

Etude de problèmes liés aux fluides compressibles et aux plasmas

Rémy SART

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

sart@math.univ-bpclermont.fr

17 décembre 2007

Plan

- 1 PRÉSENTATION DES MODÈLES
 - Les équations de Navier-Stokes compressibles (NSC)
 - La MagnétoHydroDynamique (MHD)
 - Le système de Born-Infeld Augmenté (ABI)
 - Le modèle de Korteweg (K)
 - Lois de pression et coefficients
- 2 STABILITÉ DE SOLUTIONS FAIBLES POUR DES MODÈLES MAGNÉTIQUES
 - Viscosités constantes (\rightarrow *cas barotrope*)
 - Généralisation de Lions et Feireisl
 - Viscosités variables (\rightarrow *modèles avec conduction thermique*)
 - Application de la BD entropie
- 3 STABILITÉ PHYSIQUE ET INSTABILITÉ RAYLEIGH-TAYLOR
 - Stabilité linéaire
 - Stabilité non linéaire
 - Taux de croissance des instabilités de type Rayleigh-Taylor

PRÉSENTATION DES MODÈLES

Equations (NSC)

Cadre : fluide compressible

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div} \delta = \varrho f_{ext}$$

$$\delta = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbf{I}$$

Inconnues

$$t \geq 0, \quad x \in \Omega$$

- $\varrho = \varrho(x, t)$: densité du fluide
- $u = u(x, t)$: vitesse du fluide

Notations

- p : loi de pression
- λ, μ : coefficients de viscosité
- f_{ext} : forces extérieures

Equations (MHD)

Cadre : fluide compressible soumis à un champ magnétique extérieur

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div} \delta = \operatorname{rot} B \wedge B$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(u \wedge B) + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\delta = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbf{I}$$

Inconnues

$$t \geq 0, \quad x \in \Omega$$

- $\varrho = \varrho(x, t)$: densité du fluide
- $u = u(x, t)$: vitesse du fluide
- B : champ magnétique extérieur

Notations

- p : loi de pression
- λ, μ : coefficients de viscosité
- η : résistivité du fluide

Système (ABI)

Théorie non linéaire de l'électromagnétisme (M. Born / L. Infeld)

- ❑ **Y. Brenier '04**
Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations
- ❑ **Y. Brenier, W.A. Wong '05**
Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism

Système (ABI)

Théorie non linéaire de l'électromagnétisme (M. Born / L. Infeld)

- **Y. Brenier '04**
Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations
- **Y. Brenier, W.A. Wong '05**
Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \gamma^2 \operatorname{rot}(D/h) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\partial_t D - \operatorname{rot}(v \wedge D) - \operatorname{rot}(B/h) = 0, \quad \operatorname{div} D = 0$$

Système (ABI)

Théorie non linéaire de l'électromagnétisme (M. Born / L. Infeld)

- **Y. Brenier '04**
Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations
- **Y. Brenier, W.A. Wong '05**
Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism

$$\begin{aligned}\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \gamma^2 \operatorname{rot}(D/h) &= 0, & \operatorname{div} B &= 0 \\ \partial_t D - \operatorname{rot}(v \wedge D) - \operatorname{rot}(B/h) &= 0, & \operatorname{div} D &= 0\end{aligned}$$

Lois de conservation supplémentaires satisfaites par

$$v = D \wedge B \quad \text{et} \quad h = \sqrt{1 + |B|^2 + |D|^2 + |v|^2}$$

$$\begin{aligned}\partial_t h + \operatorname{div}(hv) &= 0, \\ \partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) &= \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B - \gamma^2 D \otimes D}{h}\right) + \nabla\left(\frac{\gamma^2}{h}\right)\end{aligned}$$

Système (ABI)

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0,$$

$$\partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) = \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B - \gamma^2 D \otimes D}{h}\right) + \nabla\left(\frac{\gamma^2}{h}\right)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \gamma^2 \operatorname{rot}(D/h) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\partial_t D - \operatorname{rot}(v \wedge D) - \operatorname{rot}(B/h) = 0, \quad \operatorname{div} D = 0$$

Système (ABI)

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0,$$

$$\partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) = \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B - \gamma^2 D \otimes D}{h}\right) + \nabla\left(\frac{\gamma^2}{h}\right)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \gamma^2 \operatorname{rot}(D/h) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\partial_t D - \operatorname{rot}(v \wedge D) - \operatorname{rot}(B/h) = 0, \quad \operatorname{div} D = 0$$

Système MHD sans pression ($\gamma \rightarrow 0$)

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0,$$

$$\partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) = \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B}{h}\right)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

Système (ABI)

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0,$$

$$\partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) = \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B - \gamma^2 D \otimes D}{h}\right) + \nabla\left(\frac{\gamma^2}{h}\right)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \gamma^2 \operatorname{rot}(D/h) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\partial_t D - \operatorname{rot}(v \wedge D) - \operatorname{rot}(B/h) = 0, \quad \operatorname{div} D = 0$$

Système MHD sans pression ($\gamma \rightarrow 0$) (+ pression et diffusion)

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0,$$

$$\partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) + \nabla p - \operatorname{div} \delta = \operatorname{div}\left(\frac{B \otimes B}{h}\right)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(v \wedge B) + \operatorname{rot}\left(\eta \operatorname{rot}\left(\frac{B}{\rho}\right)\right) = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$

Système (K)

Cadre : 2 fluides séparés par une interface

- fluide 1 dans Ω_1 de densité $\varrho_1 \rightarrow NS_1$
- fluide 2 dans Ω_2 de densité $\varrho_2 \rightarrow NS_2$

Système (K)

Cadre : 2 fluides séparés par une interface

- fluide 1 dans Ω_1 de densité $\varrho_1 \rightarrow NS_1$
- fluide 2 dans Ω_2 de densité $\varrho_2 \rightarrow NS_2$

$$\tilde{\varrho}(x, t) = \begin{cases} \varrho_1 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ \varrho_2 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

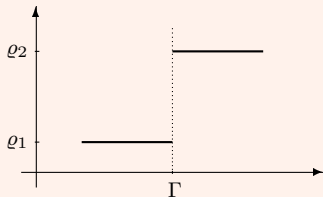


FIG.: Interface raide

Conditions limites sur Γ

- continuité du champ de vitesse

$$[u] = 0$$

- discontinuité des contraintes normales

$$[\sigma_{tot} \cdot n] = \alpha \kappa n$$

Approximation :

- Diffuser l'interface et définir une densité sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ approchant $\tilde{\varrho}$

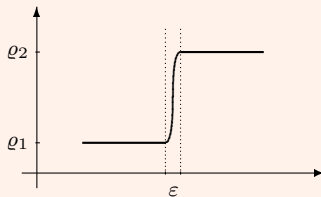


FIG.: Interface diffuse

Approximation :

- Diffuser l'interface et définir une densité sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ approchant $\tilde{\varrho}$

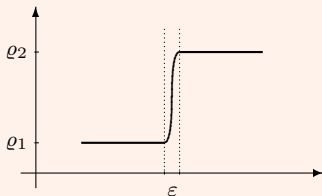


FIG.: Interface diffuse

- Considérer un système global pour le système bi-fluide en introduisant un terme rendant compte de la tension de surface à l'interface :

terme de Korteweg : $\sigma \varrho \nabla \Delta \varrho$

□ D.J Korteweg 1901

Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par les variations de densité considérable mais continues...

Système (K)

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div} \delta - \sigma \varrho \nabla(\mu' \Delta \mu) = \varrho f_{ext}$$

Inconnues

$$t \geq 0, \quad x \in \Omega$$

- $\varrho = \varrho(x, t)$: densité du fluide
- $u = u(x, t)$: vitesse du fluide

Notations

- p : loi de pression
- λ, μ : coefficients de viscosité
- σ : capillarité

Système (K)

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0 \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div} \delta - \sigma \varrho \nabla(\mu' \Delta \mu) &= \varrho f_{ext}\end{aligned}$$

Inconnues

$$t \geq 0, \quad x \in \Omega$$

- $\varrho = \varrho(x, t)$: densité du fluide
- $u = u(x, t)$: vitesse du fluide

Notations

- p : loi de pression
- λ, μ : coefficients de viscosité
- σ : capillarité

- ❑ **D.M. Anderson, G.B. MacFadden '97**
A diffuse-interface description of fluid systems
- ❑ **D.M. Anderson, G.B. MacFadden, A.A. Wheeler '98**
Diffuse-interface methods in Fluid Mechanics
- ❑ **R. Danchin, B. Desjardins '01**
Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type

Lois de pression et coefficients

Loi des gaz parfaits : $p(\varrho, \theta) = r\varrho\theta$

Transformation adiabatique : (*constante adiabatique γ*)

$$p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$$

Conduction de chaleur : (*inconnue supplémentaire θ , conductivité thermique κ*)

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta \operatorname{div} u - \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) = \\ 2\mu D(u) : D(u) + \lambda |\operatorname{div} u|^2$$

Lois de pression et coefficients

Loi des gaz parfaits : $p(\varrho, \theta) = r\varrho\theta$

Transformation adiabatique : (*constante adiabatique* γ)

$$p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$$

Conduction de chaleur : (*inconnue supplémentaire* θ , *conductivité thermique* κ)

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa\nabla\theta) = \\ 2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\operatorname{div}u|^2 + \eta|\operatorname{rot}B|^2$$

Lois de pression et coefficients

Loi des gaz parfaits : $p(\varrho, \theta) = r\varrho\theta$

Transformation adiabatique : (*constante adiabatique* γ)

$$p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$$

Conduction de chaleur : (*inconnue supplémentaire* θ , *conductivité thermique* κ)

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa\nabla\theta) = \\ 2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\operatorname{div}u|^2 + \eta|\operatorname{rot}B|^2$$

Les conditions de stabilité...

- Cas barotrope ou avec température
- $\mu = \mu(\varrho)$, $\lambda = \lambda(\varrho)$, $\eta = \eta(\varrho)$
- $\kappa = \kappa(\varrho, \theta)$

Quels profils de viscosités, résistivité, conductivité thermique conduisent à des résultats de stabilité ou d'existence de solutions faibles ?

2ÈME PARTIE :

STABILITÉ DE SOLUTIONS FAIBLES

Viscosités constantes

$$\mu = cste, \lambda = cste$$

Le cas barotrope

Hypothèses : $\mu = cste$, $\lambda = cste$, $p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$, $a > 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + a \nabla \varrho^\gamma - 2\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = \operatorname{rot} B \wedge B \quad (2)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(u \wedge B) + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (4)$$

Le cas barotrope

Hypothèses : $\mu = cste$, $\lambda = cste$, $p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$, $a > 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + a \nabla \varrho^\gamma - 2\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = \operatorname{rot} B \wedge B \quad (2)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(u \wedge B) + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (4)$$

Les résultats dans le cas NON magnétique

- ❑ **P.-L. Lions '98**
Mathematical topics in fluid mechanics
- ❑ **E. Feireisl '04**
Dynamics of viscous compressible fluids
- ❑ **A. Novotny, I. Straskraba '04**
Introduction to the mathematical theory of compressible flow

Le cas barotrope

Hypothèses : $\mu = cste$, $\lambda = cste$, $p = p(\varrho) = a\varrho^\gamma$, $a > 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + a \nabla \varrho^\gamma - 2\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = \operatorname{rot} B \wedge B \quad (2)$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(u \wedge B) + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (4)$$

Les résultats dans le cas magnétique

- J.-F. Gerbeau, C. Lebris, T. Lelièvre '06

Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals

- B. Ducomet, E. Feireisl '06

The equations of magnetohydrodynamics : on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars

Généralisation de Lions et Feireisl

Théorème (R.S. '06)

Soit $\gamma > \frac{3}{2}$.

Supposons que Ω soit un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{2+\nu}$ avec $\nu > 0$.
Soient $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$, $\eta > 0$ et des fonctions ϱ_0 , u_0 et B_0 telles que :

$$\varrho_0 \geq 0, \quad \varrho_0 \in L^\gamma(\Omega),$$

$$\frac{|q_0|^2}{\varrho_0} = 0 \text{ sur } \{\varrho_0 = 0\}, \quad \frac{|q_0|^2}{\varrho_0} \in (L^1(\Omega))^3,$$

$$B_0 \in (L^2(\Omega))^3, \quad \operatorname{div} B_0 = 0, \quad B_0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Alors le système (1)–(4) contraint aux conditions de bord

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad B \cdot n|_{\partial\Omega} = 0,$$

admet des solutions faibles globales en temps satisfaisant les conditions initiales $\varrho(0) = \varrho_0$, $B(0) = B_0$ et $(\varrho u)(0) = q_0$.

Généralisation de Lions et Feireisl

Etapes de la preuve

- Introduction d'un système approché
- Construction de solutions régulières
- Estimations a priori
- Théorème de point fixe
- Passage à la limite
- Retour au système initial

Difficultés magnétiques

Système modifié

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= \varepsilon \Delta \varrho \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - \operatorname{rot} B \wedge B + a \nabla(\varrho^\gamma) + \delta \nabla(\varrho^\beta) + \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \varrho &= \\ \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u) & \\ \partial_t B + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) - \operatorname{rot}(u \wedge B) &= 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \\ u|_{\partial \Omega} &= 0 \\ B \cdot n|_{\partial \Omega} &= 0 \\ \nabla \varrho \cdot n|_{\partial \Omega} &= 0 \\ \varrho(0) = \varrho_0 \in C^{2+\nu}(\bar{\Omega}), \quad (\nu > 0), \quad 0 < \underline{\varrho} \leq \varrho_0 \leq \bar{\varrho}, \quad \nabla \varrho_0 \cdot n|_{\partial \Omega} &= 0 \\ B(0) = B_0 \in (H^1(\Omega))^3, \quad \operatorname{div} B_0 = 0, \quad B_0 \cdot n|_{\partial \Omega} &= 0 \\ (\varrho u)(0) = q \in (C^2(\bar{\Omega}))^3 & \end{aligned}$$

Difficultés magnétiques

Construction de solutions approchées

(Pour la vitesse, $X_n = n$ premières fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène)

Soient les fonctions v_j satisfaisant, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} v_j = \lambda_j v_j, \quad \operatorname{rot} v_j \wedge n|_{\partial\Omega} = 0$$

On définit des solutions approchées

$$B_n \in C([0, T]; Y_n), \quad \text{avec } Y_n = \operatorname{Vect}\{v_j, j \leq n\}$$

Difficultés magnétiques

Construction de solutions approchées

(Pour la vitesse, $X_n = n$ premières fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène)

Soient les fonctions v_j satisfaisant, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} v_j = \lambda_j v_j, \quad \operatorname{rot} v_j \wedge n|_{\partial\Omega} = 0$$

On définit des solutions approchées

$$B_n \in C([0, T]; Y_n), \quad \text{avec } Y_n = \operatorname{Vect}\{v_j, j \leq n\}$$

□ B. Saramito

Stabilité d'un plasma : modélisation mathématique et simulation numérique

Difficultés magnétiques

Construction de solutions approchées

(Pour la vitesse, $X_n = n$ premières fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène)

Soient les fonctions v_j satisfaisant, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} v_j = \lambda_j v_j, \quad \operatorname{rot} v_j \wedge n|_{\partial\Omega} = 0$$

On définit des solutions approchées

$$B_n \in C([0, T]; Y_n), \quad \text{avec } Y_n = \operatorname{Vect}\{v_j, j \leq n\}$$

Lemma

L'espace Y_n est un espace de fonctions régulières, de dimension finie n et dense dans

$$E = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3; \operatorname{div} v = 0, v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

au sens du produit scalaire $(v_1|v_2) = \int_{\Omega} \operatorname{rot} v_1 \cdot \operatorname{rot} v_2 \, dx$

Difficultés magnétiques

Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $(\psi, \phi) \in X_n \times Y_n$:

$$\int_{\Omega} \varrho_n(t) u_n(t) \cdot \psi \, dx - \int_{\Omega} q \cdot \psi \, dx = - \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{rot} B_n \wedge B_n) \cdot \psi \, dx ds$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\mu \Delta u_n - \operatorname{div}(\varrho_n u_n \otimes u_n) + \nabla((\lambda + \mu) \operatorname{div} u_n - a \varrho_n^\gamma - \delta \varrho_n^\beta) - \varepsilon \nabla \varrho \cdot \nabla u_n \right) \cdot \psi \, dx ds,$$

$$\int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_{\Omega} B_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{rot}(u_n \wedge B_n) - \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B_n)) \cdot \phi \, dx ds$$

Théorème de point fixe

La continuité des opérateurs $\mathcal{M}^{-1}[\varrho_n]$ et $\mathcal{M}^{-1}[\mathbf{1}]$ sur X_n et Y_n où

$$\mathcal{M}[f] : G \rightarrow G^* ; \langle \mathcal{M}[f] g_1, g_2 \rangle = \int_{\Omega} f g_1 \cdot g_2 \, dx$$

assure l'existence de solutions pour le système modifié sur un intervalle $[0, T(n)]$.

Pour en déduire l'existence globale en temps, il faut montrer que u_n et B_n restent bornés indépendamment de n . \rightarrow ÉGALITÉ D'ÉNERGIE

Difficultés magnétiques

Estimations a priori

Difficultés magnétiques

Estimations a priori

- Multiplions (2) par u_n :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u_n|^2 + \frac{2a}{\gamma - 1} \varrho \gamma_n^\gamma \right) + \mu \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u_n|^2 = \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot u_n$$

Difficultés magnétiques

Estimations a priori

- Multiplions (2) par u_n :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u_n|^2 + \frac{2a}{\gamma - 1} \varrho^\gamma \right) + \mu \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u_n|^2 = \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot u_n$$

- Multiplions (3) par B_n :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |B_n|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot u_n + \eta \int_{\Omega} |\operatorname{rot} B_n|^2 = 0$$

Difficultés magnétiques

Estimations a priori

- Multiplions (2) par u_n :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u_n|^2 + \frac{2a}{\gamma-1} \varrho_n^\gamma \right) + \mu \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u_n|^2 = \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot u_n$$

- Multiplions (3) par B_n :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |B_n|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot u_n + \eta \int_{\Omega} |\operatorname{rot} B_n|^2 = 0$$

- Sommons (2) $\times u_n$ et (3) $\times B_n$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \varrho_n |u_n|^2 + \frac{2a}{\gamma-1} \varrho_n^\gamma + |B_n|^2 \right) + \eta \int_{\Omega} |\operatorname{rot} B_n|^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u_n|^2 = 0$$

$\Rightarrow B_n$ bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Idée de la preuve :

- B_n est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- Uniforme équi-continuité de $f_n : t \mapsto \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx$ pour toute fonction ϕ dans un sous ensemble dense dans $L^2(\Omega)$.

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Idée de la preuve :

- B_n est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- Uniforme équi-continuité de $f_n : t \mapsto \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx$ pour toute fonction ϕ dans un sous ensemble dense dans $L^2(\Omega)$.

$$\forall \phi \in Y_n, \quad \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_{\Omega} B_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_{\Omega} (u_n \wedge B_n - \eta \operatorname{rot} B_n) \cdot \operatorname{rot} \phi \, dx ds$$

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Idée de la preuve :

- B_n est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- Uniforme équi-continuité de $f_n : t \mapsto \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx$ pour toute fonction ϕ dans un sous ensemble dense dans $L^2(\Omega)$.

$$\forall \phi \in Y_n, \quad \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_{\Omega} B_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_{\Omega} (u_n \wedge B_n - \eta \operatorname{rot} B_n) \cdot \operatorname{rot} \phi \, dx ds$$

Problème : Y_n n'est pas dense dans $L^2(\Omega)$!

\rightarrow On définit l'espace $Y'_n = \{ \bar{\phi} = \phi + \nabla \varphi, \phi \in Y_n, \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \}$

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Idée de la preuve :

- B_n est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- Uniforme équi-continuité de $f_n : t \mapsto \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx$ pour toute fonction ϕ dans un sous ensemble dense dans $L^2(\Omega)$.

$$\forall \bar{\phi} \in Y'_n, \quad \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \bar{\phi} \, dx - \int_{\Omega} B_0 \cdot \bar{\phi} \, dx = \int_0^t \int_{\Omega} (u_n \wedge B_n - \eta \operatorname{rot} B_n) \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} \, dx ds$$

Difficultés magnétiques

Compacité

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)\text{-faible}) \text{ et } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Idée de la preuve :

- B_n est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- Uniforme équi-continuité de $f_n : t \mapsto \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \phi \, dx$ pour toute fonction ϕ dans un sous ensemble dense dans $L^2(\Omega)$.

$$\forall \bar{\phi} \in Y_n', \quad \int_{\Omega} B_n(t) \cdot \bar{\phi} \, dx - \int_{\Omega} B_0 \cdot \bar{\phi} \, dx = \int_0^t \int_{\Omega} (u_n \wedge B_n - \eta \operatorname{rot} B_n) \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} \, dx ds$$

$$\|u_n \wedge B_n - \eta \operatorname{rot} B_n\|_{L^2(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq c$$

$$|f_n(t) - f_n(t')| \leq c \|\bar{\phi}\|_{L^3(\Omega)} |t - t'|^{\frac{1}{2}}$$

Difficultés magnétiques

Passage à la limite

$$\partial_t B_n + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B_n) - \operatorname{rot}(u_n \wedge B_n) = 0$$

↓

$$\partial_t B + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) - \operatorname{rot}(u \wedge B) = 0$$

Difficultés magnétiques

Passage à la limite

$$\partial_t B + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) - \operatorname{rot}(u \wedge B) = 0$$

Conséquence : $\operatorname{div} B_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{div} B = 0$

Difficultés magnétiques

Passage à la limite

$$\partial_t B + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) - \operatorname{rot}(u \wedge B) = 0$$

Conséquence : $\operatorname{div} B_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{div} B = 0$

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho_n u_n) + \operatorname{div}(\varrho_n u_n \otimes u_n) + a \nabla(\varrho_n^\gamma) + \delta \nabla(\varrho_n^\beta) + \varepsilon \nabla u_n \cdot \nabla \varrho_n \\ - \mu \Delta u_n - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u_n) = \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \end{aligned}$$

Difficultés magnétiques

Passage à la limite

$$\partial_t B + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} B) - \operatorname{rot}(u \wedge B) = 0$$

Conséquence : $\operatorname{div} B_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{div} B = 0$

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho_n u_n) + \operatorname{div}(\varrho_n u_n \otimes u_n) + a \nabla(\varrho_n^\gamma) + \delta \nabla(\varrho_n^\beta) + \varepsilon \nabla u_n \cdot \nabla \varrho_n \\ - \mu \Delta u_n - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u_n) = \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \end{aligned}$$

Remarque sur le choix de Y_n :

$$B_n \in Y_n \Rightarrow \operatorname{div} B_n = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} B_n \wedge B_n = \operatorname{div}(B_n \otimes B_n) - \frac{1}{2} \nabla(|B_n|^2)$$

On peut passer à la limite grâce aux convergences

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) - \text{faible}$$

$$B_n \rightarrow B \text{ dans } C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

Viscosités variables

$$\mu = \mu(\varrho), \lambda = \lambda(\varrho)$$

Modèle complet avec température

Hypothèses : $\mu = \mu(\varrho)$, $\lambda = \lambda(\varrho)$, $\kappa = \kappa(\varrho, \theta)$, $p = p(\varrho, \theta)$.

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0 \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) &= 0 \\ C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa(\varrho, \theta)\nabla\theta) &= \\ 2\mu(\varrho)D(u) : D(u) + \lambda(\varrho)|\operatorname{div}u|^2 &\end{aligned}$$

Modèle complet avec température

Hypothèses : $\mu = \mu(\varrho)$, $\lambda = \lambda(\varrho)$, $\kappa = \kappa(\varrho, \theta)$, $p = p(\varrho, \theta)$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa(\varrho, \theta)\nabla\theta) =$$

$$2\mu(\varrho)D(u) : D(u) + \lambda(\varrho)|\operatorname{div}u|^2$$

□ D. Bresch, B. Desjardins '06

Global existence of solutions to compressible Navier-Stokes equations with thermal conductivity.

\rightarrow **stabilité de solutions faibles pour le modèle complet avec température**

Modèle complet avec température

Loi de pression ($l > 1, k > 1, C_*, C'_*, C_{**}, C'_{**} > 0$)

$$p(\varrho, \theta) = r\varrho\theta + p_c(\varrho), \quad p_c(\varrho) = \varrho^2 e'_c(\varrho)$$

$$\forall \varrho < A, \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*} \leq p'_c(\varrho) \leq C_* \varrho^{-l-1}, \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C'_*} \leq e_c(\varrho) \leq C'_* \varrho^{-l-1}$$

$$\forall \varrho \geq A, \quad -\frac{1}{\tau_*} \mu'(\varrho) \leq p'_c(\varrho) \leq C_{**} \varrho^{k-1}, \quad 0 \leq e_c(\varrho) \leq C'_{**} \varrho^{k-1}$$

Coefficients ($\frac{2}{3} < n < 1, m > 1, a \geq 2, c_0, c_1, c > 0$)

$$\forall \varrho < A, \quad \mu(\varrho) \geq c_0 \varrho^n, \quad 3\lambda(\varrho) + 2\mu(\varrho) \geq c_0 \varrho^n$$

$$\forall \varrho \geq A, \quad c_1 \varrho^m \leq \mu(\varrho) \leq \frac{1}{c_1} \varrho^m, \quad c_1 \varrho^m \leq 3\lambda(\varrho) + 2\mu(\varrho) \leq \frac{1}{c_1} \varrho^m$$

$$\kappa(\varrho, \theta) = \kappa_0(\varrho, \theta)(\varrho + 1)(\theta^a + 1), \quad \kappa_0 \in C^0(\mathbb{R}_+^2), \quad c \leq \kappa_0 \leq \frac{1}{c}$$

Retour sur l'équation des moments

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

Retour sur l'équation des moments

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

▷ On multiplie l'équation de conservation de la masse par $\varphi'(\varrho) = \frac{\mu'(\varrho)}{\varrho}$:

$$\partial_t \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \varphi(\varrho) + \mu'(\varrho) \operatorname{div}u = 0$$

Retour sur l'équation des moments

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On multiplie l'équation de conservation de la masse par $\varphi'(\varrho) = \frac{\mu'(\varrho)}{\varrho}$:

$$\partial_t \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \varphi(\varrho) + \mu'(\varrho) \operatorname{div}u = 0$$

- ▷ On dérive par rapport à la variable d'espace :

$$\partial_t \nabla \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \nabla \varphi(\varrho) + \nabla u : \nabla \varphi(\varrho) + \nabla(\mu'(\varrho) \operatorname{div}u) = 0$$

Retour sur l'équation des moments

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On multiplie l'équation de conservation de la masse par $\varphi'(\varrho) = \frac{\mu'(\varrho)}{\varrho}$:

$$\partial_t \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \varphi(\varrho) + \mu'(\varrho) \operatorname{div}u = 0$$

- ▷ On dérive par rapport à la variable d'espace :

$$\partial_t \nabla \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \nabla \varphi(\varrho) + \nabla u : \nabla \varphi(\varrho) + \nabla(\mu'(\varrho) \operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On multiplie par 2ϱ et, en notant $v = 2\nabla \varphi(\varrho)$:

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes v) + 2\nabla u : \nabla \mu(\varrho) + 2\varrho \nabla(\mu'(\varrho) \operatorname{div}u) = 0$$

Retour sur l'équation des moments

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On multiplie l'équation de conservation de la masse par $\varphi'(\varrho) = \frac{\mu'(\varrho)}{\varrho}$:

$$\partial_t \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \varphi(\varrho) + \mu'(\varrho) \operatorname{div}u = 0$$

- ▷ On dérive par rapport à la variable d'espace :

$$\partial_t \nabla \varphi(\varrho) + (u \cdot \nabla) \nabla \varphi(\varrho) + \nabla u : \nabla \varphi(\varrho) + \nabla(\mu'(\varrho) \operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On multiplie par 2ϱ et, en notant $v = 2\nabla \varphi(\varrho)$:

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes v) + 2\nabla u : \nabla \mu(\varrho) + 2\varrho \nabla(\mu'(\varrho) \operatorname{div}u) = 0$$

- ▷ On somme avec l'équation des moments : $(\lambda(\varrho) = \varrho \mu'(\varrho) - \mu(\varrho))$

$$\partial_t(\varrho(u + v)) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes (u + v)) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)A(u)) = 0$$

où $A(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - {}^t \nabla u)$

L'approche de D. Bresch and B. Desjardins

Relation fondamentale

$$\lambda(\varrho) = 2(\varrho\mu'(\varrho) - \mu(\varrho))$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0 \quad (a)$$

$$\partial_t\left(\varrho\left(u + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\right)\right) + \operatorname{div}\left(\varrho u \otimes \left(u + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\right)\right) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)A(u)) = 0 \quad (b)$$

L'approche de D. Bresch and B. Desjardins

Relation fondamentale

$$\lambda(\varrho) = 2(\varrho\mu'(\varrho) - \mu(\varrho))$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0 \quad (a)$$

$$\partial_t\left(\varrho\left(u + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\right)\right) + \operatorname{div}\left(\varrho u \otimes \left(u + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\right)\right) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)A(u)) = 0 \quad (b)$$

Idée :

- multiplier (a) par $u \rightarrow$ énergie "classique"
- multiplier (b) par $u + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho} \rightarrow$ "formule BD"

L'approche de D. Bresch et B. Desjardins

Energie "classique"

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) \right) + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho) S(u) : S(u) \\ + \int_{\Omega} \left(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3} \mu(\varrho) \right) |\operatorname{div} u|^2 = \int_{\Omega} r \varrho \theta \operatorname{div} u \end{aligned}$$

L'approche de D. Bresch et B. Desjardins

Energie "classique"

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) \right) + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho) S(u) : S(u) \\ & + \int_{\Omega} \left(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3} \mu(\varrho) \right) |\operatorname{div} u|^2 = \int_{\Omega} r \varrho \theta \operatorname{div} u \end{aligned}$$

BD entropie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho \left| u + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} \right|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) \right) \\ & + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho) A(u) : A(u) + 2 \int_{\Omega} \frac{r \theta \mu'(\varrho)}{\varrho} |\nabla \varrho|^2 = \\ & - 2 \int_{\Omega} \mu'(\varrho) p'_c(\varrho) \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho} + \int_{\Omega} r \varrho \theta \operatorname{div} u - 2 \int_{\Omega} r \mu'(\varrho) \nabla \theta \cdot \nabla \varrho. \end{aligned}$$

L'approche de D. Bresch et B. Desjardins

Energie "classique"

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) \right) + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho) S(u) : S(u) \\ & + \int_{\Omega} \left(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3} \mu(\varrho) \right) |\operatorname{div} u|^2 = \int_{\Omega} r \varrho \theta \operatorname{div} u \end{aligned}$$

BD entropie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho \left| u + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} \right|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) \right) \\ & + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho) A(u) : A(u) + 2 \int_{\Omega} \frac{r \theta \mu'(\varrho)}{\varrho} |\nabla \varrho|^2 = \\ & - 2 \int_{\Omega} \mu'(\varrho) p'_c(\varrho) \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho} + \int_{\Omega} r \varrho \theta \operatorname{div} u - 2 \int_{\Omega} r \mu'(\varrho) \nabla \theta \cdot \nabla \varrho. \end{aligned}$$

Pression froide et BD entropie \Rightarrow contrôle des densités proche et loin du vide

Difficultés magnétiques

Pour l'énergie classique :

- Que faire du nouveau terme magnétique

$$- \int_{\Omega} \operatorname{rot} B \wedge B \cdot u ?$$

\rightarrow s'annule quand on somme avec l'équation de B multipliée par B

- Manque d'information sur B à cause des non linéarités :

$$\sqrt{\eta(\varrho)} \operatorname{rot} B \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ au lieu de } B \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

\rightarrow utiliser la similitude avec $\sqrt{\mu(\varrho)} \nabla u$

Difficultés magnétiques

Pour l'énergie classique :

- Que faire du nouveau terme magnétique

$$- \int_{\Omega} \operatorname{rot} B \wedge B \cdot u ?$$

\rightarrow s'annule quand on somme avec l'équation de B multipliée par B

- Manque d'information sur B à cause des non linéarités :

$$\sqrt{\eta(\varrho)} \operatorname{rot} B \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ au lieu de } B \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

\rightarrow utiliser la similitude avec $\sqrt{\mu(\varrho)} \nabla u$

Pour la formule BD :

- Que faire du nouveau terme magnétique

$$- \int_{\Omega} \operatorname{rot} B \wedge B \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} ?$$

But : Conserver la formule BD dans le contexte magnétique !

Application de la BD entropie

Interface diffuse "magnétique"

On considère un système bi-fluide compressible sous l'influence d'un champ magnétique extérieur

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (8)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p(\varrho, \theta) - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) + \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) \quad (9)$$

$$-\operatorname{rot}B \wedge B - \varrho \nabla(\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)) = 0$$

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa(\varrho, \theta)\nabla\theta) = 2\eta(\varrho)|\operatorname{rot}B|^2 \quad (10)$$

$$+ 2\mu(\varrho)D(u) : D(u) + \lambda(\varrho)|\operatorname{div}u|^2$$

$$\partial_t B - \operatorname{rot}(u \wedge B) + \operatorname{rot}(\eta(\varrho)\operatorname{rot}B) = 0 \quad (11)$$

$$\operatorname{div}B = 0 \quad (12)$$

Interface diffuse "magnétique"

Compatibilité de la BD entropie...

- ...avec Korteweg...

□ D. Bresch, B. Desjardins '06

On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes equations

$$\int_{\Omega} \varrho \nabla(\mu'(\varrho) \Delta \mu(\varrho)) \cdot u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mu(\varrho)|^2$$

$$\int_{\Omega} \varrho \nabla(\mu'(\varrho) \Delta \mu(\varrho)) \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} = \int_{\Omega} \mu'(\varrho) |\Delta \mu(\varrho)|^2$$

Interface diffuse "magnétique"

Compatibilité de la BD entropie...

- ...avec Korteweg...

□ D. Bresch, B. Desjardins '06

On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes equations

$$\int_{\Omega} \varrho \nabla(\mu'(\varrho) \Delta \mu(\varrho)) \cdot u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mu(\varrho)|^2$$

$$\int_{\Omega} \varrho \nabla(\mu'(\varrho) \Delta \mu(\varrho)) \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} = \int_{\Omega} \mu'(\varrho) |\Delta \mu(\varrho)|^2$$

- ...avec le champ magnétique

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} B \wedge B \cdot \left(u + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} \right) = ?$$

Interface diffuse "magnétique"

Energie "classique"

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho_n |u_n|^2 + |B_n|^2 + |\nabla \mu(\varrho_n)|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n) \right) + \int_{\Omega} 2\mu(\varrho_n) D(u_n) : D(u_n) \\ + \int_{\Omega} \lambda(\varrho_n) |\operatorname{div} u_n|^2 + \int_{\Omega} \eta(\varrho_n) |\operatorname{rot} B_n|^2 = \int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n \end{aligned}$$

Formule BD

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho_n |u_n + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}|^2 + |B_n|^2 + |\nabla \mu(\varrho_n)|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n) \right) + \int_{\Omega} \eta(\varrho_n) |\operatorname{rot} B_n|^2 \\ + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho_n) A(u_n) : A(u_n) + 2 \int_{\Omega} \frac{r \theta_n \mu'(\varrho_n)}{\varrho_n} |\nabla \varrho_n|^2 + \int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) |\Delta \mu(\varrho_n)|^2 = \\ \int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n - 2 \int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n - 2 \int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n} \\ + 2 \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \end{aligned}$$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des seconds membres :

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des secons membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$

$$\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n} \geq c_0 \int_{\Omega} |\nabla \zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2 - \frac{1}{\tau_*} \int_{\Omega} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}$$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des seconds membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$
- pour $\int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n \right| &\leq \int_{\Omega} \kappa(\varrho_n, \theta_n) \frac{|\nabla \theta_n|^2}{\theta_n^2} + \int_{\Omega} C \frac{r^2 \varrho_n \theta_n^2}{\kappa(\varrho_n, \theta_n)} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} \\ &\leq C \left(1 + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} \right) \end{aligned}$$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des seconds membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$
- pour $\int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n$
- pour $\int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n \right| &\leq \varepsilon \| (3\lambda(\varrho_n) + 2\mu(\varrho_n))^{1/2} \operatorname{div} u_n \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \| \varrho_n \theta_n \|_{L^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \|\theta_n\|_{L^6(\Omega)}^2 \right) \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} + \eta \| \varrho_n \|_{L^1(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des secons membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$
- pour $\int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n$
- pour $\int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n$
- pour $\int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des secons membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$
 - pour $\int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n$
 - pour $\int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n$
 - pour $\int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$
- $$2 \left| \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \right| \leq \int_{\Omega} \frac{|\operatorname{rot} B_n|^2}{\varepsilon \varrho_n^2} + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \mu(\varrho_n) \wedge B_n|^2.$$

Interface diffuse "magnétique"

Contrôle des seconds membres :

- pour $\int_{\Omega} \mu'(\varrho_n) p'_c(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n}$
 - pour $\int_{\Omega} r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n$
 - pour $\int_{\Omega} r \varrho_n \theta_n \operatorname{div} u_n$
 - pour $\int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$
- $$2 \left| \int_{\Omega} \operatorname{rot} B_n \wedge B_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \right| \leq \int_{\Omega} \frac{|\operatorname{rot} B_n|^2}{\varepsilon \varrho_n^2} + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \mu(\varrho_n) \wedge B_n|^2.$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \mu(\varrho_n) \wedge B_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|\nabla \mu(\varrho_n) \wedge B_n\|_{W^{1,1}(\Omega)}^2 \quad (d=2) \\ &\leq C \left(\|\Delta \mu(\varrho_n)\|_{L^2}^2 \|B_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mu(\varrho_n)\|_{L^2}^2 \|\operatorname{rot} B_n\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \mu(\varrho_n) \wedge B_n\|_{L^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq C \left(1 + \|\Delta \mu(\varrho_n)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} B_n\|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

Interface diffuse "magnétique"

Estimations

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho_n |u_n|^2 + \varrho_n |u_n + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}|^2 + 2|B_n|^2 + 2|\nabla \mu(\varrho_n)|^2 + 4\varrho_n e_c(\varrho_n) \right) \\
 & + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho_n) S(u_n) : S(u_n) + (1 - 6\varepsilon) \int_{\Omega} \left(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3} \mu(\varrho_n) \right) |\operatorname{div} u_n|^2 \\
 & + 2 \int_{\Omega} \mu(\varrho_n) A(u_n) : A(u_n) + 2 \int_{\Omega} \left(\eta(\varrho_n) - \frac{1}{\varepsilon \varrho_n^2} - C\varepsilon \right) |\operatorname{rot} B_n|^2 \\
 & + \int_{\Omega} (\mu'(\varrho_n) - C\varepsilon) |\Delta \mu(\varrho_n)|^2 + 2 \int_{\Omega} \frac{r\theta_n \mu'(\varrho_n)}{\varrho_n} |\nabla \varrho_n|^2 + c_0 \int_{\Omega} |\nabla \zeta(\varrho_n)|^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2 \\
 & \leq C \left(1 + \|\theta_n\|_{L^6(\Omega)}^2 \right) \left(\eta \|\varrho_n\|_{L^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} \right) + C' \int_{\Omega} |B_n|^2 + C''
 \end{aligned}$$

\rightarrow lemme de Gronwall

→ **Résultat de stabilité pour les profils de résistivité suivants :**

$$\exists d_0, d'_0 > 0 ; \forall s < B, \quad \frac{d_0}{s^a} \leq \eta(s) \leq \frac{d'_0}{s^{a'}}, \quad 2 \leq a < a' < 3 \quad (12a)$$

$$\exists d_1, d'_1 > 0 ; \forall s \geq B, \quad d_1 \leq \eta(s) \leq d'_1 s^b, \quad b \geq 0 \quad (12b)$$

Théorème (R.S. '07)

Soit Ω un domaine périodique ou l'espace entier en dimension 2. Supposons que, en plus des conditions initiales données par Bresch et Desjardins pour le cas non magnétique,

$$\operatorname{div} B_0 = 0, \quad \int_{\Omega} |B_0|^2 dx < +\infty, \quad \int_{\Omega} \frac{|\nabla \mu(\varrho_0)|^2}{\varrho_0} < +\infty$$

Alors, toute suite de solutions $(\varrho_n, u_n, B_n, \theta_n)$ de (8)–(12) relative aux conditions initiales

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho u|_{t=0} = m_0, \quad B|_{t=0} = B_0, \quad \varrho \tilde{E}|_{t=0} = G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|B_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\nabla \mu(\varrho_0)|^2}{2}$$

où

$$\tilde{E} = C_v \theta + e_c(\varrho) + \frac{|u|^2}{2} + \frac{|B|^2}{2} + \frac{|\nabla \mu(\varrho)|^2}{2},$$

est faiblement compacte pour des profils de résistivité donnés en (12a)–(12b).

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

Système ABI limite pour fluides visqueux avec température

On note $B^* = B/\rho$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (13)$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u - \rho B^* \otimes B^*) + \nabla p - 2\operatorname{div}(\mu(\rho)D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}u) = 0 \quad (14)$$

$$C_v(\partial_t(\rho\theta) + \operatorname{div}(\rho u\theta)) + r\rho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa(\rho, \theta)\nabla\theta) = 2\eta(\rho)|\operatorname{rot}B^*|^2 \quad (15)$$

$$+ 2\mu(\rho)D(u) : D(u) + \lambda(\rho)|\operatorname{div}u|^2$$

$$\partial_t(\rho B^*) - \operatorname{rot}(\rho u \wedge B^*) + 2\operatorname{rot}(\eta(\rho)\operatorname{rot}B^*) = 0 \quad (16)$$

$$\operatorname{div}B = 0 \quad (17)$$

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

Système ABI limite pour fluides visqueux avec température

On note $B^* = B/\varrho$

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (13)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u - \varrho B^* \otimes B^*) + \nabla p - 2\operatorname{div}(\mu(\varrho)D(u)) - \nabla(\lambda(\varrho)\operatorname{div}u) = 0 \quad (14)$$

$$C_v(\partial_t(\varrho\theta) + \operatorname{div}(\varrho u\theta)) + r\varrho\theta\operatorname{div}u - \operatorname{div}(\kappa(\varrho, \theta)\nabla\theta) = 2\eta(\varrho)|\operatorname{rot}B^*|^2 \quad (15)$$

$$+ 2\mu(\varrho)D(u) : D(u) + \lambda(\varrho)|\operatorname{div}u|^2$$

$$\partial_t(\varrho B^*) - \operatorname{rot}(\varrho u \wedge B^*) + 2\operatorname{rot}(\eta(\varrho)\operatorname{rot}B^*) = 0 \quad (16)$$

$$\operatorname{div}B = 0 \quad (17)$$

Problème :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot \left(u + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho)}{\varrho} \right) ?$$

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

\rightarrow Multiplions (16) par B^* :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |B^*|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot u + 2 \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = 0$$

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

\rightarrow Multiplions (16) par B^* :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |B^*|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot u + 2 \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = 0$$

Identité d'énergie

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = \int_{\Omega} \eta(\varrho) |\operatorname{rot} B^*|^2$$

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

\rightarrow Multiplions (16) par B^* :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |B^*|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot u + 2 \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = 0$$

Identité d'énergie

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = \int_{\Omega} \eta(\varrho) |\operatorname{rot} B^*|^2$$

Formule BD ($\tilde{S}(f) = \nabla f - \frac{1}{3} \operatorname{div} f \mathbf{I}$)

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\eta(\varrho) \operatorname{rot} B^*) \cdot B^* = \int_{\Omega} \eta(\varrho) \tilde{S}(B^*) : \tilde{S}(B^*) + \int_{\Omega} (\lambda(\varrho) + \frac{2}{3} \eta(\varrho)) |\operatorname{div} B^*|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot \frac{\nabla \eta(\varrho)}{\varrho}$$

Système MHD dérivé du modèle de Born-Infeld Augmenté

\rightarrow **Résultat de stabilité pour des profils de résistivité liés à la viscosité :**

$$\eta(\varrho) = \mu(\varrho) + c, \quad c \geq 0 \quad (17a)$$

Théorème (R.S. '07)

Soit Ω un domaine périodique $[0, 2\pi]^3$ ou l'espace entier \mathbb{R}^3 . Supposons que, en plus des conditions initiales données par Bresch et Desjardins pour le cas non magnétique,

$$\frac{|B_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ p.p. sur } \{\varrho_0 = 0\}, \quad \operatorname{div} B_0 = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{|B_0|^2}{2\varrho_0} dx < +\infty$$

Alors, toute suite de solutions $(\varrho_n, u_n, B_n, \theta_n)$ de (13)–(17) relative aux conditions initiales

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho u|_{t=0} = m_0, \quad B|_{t=0} = B_0, \quad \varrho \tilde{E}|_{t=0} = G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|B_0|^2}{2\varrho_0}$$

où

$$\tilde{E} = C_v \theta + e_c(\varrho) + \frac{|u|^2}{2} + \frac{|B^*|^2}{2},$$

est faiblement compacte pour des profils de résistivité (17a).

Travaux annexes

Travaux annexes

□ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

Travaux annexes

□ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

\rightarrow Stabilité de solutions faibles dans le cas barotrope en utilisant la BD entropie avec des conditions particulières de viscosité

$$\mu(0) \geq 0, \quad \mu'(\varrho) \geq \nu, \quad |\lambda'(\varrho)| \leq \frac{1}{\nu} \mu'(\varrho), \quad \nu \in (0, 1)$$

$$\nu \mu(\varrho) \leq 2\mu(\varrho) + N\lambda(\varrho) \leq \frac{1}{\nu} \mu(\varrho)$$

$$\liminf_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^{\gamma/3+\varepsilon}} > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{quand } \gamma \geq 3, \quad N = 3$$

Travaux annexes

□ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

\rightarrow Stabilité de solutions faibles dans le cas barotrope en utilisant la BD entropie avec des conditions particulières de viscosité

$$\mu(0) \geq 0, \quad \mu'(\varrho) \geq \nu, \quad |\lambda'(\varrho)| \leq \frac{1}{\nu} \mu'(\varrho), \quad \nu \in (0, 1)$$

$$\nu \mu(\varrho) \leq 2\mu(\varrho) + N\lambda(\varrho) \leq \frac{1}{\nu} \mu(\varrho)$$

$$\liminf_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^{\gamma/3+\varepsilon}} > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{quand } \gamma \geq 3, \quad N = 3$$

- Perte de la formule BD dans le cas magnétique (MHD ou ABI)

Travaux annexes

❑ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

❑ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

Travaux annexes

❑ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

❑ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

\rightarrow existence de solutions faibles pour NSC avec conduction de chaleur (satisfaisant seulement une inégalité sur la température) si on suppose que la viscosité dépend de la température

$$\mu = \mu(\theta), \quad \lambda = \lambda(\theta)$$

Travaux annexes

□ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

□ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

\rightarrow existence de solutions faibles pour NSC avec conduction de chaleur (satisfaisant seulement une inégalité sur la température) si on suppose que la viscosité dépend de la température

$$\mu = \mu(\theta), \quad \lambda = \lambda(\theta)$$

- Etudier le cas $\mu = \mu(B)$, $\lambda = \lambda(B)$ ou même $\mu = \mu(\theta, B)$, $\lambda = \lambda(\theta, B)$

Travaux annexes

❑ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

❑ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

❑ B. Ducomet, E. Feireisl '06

The equations of magnetohydrodynamics : on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars

Travaux annexes

❑ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

❑ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

❑ B. Ducomet, E. Feireisl '06

The equations of magnetohydrodynamics : on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars

\rightarrow Existence globale en temps de solutions faibles pour le modèle MHD avec conduction de chaleur avec loi de pression

$$p(\varrho, \theta) = p_F(\varrho, \theta) + p_R(\theta)$$
$$p_F(\varrho, \theta) = \theta^{\frac{5}{2}} P_F\left(\frac{\varrho}{\theta^{3/2}}\right), \quad P_F(z) \approx z^{\frac{5}{3}}, \quad \forall z \geq z^*$$

Travaux annexes

❑ A. Mellet, A. Vasseur '07

On the barotropic compressible Navier-Stokes equations

❑ E. Feireisl '04

On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid

❑ B. Ducomet, E. Feireisl '06

The equations of magnetohydrodynamics : on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars

- Pas de résultat pour le cas général MHD compressible avec température et viscosité dépendant de la densité

3ÈME PARTIE : STABILITÉ PHYSIQUE

On s'intéresse au modèle de Korteweg dans le cas barotrope pour un choix particulier de viscosités $\mu(\varrho) = \nu\varrho$ avec $\nu > 0$ et $\lambda(\varrho) = 2(\varrho\mu'(\varrho) - \mu(\varrho)) = 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - 2\nu \operatorname{div}(\varrho D(u)) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p(\varrho) = \varrho f_{ext} \quad (19)$$

On s'intéresse au modèle de Korteweg dans le cas barotrope pour un choix particulier de viscosités $\mu(\varrho) = \nu\varrho$ avec $\nu > 0$ et $\lambda(\varrho) = 2(\varrho\mu'(\varrho) - \mu(\varrho)) = 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - 2\nu \operatorname{div}(\varrho D(u)) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p(\varrho) = \varrho f_{ext} \quad (19)$$

- **Hypothèse :** $f_{ext} = 0$
→ stabilité linéaire et non linéaire

On s'intéresse au modèle de Korteweg dans le cas barotrope pour un choix particulier de viscosités $\mu(\varrho) = \nu\varrho$ avec $\nu > 0$ et $\lambda(\varrho) = 2(\varrho\mu'(\varrho) - \mu(\varrho)) = 0$.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - 2\nu \operatorname{div}(\varrho D(u)) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p(\varrho) = \varrho f_{ext} \quad (19)$$

- **Hypothèse :** $f_{ext} = 0$
→ stabilité linéaire et non linéaire
- **Hypothèse :** $f_{ext} = g$
→ instabilité Rayleigh-Taylor

$f_{ext} = 0$: stabilité linéaire

- Hypothèse : $f_{ext} = 0$

On considère des perturbations (ϱ, u) d'un l'état constant : $(\varrho_{ref}, u_{ref}) = (\bar{\varrho}, 0)$

Transformée de Laplace de (18)–(19) :

$$\begin{aligned}\alpha\varrho + \bar{\varrho}\operatorname{div}u &= 0 \\ \alpha u - 2\nu\operatorname{div}D(u) - \sigma\nabla\Delta\varrho + \frac{p'(\bar{\varrho})}{\bar{\varrho}}\nabla\varrho &= 0\end{aligned}$$

$$\alpha\int_{\Omega}|u|^2 + 2\nu\int_{\Omega}|D(u)|^2 + \alpha\frac{\sigma}{\bar{\varrho}}\int_{\Omega}|\nabla\varrho|^2 + \alpha\frac{p'(\bar{\varrho})}{\bar{\varrho}^2}\int_{\Omega}|\varrho|^2 = 0.$$

Condition de stabilité linéaire :

$$\frac{p'(\bar{\varrho})L^2}{\bar{\varrho}\sigma} \geq -1$$

$f_{ext} = 0$: stabilité non linéaire

Stabilité monotone

Inégalité d'énergie et formule BD :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varrho |u|^2 + \Pi(\varrho) + \frac{\sigma}{2} |\nabla \varrho|^2 \right) \leq - \int_{\Omega} \nu \varrho |D(u)|^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varrho |u|^2 + \frac{1}{2} \varrho |u + \nu \nabla \log \varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma |\nabla \varrho|^2 \right) \\ \leq -\nu \int_{\Omega} \frac{p'(\varrho)}{\varrho} |\nabla \varrho|^2 - \nu \sigma \int_{\Omega} |\Delta \varrho|^2 \end{aligned}$$

où $\Pi(s) = s \int_0^s \frac{p(\tau)}{\tau^2} d\tau \geq 0$

Condition de stabilité monotone :

$$\Pi''(\varrho) = \frac{p'(\varrho)}{\varrho} \geq \frac{-\sigma}{L^2}$$

$f_{ext} = 0$: stabilité non linéaire

Stabilité exponentielle

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho |u|^2 + \frac{1}{2} \varrho |u + \nu \nabla \log \varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma |\nabla \varrho|^2 \right) \\ & \leq -\nu \int_{\Omega} \frac{p'(\varrho)}{\varrho} |\nabla \varrho|^2 - \nu \sigma |\nabla \nabla \varrho|^2 - \nu \int_{\Omega} \varrho |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Lemma

Supposons $\mu > 0$ et $0 < \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2$, alors on a l'équivalence des normes

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\varrho |u|^2 + \frac{1}{2} \varrho |u + \nu \nabla \log \varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma |\nabla \varrho|^2 \right) \\ & \text{et} \quad \int_{\Omega} \left(|u|^2 + |\varrho|^2 + |\nabla \varrho|^2 \right) \end{aligned}$$

Condition de stabilité exponentielle :

$$0 < c_1 \leq \varrho \leq c_2, \quad \Pi''(\varrho) = \frac{p'(\varrho)}{\varrho} > \frac{-\sigma}{L^2}$$

$f_{ext} = g$: instabilité Rayleigh-Taylor

- **Hypothèse :** $f_{ext} = g$

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - 2\nu \operatorname{div}(\varrho D(u)) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p(\varrho) = \varrho g$$

- ❑ **S. Benzoni-Gavage**
Linear stability of propagating phase boundaries in capillary fluids
- ❑ **P. Carlès, S. Popinet**
The effect of viscosity, surface tension and non-linearity on Richtmyer-Meshkov instability
- ❑ **D. Bresch, B. Desjardins, M. Gisclon, R. S.**
Instability related to compressible Korteweg system

$f_{ext} = g$: perturbation 2D incompressible

On considère des données perturbées ϱ , p et $u = (v, 0, w)$ du profil hydrostatique $(0, \varrho^0, p^0)$ associée à une vitesse nulle

$$u^0 = 0, \quad \nabla p^0 = \sigma \varrho^0 \nabla \Delta \varrho^0 + \varrho^0 g$$

On s'intéresse à des solutions de la forme

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx + \gamma t), \quad \varphi = \varrho, v, w, p$$

$f_{ext} = g$: perturbation 2D incompressible

On considère des données perturbées ϱ , p et $u = (v, 0, w)$ du profil hydrostatique $(0, \varrho^0, p^0)$ associée à une vitesse nulle

$$u^0 = 0, \quad \nabla p^0 = \sigma \varrho^0 \nabla \Delta \varrho^0 + \varrho^0 g$$

On s'intéresse à des solutions de la forme

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx + \gamma t), \quad \varphi = \varrho, v, w, p$$

Equation de Rayleigh sur w : ($\varepsilon = k\ell$)

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\gamma \ell^2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\varrho^0 \frac{d^2}{dz^2} w \right) - \frac{d}{dz} \left[\left(\left(1 + \frac{2\nu\varepsilon^2}{\gamma \ell^2} \right) \varrho^0 + \frac{\sigma \varepsilon^2 \bar{\varrho}}{\gamma^2 \ell^4} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \right) \frac{dw}{dz} \right] \\ + \varepsilon^2 \left(\left(1 + \frac{\nu\varepsilon^2}{\gamma \ell^2} \right) \varrho^0 + \frac{\sigma \varepsilon^2 \bar{\varrho}}{\gamma^2 \ell^4} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \right) w = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2 \ell} \frac{d\varrho^0}{dz} g w. \end{aligned}$$

→ On considère un profil de densité ϱ^0 reliant deux états constants $\varrho_D^0/\bar{\varrho}$ et $\varrho_U^0/\bar{\varrho}$

$f_{ext} = g$: cas non visqueux

Adimensionnalisation dans le cas $\nu = 0$:

On note

$$\bar{\rho} = (\rho_U^0 + \rho_D^0)/2, \quad A = \frac{\rho_U^0 - \rho_D^0}{\rho_U^0 + \rho_D^0}$$

$$\lambda^\varepsilon = \frac{gk}{\gamma^2} = \frac{\varepsilon g}{\gamma^2 \ell}$$

$$-\frac{d}{dz} \left[\left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) \frac{dw}{dz} \right] + \varepsilon^2 \left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) w = \varepsilon \lambda^\varepsilon \frac{d\rho^0}{dz} w$$

$f_{ext} = g$: cas non visqueux

Adimensionnalisation dans le cas $\nu = 0$:

On note

$$\bar{\rho} = (\rho_U^0 + \rho_D^0)/2, \quad A = \frac{\rho_U^0 - \rho_D^0}{\rho_U^0 + \rho_D^0}$$

$$\lambda^\varepsilon = \frac{gk}{\gamma^2} = \frac{\varepsilon g}{\gamma^2 \ell}$$

$$-\frac{d}{dz} \left[\left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) \frac{dw}{dz} \right] + \varepsilon^2 \left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) w = \varepsilon \lambda^\varepsilon \frac{d\rho^0}{dz} w$$

But : Exprimer λ^ε en fonction de $k = \frac{\varepsilon}{\ell}$.

$f_{ext} = g$: cas non visqueux

Adimensionnalisation dans le cas $\nu = 0$:

On note

$$\bar{\rho} = (\rho_U^0 + \rho_D^0)/2, \quad A = \frac{\rho_U^0 - \rho_D^0}{\rho_U^0 + \rho_D^0}$$

$$\lambda^\varepsilon = \frac{gk}{\gamma^2} = \frac{\varepsilon g}{\gamma^2 \ell}$$

$$-\frac{d}{dz} \left[\left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) \frac{dw}{dz} \right] + \varepsilon^2 \left(\rho^0 + \frac{\sigma \varepsilon \lambda^\varepsilon \bar{\rho}}{g \ell^3} \left| \frac{d\rho^0}{dz} \right|^2 \right) w = \varepsilon \lambda^\varepsilon \frac{d\rho^0}{dz} w$$

But : Exprimer λ^ε en fonction de $k = \frac{\varepsilon}{\ell}$.

Théorème (D. Bresch, B. Desjardins, M. Gisclon, R.S. '07)

$$\frac{\gamma^2}{gk} = \frac{1}{\lambda^\varepsilon} \approx A \left[1 - \frac{2\sigma(\rho_U^0 + \rho_D^0)}{3g\ell} k^2 \right]$$

Calcul du taux de croissance

Développement asymptotique

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots$$

Calcul du taux de croissance

Développement asymptotique

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

Lemma

$$\lambda_0 = \frac{\varrho_D^0 + \varrho_U^0}{\varrho_U^0 - \varrho_D^0} = A^{-1} \quad \lambda_1 = \frac{1 - A^2}{2A^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 - (\varrho^0 - 1)^2}{\varrho^0} dz$$

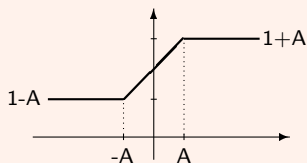
$$\lambda_2 = \lambda_2^{\sigma=0} + \frac{\tilde{\sigma} \lambda_0}{2A} \left[(\lambda_0 + 1) \int_0^{+\infty} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 dz + \lambda_0 (\lambda_0 - 1) \int_0^{+\infty} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 + A))}{\varrho^0} dz \right. \\
\left. - (\lambda_0 - 1) \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 dz + \lambda_0 (\lambda_0 + 1) \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 - A))}{\varrho^0} dz \right]$$

$$+ \frac{\tilde{\sigma} \lambda_0 (\lambda_0^2 - 1)}{2} \left[\int_0^{+\infty} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 + A))}{(\varrho^0)^2} (1 - \lambda_0) dz - \int_0^{+\infty} \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{1}{\varrho^0} dz \right. \\
\left. - \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 - A))}{(\varrho^0)^2} (\lambda_0 + 1) dz + \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d\varrho^0}{dz} \right|^2 \frac{1}{\varrho^0} dz \right]$$

Calcul du taux de croissance

Profil de densité

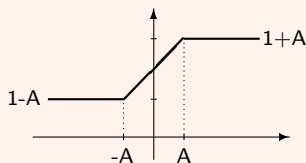
$$\rho^0 = \begin{cases} 1 + A & \text{si } z \geq A \\ 1 + z & \text{si } |z| \leq A \\ 1 - A & \text{si } z \leq -A \end{cases}$$



Calcul du taux de croissance

Profil de densité

$$\varrho^0 = \begin{cases} 1 + A & \text{si } z \geq A \\ 1 + z & \text{si } |z| \leq A \\ 1 - A & \text{si } z \leq -A \end{cases}$$



Limite faible Atwood $A \ll 1$

$$\lambda_0 = \frac{1}{A}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{3} + \mathcal{O}(A) \quad \lambda_2 = \left[\frac{4}{45}A + \mathcal{O}(A) \right] + \tilde{\sigma} \left[\frac{4}{3A} + \frac{4A}{15} + \mathcal{O}(A) \right]$$

$$\frac{\gamma^2}{gk} = \frac{1}{\lambda^\varepsilon} = \frac{1}{\lambda_0} \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \varepsilon - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} \right) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]$$

$$\frac{\gamma^2}{gk} \approx A \left[1 - \frac{2\sigma(\varrho_U^0 + \varrho_D^0)}{3gl} k^2 \right]$$