 0$. We will refer to chapter 8 of [56] for the following geometric property.

By definition of a rotor, the tangents to ∂K at each contact point are the sides of the n -gon. Hence the perpendiculars to these paths at their contact points meet in a point which is the instantaneous center of rotation of the body. The equation of three consecutive sides of the n -gon is given by

$$x \cos(\theta + k\delta) + y \sin(\theta + k\delta) = p(\theta + k\delta), \quad k = 0, 1, 2.$$

Expressing that the three perpendiculars to these lines at the points $(x(\theta+k\delta), y(\theta+k\delta))$, $k = 0, 1, 2$ are convergent, we get the relation $S_n(p) = C_n$.

Conversely, let us assume that the conditions (3.3) and (3.7) are satisfied. K is convex by (3.3). Let us consider now for $k = 0, \dots, n - 1$ two support lines of K of equation

$$x \cos(\theta + k\delta) + y \sin(\theta + k\delta) = p(\theta + k\delta)$$

and

$$x \cos(\theta + (k + 1)\delta) + y \sin(\theta + (k + 1)\delta) = p(\theta + (k + 1)\delta).$$

Using $S_n(p) = C_n$, the two preceding lines make an angle of measure δ . As this true for every $k = 0, \dots, n - 1$ and for all $\theta \in \mathbb{R}$, K is a rotor of P_n . \square

An example of a function p satisfying (3.7) is given by :

$$p(\theta) = 1 + \frac{1}{1 - (ln - 1)^2} \cos((ln - 1)\theta) \tag{3.8}$$

where $l \in \mathbb{N}^*$ (see figure 3.2). A simple computation shows that we have $S_n(p) = C_n$ with $r = 1$. Moreover, we have easily $p + p'' = 1 + \cos((ln - 1)\theta) \geq 0$. Hence, p is the support function of a rotor K in a n -gon. The boundary of K is of class C^∞ because p is of class C^∞ .

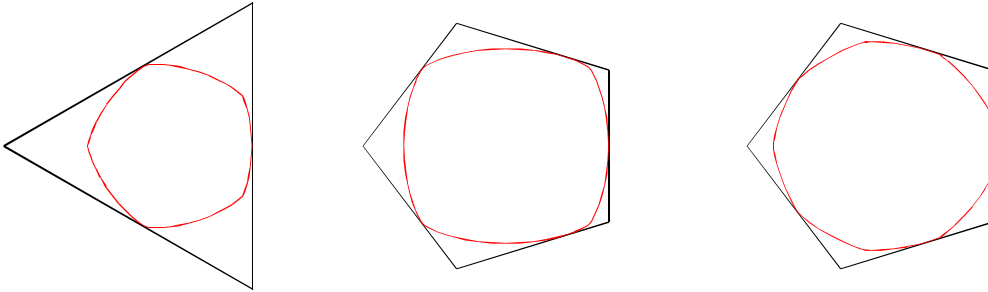


FIG. 3.2 – Example of rotors whose support function is given by (3.8) for $n = 3$, $l = 2$ and $n = 5$, $l = 1, 2$.

In the following we denote by E the set of the functions $p \in C^{1,1}(\mathbb{R})$ that are 2π -periodic and that satisfy (3.3) and (3.7).

Definition 3.2. *The width of a convex curve in a given direction is the distance between a pair of supporting lines of the curve perpendicular to this direction. If the width is constant in every direction, the curve is a curve of constant width.*

Equivalently, a constant width body has the property to rotate inside a square while remaining tangent to the four sides of the square. The relation (3.7) can be simplified in the case $n = 4$, which corresponds to the constant width bodies. The support function of K satisfies in this case :

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = 2r$$

which is exactly saying that any pair of parallel support lines to K are separated by the distance $2r$.

We recall Barbier's theorem which is a simple consequence of (3.7).

Theorem 3.3. *Let \mathcal{R} be a rotor in P_n . Then the perimeter of \mathcal{R} is $2\pi r$, the perimeter of the inscribed circle in P_n .*

□ Proof. Let \mathcal{R} be a rotor and p be its support function. The perimeter L of \mathcal{R} is given by the integral of the radius of curvature :

$$L = \int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta$$

which is well defined as p is of class $C^{1,1}$. By the periodicity of p' , we get

$$L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta.$$

Now, integrating (3.7) on the interval $[0, 2\pi]$ and using the 2π -periodicity of p , we get :

$$L(2 - 2\cos(\delta)) = 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) 2\pi.$$

Thus, we get $L = 2\pi r$. □

Proposition 3.7. *Among all rotors of a regular polygon P_n , the one of maximal area is the disc of radius r .*

□ Proof. By the isoperimetric inequality, the body of maximal area among all closed curves of the plane having the same perimeter is the ball, and the ball is a constant width body. □

3.2.3 Formulation of the constraints on $[0, 2\delta]$

In this section, we derive consequences of (3.7) which will be useful to state correctly an optimal control problem. Let us define the reals s_k and t_k for $k = 0, \dots, n-1$ by :

$$s_k = \frac{\sin(k\delta)}{\sin(\delta)}, \quad t_k = 2 \frac{\sin\left(\frac{k\delta}{2}\right) \sin\left(\frac{(k-1)\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)} r.$$

Lemma 3.1. *Let p be a map in $C^{1,1}(\mathcal{S}^1)$ satisfying (3.7). Then we have for all $\theta \in [0, 2\pi]$*

$$\sigma_n := \sum_{0 \leq k \leq n-1} p(\theta + k\delta) = nr \tag{3.9}$$

and for $0 \leq k \leq n-1$ we have :

$$p(\theta + k\delta) = s_k p(\theta + \delta) - s_{k-1} p(\theta) + t_k. \tag{3.10}$$

□ Proof. We write (3.7) at the points $\theta, \dots, \theta + (n-1)\delta$ and we add these n equalities. Simplifying by $C_n = 2r(1 - \cos(\delta))$, we get (3.9). Let us set the value of θ , if we note $u_k = p(\theta + k\delta)$, we have using (3.7)

$$u_k - 2 \cos(\delta)u_{k+1} + u_{k+2} = 4r \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (3.11)$$

We solve this linear recurrent sequence :

$$u_k = a\omega^k + \overline{a}\overline{\omega}^k + r$$

where $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ with initial value $u_0 = p(\theta)$ and $u_1 = p(\theta + \delta)$. This gives (3.10). □

Let K be a rotor of P_n of radius of curvature f . Then f is positive and satisfies (3.9). Consequently, the radius of curvature of a rotor is bounded by nr .

Proposition 3.8. *If n is even, a rotor K in a n -gone is a constant width body.*

□ Proof. Let K be a rotor and p be its support function which satisfies (3.7). We assume that $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Using (3.10) with $k = m$, we get $s_m = 0$, $s_{m-1} = 1$ and $t_m = 2r$. Consequently, p satisfies

$$p(\theta + m\delta) = -p(\theta) + 2r$$

which is exactly saying that K is of constant width as $m\delta = \pi$. □

Hence, the rotors in a n -gone having an even number of sides is a subclass of the constant width bodies. We prove in the next theorem that the support function of a rotor is of class $C^{1,1}$.

Theorem 3.4. *Let p be the support function of a strictly convex body K and assume that p satisfies (3.7). Then p is of class $C^{1,1}$.*

□ Proof. The proof of this theorem uses the previous lemma. As K is strictly convex, its support function p is of class C^1 . First, we show that p satisfies the inequality :

$$(p'(\theta') - p'(\theta)) \sin(\theta - \theta') \leq (p(\theta) + p(\theta')) (1 - \cos(\theta - \theta')), \quad \forall(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]. \quad (3.12)$$

By definition of the support function, we have for all $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]$:

$$(x(\theta'), y(\theta')) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)) \leq p(\theta).$$

Taking into account (3.2), we get :

$$p'(\theta') \sin(\theta - \theta') \leq p(\theta) - p(\theta') \cos(\theta' - \theta)$$

If we permute θ and θ' , we obtain :

$$p'(\theta) \sin(\theta - \theta') \leq p(\theta') - p(\theta) \cos(\theta' - \theta).$$

Adding the two last inequalities yields (3.12). Now, we write (3.12) at the points $\theta + k\delta$ and $\theta' + \frac{2k\pi}{n}$. We get for all $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]$:

$$(p'(\theta' + k\delta) - p'(\theta + k\delta)) \sin(\theta - \theta') \leq (p(\theta + k\delta) + p(\theta' + k\delta)) (1 - \cos(\theta - \theta')).$$

The function p satisfies (3.7), thus by the previous lemma, we have :

$$\sum_{1 \leq k \leq n-1} p(\theta + k\delta) = nr - p(\theta)$$

and

$$\sum_{1 \leq k \leq n-1} p'(\theta + k\delta) = -p'(\theta).$$

Finally, we obtain :

$$(-p'(\theta') + p'(\theta)) \sin(\theta - \theta') \leq (2nr - p(\theta) - p(\theta'))(1 - \cos(\theta - \theta')).$$

If we combine this inequality with (3.12), we get

$$|(p'(\theta') - p'(\theta)) \sin(\theta - \theta')| \leq 2nr \sin^2 \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right).$$

Consequently, p' satisfies the inequality

$$|p'(\theta') - p'(\theta)| \leq 2nr \left| \tan\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|$$

for all $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]$ such that $|\theta - \theta'| \notin \{0, \pi, 2\pi\}$. To conclude, we distinguish two cases. First, assume that $|\theta - \theta'| \leq \frac{\pi}{2}$. Then, by the previous inequality, we find :

$$|p'(\theta') - p'(\theta)| \leq 2nr \frac{|\theta - \theta'|}{2} \sqrt{2}.$$

If $|\theta - \theta'| \geq \frac{\pi}{2}$, we have simply :

$$|p'(\theta') - p'(\theta)| \leq 2\|p'\|_{\infty} \frac{2}{\pi} |\theta - \theta'|$$

as p is of class C^1 . This concludes the proof of the theorem. \square

Now we reformulate the constraint $c_1(f) = 0$ on the interval $[0, 2\delta]$.

Lemma 3.2. *Let f be a function satisfying (3.7). Then the condition $c_1(f) = 0$ is equivalent to*

$$\int_0^{\delta} (e^{i\theta} f(\theta + \delta) - e^{i(\theta+\delta)} f(\theta)) d\theta = -4i \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) e^{\frac{2i\pi}{n}} r. \quad (3.13)$$

\square Proof. We have

$$\begin{aligned} c_1(f) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f(\theta) e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\delta} f(\theta + k\delta) e^{i\theta} d\theta e^{ik\delta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\delta} (s_k f(\theta + \delta) - s_{k-1} f(\theta) + t_k) e^{i\theta} d\theta e^{ik\delta} \end{aligned}$$

using (3.10) in the last equality. After some simplifications, we get (3.13). \square

We reformulate the area of a rotor also on the interval $[0, 2\delta]$. Let r be the radius of the inscribed circle to the n -gon. In the following, we note for all $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} P(\theta) = p(\theta) - r \\ F(\theta) = f(\theta) - r. \end{cases} \quad (3.14)$$

Lemma 3.3. *Let p be the support function of a rotor and f its radius of curvature. The area of a rotor is given by :*

$$\mathcal{A}(p) = \frac{n}{4 \sin^2(\frac{\delta}{2})} \tilde{\mathcal{A}}(f) + \pi r^2$$

where

$$\tilde{\mathcal{A}}(f) = \int_0^\delta \left(P(\theta)F(\theta) + P(\theta + \delta)F(\theta + \delta) - \cos(\delta)(F(\theta)P(\theta + \delta) + F(\theta + \delta)P(\theta)) \right) d\theta. \quad (3.15)$$

□ Proof. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta)f(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} p(\theta)f(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \int_0^\delta p(\theta + k\delta)f(\theta + k\delta)d\theta. \end{aligned}$$

Replacing $p(\theta + k\delta)$ and $f(\theta + k\delta)$ using (3.10), we get the result using the equalities :

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} s_k^2 = \sum_{0 \leq k \leq n-1} s_{k-1}^2 = \frac{2}{2 \sin(\delta)^2}$$

and

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} s_k t_k = -\frac{n}{4 \cos(\frac{\delta}{2})^2}, \quad \sum_{0 \leq k \leq n-1} s_k s_{k-1} = \frac{n \cos(\delta)}{2 \sin(\delta)^2}.$$

□

Note that in the special case of the sets of constant width ($n = 4$), one finds the usual functional up to a constant as in [19] :

$$\tilde{\mathcal{A}}(f) = - \int_0^\pi p(\theta)(1 - f(\theta))d\theta. \quad (3.16)$$

Lemma 3.4. *Let f be a real function in $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ such that $c_1(f) = 0$ and p be a function that satisfies $f = p + p''$. Then, we have $S_n(f) = C_n$ if and only if $S_n(p) = C_n$.*

□ Proof. Let f be a function in $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ such that $c_1(f) = 0$. The function f is in $L^2(\mathcal{S}^1)$ and we can consider its Fourier expansion. The function p is of class $C^{1,1}$ and its Fourier series can be obtained by integrating the Fourier series of f . Consequently, we have :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}} c_k(f) e^{ik\theta}$$

and

$$p(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}} \frac{c_k(f)}{1 - k^2} e^{ik\theta} + c_1(p) e^{-i\theta} + c_1(p) e^{i\theta}.$$

We have :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}} c_k(f) (1 - 2 \cos(\delta) e^{ik\delta} + e^{2i\delta}) e^{ik\theta}.$$

Let us consider $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ which satisfies

$$\omega^2 - 2 \cos(\delta)\omega + 1 = 0. \quad (3.17)$$

and let us define the set J by :

$$J = (n\mathbb{Z} + 1) \cup (n\mathbb{Z} - 1) \setminus \{\pm 1\}.$$

Let us assume now that $S_n(f) = C_n$. First we get $c_0(f) = r$. If $c_k(f) \neq 0$ for $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, we must have :

$$\omega^{2k} - 2 \cos(\delta) \omega^k + 1 = 0$$

and consequently $k \in J$. Moreover, if $k \notin J$,

$$\omega^{2k} - 2 \cos(\delta) \omega^k + 1 \neq 0$$

and thus $c_k(f) = 0$. Finally, f satisfies $S_n(f) = C_n$ if and only if

$$f(\theta) = \sum_{n \in J} c_n(f) e^{in\theta} + r.$$

By the previous computation, if f satisfies $S_n(f) = C_n$, we must have

$$p(\theta) = \sum_{k \in J} \frac{c_k(f)}{1 - k^2} e^{ik\theta} + c_1(p) e^{-i\theta} + c_1(p) e^{i\theta} + r$$

and by its Fourier decomposition, p satisfies $S_n(p) = C_n$. Conversely, if p satisfies $S_n(p) = C_n$, we obtain $S_n(f) = C_n$ by derivation. \square

3.3 Optimality conditions for a minimizer

In the following, we write indifferently by $\mathcal{A}(p)$ or $\mathcal{A}(f)$ the area of a rotor (see proposition 3.6). The problem of finding a rotor of minimal area is now equivalent to the optimization problem :

$$\min_{f \in E} \mathcal{A}(f). \tag{3.18}$$

Theorem 3.5. *There exists a rotor of minimal area which is a minimizer for problem (3.18).*

\square Proof. The existence follows easily from the compactness and the convexity of a minimizing sequence. Indeed, let K_i be a sequence of rotor of support function p_i such that $\mathcal{A}(p_i)$ goes to $\alpha := \min_{f \in E} \mathcal{A}(f)$. Without loss of generality, we can assume that the collection of the K_i is uniformly bounded, hence it contains a subsequence (still noted K_i) which converges to a nonempty compact convex set K , for the Hausdorff distance (see [56]). Let us denote by p the support function of K . The area is a continuous functional on the set of compact convex bodies (see [51]), thus we have $\alpha = \mathcal{A}(p)$ and K is a compact convex. For all i , we have pointwise $S_n(p_i) = C_n$. The Hausdorff measure between two convex sets A and B of support function p_A and p_B of \mathbb{R}^2 is given by

$$\delta(A, B) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |p_A(\theta) - p_B(\theta)|$$

(see [7]). Hence, the support function p of K is the uniform limit of the sequence p_i on the interval $[0, 2\pi]$. Hence p satisfies also $S_n(p) = C_n$ and K is a rotor. \square

3.3.1 Simplification of the functional

Before going into details for solving the minimization problem, we diagonalize the functional (3.15) (see [2] for the same parametrization). The following parametrization is useful to state correctly an optimal control problem equivalent to (3.18).

We set

$$\delta = \delta, \quad \omega = e^{i\delta}, \quad \gamma = \cos(\delta), \quad \sigma = \sin(\delta), \quad \omega^{\pm\frac{1}{2}} = e^{\pm\frac{i\delta}{2}}.$$

Recall that given a rotor K of support function p , the functions P and F are defined by (3.14) and we have $S_n(f) = C_n$ if and only if $S_n(F) = 0$. We define now the functions $Z \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ and $W \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ by :

$$\begin{cases} W(\theta) = P(\theta) - \bar{\omega}P(\theta + \delta) \\ Z(\theta) = F(\theta) - \bar{\omega}F(\theta + \delta) \end{cases} \quad (3.19)$$

so that

$$W + W'' = Z. \quad (3.20)$$

The functions W and Z can be interpreted as the **complex support function** and the **complex radius of curvature** associated to a rotor. We denote by X_1, X_3, U, V the real and imaginary parts of W and Z :

$$\begin{cases} W = X_1 + iX_3 \\ Z = U + iV \end{cases}$$

so that we have

$$\begin{cases} X_1(\theta) = P(\theta) - \gamma P(\theta + \delta) \\ X_3(\theta) = \sigma P(\theta + \delta) \\ U(\theta) = F(\theta) - \gamma F(\theta + \delta) \\ V(\theta) = \sigma F(\theta + \delta). \end{cases} \quad (3.21)$$

We have equivalently

$$\begin{cases} P(\theta) = X_1(\theta) + \frac{\gamma}{\sigma} X_3(\theta) \\ P(\theta + \delta) = \frac{1}{\sigma} X_3(\theta) \\ F(\theta) = U(\theta) + \frac{\gamma}{\sigma} V(\theta) \\ F(\theta + \delta) = \frac{1}{\sigma} V(\theta + \delta). \end{cases} \quad (3.22)$$

Proposition 3.9. *The functions W and Z satisfy the relations :*

$$\begin{cases} W(\theta + \delta) = \bar{\omega}W(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R} \\ W'(\theta + \delta) = \bar{\omega}W'(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R} \\ Z(\theta + \delta) = \bar{\omega}Z(\theta), \text{ a.e. } \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.23)$$

□ Proof. One has $S_n(p) = C_n$, consequently, $S_n(P) = 0$, that is :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\theta) - 2\gamma P(\theta + \delta) + P(\theta + 2\delta) = 0. \quad (3.24)$$

Eliminating $P(\theta + 2\delta)$ in the equation above, we get

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad W(\theta + \delta) = P(\theta + \delta) - \bar{\omega}(2\gamma P(\theta + \delta) - P(\theta))$$

which gives $W(\theta + \delta) = \bar{\omega}W(\theta)$. The two other relations are consequences of the first one. □

Let \mathcal{P}_n be the regular polygon of center the origin and of vertices the points of coordinates $(r^* \omega^k e^{i\alpha})_{0 \leq k \leq n-1}$, where $r^* = 2r \sin(\frac{\delta}{2})$ and $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$.

Proposition 3.10. *Let K be a rotor and p its support function and $f = p + p''$ its radius of curvature. We denote by Z its complex radius of curvature. Then, we have $f \geq 0$ if and only if $Z(\theta) \in \mathcal{P}_n$, for all $\theta \in [0, \delta]$.*

□ Proof. Let us consider the lines D'_k of equation

$$u_k(x, y) = s_k y - s_{k-1} x + t_k = 0.$$

As K is a rotor, we have for $\theta \in [0, \delta]$ and for $0 \leq k \leq n-1$:

$$f(\theta + k\delta) = u_k(f(\theta), f(\theta + \delta)).$$

Therefore we have :

$$\begin{aligned} f \geq 0 &\iff u_k(f(\theta), f(\theta + \delta)) \geq 0, \quad k = 0, \dots, n-1 \\ &\iff s_k(f(\theta + \delta) - r) - s_{k-1}(f(\theta) - r) + t_k + r(s_k - s_{k-1}) \geq 0 \\ &\iff \sin(k\delta)F(\theta + \delta) - \sin((k-1)\delta)F(\theta) \geq -\sigma r \\ &\iff \Im(\sin(k\delta)Z(\theta) - \sin((k-1)\delta)Z(\theta - \delta)) \geq -\sigma^2 r \\ &\iff \Im(\sin(k\delta)Z(\theta) - \sin((k-1)\delta)\omega Z(\theta)) \geq -\sigma^2 r \\ &\iff \Im(\omega^{k-1}Z(\theta)) \geq -\sigma r. \end{aligned}$$

Let $z = x + iy$ be a complex number and D_k be the line of equation $\Im(\omega^{k-1}z) = -\sigma r$ and H_k be the half plane defined for $z \in \mathbb{C}$ by $\Im(\omega^{k-1}z) \geq -\sigma r$. We have easily $z \in D_{k+1}$ if and only if $\omega z \in D_k$. Thus, D_{k+1} is the image of D_k by the rotation of center the origin and of angle $-\delta$. Hence, for $\theta \in [0, \delta]$, $Z(\theta)$ satisfies $\Im(\omega^{k-1}Z(\theta)) \geq -\sigma r$, $0 \leq k \leq n-1$ if and only if $Z(\theta)$ belongs to the intersection of the half spaces H_k . This intersection is non empty as 0 belongs to H_k for all $0 \leq k \leq n-1$ and is convex as all H_k are convex, hence it is a non empty convex polygon. Moreover, we can check that its center is the origin, and that its vertices are the points of coordinates $-2ir \sin(\frac{\delta}{2})e^{i(k-\frac{1}{2})\delta}$, $k = 0, \dots, n-1$. □

We define now the affine application $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ by

$$L(x, y) = (x - r - \gamma(y - r), \sigma(y - r)).$$

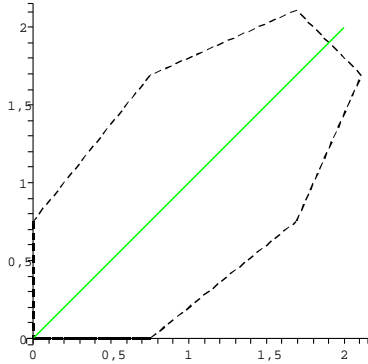
Proposition 3.11. *Let K be a rotor of support function p and f its radius of curvature. Then, f is positive if and only if for all $\theta \in [0, \delta]$, $(f(\theta), f(\theta + \delta))$ belongs to a convex polygon G_n symmetric with respect to the first bisectrix.*

□ Proof. From the previous proposition, we deduce that $f \geq 0$ if and only if $(f(\theta), f(\theta + \delta))$ belongs to $L^{-1}(\mathcal{P}_n)$ for all $\theta \in [0, \delta]$. $L^{-1}(\mathcal{P}_n)$ is consequently a non empty convex polygon G_n and its sides are the image by L^{-1} of the sides of \mathcal{P}_n . The vertices of G_n are consequently given by the intersection of the lines $L^{-1}(D_k)$ and $L^{-1}(D_{k+1})$ for $0 \leq k \leq n-1$ as we have $L^{-1}(D_k \cap D_{k+1}) = L^{-1}(D_k) \cap L^{-1}(D_{k+1})$. This proves that G_n is the intersection of D_k and D_{k+1} , $0 \leq k \leq n-1$. Now, let us prove that \mathcal{P}_n is symmetric with respect to the first bisectrix. If (x, y) is in G_n , then $u_k(x, y) \geq 0$, for $0 \leq k \leq n-1$. Hence, $u_{n-k+1} \geq 0$ for $0 \leq k \leq n-1$ (recall that $s_{n+k} = s_k$ and $t_{n+k} = t_k$). But, we have

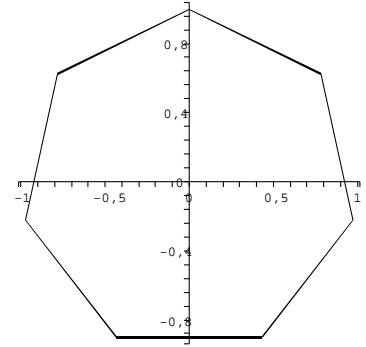
$$u_{n-k+1}(x, y) = u_k(y, x)$$

which proves that G_n is symmetric. □

It is convenient to work with \mathcal{P}_n because we will see in the next section that the optimal control takes its values at the vertices of \mathcal{P}_n (the extremal points of \mathcal{P}_n).



The polygon G_7 is symmetric with respect to the first bisectrix.



The polygon \mathcal{P}_7 of coordinates $(-i\omega^{j-\frac{1}{2}})_{0 \leq j \leq 6}$ with $2r \sin(\frac{\delta}{2}) = 1$.

FIG. 3.3 – The control (U, V) takes its values within the polygon \mathcal{P}_7 after the transformation.

Proposition 3.12. *Let f denotes the radius of curvature of a rotor K . Then, the area of K is given by :*

$$\mathcal{A}(f) = \pi r^2 + \frac{n}{4\sigma^2} \int_0^\delta U X_1 + V X_3 = \pi r^2 + \frac{n}{4\sigma^2} \int_0^\delta \Re(Z\overline{W}). \quad (3.25)$$

□ Proof. The area of the rotor K described by $f \in E$ is given by (3.15). Replacing $f(\theta)$ and $F(\theta + \delta)$ by $W(\theta)$ and $W(\theta + \delta)$, we get (3.25) after a simple computation. □

Definition 3.3. *Let Γ be the set of the complex functions W in $C^{1,1}([0, \delta])$ that satisfy :*

$$\begin{cases} W(\delta) = \overline{W}(0) \\ W'(\delta) = \overline{W}'(0) \end{cases} \quad (3.26)$$

and such that the function $Z = W + W''$ takes its values in the polygon \mathcal{P}_n .

Definition 3.4. *We denote by \mathcal{Z} the set of the complex valued functions $Z \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ satisfying :*

$$Z(\theta + \delta) = \overline{Z}(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

and

$$Z(\theta) \in \mathcal{P}_n, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

We can now prove the equivalence between the parametrization of a rotor K by its support function p and its complex support function W .

Theorem 3.6. *Let W be a function in Γ . Let us consider the function $\tilde{p} = P + r$ defined on $[0, 2\delta]$ where P is given by (3.22). If, we extend \tilde{p} on the interval $[0, 2\pi]$ by (3.10) and if we note p this extension, then p is the support function of a rotor. Conversely, if p is the support function of a rotor K and $P = p - r$, then the function $W_{|[0, \delta]}$ defined by (3.19) belongs to Γ .*

□ Proof. First, let us take $W = X_1 + iX_3 \in \Gamma$. We have by (3.26) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma}X_3(0) = X_1(\delta) + \frac{\gamma}{\sigma}X_3(\delta) \\ \sigma X_1(0) - \gamma X_3(0) = -X_3(\delta) \end{cases} \quad (3.27)$$

and

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma}X_3'(0) = X_1'(\delta) + \frac{\gamma}{\sigma}X_3'(\delta) \\ \sigma X_1'(0) - \gamma X_3'(0) = -X_3'(\delta). \end{cases} \quad (3.28)$$

Let us consider a function P defined on the interval $[0, 2\delta]$ by

$$P(\theta) = X_1(\theta) + \frac{\gamma}{\sigma}X_3(\theta), \quad P(\theta + \delta) = \frac{1}{\sigma}X_3(\theta)$$

for $\theta \in [0, \delta]$. By (3.27), we have

$$P(\delta^-) = P(\delta^+)$$

and by (3.28) we have

$$P'(\delta^-) = P'(\delta^+).$$

Consequently, the function P is of class C^1 on $[0, 2\delta]$. By (3.27) we get also

$$S_n(P)(0) = 0$$

and by (3.28) we get

$$S_n(P')(0) = 0.$$

Hence, the functions P and P' satisfy $S_n(P) = 0$ and $S_n(P') = 0$ for $\theta = 0$. If we extend $p = P + r$ to the interval $[0, 2\pi]$ by (3.10) and to \mathbb{R} by 2π -periodicity, it satisfies by construction $S_n(p) = C_n$. We have also $p(0) = p(2\pi)$ and $p'(0) = p'(2\pi)$ by (3.10) so that the function p is of class C^1 . Finally, we have $p + p'' \geq 0$ because $Z \in \mathcal{P}_n$. We conclude that p is the support function of a rotor.

Now, we consider p the support function of a rotor. We define a function W by (3.19). First, the condition (3.3) satisfied by p implies that $Z = W + W''$ takes its value in \mathcal{P}_n . Let us show that W satisfies (3.26). By (3.21), we have :

$$\frac{1}{\sigma}X_3(0) = \sigma X_1(\delta) + \gamma X_3(\delta)$$

and by using $S_n(P)(0) = 0$, we get :

$$\sigma X_1(0) - \gamma X_3(0) = -X_3(\delta).$$

These two real conditions imply $W(\delta) = \bar{w}W(0)$. By using (3.22) and the equality $S_n(P')(0) = 0$ we get $W'(\delta) = \bar{w}W'(0)$. Hence W belongs to Γ . □

Let us do two important remarks. First, any function $W \in \Gamma$ such that $Z = W + W''$ satisfies the condition :

$$\int_0^\delta Z(t)e^{it} dt = 0. \quad (3.29)$$

This condition is analogous to (3.13). If W is in Γ , and if $Z = W + W''$, the condition (3.26) implies (3.29). Conversely, if Z is in \mathcal{Z} , and if W is such that $W + W'' = Z$, then the condition (3.29) does not imply necessary (3.26).

The second remark is that (3.25) remains unchanged if we replace W by $We^{i\alpha}$ and Z by $Ze^{i\alpha}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$. This means that (3.25) is invariant by rotation. These invariance properties will be very useful to simplify the control problem.

From now on, we will mainly deal with the set Γ instead of the set E as there is a one-to-one correspondance between these two sets. Hence, in order to simplify, for $W \in \Gamma$, we will denote by $\mathcal{A}(W)$ the area of the corresponding rotor given by (3.25).

For $W \in \Gamma$ such that $W = X_1 + iX_3$ and $Z = W + W'' = U + iV$, we denote by $J(W)$ the functional

$$J(W) = \int_0^\delta UX_1 + VX_3 = \int_0^\delta \Re(Z\bar{W}). \quad (3.30)$$

An integration by parts shows that we have

$$J(W) = \int_0^\delta Z\bar{W} = \int_0^\delta |W|^2 - |W'|^2$$

and as $J(W) \in \mathbb{R}$, we have

$$\int_0^\delta \Im(Z\bar{W}) = 0.$$

The area of a rotor becomes :

$$\mathcal{A}(W) = \pi r^2 + \frac{n}{4\sigma^2} J(W)$$

Corollary 3.1. *The problem (3.18) is equivalent to minimize (3.30) in Γ .*

We will mainly deal with J in the following.

Proposition 3.13. *Let Z be in \mathcal{Z} . There exists a function $W \in \Gamma$ such that $W + W'' = Z$ if and only if the function W is of the form :*

$$W(\theta) = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} + \int_0^\theta \sin(\theta - t)Z(t)dt \quad (3.31)$$

where $B \in \mathbb{C}$ and A is given by :

$$A = \frac{\omega}{4\sigma} \int_0^\delta e^{-i\theta} Z(\theta)d\theta. \quad (3.32)$$

□ Proof. If W is in Γ and satisfies $W + W'' = Z$, then (3.31) follows directly from the resolution of the differential equation. As, W is in Γ , we must have (3.26). A direct computation using (3.26) gives (3.32).

Conversely, assume now that W satisfies (3.31) and (3.32). Using (3.32) to compute $W(\delta)$ and $W'(\delta)$ we get (3.26). Moreover we have $W + W'' = Z$ and Z takes its values in \mathcal{P}_n by definition. Hence, W is in Γ . □

3.3.2 Geometrical Consequences

In this section, we derive geometrical consequences from the previous parametrization of a rotor by the functions (W, Z) . Let us investigate first the relation between the geometrical rotor of support function p and the function W .

Proposition 3.14. *Let f be the radius of curvature of a rotor and p its support function given by :*

$$p(\theta) = a \cos(\theta) + b \sin(\theta) + \int_0^\theta \sin(\theta - t) f(t) dt.$$

Then, the functions (W, Z) defined by (3.19) satisfy

$$W(\theta) = i\sigma\bar{\omega}(a + ib - r)e^{-i\theta} + \bar{\omega}^2\bar{A}e^{-i\theta} + Ae^{i\theta} + \int_0^\theta \sin(\theta - t)Z(t)dt \quad (3.33)$$

where

$$A = \frac{i}{2} \int_0^\delta e^{-i\theta}(f(\theta) - r)d\theta = \frac{\omega}{4\sigma} \int_0^\delta e^{-i\theta} Z(\theta)d\theta.$$

□ Proof. This follows from a direct computation using the transformation that gives W in terms of the support function p . □

We finish this section by investigating the position of a rotor K in a tangential polygon P . Indeed, by choosing an appropriate origin of the axis and a certain position of the rotor, one does not change the minimization problem. By performing such an operation, we can simplify the initial conditions for the complex support function W in (3.33). Let us denote by r the radius of the inscribed circle in the n -gon P_n .

Theorem 3.7. *Let K be a rotor of P_n and p its support function. There exists an origin of the axis so that we have*

$$p(0) = r, \quad p(\delta) = r, \quad p'(0) = 0. \quad (3.34)$$

Geometrically speaking (see figure 3.4), this result means that given any rotor K , we can find an affine map T such that P_n is an osculating n -gon to $T(K)$ and such that we have :

- the origin of the axis is the center of P_n
- the first axis is the mid-perpendicular of a side $[AB]$ of P_n
- the intersection of the first axis with $[AB]$ is the initial point of the rotor (for $\theta = 0$).

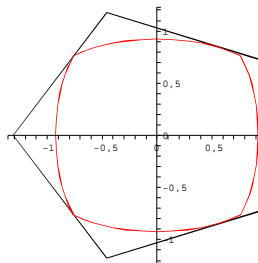


FIG. 3.4 – Position of a rotor in the pentagon ($n = 5$) as in theorem 3.7.

□ Proof of the theorem. The idea of the proof is the following. Given a rotor K of P_n , we show that a contact point between K and P_n passes through the middle of the side (see figure 3.4).

Let M be a point on the rotor of coordinates $z_M(\theta) = (p(\theta) + ip'(\theta))e^{i\theta}$ and $D_\theta, D_{\theta+\delta}$ two consecutive sides of P_n . By construction, D_θ and $D_{\theta+\delta}$ are two support lines of K at point θ and $\theta + \delta$ and we will call B their point of intersection which is a vertex of P_n .

A simple computation shows that the coordinates of B, z_B , are given by

$$z_B = \frac{ie^{i\theta}}{\sigma} (p(\theta + \delta) - \omega p(\theta)).$$

Let A be the other vertex of P_n which belongs to D_θ and I the middle of $[AB]$. If z_I denotes the coordinates of I , we have :

$$z_B - z_I = r \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

We get

$$z_M - z_I = z_M - z_B + z_B - z_I = -\frac{1}{\sigma} \left(p(\theta + \delta) - \gamma p(\theta) - \sigma p'(\theta) - r\sigma \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \right) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}.$$

The function $\theta \mapsto \Delta(\theta)$ defined on $[0, 2\pi]$ by :

$$\Delta(\theta) = p(\theta + \delta) - \gamma p(\theta) - \sigma p'(\theta) - r\sigma \tan\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

is continuous on the interval $(0, 2\pi]$.

If the function Δ vanishes on the interval $[0, 2\pi]$, there exists consequently $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ such that $M(\theta_0) = I$, i.e. $M(\theta_0)$ is the middle of a side of P_n . By taking the origin on the mid-perpendicular of $[AB]$ at distance r from the side $[AB]$, we get the theorem. Indeed, using (3.2), we get $p(0) = x(0) = r$ and $p'(0) = y(0) = r$ and by the choice of P_n , $p(\delta) = r$ (recall that

It remains to prove that Δ vanishes on $[0, \pi]$. First, notice that $\sigma \tan(\frac{\delta}{2}) = 1 - \gamma$ so that Δ can be written

$$\Delta(\theta) = P(\theta + \delta) - \gamma P(\theta) - \sigma P'(\theta)$$

using $P(\theta) = p(\theta) - r$.

If $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, then (3.24) implies

$$P(\theta + m\delta) = s_m P(\theta + \delta) - s_{m-1} P(\theta), \quad \forall \theta \in [0, \delta].$$

We obtain for Δ the relation $\Delta(\theta + \pi) + \Delta(\theta) = 0$. In this case, the function Δ changes of sign on $[0, 2\pi]$ and we get the existence of $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ such that $\Delta(\theta_0) = 0$.

If $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, we apply (3.10) with $P = p - r$ and $k = m + 1$. We obtain :

$$\Delta(\theta + k\delta) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\delta}{2})} (\Delta(\theta + \delta) + \Delta(\theta)).$$

If $\Delta(\theta + \delta)$ and $\Delta(\theta)$ are of opposite sign, then the function Δ vanishes. If $\Delta(\theta + \delta)$ and $\Delta(\theta)$ have the same sign, then $\Delta(\theta + k\delta)$ is of opposite sign. Consequently, the function Δ changes of sign on $[0, 2\pi]$. \square

Corollary 3.2. *Let us assume that the support function of a rotor satisfies $p(0) = r$ and $p'(0) = 0$. Then we have $p(\delta) = r$ and $W(0) = W(\delta) = 0$. Moreover, the real A given by (3.32) is of the form :*

$$A = i\lambda\bar{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

□ Proof. By theorem 3.7, we can choose the origin at the center of the n -gon so that $p(0) = r$ and $p'(0) = 0$. We have also $p(\delta) = r$ because the origin is the center of P_n . Hence, by (3.19) we have $W(0) = 0$ and $W(\delta) = \bar{\omega}W(0) = 0$. By (3.33), we get $W(0) = \bar{\omega}^2\bar{A} + A = 0$. This gives (3.35). □

3.3.3 Fourier series of regular rotors

In this section we give a brief description of two families of regular rotors by Fourier series. An analogous description is given by Focke (see [15]). We have already established the Fourier decomposition of a rotor K of support function p in the proof of lemma 3.4. Recall that if J denotes the set

$$J = (n\mathbb{Z} + 1) \cup (n\mathbb{Z} - 1) \setminus \{\pm 1\}$$

then, p is given by

$$p(\theta) = r + c_1 e^{i\theta} + c_{-1} e^{-i\theta} + \sum_{j \in J} c_j e^{ij\theta}. \quad (3.36)$$

In the case of constant width bodies, the support function becomes

$$p(\theta) = r + c_1 e^{i\theta} + c_{-1} e^{-i\theta} + \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \left(c_{4l-1} e^{i(4l-1)\theta} + c_{4l+1} e^{i(4l+1)\theta} \right).$$

The area of K becomes by Parseval equality :

$$\mathcal{A}(p) = \pi \left(r^2 - \sum_{j \in J} \frac{|c_j|^2}{j^2 - 1} \right). \quad (3.37)$$

Now we come to the Fourier description of regular rotors which are easy to describe using the new parametrization given by (W, Z) .

Let $m \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \pm 1$, $L = mn - \varepsilon$, $\tau = \frac{\delta}{L}$ and $s = L - 1$. We can easily check that the complex function defined by

$$Z(\theta) = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j} 1_{[j\tau, (j+1)\tau]} \quad (3.38)$$

is an element of \mathcal{Z} . We will define the regular rotors by (3.38).

Definition 3.5. *We call regular rotor any element W of Γ such that $W + W''$ is of the form (3.38). The first series consists of the rotors obtained for $\varepsilon = 1$ and the second series is obtained for $\varepsilon = -1$.*

The integer $s = mn - \varepsilon - 1$ is the number of switches of the control defining the rotor and $L = s + 1$ denotes the number of intervals of the subdivision $[0, \delta]$.

Remark 3.1. *Let us consider $(l, p) \in \mathbb{Z}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$ and the function \tilde{Z} defined by :*

$$\tilde{Z}(\theta) = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{pj} 1_{[j\tau, (j+1)\tau]} \quad (3.39)$$

where $p(s+1) = -1 + ln$ and $\tau = \frac{\delta}{s+1}$. The function Z defines an element of \mathcal{Z} that generalizes the definition above (3.38). The function \tilde{Z} does not go over the vertices regularly as the function Z . Anyway, in the following, we restrict ourselves to the study of the case $p = \pm 1$.

We define now the set

$$J_\varepsilon = \left\{ k \in \mathbb{Z}, k \equiv \varepsilon[n] \right\}.$$

Proposition 3.15. *The Fourier series of a regular rotor is given by*

$$Z(\theta) = \frac{n}{\pi} e^{-\frac{i\varepsilon\delta}{2}} \sin\left(\frac{\varepsilon\delta}{2}\right) \sum_{k \in J_\varepsilon} \frac{e^{ikL\theta}}{k} \quad (3.40)$$

□ Proof. The function $\theta \mapsto e^{i\theta} Z(\theta)$ is δ periodic as we have $Z(\theta + \delta) = \bar{\omega} Z(\theta)$. Thus, one has for a.e. $\theta \in \mathbb{R}$

$$Z(\theta) e^{i\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikn\theta}$$

where the Fourier coefficients are given by

$$c_k = \frac{n}{2\pi} \int_0^\delta e^{-i(kn-1)\theta} Z(\theta) d\theta.$$

Using (3.38), we get

$$c_k = \frac{i}{kn-1} (e^{-i(kn-1)\tau} - 1) \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j} e^{-i(kn-1)j\tau}$$

which is a geometric progression. We obtain $c_0 = 0$ and

$$c_k \neq 0 \iff \omega^\varepsilon e^{-i(kn-1)\tau} = 1$$

because $\tau = \frac{\delta}{L}$. For $\varepsilon = 1$, one has :

$$\omega^\varepsilon e^{-i(kn-1)\tau} = 1 \iff \exists j \in \mathbb{Z}, kn-1 = (jn+1)L.$$

In this case, we get :

$$c_k = \frac{n}{\pi(jn+1)} e^{-i\frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

And for $\varepsilon = -1$, a similar computation yields

$$c_k = -\frac{n}{\pi(jn-1)} e^{i\frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

This gives (3.40). □

The Fourier series of Z can be also written :

$$Z(\theta) = \frac{n}{\pi} e^{-i\varepsilon\frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\varepsilon\delta}{2}\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i((mnj-\varepsilon j+\varepsilon m)n-1)\theta}}{jn+\varepsilon}.$$

We will call the first series of rotors O_n^{mn-1} obtained for $\varepsilon = 1$ and the second series obtained of $\varepsilon = -1$ will be called O_n^{mn+1} (see [15], [32]). For $n = 4$, the two families O_4^{4m-1} and O_4^{4m+1} describe the odd Reuleaux polygons.

Proposition 3.16. *Let K be a rotor and Z its complex radius of curvature. If Z is given by (3.38), then the area of K becomes :*

$$\mathcal{A}(K) = \pi r^2 - \frac{r^2 n^2}{2\pi} \tan^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(jn+1)^2 ((mn-\varepsilon)^2 (jn+1)^2 - 1)} \quad (3.41)$$

□ Proof. By (3.25), we have :

$$\mathcal{A}(K) = \pi r^2 + \frac{n}{4\sigma^2} \int_0^\delta \bar{Z}(\theta) W(\theta) d\theta$$

where W is in Γ and satisfies $W + W'' = Z$. By (3.40), the function W is given by

$$W(\theta) = -\frac{n}{\pi} e^{-i\varepsilon\frac{\delta}{2}} \sum_{k \in J_\varepsilon} \frac{e^{ikL\theta}}{k(k^2L^2 - 1)}.$$

Applying Parseval equality, we get (3.41). □

The following proposition has been proved in [15]. We give a short proof using the expression of the area given by (3.41).

Proposition 3.17. *In the class of the regular rotors $O_n^{m\pm 1}$, the one of minimal area is the one obtained for $m = 1$ and $\varepsilon = 1$, its Fourier series is given by*

$$Z(\theta) = \frac{n}{\pi} e^{-i\frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i((n-1)j+1)n-1\theta}}{jn+1}. \quad (3.42)$$

□ Proof. The area of a rotor K described by $Z \in \mathcal{Z}$ is an increasing function of $m \in \mathbb{N}^*$ by (3.41). Thus the minimum in the class of regular rotors is obtained for $m = 1$. The minimum between O_n^{n-1} and O_n^{n+1} is clearly O_n^{n-1} . □

Goldberg conjectured that the global minimizer is O_n^{n-1} .

Conjecture 3.1. *The regular rotor O_n^{n-1} is the rotor of P_n of least area among the class of rotors.*

It is easy to see that O_n^{n-1} is invariant with respect to the action of the dihedral group of order $2(n-1)$, D_{n-1} . Anyway, it seems difficult to prove that a minimizer has these symmetries. For instance, the Reuleaux triangle is invariant with respect to the group D_3 and the lens with respect to the group D_2 .

3.3.4 Formulation in terms of a control problem and first consequences of the PMP

In the case of the sets of constant width, one can deal with one control on the interval $[0, \pi]$ because the functional to minimize is given by (3.16) (see [19]). Here, we have to deal with two controls (U, V) on $[0, \delta]$ because $\gamma \neq 0$ and in the functional there are two mixed terms $\int_0^\delta f(\theta)p(\theta + \delta)d\theta$ and $\int_0^\delta f(\theta + \delta)p(\theta)d\theta$.

We consider the differential system (harmonic oscillator) on the interval $[0, \delta]$ described by the equations :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + U \\ \dot{X}_3 = X_4 \\ \dot{X}_4 = -X_3 + V \end{cases} \quad (3.43)$$

where the control (U, V) takes its values in the polygon \mathcal{P}_n . Recall that \mathcal{P}_n is a regular polygon of center the origin and of vertices given by $r^* \omega^j e^{i\alpha}$, where $r^* \geq 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. The system (3.43) can also be written

$$\ddot{W} + W = Z \quad (3.44)$$

where

$$W = X_1 + iX_3, \quad Z = U + iV.$$

As the vector (X_1, X_3) satisfies the boundary conditions given by (3.26), the Pontryagin Maximum Principle (PMP) will lead to transversality conditions. Notice that the initial and final states are not fixed, but they are linked by (3.26). The initial problem (3.18) is equivalent to minimize (3.25) where (X_1, X_2, X_3, X_4) satisfies (3.43) and (3.26) and the control (U, V) belongs to \mathcal{P}_n . Our goal is now to study the optimal control problem :

$$\min \left\{ \int_0^\delta UX_1 + VX_3, (U, V) \in \mathcal{P}_n, (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ satisfies (3.26) and (3.43)}. \right\} \quad (3.45)$$

In the following, we note $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ and $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ the dual variable. The Hamiltonian of the system $H =: H(X, q, U, V, p_0)$ is given by

$$H = q_1 X_2 + q_2(-X_1 + U) + q_3 X_4 + q_4(-X_3 + V) + p_0(UX_1 + VX_3)$$

where $p_0 \in \mathbb{R}$. We can write H as follows :

$$H = q_1 X_2 - q_2 X_1 + q_3 X_4 - q_4 X_3 + (q_2 + p_0 X_1)U + (q_4 + p_0 X_3)V. \quad (3.46)$$

By the PMP, there exists a map $X : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^4$ absolutely continuous, there exists a map $q : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^4$ absolutely continuous, there exists a constant $p_0 \leq 0$ and an optimal control $Z(t) = (U(t), V(t))$ satisfying the equation

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial X} \end{cases} \quad (3.47)$$

and

$$\max_{(\tilde{U}, \tilde{V}) \in \mathcal{P}_n} H(X(t), q(t), \tilde{U}, \tilde{V}, p_0) = H(X(t), q(t), U(t), V(t), p_0). \quad (3.48)$$

Moreover, the pair (p_0, q) is non trivial and q satisfies transversality conditions that we will explicit in the paragraph below.

Definition 3.6. *We will call an extremal trajectory a quadruplet (X, q, p_0, Z) satisfying (3.47), (3.48) and the conditions above.*

As the system is autonomous, the Hamiltonian of the system is conserved along the extremal trajectories of the system. The variable q is called the dual variable and it satisfies the dual system :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 - p_0 U \\ \dot{q}_2 = -q_1 \\ \dot{q}_3 = q_4 - p_0 V \\ \dot{q}_4 = -q_3. \end{cases} \quad (3.49)$$

Let us shorten the notations by writing the state variable $W = X_1 + iX_3$ and the dual variable $\Pi = q_2 + iq_4$ so that we have :

$$\ddot{W} + W = Z, \quad \ddot{\Pi} + \Pi = p_0 Z.$$

It follows that W and Π are of class $C^{1,1}$ on the interval $[0, \delta]$ as the control is bounded.

Let us compute the transversality conditions. We have $\dot{\Pi} = -q_1 - iq_3$. Instead of using the vector $(X(0), X(\delta))$ of \mathbb{R}^8

$$(X_1(0), X_2(0), X_3(0), X_4(0), X_1(\delta), X_2(\delta), X_3(\delta), X_4(\delta)),$$

we consider the vector of \mathbb{C}^4 :

$$(W(0), \dot{W}(0), W(\delta), \dot{W}(\delta)).$$

It takes its values in the subspace M of \mathbb{C}^4 :

$$M = \{(A, B, \bar{w}A, \bar{w}B), (A, B) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Its orthogonal in \mathbb{C}^4 is simply :

$$M^\perp = \{(A', B', -\bar{w}A', -\bar{w}B'), (A', B') \in \mathbb{C}^2\}.$$

By the PMP the vector $(-q(0), q(\delta))$ is in M^\perp (see [44], [50]). The vector $(-q(0), q(\delta))$ written in \mathbb{R}^8 is of the form :

$$(-q(0), q(\delta)) = (-q_2(0), -q_4(0), q_1(0), q_3(0), q_2(\delta), q_4(\delta), -q_1(\delta), -q_3(\delta))$$

and we can write it analogously in \mathbb{C}^4 :

$$(-q(0), q(\delta)) = (-\Pi(0), -\dot{\Pi}(0), \Pi(\delta), \dot{\Pi}(\delta)).$$

Hence, $\Pi(\delta) = \bar{w}\Pi(0)$ and $\dot{\Pi}(\delta) = \bar{w}\dot{\Pi}(0)$, consequently, Π satisfies (3.26), that is the same boundary conditions than W . Note that the Hamiltonian can be expressed as follows :

$$H = -W \cdot \Pi - \dot{W} \cdot \dot{\Pi} + (p_0W + \Pi) \cdot Z \quad (3.50)$$

where the dot means a scalar product in \mathbb{R}^2 . We deduce from (3.43) and from (3.49) the equations :

$$\ddot{X}_1 + X_1 = U, \quad \ddot{X}_3 + X_3 = V$$

and

$$\ddot{q}_2 + q_2 = p_0U, \quad \ddot{q}_4 + q_4 = p_0V.$$

Now, we simplify the Pontryagin system by expressing the dual variable q as a function of the state variable X . This corresponds to a reduction of the number of degrees of freedom of the Pontryagin system.

Lemma 3.5. *Let W be an extremal trajectory of the system and $\Pi = q_2 + iq_4$ its dual variable. Then, there exists $A \in \mathbb{C}$ such that the function $\Pi + p_0W$ is of the form :*

$$\Pi(\theta) + p_0W(\theta) = Ae^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, \delta].$$

□ Proof. We have by (3.49) :

$$\ddot{\Pi} + \Pi = p_0(U + iV) = p_0Z = p_0(\dot{W} + W)$$

and consequently, the function $y = \Pi - p_0W$ satisfies $\ddot{y} + y = 0$. There exist two constants $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ such that $\forall \theta \in [0, \delta]$, we have

$$\Pi(\theta) - p_0W(\theta) = Ae^{-i\theta} + Be^{i\theta}. \quad (3.51)$$

Let us prove that we can take $B = 0$. For $\theta = 0$ and for $\theta = \delta$, we get :

$$\Pi(0) - p_0 W(0) = A + B, \quad \Pi(\delta) - p_0 W(\delta) = A\bar{\omega} + B\omega.$$

But, as (W, Π) belong to Γ , we have by the transversality conditions :

$$\Pi(\delta) - p_0 W(\delta) = \bar{\omega}\Pi(0) - p_0\bar{\omega}W(0) = A\bar{\omega} + B\bar{\omega}.$$

Thus, we conclude that $B = 0$. \square

We show now that the extremal trajectories are not abnormal.

Lemma 3.6. *The constant p_0 is strictly negative.*

\square Proof. Let us assume that $p_0 = 0$. By using (3.48) for $(\tilde{U}, \tilde{V}) = 0$ (the point $(0, 0)$ is inside the polygon \tilde{G}_n), we get for almost $t \in [0, \delta]$:

$$q_2(t)U(t) + q_4(t)V(t) \geq 0.$$

Consequently,

$$\int_0^\delta (q_2(t)U(t) + q_4(t)V(t))dt \geq 0.$$

But, we have :

$$\int_0^\delta (q_2(t)U(t) + q_4(t)V(t))dt = \int_0^\delta \operatorname{Re}(\bar{\Pi}(t)Z(t))dt.$$

and by the previous lemma and (3.29), we have :

$$\int_0^\delta \bar{\Pi}Z = \int_0^\delta \bar{A}e^{i\theta} Z(\theta)d\theta = 0.$$

Hence, the function $\Pi \cdot Z$ must be zero on the interval $[0, \delta]$. If Π is not zero, then the optimal control associated to this trajectory is orthogonal to Π . This contradicts (3.48) by choosing a control $Z \in \mathcal{P}_n$ such that $\Pi \cdot Z > 0$. Hence, Π must be 0 everywhere. This is not possible because by the PMP, the pair (Π, p_0) is not zero. \square

Lemma 3.7. *Let W an extremal trajectory of the system and Π its dual variable. There exists an extremal trajectory of the system, W_1 , such that if Π_1 denotes its dual variable, then we have*

$$\Pi_1 = -W_1.$$

\square Proof. For $\lambda \in \mathbb{C}$, we consider the functions (W_1, Π_1) defined on $[0, \delta]$ by :

$$\begin{cases} W_1(\theta) = W(\theta) + \lambda e^{-i\theta} \\ \Pi_1(\theta) = \Pi(\theta) + \lambda e^{-i\theta}. \end{cases}$$

We have

$$\ddot{W}_1 + W_1 = Z$$

and

$$\ddot{\Pi}_1 + \Pi_1 = -Z.$$

We can easily check that W_1 and Π_1 satisfy (3.26). By (3.29), the functional remains unchanged :

$$\int_0^\delta \Re(Z\overline{W}_1) = \int_0^\delta \Re(Z\overline{W}).$$

Hence, (W_1, Π_1) is also an optimal trajectory. Recall that the Hamiltonian along this trajectory is defined by :

$$H_1 = -\Re(W_1\overline{\Pi}_1) - \Re(W_1'\overline{\Pi}_1') + \Re((\Pi_1 - W_1)\overline{Z}).$$

Using lemma 3.5, we have $\Pi = -W$, and by a computation, we get :

$$H_1 = H + 2\Re(A\overline{\lambda}) + 2|\lambda|^2$$

where H is given by (3.50). We have proved that the PMP (3.48) gives the same optimal control for (W, Π) and for (W_1, Π_1) as both Hamiltonian are equal up to a constant. Finally, we have :

$$\Pi_1 + W_1 = (A + 2\lambda)e^{-i\theta}.$$

By taking $A = -2\lambda$, we get the lemma. \square

From now on, we consider extremal solutions (W, Z) of the system such that the dual variable Π satisfies $\Pi = -W$ (lemma 3.7). To shorten, we will say that W is an extremal trajectory of the system if $\Pi = -W$ and if it satisfies the Pontryagin's principle.

Proposition 3.18. *Let W be an extremal trajectory of the system and Z the optimal control. The Hamiltonian of the system along this trajectory is given by :*

$$H = |W|^2 + |\dot{W}|^2 - 2\Re(W \cdot \overline{Z}) = |W - Z|^2 + |\dot{W}|^2 - |Z|^2 \quad (3.52)$$

and it is constant.

\square Proof. Using the previous lemma and (3.50), we get (3.52). The Hamiltonian is constant because the system is autonomous. \square

3.3.5 Computation of the optimal control

Definition 3.7. *Let Z_1, Z_2 be two complex numbers in \mathcal{P}_n such that $Z_1 \neq Z_2$. A point $\tau \in [0, \delta]$ is called a switching point when the control (U, V) jumps at the point τ :*

$$(U(\tau^-), V(\tau^-)) = Z_1, \quad (U(\tau^+), V(\tau^+)) = Z_2.$$

We show that for an optimal control, the function Z takes its values within the vertices of \mathcal{P}_n . This is a consequence of the maximization of a linear form within a convex set. Moreover, we show that Z switches a finite number of times in $[0, \delta]$ and goes all over the vertices ω^j in the trigonometrical way or antitrigonometrical way.

To simplify we consider \mathcal{P}'_n , the regular polygon of center the origin and of vertices the points of coordinates $(\omega^j)_{0 \leq j \leq n-1}$. It corresponds to the initial polygon \mathcal{P}_n by an homotheticity of ratio $\lambda = \frac{1}{2 \sin(\frac{\delta}{2})}$ and a rotation of angle $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$. An optimal control Z takes its values inside \mathcal{P}_n if and only if $\lambda e^{i\alpha} Z \in \mathcal{P}'_n$. Hence, both problems are equivalent.

Theorem 3.8. *Let W be an extremal trajectory of the system. Then, there exists a subdivision $(\tau_j)_{0 \leq j \leq r}$ of $[0, \delta]$ such that $\tau_0 = 0$, $\tau_{r+1} = \delta$ and such that on each $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ the optimal control (U, V) satisfies $Z = \omega^{k_j}$ where $k_j \in \{0, \dots, n-1\}$ and $j \in \{0, \dots, r\}$.*

□ Proof. In the first part of the proof we show that the control takes its values on the vertices of \mathcal{P}_n . By (3.48), the optimal control is a solution of the maximization problem :

$$\max_{(\tilde{U}, \tilde{V}) \in \mathcal{P}_n} f(\tilde{U}, \tilde{V}) = a\tilde{U} + b\tilde{V}$$

where $a = X_1(\theta)$, $b = X_3(\theta)$.

If (X_1, X_3) vanishes on a set of positive measure, then $W = Z = 0$ everywhere (because the Hamiltonian H satisfies $H \geq 0$) and the solution is the disc. If there exists $\theta \in [0, \delta]$ such that $(X_1(\theta), X_3(\theta)) = 0$, then the control Z can be taken arbitrary in \mathcal{P}_n and in particular we can take $Z = \omega^{k_j}$ for every $k_j \in \{1, \dots, n\}$.

Assume now that $(a, b) \neq 0$. Then, the maximum cannot be in the interior of \mathcal{P}_n because we have $\nabla f = (a, b) \neq 0$.

Let us assume that f takes its maximal value at a point (u_0, v_0) in the interior of the segment joining two consecutive vertices $A_j = \omega^j$ and $A_{j+1} = \omega^{j+1}$: $(u_0, v_0) = t_0 A_j + (1 - t_0) A_{j+1}$. Let $t \in [0, 1]$ and $(u_t, v_t) = t A_j + (1 - t) A_{j+1}$. We have :

$$f(u_t, v_t) - f(u_0, v_0) = (t - t_0)(f(A_j) - f(A_{j+1}))$$

and consequently there exists $t \in [0, 1]$ such that $f(u_t, v_t) > f(u_0, v_0)$. (Take $t > t_0$ if $f(A_j) - f(A_{j+1}) > 0$ and $t < t_0$ if $f(A_j) - f(A_{j+1}) < 0$). If $f(A_j) = f(A_{j+1})$, then f is constant on the segment $[A_j, A_{j+1}]$. The maximum in this case is also obtained on a vertex of \mathcal{P}_n . Thus, we have proved that Z takes its values at the vertices of \mathcal{P}_n .

In the second part of the proof, we show that the number of switching points is finite on the interval $[0, \pi]$.

Lemma 3.8. *The number of switches of an optimal solution is finite on the interval $[0, \pi]$.*

□ Proof of the lemma. Assume that there exists a sequence τ_j of switching points in $[0, \pi]$ that converges to a point $\tau \in [0, \pi]$. We will show that

$$W(\tau) = 0, \quad \dot{W}(\tau) = 0. \tag{3.53}$$

For all j , we have

$$W(\tau_j) = t_j \omega^{j - \frac{1}{2}} \tag{3.54}$$

where $t_j \in \mathbb{R}_-$. Indeed, as the Hamiltonian is constant and as the functions $\theta \mapsto |W(\theta)|^2$ and $\theta \mapsto |W'(\theta)|^2$ are continuous, the function $\theta \mapsto \Re(W(\theta)\bar{Z}(\theta))$ is continuous. Hence, at a switching point τ_j , we get :

$$\Re(W(\tau_j)\bar{\omega}^j) = \Re(W(\tau_j)\bar{\omega}^{j+1}).$$

Geometrically speaking, the vector $W(\tau_j)$ is orthogonal to the segment $[\omega^j, \omega^{j+1}]$. By doing $(U, V) = (0, 0)$ in (3.48), the quantity $-W(\tau_j) \cdot Z(\tau_j^+)$ must be positive. As we have at a switching point $W(\tau_j) = t_j \omega^{j - \frac{1}{2}}$, we must have $t_j \leq 0$. Hence, we get (3.54).

As W is of class $C^{1,1}$ on $[0, \pi]$, the sequence (t_j) is bounded. Consequently (up to a subsequence), we can assume that the sequence t_j converges to a real $t \in \mathbb{R}$. Assume that $t \neq 0$, consequently there

exists $j_0 \in \mathbb{N}$ such that for $j \geq j_0$ we have $t_j \neq 0$. Hence, $\frac{W(\tau_j)}{W(\tau_{j+1})}$ converges to 1 and $\frac{W(\tau_j)}{W(\tau_{j+1})} = \frac{t_j}{t_{j+1}}\bar{\omega}$ which converges to $\bar{\omega}$. Thus we have a contradiction and $\dot{W}(\tau) = 0$.

In the same way, we have $\dot{W}(\tau) = 0$.

Using (3.53), the Hamiltonian H of the system is 0. As it is positive by the PMP, the functions W and Z are zero and represent the disc which maximizes the functional. This ends the proof of the lemma. \square

The lemma above shows that the number of switches of an optimal solution is finite, this ends the proof of the theorem. \square

Remark 3.2. *The form of W at a switching point given by (3.54) is very important. Indeed, as we will see later in theorem 3.11, this will enable us to characterize an optimal solution.*

By theorem 3.8, we have shown that an extremal trajectory for the problem is "bang-bang", that is the optimal control associated to this trajectory takes the extremal values of \mathcal{P}_n .

The next step is to show that an optimal control takes all the values ω^j for $j \in \{0, \dots, r\}$. And we show also that it goes from ω^j to ω^{j+1} at every switching point or from ω^{j+1} to ω^j at every switching point.

Theorem 3.9. *Let W in Γ be an extremal trajectory of the system and $(\tau_j)_{0 \leq j \leq r}$ be a subdivision given by theorem 3.8. Then, up to a rotation, we have $k_j = j$ for $j \in \{0, \dots, r\}$.*

\square Proof. Let us denote by $\omega^{h(j)}$, the values of the control $Z(\theta)$ on each interval $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j \in \{0, \dots, r\}$. By (3.54), we have :

$$W(\tau_j) = t_j \omega^{h(j)-\frac{1}{2}}, \quad , 0 \leq j \leq r.$$

Geometrically speaking, the vector $W(\tau_j)$ is on the median of the segment $[\omega^{h(j)}, \omega^{h(j+1)}]$ which is a side or a diagonal of the polygon \mathcal{P}_n . The line Δ contains 0, 1, or 2 vertices of \mathcal{P}_n .

First, assume that Δ does not contain any summit of \mathcal{P}_n . If $|h(j) - h(j+1)| \neq 1$, there exists $k \in \{1, \dots, r\}$ such that

$$-2W(\tau_{j+1}) \cdot Z_k > -2W(\tau_{j+1}) \cdot Z_{j+1}$$

where $Z_k = \omega^k = (U_k, V_k)$. We obtain by (3.52) :

$$H(W(\tau_{j+1}), \Pi(\tau_{j+1}), U_k, V_k, p_0) > H(W(\tau_{j+1}), \Pi(\tau_{j+1}), U(\tau_{j+1}^-), V(\tau_{j+1}^-), p_0)$$

which is a contradiction with the Pontryagin principle (3.48).

Now assume that Δ contains one vertex of \mathcal{P}_n . The segment $[\omega^{h(j)}, \omega^{h(j+1)}]$ is parallel to a side $[\omega^k, \omega^{k+1}]$ of \mathcal{P}_n . Let us call ω^l the vertex of \mathcal{P}_n opposite to $[\omega^k, \omega^{k+1}]$. If $|h(j) - h(j+1)| \neq 1$, we get a contradiction in (3.48) the same way than in the first case by taking for the control $Z(\tau_{j+1}^-)$, the value ω^k , ω^{k+1} or ω^l .

If Δ contains two vertices ω^k and ω^l of \mathcal{P}_n , we get the same contradiction. Indeed, if $|h(j) - h(j+1)| \neq 1$, we take for the control $Z(\tau_{j+1}^-)$ the value ω^k or ω^l .

We have proved that $|h(j+1) - h(j)| = 1$ for $j = 1, \dots, r$. To conclude the proof of the theorem, it remains to prove that the optimal control does not go backward taking the values $\{1, \omega, 1, \dots\}$. Let us assume that an optimal control Z is of the form

$$Z = 1_{[0, \tau_1]} + \omega 1_{[\tau_1, \tau_2]} + 1_{[\tau_2, \tau_3]} + \sum_{2 \leq j \leq r} \omega^{h(j)} 1_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}.$$

As Z is switching from 1 to ω for $\theta = \tau_1$, we have by (3.54) : $W(\tau_1) = t_1\omega^{\frac{1}{2}}$ where $t_1 < 0$. At the switching point τ_2 , we have also : $W(\tau_2) = t_2\omega^{\frac{1}{2}}$, where $t_2 < 0$. Hence, the vectors $W(\tau_1)$ and $W(\tau_2)$ are parallel. For $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$, the function $\theta \mapsto W(\theta)$ describes an arc of ellipse. Indeed, by (3.44), we have for $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$:

$$W(\theta) = X_1(\theta) + iX_3(\theta) = \omega + A_1e^{i\theta} + B_1e^{-i\theta}, \quad (A_1, B_1) \in \mathbb{C}^2.$$

Thus, for $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$, the function $\theta \mapsto W(\theta)$ describes an arc of ellipse whose center is the point ω . Hence, the vectors $W(\tau_1)$ and $W(\tau_2)$ are equal or opposite because the line directed by $W(\tau_1)$ crosses the ellipse in at most two points. But, as $W(\tau_1) \cdot W(\tau_2) > 0$, we must have

$$W(\tau_1) = W(\tau_2).$$

This condition will bring to a contradiction. Let \mathcal{E} be the ellipse of center ω on which the function W takes its values for $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$.

First case : \mathcal{E} is not degenerated. The function W satisfies $W(\tau_1) = W(\tau_2)$. As W is of class C^1 , it must go all over the ellipse, and this is possible only if $\tau_2 = \tau_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$. As (τ_1, τ_2) belong to the interval $[0, \delta]$, we get a contradiction.

Second case : \mathcal{E} is a segment which contains $W(\tau_1)$ and ω . For $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$, $W(\theta)$ takes its values within this segment. For $\theta \in [0, \tau_1]$, the function $\theta \mapsto W(\theta)$ takes its values in an ellipse \mathcal{E}' of center the point $(1, 0)$. Hence, the function W cannot be of class C^1 at the point $\theta = \tau_1$ which is a contradiction.

Thus, we have proved that $h(j) = j$ for all $1 \leq j \leq r$. This concludes the proof of the theorem. \square

3.3.6 Determination of the number of switching points

In this section, we show that the number of switches of an optimal solution associated to an extremal trajectory is determined. We derive at last necessary conditions on an optimal control and we give a system satisfied by the optimal control. In the following theorem, we show that the number of switching points of an extremal trajectory is prescribed.

Theorem 3.10. *Let W be an extremal trajectory and Z an optimal control associated to this trajectory. Then, the optimal control is given by :*

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon_j + h} \mathbf{1}_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}$$

where $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $h \in \mathbb{N}$ and $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = \delta$. Moreover, the number L of switches of Z in the interval $[0, \delta]$ is given by :

$$L = s + 1 = ln - \varepsilon, \quad l \in \mathbb{N}^*. \quad (3.55)$$

\square Proof. By the previous section, we have seen that an optimal control Z takes the values $(\omega^j)_{0 \leq j \leq n-1}$ and it switches a finite number of time in the interval $[0, \delta]$. Let us first assume that Z goes from ω^j to ω^{j+1} for all j (that is Z jumps in the trigonometric sense). If $Z = \omega^h$ for $\theta = 0^+$, by performing a rotation of the control, that is by changing Z into $Z\bar{\omega}^h$, we can always assume that $Z(0^+) = 1$. By extending the function W to \mathbb{R} by the relation $W(\theta + \delta) = \bar{\omega}W(\theta)$ (recall that W is in Γ), we can assume that 0 is a switching point. The function Z is now given by :

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j \mathbf{1}_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}$$

where $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = \delta$. As Z is in \mathcal{Z} , we must have $Z(\delta^+) = \bar{\omega}Z(0^+) = \bar{\omega}$. On the interval $[\tau_s, \delta]$, $Z = \omega^s$. Consequently, the point δ is a switching point and we must have $\omega^{s+1} = \bar{\omega}$. Thus, $s+1$ is of the form $s+1 = -1 + ln$, $l \in \mathbb{N}^*$. The number of switching point int the interval $[0, \delta]$ is $s+1$ as δ is not considered as a switching point of this interval. We have proved the theorem in the case where $\varepsilon = +1$. When, the control Z satisfies, $Z = \bar{\omega}^j$, the proof is the same and we must have $\bar{\omega}^{s+1} = \bar{\omega}$. Consequently, s is given by $s = ln$, $l \in \mathbb{N}^*$. In this case the number of switches is $s+1 = ln+1$. This ends the proof of the theorem. \square

In the case where the switching points are of the form $j\tau$, $j = 1, \dots, s$ with $\tau = \frac{\delta}{s+1}$, the control

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j} 1_{[j\tau, (j+1)\tau]}$$

represents the regular rotors $O_n^{ln \pm 1}$ described in the section 3.4 and by Focke and Goldberg (see [22] or [15]). Now, given an optimal control by the previous theorem, we compute, the Hamiltonian and the solution W along the trajectory. Let us consider the function

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j 1_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}$$

where $s = -2 + ln$, $l \in \mathbb{N}^*$ and $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = \delta$. For convenience we note

$$\tilde{W}(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta - t) Z(t) dt.$$

so that the function W is given by

$$W(\theta) = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} + \tilde{W}(\theta).$$

The constant A is determined by (3.26) :

$$A = \frac{\omega}{4\sigma} \int_0^\delta e^{-it} Z(t) dt.$$

By (3.52), if we write $W(\theta) = A_j e^{i\theta} + B_j e^{-i\theta} + \omega^j$ on the interval $]\tau_j, \tau_{j+1}[$, the Hamiltonian becomes :

$$H = 2|A_j|^2 + 2|B_j|^2 - 1.$$

Hence, by the conservation of the Hamiltonian along the optimal trajectories, we have

$$|A_j|^2 + |B_j|^2 = \frac{H+1}{2}, \quad j = 0, \dots, s.$$

Remark 3.3. Let M be the function defined on the interval $[0, \delta]$ by $M(\theta) = (W - Z) \wedge W'$, where W and Z are considered as vectors. This quantity is usually called the **momentum of inertia** in mechanics. A simple computation shows that for the extremal trajectories above, M is constant between two consecutive switching points : $M = |A_j|^2 - |B_j|^2$, on $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. If one proves that this quantity is globally constant on $[0, \delta]$, we would deduce easily that the extremal trajectories satisfy $\tau_{j+1} - \tau_j = \tau_1$, $0 \leq j \leq s$ and thus represent the regular element $O_n^{ln \pm 1}$.

We give now an explicit representation of W in each $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ using the class C^1 of W at each switching point.

Proposition 3.19. *Let (W, Z) be an extremal trajectory of the system such that the optimal control satisfies :*

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j 1_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}$$

where $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = \delta$ and $s = -2 + ln$, $l \in \mathbb{N}^*$. Then, on the interval $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $0 \leq j \leq s$, the function W is of the form :

$$W(\theta) = \omega^j + A_j e^{i\theta} + B_j e^{-i\theta}$$

with $(A_j, B_j) \in \mathbb{C}^2$. Moreover we have for $1 \leq j \leq s-1$

$$A_j = A_0 + \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1) \sum_{1 \leq k \leq j} \omega^k e^{-i\tau_k}, \quad B_j = B_0 + \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1) \sum_{1 \leq k \leq j} \omega^k e^{i\tau_k} \quad (3.56)$$

and for $j = 0$ or $j = s$:

$$A_0 = A - \frac{1}{2}, B_0 = B - \frac{1}{2}, A_s = e^{-2i\delta}(A_0 - \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1)), B_s = B_0 - \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1) = B - \frac{1}{2}\bar{\omega}.$$

□ Proof. The function W is of class C^1 on $[0, \delta]$ and using at each switching point τ_j

$$\begin{cases} W(\tau_j^-) = W(\tau_j^+) \\ W'(\tau_j^-) = W'(\tau_j^+) \end{cases}$$

we get

$$\begin{cases} A_j = A_{j-1} + \frac{1}{2}(\omega^{j-1} - \omega^j)e^{-i\tau_j} \\ B_j = B_{j-1} + \frac{1}{2}(\omega^{j-1} - \omega^j)e^{i\tau_j} \end{cases}$$

which gives (3.56). Applying (3.31) in the interval $[0, \tau_1]$ one gets $A_0 = A - \frac{1}{2}$ and $B_0 = B - \frac{1}{2}$. We get (A_s, B_s) by (3.26). □

The same proposition holds for a rotor of the second series. We can summarize the properties satisfied by a minimizer of problem (3.45) :

Theorem 3.11. *Let W be a minimizer in Γ of problem (3.45) and $Z = W + W''$ be the corresponding optimal control. Then, there exists $k \in \mathbb{N}^*$ and $\varepsilon = \pm 1$ such that the number of switches of the optimal control is $L = s + 1 = \varepsilon + kn$. There exists a subdivision $(\tau_j)_{0 \leq j \leq s+1}$ of the interval $[0, \delta]$ satisfying $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = \delta$ such that the optimal control can be written*

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j} 1_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}. \quad (3.57)$$

Moreover the Pontryagin solution satisfies (3.31) and (3.32). At every switching point we have :

$$\forall 0 \leq j \leq s, \quad \exists t_j \in \mathbb{R}_-, \quad W(\tau_j) = t_j \omega^{\varepsilon j - \frac{1}{2}}. \quad (3.58)$$

The relations (3.29), (3.32), (3.57) and (3.58) characterize an extremal solution given by the PMP.

The parameter $\varepsilon = \pm 1$ corresponds to a trigonometric or antitrigonometric rotation of the control.

□ Proof. The first part of the theorem is already contained in theorems 3.9, 3.10. The relation (3.58) and (3.54) are the same for $1 \leq j \leq s$. To show (3.58) for $j = 0$, we use the constance of the Hamiltonian. We have

$$\Re(W(\delta^+)\overline{Z}(\delta^-)) = \Re(W(0)\overline{Z}(0))$$

and using (3.26), we get (3.58) for $s = 0$. And by proposition 3.13, W satisfies (3.31) and (3.32). Conversely, let us take a function Z satisfying : (3.29), (3.32), (3.57) and (3.58) with $\varepsilon = \pm 1$ and $s = -1 + \varepsilon + kn$, $n \in \mathbb{N}^*$. By (3.29) and (3.32) any function W that satisfies $Z = W + W''$ satisfies (3.26). Consequently, as Z takes its values within \mathcal{P}_n , W is in Γ . By construction, the pair (W, Z) satisfies (3.48) and by (3.58) the Hamiltonian of the system is constant along this solution, hence (W, Z) is an optimal solution. □

3.3.7 Geometrical consequences

We have to come back to the initial parametrization to derive the geometrical consequences of theorem 3.11. We now come to the proof of theorem 3.1.

Theorem 3.1. *Among all rotors in a n -gon ($n \geq 3$), a rotor of least area consists of a finite intersection of circle of radius r_i . The r_i are precisely equal to the distances of the diagonals of the n -gon from the parallel sides.*

□ Proof of theorem 3.1. As both problems (3.18) and (3.45) are equivalent, there exists $W \in \Gamma$ such that noting $Z = W + W''$, the pair (W, Z) is a minimizer of problem (3.45). By theorem (3.11), the pair (W, Z) satisfies (3.57). By (3.22) we can define (P, F) on the interval $[0, 2\delta]$ corresponding to (W, Z) . Finally, we define the support function p of the corresponding rotor by $p = P + r$ and the radius of curvature of the boundary by $f = F + r$. The functions p and f are well defined on the interval $[0, 2\delta]$ and we extend them on the interval $[0, 2\pi]$ by (3.10) and on \mathbb{R} by 2π -periodicity. Consequently p is the support function of a rotor K of minimal area.

It consists of a finite intersection of arcs because Z switches a finite number of time in the interval $[0, \delta]$. Moreover, if $1 \leq j \leq s$ the control Z satisfies $Z = \omega^j$ on the interval $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. The real optimal control Z_R satisfies $Z_R = -2r \sin(\frac{\delta}{2})e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2})}Z$ as we considered the polygon of vertices ω^j instead of \mathcal{P}_n since section 3.5. Using (3.22), the radius of curvature of the minimizer is given by :

$$\begin{cases} f(\theta) = r - r \frac{\cos((j+\frac{1}{2})\delta)}{\cos(\frac{\delta}{2})} \\ f(\theta + \delta) = r - r \frac{\cos((j-\frac{1}{2})\delta)}{\cos(\frac{\delta}{2})}. \end{cases}$$

for $\theta \in [0, \delta]$. Hence, the function f takes the values r_j :

$$r_j = \frac{r}{\cos(\frac{\delta}{2})} \left(\cos(\frac{\delta}{2}) - \cos\left((j + \frac{1}{2})\delta\right) \right) = \frac{r}{\cos(\frac{\delta}{2})} \Re(\omega^{1/2} - \omega^{j+1/2}), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

These values of the radii of curvature are precisely equal to the distances of the diagonals of the n -gon from the parallel sides. (see [22], [23] for a geometric description of regular rotors). □

We present the values of the r_j (see figure 3.4) in the case of the equilateral triangle, the square, the pentagon and the hexagon. In this tabular, r denotes the radius of the inscribed circle. For $n = 5$, we note $r_1 = r(1 - \frac{\cos(3\pi/5)}{\cos(\pi/5)})$ and $r_2 = r(1 + \frac{1}{\cos(\pi/5)})$.

If n is even, there are exactly $\frac{n-2}{2}$ values of the r_j , and if n is odd, there are exactly $\frac{n-1}{2}$ values of the r_j .

n	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
3	0	$3r$	0			
4	0	$2r$	$2r$	0		
5	0	r_1	r_2	r_1	0	
6	0	r	$2r$	$2r$	r	0

FIG. 3.5 – Values of the r_j for $n = 3, 4, 5, 6$.

3.4 Conclusion

We have given an analytic approach to the geometrical problem of minimizing the area in the class of rotors. By the Pontryagin principle, we have given a sense to the intuitive idea that a minimizer of problem (3.18) saturates the constraints of convexity. We have shown that extremal trajectories (W, Z) that minimize the functional are "bang-bang" and they satisfy (3.29), (3.57) and (3.58). It is natural to think that an extremal trajectory (W, Z) satisfying these three conditions is a regular rotor in $O_n^{ln\pm 1}$. In this perspective, we have to show that the switching points $(\tau_j)_{1 \leq j \leq s}$ of an extremal solution satisfy $\tau_{j+1} - \tau_j = \frac{\delta}{s+1}$, for $0 \leq j \leq s$. One way to study this question would be to look for conserved quantities along extremal trajectories like the Hamiltonian. For instance, the angular momentum is conserved along the trajectories described by the regular rotors. Can one show that this quantity is conserved along an optimal trajectory? One obstruction to show this point is due to the fact that the function Z is not continuous. Hence, it is only possible to show that such a quantity is constant piecewise. Anyway, the question of finding the equidistance of the switching points seems to be difficult.

Another way to study this question consists in using the unicity in Pontryagin's principle when the initial and final states are fixed. The Pontryagin's principle provides the unicity of the control when the cost functional is the minimal time (see [44]). If it can be generalized to a wider class of cost functional, this would show in our context that regular rotors are the only extremal trajectories of the system. Hence, the distance between the τ_j would be constant.

I would like to express my gratitude to E. Trélat for some helpful advices and to J.P. Françoise for some helpful discussions.

Chapitre 4

Optimalité locale des rotors réguliers

Dans cette partie, nous nous intéressons à des propriétés locales de certains rotors réguliers. Nous envisagerons d'abord le cas des polygones réguliers de Reuleaux étudié par Firey (voir [13]). Il démontre géométriquement que les polygones réguliers de Reuleaux sont des maxima locaux de l'aire dans la classe des polygones de Reuleaux ayant le même nombre de côtés. J'ai d'abord redémontré le théorème de Firey par le théorème de Kuhn-Tucker, ce qui constitue une approche complètement différente de celle de Firey. Nous avons également cherché à généraliser le résultat de Firey au cas plus général des rotors réguliers. Nous définissons donc un certain type de perturbations admissibles de ces rotors réguliers (qui ne modifient pas leur rayon de courbure et leur nombre d'arcs de cercles). Pour ce type de perturbation, nous étudions donc comment l'aire varie. J'ai démontré que les rotors réguliers sont des points critiques de la fonctionnelle d'aire (voir théorème 4.5). En ces points, l'étude numérique de la Hessienne montre que lorsque $n = 3$ et $n = 4$, les rotors réguliers O_n^{ln-1} , $l > 1$ sont des maxima locaux et lorsque $n \geq 5$ et $l > 1$, les rotors réguliers sont des points selles (voir propriété 4.1).

Avant d'effectuer cette étude théorique, nous avons étudié ce problème d'un point de vue numérique en collaboration avec Laurent Dumas (Université Paris 6). Nous avons réalisé un code numérique permettant d'approcher une solution du problème de maximisation sous contraintes. Dans un premier temps nous avons résolu numériquement la contrainte. Ensuite l'optimisation de la fonctionnelle de coût a été effectuée par un algorithme génétique. Dans le cas $n = 4$, nous avons pu très clairement confirmer le résultat de Firey. Dans le cas où $n \geq 5$, cette étude ne nous a pas permis de conclure de façon satisfaisante.

Dans la première partie, nous étudions donc le cas des polygones de Reuleaux. Dans la seconde partie, nous étudions certaines propriétés des rotors réguliers avant d'examiner le problème de l'optimalité locale. Dans la dernière partie, nous étudions le lien entre les rotors d'un polygone régulier et les rotors tournant à l'intérieur d'un triangle non équilatéral.

4.1 Optimalité locale des polygones réguliers de Reuleaux

4.1.1 Introduction au problème

On s'intéresse à la classe \mathcal{W}_1 des objets de largeur constante 1 dans \mathbb{R}^2 . Notre étude est basée sur un article de Firey (voir [13]) qui démontre géométriquement le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Les polygones de Reuleaux réguliers \mathcal{P}_{2n+1}^{reg} , $n \geq 2$ sont des maxima locaux de l'aire dans la classe des polygones de Reuleaux ayant le même nombre de côtés.*

En particulier d'après ce résultat, si l'on perturbe un polygone de Reuleaux à $2n + 1$ côtés ($n \geq 2$), tout en continuant de saturer la contrainte de convexité et sans changer le nombre d'arcs, alors l'aire diminue. Notre but dans cette section est de redémontrer ce résultat. Nous démontrerons que les polygones de Reuleaux impairs sont des maxima locaux de l'aire dans la classe des polygones de Reuleaux ayant le même nombre de côtés.

Nous nous intéressons d'abord au cas des polygones impairs réguliers de Reuleaux avant d'étudier le cas plus général des rotors réguliers. Il est intéressant de remarquer d'après le résultat de Firey que les polygones réguliers de Reuleaux ne sont ni des minima ni des maxima locaux. En effet, toute perturbation convexe d'un de ces objets augmente l'aire par la stricte concavité de la fonctionnelle (théorème de Brunn-Minkowski). Cependant, par le résultat de Firey, il existe des perturbations des polygones impairs de Reuleaux qui diminuent l'aire.

Nous rappelons dans les deux propositions qui suivent comment construire un corps de largeur constante à l'aide de sa fonction de support sur $[0, 2\pi]$ et sur $[0, \pi]$. Dans ce qui suit la fonction p désigne la fonction d'appui d'un corps K convexe (distance entre un hyperplan de support à K à l'origine).

Proposition 4.1. *Un objet de largeur constante 1 dans \mathbb{R}^2 est la donnée d'une fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$, 2π périodique et qui vérifie :*

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

et

$$p + p'' \geq 0. \quad (4.2)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 dans le cas général des rotors, nous pouvons construire un objet de largeur constante à l'aide de son rayon de courbure donné sur l'intervalle $[0, \pi]$. Etant donnée une application \tilde{f} définie sur $[0, \pi]$, nous la prolongerons sur $[0, 2\pi]$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}(t), & t \in [0, \pi] \\ f(t) = 1 - \tilde{f}(t - \pi), & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Proposition 4.2. *Soit $\tilde{f} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable vérifiant :*

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{f} \leq 1 \\ \int_0^\pi \tilde{f}(t) \cos(t) dt = 0, \quad \int_0^\pi \tilde{f}(t) \sin(t) dt = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Notons f le prolongement de \tilde{f} donné par (4.3). Alors la fonction p définie par

$$p(\theta) = \frac{1}{2} \cos(\theta) + \int_0^\theta f(t) \sin(\theta - t) dt, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante qui vérifie $p(0) = p(\pi) = \frac{1}{2}$ et $p'(0) = p'(\pi) = 0$.

□ Preuve. La fonction f vérifie $0 \leq f \leq 1$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ par (4.3) et car \tilde{f} prend ses valeurs entre 0 et 1. De plus, on a par (4.4)

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{it} dt = 2 \int_0^{\pi} f(t)e^{it} - 2i = 0$$

et donc, comme

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{it} dt = p'(2\pi) - p'(0) + i(p(2\pi) - p(0)),$$

la fonction p est 2π périodique et de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. Soit donc K le corps de \mathbb{R}^2 dont la fonction d'appui est p . On a $f = p + p'' \geq 0$, donc le corps K est convexe. Enfin par (4.3), le corps K est de largeur constante. On a donc montré que l'application p est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante. □

Notons que si p est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante, alors la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ de son rayon de courbure $f = p + p''$ vérifie (4.4). Sur la figure (4.1), nous avons représenté un corps de largeur constante dont le rayon de courbure est défini sur $[0, \pi]$ par :

$$f = a1_{[x_1, x_2]} + b1_{[x_3, x_4]} \quad (4.5)$$

où $a = 1/3$, $b = 3/4$ et les points $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sont choisis de sorte que la relation (4.4) soit satisfaite. Notons que la seconde condition dans (4.4) exprime que la frontière de l'objet est fermée.

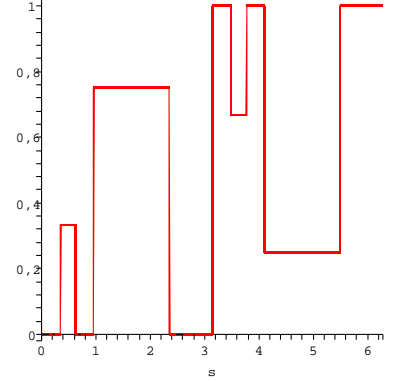
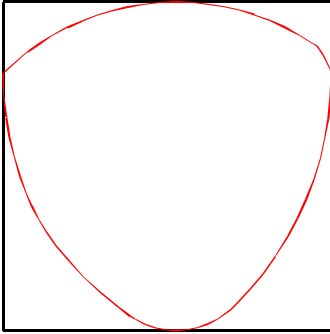


FIG. 4.1 – Le corps de largeur constante dont le rayon de courbure est donné par (4.5) avec $x_1 = 0.35$, $x_2 = 0.96$, $x_3 = 1.02$, $x_4 = 2.48$.

L'aire d'un corps convexe s'écrit à l'aide de la fonction d'appui :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 - p'^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'')$$

Dans la suite on note $f = p + p''$ le rayon de courbure de la frontière d'un corps K décrit par sa fonction d'appui p . Pour un objet de largeur constante 1, la fonctionnelle d'aire s'écrit de la manière suivante par (2.17) :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\pi}{2} + p'(0) - \int_0^{\pi} p(1 - f)$$

On peut supposer que $p'(0) = 0$ par un bon choix de l'origine des axes. En effet, on sait que la frontière du corps K est décrite par les équations :

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{cases}$$

Ainsi, $x(0) = p(0)$, $x(\pi) = -p(\pi)$ et $y(0) = p'(0)$. Donc, en prenant comme axe des abscisses un diamètre de largeur 1 et en mettant l'origine au milieu de ce diamètre, on peut supposer que $x(0) = 1/2 = -x(\pi)$, $y(0) = 0$ et donc $p(0) = p(\pi) = 1/2$ et $p'(0) = 0$.

La fonctionnelle devient :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi p(1-f) \quad (4.6)$$

où la fonction f satisfait la contrainte (4.4) et où la fonction p vérifie sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$\begin{cases} f = p + p'' \\ p(0) = \frac{1}{2}, \quad p'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Notre but dans cette partie est donc de voir comment la fonctionnelle (4.6) se comporte au voisinage des polygones de Reuleaux réguliers tout en restant dans la classe des fonctions admissibles.

4.1.2 Calcul de la fonctionnelle pour des fonctions créneaux

On se donne dans cette section un objet de largeur constante 1 à l'aide de son rayon de courbure sur $[0, \pi]$:

$$f = \sum_{0 \leq k \leq n} 1_{[x_{2k}, x_{2k+1}]} \quad (4.8)$$

avec comme convention $x_0 = 0$, $x_{2n+2} = \pi$ et

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2k} < x_{2k+1} < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} \leq x_{2n+2} = \pi \quad (4.9)$$

La fonction f sature la contrainte $0 \leq f \leq 1$. Pour que cet objet soit admissible, il faut que la condition (4.4) soit satisfaite.

Proposition 4.3. *L'application f donnée par (4.8) est le rayon de courbure d'un corps de largeur constante si et seulement si les points $(x_j)_{1 \leq j \leq 2n+1}$ vérifient l'égalité :*

$$\sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^{j-1} e^{ix_j} = 0. \quad (4.10)$$

□ Preuve. La fonction f doit vérifier (4.4), et donc :

$$\int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = 0, \quad \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = 1.$$

En réunissant ces deux conditions réelles, on trouve (4.10). □

Définition 4.1. *On appelle polygone impair de Reuleaux à $2n + 1$ côtés la donnée d'une fonction f définie par (4.8) et qui satisfait (4.9) et (4.10). On notera \mathcal{P}_{2n+1} un tel objet.*

Dans $[x_j, x_{j+1}]$, la fonction p s'écrit :

$$p(\theta) = u_j + A_j \cos(\theta) + B_j \sin(\theta)$$

où $u_j = \frac{1}{2}((-1)^j + 1)$. En exprimant que la fonction p est de classe C^1 , on en déduit que pour $0 \leq j \leq 2n$, on a :

$$\begin{cases} A_{j+1} = A_j + (-1)^j \cos(x_{j+1}) \\ B_{j+1} = B_j + (-1)^j \sin(x_{j+1}). \end{cases}$$

On écrit $p(\theta) = A_0 \cos(\theta) + B_0 \sin(\theta) + 1$ dans l'intervalle $[0, x_1]$. On a donc pour $1 \leq k \leq 2n + 1$:

$$\begin{cases} A_k = A_0 + \sum_{0 \leq j \leq k-1} (-1)^j \cos(x_{j+1}) \\ B_k = B_0 + \sum_{0 \leq j \leq k-1} (-1)^j \sin(x_{j+1}) \end{cases}$$

Par les conditions initiales, nous obtenons les valeurs des réels A_0 et B_0 : $p(0) = \frac{1}{2} = 1 + A_0$ et donc $A_0 = -\frac{1}{2}$ et $p'(0) = 0$ et donc $B_0 = 0$.

Proposition 4.4. *L'aire de \mathcal{P}_{2n+1} s'écrit en notant $\mathcal{A}(p) = F(x_1, \dots, x_{2n+1}) = F$:*

$$F = \frac{\pi}{2} + \sum_{2 \leq k \leq 2n+2} \sum_{1 \leq j \leq k-1} (-1)^{j+k} \sin(x_k - x_j) \quad (4.11)$$

□ Preuve. On montre d'abord que F s'écrit :

$$F = \frac{\pi}{2} - \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq j \leq 2k} (-1)^j \left(\sin(x_{2k+2} - x_{j+1}) - \sin(x_{2k+1} - x_{j+1}) \right) \quad (4.12)$$

Ceci résulte d'un calcul immédiat en utilisant (4.6) et en remplaçant A_j et B_j en fonction des x_j dans chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. On a :

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\pi}{2} - \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x_{2k+1}}^{x_{2k+2}} p(\theta) d\theta.$$

Or, dans $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$, la fonction d'appui de \mathcal{P}_{2n+1} s'écrit :

$$p(\theta) = u_{2k+1} + A_0 \cos(\theta) + \sum_{0 \leq j \leq 2k} (-1)^j \cos(\theta - x_{j+1}).$$

Or, on a par (4.10) :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (\sin(x_{2k+2}) - \sin(x_{2k+1})) = 0.$$

Donc,

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x_{2k+1}}^{x_{2k+2}} p(\theta) d\theta = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq j \leq 2k} (-1)^j \left(\sin(x_{2k+2} - x_{j+1}) - \sin(x_{2k+1} - x_{j+1}) \right).$$

On trouve donc (4.12) qui peut s'écrire de la façon suivante en utilisant les formules de duplication :

$$F = \frac{\pi}{2} - 2 \sum_{0 \leq k \leq n} \sin\left(\frac{x_{2k+2} - x_{2k+1}}{2}\right) \sum_{0 \leq j \leq 2k} (-1)^j \cos\left(\frac{x_{2k+1} + x_{2k+2}}{2} - x_{j+1}\right).$$

Pour montrer (4.11), on effectue d'abord un changement d'indice $j \leftarrow j + 1$ et on remarque que dans (4.12), les indices k varient entre 2 et $2n + 2$ et que les deux termes dans la somme se réécrivent de la même façon $(-1)^{j+k+1} \sin(x_k - x_j)$ en fonction de la parité de k . \square

Pour $n \geq 1$, on considère l'ensemble suivant :

$$E_n = \left\{ x = (x_j)_{1 \leq j \leq 2n+1}, x \text{ satisfait (4.9) et (4.10)} \right\}$$

L'étude de l'optimale localité des polygones de Reuleaux réguliers se réécrit donc sous la forme d'un problème de maximisation sous contraintes :

$$\max_{x \in E_n} F(x). \quad (4.13)$$

L'ensemble E_n n'est pas vide car il contient la subdivision régulière dont les points sont donnés par pour $1 \leq j \leq 2n + 1$:

$$x_j^0 = \frac{j\pi}{2n+1} = j\theta$$

où $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$. Cette subdivision régulière représente les polygones réguliers de Reuleaux :

$$f_n^{reg} = \sum_{0 \leq k \leq n} 1_{\left[\frac{2k\pi}{2n+1}, \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right]}.$$

Pour $n = 1$, il s'agit du triangle de Reuleaux, et pour $n = 2$, il s'agit du pentagone de Reuleaux.

Proposition 4.5. *Il existe des polygones de Reuleaux non réguliers.*

\square Preuve. On utilise le théorème des fonctions implicites au point $x^0 = \left(\frac{j\pi}{2n+1} \right)_{1 \leq j \leq 2n+1}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans \mathbb{R}^2 qui au point (x', y) associe le couple $(C_1(x', y), C_2(x', y))$ où

$$\begin{cases} C_1(x', y) = \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^{j-1} \cos(x'_j) - \cos(y_1) + \cos(y_2) \\ C_2(x', y) = \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^{j-1} \sin(x'_j) - \sin(y_1) + \sin(y_2). \end{cases}$$

On notera également :

$$C = (C_1, C_2)$$

la contrainte. Au point $x^0 = (x'_0, y_0)$, $x'_0 \in \mathbb{R}^{2n-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x'_0, y_0) = 0$ car le polygone de Reuleaux régulier satisfait la contrainte. L'application f est de classe C^1 et au point $x^0 = (x'_0, y_0)$, la jacobienne par rapport à y s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

et est inversible. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au point x^0 . Il existe un ouvert U dans \mathbb{R}^{2n-1} contenant le point x'_0 , il existe un ouvert V dans \mathbb{R}^2 contenant y_0 , il existe une application $\phi : U \rightarrow V$ de classe C^1 sur U telle que l'on ait :

$$C(x', \phi(x')) = 0, \quad \forall x' \in U.$$

De plus, pour $(x', y') \in U \times V$, on a $C(x', y') = 0$ si et seulement si $y' = \phi(x')$.

On peut donc résoudre la contrainte au voisinage de x^0 . Notons $x' = (x'_1, \dots, x'_{2n-1})$ un élément

de U et $\phi(x') = (x'_{2n}, x'_{2n+1})$ l'élément de V correspondant. On a ainsi $C(x', \phi(x')) = 0$ et donc l'application

$$f = \sum_{0 \leq k \leq n} 1_{[x'_{2k}, x'_{2k+1}]}$$

représente un polygone de Reuleaux non régulier. \square

Proposition 4.6. *L'aire d'un polygone de Reuleaux régulier \mathcal{P}_n^{reg} à $2n + 1$ côtés est :*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_n) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\frac{\pi}{2n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2n+1}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

\square Preuve. On peut faire le calcul géométrique ou bien simplement utiliser (4.11) avec la subdivision régulière $x_j = \frac{j\pi}{2n+1} = j\theta$, pour $1 \leq j \leq 2n + 1$ et avec $x_{2n+2} = \pi$. \square

On trouve $\mathcal{A}(\mathcal{P}_3) = 0,704$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_5) = 0,758$. Lorsque n tend vers l'infini, l'aire de \mathcal{P}_n tend vers $\frac{\pi}{4}$, l'aire du disque de rayon $\frac{1}{2}$.

On s'intéresse maintenant aux conditions d'optimalité vérifiées par le polygone régulier de Reuleaux. Nous démontrons d'abord la proposition suivante :

Proposition 4.7. *La dérivée partielle de F s'écrit pour $2 \leq l \leq 2n$:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = (-1)^l \sum_{1 \leq j \leq l-1} (-1)^j \cos(x_j - x_l) + (-1)^{l+1} \sum_{l+1 \leq k \leq 2n+1} (-1)^k \cos(x_k - x_l) + (-1)^l \cos(x_l)$$

et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \sum_{2 \leq k \leq 2n+1} (-1)^k \cos(x_k - x_1) - \cos(x_1) \\ \frac{\partial F}{\partial x_{2n+1}} &= \sum_{1 \leq j \leq 2n} (-1)^{j+1} \cos(x_{2n+1} - x_j) - \cos(x_{2n+1}). \end{aligned}$$

\square Preuve. On écrit F sous la forme suivante :

$$F = \frac{\pi}{2} + \sum_{2 \leq k \leq 2n+1} \sum_{1 \leq j \leq k-1} (-1)^{j+k} \sin(x_k - x_j) + \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^j \sin(x_j).$$

Lorsque $2 \leq l \leq n$, la double somme dans (4.11) donne deux sommes simples et lorsque $l = 1$ ou $l = 2n + 1$, l'indice l apparaît dans (4.11) dans la somme indexée par k ou dans j . \square

Soit $I(x)$ la fonction signe de x :

$$I(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La dérivée de l'aire par rapport aux switches peut se réécrire plus globalement de la façon suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = \sum_{1 \leq k \leq 2n+1} I(k-l) (-1)^{k+l+1} \cos(x_k - x_l) + (-1)^l \cos(x_l), \quad 1 \leq l \leq 2n + 1. \quad (4.14)$$

Ecrivons la contrainte (4.10) sous la forme $C = (C_1, C_2) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} C_1(x) = \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^j \cos(x_j) \\ C_2(x) = \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^j \sin(x_j) \end{cases} \quad (4.15)$$

Soit $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$ et $\omega = e^{i\theta}$. Nous démontrons maintenant que les polygones de Reuleaux réguliers sont des points critiques de la fonctionnelle sous la contrainte précédente.

Proposition 4.8. *Les polygones de Reuleaux à $N = 2n + 1$, $n \geq 2$ côtés vérifient l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} + \lambda \frac{\partial C_1}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial C_2}{\partial x_l} = 0$$

avec $\lambda = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\mu = 0$.

□ Preuve. On calcule $\frac{\partial F}{\partial x_l}$ lorsque $x_j = \frac{j\pi}{2n+1}$ pour $1 \leq j \leq 2n+1$ et avec $x_{2n+2} = \pi$. On a pour $l = 1$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum_{2 \leq k \leq 2n+1} (-1)^k \cos(x_k - x_1) - \cos(x_1) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

Pour $l = 2n+1$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_{2n+1}} = 0$$

Et pour $2 \leq l \leq n$, nous calculons séparément les deux sommes suivantes :

$$\begin{aligned} (-1)^l \sum_{1 \leq j \leq l-1} (-1)^j \cos(x_j - x_l) &= (-1)^{l+1} \Re \left(\frac{\omega^{1-l} + (-1)^l}{1 + \omega} \right) \\ (-1)^{l+1} \sum_{l+1 \leq j \leq 2n+1} (-1)^k \cos(x_k - x_l) &= \Re \left(\frac{\omega + (-1)^{l+1} \omega^{1-l}}{1 + \omega} \right). \end{aligned}$$

Nous trouvons :

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = \Re \left(\frac{(-1)^{l+1} \omega^{1-l} - 1}{1 + \omega} \right) + \Re \left(\frac{\omega + (-1)^{l+1} \omega^{1-l}}{1 + \omega} \right) + (-1)^l \Re(\omega^{-l}) = \Re \left(\frac{\omega - 1}{\omega + 1} (1 + (-1)^{l+1} \omega^{-l}) \right).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = (-1)^{l+1} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(l\theta).$$

Nous trouvons finalement que la dérivée de l'aire par rapport aux switches, pour le polygone de Reuleaux impair, s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = (-1)^{l+1} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(l\theta), \quad 1 \leq l \leq 2n+1. \quad (4.16)$$

Par ailleurs, on a :

$$\nabla C_1 = ((-1)^{l+1} \sin(x_l))_{1 \leq l \leq 2n+1}, \quad \nabla C_2 = ((-1)^l \cos(x_l))_{1 \leq l \leq 2n+1}, \quad \cdot$$

Ainsi, l'équation d'Euler-Lagrange pour le polygone régulier s'écrit :

$$(-1)^{l+1} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(l\theta) + \lambda(-1)^{l+1} \sin(l\theta) + \mu(-1)^l \cos(l\theta) = 0, \quad 1 \leq l \leq 2n+1.$$

Pour $l = 2n+1$, on trouve que $\mu = 0$, et donc $\lambda = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. \square

Donc, on a :

$$\nabla F(x^0) - \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \nabla C_1(x^0) = 0$$

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^{2n+1} autour du point régulier $x^0 =: \left(\frac{\pi}{2n+1}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{2n+1}\right)$ définissant le polygone de Reuleaux régulier. Soit $\mathcal{L} : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^2$ le lagrangien associé au problème de minimisation et défini par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = F(x) + \lambda C_1(x) + \mu C_2(x).$$

Nous venons de démontrer précédemment qu'en posant $\lambda^0 = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\mu^0 = 0$, on a :

$$\nabla \mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0.$$

Pour étudier la nature de ce point critique sous la contrainte $C = 0$, nous devons examiner le signe de la forme quadratique définie par :

$$q(d) = \langle \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \mu^0), d, d \rangle \quad (4.17)$$

sur les directions $d \in \mathbb{R}^{2n+1}$ orthogonales aux vecteurs $\nabla C_1(x^0)$ et $\nabla C_2(x^0)$.

Proposition 4.9. *La différentielle seconde du Lagrangien au point (x^0, λ^0, μ^0) , est représentée par la matrice :*

$$A = \left((-1)^{l+m} \sin(|m-l|\theta) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \delta_{lm} \right)_{1 \leq l, m \leq 2n+1}.$$

La matrice A est une matrice circulante (de type Toeplitz). Ses coefficients $a_{l,m}$ vérifient en effet la relation :

$$a_{l,m} = \gamma_{l-m}, \quad 1 \leq l, m \leq 2n+1, \quad l \neq m$$

où $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq 2n+1$. Il existe beaucoup de résultats sur le spectre des matrices de Toeplitz.

\square Preuve. Par (4.14), on a directement lorsque $l \neq m$:

$$(\nabla_{xx}^2 F)_{lm} = I(m-l)(-1)^{l+m+1}(-1) \sin(x_m - x_l).$$

Ceci fournit les termes non diagonaux de $\mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \mu^0)$ car la contrainte est diagonale. Lorsque $l = m$, le coefficient diagonal de $\nabla_{x,x}^2$ vaut :

$$(\nabla_{x,x}^2 F)_{ll} = (-1)^{l+1} \sin(l\theta) + \sum_{1 \leq k \leq 2n+1} (-1)^{k+l+1} I(k-l) \sin(x_k - x_l).$$

Lorsque $x_k = k\theta$, $1 \leq k \leq 2n+1$, on trouve :

$$\sum_{1 \leq k \leq 2n+1} (-1)^{k+l+1} I(k-l) \sin(x_k - x_l) = -\Im \left(\frac{1 - \omega + 2(-1)^l \omega^{1-l}}{1 + \omega} \right).$$

En écrivant :

$$(-1)^{l+1} \sin(l\theta) = (-1)^l \Im(\omega^{-l})$$

on en déduit que :

$$(\nabla_{x,x}^2 F)_{ll} = (-1)^{l+1} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(l\theta) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

La dérivée seconde de la première contrainte est diagonale et s'écrit :

$$\nabla_{xx}^2 C_1 = \left((-1)^{l+1} \cos(x_l) \delta_{lm} \right)_{1 \leq l, m \leq 2n+1}$$

Donc, les termes diagonales de la matrice $\mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \mu^0)$ sont constants et valent $\tan(\frac{\theta}{2})$. \square

On définit maintenant une base orthogonale de \mathbb{R}^{2n+1} adaptée au problème, i.e. dont les deux premiers vecteurs sont colinéaires aux vecteurs $\nabla C_1(x^0)$ et $\nabla C_2(x^0)$. Soit donc pour $0 \leq l \leq n$ la famille de vecteurs $(u_l)_{0 \leq l \leq n}$ définie par

$$u_l = \left((-1)^j \cos((2l+1)j\theta) \right)_{1 \leq j \leq 2n+1}$$

et pour $0 \leq l \leq n-1$ la famille de vecteurs $(v_l)_{0 \leq l \leq n-1}$ définie par

$$v_l = \left((-1)^{j+1} \sin((2l+1)j\theta) \right)_{1 \leq j \leq 2n+1}.$$

Proposition 4.10. *La famille de vecteurs $\mathcal{E} = \{(u_l)_{0 \leq l \leq n}\} \cup \{(v_l)_{0 \leq l \leq n-1}\}$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^{2n+1} .*

\square Preuve. L'orthogonalité des $2n+1$ vecteurs résulte d'un calcul direct. On a pour $l \neq m$:

$$(u_l, u_m) = \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{1 \leq j \leq 2n+1} \omega_1^j + \sum_{1 \leq j \leq 2n+1} \omega_2^j \right)$$

où $\omega_1 = e^{\frac{(2l-2m)i\pi}{2n+1}}$ et $\omega_2 = e^{\frac{i(2l+2m+2)\pi}{2n+1}}$. Or, $\omega_1^{2n+1} = \omega_2^{2n+1} = 1$, donc les vecteurs u_l et u_m sont orthogonaux. On démontre de la même manière l'orthogonalité entre les vecteurs $(u_l)_{0 \leq l \leq n}$ et $(v_l)_{0 \leq l \leq n-1}$ puis l'orthogonalité entre les vecteurs de la famille $(v_l)_{0 \leq l \leq n-1}$. Ceci montre que cette famille est une base de \mathbb{R}^{2n+1} . \square

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les gradients des deux contraintes au point x^0 , $F = \text{vect}(u_0, v_0)$. Il faut donc vérifier que la matrice A est négative sur le sous-espace F^\perp pour tout $n \geq 2$. On envisage un calcul numérique des valeurs propres de la matrice A restreinte au sous-espace F^\perp .

Par exemple, lorsque $n = 5$, la matrice A est :

$$\nabla_{xx} \mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \mu^0) = A = \begin{pmatrix} \tan(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\theta) & \sin(2\theta) & -\sin(3\theta) & \sin(4\theta) \\ -\sin(\theta) & \tan(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\theta) & \sin(2\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(2\theta) & -\sin(\theta) & \tan(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(3\theta) & \sin(2\theta) & -\sin(\theta) & \tan(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\theta) \\ \sin(4\theta) & -\sin(3\theta) & \sin(2\theta) & -\sin(\theta) & \tan(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que la matrice A est négative sur le sous-espace vectoriel F^\perp , nous utilisons Matlab. Renumerotons la famille $\{(u_l)_{0 \leq l \leq n}\} \cup \{(v_l)_{0 \leq l \leq n-1}\}$ sous la forme $(\varepsilon_l)_{1 \leq l \leq 2n+1}$ avec $\varepsilon_1 = u_0$ et

n							
2	0	-0.2	-0.2				
3	0	-0.056	-0.056	-0.41	-0.41		
4	0	-0.13	-0.13	-0.6	-0.6	-0.02	-0.02

 FIG. 4.2 – Les $2n - 1$ valeurs propres de B lorsque $n = 2, 3, 4$

$\varepsilon_2 = v_0$. Soit B la matrice de la forme quadratique définie par A et restreinte à F^\perp . La matrice B est carré d'ordre $2n - 1$ et ses coefficients sont donnés par :

$$B_{i,j} = (\varepsilon_{i+2}^t A \varepsilon_{j+2})_{1 \leq i,j \leq 2n-1}.$$

Par exemple lorsque $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ les valeurs propres de la matrice B sont données dans le tableau (voir figure 4.2). On remarque que les valeurs propres non nulles de B sont doubles.

Conjecture 4.1. *La matrice B est négative pour $n \geq 2$.*

Pour vérifier la négativité de la matrice B , nous avons utilisé Matlab qui calcule numériquement le spectre de B . Numériquement, nous trouvons que le spectre de B est inclu dans \mathbb{R}_- , et donc les polygones de Reuleaux impairs sont des maxima locaux de l'aire dans la classe des polygones de Reuleaux ayant le même nombre de côtés. Cette vérification numérique du spectre de la matrice B a été possible jusqu'à une valeur de $n = 100$ environ, ce qui correspond à une matrice carré de taille $2n - 1 = 198$. Passée cette valeur, l'ordinateur que j'ai utilisé (1,79 Ghz, 896 MO de RAM, AMD Athlon 3000+) ne termine pas la diagonalisation de la matrice en temps raisonnable.

4.2 Optimalité locale des rotors réguliers

Le but de cette partie est d'étudier le résultat de la partie précédente dans le cas des rotors. Avant d'étudier cette question, nous examinons une propriété de la série de Fourier d'un rotor régulier (voir théorème 4.2).

4.2.1 Rotors réguliers et séries de Fourier

Dans le chapitre 2, nous avons vu que les rotors réguliers étaient définis de façon équivalente par (3.38) ou (3.40). Rappelons que les rotors réguliers sont décrits par les deux séries $O_n^{ln \pm 1}$ où $l \in \mathbb{N}$. L'entier $ln \pm 1$ désigne le nombre de switches du rotor dans l'intervalle $[0, \delta]$.

Nous montrons dans cette section le lien entre la série de Fourier du rotor régulier O_n^{n-1} tournant à l'intérieur d'un n -gone et celle décrivant le n -gone. Nous supposons que le n -gone est paramétré de manière uniforme (i.e. comme s'il était parcouru à vitesse constante pendant l'intervalle de temps 2π).

Soit $\delta = \frac{2\pi}{n}$, $\omega = e^{i\delta}$, $\omega^{\frac{1}{2}} = \cos(\frac{\delta}{2}) + i \sin(\frac{\delta}{2})$, $\omega^{-\frac{1}{2}} = \overline{\omega^{\frac{1}{2}}}$, $\gamma = \cos(\delta)$, $\sigma = \sin(\delta)$ et \mathcal{P}_n le polygone régulier de \mathbb{R}^2 dont les sommets sont les points $(\omega^j)_{0 \leq j \leq n-1}$. On note \mathcal{U}_n le groupe des racines n -ièmes de l'unité.

On note $Z : [0, \delta] \rightarrow \mathcal{U}_n$ le rayon de courbure complexe d'un rotor régulier de la première série ($\varepsilon = 1$) définie par :

$$Z(\theta) = \sum_{0 \leq L-1} \omega^j 1_{[\frac{2j\pi}{nL}, \frac{2(j+1)\pi}{nL}]} \quad (4.18)$$

où L est un entier supérieur ou égal à 2. Rappelons que $L = s + 1$ et que pour la première série s est de la forme $s = -2 + \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, le rotor Z représenté par (4.18) est $O_n^{\lambda n - 1}$ avec les notations du chapitre 2.

Soit ϕ la série de Fourier du polygone régulier à n côtés de sommets les points d'affixes $(\omega^k)_{0 \leq k \leq n-1}$. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.2. *La série de Fourier du rotor régulier dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.18) vérifie*

$$Z(\theta) = C \frac{d}{d\theta} \phi(L\theta) \quad (4.19)$$

où C est une constante donnée par

$$C = \frac{1}{L} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})} e^{-\frac{i\pi}{n}}.$$

En particulier, lorsque $L = n - 1$, le rotor régulier décrit par (4.18) est le rotor régulier O_n^{n-1} dont on conjecture qu'il minimise l'aire dans la classe des rotors. Ainsi, son rayon de courbure complexe vérifie donc :

$$Z(\theta) = \frac{1}{n-1} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})} e^{-\frac{i\pi}{n}} \frac{d}{d\theta} \phi((n-1)\theta) \quad (4.20)$$

□ Preuve du théorème. En considérant la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta} Z(\theta)$ qui est δ périodique, nous avons démontré dans le chapitre 2 que la série de Fourier d'un rotor régulier dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.18) vaut :

$$Z(\theta) = \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(kn+1)L\theta}}{kn+1}.$$

où $L = s + 1 = \lambda n - 1$. Nous allons maintenant calculer la série de Fourier de la fonction ϕ . Nous supposons donc que le n -gone est paramétré de manière uniforme. Pour $0 \leq k \leq n-1$, le $k^{\text{ième}}$ côté du n -gone \mathcal{P}_n , $[\omega^k, \omega^{k+1}]$ est décrit par :

$$\phi(\theta) = \frac{n}{2\pi} \left(\omega^{k-1} \left(\frac{2k\pi}{n} - \theta \right) + \omega^k \left(\theta - \frac{2(k-1)\pi}{n} \right) \right)$$

pour $\frac{2(k-1)\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2k\pi}{n}$. La fonction ϕ vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\phi(\theta + \delta) = \omega \phi(\theta).$$

Ainsi, la fonction $\theta \mapsto e^{-i\theta} \phi(\theta)$ est périodique de période δ et son développement en série de Fourier s'écrit :

$$\phi(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{i(jn+1)\theta}.$$

Les coefficients de Fourier de ϕ sont donnés par :

$$c_j = \frac{n}{2\pi} \int_0^\delta e^{-i(jn+1)\theta} \phi(\theta) d\theta.$$

Par intégration par parties, on trouve que c_j vaut :

$$c_j = \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \frac{1}{jn+1} \right)^2.$$

Finalement, la série de Fourier de ϕ s'écrit :

$$\phi(\theta) = \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \right)^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(jn+1)\theta}}{(jn+1)^2} \quad (4.21)$$

□

Cette propriété permet de donner une nouvelle définition des rotors réguliers, obtenus comme la dérivée de la série de Fourier du n-gone à une constante multiplicative près.

4.2.2 Locale optimalité des rotors réguliers

Rappelons le théorème suivant (voir chapitre 3) qui permet de construire un rotor tournant à l'intérieur d'un polygone régulier à $n \geq 3$ côtés.

Soit $\delta = \frac{2\pi}{n}$, $\omega = e^{i\delta}$, $\gamma = \cos(\delta)$, $\sigma = \sin(\delta)$ et \mathcal{P}_n le polygone régulier de \mathbb{R}^2 dont les sommets sont les points $(\omega^j)_{0 \leq j \leq n-1}$.

On note Γ l'ensemble des fonctions complexes $W \in C^1([0, \frac{2\pi}{n}])$ et qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} W(\delta) = \bar{\omega}W(0) \\ W'(\delta) = \bar{\omega}W'(0) \end{cases} \quad (4.22)$$

et telles que la fonction $Z = W + W'' \in L^2([0, \delta])$ prenne ses valeurs à l'intérieur du polygone \mathcal{P}_n .

Théorème 4.3. *Il y a une correspondance bijective entre les rotors tournant dans un n-gone et les fonctions W appartenant à l'ensemble Γ .*

Les rotors ainsi définis tournent dans un n-gone P_1 dont le cercle inscrit a pour rayon $\frac{1}{2r \sin(\frac{\delta}{2})}$ (voir chapitre 2). Rappelons le théorème suivant (voir proposition 8, chapitre 2) qui permet de construire un rotor, donc un élément de l'ensemble Γ à l'aide de son rayon de courbure complexe.

Proposition 4.11. *Soit $Z \in L^2([0, \delta])$ prenant ses valeurs dans le polygone \mathcal{P}_n . Alors il existe une fonction W appartenant à Γ telle que $Z = W + W''$ si et seulement si Z vérifie la condition :*

$$\int_0^\delta Z(\theta) e^{i\theta} d\theta = 0. \quad (4.23)$$

et W s'écrit :

$$W(\theta) = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} + \int_0^\theta \sin(\theta - t) Z(t) dt \quad (4.24)$$

où $B \in \mathbb{C}$ et A est donné par :

$$A = \frac{\omega}{4\sigma} \int_0^\delta Z(t) e^{-it} dt. \quad (4.25)$$

On se donne un rotor par la donnée de son rayon de courbure complexe :

$$Z = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j 1_{[\tau_j, \tau_{j+1}]} \quad (4.26)$$

où $s + 1 = ln$, $l \in \mathbb{N}^*$ et où les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq s+1}$ vérifient :

$$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots < \tau_{s+1} = \delta \quad (4.27)$$

ainsi que la contrainte (4.23) qui peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j e^{i\tau_j} = 0. \quad (4.28)$$

La fonction W s'écrit dans chaque intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$:

$$W(\theta) = \omega^j + A_j e^{i\theta} + B_j e^{-i\theta}, \quad 1 \leq j \leq s, \quad \theta \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Dans $[\tau_0, \tau_1]$, W est donnée par les conditions initiales :

$$W(\theta) = 1 + A_0 e^{i\theta} + B_0 e^{-i\theta} \quad (4.29)$$

où la constante A_0 vérifie $A_0 = A - \frac{1}{2}$ et $B_0 = B - \frac{1}{2}$ (voir chapitre 4). Lorsque les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq s+1}$ sont donnés par $\tau_j = \frac{j\delta}{ls \pm 1}$ où $l \in \mathbb{N}^*$, les rotors ainsi construits sont les rotors réguliers $O_n^{ln \pm 1}$. Pour les rotors réguliers, les constantes A et B ont une valeur particulière (voir [15]).

Proposition 4.12. *On considère un rotor régulier $O_n^{\lambda n - 1}$ de la première série dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.18) avec $L = s + 1 = \lambda n - 1$ et $\tau = \frac{\delta}{L}$. Les constantes A et B dans (4.24) sont alors données dans ce cas par :*

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\sin(\frac{\delta - \tau}{2})} e^{-i\frac{\delta}{2}}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\sin(\frac{\delta + \tau}{2})} e^{-i\frac{\delta}{2}} \quad (4.30)$$

□ Preuve. La constante A se calcule directement par (4.25) en remplaçant Z par (4.18) :

$$A = \frac{i\omega}{4\sigma} \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^j \left(e^{-i(j+1)\tau} - e^{-ij\tau} \right).$$

Et on trouve la première partie de (4.30) en simplifiant les sommes géométriques. Pour calculer la constante B , revenons à la définition de W dans le premier intervalle. Dans l'intervalle $[0, \tau]$, la fonction W est donnée par :

$$W(\theta) = 1 + A_0 e^{i\theta} + B_0 e^{-i\theta}$$

avec $A_0 = A - \frac{1}{2}$ et $B_0 = B - \frac{1}{2}$. Or, par le principe de Pontryagin (voir (3.54), Chapitre 3), on sait qu'en chaque switch $W(\tau_j)$ est colinéaire à $\omega^{j-\frac{1}{2}}$, ce qui fixe la valeur de B . Nous obtenons pour $\tau_0 = 0$ et $\tau_1 = \tau$:

$$W(0) = t_0 e^{-i\frac{\delta}{2}}, \quad W(\tau) = t_1 e^{i\frac{\delta}{2}}$$

où (t_0, t_1) est un couple de réels. On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + A_0 + B_0 = t_0 \omega^{-\frac{1}{2}} \\ 1 + A_0 e^{i\tau} + B_0 e^{-i\tau} = t_1 \omega^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues : $\Re(B)$, $\Im(B)$, t_0 , t_1 :

$$\begin{cases} \Re(B) - t_0 \cos(\frac{\delta}{2}) = -\Re(A) \\ \Im(B) + t_0 \sin(\frac{\delta}{2}) = -\Im(A) \\ \Re(B) \cos(\tau) + \Im(B) \sin(\tau) = -1 + \Re((\frac{1}{2} - A)e^{i\tau}) + \frac{1}{2} e^{-i\tau} \\ -\Re(B) \sin(\tau) + \Im(B) \cos(\tau) - t_1 \sin(\frac{\delta}{2}) = \Im((\frac{1}{2} - A)e^{i\tau}) + \frac{1}{2} e^{-i\tau}. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire conduit au résultat. \square

Nous démontrons maintenant que nous pouvons déformer continuellement un rotor régulier appartenant à $O_n^{ln\pm 1}$ de façon à ce que le rayon de courbure complexe du rotor déformé soit donné par (4.26).

Proposition 4.13. *Il existe des rotors non réguliers dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.26).*

\square Preuve. On utilise le théorème des fonctions implicites comme pour le cas des polygones de Reuleaux. Soit s un entier tel que $s \equiv -1 - \varepsilon[n]$ et $L = s + 1$. Soit Z la fonction complexe définie par :

$$Z(\theta) = \sum_{0 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j} 1_{[j\tau, (j+1)\tau]}$$

qui représente l'élément $O_n^{ln+\varepsilon}$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{s-2} \times \mathbb{R}^2$ par :

$$\psi =: \psi(\tau_3, \dots, \tau_s, \tau_1, \tau_2) = e^{i\tau_1} + \omega^\varepsilon e^{i\tau_2} - \sum_{3 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j-1} e^{i\tau_j}.$$

On notera le s -uplet $(\tau_3, \dots, \tau_s, \tau_1, \tau_2)$ de $\mathbb{R}^{s-2} \times \mathbb{R}^2$ sous la forme (τ', τ'') . Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^{s-2} \times \mathbb{R}^2$ défini par

$$U = \left\{ (\tau', \tau'') \in \mathbb{R}^{s-2} \times \mathbb{R}^2, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s < \delta \right\}.$$

Notons qu'un couple $(\tau', \tau'') \in U$ vérifie $\psi(\tau', \tau'') = 0$ si et seulement si le s -uplet (τ_1, \dots, τ_s) vérifie (4.28).

Le s -uplet $(3\tau, \dots, s\tau, \tau, 2\tau) = (\tau'_0, \tau''_0)$ vérifie $\psi(\tau'_0, \tau''_0) = 0$. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites au point (τ'_0, τ''_0) , il faut vérifier que la jacobienne partielle de ψ par rapport à la seconde variable est inversible. On note $S(\tau_3, \dots, \tau_s)$ l'application définie sur \mathbb{R}^{s-2} par :

$$S(\tau_3, \dots, \tau_s) = \sum_{3 \leq j \leq s} \omega^{\varepsilon j-1} e^{i\tau_j}.$$

On note également (ψ_1, ψ_2) les parties réelles et imaginaires de ψ :

$$\begin{cases} \psi_1(\tau', \tau'') = \cos(\tau_1) + \cos(\tau_2 + \varepsilon\delta) - \Re(S(\tau'')) \\ \psi_2(\tau', \tau'') = \sin(\tau_1) + \sin(\tau_2 + \varepsilon\delta) - \Im(S(\tau'')). \end{cases}$$

La jacobienne partielle de ψ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\tau_1) & -\sin(\tau_2 + \varepsilon\delta) \\ \cos(\tau_1) & \cos(\tau_2 + \varepsilon\delta). \end{pmatrix}$$

Au point (τ'_0, τ''_0) , son déterminant vaut $\Delta = \sin(\tau + \varepsilon\delta)$. On vérifie aisément que $\tau + \varepsilon\delta$ est strictement inférieur à 2π et ne peut valoir 0 ou π . Ainsi, la jacobienne partielle est inversible et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. On peut résoudre la contrainte $\psi = 0$ au voisinage d'un rotor régulier. Ceci montre donc l'existence de rotors non réguliers au voisinage d'un rotor régulier. \square

Notons que par la démonstration précédente, on peut calculer en résolvant une équation du second degré les deux premiers switches (τ_1, τ_2) en fonction de (τ_3, \dots, τ_s) . La proposition précédente montre donc qu'il existe des rotors non réguliers sur le bord des contraintes admissibles (i.e. dont le rayon de courbure complexe sature les contraintes et prend les valeurs $(\omega^j)_{1 \leq j \leq s}$).

On s'intéresse à l'optimalité locale des éléments de la première série O_n^{ln-1} , $l \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{C}_n l'ensemble des fonctions $Z \in L^2([0, \delta])$ qui sont données par (4.26) avec $s \equiv -2[n]$ et qui vérifient les contraintes (4.27) et (4.28). Ainsi, l'ensemble \mathcal{C}_n contient les rotors réguliers O_n^{ln-1} où $s = ln - 2$ pour lesquels $\tau_j = \frac{j\tau}{s+1}$, $0 \leq j \leq s+1$. Soit \mathcal{A} l'aire du rotor dont le rayon de courbure complexe est la fonction Z . Dans la suite, nous étudions le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\max_{Z \in \mathcal{C}_n} \mathcal{A}(Z). \quad (4.31)$$

Nous démontrons que les rotors réguliers sont des points critiques de l'aire sous les contraintes (4.27) et (4.28) (voir théorème 4.5). Pour ce qui est de leur optimalité locale, nous vérifions numériquement la conjecture suivante :

Conjecture 4.2. *Lorsque $n = 3$ et $n = 4$, les rotors réguliers O_n^{ln-1} sont des maxima locaux de l'aire dans la classe \mathcal{C}_n pour $l > 1$. Lorsque $n \geq 5$ et $l > 1$, les rotors réguliers sont des points selles dans la classe \mathcal{C}_n .*

Remarque 4.1. *Pour effectuer cette analyse, nous sommes conduits à étudier les valeurs propres de la matrice Hessienne de la fonctionnelle sur le sous-espace orthogonal au gradient des deux contraintes. Cette matrice est de taille $s = ln - 2$. Cette étude spectrale a été effectuée par Matlab et donc, pour des valeurs du couple (n, l) telles que le produit nl ne dépasse pas 200 environ. Au delà de cette limite, l'ordinateur met du temps pour diagonaliser la matrice Hessienne.*

Ce résultat montre que les rotors réguliers O_n^{ln-1} tournant dans un triangle équilatéral sont des maxima locaux de l'aire lorsque $l > 2$. Il confirme également le théorème 4.1 (voir [13] ou la partie précédente) dans le cas $n = 4$. Enfin, lorsque $n \geq 5$, les rotors réguliers O_n^{ln-1} sont des points selles dans la classe \mathcal{C}_n . Donc le résultat de Firey ne se généralise pas au cas des rotors réguliers tournant dans un n -gone avec $n \geq 5$. L'apparition de plusieurs rayons de courbure (au moins trois) pour les rotors réguliers O_n^{ln-1} avec $n \geq 5$ peut éventuellement expliquer ce phénomène. Dans le cas $n = 3$ et $n = 4$, le rayon de courbure des rotors réguliers prend en effet la valeur 0 ou 1 uniquement.

Pour aborder la conjecture 4.2, nous avons d'abord tenté de procéder comme pour le cas des polygones de Reuleaux (partie précédente) en effectuant un calcul direct de la fonctionnelle. Cette démarche est rendue délicate par la complexité de la fonctionnelle (voir proposition 4.14). Nous avons préféré utiliser l'expression de la fonctionnelle sous forme de série de Fourier pour aborder ce problème.

Nous donnons d'abord une expression explicite de la fonctionnelle en fonction des switches (τ_1, \dots, τ_s) avant d'effectuer la démonstration de la propriété 4.2 à l'aide des séries de Fourier.

Dans le chapitre 2, nous avons vu que l'aire d'un rotor dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.26) vaut à une constante près :

$$F := F(\tau_1, \dots, \tau_s) = \pi r^2 + \frac{n}{4\sigma^2} J(\tau_1, \dots, \tau_s)$$

où la fonctionnelle J est donnée par :

$$J = \int_0^\delta W \bar{Z}.$$

Proposition 4.14. *La fonctionnelle $J = J(\tau_1, \dots, \tau_s)$ est donnée par*

$$J = \delta + \frac{\omega(\omega^2 - 1)}{2i} + 4\sigma\omega|A|^2 - 2\sigma\omega\bar{A} - 2\sigma\omega^2 A + 4 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \sum_{1 \leq k \leq j \leq s} \omega^{k-j} \sin(\tau_j - \tau_k) \quad (4.32)$$

où A est donné par

$$A = \frac{i\omega(\omega^{s-1} - 1)}{4\sigma} + \frac{i(1 - \omega)}{4\sigma} \sum_{1 \leq j \leq s} \omega^j e^{-i\tau_j}. \quad (4.33)$$

□ Preuve. Pour montrer (4.32), on reprend les notations du chapitre 2. Pour $1 \leq j \leq s$, dans l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, la fonction W s'écrit :

$$W(\theta) = \omega^j + A_j e^{i\theta} + B_j e^{-i\theta}$$

avec

$$\begin{cases} A_j = A_0 + \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1) \sum_{1 \leq k \leq j} \omega^k e^{-i\tau_k} \\ B_j = B_0 + \frac{1}{2}(\bar{\omega} - 1) \sum_{1 \leq k \leq j} \omega^k e^{i\tau_k}. \end{cases}$$

en utilisant le fait que W est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \delta]$. La fonctionnelle J s'écrit alors :

$$J = \sum_{0 \leq j \leq s} \bar{\omega}^j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (A_0 e^{i\theta} + B_0 e^{-i\theta}) d\theta + \sum_{1 \leq j \leq s} \bar{\omega}^j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} W(\theta) d\theta. \quad (4.34)$$

Et on remplace W par sa valeur entre deux switches consécutifs. Le terme en B_0 est absorbé par la contrainte (4.28). On trouve ensuite

$$\sum_{0 \leq j \leq s} \bar{\omega}^j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} A_0 e^{i\theta} d\theta = 4\sigma\omega|A|^2 - 2\sigma\omega\bar{A}.$$

Et le calcul fournit :

$$\sum_{1 \leq j \leq s} \bar{\omega}^j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} W(\theta) d\theta = \sum_{1 \leq j \leq s} \sum_{1 \leq k \leq j} \omega^{k-j} (\sin(\tau_{j+1} - \tau_k) - \sin(\tau_j - \tau_k)).$$

Puis en regroupant les deux termes de la somme, nous obtenons :

$$\sum_{1 \leq k \leq j \leq s} \omega^{k-j} (\sin(\tau_{j+1} - \tau_k) - \sin(\tau_j - \tau_k)) = \sum_{1 \leq k \leq j \leq s} \omega^{k-j} \sin(\tau_j - \tau_k) - 2i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{\frac{3}{2}} \sum_{1 \leq k \leq s} \omega^k \sin(\delta - \tau_k).$$

Enfin on montre que l'on a :

$$-2i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{\frac{3}{2}} \sum_{1 \leq k \leq s} \omega^k \sin(\delta - \tau_k) = -2\sigma\omega^2 A + \frac{\omega(\omega^2 - 1)}{2i}.$$

Par ailleurs, un calcul direct en utilisant (4.25) montre que A est donné par (4.33). D'où le résultat.

□

Le problème d'optimalité locale peut être posé correctement maintenant. On cherche donc à trouver parmi tous les rotors ayant s switches celui d'aire maximale. Le nombre L d'intervalles de la subdivision étant fixé, on cherche à optimiser la fonctionnelle J donnée par (4.32) sous la contrainte (4.27) et (4.28).

La fonctionnelle F donnée par (4.14) prend des valeurs réelles même si cela n'apparaît pas clairement sur (4.14). Cette formule n'est pas très pratique pour calculer la hessienne. Nous étudions la conjecture 4.2 à l'aide des séries de Fourier en plusieurs points. Nous développons d'abord en série de Fourier un rotor non régulier (voir proposition 4.15). Nous démontrons ensuite que les rotors réguliers sont des points critiques (voir théorème 4.5). Enfin, par l'étude numérique de la Hessienne de l'aire sur les rotors réguliers, nous en déduisons le résultat (voir proposition 4.16).

Soit Z le rayon de courbure complexe d'un rotor donné par (4.26) et soit J_- et J' les ensembles définis par :

$$J_- = \{j \in \mathbb{R}, j \equiv -1[n], j \neq -1\}, \quad J' = J_- \cup \{-1\}.$$

Proposition 4.15. *La série de Fourier de Z s'écrit :*

$$Z(\theta) = \sum_{j \in J'} \gamma_j e^{ij\theta}, \quad p.p. \theta \in \mathbb{R}.$$

Les coefficients de Fourier γ_j , $j \in J'$ sont donnés par :

$$\gamma_j = \frac{2}{j\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq s} \omega^k e^{-ij\tau_k}\right).$$

□ Preuve. La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta} Z(\theta)$ étant δ périodique, on peut la décomposer en série de Fourier ce qui donne :

$$Z(\theta) e^{i\theta} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l e^{iln\theta}$$

et donc, en notant $\gamma_j = \gamma_{ln-1} = \beta_l$, avec $j = ln - 1$, on a :

$$Z(\theta) = \sum_{j \in J'} \gamma_j e^{ij\theta}.$$

Les coefficients de Fourier γ_j sont donc donnés par :

$$\gamma_j = \frac{n}{2\pi} \int_0^\delta Z(t) e^{it} e^{-ijnt} dt = \frac{n}{2\pi} \sum_{0 \leq k \leq s} \omega^k \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-i(jn-1)t} dt$$

D'où :

$$\gamma_j = \frac{in}{2\pi(jn-1)} \sum_{0 \leq k \leq s} \omega^k (e^{-i(jn-1)\tau_{k+1}} - e^{-i(jn-1)\tau_k})$$

Par changement d'indice, on trouve

$$\gamma_j = \frac{2}{j\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq s} \omega^k e^{-ij\tau_k}\right).$$

□

En utilisant la contrainte (4.28), le coefficient γ_1 est nul et l'indice j ne peut prendre la valeur 1, donc la fonction W s'écrit :

$$W(\theta) = \sum_{j \in J^-} \frac{\gamma_j}{1-j^2} e^{ij\theta}.$$

L'aire d'un rotor s'écrit donc par Parseval :

$$J = J(\tau_1, \dots, \tau_s) = -\delta \sum_{j \in J^-} \frac{|\gamma_j|^2}{j^2 - 1} \quad (4.35)$$

et cette quantité est négative ou nulle. Remarquons que $J(W) = 0$ lorsque tous les coefficients de W sont nuls, autrement dit W représente le disque. Le théorème suivant permet de calculer efficacement la dérivée de l'aire par rapport aux switchs $(\tau_j)_{1 \leq j \leq s}$.

Théorème 4.4. *Pour $1 \leq k \leq s$, la dérivée de l'aire par rapport à τ_k s'écrit :*

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k} = -4 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \Im\left(\omega^{-(k-\frac{1}{2})} W(\tau_k)\right). \quad (4.36)$$

□ Preuve. Partant de l'expression de γ_j , on trouve :

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \tau_k} = \frac{-2i}{\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{k-\frac{1}{2}} e^{-ij\tau_k}. \quad (4.37)$$

Or, on a :

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k} = -\delta \sum_{j \in J^-} \left(\frac{\overline{\gamma_j}}{j^2 - 1} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \tau_k} + \frac{\gamma_j}{j^2 - 1} \frac{\partial \overline{\gamma_j}}{\partial \tau_k} \right).$$

Par ailleurs, on a pour $1 \leq k \leq s$:

$$W(\tau_k) = \sum_{j \in J^-} \frac{\gamma_j}{1-j^2} e^{ij\tau_k}. \quad (4.38)$$

D'où le résultat. □

Ecrivons maintenant la contrainte (4.28) sous la forme $\psi = \psi(\tau_1, \dots, \tau_s) = (\psi_1, \psi_2)$ avec

$$\begin{cases} \psi_1(\tau_1, \dots, \tau_s) = \sum_{0 \leq j \leq s} \cos(j\delta + \tau_j) \\ \psi_2(\tau_1, \dots, \tau_s) = \sum_{0 \leq j \leq s} \sin(j\delta + \tau_j). \end{cases}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $s = \lambda n - 1$, $L = s + 1$ et $\tau = \frac{\delta}{L}$. On montre maintenant que le rotor $O_n^{\lambda n - 1}$ donné par (4.18) est un point critique de l'aire.

Théorème 4.5. *Soit Z le rayon de courbure complexe d'un rotor régulier donné par (4.18). Alors, Z est un point critique pour l'aire :*

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k}(\tau, \dots, s\tau) = 0, \quad 1 \leq k \leq s.$$

□ Preuve. Pour un rotor régulier $O_n^{\lambda n - 1}$ dont le rayon de courbure est donné par (4.18), on a pour $j \in J^-$:

$$\gamma_j = \frac{2}{j\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\frac{\delta}{2}} \sum_{0 \leq k \leq s} \omega^k e^{-ijk\tau}$$

où $\tau = \frac{\delta}{L}$. Donc, on obtient :

$$\gamma_j = 0, \quad j \neq (1 + pn)L, \quad p \in \mathbb{Z}$$

et pour $j = (1 + pn)L, p \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\gamma_j = \frac{2L}{j\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\frac{\delta}{2}}$$

car

$$\sum_{0 \leq k \leq s} \omega^k e^{-ijk\tau} = L.$$

La fonction W de $O_n^{\lambda n-1}$ s'écrit donc :

$$W(\theta) = \frac{2L}{\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\frac{\delta}{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(1+pn)L\theta}}{(1+pn)L((1+pn)^2L^2 - 1)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Donc, au point $\tau_k = k\tau, 1 \leq k \leq s$, on obtient :

$$W(k\tau) = \frac{2L}{\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(k-\frac{1}{2})\delta}}{(1+pn)L((1+pn)^2L^2 - 1)}$$

d'où le résultat par (4.36). \square

Soit F la fonction définie par

$$F(\theta) = \sum_{j \in J_-} \frac{e^{ij\theta}}{j^2 - 1}.$$

Proposition 4.16. *La Hessienne de J est donnée par la matrice :*

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau_k \partial \tau_l} = -\frac{8}{\delta} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \Re(\omega^{l-k} F(\tau_k - \tau_l)) - 4 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \Im(e^{-i(k-\frac{1}{2})\delta} W'(\tau_k)) \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq s.$$

\square Preuve. Par (4.38), on considère $W(\tau_k)$ comme une fonction des variables (τ_1, \dots, τ_s) :

$$W(\tau_k) = G(\tau_1, \dots, \tau_s)$$

car le coefficient de Fourier γ_j est une fonction de ces s variables. On a donc :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau_k \partial \tau_l} = -4 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \Im\left(\omega^{-(k-\frac{1}{2})\delta} \frac{\partial G}{\partial \tau_l}\right).$$

Par (4.38), il vient :

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_l} = - \sum_{j \in J_-} \frac{1}{j^2 - 1} \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \tau_l} + ij \gamma_j \delta_{kl} \right) e^{ij\tau_k}.$$

En utilisant (4.37), on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_l} = -\frac{2i}{\delta} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^{l-\frac{1}{2}} \sum_{j \in J_-} \frac{e^{ij(\tau_k - \tau_l)}}{j^2 - 1} + W'(\tau_k) \delta_{kl}.$$

On obtient donc le résultat. \square

Corollaire 4.1. *Pour un rotor régulier dont le rayon de courbure complexe est donné par (4.18), la hessienne de J vaut :*

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau_k \partial \tau_l}(\tau, \dots, s\tau) = -\frac{8}{\delta} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \Re(\omega^{l-k} F((k-l)\tau)), \quad 1 \leq k \neq l \leq s$$

et

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau_k^2}(\tau, \dots, s\tau) = 2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{2 \sin(\tau)}{\cos(\tau) - \gamma} + \cot(\delta) - \frac{1}{\delta} \right), \quad 1 \leq k \leq s.$$

La matrice Hessienne de l'aire pour un rotor régulier est donc une matrice de Toeplitz car son coefficient $a_{k,l}$ est de la forme $\gamma_{|k-l|}$, $1 \leq k, l \leq s$, où $\gamma_j \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq j \leq s$.

□ Preuve. On peut montrer que la fonction F vérifie $F(-\theta) = \overline{F(\theta)}$ et $F(\theta + \delta) = \overline{\omega} F(\theta)$. De plus, on peut expliciter F :

$$F(\theta) = -\frac{\delta}{4\sigma} \overline{\omega} e^{i\theta} + \frac{1}{4} (1 - i\delta) e^{-i\theta} + \frac{i}{2} \theta e^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, \delta].$$

On vérifie en effet que ses coefficients de Fourier vérifient :

$$\begin{cases} c_j = \frac{1}{j^2-1}, & j \in J_- \\ c_j = 0, & j \notin J_-. \end{cases}$$

On a en particulier :

$$F(0) = \frac{1}{4} - \frac{\delta\gamma}{4\sigma}.$$

Pour démontrer le corollaire, on part de la proposition précédente. Lorsque $k \neq l$, le résultat est immédiat en remplaçant τ_k par $k\tau$ pour $1 \leq k \leq s$. Lorsque $k = l$, on a deux termes. Le premier terme vaut en utilisant la valeur de $F(0)$:

$$-\frac{8}{\delta} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \Re(\omega^{l-k} F(0)) = 2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \left(\cot(\delta) - \frac{1}{\delta} \right).$$

Le second terme vaut $-4 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \Im\left(\omega^{-(k-\frac{1}{2})} W'(k\tau)\right)$. Or, en utilisant (4.29), on a pour un rotor régulier de la première série :

$$W'(k\tau) = \omega^k W'(0) = \omega^k i(A_0 - B_0).$$

Donc, par (4.30), on en déduit que :

$$W'(k\tau) = -\frac{\sin(\tau) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\cos(\tau) - \gamma} i e^{i(k-\frac{1}{2})\delta}.$$

D'où le résultat. □

Afin d'appliquer le théorème de Kuhn-Tucker, nous devons regarder le signe de la hessienne donnée par le corollaire 4.1 sur le sous-espace vectoriel orthogonal au gradient des contraintes $(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2)$ au point régulier. Nous avons terminé cette étude de façon numérique en calculant numériquement avec Matlab les valeurs propres de la Hessienne sur le sous-espace orthogonal aux deux contraintes.

Pour le rotor régulier $O_n^{\lambda n-1}$, en posant $L = s + 1 = \lambda n - 1$, ces deux vecteurs sont donnés par :

$$\begin{cases} \nabla\psi_1(\tau, \dots, s\tau) = \left(-\sin\left(\frac{2\lambda j\pi}{L}\right)\right)_{1 \leq j \leq s} \\ \nabla\psi_2(\tau, \dots, s\tau) = \left(\cos\left(\frac{2\lambda j\pi}{L}\right)\right)_{1 \leq j \leq s}. \end{cases}$$

On peut définir de façon analogue les vecteurs de \mathbb{R}^s de la façon suivante :

$$e_r = \left(\cos\left(\frac{2\pi r j}{L}\right)\right)_{1 \leq j \leq s}, \quad 0 \leq r \leq m$$

et

$$f_r = \left(\sin\left(\frac{2\pi r j}{L}\right)\right)_{1 \leq j \leq s}, \quad 1 \leq r \leq m-1.$$

On définit maintenant la famille \mathcal{F} de vecteurs de \mathbb{R}^s en distinguant suivant la parité de L :

$$- L \text{ pair : } L = 2m, s = 2m - 1, \mathcal{F} = \{e_r\}_{0 \leq r \leq m-1} \cup \{f_r\}_{1 \leq r \leq m-1}$$

$$- L \text{ impair : } L = 2m + 1, s = 2m, \mathcal{F} = \{e_r\}_{0 \leq r \leq m} \cup \{f_r\}_{1 \leq r \leq m-1}.$$

Lemme 4.1. *La famille \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^s et on a pour $0 \leq r \leq m, 1 \leq t \leq m-1, 1 \leq u \leq m-1$:*

$$(e_r, f_t) = 0, \quad (f_t, f_u) = 0.$$

□ Preuve. On a aisément

$$\sum_{1 \leq j \leq s} \cos\left(\frac{2\pi r j}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi t j}{L}\right) = \frac{1}{2} \Im \left(\sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(r+t)j}{L}} + \sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(r-t)j}{L}} \right) = \Im(-2) = 0.$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq s} \sin\left(\frac{2\pi t j}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi u j}{L}\right) = \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(t-u)j}{L}} - \sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(t+u)j}{L}} \right) = 0$$

ce qui prouve l'orthogonalité souhaitée. Notons que la sous-famille $(e_r)_{0 \leq r \leq m}$ n'est pas orthogonale :

$$\sum_{1 \leq j \leq s} \cos\left(\frac{2\pi t j}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi u j}{L}\right) = \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(t-u)j}{L}} + \sum_{1 \leq j \leq s} e^{\frac{2\pi(t+u)j}{L}} \right) = \Re(-2) = -2$$

Cependant, elle est libre car son orthonormalisée de Gram-Schmidt fournit un système orthonormal (programmation en Matlab de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt pour des valeurs de L pas trop grandes). □

On peut donc orthonormaliser la sous-famille de vecteurs $(e_r)_{0 \leq r \leq m}$ par l'algorithme de Gram-Schmidt, en prenant comme premier vecteur le vecteur $\nabla\psi_1(\tau, \dots, s\tau) = e_\lambda$ et obtenir ainsi une base orthonormale de \mathbb{R}^s en les réunissant avec la famille $(f_r)_{1 \leq r \leq m-1}$. Quitte à permuter les vecteurs on peut supposer que les deux premiers vecteurs de base sont colinéaires aux deux gradients des contraintes.

Notons en définitive $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ les s vecteurs de \mathbb{R}^s formant une base orthonormale, avec ε_1 et ε_2 parallèles au gradient des deux contraintes. La proposition suivante résume les résultats que nous avons obtenus avec Matlab. Soit A la matrice carré de taille $s - 2$ de la hessienne de J dans la base \mathcal{E} :

$$A = \left(\varepsilon_{k+2}^t \nabla^2 J(\tau, \dots, s\tau) \varepsilon_{l+2} \right)_{1 \leq k, l \leq s-2}. \quad (4.39)$$

Propriété 4.1. *Pour $n = 3$ et $\lambda > 1$, la matrice A est définie négative et pour $n = 4$ et $\lambda > 1$, la matrice A est définie négative. Pour $n \geq 5$ et $\lambda > 1$, la matrice A possède des valeurs propres positives et négatives.*

Nous avons utilisé matlab pour calculer numériquement les valeurs propres de la matrice A et **vérifier** cette propriété pour certaines valeurs du couple (λ, n) . Les valeurs propres obtenus pour les premières valeurs du couple (λ, n) sont résumées dans le tableau 4.3.

Remarque 4.2. *Nous avons programmé l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale de \mathbb{R}^s dont les deux premiers vecteurs sont les gradients des contraintes. Matlab a ensuite calculé numériquement le spectre de la matrice Hessienne restreinte au sous-espace vectoriel orthogonal au deux contraintes. Ces résultats ont été obtenus pour des valeurs du couple (λ, n) telles que le produit λn ne dépasse pas 200 environ. Passée cette limite, l'ordinateur que j'ai utilisé (1,79 Ghz, 896 MO de RAM, AMD Athlon 3000+) met du temps pour diagonaliser la matrice Hessienne sous matlab. Nous n'avons pas utilisé de méthodes particulières pour diagonaliser la matrice hessienne bien que, comme dans la section précédente, la matrice hessienne soit une matrice de Toeplitz.*

La proposition 4.5 montre que les rotors réguliers sont des points critiques de la fonctionnelle d'aire J . Remarquons que les multiplicateurs de Lagrange en ces points sont nuls. Par ailleurs, par la propriété (4.1), la hessienne de l'aire est négative lorsque $n = 3$ et $n = 4$ pour $l > 1$. Nous retrouvons donc le résultat de Firey pour $n = 4$. Lorsque $n \geq 5$, la matrice hessienne possédant des valeurs propres négatives et positives, le rotor régulier est donc un point selle.

La vérification de la propriété 4.1 a été effectuée par Matlab pour des valeurs de l pas trop grandes. Nous avons demandé à Matlab de calculer les valeurs propres de la matrice A numériquement. Les résultats obtenus sont contenus dans le tableau 4.3. Nous confirmons donc le résultat de Firey lorsque $n = 4$ et nos résultats numériques montrent que pour $n = 3$, les rotors $O_3^{3\lambda-1}$ sont également des maxima locaux. En revanche, la propriété n'est plus vraie dès que $n \geq 5$. Cependant, des tests numériques confirment que lorsque λ est grand, alors les valeurs propres positives sont très inférieures en valeur absolue à certaines valeurs propres négatives. On peut interpréter cette constatation par le fait que lorsque λ est grand, alors le rotor se rapproche du cercle qui est un maximum global.

Ceci achève notre analyse de l'optimalité locale des rotors réguliers $O_n^{\lambda n-1}$ pour $l > 1$.

Nous terminons cette section par l'étude de l'optimalité locale du rotor régulier O_n^{n-1} , i.e. lorsque $\lambda = 1$. Lorsque le nombre de côtés n vaut 3 ou 4, on sait que la lunule et le triangle de Reuleaux sont des minima globaux de l'aire dans la classe des Δ -courbes et des corps de largeur constante. Nous étudions donc l'optimalité locale de O_n^{n-1} lorsque n est supérieur ou égal à 5. Nous vérifions numériquement la conjecture suivante pour un nombre fini de valeurs de n .

Conjecture 4.3. *Le rotor régulier O_n^{n-1} est un minimum local de l'aire pour $n \geq 3$.*

Nous procédons comme précédemment en utilisant Matlab pour calculer numériquement le spectre de la matrice donnée par (4.39). Nous trouvons des valeurs propres positives jusqu'à $n = 100$ environ (par Matlab). Au delà de cette valeur, le calcul numérique effectué par Matlab prend plus de temps. Pour $n = 5$ et $n = 6$, les valeurs propres du lagrangien sont données dans le tableau ci-dessous.

Ce résultat confirme donc la conjecture 3.1 pour $5 \leq n \leq 100$.

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\lambda = 1$			0.1631	0.087, 0.2609
$\lambda = 2$	-1.9555 -0.6518	-0.0353, -0.5259 -0.8226, -0.1127	-0.3309, -0.0251 -0.4643, -0.0660 0.0642, 0.1218	-0.2282, -0.0264 -0.2994, -0.0598 0.0356, 0.1125 0.1256, 0.0967
$\lambda = 3$	-2.5481 -0.8568 -0.0682 -3.5684 -0.2203	-0.2203, -0.0770 -0.0074, -0.3022 -1.5621, -0.4020 -0.1223, -0.0253	-0.7611, -0.2374 -0.0486, 0.8965 -0.3011, -0.0776 0.0816, 0.0455 0.0030, 0.0717 0.0091	-0.5113, -0.5834 -0.1941, -0.2368 -0.0363, -0.0534 0.0296, 0.0019 0.0655, 0.0790 0.0818, 0.0754 0.0575, 0.0060
$\lambda = 4$	-4.0655 -0.8575 -0.0217 -0.2770 -5.0775 -1.0968 -0.0724 -0.4668	-1.9388, -2.2484 -0.5570, -0.2156 -0.0845, -0.0027 -0.0261, -0.6594 -0.2658, -0.1128 -0.0096, -0.0422	-1.1583, -1.2961 -0.4306, -0.4952 -0.1444, -0.0564 -0.1705, -0.0135 -0.0723, -0.0275 0.0067, 0.0354 0.0568, 0.0615 0.0502, 0.0186	-0.7718, -0.8454 -0.3408, -0.3832 -0.1030, -0.0444 -0.1179, -0.0106 -0.0554, -0.0193 0.0252, 0.0454 0.0148, 0.0551 0.0595, 0.0406 0.0045, 0.0524 0.0606, 0.0581

FIG. 4.3 – Les valeurs propres de A lorsque $n = 3, 4, 5, 6$ et $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Leur nombre est $s - 2 = \lambda n - 4$.

4.3 Rotors tournant dans des polygones non réguliers

Jusqu'ici nous avons étudié des propriétés de rotors tournant dans un n-gone régulier et le problème de minimisation de l'aire dans cette classe d'objet. On se propose ici d'étudier l'existence de rotors tournant dans un polygone non régulier. Ce problème a été abordé par Lyusternik et par Kamenetskii dans le cas du triangle (voir [31], [39]). Il est également mentionné par Gruber et Wills (voir [24]) dans le cas plus général des rotors tournant dans un polygone convexe quelconque. Le résultat obtenu par Lyusternik est le suivant (voir [39]) :

Théorème 4.6. *Il existe des rotors différents du disque et tournant à l'intérieur un triangle non équilatéral si et seulement si ses trois angles sont commensurables à π .*

Etant donné un triangle ABC ayant pour angles α, β, γ , une condition nécessaire et suffisante pour qu'une Δ -courbe tourne à l'intérieur de ce triangle en restant en contact à chaque instant avec les trois côtés est donc que

$$\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{\beta}{\pi} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{\gamma}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Etant donné un triangle dont les trois angles sont commensurables, notons $\mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma}$ la classe des Δ -courbes tournant à l'intérieur de ce triangle en restant en contact à chaque instant avec les trois côtés du triangle. On peut également étudier dans ce cas le problème de minimisation de l'aire dans cette classe :

$$\min_{K \in \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma}} \mathcal{A}(K) \tag{4.40}$$

Nous verrons que dans le cas où les trois angles du triangles sont commensurables à π , ce problème se ramène à l'étude de la minimisation de l'aire dans la classe des rotors tournant dans un certain n-gone. Donc, le problème (4.40) se ramène au problème étudié dans le chapitre 3.

Dans cette section, nous rappelons la preuve du théorème de Lyusternik à l'aide des séries de Fourier (voir [39]). Ensuite, dans le cas où les trois angles du triangle sont commensurables, nous montrons que les éléments de $\mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma}$ sont en fait des rotors d'un certain n-gone.

4.3.1 Condition sur la fonction d'appui.

Soit \mathcal{T} un triangle ABC dont les trois angles sont notés \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} . On note α , β , et γ les angles $\alpha = \pi - \hat{A}$, $\beta = \pi - \hat{B}$ et $\gamma = \pi - \hat{C}$ de sorte que l'on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Dans le théorème suivant, nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur la fonction d'appui d'un rotor pour qu'il tourne à l'intérieur du triangle \mathcal{T} . La relation (4.41) généralise la relation (3.7) au cas des rotors tournant dans un triangle non équilatéral, elle est mentionnée dans [31].

Théorème 4.7. *Soit K un rotor dont la fonction d'appui est p . Alors, K est un rotor de \mathcal{T} si et seulement si la fonction p est de classe $C^{1,1}$ et vérifie :*

$$p + p'' \geq 0$$

ainsi que la relation :

$$S(p) =: \sin(\beta)p(\theta) - \sin(\alpha + \beta)p(\theta + \alpha) + \sin(\alpha)p(\theta + \alpha + \beta) = C, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \tag{4.41}$$

où C est une constante.

Dans le cas où $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{2\pi}{3}$, on retrouve la relation vérifiée par les Δ -courbes tournant dans un triangle équilatéral dont le rayon du cercle inscrit est r :

$$p(\theta) + p\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + p\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 3r, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

□ Preuve du théorème. On sait que l'intersection de deux droites d'appui à K et d'angles θ et θ' est donnée par :

$$z = i \frac{p(\theta)e^{i\theta'} - p(\theta')e^{i\theta}}{\sin(\theta' - \theta)}.$$

Les affixes des points A et B deviennent :

$$z_A = i \frac{e^{i(\theta+\alpha)}}{\sin(\alpha)} (p(\theta) - p(\theta + \alpha)e^{-i\alpha}), \quad z_B = i \frac{e^{i(\theta+\alpha)}}{\sin(\beta)} (p(\theta + \alpha)e^{i\beta} - p(\theta + \alpha + \beta)).$$

En exprimant que la longueur du côté du triangle ABC , $z_B - z_A$ est constante, on trouve la relation (4.41). Par ailleurs, la condition $p + p'' \geq 0$ exprime la convexité du rotor. Donc, si K est rotor tournant dans le ABC , alors sa fonction d'appui vérifie (4.41).

Supposons maintenant que p vérifie les relations $p + p'' \geq 0$ et (4.41). La condition $p + p'' \geq 0$ assure que p est la fonction d'appui d'un corps convexe. En refaisant les calculs effectués dans la preuve directe, on montre que si p vérifie (4.41), alors tout triangle circonscrit à K est isométrique au triangle ABC . Tout triangle circonscrit à K se déduit du triangle ABC par une isométrie (composée d'une translation du plan et d'une rotation). □

Remarque 4.3. La relation 4.41 exprime le fait que l'aire de tout triangle ABC osculateur à un rotor est constante.

□ Preuve du théorème 4.6. Nous démontrons maintenant le théorème de Lyusternik à l'aide du théorème précédent dont on conserve les notations. Soit donc \mathcal{T} un triangle et K un rotor de \mathcal{T} et p sa fonction d'appui. On peut écrire le développement de p à l'aide de sa série de Fourier :

$$p(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\theta}.$$

Le rotor K est un rotor de \mathcal{T} si et seulement si $p + p'' \geq 0$ et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) e^{ik\alpha} + \sin(\alpha) e^{ik(\alpha+\beta)} \right) e^{ik\theta} = C, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, K est un rotor non trivial de \mathcal{T} si et seulement si il existe un entier $k \notin \{0, \pm 1\}$ tel que

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) e^{ik\alpha} + \sin(\alpha) e^{ik(\alpha+\beta)} = 0. \quad (4.42)$$

Cette condition s'écrit :

$$\begin{cases} \sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) \cos(n\alpha) + \sin(\alpha) \cos(n(\alpha + \beta)) = 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) \sin(n\alpha) + \sin(\alpha) \sin(n(\alpha + \beta)) = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

La deuxième relation fournit :

$$\sin(n\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha) \sin(n\beta).$$

Et en combinant les deux relations, on trouve :

$$\sin(n\beta) \sin(\gamma) = \sin(\beta) \sin(n\gamma).$$

Donc, on obtient la relation symétrique en (α, β, γ) :

$$\frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(n\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(n\gamma)}{\sin(\gamma)}.$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{\sin^2(n\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(n\gamma) - \sin^2(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}$$

et donc :

$$\frac{\cos^2(\alpha) - \cos^2(n\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\gamma) - \cos^2(n\gamma)}{\sin^2(\gamma)}.$$

Par ailleurs, nous pouvons transformer la première équation de (4.43) sous la forme :

$$\frac{\cos(\alpha) - \cos(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\gamma) - \cos(n\gamma)}{\sin(\gamma)}.$$

Deux cas sont possibles. Si

$$\frac{\cos(\alpha) - \cos(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = 0$$

ou

$$\frac{\cos(\gamma) - \cos(n\gamma)}{\sin(\gamma)} = 0$$

alors, on obtient le résultat voulu. Sinon, en simplifiant par $\frac{\cos(\alpha) - \cos(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et $\frac{\cos(\gamma) - \cos(n\gamma)}{\sin(\gamma)}$, on obtient la relation :

$$\frac{\cos(\alpha) + \cos(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\gamma) + \cos(n\gamma)}{\sin(\gamma)}.$$

On en déduit dans ce cas que $\cot(\alpha) = \cot(\gamma)$ et on obtient également le résultat voulu. Ceci achève la preuve du théorème 4.6. \square

Le théorème 4.6 permet de démotrer le théorème analogue dans le cas des rotors exinscrits à un triangle ABC , i.e. qui tournent à l'extérieur de ABC en restant à chaque instant en contact avec les trois côtés du triangle.

Théorème 4.8. *Il existe des rotors d'un triangle ABC tournant à l'extérieur du triangle ABC si et seulement si ses trois angles sont commensurables à π .*

\square Preuve. Elle est analogue à la preuve du théorème 4.6. \square

4.3.2 Lien entre les rotors d'un n-gone et les Δ -courbes

Soit ABC un triangle du plan tel que ses trois angles α , β et γ soient commensurables à π . On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.9. *Etant donnée une Δ -courbe K tournant dans le triangle ABC , il existe un entier n tel que la Δ -courbe soit un rotor d'un n-gone P_n .*

Le problème de minimisation de l'aire dans la classe $\mathcal{T}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est alors équivalent au problème de minimisation de l'aire dans la classe des rotors (voir chapitre 3).

La preuve du théorème 4.9 repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Etant donné $\alpha = \frac{a_1}{b_1}\pi$, $\beta = \frac{a_2}{b_2}\pi$ et $\gamma = \frac{a_3}{b_3}\pi$ trois angles commensurables à π , alors on peut les écrire sous la forme :*

$$\alpha = r\delta, \quad \beta = s\delta, \quad \delta = \frac{2\pi}{n}, \quad \text{pgcd}(r, s, n) = 1. \quad (4.44)$$

avec $r < \frac{n}{2}$, $s < \frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} < r + s$.

□ Preuve du lemme et du théorème. On écrit les deux angles α et β sous la forme $\alpha = \frac{a}{d}\pi$, $\beta = \frac{b}{d}\pi$ où $d = \text{ppcm}(b_1, b_2)$ et où l'on a également $\text{pgcd}(a, b, d) = 1$.

Supposons d'abord a et b pairs. Alors $a = 2r$ et $b = 2s$, $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, de sorte que n est impair. En posant $\delta = \frac{2\pi}{n}$, on a donc :

$$\alpha = r\delta, \quad \beta = s\delta, \quad \text{pgcd}(r, s, n) = 1.$$

Supposons maintenant que l'un des deux nombres a ou b est impair. On pose $n = 2d$ et $\delta = \frac{2\pi}{n}$ de sorte que l'on a :

$$\alpha = \frac{2\pi}{2d}a, \quad \beta = \frac{2\pi}{2d}b$$

Ainsi, on a bien (4.44) en posant $a = r$, $b = s$. Enfin, on a $\alpha < \pi$ et $\beta < \pi$ et donc $r < \frac{n}{2}$ et $s < \frac{n}{2}$. Et $\alpha + \beta = 2\pi - \gamma > \pi$ ce qui donne la dernière inégalité. Ceci termine la preuve du lemme. □

On démontre maintenant le théorème 4.9. La relation (4.41) se réécrit de la façon suivante :

$$\sin(s\delta)p(\theta) - \sin((r+s)\delta)p(\theta+r\delta) + \sin(r\delta)p(\theta+(r+s)\delta) = C. \quad (4.45)$$

De même que dans la section précédente, on développe la fonction d'appui d'un rotor K tournant dans $\mathcal{T}_{\alpha,\beta,\gamma}$ en série de Fourier :

$$p(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\theta}.$$

On suppose que K n'est pas le cercle inscrit. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $p_k \neq 0$. Donc, en posant $\omega = e^{i\delta}$ et $t = r + s$, on trouve :

$$\sin((t-r)\delta) - \sin(t\delta)\omega^{kr} + \sin(r\delta)\omega^{kt} = 0.$$

Or la relation précédente est vérifiée pour $k = 1$, donc par soustraction :

$$\sin(r\delta)\omega^t \left(\omega^{(k-1)t} - 1 \right) = \sin(t\delta)\omega^r \left(\omega^{(k-1)r} - 1 \right)$$

et donc :

$$\omega^{\frac{k+1}{2}s} \sin(r\delta) \sin\left(\frac{k-1}{2}t\delta\right) = \sin(t\delta) \sin\left(\frac{k-1}{2}r\delta\right). \quad (4.46)$$

Si $\sin(\frac{k-1}{2}t\delta) \neq 0$ et $\sin(\frac{k-1}{2}r\delta) \neq 0$, alors on doit avoir

$$\omega^{\frac{k+1}{2}s} = \pm 1.$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$, tel que $(k+1)s = \lambda n$ et comme $s < \frac{n}{2}$, on a alors

$$k \equiv -1[n].$$

Si maintenant on est dans le cas où $\sin(\frac{k-1}{2}t\delta) = 0$ ou $\sin(\frac{k-1}{2}r\delta) = 0$, alors ces deux termes sont nuls et donc il existe $(\lambda', \lambda'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$(k-1)t = \lambda'n, \quad (k-1)r = \lambda''n.$$

De même, on obtient alors que $k \equiv 1[n]$. On a donc montré que si $p_k \neq 0$ alors $k \equiv \pm 1[n]$. La série de Fourier du rotor s'écrit donc en notant $J = (n\mathbb{Z} + 1) \cup (n\mathbb{Z} - 1)$:

$$p(\theta) = \sum_{k \in J} p_k e^{ik\theta}.$$

Le développement en série de Fourier coïncide avec celui d'un rotor tournant dans un polygone régulier à n côtés par (3.36) et donc sa fonction d'appui vérifie (3.7). Donc, il existe un polygone régulier P_n à n côtés tel que K soit un rotor de P_n . Remarquons que nécessairement, 3 des côtés de P_n sont inclus dans les côtés du triangle \mathcal{T} . Ceci achève la preuve du lemme et du théorème 4.9. \square

L'étude des rotors tournant dans un polygone non régulier à n côtés est analogue. Nous démontrons le théorème suivant qui généralise le résultat de Lyusternik et qui est mentionné dans [9], [24] et [56].

Théorème 4.10. *Il existe des rotors différents du disque tournant dans un polygone convexe non régulier à n côtés, $n \geq 3$ et $n \neq 4$ si et seulement si tous les angles du polygone sont commensurables à 2π .*

Avant d'effectuer la preuve de ce résultat, il est pratique d'introduire la notion suivante.

Définition 4.2. *Soit P et Q deux polygones du plan. On dit que Q dérive de P si tous les côtés de Q contiennent un côté de P .*

\square Preuve. La preuve de ce résultat utilise les théorèmes 4.6 et 4.8. Soit \mathcal{P} un polygone convexe à n côtés et K un rotor tournant à l'intérieur de P . On distingue deux cas :

- Premier cas : aucun des côtés de \mathcal{P} ne sont parallèles.
- Second cas : il existe deux côtés de \mathcal{P} qui sont parallèles.

Supposons d'abord que l'on soit dans le premier cas. Soit A un sommet de P et D_1, D_2 les deux droites issues de A et qui contiennent les deux côtés de P passant par A . Il existe un côté de P qui n'est pas parallèle à D_1 et D_2 . Soit D_3 la droite qui contient ce côté. On appelle B l'intersection entre les droites D_1 et D_3 et C l'intersection entre les droites D_2 et D_3 . Alors, le triangle ABC dérive du polygone P et si K est un rotor différent du disque tournant dans P , alors K tourne dans ABC . Ainsi, par le théorème 4.6, si on appelle \hat{A} l'angle du polygone P au point A , alors $\frac{\hat{A}}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Ceci vaut également pour tous les sommets du polygone P car aucun de ses côtés ne sont parallèles. D'où le résultat dans ce cas.

On suppose maintenant qu'il existe deux côtés de P parallèles. En particulier, tout rotor tournant dans P est de largeur constante. La démonstration est analogue, mais il faut distinguer plusieurs

cas. On considère trois côtés successifs quelconques de P : $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ et on démontre que les angles intérieurs de \mathcal{P} , \hat{B} et \hat{C} sont commensurables à π .

Supposons d'abord que ces trois côtés ne soient pas parallèles deux à deux (voir figure 4.4, premier cas). Alors, on peut faire le même raisonnement que dans le cas précédent. Soit T_1 l'intersection des droites (AB) et (CD) , de sorte que le triangle T_1BC dérive de P . Alors, le rotor K tourne à l'extérieur du triangle T_1BC en restant en contact à chaque instant avec ses trois côtés. Par le théorème 4.8, on en déduit que les angles \hat{B} et \hat{C} sont commensurables à π .

On suppose maintenant que la droite (AB) est parallèle à (CD) et que (AD) et (BC) ne sont pas parallèles (voir figure 4.4, second cas). On appelle E le sommet du polygone \mathcal{P} voisin de D et différent de C (éventuellement $E = A$ si le polygone \mathcal{P} possède 4 sommets $ABCD$). On appelle T_1 l'intersection des droites (DE) et (AB) et T_2 l'intersection des droites (DE) et (BC) . Alors, le triangle T_1T_2B dérive de P et en appliquant le résultat du théorème 4.8 on en déduit que les angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} sont commensurables à π .

On suppose enfin que (AB) est parallèle à (CD) et que (BC) est parallèle à (AD) (voir figure 4.4, troisième cas). Comme un rotor dans P est de largeur constante, le parallélogramme $ABCD$ est un losange. Il existe deux droites d'appui de K , D_1 et D_2 orthogonales à la direction (AC) . Comme K est de largeur constante, il tourne à l'intérieur du carré dont deux côtés sont portés par les droites D_1 et D_2 . Soit T_1, T_2 les points d'intersection entre les droites D_1 et (AB) et D_1 et (AD) . Alors le triangle AT_1T_2 dérive de P et par le théorème 4.6, l'angle \hat{A} est commensurable à π . Il en est donc de même de \hat{B} et \hat{C} .

En considérant tous les triplets de côtés successifs du polygone \mathcal{P} , on en déduit le résultat. \square

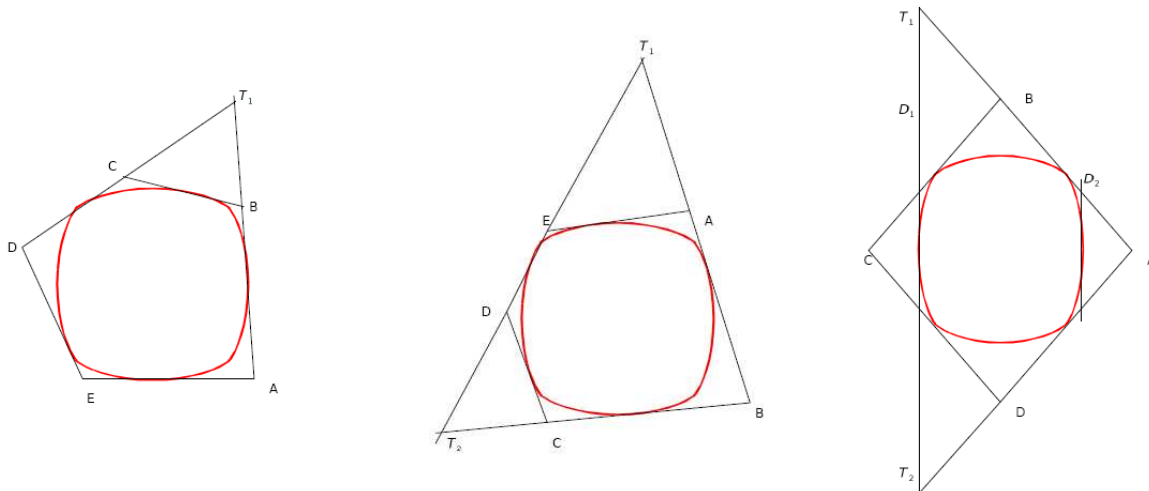


FIG. 4.4 – Preuve du théorème 4.10. Dans le cas où il y a deux côtés parallèles, la preuve se décompose en trois sous cas.

Chapitre 5

Paramétrisation analytique des corps de largeur constante en dimension 3

Abstract. We present a complete analytic parametrization of constant width bodies in dimension 3 based on the median surface: more precisely, we define a bijection between some space of functions and constant width bodies. We compute simple geometrical quantities like the volume and the surface area in terms of those functions. As a corollary we give a new algebraic proof of Blaschke's formula. Finally, we derive weak optimality conditions for convex bodies which minimize the volume among constant width bodies.

5.1 Introduction

A body (that is, a compact connected subset K of \mathbb{R}^n) is said to be of *constant width* α if its projection on any straight line is a segment of length $\alpha \in \mathbb{R}_+$, the same value for all lines. This can also be expressed by saying that the *width map*

$$w_K : \nu \in \mathbf{S}^{n-1} \longmapsto \max_{x \in K} \nu \cdot x - \min_{x \in K} \nu \cdot x \tag{5.1}$$

has constant value α . This is also equivalent to the geometrical fact that two parallel support hyperplanes on K are always separated by a distance α , independent of their direction.

Obvious bodies of constant width are the balls; but they are many others. These bodies, also called *orbiforms* in dimension two, or *spheriforms* in dimension three (as in [7]), have many interesting properties and applications. Orbiforms in particular have been studied a lot during the nineteenth century and later, particularly by Frank Reuleaux, whose name is now attached to those orbiforms you get by intersecting a finite number of disks of equal radii α , whose center are vertices of a regular polygon of diameter α .

Among the oldest problems related to these bodies of constant width are the question of which are those with maximal or minimal volume, for a given value of the width α . It is not difficult to prove that the ball (of radius $\alpha/2$) has maximal volume: this follows from the isoperimetric inequality.

On the other hand, the question of which body of constant width α has minimal volume proved to be much more difficult. First notice that this problem is not correctly stated: indeed, one can remove the interior of a body to decrease its volume, without changing its constant width property. Therefore, we need to add an additional requirement for the problem to make sense (even though

this is not needed for the maximization problem). The problem is well-posed if we consider only *convex* bodies, and this is the usual statement considered.

So let us define formally the following class:

$$\mathcal{W}_\alpha := \{K \subset \mathbb{R}^n ; K \text{ compact convex and } \forall \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, w_K(\nu) = \alpha\}. \quad (5.2)$$

The problem of interest is now to minimize the n -dimensional volume, denoted by $|K|$ hereafter:

$$\text{Find } K^* \in \mathcal{W}_\alpha \text{ such that } |K^*| = \min_{K \in \mathcal{W}_\alpha} |K|. \quad (5.3)$$

Note that the existence of K^* is easy to establish. Indeed \mathcal{W}_α is a compact class of sets for most reasonable topologies (for instance the Hausdorff topology), and the volume is a continuous function.

In dimension two, the problem was solved by Lebesgue and Blaschke: the solution turns out to be a *Reuleaux triangle*.

In dimension three, the problem is still open. Indeed the mere existence of non trivial three-dimensional bodies of constant width is not so easy to establish. In particular, no finite intersection of balls has constant width (except balls themselves), a striking difference with the two-dimensional case.

A simple construction is to consider a two dimensional body of constant width having an axis of symmetry (like the Reuleaux triangle for instance): the corresponding body of revolution obtained by rotation around this axis is a spheroform. F. Meissner proved that the *rotated Reuleaux triangle* has the smaller volume among bodies of revolution in \mathcal{W}_α .

Later on he was able to construct another spheroform (usually called “Meissner’s tetrahedron”) which does not have the symmetry of revolution. The volume of this body is smaller than any other known of constant width, so it is a good candidate as a solution to the problem (5.3). We describe this body in more details later on in this paper. Let us just say for the moment that it looks like an intersection of four balls centered on the vertices of a regular tetrahedron, but some of the edges are smoothed; in particular, it doesn’t have all the symmetries of a regular tetrahedron.

In this paper we first present a complete analytic parametrization of constant width bodies in dimension 3 based on the median surface. More precisely, we define a bijection between the space of functions $C_\sigma^{1,1}(\Omega)$ and constant width bodies. Then, we compute simple geometrical quantities like the volume and the surface area in terms of those functions. As a corollary we give a new algebraic proof of Blaschke’s formula and compute the surface and the volume of Meissner’s tetrahedron. Finally, we derive weak optimality conditions for the problem (5.3).

5.2 The Median Surface

In this section, we introduce a geometrical tool, which we call the *median surface*.

5.2.1 Definition and basics

For a convex body K , we say that a hyperplane H is a *hyperplane of support for K at x* , if $x \in K \cap H$ and K is included in one of the half-spaces limited by H . If $\nu \in \mathbf{S}^{n-1}$ is a normal vector to H , pointing outside the half space containing K , we say that ν is an *outward support vector at x* . Obviously if K is smooth (that is, has a differentiable boundary), then ν is just the outward unit normal at x . In this particular case, there is a map $x \mapsto \nu$ which is usually called *the Gauss map*.

The reverse Gauss map (which is well defined for a body of constant width see for instance [36]), satisfies $R_K(\nu) - R_K(-\nu) = \alpha\nu$ for all ν . We may now introduce a parallel surface to ∂K . Consider, for all $\nu \in \mathbf{S}^{n-1}$ the point,

$$M_K(\nu) := R_K(\nu) - \frac{\alpha}{2}\nu = R_K(-\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu.$$

Notice that $M_K(-\nu) = M_K(\nu)$. The set of points $M_K(\nu)$ is called the *median surface* of the body K .

Let us recall from [36] one geometrical characterization of constant width bodies:

Theorem 5.1. *Let K be closed subset of \mathbb{R}^n . Then K has constant width α if and only if it satisfies:*

$$\forall \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, \exists x_\nu \in K, \quad x_\nu + \alpha\nu \in K \quad \text{and} \quad \forall y \in K, (y - x_\nu) \cdot \nu \in [0, \alpha]. \quad (5.4)$$

5.2.2 Construction of constant width sets

We present in this section a construction process of constant width bodies starting from an appropriate surface, which will be their median surface. More precisely:

Theorem 5.2. *Let $\alpha > 0$ be given and $M : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a continuous map satisfying*

$$\forall \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad M(-\nu) = M(\nu); \quad (5.5)$$

$$\forall \nu_0, \nu_1 \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad (M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot \nu_0 \leq \frac{\alpha}{4} |\nu_1 - \nu_0|^2. \quad (5.6)$$

Define a subset $K \subset \mathbb{R}^n$ as follows:

$$K := \left\{ M(\nu) + t\nu ; \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right] \right\}. \quad (5.7)$$

Then K is a convex body of constant width α , and $M_K \equiv M$.

Conversely, any convex body of constant width α can be described by (5.7), where $M = M_K$.

Notice that we could have defined K by

$$K := \left\{ M(\nu) + t\nu ; \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, t \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \right\}. \quad (5.8)$$

This is equivalent to (5.7), due to (5.5). Similarly, taking (5.5) into consideration, we can rewrite (5.6) with $-\nu_0, -\nu_1$. We deduce that for an map M satisfying (5.5), (5.6) is equivalent to:

$$\forall \nu_0, \nu_1 \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad |(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot \nu_0| \leq \frac{\alpha}{4} |\nu_1 - \nu_0|^2. \quad (5.9)$$

In order to prove this theorem, we make use of a lemma:

Lemma 5.1. *Under the assumptions of Theorem 5.2, let K be defined by (5.7). Then $\mathbb{R}^n = \{M(\nu) + t\nu ; \nu \in \mathbf{S}^{n-1}, t \in \mathbb{R}_+\}$, K is compact, and*

$$\partial K \subset \left\{ M(\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu ; \nu \in \mathbf{S}^{n-1} \right\}. \quad (5.10)$$

(It will come from Theorem 5.2 that there is actually equality for the sets in (5.10).)

Proof. Consider the map $Q : \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \mapsto M(\nu) + t\nu$ where M satisfies (5.5). Since M is continuous, $K = Q(\mathbf{S}^{n-1} \times [0, \frac{\alpha}{2}])$ is a compact set.

Let us first prove that $Q(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^n$. Note that $Q(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) = Q(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ from (5.5). We consider some $x \in \mathbb{R}^n$, and assume by contradiction that $x \notin Q(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. For each ν , define x_ν as the projection of x onto the straight line $M(\nu) + \mathbb{R}\nu$. Our assumption implies $x \neq x_\nu$. Moreover

$$x_\nu = M(\nu) + t_\nu \nu \quad \text{where} \quad t_\nu := \nu \cdot (x - M(\nu))$$

as a classical property of the projection.

Since in particular $x \neq M(\nu)$ for all ν , we can define a map $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ by $f(\nu) := (x - M(\nu))/|x - M(\nu)|$. Note that f is continuous, and $f(-\nu) = f(\nu)$. Such a map has an even topological degree, and in particular has a fixed point [11]. Therefore there exists some ν such that $f(\nu) = \nu$. For such a ν , we get $x_\nu = x$, a contradiction.

We now turn to the proof of (5.10). Consider some $x \in \partial K$. In particular, $x \in K$, so $x = M(\nu_0) + t_0 \nu_0$ for some ν_0 and $t_0 \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$. There exists a sequence $(x_n) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ with limit x . From our previous study, we know that $x_n = M(\nu_n) + t_n \nu_n$ for some $\nu_n \in \mathbf{S}^{n-1}$ and $t_n \in \mathbb{R}_+$. The assumption $x_n \notin K$ implies $t_n > \alpha/2$, but on the other hand the sequence (t_n) is bounded since (x_n) is bounded and $M(\mathbf{S}^{n-1})$ is compact. Therefore we may assume that the sequences (ν_n) and (t_n) are convergent. Let us denote by ν_∞ and $t_\infty \geq \frac{\alpha}{2}$ their limits. Since M is continuous, we have $x = M(\nu_\infty) + t_\infty \nu_\infty$.

In particular, $M(\nu_0) = x - t_0 \nu_0 = M(\nu_\infty) + t_\infty \nu_\infty - t_0 \nu_0$. Let us assume with no loss of generality that $\nu_0 \cdot \nu_\infty \geq 0$ (otherwise we just have to change ν_0 to $-\nu_0$ and t_0 to $-t_0$). We write (5.6) for ν_∞, ν_0 , so

$$\begin{aligned} (M(\nu_0) - M(\nu_\infty)) \cdot \nu_\infty &\leq \frac{\alpha}{4} |\nu_\infty - \nu_0|^2 = \frac{\alpha}{2} (1 - \nu_0 \cdot \nu_\infty) \\ \iff t_\infty - t_0 \nu_0 \cdot \nu_\infty &\leq \frac{\alpha}{2} (1 - \nu_0 \cdot \nu_\infty) \\ \iff t_\infty &\leq \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - t_0\right) \nu_0 \cdot \nu_\infty \leq \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

since $t_0 \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$. This proves that $t_\infty = \frac{\alpha}{2}$. Hence $x \in Q(\mathbf{S}^{n-1}, \frac{\alpha}{2})$. \square

of Theorem 5.2. We begin with the proof of the reciprocal statement in the Theorem. Let K be a body of constant width. We already know that its median surface $M = M_K$ is continuous and satisfies (5.5). Since $M_K(\nu) = R_K(\nu) - \frac{\alpha}{2}\nu$, and $R_K(\nu_1) \cdot \nu_0 \leq R_K(\nu_0) \cdot \nu_0$ from the definition of R_K , we have

$$(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot \nu_0 \leq \frac{\alpha}{2} (1 - \nu_0 \cdot \nu_1) = \frac{\alpha}{4} |\nu_1 - \nu_0|^2.$$

This proves (5.6).

Since K is convex and $M_K(\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu \in K$, $M_K(\nu) - \frac{\alpha}{2}\nu \in K$, we see that K contains the right hand side of (5.8). Now let $x \in K$ be given, and let y be the farthest point from x in K . Define $\nu := (y - x)/|y - x|$. For any $z \in K$, we have

$$y \cdot \nu = |y - x| + x \cdot \nu \geq |z - x| + x \cdot \nu \geq (z - x) \cdot \nu + x \cdot \nu = z \cdot \nu$$

so $y = R_K(\nu) = M_K(\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu$. Hence $x = M_K(\nu) + t\nu$ with $t = \frac{\alpha}{2} - |x - y|$. Since $|x - y| \leq \alpha$, we have $|t| \leq \frac{\alpha}{2}$, which concludes the proof of (5.8).

We now prove the direct statement in the Theorem. So consider a map M satisfying (5.5) and (5.6), and K be defined by (5.7) (or (5.8) equivalently). In view of Theorem 5.1, we need to prove (5.4) (notice that the convexity of K is a direct consequence of (5.4). For more details see [36]).

Let $\nu \in \mathbf{S}^{n-1}$ be given. Consider $x_\nu := M(\nu) - \frac{\alpha}{2}\nu$, so that $x_\nu + \alpha\nu = M(\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu \in K$ from its definition.

Consider any $y \in K$, so that $y = M(\hat{\nu}) + t\hat{\nu}$. Changing $\hat{\nu}$ and t to their opposite, if necessary, we may assume that $\nu \cdot \hat{\nu} \geq 0$. Note that

$$(y - x_\nu) \cdot \nu = (M(\hat{\nu}) - M(\nu)) \cdot \nu + t\nu \cdot \hat{\nu} + \frac{\alpha}{2}.$$

Using (5.9) with $\nu_0 = \nu, \nu_1 = \hat{\nu}$, we get

$$-\frac{\alpha}{2}(1 - \nu \cdot \hat{\nu}) \leq (M(\hat{\nu}) - M(\nu)) \cdot \nu \leq \frac{\alpha}{2}(1 - \nu \cdot \hat{\nu}).$$

Hence, since $t \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$:

$$0 \leq (t + \frac{\alpha}{2}) \nu \cdot \hat{\nu} \leq (y - x_\nu) \cdot \nu \leq \alpha + (t - \frac{\alpha}{2}) \nu \cdot \hat{\nu} \leq \alpha.$$

This concludes the proof of the theorem. \square

Maps M satisfying (5.5) and (5.6) will play an important role in the remaining of this paper. So let us give a few additional properties on them. We start here with simple inequalities, and will consider what happens on a differential level in the next section. Note that all these results apply in particular to the median surface of any convex body of constant width according to Theorem 5.2.

Lemma 5.2. *Let M be a continuous map satisfying (5.5) and (5.6). Then M is $\frac{\alpha}{2}$ -lipschitzian:*

$$\forall \nu_0, \nu_1 \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad |M(\nu_1) - M(\nu_0)| \leq \frac{\alpha}{2} |\nu_1 - \nu_0|. \quad (5.11)$$

and satisfies:

$$\forall \nu_0, \nu_1 \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad \left| M(\nu_1) + \frac{\alpha}{2}\nu_1 - M(\nu_0) - \frac{\alpha}{2}\nu_0 \right| \leq \alpha. \quad (5.12)$$

Proof. According to Theorem 5.2, M is the median surface of some $K \in \mathcal{W}_\alpha$ defined by (5.7). Since K contains $M(\nu) + \frac{\alpha}{2}\nu$ for any ν , and has diameter α , we get (5.12).

Squaring the left hand side of (5.12) and expanding it, we get

$$|M(\nu_1) - M(\nu_0)|^2 - \alpha(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot (\nu_1 - \nu_0) \leq \frac{\alpha^2}{4} |\nu_1 + \nu_0|^2 \quad (5.13)$$

since $|\nu_1 - \nu_0|^2 + |\nu_1 + \nu_0|^2 = 4$. The above relation is true for any pair of unit vectors, so we can write it for $(\nu_1, -\nu_0)$ and $(-\nu_1, \nu_0)$. We get, taking (5.5) into account:

$$\begin{aligned} |M(\nu_1) - M(\nu_0)|^2 - \alpha(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot (\nu_1 + \nu_0) &\leq \frac{\alpha^2}{4} |\nu_1 - \nu_0|^2 \\ |M(\nu_1) - M(\nu_0)|^2 + \alpha(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot (\nu_1 + \nu_0) &\leq \frac{\alpha^2}{4} |\nu_1 - \nu_0|^2. \end{aligned}$$

Summing these relations yields (5.11). \square

5.2.3 Smooth median surface

In this section we reduce (5.6) to local differential properties. This is easy whenever M is differentiable, but requires more involved statements in the general case. Note that M will always be defined on the sphere \mathbf{S}^{n-1} , and if differentiable, its derivative $DM(\nu)$ is defined on the tangent space to the sphere at ν , which is simply $\nu^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n ; w \cdot \nu = 0\}$. In the following proposition, we consider C^2 maps $\tilde{\nu} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$, and $\dot{\tilde{\nu}}$ is the derivative of $\tilde{\nu}$. Notice that only the end point $\tilde{\nu}(0)$ and the corresponding derivatives do matter.

Proposition 5.1. *Let $M : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ be given. Then M satisfies (5.9) if and only if it satisfies*

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\nu} \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^{n-1}), \\ \limsup_{t \geq 0} \frac{1}{t^2} \left| \left(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\tilde{\nu}(0)) \right) \cdot \tilde{\nu}(0) \right| \leq \frac{\alpha}{4} \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

If M is differentiable, then (5.14) is equivalent to

$$\begin{aligned} \forall \nu_0 \in \mathbf{S}^{n-1}, \forall w \in \nu_0^\perp, \\ \nu_0 \cdot DM(\nu_0)w = 0 \quad \text{and} \quad |w \cdot DM(\nu_0)w| \leq \frac{\alpha}{2} |w|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

We will shorten (5.15) in the following by writing it $\nu_0 \cdot DM(\nu_0) = 0$ (as vectors) and $\pm DM(\nu_0) \leq \frac{\alpha}{2} \text{Id}$ (as matrices). This expresses the fact that ν_0 is the normal vector to the surface $\nu_0 \mapsto M(\nu_0)$ at $M(\nu_0)$, and that the absolute values of the curvature radii does not exceed $\frac{\alpha}{2}$. (See also the parametric equivalent in the next section.)

Proof. Assume first that M satisfies (5.9). Let $\tilde{\nu} \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^{n-1})$, and define $\nu_0 := \tilde{\nu}(0)$ for short. Note that $|\tilde{\nu}(t)|^2 = 1$ for all t , so

$$\forall t, \quad \tilde{\nu}(t) \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t) = 0 \quad \text{and} \quad \tilde{\nu}(t) \cdot \ddot{\tilde{\nu}}(t) = - \left| \dot{\tilde{\nu}}(t) \right|^2. \quad (5.16)$$

In particular a Taylor expansion near $t = 0$ yields

$$\tilde{\nu}(t) \cdot \nu_0 = \left(\nu_0 + t\dot{\tilde{\nu}}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{\tilde{\nu}}(0) + o(t^2) \right) \cdot \nu_0 = 1 - \frac{t^2}{2} \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|^2 + o(t^2).$$

Using (5.9) with $\tilde{\nu}(t)$ and ν_0 , we get:

$$\left| \left(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\nu_0) \right) \cdot \nu_0 \right| \leq \frac{\alpha}{2} (1 - \tilde{\nu}(t) \cdot \nu_0) \leq \frac{\alpha}{4} t^2 \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|^2 + o(t^2).$$

Dividing by t^2 , we get (5.14).

If M is differentiable and $w \in \nu_0^\perp$, consider $\tilde{\nu}(t) := p_{\mathbf{S}^{n-1}}(\nu_0 + tw)$ where $p_{\mathbf{S}^{n-1}} : x \mapsto x/|x|$ is the projection on the sphere. So $\tilde{\nu}(0) = \nu_0$ and $\dot{\tilde{\nu}}(0) = w$. Hence we have

$$M(\tilde{\nu}(t)) \cdot \nu_0 = M(\nu_0) \cdot \nu_0 + t\nu_0 \cdot DM(\nu_0)w + o(t)$$

so (5.14) clearly implies $\nu_0 \cdot DM(\nu_0)w = 0$.

Assume for a moment that M is twice differentiable and satisfies (5.14). We already know that $\nu_0 \cdot DM(\nu_0)w = 0$ for any ν_0 and any $w \in \nu_0^\perp$. Therefore we have, for any $\nu \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^{n-1})$:

$$\forall t, \quad 0 = \tilde{\nu}(t) \cdot DM(\tilde{\nu}(t))\dot{\tilde{\nu}}(t).$$

Differentiating this relation with respect to t , we get

$$0 = \dot{\tilde{\nu}}(t) \cdot DM(\tilde{\nu}(t))\dot{\tilde{\nu}}(t) + \tilde{\nu}(t) \cdot D^2M(\tilde{\nu}(t))(\dot{\tilde{\nu}}(t), \dot{\tilde{\nu}}(t))$$

since $\tilde{\nu}(t) \cdot DM(\tilde{\nu}(t)) = 0$. Considering $t = 0$ and $w := \dot{\tilde{\nu}}(0) \in \nu_0^\perp$ yields

$$\forall w \in \nu_0^\perp, \quad w \cdot DM(\nu_0)w = -\nu_0 \cdot D^2M(\nu_0)(w, w). \quad (5.17)$$

Therefore a Taylor expansion yields

$$\begin{aligned} M(\tilde{\nu}(t)) \cdot \nu_0 &= M(\nu_0) \cdot \nu_0 + \frac{1}{2}t^2 \nu_0 \cdot D^2M(\nu_0)(w, w) + o(t^2) \\ &= M(\nu_0) \cdot \nu_0 - \frac{1}{2}t^2 w \cdot DM(\nu_0)w + o(t^2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

It is now clear that (5.14) implies (5.15).

If M is not twice differentiable, we use an approximation argument as follows. For any $\beta > \alpha$ and any $\varepsilon > 0$, there exists an approximating map $M_\varepsilon \in C^2(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$, such that

$$\|M - M_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{S}^{n-1}; \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \quad (5.19)$$

and M_ε satisfies (5.14) with α replaced by β . Hence M_ε satisfies (5.15), also with α replaced by β . Letting ε go to zero and using (5.19), we deduce that M satisfies (5.15) with α replaced by β . Since this holds for any $\beta > \alpha$, it holds for α as well.

Conversely, if M is differentiable and satisfies (5.15), let us prove that it satisfies (5.14). Using exactly the same approximation, we see that we just have to prove that for M twice differentiable. In such a case, (5.15) implies (5.17). Hence the Taylor expansion (5.18) holds true. This yields (5.14).

Let us now prove the reverse statement of the proposition, that is, a map M satisfying (5.14) also satisfies (5.9). Again it is enough to prove it for a twice differentiable map, for (5.19) implies in particular uniform convergence of M_ε to M .

So let us consider two vectors ν_0, ν_1 in \mathbf{S}^{n-1} and prove (5.9). We consider a geodesic path $\tilde{\nu} \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^{n-1})$ such that $\tilde{\nu}(0) = \nu_0$ and $\tilde{\nu}(1) = \nu_1$. Such a path satisfies $\tilde{\nu}(t) \in (\mathbb{R}\nu_0 + \mathbb{R}\nu_1)$, and $\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t) \leq 0$ for all t .

The function $f : t \mapsto \nu_0 \cdot M(\tilde{\nu}(t))$ has derivative $f'(t) = \nu_0 \cdot DM(\tilde{\nu}(t))\dot{\tilde{\nu}}(t)$. Since $\tilde{\nu}(t) \in (\mathbb{R}\nu_0 + \mathbb{R}\nu_1)$, we have

$$\nu_0 = (\nu_0 \cdot \tilde{\nu}(t)) \tilde{\nu}(t) + \frac{(\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t))}{|\dot{\tilde{\nu}}(t)|^2} \dot{\tilde{\nu}}(t).$$

Taking (5.15) and $\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t) \leq 0$ into account, we get

$$|f'(t)| = \frac{|\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t)|}{|\dot{\tilde{\nu}}(t)|^2} \left| \dot{\tilde{\nu}}(t) \cdot DM(\tilde{\nu}(t))\dot{\tilde{\nu}}(t) \right| \leq -\frac{\alpha}{2}(\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t)).$$

Therefore

$$\begin{aligned} |(M(\nu_1) - M(\nu_0)) \cdot \nu_0| &= |f(1) - f(0)| \\ &\leq -\frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\nu_0 \cdot \dot{\tilde{\nu}}(t)) dt = \frac{\alpha}{2}(1 - \nu_0 \cdot \nu_1). \end{aligned}$$

This completes the proof of the proposition. \square

Remark 2.A. Observe that (5.14) is equivalent to

$$\forall \tilde{\nu} \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^{n-1}),$$

$$\limsup_{t \geq 0} \frac{1}{t^2} \left| \left(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\tilde{\nu}(0)) \right) \cdot \tilde{\nu}(t) \right| \leq \frac{\alpha}{4} \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|^2. \quad (5.20)$$

Indeed we just have to prove that for a smooth M again. Then we may rewrite (5.18) with ν_0 and $\tilde{\nu}(t)$ reversed:

$$M(\nu_0) \cdot \tilde{\nu}(t) = M(\tilde{\nu}(t)) \cdot \tilde{\nu}(t) - \frac{1}{2} t^2 \dot{\tilde{\nu}}(t) \cdot DM(\tilde{\nu}(t)) \dot{\tilde{\nu}}(t) + o(t^2).$$

Since $w = \dot{\tilde{\nu}}(0) = \dot{\tilde{\nu}}(t) + O(t)$ and DM is continuous, we get by subtracting (5.18):

$$\left| \left(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\tilde{\nu}(0)) \right) \cdot (\tilde{\nu}(t) - \tilde{\nu}(0)) \right| = o(t^2)$$

as $t \rightarrow 0$. This proves that the limits on the right hand sides in (5.14) and (5.20) are equal.

Let us recall a classical geometrical definition: two smooth oriented surfaces S and S' are said to be *parallel at distance* δ if S' is the image of S through the map $x \mapsto x + \delta \vec{n}_S(x)$, where \vec{n}_S is the normal vector field on S . It is classical that a normal vector field on S' is given by $\vec{n}_S(x)$ (we will give a proof of this result in the next section). In particular, S is also a surface parallel to S' , at distance $-\delta$. Moreover, if S has well defined radii of curvature $\rho_i(x)$ ($i = 1, 2$), then S' also has radii of curvature at $x + \delta \vec{n}_S(x)$, equal to $\rho_i(x) + \delta$ with respect to the orientation given by the previous normal field.

So we see that for a body K of constant width α with median surface M_K , the median surface and the boundary ∂K are parallel at distance $\pm\alpha$, whenever they are smooth. In general, these surfaces are not smooth, but only have Lipschitz regularity, though.

5.3 Parametrizations

In this section, we give a parametrization of the median surface of a body K of constant width. This provides a simple parametrization of the boundary of K , and gives a simple formula to compute the volume and surface area of K .

From now on we focus on the three-dimensional setting. A similar work can easily be done in dimension two, but the properties of orbiforms are already quite well known.

5.3.1 Isothermal parametrization of the sphere

Let us start with a parametrization of the unit sphere \mathbf{S}^2 in the form $(u, v) \in \Omega \mapsto \nu(u, v)$, where Ω is some subset of \mathbb{R}^2 . We assume that this parametrization is *isothermal*, that is, satisfies for all $(u, v) \in \Omega$:

$$\partial_u \nu(u, v) \cdot \partial_v \nu(u, v) = 0 \quad \text{and} \quad |\partial_u \nu(u, v)| = |\partial_v \nu(u, v)| =: \frac{1}{\lambda(u, v)}. \quad (5.21)$$

We also assume that the map $\nu : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ is injective and almost surjective, that is, its image set is equal to \mathbf{S}^2 except possibly a finite number of points.

An example of such a parametrization is

$$(u, v) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \longmapsto \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \tanh v \right) \quad (5.22)$$

and in such a case $\lambda(u, v) = \cosh v$, and $\nu(\Omega) = \mathbf{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$. However we do not rely on this particular form in the following.

For technical reasons, we will also assume that λ satisfies, for all values of (u, v) , the identity

$$\lambda^2 \nabla \cdot (\lambda^{-1} \nabla \lambda) = \lambda \Delta \lambda - |\nabla \lambda|^2 = 1. \quad (5.23)$$

(Gradient and Laplacian taken relative to (u, v) .) This is clearly true for the particular parametrization given above.

Let us shorten the notations by not writing the dependencies on the parameters (u, v) . We introduce the unit vectors $\nu_u := \lambda \partial_u \nu$, $\nu_v := \lambda \partial_v \nu$. Since ν is also a unit vector, we have $\nu \cdot \partial_u \nu = 0$, so $\nu \cdot \nu_u = 0$; and similarly $\nu \cdot \nu_v = 0$. Hence the family (ν, ν_u, ν_v) is an orthonormal basis of \mathbb{R}^3 , taking (5.21) into account.

Lemma 5.3. *For such an isothermal parametrization of the unit sphere, we have*

$$\partial_u \nu_u = -\lambda^{-1} \nu + \lambda^{-1} \partial_v \lambda \nu_v \quad (5.24)$$

$$\partial_v \nu_u = -\lambda^{-1} \partial_u \lambda \nu_v \quad (5.25)$$

$$\partial_u \nu_v = -\lambda^{-1} \partial_v \lambda \nu_u \quad (5.26)$$

$$\partial_v \nu_v = -\lambda^{-1} \nu + \lambda^{-1} \partial_u \lambda \nu_u \quad (5.27)$$

Proof. Since $\nu \cdot \partial_u \nu = 0$, we get by differentiating $\nu \cdot \partial_{uv}^2 \nu = -\partial_u \nu \cdot \partial_v \nu = 0$, so $\partial_{uv}^2 \nu$ has the form $\alpha \nu_u + \beta \nu_v$. On the other hand

$$\partial_{uv}^2 \nu = \partial_u (\partial_v \nu) = \partial_u (\lambda^{-1} \nu_v) = \lambda^{-1} \partial_u \nu_v - \lambda^{-2} \partial_u \lambda \nu_v.$$

Since $|\nu_v| = 1$ implies $\nu_v \cdot \partial_u \nu_v = 0$, we get $\beta = \partial_{uv}^2 \nu \cdot \nu_v = -\lambda^{-2} \partial_u \lambda$. Similarly $\alpha = -\lambda^{-2} \partial_v \lambda$. Putting this relation in the value of $\partial_{uv}^2 \nu$ above, we deduce (5.26). We get (5.25) using $\partial_{uv}^2 \nu = \partial_v (\partial_u \nu)$ in the same way.

Differentiating the three relations $|\nu_u|^2 = 1$, $\nu \cdot \nu_u = 0$ and $\nu_u \cdot \nu_v$ with respect to u , we get $\nu_u \cdot \partial_u \nu_u = 0$,

$$\nu \cdot \partial_u \nu_u = -\nu_u \cdot \partial_u \nu = -\lambda^{-1} |\nu_u|^2 = -\lambda^{-1}$$

and

$$\nu_v \cdot \partial_u \nu_u = -\nu_u \cdot \partial_u \nu_v = \lambda^{-1} \partial_v \lambda.$$

This gives (5.24). The proof of (5.27) is similar. \square

Let us finish this section with a note about the antipodal symmetry on \mathbf{S}^2 that we will use in the following sections. There must be some involutive map $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ such that

$$\nu \circ \sigma(u, v) = -\nu(u, v) \quad (5.28)$$

for all $(u, v) \in \Omega$. For instance with the parametrization (5.22) we have

$$\nu(u + \pi, -v) = -\nu(u, v) \quad (5.29)$$

so $\sigma : (u, v) \mapsto (u + \pi, -v)$. We will call this map the *antipodal symmetry of the parametrization*. In the following, we will always assume that σ is an affine map which is *consistent* with the isothermal parametrization, that is satisfies:

$$\lambda \circ \sigma = \lambda. \quad (5.30)$$

5.3.2 Parametrization of the median surface

Since the three vectors (ν, ν_u, ν_v) are independent, any point $P \in \mathbb{R}^3$ can be written in the form $P = h\nu + h_1\nu_u + h_2\nu_v$. If h, h_1, h_2 are actually some smooth functions of (u, v) , P depends on (u, v) and describes a surface. In this section we investigate the conditions on h, h_1, h_2 ensuring that such a surface is the median surface of a spheroform, with support vector $\nu(u, v)$ at $P(u, v)$.

Proposition 5.2. *Given an isothermal parametrization $\nu : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ of the sphere, let K be a strictly convex body. There exists a C^1 map $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that $R_K(\nu) = \mathcal{M}(h)(u, v)$ for all $\nu = \nu(u, v)$, where*

$$\mathcal{M}(h) : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto h\nu + \lambda\partial_u h\nu_u + \lambda\partial_v h\nu_v. \end{cases} \quad (5.31)$$

Proof. For any given $\nu = \nu(u, v)$, consider $P(u, v) := R_K(\nu(u, v))$. Since the three vectors (ν, ν_u, ν_v) are independent, $P(u, v)$ can be written in the form $P = h\nu + h_1\nu_u + h_2\nu_v$, for some functions h, h_1, h_2 of (u, v) . These functions are continuous since R_K is continuous.

Note that $h_K(\nu(u, v)) = \nu(u, v) \cdot P(u, v) = h(u, v)$. So h is just the support function of K , and in particular is of class C^1 (see for instance [47] section 1.7). Moreover we have from the definition of R_K :

$$\forall (u_1, v_1) \in \Omega, \quad P(u_1, v_1) \cdot \nu \leq P \cdot \nu.$$

(All values of the functions are at (u, v) , unless otherwise specified.) Let us write this relation with $u_1 = u + t, v_1 = v$. For small values of t , we have from (5.24–5.27):

$$\begin{aligned} \nu(u + t, v) &= \nu + t\lambda^{-1}\nu_u + o(t), \\ \nu_u(u + t, v) &= \nu_u - t\lambda^{-1}(\nu - \partial_v\lambda\nu_v) + o(t), \\ \nu_v(u + t, v) &= \nu_v - t\lambda^{-1}\partial_v\lambda\nu_u + o(t). \end{aligned}$$

Also since h is of class C^1 , we have $h(u + t, v) = h + t\partial_u h + o(t)$. Hence

$$\begin{aligned} 0 &= P \cdot \nu - h \geq P(u_1, v_1) \cdot \nu - h \\ &= t\left(\partial_u h - \lambda^{-1}h_1(u + t, v)\right) + o(t). \end{aligned}$$

Passing to the limit $t = 0$ with either $t > 0$ or $t < 0$, we deduce that $h_1(u, v) = \lambda\partial_u h$. Similarly $h_2 = \lambda\partial_v h$. \square

Remark 3.B. Notice that $\mathcal{M}(h)$ is obviously linear with respect to h . Since in the previous proposition, $h = \mathcal{M}(h) \cdot \nu = R_K \cdot \nu$ is the support function of K , then the mapping from K to h is additive with respect to the Minkowski addition (for more details see [47] p. 41). However, not any h yields an interesting body K . In particular, if $h(u, v) = \vec{w} \cdot \nu(u, v)$ for some fixed vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, then $\partial_u h = \vec{w} \cdot \partial_u \nu = \lambda^{-1}\vec{w} \cdot \nu_u$, so $\mathcal{M}(h) = \vec{w}$ is constant, and the corresponding body K reduces to a point. Due to the additivity property, we see that adding $\vec{w} \cdot \nu$ to some given h is equivalent to a translation of the corresponding body K by the vector \vec{w} .

We prove in the next theorem that for a constant width body, the corresponding function h is actually $C^{1,1}$ (the derivatives are lipschitzian). Here and in the following, differential operators like ∇ (gradient) or Δ (laplacian) are taken relative to the variables (u, v) . We denote by ∇^\perp the operator $(-\partial_v, \partial_u)$. Whenever h is twice differentiable, we denote by D^2h the 2×2 matrix of its second-order derivatives (hessian matrix).

An inequality like $D^2h(u, v) \leq A$, where A is also a 2×2 symmetrical matrix, means that the difference $A - D^2h(u, v)$ is nonnegative definite. For $h \in C^{1,1}$ only, the second-order derivatives do not necessarily exist, but the Taylor expansion

$$T[h](u, v; \xi, \eta) := h(u + \xi, v + \eta) - h(u, v) - \xi \partial_u h(u, v) - \eta \partial_v h(u, v)$$

is of order $O(\xi^2 + \eta^2)$ for (ξ, η) small.

Definition 5.1. *We shall say that $D^2h(u, v) \leq A = (a_{i,j})$ in a generalized sense, if the following occurs:*

$$\limsup_{(\xi, \eta) \rightarrow (0,0)} \frac{T[h](u, v; \xi, \eta) - \frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \leq 0. \quad (5.32)$$

Similarly we say that $D^2h(u, v) \geq A$ in a generalized sense, if a similar property holds with a limit-inf ≥ 0 instead.

Clearly this is the same as the usual meaning for a twice-differentiable function h , since

$$T[h](u, v; \xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi^2 \partial_{uu}^2 h(u, v) + \xi\eta \partial_{uv}^2 h(u, v) + \frac{1}{2}\eta^2 \partial_{vv}^2 h(u, v) + o(\xi^2 + \eta^2)$$

in that case.

Definition 5.2. *Given an isothermal parametrization $\nu : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ of the sphere, let σ be its antipodal symmetry. Suppose that σ is an affine map on Ω . Let $C_\sigma^{1,1}(\Omega)$ be the set of all $C^{1,1}$ maps $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that*

$$h \circ \sigma = -h. \quad (5.33)$$

Let $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ be the subset of functions $h \in C_\sigma^{1,1}(\Omega)$ satisfying everywhere on Ω in a generalized sense (see Definition 5.1 above):

$$-\frac{\alpha}{2\lambda^2} \text{Id} \leq U[h] \leq \frac{\alpha}{2\lambda^2} \text{Id} \quad (5.34)$$

where

$$U[h] := D^2h + \lambda^{-2}h \text{Id} + \lambda^{-1}\nabla\lambda \otimes \nabla h - \lambda^{-1}\nabla^\perp\lambda \otimes \nabla^\perp h. \quad (5.35)$$

Theorem 5.3. *Given an isothermal parametrization of the sphere, let $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ be given by the Definition 5.2 above.*

Then a map $M : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is the median surface of a spheroform if and only if there exists $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ such that $M(\nu) = \mathcal{M}(h)(u, v)$ for all $\nu = \nu(u, v)$, where the map $\mathcal{M}(h) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ is defined by (5.31). In this case, the map $\mathcal{M}(h + \frac{\alpha}{2}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ describes all but a finite number of the points on ∂K .

The restriction about exceptional points on ∂K comes from the fact that $\nu(\Omega)$ equals \mathbf{S}^2 , excepts some exceptional points. (The points $(0, 0, \pm 1)$ with the parametrization (5.22).)

Proof. Given $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$, define $M : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ by $M(\nu) = \mathcal{M}(h)(u, v)$ for all $\nu = \nu(u, v)$. Let us prove that M is the median surface of some spheroform. In view of Theorem 5.2, Proposition 5.1 and Remark 2.A, we just have to prove (5.5) and (5.20).

By computing the derivatives of (5.28) and (5.30) and using the fact the σ is an affine involutive map, it is straightforward to establish that $M(-\nu) = \mathcal{M}(h) \circ \sigma = \mathcal{M}(h)$ and M satisfies (5.5).

Let us now prove (5.20). Any $\tilde{\nu} \in C^2([0, 1]; \mathbf{S}^2)$ can be written in the parametrization as $\tilde{\nu}(t) = \nu(u(t), v(t))$ where $u(t), v(t) \in C^2([0, 1])$. If $\tilde{\nu}(0) = \nu(u_0, v_0) =: \nu_0$, we also have $u(0) = u_0, v(0) = v_0$. Let us consider $\xi := u(t) - u_0, \eta := v(t) - v_0$. Since $\partial_u \nu = \lambda^{-1}\nu_u$, and

$$\partial_{uu}^2 \nu = \partial_u(\lambda^{-1}\nu_u) = \lambda^{-2}(-\nu + \partial_v \lambda \nu_v - \partial_u \lambda \nu_u)$$

with the help of (5.24). With similar relations for the other derivatives, we get the Taylor expansion of $\tilde{\nu}$ near $t = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(t) &= \nu(u_0 + \xi, v_0 + \eta) = \nu_0 + \xi\lambda^{-1}\nu_u + \eta\lambda^{-1}\nu_v \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda^2} \left[\xi^2(-\nu + \partial_v\lambda\nu_v - \partial_u\lambda\nu_u) - 2\xi\eta(\partial_u\lambda\nu_v + \partial_v\lambda\nu_u) + \eta^2(-\nu + \partial_u\lambda\nu_u - \partial_v\lambda\nu_v) \right] \\ &\quad + o(\xi^2 + \eta^2), \end{aligned} \quad (5.36)$$

where all functions on the right hand side are computed at (u_0, v_0) .

In particular we get using $\xi = u(t) - u_0 = t\dot{u}(0) + o(t)$ and $\eta = v(t) - v_0 = t\dot{v}(0) + o(t)$,

$$\dot{\tilde{\nu}}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\tilde{\nu}(t) - \nu_0) = \lambda^{-1}(\dot{u}(0)\nu_u + \dot{v}(0)\nu_v).$$

This implies

$$\frac{1}{\lambda^2}(\xi^2 + \eta^2) = t^2 \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|^2 + o(t^2). \quad (5.37)$$

Similarly since $M(\nu(u, v)) \cdot \nu(u, v) = h(u, v)$ from the definition of h , we have:

$$\begin{aligned} &(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\nu_0)) \cdot \tilde{\nu}(t) \\ &= h(u(t), v(t)) - M(\nu_0) \cdot \nu(u(t), v(t)) \\ &= h(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - (h\nu_0 + \lambda\partial_u h\nu_u + \lambda\partial_v h\nu_v) \cdot \nu(u_0 + \xi, v_0 + \eta) \\ &= h(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - h - \xi\partial_u h - \eta\partial_v h + \frac{h}{2\lambda^2}(\xi^2 + \eta^2) \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} \left(\xi^2(-\partial_v\lambda\partial_v h + \partial_u\lambda\partial_u h) + 2\xi\eta(\partial_u\lambda\partial_v h + \partial_v\lambda\partial_u h) \right. \\ &\quad \left. + \eta^2(-\partial_u\lambda\partial_u h + \partial_v\lambda\partial_v h) \right) \\ &\quad + o(\xi^2 + \eta^2) \\ &= T[h](u_0, v_0; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} + o(t^2) \end{aligned}$$

where $A := \lambda^{-2}h \text{ Id} + \lambda^{-1}\nabla\lambda \otimes \nabla h - \lambda^{-1}\nabla^\perp\lambda \otimes \nabla^\perp h$.

Using the right inequality in (5.34), and the definition of the corresponding generalized sense, we deduce with (5.37):

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (M(\tilde{\nu}(t)) - M(\nu_0)) \cdot \tilde{\nu}(t) \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{4\lambda^2 t^2} (\xi^2 + \eta^2) = \frac{\alpha}{4} \left| \dot{\tilde{\nu}}(0) \right|.$$

Similarly the left inequality in (5.34) yields the reverse inequality, which achieves the proof of (5.20).

Conversely, let K be a spheroform. We know from Proposition 5.2 that there exists some function $\tilde{h} \in C^1(\Omega)$ such that $R_K(\nu) = \mathcal{M}(\tilde{h})(u, v)$ for all $\nu = \nu(u, v)$.

Consider now the function $h := \tilde{h} - \frac{\alpha}{2}$. From the definition of \mathcal{M} , it is clear that $\mathcal{M}(h)(u, v) = \mathcal{M}(\tilde{h}) - \frac{\alpha}{2}\nu(u, v)$, so for any $\nu = \nu(u, v)$ we have

$$M_K(\nu(u, v)) = R_K(\nu(u, v)) - \frac{\alpha}{2}\nu(u, v) = \mathcal{M}(h)(u, v).$$

Moreover the map $\nu \mapsto M_K(\nu)$ is lipschitzian from Lemma 5.2. Hence $\partial_u h(u, v) = M_K(\nu) \cdot \nu_u(u, v)$ is lipschitzian, too. And similarly for $\partial_v h$. So $h \in C^{1,1}$. Additionally $h(u, v) = M_K(\nu(u, v)) \cdot \nu(u, v)$ implies $h \circ \sigma = M_K(-\nu) \cdot (-\nu) = -h$, so h satisfies (5.33). Hence $h \in C_\sigma^{1,1}(\Omega)$.

We know that M_K satisfies (5.20). If we consider the special path $\tilde{\nu} : t \mapsto \nu(u_0 + t\xi, v_0 + t\eta)$, we can expand $\tilde{\nu}(t)$ near $t = 0$ as before, obtaining something similar to (5.36). This implies with a similar computation:

$$(M(\tilde{\nu}(t)) - M(\nu_0)) \cdot \tilde{\nu}(t) = t^2 T[h](u_0, v_0; \xi, \eta) + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} + o(t^2).$$

Therefore (5.20) implies (5.34) in the generalized sense. This completes the proof that $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$. \square

5.3.3 Regularity of the parametrization

In this section, we investigate the consequences of (5.34) on h , whenever h is regular enough.

Proposition 5.3. *Let h be C^2 on some open set $\omega \subset \Omega$. Then h satisfies (5.34) on ω if and only if it satisfies*

$$|R(h)| \leq \min \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\alpha}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{\alpha} J(h) \right) \quad (5.38)$$

on ω , where $R(h)$ and $J(h)$ are the trace and determinant of the matrix $\lambda^{-1}hI + \nabla\lambda \otimes \nabla h - \nabla^\perp\lambda \otimes \nabla^\perp h + \lambda D^2 h$, that is

$$R(h) := \frac{2h}{\lambda} + \lambda \Delta h \quad (5.39)$$

$$J(h) := \lambda^{-2} h^2 + h \Delta h + \lambda^2 \det D^2 h + \lambda \nabla^\perp \lambda \cdot D^2 h \cdot \nabla^\perp h - \lambda \nabla \lambda \cdot D^2 h \cdot \nabla h - |\nabla \lambda|^2 |\nabla h|^2. \quad (5.40)$$

Proof. For a C^2 function, the generalized sense for (5.34) is just the common pointwise sense. We can multiply by λ and get (5.38) since a 2×2 matrix is nonnegative definite, if, and only if, its trace and determinant are nonnegative. \square

Let us note for further references that $R(h)$ and $J(h)$ are the trace and determinant of a symmetric matrix. Therefore it has real eigenvalues, and in particular the discriminant of its characteristic polynomial is nonnegative:

$$R(h)^2 \geq 4J(h). \quad (5.41)$$

This holds for any C^2 function h .

Notice that for any $\delta \in \mathbb{R}$,

$$R(h + \delta) = R(h) + \frac{2\delta}{\lambda}, \quad (5.42)$$

$$J(h + \delta) = J(h) + \delta \lambda^{-1} R(h) + \lambda^{-2} \delta^2. \quad (5.43)$$

Therefore (5.38) may be equivalently written

$$R(h + \frac{\alpha}{2}) \geq 0, \quad R(h - \frac{\alpha}{2}) \leq 0, \quad J(h + \frac{\alpha}{2}) \geq 0 \quad \text{and} \quad J(h - \frac{\alpha}{2}) \geq 0. \quad (5.44)$$

Remark 3.C. The appearance of the matrix in the previous proposition seems quite odd at first. Here is another way to obtain it, which is easier to understand, but requires again $h \in C^2$, so we can compute the derivatives of $M := \mathcal{M}(h)$. We get using (5.24–5.27):

$$\partial_u M = a\nu_u + b\nu_v \quad \text{and} \quad \partial_v M = c\nu_u + d\nu_v \quad (5.45)$$

where

$$\begin{aligned} a &:= \lambda^{-1}h + \partial_u \lambda \partial_u h - \partial_v \lambda \partial_v h + \lambda \partial_{uu}^2 h \\ b = c &:= \partial_v \lambda \partial_u h + \partial_u \lambda \partial_v h + \lambda \partial_{uv}^2 h \\ d &:= \lambda^{-1}h + \partial_v \lambda \partial_v h - \partial_u \lambda \partial_u h + \lambda \partial_{vv}^2 h. \end{aligned}$$

So we find $DM\nu = 0$ in agreement to Proposition 5.1. We also see from their definition that $R(h) = a + d$ and $J(h) = ad - bc$.

Since $M = \mathcal{M}(h) \in C^1$, (5.14) is equivalent to (5.15) according to Proposition 5.1. Since for $\nu_0 = \nu(u_0, v_0)$, we have $\nu_0^\perp = \text{Span}(\nu_u(u_0, v_0), \nu_v(u_0, v_0))$, we just have to check (5.15) for $w = \xi\nu_u + \eta\nu_v$, with arbitrary (ξ, η) . This inequality becomes then, using (5.24–5.27):

$$\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad |a\xi^2 + 2b\xi\eta + d\eta^2| \leq \frac{\alpha}{2\lambda}(\xi^2 + \eta^2).$$

This means

$$-\frac{\alpha}{2\lambda} \text{Id} \leq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leq \frac{\alpha}{2\lambda} \text{Id}$$

in the sense of matrices, which is (5.34).

Remark 3.D. The previous proposition has also a geometrical meaning and can be proved using corresponding considerations. Indeed, in matrix notations, we have $\nabla M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix}$, using again the notations of the previous remark. Consequently we get:

$$\nabla \nu = \begin{pmatrix} \partial_u \nu \\ \partial_v \nu \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \nabla M.$$

By definition, the curvatures of the surface $(u, v) \mapsto M(u, v)$ are the eigenvalues of the matrix A such that $\nabla \nu = A \nabla M$, since ν is normal to the surface. And the curvature radii, their inverse, are the eigenvalues of A^{-1} . We see that in our case $A = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$. So the curvature radii are the solutions ρ_i ($i = 1, 2$) of the equation

$$\rho^2 - \lambda^2 R(h)\rho + \lambda^2 J(h) = 0. \quad (5.46)$$

Therefore, if we change h to $\tilde{h} := h + \delta$ in order to consider a parallel surface, we see that the curvature radii $\tilde{\rho}_i$ on this new surface are solutions of the equation

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\rho}^2 - (2\delta + 2h + \lambda^2 \Delta h)\tilde{\rho} + \lambda^2 J(h) + \delta(2h + \lambda^2 \Delta h) + \delta^2 \\ &= (\tilde{\rho} + \delta)^2 - (2h + \lambda^2 \Delta h)(\tilde{\rho} + \delta) + \lambda^2 J(h). \end{aligned}$$

Hence $\tilde{\rho}_i = \rho_i + \delta$ as claimed before.

For a body of constant width α , the parallel to the median surface at distance $\pm \frac{\alpha}{2}$ are part of the boundary of K . So they are convex, with opposite directions (the outward normal vector on $\mathcal{M}(h - \frac{\alpha}{2})(u, v)$ is $-\nu(u, v)$). Hence we must have $\rho_i \in [-\frac{\alpha}{2}, +\frac{\alpha}{2}]$. This is equivalent to saying that the left hand side of (5.46) is nonnegative whenever $\rho = \pm \frac{\alpha}{2}$, and that the sum of the roots belongs to $[-\alpha, \alpha]$. This in turn is equivalent to (5.38). In other words, (5.38) expresses the fact that the radii of curvature on the median surface are in $[-\frac{\alpha}{2}, +\frac{\alpha}{2}]$, whenever they are defined.

The equivalent formula (5.44) expresses the fact that the Gaussian curvatures $J(h \pm \frac{\alpha}{2})$ are nonnegative, while the mean curvatures $R(h \pm \frac{\alpha}{2})$ have opposite signs, since the convex surfaces are opposite.

5.3.4 Surface area and volume

According to Theorem 5.3, there is a one to one correspondence between $C_{\sigma,\alpha}^{1,1}(\Omega)$ and \mathcal{W}_α . We investigate now the way to compute the volume and surface area of some $K \in \mathcal{W}_\alpha$ through the corresponding function h .

Proposition 5.4. *Let $\omega \subset \Omega$ be a symmetrical subset of the parametrization space, that is $\sigma(\omega) = \omega$. Let $h \in C_{\sigma,\alpha}^{1,1}(\Omega)$ be C^2 on $\partial\omega$, and let K be the corresponding spheroform.*

The set $R_K(\omega) \subset \partial K$ has surface area:

$$\begin{aligned} |R_K(\omega)| &= \frac{\alpha^2}{4} |\nu(\omega)| + \int_\omega \left(\lambda^{-2} h^2 - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 \right) \\ &\quad + \int_{\partial\omega} \left(h + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta h \right) \nabla h \cdot \vec{n} - \frac{1}{4} \int_{\partial\omega} \nabla \left(\lambda^2 |\nabla h|^2 \right) \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

(Here $|\nu(\omega)|$ stands for the surface area of the subset $\nu(\omega)$ of \mathbf{S}^2 .)

Proof. It is enough to prove the proposition for $h \in C^2(\bar{\omega})$. Indeed an approximation argument allows to generalize to others h , since the right hand side of (5.47) involves second-order derivatives only on the boundary of ω .

We make use of the notations of Proposition 5.3 and Remark 3.C. We have

$$\partial_u M \times \partial_v M = (a\nu_u + b\nu_v) \times (c\nu_u + d\nu_v) = J(h)\nu.$$

Hence the area of the surface $\mathcal{M}(h)(\omega)$ is $\int_\omega |J(h)|$. Since $\mathcal{M}(h)$ is the median surface of $K \in \mathcal{W}_\alpha$, $\mathcal{M}(h + \frac{\alpha}{2})$ and $\mathcal{M}(h - \frac{\alpha}{2})$ both describe the boundary of K . If we restrict the parameters to the subset ω , they both describe $R_K(\omega)$ since we assumed $\omega = \sigma(\omega)$. So the surface area of $R_K(\omega)$ is equal to $\int_\omega |J(h \pm \frac{\alpha}{2})|$. This implies, using (5.43) and (5.44):

$$\begin{aligned} |R_K(\omega)| &= \frac{1}{2} \int_\omega J\left(h + \frac{\alpha}{2}\right)(u, v) \, du \, dv + \frac{1}{2} \int_\omega J\left(h - \frac{\alpha}{2}\right)(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_\omega \left(\frac{\alpha^2}{4\lambda^2(u, v)} + J(h)(u, v) \right) \, du \, dv. \\ &= \frac{\alpha^2}{4} |\nu(\omega)| + \int_\omega J(h) \, du \, dv. \end{aligned}$$

(The latter equality follows from $\partial_u \nu \times \partial_v \nu = \lambda^{-2} \nu$.) To complete the proof of the proposition, we have now to prove:

$$\begin{aligned} \int_\omega J(h)(u, v) \, du \, dv &= \int_\omega \left(\lambda^{-2} h^2 - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 \right) \\ &\quad + \int_{\partial\omega} \left(h + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta h \right) \nabla h \cdot \vec{n} - \frac{1}{4} \int_{\partial\omega} \nabla \left(\lambda^2 |\nabla h|^2 \right) \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

By expanding products in (5.40), we get

$$J(h) = \lambda^{-2} h^2 + h \Delta h + J_1(h) - J_2(h), \quad (5.49)$$

where

$$J_1(h) := \lambda^2 (\partial_{uu}^2 h \partial_{vv}^2 h - (\partial_{uv}^2 h)^2)$$

$$+ \lambda \left(\partial_u \lambda \partial_u h \partial_{vv}^2 h + \partial_v \lambda \partial_v h \partial_{uu}^2 h - \partial_u \lambda \partial_v h \partial_{uv}^2 h - \partial_v \lambda \partial_u h \partial_{uv}^2 h \right)$$

and

$$J_2(h) := \left((\partial_u \lambda)^2 + (\partial_v \lambda)^2 \right) \left((\partial_u h)^2 + (\partial_v h)^2 \right) \\ + \lambda \left(\partial_u \lambda \partial_u h \partial_{uu}^2 h + \partial_v \lambda \partial_v h \partial_{vv}^2 h + \partial_v \lambda \partial_u h \partial_{uv}^2 h + \partial_u \lambda \partial_v h \partial_{uv}^2 h \right).$$

Let us define $w_1 := \partial_u h \partial_{uv}^2 h - \partial_v h \partial_{uu}^2 h$, $w_2 := \partial_u h \partial_{vv}^2 h - \partial_v h \partial_{uv}^2 h$ and $\vec{w} := (w_1, w_2)$. We have $\partial_u w_2 - \partial_v w_1 = 2(\partial_{uu}^2 h \partial_{vv}^2 h - (\partial_{uv}^2 h)^2)$. Therefore

$$2J_1(h) = \partial_u (\lambda^2 w_2) - \partial_v (\lambda^2 w_1).$$

This implies using Green's formula

$$\int_{\omega} J_1(h) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \lambda^2 \vec{w} \cdot d\vec{l}.$$

Now let us denote by H the scalar function $|\nabla h|^2$. Since $\vec{w} = \Delta h \nabla^\perp h - \frac{1}{2} \nabla^\perp H$ (where $\nabla^\perp = (-\partial_v, \partial_u)$), we also have

$$\int_{\omega} J_1(h) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \lambda^2 \left(\Delta h \nabla h - \frac{1}{2} \nabla H \right) \cdot \vec{n} \, ds.$$

Considering now J_2 , we can check easily that $J_2(h) = |\nabla \lambda|^2 H + \frac{1}{2} \lambda \nabla \lambda \cdot \nabla H$. Integrating by parts we get

$$\begin{aligned} \int_{\omega} J_2(h) &= \int_{\omega} H \left(|\nabla \lambda|^2 - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\lambda \nabla \lambda) \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} H \lambda \nabla \lambda \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left(|\nabla \lambda|^2 - \lambda \Delta \lambda \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} H \lambda \nabla \lambda \cdot \vec{n} \, ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\omega} H + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} H \lambda \nabla \lambda \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

using (5.23).

Finally we have

$$\int_{\omega} h \Delta h = \int_{\partial\omega} h |\nabla h| \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\omega} |\nabla h|^2 = \int_{\partial\omega} h \nabla h \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\omega} H.$$

So integrating (5.49) yields (5.48). □

We are now in position to compute the volume and surface area of any spheroform, expressed as integrals of the corresponding function h :

Theorem 5.4. *Let $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ be given, and $K \in \mathcal{W}_\alpha$ the corresponding spheroform. The surface area $|\partial K|$ and the volume $|K|$ are given by*

$$|\partial K| = \int_{\Omega} \left(\lambda^{-2} h^2 - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 \right) + \pi \alpha^2, \quad (5.50)$$

$$|K| = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda^{-2} h^2 - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 \right) + \frac{\pi \alpha^3}{6}. \quad (5.51)$$

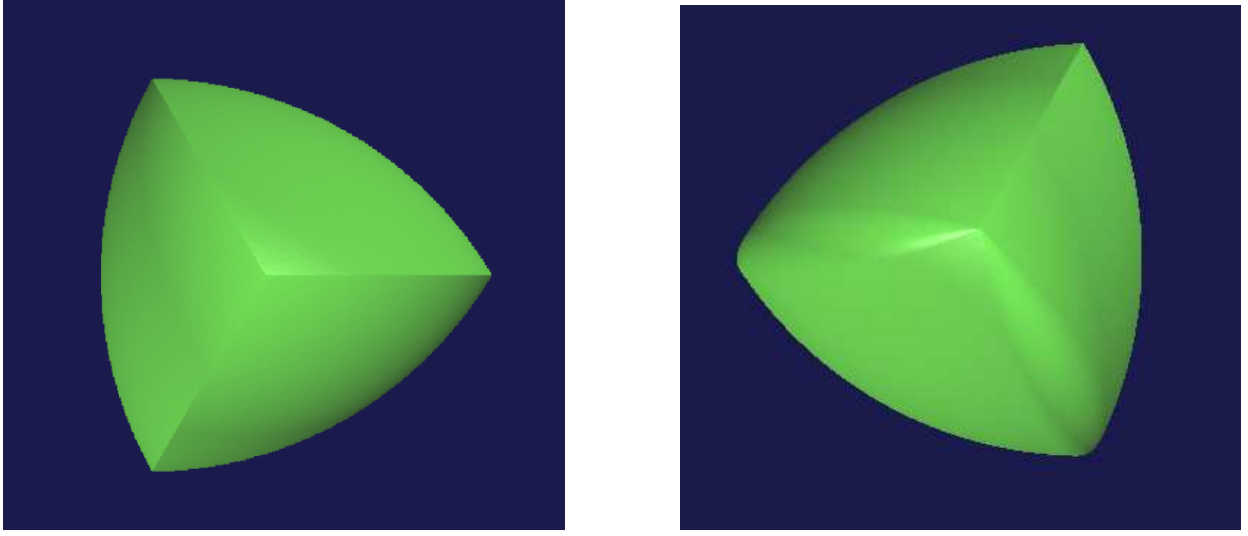


Figure 5.1: Two views of one Meissner's tetrahedron

Corollary 5.1 (Blaschke). *Let K be any convex body of constant width α in dimension 3. Then the volume and surface area of K satisfy:*

$$|K| = \frac{\alpha}{2} |\partial K| - \frac{\pi\alpha^3}{3}. \quad (5.52)$$

We refer the reader to [6] for the original proof of this property. Here it follows directly from Theorem 5.4.

Proof. The parametrization domain $\Omega = \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ has no boundary. So if we apply (5.47) with $\omega = \Omega$, we get (5.50) since $|\nu(\Omega)| = |\mathbf{S}^2| = 4\pi$.

The volume of K can be expressed as $|K| = \frac{1}{3} \int_{\partial K} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, using Stokes' formula. We can choose $M = \mathcal{M}(h + \frac{\alpha}{2})(u, v)$ as a parametrization, and then $\vec{n} = \nu(u, v)$ and $d\sigma = J(h + \frac{\alpha}{2}) \, du \, dv$. But we may also choose $M = \mathcal{M}(h - \frac{\alpha}{2})$, and in such a case $\vec{n} = -\nu(u, v)$ since \vec{n} is the outward normal in Stokes' formula, and $d\sigma = J(h - \frac{\alpha}{2}) \, du \, dv$. So we have

$$|K| = \frac{1}{3} \int_{\Omega} (h + \frac{\alpha}{2}) J(h + \frac{\alpha}{2}) = -\frac{1}{3} \int_{\Omega} (h - \frac{\alpha}{2}) J(h - \frac{\alpha}{2}).$$

In particular this implies, using (5.43) and an integration by parts:

$$\begin{aligned} |K| &= \frac{1}{6} \int_{\Omega} \left\{ (h + \frac{\alpha}{2}) J(h + \frac{\alpha}{2}) - (h - \frac{\alpha}{2}) J(h - \frac{\alpha}{2}) \right\} \\ &= \frac{\alpha}{6} \int_{\Omega} J(h) + \frac{\alpha^3}{24} \int_{\Omega} \lambda^{-2} + \frac{\alpha}{6} \int_{\Omega} h(2\lambda^{-2}h + \Delta h) \\ &= \frac{\alpha}{6} \int_{\Omega} J(h) + \frac{\pi\alpha^3}{6} + \frac{\alpha}{6} \int_{\Omega} (2\lambda^{-2}h^2 - |\nabla h|^2). \end{aligned}$$

This proves (5.51) using (5.48) with $\omega = \Omega$. □

5.3.5 Description of Meissner's tetrahedron

A description of this volume can be found in [9],[56] and [28]. We shall give a brief definition of this volume and describe its parametrization.

Meissner's tetrahedron is geometrically defined in the following way: consider a body K_t obtained as the intersection of four balls of radius α which centers are the vertices of a regular tetrahedron (of edge lengths α). Thus, the boundary of K_t is composed of four pieces of balls connected by six arc of circles. Surprisingly, this set K_t is not of constant width: geometrical considerations show that opposite circular edges are too far away. Meissner proposed to smooth three edges of K_t in order to get a constant width body. Consider E the union of three circular edges which share a common vertex S . Then, the body K defined as

$$K = \bigcap_{x \in E} B(x, \alpha) \cap K_t$$

is a body of constant width called Meissner's tetrahedron (see figure 5.3.4). Notice that it is possible to build another constant width body based on the regular tetrahedron by smoothing a different set of edges.

We give below an analytical representation in terms of its h function based on the parametrization of the sphere described by (5.22). In order to take benefit of the invariance of the previous body K by rotations of angles $\pm 2\pi/3$, we consider a body K built on a regular tetrahedron which has its vertex S on the z -axes and the others on the plane $z = 0$. Moreover, we assume that the equilateral triangle formed by the vertices on $z = 0$ is symmetric with respect to the y -axes. It is straightforward to check that such a Meissner's tetrahedron is invariant with respect to the rotations about the z -axes of angles $\pm 2\pi/3$ and also invariant by orthogonal symmetry with respect to the plane $x = 0$. Then, the function h is completely defined if we give an analytical representation of h on $\omega = [0, \frac{\pi}{3}] \times [0, +\infty[$ since relations (5.33) and $h(u, v) = h(-u, v)$ define h on all $\Omega = [-\pi, \pi] \times]-\infty, +\infty[$ (see figure 5.3.5). On ω , for $\alpha = 1$, the function h may be described in the following way:

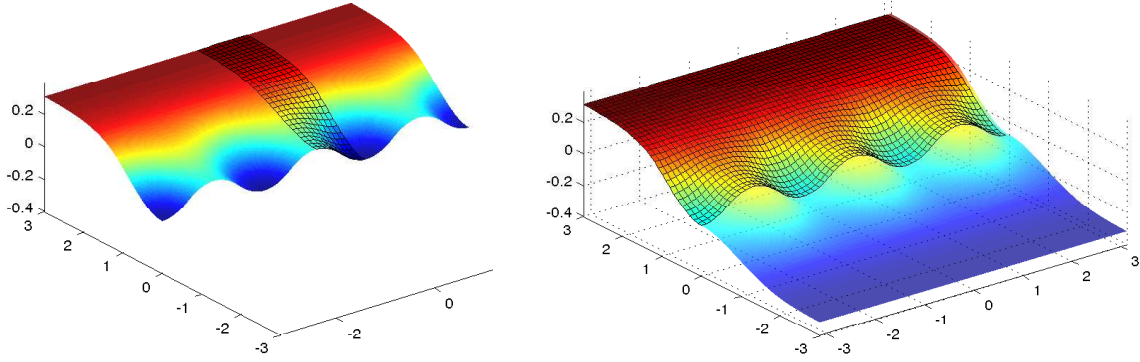
$$\begin{cases} \sqrt{2/3} \tanh v - 1/2, & \text{if } \sinh v > 2\sqrt{2} \cos u, \\ -1/2 - (1/2\sqrt{3})(\cos u / \cosh v) + \dots & \\ (\sqrt{3}/2)(\cosh v^2 - \sin u^2) / \cosh v, & \text{if } \sinh v \leq 2\sqrt{2} \cos u, \cosh v \geq 2 \sin u, \\ 1/2 + (1/\sqrt{3}) \cos(u + 2\pi/3) / \cosh v & \text{if } \sinh v \leq 2\sqrt{2} \cos u, \cosh v > 2 \sin u. \end{cases}$$

Notice that it is possible to compute the volume and the surface area of Meissner's tetrahedron thanks to equations (5.50) and (5.52). After some symbolic computations, we get the formulas presented in [25]:

$$\begin{aligned} |K| &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \arccos \frac{1}{3} \\ |\partial K| &= 2\pi - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \arccos \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5.3.6 Local optimality

We now come back to the volume functional $K \mapsto |K|$ in order to investigate the properties of its minimizers. A striking consequence of Theorem 5.4 is that minimizing the volume in \mathcal{W}_α is

Figure 5.2: Construction of Meissner's h function

equivalent to minimizing the surface area. More precisely, the volume minimization problem is equivalent to

$$\min_{h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)} L(h) \quad \text{where} \quad L(h) = \int_{\Omega} \left(\lambda^{-2} h^2 - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 \right). \quad (5.53)$$

Let us first observe that the maximum value of L is zero:

Lemma 5.4. *For any $h \in C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$, we have $L(h) \leq 0$.*

In particular, a maximizer of L in $C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ is always $h = 0$, which corresponds to a ball of radius $\alpha/2$. Hence such a ball has maximal volume among all spherofoms, a well-known result.

Proof. Let W_{σ} be the space of all functions $h \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfying (5.33). This is a closed subspace of the Sobolev space $W^{1,2}(\Omega)$, so it is a Banach space. Let us define $s \in \mathbb{R}$ as follows:

$$s = \inf_{h \in W_{\sigma}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2}{\int_{\Omega} \lambda^{-2} h^2}.$$

This is a “weighted Sobolev constant”, and it is classical in PDE theory that the infimum is actually attained by a smooth function $\phi \in W_{\sigma}$ satisfying the corresponding Euler equation

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \phi = s \int_{\Omega} \lambda^{-2} h \phi, \quad \forall h \in W_{\sigma}.$$

In other words, ϕ is an eigenfunction of the operator $-\lambda^2 \Delta$, with the symmetry condition $\phi \circ \sigma = -\phi$. Additionally, if we choose two open sets $\Omega_+ \subset \Omega$ and $\Omega_- = \sigma(\Omega_+)$ such that $\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$ and $\Omega = \overline{\Omega}_+ \cup \Omega_-$, then it follows from Krein-Rutman's theorem that there exists an eigenfunction ϕ satisfying $\phi > 0$ on Ω_+ . One way to choose such a set Ω_+ is to consider some fixed vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, and to set

$$\Omega_+ := \{(u, v) \in \Omega; \vec{w} \cdot \nu(u, v) > 0\}.$$

Given such a \vec{w} , define $g := (u, v) \mapsto \vec{w} \cdot \nu(u, v)$. As explained in Remark 3.B, $\mathcal{M}(g) = \vec{w}$ for all (u, v) , and the body corresponding to $h + g$, for any $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$, is just a translation of the

body corresponding to h . In particular, they have the same volume, so $L(h + g) = L(h)$. Since L is quadratic, this means that

$$0 = L(g) + \int_{\Omega} \lambda^{-2} h g - \nabla h \cdot \nabla g$$

for all $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$. In particular, $L(g) = 0$ since we can take $h = 0$, and $\Delta g + 2\lambda^{-2}g$ is orthogonal (for the L^2 scalar product) to all $h \in C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$. The latter implies it is orthogonal to W_{σ} , since $\bigcup_{\alpha > 0} C_{\sigma, \alpha}^{1,1}(\Omega)$ contains $C_{\sigma}^2(\Omega)$. Hence it is orthogonal to ϕ , so we get

$$2 \int_{\Omega} \lambda^{-2} g \phi = \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \phi = s \int_{\Omega} \lambda^{-2} g \phi.$$

Now both functions g and ϕ are positive on Ω_+ and odd with respect to σ , so

$$\int_{\Omega} \lambda^{-2} g \phi = 2 \int_{\Omega_+} \lambda^{-2} g \phi > 0$$

and therefore $s = 2$. This implies $L(h) \leq 0$ for any $h \in W_{\sigma}$, and in particular in $C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$. \square

Remark 3.E. Since balls are the unique maximizers of the volume among spherofoms of given width, it follows that for $h \in C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$:

$$L(h) = 0 \iff \exists \vec{w} \in \mathbb{R}^3, h(u, v) = \vec{w} \cdot \nu(u, v),$$

for all $(u, v) \in \Omega$.

An interesting consequence of the previous lemma is that the functional L is actually strictly concave with respect to h (when considered on the quotient of $C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$ by the smallest subspace containing all the functions $\vec{w} \cdot \nu(u, v)$ for $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$).

Indeed L is quadratic, so for any $h, g \in C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$ and for all $t \in [0, 1]$:

$$L(th + (1-t)g) - tL(h) - (1-t)L(g) = -t(1-t)L(h-g) \geq 0.$$

From the remark 3.E, the equality holds if and only if it exists $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ such that $h = g + \vec{w} \cdot \nu(u, v)$.

The following weak optimality result applies not only to global minimizers, but also to local ones. Notice that this condition is very close to the one established in [26] for a relaxed problem of (5.3).

Theorem 5.5. *Let K be a body of constant width, and a local minimizer of the volume functional. Then K is everywhere irregular in the following sense: for any $A \subset \mathbf{S}^{n-1}$, one of the two subsets $R_K(A)$ or $R_K(-A)$ of ∂K is not a smooth surface.*

In this context, a ‘‘smooth surface’’ means that the set of points can be described as the graph of a regular function. Observe that this result is obvious in dimension two for global minimizers, since these are Reuleaux triangles.

Proof. Let K be a local minimizer of the volume and $A \subset \mathbf{S}^2$ with $R_K(A)$ a smooth surface. Let h be the function of $C_{\sigma}^{1,1}(\Omega)$ associated to K by the proposition 5.2. Since every constant width bodies are strictly convex, we can assume without loss of generality that $R_K(A)$ is the graph of a strictly convex function. In this context, it is standard that the reverse Gauss map is a

smooth diffeomorphism. Moreover, the function h is also locally smooth on the points of $\omega \subset \Omega$ corresponding to A since:

$$h(u, v) = R_K(\nu(u, v)) \cdot \nu(u, v).$$

Let us first establish that h saturates the pointwise constraint (5.34) on a subset of ω . By reducing ω to a smaller set if necessary, we suppose that $\omega \cap \sigma(\omega) = \emptyset$. Assume by contradiction that the four inequalities are strict. Let $g \in C^2(\omega)$ with compact support. We extend it to $\sigma(\omega)$ by symmetry, defining $g(\sigma(u, v)) = -g(u, v)$, so that the new function, still denoted g , belongs to $C_\sigma^{1,1}(\Omega)$. Due to the non-saturation property, the functions $f_+ := h + tg$ and $f_- := h - tg$ belong to $C_\sigma^{1,1}(\Omega)$ for $|t|$ small enough. Now L is strictly concave so we have:

$$L(h) = L\left(\frac{1}{2}f_+ + \frac{1}{2}f_-\right) \geq \min(L(f_+), L(f_-)). \quad (5.54)$$

for all g . Since an equality in (5.54) is not possible because of the remark 3.E (none of the function $\vec{w} \cdot \nu(u, v)$ has a compact support), we have that $L(h) > \min(L(f_+), L(f_-))$. This contradicts the local minimality of h .

We established in subsection 5.3.3, that the saturation of the constraints for the regular function h is equivalent to the fact that one or both of the radii of curvature on $R_K(A)$ are equal to α or 0. Since $R_K(A)$ is a strictly convex regular surface, its curvature radii are not zero. As a consequence, on all points of $R_K(A)$ at least one of the curvature radii is equal to α . Consider now the surjective map from ω to $R_K(-A)$ given by

$$(u, v) \mapsto R_K(\nu(u, v)) - \alpha\nu(u, v).$$

If this map is not injective, $R_K(-A)$ is not smooth since at least one point of this surface has a non empty subdifferential. We conclude that the previous map is an admissible parametrization of $R_K(-A)$. It is now straightforward to compute that on all points of $R_K(-A)$, at least one of the curvature radii is equal to 0. Again, this fact contradicts the regularity of $R_K(-A)$ which concludes the proof. \square

Remark 3.F. If we assume additionally that the lines of curvature on $R_K(A)$ of the body K have no torsion, it is possible to show that $R_K(-A)$ is a convex curve. In this situation we would conclude that one of the two pieces of the boundary $R_K(A)$ or $R_K(-A)$ has measure 0. Notice that Meissner's tetrahedron satisfies the previous assumption.

Chapitre 6

Appendice

6.1 Développement en série de Fourier des polygones de Reuleaux

Nous donnons dans cet appendice le développement en série de Fourier des polygones de Reuleaux réguliers tournant à l'intérieur du carré. Soit $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre de côtés du polygone de Reuleaux P_n . Ainsi, P_n est la donnée de n créneaux de longueur $\delta = \frac{\pi}{n}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si f_n désigne le rayon de courbure de P_n , alors f_n est donnée sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f_n(\theta) = 2r \sum_{k=-p-1}^{p-1} 1_{[\frac{\delta}{2} + (2k+1)\delta, \frac{\delta}{2} + (2k+2)\delta]}.$$

où r désigne le rayon du cercle inscrit du carré. P_n est un corps de largeur constante $2r$ et son rayon de courbure vérifie donc la relation

$$f_n(\theta + \pi) + f_n(\theta) = 2r.$$

Par ailleurs, sans pertes de généralités, on peut choisir f paire (voir figure 6.1).

Proposition 6.1. *La série de Fourier d'un polygone de Reuleaux P_n est donnée par :*

$$f_n(\theta) = r + \frac{4r}{\pi} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos((2m+1)n\theta). \quad (6.1)$$

On voit donc que le développement en série de Fourier de f_n est **lacunaire**. Pour le cas du triangle de Reuleaux ($n = 3$), (6.1) ne fait intervenir que les coefficients de Fourier d'indice $6m + 3$ ce qui montre la symétrie d'ordre 3 du triangle de Reuleaux. Par ailleurs, si on pose

$$f(\theta) = r + \frac{4r}{\pi} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos((2m+1)\theta),$$

on a la propriété remarquable suivante : $f_n(\theta) = f(n\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. La fonction f est paire, 2π -périodique et s'écrit sous forme de créneau sur $[0, \pi]$:

$$f(\theta) = 1_{[0, \frac{\pi}{2}]} - 1_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}.$$

Autrement dit, les polygones de Reuleaux s'expriment très simplement à l'aide de la fonction f uniquement.

□ Preuve. Comme f_n est paire et représente un corps de largeur constante, le développement en série de Fourier de f_n ne fait intervenir que les coefficients de Fourier de la forme a_{2k+1} et on a donc :

$$f_n(\theta) = a_0 + \sum_{k \geq 0} a_{2k+1} \cos((2k+1)\theta).$$

On doit avoir $2a_0 = 2r$ et donc $a_0 = r$. Par ailleurs, le coefficient a_{2k+1} est donné par :

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos((2k+1)t) dt.$$

Donc si on note $\tilde{a}_{2k+1} = \frac{(2k+1)}{4r} a_{2k+1}$, on a :

$$\tilde{a}_{2k+1} = \sin\left((2k+1)\frac{\delta}{2}\right) + \sum_{0 \leq j \leq p-1} \left(\sin\left(\left(\frac{\delta}{2} + (2j+2)\delta\right)(2k+1)\right) - \sin\left(\left(\frac{\delta}{2} + (2j+1)\delta\right)(2k+1)\right) \right).$$

On obtient alors :

$$\tilde{a}_{2k+1} = \sin\left((2k+1)\frac{\delta}{2}\right) \left(1 + 2 \sum_{1 \leq j \leq p} \cos(2(2k+1)j\delta) \right).$$

On montre pour conclure que la somme

$$S_{2k+1} = 1 + \sum_{1 \leq j \leq p} \cos(2(2k+1)j\delta)$$

est non nulle si et seulement si $2k+1$ est multiple de n . En effet, en posant $q = e^{2i(2k+1)\delta}$ qui vérifie $q^{2p+1} = 1$, on a, lorsque $2k+1$ n'est pas un multiple de n :

$$S_{2k+1} = \Re \left(\sum_{-p \leq j \leq p} q^j \right) = \Re \left(q^{-p} \frac{1 - q^{2p+1}}{1 - q} \right) = 0.$$

Lorsque $2k+1 = ln$ est un multiple de n , avec l impair (car sinon $2k+1$ serait pair) alors $q = 1$ et on obtient :

$$a_{2k+1} = \frac{4r}{\pi(2k+1)} \sin\left(l\frac{\pi}{2}\right) (2p+1).$$

D'où le résultat en faisant $l = 2m+1$. □

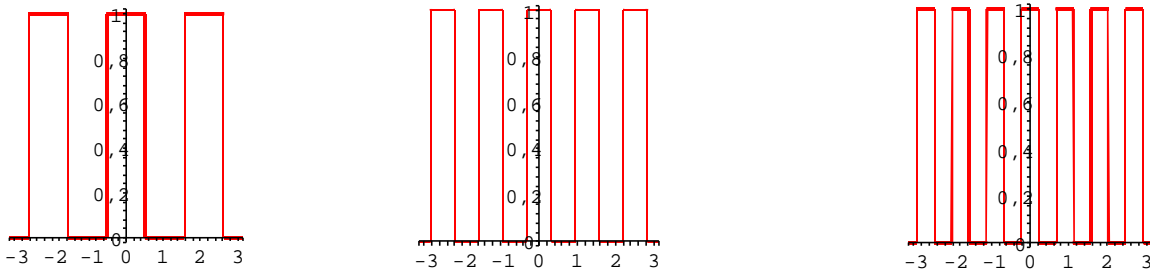


FIG. 6.1 – Rayons de courbure du triangle, du pentagone et de l'heptagone de Reuleaux

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons mis en valeur l'étude des corps de largeur constante et des rotors qui sont sources de beaucoup d'exemples dans divers domaines des Mathématiques, de l'analyse à la géométrie. Nous avons pu faire le lien entre des problèmes géométriques et l'utilisation d'outils plus modernes pour les aborder. La fonction d'appui d'un corps convexe est apparue comme un choix très adapté pour paramétrer les corps convexes qui entrent en jeu dans les problèmes que nous étudions.

En premier lieu, la théorie du contrôle optimal et du principe du maximum de Pontryagin a été très féconde pour étudier ces problèmes d'optimisation de formes en dimension 2. Nous avons mis à profit cette méthode pour étudier trois problèmes :

- Problème 1 : minimisation de l'aire dans la classe des corps de largeur constante dans \mathbb{R}^2
- Problème 2 : minimisation de la surface dans la classe des corps de largeur constante à symétrie de révolution
- Problème 3 : minimisation de l'aire dans la classe des rotors.

La démonstration du théorème de Blaschke-Lebesgue (problème 1) a mis en lumière la résolution d'un problème de contrôle optimal où le système d'état est l'oscillateur harmonique dans \mathbb{R}^2 et où la fonctionnelle de coût est quadratique.

L'étude du problème 2 a été plus délicate et nous avons obtenu un résultat partiel. Le système d'état est également l'oscillateur harmonique dans \mathbb{R}^2 , mais la fonctionnelle n'est plus autonome. Dans ce problème, le Hamiltonien n'est pas conservé le long des trajectoires extrémales.

Le problème 3 a nécessité une reformulation sous la forme d'un problème de contrôle analogue au problème 1, mais dans \mathbb{R}^4 , et la fonctionnelle est également quadratique. Le système étant autonome, nous avons pu trouver des conditions nécessaires sur le minimiseur. Le seul point délicat en suspens est l'étude des switching point et en particulier de leur espacement.

En second lieu, nous nous sommes intéressés aux propriétés d'optimalité locale des rotors réguliers pour la fonctionnelle d'aire. Nous avons généralisé le résultat de Firey par une méthode différente. Nous ramenons ce problème à un problème d'optimisation sous contraintes en dimension finie. Nous montrons que les rotors réguliers sont des points critiques et le théorème de Kuhn-Tucker nous a permis d'étudier la nature de ces points. Notons que l'étude du spectre du lagrangien sur le

sous-espace orthogonal au gradient des contraintes a été réalisée à l'aide de Matlab, donc pour des tailles de matrices n'excédant pas 200 environ. Lorsque le nombre de côtés du n-gone vaut 3 ou 4, le rayon de courbure de la frontière d'un rotor régulier prend la valeur 0 ou 1. A l'inverse, lorsque $n \geq 5$, le nombre de valeurs prises par le rayon de courbure augmente. On peut donc penser que pour $n \geq 5$, les rotors réguliers O_n^{ln-1} ($l > 1$) sont moins rigides que lorsque $n = 3$ et $n = 4$, ce qui explique que les rotors réguliers soient des points selles pour $n \geq 5$ à l'inverse des rotors réguliers O_3^{3l-1} et O_4^{4l-1} ($l > 1$) obtenus pour $n = 3$ et $n = 4$ et qui sont des maxima locaux. Enfin, nous avons mis en évidence de la même façon que précédemment le fait que le rotor régulier O_n^{n-1} est un minimum local de l'aire. Ceci confirme la conjecture de Goldberg 1.3. Dans le prolongement de cette étude, nous pourrions également étudier l'optimalité locale des rotors réguliers donnés par (3.39).

Enfin, nous avons étudié le problème de minimisation du volume en dimension 3 dans la classe des corps de largeur constante. La mise en place d'un cadre analytique a été primordiale avant d'étudier le problème de minimisation. Nous avons associé à tout corps de largeur constante dans \mathbb{R}^3 sa surface médiane et nous avons mis en place un espace fonctionnel de contraintes adapté au problème. Par concavité de la fonctionnelle, nous avons obtenu un résultat faible d'optimalité locale. Ce travail reste à prolonger en vue de trouver des conditions nécessaires sur un minimiseur pour confirmer ou infirmer la conjecture de Meissner.

7.2 Perspectives

L'étude de ces problèmes de contrôle en dimension 2 a souligné l'importance de quantités conservées le long des trajectoires extrémales. L'existence de telles lois de conservation nous permettrait par exemple pour le cas des rotors de déduire des informations sur les trajectoires extrémales, et notamment sur l'espacement régulier des switching point des trajectoires "bang-bang" que nous avons trouvés (problèmes 2 et 3). Cette dernière question reste délicate pour ces problèmes de contrôle. L'étude de quantités conservées par un théorème de type Noether, le long de trajectoires extrémales d'un système de contrôle, paraît une direction de recherche intéressante. L'unicité des trajectoires extrémales dans le principe du maximum de Pontryagin peut également nous permettre de montrer que les seules extrémales dans notre cas sont les rotors réguliers. Cependant, le théorème d'unicité fonctionne pour le problème du temps minimal lorsque l'état initial et l'état final sont fixés.

Par ailleurs, on peut envisager l'étude par le contrôle optimal de problèmes géométriques analogues à ceux que nous avons étudiés. Le problème de Favard (voir [34]) ou des problèmes de type isopérimétrique (voir [2], [3]) peuvent se traiter par le contrôle optimal. On pourrait envisager d'étudier certains problèmes posés dans [48] par cet outil.

L'étude des corps de largeur constante est motivée par des problèmes de minimisation de fonctionnelles de formes monotones sous contraintes de diamètre comme l'optimisation des valeurs propres $\lambda_k(\Omega)$ où Ω est un domaine qui satisfait certaines contraintes (voir [27]). Avec de telles hypothèses, on peut montrer que le minimiseur est un objet de largeur constante. De telles questions intéressent les physiciens qui étudient notamment le spectre de l'opérateur de Schrödinger. Dans la même perspective, on peut s'intéresser à l'optimisation des valeurs propres du laplacien dans la classe des corps de largeur constante de \mathbb{R}^2 . La difficulté est de relier la géométrie des domaines que l'on considère et la définition abstraite des valeurs propres du laplacien. On conjecture que le triangle de Reuleaux maximise $\lambda_1(\Omega)$ dans cette classe. Cette conjecture est vérifiée numériquement.

D'autres problèmes géométriques en dimension 3 sont ouverts. Un exemple analogue est celui de la minimisation du volume dans la classe des corps dont la projection orthogonale sur tout hyperplan est constante (voir [8]). L'étude des rotors tournant à l'intérieur de l'un des 5 polyèdres de Platon ainsi que le problème de minimisation du volume dans cette classe restent ouverts (voir [23]). On peut envisager l'application du principe de Pontryagin (voir [2], [3], [33]) pour obtenir des conditions d'optimalité faibles sur un minimiseur du volume dans la classe des corps de largeur constante. La mise en place sous forme d'un problème de contrôle reste délicate à cause des contraintes de convexité (positivité des deux rayons de courbure en tout point). À l'inverse de la dimension 2, la reconstruction d'une surface convexe fermée de largeur constante en dimension 3 à l'aide de ses courbures, c'est à dire grâce à la donnée d'une application de \mathcal{S}^2 à valeurs dans les matrices symétriques positives est un problème délicat.

Bibliographie

- [1] Andrei A. Agrachev and Yuri L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. , Control Theory and Optimization, II.
- [2] J. A. Andrejewa and R. Klötzler. Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. I. *Z. Angew. Math. Mech.*, 64(1) :35–44, 1984.
- [3] J. A. Andrejewa and R. Klötzler. Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. II. *Z. Angew. Math. Mech.*, 64(3) :147–153, 1984.
- [4] T. Bayen. Minimization of the area of rotors. *En cours de soumission*.
- [5] T. Bayen, E. Oudet, and T. Lachand-Robert. Analytic parametrization and volume minimization of three dimensional bodies of constant width. *To appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis*.
- [6] Wilhelm Blaschke. Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts. *Math. Ann.*, 76(4) :504–513, 1915.
- [7] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theory of convex bodies*. BCS Associates, Moscow, ID, 1987. Translated from the German and edited by L. Boron, C. Christenson and B. Smith.
- [8] Stefano Campi, Andrea Colesanti, and Paolo Gronchi. Minimum problems for volumes of convex bodies. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 43–55. Dekker, New York, 1996.
- [9] G. D. Chakerian and H. Groemer. Convex bodies of constant width. In *Convexity and its applications*, pages 49–96. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [10] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [11] James Dugundji and Andrzej Granas. *Fixed point theory. I*, volume 61 of *Monografie Matematyczne [Mathematical Monographs]*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1982.
- [12] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [13] W. J. Firey. Isoperimetric ratios of Reuleaux polygons. *Pacific J. Math.*, 10 :823–829, 1960.
- [14] J. Chris Fisher. Curves of constant width from a linear viewpoint. *Math. Mag.*, 60(3) :131–140, 1987.
- [15] J. Focke. Symmetrische n -Orbiformen kleinsten Inhalts. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 20 :39–68, 1969.

- [16] Matsusaburô Fujiwara. Analytical proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area. *Proc. Tokyo Imp. Acad. Japan*, 3 :300–302, 1927.
- [17] Matsusaburô Fujiwara. Analytical proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area. *Proc. Tokyo Imp. Acad. Japan*, 7 :300–302, 1931.
- [18] Matsusaburô Fujiwara and S. Kakeya. On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-resolvable curve of the equilateral triangle. *Tohoku Mathematical Journal*, 11 :92–110, 1917.
- [19] Mostafa Ghandehari. An optimal control formulation of the Blaschke-Lebesgue theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 200(2) :322–331, 1996.
- [20] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224.
- [21] Michael Goldberg. Circular-arc rotors in regular polygons. *Amer. Math. Monthly*, 55 :393–402, 1948.
- [22] Michael Goldberg. Trammel rotors in regular polygons. *Amer. Math. Monthly*, 64 :71–78, 1957.
- [23] Michael Goldberg. Rotors in polygons and polyhedra. *Math. Comput*, 14 :229–239, 1960.
- [24] P. M. Gruber and J. M. Wills, editors. *Handbook of convex geometry. Vol. A, B*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.
- [25] Evans M. Harrell, II. Calculations for convex bodies. example : The rotated Reuleaux triangle. http://www.mathphysics.com/convex/Links/Convexnb_lnk_67.html.
- [26] Evans M. Harrell, II. A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue. *J. Geom. Anal.*, 12(1) :81–88, 2002.
- [27] Antoine Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [28] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Néményi.
- [29] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Abridged version of *Convex analysis and minimization algorithms. I* [Springer, Berlin, 1993 ; MR1261420 (95m :90001)] and *II* [ibid. ; MR1295240 (95m :90002)].
- [30] Ralph Howard. Convex bodies of constant width and constant brightness. *Adv. Math.*, 204(1) :241–261, 2006.
- [31] A. M. Kamenetskii. The solution of a geometrical problem of Iyusternik. *Uspehi mat. nauk (N.S.)*, 2 :199–202, 1947.
- [32] R. Klötzler. Beweis einer Vermutung über n -Orbiformen kleinsten Inhalts. *Z. Angew. Math. Mech.*, 55(10) :557–570, 1975.
- [33] R. Klötzler. Konvexe Bereiche kleinster Oberfläche bei gegebener Dicke. *Z. Anal. Anwendungen*, 4(4) :373–383, 1985.
- [34] A. Kripfganz. Favard's "fonction penetrante"—a roughly convex function. *Optimization*, 38(4) :329–342, 1996.
- [35] T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions. *Math. Nachr.*, 226 :153–176, 2001.

- [36] Thomas Lachand-Robert and Edouard Oudet. Bodies of constant width in arbitrary dimension. *to appear in Math. Nachrichten*.
- [37] Henri Lebesgue. Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations. *Journal de Mathématiques (8ème série)*, 4, 1921.
- [38] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL, second edition, 1986.
- [39] L. A. Lyusternik. *Convex figures and polyhedra*. Translated from the Russian by T. Jefferson Smith. Dover Publications Inc., New York, 1963.
- [40] E Meissner. Über die Anwendung von Fourierreihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. *Vierteljahresschr. Naturfor. Ges. Zürich*, 54 :309–329, 1909.
- [41] E Meissner. Über Punktmengen konstanter Breite. *Vierteljahresschr. Naturfor. Ges. Zürich*, 56 :42–50, 1911.
- [42] E Meissner. Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite. *Zeitschrift der Mathematik und Physik*, 60 :92–94, 1912.
- [43] E Meissner. Über die durch reguläre Polyeder nicht stützbaeren Körper. *Vierteljahresschr. Naturfor. Ges. Zürich*, 63 :544–551, 1918.
- [44] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. Translated from the Russian by K. N. Trirogoff; edited by L. W. Neustadt. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York-London, 1962.
- [45] F Reuleaux. The kinematics of machinery : Outline of a theory of machines. *Macmillan, London*, 1876.
- [46] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [47] Rolf Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [48] Paul R. Scott and Poh Wah Awyong. Inequalities for convex sets. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 1(1) :Article 6, 6 pp. (electronic), 2000.
- [49] K Toyama. Self-parallel constant mean curvature surfaces. *EG-models, www.eg-models.de/models/*, to appear, 2002.
- [50] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].
- [51] Frederick A. Valentine. *Convex sets*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [52] Bernulf Weissbach. Rotoren im regulären Dreieck. *Publ. Math. Debrecen*, 19 :21–27 (1973), 1972.
- [53] Bernulf Weissbach. Ausbohrung von Rhomben. *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg M 8 Beitr. Algebra Geom.*, 6 :153–158, 1977.
- [54] Bernulf Weissbach. Über (m/n) -Orbiformen und ihre Durchmesser. *Beiträge Algebra Geom.*, (13) :111–125, 1982.
- [55] Bernulf Weißbach. Einiges über Körper fester Breite. *Beiträge Algebra Geom.*, (31) :69–76, 1991.
- [56] I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii. *Convex Figures*. Holt, Rinehart and Winston. New York.