De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale

Iranete Lima

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
Sciences. Technologie. Médecine

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 30 juin 2006 par

Iranete LIMA

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

École doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique
Préparée au Laboratoire LEIBNIZ - IMAG

De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs

Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale

Composition du Jury :

Présidente
- **Colette LABORDE** – Professeur à l'UFM Grenoble

Directeurs de recherche
- **Nicolas BALACHEFF** – Directeur de Recherche au CNRS
- **Jana TRGALOVÁ** – Maître de conférences à l'IUFM de Lyon

Rapporteurs
- **Claire MARGOLINAS** – Maître de conférences à l'IUFM d'Auvergne
- **Paula BALTAR BELLEMAIN** – Professeur Adjoint à l'UFPE, Recife, Brésil

Examinatrice
- **Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN** – Professeur à l'IUFM de Nord Pas-de-Calais

À mon petit frère Ezequias – Quia
In memoriam

À mes enfants
Daniel Vitor et Mariana

À mon mari
Daniel

Merci…

… à M. Nicolas Balacheff, mon directeur de thèse, pour m'avoir accueillie au sein du Laboratoire Leibniz, pour m'avoir encadrée dans cette recherche, pour ses suggestions pertinentes qui m'ont conduite à l'accomplissement de ce travail.

… à Mme Jana Trgalová qui a eu le courage d'entrer dans cette aventure en acceptant la codirection de ce travail depuis ma troisième année de thèse. Merci pour ses sages conseils et pour ses mots d'encouragement, pour toutes nos discutions passionnées autour de l'objet de recherche, pour la relecture des textes, et surtout pour son amitié.

… à Mme Paula Baltar Bellemain d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

… à Mme Claire Margolinas d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour l'intérêt manifesté envers ce travail. Merci encore pour les échanges à propos du modèle des niveaux de l'activité de professeurs et ses conseils avisés.

… à Mme Colette Laborde d'avoir accepté d'être présidente du Jury et également pour tous les « bon courage ! » que j'ai entendus au cours de ces années. Ces simples mots d'encouragement ont été fondamentaux pour surmonter les moments les plus difficiles.

… à Mme Perrin-Glorian de s'être rendue disponible en acceptant de participer du jury.

… à toute l'Équipe Did@TIC pour son accueil. Merci à Marie-Caroline Croset et aux jeunes docteurs Takeshi Miyakawa et Salahattin Arslan, avec qui j'ai eu le plaisir de discuter de Didactique des Mathématiques et aussi de partager des moments très agréables. Merci également à tout le personnel du Laboratoire Leibniz pour leur disponibilité.

… à l'Équipe IAM, en particulier Sylvia Coutat, Tristan Blanc-Brude, Rossana Falcade, Christophe Foucher, Armando Landa, Julio Moreno, Angela Restrepo, Ruth Rodriguez, Sophie Soury-Lavergne, Seden Tapan et Zilora Zouaoui. C'est une circonstance merveilleuse qui m'a permis de me joindre à vous. Merci pour tous les moments inoubliables que nous avons vécus ensemble. Un merci très spécial à Sylvia pour m'avoir accueillie chez elle après le retour de ma famille au Brésil. Sa solidarité, sa bonne humeur et son amitié ont été très importantes pour l'achèvement de ce travail dans des bonnes conditions.

… à tous les membres de la Chorale Orféo avec qui j'ai eu l'honneur de partager des moments d'émerveillement et de bonheur en chantant de la musique brésilienne. Je garderai des belles images qui jamais ne s'effaceront de mon cœur. Merci à Joëlle Birebent qui m'a montré le chemin et à Monica Alfaya qui m'a invitée à faire partie de ce groupe magnifique. Un merci spécial à Odile Moreau pour son accueil chez elle durant mes derniers jours en France et principalement, pour son amitié et son affection.

… à tous les professeurs participants des expérimentations, ainsi qu'aux élèves des collèges « Cité Scolaire Internationale » de Grenoble et « Charles Munch » d'être rentrés dans le jeu.

… à Mme Denise Grenier, Mme Maria Alessandra Mariotti, Mme Annie Bessot, M. Alain Birebent et M. Bernard Capponi pour leurs contributions et conseils.

… à Mireille Dupraz pour sa gentillesse et d'avoir relu une partie de ce texte, et aussi pour son aide dans l'organisation du manuscrit.

… à Mme Ariane Jamet pour s'être prêtée aux relectures attentives et soigneuses des textes, ainsi que pour son amabilité.

… à Mme Ezilda Loiseau pour m'avoir accueillie dans son atelier, pour l'apprentissage de la langue française.

… à tous mes collègues brésiliens qui se trouvaient à Grenoble. Les rencontres fréquentes et chaleureuses ont quelque peu réduit la distance entre le Brésil et la France. Un merci particulier à « ma petite sœur » Patricia Jaques Maillard et à Nicolas Maillard, à Carla et Tetsu Koike, à Maurício et Edicársia Pillon et à Carine Webber.

… à Alain, Nicole et Sandrine Barré pour tous les moments magnifiques qu'on a vécus ensemble, pour avoir accueilli ma famille comme si elle faisait partie de la leur et aussi pour nous avoir donné le plaisir de connaître et de savourer la merveilleuse cuisine française.

… à tous mes professeurs de Mestrado à l'UFPE – Universidade Federal de Pernambuco – qui m'ont motivée pour réaliser ce doctorat à Grenoble. Une pensée particulière à Verônica Gitirana, Paulo Figueiredo, Lícia Maia et Marcelo Câmara.

… au gouvernement brésilien à travers le CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pour l'allocation d'une bourse d'études qui m'a permis de développer cette thèse. Merci à Mme Elza Pires et M. Josenilson Araújo pour leur gentillesse et leur disponibilité.

… à mes parents, Severino et Amélia, à mon frère Izaías et à mon amie Marta, qui malgré la distance, ont toujours su trouver les moyens et les mots pour me soutenir pendant ces années de thèse.

… à mes enfants, Daniel Vitor et Mariana, d'avoir « embarqué » inconditionnellement avec moi dans ce rêve. Merci d'avoir accepté mes absences constantes et de m'avoir toujours encouragée avec un mot tendre, un sourire et beaucoup d'amour. Vous serez toujours ma principale source de courage et d'inspiration.

… à mon mari, Daniel, pour son amour, sa complicité, son amitié, sa confiance et son soutien pendant tout ce parcours. Merci encore pour toutes les fois où tu as joué le double rôle de père et mère. Ce doctorat n'appartient pas uniquement à moi, il appartient à toi aussi.

Ce travail n'est pas seulement le mien, mais aussi un peu celui de tous ceux qui en ont partagé les bons et les rares mauvais moments. Un grand merci, et à un de ces jours au Brésil ou en France !

Résumé

Cette recherche s'inscrit dans la problématique de l'étude de prises de décisions didactiques. Notre principal intérêt est d'étudier la façon dont les professeurs prennent les décisions didactiques afin de faire avancer les élèves vers l'apprentissage d'une connaissance visée, et les éléments qui influencent ces décisions. Ceci nous a amené dans un premier temps à modéliser les connaissances des élèves concernant un objet mathématique donné, la symétrie orthogonale.

En nous appuyant sur la formalisation proposée par le modèle cK¢ (Balacheff, 1995) au sein de la Théorie des Situations Didactiques, nous avons fait le choix d'entrer dans la modélisation des conceptions d'élèves sur la notion de symétrie orthogonale, à partir de l'identification de la structure de contrôle des conceptions. En partant de l'hypothèse que les contrôles rendent compte des critères qui renvoient au choix, à la décision, à l'adéquation et à la validité d'une action, nous avons réalisé une étude théorique de la notion de symétrie orthogonale du point de vue mathématique et didactique afin d'identifier a priori les contrôles susceptibles d'être mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques. Ceci nous a permis de construire un dispositif expérimental pour étudier la prise de décisions didactiques.

Pour réaliser cette étude, nous nous sommes appuyés sur le modèle des niveaux de l'activité des professeurs (Margolinas, 2002). Nous avons ainsi pu identifier quelques éléments sur lesquels les professeurs fondent leurs décisions didactiques.

Mots clés : Modélisation de décisions didactiques, Modélisation de connaissances, Modèle cK¢, Conception, Symétrie orthogonale.

Abstract

This research investigates didactic decisions making. Our main interest is in studying the way teachers make didactic decisions in order to make students progress in learning target knowledge, and the elements that influence these decisions. This led us first to model students' knowledge related to a given mathematical object, reflection.

In the framework of the Theory of Didactic Situations and based on the formalization proposed by cK¢ model (Balacheff, 1995), we have chosen to start modeling students' conceptions of reflection from the identification of the conceptions control structures. Assuming that the controls account for choice, decision, adequacy and validity of an action, we have realized a theoretical study of the notion of reflection from the mathematical and didactical points of view in order to identify a priori the controls that the students can use in solving problems relating to the construction and the recognition of symmetrical figures. This allowed us to conceive an experiment dedicated to studying didactic decisions making.

This study is realized based on the model of the levels of teachers' activity (Margolinas, 2002). Thus we could identify several elements that support teachers' didactic decisions.

Key words: Modeling of didactic decisions, Modeling of knowledge, Model cK¢, Conception, Reflection

Resumo

Esta pesquisa se inscreve na problemática do estudo de decisões didáticas. Nosso principal interesse é, portanto, estudar a forma como os professores tomam suas decisões didáticas com o objetivo de levar os alunos a avançarem na aprendizagem de um determinado conhecimento, e os elementos que influenciam estas decisões. Para isso, se fez necessário, em um primeiro momento, modelizar conhecimentos de alunos relativos a um objeto matemático, a simetria de reflexão.

Utilizando a formalização proposta pelo modelo cK¢ (Balacheff, 1995), desenvolvido no seio da Teoria das Situações Didáticas, escolhemos iniciar a modelização de concepções de alunos sobre a simetria de reflexão, a partir da identificação das estruturas de controle destas concepções. Partindo da hipótese que os controles explicitam os critérios que orientam a escolha, a decisão, a adequação e a validade de uma ação, realizamos um estudo teórico da noção de simetria de reflexão do ponto de vista matemático e didático. O objetivo deste estudo foi identificar, a priori, controles susceptíveis de serem mobilizados por alunos na resolução de problemas de construção e de reconhecimento de figuras simétricas. O resultado do estudo teórico e a identificação de controles serviram de base para a construção de um dispositivo experimental para estudar decisões didáticas tomadas por professores.

Para realizar este estudo, utilizamos o modelo dos níveis da atividade do professor (Margolinas, 2002). A formalização fornecida por este modelo nos permitiu identificar alguns elementos sobre os quais os professores se apoiam para tomar suas decisões didáticas.

Palavras chaves: Modelização de decisões didáticas, Modelização de conhecimentos, Modelo cK¢, Concepção, Simetria de reflexão.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La modélisation des connaissances est un objet d'étude aussi bien dans le domaine des Sciences Cognitives que dans celui de l'Informatique. Cependant la pertinence de cette modélisation reste une interrogation pour la didactique des mathématiques ; interrogation qui a concerné l'une des thématiques de la XIIe École d'Été de Didactique des Mathématiques en France (2003), ce qui montre la force de cette préoccupation chez les didacticiens. En réponse à cette question, Balacheff et Margolinas déclarent :

> *Modéliser, c'est donner une forme qui permet le raisonnement, le calcul, pour comprendre et décider.*
>
> Balacheff & Margolinas (2005, p. 104)

C'est dans cette problématique que s'inscrit notre recherche. Notre intérêt est de modéliser la prise de décisions didactiques par les professeurs. Pour cela, nous serons amenés dans un premier temps, à proposer des modèles de connaissances des élèves.

Les interactions entre le professeur, le savoir et l'apprenant ont déjà intéressé de nombreux chercheurs en Didactique des mathématiques. Entre autres, ils ont analysé le rôle du professeur dans le processus de construction de la connaissance par les élèves. Laborde & Perrin-Glorian (2005) donnent un aperçu de certaines recherches centrées sur l'étude du rôle du professeur, notamment celles qui utilisent la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) ou la théorie anthropologique (Chevallard, 1989, 1992) comme cadre théorique. Ces recherches soulignent qu'une fois la salle de classe prise comme objet d'étude, le rôle du professeur paraît central dans le déroulement des séquences d'enseignement :

> *The role of the teacher necessarily becomes central as soon as the classroom situation is taken as the object of study. All the papers address this question by analyzing, for example:*

– the segmentation of the content to be taught and the organization of the tasks by the teacher as in the papers by Robert and Rogalski, Assude, and Barbé et al.;

– how the teacher is organizing an interplay between the didactic contract and the milieu in order to let students progress in the solving process of a problem situation as in the papers by Hersant and Perrin–Glorian, Sensevy et al., and Sadovsky and Sessa;

– or how the teacher learns or does not learn from the classroom situation and the students' solving procedures as in Margolinas et al.

Laborde & Perrin-Glorian (2005, p. 3)[1]

Le résultat de l'étude menée par Ikonomou et Kaldrimidou révèle que le professeur :

… is responsible and functions as an agent for the epistemological level of the development of mathematical knowledge in the classroom (Bauersfeld, 1995, Steinbring, 1991). This role of the teacher is manifested in the way in which s/he phases the questions; in the types of the answers and processes s/he requires on a variety of occasions and in the way in which s/he assesses the answers or the solutions of the pupils.

Ikonomou & Kaldrimidou (1999, p. 180)

Le professeur est amené à prendre des décisions qui peuvent porter, en particulier, sur la nature des questions posées aux élèves, sur le moment adéquat de les poser, sur le choix des problèmes proposés aux élèves, avant et après, l'enseignement d'une certaine notion mathématique. D'après Laborde (1988), lors de la prise de décisions par le professeur, une suite de contraintes est en jeu et entre autres, sa représentation à propos du « savoir à enseigner » et à propos des connaissances des élèves. Dès lors, c'est la prise en compte de ces éléments et de leurs interactions qui permettent au professeur de prendre une décision.

En relation avec ce qui précède, nous nous focaliserons sur la manière dont les professeurs prennent une décision afin de faire avancer les élèves vers la connaissance visée, et sur les contraintes qui conduisent à une telle décision. Plus particulièrement, nous étudierons la manière dont ils choisissent les problèmes qui leur permettent de construire une situation d'enseignement.

Pour atteindre notre objectif de modélisation de connaissances des élèves, nous nous situons dans le cadre du modèle « conception connaissances concept » – modèle cK¢ développé par Balacheff (1995, 2001, 2005). En effet, ce cadre contient des principes méthodologiques et des règles sur lesquels nous pouvons nous appuyer pour construire le modèle. Ainsi, ce même cadre nous permettra de réaliser une caractérisation de conception des élèves. Nous pourrons ensuite le faire fonctionner comme outil, à la fois théorique et méthodologique, pour analyser

[1] [1] Les articles référencés dans cette citation sont listés dans la bibliographie. Il s'agit de Margolinas et al. (2005), Robert & Rogalski (2005), Assude (2005), Barbé et al. (2005), Hersant & Perrin-Glorian (2005), Sensevy et al. (2005) et Sadovsky & Sessa (2005).

la prise de décisions didactiques par les professeurs voulant susciter un apprentissage chez l'élève. Dans le modèle cK¢, un apprentissage correspond au passage d'une conception à une autre. Ainsi, nous avons cherché à savoir, dans un premier temps, quelles étaient les conceptions pouvant être attribuées aux élèves quand ils résolvaient des problèmes concernant une notion donnée, pour pouvoir envisager leur évolution vers une autre conception.

Pour atteindre notre objectif de modélisation de décisions didactiques de professeurs, nous nous appuierons sur le modèle des niveaux de l'activité du professeur, proposé par Margolinas (2002, 2005). Ce modèle a été conçu pour rendre compte de la complexité de l'activité du professeur, et notamment pour dégager des éléments susceptibles d'intervenir dans cette activité.

Pour mener cette étude, nous avons dû faire le choix d'une notion mathématique, la symétrie orthogonale. Ce choix est motivé d'abord par le rôle important pris par la géométrie dans les études de modélisation de connaissances des élèves.

Par ailleurs, en ce qui concerne la géométrie dans l'enseignement secondaire en France, les transformations occupent une place privilégiée. L'élève commence à étudier les premières notions de symétrie orthogonale à partir du 2e cycle de l'école primaire[2]. L'apprentissage des transformations doit évoluer de manière à ce qu'à la fin du collège, l'élève soit capable de reconnaître la transformation d'une figure par une symétrie, par une translation, une rotation ou une composition de ces transformations.

De plus, pour pouvoir caractériser des conceptions d'élèves, nous avions besoin d'une notion mathématique présentant une certaine homogénéité par rapport aux conceptions connues. Pour cela, la symétrie orthogonale s'avère importante comme point de départ de notre étude, car de nombreux résultats ont déjà été obtenus la concernant (Hart 1981, Grenier & Laborde 1987, Grenier 1988, Tahri 1993, Soury-Lavergne 2003, Miyakawa 2005), et en particulier, en ce qui concerne le diagnostic des conceptions des élèves. Ces résultats ont permis d'identifier d'une part les difficultés rencontrées par les élèves et d'autre part, les conceptions susceptibles d'être mises en œuvre lors de la résolution de problèmes autour de cette notion. En étudiant ces résultats, nous avons remarqué que ces conceptions présentaient l'homogénéité que nous recherchions.

[2] Le deuxième cycle (cycle des apprentissages fondamentaux) comprend : la grande section maternelle (GS), le cours préparatoire (CP) et la première classe du cours élémentaire (CE1).

PLAN DE LA THÈSE

Ce texte est constitué de cette introduction, des parties A et B et d'une conclusion.

La partie A est composée de quatre chapitres portant sur l'étude théorique. Ces chapitres sont organisés comme suit :

- Dans le **chapitre 1** nous présentons dans un premier temps, un aperçu global des travaux qui portent sur la problématique de modélisation de connaissances dans plusieurs domaines, puis notre problématique et les questions de recherche.
- Le **chapitre 2** donne le cadre théorique et la méthodologie de recherche.
- Le **chapitre 3** porte sur la modélisation de connaissances des élèves à propos de la symétrie orthogonale. L'objectif principal est de modéliser a priori des éléments de conceptions susceptibles d'être mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes sur cette notion, ainsi que les procédures de construction de figures symétriques.
- Le **chapitre 4** étudie la modélisation de décisions didactiques. Nous nous proposons d'une part d'aborder les éléments qui peuvent être déterminants dans la prise de décisions didactiques, et d'autre part de présenter un modèle général de décisions didactiques.

La partie B est composée de deux chapitres concernant l'étude expérimentale. Ces chapitres sont organisés comme suit :

- Le **chapitre 5** porte sur l'expérimentation menée auprès des élèves. Nous présentons le dispositif expérimental, les problèmes proposés aux élèves et leur analyse a priori, ainsi que l'analyse a posteriori de l'expérimentation.
- Le **chapitre 6** porte sur l'expérimentation menée auprès des professeurs. Les résultats de cette expérimentation constituent des éléments pour modéliser la prise de décisions didactiques.

Partie A : ÉTUDE THÉORIQUE

Chapitre 1 : VERS LA PROBLÉMATIQUE

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous arrêterons sur la notion de modèle qui est au cœur de notre recherche. Dans la deuxième partie, nous donnerons un aperçu des travaux concernant la modélisation des connaissances. Ensuite, nous présenterons des recherches dans le domaine de la didactique des mathématiques sur lesquelles nous nous appuierons pour situer notre problématique, recherches qui portent d'une part sur la modélisation des connaissances des élèves et d'autre part, sur la modélisation des décisions didactiques des professeurs. Enfin, nous expliciterons notre problématique et nos questions de recherche.

1. Notion de modèle

Un modèle est avant tout une représentation du monde réel. Dans un modèle nous isolons une classe de phénomènes et, à partir d'un certain nombre d'hypothèses et de règles, nous essayons d'en rendre compte. Par conséquent, un modèle peut offrir à un groupe ou à une collectivité – scientifique ou non – une vision schématique d'un certain nombre d'éléments à propos d'un phénomène que l'on veut décrire.

La notion de modélisation a été introduite dans l'enseignement à partir des années soixante, pour répondre à la nécessité de mieux expliquer la distinction entre l'objet du monde réel que l'on étudie, et son idéalisation. Nous trouvons dans la littérature plusieurs définitions d'un modèle, par exemple celle d'Henry (1997) :

> *Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif, issu d'une description de la réalité. Ce modèle peut être représenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolisme, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.*
>
> Henry (1997, p. 19)

Walliser (1977) montre les différentes formes d'expression d'un modèle :

> *La notion de modèle recouvre toute représentation d'un système réel, qu'elle soit mentale ou physique, exprimée sous la forme verbale, graphique ou mathématique.*
>
> Walliser (1977, p. 116)

Enfin Chevallard (1989), met en évidence le caractère artificiel et réducteur d'un modèle par rapport à la réalité :

> *On construit un modèle de la réalité qui ne prend en compte que les aspects de cette réalité qui apparaissent pertinents par rapport à la question que l'on pose à son propos. Ce modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire ; il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est là ce qui fait sa force [...]. Le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un* ***ajout*** *au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel.*
>
> Chevallard (1989, p. 60)

Un modèle n'est pas construit pour résoudre un problème qui s'impose à une collectivité, il a plutôt la fonction de fournir des éléments qui peuvent apporter une aide significative à la compréhension d'un phénomène. Un modèle peut avoir plusieurs objectifs. Il peut servir, par exemple, de moyen de communication, d'échange de points de vue. Il peut aussi fonctionner comme un outil, pour aider ceux qui le construisent ou ceux qui l'utilisent à comprendre un problème d'une manière plus précise. Il peut encore rendre compte, de manière simplifiée, du fonctionnement d'un système très complexe afin de le rendre plus compréhensible. Plus un problème est complexe, plus un modèle peut devenir pertinent, car il permet un niveau de visibilité beaucoup plus élevé du phénomène étudié, en termes de détails et d'abstraction, que la situation réelle. L'utilité de modéliser un système complexe, c'est de construire son « intelligibilité, sa compréhension » (Le Moigne, 1990). Enfin, un modèle peut être une aide dans un processus d'enseignement ou de formation.

Ainsi, l'enjeu primordial de la modélisation est de permettre d'une part, la structuration des objets et d'autre part, la représentation de l'ensemble des interprétations attribuées à cet objet par un observateur. De plus, à la suite de Berkassan (1997), nous pouvons dire que l'ensemble de la recherche scientifique, quel que soit le champ dans lequel travaille le chercheur, vise à établir des modèles de plus en plus précis pour rendre compte de la complexité du réel.

La connaissance est, par essence, un modèle en elle-même. C'est une manière de se faire une représentation ou d'expliciter ce qui appartient seulement au sujet pensant, et cette connaissance est le résultat de l'appréhension ou de la perception de la réalité par un sujet. A ce propos, Caplat (2002) affirme que :

> *La connaissance possède un rôle de médiation entre une réalité perçue et des interprétations rationnelles. Selon ce point de vue, la notion de connaissance est étroitement liée à celles de conceptualisation, d'expérimentation et de subjectivité : la connaissance de quelqu'un sur quelque chose est le modèle mental que se fait l'individu de la chose et comme tout modèle, c'est le résultat d'une construction subjective. [...] Lorsque l'humain acquiert la connaissance d'une chose, il construit en lui une image de cette chose, il sémantise en interprétant l'objet perçu.*
>
> Caplat (2002, p. vii)

Par conséquent, le fait de modéliser une connaissance possède un caractère récursif. Elle donne à l'observateur un moyen d'interpréter ce que pense un sujet à propos d'un objet précis.

2. Modélisation de connaissances

L'objectif de la modélisation en Sciences Cognitives est la compréhension de la nature et de la structure des activités mentales du sujet. Elle tente de répondre à des questions épistémologiques, notamment celles liées à la nature de la connaissance, en tenant compte des apports de différentes disciplines scientifiques. Parmi celles-ci, signalons les Sciences du Langage (Bronckart, 1985, 1977), la Psychologie Cognitive (Piaget, 1971, 1974, 1979 ; Vergnaud, 1981, 1998) et notamment, la Didactique des Mathématiques (Chevallard, 1992, Brousseau, 1998 ; Balacheff, 1995).

2.1. En Psychologie Cognitive

La psychologie cognitive s'intéresse à la manière dont le sujet raisonne et appréhende une information, en termes de capacités et de limitations. Parmi les études développées dans ce domaine, nous nous référons aux travaux classiques de Piaget (ibid.), en particulier la « théorie de l'équilibration » où est introduite la notion de schème. Cette notion préconise que la connaissance du sujet est construite en interaction avec le milieu[3]. A partir d'un processus d'assimilation et d'accommodation, le sujet en confrontation avec des situations est amené à construire des hypothèses pour expliquer les phénomènes qui l'entourent. Vergnaud présente l'évolution des connaissances dans sa théorie énoncée ci-après :

> *La connaissance passerait d'un état d'équilibre à un autre par un déséquilibre de transition au cours duquel les relations prises en compte par le sujet dans l'état antérieur seraient mises en contradiction, soit par la prise en considération de relations nouvelles, soit par une tentative nouvelle de les coordonner. Cette phase de conflit serait surmontée au cours d'une phase de réorganisation et coordination qui aboutirait à un nouvel état d'équilibre.*
>
> Vergnaud (1981, p. 222)

La non-assimilation de nouvelles connaissances par le sujet est à l'origine des conflits cognitifs. Vergnaud a repris la notion de « schème » et la définit ainsi :

> *Le schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations. […] Un schème est formé de plusieurs catégories d'éléments, tous indispensables : des buts et anticipations, des règles d'action, des possibilités d'inférence en situation et des invariants opératoires.*
>
> Vergnaud, (1998, p. 283 et 285)

L'objectif principal de la théorie proposée par Vergnaud est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre les divers types de connaissances, et en particulier celles de la connaissance qui rend l'action du sujet efficace, qu'elle soit exprimée sous la forme d'actes ou bien de mots. D'après lui : « les schèmes ne pourraient pas être opératoires s'ils ne reposaient sur des invariants, c'est-à-dire sur des objets, prédicats et théorèmes-en-acte[4] » (ibid. 1994, p. 190). Ainsi, le concept d'invariant opératoire renvoie à l'articulation entre les formes prédicatives et opératoires de la connaissance[5].

---

[3] Dans cette approche théorique, le « milieu » correspond à l'environnement qui entoure le sujet.

[4] Un théorème-en-acte est une proposition implicitement tenue pour vraie, liée à la situation elle-même.

[5] Les recherches de Baltar (1998, 1996) concernant la notion d'aire de surfaces planes et celles de Bittar (1998) concernant la notion de vecteurs dans l'enseignement, sont des exemples d'études menées dans ce cadre théorique.

2.2. En Didactique des Mathématiques

L'objet de la Didactique des Mathématiques est la compréhension du processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans sa globalité. Elle s'intéresse aux interactions entre le professeur, les élèves et des savoirs particuliers. Le triangle didactique tente de préciser le fonctionnement de leurs interactions.

Il est reconnu qu'en didactique des mathématiques, la question des connaissances est centrale. Cependant la question de la nécessité de la modélisation des connaissances chez l'apprenant ne fait pas l'unanimité chez les chercheurs. Comme le précisent à ce sujet Chaachoua & Mariotti (2005), « des perspectives théoriques différentes conduisent à des positions très diverses, ainsi qu'à des concepts différents dont l'articulation n'est pas simple » (p. 73). En fonction de la perspective théorique dans laquelle nous nous plaçons, l'interaction entre les acteurs du triangle didactique est perçue d'une façon spécifique.

Perrin-Glorian (2002) fait une synthèse des trois théories utilisées majoritairement dans les recherches en didactique des mathématiques développées en France : la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie de l'Anthropologique du Didactique (TAD) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Pour chacune de ces approches théoriques, l'auteur met en évidence le rôle de chacun des acteurs du système didactique (le professeur, l'élève et le savoir) dans l'interaction. Nous reprenons ici cette synthèse afin de présenter dans les grandes lignes ces trois approches.

La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1996, 1981) est née à partir des travaux de Piaget (ibid.), Vygotski (1985) et Bruner (1960), dans une perspective psychologique. Cette théorie met l'accent sur les sujets et sur l'analyse du contenu. Perrin-Glorian (ibid.) montre que dans cette approche le professeur exerce un rôle de médiateur, d'une part en choisissant des situations pour permettre à l'élève d'être en relation avec le savoir, et d'autre part en apportant de l'aide aux élèves dans la résolution de problèmes. La notion de champ conceptuel est vue comme « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types différents en étroite connexion » (Vergnaud, 1981, p. 217). Les actions des professeurs et des élèves doivent alors être interprétées à l'intérieur de cet espace.

La Théorie Anthropologique du Didactique développée par Chevallard (1999, 1992) « apporte des outils pour une approche du didactique à travers l'analyse du rapport au savoir dans les différentes institutions (au sens large : le système scolaire, mais aussi un niveau donné d'enseignement, une classe, une famille…) » (Perrin-Glorian, ibid. p. 207). Cette théorie met alors l'accent sur la nature du savoir, pris dans le sens d'organisations mathématiques, qui est enseigné dans le contexte scolaire. Dans cette théorie, « le rapport personnel des individus au savoir se construit dans la temporalité sous l'influence des différents rapports institutionnels auquel il est soumis » (ibid.). Cette composante de temporalité soit par rapport au savoir, soit par rapport au temps didactique, permet de bien distinguer les rôles du professeur et de l'élève dans cette approche.

La Théorie des Situations Didactiques développée par Brousseau (1986, 1998), en faisant référence à la théorie des jeux, met l'accent sur la « situation » elle-même. Perrin-Glorian (ibid.) affirme que dans la TSD :

> *La situation didactique comprend une situation adidactique*[6] *qui modélise les interactions de l'élève avec le savoir à travers ses possibilités d'action sur un milieu*[7] *capable de rétroactions, et un contrat didactique implicite qui traduit les attentes réciproques du maître et des élèves relatives au savoir [...].*
>
> Perrin-Glorian (2002. p. 206)

Un des intérêts de la TSD consiste à modéliser les connaissances que l'on veut enseigner, ou celles qu'on veut que l'élève apprenne. Une des idées fondatrices de cette approche est que les connaissances se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle des situations. Une situation didactique réunit l'ensemble des problèmes dans lesquels les élèves mobilisent ou construisent des connaissances, pour atteindre les objectifs fixés par le professeur.

Ainsi, dans la TSD le savoir est représenté par les situations adidactiques. Le rôle de l'élève dans ces situations est d'agir avec ses connaissances sur un milieu supposé isolé du professeur, tandis que ce dernier a pour fonction de réguler les actions de l'élève sur le milieu, à travers le contrat didactique[8].

2.3. Dans le domaine des EIAH : Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain

Les EIAH, auparavant appelés EIAO (Enseignements Intelligemment Assistés par Ordinateur), sont fondés sur l'apport des différentes disciplines des sciences humaines et sociales et de l'Intelligence Artificielle. Tchounikine définit ainsi un EIAH :

---

[6] « Une situation a-didactique est une situation qui peut être vécue par l'élève en tant que chercheur d'un problème mathématique, indépendant en ce sens du système enseignant » (Margolinas 1993, p. 33).

[7] « La situation didactique est, pour *l'observateur*, la modélisation de l'environnement dans lequel est plongé un joueur, la situation d'action, d'apprentissage ou d'enseignement pour l'élève, le cadre de l'enseignement pour l'enseignant. Le système antagoniste du joueur dans une situation est *pour le joueur* comme pour l'observateur, une modélisation de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine. C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler *milieu* (Brousseau 1990, p. 320-321).

[8] « Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène » (Brousseau, 1998, p. 60).

> *Un EIAH au sens large est un environnement qui intègre des agents humains (v.g. élève ou enseignant) et artificiels (i.e., informatiques) et leur offre des conditions d'interactions, localement ou à travers les réseaux informatiques, ainsi que des conditions d'accès à des ressources formatives (humaines et/ou médiatisées) locales ou distribuées.*
>
> Tchounikine (2003, p. 235)

Les recherches en EIAH, qui ont débuté dans les années soixante-dix[9], mettent en pratique la modélisation des connaissances de l'apprenant[10]. Tchounikine (2002, p. 3) soutient que les EIAH ont été conçus « dans le but de favoriser l'apprentissage humain, c'est-à-dire la construction de connaissances chez un apprenant ». Ainsi, un modèle de l'apprenant est caractérisé ici par une structure de données (au sens informatique) qui rend compte, pour le système d'enseignement, de l'état des connaissances de cet apprenant.

Ces recherches regroupent différentes disciplines scientifiques, par exemple : l'Informatique, l'Ergonomie, la Pédagogie, la Psychologie Cognitive, la Didactique des disciplines. Dans cette dernière, le but des recherches est d'analyser d'une part, la pertinence des savoirs enseignés et d'autre part, les conceptions que se fait l'apprenant sur les connaissances enseignées à partir d'une action didactique du tuteur.

Bien que notre recherche ne concerne pas les EIAH, nous les décrivons ici en tant que systèmes informatiques et en tant que champ de recherche, car ils ont amplement contribué au développement de la modélisation du raisonnement, du diagnostic et de la décision didactique, en s'appuyant sur des représentations des connaissances de l'apprenant. En amont de la conception d'un EIAH[11] se situe un travail didactique qui aboutit à la construction théorique d'un modèle de l'apprenant. Ce modèle une fois construit peut être implémenté au sein d'un tuteur artificiel. Ainsi, notre travail de modélisation dans le champ de la didactique pourra avoir des répercussions sur l'élaboration d'un tuteur ayant pour objectif l'apprentissage d'une notion mathématique.

Parmi les différents systèmes, nous en avons trouvé deux particulièrement cités dans la littérature, qui s'appuient sur des approches complémentaires pour l'enseignement : les micromondes et les tuteurs intelligents. Les micromondes sont conçus dans le but de permettre à l'élève, à travers différentes actions réalisées, de construire son propre apprentissage ; l'ordinateur est alors un élément du milieu (Bellemain, 1992). Comme

[9] Pour de plus amples informations sur les grands courants de pensée dans ce domaine, on se reportera utilement aux auteurs Bruillard (1997) et Wenger (1987).

[10] Py (1998, p.1) définit le modèle de l'élève comme un ensemble d'informations propre à un apprenant. Bien que le mot « élève » fasse référence à l'« apprenant » en contexte scolaire, nous employons souvent ces deux mots comme synonymes.

[11] Nous ne considérons ici que des systèmes informatiques conçus spécifiquement pour être utilisés dans un contexte éducatif.

exemples classiques de micromondes, citons LOGO (Papert, 1980) et Cabri-géomètre (Laborde & Capponi, 1994). D'un point de vue épistémologique, les connaissances implémentées dans ces systèmes sont relatives au domaine étudié. Ainsi, les micromondes ne sont pas capables d'établir un diagnostic de l'état de connaissances de l'élève, ni encore de proposer des stratégies permettant un processus d'apprentissage.

Par opposition, les tuteurs intelligents sont des systèmes conçus pour enseigner les connaissances d'un certain domaine à l'élève ; ils sont basés sur la notion de guidage. Grâce aux techniques d'intelligence artificielle, il devient possible de doter les machines de connaissances et de certaines capacités à les utiliser. En fait, à partir de l'implémentation d'un modèle des connaissances et d'un répertoire des erreurs d'élèves, ces tuteurs produisent un diagnostic de l'état des connaissances de l'élève et adoptent une stratégie pédagogique en lui fournissant une instruction spécifique (une leçon, une aide, un exercice...) relative à la connaissance visée. Nous restreindrons notre description aux tuteurs intelligents, puisqu'eux seuls intègrent un modèle de l'élève.

Pour accompagner un apprentissage, un tuteur informatique doit posséder les connaissances du domaine à enseigner, s'adapter aux connaissances et erreurs de l'élève, adopter une stratégie pédagogique et pouvoir communiquer avec l'élève. Ainsi, Wenger (1987) définit quatre types de modèles dans la conception d'un système EIAH :

- Modèle du domaine (expert) : il correspond à l'expertise du domaine à enseigner. Il permet de structurer et d'organiser le savoir dans le but de mettre en évidence les différents concepts et les liens qui existent entre eux ;
- Modèle de l'apprenant (élève) : correspond à l'expertise des connaissances relatives à l'apprenant. Son but est de modéliser les connaissances de l'apprenant par rapport à chaque concept du domaine ;
- Modèle de l'interaction (interface) : contient les descriptions de chaque média (reconnaissance vocale, synthèse vocale, interface...) en termes de capacités, de conditions d'utilisation et de contraintes de combinaison ;
- Modèle du tuteur (pédagogique) : spécifie les dialogues tutoriels et les méthodes de remédiation. En fonction des informations que le tuteur possède sur l'apprenant, en particulier des connaissances erronées mises en œuvre par l'apprenant lors des interactions précédentes, il est capable de prendre des décisions didactiques.

L'architecture classique d'un tuteur intelligent est celle du schéma dans la page suivante :

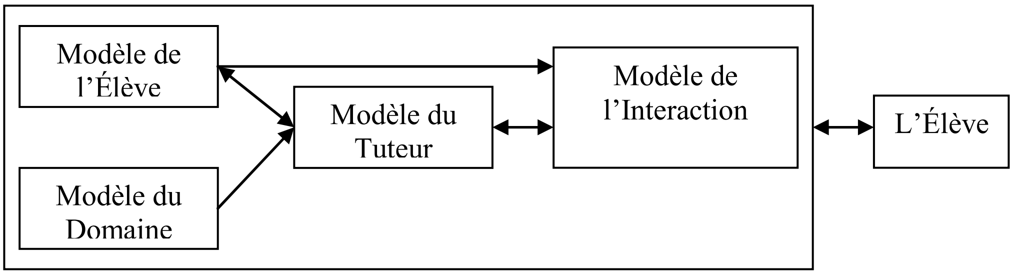


Schéma 1. Modèle général d'un Tuteur Intelligent (Nicaud, 1989)

D'après Self (1974), la nécessité de représenter les connaissances de l'apprenant a été pour de nombreux chercheurs, le moteur qui leur a permis de réaliser des tuteurs capables d'adapter leurs stratégies d'enseignement. Parmi ceux devenus des références dans ce domaine, citons les tuteurs : GUIDON (Clancey, 1979) ; SCHOLAR (Carbonell, 1970) ; ou encore WEST (Burton et Brown, 1976).

2.4. En géométrie

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nos situations d'apprentissage concernent la géométrie. En effet, celle-ci est un domaine privilégié pour la modélisation des connaissances de l'élève car au-delà de la connaissance géométrique, la perception entre en jeu comme élément primordial quant à sa manière d'appréhender le dessin, qui joue un rôle essentiel en géométrie. Cet élément perceptif peut avoir des conséquences sur l'apprentissage car il peut devenir un moyen de contrôle dans la résolution du problème. Nous rejoignons ici Laborde (1992) :

> *[…] les modèles que sont les dessins en géométrie mettent en jeu les informations visuelles qui, quoique ne fournissant pas directement la solution, jouent un double rôle dans la résolution de problèmes géométriques :*
>
> *- en fin de résolution, lorsque l'élève pense avoir trouvé une solution, elles donnent des indications sur la validité de cette solution ; c'est un moyen de validation partielle ou d'invalidation ; ce dernier cas se produit par exemple dans les problèmes de construction, si le procédé élaboré par l'élève aboutit à un résultat perceptif en contradiction flagrante avec ce qu'il attendait ;*
>
> *- pendant la recherche, l'exploration du dessin (ou des dessins) peut conduire l'élève à des conjectures et être à l'origine de démarches de solution [...] c'est une source d'expérimentation.*
>
> Laborde (1992, p. 69)

En effet, au cours de la résolution d'un problème, lors de l'exploration du dessin et de la vérification par l'élève de la solution trouvée, les connaissances perceptives et géométriques mises en œuvre par l'élève sont en interaction. L'auteur cite l'exemple de la construction d'images de figures géométriques, par la symétrie. En réalisant une telle construction, l'élève s'attend à ce que la figure image ait une évidente ressemblance avec la figure initiale : les segments des deux figures doivent avoir plus ou moins la même longueur et ces figures doivent être de même nature (l'image d'un segment est un segment, l'image d'un cercle est un cercle).

Ainsi, nous supposons que la caractéristique de la géométrie, qui est de favoriser l'interaction entre les connaissances liées à la perception et les connaissances géométriques, peut permettre plus facilement l'explicitation des connaissances sous-jacentes à la résolution du problème par l'élève, ce qui peut jouer un rôle important dans un processus de modélisation.

2.5. Modélisation de connaissances des élèves, relative à la symétrie orthogonale

Plusieurs recherches se sont intéressées aux conceptions [12] des élèves sur la symétrie orthogonale. Parmi celles-ci, citons Hart (1981), Gallou-Dumiel (1985), Grenier & Laborde (1987), Tahri (1993) et la recherche développée dans le cadre du projet BAP (Soury-Lavergne 2003, Miyakawa 2005). Parmi les différents objectifs de ces études, nous en avons retenu deux qui correspondent à notre objet d'étude. Le premier consiste à diagnostiquer l'état de connaissance des élèves avant et après l'enseignement de cet objet mathématique, et le deuxième objectif traite de la prise de décisions didactiques par les professeurs. Ainsi, dans le chapitre 3 (cf. p. 47), nous présenterons les principaux résultats des recherches développées par Grenier & Laborde (1987), Grenier (1988) et Tahri (1993). Ces recherches se placent dans la problématique de construction du symétrique d'un segment par rapport à une droite. Les auteurs ont étudié les procédures de construction, ainsi que les conceptions mobilisées par les élèves dans la résolution des problèmes de ce type. Les résultats de ces études sont significatifs dans ce domaine et nous nous y réfèrerons pour notre approche théorique.

3. Modélisation de décisions didactiques

Dans la pratique de leur métier, les professeurs prennent des décisions qui dépendent de plusieurs facteurs. Ces facteurs sont liés à la gestion de la classe et/ou du temps, à l'affectivité (convivialité avec leurs élèves), à l'Institution (i.e. le fonctionnement de l'école ou le choix des contenus parmi ceux proposés par les programmes, par exemple), ainsi qu'au savoir à enseigner. Pour un professeur, ces facteurs sont tellement imbriqués que si on leur demande de les identifier ou de les séparer, cela peut devenir une tâche très difficile. Cependant, ces

[12] Signalons que le terme « conception » utilisé dans ces recherches a des significations variées, se référant à des théories différentes, ou bien il est utilisé au sens large du terme.

décisions sont toutes de nature différente. Nous nous intéressons aux décisions didactiques qui concernent l'apprentissage par l'élève de la connaissance visée.

Ces décisions peuvent être prises par le professeur pendant son cours dispensé dans une salle de classe, où il est en situation d'interaction avec les élèves. Toutefois, un processus d'enseignement scolaire ne se restreint pas uniquement à ce qui se passe dans la salle de classe. Après le cours, le professeur réalise d'autres activités comme la correction des devoirs donnés aux élèves ou la préparation d'un nouveau cours. Pour cela, il prend des décisions didactiques visant l'apprentissage des élèves. Les travaux développés dans ce domaine (Margolinas 2002, 2005 ; Bloch, 2000) montrent que plusieurs éléments peuvent intervenir dans la prise de décisions du professeur : ses connaissances du contenu à enseigner et ses conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, par exemple. Dans notre recherche, nous nous proposons d'étudier les éléments susceptibles d'influencer les décisions didactiques prises par des professeurs dans le contexte de l'apprentissage de la symétrie orthogonale. Ainsi, dans le chapitre 4 (cf. p. 99), nous présenterons une étude théorique sur laquelle nous nous appuierons pour atteindre cet objectif.

4. Spécificité de notre travail et questions de recherche

Comme dit précédemment, nous chercherons dans un premier temps à caractériser les connaissances des élèves de collège relatives à la symétrie orthogonale et dans un deuxième temps, nous étudierons le processus de prise de décisions didactiques par les professeurs.

4.1. Caractérisation des conceptions

Dans cette perspective, la première question que nous nous posons concerne la caractérisation de connaissances. La théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1998) préconise qu'une connaissance est caractérisée par les situations ou les problèmes qui lui sont spécifiques. Dans le cadre du modèle cK¢, la caractérisation de « conception » est issue de la définition pragmatique du concept qu'en donne Vergnaud (1990) dans sa théorie des champs conceptuels : un concept y est défini par un triplet constitué d'un ensemble de situations, d'un ensemble des invariants opératoires et enfin d'un ensemble des formes langagières qui permet la représentation symbolique de ce concept. L'une des innovations apportées par le modèle cK¢ à cette définition est l'explicitation des structures de contrôle (Σ), qui jugent de la validité et de l'adéquation de l'action réalisée par le sujet résolvant un problème. Ainsi dans ce modèle, une conception est définie par un quadruplet constitué d'un ensemble P des problèmes, un ensemble R des opérateurs, un ensemble L des systèmes de représentations et un ensemble Σ des contrôles, que nous décrirons plus en détail au chapitre 2 (cf. p. 29).

Dans les travaux de recherche présentés plus haut (cf. p. 19) ont été identifiées quatre conceptions prototypiques relatives à la symétrie orthogonale, en référence à la définition proposée par Vergnaud (ibid.). Dans notre recherche, nous n'avons pas à nous limiter à ces quatre conceptions, d'une part parce que le problème pris en compte dans ces travaux concerne, en particulier, la construction du symétrique d'un segment, tandis que nous nous proposons de considérer les figures plus complexes et d'autre part, parce que nous nous sommes placés dans une autre approche théorique.

En nous appuyant sur la formalisation proposée par le modèle cK¢, nous faisons le choix de caractériser une conception à partir de l'identification des structures de contrôle. Gaudin (2005) a étudié le rôle et les relations entre opérateurs et contrôles dans l'activité d'un sujet en résolution de problème, à propos de la notion de fonction. Ses résultats montrent que l'analyse des productions des élèves par le biais de ces éléments a permis d'expliquer des dysfonctionnements – dans la conduite de l'action réalisée – observés dans le comportement du sujet. Nous reprenons ici comme hypothèse de travail l'hypothèse de Gaudin (ibid.), selon laquelle la caractérisation des structures de contrôle des conceptions peut permettre d'analyser les choix et les décisions prises par les élèves dans la résolution de problèmes et d'accéder, par la suite, aux opérateurs susceptibles d'être mis en œuvre dans l'action. Par ailleurs, les résultats de la recherche de Gaudin (2002) montrent qu'un même opérateur peut être attaché à des contrôles différents qui caractérisent des conceptions différentes. A ce propos, Balacheff et Margolinas affirment que :

> *La considération des contrôles peut permettre de distinguer des conceptions qui par ailleurs paraissent partager les mêmes systèmes de représentations et les mêmes opérateurs.*
>
> Balacheff & Margolinas (2005, p. 84)

En considérant que les contrôles peuvent jouer un rôle important dans la distinction des conceptions, dans notre recherche nous avons choisi de caractériser dans un premier temps les structures de contrôles des conceptions de la symétrie orthogonale, ce qui peut nous permettre de caractériser ses autres éléments. Cette problématique soulève la question suivante :

Q1 : Comment caractériser l'ensemble des contrôles des conceptions susceptibles d'être mobilisés par l'élève dans la résolution d'un problème relatif à la symétrie orthogonale ?

Puisque nous utilisons le cadre du modèle cK¢ pour caractériser les conceptions, la question suivante se pose naturellement.

Q2 : À partir de l'ensemble des contrôles, peut-on accéder aux autres éléments qui caractérisent une conception, notamment les opérateurs et les problèmes ? Si oui, comment ?

Signalons que d'autres recherches ont utilisé le modèle cK¢ pour caractériser des conceptions relatives à la notion de fonction à partir de l'ensemble des problèmes (Mesa, 2004), ou celles relatives aux équations différentielles à partir de l'ensemble des opérateurs (Arslan, 2005) ou encore celles relatives à la symétrie orthogonale à partir des ensembles des contrôles et des opérateurs (Miyakawa, 2005).

Choix de problèmes

Pour choisir la nature des problèmes, nous avons pris comme point de départ les résultats des recherches sur la symétrie orthogonale, ainsi que le point de vue de l'enseignement (à l'école élémentaire et au collège). Après avoir réalisé une étude des manuels scolaires en vigueur au Collège en France (cf. chapitre 3), nous avons constaté que la plupart des problèmes proposés aux élèves concernant la symétrie orthogonale étaient des problèmes de construction de la figure symétrique par rapport à une droite donnée, et nous trouvons également une quantité importante de problèmes de reconnaissance de la figure symétrique parmi plusieurs figures données. Nous nous interrogeons alors sur les conceptions susceptibles d'être mobilisées par les élèves dans la résolution de problèmes de cette nature.

Quant aux problèmes de construction d'images de figures par une symétrie orthogonale, la question qui se pose concerne les conceptions pouvant être mises en œuvre par les élèves quand ils construisent l'image d'une figure complexe, c'est-à-dire composée de plusieurs segments, d'arcs de cercle... Ces conceptions sont-elles les mêmes que celles identifiées dans les travaux concernant la problématique segment-axe ?

L'élève sait que l'image d'une figure par la symétrie doit être une figure de même nature que celle de départ. Dans la construction du symétrique d'un segment, la conservation de la longueur du segment initial peut être suffisante pour aboutir à la construction d'une figure semblable. Cependant, si la figure est complexe, elle comprend des segments, tracés ou non (un côté d'un polygone, un axe de symétrie, une diagonale, etc.) en positions variées, et encore d'autres éléments comme la mesure et l'orientation des angles qui n'apparaissent pas dans la configuration de la figure segment. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que, dans le cas d'une figure complexe, les propriétés de la symétrie autres que la conservation des longueurs des segments – comme la conservation des mesures des angles ou bien de leur orientation – doivent être observées par l'élève pour qu'il puisse mener à bien sa construction.

Par ailleurs, en ce qui concerne le choix de la nature de la figure, nous reprenons ici la question posée par Grenier (1998, p. 22) à propos du réinvestissement par les élèves de leurs connaissances sur la construction du symétrique d'un point, pour construire le symétrique d'une figure quelconque. Les résultats de sa recherche ont permis de répondre en partie à cette question. En effet, elle a montré que les élèves, qui savaient très bien construire le symétrique d'un point, ne réinvestissaient pas leurs procédures pour construire le symétrique d'un segment. Dans notre recherche, nous choisissons d'élargir cette problématique, en proposant aux élèves des problèmes de construction du symétrique d'un segment, mais également d'une figure complexe (dans le sens précisé plus haut), en ayant pour objectif d'étudier si la conception mobilisée par l'élève pour construire l'image d'une figure complexe par une symétrie orthogonale, est la même que celle mobilisée pour construire l'image d'un segment.

4.2. Évolution des conceptions

Plusieurs travaux ont montré le paradoxe chez un sujet observé dans différentes situations, de la présence éventuelle de connaissances contradictoires. Un élément explicatif de cette contradiction peut être la diversité des situations. En effet un sujet, devant un problème à résoudre, peut disposer de plusieurs conceptions par rapport à une même notion et mobiliser l'une ou l'autre en fonction des contraintes spécifiques du problème proposé. Ces conceptions peuvent être incomplètes ou locales, avec pour chacune un domaine de validité. A ce propos, Balacheff (2000) signale que :

> *Un problème quelconque le plus souvent n'entretient pas de relation spécifique avec une conception, il sera au contraire en général lié de plusieurs façons à plusieurs ensembles de conceptions qui entrent dans son traitement.*
>
> Balacheff (2000, p. 6)

L'hypothèse sous-jacente au modèle cK¢ est que l'action rationnelle d'un sujet résolvant un problème, est localement logique du point de vue de l'observateur. Le sujet référencé ici n'est pas le sujet pris dans toute sa complexité, mais l'individu du point de vue du système didactique où il est en interaction avec le milieu [sujet<>milieu]. Une conception C mobilisée par ce sujet peut fonctionner pour résoudre un certain type de problèmes et ne plus fonctionner pour en résoudre un autre. Cela veut dire qu'il n'y a pas de passage naturel d'une conception à une autre, que ce soit dans une même situation ou non et quoiqu'il puisse sembler aux yeux d'un observateur. Ceci met en évidence le caractère local d'une conception.

Pour illustrer ce caractère local, prenons comme exemple le problème de construction du symétrique de deux triangles rectangles par rapport à un axe de symétrie, qui sont placés différemment sur la feuille de papier comme le montrent les figures ci-après :

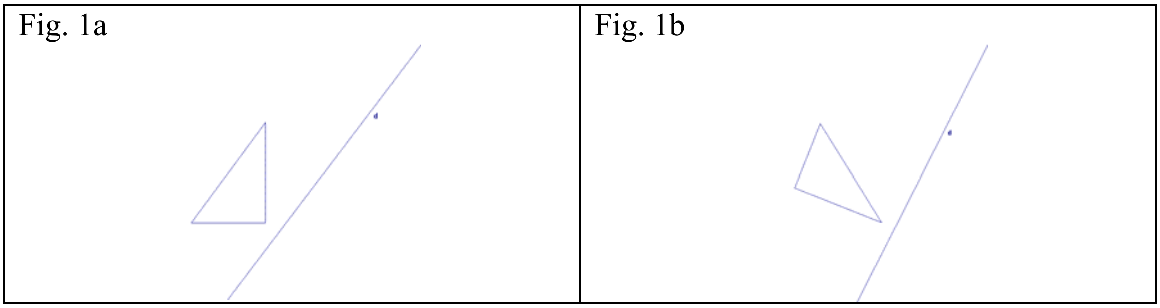


Figure 1. Problèmes de construction : construire les symétriques de triangles rectangles par rapport à un axe de symétrie.

En ce qui concerne le choix par l'élève d'une direction pour construire le symétrique du premier triangle (cf. fig. 1a), la position standard de l'angle droit (côtés horizontal et vertical) sur la feuille peut l'amener à choisir une direction horizontale (rappel horizontal) ; tandis que l'emplacement du deuxième triangle sur la feuille (cf. Fig. 1b) favorise le choix de la direction donnée par le « prolongement » du grand segment de ce triangle. Nous considérons que les contrôles qui déterminent ce choix sont différents : dans la première, « la figure image par une symétrie orthogonale est construite dans la direction horizontale (rappel horizontal) » et dans la deuxième, « l'image d'une figure par une symétrie orthogonale est construite dans la direction donnée par un segment de cette figure ». Ces contrôles renvoient à des conceptions différentes. Nous faisons l'hypothèse que les variables du problème peuvent amener l'élève à mobiliser une conception ou une autre. De même, le jeu avec les valeurs de ces variables peut permettre l'élaboration d'une séquence d'enseignement pour faire évoluer la conception initiale vers *une conception cible*.

En effet, une conception particulière C, n'importe laquelle, est légitimée par une sphère de pratique. Cependant, il existe des problèmes qui peuvent révéler la fausseté ou les limites de C, des problèmes qui permettent mieux que d'autres de renforcer C ou au contraire, de la déstabiliser. Ainsi, nous supposons qu'entre la conception (Ci) (cf. Schéma 2) dont on fait l'hypothèse par le diagnostic et la conception cible (Cj), il peut y avoir plusieurs étapes constituant une trajectoire, et que ces étapes sont déterminées par des problèmes pouvant permettre l'évolution de Ci vers Cj.

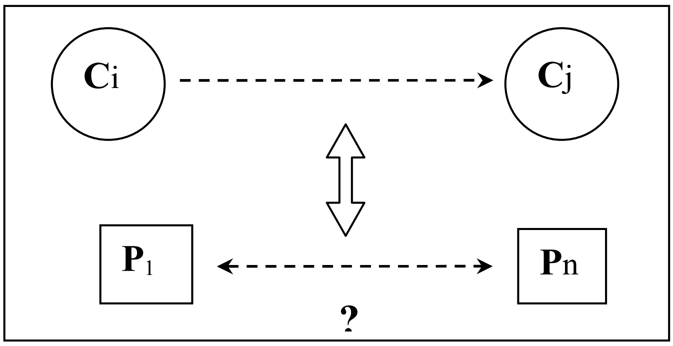


Schéma 2. L'apprentissage : le passage d'une conception à une autre

Ainsi, nous nous interrogeons à propos des problèmes qui constituent ce passage et nous formulons que de cette interrogation est issue la question suivante :

> Q3 : Quels sont les types de problèmes qui favorisent le passage d'une conception Ci à une conception Cj, et comment décrire ces problèmes en termes de variables didactiques ?

La réponse à cette question est fondamentale pour étudier la prise de décisions didactiques par les professeurs.

4.3. Prise de décisions didactiques par les professeurs

Comme nous l'avons mentionné, plusieurs éléments peuvent intervenir dans la décision d'un professeur lors de la construction d'une situation d'enseignement. Parmi ces éléments, citons ceux liés à l'institution (Programmes officiels, manuels scolaires, pratiques de l'établissement...), à la conception du professeur relative à l'apprentissage et de l'enseignement, à la représentation qu'il se fait de l'élève et de la classe, à son épistémologie concernant la notion étudiée. Ainsi, dans notre recherche nous nous intéressons aux éléments sur lesquels les professeurs fondent le choix des problèmes qu'ils proposent à leurs élèves.

Cette problématique soulève la question suivante :

> Q4 : Sur quels éléments se fondent les décisions didactiques prises par un professeur dont l'objectif est de faire évoluer les conceptions mobilisées par un élève ?

Pour répondre à cette question, nous nous appuierons sur le modèle des niveaux de l'activité du professeur (Margolinas, 2002).

Au chapitre 2 suivant, nous présenterons le cadre théorique ainsi que la méthodologie de notre recherche.

Chapitre 2 : CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Dans ce chapitre nous présentons d'abord, au sein de la théorie des situations didactiques, les outils théoriques que nous utilisons dans notre recherche. Ensuite, nous décrirons nos choix méthodologiques, et nous montrerons comment nous utilisons ces outils dans le cadre de notre recherche.

1. Introduction

Le but de notre travail est *la modélisation des décisions didactiques*. Nous appelons décisions didactiques, les décisions prises par les enseignants avec une intention d'apprentissage par l'élève de la connaissance visée. Pour réaliser cette étude, nous prenons appui sur la théorie des situations didactiques – TSD (Brousseau, 1998), qui nous permet d'analyser l'activité de l'enseignant et celle de l'élève. Pour répondre à nos questions de recherche, nous avons fait des choix méthodologiques au sein de ce cadre théorique.

Pour modéliser le processus d'enseignement, nous avons besoin d'une part de modéliser des connaissances d'élèves à propos de la notion mathématique visée. Pour ce faire, nous avons choisi comme outil méthodologique le modèle cK¢ développé par Balacheff (1995 ; 2002, 2005). D'autre part, pour analyser l'activité de l'enseignant, nous avons choisi « le modèle des niveaux d'activité du professeur » développé par Margolinas (1997, 2002, 2005).

Dans ce qui suit, nous présentons les formalisations proposées par ces deux modèles.

2. Cadre théorique

2.1. Le Modèle cK¢

<u>Notion de conception</u>

Avant de présenter ce modèle, nous effectuons un survol de la notion de « conception » telle qu'elle est souvent utilisée dans les recherches en sciences cognitives, en didactique, et en particulier en didactique des mathématiques.

Dans le sens commun du mot, une conception peut être comprise comme une idée, une représentation ou une croyance qu'a un sujet à l'égard de quelque chose. Dans une approche constructiviste, une conception peut être définie comme un type particulier de connaissance individuelle construite dans l'interaction du sujet avec un milieu (un environnement). Elle dépend alors à la fois du milieu dans lequel le sujet se trouve et du sujet lui-même (son histoire, ses intentions…) (Charlier, 1998).

Les recherches en didactique et en particulier en didactique des mathématiques, ont développé un grand nombre de réflexions autour de cette question.

Tiberghien (2005)[13], chercheur en didactique des sciences physiques, signale que dans les années 80-90, une pluralité de termes ayant tous la même signification a été utilisée dans les

[13] http://pistes.org/docrec/conceptions/index2.html. (Lu en octobre 2005).

recherches. Parmi ces termes, elle cite : *représentations, conceptions, misconceptions, alternative framework, raisonnement spontané, modèle spontané*. L'hypothèse sous-jacente à ces recherches est que le sujet est le constructeur de ses nouvelles connaissances, à partir de ses connaissances et de ses expériences antérieures. Les questions qui sont généralement à l'origine de ces travaux concernent l'identification des connaissances et des procédures utilisées par les élèves quand ils résolvent un problème, ainsi que leur évolution dans le temps. D'après l'auteur, la variété de termes utilisés dans les recherches témoigne qu'il n'y avait pas une *approche théorique* unique, adoptée par les différents courants.

Ce problème de vocabulaire est d'ailleurs constaté également par les chercheurs en didactique des mathématiques. Margolinas (1993) met en évidence les termes utilisés dans les différentes théories françaises pour parler des connaissances des élèves :

> *Gérard Vergnaud a forgé le concept de théorème en acte qui « désigne les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de solution de problème » [...]. Guy Brousseau utilise plutôt le mot de « modèle implicite » [...]. Yves Chevallard [...] a introduit le terme de « rapport au savoir ». [...].*
>
> Margolinas (1993, p. 100)

Cependant, le terme *conception* a été le plus souvent utilisé pour faire référence aux connaissances des élèves :

> *Le mot le plus répandu dans la littérature didactique, toutes « écoles » confondues, est celui de* ***conception****, et il intervient dès que le discours se situe au niveau des opérations de pensée de l'apprenant, et plus généralement, de l'apprentissage.*
>
> (Ibid. p. 101)

Artigue (1989) met en évidence deux nécessités auxquelles répond la notion de conception, ce qui permet d'expliquer pourquoi la notion de conception est très répandue en didactique des mathématiques :

> *- mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes,*
>
> *- aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève.*
>
> Artigue (1989, p. 14)

En se fondant sur les recherches développées au sein de cette problématique, l'auteur constate que la notion de conception est utilisée dans ces recherches comme un outil pour la modélisation de l'élève, sans cependant avoir explicitement une définition didactique de cet outil. Ainsi, à partir de ces recherches, elle envisage une définition du terme conception qui est la suivante :

> *La conception est un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient ; elle va constituer un outil, aussi bien pour l'analyse de ce savoir et l'élaboration de situations didactiques que pour l'analyse stricte du comportement de l'élève.*
>
> (Ibid. p. 17)

Auparavant, placé dans une problématique psychologique, Vergnaud (1982) propose d'utiliser le terme « conception » pour désigner le sujet analogue du concept, à un moment donné. Rappelons que dans sa Théorie des Champs Conceptuels, un concept est défini par le triplet constitué des ensembles :

- S : situations qui donnent du sens au concept ;
- I : invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;
- s : formes langagière et non langagière qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

En se référant à cette définition, Artigue (ibid.) signale qu'une conception ainsi définie apparaît de façon plus pertinente comme « un objet lié au sujet » et « perd son caractère local ». Artigue montre toutefois les limites de cette approche pour une utilisation en didactique des mathématiques, vis-à-vis de l'intérêt de modéliser les relations du sujet en interaction avec le milieu (le système [sujet<>milieu]). Ceci fait ressortir l'importance du caractère local dans la caractérisation des conceptions pour les recherches dans ce domaine. A ce propos, Artigue (ibid.) avance :

> *En effet, ce qui intéresse le didacticien, ce n'est pas au fond la compréhension de cette structure globale hypothétique, mais l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse des conditions de passage de telle conception locale à telle autre, qu'il s'agisse de rejeter une conception erronée, de mettre en place une conception permettant d'améliorer l'efficacité dans la résolution de telle ou de telle classe de problèmes ou de favoriser la mobilité entre des conceptions déjà disponibles »*
>
> Artigue (1989, p. 18).

Les deux nécessités citées plus haut représentent un ancrage du modèle cK¢. A ce propos Balacheff et Margolinas déclarent :

> *On peut donc résumer en proposant qu'une conception est une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, mais dont la portée est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire).*

Balacheff & Margolinas (2005, p. 79)

Par ailleurs, le modèle cK¢ est ancré dans la théorie des situations didactiques (TSD) par la prise en compte de l'interaction entre le sujet et le milieu, ce dernier étant le « système antagoniste du système sujet ». La prise en compte de cette interaction définit une conception dans le cadre de ce modèle. Nous présentons ci-après la formalisation d'une conception proposée par cK¢.

La formalisation de conception dans le modèle cK¢

Une conception est définie dans ce modèle comme ci-après :

> *La conception est l'état d'équilibre d'un système, et plus précisément d'une boucle action/rétroaction du système [sujet<>milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité.*

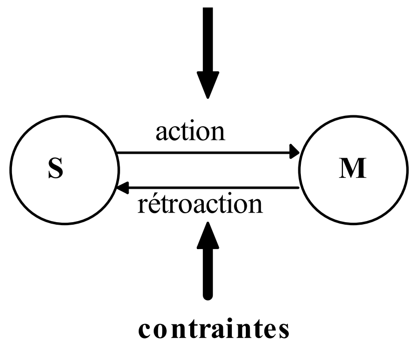


Schéma 3. Boucle de rétroaction du système [sujet<>milieu] (Balacheff & Margolinas 2005, p. 80)

Dans ce modèle, une conception C est décrite par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes ;
- R est un ensemble d'opérateurs ;
- L est un système de représentation ;
- Σ est une structure de contrôle.

L'ensemble des problèmes (P)

Un problème est le résultat d'une perturbation de l'équilibre du système [sujet<>milieu] (Balacheff, 1995, p. 227). Dans ce modèle, l'ensemble P d'une conception C est l'ensemble de problèmes pour lesquels la conception C participe à leur résolution. Nous parlerons ainsi de sphère de pratique ou de domaine de validité de la conception C. La sphère de pratique d'une conception est liée à la connaissance du sujet qui la mobilise, et non au savoir de référence. Gaudin affirme que « les sphères de pratiques attestent que la connaissance possède un domaine de validité sur lequel elle est reconnue comme un outil » (2005, p. 33).

La question qui se pose est : comment caractériser la sphère de pratique (l'ensemble P) d'une conception C. La difficulté de cette caractérisation est soulignée par Gaudin (2005) :

> *La notion de situation fondamentale (Brousseau, 1998), sur laquelle ont porté de nombreux travaux de didactique, illustre la difficulté posée par la caractérisation des problèmes [...]. Cette représentation des problèmes est un outil théorique puissant qui a été utilisé pour l'étude des situations d'apprentissage de concepts mathématiques (voir par exemple Ratsimba-Rajohn (1982) pour l'étude des rationnels). Elle n'est cependant pas opératoire pour l'étude des conceptions, pour lesquelles la question de l'existence et de l'identification d'un (ou plusieurs) représentant(s) de l'ensemble des problèmes de la conception reste ouverte.*
>
> Gaudin (2005, p. 37)

L'ensemble d'opérateurs (R)

Les opérateurs permettent de transformer un problème initial P1 en un autre problème P2. Ils sont attestés dans l'action à partir des comportements de l'élève, sous la contrainte d'un système de représentation (L). Reprenons ici la définition donnée par Gaudin :

> *Les opérateurs sont les outils pour l'action. Ils peuvent être des actions concrètes sur un milieu matériel, ou des actions plus abstraites comme les transformations de représentations langagières, symboliques, graphiques, ou encore être une prise d'information [...].)*
>
> Gaudin (2005, p. 38)

La structure de contrôle (Σ)

La structure de contrôles d'une conception assure sa non-contradiction. Elle permet d'attester la légitimité, la validité d'une action du sujet :

> *Les contrôles rassemblent :*
>
> *- des jugements, des décisions et plus généralement les moyens du choix ;*
>
> *- des méthodes, structures et organisations des opérateurs [...].*
>
> Balacheff & Margolinas (2005, p. 84)

Gaudin avance que :

> *Les contrôles rendent compte des critères qui renvoient (pour le sujet) au choix, à la décision, à l'adéquation, à la validité d'une action, à la décision « résolu » pour un problème.*
>
> Gaudin (2002, p. 37)

De cette définition nous retenons que les contrôles sont mobilisés par un sujet tout au long du processus de résolution d'un problème. Ils ne sont pas nécessairement les mêmes tout au long du processus, certains pouvant apparaître au début et d'autres à la fin de celui-ci.

Plusieurs travaux portent sur le moment où le sujet qui résout un problème exerce des contrôles : Hoc (1987), Schoenfeld (1985), Richard (1990), Coppé (1993) et Margolinas (1993). En s'appuyant sur ces différents travaux, Rolet (1996, p. 71) a étudié les différents types de contrôles exercés par les étudiants dans des tâches de lecture de dessin et de construction géométrique. Elle reprend notamment la distinction de trois moments où le sujet peut exercer des contrôles au cours des situations étudiées :

- lors de la planification de la tâche ;
- lors de l'exécution de la tâche ;
- lors de la vérification de la solution finale.

En résolvant un problème, le sujet se fait tout d'abord une représentation de la solution et à partir de celle-ci, il établit les buts et les sous-buts en termes d'actions à effectuer pour résoudre le problème. Il s'agit de la phase de planification. Les contrôles mobilisés dans cette phase sont relatifs aux choix et aux prises de décisions et permettent d'orienter la production du sujet. Cependant, cette planification peut être remise en cause pendant la phase suivante (ibid.).

Ensuite, le sujet passe à la phase d'exécution de l'activité. C'est ici que l'action concrète de résolution du problème (tracer, construire...) est réalisée. Au fur et à mesure que le problème est résolu, le sujet cherche à valider chaque étape de son action en vérifiant la cohérence avec ce qu'il a planifié. Les contrôles mobilisés dans cette phase sont relatifs au jugement de l'adéquation et à la validité de l'action.

Enfin, à un moment donné le sujet doit décider si le problème est déjà résolu, ou non. C'est la phase de vérification. Il cherche alors à valider sa production finale. Les contrôles mobilisés à ce moment relèvent de la validité de la production ou de la réponse de l'élève.

Par ailleurs, Rolet (1996) distingue les contrôles perceptifs et théoriques.

> *Un contrôle perceptif est celui qui s'exerce sur des dessins et utilise comme instrument la vue. Il est lié à une validation pragmatique.*
>
> Rolet (1996, p. 72)

Ces contrôles perceptifs peuvent être de deux types : simple et instrumenté.

> ***Le contrôle perceptif simple*** *est celui qui n'utilise aucun instrument autre que la vue (et accessoirement une règle) pour lire des propriétés, les prendre en compte dans une reproduction ou construction, tant dans l'exécution de la tâche que dans la validation du résultat. […].*
>
> *Par rapport au contrôle perceptif simple, le* ***contrôle perceptif instrumenté*** *utilise, dans les problèmes de lecture, de reproduction ou de construction, des instruments tels que calque, gabarit, papiers quadrillés ou règle, équerre, compas. Ces instruments peuvent permettre de lire, reproduire ou de construire des propriétés spatiales et/ou propriétés géométriques. [...] le*

sujet, en utilisant des instruments, « cherche à voir » et à introduire les propriétés qu'il a vues.

(Ibid. p. 72 et 74)

En se référant à Balacheff (1987), Rolet définit un contrôle théorique comme :

Celui de « l'élève-théoricien dont la justification de l'activité est celle de connaître ». Il utilisera des connaissances mathématiques pour prendre une décision, pour valider ses actions et son résultat.

(Ibid. p. 76)

Cette typologie a son origine dans la caractérisation des problématiques dans lesquelles le sujet se place, pratique ou théorique. D'après Berthelot & Salin (1992), une problématique pratique a comme référence :

La pratique de la vie courante, des problèmes spatiaux « ordinaires » de la vie de monsieur « tout le monde », ou encore du sens pratique [...]. Se placer dans une problématique pratique, c'est donc essentiellement contrôler ses rapports de manière empirique et contingente.

Berthelot & Salin (1992, p. 69)

Dans une problématique géométrique :

La pratique de référence est celle de la géométrie des mathématiciens [...]. Se placer dans une problématique géométrique, c'est donc entrer dans un rapport entre mathématiciens établi sur la base de déclarations concernant un espace conceptualisé et contrôlées par la consistance (au sens de non-contradiction) de l'ensemble de ce qui est déclaré sur lui.

(Ibid. p. 68-69)

Le système de représentation (L)

Le système de représentation permet l'expression des problèmes (P), des opérateurs (R), ainsi que des contrôles (Σ). En effet, « il décrit les signifiants engagés dans les interactions du système [sujet<>milieu]. Ces signifiants supportent l'action, les opérations et les décisions » (Gaudin, 2005, p. 39). Cette représentation peut être langagière ou non langagière.

2.2. Le modèle des niveaux de l'activité du professeur

Les recherches en didactique des mathématiques développées en France avant les années 90 ont été consacrées dans leur majorité à la construction des ingénieries didactiques pour rendre compte de l'activité de l'élève. D'après Margolinas (1992), désormais les chercheurs dans ce domaine d'étude s'intéressent de plus en plus à l'étude de l'activité du professeur[14]. L'auteur signale que l'absence de recherches dans ce domaine, auparavant, était due en partie à l'absence d'une approche théorique qui puisse rendre compte de l'activité de l'enseignant, activité qui relève des contraintes différentes de celles de l'élève.

Brousseau (1986, 1990) propose le modèle de « structuration du milieu didactique » – *une structure emboîtée, en oignon* (ibid. 1990, p. 319). L'objectif de ce modèle est alors de rendre compte de la différence entre les activités de ces deux acteurs dans la relation didactique. Il s'agit, pour ce modèle :

> *- de combiner des systèmes interactifs pour faire apparaître deux rôles différenciés (celui de l'élève et celui du professeur) par leurs rapports réciproques et leur rapport au savoir.*
>
> *- et d'étudier la compatibilité de leurs caractères respectifs.*
>
> Brousseau (1990, p. 318)

Parmi les fonctionnalités du modèle montrées par Brousseau, nous retenons celle de permettre d'analyser les « situations non didactiques adaptées aux divers fonctionnements de la connaissance », et de « poser de façon claire la question de la spécificité de la relation didactique » (ibid. p. 319-320). Ce modèle, un outil de la Théorie des Situations, est alors le point de départ des études de Margolinas (1997, 2002, 2005) concernant l'activité du professeur.

Un des objectifs initiaux des études de Margolinas a été de clarifier et d'élargir le modèle de structuration du milieu, de Brousseau, en le systématisant. De plus, l'auteur s'est posé des questions concernant la « dissymétrie » entre les rôles du professeur et de l'élève mise en évidence dans ce modèle. A ce propos elle signale :

> *La place du professeur n'offre que deux positions (P0 et P1) alors que celle de l'élève en offre cinq (de E-3 à E1). S'agit-il d'une dissymétrie nécessaire ? […] On peut remarquer que le modèle de Brousseau est antérieur à un intérêt général porté au rôle du maître, mais qu'il synthétise en revanche les analyses a priori connues concernant le travail de l'élève en situation.*
>
> *J'ai donc pris le parti* ***méthodologique*** *de la symétrie de rôle entre professeur et élève.*
>
> Margolinas (1997, p. 42-43)

Ainsi, en s'appuyant sur la structuration du milieu, Margolinas propose un modèle qui, d'après elle, est plutôt une heuristique qu'un modèle[15], en faisant ressortir le rôle du

[14] Dans cette recherche, nous utilisons le terme « professeur » plutôt qu'« enseignant » parce que d'après Chevallard, c'est un terme plus général qui renvoie à plusieurs facettes de la fonction professorale et non pas seulement à celle d'« aide à l'étude » (Chevallard, 1997).

[15] Pour notre étude nous retenons le mot « modèle » pour nous référer à cette « heuristique ».

professeur dans la relation didactique. Elle introduit alors des positions « P3, P2 et P-1 » dans le modèle de structuration du milieu et propose la présentation en forme du tableau ci-après :

M3 : M-de construction		P3 : P- noosphérien	S3 : situation noosphérienne	Sur - didactique
M2 : M- de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	
M1 : M-didactique	E1 E-réflexif	P1 : P-projecteur	S1 : situation de projet	
M0 : M- d'apprentissage	**E0 : Élève**	**P0 : Professeur**	**S0 : situation didactique**	
M-1 M-de référence	E-1 : E-apprenant	P-1 P-observateur	S-1 : situation d'apprentissage	A - didactique
M-2 M-objectif	E-2 : E-agissant		S-2 : Situation de référence	
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : Situation objective	

Tableau 1. Modèle de structuration du milieu proposé par Margolinas[16] (1997, p. 43)

Les situations S1, S2 et S3 représentent les « situations sur-didactiques ». Ce sont les situations où le professeur n'est pas en interaction réelle avec l'élève. Les situations S-1, S-2 et S-3 représentent les « situations a-didactiques ». La situation S0, soulignée dans le tableau en gras pour l'acteur, comporte le milieu d'apprentissage. Il s'agit de la « situation didactique » au sens strict, la situation où le professeur est en interaction réelle avec l'élève. Elle se constitue dans la partie la « plus visible » de l'activité du professeur. Ainsi dans ce modèle, une analyse « ascendante » (partant du niveau -3) privilégie l'activité de l'élève, tandis qu'une analyse « descendante » (partant du niveau 3) privilégie celle du professeur.

Dans ses écrits, Margolinas fait souvent ressortir que le professeur en tant qu'acteur de la relation didactique est toujours en situation. Une des thèses de ces études est, plus précisément, que *le professeur « a » une situation*.

> *Nous disons que le professeur a une situation parce que, si le contexte est bien immuable, les ressources et les contraintes – le milieu – qui caractérisent la situation sont co-déterminées par le sujet et le contexte […]. Les connaissances du « sujet » sont en fait les connaissances du sujet qui a une situation, elles correspondent à l'équilibre [sujet<>milieu] en situation (Balacheff 1995, Balacheff & Margolinas 2005).*
>
> Margolinas & Rivière (2005, p. 32)

[16] M = milieu ; E = élève ; P = professeur ; S = situation.

Alors, en situation, le professeur interagit avec un milieu et il apprend à partir de cette interaction. Brousseau (1998) représente le milieu du professeur dans une situation didactique par le schéma suivant :

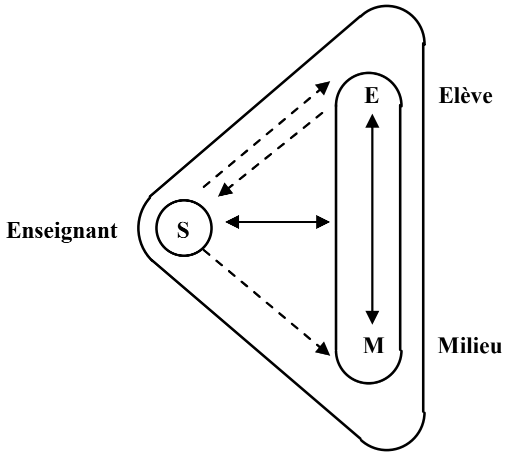


Schéma 4. Le milieu du professeur (Brousseau, 1998, p. 92)

Le milieu, système antagoniste du sujet (professeur), comprend l'élève et le milieu de l'élève. Le professeur en situation didactique agit sur ce milieu et en fonction des rétroactions qu'il reçoit, il peut le modifier parce qu'il le connaît : il l'a conçu dans un but d'enseignement. Étant donné ce caractère du milieu du professeur, Margolinas (1992, 2005) met en évidence que le professeur n'est jamais en situation a-didactique. D'après cet auteur, l'analogie des jeux qui caractérise une situation a-didactique n'est plus pertinente pour décrire l'activité du professeur : « l'analogie avec la théorie des jeux s'arrête là où le travail du maître commence » (ibid. 1992, p. 120).

Dans ses premières publications, Margolinas présentait ce modèle de structuration du milieu d'une façon qu'elle affirmait être « plus technique ». Cependant, au cours des années, le modèle a évolué et récemment il a été présenté sous la forme des « niveaux » (Margolinas, 2002 ; Margolinas et al. 2005, Margolinas 2005, Margolinas & Rivière 2005) comme ci-dessous :

- +3 Valeurs et conceptions sur l'enseignement/apprentissage
  projet éducatif: valeurs éducatives, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement
- +2 Construction du thème
  construction didactique globale dans lequel s'inscrit la leçon : notions à étudier et apprentissages à réaliser
- +1 Projet de leçon
  projet didactique spécifique pour la leçon observée: objectifs, planification du travail
- 0 Situation didactique
  réalisation de la leçon, interactions avec les élèves, prises de décision dans l'action
- -1 Observation de l'activité des élèves
  perception de l'activité des élèves, régulation du travail délégué aux élèves

Schéma 5. Niveaux de l'activité du professeur (Margolinas, 2005 p. 13)

Les niveaux de -1 à +3 dans cette nouvelle configuration du modèle, correspondent aux positions du professeur de P-1 à P3 respectivement dans le tableau précédent. Nous nous contenterons de décrire ces niveaux[17]. Pour cela, nous reprenons les descriptions données par Margolinas (2002. p. 142) :

- ***+3 (niveau noosphérien ou idéologique)***[18] *: caractérise l'activité du professeur qui réfléchit de façon très générale ou bien, toujours en général, à l'enseignement des mathématiques* ;
- ***+2 (niveau de construction)*** *: l'activité du professeur est de concevoir les grandes lignes de l'enseignement d'un thème. Du point de vue de l'ingénierie didactique, c'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale* ;
- ***+1 (niveau de projet)*** *: caractérise l'activité du professeur qui détermine le scénario d'une leçon*. Brousseau (1990) le décrit comme celui où le professeur *prépare son cours* ;
- ***0 (niveau didactique)*** *: caractérise l'action du professeur en classe. Il s'agit du « niveau de base » dans lequel les élèves et le professeur interagissent es-qualité* ;
- ***-1 (niveau d'observation)*** *: est caractéristique de la dévolution ou de l'observation de l'activité des élèves.*

L'auteur considère qu'à tous les niveaux caractéristiques de son activité le professeur a une situation différente puisqu'il interagit avec un milieu spécifique (comme le montre le Tableau 1, p. 37). Le professeur en situation apprend à partir de cette interaction, qui est à la fois *consommatrice et productrice de connaissances* car il *agit* avec des connaissances qui sont renforcées ou modifiées par les informations et rétroactions du milieu (Margolinas, 2005, p. 7).

Nous reprenons ici Comiti, Grenier et Margolinas (1995, p. 101-103) qui dans ce cadre, modélisent la nature de certaines connaissances qui peuvent être en jeu dans chacune de ces situations :

- Dans la **situation S3** (niveau noosphérien ou idéologique) : des connaissances sur la notion mathématique et sur l'apprentissage ;
- Dans la **situation S2** (niveau de construction) : des connaissances relatives à la situation d'enseignement/apprentissage ;

[17] Pour en savoir plus à propos des autres éléments du modèle concernant le milieu et les positions de l'élève, on se reportera à Brousseau (1990, p. 318-319), Margolinas (1997, p. 45-50) et Bloch (1999, p. 147-160).

[18] Pour une description plus détaillée de ce niveau, voir Coulange (1999).

- Dans la **situation S1** (niveau de projet) : des connaissances globales sur les connaissances et les difficultés habituelles des élèves à propos d'une notion mathématique en jeu ;
- Dans la **situation S0** (niveau didactique) : des connaissances qui sont des interprétations et/ou des représentations des élèves et de leurs causes, qui vont lui servir dans l'action pour ses prises de décisions immédiates ;
- Dans la **situation S-1** (niveau d'observation) : des connaissances qui permettent au professeur de distinguer, dans le travail de l'élève, les erreurs ou les difficultés qui relèvent du savoir à enseigner.

Cependant, Margolinas signale à plusieurs reprises (ibid. 2002, 2005) que cette présentation linéaire du modèle peut laisser penser qu'il s'agit d'un « modèle temporel ». Elle assure que ceci n'est pas le cas, qu'il s'agit effectivement d'un « modèle structurel » qui préconise que le professeur occupe l'ensemble de ces niveaux tout au long de son activité, y compris au sein de la classe.

> *Le professeur, même dans son activité en classe (niveau 0), peut être pris entre son projet passé qui lui sert de guide, mais aussi de cadre contraignant (niveau +1) […]. De même, dans son activité hors classe, par exemple quand il prépare une leçon à réaliser (niveau +1), il est influencé par la construction passée qu'il a faite du thème mathématique (niveau +2) qu'il envisage d'enseigner, mais cette activité de préparation peut l'amener à modifier cette construction et à en envisager une nouvelle construction future (niveau +2).*
>
> Margolinas (2002, p. 143)

Ceci montre la complexité de l'analyse de l'activité du professeur. Les différents niveaux interagissent les uns avec les autres, de façon non linéaire.

Par ailleurs, nous retenons également de ce modèle le vocabulaire utilisé pour décrire l'analyse des décisions du professeur au sein de ces situations : *micro-décisions* et *macro-décisions*. Les *micro-décisions* sont les *décisions immédiates* prises par le professeur en salle de classe. (Comiti, Grenier, Margolinas, 1995, p. 103) tandis que les *macro-décisions* sont les décisions prises par le professeur en situation de projet (niveau +1) (ibid. p. 94).

Dans ce qui suit, nous présenterons notre méthodologie de recherche et la façon dont nous allons nous servir de la formalisation fournie par les deux modèles que nous venons de présenter, pour la modélisation de connaissances.

3. Méthodologie de recherche

3.1. Utilisation du modèle cK¢

Comme nous l'avons annoncé, l'objectif principal de notre recherche est la modélisation de la prise de décisions didactiques par le professeur dans la construction d'un processus d'enseignement. Nous empruntons au modèle cK¢ l'hypothèse que l'apprentissage est le passage d'une conception à une autre. Pour satisfaire à cette hypothèse, nous supposons connaître une conception initiale. Ainsi, tout d'abord, nous nous posons des questions concernant la caractérisation et l'évolution de conceptions d'élèves à propos de l'objet mathématique en jeu.

Pour répondre à ces questions, nous sommes amenés à modéliser les connaissances d'un élève générique. Pour ce faire, nous cherchons à caractériser les ensembles des problèmes, des opérateurs, des contrôles et des systèmes de représentation des conceptions relatives à la symétrie orthogonale. Dans un premier temps, nous devrons délimiter le champ d'investigation sur certains types de problèmes. Dans un deuxième temps, en nous appuyant sur le modèle cK¢, nous chercherons à formaliser les éléments des conceptions qui peuvent être mobilisées dans la résolution de problèmes. Dans un troisième temps, nous réaliserons une expérimentation auprès des élèves, qui auront à résoudre un certain nombre de problèmes concernant la symétrie orthogonale.

Certes nous sommes conscients que dans la caractérisation de conceptions dans le modèle cK¢, les quatre éléments (P, R, L, Σ) sont interdépendants, et qu'aucun d'entre eux ne permet en soi de caractériser une conception. En effet, la structure de contrôle d'une conception C est liée aux opérateurs mobilisés dans l'action par le sujet et à un système de représentation. Un changement du système de représentation peut entraîner un changement de la structure de contrôle et, par conséquent, de la conception C. D'autre part, puisqu'une conception est définie comme un état d'équilibre du système [sujet<>milieu], la conception C dépend également du problème posé. Les contrôles sont, la plupart du temps, implicites dans l'action du sujet. Des résultats de travaux montrent que l'observation de l'action du sujet permet souvent l'accès aux opérateurs. Comme le dit Vergnaud (1981), un observateur du comportement d'un sujet peut se faire une image de ses connaissances à partir de l'observation des actions de ce sujet. Celle-ci est également une constatation des chercheurs en didactique des mathématiques qui ont étudié des conceptions d'élèves concernant divers objets mathématiques.

Cependant, dans le cadre de notre recherche nous avons fait le choix d'entrer par les structures de contrôles. D'une part, ces structures prennent une place importante dans l'étude a priori des comportements d'un sujet qui résout un problème, car ils rendent compte de son fonctionnement : ils guident l'action du sujet. D'autre part, la question du contrôle de l'action du sujet est étroitement liée à la problématique de la validation de cette action, par laquelle passe la légitimation de l'interaction didactique (production de l'élève/professeur). De plus, comme nous l'avons précisé dans le chapitre 1 (cf. p. 20), ce sont les structures de contrôle qui jouent un rôle important dans la distinction des conceptions.

En ce qui concerne le système de représentation, dans notre recherche nous nous sommes placés dans le cadre spécifique de la géométrie. Comme l'affirme Duval (1988, p. 58), le problème des figures géométriques est lié au décalage entre « l'appréhension perceptive » et une « interprétation commandée par des hypothèses ». Nous considérons que ces deux dimensions relèvent de la mise en œuvre par le sujet des propriétés spatio-graphiques et géométriques des figures respectivement, auxquelles sont étroitement liés les contrôles perceptifs et théoriques. Les systèmes de représentations peuvent ainsi être constitués de dessins géométriques, mais également de langage pour désigner l'action sur les dessins ou pour les décrire, ou encore de gestes liés à l'utilisation des instruments (règle, équerre, compas) et des techniques (pliage, calque). Dans nos analyses, nous tenterons d'identifier ces systèmes de représentation.

3.2. Utilisation du modèle des « niveaux de l'activité du professeur »

Notre objectif d'identifier des éléments pris en compte par les professeurs lors de la prise de décisions didactiques nous a conduits à choisir ce modèle. Nous l'utiliserons comme un outil méthodologique pour identifier et analyser les connaissances à l'œuvre dans les décisions didactiques des professeurs, lorsqu'ils construisent un processus d'enseignement.

Pour rendre possible la modélisation de décisions des professeurs, dans le cadre de notre recherche nous sommes amenés à nous placer dans un contexte où ces professeurs ne sont pas en situation d'interaction réelle avec les élèves. En effet, une situation de salle de classe ordinaire ne nous permettrait pas d'avoir accès aux décisions de professeurs différents concernant un même élève. Cette limitation nous a conduits à créer une situation « artificielle ». Ainsi, dans notre dispositif expérimental, nous avons fait le choix de fournir aux professeurs un nombre restreint de productions d'élèves concernant la symétrie orthogonale, afin d'accéder aux éléments sur lesquels les professeurs s'appuient lors de prises de décisions. En revanche, étant donné que nous ne sommes pas dans un cas de déroulement effectif d'une situation d'interaction [professeur<>élève], ce choix ne permettra pas de rendre compte de l'analyse du professeur en situation didactique (niveau 0) ou a-didactique (niveau -1).

Si nous reprenons dans ce scénario particulier, les niveaux de l'activité proposés dans ce modèle, la situation dans laquelle se trouve le professeur sujet de notre recherche est celle de niveau +1. Il élabore son projet didactique relatif à la séance observée. C'est la situation classique du professeur qui, ayant vécu une situation (l'année précédente, dans une autre classe...) se sert de son observation pour en préparer une nouvelle. C'est principalement à ce moment qu'il est amené à prendre des décisions didactiques. Ces décisions s'appuieront sur les productions des élèves que nous lui fournirons, et qui représentent des « observés » de la situation S-1.

Comme le précise Margolinas, ce modèle n'est pas nécessairement un modèle temporel, dans le sens où les niveaux ne se suivent pas dans l'ordre de la numérotation. Dans le cas de notre recherche, le temps est un élément à prendre en compte, car c'est à partir de ce que le professeur observera dans les copies des élèves qu'il devra préparer son projet didactique. Ainsi, par rapport à l'élément « temps », nous pouvons représenter la situation dans laquelle se trouve notre professeur par le schéma ci-dessous :

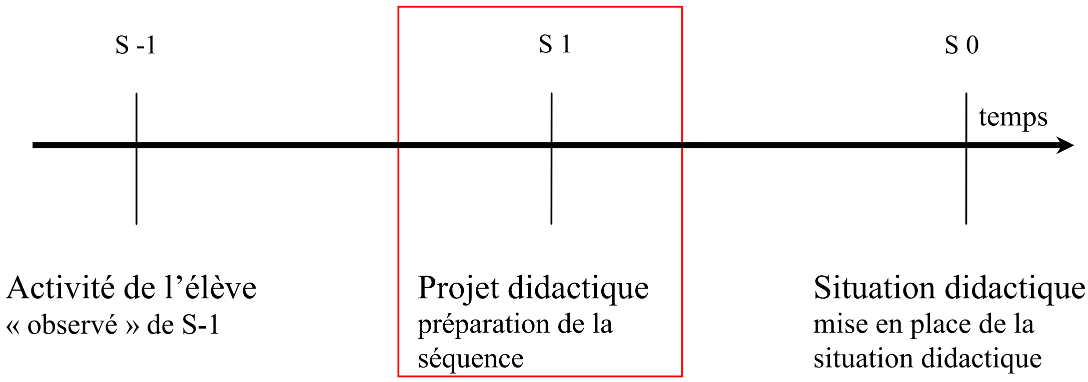


Schéma 6. La situation du professeur, sujet de la recherche en fonction du « temps »

Dans ce contexte, nous représentons la situation S1 du professeur par le schéma suivant :

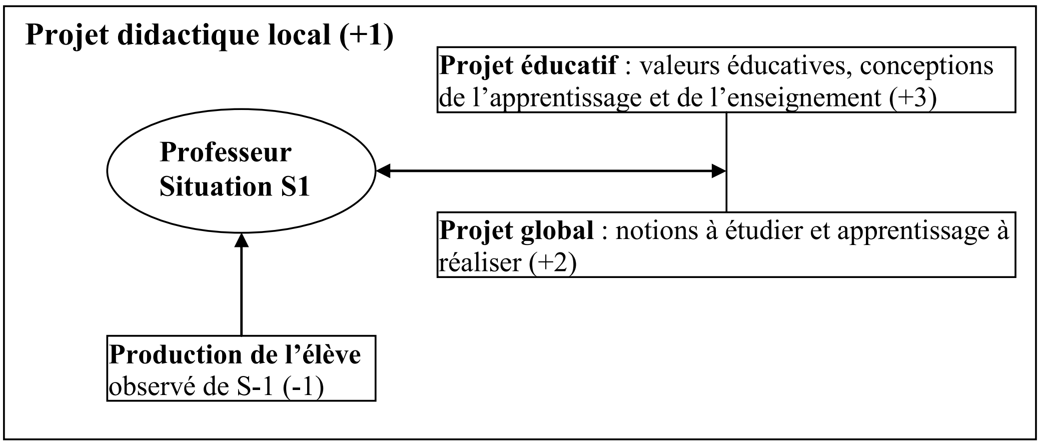


Schéma 7. Situation S1 du professeur sujet de la recherche

Dans cette situation, le professeur prend des informations dans ce qu'il observe de l'activité de l'élève (l'observé de la situation S-1). Par ailleurs, il interagit à la fois avec son projet d'enseignement plus général dans lequel s'inscrit la séquence qu'il vise à construire (niveau +2) et aussi avec ses conceptions plus générales à propos de l'activité professorale (niveau

+3). Ces éléments font partie du *milieu du professeur* qui est, à ce moment de son activité, en situation S1.

Notre analyse de productions des professeurs sera effectuée en termes de macro-décisions, c'est-à-dire de décisions qui sont prises par le professeur dans l'élaboration de son projet didactique. Nous considérons que par le biais de l'analyse « descendante »[19], en référence au modèle, nous pourrons dégager des connaissances qui influencent les décisions du professeur. Nous chercherons à identifier dans ces productions d'une part, les éléments sur lesquels les professeurs s'appuient pour prendre des informations sur l'activité de l'élève (observé de S-1) et d'autre part, les connaissances liées à leurs projets didactiques globaux (niveau +2) et éducatifs (niveau +3).

[19] Bloch (2000) a utilisé le modèle des niveaux du professeur pour dégager les caractéristiques du milieu du professeur, par le biais d'une analyse ascendante.

Chapitre 3 : MODÉLISATION DE CONNAISSANCES
LA NOTION DE SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Tout d'abord, nous passerons en revue quelques travaux de référence sur cette notion mathématique. Nous procéderons ensuite à une étude de cette notion du point de vue mathématique, didactique et de l'enseignement. Enfin, nous présenterons la modélisation de contrôles et de procédures de construction de figures symétriques, qui sera construite à la lumière de ces études théoriques.

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à modéliser les connaissances d'élèves à propos de la symétrie orthogonale. L'objectif de cette modélisation est de trouver des éléments de réponse aux questions suivantes :

> Q1 : Comment caractériser l'ensemble des contrôles des conceptions susceptibles d'être mobilisés par l'élève dans la résolution de problèmes relatifs à la symétrie orthogonale ?
>
> Q2 : À partir de l'ensemble des contrôles, peut-on accéder aux autres éléments qui caractérisent une conception, notamment les opérateurs et les problèmes ? Si oui, comment ?

Ainsi, dans un premier temps, nous chercherons à cibler la nature des problèmes et les variables didactiques que nous prendrons en compte dans cette recherche. Dans un deuxième temps, nous chercherons à caractériser a priori les éléments des conceptions susceptibles d'être mobilisés par les élèves dans la résolution de ces problèmes.

Pour réaliser cette modélisation, nous procéderons tout d'abord à une étude de résultats des recherches menées dans ce domaine. Ensuite, nous examinerons les orientations des Programmes officiels en vigueur en France, et nous analyserons des manuels scolaires couramment utilisés au Collège. Enfin, nous étudierons la notion de symétrie orthogonale du point de vue mathématique et didactique. En nous appuyant sur les résultats de ces études préliminaires, nous utiliserons le modèle cK¢ pour procéder à la modélisation.

2. Résultats des travaux précédents

Parmi les diverses recherches réalisées sur les « conceptions » des élèves dans la symétrie orthogonale, nous présenterons tout d'abord des résultats de recherches menées par Grenier (1987, 1988), Grenier & Laborde (1988), et ensuite des résultats de la recherche de Tahri (1993).

Dans les travaux de Grenier & Laborde (ibid.) ont été étudiées les conceptions des élèves concernant la notion de symétrie orthogonale, ainsi que les conditions d'évolution de ces connaissances en salle de classe. Signalons que le terme « conception » est ici utilisé au sens donné par Vergnaud (1994) où une conception s'exprime, en particulier, sous la forme d'un ensemble des règles d'action mises en œuvre dans une classe de problèmes (Grenier, 1988. p. 2). En s'appuyant sur les résultats des recherches de Hart (1981), Gallou-Dumiel (1985) et Bautier (1988), Grenier et Laborde ont mis au jour des connaissances erronées des élèves relatives à la symétrie orthogonale.

Une première expérimentation a été menée par les auteurs auprès des élèves des classes de quatrième et troisième (13 - 14 ans). La tâche consistait à construire, à main levée, les images des figures composées de points ou de segments différemment orientés sur la feuille de papier, et différemment positionnés par rapport à l'axe de symétrie. Les variables didactiques prises en compte pour l'analyse de cette tâche sont la position des segments et des axes de symétrie sur la feuille de papier, ainsi que le type de papier (blanc ou quadrillé).

Les résultats montrent que la conservation de la nature de l'objet (l'image d'un point est un point et celle d'un segment est un segment) est une connaissance stable chez les élèves. Cependant, la conservation de la longueur s'est révélée comme une connaissance moins stable. D'après les auteurs, cette instabilité se justifie par le fait que le choix de conserver la longueur entre souvent en conflit avec d'autres choix de l'élève, par exemple celui de construire le segment symétrique parallèle à celui de départ quand l'orientation de l'axe de symétrie est oblique sur la feuille. Les résultats montrent également que l'axe de symétrie est vu par les élèves comme une droite matérialisant sur la feuille deux demi-plans et par conséquent, la symétrie orthogonale est perçue comme une transformation d'un demi-plan dans l'autre demi-plan. D'après les auteurs, l'origine de cette idée est liée à la notion culturelle de symétrie par pliage, ou par usage du miroir. Un autre constat est que les directions, verticale ou horizontale du segment ou de l'axe de symétrie sur la feuille, jouent un rôle important dans la résolution du problème par l'élève. Par ailleurs, il est avéré que la propriété d'isométrie de la transformation fait partie des connaissances des élèves. Les auteurs ont alors caractérisé la conception sous-jacente aux réponses des élèves, comme suit :

> *La figure symétrique est une figure de même forme et de même dimension située de l'autre côté et à même « distance » de l'axe de symétrie. Cette « distance » est perçue globalement, comme une position d'équilibre (elle n'est pas forcément orthogonale à l'axe), les figures pouvant être translatées l'une de l'autre le long d'une direction horizontale.*
>
> (Grenier, 1988. p. 21)

Une procédure de résolution fréquemment utilisée par les élèves dans la construction de l'image d'un segment par rapport à une droite, consistait à construire l'image d'une des extrémités du segment et à partir de ce point, à construire le segment dans une direction donnée. D'après Grenier, cette procédure « semi ponctuelle » mettait en jeu une analyse non classique dans l'enseignement. Cette constatation a conduit les auteurs à s'interroger sur le fait de savoir si l'élève réinvestissait ses connaissances quant à la construction du symétrique d'un point, pour construire le symétrique d'une figure quelconque.

Pour répondre à cette question, une deuxième expérimentation a été mise en place auprès des élèves des classes allant de la sixième à la quatrième de collège. La tâche proposée consistait à tracer, à main levée, les symétriques de deux ensembles de figures. Le premier ensemble contenait des figures composées d'un ou deux segments adjacents dans différentes positions par rapport à l'axe de symétrie, et le deuxième ensemble contenait des figures similaires à celles du premier ensemble, mais réduites à leurs sommets (un, deux ou trois points) de part et d'autre de l'axe de symétrie. Dans l'analyse de cette tâche, les variables didactiques considérées sont les directions des segments et de l'axe de symétrie (verticale, horizontale et oblique) sur la feuille, ainsi que l'intersection de la figure avec l'axe (l'axe ne coupe pas la figure, l'axe touche la figure ou la coupe).

Les résultats de cette expérimentation montrent que les élèves ont tracé correctement le symétrique des figures composées de points isolés, mais qu'ils n'ont pas réinvesti leurs connaissances pour tracer les symétriques des figures composées de segments. Certaines combinaisons de valeurs des variables didactiques ont conduit l'élève à utiliser des procédures erronées. L'hypothèse de l'auteur est que certains élèves mettent en œuvre un contrôle perceptif global de la figure pour réaliser la construction, en opposition à l'outil *transformation ponctuelle* appris dans l'enseignement scolaire.

2.1. Typologie des procédures de résolution

En se basant sur les résultats de ces expérimentations, une typologie de procédures susceptibles d'apparaître chez les élèves dans la résolution de problèmes de construction de l'image d'une figure par une symétrie orthogonale, a été proposée :

> - *Rappel orthogonal : la détermination d'un point de la figure image se fait le long d'une direction orthogonale à l'axe de symétrie ;*
>
> - *Rappel par prolongement : ce procédé donne pour image d'un point, un point situé dans le prolongement d'une direction matérialisée par la figure objet ;*
>
> - *« Rappel horizontal » ou « rappel vertical » : qui donnent pour point-image un point situé sur une même droite horizontale ou une même droite verticale que le point objet.*
>
> Grenier & Laborde (1987, p. 71-72)

Cette typologie de procédures n'est basée que sur la prise en compte de la direction de la droite support de la construction du point symétrique. La distance à l'axe est traitée comme implicite dans les procédures de construction. D'après les auteurs, l'ensemble des résultats de cette recherche montre que la distance est toujours considérée par les élèves sous la forme de « distance » le long des directions privilégiées, même quand cette distance est perçue globalement comme une position d'équilibre entre les deux figures et l'axe de symétrie.

Après l'établissement de cette typologie de procédures, une troisième expérimentation a été mise en place, dans le but de repérer l'influence de quelques variables didactiques sur les procédures des élèves. La tâche proposée consistait uniquement à construire le symétrique d'un segment. Les figures ont été placées sur la feuille de papier de façon à induire l'utilisation de toutes les procédures de résolution déjà repérées. Ainsi, les variables didactiques prises en compte dans l'analyse sont : la position du segment par rapport aux demi-plans déterminés par l'axe de symétrie ; l'orientation de l'axe sur la feuille ; la valeur de l'angle formé entre le segment et l'axe, et finalement le type de papier utilisé (blanc ou quadrillé).

Des résultats des analyses, nous retenons quelques théorèmes en acte repérés dans les productions des élèves :

> - *L'image d'un point est un point, l'image d'un segment est un segment de même longueur ;*
> - *Un segment horizontal ne peut se transformer en un segment vertical ;*
> - *La symétrie matérialise sur la feuille deux demi-plans ;*
> - *La symétrie est une transformation d'un demi plan dans l'autre demi-plan.*
>
> (Ibid. p. 73-74)

2.2. Une typologie de conceptions

La recherche de Tahri (1993) comporte d'une part, l'élaboration d'un modèle théorique de conceptions des élèves sur la symétrie orthogonale et d'autre part, la mise en place d'un dispositif expérimental pour modéliser les décisions didactiques prises par des professeurs dans un contexte d'apprentissage dans un environnement informatique. Dans cette section, nous nous intéressons seulement aux aspects relatifs au modèle théorique de conceptions des élèves. La partie concernant la modélisation de la prise de décisions sera présentée plus loin (cf. chapitre 4).

Pour construire son modèle théorique de conceptions ainsi que le dispositif expérimental de sa recherche, Tahri (ibid.) s'appuie fortement sur les résultats des recherches de Grenier & Laborde (ibid.). La tâche proposée aux élèves d'une classe de cinquième au collège consiste à construire l'image d'un segment par une symétrie orthogonale. D'après l'auteur, la construction de cette image pourrait se ramener à l'un des trois types de procédures de construction suivantes :

> - *Procédures globales : on dit que la procédure de construction de l'image du segment est globale si cette image ne fait pas intervenir d'autres objets que le segment produit ;*
> - *Procédures semi analytiques : on dit que la procédure de construction de l'image du segment est semi analytique ou semi globale, si une seule extrémité image est construite. Le segment ensuite est construit "au jugé" en s'appuyant sur cette extrémité ;*
> - *Procédures analytiques : on dit que la procédure de construction de l'image du segment est analytique si cette image est obtenue après construction des deux extrémités. L'élève construit l'image de la première*

extrémité, puis celle de la deuxième et ensuite définit le segment image en joignant ces deux extrémités.

Tahri (1993, p. 49-50)

En fonction des procédures de résolution qui peuvent être éventuellement utilisées par les élèves dans la résolution de problèmes, Tahri (ibid.) présente un classement de conceptions de la symétrie orthogonale qui a comme support théorique la proposition de Vergnaud (1984). Les conceptions sont classées comme suit :

- La conception parallélisme (PA) : le segment objet et son image sont parallèles et de même longueur (fig. 2a) ;

- La conception symétrie oblique (SOb) : l'image du segment est obtenue par symétrie oblique. Les distances à l'axe du point et son symétrique sont conservées, ainsi que les directions des supports des points et de leurs images (Fig. 2b) ;

- La conception symétrie centrale (SC) : le segment image est obtenu par symétrie centrale. Il est soit dans le prolongement du segment objet (Fig. 2c), soit parallèle et de sens inverse ;

- La conception symétrie orthogonale (SO) : le segment image est obtenu par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Fig. 2d).

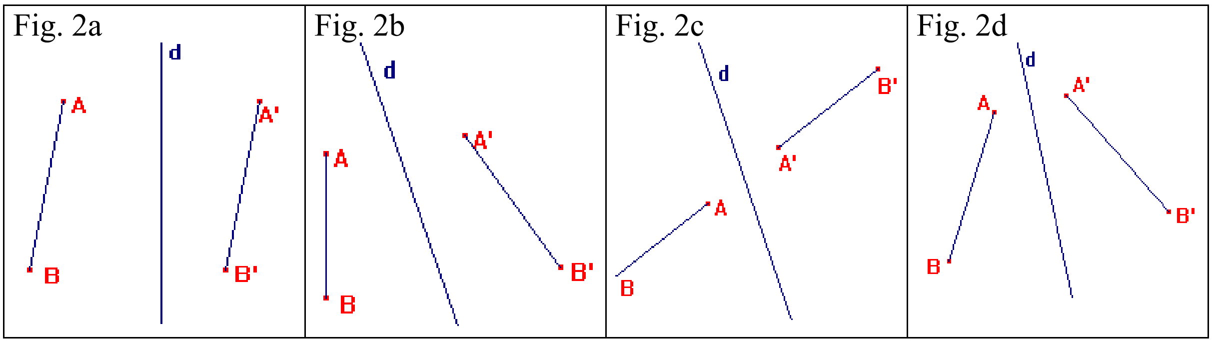


Figure 2. Exemples de construction de symétrique d'un segment par la symétrie orthogonale selon la classification de conceptions proposée par Tahri (1993)

Les résultats des recherches décrits dans ce paragraphe constitueront un des fondements de notre étude théorique. Ils nous serviront de point de départ, parmi d'autres, pour la réalisation de la caractérisation a priori de contrôles susceptibles d'être mobilisés par des élèves dans la résolution de problèmes sur cette notion mathématique.

3. Étude de la notion de symétrie orthogonale

3.1. Du point de vue de l'enseignement

Plusieurs recherches constatent que lors de la préparation de son cours, l'enseignant s'appuie fortement sur les recommandations des Programmes officiels, ainsi que sur les propositions des manuels scolaires, ce qui n'est pas sans conséquence sur ses connaissances à propos de la notion étudiée et, par la suite, sur l'apprentissage de l'élève. Aussi allons-nous nous intéresser, en ce qui concerne la symétrie orthogonale, aux orientations des programmes scolaires en vigueur en France, ainsi qu'aux manuels scolaires. Nous n'allons pas procéder à une analyse détaillée, ni discuter les choix adoptés dans ces ouvrages à propos de cet objet mathématique[20]. Notre but est de réaliser un état des lieux de l'enseignement actuel de cette notion. Cette étude nous permettra d'une part, de construire un outil d'analyse de productions des élèves et d'autre part, de repérer des éléments qui peuvent guider les choix des professeurs. Elle nous permettra également d'effectuer des choix méthodologiques sur lesquels nous bâtirons notre dispositif expérimental.

3.1.1. Les orientations des programmes scolaires

D'après les instructions des programmes scolaires en vigueur en France au début de notre étude (Programmes Scolaires, 1996), la symétrie orthogonale est la première transformation géométrique qui doive être introduite dans l'enseignement. Cette introduction se fera de façon pragmatique, en privilégiant une approche expérimentale. La symétrie orthogonale est introduite par la superposition des figures par pliage, l'aspect perceptif est le seul à être exploité pour l'introduire. A partir du cycle 2 de l'école primaire (cycle des apprentissages fondamentaux)[21], les élèves doivent connaître les propriétés et les relations de l'alignement des points, de l'égalité de longueurs, ainsi que la notion de l'axe de symétrie. Cependant, à ce niveau scolaire, ces propriétés doivent être reconnues par les élèves de façon perceptive à partir de la reconnaissance par la vue, par l'utilisation de techniques comme pliage, calque et miroir en relation avec la symétrie. Le passage des connaissances perceptives aux connaissances géométriques commence à se faire progressivement en cycle 3 (cycle des approfondissements)[22], avec le recours aux instruments de dessin et la connaissance de certaines propriétés de la symétrie axiale. Selon les programmes, à ce niveau scolaire, le but de l'étude de cette notion mathématique est de « fournir l'occasion aux élèves d'étendre leur champ d'expériences sur cette transformation (géométrique) et de mettre en œuvre quelques-unes de ses propriétés » (Extrait du programme, 3e Cycle, 2001). Les instruments de dessin comme l'équerre et le compas, sont introduits comme moyens de vérification par l'élève des réponses données. Les compétences relatives à la symétrie axiale à développer en cycle 3 sont les suivantes (Ibid. p. 233) :

---

[20] A propos de l'évolution des programmes scolaires concernant l'étude des transformations géométriques, on se reportera à la recherche de Jahn (1998). En ce qui concerne la symétrie orthogonale en particulier, on se reportera à Tavignot (1993).

[21] Le deuxième cycle (des apprentissages fondamentaux) comprend : la grande section maternelle, le cours préparatoire (CP) et la première classe du cours élémentaire (CE1).

[22] Le troisième cycle (des approfondissements) comprend : la deuxième classe du cours élémentaire (CE2) et les deux classes du cours moyen (CM1 et CM2).

- percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie, et le vérifier en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) ;
- compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir ;
- tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

La systématisation de l'étude de la symétrie orthogonale relève de la classe de sixième au collège (cycle d'adaptation). La symétrie orthogonale est l'unique transformation géométrique étudiée dans cette classe. La symétrie centrale, la translation et la rotation sont objets d'étude dans les classes suivantes : cinquième, quatrième et troisième.

En classe de sixième est introduit le terme « symétrie orthogonale » comme synonyme de symétrie axiale qui a été utilisé auparavant. Comme l'affirme Tavignot, (1993, p. 270), « le terme symétrie orthogonale met en évidence le rôle de l'orthogonalité par rapport à l'axe pour les constructions des symétriques. Alors que celui de symétrie axiale met en évidence le rôle joué par l'axe de symétrie, notamment pour les figures ayant un axe de symétrie ».

D'après les orientations des programmes, l'enseignement de la symétrie en classe de sixième doit enrichir le champ des figures étudiées, le vocabulaire doit être précisé et les connaissances apprises dans les cycles précédents doivent être réorganisées à l'aide de nouveaux outils. A la fin de ce cycle, l'élève doit « passer de l'identification perceptive (reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) » (Programmes de mathématiques en 6^{e}, 2002, p. 25). Pour cela, l'enseignement doit favoriser les situations qui permettront à l'élève de s'approprier la notion et d'en expliciter les propriétés. Ainsi, dans la continuité du travail réalisé dans les cycles précédents, l'étude de la symétrie doit s'appuyer encore sur une approche expérimentale avec le but de permettre à l'élève « d'obtenir un inventaire abondant de figures simples », à partir desquelles sont dégagées de façon progressive les propriétés de conservation de la symétrie orthogonale (longueurs, alignement, angles et aires).

En classe de 6^{e}, le programme accorde une place importante aux activités de manipulation et de construction de figures symétriques et d'axes de symétrie de figures. Le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est mis en évidence. L'élève doit être capable de construire le symétrique d'un point, d'un segment et d'un cercle, d'utiliser la symétrie axiale pour construire des figures géométriques usuelles telles que triangle isocèle, carré, en reliant les propriétés de conservation de la symétrie à celles des figures, comme le montre l'extrait suivant :

1.4. Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale).	
Construction d'images et mise en évidence de conservations.	Tracer le ou les axes de symétrie des figures suivantes : triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré. Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle, que l'axe de la symétrie coupe ou non la figure.
Construction de figures symétriques élémentaires et énoncé de leurs propriétés.	Utiliser la symétrie axiale pour construire un triangle isocèle, un losange, un rectangle et un carré. Construire, sans méthode imposée et sur papier blanc : la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle. Relier les propriétés de la symétrie axiale à celles des figures du programme.

Figure 3. Extrait du programme scolaire, classe de 6e (1996, p. 34)

Dans les commentaires des programmes relatifs à l'enseignement des transformations géométriques au collège, y compris la symétrie orthogonale en classe de sixième, les transformations géométriques doivent être abordées en tant que transformations de figures, comme une action sur la figure et non par son caractère fonctionnel, comme le précise l'extrait ci-dessous :

> *La symétrie axiale n'a ainsi, à aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Suivant le cas, on mettra en évidence : l'action d'une symétrie axiale donnée sur une figure, la présence d'un axe de symétrie dans une figure c'est-à-dire d'une symétrie axiale la conservant.*

(Programme scolaire, 6e, 2002, p. 34).

Le choix d'introduire la symétrie orthogonale en tant que transformation de figures, renvoie au premier niveau d'appréhension des transformations géométriques dans la classification proposée par Piaget et Garcia (1983), reprise par Grenier & Laborde (1987) et plus tard, par Jahn (1998). Au premier niveau de cette classification, ces transformations sont appréhendées comme une relation entre deux configurations géométriques, ou bien comme une relation entre deux parties d'une même configuration.

L'appréhension des transformations géométriques en tant qu'application du plan dans lui-même correspond au deuxième niveau dans cette classification. Ici, la symétrie orthogonale est introduite par son caractère involutif du plan dans le plan. Dans l'enseignement, l'étude des transformations à ce niveau d'appréhension est effectuée au lycée. Jahn (1998) fait une étude des programmes concernant la transition collège-lycée et met en évidence des difficultés d'apprentissage chez les élèves, qui sont liées au passage entre ces deux niveaux d'appréhension des transformations géométriques, et notamment à la conception du plan qui est différente à ces deux niveaux. D'après l'auteur :

> *Ce passage implique une première rupture car ces deux différents niveaux ne mettent pas en jeu la même conception du plan. En fait le niveau 2 exige une conception homogène du plan, qui est en quelque sorte absente au collège. De plus, la notion d'application ponctuelle prend pour hypothèse implicite qu'une figure est un ensemble de points et que par conséquent, son image est un ensemble de points images.*
>
> Jahn (1998, p. 68)

Bien que notre recherche se restreigne à l'étude de la symétrie orthogonale au collège, nous nous intéressons aux difficultés de l'apprentissage mises en évidence dans cette recherche. En effet, nous considérons que la prise en compte, ou non, par l'enseignant du caractère fonctionnel de la symétrie orthogonale, ou bien l'interprétation qu'il peut faire de « l'interdiction » à ce propos des Programmes officiels au Collège, peut avoir des répercussions sur ses décisions, comme le montrent les recherches de Margolinas (2002, 2005, 2005) concernant l'enseignement des translations, que nous présenterons dans le chapitre 4.

3.1.2. Les manuels scolaires

L'objectif de cette section est d'étudier comment la symétrie orthogonale est introduite en classe de sixième. Nous nous intéressons aux définitions et aux propriétés qui sont traitées dans l'enseignement. Notre intérêt porte aussi sur les méthodes de construction des figures symétriques enseignées, les types de problèmes proposés, ainsi que sur les variables didactiques présentes dans ces problèmes. Le choix d'étudier ces aspects s'impose par le fait qu'en général les enseignants s'appuient fortement sur les cours et les exercices proposés dans les manuels, ce qui peut influencer leurs choix lors de la construction du thème à enseigner (niveau +2 du modèle de l'activité du professeur) ainsi que la préparation de leurs cours[23] (projet de leçon, niveau +1).

En ce qui concerne les conceptions des élèves par rapport à la symétrie orthogonale, nous considérons que l'identification des savoirs abordés dans les manuels peut nous servir, pour la caractérisation des contrôles des conceptions susceptibles d'être mobilisées par les élèves dans la résolution de problèmes. Cette étude nous servira également pour délimiter les classes de problèmes, les variables didactiques et leurs valeurs, éléments sur lesquels nous allons nous appuyer pour construire le dispositif expérimental.

[23] Pour en savoir plus à ce propos, on se reportera à Mesa (2004).

Étant donné que l'enseignement de la symétrie orthogonale est systématisé en classe de 6e au collège, nous avons choisi de réaliser cette étude en nous appuyant sur des manuels scolaires concernant ce niveau scolaire. Pour cela, nous avons choisi six manuels scolaires : Bordas (2000), Cinq sur Cinq (2000), Magnard (2000), Nouveau Décimale (2000), Transmath (2000) et Triangle (2000). Ces ouvrages correspondent aux programmes scolaires de 1996, en vigueur lors de notre étude expérimentale, dont les principales orientations ont été présentées plus haut.

L'organisation des chapitres ne diffère pas de manière significative entre ces ouvrages. De façon générale, ces chapitres sont organisés de la manière suivante : une partie « activités préalables » qui relèvent d'une approche expérimentale sert d'entrée dans le thème ; suit une partie « cours » où l'on trouve les définitions, les propriétés ainsi que les méthodes de construction ; et enfin une partie « exercices d'application », de « réinvestissement », etc., où l'élève doit mettre en œuvre les connaissances supposées acquises, clôt le chapitre.

Définitions

En suivant l'esprit des programmes officiels, tous les manuels introduisent la symétrie orthogonale, à partir des activités préliminaires, en tant que transformation de figures, en privilégiant la caractérisation de cette notion par le pliage et la superposition des figures. Cependant, dans la partie « cours » de l'ensemble de ces manuels, nous trouvons deux définitions : celle de figures symétriques et celle de symétrique d'un point.

Figures symétriques

Les manuels Magnard et Triangle donnent uniquement cette définition :

> *Deux figures symétriques par rapport à une droite se superposent par pliage le long d'une droite.*
>
> Magnard, 6e (2000, p. 112)

Bordas, Cinq sur Cinq et Transmath proposent cette même caractérisation de figures symétriques, sans cependant lui donner un statut de définition. Cette description est présentée par une approche expérimentale ou à partir d'un exemple. Ensuite, les auteurs donnent la définition du symétrique d'un point.

Symétrique d'un point

On trouve une définition du symétrique d'un point dans les quatre manuels : Bordas, Cinq sur Cinq, Nouveau Décimale et Transmath.

> *Deux points distincts A et A' sont symétriques par rapport à une droite d lorsque la droite d coupe le segment [AA'] perpendiculairement en son milieu.*

> *On dit aussi que A' est le symétrique de A par rapport à d.*
>
> Nouveau Décimale, 6e (2000, p. 182)

Les propriétés de la symétrie orthogonale

Les propriétés caractéristiques de la symétrie orthogonale (orthogonalité et conservation de distances de points à l'axe) sont abordées dans la majorité de ces ouvrages de façon implicite, par le biais de la construction des points symétriques et de la médiatrice. En revanche, les propriétés de conservation de la symétrie orthogonale sont abordées explicitement dans tous les manuels. Ces propriétés sont celles de conservation de longueurs, d'angles, d'alignement des points, de dimensions, d'aires et de périmètres des figures.

> *Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, d'une droite est une droite et d'un cercle est un cercle. 2 triangles symétriques étant superposables, ils ont les mêmes dimensions, le même périmètre et les mêmes angles.*
>
> Cinq sur Cinq (2000, p. 214)

L'invariance des points de l'axe par la symétrie est également abordée dans ces manuels : « un point situé sur l'axe de symétrie est son propre symétrique » (Bordas, 2000, p ; 214) ; « un point qui appartient à la droite (d) a pour symétrique lui-même » (Transmath, 2000, p. 196).

La propriété de changement de l'orientation des angles par la symétrie orthogonale n'est pas traitée explicitement dans la majorité des manuels. Toutefois, après avoir présenté la méthode de construction du symétrique d'un triangle ABC par rapport à une droite, le manuel Cinq sur Cinq (p. 214) fait l'observation suivante : « attention ! L'orientation de la figure est inversée ».

Méthodes de construction

Indépendamment de la définition de symétrie orthogonale (figures symétriques ou symétrique d'un point) donnée par ces manuels, la première méthode de construction proposée dans tous les manuels est celle du symétrique d'un point. Puis sont données les méthodes de construction de figures symétriques (un segment, une droite, un cercle...), d'axes de symétrie, de la médiatrice d'un segment et de la bissectrice d'un angle, avec l'utilisation des instruments de dessin (règle graduée, équerre et compas).

Méthodes de construction du symétrique d'un point

Les méthodes de construction du symétrique d'un point proposées dans ces manuels sont les méthodes classiques, avec l'équerre et la règle graduée ou le compas, et avec le compas uniquement. Dans le premier cas, la procédure de construction consiste à tracer la droite perpendiculaire à l'axe à l'aide de l'équerre et à reporter la distance du point à l'axe de l'autre côté de celui-ci, à l'aide de la règle graduée ou du compas (cf. Figure 4). Les propriétés sous-jacentes à cette procédure sont celles de l'orthogonalité et de l'égalité des distances à l'axe.

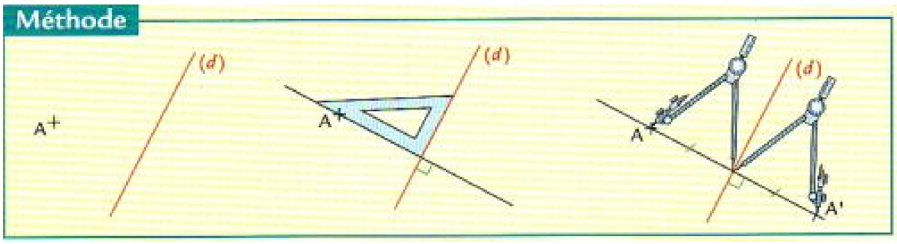


Figure 4. Construction du symétrique d'un point en utilisant l'équerre et le compas (Transmath, 6e, 2000, p. 198)

La méthode de construction avec le compas uniquement, s'appuie sur la propriété d'équidistance :

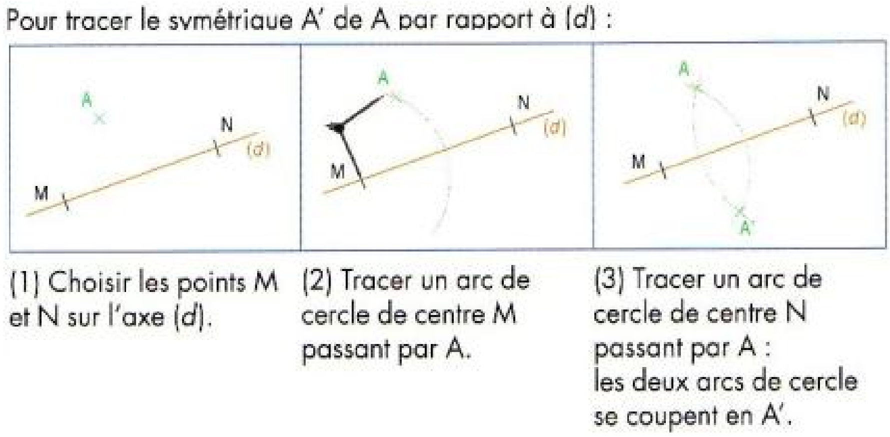


Figure 5. Construction du symétrique d'un point en utilisant le compas (Triangle, 6e, 2000. p. 285)

Méthode de construction de figures symétriques

Ces méthodes concernent la construction des symétriques d'un segment, d'une droite, d'un cercle, et éventuellement d'un triangle. Dans tous les manuels, ces figures sont construites par le biais de la construction des symétriques des points remarquables de la figure donnée (extrémité du segment, sommets du triangle, …) et s'appuient sur les propriétés de conservation (alignement, longueurs, …) de la symétrie, comme le montre l'extrait suivant :

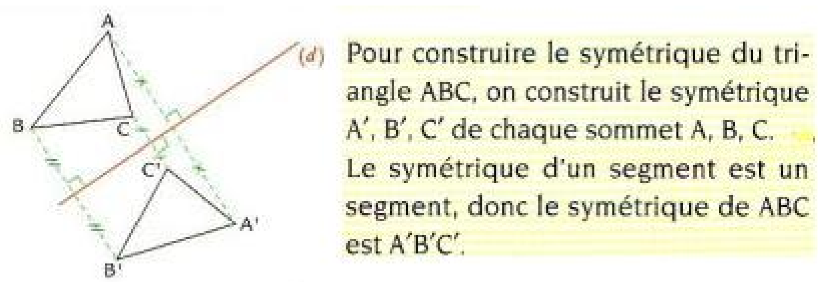


Figure 6. Méthode de construction du symétrique d'un triangle (Transmath, 6e, 2000, p. 199)

Types de problèmes proposés dans ces manuels

Les auteurs de ces six manuels scolaires adoptent tous une même méthodologie concernant le choix des problèmes proposés. En poursuivant les objectifs fixés par les programmes officiels, la majorité des problèmes sont de types suivants :

- reconnaissance de figures symétriques par rapport à une droite d ;
- reconnaissance d'axes de symétrie ;
- construction de figures symétriques (à main levée, sur papier quadrillé, avec des instruments de dessin) ;
- construction d'axes de symétrie (à main levée, sur papier quadrillé, avec des instruments de dessin).

Les problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques sont privilégiés par rapport à ceux de reconnaissance et de construction d'axes de symétrie. La reconnaissance ou la construction de figures ou d'axe de symétrie peut s'effectuer par pliage, par perception globale (à vue d'œil) ou en s'appuyant sur les connaissances des propriétés de la symétrie et à l'aide des instruments de dessin.

En plus des types de problèmes cités, nous retrouvons également des problèmes dont l'objectif est d'identifier les propriétés géométriques relatives à la symétrie orthogonale (équidistance et orthogonalité, conservation de la longueur, de l'aire, de l'angle, du milieu d'un segment…), des problèmes de mise en relation entre les figures symétriques et l'axe de symétrie et éventuellement, des problèmes de preuve[24].

Activités préalables

La symétrie est introduite dans tous les manuels (six) analysés par une approche expérimentale, en prenant appui sur les connaissances de cette notion, supposées acquises par les élèves dans les cycles scolaires précédents.

Parmi les objectifs explicités par les auteurs, nous trouvons :

- Réactiver la notion de symétrie par pliage ;
- Mettre en évidence les propriétés de conservation par la symétrie orthogonale ;
- Faire réapparaître l'image mentale de la médiatrice ;
- Construire des figures (à main levée et sur papier quadrillé) ayant des axes de symétrie ;

[24] Étant donné qu'en sixième les élèves n'ont pas encore d'outils de preuve, les problèmes à ce niveau sont plutôt des problèmes où l'on demande à l'élève de donner une explication ou une justification.

- Dégager la notion d'axe de symétrie.

Proposées dans tous les manuels, les premières activités sont semblables. Ces activités traitent essentiellement de la reconnaissance et de la construction de figures symétriques. Des problèmes de construction et de reconnaissance d'axes de symétrie sont aussi proposés. D'autres activités relèvent de l'observation des figures symétriques, en ayant pour but de faire apparaître les propriétés conservées par une symétrie (alignement, longueur, mesure des angles...).

Plusieurs activités proposées peuvent permettre à l'élève d'établir un lien entre la superposition des figures par pliage et les propriétés d'orthogonalité, d'équidistance et de conservation du milieu par la symétrie orthogonale.

Ces activités préalables sont basées sur l'utilisation des techniques du calque ou du pliage, ou bien relèvent de la construction de figures et d'axes de symétrie à main levée et sur papier quadrillé. Le pliage est souvent utilisé comme un moyen de contrôle (« tracer le symétrique d'une figure et contrôler par pliage »). Les instruments de dessin (règle graduée, équerre et compas) sont éventuellement utilisés. L'idée sous-jacente aux choix de ces activités est que c'est par le biais de la manipulation de ces outils que les élèves seront amenés à dégager la définition de deux figures symétriques ainsi que les propriétés de la symétrie, et à découvrir des méthodes de construction de figures symétriques.

La plupart des figures données ne coupent pas l'axe de symétrie. Les axes de symétrie ont des orientations variées : verticale, horizontale ou oblique.

Exercices de base, d'application, de réinvestissement, de recherche, d'approfondissement…

Dans les manuels étudiés, l'intitulé des sections d'activités après le cours, est très variable. Nous trouvons par exemple : *exercices fondamentaux, de base, d'application, de réinvestissement…* Cependant, l'objectif principal des activités proposées dans ces sections est de favoriser la mise en oeuvre des connaissances des élèves sur la symétrie. Certaines de ces activités sont conçues dans le but de permettre à l'élève d'appliquer directement ses connaissances dans la résolution de problèmes, d'autres ont pour objectif d'amener l'élève à approfondir ses connaissances. Les activités d'approfondissement présentent un niveau de complexité plus important en comparaison avec les précédentes.

Comme dans les activités préalables, nous constatons que dans tous les manuels, les problèmes sont en majorité ceux de construction et de reconnaissance de figures symétriques et, en troisième lieu, de construction d'axes de symétrie. Les exercices de base, c'est-à-dire les premières activités proposées relèvent, comme les activités préalables, d'une approche expérimentale s'appuyant sur des manipulations avec le pliage et le calque, et aussi sur papier quadrillé. Ces activités laissent place progressivement à une approche plus géométrique (analytique), par le biais de l'utilisation des instruments de dessin.

Les problèmes de construction proposés concernent en majorité la construction des symétriques de points, de segments et de droites que nous appelons figures simples. La construction de figures complexes (composées de plusieurs segments, droites, arcs de cercles…) concerne dans la plupart des cas des triangles ou des quadrilatères (figures géométriques usuelles). Les constructions des symétriques de figures représentant un objet réel identifiable (une maison, un poisson…) ou d'autres figures complexes sont rarement proposées. Dans ces cas rares, soit la construction est effectuée à main levée, soit le problème est posé sur papier quadrillé comme dans l'extrait ci-dessous :

47/ a/ Reproduire le dessin ci-dessous en utilisant le quadrillage du cahier
b/ Tracer le symétrique de cette figure par rapport à la droite

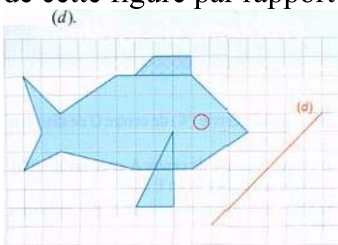


Figure 7. Exemple de problème de construction du symétrique d'une figure complexe trouvé dans les manuels scolaires (Triangle ; 6e, 2000, p. 213)

3.2. Du point de vue mathématique et didactique

Afin de réaliser une modélisation de conceptions des élèves à propos de la symétrie orthogonale, nous allons d'abord restreindre notre étude à une classe de problèmes relative à la symétrie orthogonale. A cette fin, nous réaliserons une étude mathématique et didactique des problèmes en nous appuyant d'une part, sur l'étude des programmes et manuels scolaires présentée ci-dessus, et d'autre part sur la recherche de Carvalho & Laborde (2000), qui proposent une classification de problèmes de transformations géométriques en se référant à la classification de Vergnaud (1986) concernant les structures additives.

Cette classification s'appuie sur la mise en relation des trois éléments de base des problèmes de transformation que sont F, T et F' :

- F étant la figure sur laquelle agit la transformation T ;
- T étant la transformation ;
- F' étant l'image de la figure F obtenue par la transformation T.

Dans notre étude, la transformation T est la symétrie orthogonale donnée par son élément caractéristique, une droite (axe de symétrie) que nous dénommons « droite d ».

L'étude des manuels scolaires, présentée plus haut, montre que la plupart des problèmes proposés relèvent de l'une des deux grandes catégories suivantes :

- Problèmes de recherche de l'un des trois éléments (F, d, F') ;
- Problèmes où la symétrie orthogonale est un outil de résolution.

Même si nous considérons que ces deux catégories de problèmes ne sont pas exclusives, nous choisissons d'étudier de plus près les problèmes concernant la première catégorie car, comme le montre l'analyse des programmes et manuels scolaires, l'enseignement en classe de sixième au collège met l'accent sur ces types de problèmes.

Nous analyserons cette catégorie de problèmes selon les deux critères suivants :

- L'élément visé par le problème : la question porte-t-elle sur la figure image F', la figure objet F ou l'axe de symétrie d ?
- La nature du problème : est-ce un problème de reconnaissance, de construction, de preuve ou autre ?

3.2.1. L'élément visé par le problème

La classification de problèmes de Carvalho & Laborde (ibid.) propose les quatre classes de problèmes ci-après :

a) La figure objet F et l'axe de symétrie d sont donnés, et la figure image F' est à trouver ;

b) La figure image F' et l'axe de symétrie d sont donnés, et la figure objet F est à trouver ;

c) Les figures objet F et image F' sont données, et l'axe de symétrie d est à trouver ;

d) Les compositions des transformations.

a et b) La figure objet F (resp. la figure image F') et l'axe de symétrie d sont donnés et la figure image F' (resp. la figure objet F) est à trouver

La définition de la symétrie orthogonale en tant qu'objet fonctionnel met en évidence le caractère involutif de cette transformation. La symétrie est donc décrite comme une bijection T où T^1=T. Dans ce cas, que l'élément inconnu de la relation soit la figure objet F ou son image F', les problèmes de ces deux classes apparaissent identiques. C'est la raison pour laquelle nous les avons rassemblés ici. Cependant, nous ne négligeons pas le fait que certaines différences puissent être dégagées du point de vue didactique.

En effet, de ce point de vue, il peut exister des contraintes remettant en cause l'équivalence entre ces types de problèmes. Carvalho et Laborde (ibid. p. 51) soulignent que les élèves du Collège différencient ces deux types de problèmes, car à ce niveau scolaire l'élève n'apprend pas encore qu'une même procédure de résolution du problème lui permet de passer de la figure objet à la figure image, et vice-versa. Par ailleurs, pour une figure donnée, l'élève peut considérer qu'elle représente l'objet F quand elle est située à gauche de l'axe de symétrie (ou au-dessus de celui-ci si l'axe est vertical), et l'image F' quand elle est située à droite de l'axe (ou en-dessous de celui-ci si l'axe est vertical). Tout se passe comme si l'élève considérait deux espaces, un espace objet à gauche de l'axe, et un espace image à droite de l'axe. Pour ce comportement les explications possibles sont d'une part, le sens de l'écriture occidental, de gauche à droite, et d'autre part la façon dont la majorité des problèmes sont présentés dans les manuels scolaires : la figure est presque toujours à gauche de l'axe de symétrie. À travers l'étude que nous avons menée sur les manuels scolaires, nous remarquons que très peu de problèmes sont posés avec une figure à droite de l'axe, et les consignes sont de construire ou de reconnaître la figure image par rapport à la droite d. Ceci pourrait être à l'origine d'un effet de contrat didactique.

Carvalho et Laborde affirment que la résolution des problèmes de ce type ne requiert que la mise en œuvre des propriétés de la symétrie orthogonale au niveau spatio-graphique (ibid., p. 50).

c) Les figures objet F et image F' sont données et l'axe de symétrie d est à trouver

D'après Carvalho et Laborde, trois étapes sont nécessaires pour résoudre les problèmes de cette classe. Tout d'abord, à partir des propriétés des deux figures données (F, F'), il faudra faire une conjecture sur la nature de la transformation en jeu en effectuant « une reconnaissance globale, au niveau spatio-graphique[25], de la figure et de la position de F' par rapport à celle de F » (ibid. p. 53). Ensuite, il faudra déterminer les caractéristiques de la transformation et, enfin vérifier que la transformation trouvée transforme effectivement F en F'. Nous ajouterons encore une quatrième étape : sinon, il faudrait remettre en cause la conjecture. Ainsi :

> *La résolution de problèmes de cette classe requiert un jeu entre spatio-graphique et théorique, entre global et ponctuel. Sont sollicitées les appréhensions perceptive et opératoire des figures qui s'appuient sur des connaissances spatiales des effets de la transformation.*
>
> Carvalho & Laborde (2000, p. 53)

Par conséquent, les problèmes de cette classe sont considérés comme ayant plus grande complexité, due aux interrelations entre ces différents aspects (ibid.).

[25] D'après les auteurs, la reconnaissance au niveau spatio-graphique prend appui sur une « connaissance spatiale » concernant la « forme » et la « position » des figures objet F et image F' par une transformation géométrique.

d) Composition de transformations

Pour cette classe, Carvalho & Laborde (ibid. p. 49) ont envisagé trois types de problèmes : déterminer l'image de F par l'application des transformations Ti ; trouver la transformation composée, la figure initiale F et la figure finale F' étant données, et trouver la transformation T composée à partir des Ti données.

Le premier type de problème se rapproche des problèmes de « l'item a », tout en considérant plusieurs transformations à la fois. Le deuxième type est en relation avec ceux de « l'item c », et dans ce cas seulement, plusieurs transformations Ti sont à trouver. Le dernier type de problèmes, où les transformations Ti sont données et leur composée est à trouver, n'a aucun rapport avec les problèmes précédents. Dans ce cas, nous nous référons encore aux niveaux d'appréhension d'une transformation géométrique, évoqués dans l'analyse des programmes scolaires. Jahn (1998, p. 60), motivée par une étude historique, a été amenée à repérer des situations où la transformation était considérée comme un élément d'un groupe. Ainsi, les transformations peuvent être composées et comparées par rapport à leurs propriétés invariantes. Contrairement aux problèmes précédents où l'accent est mis sur les figures objet ou image, dans les problèmes de ce type l'accent est mis sur la transformation elle-même, car seules sont données les transformations Ti, et la composée $T_1 o \ldots o T_n$ est à trouver. Un problème de ce type apparaît dans l'énoncé suivant : *à quelle transformation correspond la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ?* Dans ce type de problème, il y a un degré de complexité très important en comparaison avec les précédents, car la transformation devient elle-même l'objet du raisonnement.

3.2.2. Nature du problème

A partir de l'étude des manuels scolaires, nous distinguons trois types de problèmes qui mettent en jeu la symétrie orthogonale :

- Problèmes de reconnaissance de la figure symétrique, de l'axe de symétrie ou des propriétés de la symétrie
- Problèmes de construction de la figure symétrique ou de l'axe de symétrie
- Problèmes de preuve : il s'agit en général de prouver un énoncé en utilisant les propriétés géométriques de la symétrie. Un problème de construction ou de reconnaissance peut être considéré comme problème de preuve, si l'on demande de justifier la réponse.

Problèmes de reconnaissance

a) Reconnaissance de la figure symétrique : sont données la figure objet F, la transformation T (symétrie orthogonale, par le biais du tracé d'une droite), et plusieurs figures candidates à F'. La tâche de l'élève consiste à choisir parmi celles-ci, la figure qui correspond à l'image de F par cette symétrie.

Exemple :

Dans chaque cas, l'une des figures ci-dessous est la symétrique de la figure nommée par rapport à la droite (d). Laquelle ?[26]

a) b)

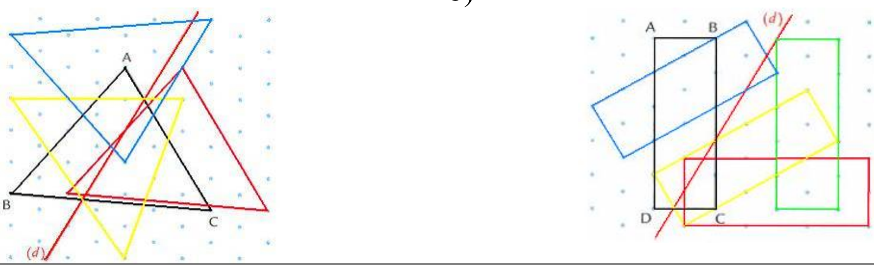


Figure 8. Exemple d'un problème de reconnaissance de figures symétriques

b) Reconnaissance de l'axe de symétrie : dans cette classe on trouve deux types de problèmes :

1. Sont données une ou deux figures et une droite. La tâche de l'élève consiste à reconnaître si la droite donnée est, ou non, l'axe de symétrie de la figure dans le premier cas, ou l'axe de symétrie qui transforme une figure en l'autre dans le deuxième cas.

Exemple :

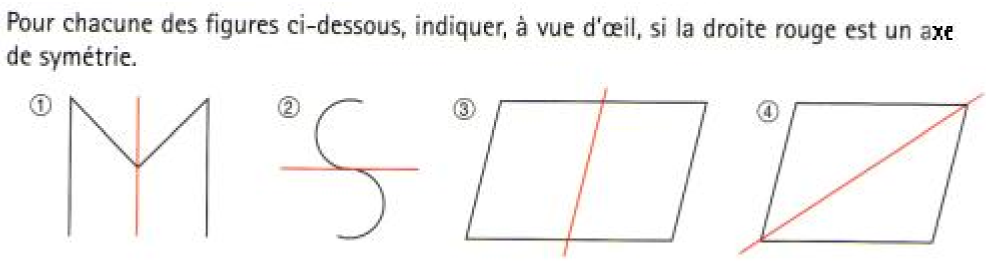


Figure 9. Exemple d'un problème de reconnaissance d'axe de symétrie (Cinq sur Cinq, 6e, 2000. p. 210)

2. Une figure est donnée, et l'on demande de déterminer si elle admet un ou plusieurs axes de symétrie.

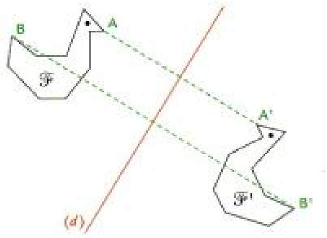
Un exemple de problème de ce type peut être : *un carré a-t-il un, ou des axes de symétrie* ?

c) Reconnaissance de propriétés de la symétrie orthogonale : sont données la figure objet F, la figure image F' et une droite d qui représente l'axe de symétrie. L'élève doit alors, à partir de la figure dégager les propriétés de la symétrie orthogonale.

[26] Figures extraites du manuel *Transmath*, 6e, 2000 (p. 204).

Exemple :

Les figures F et F' sont symétriques (A' est le symétrique de A, B' est le symétrique de B,...)[27].



a) Que peux-tu dire à propos de la droite (d) ?
b) Que peux-tu dire à propos des segments [AA'] et [BB'] ?
(tu peux utiliser l'équerre, la règle graduée ou le compas)

Figure 10. Exemple de problème de reconnaissance de propriétés de la symétrie orthogonale

Problèmes de Construction

a) Construction de la figure symétrique : la figure objet F et la transformation T (représentée par le tracé d'une droite) sont données, et la figure image F' est à construire.

Exemple :

Construis le symétrique de chaque figure par rapport à la droite (d)[28].

a) b) c)

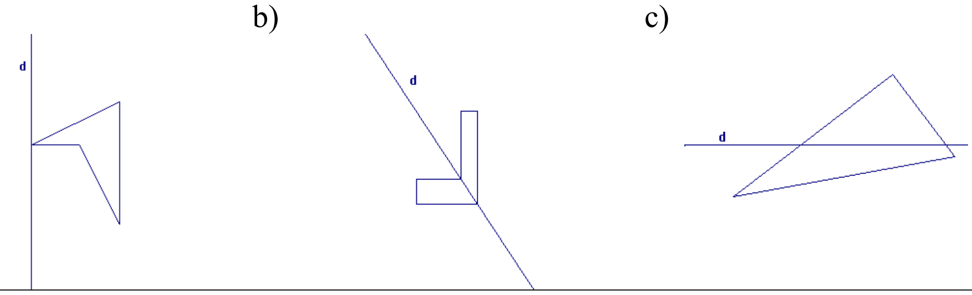


Figure 11. Exemple de problème de construction de figures symétriques

b) Construction de l'axe de symétrie : deux figures sont données et l'on demande de tracer l'axe de symétrie qui transforme une figure en l'autre.

[27] Figure extraite du manuel *Transmath*, 6e, (2000, p. 194).

[28] Les figures des items « a » et « b » sont extraites du manuel *Cinq sur Cinq*, 6e, (2000, p. 217).

Exemple :

La figure formée par ces deux triangles admet un axe de symétrie. Trace-le avec les instruments de géométrie.

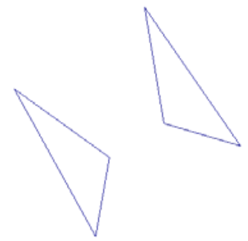


Figure 12. Exemple de problème de reconnaissance et construction de l'axe de symétrie (Transmath, 6e, 2000, p. 202)

<u>Problèmes de preuve</u>

a) Prouver qu'une droite d est l'axe de symétrie d'une figure (identifiée comme telle, ou comme support d'un segment)

Exemple :

Soit un segment [AB], C le cercle de diamètre AB, O son centre, M un point de C, N le symétrique de M par rapport à O. Soit I le milieu de [MB]. Montrer que la droite (IO) est l'axe de symétrie du bonnet d'âne AMBNO.

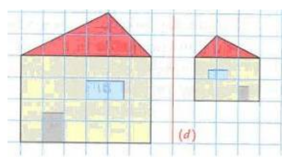
b) Prouver que F' est, ou non, la transformée de F par la symétrie orthogonale.

Exemple :

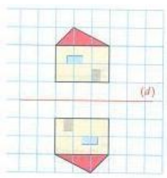
Indique pourquoi les deux maisons ne sont pas symétriques par rapport à la droite (d).

a)

b)



c)



d)

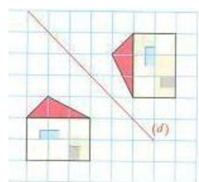


Figure 13. Exemple d'un type de problème de preuve (Transmath, 6e, 2000. p. 200)

c) Prouver un énoncé en utilisant les propriétés de la symétrie.

Exemple :

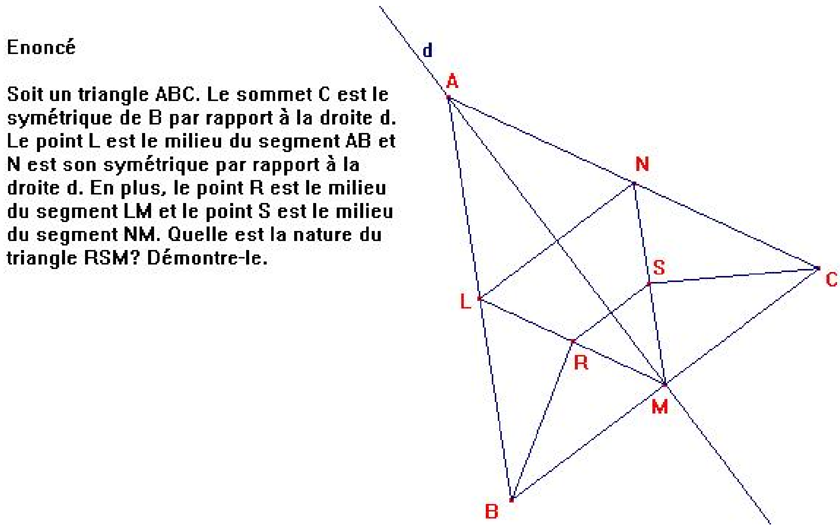


Figure 14. Exemple d'un type de problème de preuve (Soury-Lavergne, Projet BAP, 2003)

Ainsi, l'association des deux critères étudiés – l'élément visé et la nature du problème – qui sont tout à fait complémentaires l'un de l'autre, donne lieu à une classification de problèmes de symétrie orthogonale. Cependant, les classes de problèmes (montrées ci-dessus) issues de cette classification ne sont pas exclusives. Par exemple, le problème « *Détermine si une figure donnée admet un ou des axes de symétrie et si oui, construis-les. Justifie tes réponses* » que l'on trouve dans les manuels scolaires, et qui appartient à la classe des problèmes « 2.b » (les figures objet F et image F' sont données et l'axe de symétrie d est à trouver) dans la classification de Carvalho & Laborde (2000), peut être considéré à la fois comme un problème de reconnaissance, de construction et de preuve.

Cependant, étant donné que les problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques sont les plus fréquents dans l'enseignement des classes de début du Collège, comme le montre l'étude des manuels scolaires, dans notre recherche nous nous limiterons à ces problèmes. Signalons que les problèmes de preuve que nous avons choisi de ne pas traiter ont été étudiés par Miyakawa (2005).

3.2.3. Le rôle des variables didactiques

La classification des problèmes présentée ci-dessus génère un ensemble de problèmes qui pour l'élève, ne présentent pas le même degré de complexité cognitive. Néanmoins, les critères pris en compte dans cette classification ne sont pas suffisants pour décrire cette complexité. Le travail de Carvalho & Laborde (2000) montre qu'à l'intérieur d'une même classe, il peut exister des problèmes de niveaux de complexité différents. Ainsi, pour chaque type de problèmes présenté, nous nous proposons d'étudier le rôle d'autres éléments qui rendent compte de cette complexité. A cette fin, des éléments importants à considérer dans cette analyse sont les variables didactiques. D'après Margolinas, une variable didactique est :

> *- un élément de la situation sur laquelle le maître peut agir,*
>
> *- qui provoque des changements qualitatifs dans les procédures de résolution des élèves,*
>
> *- qui permet d'expliquer les résultats de l'enseignement et d'agir sur eux,*
>
> *- et qui provoque une modification dans l'apprentissage.*
>
> Margolinas (1992, p. 129)

Le professeur peut donc agir sur les variables didactiques pour modifier la situation d'apprentissage. Les recherches précédentes concernant la symétrie orthogonale (Grenier, 1988, Tahri, 1993, Soury-Lavergne, 1994) montrent l'importance du rôle des variables didactiques sur les procédures des élèves dans la résolution de problèmes. Soury-Lavergne (ibid.) étudie les problèmes de construction de l'image d'un segment par rapport à une droite donnée. Elle classifie ces problèmes selon les valeurs attribuées aux deux variables didactiques : l'angle formé par le segment et l'axe de symétrie (0°, 90° et α), et l'intersection entre le segment et l'axe (le segment a une extrémité sur l'axe, le segment coupe l'axe, l'intersection est vide). L'auteur montre que la combinaison des valeurs « angle de 90° » et « intersection vide » donne une classe de problèmes qui n'est pas considérée comme d'une grande complexité cognitive, car les problèmes concernés peuvent être résolus par une procédure de base[29]. D'autres combinaisons, comme « angle α » et « le segment a une extrémité sur l'axe», donnent des classes de problèmes considérés d'un niveau de complexité cognitive plus élevée car pour les résoudre, il faut réduire la procédure de base et de plus, il faut connaître la propriété d'invariance des points sur l'axe.

Cette considération s'avère importante, car elle met en évidence la relation existant entre les variables du problème et les procédures de résolution susceptibles d'être mobilisées par les élèves, en rendant compte du niveau de complexité des problèmes, ce qui est pertinent pour notre étude des conceptions des élèves.

En nous appuyant sur les travaux de recherche précédentes, nous retenons pour notre analyse les variables didactiques suivantes :

- orientation des segments et de l'axe de symétrie sur la feuille, avec les valeurs horizontale, verticale et oblique ;
- intersection de la figure et de l'axe de symétrie avec les valeurs « vide » (aucun point commun), touche (un ou plusieurs points communs, mais la figure se trouve d'un même

[29] Une procédure de base consiste à construire l'image de chaque extrémité du segment à l'intersection d'une droite orthogonale à l'axe passant par cette extrémité, et d'un cercle centré sur l'axe passant par cette même extrémité (Soury-Lavergne, 1994).

côté de l'axe) et coupe (un ou plusieurs points communs et la figure se trouve de part et d'autre de l'axe).

Dans le chapitre 1 (cf. p. 20), nous nous sommes interrogés à propos des conceptions susceptibles d'être mises en œuvre par l'élève lorsqu'il construit le symétrique d'une figure complexe. Nous avons évoqué que, d'après les résultats des recherches de Grenier (1988), les élèves qui ont construit correctement le symétrique d'un point par rapport à une droite n'ont pas été capables de réinvestir leurs connaissances pour construire le symétrique d'un segment isolé ou d'une figure composée de deux segments. Nous avons fait l'hypothèse que d'autres variables didactiques que celles concernant la problématique segment/axe présentés ci-dessus, pouvaient jouer un rôle important dans le choix de procédure pour la résolution du problème.

Ainsi, dans notre étude nous sommes amenés à prendre en compte d'autres variables didactiques qui peuvent jouer un rôle important dans la résolution de ces problèmes. Le choix de ces variables s'appuie d'une part, sur les résultats des recherches (la variable support : papier blanc, papier quadrillé, par exemple), et d'autre part, sur l'analyse des problèmes présents dans les manuels scolaires analysés. L'ensemble des variables qui nous semblent pertinentes par rapport à l'objectif de notre recherche et leurs valeurs respectives, est présenté dans le tableau 2 de la page suivante :

Variables didactiques et valeurs

Variables didactiques	*Valeurs*
Nature du problème	*Construction de la figure symétrique* *Construction de l'axe de symétrie* *Reconnaissance de la figure symétrique* *Reconnaissance de l'axe de symétrie* *Identification des propriétés de la symétrie orthogonale* *Preuve*
Spécificité de la figure F	*F possède des segments parallèles et/ ou perpendiculaires à l'axe de symétrie, ou non* *F possède un ou des axes de symétrie, ou non* *F possède un axe de symétrie parallèle ou perpendiculaire à l'axe de symétrie d* *F est proche de l'axe, ou non* *F est codée, ou non* *...*
Nature de F	*Géométrique usuelle (triangle, carré, …) ou non* *Représentant un objet réel identifiable, ou non* *Simple (segment) ou Complexe (composée de segments, cercles, arcs de cercle, …)* *...*
Orientation des segments de la figure F sur la feuille	*Oblique ; Horizontale ; Verticale*
Orientation de l'axe sur la feuille	*Oblique ; Horizontale ; Verticale*
Intersection de la figure avec l'axe	*Vide ; Touche ; Coupe*
Instruments de dessin et techniques disponibles	*Règle graduée, ou non ; Équerre ; Compas ;* *Pliage ; Calque ; Miroir*
Type de papier	*Blanc ; Quadrillé ; Pointillé*
Position relative de F et F' (dans les problèmes de reconnaissance)	*F et F' possèdent des segments parallèles, ou non* *F et F' possèdent des segments ayant une même droite support, ou non* *…*

Tableau 2. Variables didactiques et valeurs prises en compte dans le cadre de notre recherche

4. Contrôles intervenant dans la résolution de problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques

Rappelons que notre objectif est de caractériser les conceptions des élèves à propos de la symétrie orthogonale. Comme nous l'avons précisé, nous avons choisi une entrée par les structures de contrôles des conceptions. Il s'agit alors d'identifier les contrôles pouvant intervenir dans la résolution des problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques. La première question que nous nous posons est : quels sont ces contrôles et comment les identifier ?

Prenons comme point de départ de cette étude la typologie de contrôles proposée par Rolet (1996) : les contrôles perceptifs et théoriques. Les connaissances mathématiques du sujet sont à la base des contrôles théoriques. Ces connaissances sont issues de la théorie que le sujet met en œuvre (s'il en a une) et qui ne renvoie pas forcément à une théorie valide au sens mathématique. Les contrôles théoriques peuvent ainsi être vrais ou faux du point de vue mathématique. Par ailleurs, d'autres contrôles ne demandent pas nécessairement au sujet des connaissances mathématiques pour être utilisés. Il suffit de s'appuyer sur la perception globale de la figure ou sur l'usage de techniques comme le calque ou le pliage, pour réussir la construction de la figure symétrique. Ces contrôles sont de type perceptif.

Nous considérons encore qu'un contrôle peut relever de ces deux types de connaissances à la fois. Cette hypothèse s'appuie sur l'étude de Berthelot et Salin (1992, p. 66) qui distinguent les problématiques pratique et géométrique. Afin de montrer l'intérêt de cette distinction, ils analysent le problème suivant : *ABCD est un trapèze quelconque, les diagonales (AC) et (BD) se coupent en M. Comparer les aires des triangles (AMD) et (BMC). Justifier votre réponse (la figure est donnée)*. Pour résoudre ce problème, trois types de solutions sont envisagés par ces auteurs :

- fabriquer le gabarit d'un des triangles, le découper en morceaux et essayer de recouvrir la surface de l'autre triangle (solution 1) ;
- remarquer que la comparaison demandée produit le même résultat que celle des triangles ADC et BDC et que ces deux triangles ont la même aire, car les bases et les hauteurs sont égales (solution 2) ;
- mesurer les longueurs et les bases des triangles et appliquer la formule (BxH)/2 (solution 3).

Selon les auteurs, la différence entre ces trois solutions repose uniquement sur la nature des connaissances à propos de la notion d'aire. Dans la première solution où la signification spatiale est en jeu, le sujet ne mobilise aucune connaissance géométrique, il s'agit alors pour lui d'une problématique pratique. Dans la deuxième solution, ce sont les connaissances géométriques qui sont en jeu, il s'agit ainsi d'une problématique géométrique pour le sujet. La troisième solution renvoie à ces deux problématiques à la fois. D'une part, il y a la mise en œuvre par le sujet des connaissances géométriques, car il connaît et sait utiliser la formule pour calculer l'aire d'un triangle en identifiant sa base et sa hauteur. Mais ses connaissances se limitent à cela, il n'est pas capable de produire une démonstration. A la place, il s'appuie sur la figure fournie pour mesurer les dimensions des triangles dont les aires sont à comparer. Les auteurs appellent cette solution « spatio-géométrique » (ibid. p. 68).

Ainsi, dans la solution 1, les contrôles mis en œuvre peuvent être de type perceptif, car elle ne s'appuie que sur la perception que le sujet a de la figure fournie et sur la manipulation de celle-ci. Dans la solution 2, les contrôles mis en œuvre peuvent être de type théorique car elle est conçue par la mise en œuvre des connaissances géométriques. Pour la troisième solution, il y a la mise en œuvre d'une combinaison de contrôles perceptifs et théoriques, étant donné que ces deux types de connaissances sont en jeu.

D'après la littérature, les contrôles perceptifs sont plus « naturellement » exercés par le sujet, car ils sont « moins coûteux » que les contrôles théoriques. Grenier (1988, p. 168) affirme que « le contrôle perceptif fonctionne tant qu'aucune perturbation n'intervient sur la perception globale de la figure sur la feuille ». Laborde & Capponi (1994) signalent que la raison pour laquelle les connaissances perceptives sont davantage utilisées par le sujet, trouve son origine dans l'enseignement :

> *L'écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques aboutit à ce que la géométrie enseignée s'appuie sans contrôle sur un rapport privilégié à l'espace réservé au traitement de petits objets ou de tracés tenant sur une feuille de papier, sur l'évidence perceptive.*
>
> Laborde & Capponi (1994, p. 172)

Les résultats de la recherche de Rolet (ibid.) montrent que la résolution de problèmes de géométrie par les étudiants est faite d'allers et retours entre le théorique et le perceptif. Cependant, ces études montrent aussi que les contrôles perceptifs sont davantage exercés par les élèves, surtout dans les phases d'exécution et de vérification : « le contrôle perceptif simple suffit souvent pour remettre en cause la construction » (ibid. p. 303).

Bien que le type d'activité proposée et/ou les instruments disponibles puissent inciter l'élève à mobiliser un certain type de contrôle – par exemple, un tracé à main levée peut inciter à mobiliser des contrôles perceptifs, tandis que la demande d'une explication de processus de construction d'une figure peut inciter à mobiliser des contrôles théoriques – ils ne suffisent pas à distinguer le type de contrôle mis en œuvre dans l'action par l'élève. Il nous semble qu'il n'est pas aussi simple de faire une distinction entre les contrôles, car les contrôles susceptibles d'être exercés dans chacune des phases de la résolution d'un problème dépendront des connaissances disponibles chez l'élève. Par exemple, en effectuant un tracé à main levée, un élève qui dispose de connaissances théoriques les mobilisera. De même, dans un problème de preuve, un élève qui n'a pas ces connaissances ne les mobilisera pas, mais il produira une preuve pragmatique au sens de Balacheff (1987).

Toutefois notre objectif n'est pas de nous investir dans une telle discussion, ni de chercher à classer les contrôles en théoriques et perceptifs. Nous prenons appui sur les études qui traitent de cette problématique, car elles nous permettent de soutenir l'hypothèse que les contrôles susceptibles d'être mis en œuvre par l'élève dans la résolution d'un problème sont liés aux connaissances théoriques, perceptives, ou encore à l'association de ces deux types de connaissances.

Étant donné que les contrôles laissent entrevoir les critères que l'élève prend en compte dans la résolution d'un problème (Gaudin 2002), le repérage des contrôles peut s'effectuer en identifiant l'ensemble des critères de choix qui peuvent déterminer la construction du symétrique d'une figure F donnée. Cette considération nous amène alors à nous poser une seconde question : comment repérer ces critères de choix ?

Ainsi, en cherchant à identifier les critères de choix et, par conséquent, les contrôles susceptibles d'intervenir dans la décision de l'élève à propos de l'emplacement de la figure image F' sur la feuille par rapport à la figure initiale F et par rapport à l'axe, d'une part nous prendrons en compte les propriétés de la symétrie orthogonale et d'autre part, nous nous appuierons sur les résultats des recherches et de l'étude des programmes et manuels scolaires présentées plus haut.

4.1. Critères de choix et contrôles correspondants

Des recherches précédentes nous retenons : d'une part, les théorèmes en acte, cités plus haut (p. 49), qui sont susceptibles d'être mis en œuvre par les élèves lors de la construction et de la reconnaissance des figures symétriques. Et, d'autre part, les définitions mathématiques de la symétrie orthogonale et ses propriétés, que l'on trouve dans les manuels scolaires et qui privilégient une caractérisation de la symétrie orthogonale par pliage et superposition des figures, ainsi que l'utilisation de la technique du calque utilisée depuis l'école élémentaire.

La notion de symétrie orthogonale telle qu'elle est enseignée au niveau secondaire, est caractérisée par les propriétés suivantes :

Propriétés caractéristiques de la symétrie orthogonale :

- **Orthogonalité** : si les points A et A' sont symétriques par rapport à la droite d, alors [AA'] est perpendiculaire à d. Un point situé sur d est son propre symétrique.
- Égalité des distances à l'axe :

- si les points A et A' sont symétriques par rapport à la droite d, alors A et A' se situent à égale distance de part et d'autre de l'axe,
- si les points A et A' sont symétriques par rapport à d, alors tout point de l'axe est à égale distance de A et de A' (l'axe de symétrie est la médiatrice du segment reliant un point et son symétrique).

Propriétés de conservation de la symétrie orthogonale :

- **Longueur** : le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment de même longueur (la symétrie orthogonale est une isométrie) ;
- **Mesure des angles** : le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure ;
- **Perpendicularité** : les droites symétriques de deux droites perpendiculaires sont, elles aussi, perpendiculaires (conséquence de la propriété précédente : conservation de l'angle droit) ;
- **Parallélisme** : les droites symétriques de deux droites parallèles sont, elles aussi, parallèles ;
- **Alignement** : le symétrique d'une droite est une droite.
    - Remarque : le symétrique d'une droite n'est pas, en général, une droite parallèle.

Propriété de changement de l'orientation des angles (isométrie « indirecte » du plan) :

- La symétrie orthogonale inverse l'orientation des angles (la symétrie orthogonale est un retournement).

Nous définissons ci après les critères de choix que nous retenons de l'articulation entre ces propriétés de la symétrie et les théorèmes en actes identifiés dans les recherches. Ces critères sont les suivants :

- « **Direction** » : qui est déterminée par un point de la figure et son symétrique ;
- « **Distance à l'axe** » : soit d'un point et son symétrique, soit d'une figure et son symétrique;
- « **Taille** » : qui est liée à la propriété de conservation de longueurs ;
- « **Forme** » : qui est liée à la propriété de conservation de mesures d'angles ;
- « **Sens** » : qui est lié à l'orientation des angles ;

- « **Position** » : qui est liée à l'orientation de la figure symétrique par rapport à la figure initiale.

Nous ne considérons pas les critères perpendicularité, parallélisme et milieu, car la conservation de ces propriétés découle de celle de mesures d'angles et de longueurs.

Comme nous l'avons précisé, dans notre recherche nous nous limiterons à l'étude des contrôles relatifs à la construction et à la reconnaissance de figures symétriques.

Dans l'activité de construction, les contrôles qui participent à la détermination de l'emplacement de l'image d'une figure sur une feuille de papier (ou sur l'écran d'un ordinateur ou autre support) peuvent relever des connaissances théoriques relatives à la symétrie orthogonale (définition, propriétés), de la perception, de la combinaison de ces deux types de connaissances, ou encore des outils de construction (pliage, calque…). Pour décider de l'emplacement où construire la figure image, l'élève prend en compte certains critères (dans quelle direction, à quelle distance de l'axe, ...).

La reconnaissance de l'image d'une figure peut relever de l'explicitation des propriétés géométriques qui attestent que les deux figures sont symétriques, elle peut être due aussi à la perception spatio-graphique des figures symétriques, l'élève peut encore procéder par élimination des figures qui lui paraissent peu plausibles, ou bien sa réponse peut être induite par le contrat didactique. Cependant, dans les problèmes de cette nature, les valeurs de certains critères comme longueur des segments, distance à l'axe, direction, sont attribuées par la donnée des figures parmi lesquelles il faut choisir le symétrique. L'élève n'a pas alors de choix à faire en ce qui concerne ces critères. Dans ce cas, les contrôles correspondants peuvent ne pas intervenir, du moins explicitement, dans la résolution du problème.

Analyse des critères et formalisation de contrôles

La manière dont les propriétés relatives à la symétrie orthogonale peuvent être considérées ou non par l'élève, donne lieu aux différentes valeurs qui peuvent être attribuées à ces critères. Ces valeurs nous permettent de réaliser une formalisation des contrôles qui en rendent compte.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons de manière synthétique les valeurs qui peuvent être attribuées à chacun de ces critères :

Critère	Valeur
« direction »	orthogonale à l'axe
	horizontale
	verticale
	prolongement d'un segment de F
	autre
« distance à l'axe »	conservée
	non conservée
« taille »	conservée
	non conservée
« forme »	conservée
	non conservée
« sens »	même sens
	sens inverse
« position »	translation
	translation suivie d'un retournement
	rotation
	rotation suivie d'un retournement
	autre

Tableau 3. Les critères de choix et leurs valeurs possibles

Nous présentons ensuite l'analyse de chaque critère et des valeurs associées, ainsi que la modélisation des contrôles qui sont l'expression de ces valeurs.

1. Direction

Dans la construction de l'image d'un point par la symétrie orthogonale, la direction choisie par le sujet peut être perpendiculaire à l'axe, ou non. Les résultats de la recherche de Grenier (1988) montrent que « les tracés des élèves respectent l'orthogonalité à l'axe, lors de la construction de symétriques de figures dont les caractéristiques permettent à la perception de fonctionner. Cependant, dès que la perception ne peut plus fonctionner, la propriété d'orthogonalité à l'axe n'est plus respectée » (ibid. p. 400). Plusieurs travaux ont étudié les directions qui apparaissent plus ou moins fréquemment dans les productions des élèves. En faisant référence aux résultats de ces travaux, Grenier (1988) a proposé une typologie d'erreurs pour la construction d'un point par la symétrie orthogonale, qui renvoie uniquement à la direction du support de la construction : *rappel orthogonal, rappel horizontal ou vertical, et rappel par prolongement* (cf. p. 49). Nous nous appuyons sur cette typologie pour attribuer des valeurs à ce critère.

Dans le premier cas, l'élève construit la figure image par la symétrie orthogonale, la propriété d'orthogonalité est alors respectée. Nous attribuons ainsi la valeur « orthogonale à l'axe » au critère « direction ».

Dans les deux autres cas, l'élève construit la figure image comme s'il s'agissait d'une symétrie oblique. Dans le rappel horizontal ou vertical, le segment joignant un point à son image est horizontal ou vertical. Ces directions sont données en général par les bords de la feuille (Gallou-Dumiel 1987, p. 18). Dans ces cas-là, le critère « direction » admet alors les valeurs « horizontale » et « verticale» respectivement. Le rappel par prolongement renvoie à la construction de l'image d'un segment dans le prolongement de celui-ci. Dans ce cas, la valeur attribuée est donc « prolongement ».

Il nous paraît important d'ajouter la valeur « autre » dans les cas où la direction paraît quelconque, voire non prise en compte par le sujet, ou encore si elle est modifiée au cours de la construction.

Ainsi pouvons-nous décrire les contrôles relatifs au critère « direction », comme suit :

Direction	Contrôles
Orthogonale à l'axe	**Σortho :** La figure (sous-figure) symétrique d'une figure (sous-figure) par la symétrie orthogonale est construite dans la direction orthogonale à d.
Horizontale	**Σhor** : L'image d'une figure (sous-figure) par une symétrie orthogonale est construite dans une direction horizontale
Verticale	**Σvert** : L'image d'une figure (sous-figure) par une symétrie orthogonale est construite dans une direction verticale
Prolongement	**Σprolong** : L'image d'une figure par une symétrie orthogonale est construite dans la direction donnée par le prolongement d'un segment de cette figure.
Autre	**Σautre :** à définir selon le cas

Tableau 4. Contrôles liés au critère « direction»

2. Distance à l'axe

D'après les résultats des travaux précédents, il semble que dans la construction de l'image d'une figure, une distance à l'axe est toujours prise en compte par l'élève.

Gallou-Dumiel, (ibid.) montre que dans la mise en oeuvre de procédures de rappel horizontal et vertical par les élèves, le milieu du segment joignant un point et son image appartient souvent à l'axe de symétrie, ce qui peut confirmer la prise en compte d'une distance à l'axe par l'élève. Grenier affirme que « la propriété d'égale distance ne permet pas en effet de discriminer les réponses des élèves, parce qu'elle est toujours prise en compte, sous la forme de *distance* le long de directions privilégiées » (ibid. p 46). Les résultats de la recherche de Tahri (1993) confirment cette idée et l'auteur annonce que « la conservation des distances est toujours prise en compte chez les élèves » (ibid. p. 64).

En accord avec ces résultats, nous considérons alors que la conservation de la distance à l'axe est une connaissance disponible, du moins implicitement, chez les élèves. Cependant, dans le souci de couvrir tous les cas susceptibles d'apparaître dans la construction d'une figure symétrique, nous envisageons également la possibilité de non conservation de distance à l'axe par l'élève. Ainsi, le critère « distance à l'axe » peut admettre deux valeurs : « conservée » et « non conservée ».

Dans le cas de distance à l'axe « conservée », elle peut être envisagée de plusieurs manières. D'après Grenier, la plupart du temps elle est « prise en compte, sous la forme de *distance* le long de directions privilégiées ». Mais l'élève peut également s'appuyer sur la perception globale de la distance de la figure F à l'axe, sans considérer aucun point de F en particulier. La distance est alors perçue globalement comme une position d'équilibre entre les figures image et objet (Grenier 1988, p. 21). Dans le cas où la distance à l'axe est « non conservée », il s'agira de l'absence de contrôle de la distance à l'axe.

Ces considérations nous permettent d'envisager pour ce critère les valeurs et les contrôles suivants :

Distance à l'axe	Contrôles
Conservée	**Σdist :** Une figure (sous-figure) et son symétrique sont à la même « distance » de l'axe de symétrie
Non conservée	---

Tableau 5. Contrôles liés au critère « distance à l'axe »

3. Taille

Étant donné que la plupart des travaux précédents ont étudié le problème de construction de l'image d'un segment par la symétrie orthogonale, leurs résultats se rapportent uniquement à la conservation ou non de la longueur du segment donné. Dans notre analyse, nous considérons que la figure donnée peut être un segment ainsi qu'une figure complexe (composée de segments, de cercles ou d'arcs de cercles). Ainsi, le critère « taille » rend compte de la conservation ou non de longueurs de segments, de rayons de cercles ou d'arcs de cercles par la symétrie orthogonale. Pour ce critère deux valeurs sont alors envisageables : « conservée » ou « non conservée ».

Pour le critère « taille », nous définissons les contrôles suivants :

Taille	Contrôle
Conservée	**Σtaille** : Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur. **Σrayon_cercle** : Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.
Non conservée	---

Tableau 6. Contrôles liés au critère « taille »

Dans la reconnaissance de figures symétriques, ce critère est susceptible d'intervenir dans les cas où les figures objet et image possèdent des segments qui ne sont pas de même longueur ou des cercles de rayons différents.

4. Forme

Ce critère est lié à la propriété de conservation des mesures d'angles par la symétrie orthogonale. Dans son travail de thèse, Bellemain (1992, p. 29) affirme que la notion de forme possède une « dimension perceptive », et aussi une « dimension socio-culturelle » qui relève des expériences antérieures de l'élève liées à ce contexte.

A ce critère, nous attribuons deux valeurs : la forme est soit « conservée », soit « non conservée ». Le contrôle attribué au critère « forme » est montré dans le tableau ci-dessous :

Forme	Contrôle
Conservée	**Σforme** : Une figure et son image par la symétrie orthogonale ont la même forme (en particulier, le symétrique d'un segment est un segment)
Non conservée	---

Tableau 7. Contrôles liés au critère « forme »

Dans les problèmes de reconnaissance, ce critère est susceptible d'intervenir quand les figures objet et image ne possèdent pas la même forme.

5. Sens

Dans sa recherche, Gallou-Dumiel (1987) souligne le rôle de la propriété de changement d'orientation des angles, par laquelle la symétrie orthogonale se distingue des autres transformations géométriques usuelles étudiées dans l'enseignement secondaire. L'auteur constate chez les élèves la présence d'erreurs persistantes relatives au maniement des angles. A ce propos elle affirme que :

> *[…] dans des conditions « papier crayon » il n'y a pas la plupart du temps, prise de conscience par l'élève de l'existence d'un problème d'orientation. Même quand l'élève utilise son rapporteur il n'a pas à exprimer l'action de tourner à droite ou à gauche. Il n'évoque pas la question du sens de l'angle image par rapport à l'angle objet.*
>
> Gallou-Dumiel (1987, p. 11)

Elle dit encore qu'il y a :

> *... une prise de conscience par les élèves de la conservation de la valeur absolue des angles mais non de leur orientation.*
>
> (Ibid. p. 13)

Ces considérations nous amènent à introduire le critère « sens », qui rend compte de la conservation ou non par l'élève de l'orientation des angles par la symétrie orthogonale. L'importance de ce critère dans notre recherche s'avère notamment dans l'étude de figures complexes où, en fonction des variables didactiques choisies, la prise en compte ou non de cette propriété par l'élève peut être plus explicite.

Les valeurs retenues pour ce critère sont les suivantes :

- « **même sens** » : deux figures sont de même sens si pour tout triplet de points A, B, C de la première, le triplet des symétriques correspondants A', B', C' de la seconde a la même orientation dans le plan. La figure image F' correspond alors à un déplacement de F, comme le montrent les exemples ci-dessous :

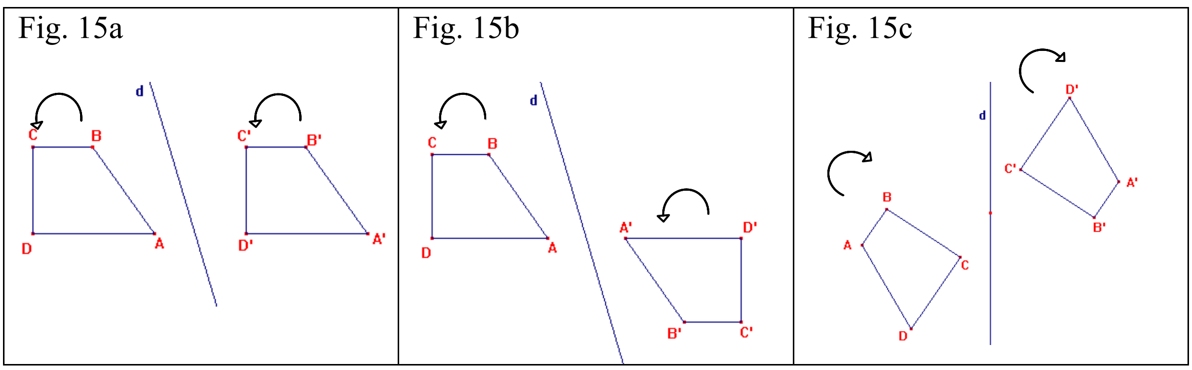


Figure 15. Exemples de figures objet et image ayant le même sens

- « **sens inverse** » : deux figures sont de sens inverse si pour tout triplet A, B, C de points de la première, le triplet des symétriques correspondants A', B', C' de la seconde a l'orientation inverse dans le plan. La figure F' correspond alors à un anti-déplacement de F, comme le montrent les exemples ci-dessous :

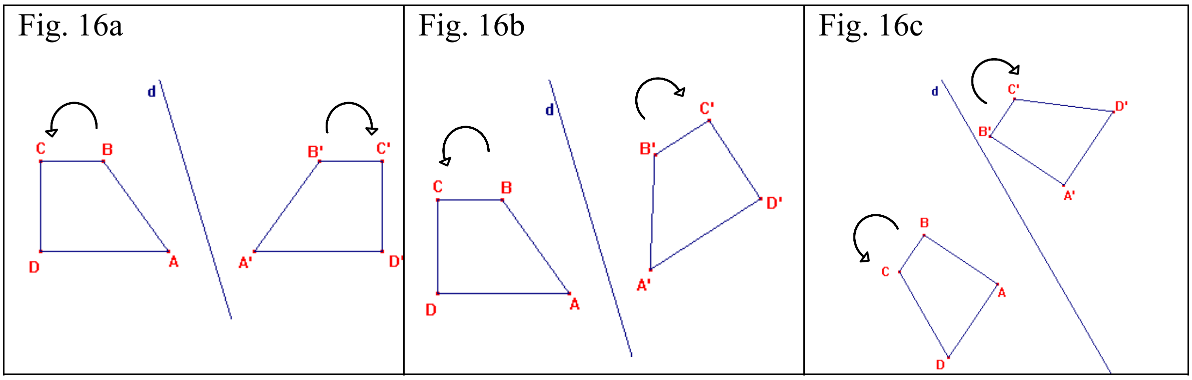


Figure 16. Exemples de figures objet et image ayant les sens inverses

Ces deux valeurs donnent lieu aux contrôles suivants :

Sens	Contrôles
Même sens	**Σmême_sens** : Une figure et son symétrique ont même sens.
Sens inverse	**Σsens_inverse** : Une figure et son symétrique ont leur sens inverse.

Tableau 8. Contrôles liés au critère « sens »

6. Position

Il peut sembler que le critère « sens » combiné avec d'autres critères, comme celui de « direction » par exemple, soit suffisant pour définir l'emplacement de la figure image. Cependant, l'analyse des figures « Fig. 15a » et « Fig. 15b » par exemple, montre qu'il n'en est rien. En effet, dans les deux figures, la direction choisie est celle du prolongement du segment [AD] (ou horizontale) et le sens de F' est le même que celui de F ; toutefois, l'emplacement de F' n'est pas le même dans les deux cas. Il est nécessaire alors de disposer d'un critère supplémentaire pour rendre compte de la position de F' par rapport à celle de F.

Pour cette raison, nous ajoutons à la liste des critères celui de « position ». Ce critère vise à rendre compte du choix de la position de la figure image F' par rapport à celle de F. Il est intéressant de noter que nous retrouvons ce même terme « position » chez Duval (1993), qui l'a introduit pour désigner un type de modification figurale relatif à l'appréhension opératoire d'une figure donnée. L'opération modifiant la figure associée à ce type de modification figurale est décrite aussi par Duval : « même taille et même forme, mais variation d'orientation : rotation, translation, ... » (Ibid. p. 57). La signification que nous donnons à ce terme n'est pas celle de Duval, mais l'idée sous-jacente est très proche, comme on va le voir ci-après.

Quelle que soit la position de F’ par rapport à F elle peut, dans la plupart des cas, être décrite en termes de translation ou rotation (si F’ a le même sens que F), et translation suivie de retournement ou rotation suivie de retournement (si F’ et F sont de sens inverses). Ainsi, ce critère peut admettre ces quatre valeurs. Cependant, nous rajoutons la valeur « autre » pour les cas où la position de F’ ne correspond à aucune de ses quatre.

Nous remarquons que la position et le sens sont deux critères particulièrement liés. Dans le cas où la position de F’ correspond à une translation ou à une rotation de F, le sens de la figure est conservé. De même, dans le cas où la position de F’ correspond à une translation ou à une rotation de F suivie de retournement, le sens de F’ est inversé. De plus, il y a implicitement conservation de taille et de forme. Ces différentes valeurs associées au critère « position » donnent lieu aux contrôles suivants :

Position	Contrôles
Translation de F	**Σtranslation** : L’image d’une figure F par la symétrie orthogonale est obtenue par une translation de F dans une direction choisie
Translation de F suivie de retournement	**Σtranslation** **Σsens_inverse**
Rotation de F	**Σrotation** : L’image d’une figure par la symétrie orthogonale est obtenue par une rotation de F autour d’un point et d’un angle choisis
Rotation de F suivie de retournement	**Σrotation** **Σsens_inverse**
Autre	**Σposition_autre** : à définir selon le cas

Tableau 9. Contrôles liés au critère « position »

4.2. Contrôles relevant d’autres connaissances

<u>Contrôles liés à l’utilisation du pliage</u>

Comme le montre l'étude des manuels scolaires et les résultats des recherches, la symétrie orthogonale est introduite par la superposition des figures par pliage. L'élève peut recourir au pliage dans la résolution d'un problème soit de manière effective, soit mentalement. Le pliage est effectif quand l’élève réalise concrètement l’action de plier la feuille de papier. Cependant, l’élève peut aussi avoir recours au pliage mental, notamment quand le pliage est interdit par les consignes du problème, ou bien quand le support ne le permet pas (par exemple l’écran d’un ordinateur ou un papier/carton). Dans ce cas, il anticipe l’emplacement de la figure symétrique sur la feuille de papier telle qu’elle serait obtenue en pliant celle-ci.

Nous envisageons deux contrôles liés au pliage, selon la prise en compte ou non de l'axe de symétrie pour plier la feuille :

- **Σpliage_1** : Une figure et son symétrique se superposent par pliage le long de l'axe de symétrie ;
- **Σpliage_2** : Une figure et son symétrique se superposent par pliage.

Ces contrôles concernent le pliage effectif. Lors du pliage mental, d'autres contrôles peuvent entrer en jeu.

Remarquons que d'après la littérature, le pliage peut être utilisé par l'élève comme un moyen de résoudre le problème, mais surtout comme un moyen de validation de la construction réalisée.

Contrôles liés à l'utilisation du papier calque

L'outil calque peut être utilisé de deux manières différentes : (1) la figure F, ainsi que l'axe de symétrie sont décalqués, et (2) seule la figure F est décalquée. Par ailleurs, pour construire le symétrique de F, on a le choix de retourner ou non le papier calque. Ainsi, nous définissons quatre contrôles liés à l'usage du calque, en fonction des choix mentionnés.

- **Σcalque_1** : Si F' est obtenue en décalquant F et d, et en retournant le papier calque de manière à superposer d, alors F et F' sont symétriques.
- **Σcalque_2** : Si F' est obtenue en décalquant F et d, et en tournant le papier calque (sans le retourner) de manière à superposer d, alors F et F' sont symétriques.
- **Σcalque_3** : Si F' est obtenue en décalquant F et en retournant le papier calque, alors F et F' sont symétriques.
- **Σcalque_4** : Si F' est obtenue en décalquant F et en glissant le papier calque (sans le retourner), alors F et F' sont symétriques.

La mobilisation des contrôles liés à l'utilisation du calque ou du pliage amène implicitement à la conservation de la taille et de la forme de la figure F. Les contrôles qui assurent le retournement du papier calque avant de tracer F' (Σcalque_1 et Σcalque_3) relèvent de la non conservation de l'orientation des angles par la symétrie et sont donc liés au contrôle Σsens_inverse. En revanche, les contrôles où le papier calque n'est pas retourné (Σcalque_2 et Σcalque_4), relèvent de la propriété de conservation de l'orientation des angles et sont donc liés au contrôle Σmême_sens. Les quatre contrôles sont de ce fait liés au critère « sens ». Par ailleurs, il est évident que si la droite d n'est pas décalquée avec la figure F, ces contrôles ne sont pas suffisants pour construire F' et d'autres contrôles doivent alors être exercés dans le choix d'une direction, d'une distance à l'axe et d'une position de F'.

Contrôles liés à la nature de la figure F’

- **Σnature_de_F’** : Le symétrique d’une figure est une figure de même nature.

Ce contrôle relève de la propriété de conservation de la forme d’une figure géométrique (le symétrique d’un cercle est un cercle, …) et de l’alignement (le symétrique d’un point est un point, d’un segment est un segment, d’une droite est une droite, …).

Ces contrôles peuvent être considérés comme implicites, pratiquement dans toute procédure de construction de l’image d’une figure par la symétrie orthogonale.

- **Σsegment** : Si les extrémités d’un segment sont les symétriques des extrémités d’un autre segment par rapport à une droite d, alors ces deux segments sont symétriques par rapport à d.

Ce contrôle est lié à la propriété de conservation de l’alignement.

Contrôles liés aux relations entre la figure F et la droite d

- **Σpoint_invariant** : Le symétrique d’un point sur l’axe est le point lui-même ;
- **Σextrémité_sur_axe** : Le symétrique d’un segment dont une extrémité est sur l’axe est un segment dont une extrémité est sur l’axe.
- **Σintersection_F/axe :** Le symétrique d’une figure a autant de points communs avec l’axe que la figure objet.

Ce deuxième contrôle est une combinaison des contrôles « Σpoint_invariant » et « Σsegment».

- **Σdemi_plan** : Le symétrique de F est situé de l’autre côté de l’axe de symétrie.

Contrôles de parallélisme

- **Σparallélisme_segment** : Un segment et son symétrique sont parallèles.
- **Σparallélisme_droite** : Une droite et son symétrique sont parallèles.

Ces contrôles concernent la conservation de direction des segments et des droites. Il s’agit de théorèmes en acte fréquemment utilisés par les élèves, notamment parce qu’ils ont un vaste domaine de validité. En effet, ces théorèmes en acte sont valides en particulier pour les segments parallèles ou perpendiculaires à l’axe de symétrie d, ainsi que pour les figures qui possèdent un axe de symétrie parallèle à ce dernier.

5. Procédures de construction de figures symétriques

Nous allons procéder à une analyse a priori de problèmes de construction de figures symétriques. Nous allons en particulier prévoir et décrire les procédures, correctes ou non du point de vue des mathématiques, susceptibles d'être utilisées par un élève pour construire l'image d'une figure par la symétrie orthogonale. Nous utilisons le modèle cK¢ (cf. p. 29) pour effectuer cette analyse.

Précisons dans un premier temps ce que nous entendons par le mot procédure. Nous considérons une procédure comme une organisation structurée d'opérateurs (R) selon les critères de cohérence et d'adéquation des structures de contrôles (Σ).

Nous reprenons les trois catégories de procédures de construction du symétrique d'un segment issues des recherches précédentes (cf. p. 49). Cependant, comme nous l'avons précisé, dans le cadre de notre recherche nous ne nous limitons pas aux problèmes de construction du symétrique d'un segment. Nous envisageons donc également d'analyser des procédures de construction des symétriques de figures plus complexes (composées de segments, de polygones…). Ainsi, nous devons adapter la typologie de procédures à cette classe plus large de problèmes. Nous caractérisons alors les types de procédures comme suit :

- **Procédures globales** : la construction de l'image ne fait pas intervenir d'autres objets que la figure produite. La figure symétrique est construite soit perceptivement, à main levée par exemple, soit à l'aide d'outils tels que pliage ou calque.
- **Procédures semi-analytiques** : un ou plusieurs points images sont construits en ne tenant compte que de leurs antécédents, et ensuite la figure est construite globalement à partir de ces points, en mobilisant les propriétés de conservation de la symétrie orthogonale (mesure des angles, des longueurs, …).
- **Procédures analytiques** : l'image de la figure F est obtenue après construction des symétriques des points caractéristiques de F (sommets des polygones, centres des cercles,…).

Nous analysons ensuite ces trois types de procédures en termes de contrôles susceptibles d'être mobilisés par l'élève. L'importance de cette analyse s'avère du fait que :

> *Une simple analyse a priori des procédures des élèves, à elle seule, n'aboutit en général qu'à une description des comportements d'élèves. La recherche d'un modèle explicatif de ces comportements, exige que l'on prenne également en compte les différents contrôles exercés par les élèves sur un problème.*
>
> Sangaré (2000 p. 52)

Dans cette analyse, nous décrivons ces procédures en termes des valeurs attribuées aux critères de choix. Ceci nous permettra d'identifier, a priori, les contrôles qui peuvent être exercés lors de la mise en œuvre de ces procédures. Dans un premier temps, nous chercherons à identifier les sous-catégories de procédures au sein des trois grandes catégories (globales, semi-analytiques et analytiques). Ensuite nous décrirons ces sous-catégories de procédures en termes de critères de choix : « direction », « distance à l'axe », « taille », « forme », « sens » et « position ». Nous faisons l'hypothèse qu'en combinant les valeurs attribuées à chacun de ces critères de choix, qui à leur tour sont exprimés par le biais d'un contrôle, nous pourrons accéder aux différentes procédures susceptibles d'être utilisées par les élèves dans la construction de l'image d'une figure.

5.1. Procédures globales

Parmi les procédures de construction globales, nous envisageons les trois types suivants :

- Construction de la figure symétrique F' par pliage effectif ;
- Construction de la figure symétrique F' par calque ;
- Construction globale perceptive de la figure symétrique F' (sans recours aux techniques du pliage ou du calque).

<u>Procédures et Critères</u>

Le tableau ci-dessous montre les critères qui peuvent intervenir explicitement dans la mise en œuvre d'une procédure globale :

Critères	Type de Procédure			
	Pliage effectif	Calque		Construction perceptive
		Figure F + d	Figure F	
« direction »	---	---	oui	oui
« distance à l'axe »	---	---	oui	oui
« taille »	---	---	---	oui
« forme »	---	---	---	oui
« sens »	---	oui	oui	oui
« position »	---	---	oui	oui

Tableau 10. Critères de choix qui peuvent intervenir dans les procédures de construction de type global

Nous considérons que si la figure F' symétrique de F est construite par l'utilisation du pliage effectif, F' est obtenue comme la trace de F. Par conséquent, F' a les mêmes forme et taille que F. Le pliage de la feuille détermine également l'emplacement de la figure F', autrement dit le sens de F' et sa position par rapport à F. Ainsi, on peut dire que tous les critères sont implicites à la procédure du pliage effectif.

Cette considération s'applique aussi à la procédure basée sur l'utilisation du papier calque lorsque la figure F et l'axe de symétrie (droite d) sont décalqués. Cependant, il existe le choix de retourner ou non le papier calque avant de tracer F'. La décision de le retourner ou non relève du critère « sens ». En effet, si le papier calque est retourné, F' aura le sens inverse par rapport à celui de F, tandis que s'il n'est pas retourné, F' et F auront le même sens. Si l'axe n'est pas décalqué avec la figure F, les critères « forme » et « taille » seulement sont implicites à cette procédure. Les autres critères, « direction », « distance à l'axe », « sens » et « position », doivent être pris en compte pour déterminer l'emplacement de F'.

Dans la construction globale perceptive[30], comme nous l'avons précisé, l'image d'une figure ne fait pas intervenir d'autres objets que la figure produite elle-même. Elles ne s'appuient pas sur l'utilisation d'outils comme le pliage ou le papier calque. Ainsi, est-il nécessaire de contrôler la construction par la forme et la taille de la figure. Les critères « direction », « distance à l'axe », « sens » et « position » doivent également intervenir dans cette construction.

Ci-après, nous décrivons chacun de ces trois types de procédures en termes de contrôles.

Construction de F' par pliage effectif

Le pliage peut être réalisé :

- le long de la droite (d) ;
- selon une direction choisie (parallèle au bord de la feuille, par exemple).

Si le pliage est réalisé le long de la droite d donnée, le contrôle envisagé est Σpliage_1[31]. Si le pliage est réalisé selon une autre direction choisie, le contrôle en jeu sera Σpliage_2.

Construction de F' par calque

Dans l'utilisation de l'outil calque, nous envisageons deux possibilités : soit la figure F, ainsi que l'axe de symétrie sont décalqués, soit seule la figure F est décalquée. De ce fait, nous envisageons deux types de procédures :

- décalque de la figure F et de la droite d. Dans ce cas, nous supposons que la droite d est représentée par un segment et que l'on décalque tout ce segment ;
- décalque de la figure F seulement.

---

[30] Nous considérons la construction par pliage mental incluse dans cette catégorie de procédures.

[31] Pour voir la description des contrôles, on se reportera à la caractérisation de contrôles montrée dans la section précédente.

Décalque de la figure F et de la droite (d)

Deux procédures peuvent donc être envisagées :

- retournement du papier calque et superposition de la droite d ;
- rotation de 180° du papier calque et superposition de la droite d.

Dans la première procédure, le contrôle Σcalque_1 est susceptible d'être mobilisé par l'élève, car il assure le retournement du papier calque avant de tracer la figure symétrique. Pour la deuxième procédure, étant donné que dans sa mise en œuvre le papier calque n'est pas retourné, nous envisageons la mobilisation par l'élève du contrôle Σcalque_2.

Décalque de la figure F seulement

Si l'on ne décalque que la figure F, on peut envisager deux procédures :

- le retournement du papier calque sur la feuille de dessin ;
- le glissement du papier calque sur la feuille de dessin.

Ce choix concerne le critère « sens ». Les contrôles envisagés sont alors Σcalque_3 pour le retournement du papier et Σcalque_4 pour le glissement.

Cependant, dans les deux cas, le choix de retourner ou non le papier calque ne suffit pas pour construire la figure symétrique F' ; il est nécessaire encore de choisir son emplacement sur la feuille, par rapport à la figure F et éventuellement par rapport à l'axe. Ainsi faut-il faire le choix relatif aux critères : « direction », « distance à l'axe » et « position ». La combinaison des valeurs attribuées à ces trois critères donne alors 50 types de procédures différentes. Donnons comme exemple la construction suivante réalisée à l'aide du papier calque[32] :

Dans le tableau ci-dessous, nous indiquons les critères, les valeurs possibles et les contrôles correspondants que nous associons à ces procédures :

Critères	Valeurs possibles	Contrôles
« direction »	*orthogonale à l'axe* *verticale* *horizontale* *prolongement d'un segment de F* *autre*	Σortho Σvert Σhor Σprolong Pour la valeur « autre », les contrôles sont à définir selon le cas.
« distance à l'axe »	*conservée* *non conservée*[33]	Σdist ---

[32] Des exemples de quelques-unes de ces procédures seront donnés dans l'analyse a priori des problèmes proposés aux élèves dans l'expérimentation.

[33] Rappelons que la valeur « non conservée » se traduit par l'absence de contrôle.

« position » et « sens »	*translation* *translation suivie de retournement* *rotation* *rotation suivie de retournement* *autre*	tous les contrôles associés à ces valeurs peuvent être exercés, ainsi que les contrôles Σcalque_3 et Σcalque_4 qui sont liés au critère « sens ».

Tableau 11. Contrôles susceptibles d'intervenir dans la construction de l'image de F par décalque de F seulement

Construction globale perceptive de F

D'après les résultats des recherches précédentes, ces procédures de résolution sont très répandues dans la construction de symétriques de figures à main levée car ces procédures s'appuient sur la perception globale de la figure, notamment en ce qui concerne sa position par rapport à l'axe, sa forme ou sa taille, par exemple.

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, tous les critères de choix peuvent être concernés dans ces procédures. Ainsi, les combinaisons des valeurs qui peuvent être attribuées à ces critères donnent 200 procédures différentes de construction globale perceptive. Le tableau ci-dessous montre les valeurs possibles, ainsi que les contrôles qui permettent l'expression de ces valeurs :

Critères	Valeurs possibles	Contrôles
« direction »	*orthogonale à l'axe* *verticale* *horizontale* *prolongement d'un segment de F* *autre*	Σortho Σvert Σhor Σprolong pour la valeur « autre », les contrôles sont à définir selon le cas
« distance à l'axe »	*conservée* *non conservée*	Σdist ---
« taille »	*conservée* *non conservée*	Σtaille ; Σrayon_cercle ---
« forme »	*conservée* *non conservée*	Σforme ---
« position » et « sens »	*translation* *translation suivie de retournement* *rotation* *rotation suivie de retournement* *autre*	tous les contrôles associés à ces valeurs peuvent être exercés

Tableau 12. Contrôles susceptibles d'intervenir dans la construction de l'image de F une procédure de construction globale

Étant donné que ces procédures sont de type global, et que par conséquent elles sont liées à la perception globale de la figure, l'utilisation de toutes ces procédures peut permettre l'aboutissement de la construction de la figure image susceptible d'être acceptée comme correcte aux yeux de l'élève qui l'a construite.

5.2. Procédures semi-analytiques

Procédures et critères

Critères	Procédures semi-analytiques
« direction »	oui
« distance à l'axe »	oui
« taille »	oui
« forme »	oui
« sens » « position »	oui

Tableau 13. Critères qui peuvent intervenir dans les procédures de construction semi-analytiques

Rappelons qu'une procédure semi-analytique consiste à construire le(s) symétrique(s) d'un ou plusieurs points de la figure F et à compléter la construction de F de manière globale à partir de ce(s) point(s). Ainsi, dans ce type de procédures, tous les critères de choix sont susceptibles d'intervenir.

Les raisons du choix des points particuliers de la figure par les élèves pour la mise en œuvre d'une procédure semi-analytique restent, dans la majorité des cas, implicites. Cependant, ces raisons peuvent parfois être repérées à partir de certaines actions réalisées, comme la construction d'une droite passant par un point ou par un segment particulier de la figure donnée, ou bien par l'identification d'un report de la distance d'un point de la figure donnée à l'axe de symétrie. L'élève peut choisir un ou plusieurs points de la figure. Ces points peuvent être par exemple :

- les extrémités d'un segment de F ou d'un arc de cercle (si F en a un) ;
- un point invariant de F sur l'axe (si F touche l'axe de symétrie) ;
- le centre d'un cercle (si F comporte des cercles) ;
- un centre de symétrie de F (si F en admet un) ;
- le sommet d'un angle à proximité de l'axe ;
- les points d'un axe de symétrie de la figure F.

Les contrôles qui peuvent intervenir dans la partie analytique d'une procédure du type semi-analytique concernent les critères « distance à l'axe » et/ou « direction ». La mise en oeuvre de ces contrôles permet de construire les images des points choisis. L'image de la figure sera construite ensuite globalement à partir de ces points, en fonction de la distance et/ou de la direction choisies. Dans cette construction globale, les contrôles liés aux critères « forme », « taille », « position » et « sens » sont susceptibles d'intervenir.

Comme dans les procédures globales, la combinaison des valeurs qui peuvent être attribuées à ces critères donne également 200 procédures. Cependant, soulignons que les contrôles liés aux critères « direction » et « distance à l'axe » interviennent dans la partie analytique de la procédure uniquement. Ainsi, les valeurs qui peuvent être combinées et les contrôles qui permettent leurs expressions sont montrés dans le tableau ci-dessous :

Critères	**Valeurs possibles**	**Contrôles**	
		Partie analytique de la procédure	Partie globale de la procédure
« direction »[34]	*orthogonale à l'axe* *horizontale* *verticale* *prolongement d'un segment de F* *autre*	Σortho Σhor Σvert Σprolong autre	
« distance à l'axe »	*conservée* *non conservée*	Σdist ---	
« forme »	*conservée* *non conservée*		Σforme ---
« taille »	*conservée* *non conservée*		Σtaille ---
« position » « sens »	*translation* *translation suivie de retournement* *rotation* *rotation suivie de retournement* *autre*		tous les contrôles associés à ces valeurs peuvent être exercés

Tableau 14. Contrôles susceptibles d'intervenir dans la construction de l'image de F par une procédure semi-analytique

Étant donné que dans la mise en œuvre d'une procédure semi-analytique, la perception globale que l'élève a de la figure est concernée, l'utilisation des procédures issues de cette combinaison permet l'aboutissement de la construction d'une figure image ayant les mêmes forme et taille que celle de départ, si les contrôles liés à la forme et à la taille interviennent dans la construction.

[34] Pour la valeur « autre », les contrôles sont à définir selon le cas.

5.3. Procédures analytiques

Rappelons que dans ce type de procédures, la figure symétrique de F est obtenue à partir de la construction d'images des points particuliers de F. Ainsi, si la figure F ne comporte pas de points particuliers, comme dans le cas d'une droite, ou d'un cercle dont le centre n'est pas tracé, il faudra choisir des points quelconques de ces figures pour mener à bien la construction.

<u>Procédures et critères</u>

Critères	Procédures Analytiques
« direction »	oui /non
« distance à l'axe »	oui/non

Tableau 15. Critères qui peuvent intervenir dans la mise en œuvre des procédures analytiques

Pour la construction des images des points, nous envisageons trois possibilités :

1. Les images des points de F sont construites par la méthode s'appuyant sur la propriété d'équidistance. Le seul contrôle intervenant est Σdist.

2. Les images sont construites par demi-tour autour d'un point sur l'axe. La figure image F' obtenue correspondra à une rotation de F autour d'un point O choisi et de l'angle 180°, comme l'illustre la figure ci-dessous :

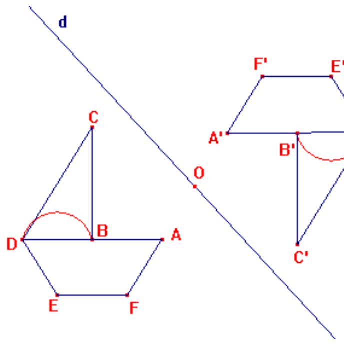


Figure 17. Figure image construite comme s'il s'agissait de la symétrie de centre O

Dans ce cas, le contrôle Σrotation serait mobilisé dans la construction de l'image de chaque sommet de la figure.

3. Les images sont construites dans une direction donnée, en conservant ou non l'égalité des distances des points à l'axe de symétrie. Les procédures de construction envisagées dépendent des valeurs attribuées aux critères « direction » et « distance à l'axe ». Les combinaisons des valeurs possibles donnent 10 procédures différentes. Ces valeurs et les contrôles associés sont les suivants :

Critères	Valeurs possibles	Contrôles
« direction »	*orthogonale à l'axe* *horizontale* *verticale* *prolongement d'un segment de F* *autre*	Σortho Σhor Σvert Σprolong contrôles à définir selon le cas
« distance à l'axe »	*conservée* *non conservée*	Σdist ---

Tableau 16. Contrôles susceptibles d'intervenir dans la construction de l'image de F par une procédure analytique

La mise en œuvre de ces procédures pour construire la figure s'appuie uniquement sur les critères direction et distance à l'axe, par conséquent seuls les contrôles théoriques interviennent. Les critères « taille », « forme », « sens » et « position » liés à la perception globale de la figure peuvent intervenir dans la phase de l'exécution et/ou de la vérification comme moyens de validation de l'action réalisée.

Prenons comme exemple la figure « Fig. 1a » (cf. Figure 1, p. 24) concernant la construction de l'image d'un triangle rectangle par rapport à un axe oblique sur la feuille. Comme nous l'avons dit, l'emplacement de ce triangle sur la feuille (angle droit en position prototypique) peut amener l'élève à choisir la direction horizontale. S'il reporte les distances des sommets à l'axe de l'autre côté de celui-ci dans cette direction, il obtiendra comme image un triangle dont la forme et la taille sont différentes, comme le montre la figure suivante :

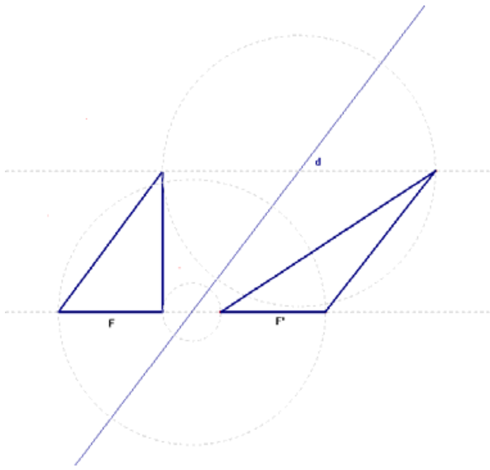


Figure 18. Exemple d'une construction de l'image d'un triangle rectangle par une procédure analytique

Si les contrôles Σforme et/ou Σtaille font partie de la structure de contrôle de la conception mobilisée, l'élève s'attendra à ce que la figure obtenue ait une évidente ressemblance avec la figure initiale. Le décalage entre la figure attendue et la figure obtenue peut l'amener à rejeter sa construction. Ceci témoignerait d'un conflit entre les contrôles mobilisés.

De manière générale, la mise en œuvre des procédures analytiques est plus susceptible d’aboutir à des conflits entre des contrôles théoriques et des contrôles perceptifs, contrairement aux deux types de procédures précédents où les contrôles perceptifs participent à la construction.

6. Conclusion

Rappelons que l’objectif de ce chapitre a été de modéliser a priori les connaissances d'élèves concernant la symétrie orthogonale dans les problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques. Nous avons voulu, ainsi, répondre aux questions de recherche concernant la caractérisation de conceptions d’élèves sur cette notion mathématique

En partant de l'hypothèse de Gaudin (2002) selon laquelle les contrôles rendent compte des critères qui renvoient au choix, à la décision, à l'adéquation et à la validité d'une action, nous avons réalisé une étude théorique de la notion de symétrie orthogonale qui nous a permis d'identifier les critères à prendre en compte dans la résolution des problèmes de construction et de reconnaissance, ainsi que les valeurs qu’ils peuvent admettre. La modélisation des contrôles que nous proposons s’appuie sur ces valeurs.

Nous avons considéré que la résolution des problèmes de construction de symétriques de figures comporte une phase d'action concrète sur le *milieu matériel* (la construction de la figure elle-même) et une phase de *validation*, une *action plus abstraite* au sens donné par Gaudin (2005). L'anticipation de l'action *concrète* que l'élève peut réaliser sur la figure nous a amenés à décrire en termes de contrôles les procédures de résolution de ce type de problèmes. Ces résultats apportent ainsi des éléments de réponse à la question Q1.

Toutefois, à partir de cette étude théorique nous n’avons pas pu accéder aux opérateurs. Étant donné que les opérateurs sont attestés dans l'action, il nous semble que nous ne pourrons accéder à ces éléments que par l'intermédiaire de l'analyse des productions des élèves. La question Q2 reste pour le moment sans réponse.

Par ailleurs, les procédures décrites sont spécifiques aux problèmes de construction. En effet, dans des problèmes de reconnaissance l’élève n’exécute pas nécessairement des actions concrètes sur la figure, ou du moins il ne laisse pas de trace de ces actions. La résolution de ce type de problèmes renvoie davantage à la *validation* d'un choix. Compte tenu de la nature implicite de l'action, nous n’avons pas les moyens de décrire les procédures de résolution des problèmes de reconnaissance comme nous l’avons fait pour les problèmes de construction.

Chapitre 4 : MODÉLISATION DE DÉCISIONS DIDACTIQUES

Dans ce chapitre, nous réaliserons dans un premier temps un état de l'art des travaux sur les décisions des professeurs. Dans cette étude, nous aborderons des éléments qui peuvent être déterminants dans les choix et décisions des professeurs. Dans un deuxième temps, nous présenterons des modèles de décisions didactiques généraux ainsi que les modèles spécifiques à la symétrie orthogonale que l'on trouve dans des travaux de recherche. A partir de cette étude, nous définirons les notions de choix et décision didactiques, nous proposerons un modèle de décisions didactiques et nous discuterons des éléments sur lesquels nous nous appuyons pour analyser les décisions didactiques prises par des professeurs participant à notre recherche.

1. Introduction

L'enseignement peut être vu comme une suite de prises de décisions par le professeur. L'acte de décider, que ce soit au niveau de macro-décisions ou de micro-décisions, au sens de Margolinas (cf. chapitre 2, p. 35), représente un moment très important de l'activité du professeur. Ainsi, la problématique de la prise de décisions par le professeur intéresse de plus en plus les chercheurs dans les domaines des sciences de l'éducation et de la didactique.

Dans le but de favoriser un apprentissage chez l'élève, le professeur prend des décisions. Pour ce faire, le professeur est confronté à l'incertitude car il peut être devant plusieurs choix. Quelle est la meilleure manière d'aborder un contenu ? Quels problèmes choisir ? À partir d'une réponse de l'élève, quelle est la manière la plus pertinente pour conduire un processus d'enseignement ?

Avant de continuer cette étude, nous avons besoin de préciser ce que nous comprenons par les mots « choix » et « décision ». Pour cela, reprenons un exemple donné par Margolinas (1993), où l'auteur fait bien la distinction entre « choix » et « décision » :

> *Exemple : Si je dis à mon voisin « Passe-moi le sel » et que celui-ci s'exécute, il a bien produit une action, mais n'a pris aucune décision. [...] Le voisin poli a eu pourtant bien des choix devant lui : refuser, prendre la salière de droite ou celle de gauche [...]. Nous répugnons pourtant à appeler décisions de tels choix. Mais nous pouvons imaginer des situations dans lesquelles une action aussi banale pourrait avoir toutes les caractéristiques d'une véritable décision (si cette personne sait que la salière de droite est reliée à un détonateur, et pas celle de gauche par exemple).*
>
> *Toute décision est donc liée à l'existence d'un choix [...]*
>
> Margolinas (1993, p. 110-111)

De cette citation nous retenons donc qu'un sujet peut prendre une décision seulement s'il identifie des choix possibles. Ainsi, nous considérons qu'un « choix », c'est la liberté ou la possibilité de choisir parmi plusieurs voies. La « décision », c'est l'action volontaire de faire le choix, de choisir une voie parmi les voies possibles.

2. Quelques éléments déterminants dans la prise de décisions du professeur

En préparant un projet local d'enseignement, le professeur prévoit des éventualités qui pourront se produire lorsqu'il sera devant ses élèves. Il détermine alors les objectifs d'enseignement visés et choisit les moyens pour y parvenir. Il organise ses actions futures en termes de choix de problèmes, de ressources pour mettre en place un dispositif d'enseignement, de temps et d'organisation du travail des élèves, etc. Il spécifie encore les méthodes d'évaluation qui permettront de vérifier d'une part, s'il y a eu l'apprentissage par l'élève et d'autre part, le fonctionnement ou le dysfonctionnement du dispositif mis en place. Dans cette phase de planification, le professeur est soumis à plusieurs contraintes. Perrin-Glorian (2002) identifie quelques-unes de ces contraintes :

> *[...] des contraintes qui viennent de l'institution scolaire (programmes, examens, horaire prévu...), de l'établissement (l'emploi du temps de la classe, manuel scolaire, les autres classes où il enseigne, collègues...), des nécessités de l'enseignement (évaluation), des élèves (niveau scolaire, origine sociale...), et de lui-même (son histoire, ses propres connaissances sur le sujet qu'il doit enseigner, ses préférences, sa tolérance au bruit...)*
>
> Perrin-Glorian (2002, p. 221).

La prise de décisions par le professeur dépendra alors fortement de ces contraintes.

Plusieurs recherches dans le domaine de la didactique des mathématiques en France ont été menées pour étudier les éléments susceptibles d'influencer les choix des professeurs et par conséquent, leurs prises de décisions. Parmi elles, nous pouvons citer les travaux de Soury-Lavergne (1998), Margolinas et al. (2005) et Bloch (2005). Ces travaux prennent en compte la classification des connaissances professionnelles du professeur proposée par Shulman (1986, 1987). Dans cette classification, Shulman identifie les trois composantes suivantes : *la connaissance du contenu*, *la connaissance pédagogique* et la *connaissance pédagogique du contenu*. Cette classification a suscité de nombreuses discussions chez les chercheurs en didactique des mathématiques à cause de la non prise en compte de la dimension didactique, comme en témoignent Margolinas et al. (Ibid.). Nous reprenons ici le point de vue de Steinbring (1998) cité par ces auteurs :

> *Steinbring (1998) stressed the fact that the distinction between content knowledge and pedagogical knowledge is not independent of the model of the teaching/learning process. In a linear model of this process, "mathematical content knowledge is primarily needed during the first step in this process, whereas pedagogical content knowledge is necessary for the conditions and forms of the transmission of school mathematics" (p. 158). But if we see teaching and learning mathematics as an autonomous system, "pedagogical content knowledge does not primarily serve to organize the transmission of mathematical content knowledge" (p. 159). Therefore, he states that "a new type of professional knowledge for mathematics teachers is needed – a kind of a mixture between mathematical content knowledge and pedagogical knowledge" (p. 159)*
>
> Margolinas et al. (2005, p. 206)

Les auteurs rajoutent alors à cette classification la notion de connaissances didactiques, pour combler ce manque. Les connaissances didactiques sont définies comme la partie de la connaissance du professeur qui est liée à la connaissance mathématique à enseigner :

> *Therefore, from our perspective, the teacher's didactic knowledge refers to the part of this knowledge, which is related to the mathematical knowledge to be taught. In this sense, knowing that (something is so) and knowing why (it is so) (Shulman, 1986) are part of didactical knowledge if they are related to some mathematical content.*
>
> Margolinas et al. (Ibid. p. 207)

Bloch (ibid.) reprend les trois composantes de la classification de Shulman (ibid.) dans cette même perspective et les décrit comme suit :

> *- Le domaine des compétences mathématiques ;*
> *- Un domaine que nous pouvons appeler didactique pratique ou pratique de la didactique (correspondant plus ou moins au Pedagogical Content Knowledge de Shulman) ;*
> *- Le domaine pédagogique des régulations dans la classe.*
>
> Bloch (2005, p.2)

Ainsi, dans ce qui suit nous allons étudier des éléments qui peuvent être déterminants dans la prise de décisions des professeurs, à la lumière de ces trois composantes :

2.1. Domaine des compétences mathématiques

Ces compétences relèvent des études universitaires suivies par les professeurs, ainsi que d'autres formations relatives au domaine des mathématiques (mathématiques du secondaire, préparation au CAPES…). D'après Bloch (ibid.), les conceptions de ce qu'est un bon professeur de mathématiques, construites par le professeur pendant son expérience comme élève et comme étudiant en mathématiques, peuvent être à l'origine de ses conceptions concernant la manière dont les mathématiques doivent être enseignées. D'après la littérature, les compétences relatives à ce domaine sont plus évidentes dans l'enseignement d'un professeur débutant en comparaison avec celui d'un professeur expert. A propos des compétences mathématiques, Bloch affirme :

a) sur les mathématiques :

> *Les étudiants acquièrent à l'Université une conception très formelle des mathématiques : le savoir déclaré est supposé transparent, mais non fonctionnel […]. Pour eux, un théorème a une preuve, mais pas de justification en termes de résolution de problèmes car la théorie mathématique est sa propre justification. [...].*

b) sur l'enseignement des mathématiques :

> *Pour les étudiants sortant de l'Université, un bon cours de mathématiques est un cours frontal, de type cours dialogué, où le professeur dit "la loi mathématique". Ils n'imaginent pas que cette loi puisse être contestée, ou ne pas être comprise, surtout à un niveau comme le secondaire où n'interviennent que des mathématiques élémentaires.*
>
> Bloch (2005. p. 3)

2.2. Domaine de la didactique pratique ou pratique de la didactique

Selon Bloch (ibid.), ce domaine concerne la capacité du professeur « d'organiser et gérer l'activité des élèves dans la classe de façon à ce que ceux-ci rencontrent effectivement des éléments du savoir mathématique visé » (ibid. p. 2), cette capacité étant liée aux connaissances mathématiques et didactiques ainsi qu'au contrat didactique.

En général, le professeur est supposé avoir un rapport adéquat avec le savoir qu'il doit enseigner. Pour réaliser un « bon » enseignement des mathématiques, il doit alors avoir une bonne maîtrise de l'objet mathématique qu'il veut enseigner. Cependant, cette maîtrise ne semble pas suffisante pour réaliser cet enseignement. Pour que ceci se produise, il faudra que le professeur soit capable d'analyser les connaissances de l'élève sur la notion en jeu à un moment donné, qu'il soit capable de reconnaître et d'analyser les sources d'éventuelles erreurs commises par l'élève, qu'il soit capable de créer des situations didactiques afin d'aider l'élève à dépasser ces erreurs et de lui permettre d'apprendre des connaissances nouvelles, etc. En d'autres termes, il faudra que le professeur soit capable de mettre en place une « intervention mathématique pertinente ». D'après Bloch (2005) :

> *" Une intervention mathématique est pertinente si elle rend compte dans une certaine mesure de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé ; ou, s'agissant d'enseignement, si elle permet au moins de progresser dans l'appréhension de cette fonctionnalité, avec des énoncés de propriétés mathématiques contextualisées ou non, des arguments appropriés sur la validité de procédures ou sur la nature des objets mathématiques.*
>
> Bloch (2005, p. 8)

Ainsi, le domaine de la didactique pratique est en étroite relation avec celui relevant des compétences mathématiques. Portugais (1996) affirme que le savoir didactique contient le savoir mathématique, car les connaissances didactiques du professeur dépendent de ses connaissances des mathématiques.

Bloch (2005) met en évidence la complexité d'analyser ce domaine des connaissances du professeur. D'après l'auteur, cette complexité est due au fait qu'il s'agit d'un domaine relevant des savoirs et des situations précis.

2.3. Domaine pédagogique

Ce domaine est défini comme celui relevant de la formation professionnelle : elle est liée à proprement parler au métier professoral. Les connaissances sous-jacentes à ce domaine correspondent aux connaissances pédagogiques, comme les conceptions d'apprentissage, apprises dans des cours de formation spécialisés comme ceux de la formation des professeurs en I.U.F.M.[35] dans le système éducatif français.

Avant d'aborder les conceptions d'apprentissage, reprenons une question posée par Barbin (1991, p. 130) et l'analyse que l'auteur fait à son propos. La question est la suivante : « Que se passe-t-il, par exemple, si un enseignant qui considère le savoir comme un discours, est invité à enseigner le savoir comme un processus ? ». Comme éléments de réponse à cette question, l'auteur présente cinq difficultés auxquelles cet *enseignant* (en mathématiques) serait confronté dans ce cas :

1. *Rôle de l'évidence et de la rigueur*. D'après l'auteur, l'*enseignant* serait confronté au statut de l'erreur de l'élève, qui du point de vue de l'enseignement comme un processus n'est pas considérée comme une faute de l'élève. Elle est même considérée comme un « des moments incontournables dans la construction des connaissances » (ibid., p. 130).

2. *Contenus de savoir*. Cette difficulté concerne le nombre de connaissances éventuellement construites par les élèves. Selon l'auteur (ibid. p. 131), un *enseignant* qui perçoit l'enseignement d'un savoir comme « un produit » et non comme un « processus », est susceptible de juger son enseignement par ce critère.

3. *Signification des activités des élèves*. Dans l'enseignement d'un savoir comme un processus, la problématique à laquelle doit être soumis l'élève pour qu'il puisse construire ses connaissances, doit varier en fonction de son niveau scolaire. Pour illustrer ceci, l'auteur prend comme exemple un élève du niveau secondaire. Pour que cet élève puisse construire une certaine rationalité mathématique, les savoirs doivent lui être présentés parfois à partir des « situations non mathématiques ». L'auteur souligne alors que l'*enseignant* en question aurait dans ce cas l'impression « de faire du bricolage », et non l'enseignement des mathématiques.

4. *Signification des concepts et des savoirs mathématiques*. Barbin (ibid.) souligne que le savoir dans le cadre de l'enseignement comme un processus prend sens à partir de la résolution de problèmes, tandis que l'*enseignant* qui envisage l'enseignement d'un savoir par le discours privilégie plutôt l'abord des savoirs par des définitions. Ainsi pour cet *enseignant*, l'enseignement d'un savoir mathématique à partir d'une entrée par la résolution de problèmes constituerait une source de difficulté.

5. *Signification de la démonstration*. Dans le cadre de l'enseignement d'un savoir comme un processus, l'élaboration d'une démonstration ne se réduit pas seulement à une déduction. Il s'agit de « construire des objets mathématiques et construire la rationalité mathématique elle-même ». En revanche, dans une approche où le savoir mathématique est caractérisé par le discours, « la démonstration se réduit à un texte qui doit respecter les formes du raisonnement

[35] Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

déductif » (ibid. p. 131). Le non respect par l'élève de ces normes représenterait alors une difficulté pour cet enseignant.

Comme le montre le modèle des niveaux de l’activité de l’enseignant (cf. chapitre 2, p. 35), la conception d’apprentissage et surtout d’enseignement du professeur est un élément qui peut agir sur son milieu. C'est le cas de ce professeur. Ces difficultés sont liées à sa conception d’enseignement et d’apprentissage. Indépendamment de l'influence portée par d'autres contraintes auxquelles est soumis le professeur (par exemple des orientations des programmes scolaires), ses conceptions sur la nature de l'enseignement et de l'apprentissage peuvent influencer fortement ses choix et ses décisions didactiques.

Ci-après nous présentons dans les grandes lignes les trois principales conceptions d’enseignement et d’apprentissage relatées dans la littérature de référence : les conceptions transmissive, béhavioriste et constructiviste. Nous aborderons ces conceptions en mettant en évidence leurs origines, le rôle du professeur et de l’élève et le statut de l’erreur. Pour chacune d’elles, nous mettrons aussi en relief comment le professeur prend l'information sur l’activité de l'élève, et comment il élabore des situations didactiques.

Conceptions d’enseignement/apprentissage

1. Conception transmissive

Cette conception met l’accent sur la nature du savoir mathématique. Elle s’appuie d’une part, sur le modèle empiriste de l’apprentissage (Locke, 2001) qui suppose que la connaissance vient aux êtres humains entièrement du monde extérieur. Il suppose alors que l'esprit humain est vierge de toute connaissance au départ et que celle-ci nous est apportée par l'expérience et par l'éducation (Astolfi, 1997). C'est le principe de la « table rase ». D’autre part, cette conception s’appuie sur le modèle de communication de transmission télégraphique développé par Shannon & Weaver (1949) où la communication est réduite à la transmission d'une information. Ainsi, d’après cette conception l’acquisition du savoir[36] par le sujet est le résultat d'une transmission, d’une communication et l’apprentissage se fait uniquement par accumulation d’informations. Cette conception ne considère pas que l’élève soit capable de trouver lui-même les éléments du savoir. Le seul moyen de les lui apprendre est de les lui dire, exposer et montrer.

[36] Dans cette conception, un « savoir » est compris comme synonyme de « connaissance ».

Rôle du professeur

Le professeur qui est le détenteur du savoir, doit le communiquer clairement afin de le faire apprendre à l'élève. Il doit exposer le savoir, puis questionner et juger son appropriation par l'élève.

Rôle de l'élève

L'élève doit reproduire ce que lui dit le professeur : il est passif dans son processus d'apprentissage. Il doit être attentif, écouter, noter, répéter et appliquer. Il apprend par imitation et par imprégnation (Ragot 1991, p. 17). Il a, seul, la charge de combler la distance entre le discours et a mise en œuvre des connaissances.

Statut de l'erreur

Dans cette conception, il n'y a pas de place pour l'erreur, qui est révélatrice d'un dysfonctionnement : soit c'est le professeur qui a mal enseigné, soit c'est l'élève qui a mal compris ce qu'a dit le professeur. Cependant, en règle générale, l'erreur est attribuée à l'élève. L'échec à une tâche donnée par le professeur signifie pour ce dernier que l'élève « ne sait pas », « il n'a pas appris », « il n'a pas compris », ou bien « il confond tout » (Ragot 1991, p. 18). L'erreur est alors perçue par le professeur comme un défaut de l'élève (manque de travail, défaut de caractère...). Ainsi, lorsqu'elle se produit il faut la sanctionner, et surtout ne pas la montrer, de crainte que ce mauvais exemple ne se fixe pas dans la mémoire des autres (ibid.).

Prise d'information par le professeur et élaboration de situations didactiques

Selon Ragot (ibid.), dans cette conception, les tâches proposées aux élèves doivent avoir comme objectifs :

> *- de lui faire pratiquer ce qu'on vient de lui enseigner [...] ;*
>
> *- de contrôler la maîtrise de ce qu'on lui a enseigné [...] ;*
>
> Ragot (1991, p. 18)

L'état de savoir se décrit dans une logique binaire : l'élève sait, ou ne sait pas. On considère que lorsqu'un élève a réussi un exercice, il doit pouvoir réussir tout exercice qui suppose le même savoir. Ainsi, la réussite de l'élève autorise le professeur à aborder une nouvelle notion et envisager le réinvestissement des nouveaux acquis dans la suite de l'enseignement. En cas d'échec, le professeur doit envisager de tout recommencer, répéter et faire plus en proposant davantage d'exercices.

2. Conception béhavioriste (comportementaliste)

Cette conception s'appuie sur le modèle d'apprentissage béhavioriste (Skinner 1938) qui fait appel notamment au conditionnement « stimuli-réponse » (Pavlov 1927). Le principe de cette conception est que la réussite de l'élève doit être récompensée (renforcements positifs) et l'échec, au contraire, sanctionné (renforcements négatifs) et, si possible, évité, car apprendre par renforcement négatif est peu économique (Ragot 1991, p. 20).

Cette conception met l'accent non plus sur la nature du savoir mathématique, mais sur la logique et la rigueur de ce savoir qui détermine l'organisation de son enseignement. L'apprentissage se fait par accumulation de savoirs, les relations entre ces savoirs se font naturellement, par la nécessité des liens logiques qu'ils entretiennent.

Rôle du professeur

Le professeur doit, en suivant la logique interne du savoir, le présenter à l'élève élément par élément. Il doit alors être capable de décomposer ce savoir en « unités discrètes » et les présenter de manière à permettre à l'élève de percevoir les liens entre elles (Ragot, 1991, p. 19). Il a l'ardue responsabilité de concevoir des exercices progressifs, de guider les élèves dans leur réalisation et de leur communiquer les rétroactions nécessaires dans le cheminement de ces étapes. L'essentiel du travail du professeur se fait donc en amont du processus de l'enseignement. Il consiste à :

- choisir un objectif opérationnel, le décomposer en « unités de savoir » ;
- construire une séquence d'enseignement permettant le développement chez l'élève des compétences relatives à ces unités ;
- construire le contrôle d'acquis permettant de reconnaître la présence de compétences visées.

Rôle de l'élève

Dans cette conception, l'élève est amené à suivre pas à pas la progression définie par le professeur. Il n'a pas à prendre des initiatives. Il suffit qu'il soit motivé, fasse attention aux instructions du professeur et ait une bonne discipline dans le travail personnel.

Statut de l'erreur

Dans cette conception, l'échec de l'élève ne peut provenir de la séquence d'enseignement proposée par le professeur si celui-ci l'a bien préparée, en particulier s'il a bien identifié des unités minimales de savoir pour lesquelles il n'y a généralement qu'une réponse possible. Ainsi, l'erreur est une responsabilité de l'élève qui n'a pas suivi, pas travaillé, pas compris.

Prise d'information par le professeur et élaboration de situations didactiques

Dans cette conception, la prise d'informations par le professeur se fera à partir de la comparaison entre les performances actuelles de l'élève et celles établies a priori par le professeur. En amont de l'apprentissage, le contrôle des pré-requis permet de prendre d'éventuelles décisions par rapport à l'opportunité d'engager tel ou tel élève dans un nouvel apprentissage. Les informations recueillies en aval de l'apprentissage peuvent conduire l'enseignant à mettre en place des actions de remédiation (exercices individuels, travail supplémentaire...) si l'état actuel de savoir chez l'élève est reconnu comme insuffisant pour continuer d'apprendre.

3. Conception constructiviste

Dans cette conception qui s'appuie sur le modèle constructiviste de l'apprentissage développé par Piaget (ibid.), on s'intéresse surtout aux conditions de construction du savoir mathématique.

Apprendre, c'est construire ses connaissances. La connaissance est ainsi une construction de l'élève, ce qui lui donne un statut différent de celui sous-jacent aux conceptions précédentes.

Dans ce modèle, on suppose que l'élève possède, dans sa structure cognitive, des « schèmes » nécessaires à son apprentissage, ce qui peut lui permettre de répondre de façon adéquate aux situations qu'il a déjà rencontrées. L'élève apprend au travers de son interaction avec la situation (le problème) à laquelle il est confronté. La confrontation à une situation nouvelle peut provoquer un déséquilibre, c'est-à-dire un conflit qui l'amènera à une régression (provisoire) de son état de connaissances à propos de la notion en jeu. La recherche d'une solution à cette situation peut permettre la rééquilibration, la modification des schèmes favorisant la construction d'une nouvelle connaissance à partir d'un processus « d'assimilation et d'accommodation ».

La didactique des mathématiques emprunte à cette conception l'hypothèse de construction des connaissances par l'élève. La théorie des situations didactiques reprend la notion de *milieu*, pour modéliser les éléments sur lesquels porte l'action du sujet dans le processus de construction des connaissances.

Rôle du professeur

Pour qu'il y ait apprentissage chez l'élève, le professeur doit organiser la rencontre de celui-ci avec un problème pour la résolution duquel les savoirs dont il dispose actuellement sont insuffisants. Le savoir prend du sens comme réponse particulièrement adaptée aux questions du problème. Étant donné que l'élève construit ses connaissances à partir de ce qu'il sait déjà, il est utile pour le professeur de connaître l'état de connaissances de l'élève au moment où il envisage un nouvel apprentissage, moins dans une perspective de pré-requis que dans la perspective de recenser les savoirs présents et de les prendre en compte pour élaborer la situation didactique plus efficace.

Rôle de l'élève

Dans cette conception, l'élève exerce à son niveau les activités cognitives du mathématicien : recherche, production de conjectures, exploration, essais, vérification. Il « construit » les mathématiques (Ragot 1991, p. 26).

Statut de l'erreur

Dans cette conception, l'erreur est positivée, elle est au cœur même du processus d'apprentissage par l'élève car elle fait partie de la reconstruction du savoir par l'élève. L'erreur est un indicateur des savoirs, des représentations mises en jeu dans les ensembles de problèmes où elle se manifeste. L'état de savoir d'un sujet peut être considéré comme un système en équilibre. Tout apprentissage y introduit une perturbation (déséquilibre) dont l'erreur est le témoin : elle permet de voir comment le système se réorganise, évolue.

La didactique emprunte ce statut de l'erreur au modèle piagétien. Brousseau (1983) affirme que :

> *L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée.*
>
> Brousseau (1983, p. 171)

Prise d'information par le professeur et élaboration de situations didactiques

La prise d'information par le professeur portera non seulement sur les produits finis, mais également sur la façon de procéder de l'élève. L'observation, par le professeur, de l'activité de l'élève deviendra pour lui un élément déterminant pour la construction de situations didactiques. Ainsi, si le professeur vise l'apprentissage, il devra concevoir des situations porteuses d'un conflit qui devra être dépassé par l'élève dans son processus d'apprentissage.

3. Modèles de décisions didactiques

Aussi bien en sciences de l'éducation qu'en didactique des mathématiques, des modèles concernant les décisions didactiques ont été proposés. Leur caractéristique commune fait émerger au moins deux étapes dans le processus d'enseignement. La première consiste à révéler l'état de connaissances initial de l'élève, où les décisions la concernant sont prises dans le but d'établir un « diagnostic ». Dans ces modèles, un diagnostic est compris soit comme l'identification de l'état de connaissances de l'élève sur une notion à un moment donné, soit comme le repérage d'erreurs de l'élève, ou encore comme l'identification des procédures utilisées par l'élève dans la résolution d'un problème. Ce diagnostic établi par le professeur servira par la suite pour l'élaboration des séquences didactiques qui amèneront l'élève à construire une nouvelle connaissance.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques modèles généraux de décisions didactiques, et ensuite des études concernant la prise de décisions à propos de la symétrie orthogonale.

3.1. Modèle proposé par Piéron

Dans le contexte de l'enseignement d'éducation physique et sportive (E.P.S.), Piéron (1993) a étudié les comportements des professeurs et les décisions qu'ils prenaient lors de la préparation de leurs cours. Il en a déduit un modèle de prise de décisions qui met en relief deux phases dans le processus d'enseignement, phase « pré-interactive » et phase « interactive » :

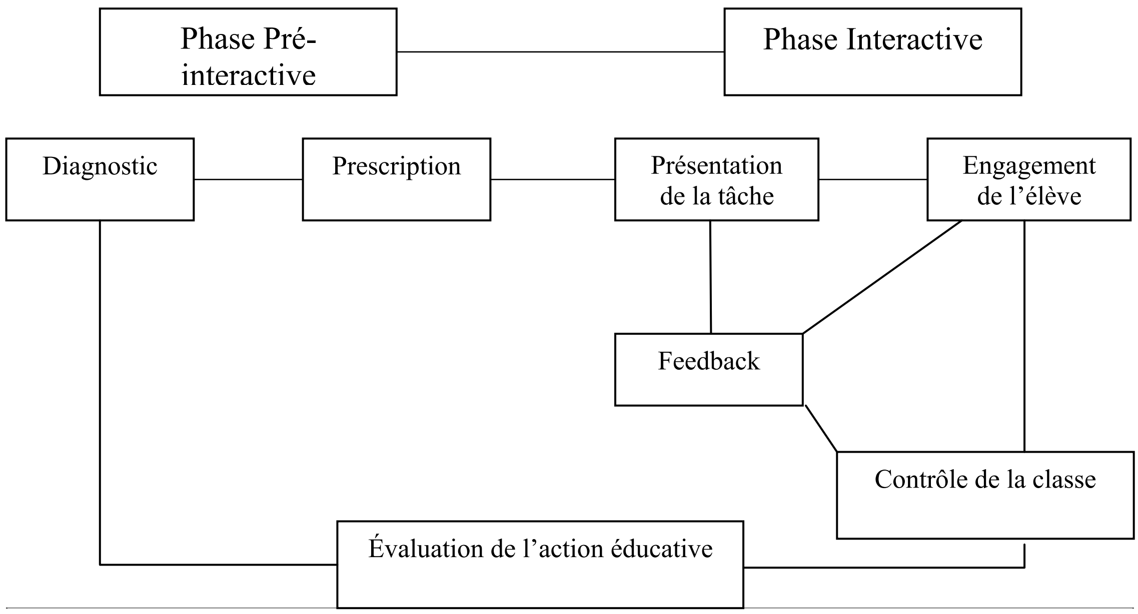


Schéma 8. Modèle de prise de décisions en classe (Piéron, 1993, p. 7)

La phase pré-interactive concerne la planification du cours par le professeur, l'élève n'étant pas présent physiquement. A ce moment-là, le professeur prend des décisions concernant en particulier le choix des tâches, des moments de les proposer aux élèves et des moyens de rétroactions possibles. La phase interactive est la situation de la salle de classe elle-même. Ici, le professeur met en place les décisions prises durant la phase pré-interactive. Il présente aux élèves les tâches choisies, évalue l'activité, les réactions ainsi que les comportements des élèves, ce qui l'amène à prendre d'autres décisions relatives à l'évaluation et au réajustement du processus d'enseignement. Dans ce modèle, les deux phases ne sont pas isolées l'une de l'autre, car une étape d'évaluation de l'action entreprise par le professeur les relie en boucle.

3.2. Modèle proposé par Charnay et Mante

La motivation de Charnay et Mante (1992) est d'abord la recherche des causes d'erreurs fréquentes des élèves pour pouvoir, ensuite, proposer une situation d'apprentissage pour y remédier. C'est pourquoi ils se sont posé des questions relatives à l'apprentissage (comment nos élèves apprennent-ils ?) ainsi qu'à l'enseignement (qu'est-ce qui doit caractériser les activités que je propose à des élèves ?). Dans le but de répondre à ces questions, ils ont proposé le modèle suivant :

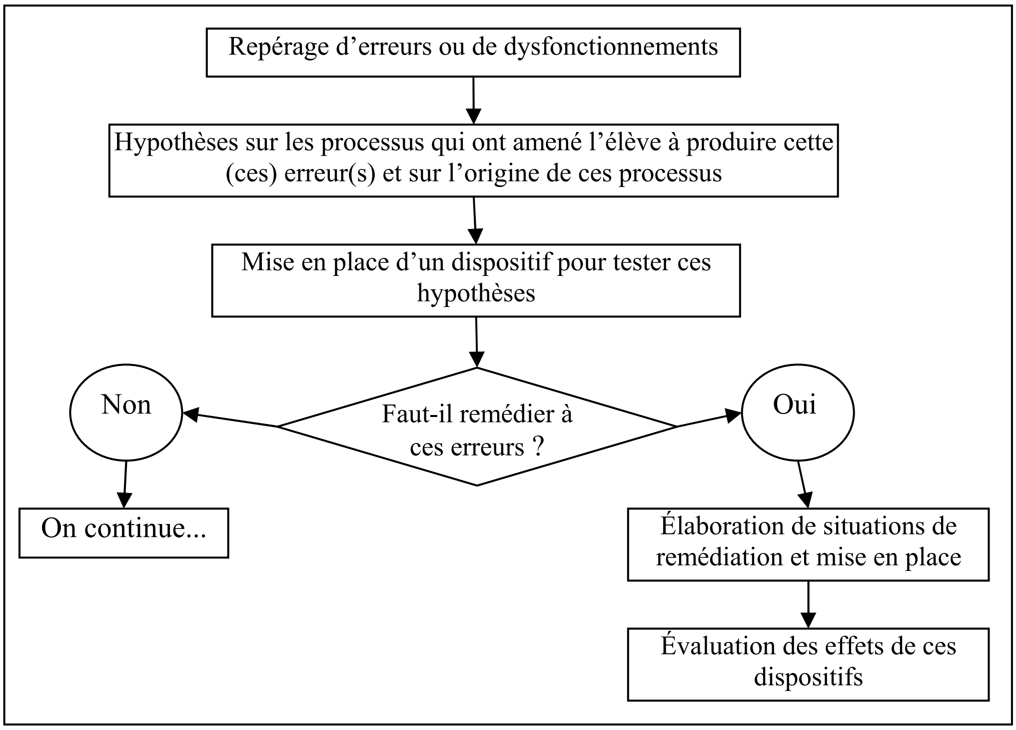


Schéma 9. Modèle de décisions didactiques proposé par Charnay & Mante (1992, p. 6)

Ce modèle précise la case « feedback » du précédent. De plus, le diagnostic se trouve aussi dans la phase interactive.

Ce modèle prévoit une phase où des hypothèses sont émises concernant l'origine des erreurs des élèves. Parmi les hypothèses possibles, les auteurs soulignent : la conception de l'apprentissage qui soutient le travail du professeur ; les caractéristiques de l'élève (les erreurs ont une origine ontogénique, ou bien elles sont dues aux limitations des capacités dans le domaine du traitement de l'information, par exemple), ou encore les attentes réciproques du professeur et de l'élève à propos du type de tâche à résoudre (contrat didactique). Une fois le diagnostic établi, une première décision didactique doit être prise : faut-il remédier ou non à ces erreurs ? Les auteurs signalent que cette décision va dépendre du jugement du professeur au sujet des conséquences que l'erreur peut apporter à tout apprentissage ultérieur et de la conception de l'apprentissage de ce professeur (ibid. p. 18-20) : Cette erreur est-elle néfaste à l'apprentissage ultérieur ? Est-elle utile à l'acquisition d'autres concepts ? Dans le cas où le professeur décide que l'erreur doit être corrigée, un enchaînement de situations est mis en place. Le choix des activités à proposer sera également effectué en fonction de l'origine de l'erreur précédemment identifiée, et aussi en fonction de la conception de l'apprentissage du professeur. Une fois ce dispositif mis en place, le modèle prévoit un nouveau diagnostic visant d'une part, à aider l'élève à prendre conscience de son apprentissage et d'autre part, à évaluer l'efficacité du dispositif de remédiation.

3.3. Modèle proposé par Tahri

L'objectif de Tahri (1993) a été d'étudier les décisions didactiques des professeurs dans le contexte de la symétrie orthogonale. Pour ce faire, elle a conçu un dispositif lui permettant d'analyser les décisions prises par des professeurs. Dans son dispositif expérimental, un tuteur hybride[37] constitué de deux tuteurs humains (des professeurs) et un tuteur artificiel, a été mis en interaction avec un binôme d'élèves dont il a dû piloter l'apprentissage. L'interaction entre les trois tuteurs a été analysée de manière à faire émerger et d'expliciter les critères des professeurs concernant les décisions qui portent sur le choix des problèmes. Les décisions ont pu être prises soit en partie de manière automatique et en partie par des tuteurs humains, soit en totalité par les tuteurs humains si ceux-ci n'étaient pas en accord avec les propositions du tuteur artificiel. Dans la démarche expérimentale, deux tuteurs humains travaillant ensemble avaient pour tâche d'examiner l'écran de l'élève[38] auquel ils avaient accès à partir de leur poste, de se mettre d'accord sur le diagnostic des procédures et de prendre des décisions didactiques, en acceptant ou non les propositions du tuteur artificiel.

Douze binômes d'une classe de cinquième ont participé à cette recherche, en utilisant une version du logiciel Cabri Géomètre préparée pour cette expérimentation. Lors de la prise de décisions, les tuteurs humains ont dû réagir aux difficultés des élèves liées soit à la conception de la symétrie, soit à l'utilisation du logiciel Cabri Géomètre. Le scénario d'une séance de travail des tuteurs humains peut être représenté par le schéma ci-dessous :

[37] Pour en savoir plus sur la conception du tuteur hybride utilisé dans cette recherche, on se reportera à Tahri (1993, p. 76).

[38] Les élèves travaillaient avec le logiciel Cabri Géomètre, mais ils ne savaient pas que des professeurs accompagnaient leur travail en temps réel.

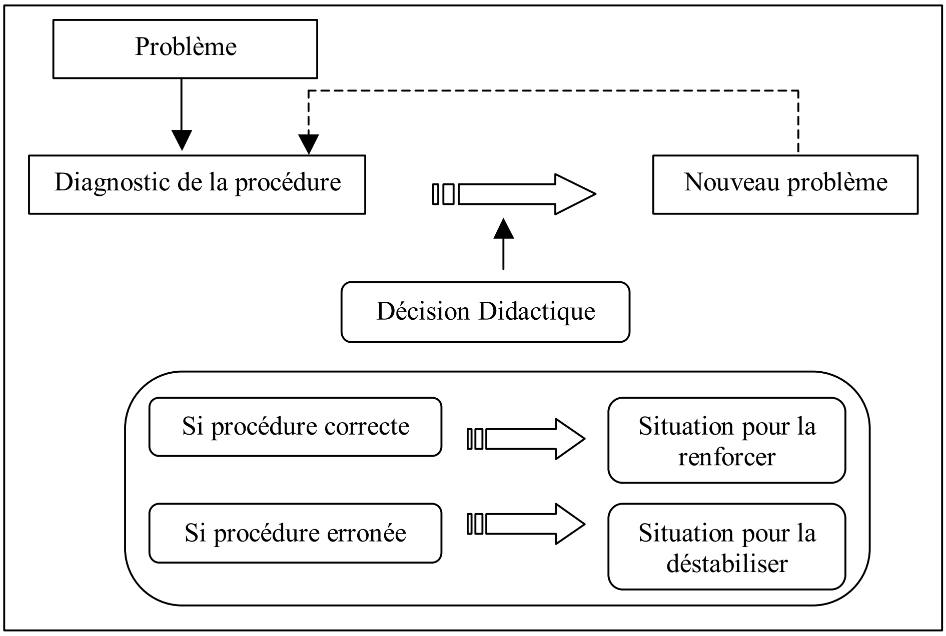


Schéma 10. Modèle de décisions didactiques proposé par Tahri (1993) : schéma simplifié d'une séance de travail des tuteurs humains (Lima &Trgalová, 2005)

Les tuteurs humains prenaient des décisions concernant le diagnostic et le feedback[39], en fonction de la tâche proposée et de leurs interprétations de la procédure utilisée par l'élève. Pour cela, ils connaissaient l'ensemble des problèmes qu'ils pouvaient proposer, ainsi que la typologie des procédures de construction susceptibles d'être mobilisées par les élèves. Le diagnostic de procédures était établi à partir de l'observation des objets géométriques produits par les élèves, des relations entre ces objets, ainsi que du discours tenu par les élèves à propos de ces objets. Ainsi, pour choisir un nouveau problème, les tuteurs humains ont considéré trois aspects : la nature de l'objet du savoir en jeu (la symétrie orthogonale), les éléments de cet objet (axe, segment...) et les relations entre ces éléments.

Les résultats montrent que les procédures utilisées par les élèves sont plutôt de type global et analytique et que, pour certains élèves, les procédures ont évolué d'une procédure globale vers une procédure analytique. D'après l'auteur, une explication de ce passage de l'aspect global à l'aspect ponctuel vient de l'enchaînement des situations pertinentes proposées par les professeurs.

Étant donné notre intérêt pour les prises de décisions des professeurs concernant la symétrie orthogonale, dans ce qui suit nous présentons le déroulement d'une séance de travail des

[39] Tahri (1993, p. 21-22) définit ainsi ces deux types de décisions : les décisions relevant du diagnostic portent sur l'état courant du système de connaissances que l'on peut identifier chez l'élève à propos du savoir en jeu. Ces décisions portent sur « les conceptions de l'élève » et se réfèrent à un « modèle de l'apprenant ». Quant aux décisions relatives au feedback, elles peuvent porter sur une action au sein d'une situation-problème donnée comme elles peuvent mettre en jeu le choix de la succession d'une situation-problème à une autre lors du fonctionnement d'une séquence didactique.

tuteurs humains (professeurs) et leurs prises de décisions didactiques dans un cas de réussite, ainsi que dans un cas d'échec des élèves aux tâches proposées.

<u>Décisions didactiques relatives à la symétrie orthogonale</u>

Nous présentons ici un exemple des décisions prises par les tuteurs humains dans le cadre de la recherche de Tahri, d'abord dans un cas de réussite et ensuite dans un cas d'échec. Rappelons que le problème résolu par les élèves est celui de la construction du symétrique d'un segment par rapport à une droite. Les variables didactiques considérées dans l'analyse sont les directions du segment et de l'axe de symétrie sur la feuille (oblique, verticale, horizontale) ; l'intersection de l'axe de symétrie avec le segment (le segment touche l'axe, le segment coupe l'axe, l'intersection du segment avec l'axe est vide) et l'angle formé par ces deux éléments (0°, 90°, angle quelconque).

Décisions didactiques dans un cas de réussite (Tahri p. 171-173)

La séquence de problèmes est proposée dans l'objectif de mettre à l'épreuve les connaissances des élèves, et les problèmes sont ainsi peu à peu complexifiés.

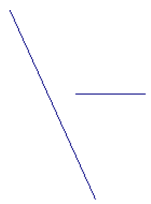
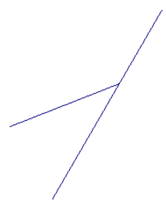
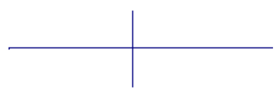
Problème initial : axe vertical, segment oblique, intersection vide et angle quelconque 	*Pb1* : axe oblique, segment horizontal, intersection vide et angle quelconque 	*Pb2* : axe oblique, segment non orthogonal à l'axe avec une extrémité sur l'axe 	*Pb3* : un axe perceptivement médiatrice du segment 

Tableau 17. Séquence de problèmes proposée par les tuteurs humains à des élèves dans un cas de réussite (Tahri, 1993)

Lors du choix du « problème initial » pour réaliser un premier diagnostic de procédures, les tuteurs humains ont estimé que la verticalité de l'axe pouvait être un élément facilitateur de la résolution du problème par les élèves. Pour résoudre ce problème, les élèves ont utilisé les propriétés correctes, orthogonalité à l'axe et report de distances, pour construire les symétriques des deux extrémités du segment, et ils ont ainsi obtenu la réponse correcte. Face à cette réussite des élèves, les tuteurs humains ont pris la décision de modifier les valeurs des variables « direction de l'axe de symétrie » et « direction du segment », en leur soumettant un problème où l'axe est oblique et le segment horizontal, avec l'objectif de tester la procédure de rappel horizontal, d'autant plus que dans le problème initial, le rappel orthogonal peut être confondu avec le rappel horizontal. Les élèves ont utilisé la même procédure de résolution. Les tuteurs humains ont cherché à complexifier davantage la tâche, afin de tester la robustesse de la procédure utilisée par les élèves. Dans cette perspective, ils ont proposé le problème Pb2 où le segment a une extrémité sur l'axe. En voyant les élèves réussir encore, les tuteurs décident de leur envoyer le problème Pb3 où le segment est globalement invariant (l'axe de symétrie est perceptivement la médiatrice du segment), qu'ils jugeaient d'une grande complexité. L'objectif de cette décision était d'amener les élèves au-delà de « l'algorithmisation » de la procédure de telle sorte qu'ils s'interrogent sur la signification de la notion de symétrie favorisée par cette invariance globale. L'accomplissement de toutes les étapes de la séquence permet, aux yeux des tuteurs humains, d'attester l'acquisition de la notion de symétrie orthogonale par ces élèves.

En résumé, la logique sous-jacente aux décisions des tuteurs humains pour complexifier le problème, a consisté à jouer avec la propriété d'invariance des points sur l'axe. Le problème initial et le problème Pb1 (cf. Tableau 17) ne mettent pas en jeu cette propriété, et pour les résoudre, l'élève peut construire les symétriques des deux extrémités du segment. Le problème Pb2 met en jeu cette propriété, sa résolution par l'élève nécessite alors une réduction de la procédure (construction d'une seule extrémité du segment), ce qui rend le problème plus complexe. Enfin, l'invariance du segment entier dans le Pb3 ne nécessite aucune construction lors de sa résolution, ce qui peut perturber les élèves qui pensent qu'il faut faire une construction pour résoudre ce problème.

Décisions didactiques dans un cas d'échec (Ibid. 187-190)

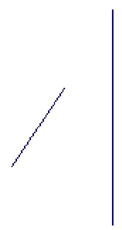
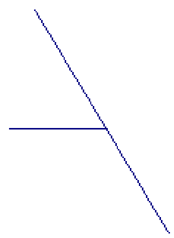
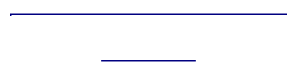
Problème initial : axe vertical, segment oblique, intersection vide et angle quelconque 	*Pb1* : axe oblique, segment horizontal, segment touche l'axe et angle quelconque 	*Pb2* : axe et segment horizontaux et intersection vide 

Tableau 18. Séquence de problèmes proposée par les tuteurs humains à des élèves dans un cas d'échec (Tahri, 1993)

En analysant la réponse des élèves au problème initial, les tuteurs humains ont diagnostiqué une procédure de construction globale erronée, qui renvoie à la conception « parallélisme ». Pour produire une situation d'apprentissage chez ces élèves, ils ont proposé le problème Pb1 où le segment a une extrémité sur l'axe. La finalité de ce choix était de transformer la tâche de construction du symétrique du segment en une tâche de production d'un outil (cercle ou droite), afin de provoquer le passage d'une procédure de construction globale vers une procédure analytique. En résolvant le problème, les élèves ont répondu à l'attente des tuteurs ; cependant ils ont mis en œuvre une deuxième procédure erronée, celle du prolongement qui renvoie à la conception « symétrie centrale ». Les variables du problème ont certainement favorisé l'apparition de cette procédure.

Les élèves ayant déclaré avoir terminé la construction, les tuteurs humains leur ont envoyé un message pour les inciter à valider la construction par déplacement. Cette validation a provoqué un réajustement chez les élèves, les amenant à évoluer de la conception « symétrie centrale » à la conception « symétrie orthogonale ». Malgré cette évolution, le but des tuteurs humains à ce stade de la séquence, était d'amener les élèves à dégager et à utiliser les outils cercle et droite perpendiculaire. Pour cette raison, ils ont proposé le problème Pb2 dont les variables favorisent l'utilisation de droites perpendiculaires. Les élèves ayant répondu à leurs attentes, les tuteurs ont proposé à nouveau le « problème initial » pour vérifier si les élèves réinvestissaient les outils dégagés.

Cet exemple montre que face à une situation d'échec, l'intention des tuteurs humains a été d'abord de déstabiliser la procédure erronée, et ensuite de faire émerger des opérateurs corrects chez les élèves. Ils ont utilisé des stratégies de guidage en transformant le problème de construction du symétrique en un autre problème, avec l'objectif d'amener les élèves à dégager des outils géométriques pertinents pour la résolution du problème pour, ensuite, conduire les élèves à les utiliser.

3.4. Décisions didactiques dans le cadre du projet BAP : étude d'un exemple concernant la symétrie orthogonale

Dans le cadre du projet européen BAP – Baghera Assessment Project (Soury-Lavergne 2003, Webber 2003), nous avons étudié des décisions didactiques qui pourraient être prises par des professeurs. Ce projet se place dans la problématique des EIAH. Une plate-forme informatique d'enseignement à distance Baghera a été développée qui était destinée, dans sa première version, à la résolution de problèmes de preuve en géométrie. Elle est conçue sur une architecture multi-agents pour former une société d'agents humains et artificiels en interaction. C'est à partir de ces interactions que se développent des activités comme la création et la sélection de problèmes, la vérification d'une preuve et le diagnostic des conceptions de l'élève. De cette interaction peut également émerger un processus d'apprentissage[40].

Le travail développé au sein du projet BAP porte sur les conceptions des élèves relatives à la notion de symétrie orthogonale.

Les idées principales sur lesquelles s'appuie la recherche sont les suivants :

[40] Pour en savoir plus, on se reportera à Webber (2003).

- La connaissance humaine est constituée d'une multiplicité de conceptions localement valides qui ont comme critère de pertinence leur efficacité dans des sphères de pratique spécifiques, et non leur conformité à un savoir de référence (Balacheff 2001) ;
- Il n'existe pas une unique stratégie didactique efficace pour faire évoluer les connaissances de l'élève, mais un ensemble de stratégies localement utilisables en fonction des connaissances dont l'apprentissage est visé et des conceptions disponibles chez l'apprenant ;
- L'apprentissage est un processus qui résulte d'une interaction entre des agents connaissants (Balacheff 2000). Ces agents peuvent être humains (élève, professeur) ou artificiels (entités informatiques spécialisées).

Nous présentons dans ce qui suit l'étude de décisions didactiques à partir d'un exemple traité dans le contexte de ce projet[41].

Le problème de preuve ci-dessous a été proposé à des élèves de plusieurs classes de quatrième.

Problème P1

Soit le segment [AB] parallèle à la droite d. Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à d. Ni A, ni B ne sont sur d. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.

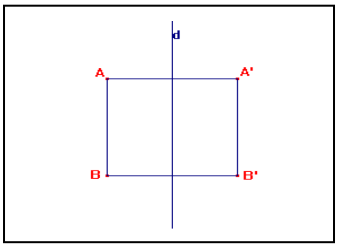


Figure 19. Problème Pb1 (cf. Projet BAP)

A ce problème, un élève a fourni la démonstration suivante :

Le segment [A'B'] est symétrique de [AB] par rapport à d, alors les 2 segments sont parallèles. Par définition [AA'] est perpendiculaire à (d) et [BB'] est aussi perpendiculaire à cette même droite, donc ils sont tout les 2 parallèles. Donc dans le quadrilatère AA'B'B : [AB]//[A'B'] et [BB']⊥ [AB]. Alors le quadrilatère AA'B'B est rectangle.

Le diagnostic des conceptions de l'élève a été réalisé de façon automatique par Baghera, qui avait dans sa base de données les quatre conceptions de la symétrie orthogonale identifiées

[41] Pour plus de détails sur cette étude, voir Chaachoua & Lima (2003) et Lima & Trgalová (2003).

par Tahri (cf. p. 50). Le résultat du diagnostic de Baghera est le suivant : *conception « symétrie orthogonale » ou conception « parallélisme »*.

A partir de ces données, nous avons procédé à une analyse a priori des décisions didactiques possibles.

Analyse a priori des décisions didactiques

En considérant le diagnostic de Baghera, deux cas ont été envisagés :

1. Soit l'élève a utilisé l'opérateur « si [A'B'] = Sym ([AB], d) et (AB) // d, alors [A'B'] // [AB] », c'est à dire qu'il a utilisé l'hypothèse (AB) // d de manière implicite. Dans ce cas, la preuve est correcte (conception « symétrie orthogonale »).

2. Soit l'élève a utilisé l'opérateur « si [A'B'] = Sym ([AB], d), alors [A'B'] // [AB] ». Dans ce cas, l'élève considère qu'un segment et son symétrique sont parallèles, ce qui indique la conception « parallélisme ».

Afin de pouvoir déterminer lequel des deux opérateurs a été utilisé, il faudra proposer des problèmes en dehors du domaine de validité de la conception « parallélisme », c'est-à-dire des problèmes où le segment n'est pas parallèle à l'axe, auquel cas la conception « parallélisme » ne permet pas de donner la réponse correcte.

Ainsi, une première décision à prendre serait celle d'affiner ce diagnostic (décision 1) en proposant un « bon » problème, qui à l'issue de ce nouveau diagnostic permettrait la confirmation de la conception « symétrie orthogonale » ou de la conception « parallélisme ».

Une fois que le diagnostic donne la nature de la conception mobilisée dans la résolution du problème proposé, deux cas de figure se présentent. Si le nouveau diagnostic confirme la conception correcte (conception *symétrie orthogonale*), on pourra supposer que l'élève a effectivement considéré le parallélisme du segment [AB] avec l'axe d, mais cette hypothèse est restée implicite dans la preuve produite. Deux décisions sont alors possibles : ne rien proposer à l'élève (décision 0), ou bien lui proposer des situations pour renforcer cette conception (décision 2). En revanche, si la conception confirmée est celle du parallélisme, il faudra proposer une séquence de problèmes pour faire évoluer cette conception vers une conception cible (décision 3). Dans le cadre de ce projet, nous avons réalisé une étude a priori de la décision 1 (affiner le diagnostic) que nous présentons ci-dessous :

Pour affiner le diagnostic nous avons envisagé plusieurs possibilités. Une de ces possibilités consistait à proposer à l'élève un problème présentant une certaine proximité avec le problème précédent. Cette proximité serait caractérisée par au moins trois aspects : la nature de l'objet de savoir en jeu (dans notre cas, la symétrie orthogonale), les éléments de cet objet (segment, axe de symétrie, etc.), et les relations entre ces éléments (intersection de l'axe et du segment, angle formé par l'axe et le segment, etc.). Ainsi, le choix d'un nouveau problème devrait prendre en compte d'une part, l'analyse du diagnostic précédent et d'autre part, les caractéristiques du problème résolu par l'élève (problème P1). Dans notre exemple, ce qui va être déterminant dans ce choix est alors la position du segment [AB] par rapport à l'axe d. Autrement dit, il faudra proposer à l'élève des problèmes où le segment n'est pas parallèle à l'axe, auquel cas la conception « parallélisme » ne permet pas de donner la réponse correcte. C'est l'exemple du problème P2, qui est une adaptation du problème P1 :

Problème P2

Soit le segment [AB] non parallèle et non sécant avec la droite d. Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à d. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.

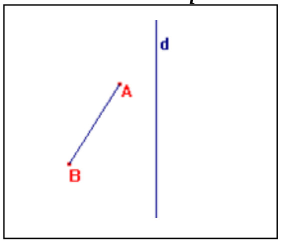


Figure 20. Problème Pb2 (cf. Projet BAP)

Analyse a priori du problème P2

On peut s'attendre à deux types de réponses :

- R1 : C'est un parallélogramme ;
- R2 : C'est un trapèze isocèle.

La réponse R1 peut être la manifestation de deux conceptions : *symétrie centrale* (cf. Figure 21) et *parallélisme* (cf. Figure 22). Dans les deux cas, l'argumentation peut faire appel au même opérateur « si [A'B'] = Sym ([AB], d) alors [A'B'] // [AB] », ce qui ne permet pas de disqualifier l'une ou l'autre de ces deux conceptions. En revanche, l'ordre des sommets permettra de trancher entre ces deux conceptions.

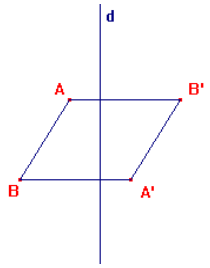


Figure 21. R1 : « symétrie centrale » par rapport au point d'intersection des diagonales du parallélogramme

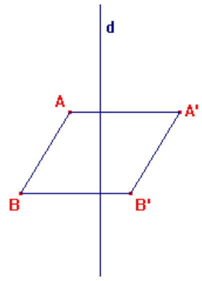


Figure 22. R1 : « parallélisme »

La réponse R2 (cf. Figure 23) peut être la manifestation de deux conceptions : *symétrie orthogonale* et symétrie *oblique*. Les opérateurs possibles dans la preuve ne permettent pas de trancher entre les deux conceptions.

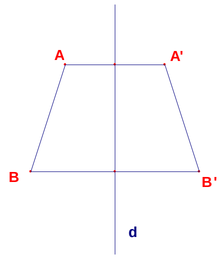


Figure 23. R2 : symétrie orthogonale ou symétrie oblique

Cette brève analyse a priori montre la complexité du diagnostic. Elle met en évidence que dans ce cas particulier, il ne suffit pas de choisir un problème en dehors du domaine de validité de la conception « parallélisme » pour affiner le diagnostic.

Réponse au problème P2	Diagnostic	Nouveau diagnostic
R1 : C'est un parallélogramme	Symétrie Centrale Parallélisme	On ne peut pas conclure Parallélisme
R2 : C'est un trapèze isocèle	Symétrie Orthogonale Symétrie Oblique	Symétrie Orthogonale On ne peut pas conclure

Dans ce cas, un nouveau diagnostic est envisageable. Pour le faire, nous pouvons proposer un problème P3, ayant le même énoncé que P2, mais où l'axe d n'est pas vertical.

Problème P3

Soit le segment [AB] non parallèle et non sécant avec la droite d. Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à d. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.

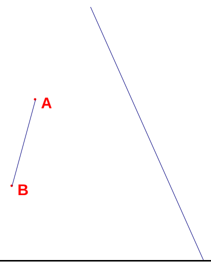


Figure 24. Problème Pb3 (cf. Projet BAP)

Analyse a priori du problème P3

Nous avons envisagé trois réponses à ce problème qui peuvent conduire aux diagnostics suivants :

Réponse au problème P3	Diagnostic	Nouveau diagnostic
R1 : C'est un trapèze	Symétrie Oblique	On ne peut pas conclure
R2 : C'est un parallélogramme	Symétrie Centrale Parallélisme	On ne peut pas conclure Parallélisme
R3 : C'est un trapèze isocèle	Symétrie Orthogonale	Symétrie Orthogonale

Nous pouvons résumer ce processus de caractérisation de la conception de cet élève de la manière suivante : pour affiner le diagnostic, nous avons construit les problèmes (P2 et P3) qui, pour l'élève, sont proches du problème P1. Mais certaines réponses à ces problèmes nécessitent de nouveaux diagnostics. Une fois que le diagnostic est affiné, c'est-à-dire qu'il donne une seule conception, trois décisions peuvent être prises : ne rien faire (décision 0), renforcer la conception (décision 1) ou déstabiliser la conception (décision 3). Chacune des deux décisions (1 et 3) mobilisera un ou plusieurs problèmes.

Signalons que ce modèle de décisions didactiques n'a pas été implémenté dans la plate-forme Baghera, restant ainsi au niveau du projet.

4. Notre modèle de décisions didactiques

A partir des modèles de décisions didactiques présentés plus haut, et en nous appuyant sur la caractérisation des contrôles susceptibles d’être mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes sur la symétrie orthogonale (cf. à partir de la page 72), nous avons construit un modèle de décisions didactiques qui est présenté par le schéma ci-dessous :

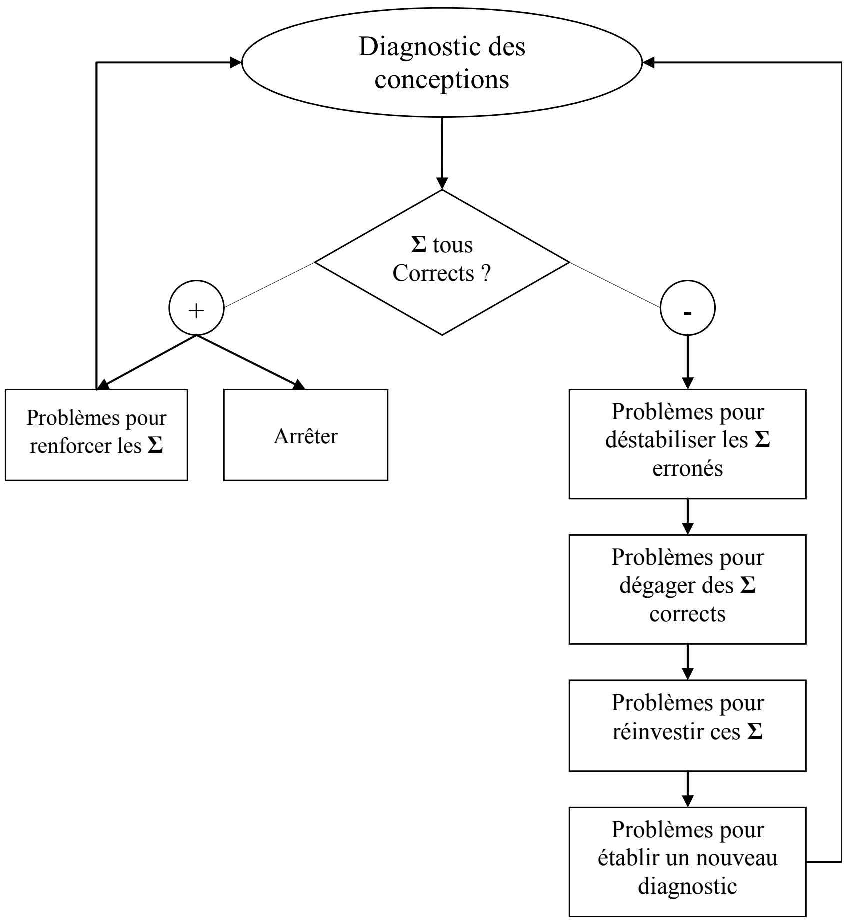


Schéma 11. Modèle de Décisions Didactiques

Nous retenons les deux étapes de décisions des modèles présentés : diagnostic et processus d'enseignement. Cependant, dans notre modèle le diagnostic est compris comme la caractérisation des conceptions de l'élève sur une notion étudiée à un moment donné (dans notre cas la symétrie orthogonale). Les structures de contrôles de ces conceptions sont décrites en termes de contrôles, aussi bien ceux qui ont été mis en œuvre par l'élève que ceux qui semblent absents. En effet, nous considérons que l'identification de ces contrôles chez l'élève constituera le point de départ pour la construction d'un processus d'enseignement. Par ailleurs, notre modèle ne se limitera pas à la prise en compte des quatre conceptions identifiées par Tahri (cf. p. 51), comme c'était le cas dans le contexte du Projet BAP.

Nous envisageons trois types de décisions en fonction des contrôles identifiés. Si ces contrôles sont tous corrects, deux types de décisions peuvent être prises : soit arrêter le processus d'enseignement concernant la notion en jeu, soit proposer des problèmes pour renforcer ces contrôles.

Dans le cas où au moins un des contrôles identifiés est erroné, la décision envisagée est de mettre en place un processus pour organiser un milieu dans le but de favoriser l'apprentissage chez l'élève. Ce processus consiste à proposer une série de problèmes bien ciblés. Il est organisé en quatre étapes :

Étape 1. *Déstabiliser le ou les contrôle(s) erroné(s)*. Les problèmes proposés dans cette étape ont pour objectif de favoriser la mobilisation par l'élève de(s) contrôle(s) correct(s), mais également des contrôles erronés de manière à provoquer un conflit entre ces contrôles. Nous supposons que ce conflit permettra de déstabiliser les contrôles erronés, une fois que l'élève peut prendre conscience des limites de la validité de la procédure s'appuyant sur ces contrôles. Les variables des problèmes constituant cette étape doivent alors être choisies en sorte de provoquer ce conflit.

Étape 2. *Dégager des contrôles corrects*. L'objectif de cette étape est de permettre la découverte et l'appropriation par l'élève des propriétés de la notion étudiée. A partir de ces propriétés, l'élève pourra dégager des contrôles corrects.

Étape 3. *Réinvestir les contrôles corrects*. Dans cette étape, on propose des problèmes pour permettre l'utilisation des contrôles dégagés dans l'étape précédente. Pour favoriser le réinvestissement, ces problèmes doivent être du type de ceux déjà résolus.

Étape 4. *Établir un nouveau diagnostic*. Après la mise en place des trois étapes précédentes, il faudra tester la stabilité des contrôles dégagés par l'élève. Pour ce faire, il lui faudra proposer des problèmes de types différents dans le but d'évaluer si l'élève est capable de réutiliser ces connaissances dans des contextes différents.

Ce modèle sera instancié pour le cas d'un élève particulier, dans le chapitre 6 (cf. p. 207).

Partie B : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

Chapitre 5 : EXPÉRIMENTATION 1

LES PRODUCTIONS DES ÉLÈVES

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord le contrat expérimental et les problèmes proposés aux élèves. Ensuite nous procéderons à l'analyse a priori de ces problèmes, et enfin à l'analyse a posteriori des productions des élèves en deux temps : analyse quantitative de l'ensemble des copies des élèves et analyse des trois copies construites pour l'expérimentation auprès des professeurs.

1. Introduction

Dans le chapitre 3 (cf. p. 45) nous avons réalisé une étude théorique à propos de connaissances d'élèves sur la notion de symétrie orthogonale. Les résultats de cette étude nous ont permis de répondre en partie à notre première question de recherche, relative à la caractérisation a priori des structures de contrôles des conceptions de la symétrie orthogonale. En effet, nous avons modélisé a priori des contrôles susceptibles d'être mobilisés par l'élève dans la résolution des problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques ; et aussi les procédures de construction, en termes de contrôles.

Cependant, à partir de la méthodologie utilisée nous n'avons pas eu accès a priori aux opérateurs. Nous avons alors fait l'hypothèse qu'une étude expérimentale pourrait apporter des éléments pour y accéder. En effet, nous pensons que nous pouvons accéder aux éléments qui caractérisent une conception, en particulier aux opérateurs et aux systèmes de représentation, à partir de l'analyse a posteriori de la production de l'élève. L'objectif de cette expérimentation est double :

- recueillir des productions d'élèves afin de pouvoir identifier les types de réponses et de procédures ;
- concevoir des copies pour l'expérimentation suivante, menée auprès des professeurs dans le but d'étudier leurs prises de décisions didactiques.

2. Le public et le contrat expérimental

Dans le but d'obtenir des données qui nous serviraient de base pour l'étude des décisions didactiques des professeurs, nous avons réalisé l'expérimentation dans une situation de classe ordinaire où les élèves ont eu à résoudre des problèmes relatifs à la symétrie orthogonale. Les élèves savaient qu'il s'agissait d'une activité proposée dans le cadre d'une recherche, et qu'elle ne serait pas notée.

L'expérimentation a été menée auprès de 51 élèves de deux classes de quatrième (13-14 ans d'âge) d'un collège à Grenoble.

Bien que la symétrie orthogonale soit étudiée en classe de sixième, étant donné que dans les problèmes proposés les élèves devaient expliquer leurs réponses, nous avons supposé que ce niveau de classe serait plus approprié à cette fin. En effet, les élèves de 4^{e} sont habitués à formuler des justifications, car ils sont amenés à prouver des conjectures et des énoncés depuis la classe de 5^{e}. D'autre part, parce que nous avons cherché à vérifier chez ces élèves si des connaissances erronées à propos de la symétrie ont résisté à l'enseignement.

Les élèves ont travaillé individuellement. Le professeur de mathématiques de la classe et la chercheuse ont été présents en salle de classe. Le rôle de cette dernière était d'expliquer les consignes des problèmes en cas d'éventuelles difficultés de compréhension des élèves.

Les élèves avaient à leur disposition la feuille d'activité, des crayons et les instruments de dessin : règle graduée, équerre et compas, et le papier calque. Ils disposaient de 50 minutes environ pour réaliser l'activité, la durée habituelle d'un cours en classe.

Nous avons proposé aux élèves cinq problèmes : deux de reconnaissance de figures symétriques, deux de construction de figures symétriques et un de reconnaissance et construction d'axe de symétrie. Les feuilles d'activité fournies aux deux classes ne sont pas constituées de la même façon. Ainsi, il y a des problèmes qui ont été résolus par les élèves d'une des classes seulement. La résolution des problèmes choisis ne requiert que des connaissances concernant la notion de symétrie orthogonale, choix que nous avons fait dans le but d'éviter des fuites au niveau de l'analyse des résultats obtenus. Dans tous les problèmes, les figures sont présentées sur papier blanc et tous les instruments de dessin (règle graduée, compas, équerre...) sont autorisés.

Nous avons choisi de demander aux élèves de justifier chaque réponse. Notre hypothèse est que ces justifications nous apporteront des éléments nous permettant de mieux interpréter les choix et les constructions des élèves, et aussi d'expliciter les opérateurs et les contrôles.

Les données recueillies ont comme support les copies des élèves.

3. Problèmes proposés aux élèves

<u>Problèmes de reconnaissance de figures symétriques</u>

1. Problème-flèche

Quelle est la couleur de la flèche symétrique de la flèche noire par rapport à la droite (d) ? Justifie ta réponse.

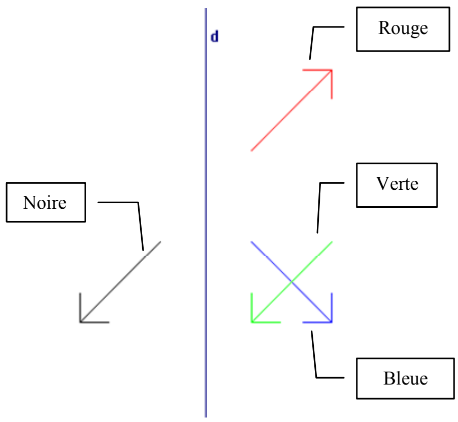


Figure 25. Problème-flèche

2. Problème segment-losange

Soit un triangle équilatéral ABC. Le point A’ est le symétrique du point A par rapport à la droite d. L est le milieu du segment [AB], M est le milieu du segment [BC] et N le milieu du segment [AC]. P est l’intersection de la droite (LM) avec la droite (CA’) et O est l’intersection de la droite (NM) avec la droite (BA’). Quel est le symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d ? Justifie ta réponse[42].

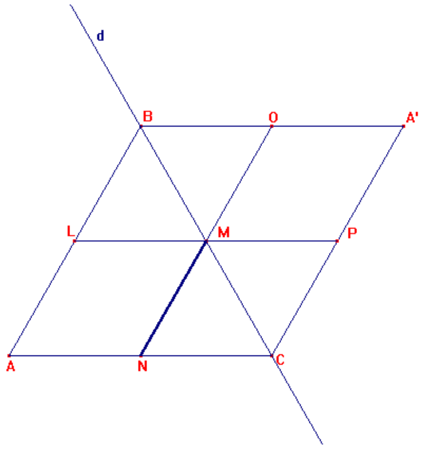


Figure 26. Problème segment-losange

<u>Problèmes de construction de figures symétriques</u>

3. Problème-segment

Avec les instruments usuels, construis le symétrique du segment ci-dessous par rapport à la droite d. Explique ta construction.

Figure segment_1

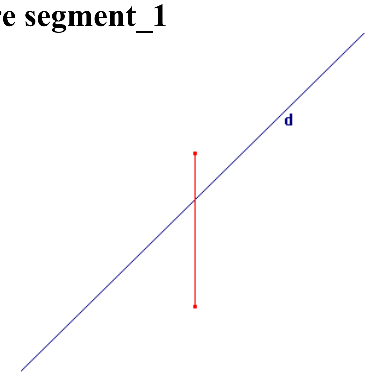


Figure segment_2

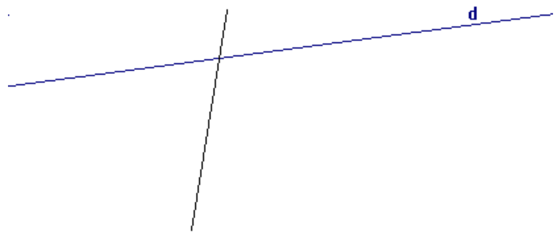


Figure 27. Problème-segment

[42] Ce problème a été proposé dans le cadre du projet BAP (Soury-Lavergne, 2003 ; Webber, 2003), cependant dans ce cadre il a été demandé à l'élève de donner une preuve mathématique.

4. Problème-maison

Avec les instruments usuels construis le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à la droite d. Explique ta construction.

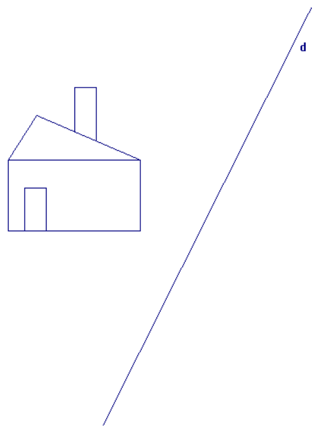


Figure 28. Problème-maison

<u>Problème de reconnaissance et construction d'axe de symétrie</u>

Avec la règle non graduée et le compas, construis si possible le(s) axe(s) de symétrie de chaque figure ci-dessous. Justifie chaque réponse.

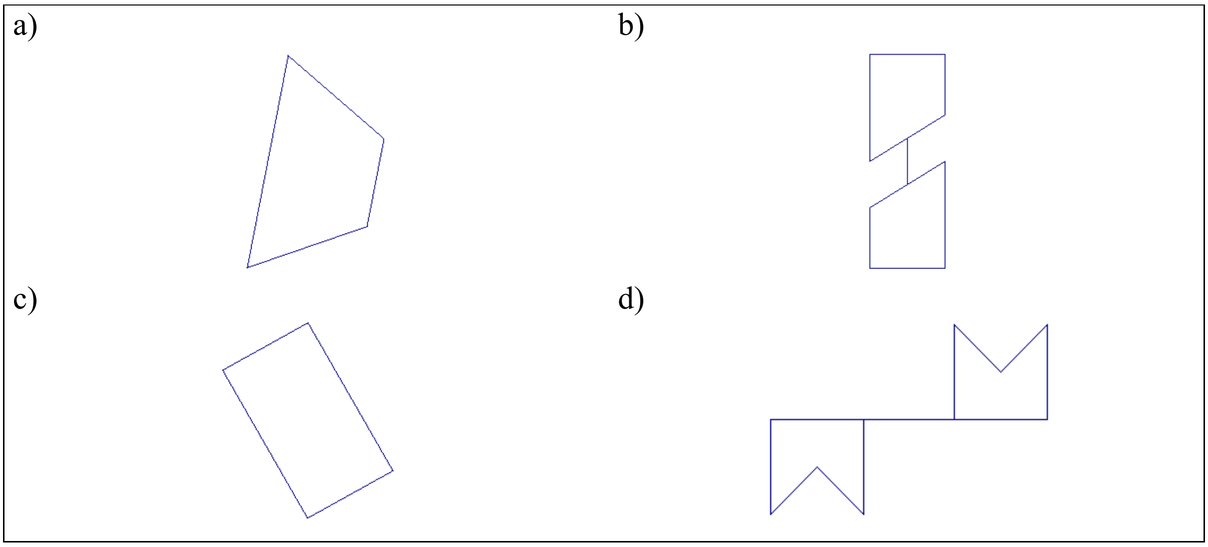


Figure 29. Exercice 5 : problème de reconnaissance et construction d’axe de symétrie

Remarque

Comme les problèmes de reconnaissance et/ou construction de l’axe de symétrie sont présents dans l'enseignement de la symétrie orthogonale, nous avons souhaité initialement traiter ce type de problèmes également, et pour cette raison nous avons intégré ce problème à notre dispositif expérimental. Cependant, face à la complexité de l'analyse des problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques, nous avons pris la décision de nous limiter à ces deux types de problèmes. Pour cette raison dans ce manuscrit, nous ne présentons pas l'analyse a priori ni a posteriori de ce problème. Cependant, les professeurs participant à la deuxième expérimentation ont eu accès aux réponses des élèves à ce problème également.

4. Analyse a priori

Cette analyse s'appuie sur la caractérisation des contrôles et sur la description des procédures de construction, présentées précédemment.

En ce qui concerne les problèmes de construction de figures symétriques, soulignons qu'a priori toutes les procédures décrites dans la section 5 du chapitre 3 (cf. p. 86) peuvent être mises en oeuvre dans la construction des figures images. Cependant, le choix de la procédure de résolution d'un problème dépendant des variables didactiques de celui-ci, nous supposons que certaines variables des problèmes favorisent, plus que d'autres, la mise en œuvre par l'élève d'un type de procédure donné. Ainsi, dans l'analyse a priori des problèmes, nous n'avons pas l'intention d'être exhaustifs, et nous étudierons seulement les procédures qui de la manière la plus plausible nous paraissent devoir être mises en œuvre par l'élève, en fonction des variables du problème traité.

Pour chaque problème, nous présentons d'abord une description en termes de variables didactiques, et puis l'analyse a priori.

4.1. Problème-flèche

Description du problème en termes de variables didactiques

Variable didactique	Valeur
Nature du problème	*Reconnaissance de la figure symétrique*
Spécificité de la figure F (flèche noire)	*F possède des segments parallèles à l'axe de symétrie ;* *F possède un axe de symétrie qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe*
Nature de F	*Simple (figure comporte peu de segments)*
Orientation des segments de la figure F sur la feuille	*Oblique ; Horizontale ; Verticale*
Orientation de l'axe sur la feuille	*Verticale*
Intersection de la figure avec l'axe	*Vide*
Position relative de F et F'	*F et toutes les figures candidates possèdent des segments parallèles*

Tableau 19. Variables didactiques et valeurs concernant le problème flèche

Chacune des trois figures candidates au symétrique de la flèche noire (cf. Figure 25, p. 128 à gauche de l'axe) ont les mêmes forme et taille que celle-ci. Par ailleurs, la flèche noire et les candidates sont de part et d'autre de l'axe. Ainsi, bien que dans la résolution de ce problème, des contrôles liés aux critères « forme » et « taille » puissent intervenir dans le choix de l'élève, et encore que cet élève puisse prendre en compte le fait que les figures objet et image sont dans des demi-plans différents délimités par la droite d (Σdemi-plan), ces contrôles ne permettent pas à l'élève de choisir une de ces trois figures. Ainsi, nous ne considérons donc que les critères et les contrôles qui peuvent être déterminants dans le choix de la figure symétrique.

Les contrôles qui peuvent permettre de distinguer l'une de ces figures comme symétrique de la flèche noire relèvent des critères « direction », « distance à l'axe » et « position ». Chacune des figures candidates renvoie à des contrôles différents. Nous y reviendrons plus loin dans l'étude des choix possibles.

Par ailleurs, bien que le pliage et le calque ne soient pas suggérés dans l'énoncé du problème, le choix d'une des flèches candidates peut relever de l'utilisation de ces outils.

En ce qui concerne le pliage, comme nous l'avons prévu dans l'étude des procédures de construction, il peut être effectif ou mental. Dans le premier cas, un contrôle concernant la superposition des figures par pliage est mobilisé dans la reconnaissance de la figure, en fonction de la droite choisie par l'élève. Le pliage mental relève de la reconnaissance par la perception globale. Nous considérons que l'élève reconnaît l'image d'une figure par pliage mental, quand il utilise cet argument dans son explication. Cependant, l'élève peut utiliser l'argument du pliage sans forcément contrôler son choix par la superposition effective des figures. Dans ce cas, nous n'avons pas les moyens d'affirmer qu'un contrôle lié au pliage est mis en œuvre par l'élève. D'autres contrôles liés à l'appréhension perceptive de la figure peuvent alors intervenir dans ce choix. La reconnaissance perceptive de la figure symétrique peut relever alors des contrôles liés aux critères « direction », « distance à l'axe » (une distance perceptive globale de la figure à l'axe) et « position ».

Nous pouvons encore envisager que l'élève puisse choisir une de ces trois flèches comme symétrique de la flèche noire par élimination. Dans ce cas, tous les critères cités peuvent également intervenir dans le choix de l'élève. Enfin, ce choix peut être un effet du contrat didactique.

Ci-après, nous cherchons à identifier les contrôles qui nous paraissent susceptibles d'être mobilisés dans le choix de chacune des flèches proposées comme réponse à ce problème.

Flèche bleue

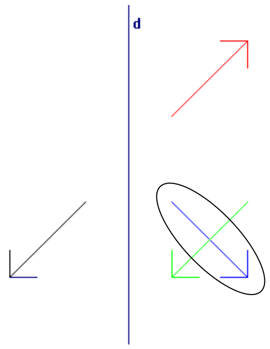


Figure 30. Flèche bleue

La prise en compte des propriétés caractéristiques de la symétrie orthogonale (orthogonalité et égalité des distances à l'axe) conduira l'élève à choisir cette figure comme réponse. Dans ce cas, les contrôles intervenant sont Σortho[43] et Σdist.

Ce choix peut relever aussi de la prise en compte par l'élève de la propriété d'égalité des distances des points à l'axe uniquement. Dans ce cas, Σdist est le seul contrôle qui intervienne dans ce choix.

Comme il a été déjà évoqué, les résultats des recherches montrent que les orientations horizontale et verticale de l'axe sur la feuille jouent un rôle perturbateur pouvant favoriser un rappel horizontal ou vertical. Ce rappel donne pour point-image un point situé sur la même droite horizontale ou verticale que le point-objet (Grenier, 1988). Ainsi, étant donné que la droite d est verticale dans ce problème, le choix de cette figure peut relever également de la prise en compte de la direction horizontale.

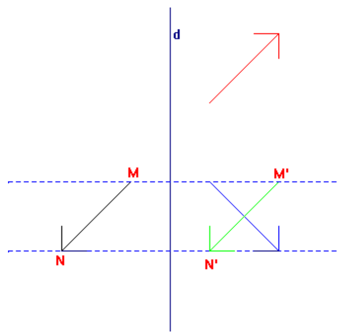


Figure 31. Droites (MM') et (NN') : lignes de rappel orthogonal à l'axe ou horizontal

L'utilisation du pliage effectif, ou du papier calque correctement peut aussi conduire l'élève à choisir cette figure. Les contrôles qui peuvent intervenir dans ce choix sont Σpliage_1 et Σcalque_1, respectivement.

[43] Pour la description des contrôles, on se reportera au chapitre 3 à partir de la p. 71.

En ce qui concerne la reconnaissance de cette figure par la perception globale, nous supposons que les contrôles susceptibles d'intervenir dans ce choix sont liés aux critères « direction », « distance à l'axe » et « position ». La distance dans ce cas serait une distance perceptive globale :

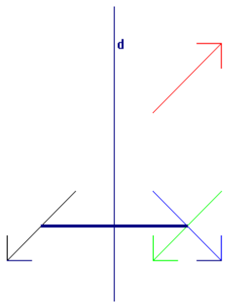


Figure 32. Prise en compte d'une distance globale entre les figures objet (gauche) et image (droite)

Dans ce cas, les contrôles susceptibles intervenir dans ce choix sont : Σhor ou Σortho, Σdist, et Σrotation avec ou sans retournement.

Flèche verte

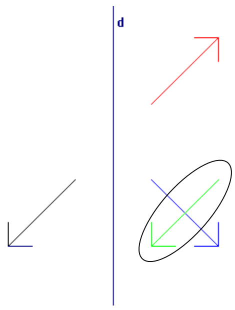


Figure 33. Flèche verte

La prise en compte par l'élève du rappel horizontal peut mener également au choix de cette figure comme réponse. Les flèches noire (figure initiale) et verte sont à la même « hauteur » sur la feuille, ce qui peut renforcer la prise en compte par l'élève de la direction horizontale. Comme dans le cas précédent, la distance à l'axe peut être une distance perceptive globale entre les deux figures (flèches noire et verte) et la droite d. Les contrôles pouvant intervenir dans ce choix sont alors Σhor et Σdist. Par ailleurs, étant donné que les flèches noire et verte possèdent des segments parallèles, les contrôles Σparallélisme_segment et/ou Σtranslation peuvent également intervenir dans ce choix.

Flèche rouge

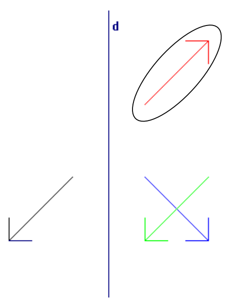


Figure 34. Flèche rouge

En se basant sur les attributs de la figure, notamment l'emplacement spatio-graphique des flèches noire et rouge, nous pouvons interpréter le choix de la flèche rouge comme symétrique de la noire de deux manières différentes :

Interprétation 1 : ce choix peut relever de l'alignement des points ou des segments, ce qui peut se traduire par le prolongement du grand segment de la flèche noire, et de l'égalité des « distances » de ces extrémités à la droite d, suivant la direction donnée par ce segment. Les contrôles qui peuvent intervenir dans ce choix sont alors Σprolong et Σdist.

Interprétation 2 : ce choix peut relever du parallélisme des segments correspondants en plus du prolongement. Dans ce cas, les contrôles Σprolong et Σparallélisme_segment sont en oeuvre.

4.2. Problème segment-losange

Étant donné que ce problème consiste à reconnaître le symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d (cf. Figure 26, p. 129), nous considérons la figure F comme étant ce segment en particulier. Cependant, dans l'analyse a priori nous prenons en compte le fait que ce segment est une sous-figure d'une figure plus complexe, le losange ABA'C.

Description du problème en termes de variables didactiques

Variable didactique	Valeur
Nature du problème	*Reconnaissance de la figure symétrique*
Nature de F	*Simple : sous-figure d'une figure complexe*
Orientation des segments de la figure F sur la feuille	*Oblique*
Orientation de l'axe sur la feuille	*Oblique*
Intersection de la figure avec l'axe	*Touche (le segment [NM] à une extrémité sur la droite d)*
Position relative de F et F'	*Parmi les segments candidats, plusieurs sont parallèles à F*

Tableau 20. Variables didactiques et valeurs concernant le problème segment-losange

Dans cette figure, plusieurs segments peuvent être choisis comme symétriques du segment [MN]. Parmi ceux-ci, nous ne présentons que les choix les plus probables.

Segment [MP] (la réponse correcte)

Le choix de ce segment peut relever de la prise en compte par l'élève de l'égalité des distances des points N et P à la droite d et/ou de l'orthogonalité de la droite (NP) avec d, et aussi de l'invariance des points de l'axe par la symétrie orthogonale (cf. Figure 26). Dans ce cas, les contrôles qui peuvent intervenir sont les suivants : Σdist, Σortho, Σpoint_invariant, Σdemi_plan et Σrotation (avec ou sans retournement).

Contrairement à ce qu'on a prévu pour le « problème-flèche » où l'orientation de l'axe est verticale, ici, compte tenu de l'oblicité de l'axe, l'unique direction possible pour justifier ce choix est orthogonale à l'axe.

Considérant que ce choix peut également relever de l'utilisation du pliage effectif et du calque, les contrôles correspondants sont Σpliage_1 et Σcalque_1, respectivement. Enfin, si la reconnaissance de ce segment se fait par perception globale, nous pouvons envisager la mise en œuvre par l'élève des contrôles Σortho et Σdist, ce dernier concernant une distance perceptive globale des deux segments à l'axe.

Segment [CP]

Le choix de ce segment comme symétrique de [MN] peut relever de la mise en œuvre du contrôle relatif au rappel horizontal, au parallélisme du segment [CP] et [MN], et au fait que les distances des points N et P à la droite d sont égales [D(N,d)=D(P,d)]. Ce choix peut relever aussi de la mise en œuvre des contrôles concernant l'invariance des points de l'axe et le demi-plan, car les segments [CP] et [MN] ont une extrémité sur l'axe et sont de part et d'autre de la droite d.

Ainsi, les contrôles qui peuvent intervenir dans le choix de ce segment sont les suivants : Σdist, Σhor, Σpoint_invariant, Σdemi_plan Σparallélisme_segment et/ou Σtranslation (avec ou sans retournement).

Segment [MO]

Ce choix peut relever de la prise en compte par l'élève de la direction donnée par le prolongement du segment [MN] et de la distance des points N et O à l'axe dans cette direction, et/ou encore du fait que les points N, M, O sont alignés. Il prend en compte l'invariance du point M sur l'axe et le fait que les segments [MO] et [NM] soient de part et d'autre de l'axe de symétrie. Enfin, ce choix peut relever du fait que les segments [MO] et [NM] soient parallèles.

Ainsi, les contrôles qui peuvent intervenir dans le choix de ce segment comme symétrique de [NM] sont Σdist, Σprolong, Σpoint_invariant, Σdemi_plan, Σparallélisme_segment et Σrotation ou Σtranslation (avec ou sans retournement).

4.3. Problème-segment

Description du problème en termes de variables didactiques :

Variables didactiques	*Valeurs*	
	Figure_1	**Figure_2**
Orientation du segment sur la feuille	*Verticale*	*Oblique (presque verticale)*
Orientation de l'axe sur la feuille	*Oblique*	*Oblique (presque horizontale)*
Nature du problème	*Construction de la figure symétrique*	
Nature de F	*Simple (segment)*	
Intersection de la figure avec l'axe	*Coupe*	

Tableau 21. Variables didactiques du problème-segment

__Procédures analytiques__

1. Équidistance

Les symétriques des extrémités du segment sont construits par la méthode s'appuyant sur la propriété d'équidistance, en utilisant le compas (cf. Figure 35). Par cette procédure, si elle est correctement mise en œuvre l'élève obtiendra la bonne réponse. Les contrôles intervenant sont Σdist et Σsegment.

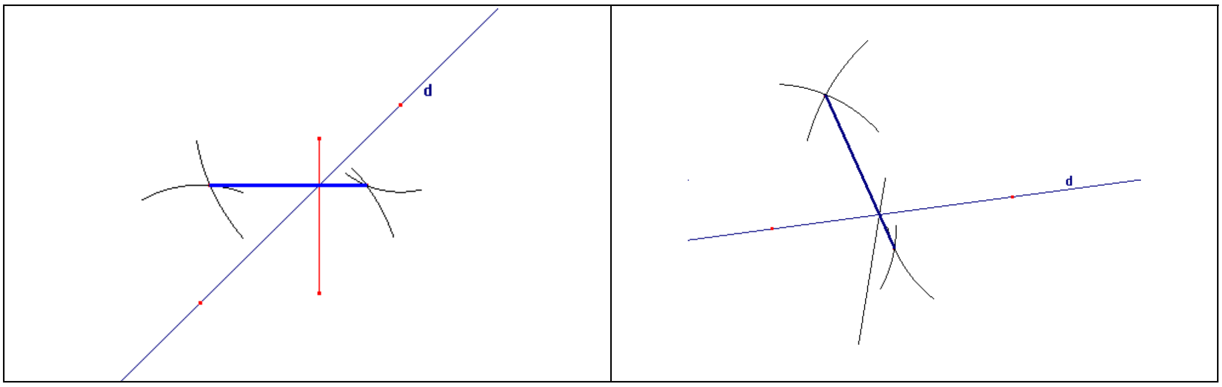


Figure 35. Construction analytique par la méthode s'appuyant sur la propriété d'équidistance

2. Orthogonalité et égalité des distances à l'axe

Les images des extrémités du segment sont construites en s'appuyant sur les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe (cf. Figure 36). Pour cela, l'élève peut utiliser l'équerre et la règle, ou l'équerre et le compas. La mise en œuvre correcte de cette procédure donne également la bonne réponse. Les contrôles intervenant sont Σortho, Σdist et Σsegment.

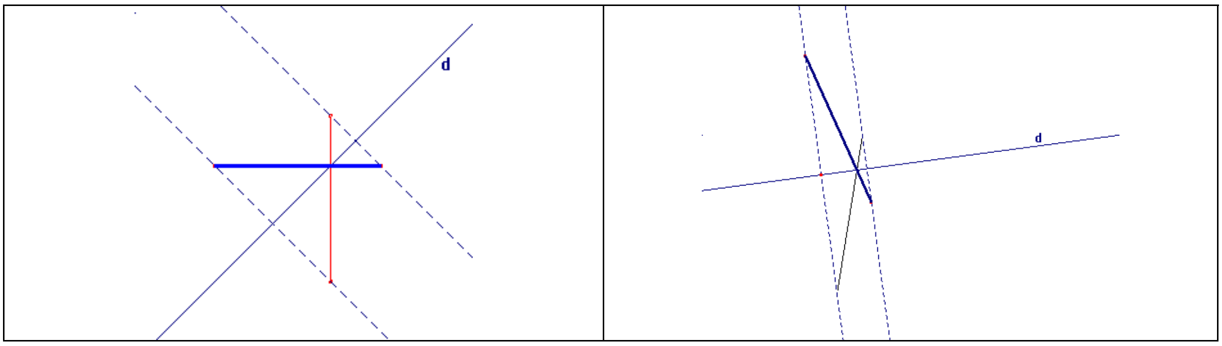


Figure 36. Construction analytique : direction orthogonale et égalité des distances des points à l'axe

3. Direction horizontale sur la feuille et égalité des distances à l'axe

Dans la *Figure_1*, étant donné l'orientation verticale du segment sur la feuille, le choix de la direction horizontale peut être privilégiée par l'élève.

Dans ce cas, la procédure envisagée est la suivante : les images des extrémités du segment sont construites dans la direction horizontale sur la feuille, en conservant l'égalité des distances à la droite d dans cette direction. L'élève obtiendra comme image un segment de longueur différente, comme le montre la figure ci-dessous :

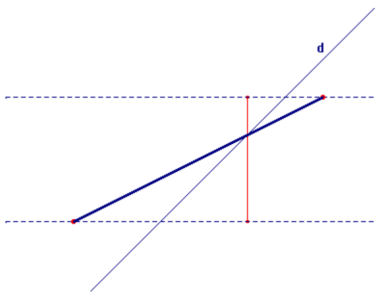


Figure 37. Construction analytique : direction horizontale et égalité des distances des points à l'axe dans cette direction

Les contrôles intervenant dans la construction sont alors Σhor, Σdist et Σsegment. Comme nous l'avons précisé dans la description des procédures analytiques (cf. chapitre 3), si Σtaille_1 fait partie de la structure de contrôle de la conception mobilisée par l'élève, ce contrôle pourrait intervenir dans la vérification du résultat obtenu et, par conséquent, l'élève pourrait être amené à rejeter la procédure.

4. Direction verticale sur la feuille et égalité des distances à l'axe

Dans le cas de la *Figure_2*, la combinaison entre les valeurs « oblique (presque verticale) » du segment et « oblique (presque horizontale) » de l'axe peut amener l'élève à privilégier la direction verticale pour construire l'image des extrémités du segment.

Dans ce cas, la procédure utilisée peut être la suivante : les images des extrémités du segment sont construites dans la direction verticale, en conservant les distances à la droite d dans cette direction. L'élève obtiendra comme image le segment ci-dessous :

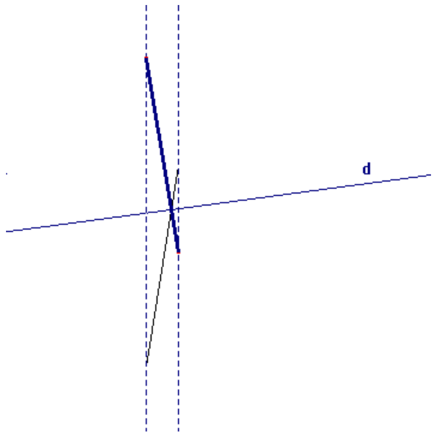


Figure 38. Construction analytique : direction verticale et égalité des distances des points à l'axe dans cette direction

La direction verticale étant assez proche de la direction orthogonale à l'axe, la différence des longueurs des segments objet et image n'est pas assez significative pour être facilement perçue. Il n'y aurait alors pas de conflit entre contrôles.

5. Demi-tour autour d'un point sur l'axe

Les images des extrémités du segment sont construites par demi-tour autour d'un point sur la droite d. L'élève construit l'image du segment comme si c'était par une symétrie centrale. Dans ce cas, en fonction du point choisi sur d plusieurs figures peuvent être obtenues comme le montrent les exemples ci-dessous :

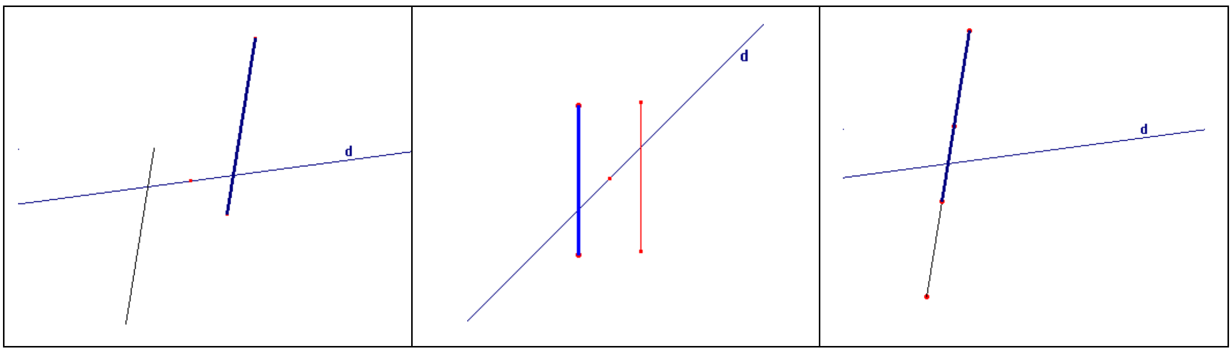


Figure 39. Construction analytique : demi-tour d'un point autour d'un point sur la droite d

Dans ce cas, les seuls contrôles intervenant sont Σrotation et Σsegment.

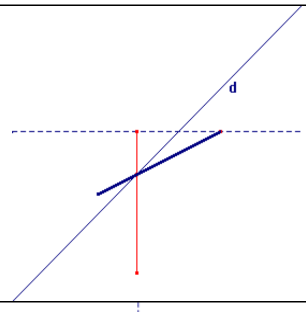
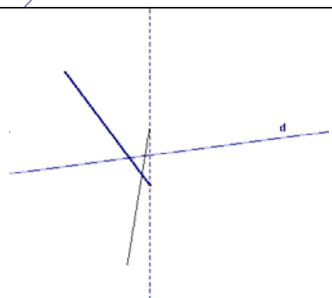
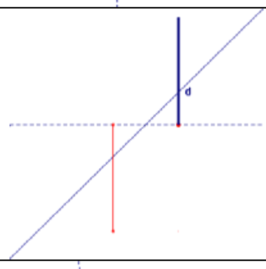
Procédures semi-analytiques

L'image d'une des extrémités du segment est construite de façon analytique par une des procédures décrites précédemment, et ensuite le segment est construit globalement à partir de cette image.

a) Partie analytique : voir l'analyse précédente

b) Partie globale : Compte tenu des variables didactiques en jeu dans les problèmes proposés, dans cette partie de la procédure, les contrôles dont la mobilisation est la plus probable sont les suivants : Σtaille_1, Σdemi_plan, Σpoint_invariant, Σintersection_F/axe, Σparallélisme_segment et Σtranslation ou Σrotation (suivie ou non de retournement).

Plusieurs images peuvent être construites en fonction des contrôles exercés par l'élève, comme le montrent les exemples ci-dessous :

Partie analytique : Σhor et Σdist *Partie globale* : Σtaille_1 et Σpoint_invariant	
Partie analytique : Σvert et Σdist *Partie globale :* Σtaille_1 et Σintersection_F/axe (notons ici l'absence de contrôle Σpoint_invariant)	
Partie analytique : Σhor, Σdist *Partie globale* : Σtaille_1 et Σparallélisme_segment et Σdemi_plan, ou Σrotation (avec ou sans retournement)	
Partie analytique : Σhor, Σdist *Partie globale* : Σparallélisme_segment, Σdemi_plan ; ou Σtaille_1 et Σrotation (avec ou sans retournement)	

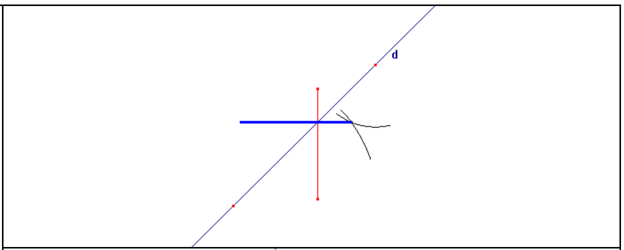
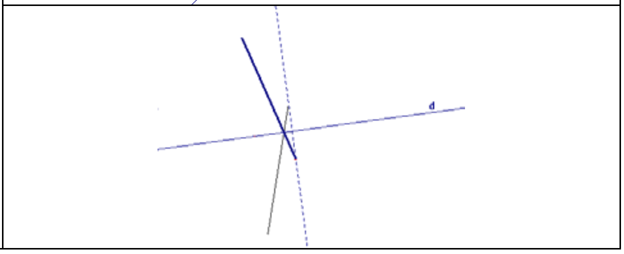
Partie analytique : Σortho et Σdist *Partie globale* : Σtaille_1 et Σpoint_invariant Dans ce cas, l'élève obtiendra comme image une figure perceptivement correcte	 

Tableau 22. Exemples de procédures semi-analytiques : problème-segment

En ce qui concerne le « segment figure_1 », l'orientation verticale du segment sur la feuille et l'angle formé par ce segment et la droite d, peuvent amener l'élève à utiliser une procédure où un segment est construit globalement sur une droite horizontale, passant par le point d'intersection entre le segment initial et la droite d[44]. Dans ce cas, on peut dire que l'élève contrôle sa construction perceptivement, par la conservation des longueurs – aussi bien celle du segment initial que celle des parties de ce segment se trouvant de part et d'autre de l'axe de symétrie – et par la propriété de l'invariance des points de l'axe. Par cette procédure, il obtiendra une figure perceptivement correcte, comme le montre la figure ci-dessous :

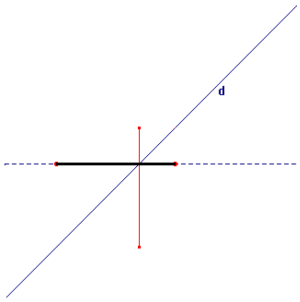


Figure 40. Segment figure_1 : image construite sur une droite horizontale, passant par l'intersection du segment avec l'axe

Si l'élève n'explique pas la procédure utilisée ni ne laisse de traces sur la figure, nous n'aurons aucun moyen de distinguer cette procédure de celle où la direction orthogonale à l'axe est prise en compte.

Procédures globales

L'élève peut construire les images des segments en ayant recours aux techniques du pliage et du calque. Dans ces cas-là, toutes les procédures décrites dans la section 5.1 du chapitre 3 (cf. p. 87) concernant l'utilisation de ces techniques, sont susceptibles d'être utilisées par l'élève

[44] Cette construction peut être réalisée semi-analytiquement, et aussi globalement.

dans la construction de l'image de ces segments. Les contrôles mobilisés dépendent de la procédure mise en œuvre.

L'élève peut aussi construire l'image de ces segments par la perception globale. Comme pour les procédures précédentes, les directions pouvant être privilégiées par l'élève sont les suivantes : orthogonale à l'axe ou horizontale pour le segment-figure_1, et orthogonale à l'axe ou verticale pour le segment-figure_2. La distance considérée par l'élève dans ces procédures est une « distance globale » de la figure à l'axe.

Ainsi, les contrôles susceptibles d'intervenir dans la construction globale de l'image de ces segments sont les suivants : Σortho, Σhor (ou Σvert), Σtaille_1, Σdemi_plan, Σpoint_invariant, Σintersection_F/axe, Σtranslation ou Σrotation (suivie ou non de retournement). Dans ces cas-là différentes constructions peuvent être réalisées. Exemples de ces constructions ci-dessous :

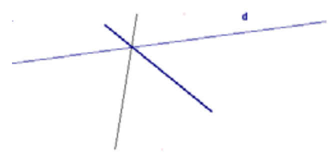
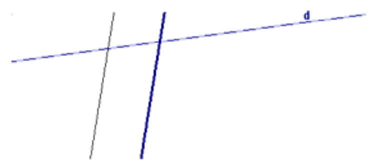
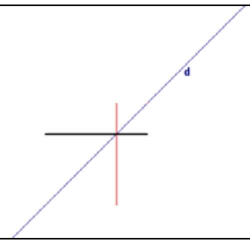
Σrotation, Σdist (perceptive globale), Σpoint_invariant et Σtaille_1	
Σhor, Σdist (perceptive globale), Σtaille_1, Σtranslation et/ou Σparallélisme_segment	
Σortho et Σdist (perceptive globale), Σpoint_invariant et Σtaille_1 Dans ce cas, la figure obtenue est perceptivement correcte	

Tableau 23. Exemples de procédures globales : problème-segment

4.4. Problème-maison

Description du problème en termes de variables didactiques :

Variables didactiques	***Valeurs***
Nature du problème	*Construction de la figure symétrique*
Spécificité de la figure F	*F ne possède pas de segments parallèles à l'axe de symétrie* *F ne possède pas d'axe de symétrie*
Nature de F	*Représente un objet réel identifiable (maison)* *Complexe (composée de segments)*

Orientation des segments de la figure F sur la feuille	*Oblique ; Horizontale ; Verticale*
Orientation de l'axe sur la feuille	*Oblique*

Tableau 24. Variables didactiques et valeurs concernant le problème-maison

Les procédures les plus probables dans la construction de l'image de cette figure sont les suivantes :

Procédures analytiques

1. Équidistance

Les images des sommets de la figure sont construites par la méthode s'appuyant sur la propriété d'équidistance. En reliant correctement les points images, l'élève obtiendra la réponse correcte. Les contrôles intervenant sont Σdist et Σsegment.

2. Orthogonalité et égalité des distances à l'axe

Les images des sommets de la figure sont construites par la même procédure, décrite dans le problème précédent. Si l'élève relie correctement les points images obtenus, il obtiendra la figure symétrique correcte, comme le montre la figure ci-dessous :

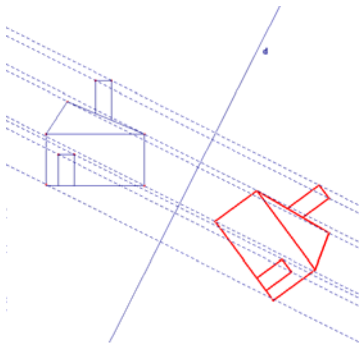


Figure 41. Construction analytique : direction orthogonale et égalité des distances des points à l'axe

Les contrôles intervenant dans cette construction sont Σortho, Σdist et Σsegment.

3. Direction horizontale sur la feuille

Le fait que cette figure possède des segments horizontaux et verticaux sur la feuille peut favoriser le choix de la direction horizontale par l'élève.

Dans ce cas, la procédure envisagée est la suivante : les images des sommets de la figure sont construites dans la direction horizontale sur la feuille, en conservant l'égalité des distances à la droite d. En reliant correctement les images obtenues, l'élève obtiendra une figure comme ci-dessous :

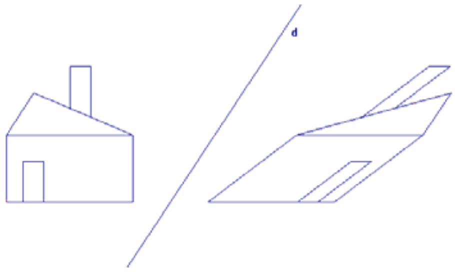


Figure 42. Construction de l'image par une procédure analytique : direction horizontale et conservation de distance à l'axe

Les contrôles intervenant dans la construction sont Σhor, Σdist et Σsegment. Si les contrôles Σforme et Σtaille_1 appartiennent à la structure de contrôle de la conception mobilisée par l'élève, il peut être amené à rejeter la procédure parce que ni sa forme ni sa taille ne correspondent au résultat attendu (mêmes forme et taille que la figure initiale).

4. Prolongement d'un segment et égalité des distances à l'axe

L'élève peut également choisir une direction donnée par le prolongement d'un ou des segments de la figure. Les contrôles mobilisés sont Σprolong, Σdist et Σsegment. Dans le cas où le segment choisi est horizontal, cette direction se confond avec la direction horizontale. Dans la figure-maison, un seul segment à orientation non horizontale est envisageable : celui qui représente le toit de la maison. L'élève peut donc choisir la direction dans le prolongement de ce segment. Nous considérons cependant que si les contrôles Σforme et Σtaille_1 appartiennent à la structure de contrôle de la conception mobilisée, l'élève sera amené à rejeter cette procédure, car il obtiendra comme image une figure dont la forme et la taille sont différentes de celles de la figure initiale.

5. Demi-tour autour d'un point sur l'axe

Les images des sommets de la figure sont construites par demi-tour autour d'un point sur la droite d, comme si c'était par symétrie centrale. En reliant correctement les images obtenues, et en fonction du point choisi sur d, l'élève obtiendra des figures comme celles-ci :

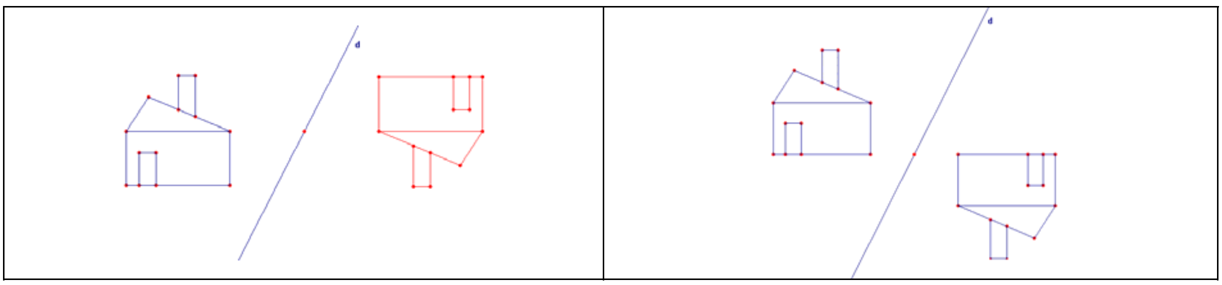


Figure 43. Construction des images des sommets de la figure par demi-tour autour d'un point sur d

Dans ce cas, les contrôles intervenant sont celui de conservation de distance et Σsegment. Cependant, le contrôle de conservation de distance n'est pas celui qu'on désigne par Σdist puisque dans ce cas, il s'agit de conservation de distance à un point de l'axe. Le fait que la figure obtenue ne soit pas dans sa position standard (la figure-maison est à l'envers) mais qu'elle corresponde à la rotation de la figure initiale, peut amener l'élève à rejeter la procédure si Σrotation ne fait pas partie de la structure de contrôle de la conception mobilisée.

Procédures semi-analytiques

Pour ces procédures, l'image d'un ou de quelques sommets de la figure est construite analytiquement, par le biais d'une des procédures montrées dans l'analyse du problème-segment. Puis en fonction de ces points, l'image de la figure-maison sera construite globalement. Les contrôles envisagés sont les suivants :

a) *Partie analytique* : voir l'analyse des procédures analytiques ci-dessus ;

b) *Partie globale* : Σtaille_1, Σforme, Σdemi_plan, Σparallélisme_segment et Σtranslation ou Σrotation (suivie ou non de retournement). En fonction des contrôles mobilisés par l'élève, plusieurs constructions peuvent être réalisées. Voici des exemples de ces constructions :

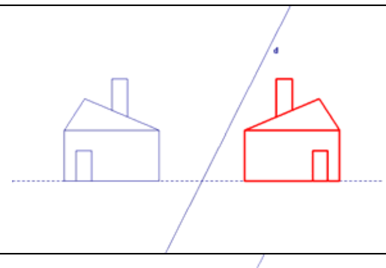
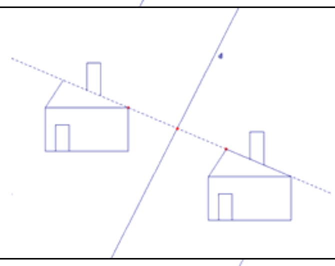
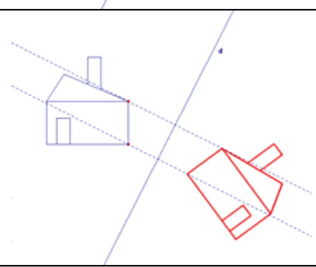
Partie analytique : Σhor ou Σprolong et Σdist *Partie globale* : Σtaille_1, Σforme, Σtranslation + Σsens_inverse	
Partie analytique : Σprolong et Σdist *Partie globale* : Σtaille_1, Σforme, Σtranslation	
Partie analytique : Σortho et Σdist *Partie globale* : Σtaille_1, Σforme, Σsens_inverse, Dans ce cas, l'élève obtiendra comme image une figure perceptivement correcte.	

Figure 44. Exemples de procédures semi-analytiques : figure-maison

Procédures Globales

Nous nous reportons ici à l'analyse faite pour les procédures semi-analytiques, tout en signalant que dans ces procédures-ci, la direction et la distance à l'axe sont prises en compte par l'élève de façon perceptive. Exemples de ces constructions ci-dessous :

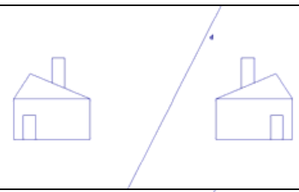
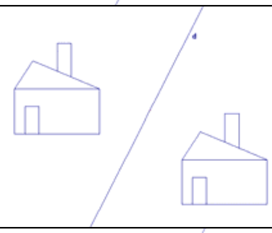
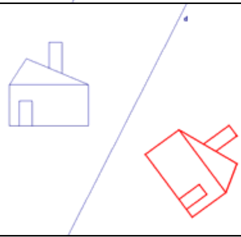
Σhor ou Σprolong, Σtaille_1, Σforme, Σtranslation + Σsens_inverse et Σdemi_plan	
Σprolong et Σdist (globale), Σtaille_1, Σforme, Σtranslation et Σdemi_plan	
Σortho et Σdist (globale), Σtaille_1, Σforme, Σsens_inverse et Σdemi_plan Dans ce cas, la figure obtenue peut être perceptivement correcte.	

Tableau 25. Exemples de procédures globales : problème-maison

5. Analyse a posteriori

Nous procédons à l'analyse des copies d'élèves en deux temps :

- Dans un premier temps, nous réaliserons une analyse quantitative de l'ensemble des 51 copies ;
- A partir de cette analyse quantitative nous construirons trois copies que nous analyserons en terme de conceptions.

5.1. Analyse quantitative : types de réponses et procédures

Nous procéderons à cette analyse problème par problème, notre objectif étant d'obtenir un aperçu global des types de réponses et de procédures de construction utilisées par l'ensemble des élèves. Ceci nous permettra d'une part, d'étudier le rôle des variables didactiques qui ont pu influencer les choix des élèves et d'autre part, de faire des choix pour notre étude expérimentale suivante.

Signalons que dans cette partie de l'analyse, notre but n'est pas de caractériser les conceptions des élèves au sens du modèle cK¢. En effet, compte tenu du caractère local d'une conception nous considérons que pour ce faire il faudra analyser l'ensemble de la production de l'élève. Cette caractérisation fera pourtant l'objet de l'analyse des copies.

Nous présentons pour chaque problème un tableau de fréquence des types de réponses données par les élèves aux problèmes de reconnaissance, et de fréquence des types de procédures utilisées dans les problèmes de construction de figures symétriques.

Pour analyser les figures construites par les élèves, nous utiliserons la catégorisation suivante :

- *Figure correcte* : une figure est correcte quand l'élève laisse des traces (codage, feuille pliée, …) sur la figure et/ou quand il donne des explications nous permettant d'affirmer que la figure a été construite en s'appuyant sur les propriétés de la symétrie ;
- *Figure perceptivement correcte :* nous considérons une figure comme perceptivement correcte quand elle est tracée correctement, mais que l'élève n'a pas laissé de traces ni fourni d'explications permettant d'affirmer que la procédure utilisée est également correcte ;
- *figure erronée* : une figure est erronée quand elle ne correspond pas au symétrique de la figure donnée ;
- *figure inachevée* : une figure est inachevée lorsque l'élève a abandonné la construction avant d'aboutir à la figure complète.

5.1.1. Problème-flèche

Type de réponses	**Fréquence (sur 51)**
Flèche bleue (réponse correcte)	41
Flèche rouge	4
Flèche verte	2
Flèches rouge et bleue	1
Pas d'indication de couleur[45]	1
Pas de réponse	2

Tableau 26. Fréquences de types de réponses : problème-flèche

[45] Cet élève donne la réponse suivante : « *la flèche symétrique à la flèche noire est la flèche car j'ai imaginé la flèche à l'inverse* ». Il a certainement oublié d'indiquer la couleur de la flèche choisie.

Flèche bleue (réponse correcte)

Le tableau précédent montre que la majorité des élèves ont choisi la bonne figure comme réponse. Parmi les 41 élèves (sur 51) qui ont donné cette réponse :

- 25 ont justifié leur choix en utilisant l'argument de la superposition des figures par pliage. Cependant aucun élève n'a plié effectivement la feuille de papier ;
- 4 ont justifié leur choix par l'égalité des distances des points à l'axe ;
- 11 élèves ont donné des justifications variées. Par exemple, le fait que les segments reliant les points symétriques sont perpendiculaires à la droite d, ce qui caractériserait la prise en compte de la propriété d'orthogonalité par l'élève concerné; le fait que la figure image est « dans l'autre sens comme dans un miroir » ce qui renvoie à la prise en compte par cet autre élève de la propriété de changement de l'orientation des angles par la symétrie orthogonale ;
- 1 élève n'a pas justifié son choix.

Flèche rouge

4 élèves ont choisi la flèche rouge comme réponse. Parmi eux, 2 justifient leur choix en évoquant la superposition des figures par pliage, sans pour autant préciser la droite le long de laquelle la feuille serait pliée. Ces élèves n'ont pas réalisé effectivement le pliage. Ainsi, deux hypothèses sont envisageables :

- ils ont eu recours au pliage mental. Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, ce pliage serait imaginé selon un axe perpendiculaire à la droite support des flèches noire et rouge, ou bien le long de la droite support des grands segments de ces deux flèches. Il se peut aussi que les élèves n'arrivent pas à mobiliser les images mentales du pliage, c'est à dire qu'ils peuvent très bien savoir qu'il faut plier le long de d mais en n'arrivant pas à imaginer où la figure sera placée ;
- il s'agit d'un effet de contrat didactique. Dans la consigne du problème il est demandé d'expliquer le choix de la figure symétrique, les élèves se rappellent alors leur cours sur la symétrie où il a été dit que deux figures symétriques se superposaient par pliage. Ainsi, ils choisissent cette figure pour des raisons qui restent implicites et justifient leur choix en évoquant le pliage.

Un autre élève justifie son choix par le prolongement du grand segment de la figure initiale : « sa couleur est orange (rouge) car si on trace le prolongement de cette droite on arrive à la droite orange (rouge) ». Le dernier élève ne justifie pas sa réponse.

Flèche verte

Les 2 élèves qui ont choisi la flèche verte comme réponse justifient leur choix par la superposition des figures par pliage. Les explications données sont les suivantes : « c'est la verte car si on plie par rapport à la droite, elle vient sur la verte » ; « c'est la verte car elle va dans le même sens que la noire et si l'on plie la feuille sur le trait, les deux flèches seront l'une sur l'autre ». Remarquons que dans cette dernière explication, l'élève évoque le fait que les deux flèches vont « dans le même sens », ce qui nous fait penser que cet élève a fait le choix comme s'il s'agissait d'une translation de la flèche noire dans la direction horizontale.

Flèches bleue et rouge

Un élève a choisi ces deux flèches comme réponse et donne la justification suivante : « car on s'imagine qu'on tourne la feuille, elle peut aller dans les deux sens ». Nous supposons que cet élève a procédé comme s'il s'agissait de rotation de la flèche noire autour d'un point sur la droite d. Signalons pourtant que les élèves de cette classe n'ont pas encore étudié cette transformation.

5.1.2. Problème segment-losange

Ce problème a été proposé aux élèves d'une classe seulement. Parmi les réponses de ces élèves, nous trouvons les segments [MP], [MO] et [CP]. On remarque que ces trois segments sont dans l'autre demi-plan délimité par la droite d, par rapport au segment objet. Il semble alors que les élèves contrôlent leurs choix par cette propriété Les fréquences d'apparition de ces réponses sont les suivantes :

Type de réponses	Fréquence (sur 26)
Segment [MP] (réponse correcte)	19
Segment [MO]	5
Segment [CP]	1
Pas de réponse	1

Tableau 27. Fréquence de types de réponses : figure segment-losange

Segment [MP] (réponse correcte)

19 élèves ont reconnu le segment [MP] comme symétrique de [NM]. Parmi eux :

- 6 ont évoqué la superposition des segments [NM] et [MP] par pliage dans leurs explications, mais, comme dans le problème-flèche, le pliage effectif n'a pas été effectué ;

- 5 ont évoqué la superposition des points N et P et l'invariance du point M sur l'axe ;
- 6 élèves ont produit des démonstrations mathématiques pour justifier leur choix. Dans ces démonstrations, ils ont évoqué le fait que les points A et A' ainsi que les triangles ΔABC et ΔA'BC, sont symétriques ;
- 1 élève dit : « je ne peux pas l'expliquer, c'est logique » ;
- 1 élève n'a pas justifié son choix.

Segment [MO]

5 élèves ont choisi le segment [MO] comme image de [NM]. Parmi eux, 3 élèves justifient ce choix par la superposition de ces deux segments par pliage. L'un explique que le point M est le milieu du parallélogramme BA'CA et que les segments [BC] et [AA'] sont les diagonales de ce parallélogramme. Le dernier élève explique que les deux segments sont symétriques car « la droite ON est l'axe de symétrie ».

Segment [CP]

Un seul élève ayant choisi ce segment comme image de [NM], explique : « ça se voit ». Il semble que pour faire ce choix, l'élève se soit appuyé sur la perception de la figure.

5.1.3. Problème-segment

Segment figure_1

Type de réponses	Fréquence (sur 51)
Figure correcte	25
Figure perceptivement correcte	17
Figure erronée	7
Pas de réponse	2

Tableau 28. Fréquence de types de réponses : segment figure_1

Figure correcte

25 élèves ont réalisé la bonne construction. Parmi eux, 24 ont utilisé une procédure de construction analytique. Les procédures utilisées sont les suivantes :

- *analytique_1* : construire les droites perpendiculaires à la droite d passant par les extrémités du segment, reporter les distances de ces extrémités à l'axe sur ces perpendiculaires, et relier les points construits. Pour ce faire, les élèves ont utilisé l'équerre et/ou la règle graduée, et le compas (18 élèves) ;

- *analytique_2* : construire les symétriques des extrémités du segment par la méthode qui s'appuie sur la propriété d'équidistance, en utilisant le compas (cf. Figure 5, p. 58). Puis relier les points construits (6 élèves).

Exemples de constructions réalisées par les élèves :

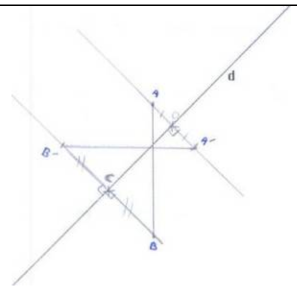
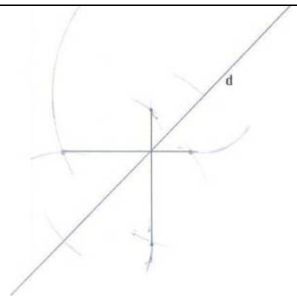
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 45. Proc. analytique**	*Je trace une droite passant par A est perpendiculaire à la droite d. Elle coupe d en O. j'ai mesure la distance [AO] puis je la reporte de l'autre coté de la droite d sur la perpendiculaire.* **Pareil pour B.*
 **Figure 46. Proc. analytique**	*J'ai reporté les points avec mon compas et je les ai reliés.*

Tableau 29. Exemples de construction du symétrique du segment figure_1 : figures correctes

Un seul élève a construit le symétrique du segment en utilisant le pliage effectif (procédure globale).

Soulignons qu'aucun élève n'a réalisé cette construction par le biais d'une procédure semi-analytique.

Figure perceptivement correcte

17 élèves ont construit une figure perceptivement correcte. Les procédures utilisées sont les suivantes :

- *analytique_3* : construire des droites perceptivement perpendiculaires à l'axe, reporter les distances des extrémités à l'axe sur ces droites, et relier les points construits (6 élèves) ;
- *globale* : construction d'un segment perceptivement symétrique du segment donné (11 élèves).

Exemples de ces constructions :

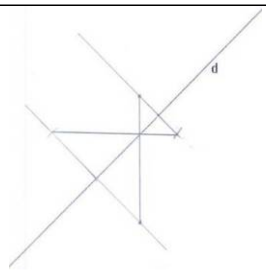
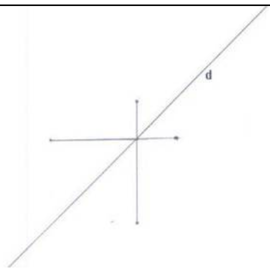
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 47. Proc. analytique**	Non justifiée
 **Figure 48. Proc. globale**	*Car si on plie la feuille au niveau de la droite (d) la figure se superposera* (pliage effectif non réalisé)

Tableau 30. Exemples de construction de l'image du segment figure_1 : figures perceptivement correctes

Comme précisé dans l'analyse a priori, l'orientation verticale du segment sur la feuille et l'angle formé entre ce segment et la droite d fait apparaître une ambiguïté. Est-ce la procédure où la direction orthogonale, l'égalité de distance, l'invariance du point sur l'axe et la longueur du segment sont pris en compte par l'élève ? Ou est-ce celle où l'image du segment est construite sur une droite horizontale passant par le point invariant entre le segment et d ? Étant donné que les élèves qui ont réalisé ces constructions n'ont pas donné assez d'informations, nous n'avons pas d'élément pour trancher entre ces deux procédures.

Aucun de ces 17 élèves n'a utilisé de procédures de type semi-analytique dans sa construction.

Figure erronée

Parmi les 7 élèves qui ont construit une figure erronée, 4 ont utilisé des procédures globales et 1 élève une procédure semi-analytique. Pour les deux autres, leurs réponses ne permettent pas de distinguer si la procédure utilisée est analytique ou semi-analytique. Dans le tableau ci-dessous, nous donnons deux exemples de constructions réalisées, et aussi une description des procédures que nous avons identifiées :

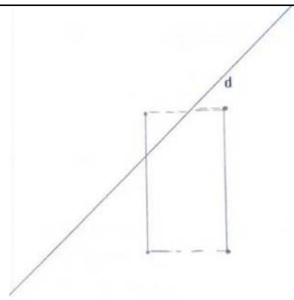
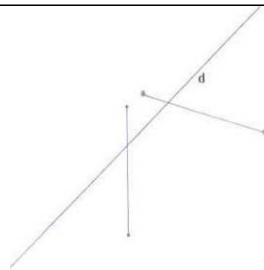
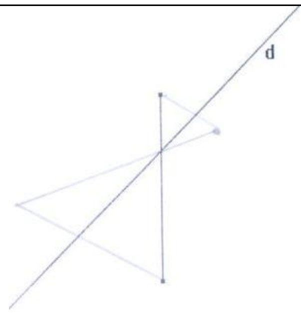
Procédure identifiée	Construction	Explication de l'élève
Report de la distance d'une des extrémités du segment à la droite d dans la direction horizontale, et construction d'un segment parallèle et de même longueur	 **Figure 49. Proc. semi-analytique**	Construction non justifiée
La figure image est obtenue par une « rotation » du segment initial autour d'un point qui n'est pas sur l'axe	 **Figure 50. Proc. globale**	*Comme si on prenait le segment et on le bougeait.*
On ne peut rien affirmer	 **Figure 51. Proc analytique ? Semi analytique ?**	*J'ai tracé la symétrie par rapport à la droite d :*

Tableau 31. Exemples de construction de l'image du segment figure_1 : figures erronées

A la différence de ce que nous avons observé dans la construction de « figures correctes » et « perceptivement correctes », nous vérifions que les procédures utilisées par les élèves sont assez diversifiées. Signalons que 3 de ces élèves ont construit un segment parallèle à celui de départ, comme si c'était par translation horizontale du segment sur la feuille. L'orientation verticale du segment sur la feuille a pu favoriser le choix de cette procédure par ces élèves.

Segment figure_2

Ce problème ayant été résolu par les élèves d'une des classes seulement, dans le tableau suivant nous ajoutons une troisième colonne pour montrer la fréquence des réponses données par ces mêmes élèves au problème segment-figure_1. Ce qui nous permettra de comparer les résultats des deux problèmes et d'observer l'effet des variables didactiques (orientation du segment, orientation de l'axe) sur les procédures des élèves.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Réponses des élèves	Fréquence (sur 26)	
	Figure_2	Figure_1
Figure correcte	12	14
Figure perceptivement correcte	3	6
Figure erronée	9	4
Pas de réponse	2	2

Tableau 32. Fréquence de types de réponses : segment figure_2

Figure correcte

12 élèves ont construit correctement le symétrique de ce segment. Parmi eux, 11 ont utilisé les procédures analytiques identifiées dans la construction de l'image du segment « figure_1 » : *analytique_1* (8 élèves) et *analytique_2* (3 élèves). Le douzième élève a construit le symétrique du segment en pliant effectivement la feuille de papier.

Exemples de constructions réalisées par les élèves :

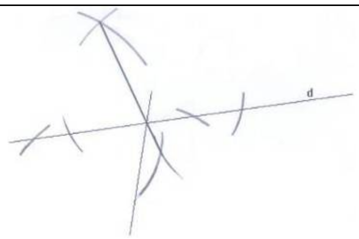
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 52. Proc. analytique**	*A l'aide de l'équerre, du compas et de la règle*
 **Figure 53. Proc. analytique**	*Si on plie, les deux segments se superposent*

Tableau 33. Exemples de constructions de l'image du segment figure_2 : figures correctes

Ces élèves ont utilisé ces mêmes procédures pour construire l'image du segment-figure_1. Ceci peut indiquer que la différence de valeurs des variables « orientation du segment » et « orientation de l'axe » sur la feuille dans les deux figures, n'ait pas induit ces élèves à changer de procédure.

Figure perceptivement correcte

3 élèves ont construit ce type de figure. Parmi eux : 2 ont construit leur figure par le biais de la procédure « analytique_3 » identifiée dans construction du segment-figure_1.

Le troisième élève a utilisé une procédure de construction globale. Dans le tableau ci-dessous nous montrons la construction de deux de ces élèves :

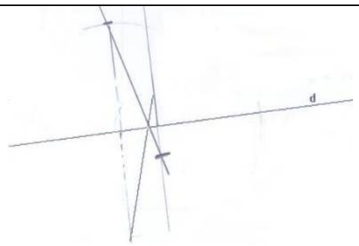
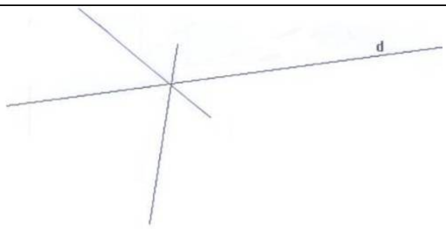
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 54. Proc. analytique**	Construction non justifiée
 **Figure 55. Proc. globale**	*J'ai construit le segment de l'autre côté*

Tableau 34. Exemples de constructions de l'image du segment figure_2 : figures perceptivement correctes

La procédure globale utilisée par ce dernier élève (cf. Figure 55) peut être décrite de la manière suivante : construire l'image du segment de même longueur, en conservant l'invariance du point sur l'axe et une distance globale. Le choix d'une direction perceptivement orthogonale à l'axe a pu également intervenir dans cette procédure.

Nous vérifions sur le tableau de fréquence (cf. Tableau 32) que le nombre de constructions de figures perceptivement correctes est le double dans la figure_1. La majorité de ces figures ont été construites par le biais d'une procédure globale. Cependant, étant donné que ces procédures laissent apparaître une ambiguïté dans l'interprétation et que les élèves n'ont pas donné assez d'informations sur la construction réalisée, nous n'avons pas le moyen d'expliquer la différence constatée dans ces résultats.

Figure erronée

9 élèves ont construit comme image une figure erronée. Parmi ceux-ci, 5 ont utilisé une procédure de construction analytique, 3 une procédure globale et la réponse donnée par le dernier ne nous permet pas de distinguer si la procédure utilisée est analytique ou semi-analytique. Exemples de ces procédures et des constructions des élèves données au tableau suivant :

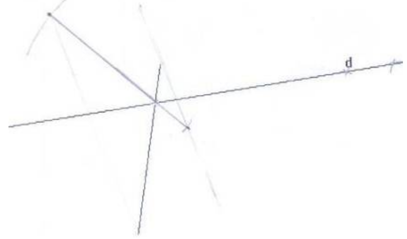
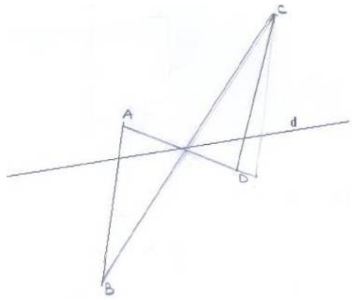
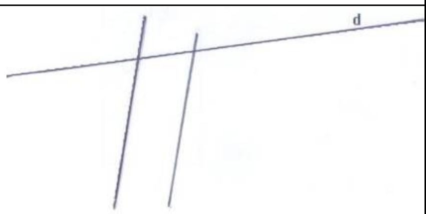
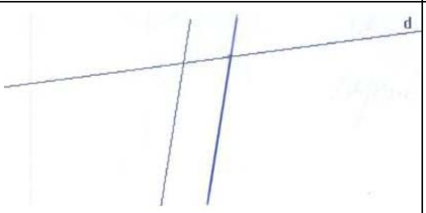
Procédure identifiée	Construction	Explication de l'élève
Report des distances des extrémités du segment à la droite d dans une direction qui semble être presque orthogonale à l'axe. Puis, construction du segment à partir de points construits	 **Figure 56. Proc. analytique**	Construction non justifiée
Construction des extrémités du segment autour d'un point sur la droite d. L'élève procède comme si c'était par symétrie centrale	 **Figure 57. Proc. analytique**	*Avec le compas je reporte les mesures des segments par rapport à la droite d*
Construction d'un segment parallèle juste à côté de celui de départ, cependant sans conserver la longueur du segment initial	 **Figure 58. Proc. globale**	Construction non justifiée
Construction d'un segment parallèle à celui de départ. L'élève procède comme si c'était une translation du segment initial dans la direction horizontale	 **Figure 59. Proc. globale**	Construction non justifiée

Tableau 35. Exemples de construction de l'image du segment figure_2 : figures erronées

Comme dans le segment-figure_1, les procédures utilisées par les élèves pour construire une figure erronée sont assez variées. 4 de ces élèves ont construit un segment parallèle à celui de départ, cependant même dans ces cas-là, les procédures utilisées sont assez différentes, comme montré dans le tableau ci-dessus. L'hypothèse selon laquelle l'orientation du segment sur la feuille (presque verticale) a pu favoriser les choix de ces élèves, est ici envisagée.

Notons que dans ce problème, 9 élèves ont construit une figure erronée alors qu'ils ont été 4 à donner ce type de réponse au segment-figure_1. Les 4 mêmes élèves ont construit une figure erronée dans les deux cas. Les 5 autres ont construit une figure perceptivement correcte comme image du segment-figure_1, par le biais d'une procédure globale.

5.1.4. Problème-maison

Réponses	Fréquence (sur 51)
Figure correcte	23
Figure perceptivement correcte	12
Figure erronée	10
Figures inachevées	3
Pas de réponse	3

Tableau 36. Fréquence de types de réponses : figure-maison

Figure correcte

23 élèves ont construit correctement le symétrique de la figure-maison. Parmi eux, 21 ont utilisé les procédures analytiques suivantes :

- construire les symétriques des points remarquables de la figure F à l'aide de droites perpendiculaires à l'axe, passant par ces points et reportant la distance de ces points à l'axe de l'autre côté de celui-ci. Puis tracer la figure symétrique en reliant ces points (15 élèves) ;
- construire les symétriques des points remarquables de la figure F par la méthode basée sur la propriété d'équidistance, puis tracer la figure symétrique en reliant ces points (6 élèves).Exemples de constructions réalisées :

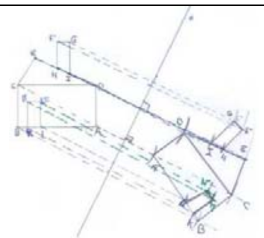
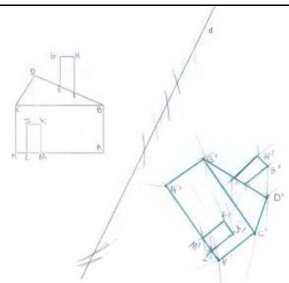
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 60. Proc. analytique**	*Je pars d'un point, je lui trace sa perpendiculaire par rapport à (d). Je mesure du point a (d) et je trace son symétrie.*
 **Figure 61. Proc. analytique**	*J'ai utilisé la même méthode que dans l'exercice précédent (avec le compas)* [46]*. J'ai juste rajouté d'autres lettres pour ne pas me perdre.*

Tableau 37. Exemples de construction de l'image de la figure-maison : figures correctes

[46] L'élève se réfère à sa construction du symétrique du segment_figure1, où il a construit la figure image par la méthode d'équidistance.

2 élèves ont construit les images de la figure par pliage effectif, et pliage effectif et calque.

Figures perceptivement correctes

12 élèves ont construit une figure perceptivement correcte. Dans ces constructions nous avons identifié des procédures analytique et semi-analytique. Les procédures utilisées sont les suivantes :

- *analytique* : construire des droites perceptivement perpendiculaires à la droite d, passant par les sommets de la figure donnée, reporter les distances des sommets à la droite d sur ces droites, et relier ces points pour construire l'image de la figure (3 élèves)
- *semi-analytique* : construire des droites perceptivement perpendiculaires à la droite d, passant par un ou plusieurs sommets de la figure, et reporter les distances de ces sommets à la droite d sur ces droites, pour construire les images de ces sommets. A partir de cela, le reste de la figure est construit globalement (9 élèves).

Exemples de constructions réalisées par ces procédures :

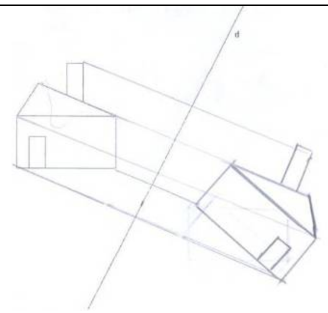
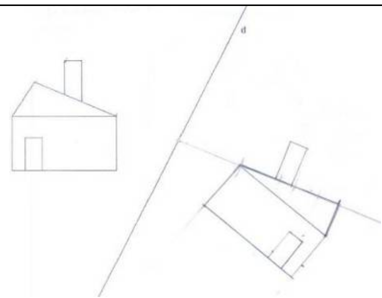
Construction	Explication de l'élève
 **Figure 62. Proc. semi-analytique**	Construction non justifiée
 **Figure 63. Proc. semi-analytique**	*J'ai commencé à tracer la droite du toit car elle est perpendiculaire à la droite (d) et j'ai construit la maison à partir de cette droite*

Tableau 38. Exemples de construction de l'image de la figure-maison : figures perceptivement correctes

Aucun élève n'a construit une figure « perceptivement correcte » par une procédure globale. En revanche, ils ont souvent utilisé des procédures semi-analytiques. Nous supposons que ceci est dû à la complexité de la figure. Ainsi, pour construire l'image d'une telle figure, l'élève s'appuie au moins sur un élément (un ou plusieurs points) de la figure initiale pour construire son image.

Nous avons vérifié également que tous les élèves ayant utilisé ces procédures pensaient à inverser l'orientation des angles dans leur construction. Ceci peut indiquer que cette propriété de symétrie orthogonale est une connaissance disponible chez ces élèves.

Figure erronée

10 élèves ont construit une figure erronée. Comme dans la construction des images des segments, nous avons identifié des procédures de construction très diverses, pouvant être globale (4), semi-analytique (5) ou analytique (1). Parmi les constructions réalisées, nous présentons ci-dessous cinq exemples représentatifs des procédures utilisées :

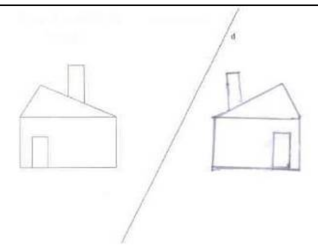
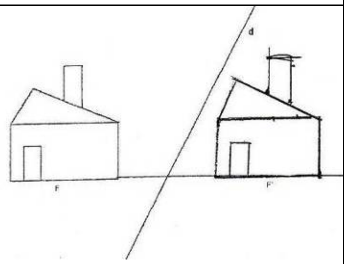
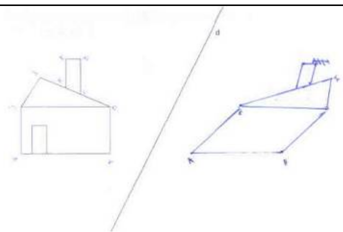
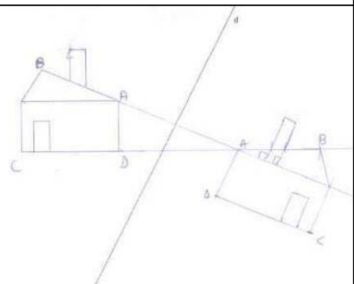
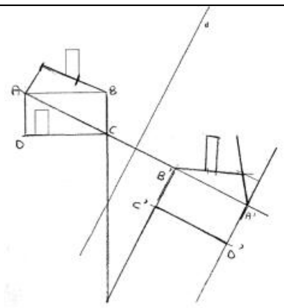
Procédure identifiée	Construction	Explication de l'élève
Construction de l'image de la figure comme si c'était par une translation suivie d'un retournement pour inverser l'orientation des angles de la figure de départ, dans une direction horizontale ou celle donnée par le prolongement d'un segment de F	 **Figure 64. Proc. globale**	*Comme si on plié la maison sur la droite d*
Construction de l'image de la figure comme si c'était par une translation de l'autre côté de l'axe, dans une direction horizontale ou celle donnée par le prolongement d'un segment de F	 **Figure 65. Proc. globale**	Construction non justifiée
Report des distances de quelques sommets de la figure à l'axe dans la direction horizontale, puis construction de la figure image	 **Figure 66. Proc. semi-analytique**	Construction non justifiée
Prolongement du segment qui représente le toit de la maison. Prolongement du segment qui représente la base de la maison. Construction de la figure image à partir du point d'intersection entre les deux droites construites	 **Figure 67. Proc. semi-analytique**	*J'ai tracé la maison comme un pliage en prolongeant et rapportant les droites*
Report de la distance d'un point de la figure à l'axe sur une droite orthogonale à l'axe et construction du symétrique de ce point. A partir de ce point, construction de l'image, ayant les mêmes forme et taille que la figure initiale	 **Figure 68. Proc. semi-analytique**	*J'ai tracé la perpendiculaire A à la droite d et pareil pour les autres*

Tableau 39. Exemples de construction de l'image de la figure-maison : figures erronées

Comme nous pouvons le constater, dans la plupart des cas la taille et la forme de la figure initiale sont conservées. Parmi les dix « figures erronées » construites, une seule (cf. Figure 66) n'a pas la même forme que la figure initiale. Certes, l'élève qui a construit cette figure n'explique pas sa construction, mais on voit que les distances de certains sommets de la figure à la droite d ont été reportées de l'autre côté de cette droite, dans la direction horizontale. Contrairement à ce que nous avions prévu, la déformation de la figure obtenue n'a vraisemblablement pas gêné cet élève car il n'a pas rejeté sa procédure. 7 élèves sur 10 ont choisi la direction horizontale. Comme prévu, le fait que cette figure possède plusieurs segments horizontaux et verticaux, qu'elle représente un objet réel identifiable et de plus, qu'elle soit présentée dans sa position standard, a pu amener ces élèves à faire ce choix dans leurs constructions.

Notons également que la majorité de ces élèves pensent à inverser l'orientation des angles dans leur construction.

Figure inachevée

3 ont réalisé ce type de construction. Nous interprétons ainsi les procédures utilisées par ces élèves dans la partie construite :

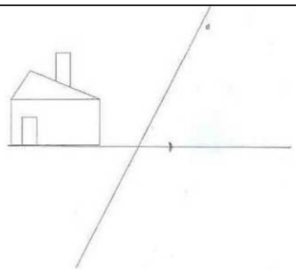
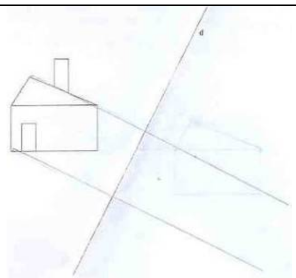
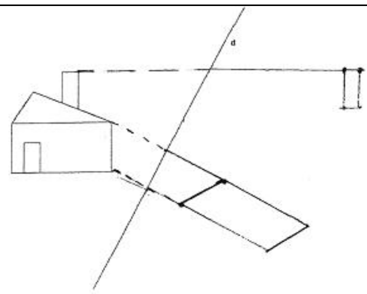
Procédure identifiée	Construction	Explication de l'élève
Construction de l'image d'un sommet de la figure F en conservant la distance à l'axe considérée soit dans la direction horizontale, soit dans celle du prolongement d'un segment horizontal de F, puis abandon.	 **Figure 69. Proc. analytique**	*Je n'arrive pas*
Construction de deux droites soit perceptivement orthogonales à l'axe, soit dans la direction donnée par le prolongement d'un segment oblique de F, puis abandon. Pliage de la feuille de papier le long de la droite d	 **Figure 70. Proc. globale**	Construction non justifiée
Construction d'images de quelques points de F en conservant la distance à l'axe d'une part dans la direction horizontale ou dans le prolongement d'un segment horizontal, et d'autre part dans le prolongement d'un segment oblique de F ; construction d'images de deux sous-figures à partir de ces points ; puis abandon	 **Figure 71. Proc. Semi-analytique**	*Pas trouvé. Désolée*

Figure 72. Exemples de construction de l'image de la figure-maison : figures inachevées

C'est uniquement pour ce problème que nous trouvons cette catégorie de réponses, nous faisons donc l'hypothèse que la complexité de la tâche (due à la complexité de la figure), ajoutée au fait que cette figure représente un objet réel, peut être à l'origine des difficultés de ces élèves.

Pour le dernier élève (cf. Figure 70), par exemple, le constat que les sous-figures construites ne puissent pas donner l'image de la maison l'a éventuellement conduit à abandonner sa construction. Ceci témoignerait d'un conflit entre les contrôles théorique et perceptif probablement mobilisés : d'une part ceux relatifs aux critères « direction » et « distance », et d'autre part ceux relatifs aux critères « taille » et « forme ». Cependant, pour identifier ces éventuels conflits ainsi que leurs origines, nous pensons qu'il faudrait étudier l'ensemble de la production de cet élève en termes de conception.

5.1.5. Conclusion

Cette conclusion concerne les résultats de l'analyse quantitative où nous avons étudié les réponses données par les 51 élèves de deux classes de quatrième au collège, aux problèmes de reconnaissance et de construction des figures symétriques. Nous comparerons les résultats obtenus en termes de réussite et d'échec dans ces tâches et nous soulignerons le rôle que certaines variables didactiques ont pu jouer dans les réponses des élèves. Par ailleurs, dans les problèmes de construction, nous comparerons les résultats obtenus en termes de types de procédures utilisées dans la construction des figures.

Cas de réussite

Les taux de réussite des élèves pour chacun des problèmes sont les suivants :

Problèmes résolus			% de réussite
Reconnaissance de figures symétriques	Flèche		80
	Segment-losange		73
Construction de figures symétriques	Segment	figure_1	49
		figure_2	46
	Maison		45

Tableau 40. Taux de réussite des élèves par problème résolu

Ce tableau montre que les élèves ont mieux réussi les problèmes de reconnaissance que les problèmes de construction. Il semble donc que la nature des problèmes de reconnaissance où les réponses sont données joue un rôle dans ces résultats, car la possibilité de donner une réponse erronée y est moindre.

La majorité des élèves ayant donné la bonne réponse aux problèmes de reconnaissance justifient leurs choix par la propriété de superposition des figures symétriques par pliage mais ce pliage n'est pas effectif. En revanche, la plupart des constructions correctes sont basées sur la mise en œuvre des propriétés d'égalité des distances des points à l'axe et/ou d'orthogonalité à l'axe. Ceci peut montrer que dans la résolution de problèmes de construction, les élèves mettent en œuvre d'autres connaissances relatives à la symétrie orthogonale, au-delà de la superposition de figures symétriques par pliage.

Un élément important à considérer dans ces résultats est que dans les problèmes de construction, nous avons considéré une catégorie de figures qui sont « perceptivement correctes ». Si nous considérions ces constructions comme correctes le taux de réussite en serait modifié, comme le montre la dernière colonne du tableau suivant :

<table>
<tr><th colspan="3">Problèmes résolus</th><th>% de figures correctes</th><th>% de figures correctes et perceptivement correctes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Reconnaissance de figures symétriques</td><td colspan="2">Flèche</td><td>80</td><td>---</td></tr>
<tr><td colspan="2">Segment-losange</td><td>73</td><td>---</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Construction de figures symétriques</td><td rowspan="2">Segment</td><td>figure_1</td><td>49</td><td>82</td></tr>
<tr><td>figure_2</td><td>46</td><td>58</td></tr>
<tr><td colspan="2">Maison</td><td>45</td><td>69</td></tr>
</table>

Tableau 41. Taux de réussite des élèves en considérant les figures « perceptivement correctes » comme « correctes »

Notons que, dans ce cas, le taux de réussite au problème segment-figure_1 serait comparable à celui des problèmes de reconnaissance de figures symétriques. Le fait que dans la plupart des cas les images de cette figure (figure_1) aient été construites par une des procédures globales et que les variables de cette figure laissent voir une ambiguïté dans l'interprétation de ces procédures, pourrait être une explication de ce résultat.

Cas d'échec

Dans les problèmes de reconnaissance, les choix de la « flèche rouge » (cf. problème-flèche, p. 128) et du segment [MO] (cf. problème segment-losange, p. 129) sont les réponses les plus fréquentes chez les élèves. Comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori, ces réponses renvoient au choix d'une direction donnée par le prolongement d'un segment de la figure. Étant donné que ces élèves sont en classe de quatrième et qu'en classe de cinquième ils ont déjà étudié la symétrie centrale, il est possible que les connaissances relatives à cette symétrie aient pu intervenir dans le choix de ces élèves.

Dans les problèmes de construction, la direction horizontale et/ou celle donnée par le prolongement d'un segment de la figure (dans le cas de la figure-maison) ont été préférées par les élèves. Les orientations verticale et horizontale des segments sur la feuille ont pu favoriser ces choix par les élèves.

Cette analyse montre aussi que tous les élèves ont abouti à la construction de l'image des segments. Cependant, dans le problème-maison trois élèves ont abandonné leur construction. Nous avons supposé que le fait qu'il s'agisse d'une figure complexe et qu'elle représente un objet réel, peut être à l'origine de l'abandon de la construction par ces élèves.

<u>Procédures identifiées chez les élèves dans les problèmes de construction</u>

Comme nous l'avons montré au cours de l'analyse, les élèves ont utilisé différentes procédures de construction. Les taux d'utilisation par type de procédure sont les suivants :

Type de procédures	Segment figure_1 (%)	Segment figure_2 (%)	Figure-maison (%)
Analytique	61	75	52
Semi-analytique	2	-	33
Globale	33	21	15
Analytique ou semi-analytique	4	4	-

Tableau 42. Type de procédures utilisées par les élèves dans les problèmes de construction

Comme le montre le tableau, les procédures de construction analytiques ont été privilégiées par les élèves dans la résolution des trois problèmes de construction. Le fait que les instruments de dessin aient été mis à disposition des élèves, et que nous leur ayons rappelé qu'ils pouvaient les utiliser, a pu jouer un rôle dans ce choix des élèves.

Le pliage effectif et le calque (qui renvoie aux procédures globales) ne sont presque pas utilisés par les élèves. Ces techniques ne sont pas mentionnées explicitement dans la consigne des problèmes, c'est pourquoi les élèves n'y ont pas recouru.

Notons que les procédures analytiques ont été plus utilisées dans la construction de l'image des segments, et moins dans la construction de l'image de la figure-maison. En revanche, l'utilisation des procédures semi-analytiques est plus fréquente dans la construction de cette dernière. En effet, les élèves n'ont presque pas utilisé ces procédures dans la construction du segment. Ceci semble confirmer les résultats de la recherche de Tahri (cf. Tahri 199, p. 214-215) qui a été placée dans la problématique de la construction de l'image d'un segment par rapport à une droite. Nous supposons que les élèves ont eu recours aux procédures semi-analytiques dans le problème maison dans le but de prendre appui sur des éléments de la figure, pour ensuite mener à bien leur construction de façon perceptive globale.

Nous observons également, dans le tableau ci-dessus, que les procédures globales ont été plus utilisées dans la construction de l'image du segment-figure_1. Dans la plupart des cas, la figure construite était « perceptivement correcte ». Ainsi, nous reprenons notre hypothèse selon laquelle l'orientation du segment a pu amener les élèves à construire globalement un segment horizontal sur la feuille.

5.2. Construction et analyse de copies : caractérisation de conceptions

L'objectif de cette analyse est de caractériser les conceptions mobilisées par ces élèves au sens du modèle cK¢.

Pour réaliser cette analyse, nous avons choisi trois copies d'élèves, que nous appellerons Anissa, Béatrice et Cédric[47]. Les copies d'Anissa et de Cédric sont des copies fictives, construites à partir des réponses données par les élèves qui ont participé à l'expérimentation. La copie de Béatrice est la vraie copie d'une de ces élèves. Le choix de ces copies a été fait en fonction de nos intérêts didactiques car ces copies sont celles qui seront fournies aux professeurs dans le but d'étudier leurs prises de décisions didactiques.

Les réponses données dans ces copies ne sont pas celles de la majorité des élèves. Le choix de ces copies réside plutôt dans notre intérêt à fournir aux professeurs une certaine diversité de réponses et de procédures de construction identifiées dans l'analyse quantitative, afin de pouvoir accéder à des séquences didactiques plus riches au sens de la pluralité des problèmes pouvant être proposés par les professeurs, ce qui peut nous apporter un plus large éventail de données relatives à leurs décisions.

Ci-après, nous explicitons les raisons du choix de ces copies.

Copie « Anissa »

Cette copie a été conçue de sorte que les réponses et les procédures de construction fournies présentent une certaine convergence. Avec ce choix, nous avons l'intention de vérifier auprès des professeurs si cette convergence dans les réponses entraînera ou non des ressemblances dans les types de décisions prises, que ce soit à propos de la prise d'information sur l'activité d'Anissa ou de la construction du processus d'enseignement.

Par ailleurs, nous avons voulu proposer une copie où toutes les réponses données par l'élève sont erronées. Ce choix nous semble pertinent par rapport aux questions que nous nous posons à ce propos : dans la prise d'information sur l'activité d'Anissa, les professeurs considéreront-ils simplement que toutes ses réponses sont erronées ? Dans leurs décisions, prendront-ils en compte les connaissances correctes éventuellement mobilisées par Anissa, malgré ses réponses erronées ? En fonction de cette prise d'information, quels types de dispositifs proposeront-ils de mettre en place dans le but de susciter un apprentissage chez Anissa ?

[47] Voir annexe 1.

Copie « Béatrice »

Il s'agit, comme nous l'avons mentionné, d'une vraie copie d'un des élèves ayant participé à l'expérimentation. Nous l'avons choisi d'une part parce que, contrairement à la copie d'Anissa, elle comporte des réponses assez variées, qui peuvent relever de conceptions également variées. Nous pensons que cette spécificité de la copie rendra plus complexe la tâche de prise d'information par les professeurs sur ce à quoi correspond la symétrie orthogonale pour Béatrice et par conséquent, la tâche de conception d'une séquence d'enseignement adaptée. Nous supposons alors que des décisions didactiques variées peuvent être prises par les différents professeurs visant l'apprentissage de cette notion mathématique par Béatrice.

Une autre raison pour laquelle nous avons choisi cette copie est que cette élève a construit correctement le symétrique des segments, mais n'a pas réussi à construire le symétrique de la figure-maison. Ce choix nous permettra d'aborder plus précisément le rôle que peut jouer la complexité d'une figure dans le choix des procédures de construction par les élèves.

Copie « Cédric »

Comme dans le cas de Béatrice, Cédric donne aussi bien des réponses correctes qu'erronées. Cependant, malgré cette diversité il y a une certaine cohérence dans ses réponses. Ceci nous permettra d'aborder les cas où la stabilité d'une conception peut conduire l'élève à abandonner le processus de résolution d'un problème.

La composition des copies

Ces copies comportent les problèmes suivants :

- Reconnaissance de figures symétriques : problèmes « flèche » et « segment-losange » ;
- Construction de figures symétriques : « segment »[48] et « maison » ;
- Reconnaissance et construction d'axe de symétrie. Comme déjà précisé, un problème de cette nature a été proposé aux élèves et cependant, nous n'en tiendrons pas compte dans nos analyses.

Pour ce faire, nous avons tout d'abord réalisé une étude détaillée de chacune des réponses de ces élèves en cherchant à identifier les procédures utilisées, ainsi que les élément de la (ou des) conception(s) en oeuvre dans la résolution : contrôles, opérateurs et système de représentation. Pour cela, nous avons utilisé l'outil d'analyse présenté au chapitre 3 (cf. p. 71

[48] Nous avons décidé de proposer seulement une des figures de construction du symétrique d'un segment : la figure_2.

et 86). Nous avons analysé les réponses données aux problèmes de reconnaissance en termes de critères de choix (direction, distance à l'axe, sens…). En ce qui concerne les problèmes de construction, nous avons cherché à identifier les procédures utilisées (analytique, semi-analytique et globale) et par le biais de ces procédures, nous avons identifié les éléments qui caractérisent la (ou les) conception(s) mobilisée(s). Enfin, nous avons mis en relation les éléments de conceptions identifiées dans l'analyse de chaque problème.

Nous présentons ci-après les résultats de ces deux analyses.

5.2.1. Copie Anissa

a) Analyse de la production

<u>Problème-flèche</u>

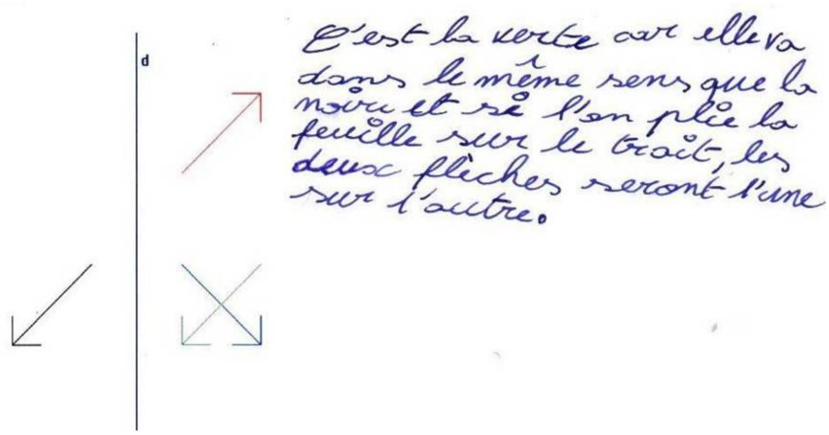


Figure 73. Réponse d'Anissa au problème-flèche

Étant donné qu'Anissa n'a pas réalisé d'action visible sur la figure, notre analyse sera fondée d'une part, sur les variables didactiques portées sur la figure et d'autre part, sur le choix de l'élève et l'explication qu'elle donne pour le justifier.

Parmi les flèches candidates, Anissa a choisi celle dont tous les segments sont parallèles aux segments correspondants à la flèche donnée (la noire). Cependant, l'hypothèse du parallélisme des segments ne suffit pas à expliquer ce choix car dans ce cas, deux réponses peuvent être envisagées : la flèche rouge ou la flèche verte. Anissa explique qu'elle a choisi la flèche verte parce qu'elle « va dans le même sens que la noire », ce qui pourrait vouloir dire que les deux flèches pointent vers la même direction (dans la signification courante du mot).

Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse a priori (cf. Figure 31, p. 133), le fait que l'axe soit vertical sur la feuille, la direction des droites (MM') et (NN') sur la figure citée peut être considérée aussi bien comme orthogonale à l'axe qu'horizontale (ligne de rappel horizontale). Ainsi, le choix d'Anissa relatif au critère « direction » correspond à une des valeurs « orthogonale à l'axe » ou « horizontale ».

Pour le critère « distance à l'axe », nous considérons que sa valeur est « distance globale conservée ». Cette distance renvoie ici probablement à D(M,d)=D(N',d) et D(N,d)=D(M',d).

Comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori, les segments qui composent les flèches verte et noire sont parallèles, ce qui favorise la mise en œuvre du contrôle Σparallélisme_segment. Nous faisons cette même considération par rapport à la mobilisation du contrôle relatif au critère « position », qui peut se traduire par le contrôle « Σtranslation » ou Σtranslation suivie de retournement.

Dans son explication, Anissa évoque le pliage le long de la droite d, et cependant elle ne le réalise pas effectivement. Nous supposons qu'elle sait que deux figures symétriques se superposent par pliage et qu'elle utilise cette connaissance pour justifier son choix. Nous pouvons faire deux hypothèses : le recours au pliage mental est utilisé ici comme moyen de validation a posteriori de son choix, ou bien cette évocation est un effet du contrat didactique sans aucune intention de validation. Comme précisé dans l'analyse a priori, nous considérons que le pliage mental relève de la mise en œuvre de contrôles liés à la perception globale. Dans ce cas les contrôles concernés seraient les mêmes que ceux mentionnés ci-dessus : Σparallélisme_segment et « Σtranslation » ou Σtranslation suivie de retournement.

Dans le tableau ci-dessous nous présentons les contrôles qui ont pu intervenir dans le choix (flèche verte) d'Anissa :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*horizontale ou orthogonale*	Σhor ou Σortho
« distance à l'axe »	*distance globale conservée*	Σdist
« position »	*translation* *translation suivie d'un retournement*	Σtranslation Σtranslation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σparallélisme_segment

Tableau 43. Problème-flèche : contrôles qui ont pu intervenir dans le choix d'Anissa

En ce qui concerne les opérateurs, étant donné la nature du problème Anissa n'a pas agi sur les figures ou du moins, elle n'a pas laissé de traces d'actions éventuelles (traits, marques...). Bien qu'ils aient pu être mis en œuvre mentalement ou sans laisser de trace, comme le fait d'estimer une égalité de longueurs ou de mesurer une distance, ce qui ne nécessite pas que l'on voie l'élève mettre en oeuvre cette action, bien qu'il y en ait une, nous n'avons pas d'indications pour pouvoir formaliser les opérateurs.

Quant à la taille et à la forme de la figure initiale, elles sont évidemment conservées. Comme précisé dans l'analyse a priori, nous ne pouvons pas affirmer que des contrôles liés à ces critères aient été effectivement mis en oeuvre par Anissa dans son choix. Nous faisons cette même considération concernant le contrôle Σdemi_plan (les figures objet et image sont d'un côté et de l'autre par rapport à l'axe).

Ainsi, en ce qui concerne le choix de la « flèche verte » par Anissa, nous considérons que pour elle la symétrie orthogonale, quand l'axe de symétrie est vertical, correspond à une translation (suivie éventuellement du retournement) de la figure dans la direction orthogonale ou horizontale, de l'autre côté de l'axe, tout en conservant une distance globale à l'axe.

Problème-losange

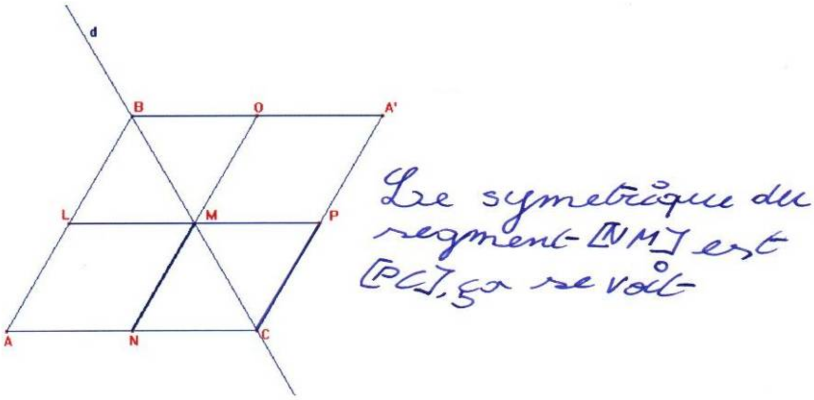


Figure 74. Réponse d'Anissa au problème-losange

L'explication donnée par Anissa à ce problème montre que son choix relève d'une approche perceptive globale de la figure sur la feuille. Elle n'a pas de doute, la réponse est évidente : « ça se voit ». Cette réponse est en cohérence avec la précédente : les segments objet et image sont parallèles et les extrémités correspondantes des segments sont sur des droites horizontales sur la feuille. Cependant, étant donné que dans ce problème, l'orientation de la droite d est oblique, le choix d'Anissa nous permet de décider entre la direction orthogonale à l'axe et horizontale, contrairement au problème précédent. Ceci écarte la possibilité, dans la résolution de ce problème de la mobilisation du contrôle Σortho envisagé dans le problème précédent.

Soulignons que pour ce problème, Anissa n'évoque pas le pliage dans son explication.

En ce qui concerne la conservation des distances à l'axe, nous sommes dans la même situation que précédemment : il semble qu'Anissa conserve une distance globale à l'axe qui peut se traduire par l'égalité des distances suivantes : D(M,d)=D(C,d) et D(N,d)=D(P,d).

Nous considérons que le contrôle « Σdemi_plan » a pu être mobilisé dans la résolution de ce problème car contrairement au cas précédent où toutes les figures candidates sont dans le même demi-plan délimité par la droite d, Anissa avait ici d'autres choix ne relevant pas de la mise en œuvre de ce contrôle. De plus, elle a choisi un segment qui a une extrémité sur l'axe. Dans ce cas, le contrôle Σextrémité_sur_axe a pu également intervenir dans ce choix.

En ce qui concerne les contrôles liés aux critères « forme » et « taille », nous faisons les mêmes hypothèses que dans le problème précédent, à savoir qu'ils n'interviennent pas nécessairement.

Ainsi, les contrôles qui ont pu intervenir dans le choix d'Anissa sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*horizontale*	Σhor
« distance à l'axe »	*distance globale conservée*	Σdist
« position »	*translation (éventuellement suivie de retournement)*	Σ translation Σ translation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σparallélisme_segment
		Σextrémité_sur_axe

Tableau 44. Problème segment-losange : contrôles qui ont pu intervenir dans le choix d'Anissa

Ainsi, à partir de la réponse d'Anissa à ce problème, nous faisons l'hypothèse que pour elle, la symétrie orthogonale correspondrait à une translation (éventuellement suivie de retournement) de la figure dans la direction horizontale, de l'autre côté de l'axe de symétrie, tout en conservant une distance globale à l'axe.

Problème-segment

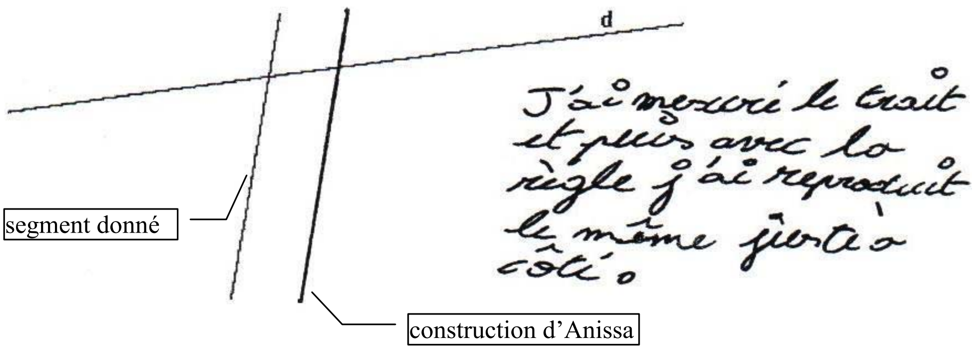


Figure 75. Réponse d'Anissa au problème-segment

Anissa a construit comme image du segment un segment parallèle de même longueur et « juste à côté » du segment donné. La construction d'Anissa ne nous permet pas d'affirmer si la droite d ou un point de cette droite ont été pris en compte dans cette construction. Malgré ce fait, nous tentons d'identifier des éléments qui puissent caractériser une conception de symétrie orthogonale mise en œuvre par Anissa dans cette construction.

En analysant plus précisément la construction réalisée et en nommant A, B, A' et B' les extrémités des segments objet et image respectivement, nous ne pouvons pas affirmer avec certitude quelle est la direction choisie par Anissa pour construire ce segment. Comme nous pouvons le constater dans la figure ci-dessous, la direction de (AA') semble parallèle à l'axe, tandis que celle de (BB') est plutôt horizontale sur la feuille.

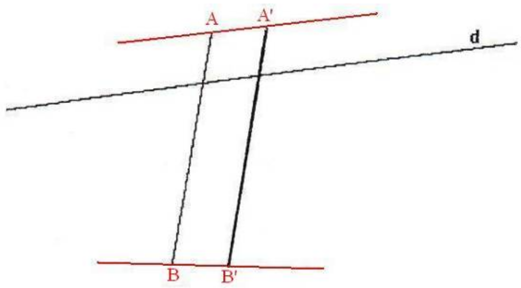


Figure 76. Droite (AA') perceptivement parallèle à la droite d et (BB') perceptivement horizontale

Dans la construction de ce segment, Anissa a pu mettre en œuvre l'une des trois procédures suivantes :

Procédure analytique

Anissa a pu construire le point A' dans la direction parallèle à l'axe et B' dans la direction horizontale, puis construire le segment [A'B']. Étant donné que la nature de ce problème est la construction d'une figure symétrique ce qui, contrairement aux problèmes précédents, oblige l'élève à réaliser des actions concrètes sur la figure, nous avons des indications pour pouvoir identifier des opérateurs susceptibles d'être mis en œuvre par Anissa. Ces opérateurs probables sont les suivants :

- RA1p : Construire l'image d'un point à une certaine distance de ce point dans la direction parallèle à l'axe ;
- RA1h : Construire l'image d'un point à une certaine distance de ce point dans la direction horizontale ;
- RA2 : Construire l'image d'un segment à partir des images des extrémités du segment donné.

Remarquons la coexistence chez l'élève de deux contrôles qui sont, a priori, contradictoires. Le fait que (AA') soit parallèle (ou presque) à l'axe peut s'expliquer par la tentative d'Anissa de prendre en compte « l'oblicité » de l'axe de symétrie qui n'est pas habituelle dans les problèmes scolaires traditionnels de symétrie orthogonale. Par ailleurs, la partie du segment donné au-dessus de l'axe est assez courte et par conséquent, son extrémité est relativement proche de l'axe, ce qui a pu également favoriser la prise en compte par Anissa de la direction donnée par cet axe. En revanche, l'extrémité B du segment est plus éloignée de l'axe, la direction de ce dernier n'influencerait pas alors le choix de la direction pour construire B'. On peut penser que ce serait alors le rappel horizontal, présent dans la résolution des problèmes de reconnaissance, qui s'est imposé.

Procédure semi-analytique

Anissa a pu construire le point A' dans la direction parallèle à l'axe, pour la même raison que précédemment, puis a construit un segment parallèle et de la même longueur. Ainsi, les opérateurs éventuels sont :

- RA1p
- RA3 : Construire l'image d'un segment à partir d'une extrémité, parallèle au segment donné, de même longueur que celui-ci.

Ainsi, elle n'aurait pas besoin de choisir une direction pour construire B'. La construction perceptive aurait introduit une imprécision qui laisserait penser que la direction (BB') serait horizontale.

Procédure globale

Le segment (A'B') est construit perceptivement, en faisant glisser la règle horizontalement. L'imprécision de la construction serait alors à l'origine de la différence des directions pour A' et B'. Dans ce cas, l'opérateur mobilisé serait le suivant :

- RA4 : Tracer l'image d'un segment donné parallèle, de même longueur et à proximité du segment initial, en faisant glisser une règle dans la direction horizontale.

Les réponses aux problèmes de reconnaissance nous font privilégier la dernière hypothèse.

La distance considérée par Anissa semble être une distance perceptive globale. Il s'agit d'une part de construire le segment image assez proche du segment objet, et d'autre part de faire en sorte que les distances des extrémités correspondantes des segments à l'axe soient égales, du moins perceptivement. Ceci renvoie à la mobilisation d'un contrôle de distance globale à l'axe.

En ce qui concerne la position du segment image par rapport à la position du segment initial, il semble qu'elle corresponde à une translation (éventuellement suivie de retournement) de la figure objet dans la direction horizontale. Cependant, le contrôle mobilisé peut être également lié au parallélisme.

Les contrôles concernant la conservation de la taille (ici, la longueur du segment) et de la forme (ici, l'image d'un segment est un segment) peuvent être concernés dans cette construction. En revanche, il semble que le contrôle demi-plan soit absent. Le fait que le segment coupe l'axe de symétrie peut avoir favorisé la non mobilisation de ce contrôle. Cependant, on remarque que le segment construit coupe également l'axe de symétrie, ce qui indique la mise en œuvre du contrôle Σintersection_F/axe.

Ainsi, dans le tableau ci-dessous, à partir des critères de choix et des valeurs envisagées, nous répertorions l'ensemble des contrôles qui ont pu intervenir dans la construction réalisée par Anissa par le biais des trois procédures décrites ci-dessous :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*horizontale* *parallèle à l'axe*	Σhor (les trois procédures) Σdirection_autre[49] (procédure analytique)
« distance à l'axe »	*distance globale conservée*	Σdist
« taille »	*conservée*	Σtaille_1
« forme »	*conservée*	Σforme
« position »	*translation (éventuellement suivie de retournement)*	Σtranslation Σtranslation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σparallélisme_segment
		Σintersection_F/axe
		Σsegment (procédure analytique)

Tableau 45. Problème-segment : contrôles qui ont pu être mobilisés par Anissa

Ainsi, nous concluons que l'image d'un segment par la symétrie orthogonale correspondrait pour Anissa à la translation du segment dans une direction horizontale sur la feuille. Toutefois, il est possible que l'orientation non standard de l'axe de symétrie (presque horizontale) ait provoquée une déstabilisation au niveau du contrôle lié à la direction horizontale (Σhor), notamment si une procédure analytique ou semi-analytique a été mise en place dans la construction.

Problème-maison : construction de la figure symétrique

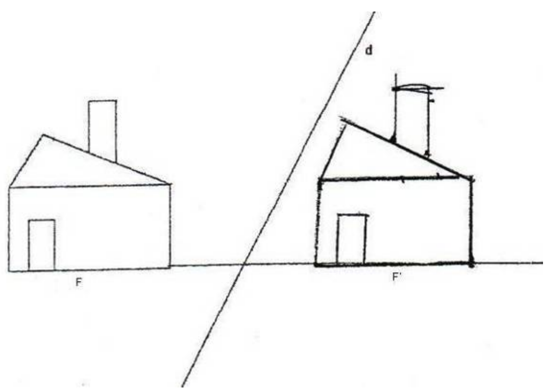


Figure 77. Construction de l'image de la figure maison par Anissa

[49] Le contrôle **Σautre** peut être instancié dans ce cas sous la forme suivante : l'image d'un point par une symétrie orthogonale est construite dans la direction parallèle à l'axe de symétrie.

Anissa n'a pas expliqué comment elle avait réalisé sa construction. Ainsi, pour mener cette analyse nous ne nous appuyons que sur la figure construite.

Pour cette construction, nous envisageons les procédures suivantes :

Procédure semi analytique

La distance à l'axe d'un des points de F est reportée de l'autre côté de l'axe dans la direction horizontale. L'opérateur correspondant mobilisé peut être :

- RA5 : Construire le symétrique d'un point à la même distance de l'axe dans la direction horizontale.

Ensuite la figure image est construite globalement, à l'identique avec la figure donnée. Alors, l'opérateur peut être le suivant :

- RA6 : Construire le symétrique de la figure F' à partir d'un point, F' correspondant à une translatée de F dans la direction horizontale et de l'autre côté de l'axe.

Procédure globale

La figure image est construite globalement dans une direction horizontale, à la même distance à l'axe que la figure objet, cette distance étant perçue de manière globale. Dans ce cas, l'opérateur probable est le suivant :

- RA7 : Faire glisser la figure F dans la direction horizontale, de l'autre côté de l'axe et à la même distance de celui-ci que F.

Dans ces deux procédures, la direction choisie semble horizontale, comme le laisse penser le tracé de la droite qui passe par la base de la maison. Le choix de la direction donnée par le segment qui représente la base de la maison peut se justifier d'une part, par le fait que la figure-maison représente un objet réel dans sa position habituelle, ce qui peut déterminer que la construction commence par la base. D'autre part, par le fait que la figure est présentée dans la position standard (le grand rectangle a ses côtés horizontaux et verticaux), ce qui favorise le rappel horizontal. Dans ce cas, les variables « nature de la figure F », avec pour valeurs « représentant un objet réel identifiable », et « orientation des segments sur la feuille » avec pour valeurs « horizontale » et « verticale », semblent avoir joué un rôle crucial dans les choix de l'élève. Ces variables didactiques peuvent alors être à l'origine de la mobilisation des contrôles erronés concernant les critères de « direction » (Σhor) et « position» (Σtranslation).

En ce qui concerne le contrôle par la distance à l'axe, il dépend du type de procédure mise en place par Anissa. Si la procédure est du type global, la distance se réfère à une position d'équilibre entre les figures objet et image. Si la procédure est semi analytique, il s'agit de reporter la distance à l'axe d'un point de F de l'autre côté de l'axe, dans la direction choisie.

Dans ce cas, il s'agit vraisemblablement du point qu'on nomme point A dans la figure ci-dessous (Figure 78) et qui est le sommet de la figure le plus proche de l'axe de symétrie, comme on peut supposer à partir du tracé de la droite passant par la base de la maison.

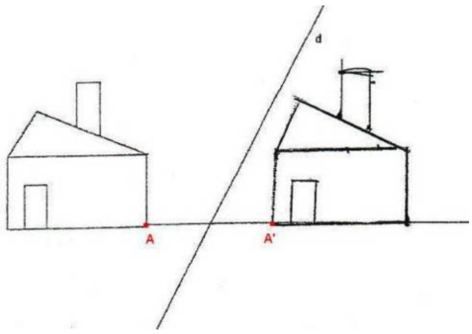


Figure 78. Report de distance d'un point de la figure à la droite d (point A)

Remarquons cependant que le point A' n'est pas l'image de A par la symétrie orthogonale dans la figure image construite. Il est possible que ce point ait pu être pris en compte dans l'intention de fixer la « distance » à l'axe de la figure symétrique avant sa construction globale.

La taille et la forme de la figure F sont conservées, ainsi que l'orientation des angles. La position de F' par rapport à celle de F peut donc être interprétée comme la translation de la figure F dans la direction horizontale. Le sens de la figure F' est alors le même que celui de F.

Dans le tableau ci-dessous nous listons, à partir des critères et des valeurs, les contrôles qui ont pu être mis en œuvre par Anissa dans les deux procédures envisagées :

Critères	Valeurs	Contrôles
« direction »	horizontale	Σhor
« distance à l'axe »	conservée	Σdist
« taille »	conservée	Σtaille_1
« forme »	conservée	Σforme
« position »	translation	Σtranslation
Autres contrôles		Σparallélisme_segment Σdemi_plan

Tableau 46. Problème maison : contrôles qui ont pu être mobilisés par Anissa

Cette analyse est cohérente avec les analyses des problèmes précédents. Ainsi nous pouvons considérer que pour Anissa, la symétrie orthogonale d'une figure correspondrait à une translation de cette figure dans une direction horizontale, en conservant une distance à l'axe soit globale, soit d'un point de F. De cette manière, la taille, la forme et l'orientation des angles de la figure initiale sont conservées.

A partir des résultats de l'analyse, problème par problème que nous venons de présenter, nous chercherons maintenant à caractériser les conceptions mobilisées par Anissa dans la résolution de ces problèmes.

b) Caractérisation de conceptions

Dans l'analyse du problème segment, nous avons envisagé un conflit éventuel entre les contrôles relatifs à la direction (direction horizontale et parallèle à l'axe). Cependant, au vu de l'ensemble des réponses données, le choix de la direction horizontale paraît plus probable.

A l'exception du problème segment, le contrôle Σdemi_plan semble être présent dans la résolution de tous les autres problèmes. Autrement dit, les points symétriques sont d'un côté et de l'autre de l'axe de symétrie. De plus, Anissa considère l'invariance des points sur l'axe, comme en témoigne sa réponse au problème « segment-losange ». Ainsi pour elle, l'image d'un segment qui a une extrémité sur l'axe a aussi une extrémité sur l'axe, et si le segment objet coupe l'axe, le segment image le coupe aussi.

Dans l'ensemble des réponses données par Anissa, nous remarquons une certaine stabilité des contrôles concernant la translation, le parallélisme des segments et la direction horizontale, ce qui nous permet d'avancer que pour Anissa la symétrie orthogonale correspond à une translation de la figure F donnée, dans la direction horizontale, tout en conservant une distance à l'axe, soit globale, soit d'un point de F. La figure symétrique F' a par conséquent même taille, même forme et même sens que la figure F. Le schéma ci-dessous représente l'ensemble des contrôles et des opérateurs identifiés et les relations entre ces éléments :

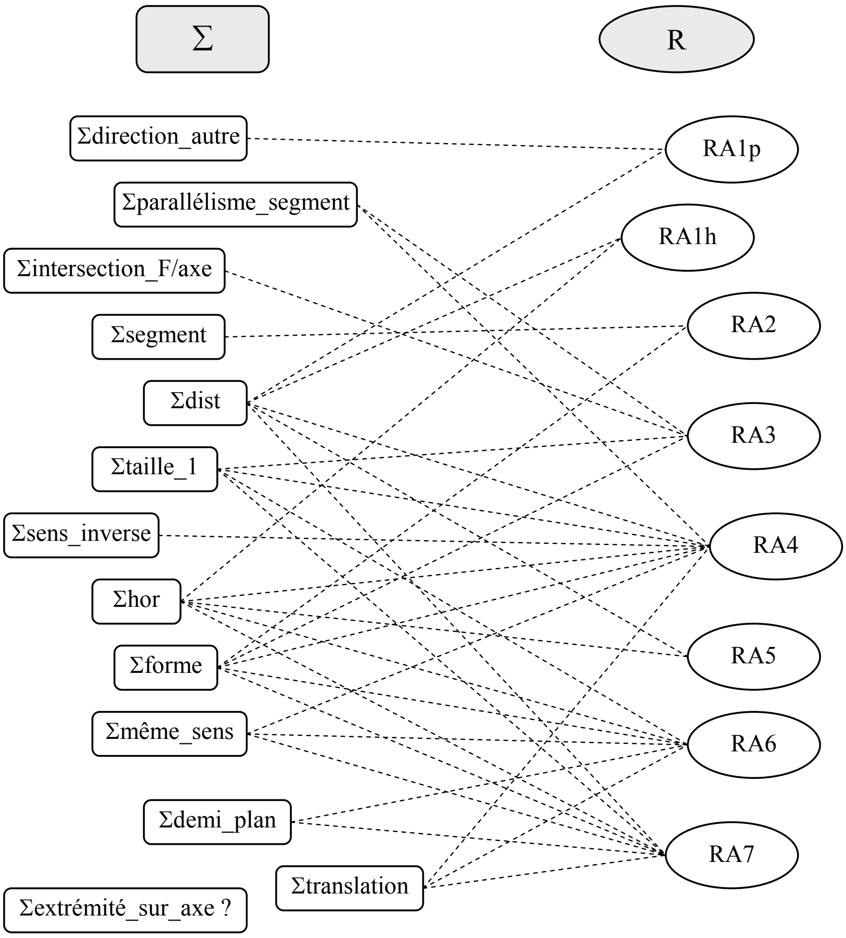


Schéma 12. Mise en relation des contrôles et opérateurs identifiés chez Anissa

Notons, sur le schéma ci-dessus, que Σextrémité_sur_axe est l'unique contrôle qui ne soit pas en relation avec les opérateurs identifiés. En effet, nous avons supposé que ce contrôle avait pu intervenir dans le choix du segment [CP] comme symétrique de [NM], dans le problème segment-losange. Étant donné que ce contrôle se serait manifesté uniquement dans un problème de reconnaissance (la valeur « touche » pour la variable « intersection de la figure avec l'axe » n'intervient pas dans les autres problèmes) et que, dans ce type de problèmes, les opérateurs éventuellement à l'œuvre sont difficilement identifiables, nous n'avons pas pu dégager d'opérateurs en lien avec ce contrôle. D'autre part, nous n'avons pas eu les moyens de vérifier la présence de ce contrôle dans d'autres problèmes.

Étant donné que les contrôles identifiés sont pour la plupart liés à la perception globale de la figure, nous faisons l'hypothèse que le système de représentation (L) qui permet l'expression de ces contrôles, est constitué par le registre spatio-graphique.

Dans l'analyse de cette copie, nous avons fait l'hypothèse que certaines variables des problèmes ont pu favoriser la manifestation de certains contrôles. Ainsi, dans le tableau ci-dessous nous mettons en relation les variables didactiques des problèmes et leurs valeurs avec ces contrôles :

Variables didactiques/*Valeurs*	**Contrôles favorisés**
Orientation des segments de la figure F sur la feuille/ *Horizontale/ Verticale*	Σhor Σparallélisme_droite (orientation presque horizontale)
Orientation de l'axe sur la feuille / V*erticale / Presque horizontale*	
Spécificité de la figure F/ *F possède des segments parallèles à l'axe de symétrie*	Σparallélisme_segment Σtranslation
Intersection de la figure avec l'axe/ *Vide*	Σdemi_plan

Tableau 47. Relation entre variables des problèmes résolus et contrôles identifiés chez Anissa

A partir de ce tableau nous pouvons constater que les trois premières variables didactiques semblent favoriser la manifestation des contrôles erronés liés au rappel horizontal, au parallélisme des segments et/ou translation, tandis que la quatrième variable favorise la manifestation d'un contrôle mathématiquement correct. Cette mise en relation nous servira de base pour la construction d'une séquence didactique lors de l'instanciation du modèle de décisions didactiques que nous proposerons pour Anissa.

5.2.2. Copie Béatrice

a) Analyse de la production

Problème-flèche

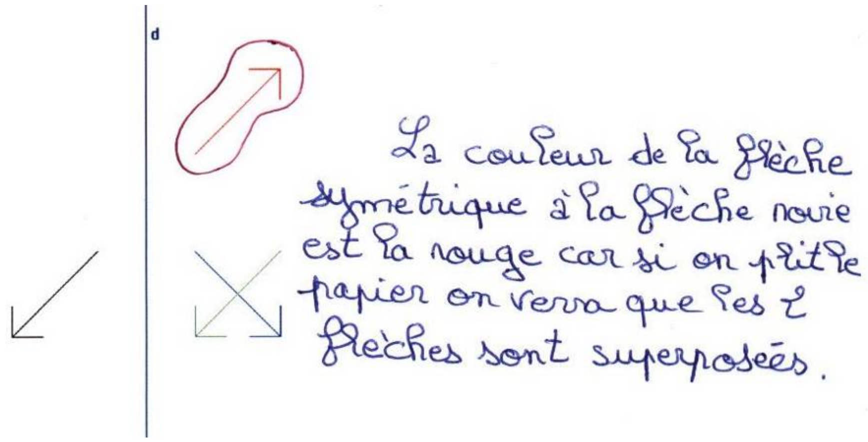


Figure 79. Réponse de Béatrice au problème - flèche

Étant donné que Béatrice explicite la raison de son choix, cette analyse sera fondée d'une part sur les caractéristiques de la figure choisie, et d'autre part sur l'explication fournie.

Parmi les trois flèches proposées, Béatrice a choisi la « flèche rouge », celle qui se trouve de l'autre côté de l'axe dans le prolongement du grand segment de la flèche noire.

Comme nous l'avons précisé, dans ce problème toutes les figures candidates ont même taille et la même forme que la figure initiale. Ainsi nous n'avons pas les moyens d'affirmer que ces propriétés ont été effectivement mobilisées par Béatrice, car elle n'avait pas le choix de ne pas les conserver. En ce qui concerne la position de la « flèche rouge » (figure choisie) par rapport à celle de la « flèche noire » (figure initiale), nous pouvons l'interpréter comme si c'était une rotation de 180° de la flèche noire autour d'un point situé sur la droite d.

Il est également possible que le parallélisme des segments correspondants dans les deux figures ait pu jouer un rôle dans la validation du choix de Béatrice. Ceci nous amène à supposer que le contrôle par le parallélisme (Σparallélisme_segment) a pu être également exercé dans ce choix. Toutefois, il n'est pas évident dans sa production que ce contrôle ait été nécessairement mobilisé.

L'argument utilisé par Béatrice pour expliquer son choix est celui de la superposition des figures par pliage, cependant, comme l'avait fait Anissa qui a donné la même explication pour justifier le choix de la flèche verte, elle n'a pas effectivement plié la feuille de papier. Bien que le pliage sur la droite d ne donne pas la superposition des flèches noire et rouge, nous pouvons supposer que Béatrice a effectivement pensé au pliage le long de la droite d, par effet de contrat par exemple, mais ses images mentales ne sont pas correctes. Ainsi, comme dans le cas d'Anissa, un contrôle relatif au pliage n'a pas été forcément exercé dans ce choix.

L'ensemble des contrôles qui nous paraissent donc être intervenus dans le choix de la « flèche rouge » par Béatrice sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*prolongement*	Σprolong
« distance à l'axe »	*distance globale à l'axe conservée*	Σdist
« position »	*Rotation suivie éventuellement d'un retournement*	Σrotation Σrotation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σparallélisme_segment

Tableau 48. Problème-flèche : contrôles qui ont pu intervenir dans le choix de Béatrice

Nous supposons donc que pour Béatrice, l'image d'une figure par symétrie orthogonale se trouve dans le prolongement d'un segment de la figure initiale, ce segment étant un élément significatif de celle-ci (ici, le segment le plus long de la flèche qui est en même temps son axe de symétrie), tout en conservant une distance à l'axe dans la direction choisie.

Problème-losange

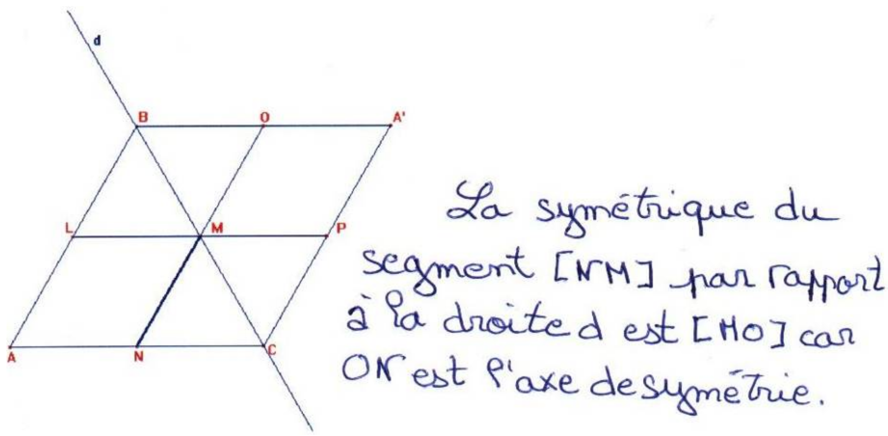


Figure 80. Réponse de Béatrice au problème segment_losange

Comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori, plusieurs segments peuvent être choisis comme symétrique du segment [MN]. Béatrice a choisi le segment [MO], ce qui est cohérent avec la réponse précédente (choix de la flèche rouge) car ce segment se trouve dans le prolongement du segment initial.

Béatrice justifie son choix en expliquant que « ON est l'axe de symétrie ». Elle considère probablement que le segment [ON] est l'axe de symétrie du parallélogramme ABCA'. Cependant, dans son discours Béatrice fait référence à la droite d. Nous pouvons supposer alors que le rôle exercé par cette droite dans ce choix est celui de délimiter les deux demi-plans où se situent les deux segments, ce qui renvoie à la mobilisation du contrôle Σdemi_plan.

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, en considérant les attributs de la figure on peut supposer que d'autres contrôles aient pu intervenir dans le choix de Béatrice. Ces contrôles sont listés dans le tableau ci-dessous :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*prolongement*	Σprolong
« distance à l'axe »	*distance globale à l'axe conservée*	Σdist
« position »	*rotation (avec au sans retournement)*	Σrotation Σrotation + Σsens_inverse
	translation (avec ou sans retournement)	Σtranslation Σtranslation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σparallélisme_segment
		Σdemi_plan
		Σpoint_invariant

Tableau 49. Problème segment-losange : contrôles qui ont pu intervenir dans le choix de Béatrice

Béatrice a choisi comme image du segment [MN] un segment qui est sur la même droite support. Ceci confirmerait l'hypothèse précédente selon laquelle pour elle l'image d'une figure par la symétrie orthogonale se trouve dans le prolongement d'un segment de la figure initiale, tout en conservant une distance à l'axe dans la direction choisie. Les figures objet et image se trouvent dans les demi-plans différents délimités par l'axe de symétrie, et le segment choisi a un point invariant sur l'axe. Cependant, étant donné que la plupart des contrôles attribués aux choix de Béatrice sont fondés sur les attributs de la figure, ces hypothèses sont encore à confirmer.

Problème-segment

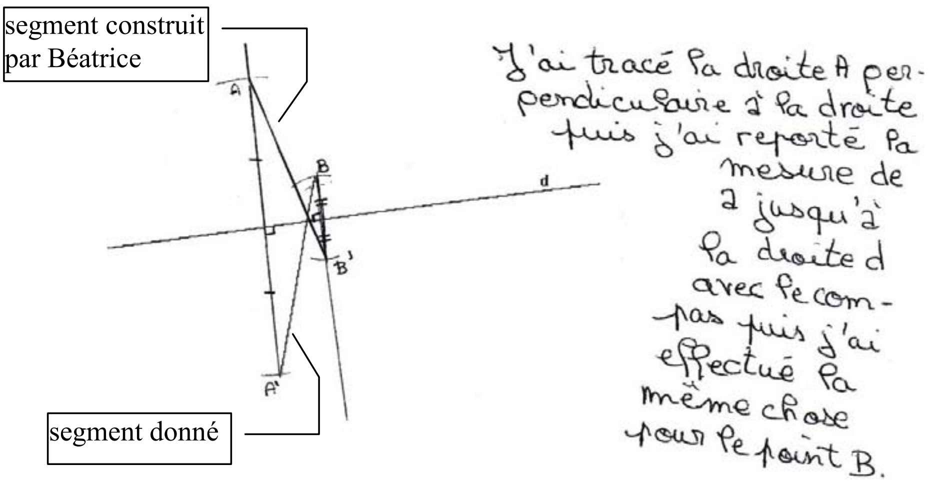


Figure 81. Réponse de Béatrice au problème-segment

La construction réalisée par Béatrice et son explication indiquent qu'elle a utilisé une procédure analytique. Béatrice explique qu'elle a tracé « la droite A perpendiculaire à la droite ». D'après le dessin, il s'agit vraisemblablement de la droite (AA'), dont la perpendicularité à la droite d est indiquée par le code correspondant. Béatrice utilise le codage sur la figure pour montrer que sa construction repose également sur la propriété d'équidistance des points à l'axe.

Ainsi, la procédure analytique utilisée serait la suivante :

1. Construire des droites perpendiculaires à d, passant par les extrémités du segment donné ;

2. Construire les symétriques de ces extrémités, en reportant leurs distances à l'axe sur ces perpendiculaires.

Les opérateurs qui ont pu être mis en œuvre par Béatrice dans cette construction sont les suivants :

- RB1 : Construire une droite perpendiculaire à la droite d passant par un point ;
- RB2 : Construire le symétrique d'un point en conservant la distance à l'axe dans la direction orthogonale à celui-ci ;
- RB3 : Construire le symétrique d'un segment comme le segment joignant les symétriques des extrémités du segment objet.

Signalons que Béatrice a nommé le segment initial [BA'] et le segment image [AB'] ; le couple de points A et B se retrouve ainsi dans le demi-plan au-dessus de l'axe, et le couple A'et B' dans le demi-plan au-dessous. Il est probable qu'elle a d'abord construit la figure sans avoir nommé les points puis, en vue d'élaborer l'explication demandée dans l'énoncé du problème, Béatrice a décidé de les nommer, visant uniquement à faciliter l'expression de l'argumentation. Notons que son discours traduit quelques difficultés dans l'utilisation du langage mathématique, par exemple, elle appelle droite A la droite (AA'). Dans notre analyse, nous ne tenons pas compte de ces difficultés.

Les contrôles susceptibles d'être mis en œuvre par Béatrice dans la résolution de ce problème sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*orthogonale à l'axe*	Σortho
« distance à l'axe »	*distance à l'axe conservée*	Σdist
autre contrôle		Σsegment

Tableau 50. Contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de l'image du segment par Béatrice

Nous considérons que dans la résolution de ce problème, Béatrice mobilise des contrôles corrects du point de vue mathématique. Notons alors que le contrôle d'orthogonalité relatif au critère « direction » n'est pas cohérent avec ses choix précédents, où un contrôle lié au prolongement d'un segment a vraisemblablement été mobilisé. Nous supposons que le fait que ce problème soit un problème de construction de la figure symétrique joue un rôle important dans ce changement, ce qui met en évidence le rôle de la variable didactique « nature du problème ». En fait, comme nous l'avons mentionné dans l'analyse a priori, les problèmes de construction appartiennent à un autre ensemble de problèmes, qui n'est plus de reconnaître le symétrique d'une figure donnée, mais de réaliser des actions concrètes sur la figure. Ainsi, le fait d'exécuter ces actions peut inciter l'élève à faire des conjectures basées sur d'autres connaissances que la perception et, par conséquent, d'autres contrôles peuvent alors être mobilisés.

En revenant à la construction de Béatrice, il est possible que la variable d'intersection du segment avec l'axe ait aussi joué un rôle important dans sa résolution. Le fait que le segment coupe l'axe de symétrie peut bloquer d'une certaine manière le contrôle du prolongement mobilisé dans les problèmes précédents. Ainsi, dans l'impossibilité de prolonger le segment, Béatrice a recouru à un autre contrôle, qui est le contrôle correct.

Nous concluons alors que dans la résolution de ce problème, Béatrice mobilise une conception de la symétrie orthogonale qui est caractérisée par la mise en œuvre des contrôles d'orthogonalité et de conservation d'égalité des distances des points de la figure à l'axe.

Problème-maison

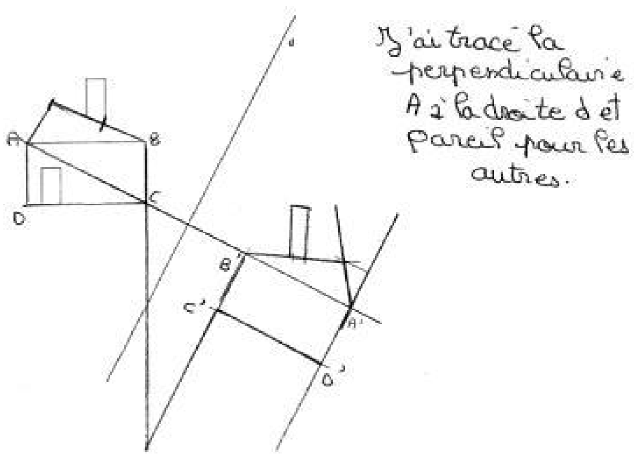


Figure 82. Construction de l'image de la figure-maison par Béatrice

Notre hypothèse est que pour construire la figure image (à droite de la droite d), Béatrice utilise une procédure semi-analytique. Les raisons pour lesquelles nous faisons cette hypothèse seront expliquées plus loin. Nous interprétons la procédure utilisée de la manière suivante :

1. Construire la droite perpendiculaire à la droite d, passant par le sommet nommé « point A » sur la figure et construire le symétrique de ce point (A’) sur cette droite, tout en gardant sa distance à d.

2. A partir de A’ et, en s’appuyant sur la direction donnée par la droite (AA’), construire globalement la figure image, tout en gardant les longueurs des segments, la forme de la figure initiale et en inversant l’orientation des angles.

Bien que dans cette construction Béatrice n’ait pas utilisé le codage de perpendicularité et d’égalité de distance sur la figure, notre interprétation que la droite (AA’) est perpendiculaire à la droite d s’appuie sur son explication « j’ai tracé la perpendiculaire A à la droite d ». Ceci nous fait penser que pour construire le point A’ elle a utilisé la même procédure que pour construire les symétriques des extrémités du segment dans le problème précédent. Ainsi, c’est la direction « orthogonale à l’axe » que nous retenons dans cette analyse.

L’hypothèse que la construction de la figure image est globale provient du fait que, bien que A’ soit le symétrique du point A par la symétrie orthogonale d’axe d, les sommets B’, C’ et D’ de la figure image ne correspondent pas aux symétriques de B, C et D respectivement par cette symétrie ; notons par exemple que la diagonale du rectangle ABCD donne le segment qui représente la base du toit de la figure image. Compte tenu que Béatrice arrive à achever sa construction, malgré le fait que ces points ne soient pas symétriques, nous supposons que ces points ont été nommés a posteriori.

Les opérateurs qui ont pu être mis en œuvre par Béatrice dans cette construction sont les suivants :

- RB1 : Construire une droite perpendiculaire à d passant par un point ;
- RB2 : Construire le symétrique d’un point en conservant la distance à l’axe dans la direction orthogonale à celui-ci ;
- RB4 : À partir d’un point construit, tracer la figure image (F’), tout en conservant la taille et la forme de la figure initiale (F) et en inversant l’orientation des angles.

Nous considérons que les contrôles concernant les critères « direction » et « distance à l’axe » sont exercés lors de la construction du point A’, symétrique de A. Ensuite, l’emplacement de la figure image par rapport à la figure initiale est défini en fonction de la direction de la droite (AA’) précédemment tracée ; ceci nous amène à envisager la mobilisation de contrôles liés aux critères « position » et « sens ». La position de la figure image construite par Béatrice est très particulière par rapport à celle de F, qui ne correspond ni à une translation ni à une rotation suivies de retournement, ce qui nous amène à attribuer la valeur « autre » au critère « position » (cf. Tableau 9, p. 83). Par contre, la spécificité de la figure-maison (ne possède pas d’axe de symétrie) nous permet d’identifier que Béatrice prend en compte le changement d’orientation des angles par la symétrie orthogonale.

Ainsi, les contrôles susceptibles d'être mis en œuvre par Béatrice dans cette construction sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*orthogonale à l'axe*	Σortho
« distance à l'axe »	*distance à l'axe conservée :* *ponctuelle* pour la construction de A' *globale* pour la construction de la figure complète	Σdist
« taille »	*conservée*	Σtaille_1
« forme »	*conservée*	Σforme
« position »	*autre*	Σposition_autre : l'image de la figure est construite en fonction d'une direction précédemment définie.
« sens »	*sens inverse*	Σsens_inverse

Tableau 51. Contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de l'image de la figure-maison par Béatrice

Le fait que Béatrice a construit correctement le symétrique d'un point de la figure montre qu'elle a réinvesti les connaissances utilisées dans la construction du symétrique du segment dans le problème précédent. Cependant, ces connaissances n'ont pas été réinvesties dans la construction des autres points de la figure. Pour les construire, Béatrice change de procédure de construction : elle passe d'une procédure analytique correcte à une procédure semi-analytique incorrecte. La question qui se pose concerne les raisons qui ont pu amener Béatrice à changer de procédure au cours de la résolution du problème et, par conséquent, à abandonner les contrôles corrects au profit des contrôles liés à la perception globale de la figure.

Étant donné que dans la construction de l'image du segment (problème précédent) ce changement ne s'est pas produit, nous pouvons supposer que la complexité de la figure a pu gêner Béatrice. En d'autres termes, le fait que la figure-maison soit composée de nombreuses sous-figures et comporte de nombreux sommets, a pu amener Béatrice à changer de procédure avec le but de simplifier la construction car la procédure analytique s'avère être longue et fastidieuse.

Ainsi, cette construction de Béatrice indique qu'elle connaît les propriétés d'égalité des distances des points à l'axe et d'orthogonalité de la symétrie orthogonale et elle les utilise pour construire le symétrique d'un point ou d'un segment. Toutefois, dès qu'il s'agit d'une figure complexe, elle a recours à une procédure semi-analytique, et construit la figure image en conservant la taille et la forme de la figure initiale et en inversant l'orientation des angles.

b) Caractérisation de conceptions

Nous avons vu que dans la résolution des problèmes de reconnaissance, le choix des figures par Béatrice nous a amenée à considérer le contrôle Σprolong lié à la direction donnée par le prolongement d'un segment. Cependant, dans ses constructions nous ne trouvons plus la manifestation de ce contrôle. Si l'on prend comme hypothèse que le contrôle Σprolong a été mobilisé dans la reconnaissance des figures symétriques, dans les problèmes de construction il serait abandonné au profit d'un contrôle correct du point de vue des mathématiques. En effet, dans la construction du segment Béatrice, a recouru au contrôle lié à la propriété d'orthogonalité de la symétrie orthogonale : Σortho. Cependant, elle ne sait l'utiliser que quand la figure comporte peu de points. Ceci révèle une certaine instabilité de ce contrôle chez Béatrice.

Dans le schéma ci-dessous nous mettons en relation l'ensemble des contrôles et des opérateurs identifiés dans la production de Béatrice :

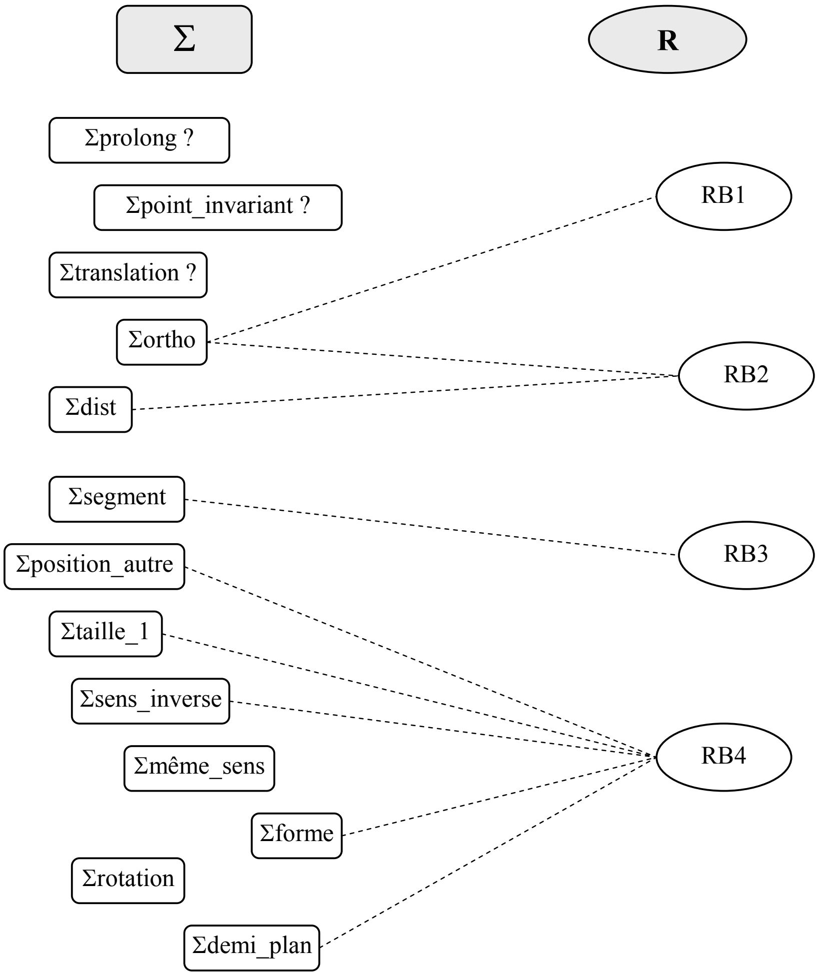


Schéma 13. Mise en relation des contrôles et opérateurs identifiés chez Béatrice

Remarquons sur le schéma que cinq contrôles ne sont pas en relation avec les opérateurs identifiés. Il s'agit de contrôles dont on suppose qu'ils ont été mobilisés dans les problèmes de reconnaissance. Étant donné la spécificité de ces problèmes et que nous ne trouvons pas d'indices prouvant qu'ils ont été exercés dans les problèmes de construction, nous n'avons pas les moyens d'affirmer que ces contrôles aient été mobilisés par Béatrice.

Nous avons fait l'hypothèse, par exemple, que le contrôle Σprolong éventuellement mobilisé dans les problèmes de reconnaissance de la figure symétrique a pu être bloqué par la variable « intersection de la figure avec l'axe », dans la construction de l'image du segment par la suite. Cependant, ceci reste une hypothèse.

Cette analyse montre la complexité de la caractérisation de conceptions au sens du modèle cK¢. En effet, bien que nous soyons capables de caractériser des éléments de conception(s), nous n'avons pas les moyens d'affirmer qu'il s'agit vraiment d'une conception et si oui, que cette conception est unique ou multiple.

En ce qui concerne le système de représentation, nous identifions dans les problèmes de construction notamment, un changement de registre passant du géométrique au spatio-graphique, et vice-versa. Notons par exemple que dans la reconnaissance de l'image de la « figure flèche », Béatrice valide son choix par la superposition des figures par pliage, ce qui caractériserait un registre spatio-graphique. Dans la construction de l'image du segment et d'un point de la figure-maison, elle passe à un registre géométrique. Elle met en œuvre les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe pour construire ces images. Pour cela, elle se sert des instruments de dessin (l'équerre, le compas…). Nous supposons que le changement de nature du problème, ainsi que l'explicitation dans la consigne des problèmes de construction relative à l'utilisation possible de ces instruments, ont contribué à ce changement de registre. Cependant, après cela Béatrice est confrontée à la complexité de la « figure maison ». Alors elle change à nouveau de registre en effectuant un retour au registre spatio-graphique.

L'analyse conduite ci-dessus soulève quelques questions concernant les raisons qui ont pu favoriser le changement de contrôles et de registre de représentation. S'agit-il de l'évolution d'une conception vers une autre, ou bien de la cohabitation de plusieurs conceptions chez ce même élève ?

Ceci confirme la complexité d'établir un diagnostic de conceptions. Nous pensons que pour déterminer s'il s'agit d'évolution de conceptions ou de cohabitation de conceptions, il faudra, suite à un changement de procédure par l'élève, lui proposer des problèmes dont les variables pourront favoriser davantage la manifestation des contrôles caractéristiques de la conception initiale supposée évoluée, ce qui ne s'est pas produit dans l'ensemble de problèmes proposés à Béatrice.

En analysant cette copie, nous avons identifié dans les problèmes résolus, des variables qui ont pu amener l'élève à mobiliser certains contrôles. Dans le tableau ci-contre, nous indiquons ces variables avec leurs valeurs respectives, et nous les mettons en relation avec les contrôles identifiés :

<table>
<tr><th colspan="2">Variables didactiques/Valeurs</th><th>Contrôles</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nature du problème/ Reconnaissance de la figure symétrique
Intersection de la figure avec l'axe/ Vide/ Touche</td><td>Σprolong</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nature du problème/ Construction de la figure symétrique</td><td>Figure/ Simple (segment)</td><td>Σdist
Σortho</td></tr>
<tr><td>Figure/ Complexe</td><td>Σtaille1
Σforme
Σposition_autre
Σsens_inverse</td></tr>
</table>

Tableau 52. Relation entre variables des problèmes résolus et contrôles identifiés chez Béatrice

5.2.3. Copie Cédric

a) Analyse de la production

Problème-flèche

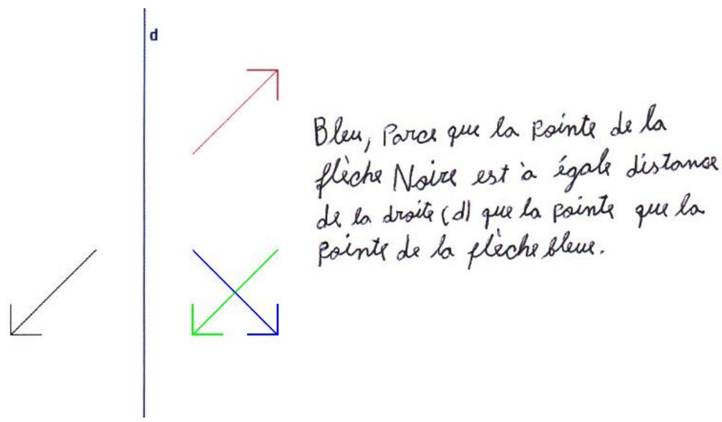


Figure 83. Réponse de Cédric au problème-flèche

Cédric a choisi la bonne figure symétrique : la flèche bleue. D'après son explication, nous supposons que son choix est contrôlé par l'égalité des distances de « la pointe » des deux flèches noire et bleue à la droite d. Cependant, la flèche rouge vérifie également cette propriété. Ainsi, nous supposons qu'un autre critère est intervenu, probablement celui de « direction ». Dans ce cas, la direction choisie serait « orthogonale à l'axe » ou « horizontale ».

<table>
<tr><th>Critères</th><th>Valeurs</th><th>Contrôles</th></tr>
<tr><td>« distance à l'axe »</td><td>distance à l'axe conservée</td><td>Σdist</td></tr>
<tr><td>« direction »</td><td>orthogonale à l'axe
horizontale</td><td>Σortho
Σhor</td></tr>
</table>

Tableau 53. Contrôles qui ont pu intervenir dans le choix de la flèche bleue par Cédric

Problème segment-losange

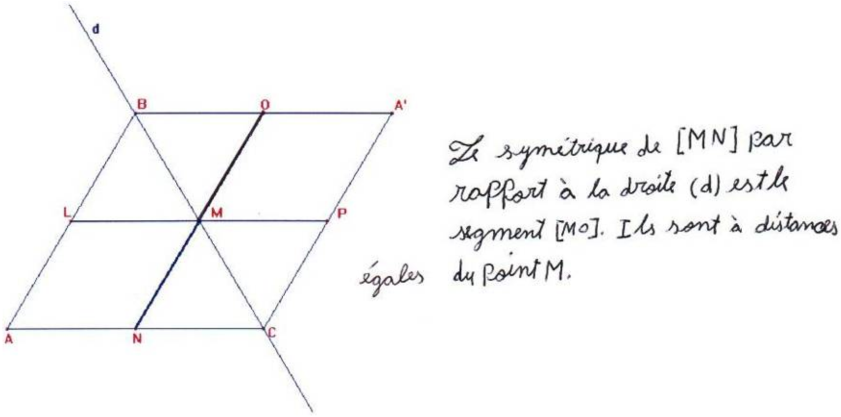


Figure 84. Réponse de Cédric au problème segment-losange

Comme symétrique du segment [MN], Cédric a choisi le segment [MO]. Pour justifier son choix, il évoque « l'égalité des distances », ce qui est cohérent avec l'explication donnée dans le problème précédent. Étant donné que les deux segments ont une extrémité sur l'axe (le point M), l'égalité des distances évoqué par Cédric renvoie aux distances de N et de O à ce point M. Comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori, le choix de ce segment peut relever du prolongement du segment [MN], car les segments [MN] et [MO] sont sur la même droite support. Le parallélisme de ces segments peut aussi intervenir dans ce choix, mais compte tenu de la réponse de Cédric au problème précédent, la mise en œuvre d'un contrôle par le parallélisme n'est pas ici envisageable.

Ainsi, les contrôles qui ont pu intervenir dans le choix de Cédric sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*prolongement*	Σprolong
« distance à l'axe »	*distance globale à l'axe conservée*	Σdist
« position »	*rotation (avec au sans retournement)*	Σrotation Σrotation + Σsens_inverse
	translation (avec ou sans retournement)	Σtranslation Σtranslation + Σsens_inverse
Autres contrôles		Σdemi_plan
		Σpoint_invariant

Tableau 54. Contrôles qui ont pu intervenir dans le choix du segment [MO] par Cédric

Le traitement de la réponse donnée par Cédric à ce problème nous permet de déceler chez lui une stabilité confirmée du contrôle Σdist. Remarquons que pour le critère distance on ne trouve pas le même choix que dans le problème précédent. En effet, si Cédric avait envisagé la direction orthogonale à l'axe ou horizontale dans ce problème, il aurait choisi les segments

[MP] ou [PC] comme symétriques de [MN], et le choix du prolongement dans le problème-flèche aurait conduit l'élève à la réponse « flèche rouge ».

Ceci nous amène à supposer que pour Cédric la symétrie orthogonale est caractérisée par la conservation des distances des points à l'axe, mais il semble ignorer qu'une direction est également importante.

Problème-segment

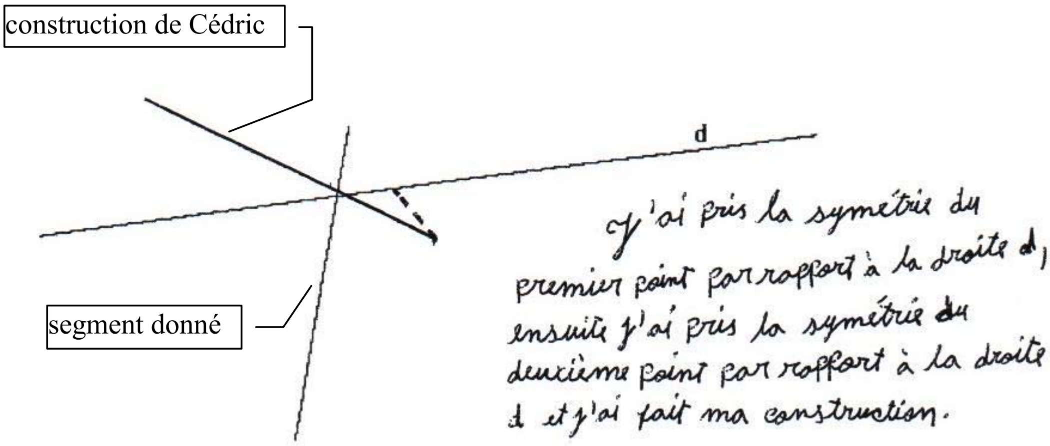


Figure 85. Construction de la figure-segment par Cédric

D'après l'explication de l'élève, on pourrait supposer que la procédure est analytique. En analysant sa construction, nous vérifions qu'il a construit un segment pointillé dont la longueur correspond à la distance d'une des extrémités du segment initial à la droite, dans une direction difficilement interprétable.

Cependant, pour la construction de la deuxième extrémité il n'y a plus conservation de distance. Étant donné que le contrôle de distance à l'axe semble stable chez l'élève, nous supposons que la construction n'a pas été réalisée comme elle est décrite, mais qu'il s'agit plutôt d'une procédure semi-analytique qui a été mise en œuvre.

La procédure envisagée est la suivante :

1. Construire l'image d'une des extrémités du segment dans une direction qui semble aléatoire, en reportant la distance à l'axe dans cette direction.

2. A partir de ce point, construire le segment image en conservant la longueur du segment initial, de sorte que le segment image passe par le point invariant sur l'axe de symétrie.

Ainsi, les opérateurs susceptibles d'être mis en œuvre par Cédric dans cette procédure sont les suivants :

- RC1a : Construire le symétrique d'un point en conservant la distance à l'axe, dans une direction aléatoire ;
- RC2 : Construire un segment de longueur donnée à partir d'une extrémité.

Par ailleurs, étant donné que Cédric construit l'image du segment de même longueur en considérant le point invariant, il semble qu'il ait mobilisé les contrôles de conservation de longueur et d'invariance de point sur l'axe. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que les contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de Cédric, sont les suivants :

Critères	*Valeurs*	Contrôles
« direction »	*autre*	Σdirection_autre[50]
« distance à l'axe »	*Distance à l'axe conservée*	Σdist
« taille »	*conservée*	Σtaille1
« forme »	*conservée*	Σforme
Autre contrôle		Σpoint_invariant

Tableau 55. Contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de l'image du segment par Cédric

La construction du symétrique d'un segment par Cédric confirme l'hypothèse que pour lui, la symétrie orthogonale est caractérisée par l'égalité des distances d'un point et son symétrique à l'axe, prise dans une direction aléatoire. De plus, la propriété de conservation de la longueur du segment ainsi que l'invariance de point sur l'axe, sont prises en compte.

Problème-maison

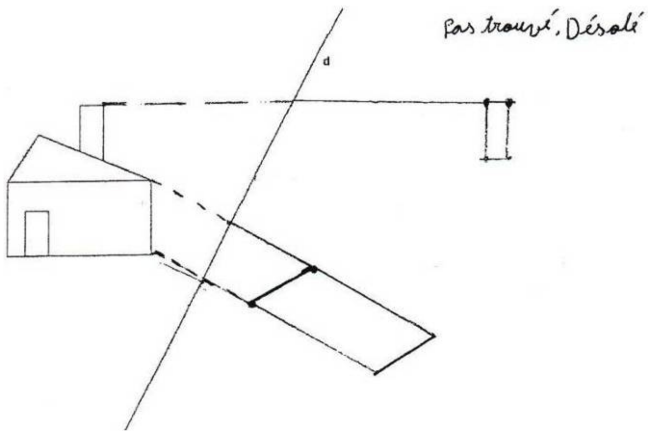


Figure 86. Problème-maison Cédric

Comme nous pouvons constater dans la figure ci-dessus, Cédric n'a pas achevé sa construction. Il a construit seulement deux morceaux de la figure symétrique, puis abandonné la construction. Toutefois, nous pouvons repérer dans la partie construite des éléments qui donnent des indications à propos de la procédure utilisée par l'élève et par conséquent, sur les contrôles et les opérateurs que Cédric a pu mobiliser. Étant donné que sa construction n'est

[50] Une direction qui semble aléatoire.

pas achevée, Cédric ne s'est pas senti obligé d'expliquer comment il a construit les morceaux de la figure. Il n'exprime que son regret de ne pas être arrivé à finir sa construction. Ainsi, notre analyse ne sera fondée que sur la partie de la construction réalisée.

En observant précisément cette construction, nous faisons la même hypothèse que précédemment concernant le type de procédure de construction utilisée : une procédure semi-analytique qui consisterait à :

1. Construire l'image d'un point ou des points de la figure dans une direction donnée, tout en conservant la distance à l'axe dans cette direction ;

2. A partir de ce point ou de ces points, construire globalement l'image de la figure, sans pourtant forcément conserver les longueurs des segments et la forme de la figure initiale.

Il cherche à concilier procédure analytique et conservation de forme et de taille. L'absence de contrôle de direction rend cet effort infructueux. En effet, il prend la direction horizontale ou celle donnée par le prolongement du segment supérieur de la cheminée puis pour le reste de la cheminée, il essaie de conserver la forme. Pour le rectangle, il prend la direction du prolongement du segment du toit. Visiblement, il n'a aucune idée de la direction à choisir. Les opérateurs qui ont pu intervenir dans la mise en œuvre de cette procédure sont les suivants :

- RC1o/prol/h : Construire le symétrique d'un point en conservant la distance à l'axe, dans une direction orthogonale à l'axe/dans le prolongement d'un segment/horizontale.
- RC3 : Construire une figure image en conservant les longueurs des segments.

Comme précédemment, il nous paraît évident que Cédric exerce un contrôle concernant l'égalité des distances des points à l'axe. Les droites construites en trait pointillé et en trait plein sur la figure, témoignent de ceci. Cependant, la direction dans laquelle cette distance a pu être prise peut être interprétée de différentes manières :

- dans la construction du quadrilatère correspondant à l'image de la cheminée de la maison, cette direction est celle donnée par le prolongement d'un segment (segment supérieur de la cheminée), ou horizontale.
- dans la construction de l'image du grand rectangle, cette direction est soit orthogonale à l'axe, soit celle donnée par le prolongement du segment qui représente le toit. Dans ce cas, la deuxième droite aurait été construite comme parallèle à la première.

Par ailleurs, sauf pour l'un des segments du quadrilatère qui représente la cheminée de la maison, la longueur des segments de la figure initiale est toujours conservée par Cédric. La non conservation de la longueur de ce segment peut être due à la petite taille de ce quadrilatère et au fait que son image ait été construite globalement.

Remarquons encore que dans la plupart des cas, la mesure des angles de la figure initiale n'est pas conservée et, par conséquent, les images des quadrilatères possèdent des formes différentes de ceux de départ. Ceci peut témoigner de la non mobilisation du contrôle Σforme lors de la construction des sous-figures de la figure-maison. Cependant, nous supposons que le fait d'avoir obtenu des images de formes différentes est une des raisons qui ont pu amener Cédric à abandonner sa construction. Le contrôle relatif à la forme aurait alors été exercé comme moyen de vérification.

Ainsi, les contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de Cédric sont les suivants :

Critères	***Valeurs***	**Contrôles**
« direction »	*prolongement d'un segment de F* *orthogonale à l'axe* *horizontale*	Σprolong ou Σhor Σortho ou Σprolong
« distance à l'axe »	*distance à l'axe conservée*	Σdist
« taille »	*conservée*	Σtaille1
« forme »	*conservée*	Σforme

Tableau 56. Contrôles qui ont pu intervenir dans la construction de l'image de la figure-maison par Cédric

La construction fournie confirme la stabilité des contrôles Σdist, et Σtaille1 chez Cédric.

En ce qui concerne les contrôles relatifs à la direction, d'une part l'orientation horizontale/verticale des segments sur la feuille ne nous permet pas de trancher entre les contrôles Σhor et Σprolong. D'autre part, le fait que la direction donnée par le prolongement du segment qui représente le toit de la maison soit perceptivement orthogonale à l'axe ne nous permet pas de trancher entre Σortho et Σprolong. Ainsi, à cause de ces ambiguïtés nous ne pouvons pas avancer de contrôles concernant ce critère de choix.

En ce qui concerne le contrôle par la forme de la figure initiale, nous avons initialement interprété la non conservation des mesures de certains angles de la figure par l'absence de ce contrôle pendant la phase d'exécution. Toutefois, comme nous l'avons dit, ce contrôle a pu être exercé comme moyen de valider le résultat obtenu. Comme nous l'avons précisé, le fait d'avoir obtenu des figures de formes différentes de celles des figures objets et de plus, très éloignées l'une de l'autre, ce qui ne correspondait pas à la figure attendue, a probablement amené Cédric à abandonner sa construction. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit ici d'un conflit entre le contrôle concernant la forme de la figure et le contrôle par la distance à l'axe. En fait, dans les problèmes de reconnaissance, la forme des figures ne jouait pas un rôle important dans le choix de la figure symétrique, étant donné que toutes les figures proposées avaient la même forme que la figure objet. En ce qui concerne la construction du segment, la nature simple de la figure ne favorise pas un tel conflit. En revanche, la complexité de la figure-maison joue ici un rôle important car elle est révélatrice de ce conflit chez Cédric.

Nous concluons alors que pour Cédric, la symétrie orthogonale serait caractérisée par la conservation des distances des points à l'axe dans des directions choisies au hasard, la conservation des longueurs des segments, ainsi que la conservation de la forme de la figure initiale.

b) Caractérisation de conceptions

Indépendamment des variables des problèmes résolus, nous trouvons dans la production de Cédric une stabilité du contrôle lié à l'égalité des distances des points à l'axe (Σdist). Cependant, cette distance n'est pas forcément considérée dans la direction orthogonale. La direction considérée dans chaque problème est choisie de la manière la plus convenable, parfois elle semble même aléatoire, par exemple dans la construction de l'image du segment. Les contrôles Σtaille_1 et Σforme semblent assez stables chez Cédric. Ainsi, dans la construction de l'image d'une figure, un conflit entre les contrôles Σdist et Σforme s'est produit. Ce conflit est du à l'absence de contrôle relatif à la direction.

Cette analyse montre que les contrôles identifiés sont liés à un registre spatio-graphique. Ceci est mis en évidence notamment dans la résolution du problème-maison.

Dans le schéma ci-dessous, nous mettons en relation les contrôles et les opérateurs identifiés dans l'analyse de la production de Cédric :

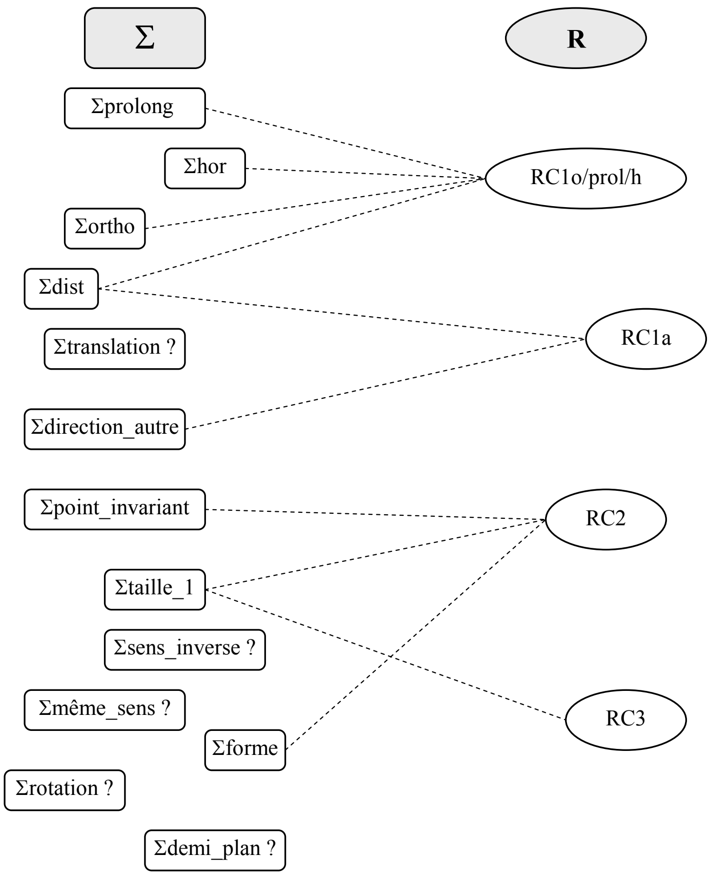


Schéma 14. Mise en relation des contrôles et opérateurs identifiés chez Cédric

Le schéma qui précède montre bien la diversité des contrôles qui sont en relation avec l'opérateur « RC1o/prol/h » concernant la construction de l'image d'un point en conservant la distance à l'axe, dans une direction donnée. Dans certains cas, compte tenu des variables du problème résolu, cette mise en relation est encore à confirmer.

Dans le tableau ci-dessous nous mettons en relation les contrôles et les variables didactiques qui ont pu favoriser la manifestation de ces contrôles :

Variables didactiques/*Valeurs*	**Contrôles favorisés**
Orientation des segments de la figure F sur la feuille/ *Horizontale / Verticale*	Σprolong ou Σhor
Position relative de F et F'/ *F et F' possèdent des segments qui sont sur la même droite support*	Σprolong
Intersection de la figure avec l'axe/ *Touche*	
Nature de F/ *Complexe*	Σforme

Tableau 57. Relation entre les variables didactiques et contrôles identifiés chez Cédric

5.2.4. Conclusion

<u>Caractérisation des conceptions</u>

L'objectif principal de cette analyse a été de caractériser, au sens du modèle cK¢, les conceptions mises en œuvre par ces trois élèves dans la résolution des problèmes proposés. L'étude théorique que nous avons réalisée au chapitre 3, nous a permis de caractériser a priori les contrôles susceptibles d'être mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques. La méthodologie utilisée ne nous a pas permis d'accéder aux autres éléments des conceptions. Pour cette raison, nous avons mis en place une expérimentation pour pouvoir dégager ces éléments à partir de l'analyse de l'action de l'élève.

En nous appuyant sur les contrôles identifiés a priori, nous avons étudié les productions de trois élèves. Cette étude nous a permis de dégager chez ces élèves les contrôles, les opérateurs et les systèmes de représentation des conceptions mobilisées dans la résolution des problèmes proposés.

En ce qui concerne les opérateurs, nous les avons identifiés seulement dans les réponses des élèves aux problèmes de construction. En effet, les opérateurs étant attestés dans l'action et vu que dans la résolution de ce type de problème l'élève réalise des actions concrètes sur la figure, nous avons pu décrire les procédures utilisées en termes d'opérateurs mis en oeuvre. En revanche, le caractère implicite de l'action dans la résolution de problèmes de reconnaissance nous a empêchés d'accéder à ces éléments, du moins à partir de la méthodologie utilisée.

Dans le but de caractériser les conceptions de ces élèves, nous avons mis en relation les éléments de conceptions identifiés, notamment les contrôles avec les opérateurs et les variables des problèmes résolus. Dans le cas où il y a une convergence dans le type de contrôles mobilisés tout au long de la résolution des problèmes (copie Anissa, par exemple), nous avons remarqué que cette mise en relation s'établissait plus facilement. Ceci pourrait laisser penser que nous sommes face à une conception unique chez l'élève. Dans le cas où il n'y a pas cette convergence (Béatrice, par exemple), la mise en relation des éléments identifiés devient une tâche plus complexe. Les variables didactiques des problèmes résolus contribuent à cette complexité. L'analyse de la copie Béatrice a montré que les variables « nature du problème » (construction et reconnaissance de figures symétriques) et « nature de la figure F » (simple et complexe) ont favorisé la mise en œuvre de contrôles différents par l'élève. Ceci nous a amenés à supposer qu'il pouvait s'agir soit d'un cas d'évolution de la conception initialement mobilisée, soit d'un cas de cohabitation de conceptions différentes chez ce même élève. Ce constat soulève les questions suivantes :

- A partir des contrôles, des opérateurs et des systèmes de représentation utilisés par un sujet dans la résolution de problèmes, comment savoir si une ou plusieurs conceptions sont présentes chez ce sujet ? Comment les caractériser ?
- Comment distinguer un cas de cohabitation entre plusieurs conceptions différentes, d'un cas d'évolution d'une conception vers une autre chez un sujet ?

Éléments des conceptions et des procédures

Comme nous l'avons déjà précisé, pour décider de l'emplacement de la figure image par rapport à la figure initiale et à l'axe de symétrie, l'élève doit considérer un certain nombre de critères (direction, distance de l'axe ...). L'étude théorique (cf. chapitre 3) concernant les procédures de construction montre que dans la mise en oeuvre des procédures globales, les critères associés à l'action de l'élève sont nombreux, son action s'appuyant sur la perception de la figure. Par conséquent, davantage de contrôles sont susceptibles d'intervenir. En revanche, dans les procédures analytiques (construction de la figure symétrique point par point), les contrôles liés à la perception n'interviennent plus. L'action de l'élève s'appuie sur les propriétés mathématiques et par conséquent, les contrôles mobilisés sont d'ordre théorique.

La relation entre les éléments des conceptions et le type de procédure utilisée par les trois élèves apparaît dans les schémas « mise en relation des contrôles et des opérateurs ». Notons chez Anissa (cf. Schéma 12, p. 177) qu'aux opérateurs liés à la construction globale de la figure (RA4, RA5, RA6 et RA7), sont associés plusieurs contrôles. Le schéma est alors relativement « dense ». Chez Cédric, nous avons identifié des procédures de construction semi-analytiques. Sur le schéma correspondant (cf. p. 194) il y a moins de liaisons entre les opérateurs et les contrôles identifiés. Ceci s'explique par le fait qu'une partie de la procédure est analytique. Le schéma associé à Béatrice (cf. p. 186) nous permet de repérer la relation entre les éléments de conceptions et les procédures, dans le cas des procédures analytiques. En effet, aux opérateurs mobilisés (RB1, RB2 et RB3) est associé un seul contrôle.

Force didactique des contrôles

Les résultats de l'étude réalisée mettent en avant l'intérêt didactique d'étudier l'activité de l'élève en termes de contrôles. La copie Béatrice est un exemple illustratif de ceci. Ses réponses paraissent confuses, parfois contradictoires. Dans certaines situations, elle semble mobiliser des connaissances correctes (du point de vue de l'observateur) sur la notion de symétrie orthogonale, alors que dans d'autres, non. L'analyse de sa production en termes de contrôles a permis de révéler chez elle un raisonnement cohérent au cours de la résolution des problèmes.

L'intérêt didactique d'étudier les conceptions de l'élève à partir de la structure de contrôles de celles-ci réside ainsi dans le fait qu'elle fait émerger la rationalité de l'élève lorsqu'il résout des problèmes, même si cette rationalité peut paraître faible, voire inexistante aux yeux de l'observateur de son activité.

Le repérage des éléments des conceptions de ces trois élèves s'avère importante pour notre recherche, car il constitue le point de départ pour la construction de situations didactiques. Dans le cadre de notre recherche nous avons pu repérer ces éléments grâce à une analyse détaillée de productions des élèves, en nous appuyant sur le modèle cK¢. Nous sommes conscients que dans sa pratique le professeur, n'aura pas les moyens de descendre jusqu'à ce niveau de granularité. Notre intérêt est alors de savoir de quel est le niveau d'analyse de l'activité de l'élève dont ils ont besoin dans le but de construire un processus d'enseignement. C'est ce que nous étudierons dans la deuxième partie de notre expérimentation.

Au chapitre suivant, nous présenterons la partie de notre étude expérimentale concernant la prise de décisions didactiques par les professeurs.

Chapitre 6 : EXPÉRIMENTATION 2
ÉTUDE DE PRISES DE DÉCISIONS DIDACTIQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord le public concerné et le contrat expérimental. Puis, nous instancierons le modèle de décisions didactiques, proposé dans le chapitre 4, dans le cas d'un élève particulier. Ensuite, nous présenterons la méthodologie d'analyse des productions des professeurs. Enfin, nous présenterons l'analyse des productions des professeurs et les principaux résultats obtenus.

1. Introduction

Notre objectif principal est de répondre à nos questions de recherche concernant la construction par les professeurs de processus d'enseignement sur la notion de symétrie orthogonale. Rappelons ces questions :

> *Q3 : Quels sont les types de problèmes favorisant le passage d'une conception Ci à une conception Cj et comment décrire ces problèmes en termes de variables didactiques ?*
>
> *Q4 : Sur quels éléments se fondent les décisions didactiques prises par un professeur dont l'objectif est de faire évoluer les conceptions mobilisées par un élève ?*

Initialement, nous avons supposé que les études théorique et expérimentale auprès des élèves pourraient nous apporter des éléments de réponse aux questions relatives à la caractérisation de conceptions. L'idée de départ a été de pouvoir disposer d'une « donnée connue », [conception<>problème], qui puisse nous servir auprès des professeurs dans l'étude de leurs prises de décisions didactiques. Comme nous l'avons déjà précisé, la méthodologie que nous avons utilisée dans cette étude, ne nous a pas permis de caractériser les conceptions d'élèves. En revanche, nous avons pu caractériser les éléments des conceptions d'élèves relatifs à la notion de symétrie orthogonale. Cette caractérisation, notamment de la structure de contrôle, devient alors le point de départ pour l'étude des décisions didactiques prises par les professeurs.

Par ailleurs, afin de repérer des éléments sur lesquels se fondent les décisions didactiques prises par les professeurs, nous nous appuierons sur le modèle des niveaux du professeur proposé par Margolinas (2002, 2005). Nous chercherons à dégager dans les productions des professeurs, les éléments suivants :

- les éléments identifiés par les professeurs dans l'activité de l'élève, et la façon dont ils sont pris en compte dans leurs décisions didactiques ;
- les éléments de leurs projets globaux d'enseignement (niveau +2) et des projets éducatifs (niveau +3) qui influencent leurs décisions.

2. Public et Contrat expérimental

La tâche proposée aux professeurs a été de construire des séquences didactiques pour les trois élèves dont nous avons présenté les copies. Étant donné la complexité de la tâche à réaliser, nous avons contacté quelques professeurs avant de définir le contrat expérimental pour négocier avec eux leur participation la plus adaptée à l'expérimentation. Notre seul critère de sélection des professeurs a été leur expérience dans l'enseignement secondaire ou primaire (cycle 3). Nous avons choisi de solliciter des professeurs expérimentés, d'une part parce que nous avons supposé que ces professeurs auraient plus de facilité et de naturel pour expliciter leurs choix et leurs décisions. D'autre part, nous n'avions pas l'intention de réaliser une étude comparative de prise de décisions entre professeurs expérimentés et professeurs novices. Lors de ces rencontres, nous avons présenté nos objectifs de recherche et la tâche à réaliser. Nous leur avons proposé soit de nous accorder des entretiens, soit de répondre à des questionnaires. Devant la difficulté du travail et le volume de temps nécessaire pour sa réalisation, ces professeurs ont préféré répondre à des questionnaires.

Nous avons alors préparé un dossier pour donner à tous les professeurs le même point de départ. Ce dossier a été constitué des documents suivants : « fiche de l'enseignant » ; copies d'élèves ; consigne de la tâche à réaliser ; questionnaire ;et une série de problèmes. Ce dossier a été fourni à onze professeurs. Nous avons laissé à ceux-ci un temps suffisamment long pour la réalisation de la tâche.

3. Dossier fourni aux professeurs

Nous présenterons ci-après chacun de ces documents, afin de mieux expliciter et justifier nos choix expérimentaux.

Fiche de l'enseignant

1) Vous enseignez actuellement :
( ) Au collège Précisez le niveau ____________________
( ) Au lycée Précisez le niveau ____________________
( ) A l'université Précisez le niveau ____________________
( ) Autre Précisez ____________________

2) Vous avez _______ année(s) d'expérience dans l'enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est, selon vous, celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

a. ( ) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note
b. ( ) L'élève résout des problèmes
c. ( ) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?
( ) Oui ( ) Non

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat…)

Nous avons préparé cette fiche dans le but de recueillir auprès des professeurs des informations concernant leurs activités et expériences d'enseignement.

Les deux premières questions concernent le niveau d'exercice des professeurs au moment de l'expérimentation (avril, 2004), ainsi que leur ancienneté. La troisième question incite les professeurs à se situer par rapport aux conceptions de l'enseignement/apprentissage (cf. chapitre 4). La situation de l'« item a » renvoie à la conception transmissive, celle de l'« item b » à la conception constructiviste, et enfin celle de « c » à la conception *béhavioriste*. La quatrième question cherche à savoir si les professeurs ont bénéficié d'une formation en didactique des mathématiques.

Bien que nous n'ayons pas pour objectif de construire une typologie de professeurs à partir de ces données, les réponses à ces questions nous semblent importantes dans la mesure où elles nous permettent d'avoir quelques informations sur les professeurs sujets de notre expérimentation qui pourront nous aider à mieux comprendre leurs choix et décisions.

Copies des élèves

Nous avons fourni aux professeurs les copies « Anissa », « Béatrice » et « Cédric ». Rappelons que l'analyse a posteriori de ces copies en termes d'éléments de conceptions sur la symétrie orthogonale chez l'élève, est présentée dans le chapitre précédent (cf. à partir de la page p. 166).

Consigne

> Voici les copies de quatre[51] élèves de quatrième qui ont travaillé sur quelques problèmes autour de la symétrie axiale.
>
> Au vu des résultats, quelle séquence d'apprentissage proposeriez-vous à chacun de ces élèves ? Pour construire ces séquences, vous devez vous appuyer sur les problèmes proposés dans l'annexe. Chaque copie est accompagnée de deux questions où l'on vous demande de justifier le plus précisément possible tous les choix que vous faites : les éléments pris en compte, les raisons du choix des problèmes, conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation à disposition de l'élève ?)
>
> Si aucun des problèmes proposés ne vous convient, précisez pourquoi et ce que vous proposeriez à l'élève.

L'objectif de cette consigne a été de présenter aux professeurs les copies des élèves, de préciser la tâche à réaliser, ainsi que les contraintes imposées (choix de problèmes dans une liste de problèmes préétablie, nécessité de justifier tous les choix).

[51] Initialement, nous avons envisagé l'étude de prise de décisions par les professeurs pour 4 élèves différents. Cependant, en raison de la complexité des analyses, nous fûmes obligés de laisser de côté le cas du quatrième élève.

Questionnaire

1) Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées à cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyens de contrôle …). 2) Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence : a) les éléments pris en compte b) les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève) c) d'autres remarques

La première question concerne la prise d'information du professeur sur l'activité de l'élève, et la seconde la construction du processus d'enseignement qu'il propose pour cet élève.

Les professeurs ont rempli un questionnaire par élève. La méthodologie d'analyse des productions des professeurs sera présentée plus loin.

Série de problèmes

Nous avons fourni aux professeurs une « série de problèmes ». Notre objectif étant de repérer les variables didactiques sur lesquelles les professeurs pourraient jouer dans leur séquence d'enseignement, nous avons cherché à limiter le nombre de variables à prendre en compte dans notre analyse. Ceci nous a amené à restreindre le choix de problèmes de la part des professeurs. De plus, ce choix répond à la demande de certains professeurs exprimée lors de la négociation initiale. Cependant, pour ne pas obliger les professeurs à proposer les problèmes qui ne leur conviendraient pas, nous avons précisé dans la consigne que d'autres problèmes pouvaient être proposés en veillant à faire justifier leurs propositions.

Pour construire cette série de problèmes, nous nous sommes appuyés sur l'étude des programmes et manuels scolaires. Par ailleurs, nous avons pris en compte les variables didactiques et les valeurs présentées au chapitre 3 (cf. p. 69) et aussi les problèmes proposés dans la séquence d'enseignement que nous avons construit pour l'élève Anissa. Cette séquence sera présentée dans la section suivante.

La série de problèmes fournis aux professeurs est constituée de dix-huit problèmes. Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons ces problèmes en termes de variables didactiques et des valeurs prises en compte dans leur choix. Ces problèmes fournis tels quels aux professeurs (consignes, figures...), sont donnés en annexe (cf. annexe 2, p. XIII).

Variables didactiques	***Valeurs***	**Pb 01**	**Pb 02**	**Pb 03**	**Pb 04**	**Pb 05**	**Pb 06**	**Pb 07**	**Pb 08**	**Pb 09**	**Pb 10**	**Pb 11**	**Pb 12**	**Pb 13**	**Pb 14**	**Pb 15**	**Pb 16**	**Pb 17**	**Pb 18**
Nature du problème	*Construction de la figure symétrique*				■				■		■				■		■		■
	Construction de l'axe de symétrie					■	■					■							
	Reconnaissance de la figure symétrique			■				■	■							■		■	
	Reconnaissance de l'axe de symétrie					■	■			■			■				■		
	Identification des propriétés de la symétrie orthogonale	■																	
	Preuve		■								■	■	■	■		■		■	
Spécificité de la figure F	*F possède des segments parallèles à l'axe de symétrie*		■		■	■				■								■	
	F ne possède pas de segments parallèles à l'axe de symétrie												■		■				■
	F possède des segments perpendiculaires à l'axe de symétrie		■		■	■													
	F ne possède pas de segments perpendiculaires à l'axe de symétrie												■		■			■	
	F possède un ou des axes de symétrie			■		■	■	■		■			■		■				
	F ne possède pas d'axes de symétrie	■	■							■		■	■						■
	F possède un axe de symétrie parallèle à l'axe d																		
	F possède un axe de symétrie perpendiculaire à l'axe d																	■	
	F est proche de l'axe																		
	F est codée	■		■		■		■	■							■		■	
	F n'est pas donnée										■			■					
Nature de F	*Géométrique usuelle*			■	■	■	■	■	■	■		■	■		■			■	
	Géométrique non usuelle				■	■							■				■		
	Représentant un objet réel identifiable	■	■							■				■					■
	Simple								■		■					■		■	
	Complexe	■	■	■	■	■	■	■		■		■	■		■		■		■

Variables didactiques	***Valeurs***	**Pb 01**	**Pb 02**	**Pb 03**	**Pb 04**	**Pb 05**	**Pb 06**	**Pb 07**	**Pb 08**	**Pb 09**	**Pb 10**	**Pb 11**	**Pb 12**	**Pb 13**	**Pb 14**	**Pb 15**	**Pb 16**	**Pb 17**	**Pb 18**
Orientation des segments de F sur la feuille	*Horizontale*		■	■	■	■		■		■			■				■	■	■
	Verticale		■	■	■			■		■			■				■		■
	Oblique	■	■	■	■	■	■			■			■		■		■	■	■
Orientation de l'axe sur la feuille[52]	*Horizontale*		■		■	■				■									
	Verticale		■		■					■								■	
	Oblique	■	■	■	■	■	■	■	■	■					■	■			■
Intersection de F avec l'axe	*Vide*	■	■						■							■		■	■
	Touche				■			■											
	Coupe			■	■														
	Règle graduée	■					■				■	■							■
	Règle non graduée					■	■				■	■							■
	Équerre	■					■				■	■							■
	Compas	■				■	■				■	■							■
	Pliage												■						
	Calque									■									
Type de papier	*Blanc*	■			■	■	■		■	■	■	■	■		■			■	■
	Quadrillé		■					■								■	■		
	Pointillé			■															
Position relative de F et F'	*F et F' possèdent des segments parallèles*		■	■						■								■	
	F et F'ne possèdent pas de segments parallèles																	■	
	F et F' possèdent des segments ayant une même droite support		■	■					■										
	F et F' ne possèdent pas de segments ayant une même droite support	■		■															

Tableau 58. Série de problèmes : description en termes de variables didactiques et leur valeurs

[52] Dans les problèmes de reconnaissance et de construction de l'axe de symétrie, celui-ci n'est pas tracé.

4. Instanciation du modèle de décisions didactiques pour le cas d'Anissa

Comme nous l'avons annoncé au chapitre 4, nous instancierons ici le modèle de décisions didactiques pour le cas d'un élève particulier. Pour cela, nous avons choisi l'un des trois élèves, dont nous avons caractérisé des éléments des conceptions. Parmi ces élèves, nous choisissons « Anissa » car nous avons identifié chez elle un nombre important de contrôles erronés (cf. p. 165). L'instanciation du modèle pour cette élève nous permettra de proposer et d'analyser des problèmes qui peuvent permettre la déstabilisation des contrôles, et ensuite de prendre des décisions didactiques visant l'apprentissage de la symétrie orthogonale par Anissa.

Puisque nous sommes conscients que le sujet n'a pas forcément les mêmes choix que l'observateur, nous ne chercherons pas à comparer les décisions didactiques prises par les professeurs à l'égard d'Anissa, avec celles qui serons proposées dans cette instanciation du modèle. En effet, notre étude est placée dans un cadre théorique précis, tandis que les décisions didactiques des professeurs dépendront de contraintes liées à leur histoire, leurs expériences, leurs conceptions, parmi d'autres.

Par ailleurs, à partir de cette instanciation du modèle nous chercherons à dégager des éléments pour :

- construire la « série de problèmes » à fournir aux professeurs ;
- construire une méthode pour analyser les productions de ces professeurs.

Comme nous l'avons montré, les contrôles erronés identifiés chez Anissa sont liés à la direction horizontale (Σhor), à la translation des figures dans cette direction (Σtranslation) et/ou au parallélisme des segments (Σparallélisme_segment). D'après le modèle, dans les cas où au moins un contrôle erroné est identifié chez l'élève, la décision envisagée consiste à proposer une séquence didactique composée de quatre étapes dans le but d'amener cette élève à passer d'une conception (Ci) où des contrôles erronés sont présents, à une autre (Cj) caractérisée par des contrôles corrects du point de vue mathématique.

Ainsi, le modèle de décisions didactiques instancié pour le cas d'Anissa est représenté en fond gris dans le schéma ci-dessous :

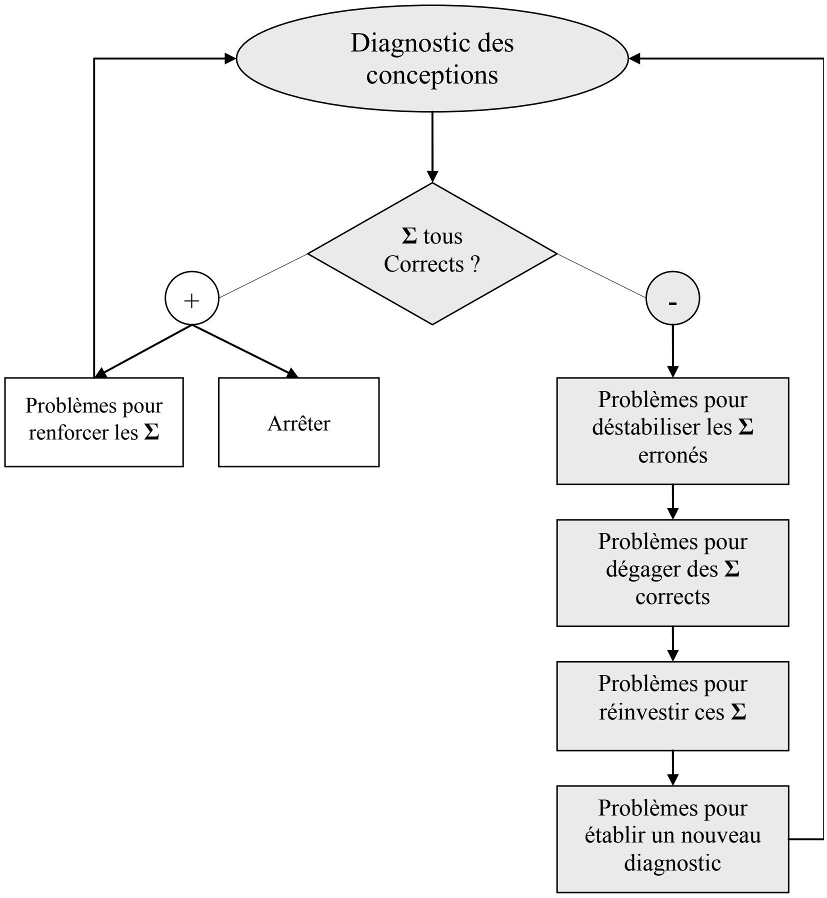


Schéma 15. Instanciation du modèle de décisions didactiques pour le cas d'Anissa

Pour construire la séquence didactique, nous avons déterminé les objectifs d'enseignement pour chacune des quatre étapes. Ensuite, en fonction des objectifs fixés et en prenant en compte la relation entre les contrôles identifiés et les variables des problèmes résolus (cf. p. 178), nous avons choisi les types de problèmes qui nous ont paru les plus adaptés pour répondre aux objectifs fixés.

Séquence didactique

Tout d'abord, précisons l'objectif pour chacune des étapes de la séquence :

- **Étape 1** : problèmes pour déstabiliser les contrôles erronés identifiés :
  - « direction horizontale » : Σhor
    - faire prendre conscience à Anissa qu'un segment et son image par la symétrie orthogonale n'ont pas nécessairement leurs extrémités correspondantes sur une droite horizontale sur la feuille.
  - « parallélisme » : Σparallélisme_segment
    - amener Anissa à comprendre qu'un segment et son image par la symétrie orthogonale ne sont pas parallèles, dans le cas général.

- « translation » : Σtranslation
    - montrer à Anissa que la figure symétrique ne correspond pas nécessairement à une translation de la figure initiale sur la feuille. Ceci peut déstabiliser aussi le parallélisme et la conservation du sens de la figure.

- **Étape 2** : problèmes pour dégager les contrôles corrects :
    - amener Anissa à substituer le contrôle Σhor lié au rappel horizontal par le contrôle Σortho lié à la propriété d'orthogonalité de la symétrie ;
    - en s'appuyant sur la conservation de distance à l'axe chez Anissa, mettre en échec le contrôle de distance globale et l'amener à développer le contrôle de distance correct.
- **Étape 3** : problèmes pour réinvestir les contrôles corrects
    - Favoriser le réinvestissement par Anissa des contrôles corrects dégagés dans l'étape précédente.
- **Étape 4** : problèmes pour établir un nouveau diagnostic
    - Tester la stabilité des contrôles corrects supposés acquis.

Ci-après, nous présenterons les types de problèmes constituant chacune de ces étapes, ainsi que des exemples de ces types de problèmes et une analyse a priori des problèmes donnés comme exemples.

Étape 1 : déstabilisation des contrôles erronés

Dans la résolution des problèmes de reconnaissance de figures symétriques, Anissa a évoqué la superposition des figures par pliage. Cependant, étant donné qu'elle ne l'effectue pas, nous avons supposé que le contrôle par superposition des figures par pliage n'est pas intervenu dans ses choix. Ainsi, un premier problème à proposer à Anissa dans ce processus d'enseignement serait le suivant :

Problème 1

Vérifier par pliage toutes les réponses données aux problèmes précédents, en pliant la feuille le long de la droite d.

En effectuant ces pliages, Anissa constaterait que les figures ne se superposent pas. Ceci pourrait l'amener à admettre que quelque chose ne va pas dans ses réponses, ce qui pourrait constituer une première invalidation des résultats obtenus. Cependant, bien que cette invalidation soit importante pour l'apprentissage d'Anissa, nous pensons qu'elle n'est pas suffisante pour amener Anissa à prendre conscience des limites de la conception mobilisée. En effet, il va falloir l'amener à identifier les raisons pour lesquelles sa conception ne conduit pas au bon résultat, en d'autres termes il va falloir déstabiliser les contrôles erronés. Pour cela, nous allons lui proposer des problèmes qui favorisent la mobilisation des contrôles erronés, mais qui en même temps provoquent un conflit entre ces contrôles et les contrôles corrects de la conception.

Nous proposons alors un problème que l'on peut caractériser en termes de variables didactiques, comme dans le tableau ci-après. Dans la deuxième colonne, nous décrivons l'effet que nous attendons chez Anissa.

Problème 2

Variable didactique/ *Valeur*	**Effet attendu dans la résolution du problème**
Nature du problème/ *Construction de la figure symétrique*	Mobilisation des contrôles pour construire la figure (dans la reconnaissance, l'élève peut résoudre le problème autrement, sans nécessairement recourir aux contrôles)
Orientation des segment de la figure F sur la feuille / *horizontaux/ verticaux*	Manifestation des contrôles Σhor, Σtranslation, Σparallélisme_segment
Orientation de l'axe sur la feuille / *Oblique*	Conflit entre les contrôles Σhor, Σtranslation, Σparallélisme_segment et Σdemi_plan et/ou Σdist (globale).
Spécificité de la figure F / *figure très proche de l'axe*	
Intersection de la figure avec l'axe/ *Vide*	Manifestation du contrôle Σdemi_plan

Tableau 59. Variables didactiques du problème 2 et effets attendus dans la résolution du problème

Pour justifier le choix de ces variables didactiques et de leurs valeurs, nous donnerons ci-dessous un exemple de ce type de problème, et procéderons ensuite à son analyse a priori. Il est à noter que cette analyse sera conduite sous la contrainte de la conception identifiée chez Anissa.

Exemple de ce type de problème

Construis le triangle symétrique du triangle ABC avec les instruments de dessin. Vérifie ta réponse par pliage.

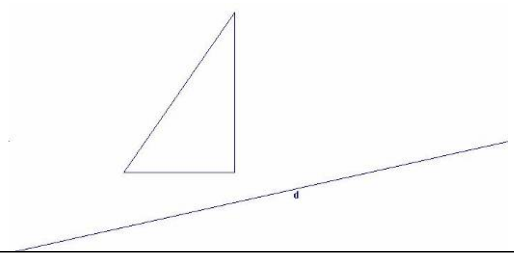


Figure 87. Un exemple de problème du type « problème 2 »

Analyse a priori

Dans la figure donnée, les sommets du triangle ne sont pas codés. Cependant, dans cette analyse nous le nommons triangle ABC (cf. Figure 88). Le fait que les segments [AB] et [BC] soient respectivement vertical et horizontal sur la feuille, ce qui entraîne que le triangle ABC est dans la position considérée comme standard dans le cas d'un triangle rectangle, peut favoriser la manifestation des contrôles liés au parallélisme des segments et/ou de translation, et encore ceux liés aux rappels horizontal ou vertical.

En mobilisant sa conception, Anissa pourrait mettre en œuvre une des procédures de résolution suivantes :

1. Procédure analytique

Cette procédure consisterait à :

- reporter les distances des points A, B et C à l'axe dans la direction horizontale ou verticale ;
- construire leurs symétriques A', B' et C' ;
- relier ces points en construisant le triangle A'B'C' symétrique de ABC.

En utilisant la ligne de rappel horizontale, l'élève obtiendra le point A' très éloigné de l'axe, voire en dehors de la feuille de papier, comme le montre la figure ci-dessous :

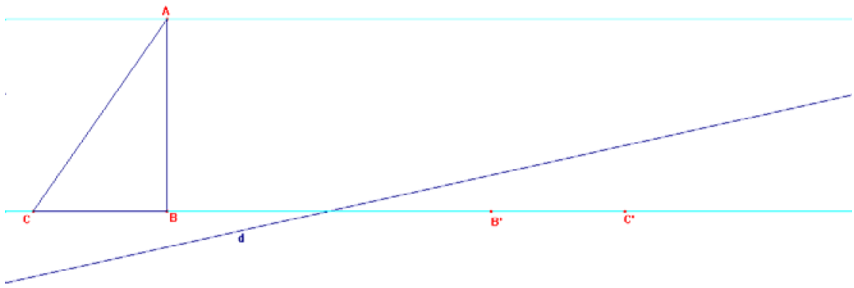


Figure 88. Procédure de construction analytique : lignes de rappel horizontal

En fonction de l'emplacement du triangle ABC sur la feuille de papier, l'utilisation de cette procédure pourrait produire une figure en dehors des limites de la feuille de papier, ce qui pourrait fonctionner comme un élément d'invalidation de la procédure. Même si l'on considère que la figure image puisse être construite dans les limites de la feuille, le triangle image obtenu (A'B'C') aurait forme et taille différentes de celles du triangle ABC (cf. p. 94). Comme nous l'avons montré dans la description de ces types de procédures, les contrôles liés à la perception globale (forme, taille) de la figure peuvent intervenir dans la phase d'exécution de la tâche et/ou de vérification de la solution finale, en provoquant un conflit entre ceux-ci et les contrôles théoriques liés à la direction et à l'égalité des distances.

2. Procédure semi-analytique

Cette procédure consisterait à :

- construire la droite passant par la base du triangle (dans le cas de la ligne de rappel horizontale) ;
- reporter la distance du point B (le sommet plus proche de l'axe) à la droite d de l'autre côté de cette droite pour construire son image B' ;
- construire globalement l'image du triangle, tout en gardant la forme, la taille et l'orientation des angles de ABC.

Par le biais de cette procédure, Anissa obtiendrait comme image de ABC un triangle qui coupe la droite d (cf. Figure 89). Ceci pourrait provoquer un conflit entre les contrôles erronés Σhor, Σparallélisme_segment et/ou Σtranslation et Σdist, avec le contrôle Σdemi_plan.

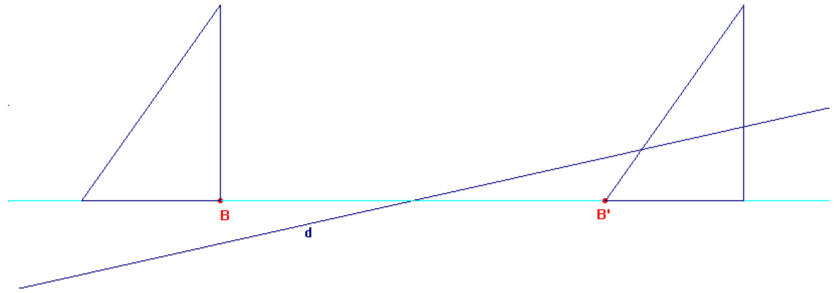


Figure 89. Procédure de construction semi-analytique : ligne de rappel horizontale

Cette constatation par l'élève pourrait contribuer à l'invalidation de la procédure, ce qui se confirmerait par pliage. Cependant, nous pouvons envisager également que cette situation de conflit amène Anissa à essayer d'adapter sa procédure, en faisant en sorte que la figure construite ne coupe pas l'axe de symétrie. Une façon de faire, c'est de prendre en compte la distance du sommet A à la droite d, toujours dans la direction horizontale. Comme dans la procédure analytique, le triangle image obtenu serait très éloigné du triangle ABC, voire en dehors de la feuille de papier, ce qui invaliderait encore la procédure car Anissa sait que la figure image ne doit pas être très éloignée de celle de départ (conservation de distance globale). Anissa peut être ainsi amenée à changer de direction, en passant à une direction verticale. Dans ce cas, elle obtiendrait comme image une figure qui ne coupe pas l'axe de symétrie, comme le montre la figure ci-après.

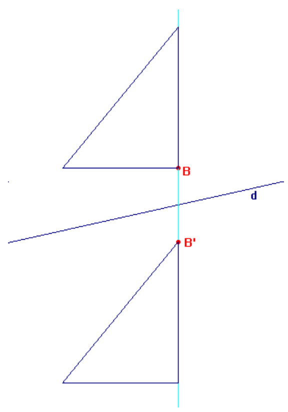


Figure 90. Procédure de construction semi-analytique : ligne de rappel verticale

Ici, la vérification par pliage peut s'avérer nécessaire pour montrer que les figures ne se superposent pas, et ainsi invalider la procédure.

3. Procédure globale

Cette procédure consisterait à :

- estimer perceptivement une distance globale de la figure à l'axe dans une direction horizontale ou verticale ;
- construire la figure image globalement dans cette direction (sans nécessairement construire une droite).

Dans ce cas, une situation de conflit entre les contrôles est moins attendue car la distance est conservée perceptivement. Dans ce cas aussi, la procédure serait invalidée par le pliage.

Nous supposons que ces échecs amèneront Anissa par la suite à prendre l'une des deux décisions suivantes :

- changer de procédure, ce qui pourrait provenir du changement de conception[53] ;
- abandonner la construction. Cet abandon peut traduire une prise de conscience de l'insuffisance de sa conception par l'élève. Mais l'élève peut abandonner également une construction parce qu'il pense que le problème n'a pas de solution. Le pliage peut encore jouer un rôle important dans ce cas, pour montrer qu'il est possible de construire la figure image.

Ainsi, faudra-t-il ensuite proposer à Anissa des problèmes qui lui permettent de dégager les outils pour construire cette image.

Étape 2 : dégager les contrôles corrects

Étant donné que le contrôle concernant la direction horizontale a été identifié chez Anissa et que la distance à l'axe a été prise en compte dans cette direction, l'objectif principal de cette étape est de l'amener à identifier la propriété d'orthogonalité de la symétrie. Nous espérons qu'en dégageant cette propriété, Anissa prendra conscience, en même temps, du fait que les distances des points à l'axe doivent être prises en compte dans la direction orthogonale. Par ailleurs, la symétrie orthogonale chez Anissa est confondue avec la translation, c'est pourquoi il nous semble important de déstabiliser aussi le contrôle Σtranslation, et par conséquent celui de conservation du « sens » de la figure initiale.

[53] Un changement de procédure de résolution d'un problème n'est pas nécessairement dû au changement de conception.

Nous souhaitons amener ainsi Anissa à remplacer ces contrôles erronés par des contrôles corrects : Σortho et Σsens_inverse. Puisqu'il nous paraît essentiel de lui proposer des problèmes qui offrent un nombre important d'informations permettant d'identifier les propriétés de la symétrie, nous proposons un problème qui peut être décrit en termes de variables comme suit :

Problème 3

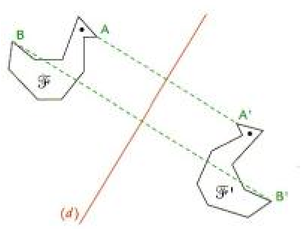
Variable didactique/ *Valeur*	**Effet attendu dans la résolution du problème**
Nature du problème/ *Identification des propriétés de la symétrie orthogonale*	Permet l'identification des propriétés de la symétrie orthogonale
Spécificité de la figure/ *F ne possèdent pas d'axes de symétrie*	Facilite la prise de conscience que les figures F et F' ont leur sens inverse.
Nature de F/ *Représentant un objet réel identifiable / Codée (points nommés, droites joignant les points et leurs symétriques tracées)*	Facilite l'identification des propriétés suivantes : (AA') est orthogonale à l'axe ; la distance des points A et A' à l'axe est considérée dans cette direction ; la figure F' a le « sens inverse » de celui de F.
Orientation de l'axe sur la feuille / *Oblique*	Permet d'éviter la confusion entre direction orthogonale et horizontale

Tableau 60. Variables didactiques du problème 3 et effets attendus dans la résolution du problème

Exemple de ce type de problème

Un exemple de ce type de problème a été montré dans le chapitre 3 :

Les figures F et F' sont symétriques (A' est le symétrique de A, B' est le symétrique de B,...)



a) Que peux-tu dire à propos de la droite (d) ?

b) Que peux-tu dire à propos des segments [AA'] et [BB'] ?

(tu peux utiliser l'équerre, la règle graduée ou le compas)

Figure 91. Un problème d'identification des propriétés de la symétrie orthogonale (cf. p. 66)

Analyse a priori

Dans ce type de problème, tous les éléments de la symétrie orthogonale (la figure objet F, la transformation T représentée par la droite d, la figure image F') sont donnés. La tâche de l'élève consiste à identifier la relation entre ces éléments.

Dans l'exemple ci-dessus, le fait que certains points de la figure soient nommés, que l'on précise que les points A et A' sont symétriques et que les droites joignant ces points à leurs symétriques soient tracées dans la figure, peut aider l'élève à reconnaître que ces droites sont perpendiculaires à la droite d et que les distances des points et de leurs symétriques à d prises dans cette direction sont les mêmes. Ceci peut amener Anissa à dégager le contrôle Σortho, et à remplacer le contrôle de distance globale ou de distance prise dans la direction horizontale. Par ailleurs, le fait que la figure proposée représente un objet réel identifiable et qu'elle ne possède pas d'axes de symétrie (les oiseaux se regardent comme dans un miroir) permet de mettre en évidence que les sens des figures objet et image sont inverses, ce qui peut amener Anissa à dégager le contrôle Σsens_inverse qui se substituera au contrôle erroné Σmême_sens.

<u>Étape 3 : réinvestir les contrôles corrects</u>

Les problèmes proposés dans cette étape doivent permettre à Anissa de réinvestir les contrôles supposés dégagés dans l'étape précédente. Pour ce faire, nous proposons des problèmes de types suivants :

Problème 4

Variable didactique/ *Valeur*	**Effet attendu dans la résolution du problème**
Nature de problème / *De preuve : prouver que F' est ou non la transformée de F par la symétrie orthogonale*	Mobilisation des contrôles dégagés dans l'étape 2 : Σortho, Σsens_inverse
Spécificité de la figure/ *Ne possède pas d'axe de symétrie*	Mobilisation et explicitation de Σsens_inverse
Type de papier / *Quadrillé*	Le quadrillage remplace les instruments de dessin : au lieu de mesurer la distance, on la « lit » en comptant les carreaux, l'orthogonalité se voit aussi dans le cas où l'axe est vertical ou horizontal, sans qu'on ait besoin d'utiliser l'équerre. Le quadrillage permet la reconnaissance perceptive des propriétés géométriques (perpendicularité, égalité de longueurs).
Position relative de F et F'/*F' et F' possèdent des segments parallèles*	F' correspond à la figure obtenue par la conception diagnostiquée initialement chez Anissa. Elle va être amenée à expliciter pourquoi cette réponse est incorrecte, ce qui devrait contribuer à l'abandon de la conception initiale.

Tableau 61. Variables didactiques du problème 4 et effets attendus dans la résolution du problème

Exemple de ce type de problème

Indique pourquoi les deux maisons ne sont pas symétriques par rapport à la droite (d).

a)

b)

Figure 92. Rappel d'un problème de preuve (cf. p. 67, « item a » et « b »)

Analyse a priori

Par la consigne, Anissa sait que les figures ne sont pas symétriques par rapport à la droite d. Elle doit alors expliquer pourquoi elles ne le sont pas. Dans la figure de l'« item a », le quadrillage permet à l'élève de repérer que les sommets des triangles représentant les toits des deux maisons et les petits rectangles représentant les portes et les fenêtres ne sont pas à la même distance de la droite d. Ainsi, pour expliquer que ces deux figures ne sont symétriques, Anissa peut mobiliser le contrôle lié à la conservation d'égalité des distances des points à l'axe. Il se peut aussi que le contrôle Σsens_inverse intervienne dans la résolution du problème. Dans le cas de la figure de l'« item b », il est attendu d'Anissa qu'elle mobilise les contrôles Σortho et Σdist dans son explication.

Problème 5

Nous proposerons aussi à Anissa des problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques. Ces problèmes peuvent être décrits par des combinaisons des valeurs des variables didactiques décrites ci-dessous :

<table>
<tr><th>Variable didactique/ Valeur</th><th>Effet attendu sur la résolution du problème</th></tr>
<tr><td>Nature de problème / Construction et/ou reconnaissance de figures symétriques</td><td rowspan="4">Réinvestissement de Σortho et Σsens_inverse
Mobilisation de Σdist dans la direction orthogonale à l'axe</td></tr>
<tr><td>Spécificité de la figure/ Ne possède pas d'axe de symétrie</td></tr>
<tr><td>Orientation de l'axe sur la feuille / Verticale/ Oblique</td></tr>
<tr><td>Intersection de la figure avec l'axe/ Vide/ Touche</td></tr>
</table>

Tableau 62. Variables didactiques du problème 5 et effets attendus dans sa résolution

Exemples de ce type de problème

Exemple 1 :

Indique par oui ou non si le point B est le symétrique du point A par rapport à la droite (d). Sinon, construis dans ton cahier le symétrique A' de A

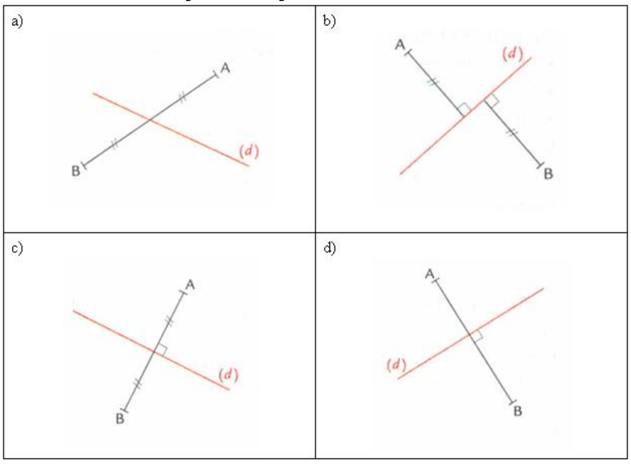


Figure 93. Problème de reconnaissance et construction de figures symétriques

Variables didactiques prises en compte dans ce choix :

- **Nature du problème** / *Problème de reconnaissance et de construction de figures symétrique*
- **Orientation de l'axe de symétrie** / *Oblique*

Exemple 2 :

Construis le symétrique de chaque figure par rapport à la droite (d)

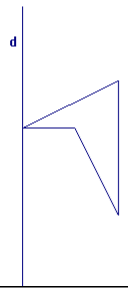


Figure 94. Un problème de construction (cf. p. 66 : item a)

Variables didactiques prises en compte dans ce choix :

- **Nature de problème** / *Construction de figures symétriques*
- **Spécificité de la figure** / *F ne possède pas d'axe de symétrie*
- **Orientation de l'axe de symétrie** / *Verticale*
- **Intersection de la figure avec l'axe** / *Touche*

Étape 4 : établir un nouveau diagnostic

Pour tester la stabilité des contrôles supposés acquis par Anissa dans les étapes précédentes, il va falloir lui proposer des problèmes du même type que ceux résolus, à partir desquels nous avons identifié les contrôles erronés, mais aussi d'autres types de problèmes pour mettre à l'épreuve ces nouveaux contrôles.

Ainsi, nous proposerons à Anissa des problèmes qui peuvent être décrits par les variables didactiques et leurs valeurs ci-dessous :

Problème 6

Variables didactiques/ Valeurs	Objectif fixé
Nature de problème / *Construction et/ou reconnaissance de figures symétriques*	Tester la stabilité du contrôle Σortho Vérifier si la distance à l'axe est prise en compte dans la direction orthogonale
Nature de F / *géométrique usuelle ou non / Représentant un objet réel, identifiable ou non*	
Orientation des segments de la figure sur la feuille / *Horizontale/ Verticale/ Oblique*	
Orientation de l'axe sur la feuille/ *Horizontale ou presque/ Verticale ou presque / Oblique*	
Intersection de la figure avec l'axe/ *Vide/ Touche/ Coupe*	
Spécificités des figures / *F possède axe de symétrie ou non*	Tester la stabilité du contrôle Σsens_inverse

Tableau 63. Problèmes pour établir un nouveau diagnostic et les objectifs fixés

Exemples de problèmes de ce type

Exemple 1 :

Dans chaque cas, l'une des figures ci-dessous est la symétrique de la figure nommée par rapport à la droite (d). Laquelle ?

a) b)

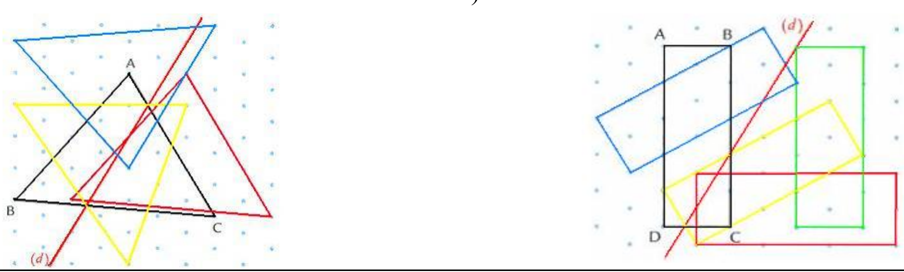


Figure 95. Rappel d'un problème de reconnaissance de figures symétriques (cf. p. 65)

Variables didactiques prises en compte dans ce choix :

- **Nature du problème** / *Problème de reconnaissance de figures symétriques*
- **Orientation de l'axe** */ Oblique*
- **Orientation des segments de la figure F sur la feuille** */ Horizontale et verticale, ou non*
- **Intersection de la figure avec l'axe** */ coupe*

Exemple 2 :

Construis le symétrique de chaque figure par rapport à la droite d :

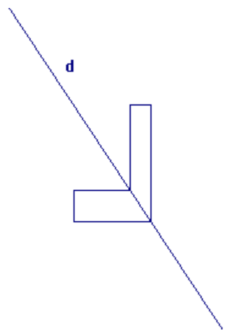


Figure 96. Rappel d'un problème de construction de figures symétriques (cf. p. 66)

Variables didactiques prises en compte dans ce choix :

- **Nature de problème** / *Problème de construction de figures symétriques*
- **Spécificité de la figure** / *F ne possède pas d'axe de symétrie*
- **Orientation des segments de la figure F sur la feuille** */ Horizontale et verticale*
- **Orientation de l'axe de symétrie** */ Oblique*
- **Intersection de la figure avec l'axe** */ Coupe*

Ainsi, en proposant ce projet d'enseignement, nous avons envisagé de faire passer Anissa d'une conception où la structure de contrôle contiendrait les contrôles erronés Σhor, Σtranslation et Σparallélisme_segment, à une conception cible dont la structure de contrôle devrait contenir les contrôles Σortho et Σdist.

5. Méthode d'analyse des productions des professeurs

Dans ce manuscrit, nous présenterons l'analyse des productions de cinq professeurs seulement, sur les dix qui nous ont répondu. Le choix de ces professeurs a été motivé uniquement par la richesse et la clarté de leur discours justificatif, afin de mieux interpréter les décisions qu'ils avaient prises.

Les analyses sont fondées sur les réponses des professeurs aux questionnaires. Deux de ces professeurs (Prof_4 et Prof_5) nous ont accordé ultérieurement un entretien, dans le but d'obtenir des informations complémentaires sur les raisons de leurs choix. Dans ces deux cas là nous analysons également leurs réponses aux questions posées.

Tout d'abord nous donnerons les réponses des professeurs à la fiche de l'enseignant, ce qui nous permettra de présenter les professeurs. Ensuite, nous procéderons à l'analyse des productions des professeurs concernant chacun des trois élèves. Nous réaliserons une « lecture horizontale des données », c'est-à-dire que nous analyserons les productions de chaque professeur pour un même élève. Nous pensons que cette lecture pourrait nous apporter des éléments pour mieux comprendre les décisions des professeurs.

Les analyses sont réalisées en deux temps.

Dans un premier temps, nous analysons les réponses des professeurs à la première question concernant la prise d'information sur l'activité de l'élève. Nous découpons cette réponse en des extraits dans le but d'identifier, d'une part comment le professeur se représente la notion de symétrie orthogonale de chaque élève, et d'autre part, sur quels contrôles, ou absence de contrôles chez l'élève, il s'est basé pour prendre ses décisions

Nous illustrons cette méthode à partir de la réponse donnée par un des professeurs à propos de l'activité d'« Anissa » :

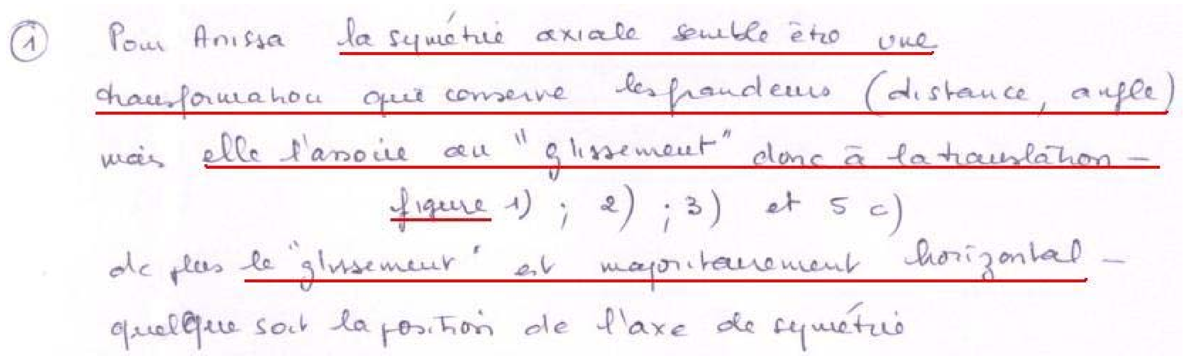

1 Pour Anissa la symétrie axiale semble être une transformation qui conserve les grandeurs (distance, angle) mais elle l'associe au "glissement" donc à la translation – figure 1) ; 2) ; 3) et 5 c)
de plus le "glissement" est majoritairement horizontal – quelque soit la position de l'axe de symétrie

Figure 97. Réponse d'un professeur à la question 1 concernant la copie « Anissa »

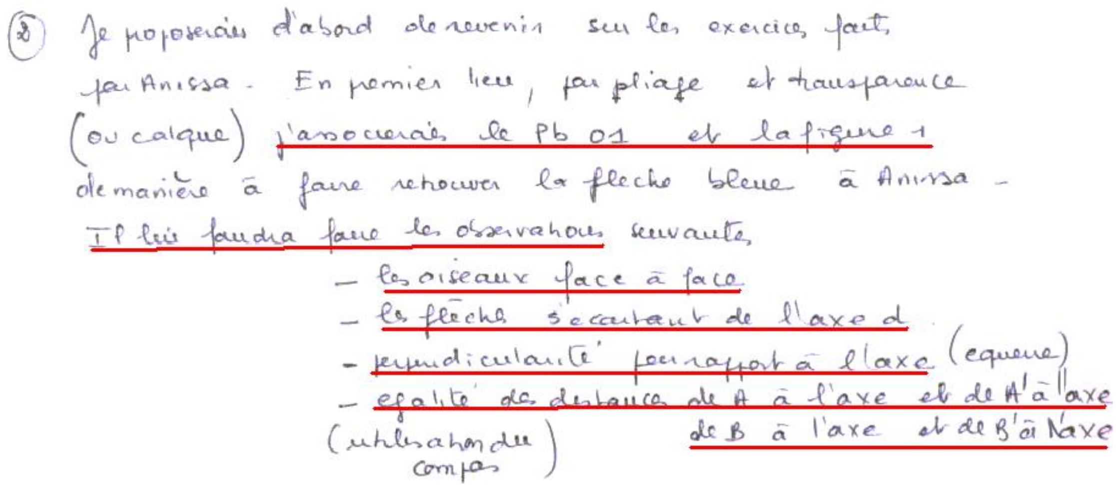
Dans cette réponse, nous avons souligné les extraits pris en compte dans l'analyse. Nous avons traité ces extraits en les interprétant ainsi en termes de contrôles :

Extraits du questionnaire du Professeur	Contrôles
La symétrie axiale semble être une transformation qui conserve les grandeurs (distance, angle)	Σtaille_1 Σforme
Elle l'associe au « glissement » donc à la translation	Σtranslation
Le « glissement » est majoritairement horizontal	Σhor

Tableau 64. Extrait de production d'un professeur : interprétation en termes de contrôles

Dans un deuxième temps, nous traitons les réponses des professeurs à la deuxième question concernant la construction du processus d'enseignement.

A partir des justifications données par les professeurs, nous cherchons à identifier les objectifs des professeurs en choisissant ces problèmes. A partir d'un extrait de la séquence didactique proposée par ce même professeur pour Anissa, nous donnons un exemple montrant comment nous procédons :


(2) Je proposerais d'abord de revenir sur les exercices faits par Anissa. En premier lieu, par pliage et transparence (ou calque) j'associerais le Pb 01 et la figure 1 de manière à faire retrouver la flèche bleue à Anissa. Il lui faudra faire les observations suivantes

- les oiseaux face à face
- les flèches s'écartant de l'axe d
- perpendicularité par rapport à l'axe (equerre)
- egalité des distances de A à l'axe et de A' à l'axe
  de B à l'axe et de B' à l'axe

(utilisation du compas)

Figure 98. Extrait de la réponse d'un professeur à la question 2 concernant la copie « Anissa »

Ce professeur propose à Anissa, comme premier problème de la séquence, de reprendre sa réponse au problème-flèche, en l'associant au problème « Pb 01 » de la série, où il est indiqué que les figures sont symétriques. Pour cela, le professeur propose l'utilisation du pliage, du calque, de l'équerre et du compas. Il s'attend à ce qu'en comparant ces deux problèmes (les flèches qui s'écartent contrairement aux oiseaux qui se regardent), Anissa se rende compte de la fausseté de sa réponse. Ceci peut l'amener à dégager le contrôle Σsens_inverse. De plus, le professeur propose à Anissa d'utiliser l'équerre et le compas. L'utilisation de ces instruments peut amener l'élève à penser à la perpendicularité et à la distance.

Nous organisons alors les données et les objectifs selon le tableau ci-dessous :

Extraits du questionnaire du Professeur	Problème	Objectif
<u>*En premier lieu*</u> *par* <u>*pliage*</u>*, transparence (ou calque) j'associerais le Pb 01 et la figure 1* (figure-flèche) *de manière à faire retrouver la flèche bleue à Anissa.* *Il lui faudra faire les observations suivantes :* *- les oiseaux face à face*	Problème-flèche	Amener l'élève à prendre conscience de la non validité de sa procédure, en dégageant Σsens_inverse, par la

- la flèche s'écartant de l'axe d *- perpendicularité par rapport à la droite d (équerre)* *- égalité des distances* *de A à l'axe et de A' à l'axe, de B à l'axe et de B' à l'axe (utilisation du compas)*	Pb_01	mise en œuvre de Σpliage_2 et Σcalque_1 Amener l'élève à dégager les contrôles Σortho et Σdist

Tableau 65. Extrait de production d'un professeur : projet didactique

Nous commencerons par analyser la copie Anissa et, au fur et à mesure que nous progresserons dans l'analyse des autres copies, nous ferons des retours sur les décisions prises par les professeurs concernant les copies déjà analysées. Nous avons fait ce choix dans le but, d'une part d'éviter des répétitions éventuelles, et d'autre part d'introduire le plus tôt possible une discussion des résultats. En analysant la production des professeurs, nous chercherons à identifier les connaissances sur lesquelles ils s'appuient pour prendre leurs décisions didactiques.

Après avoir analysé les productions des professeurs pour chacun des trois élèves, nous présenterons une synthèse des résultats obtenus. Ceci servira à mettre en évidence les convergences et divergences des décisions prises par les différents professeurs pour un même élève.

6. Analyse des résultats

Il est à noter que les citations et les mots employés par les professeurs sont écrits en *italiques*.

6.1. Fiche de l'enseignant

Questions 1, 2 et 4 :

Id professeur	Activité actuelle	Nombre d'années d'expérience	Formation en didactique des mathématiques
Prof_1	Professeur de collège 6e, 4e et 3e	25	Oui. DEA EIAHD
Prof_2	Professeur de collège 5e, 4e et 3e	20	Non
Prof_3	Professeur formateur à l'IUFM	37	Oui. DEA
Prof_4	Professeur de collège 6e, 4e et 3e	10	Non
Prof_5	Professeur de collège 5e, 4e et 3e	33	Non

Tableau 66. Fiche de l'enseignant : réponses aux questions de 1, 2 et 4

Comme nous pouvons le constater à partir du tableau, tous les professeurs ont une longue expérience dans l'enseignement secondaire et l'un d'eux est professeur formateur à l'IUFM. Deux professeurs ont suivi une formation en didactique des mathématiques.

Question 3 :

Id professeur	Réponses
Prof_1	1. (-) 2. ( ) 3. (+) *mais ça dépend des élèves : tous ne fonctionnent pas de manière identique*
Prof_2	1. (-) 2. (+) 3. (+)
Prof_3	1. ( ) 2. ( ) 3. ( ) *(-) Le prof s'en tient à une des 3 propositions ci-dessus* *(+) Le professeur choisit en fonction de la connaissance des élèves, du moment de l'apprentissage, etc.*
Prof_4	1. (-) 2. ( ) 3. (+)
Prof_5	1. ( ) 2. (-) 3. (+) *Pour la majorité des élèves*

Tableau 67 Fiche de l'enseignant : réponses à la question 3

La situation privilégiée par la majorité des professeurs (4 sur 5) est celle où l'élève acquiert des connaissances dans des situations où il est guidé progressivement par le professeur. Parmi ces professeurs, les Prof_1, Prof_3 et Prof_5 soulignent que le choix d'une situation ou de l'autre dépend de la connaissance du professeur relative au fonctionnement de l'élève. La situation qui paraît la moins favorable (3 sur 5) est celle qui renvoie à la conception transmissive de l'apprentissage.

Le Prof_3 a préféré ne pas répondre à cette question telle qu'elle a été posée, et a fait lui-même des propositions. En effet, pour lui, le professeur choisit une des trois situations proposées en fonction de plusieurs facteurs, dont les connaissances qu'il a des élèves et le moment de l'apprentissage.

6.2. Décisions didactiques pour le cas d'Anissa

6.2.1. Analyse des productions des professeurs

<u>Professeur 1</u>

Prise d'information sur l'activité d'Anissa

Le professeur décrit comment il comprend ce qu'est la symétrie orthogonale pour Anissa, par le biais de quatre propriétés. Les propriétés formulées et codées par le professeur et les contrôles que nous leur associons sont les suivants :

Extraits du questionnaire du Prof_1	Contrôles associés
P_1 : l'image d'un segment par la symétrie est un segment parallèle	Σparallélisme_segment
P_2 : le segment et son image ont même longueur	Σtaille1
P_3 : le segment image est obtenu en déplaçant horizontalement le segment antécédent	Σhor Σtranslation
P_4 : le segment et son image sont de part et d'autre de l'axe	Σdemi_plan

Tableau 68. Prof_1 : Prise d'information sur l'activité d'Anissa

La conservation de l'orientation des segments par la symétrie (parallélisme) est fortement remarquée chez Anissa par ce professeur. D'après lui, cette propriété se manifeste dans toutes ses réponses.

La question qui se pose est de savoir comment le professeur prend en compte les propriétés qu'il a identifiées, et quels sont les autres éléments sur lesquels il s'appuie pour élaborer son projet d'enseignement. Nous présentons ci-dessous la séquence didactique proposée.

Séquence didactique

La séquence proposée est composée de sept problèmes, que le professeur organise en trois étapes comme le montre ce tableau :

Extraits du questionnaire du Prof_1	Problème	Objectifs
Faire comprendre à Anissa qu'un segment et son image ne sont pas forcément parallèles	Problème-flèche	*Étape 1 : avec du papier calque* Amener l'élève à dégager

<table>
<tr><td></td><td>Pb segment-losange</td><td>Σcalque_1
Déstabiliser Σparallélisme_segment et Σhor</td></tr>
<tr><td>Faire observer les deux propriétés fondamentales de la symétrie : perpendicularité et distances des points à l'axe
Constater que P_3 est fausse. Anissa doit comprendre (on l’espère !) que pour aller de A à A' on se déplace perpendiculairement à d puis d'une distance égale, l'horizontale n'ayant rien à voir là-dedans</td><td>Pb 01</td><td rowspan="3">Étape 2 : avec Pb 0
Amener l’élève à dégager Σortho et Σdist
Faire formuler les propriétés liées aux propriétés fondamentales : Σortho et Σdist
Renforcer les contrôles Σortho, Σdist et Σtaille</td></tr>
<tr><td>Pour justifier le choix de C ou D, Anissa doit reformuler avec ses mots la propriété de perpendicularité.
Pour discriminer C et D, elle reformulera la ppté des distances.</td><td>Pb 15</td></tr>
<tr><td>Renforcer l'assimilation et l'énonciation des deux pptés. Le dessin b permet en outre à Anissa d'évoquer la non-isométrie des figures, ppté qu'elle semble avoir bien intégrée.</td><td>Pb 02</td></tr>
<tr><td>Je demande à Anissa de nommer les points puis leur image [...]. Je l'invite à contrôler avec le calque, si l'observation « à vue d'œil » ne suffit pas.
Je lui demanderai de rédiger un programme de construction.</td><td>Pb 04</td><td rowspan="3">« Étape 3 : Anissa va construire elle-même des images ou des axes de symétrie »
Amener l’élève à réinvestir les connaissances anciennes et nouvelles : les contrôles Σdemi_plan Σortho, Σdist et Σcalque_1</td></tr>
<tr><td>Les segments isométriques apparaissent clairement. En se servant de sa ppté P_4, Anissa devrait identifier C et E images de B et D, puis tracer la droite qui doit passer par A.
Dans ce Pb 05, les deux pptés fondamentales de la symétrie sont vérifiées</td><td>Pb 05</td></tr>
<tr><td>Pour qu’Anissa formule successivement, dans a puis b, la non-vérification de ces deux propriétés.</td><td>Pb 12</td></tr>
</table>

Tableau 69. Prof_1 : Séquence didactique proposée pour Anissa

Le premier élément sur lequel ce professeur s’appuie pour prendre ses décisions, ce sont les propriétés à partir desquelles il a caractérisé la conception de la symétrie orthogonale chez Anissa. Parmi ces propriétés, deux sont erronées : P_1 qui renvoie au contrôle Σparallélisme_segment, et P_3 renvoyant aux contrôles Σtranslation et Σhor.

La première décision du professeur est de reprendre les réponses d'Anissa aux problèmes de reconnaissance. La consigne qu'il propose consiste à décalquer l'axe de symétrie et la figure F[54] et à retourner le calque en faisant coïncider l'axe et son image calquée. Cette consigne vise à enseigner à Anissa l'utilisation correcte de la technique du calque ou à réactiver cette technique chez elle. Il s'attend à ce qu'Anissa puisse dégager et disposer d'un moyen de contrôle lié à la propriété de superposition de deux figures symétriques. L'élève devra en même temps prendre conscience du fait que le symétrique d'un segment n'est pas nécessairement parallèle au segment initial. En effet, le professeur explique que son objectif est de faire *comprendre à Anissa qu'un segment et son image ne sont pas forcément parallèles.* En ce qui concerne le problème segment-losange, le professeur propose de disposer l'axe dans l'orientation verticale. Comme il l'affirme, son but est d'attirer l'attention d'Anissa sur *l'effet-miroir de la symétrie*. En effet, en s'appuyant sur le fait que les élèves sont *visuels*, il essaye d'amener Anissa à utiliser cet *effet-miroir* comme un moyen perceptif de validation. D'après lui, la disposition de l'axe verticalement pourrait faciliter cette visualisation.

Dans cette première étape de la séquence, les décisions du professeur s'appuient tout d'abord sur les recommandations institutionnelles (programmes scolaires, instructions officielles) concernant l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège, où l'utilisation de la technique du calque tient une place importante. Grâce à cette technique, il cherche à déstabiliser le contrôle Σparallélisme_segment. Pour lui, l'évolution de la conception identifiée chez Anissa passe nécessairement par la déstabilisation de ce contrôle. Ce professeur s'appuie également sur le fait que les élèves sont très « visuels », ce qui leur permet de s'approprier facilement les moyens de contrôle liés à la perception globale des figures symétriques (effet miroir, par exemple). Ces décisions prennent donc appui sur sa pratique de l'enseignement et sur ses connaissances du fonctionnement des élèves.

Le professeur propose ensuite des problèmes avec l'objectif d'amener Anissa à identifier, formuler et mettre en œuvre les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances des points à l'axe, ce qu'il appelle les *propriétés fondamentales de la symétrie*. Ces deux propriétés lui paraissent essentielles pour l'apprentissage de cette notion. Cette décision est alors due à ses connaissances mathématiques. Dans sa séquence, le professeur s'appuie aussi sur les connaissances correctes identifiées chez Anissa, par exemple la propriété P_4 (isométrie).

Le premier problème proposé dans la deuxième étape est « Pb 01 ». Signalons que l'énoncé de ce problème indique que les figures données sont symétriques par rapport à la droite d. Le professeur s'attend alors à ce qu'en se servant du codage sur la figure (droites de liaison entre les points symétriques) et du fait de l'axe oblique, Anissa constate la fausseté (ou non

---

[54] La flèche noire dans le problème-flèche, et le segment [NM] dans le problème segment-losange.

validité) de la propriété P3 (déplacement horizontal). Elle sera alors amenée, d'une part à substituer le contrôle Σhor par le contrôle Σortho, et d'autre part à prendre conscience que les distances des points à l'axe doivent être conservées dans la direction orthogonale à l'axe. Le deuxième problème proposé est « Pb 15 ». Le professeur s'attend à ce qu'Anissa choisisse les points C ou D comme symétriques de A et qu'elle explicite la propriété de perpendicularité pour justifier ce choix. Par la suite, pour choisir entre C et D, elle sera amenée à expliciter la propriété d'égalité des distances des points à l'axe.

Après avoir envisagé d'amener Anissa à dégager et à formuler les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances de la symétrie orthogonale, le professeur propose « Pb 02 ». Son objectif est d'une part de *renforcer l'assimilation et l'énonciation* de ces propriétés par Anissa, et d'autre part, d'amener Anissa à mettre en œuvre la propriété correcte « P2 » (conservation des longueurs des segments par la symétrie orthogonale). D'après lui, la figure de l'« item b » où les deux figures ont des dimensions différentes peut permettre à Anissa d'évoquer la *non-isométrie des figures*.

A ce stade, le professeur signale que jusqu'à ce moment, il n'a pas encore proposé à Anissa de problème de construction. Elle n'a travaillé que sur des figures données. Il va donc falloir que l'élève réalise elle-même des constructions, ce qui est l'objectif de la troisième étape de sa séquence : Anissa va *construire elle-même des images ou des axes de symétrie*.

Le premier problème proposé dans la troisième étape est « Pb 04 ». Le professeur demande de compléter la consigne de ce problème ainsi : *je demande à Anissa de nommer les points, puis leur image. Elle choisit elle-même ses instruments* (de dessin). *Je l'invite à contrôler avec du papier calque si l'observation « à vue d'œil » ne suffit pas. En complément, je lui demande de rédiger un programme de construction*. Le professeur laisse à l'élève toute latitude pour choisir les instruments de dessin à utiliser dans la construction des figures images. Il peut ainsi repérer les propriétés de symétrie que l'élève met en œuvre spontanément, sans qu'elles soient induites par la consigne demandant d'utiliser tel ou tel instrument. En ce qui concerne les moyens de validation, il s'attend à ce qu'Anissa mobilise les contrôles par la perception globale (à *vue d'œil*).

Les deux derniers problèmes proposés par ce professeur consistent à construire l'axe de symétrie de deux figures. Nous envisageons trois hypothèses qui ont pu amener ce professeur à proposer des problèmes de cette nature dans cette étape de la séquence. La première est que le professeur a disposé de la copie complète de l'élève, où elle a résolu un problème de cette nature. La deuxième est que ces problèmes font partie de la « série de problèmes » que nous lui avons fournie. La dernière hypothèse concerne la nature du problème elle-même. En effet, un problème de construction de l'axe nécessite la reconnaissance de figures symétriques par rapport à une droite qui n'est pas tracée. Pour construire l'axe de symétrie d'une figure, l'élève doit d'abord identifier deux sous-figures symétriques et pour les identifier, il doit mettre en œuvre les propriétés de la symétrie. Comme le précise le professeur, il s'attend à ce qu'Anissa réinvestisse les connaissances dégagées dans les étapes précédentes (*les propriétés fondamentales*) ainsi que la propriété P_4, pour résoudre ces problèmes. Ceci montre une fois de plus que le professeur prend en compte les connaissances correctes disponibles chez l'élève dans la construction de son projet d'enseignement.

Le professeur termine sa séquence didactique en soulignant sa décision de ne pas montrer à Anissa les cas où un segment et son symétrique sont parallèles. Pour lui, si l'élève réussit cette séquence, cela *suffit pour une première remédiation.* Il ajoute que l'étude de ce cas serait l'objet de la prochaine étape de son projet d'enseignement. En effet, l'objectif de cette séquence n'a pas été de traiter tous les aspects de la symétrie, mais plutôt de faire évoluer la conception initiale d'Anissa vers une conception intermédiaire où ni les contrôles par le parallélisme des segments, ni la direction horizontale ne feront plus partie de sa structure de contrôle.

Professeur 2

Prise d'information de l'activité sur l'élève

Propriétés identifiées par le professeur chez Anissa	Contrôles associés
Pour Anissa, la symétrie axiale semble être une transformation qui conserve les grandeurs (distance, angle)	Σtaille_1 Σforme
Elle l'associe au « glissement », donc à la translation	Σtranslation
Le « glissement » est majoritairement horizontal	Σhor

Tableau 70. Prof_2. : prise d'information sur l'activité d'Anissa

Notons que ce professeur identifie chez Anissa des connaissances correctes et erronées (du point de vue des mathématiques), à propos de la symétrie orthogonale. Les connaissances correctes sont relatives à la conservation des longueurs des segments et des mesures des angles par cette symétrie. Les connaissances erronées relèvent de la confusion de la symétrie avec le glissement (la translation) dans la direction horizontale.

Séquence Didactique

Extraits du questionnaire du Prof_2	Problème	Objectif
En premier lieu par pliage, transparence (ou calque) j'associerais le Pb 01 et la figure 1 (figure-flèche) de manière à faire retrouver la flèche bleue à Anissa. *Il lui faudra faire les observations suivantes :* *- les oiseaux face à face* *- la flèche s'écartant de l'axe d* *- perpendicularité par rapport à la droite d (équerre)* *- égalité des distances* *de A à l'axe et de A' à l'axe, de B à l'axe et de B' à l'axe (utilisation du compas)*[55]	Pb-flèche	Amener l'élève à prendre conscience de la non validité de sa procédure, en dégageant Σsens_inverse, par la mise en œuvre de Σpliage_2 et Σcalque_1 Amener l'élève à dégager les contrôles Σortho et Σdist
	Pb 01	
Pour vérifier que l'image du symétrique prend corps dans son esprit	Construire figures symétriques à main levée (cf. Figure 99)	Établir un nouveau diagnostic
Recherche du symétrique d'un point sur quadrillage sans pliage, sans calque - utilisation de l'équerre pour vérification – de la règle graduée	Pb 15	Renforcer les contrôles Σortho et Σdist Amener l'élève à dégager le contrôle Σpoint_invariant (Pb 07)
Idée analogue sur Pb 07 mais sur une figure, et l'observation du point D qui est sur l'axe et qui a pour symétrique D	Pb 07	
Faire énoncer les raisons pour lesquelles la symétrie n'est pas vérifiée *Anissa doit comprendre son erreur sur la figure 4* (figure-maison) *et se corriger avec le Pb 18*	Pb 02	Amener l'élève à énoncer les propriétés d'orthogonalité, égalité des distances et invariance des points sur l'axe
	Pb 18	
Exercices d'entraînement	Pb 04	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho, Σdist et Σpoint_invariant
	Pb 06	

Tableau 71. Prof 2 : séquence didactique proposée pour Anissa

Comme pour le Prof_1, la première décision de ce professeur est de reprendre avec Anissa ses réponses de la copie aux problèmes de reconnaissance de figures symétriques. En proposant l'utilisation du pliage et du calque, son but est d'amener Anissa à comparer sa réponse au

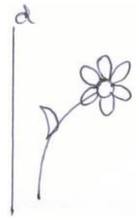
[55] Nous nous sommes référés à cet extrait pour présenter la méthodologie d'analyse.

problème flèche (flèche verte) avec la figure du « Pb 01 », où il est dit que les deux figures données sont symétriques. Comme nous l'avons montré plus haut, cette comparaison peut servir à conduire Anissa à prendre conscience de la non validité de sa procédure, en l'amenant à dégager le contrôle Σsens_inverse. De plus, en utilisant les instruments de dessin, Anissa pourra constater la perpendicularité à la droite d des droites qui relient les points objet et image et la conservation des distances des points à l'axe.

Le professeur propose ensuite un problème de construction du symétrique de figures à main levée. Soulignons que ce problème n'est pas dans la série de problèmes fournie :

Compléter à main levée pour que d soit axe de symétrie :

Situation 1



Situation 2

Figure 99. Problème de construction de figures symétriques à main levée

Le professeur cherche ainsi à *vérifier que l'image du symétrique prend corps dans son esprit* (d'Anissa). Il s'agit donc d'une évaluation des connaissances d'Anissa au cours du processus d'enseignement. Notons que la figure de la *situation 2* a un point invariant sur l'axe. Rappelons que dans la résolution du problème-segment par Anissa, le contrôle Σpoint_invariant est absent. Ainsi, même si dans sa prise d'information ce professeur ne se réfère pas à la non mobilisation de cette propriété chez Anissa, nous faisons l'hypothèse que celle-ci pourrait être un objectif de son projet d'enseignement. Ceci pourrait montrer un aspect de la connaissance mathématique du professeur, pour qui l'invariance des points sur l'axe est une propriété indispensable de la symétrie, donc une des premières à enseigner, indépendamment de ce qu'il observe dans l'activité de l'élève.

Ensuite, le professeur propose des problèmes de reconnaissance de points symétriques sur quadrillage (Pb 15 et Pb 07), à résoudre en utilisant la règle graduée et l'équerre. Comme il l'affirme, ces instruments de dessin doivent être utilisés dans un but de *vérification*. Ils fonctionneraient comme outil pour la mise en œuvre de contrôles liés aux propriétés de la symétrie. En proposant le problème « Pb 07 » (cf. p. XVII), le professeur explicite son objectif de faire émerger chez Anissa la propriété d'invariance des points sur l'axe : *[...] idée analogue sur Pb 07 mais sur une figure et l'observation du point D qui est sur l'axe et qui a pour symétrique D.* Ceci confirme notre hypothèse ci-dessus.

L'étape suivante du processus d'enseignement a pour objectif d'amener Anissa à énoncer les propriétés de la symétrie orthogonale, notamment l'orthogonalité et l'égalité des distances de points à l'axe. Pour cela, le problème proposé est « Pb 02 » où il s'agit de se servir des propriétés de symétrie pour expliquer pourquoi deux figures données ne sont pas symétriques. Le professeur explique qu'en résolvant ce problème, Anissa doit comprendre son erreur sur la figure-maison. Nous supposons qu'il s'attend à ce qu'Anissa ne réalise plus un glissement (une translation) de la figure initiale, mais plutôt qu'elle soit déjà capable d'expliquer les raisons pour lesquelles les figures données dans ce problème ne soient pas symétriques. Ensuite, dans le but de permettre à Anissa de corriger son erreur commise dans la figure-maison, il propose le problème « Pb 18 ». En effet, ce problème est assez proche du problème maison, dans le sens que la figure donnée à construire est également une maison.

Ensuite, le professeur propose les problèmes qu'il classifie comme des *exercices d'entraînement* : « Pb 04 » (construction de figures symétriques) et « Pb 06 » (reconnaissance et construction d'axe de symétrie). Il ne donne pas les raisons de son choix. Les variables en jeu dans les problèmes sont les suivantes : nature du problème (construction de la figure symétrique et construction et reconnaissance de l'axe de symétrie respectivement), nature de F (complexe), intersection de la figure avec l'axe (touche et coupe en Pb 04) et spécificité de F (ne possède pas d'axe de symétrie). Compte tenu de ces variables en jeu dans les problèmes, nous pensons que le professeur veut amener Anissa à réinvestir les contrôles Σortho, Σdist, Σpoint_invariant, et éventuellement Σsens_inverse.

Le professeur signale encore qu'après avoir effectué les constructions, Anissa doit utiliser soit le papier calque, soit le pliage comme moyen de *vérifier l'exactitude de ses constructions,* tout au long de la séquence. En effet, l'utilisation de ces techniques peut lui permettre de contrôler ses constructions par superposition des figures.

Professeur 3

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Au vu de la production d'Anissa, le professeur considère deux cas :

Cas 1) Anissa a déjà étudié la translation

Extraits du questionnaire du Prof_3	Contrôle associé
Anissa sait que la symétrie correspond à un pliage, mais ne contrôle pas ni mentalement ni physiquement son affirmation.	Σpliage_1
Anissa parle de flèches qui vont dans le même sens. Les flèches qui vont dans le même sens sont vues à propos de la translation.	Σtranslation
Pour tous les autres tracés, 3 et 4, Anissa effectue une translation horizontale (parallèle à un bord)	Σtranslation, Σhor

Le parallélisme est prégnant [...]. L'axe passe au milieu des 2 coins de maisons en bas. Mais cette connaissance s'efface devant la prégnance du parallélisme dans 3) : il n'était pas possible de faire passer l'axe « au milieu » tout en dessinant les 2 segments parallèles	Σparallélisme_segment Σdist Σdemi_plan

Tableau 72. Prof_3 : Prise d'information sur l'activité d'Anissa dans le cas où elle a étudié la translation

Cas 2) Anissa n'a pas étudié la translation

Extraits du questionnaire du Prof_3	Contrôle associé
Ses images mentales liées à la symétrie sont à revoir. Il se trouve qu'elles recouvrent des images mentales liées à la translation	Σtranslation

Tableau 73. Tableau 74. Prof_3 : Prise d'information sur l'activité d'Anissa dans le cas où elle n'a pas étudié la translation

Notons que dans la prise d'information sur l'activité d'Anissa, le professeur s'appuie sur ses connaissances des programmes des classes de collège. Sachant qu'Anissa est une élève de classe de quatrième et ayant pris connaissance de ses réponses aux problèmes, il se demande si elle a déjà étudié la translation ou non.

Dans le premier cas, le professeur suppose qu'Anissa a pu confondre ses nouvelles connaissances, celles de la translation, avec les anciennes, celles de la symétrie. Dans le deuxième cas, *les images mentales* de la symétrie chez Anissa seraient liées à la *translation*.

Comme il ne connaît pas l'histoire « scolaire » de l'élève, il propose deux séquences didactiques différentes, une pour chaque cas.

Séquences didactiques

Cas 1) Anissa a étudié la translation

Dans ce cas, le professeur prend les décisions didactiques dans le but de permettre à Anissa de dissocier les connaissances de ces deux transformations :

Extraits du questionnaire du Prof_3	Problème	Objectif
Faire travailler Anissa sur les 2 transformations à la fois *Reconnaître, distinguer en utilisant le vocabulaire lié aux transformations* *Vérifier physiquement*	Manipuler des figures découpées : une figure, une translatée et une symétrique	Amener l'élève à reconnaître et distinguer la symétrie orthogonale de la translation
Faire faire des dessins à main levée *Faire évoquer mentalement l'action de pliage et de glissement*	Dessiner à main levée des symétriques et des translatées de figures	

Tableau 75. Prof_3 : Séquence didactique proposée pour Anissa dans le cas où elle a déjà étudié la translation

Notons que les situations proposées s'appuient sur la manipulation et les tracés des images de figures à main levée. La manipulation devrait permettre de dégager des images mentales associées à chacune des deux transformations, et les tracés à main levée nécessitent leur mobilisation de ces images pour anticiper la réponse.

Cas 2) Anissa n'a pas étudié la translation

Dans ce cas, son objectif principal est la mise en relation de la symétrie avec le pliage. La séquence didactique proposée est alors la suivante :

Extraits du questionnaire du Prof_3	Problème	Objectifs
On ne travaille cette fois que sur la symétrie qui devrait être mise en relation avec le pliage	Pb 01	Amener l'élève à re-dégager le pliage comme opérateur et moyen de contrôle
- image globale *- remise en cause des images actuelles*	Pb 17 Pb 12	Déstabiliser le contrôle Σtranslation
- approche plus « fine » sur quadrillage *- mise en relation de points*	Pb 02 Pb 07 Pb 16 Pb 15	Amener l'élève à mettre en relation un point et son symétrique
- tracés (demander d'abord une anticipation globale) *- vers l'énoncé des propriétés <u>et</u> usage*	Pb 18 Pb 04 Pb 08, etc.	Amener l'élève à formuler et réinvestir les propriétés dégagées

Tableau 76. Prof_3 : Séquence didactique proposée pour Anissa dans le cas où elle n'a pas étudié la translation

Avant de présenter cette séquence, le professeur signale que la symétrie doit être mise en relation avec le pliage, tout au long de l'activité. Il propose que le pliage serve dans la résolution des problèmes soit pour *effectuer la symétrie*, c'est à dire comme un outil pour l'action permettant de transformer le problème initial (opérateur) : soit pour *vérifier (au départ ou après coup)*, c'est à dire comme moyen de contrôle dans la planification de la tâche ou la vérification après exécution de cette tâche, ou soit encore pour anticiper une action, c'est à dire comme moyen de contrôle permettant de planifier la tâche. Pour cette raison, il donne les figures sur un support qui permet le pliage effectif.

Le premier problème proposé (Pb 01) dans cette séquence d'enseignement vise à amener Anissa à re-dégager cette mise en relation : symétrie/pliage. D'après le Prof_3, ce problème permet l'utilisation du pliage pour *vérifier au départ*. Il ne donne plus d'explications à propos de ce choix. Cependant, nous pouvons supposer qu'il s'appuie sur le fait qu'il est dit dans la consigne que les figures sont symétriques pour atteindre ce but. En s'appropriant cette relation, Anissa pourrait l'utiliser comme un outil pour l'action (un opérateur) ou comme un moyen de contrôle (Σpliage_2). Étant donné que le pliage occupe une place privilégiée dans l'enseignement de la symétrie, nous supposons que cette décision du professeur s'appuie sur ses connaissances des programmes et instructions officiels. Ensuite, en envisageant qu'Anissa se serve du pliage en tant qu'opérateur et/ou moyen de contrôle, ses décisions sont prises dans le but de remettre *en cause des images actuelles* qui pour lui, sont liées à l'image d'une *translation*, autrement dit déstabiliser le contrôle Σtranslation. Dans cet objectif, il propose « Pb 12 » et « Pb 17 », en insistant toujours sur le pliage. Pour la figure de l'« item a » du « Pb 12 », le professeur s'attend à ce qu'en mobilisant le pliage comme opérateur, Anissa puisse constater que le parallélogramme ne possède pas d'axe de symétrie. De même, il s'attend à ce que l'utilisation du pliage dans le problème « Pb 17 » puisse amener Anissa à se rendre compte que deux segments parallèles ne sont pas forcément symétriques par rapport à cette droite. C'est ce qui nous amène à penser que le professeur cherche ainsi à déstabiliser le contrôle Σtranslation et par ce biais, le contrôle Σparallélisme_segment.

Le professeur passe ensuite à une nouvelle phase de la séquence, qu'il appelle *une approche plus fine sur quadrillage*. Il cherche à amener Anissa à dégager les propriétés de la symétrie orthogonale, sans pour autant perdre de vue la relation symétrie/pliage. Pour cela, le professeur propose à Anissa une série de problèmes (Pb 02, Pb 07, Pb 16 et Pb 15) dans le but de la faire travailler sur la mise en relation des points (objet et image) par la symétrie orthogonale. Enfin, il propose une série « ouverte » de problèmes (Pb 18, Pb 04, Pb 08…). Les problèmes cités concernent la reconnaissance et/ou construction de figures symétriques. Les explications données par le professeur sont seulement celles montrées dans l'extrait ci-dessus : *tracés (demander d'abord une anticipation globale) ; vers l'énoncé des propriétés <u>et</u> usage*. Il s'agit certainement de réinvestissement par Anissa des connaissances dégagées dans les étapes précédentes (pliage et propriétés de la symétrie).

<u>Professeur 4</u>

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _4	Contrôles associés
L'axe de symétrie doit plus ou moins partager la figure entre une partie gauche et une partie droit.	Autre : contrôle lié à la construction de l'axe
Validation du caractère symétrique par 2 aspects. *(i)Par l'existence de côtés parallèles d'un côté et de l'autre, voire par la possibilité de passer de l'une à l'autre par translation.* *(ii) Apparemment, nécessité d'une deuxième validation par la prise en compte, de façon mal définie, d'une*	Σparallélisme_segment Σdemi_plan Σtranslation

égalité de distances des 2 parties par rapport à l'axe : *- peut être distance moyenne (Exe 1 et 2) ;* *- la longueur du morceau d'axe entre les 2 segments symétriques semble être égale à la longueur du bout de segment qui dépasse par dessus (Exe 3) ;* *- la distance à l'axe (mesuré horizontalement) de la base des maisons est la même.*	Σdist (globale) Σhor

Tableau 77. Prof_4 : Prise d'information sur l'activité d'Anissa

Tout d'abord le professeur identifie qu'Anissa reconnaît que les figures objet et image sont situées d'un côté et de l'autre de l'axe de symétrie, mais seulement dans le cas où l'axe de symétrie ne coupe pas la figure. Ceci renvoie à l'identification d'un contrôle lié à la construction de l'axe que nous n'avons pas formalisé, étant donné que cette problématique est en dehors du champ de notre recherche. Par ailleurs, le professeur observe que la reconnaissance de figures symétriques par Anissa est effectuée, d'une part par le parallélisme des segments correspondants et/ou la translation de la figure, dans la direction horizontale ; et d'autre part par l'égalité des distances des points à l'axe. Cependant, il perçoit que l'égalité des distances chez Anissa varie en fonction des variables du problème résolu. A ce propos, il envisage les cas suivants :

- dans la reconnaissance de figures symétriques, cette distance correspond à une distance moyenne. Lors de l'entretien, il explique ce qu'est pour lui une distance moyenne : *une distance prise à vue d'œil* / *la figure image n'est pas très éloignée* / *le milieu de la flèche, par exemple, est à peu près à la même distance de chaque côté [...]* ;
- dans la construction de la figure-segment, cette distance correspond à la longueur du morceau d'axe entre les 2 segments symétriques ;
- dans la construction de la figure-maison, cette distance correspond à *la distance à l'axe de la base des maisons* (mesurée horizontalement).

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_4	Problème	Objectif
Choix non justifié dans le questionnaire	Pb 01	Amener l'élève à dégager les contrôles Σortho et Σdist
- dire d'abord si oui ou non, B est le symétrique de A en vérifiant par pliage *- l'enseignant fait le point […]* *- en prenant comme modèle la figure c, construis à l'équerre et à la règle graduée le symétrique A' de A pour les figures a), b) et d)* *- l'enseignant incite enfin à vérifier par pliage*	Pb 08 modifié	Montrer un modèle pour être utilisé par la suite dans la résolution d'un autre problème
Comme consolidation du nouvel acquis	Pb 15	Consolider le nouvel acquis : amener l'élève à mettre en œuvre les

l'élimination de B comme symétrique de A peut préparer le terrain à refaire correctement l'exercice 4) (figure-maison)		contrôles Σortho et Σdist, et aussi Σpliage_2
Pour tendre à défaire l'idée que 2 segments symétriques sont parallèles nécessairement [...] *Le professeur incite à valider ceci par pliage, et par la propriété correcte « de distances égales » mise en évidence grâce au Pb 08 (modifié)*	Pb 17	Amener l'élève à formuler la propriété que deux segments parallèles ne sont pas forcément symétriques : déstabiliser Σparallélisme_segment Amener l'élève à utiliser Σpliage_2 comme moyen de validation
Je modifierais le d) pour que les maisons soient symétriques (avec l'axe oblique) *Et la consigne : Dans 3 des cas il n'y a pas de symétrie. Indique pourquoi.*	Pb 02 modifié	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho et Σdist
Je nommerai d'abord A le coin de la maison le plus près de l'axe. Ferait faire construire son symétrique A' en précisant que l'instrument de construction est l'équerre et la règle graduée	Pb 18 modifié	

Tableau 78. Prof_4 : Séquence didactique proposée pour Anissa

Comme premier problème de cette séquence, le professeur propose « Pb 01 ». Il explique que tout au début de la construction de son projet il avait éliminé ce problème, mais qu'ensuite il est revenu sur sa décision et propose ce problème au tout début de la séquence d'enseignement. Cependant, il ne précise pas les raisons qui l'ont amené à changer sa décision. Lors de l'entretien, nous lui avons donc demandé ses raisons. Sa réponse est la suivante :

Extrait de l'entretien : *L'idée, c'est d'amener l'élève à voir qu'il y a un angle droit ici* (l'intersection de [AA'] avec la droite d) *et que les longueurs sont les mêmes ici de chaque côté... c'était un petit peu abrupt, le travail avec le problème 8* (Pb 08). *Alors, on fait observer à l'élève ces propriétés pour qu'il puisse construire un tout petit peu ces choses-là / s'approprier ces propriétés qui ont été un peu parachutées... dans le problème 8* [...].

Le professeur se réfère au « Pb 08 » car c'est ce problème qu'il avait choisi pour commencer sa séquence. En se rendant compte de la complexité de ce problème, il a donc décidé de faire un travail préparatoire pour permettre à Anissa de dégager les propriétés de la symétrie (orthogonalité à l'axe et égalité de distances des points à l'axe) et ensuite à les mettre en œuvre pour résoudre le problème « Pb 08 ».

Le problème suivant est donc « Pb 08 ». Cependant, le professeur propose une modification dans ce problème. D'après lui, ce problème doit être travaillé avec Anissa de la manière suivante :

- Anissa doit d'abord utiliser le pliage. Cette utilisation peut lui permettre d'« anticiper » si le point B est symétrique de A, pour chaque figure ;
- Puis, le professeur souhaite faire le point sur les réponses de l'élève, en commençant par l'item c qui est le seul cas où B est symétrique de A / [AB] est perpendiculaire à (d), alors (d) passe par le milieu de [AB] ;
- Ensuite, en prenant comme modèle la figure de l'« item c », il propose à Anissa de construire l'image du point A dans les autres items du problème, en utilisant l'équerre et la règle graduée ;
- Enfin, il demande d'utiliser à nouveau le pliage comme moyen de vérification.

Les étapes proposées visent à apprendre à Anissa à se servir des propriétés de la symétrie pour construire le symétrique d'un point. Nous pensons avoir repéré ici une caractéristique de la pratique de ce professeur, qui pourrait indiquer que sa conception d'enseignement/apprentissage est celle de guider l'élève dans son apprentissage. Notons que cette conception correspond à celle indiquée par le professeur dans sa « fiche de l'enseignant » comme la plus favorable à l'apprentissage. Dans l'objectif d'avoir plus d'informations à ce propos, nous avons demandé au professeur d'expliquer plus précisément les raisons des modifications apportées au problème initial. Voici un extrait de la réponse donnée par le professeur :

Extrait de l'entretien : *On a mis quelques étapes* [...] *des étapes, c'est pas forcément très, très bien* [...]. *C'est vrai qu'une partie du travail est tout mâché pour l'élève ... sans que l'élève cherche* [...] *et là, on lui donne tout. Tout mâcher... est un petit peu conditionner l'élève... peut être que s'il est conditionné, il arrivera à faire quelque chose d'analogue dans une situation semblable, après. Donc ça... ça n'est pas extraordinaire, mais ça peut permettre aux élèves de faire quelque chose dans un exercice comme ça* [...]. *D'ailleurs on fait souvent comme ça en sixième dans les exemples de démonstration... les premières démonstrations sont en sixième avec les propriétés* [...]. *Tout est détaillé* [...].

Notons d'abord que le professeur s'appuie sur son expérience d'enseignant pour prendre cette décision à l'égard d'Anissa. Puis, il considère que, même si le guidage a des limites, il sait qu'il fonctionne dans certains cas. Ainsi, les connaissances qui interviennent dans sa décision relèvent de son expérience d'enseignant.

Il propose ensuite à Anissa de résoudre le problème « Pb 15 » dans le but de l'amener à consolider les nouvelles connaissances. A partir de l'identification par Anissa du symétrique d'un point, il envisage de *préparer le terrain* pour qu'Anissa puisse construire correctement le symétrique de la figure-maison. Son objectif était de permettre à Anissa de mener à bien la construction de l'image de la figure-maison, et de manière plus générale, l'image d'une figure complexe. Mais pour cela, il veut d'abord *qu'elle se défasse de l'idée que 2 segments* *symétriques sont nécessairement parallèles*. En d’autres termes, il faudra déstabiliser le contrôle Σparallélisme_segment identifié chez Anissa. Pour cela, il lui propose le problème « Pb 17 ». En effet, dans ce problème sont données trois figures, dont deux ont les segments objet et image parallèle entre eux. Ainsi, il nous semble que le professeur joue avec cette variable pour amener Anissa à formuler cette propriété. En effet, puisqu’il est dit dans la consigne qu’une seule figure, parmi les trois données, est symétrique, Anissa doit conclure que pour que les segments parallèles soient symétriques à la droite d, il faudra qu’ils soient également parallèles à cette droite. Il se peut alors que ceci corresponde à l’attente du professeur.

Le problème proposé ensuite est « Pb 02 ». Toutefois, le professeur propose de le modifier de la façon suivante : *Je modifierais le d) pour que les maisons soient symétriques (avec l’axe oblique)*. La nouvelle consigne est la suivante : *Dans 3 de ces cas, il n’y a pas symétrie. Indique pourquoi*. Comme il avait fait dans « Pb 08 » en apportant cette modification au problème initial, l’objectif du professeur était de mettre à disposition d’Anissa « un modèle » sur lequel l’élève pourrait s’appuyer dans la résolution du problème.

Enfin, le professeur propose « Pb 18 ». Toutefois, comme il l’avait fait avec les problèmes précédents, il modifie le problème de sorte qu’Anissa puisse avoir un point d’appui pour démarrer sa construction : *je nommerais d’abord A le coin de la maison le plus proche de l’axe. Ferais construire son symétrique A’ en précisant que les instrument de construction sont l’équerre et la règle graduée*. Lors de l’entretien, nous avons également demandé au professeur des informations complémentaires à propos de cette décision. Sa réponse est la suivante :

Extrait de l’entretien : *J’amorcerais un tout petit peu la construction...je mettrais un point A quelque part* [...]. *On ne laisse pas à l’élève toute la liberté... j’ai déjà donné des exercices de construction comme ça aux élèves...ça n’arrive en général pas en début de chapitre, c’est plutôt après, quand ils connaissent toutes les méthodes...enfin les méthodes que je donne...la méthode privilégiée c’est l’équerre et puis...la règle* [...]. *En fait, ça amorce la construction mais c'est-à-dire que l’élève, du coup, il fait un...et ça devient répétitif et...mais, dans un contrôle, par exemple, je mettrais pas le point*.

Cette explication confirme la préférence de ce professeur pour les situations de guidage dans sa pratique de classe. En effet, il ne laisse pas toute liberté à l’élève. L’indication d’utilisation de l’équerre et de la règle peut amener l’élève à penser immédiatement à la perpendicularité et à la conservation des distances. C’est donc une sorte de guidage. De plus, il guide l’élève vers une procédure de construction analytique : il travaille le symétrique d’un point, puis dans une figure complexe il propose de nommer un point proche de l’axe : pour amener l’élève à repérer les points dans une figure complexe pour construire son image analytiquement.

Professeur 5

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _5	Contrôles associés
Le mot pliage est écrit, mais il n'a aucune signification pour elle ...	(absence du contrôle Σpliage_2)
...car elle effectue des glissements horizontaux (confusion avec la translation qui est au programme de quatrième ?).	Σhor Σtranslation

Tableau 79. Prof_5 : Prise d'information sur l'activité d'Anissa

Comme le Prof_3, ce professeur se demande si Anissa a déjà étudié la translation en classe de quatrième. Il suppose que les connaissances mises en œuvre par Anissa peuvent être le résultat d'une confusion entre la symétrie orthogonale et la translation. Comme le montre le tableau ci-dessus, ce professeur ne met en évidence que des connaissances erronées (du point de vue des mathématiques) mises en oeuvre par Anissa. Ainsi, dans le but de construire son projet d'enseignement, sa première décision est : *tout est à retravailler*. Pour cela, la séquence didactique proposée est la suivante :

Séquence didactique

<table>
<tr><th colspan="3">Extraits du questionnaire du Prof_5</th><th>Problème</th><th>Objectif</th></tr>
<tr><td colspan="3">Les figures ne sont pas symétriques, c'est écrit… donc son exercice 4 est faux (ce doit être sa conclusion) (à l'oral)</td><td>Pb 02
(item a)</td><td rowspan="4">Phase « yeux » :
Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec pliage par rapport à l'axe : dégager Σpliage_2
Amener l'élève à prendre conscience de la non validité de sa procédure
Amener l'élève à dégager Σortho, Σdist, et Σsens_inverse</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les figures sont symétriques. On a plié suivant quelle droite ? On a effectué une symétrie par rapport à… (dialogue proposé par le professeur)
On remarque à nouveau que les oiseaux sont face à face et pas « dans le même sens » : pas de glissement.
- Elle répond aux questions posées en visualisant l'orthogonalité et les distances égales (codage marqué)
En masquant le texte, je lui proposerais de tourner la feuille et de visualiser la figure quand l'axe est horizontal, vertical.</td><td>Pb 01</td></tr>
<tr><td colspan="3">réponses b. c. d. à me donner (à l'oral).
Je lierais le c au reflet de la maison dans l'eau</td><td>Pb 02 (b, c, d)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Toujours à l'oral mais sans justification (bien avec sa réponse 3)</td><td>Pb 17</td></tr>
<tr><td>La phase des</td><td>Symétrique</td><td>Avec</td><td>Pb 15</td><td>Amener l'élève à</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5">« yeux » étant terminée, elle doit apprendre à construire des images
(à l'équerre)</td><td rowspan="2">d'un point</td><td>quadrillage</td><td>Pb 07</td><td rowspan="5">réinvestir les contrôles Σortho, et Σdist et Σsens_inverse
Vérifier à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles : établir un nouveau diagnostic</td></tr>
<tr><td>Sans quadrillage</td><td>Pb 08</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Symétrique d'une figure
Pb 04 : commencer par c. puis a, puis b et je vérifierais à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles.</td><td>Construction du symétrique d'un triangle</td></tr>
<tr><td>Pb 04</td></tr>
<tr><td>Pb 18</td></tr>
</table>

Tableau 80. Prof_5 : Séquence didactique proposée pour Anissa

La première étape de son projet d'enseignement est appelée *phase des yeux* par le professeur. Pour cela, il propose un travail à l'oral tout d'abord avec la figure de l'« item a » du problème « Pb 02 », puis avec « Pb 01 », et ensuite il revient sur les « items b, c et d » du « Pb 02 ».

Pour donner plus de précisions à propos de sa décision de travailler en s'appuyant sur la visualisation, nous avons interrogé le professeur lors d'un entretien. Voici un extrait de sa réponse :

Extrait de l'entretien : *L'enfant, elle confondait le symétrique avec un glissement. Donc l'objectif était juste de faire remarquer que ça n'a pas glissé, sinon l'animal serait tourné dans l'autre sens* (figure problème Pb 01). *[...]. Les élèves sont très, très visuels [...] je crois que je me suis vraiment mis dans la tête que c'était une enfant qui avait vraiment de très grosses difficultés... et qu'elle n'a pas du tout assimilé ce qu'était la symétrie... Donc, dans la mesure où il n'avait plus rien... voire même quelque chose de faux... c'est vrai que mon objectif n'était pas de passer tout de suite à la ma-thé-ma-ti-sation – enfin... le terme n'est pas bon... tu vois ce que je veux dire. Donc... appuyer énormément sur le visuel et après commencer à voir l'orthogonalité et la distance à l'axe*.

Comme le Prof_1, ce professeur considère que les élèves sont très *visuels*. Alors, il s'appuie sur cette connaissance du fonctionnement des élèves pour montrer à Anissa que la symétrie orthogonale ne correspond pas à un glissement. Pour cela, le professeur a choisi des figures qui représentent des objets réels identifiables et qui ne possèdent pas d'axe de symétrie. Il nous semble qu'il s'appuie sur ces variables pour atteindre son but qui est de montrer à Anissa que cette propriété est fausse. Ceci peut mener à la déstabilisation du contrôle erroné lié à la translation. De plus, étant donné qu'il démarre un processus d'enseignement de cette notion mathématique chez Anissa, le travail appuyé sur le visuel peut lui permettre par la suite d'introduire l'enseignement des propriétés mathématiques.

Pour travailler cette phase de la séquence, le professeur prend une décision qui semble fondamentale pour son projet d'enseignement : il décide de conduire un travail à l'oral avec Anissa. Lors de l'entretien, nous lui avons demandé plus de précisions sur cette décision. Voici un extrait de sa réponse :

Extrait de l'entretien : *Parce que s'il y a une erreur, elle n'est pas écrite là* (sur le papier) *[...]. Donc... à mon avis... il me semble qu'elle s'efface plus vite de la tête de l'enfant : première chose. Deuxième chose, ils n'aiment pas trop écrire... ils ont des difficultés avec l'écriture [...]. Ils disent quelque chose et immédiatement moi je peux soit leur poser des questions concernant, soit... alors que quand c'est à l'écrit, il faut déjà donner du temps [...]. A l'oral, on peut quand même questionner beaucoup l'élève*.

De cet extrait, nous retenons plusieurs éléments. Le professeur propose un travail à l'oral d'abord parce qu'il connaît le fonctionnement de l'élève : *s'il y a une erreur, elle n'est pas écrite*. Ceci pourrait éviter que l'erreur « se fixe dans la tête » de l'élève. Il sait également que les élèves n'aiment pas écrire, et qu'oralement ils auraient plus de facilité pour répondre aux questions du professeur. Par ailleurs, puisque le travail à l'oral permet l'interaction avec plusieurs élèves à la fois, ceci permet au professeur de gagner du « temps ». Comme nous pouvons le constater, toutes ces connaissances sur lesquelles le professeur s'appuie pour prendre ses décisions sont fondées sur son expérience de l'enseignant, sa connaissance des élèves, et aussi du fonctionnement de la classe.

En choisissant « Pb 01 », le professeur envisage de conduire avec Anissa le dialogue suivant : *les figures sont symétriques. On a plié suivant quelle droite ? On a effectué une symétrie par rapport à...* Cette démarche peut être interprétée comme une sorte d'« effet Topaze » (Brousseau 1998), dans le sens où le professeur choisit des questions auxquelles la réponse correcte peut être donnée facilement par l'élève. Puis, il propose à Anissa d'observer que les figures objet et image (*les oiseaux*) sont face à face pour amener Anissa à conclure qu'il ne peut s'agir d'un glissement, comme sa conception l'y ferait penser. Nous pouvons interpréter ce but comme celui de déstabiliser le contrôle Σtranslation. Avec la même activité, il masque le texte (l'énoncé du problème), et propose de tourner la feuille de papier en mettant l'axe de symétrie dans l'orientation verticale et horizontale. Nous avons demandé au professeur plus de précisions à propos de ces choix. Il explique qu'en proposant de mettre l'axe dans la position verticale, il souhaitait transformer la situation, en une *situation, classique* où les élèves font moins d'erreurs, en général. En ce qui concerne sa décision de *masquer le texte*, il explique qu'une fois que l'axe serait dans l'orientation verticale, le texte se retrouverait penché. D'après lui, ceci pourrait être un élément perturbateur pour Anissa. Ces deux derniers choix pourraient indiquer que ce professeur avait l'intention d'éviter l'erreur chez Anissa et de la mettre ainsi dans une situation de succès.

Après cette étape du travail effectué en s'appuyant sur l'aspect visuel de la symétrie, le professeur passe à une autre étape, où Anissa doit *apprendre* à construire des figures symétriques. Pour cela, il propose tout d'abord des problèmes sur le quadrillage et l'utilisation de l'équerre. Anissa doit identifier les points symétriques, et puis construire ces figures. Puis, il propose un problème qui ne figure pas dans la « série » où Anissa doit d'abord construire le symétrique d'un triangle par rapport à un axe vertical. Ensuite, le symétrique d'un triangle par rapport à un axe oblique. Le problème « Pb 04 » est ensuite proposé, cependant les figures doivent être construites dans l'ordre suivant : d'abord « item c », puis « item a » et enfin « item b ». D'après lui, le professeur cherche à complexifier le problème peu à peu. Il explique en quoi consiste cette complexification :

Extrait de l'entretien : *Je commencerais avec le quadrillage... ça peut aider, au départ.* [...] *après le triangle avant le « quatre »* (Pb 04)*... parce qu'il y a beaucoup de symétriques entre guillemets à construire. Je crois simplement qu'au lieu d'avoir cinq points, j'ai commencé par trois*. [...]. *Donc le triangle... trois points, ça me paraissait plus simple à faire* [...].

De plus, pour ce problème le professeur se propose de vérifier à chaque étape le travail d'Anissa dans le but d'*analyser* d'éventuelles erreurs. Nous pouvons interpréter cet objectif comme celui d'établir un nouveau diagnostic de la conception d'Anissa. Enfin, il propose le problème « Pb 18 ». Cependant, il suggère que ce problème doit être résolu par Anissa à domicile. Le professeur justifie cette décision :

Extrait de l'entretien : *je préfère à domicile parce qu'il y a quand même beaucoup de travail... et pour le faire en classe, ça prendrait un sacré temps !*

Nous voyons dans cette explication que pour prendre cette décision, le professeur situe son projet d'enseignement pour Anissa dans le contexte de son projet pour la classe. Il sait que cette activité prendra du temps car il y a beaucoup de symétriques de points à construire. Le professeur s'appuie une fois de plus sur ses connaissances sur le fonctionnement de l'élève et de la classe, pour prendre sa décision.

6.2.2. *Synthèse des résultats obtenus*

La prise d'information sur l'activité d'Anissa

Contrôles (Σ)	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Σdist					
Σhor					
Σtaille_1					
Σforme					
Σtranslation					
Σparallélisme_segment					
Σdemi_plan					
Σpliage_1					
Σpliage_2					absent
Autre contrôle				autre[56]	

Tableau 81. Prise d'information des professeurs sur l'activité d'Anissa : description en termes de contrôles

Le tableau ci-dessus montre la caractérisation de la structure de contrôle de la conception initiale, identifiée chez Anissa par les 5 professeurs participant à notre expérimentation. Pour les cinq professeurs, la symétrie orthogonale chez Anissa correspond à une translation de la figure dans la direction horizontale. Bien que la conservation des longueurs des segments, des mesures des angles et du parallélisme des segments correspondants soient implicites dans la translation, certains professeurs indiquent la prise en compte par Anissa de ces éléments dans ses réponses.

Pour le Prof_5, *le mot pliage n'a aucune signification* pour Anissa. Nous avons interprété cet argument du professeur par l'absence de contrôle Σpliage_2. Le Prof_3 suppose qu'Anissa sait que la symétrie correspond à un pliage, cependant cette connaissance est erronée. Nous avons traduit ce propos du professeur par l'identification du contrôle Σpliage_1.

Tous les professeurs, sauf le Prof_5, ont identifié des connaissances correctes (du point de vue des mathématiques) chez Anissa, malgré le fait que ses réponses soient toutes erronées. Ces contrôles relèvent de la propriété de conservation des distances, des longueurs des segments et des mesures des angles par la symétrie orthogonale. La prise en compte par Anissa du fait que les figures symétriques sont d'un côté et de l'autre de l'axe de symétrie, a été remarquée par trois professeurs.

[56] Contrôle lié à la construction d'axe de symétrie, non formalisé dans notre étude.

Projets d'enseignement

Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Amener l'élève à dégager Σcalque_1	Amener l'élève à prendre conscience de la non validité de sa procédure, en dégageant Σsens_inverse, par la mise en œuvre de Σpliage_2 et Σcalque_1	*Anissa a étudié la translation* : Amener l'élève à reconnaître et distinguer la symétrie orthogonale de la translation	Amener l'élève à dégager les contrôles Σortho et Σdist	Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec pliage par rapport à l'axe : dégager Σpliage_2
Déstabiliser Σparallélisme_segment et Σhor	Amener l'élève à dégager les contrôles Σortho et Σdist	*Anissa n'a pas étudié la translation* : Amener l'élève à re-dégager le pliage comme opérateur et moyen de contrôle	Montrer un modèle pour l'utiliser par la suite dans la résolution d'un autre problème	Amener l'élève à prendre conscience de la non validité de sa procédure, en dégageant Σsens_inverse
Amener l'élève à dégager Σortho et Σdist	Établir un nouveau diagnostic	Déstabiliser le contrôle Σtranslation	Consolider le nouvel acquis : amener l'élève à mettre en œuvre Σortho et Σdist, et aussi Σpliage_2	Amener l'élève à dégager Σortho et Σdist
Faire formuler les propriétés liées aux propriétés « fondamentales » : Σortho et Σdist	Renforcer les contrôles Σortho et Σdist	Amener l'élève à mettre en relation un point et son symétrique	Amener l'élève à formuler que deux segments parallèles ne sont pas forcément symétriques : déstabiliser Σparallélisme_segment	Vérifier à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles : établir un nouveau diagnostic
Renforcer les contrôles Σortho, Σdist et Σtaille	Amener l'élève à dégager le contrôle Σpoint_invariant	Amener l'élève à formuler et réinvestir les propriétés dégagées	Amener l'élève à utiliser Σpliage_2 comme moyen de validation	
Amener l'élève à réinvestir les connaissances anciennes et nouvelles : les contrôles Σdemi_plan, Σortho, Σdist et Σcalque_1	Amener l'élève à énoncer les propriétés d'orthogonalité, égalité des distances et invariance des points sur l'axe		Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho et Σdist	
	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho, Σdist et Σpoint_invariant			

Tableau 82. Objectifs des projets d'enseignement des professeurs : cas Anissa

Dans ce qui suit, nous allons essayer de caractériser la conception cible du projet didactique pour Anissa, vue par chaque professeur.

L'objectif du Prof_1 est d'enseigner à Anissa les *propriétés fondamentales* de la symétrie orthogonale, à savoir orthogonalité et égalité des distances. D'après sa conception d'enseignement/apprentissage, il est nécessaire d'amener l'élève à prendre conscience de l'insuffisance de ses connaissances anciennes avant de l'engager dans l'apprentissage de nouvelles connaissances. Il cherche alors à déstabiliser les contrôles erronés liés à la translation, la direction horizontale et le parallélisme des segments symétriques. Par ailleurs, il s'appuie sur les contrôles valides identifiés chez Anissa et cherche à les renforcer. Il nous semble alors que la structure de contrôle de la conception cible contiendrait les contrôles suivants : Σortho, Σdist (correspondant aux *propriétés fondamentales*), Σtaille_1, Σdemi_plan (contrôles corrects présents chez Anissa), Σcalque_1.

Le Prof_2 cherche également dans un premier temps à amener l'élève à se rendre compte que ses connaissances de la symétrie sont erronées. Pour cela, il l'amène à plier ou à décalquer la figure afin d'observer que la figure symétrique n'est pas obtenue par la translation, car elle a le sens inverse par rapport à la figure de départ. Dans un deuxième temps, il met en place une phase d'enseignement des propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances de la symétrie. Enfin, il amène l'élève à dégager la propriété de l'invariance des points sur l'axe de symétrie. Ainsi, la structure de contrôle de la conception visée contiendrait les contrôles suivants : Σortho, Σdist (correspondant aux propriétés de la symétrie), Σcalque_1, Σpoint_invariant.

Le Prof_3 part du constat que les images mentales relatives à la symétrie chez Anissa correspondent à la translation. Son objectif est donc d'une part de déstabiliser ces images mentales et d'autre part, de les remplacer par des images mentales correctes liées à la symétrie. Pour cela, il se sert du pliage. La conception cible serait donc celle caractérisée par le pliage, dont la structure de contrôle contient les contrôles suivants : Σpliage_2, Σortho, Σdist.

Le Prof_4 constate également que pour Anissa la symétrie correspond à une translation. C'est pourquoi il envisage une séquence d'enseignement pour lui enseigner les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances de la symétrie orthogonale dégagées par l'utilisation du pliage. Il suppose que grâce à ses nouvelles connaissances correctes, Anissa rejettera ses anciennes connaissances erronées, notamment celle liée au parallélisme des segments symétriques. La structure de contrôle de la conception visée contiendrait ainsi les contrôles suivants : Σortho, Σdist et Σpliage_2.

Le Prof_5 constate qu'Anissa ne sait rien sur la symétrie, car toutes les réponses qu'elle a fournies sont erronées. Dans un premier temps, comme le Prof_3, il cherche à développer chez Anissa des images mentales liées à la symétrie en s'appuyant sur le pliage. Il souhaite en particulier qu'Anissa prenne conscience que la symétrie inverse le sens de la figure. Dans la suite de la séquence, il cherche à faire dégager les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances. La conception cible devrait alors contenir les contrôles suivants : Σpliage_2, Σsens_inverse, Σortho et Σdist.

<u>Problèmes choisis</u>

Problème	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Pb 01					
Pb 02					
Pb 03					
Pb 04					
Pb 05					
Pb 06					
Pb 07					
Pb 08					
Pb 09					
Pb 10					
Pb 11					
Pb 12					
Pb 13					
Pb 14					
Pb 15					
Pb 16					
Pb 17					
Pb 18					
Pb-flèche					
Pb segment-losange					
Pb-segment					
Pb-maison					
Autres problèmes					

Tableau 83. Problèmes choisis par les professeurs dans les séquences didactiques pour Anissa

Les professeurs ont utilisé largement les problèmes de la « série » fournie. Les problèmes « Pb 01, Pb 02 et Pb 15 » ont été les plus indiqués par les professeurs, suivis de très près par le problème « Pb 18 ». Remarquons également que deux professeurs reprennent les problèmes déjà résolus par Anissa, et trois professeurs proposent des problèmes autres que ceux que nous leur avons fournis.

Cependant, il est à noter que plusieurs professeurs ont modifié les consignes initiales dans le but de les adapter aux objectifs visés. De plus, comme nous l'avons montré dans l'analyse, les variables didactiques prises en compte dans le choix des problèmes divergent également en fonction de ces objectifs. De même pour les instruments de dessin, techniques et moyens de validation mis à disposition des élèves. Pour illustrer ceci, montrons l'exemple du problème « Pb 01 » :

- Prof_1. Son objectif est de faire remarquer à Anissa les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe qui sont, pour lui, fondamentales concernant l'apprentissage de la symétrie orthogonale par Anissa. Son attente est qu'Anissa puisse constater la fausseté (ou non validité) de la propriété P3 (déplacement horizontal) et prendre conscience que l'égalité des distances des points à l'axe doit être conservée dans la direction orthogonale à l'axe. Compte tenu de cette attente, nous avons fait l'hypothèse qu'il s'appuie d'une part sur le fait que l'axe de symétrie de Pb 01 soit oblique, et aussi sur le « codage » sur la figure.
- Prof_2. En associant ce problème au problème-flèche et en indiquant l'utilisation du pliage et du calque, il cherche à amener Anissa à prendre conscience de la non validité de sa procédure, qui renvoie à un glissement horizontal. De plus, en indiquant l'utilisation de l'équerre et du compas, il s'attend à ce qu'Anissa puisse constater la perpendicularité à la droite « d » des droites qui relient les points objet et image, et aussi l'égalité des distances des points à l'axe. Il s'appuie sur le fait que F (figure) représente un objet réel identifiable, ne possède pas d'axe de symétrie (les *oiseaux* sont *face à face*), qu'elle soit codée et éventuellement, sur l'orientation oblique de l'axe.
- Prof_3. Son objectif étant d'amener Anissa à re-dégager la mise en relation symétrie/pliage, il se sert de ce problème pour qu'elle puisse *vérifier au départ*. Nous avons supposé qu'il ait pu s'appuyer sur le fait qu'il est dit dans la consigne que les figures sont symétriques, pour atteindre son but.
- Prof_4. Le but de ce professeur est de faire un travail préparatoire permettant à Anissa de dégager les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe. Pour cela, il s'appuie sur le codage sur la figure.
- Prof_5. Comme le Prof_2, ce professeur amène Anissa à observer que *les oiseaux sont face à face*, il envisage de l'amener à se rendre compte que la symétrie orthogonale ne correspond pas à un glissement. Pour cela, il s'appuie sur le fait que les élèves sont très *visuels*. Nous avons supposé dans le choix de ce problème, qu'il avait pu prendre en compte que la figure représentait un objet réel identifiable et qu'elle ne possède pas d'axe de symétrie.

Comme nous pouvons le constater dans cette brève analyse, dans la plupart des cas, l'association des variables didactiques aux choix des professeurs est faite par hypothèse, car elle n'a pas été explicitée par ces professeurs. Ceci nous a empêché de décrire les problèmes choisis en termes de variables didactiques, comme nous l'avons fait dans l'instanciation du modèle pour cette élève, présentée plus haut.

Connaissances intervenant dans la prise de décisions didactiques par les professeurs

Au cours de l'analyse, nous avons mis en évidence les connaissances qui ont pu intervenir dans la prise de décisions des professeurs. Les connaissances identifiées sont résumées pour chaque professeur dans les tableaux ci-dessous :

Professeur 1

Connaissances des programmes : symétrie et pliage
technique du calque
Connaissances des mathématiques propriétés fondamentales : orthogonalité et égalité des distances
la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : aspect visuel de la symétrie
Conception de l'enseignement/apprentissage on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes sont insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées avant d'en dégager de nouvelles) ;
amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes
on apprend à partir de ce qu'on sait déjà (appui sur les connaissances anciennes correctes)
apprentissage progressif (première remédiation dans un premier temps, avant de passer à des cas plus complexes)
la formulation favorise l'apprentissage
importance du réinvestissement des connaissances

Professeur 2

Connaissances des programmes : symétrie et pliage
technique du calque
Connaissances des mathématiques propriétés d'orthogonalité, d'égalité des distances et d'invariance des points
Conception de l'enseignement/apprentissage amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes
les connaissances nouvelles permettent d'invalider les anciennes
vérifier leur acquisition au cours de l'apprentissage (établir un nouveau diagnostic)
la formulation favorise l'apprentissage
importance du réinvestissement des connaissances

Professeur 3

Connaissances des programmes : symétrie et pliage
manipulation
apprentissage de transformations, au collège
Connaissances des mathématiques

la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage
Conception de l'enseignement/apprentissage on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes connaissances sont insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées avant de dégager d'en nouvelles)
anticipation de l'action à réaliser
la formulation favorise l'apprentissage
importance du réinvestissement des connaissances

Professeur 4

Connaissances des programmes : symétrie et pliage
Connaissances des mathématiques propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : Les situations de guidage fonctionnent en certains cas
Conception d'enseignement/apprentissage L'élève apprend à partir des exercices progressifs ; le professeur guide l'élève dans leur réalisation en proposant des étapes, des méthodes ; « mâcher » le travail de l'élève pour lui faciliter la tâche
le contrôle des pré-requis permet de prendre des décisions par rapport à l'opportunité d'engager l'élève dans un nouvel apprentissage
lorsque l'élève a réussi un exercice, il doit réussir tout exercice qui met en jeu le même savoir
mobilisation de connaissances nouvelles pour déstabiliser des connaissances erronées
la formulation favorise l'apprentissage
importance du réinvestissement des connaissances

Professeur 5

Connaissances des programmes : symétrie et pliage
Connaissances des mathématiques propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignement et du fonctionnement des élèves : Les élèves sont très visuels (s'appuyer sur la visualisation avant de passer à la mathématisation), efficacité du travail à oral, gagner du temps)
Conception d'enseignement/apprentissage en cas d'échec de l'élève, le professeur doit envisager de tout recommencer
le professeur prépare des exercices progressifs (construction d'un point symétriques, deux points...)
importance du réinvestissement des connaissances
vérification régulière des acquis de l'élève : établir un nouveau diagnostic

Connaissances des programmes

En suivant les recommandations des programmes scolaires, tous les professeurs privilégient la nécessité d'aborder la symétrie par le pliage

Connaissances mathématiques

Dans leurs projets d'enseignement de la symétrie orthogonale pour Anissa, les professeurs privilégient des entrées mathématiques différentes :

- Prof_1 privilégie une entrée par les propriétés de l'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe, qu'il les appelle *propriétés fondamentales*. Prof_4 et Prof_5 privilégient également cette entrée-là. Le Prof_4, par le biais de l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée dans la construction des figures symétriques. Le Prof_5 semble mettre l'accent plutôt sur l'orthogonalité étant donné qu'il recommande seulement l'utilisation de l'équerre dans la construction de symétrique des figures ;
- Prof_2 ajoute à ces deux propriétés celle de l'invariance des points sur l'axe de la symétrie ;
- Prof_3 privilégie l'enseignement de la symétrie par la superposition de figures par pliage.

Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves

Trois professeurs semblent s'appuyer sur ce type de connaissances pour prendre leurs décisions didactiques. Le fait que les élèves soient très visuels est remarqué par les Prof_1 et Prof_5. Le Prof_5 propose un travail à l'oral, car il connaît son efficacité. Le Prof_4 propose des situations de guidage, en affirmant que même s'il est conscient des limites de cette approche il sait qu'elle fonctionne dans certains cas.

Conception d'enseignement/apprentissage

Les professeurs sont unanimes sur le fait que la formulation des propriétés et le réinvestissement des connaissances sont importants pour l'apprentissage par l'élève.

Les Prof_1 et Prof_3 semblent considérer que l'élève ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'il n'est pas conscient que les anciennes soient insuffisantes. Ils cherchent alors à déstabiliser des connaissances erronées tout au début du processus d'apprentissage par Anissa. Le prof Prof_4 envisage de déstabiliser les connaissances erronées de celle-ci dans une étape ultérieure de ce processus, grâce aux nouvelles connaissances acquises dans une étape antérieure.

Les Prof_1 et Prof_2 cherchent à amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes.

6.3. Décisions didactiques pour le cas de Béatrice

6.3.1. Analyse des productions des professeurs

Professeur 1

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _1	Contrôles associés
« Quand on plie, une figure et son image se superposent » mais Béa ne sait pas clairement comment on doit plier (ex 1 et 2).	Σpliage_1
La droite qui passe par un point et son image est ⊥ à l'axe, et on reporte la longueur point-axe pour avoir l'image.	Σortho Σdist
Un segment et son image sont de part et d'autre de l'axe.	Σdemi_plan

Tableau 84. Prof_1 : Prise d'information sur l'activité de Béatrice

Le professeur signale sa difficulté à identifier des éléments de conception *constants* chez Béatrice. Pour lui, cette difficulté vient du fait que Béatrice réussit mieux dans les problèmes de construction de figures symétriques que dans ceux de reconnaissance.

Séquence didactique

Comme pour Anissa, le professeur organise sa séquence didactique en quatre étapes. La dernière concerne la construction d'axe de symétrie. Nous présentons ci-dessous l'analyse des trois premières étapes.

Extraits du questionnaire du Prof_1	Problème	Objectifs
Béa parle de pliage : je vais essayer de lui faire trouver qu'on ne plie pas n'importe comment. *Elle essaie différents pliages jusqu'à ce qu'elle trouve le bon : cette bonne pliure donne l'axe.*	Découper et plier la figure « trapèze » de l'« exercice 5 »	*$1^{ère}$ étape* Amener l'élève à re-dégager Σpliage_2
Réciproquement, c'est l'axe qui doit donner la pliure : Béa va donc plier les dessins des ex. 1-2 pour trouver les bons segments-images.	Problème-flèche Problème segment-losange	
Béa sait bien construire l'image d'un segment en construisant les images des extrémités : je lui demande de vérifier par pliage que sa construction de l'exercice 3 est bonne. *Elle peut être sûre de sa méthode.*	Pb-segment	*$2^{ème}$ étape* Amener l'élève à réinvestir le contrôle Σpliage_2

Je lui demande de nommer les extrémités des segments et de repasser chaque segment avec une couleur différente (pour qu'elle les identifie visuellement). *Contrôle par pliage : les segments de même couleur doivent se superposer.*	Pb 04 (item a) Pb 04 (item c)	
Je demande à Béa d'analyser ce qui est juste et ce qui est faux dans ce qu'elle a produit, au besoin en mettant de la couleur. *Elle sera amenée à utiliser les 2 pptés qu'elle connaît : [AA']⊥d et distances points-droite égales.*	Pb-maison	*3ème étape* Amener l'élève à réinvestir les connaissances anciennes (Σortho, Σdist)

Tableau 85. Prof_1 : Séquence didactique proposée pour Béatrice

La première décision du professeur s'appuie sur les informations prises sur l'activité de Béatrice. Elle ne sait pas plier, alors il faudra lui apprendre la technique du pliage. Pour cela, le professeur se sert des exercices qu'elle a résolus. Le premier problème repris est celui du « trapèze isocèle » (cf. annexe 1 p. VII), dont la consigne est de tracer les axes de symétrie des figures[57]. Béatrice doit découper la figure et faire des pliages. Le professeur s'attend à ce que Béatrice s'aperçoive que seule une pliure permet la superposition des deux parties de la figure, et que *cette bonne pliure donne l'axe* de symétrie. Béatrice doit plier ensuite les dessins des problèmes figure-flèche et segment-losange, pour se rendre compte que *c'est l'axe qui donne la pliure*. Notons que comme pour Anissa, ce professeur s'appuie sur des connaissances institutionnelles pour prendre cette décision.

Le professeur reprend ensuite la réponse de Béatrice au problème-segment, où elle a construit correctement la figure symétrique, et lui demande de la vérifier par pliage. Son objectif est de valoriser la procédure correcte de Béatrice. En effet, le professeur s'attend à ce qu'en réalisant le pliage, Béatrice se rassure comme quoi sa méthode de construction du symétrique d'un segment est juste, pour pouvoir ensuite la réinvestir dans la construction du symétrique d'une figure complexe.

Le problème suivant concerne la construction du symétrique de figures complexes (Pb 04). Dans ce problème, Béatrice doit d'abord nommer les extrémités des segments de chaque figure et ensuite repasser chaque segment avec une couleur différente. D'après le professeur : *couleur après couleur, elle construit les images*. Ensuite, pour vérifier que les segments de même couleur sont symétriques, Béatrice doit réaliser le pliage.

Le professeur reprend ensuite le problème-maison. Cependant, il n'envisage pas de demander à Béatrice de re-construire la figure : *Pour l'instant, je ne lui demande pas de refaire*

---

[57] Béatrice n'ayant pas identifié l'axe de symétrie de la figure, nous faisons l'hypothèse que l'emplacement « non-standard » de la figure dans la feuille peut être à l'origine de sa réponse.

l'exercice 4 (problème-maison), mais plutôt d'analyser sa construction et de dire ce qui est juste et ce qui est faux dans ce qu'elle a fait. Avec cette décision, le professeur cherche à amener Béatrice à réinvestir ses connaissances liées aux propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe : contrôles Σortho et Σdist pour identifier les erreurs commises.

Rappelons que dans le projet d'enseignement pour l'élève Anissa, la première décision du professeur a été de lui apprendre la technique du calque. Il envisage ensuite de déstabiliser les connaissances erronées identifiées avant de l'amener à dégager de nouvelles connaissances. Dans son projet pour Béatrice, son but est d'abord de lui apprendre à bien utiliser la technique du pliage, puis de renforcer ses connaissances anciennes correctes. En effet, Béatrice sait construire correctement le symétrique d'un segment, ces connaissances sont donc localement stables. Elle aurait donc une conception correcte de la symétrie sur les problèmes de construction du symétrique d'un segment. Cependant, ses connaissances ne sont pas réinvesties dans d'autres problèmes, elles ne sont donc pas globalement stables. En effet, Béatrice a mobilisé une autre conception sur ces problèmes. Ainsi, à part le pliage, le professeur n'envisage pas de lui faire apprendre de nouvelles connaissances. En termes du modèle cK¢, nous pourrions dire que le professeur ne cherche pas à faire évoluer sa conception initiale dans en vue de déstabiliser des éléments faux par d'autres, corrects, mais plutôt à élargir la sphère de pratique de sa conception initiale.

Les projets construits par ce professeur à l'égard de ces deux élèves montrent que pour prendre ses décisions, il s'appuie fortement sur ce qu'il observe dans l'activité de l'élève. Ceci semble confirmer la caractérisation de sa conception d'enseignement/apprentissage, que nous avons présentée suite à l'analyse d'Anissa.

Professeur 2

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _2	Contrôles associés
Idées confuses pour Béatrice. *Elle semble posséder* ** la construction du symétrique d'un point, d'un segment – figure 3) et 4) (construction de A')* ** l'idée de conservation des grandeurs (distances – angles).*	Σtaille_1 Σforme
** l'idée que l'axe de symétrie passe par le milieu du segment reliant un point et son image, mais l'idée de la perpendicularité est confuse…*	Σdist Σortho (non stable) Σdemi_plan

Tableau 86. Prof_2 : Prise d'information de l'activité de Béatrice

Pour ce professeur, Béatrice a des connaissances correctes sur la symétrie orthogonale dans un domaine restreint : elle sait construire correctement le symétrique d'un point et d'un segment. Par ailleurs, elle sait que la symétrie conserve les grandeurs (longueurs et angles) et que le symétrique d'une figure est situé de l'autre côté de l'axe de symétrie. Cependant, la connaissance sur l'orthogonalité chez Béatrice lui semble moins stable.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_2	Problème	Objectifs
Je proposerais à Béatrice le Pb 15 pour commencer, avec vérification par pliage de manière à mettre en évidence [AC]⊥d et égalité des distances à l'axe.	Pb 15	Amener l'élève à mettre en œuvre les contrôles Σortho et Σdist à partir de la vérification par pliage : stabilisation de ces contrôles
Puis le Pb 01 Avec observation *- de la position des oiseaux face à face* *- de la construction point par point* *(tracés d'autres points et segments en pointillé)*	Pb 01	Amener l'élève à dégager Σsens_inverse Amener vers la procédure analytique
Avec formulation des erreurs et mise en place de la vérification point par point, objet par objet (fenêtre, porte…) *J'utiliserais le quadrillage d) pour lui proposer de construire par quadrillage l'image de la maison par symétrie, avec vérification à l'équerre et au compas* *Ce dernier quadrillage pourrait servir de « témoin » pour le Pb 18*	Pb 02 + Construction de l'image de la maison « item d » sur le quadrillage	Amener l'élève à formuler (expliciter) les raisons des erreurs Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σdist et Σortho Amener l'élève à mettre en oeuvre la propriété d'invariance des points sur l'axe
[…] je placerais sur le Pb 18 le nom de quelques points pour inciter Béatrice à travailler point par point, et avec vérification finale par pliage ou calque.	Pb 18	
Pour construire l'image d'une figure ayant des points d'intersection avec l'axe	Pb 04	

Tableau 87. Prof_2 : Séquence didactique proposée pour Béatrice

Ce professeur fait démarrer sa séquence didactique en proposant à Béatrice le problème « Pb 15 ». Son but est de l'amener à *mettre en évidence*, sur la figure, les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe après avoir plié le dessin. Ensuite, dans le problème « Pb 01 », Béatrice doit observer que les *oiseaux* sont face *à face*, probablement pour se rendre compte du changement du sens de la figure par la symétrie. Il veut attirer son attention également sur le fait que la figure a été construite point par point, comme en témoignent les droites en pointillés qui relient les points à leurs symétriques.

Puis, le professeur propose « Pb 02 » en ajoutant *[...] avec formulation des erreurs et mise en place de la vérification point par point, objet par objet (fenêtre – porte…).* Nous pensons que le professer veut que Béatrice mette en œuvre les connaissances relatives aux propriétés mises en évidence dans les problèmes précédents. Il s'agirait alors de réinvestissement de ces connaissances comme moyens de contrôle, pour expliquer ce qui est faux dans les figures données. Avec le même problème, Béatrice doit maintenant construire le symétrique de la figure de l'« item d » sur un quadrillage, tandis que la vérification est à faire avec équerre et compas, donc pour vérifier les deux propriétés de la symétrie : orthogonalité et égalité des distances à l'axe. Selon le professeur, cette construction servira de *témoin* pour ensuite pouvoir construire une figure semblable (Pb 18) sur papier blanc. Dans le problème « Pb 18 », il propose de nommer quelques sommets de la figure dans le but d'inciter Béatrice à faire la construction point par point. La vérification par pliage ou calque est cette fois recommandée.

A la fin de cette séquence, le professeur propose à Béatrice le problème « Pb 04 ». Son but est d'amener Béatrice à construire l'image des figures qui coupent l'axe de symétrie. Notons que, dans sa prise d'information sur l'activité de Béatrice, il ne se réfère pas explicitement au fait qu'elle prenne ou non en compte la propriété d'invariance des points par la symétrie dans la résolution des problèmes. Cette décision pourrait alors être interprétée comme celle de complexifier la tâche, ce qui pourrait servir à tester la stabilité des connaissances de Béatrice. Par ailleurs, ceci confirmerait notre hypothèse dans l'étude de la séquence proposée pour Anissa, selon laquelle l'appropriation de la propriété d'invariance de points sur l'axe semble essentielle chez le professeur pour l'apprentissage de la symétrie orthogonale par l'élève.

Professeur 3

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _3	Contrôle associé
Sait utiliser les instruments pour construire le symétrique d'un point	Σortho Σdist
N'a pas d'image mentale du symétrique d'une figure (cf. 3) (confusion symétrie centrale / symétrie axiale ?)	Σdist_point/point (lié à la symétrie centrale)
La symétrie est associée au pliage mais comme Anissa…	Σpliage_1

Tableau 88. Prof_3 : Prise d'information de l'activité de Béatrice

Selon ce professeur, Béatrice sait utiliser les instruments pour construire le symétrique d'un point, il reconnaît chez elle un savoir-faire, c'est-à-dire des opérateurs. Cependant, l'explication donnée par le professeur ne nous permet pas d'affirmer quelles connaissances il identifie chez Béatrice. Si nous considérons la méthode utilisée par Béatrice dans la construction des points symétriques, nous pourrons envisager que les contrôles associés à ce savoir-faire seraient Σortho et Σdist.

Ensuite, en faisant référence à la construction de l'image du segment par Béatrice, le professeur s'interroge sur la possibilité d'une confusion, chez elle, entre les notions de symétrie centrale et de symétrie axiale. Cette question peut avoir son origine d'une part dans les réponses de Béatrice aux problèmes de reconnaissance, et d'autre part dans la manière dont elle a nommé les extrémités des segments objet et image dans le problème-segment (cf. p. 178). Notons encore que le professeur remarque les difficultés de Béatrice pour mobiliser les images mentales du symétrique d'une figure, ainsi que celles liées au pliage.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_3	Problème	Objectif
Idem Anissa en ce qui concerne l'image du pliage	Pb 01	Amener l'élève à re-dégager Σpliage_2
	Pb 17	
	Pb 12	
Éviter les tracés dans un premier temps, C'est-à-dire transformer les connaissances d'action en connaissances pour reconnaître et justifier	Pb 07	Amener l'élève à mobiliser les connaissances mises en œuvre pour construire des figures symétriques dans la reconnaissance et la preuve : Σortho et Σdist
	Pb 15[58]	
	Pb 08[59]	
	Pb 17	
	Pb 02	
Tracer les axes de symétries	Pb 06	Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist et Σpliage_2
	Pb 11	
	Pb 12	
	Pb 16	
Tracer le symétrique de figures (en anticipant) et en verbalisant	Pb-maison	
Choix non justifié	Pb 13	

Tableau 89. Prof_3 : Séquence didactique proposée pour Béatrice

Dans son projet d'enseignement, sa première décision est de proposer à Béatrice les mêmes problèmes que ceux pour Anissa, afin de re-dégager la technique du pliage. Ensuite, le professeur propose une série de problèmes de reconnaissance de figures symétriques. Il affirme avoir choisi des problèmes de cette nature dans le but d'éviter *les tracés dans un premier temps*. Son but est d'amener Béatrice à *transformer les connaissances d'action en*

[58] *Sans quadrillage (sans dessiner le symétrique de A)*

[59] *Mais justifier sans dessin.*

connaissances pour reconnaître et justifier. Nous supposons que le professeur souhaite amener Béatrice à réinvestir les connaissances qu'elle arrive à mettre en œuvre dans la construction de la figure symétrique (action concrète), dans des problèmes de reconnaissance et de justification (action implicite).

Le professeur propose ensuite une série de problèmes, où il s'agit de tracer des axes de symétrie. Il reprend ensuite le problème-maison, en précisant seulement son but d'« anticiper » et de « verbaliser », comme il l'avait fait pour Anissa. Enfin, il propose le problème « Pb 13 », mais il ne donne aucune explication concernant ce choix. De cette analyse nous retenons que le professeur s'appuie fortement sur ce qu'il observe de l'activité de l'élève, pour construire son projet d'enseignement. Il a identifié des connaissances correctes chez Béatrice, qu'elle ne mobilise pas dans des problèmes de reconnaissance. Il propose alors un certain nombre de problèmes de cette nature afin d'amener Béatrice à réinvestir ses connaissances dans ces problèmes.

Professeur 4

Prise d'information de l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _4	Contrôles associés
Il semble que pour Béatrice 2 figures symétriques situées de part et d'autre d'un axe et se tournant le dos, font idéalement l'une par rapport à l'autre, un angle de 180°.	Σdist_point/point (lié à la symétrie centrale) Σdemi_plan
Quand il s'agit d'effectuer une construction, Béatrice pense à prendre l'équerre, elle sait construire le symétrique d'un point isolé, mais sa représentation fausse de ce que sont deux figures symétriques la gêne.	Σortho (non stable)
A mesure que l'on trace le symétrique d'une figure, celle-ci pour Béatrice doit partir en sens inverse de la figure initiale en s'en éloignant le plus vite possible. *Pour le 3) et le 4)* (problème-segment et problème-maison) *c'était bien commencé mais pour le 3) Béatrice semble perdre de vue qu'elle construit le symétrique d'un segment initial,et que celui-ci sera baptisé finalement [A'B]*	Σdist_point/point (symétrie centrale)

Tableau 90. Prof_4 : Prise d'information de l'activité de Béatrice

Ce professeur fait l'hypothèse que Béatrice associe la symétrie orthogonale à la symétrie centrale dans les problèmes de reconnaissance, mais qu'elle sait construire le symétrique d'un point isolé. Cependant, selon lui elle a une mauvaise représentation des figures symétriques. Lors d'un entretien, nous avons demandé au professeur ce qu'il voulait dire par : *représentation fausse de ce que sont deux figures symétriques*. Son explication est la suivante :

Extrait de l'entretien avec le professeur : *Elle sait construire les images des extrémités du segment. Elle a bien construit aussi le segment, mais… elle ne nomme pas correctement ses extrémités.* […]. *Ses réponses à ces problèmes là (problèmes de reconnaissance)… laisse penser qu'elle fait une confusion.*

La prise d'information de ce professeur va alors dans le même sens que celle du Prof_3.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_4	Problème	Objectif
But : approche pratique du pliage (Béatrice a montré, par sa justification de l'exercice 1 (problème-flèche) *qu'elle n'a pas une « connaissance concrète » de l'effet d'un pliage)*	Pb 09	Amener l'élève à re-dégager le contrôle Σpliage_2
But : permettre au professeur de s'assurer que Béatrice ne refait pas l'erreur du parallélogramme	Pb 12	Établir un nouveau diagnostic
Pb 03 précédé du pb 07 qui facilite le pb 03 (au moins pour le b, car ce sont des rectangles s'éloignant obliquement de l'axe)	Pb 07	Montrer un modèle à utiliser par la suite dans la résolution d'un autre problème
Reconnaître, cette fois-ci sans pliage, des figures symétriques qui ne se « tournent pas le dos »	Pb 03	Déstabiliser un contrôle lié à la symétrie centrale (distance point/point)
But : mettre en place un outil de vérification qui prenne en compte la perpendicularité de la symétrie d'une figure, et ceci point par point.	Pb 01	Amener l'élève à dégager (ou renforcer) le contrôle Σortho Approche point par point
Grâce à ceci, peu- être que Béatrice, si elle refaisait l'exercice 4) (problème-maison), *ne se baserait pas uniquement sur un point construit à l'équerre pour faire le symétrique de la maison*	Pb 02	Amener l'élève à réinvestir Σortho Σdist

Tableau 91. Prof_4 : Séquence didactique proposée pour Béatrice

Tout d'abord, le professeur propose le problème « Pb 09 », dont la consigne est d'expliquer à quelqu'un d'autre comment construire les figures symétriques en utilisant le papier calque et le pliage. Dans la figure, l'axe de symétrie n'est pas tracé, la tâche de Béatrice consiste alors à utiliser ces techniques pour repérer comment les figures ont été construites, et aussi pour retrouver les axes de symétrie des figures données. Comme le montre l'extrait de questionnaire dans le tableau ci-dessus, son but est de travailler l'*approche pratique du pliage*. Cet objectif est confirmé lors de l'entretien, comme le montre l'extrait suivant :

Extrait de l'entretien du professeur : *Pour donner un sens quand elle dit… quand elle parle de plier* […] *elle ne visualise pas précisément ce que ça fait, un pliage. L'idée c'est de* *donner du sens quand elle dit plier* […] *pour… pour arriver à faire un pliage… mentalement, pour placer correctement un axe de symétrie…ou pour voir les choses éventuellement avant de les construire… heu… pour avoir un outil de contrôle de ce qu'on fait*.

Ainsi, la première décision de ce professeur est d'amener Béatrice à re-dégager le contrôle par la superposition des figures par pliage qui est, d'après lui, important dans la phase de planification et d'exécution de l'action. Notons que, même si l'utilisation du calque est recommandée dans la consigne du problème, dans son discours le professeur ne se réfère qu'à l'utilisation du pliage.

Le professeur propose ensuite à Béatrice le « Pb 12 ». Il s'agit de reconnaître et construire les axes de symétrie, et ensuite de vérifier par pliage. Rappelons que Béatrice a reconnu deux axes de symétrie dans le parallélogramme de l'exercice 5 (cf. annexe 1. p. VIII). Étant donné qu'une des figures du « Pb 12 » est un parallélogramme, le professeur s'attend à ce que Béatrice mobilise le contrôle du pliage pour reconnaître que cette figure ne possède pas d'axe de symétrie. Cette décision du professeur est prise alors dans le but *de s'assurer que Béatrice ne refait pas l'erreur du parallélogramme*, donc d'établir un nouveau diagnostic.

Le professeur propose ensuite à Béatrice le problème « Pb 03 », son but étant d'amener Béatrice à *reconnaître, cette fois-ci sans pliage, des figures symétriques qui ne se « tournent pas le dos »*. En effet, les figures objet et image de l'« item a » ne possèdent pas de segments qui sont situés sur la même droite support, tandis que dans l'« item b », une des figures candidates à l'image du rectangle possède des segments qui sont sur la même droite support. Nous faisons l'hypothèse que le professeur s'appuie sur cette variable didactique pour montrer à Béatrice que par la symétrie orthogonale, les segments objet et image ne sont pas forcément sur la même droite support. Ceci servirait alors à déstabiliser un contrôle lié à la symétrie centrale (conservation de distances des points à un point de l'axe, centre de symétrie), que nous n'avons pas formalisé dans notre étude. Cependant, avant de proposer ce problème, il donne « Pb 07 ». Il explique que ce problème faciliterait la résolution de « Pb 03 ». Étant donné que la figure de ce problème possède des segments qui sont sur la même droite support, nous avons demandé au professeur en quoi consisterait cette facilité. L'explication du professeur est la suivante :

Extrait de l'entretien du professeur : *Les rectangles là* (Pb 03) *et là* (Pb 07) *sont assez proches… alors ça peut aider à… à reconnaître la bonne figure symétrique*.

Le professeur s'attend à ce qu'en comparant les rectangles de « Pb 03 » à ceux de « Pb 07 », où il est dit dans la consigne qu'ils sont symétriques, Béatrice puisse reconnaître la figure symétrique. C'est ici que réside la facilité évoquée par le professeur. Il nous semble alors que par cette décision, le professeur cherche d'une certaine manière à donner à Béatrice un modèle sur lequel elle puisse s'appuyer pour trouver la réponse correcte. Ceci confirmerait notre hypothèse que pour prendre ses décisions, ce professeur à tendance à « mâcher » le travail de l'élève pour lui faciliter la tâche.

Ensuite, le professeur propose les problèmes « Pb 01 » et « Pb 02 » dans le but de : mettre en place un outil de vérification qui prenne en compte la perpendicularité de la symétrie d'une figure, et ceci point par point. Comme information complémentaire pour ce choix, il dit :

Extrait de l'entretien du professeur : *Les rectangles là* (Pb 03) *et là* (Pb 07) *sont assez proches… alors ça peut aider à… à reconnaître la bonne figure symétrique*.

Le professeur s'attend à ce qu'en comparant les rectangles de « Pb 03 » à ceux de « Pb 07 », où il est dit dans la consigne qu'ils sont symétriques, Béatrice puisse reconnaître la figure symétrique. C'est ici que réside la facilité évoquée par le professeur. Il nous semble alors que par cette décision, le professeur cherche d'une certaine manière à donner à Béatrice un modèle sur lequel elle puisse s'appuyer pour trouver la réponse correcte. Ceci confirmerait notre hypothèse que, pour prendre ses décisions, ce professeur cherche à faciliter la tâche de l'élève.

Ensuite, le professeur propose les problèmes « Pb 01 » et « Pb 02 » dans le but de : mettre en place un outil de vérification qui prenne en compte la perpendicularité de la symétrie d'une figure, et ceci point par point. Comme information complémentaire pour ce choix, voici ce qu'il dit :

Extrait de l'entretien du professeur : *La perpendicularité pour avoir un moyen de contrôle supplémentaire… elle a une méthode de construction, en fait… mais pour la maison, heu… ça serait bien de construire un point, un deuxième point et… à partir de deux points elle peut continuer… un triangle, un rectangle* […]. *Auparavant elle sait construire un point… à l'équerre, là, bon, bah* […] *peut-être que… peut-être que c'est pas le problème 1 directement appliqué à celui-ci (problème-maison), c'est le problème 1 appliqué au problème 2 où il y a justement il a une maison, là* […]. *Puis, c'est la proximité entre celle-ci* (item d de Pb 02) *et celle-là* (problème-maison) *qui peut permettre de voir les angles droits… elle aura tout ce qu'il faut pour appliquer la méthode qu'elle connaît, d'ailleurs* […] *elle passera d'une maison à l'autre, alors*.

Nous voyons alors que par le choix de ces problèmes, le professeur cherche à renforcer chez Béatrice sa connaissance à propos de la perpendicularité dans la symétrie orthogonale. Pour ce faire, il prépare une situation de guidage. Sur « Pb 01 », Béatrice peut observer la propriété d'orthogonalité. Puis, comme dans l'étape précédente (Pb 03 et Pb 07), il se sert de la proximité des figures (dans ce cas, il ne fait référence qu'à la figure de l'« item a » de « Pb 02 ») et la figure-maison (nature de F, orientation de l'axe…).

Professeur 5

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _5	Contrôles associés
Elle semble confondre symétrie axiale et symétrie centrale.	Σdist_point/point (lié à la symétrie centrale)
Elle connaît le mot pliage, mais ne plie pas suivant l'axe (exercice 1)	Σpliage_1
Elle sait construire les symétriques de deux points (ex 3) (Problème-segment) *mais essaie d'utiliser (mal) les propriétés de la symétrie quand beaucoup de symétriques sont nécessaires (ex. 4)* (Problème-maison)	Σortho (non stable) Σdist (non stable)

Tableau 92. Prof_5 : Prise d'information de l'activité de Béatrice

La prise d'information de ce professeur sur l'activité de Béatrice est assez proche de celles des Prof_3 et Prof_4. D'une part, il suppose que Béatrice peut confondre les symétries axiale et centrale, et d'autre part il reconnaît qu'elle sait construire les symétriques des points.

Comme le Prof_1, ce professeur identifie chez Béatrice un contrôle par pliage (Σpliage_1) qui n'est pas forcément le long de la droite d.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_5	Problème	Objectif
Visualisation du symétrique $\rightarrow$ quel pliage ? *pliage suivant quelle droite ? (oral)*	Pb 01 Pb 07	Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec pliage par rapport à l'axe : re-dégager Σpliage_2
Mise en pratique avec du calque	Pb 09 « item b »	
Le pliage étant identifié, je proposerais le Pb 02 (oral) […] Je parlerais de reflet dans l'eau (c)	Pb 02 « item c »	
Construction du symétrique d'une figure *Ensuite nous étudierons le symétrique d'une figure* *Elle nomme correctement les images respectives (ce qu'elle n'a pas su faire dans l'exercice 4).*	Pb 07	Amener à bien nommer un point et son symétrique Amener l'élève à identifier les points symétriques
Ensuite, à l'équerre (pour les mêmes raisons qu'Anissa et Cédric) *Je lui expliquerais après construction*	Construire le symétrique des triangles	Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist

comment elle pourrait utiliser les conservations des longueurs, des angles…	Pb 04	Vérifier à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles : établir un nouveau diagnostic
	Pb 18	Montrer l'utilisation de « taille » et « forme »

Tableau 93. Prof_5 : Séquence didactique proposée pour Béatrice

Ce professeur commence sa séquence didactique en travaillant sur les problèmes « Pb 01 » et « Pb 07 ». Comme pour Anissa, il propose un travail *à l'oral*. La question qu'il poserait à Béatrice est la suivante : *pliage suivant quelle droite ?* Nous supposons que cette décision est liée au constat que Béatrice *ne plie pas selon l'axe*. Pour confirmer, nous avons demandé au professeur plus d'informations à propos de ce choix. Il explique que pour ces deux problèmes, son objectif a été le même que pour Anissa : *s'appuyer beaucoup sur le visuel*. Les problèmes proposés ensuite ont le même but, c'est à dire de travailler l'aspect « visuel » de la symétrie et « à l'oral ». Béatrice doit réaliser une manipulation avec le papier calque sur la figure de l'« item b » du problème Pb 09. En supposant que le pliage ait été identifié par Béatrice, le professeur propose de parler du *reflet dans l'eau* dans le cas de la figure de l'« item c » du « Pb 02 ». Cette même décision a été prise à l'égard d'Anissa.

Ainsi, dans cette première phase de sa séquence, l'objectif du professeur est d'amener Béatrice à dégager le contrôle Σpliage_2 (pliage selon la droite d).

Après, il envisage d'étudier le symétrique d'une figure. Pour cela il reprend le problème Pb 07. Dans ce problème, le professeur insiste sur la mise en relation des points symétriques. Il souhaite ainsi à remédier à l'erreur de Béatrice commise dans le problème-segment. A ce propos, le professeur dit :

Extrait de l'entretien du professeur : *Je m'assure que là* (Pb 07), *elle nomme correctement les images* […] *et je lui ferais voir que là* (problème-segment), *il y a un petit problème*.

Dans le but de favoriser la construction de figures symétriques par Béatrice, le professeur lui propose la même séquence de problèmes qu'à Anissa : « Pb 04 » ; construction du symétrique des triangles (en jouant avec les variables d'intersection de la figure avec l'axe et l'orientation de l'axe sur la feuille) et ensuite « Pb 18 ». A partir d'un travail avec l'équerre et/ou le quadrillage, le but du professeur est d'amener Béatrice à utiliser ses connaissances à propos de l'orthogonalité et de l'égalité des distances à l'axe.

Contrairement au cas d'Anissa, pour Béatrice ce professeur ne s'arrête pas là. Il se propose de lui expliquer *comment elle pourrait utiliser les conservations des longueurs, des angles....* Étant donné que dans sa prise d'information sur l'activité de Béatrice, il ne se réfère pas au fait qu'elle prenne ou non en compte ces propriétés de la symétrie, nous lui avons demandé plus d'informations à propos de cette décision. L'explication donnée est la suivante :

Extrait de l'entretien du professeur : *Elle sait construire le symétrique d'un point* […]. *Je suppose qu'elle le ferait* […] *elle aura la bonne réponse* […]. *Et peut-être que je lui aurais dit qu'elle peut gagner du temps. Je veux dire par là… le rectangle une fois qu'on a les trois sommets… les trois symétriques construits… on peut terminer le rectangle… même si on oublie la symétrie.* […] *pour lui proposer un raccourci efficace.*

Nous voyons ici que puisqu'il est conscient que Béatrice sait construire le symétrique d'un point, le professeur envisage de lui faire faire l'économie de la construction dans le cas d'une figure complexe. En effet, si la figure comporte beaucoup de points, on peut être plus efficace si l'on s'appuie sur les propriétés de conservation de la symétrie (longueur des segments, mesure des angles...).

6.3.2. Synthèse des résultats obtenus

La prise d'information sur l'activité de Béatrice

Contrôles (Σ)	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Σdist					non stable
Σortho		non stable		non stable	non stable
Σtaille_1					
Σforme					
Σdemi_plan					
Σpliage_1					
Σpliage_2					
Autre			Σdist_point/ point	Σdist_point/ point	Σdist_point/ point

Tableau 94. Prise d'information des professeurs sur l'activité de Béatrice : description en termes de contrôles

Tous les professeurs constatent que Béatrice a une idée de l'orthogonalité et d'égalité des distances. Elle sait construire correctement le symétrique d'un point, voire d'un segment. Cependant, ces connaissances ne sont pas mises en œuvre dans la reconnaissance de figures symétriques ni dans la construction du symétrique d'une figure complexe. Ainsi, trois des professeurs signalent la non stabilité du contrôle lié à l'orthogonalité.

Pour trois professeurs, Béatrice semble confondre les symétries orthogonale et centrale. La distance prise en compte est, selon eux, une distance point-point. Ainsi, un nouveau contrôle se dégage : Σdist_point/point.

Par ailleurs, trois professeurs constatent également que Béatrice à une idée du pliage, mais qu'elle ne plie pas suivant l'axe de symétrie. Deux des professeurs identifient chez Béatrice le contrôle Σdemi_plan.

Le Prof_2 reconnaît chez Béatrice le contrôle par la taille et la forme de la figure.

Projets d'enseignement

Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Amener l'élève à re-dégager Σpliage_2	Amener l'élève à mettre en œuvre les contrôles Σortho et Σdist à partir de la vérification par pliage : stabilisation des contrôles Σdist et Σortho	Amener l'élève à re-dégager Σpliage_2	Amener l'élève à re-dégager le contrôle Σpliage_2	Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec pliage par rapport à l'axe : re-dégager Σpliage_2
Amener l'élève à réinvestir le contrôle Σpliage_2	Amener l'élève à dégager Σsens_inverse	Amener l'élève à mobiliser les connaissances mises en œuvre pour construire des figures symétriques dans la reconnaissance et la preuve : Σortho et Σdist	Établir un nouveau diagnostic	Amener l'élève à re-dégager le contrôle Σpliage_2
Amener l'élève à réinvestir les connaissances anciennes (Σortho, Σdist)	Amener à la procédure analytique	Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist et Σpliage_2	Montrer un modèle utilisé par la suite dans la résolution d'un autre problème	Amener l'élève à bien nommer un point et son symétrique
	Amener l'élève à formuler les raisons des erreurs		Déstabiliser un contrôle lié à la symétrie centrale (distance point/point)	Amener l'élève à identifier les points symétriques
	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σdist et Σortho		Amener l'élève à dégager (ou renforcer) le contrôle Σortho Approche point par point	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho, Σdist et Σsens_inverse
	Amener l'élève à mettre en oeuvre la propriété d'invariance des points sur l'axe		Amener l'élève à réinvestir Σortho Σdist	Vérifier à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles : établir un nouveau diagnostic
				Montrer l'utilisation de « taille » et « forme »

Tableau 95. Objectifs des projets d'enseignement des professeurs : cas Béatrice

Le Prof_1 constate que Béatrice n'a pas une idée claire à propos du pliage. C'est pourquoi il souhaite l'amener tout d'abord à re-dégager le contrôle par la superposition des figures par pliage. De plus, d'après le professeur Béatrice aurait une conception efficace de la symétrie sur les problèmes de construction d'un point ou d'un segment, mais cette conception n'est pas réinvestie dans la résolution d'autres problèmes. Ainsi, dans son projet d'enseignement pour cette élève, il ne cherche pas à déstabiliser des contrôles erronés, comme il l'avait fait pour Anissa. Il ne cherche pas à faire évoluer sa conception initiale, mais plutôt à élargir sa sphère de pratique. Ainsi, il envisage de renforcer les contrôles corrects identifiés chez cette élève, à savoir Σortho et Σdist. Dans ce but, il reprend la construction correcte réalisée par Béatrice dans le problème – segment et lui demande de vérifier sa réponse en pliant. Il veut ainsi l'assurer que la procédure utilisée est correcte. De façon analogue, le professeur reprend la construction erronée de l'élève dans le problème – maison, pour l'amener à analyser ce qui est juste et ce qui est faux dans sa construction. Dans cette phase, Béatrice doit mettre en œuvre ses connaissances d'orthogonalité et d'égalité des distances, les *propriétés fondamentales* de la symétrie orthogonale pour ce professeur. Ainsi, la structure de contrôle de la conception visée par ce professeur contiendrait les contrôles suivants : Σpliage_2, Σortho, Σdist.

Le Prof_2 constate que chez Béatrice l'idée de la perpendicularité est confuse. Ainsi, il cherche tout d'abord à l'amener à vérifier, en utilisant le pliage, les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances, ainsi que le fait que la symétrie inverse le sens de la figure. Ensuite, il conduit Béatrice vers une procédure analytique, où elle pourra mettre en œuvre ces deux propriétés pour construire correctement le symétrique des figures. Comme pour Anissa, il envisage d'amener Béatrice à dégager la propriété de l'invariance des points sur l'axe de symétrie, ce qui confirmerait que pour lui, cette propriété est fondamentale pour l'apprentissage de la symétrie orthogonale. Il nous semble alors que la structure de contrôle de la conception cible contiendrait les contrôles suivants : Σpliage_2, Σortho, Σdist, Σsens_inverse, Σpoint_invariant.

Pour le Prof_3, Béatrice n'a pas d'image mentale du symétrique d'une figure. Il constate que Béatrice sait construire le symétrique d'un point, mais qu'elle semble confondre les symétries orthogonale et centrale. Ainsi, son objectif est d'amener Béatrice à re-dégager le contrôle par pliage. Puis elle doit réinvestir ses connaissances mobilisées dans la construction du symétrique d'un point, dans la résolution d'autres problèmes. Comme pour Anissa, la conception cible serait donc celle caractérisée par le pliage, dont la structure de contrôle contient les contrôles suivants : Σpliage_2, Σortho, Σdist.

Le Prof_4 constate d'une part que Béatrice semble confondre les symétries orthogonale et centrale, et d'autre part la non stabilité du contrôle d'orthogonalité. Ainsi, son premier objectif est d'amener cette élève à re-dégager le contrôle par la superposition des figures par pliage, ce qui pourrait être réutilisé par la suite dans les phases de planification et d'exécution d'action à réaliser. Puis, il cherche à déstabiliser le contrôle erroné lié à la symétrie centrale chez Béatrice. Ensuite, il met en place un outil de vérification qui prend en compte la perpendicularité de la symétrie, ainsi que l'égalité des distances de la symétrie. Ainsi, la structure de contrôle de la conception visée contiendrait les contrôles suivants : Σpliage_2, Σortho, Σdist.

Le Prof_5 constate que Béatrice ne sait pas plier suivant l'axe. Comme les Prof_3 et Prof_4, il s'interroge sur une confusion éventuelle chez Béatrice entre les deux symétries. Comme le Prof_4, il constate la non stabilité du contrôle Σortho. Son projet d'enseignement pour cette élève est assez proche de celui proposé pour Anissa. En effet, son premier objectif est celui d'amener Béatrice à dégager le contrôle par pliage. Il envisage également d'amener l'élève à prendre conscience que la symétrie inverse le sens de la figure. Ensuite, il cherche à faire dégager les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances. De cette façon, la structure de contrôle de la conception visée contiendrait les contrôles suivants : Σpliage_2, Σsens_inverse, Σortho, Σdist.

<u>Problèmes choisis</u>

<table>
<tr><th>Problème</th><th>Prof_1</th><th>Prof_2</th><th>Prof_3</th><th>Prof_4</th><th>Prof_5</th></tr>
<tr><td>Pb 01</td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Pb 02</td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 03</td><td></td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 04</td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Pb 05</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 06</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 07</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Pb 08</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 09</td><td></td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Pb 10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 11</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 12</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 13</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 14</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 15</td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 16</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 17</td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb 18</td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Autres</td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td></tr>
<tr><td>Pb-flèche</td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb segment-losange</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb-segment</td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pb-maison</td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Exercice 5 (axe de sym.)</td><td bgcolor="#c0c0c0"></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 96. Problèmes choisis par les professeurs dans les séquences didactiques pour Béatrice

Notons dans le tableau ci-dessus que le choix des problèmes par les professeurs vis-à-vis de l'apprentissage de Béatrice est assez diversifié. Il n'y a unanimité sur aucun problème, contrairement au cas d'Anissa. Les problèmes les plus fréquemment choisis sont « Pb 01 » et « Pb 04 ». Le premier (problème d'identification de propriétés de la symétrie) a été proposé par quatre professeurs, dans le but d'amener Béatrice à stabiliser le contrôle d'orthogonalité. Le dernier problème (construction de figures complexes) est proposé, plutôt vers la fin des séquences, dans le but de permettre à Béatrice de réinvestir les connaissances dégagées.

Il est à noter également que contrairement à ce qu'on a observé chez Anissa, le problème dit « Pb 15 » (reconnaissance du symétrique d'un point sur quadrillage) est très peu proposé par les professeurs. Ils expliquent ce fait par la constatation que Béatrice sait construire le symétrique d'un point, voire d'un segment. En effet, chez Anissa ce problème a été proposé plutôt dans le but de l'amener à construire le symétrique d'un point.

Remarquons également que le Prof_1 a repris la majorité des réponses de Béatrice. Ceci confirme sa tendance à s'appuyer sur les contrôles valides identifiés chez l'élève dans le but de les renforcer.

Connaissances intervenant dans la prise de décisions didactiques par les professeurs

Dans les tableaux ci-dessous, nous avons ajouté les données identifiées dans les projets des professeurs pour Anissa, afin de permettre une confrontation des résultats obtenus.

Professeur 1

Connaissances	Anissa	Béatrice
Connaissances des programmes :		
symétrie et pliage		
technique du calque		
manipulation		
Connaissances des mathématiques		
propriétés fondamentales : orthogonalité et égalité des distances		
la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage		
Connaissances relevant d'expérience de l'enseignement et du fonctionnement des élèves :		
aspect visuel de la symétrie		
Conception de l'enseignement/apprentissage		
on apprend à partir de ce qu'on sait déjà (appui sur les connaissances anciennes correctes)		
on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes soient insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées avant d'en dégager de nouvelles) ;		
amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes ;		
apprentissage progressif (première remédiation dans un premier temps avant de passer à des cas plus complexes)		
la formulation favorise l'apprentissage		
importance du réinvestissement des connaissances		

Il nous semble que ce professeur s'est appuyé sur les mêmes connaissances pour construire les deux projets d'enseignement. La différence réside dans le fait qu'il n'envisage pas pour Béatrice la déstabilisation des connaissances erronées ni leur substitution par d'autres connaissances. Ceci est cohérent avec son objectif de renforcement de connaissances correctes chez cette élève.

Professeur 2

Connaissances	Anissa	Béatrice
Connaissances des programmes : symétrie et pliage		
technique du calque		
Connaissances des mathématiques propriétés de l'orthogonalité, d'égalité des distances et d'invariance des points		
Conception de l'enseignement/apprentissage on apprend à partir de ce qu'on sait déjà (appui sur les connaissances anciennes correctes)		
les connaissances nouvelles permettent d'invalider les anciennes		
amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes ;		
vérifier leur acquisition en cours d'apprentissage (établir un nouveau diagnostic)		
la formulation favorise l'apprentissage		
importance du réinvestissement des connaissances		

Ce professeur ne propose pas de problèmes pour établir un nouveau diagnostic dans le cas de Béatrice.

Professeur 3

Connaissances	Anissa	Béatrice
Connaissances des programmes : symétrie et pliage		
manipulation		
apprentissage de transformations, au collège		
Connaissances des mathématiques la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage		
Conception de l'enseignement/apprentissage on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes soient insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées avant d'en dégager de nouvelles)		
la formulation favorise l'apprentissage		
anticipation de l'action à réaliser		
importance du réinvestissement des connaissances		

Comme pour le Prof_1, l'unique différence concerne la déstabilisation des connaissances erronées, ce qui n'est pas envisagé par ce professeur vis-à-vis de son projet construit en fonction de son observation de l'activité de l'élève.

Professeur 4

Connaissances	Anissa	Béatrice
Connaissances des programmes : symétrie et pliage		
Connaissances des mathématiques propriétés de l'orthogonalité et d'égalité des distances		
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : Les situations de guidage fonctionnent en certains cas		
Conception d'enseignement/apprentissage L'élève apprend à partir des exercices progressifs ; le professeur guide l'élève dans leur réalisation, en proposant des étapes ; « mâcher » le travail de l'élève pour lui faciliter la tâche		
le contrôle des pré-requis permet de prendre des décisions par rapport à l'opportunité d'engager l'élève dans un nouvel apprentissage		
lorsque l'élève a réussi un exercice, il doit réussir tout exercice qui met en jeu le même savoir		
mobilisation de connaissances nouvelles pour déstabiliser des connaissances erronées		
importance du réinvestissement des connaissances		

Il est à noter que pour ce professeur, les résultats sont tous convergents.

Professeur 5

Connaissances	Anissa	Béatrice
Connaissances des programmes : symétrie et pliage		
Connaissances des mathématiques propriétés de l'orthogonalité et d'égalité des distances		
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : Les élèves sont très visuels (s'appuyer sur la visualisation avant de passer à la mathématisation), efficacité du travail à l'oral, gagner du temps)		
Conception d'enseignement/apprentissage en cas d'échec de l'élève, le professeur doit envisager de tout recommencer		
le professeur prépare des exercices progressifs (construction d'un point symétriques, deux points...)		
importance du réinvestissement des connaissances		
vérification régulière des acquis de l'élève : établir un nouveau diagnostic		

Étant donné que Béatrice a donné des réponses correctes à certains problèmes, ce professeur n'a pas l'intention de tout retravailler chez cette élève.

6.4. Décisions didactiques pour le cas de Cédric

6.4.1. Analyse des productions des professeurs

Professeur 1

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _1	Contrôles associés
Cédric se rappelle qu'il y a une histoire de « distances égales » mais pour lui, il s'agit de distances entre deux points, non de distance point-droite. *Il ne connaît pas la définition de la distance point-droite, l'idée de perpendicularité n'apparaît que dans l'exercice 4 et encore pas toujours.*	Σdist_point/point Σortho (quasi-absent)
Cédric sait qu'un segment et son image sont situés de part et d'autre de l'axe de symétrie.	Σdemi_plan

Tableau 97. Prof_1 : Prise d'information sur l'activité de Cédric

Ce professeur repère chez Cédric une idée de l'égalité de distances, mais cela semble être la distance entre deux points, c'est à dire de points à un point de l'axe, plutôt que la distance de points à l'axe. Il remarque également que l'orthogonalité n'est pratiquement pas mobilisée dans la production de Cédric.

Séquence didactique

<table>
<tr><th>Extraits du questionnaire du Prof_1</th><th>Problème</th><th>Objectif</th></tr>
<tr><td>Il s'agit de montrer à Cédric qu'il y a plusieurs segments joignant un point et une droite, mais un seul de longueur minimale : on l'obtient avec la perpendicularité.</td><td>Pb 10</td><td rowspan="2"><u>1ère étape</u> : Redécouvrir la notion de distance d'un point à une droite
Amener l'élève à dégager le contrôle Σortho
Amener l'élève à distinguer Σdist (point-droite) de Σdist_point/point
Amener l'élève à formuler Σortho et Σdist</td></tr>
<tr><td>Il s'agit de consolider les observations du Pb précédent, en faisant bien la distinction entre les 2 cas de figures : (perpendiculaire équivaut à distance point-droite) et (non-perpendiculaire équivaut à non distance point-droite).
Sur le dessin : d est une médiane de [AC], [AD], [AE] et [AF], mais la médiatrice de du segment [AC] seulement.
Il doit donc comprendre que d doit être perpendiculaire au segment. Il doit être amené à dire que les deux propriétés sont indispensables.</td><td>Pb 15</td></tr>
</table>

Je lui fais reprendre l'exercice 5c (parallélogramme) *pour qu'il analyse sa construction et trouve l'erreur qu'il a faite.* *J'espère qu'à ce stade il a compris de façon ferme et définitive que les 2 pptés (perpendiculaire + distances égales) sont indissociables et à utiliser conjointement.*	Exe 5 « item c »	*2ère étape – analyse des erreurs faites* Amener l'élève à mettre en œuvre les contrôles Σortho et Σdist pour analyser sa construction et expliciter les raisons des erreurs commises
Cédric va mettre en pratique ce qu'il vient d'apprendre avec le Pb18, semblable à l'exercice 4 (problème-maison) *qu'il avait un peu amorcé mais pas terminé. Instruments laissés au choix de l'élève.*	Pb 18	Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist pour construire et pour analyser
Enfin, je lui demanderai d'analyser ce qu'il a produit dans l'ex4, de déterminer ce qu'il a fait juste et ce qu'il a fait faux.	Problème-maison	

Tableau 98. Prof_1 : Séquence didactique proposée pour Cédric

Comme pour Anissa et Béatrice, ce professeur propose une séquence didactique partagée en plusieurs étapes. Dans la première étape, il propose tout d'abord le problème « Pb 10 » (chercher le parcours le plus court). En montrant à Cédric qu'*il y a plusieurs segments joignant un point et une droite, mais un seul de longueur minimale,* il cherche à l'amener à mettre en relation la notion de droite perpendiculaire avec la distance la plus courte entre un point et une droite. Ensuite il propose le « Pb 15 » dans le but de « consolider » la connaissance dégagée dans la résolution du problème précédent. Par ce problème, il cherche à amener Cédric à faire la distinction entre perpendiculaire (*distance point-droite*) et non-perpendiculaire *(non distance point-droite*). Il envisage de montrer à Cédric que la droite d est la médiane pour quatre des segments formés entre le point objet et les candidats à son image ([AC], [AD], [AE] et [AF]) et que pour un segment seulement ([AC]) la droite d est la médiatrice. Comme il l'affirme, il s'attend à ce que Cédric soit capable de comprendre que, dans ce dernier cas, la droite d est perpendiculaire à [AC]. De plus, le professeur veut que Cédric prenne conscience que les deux propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances sont *indispensables* dans la symétrie orthogonale. Ceci confirme l'hypothèse que ce professeur considère ces propriétés mathématiques comme fondamentales pour l'apprentissage de la symétrie orthogonale.

L'étape suivante de sa séquence vise à amener Cédric à *analyser* sa construction dans l'« exercice 5 » pour identifier les erreurs qu'il a commises[60]. Rappelons que ce problème concerne la reconnaissance et la construction d'axes de symétrie dans le cas d'un trapèze

[60] Dans ce problème, Cédric a bien identifié et construit les axes de symétrie dans les figures trapèze et rectangle. Mais dans le parallélogramme, il a construit 4 axes.

isocèle (5a), d'un rectangle (5b) et d'un parallélogramme (5c). Cédric a réussi la tâche dans les deux premiers cas, mais il a tracé 4 axes de symétrie dans le parallélogramme. L'attente du professeur est qu'à cette étape de la séquence, Cédric soit déjà capable de reconnaître son erreur sur le parallélogramme, grâce à la mobilisation des deux propriétés de la symétrie. A l'issue de cette étape, Cédric devra comprendre *de façon ferme et définitive que les 2 pptés (perpendiculaire + distances égales) sont indissociables et à utiliser conjointement.*

Ensuite, le professeur passe à la dernière étape de sa séquence, en ayant pour but de favoriser le réinvestissement par Cédric des connaissances « nouvelles ». Pour cela, il propose d'abord le problème « Pb 18 ». Comme il l'affirme, il a choisi ce problème car il est « semblable » au problème-maison dont la construction a été abandonnée par Cédric. En ce qui concerne l'utilisation des instruments de dessin, il laisse à l'élève toute liberté de les choisir, afin de ne pas influencer les procédures de résolution qu'il mettra en oeuvre. Ensuite, il reprend la réponse de Cédric au problème-maison, dans le but de l'amener à analyser ce qui est juste et ce qui est faux dans sa construction.

Comme pour les élèves précédents, le professeur s'appuie fortement sur ce qu'il observe de l'activité de l'élève pour construire son projet d'enseignement. De plus, cette analyse confirme aussi que, pour ce professeur, l'apprentissage de la symétrie orthogonale par l'élève passe par l'apprentissage des propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances à l'axe.

Professeur 2

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _2	Contrôles associés
Cédric semble avoir une idée globale de la symétrie avec égalité de distances ;- par contre, il ne dispose pas d'outils de construction correcte et fait une confusion entre symétrie axiale et symétrie centrale.	Σdist_point/point
Il ne semble pas percevoir la conservation des angles.	(absence du contrôle Σforme)

Tableau 99. Prof_2 : Prise d'information sur l'activité de Cédric

Comme le Prof_1, ce professeur identifie chez Cédric la connaissance de l'égalité des distances. Il remarque qu'il manque des outils à Cédric pour mener à bien la construction du symétrique d'une figure, sans pour autant expliciter de quels outils il s'agit. De plus, il lui semble que Cédric confond les symétries axiale et centrale. Cette hypothèse peut être fondée sur la réponse de Cédric au problème segment-losange. Enfin, le professeur suppose que Cédric ne prend pas en compte la propriété de conservation des angles. Ceci peut être dû au fait que Cédric n'a pas contrôlé sa construction de l'image du grand rectangle de la figure-maison par cette propriété.

Séquence didactique

<table>
<tr><th colspan="2">Extraits du questionnaire du Prof_2</th><th>Problème</th><th>Objectif</th></tr>
<tr><td colspan="2">Je commencerais par lui présenter des situations oui-non mêlant différentes transformations [...] afin de fixer sa représentation sur la symétrie axiale.</td><td>Problèmes de reconnaissance de l’axe de symétrie</td><td>Amener l’élève à développer les images mentales associée à la symétrie axiale par opposition aux autres isométries</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Puis, je proposerais un travail sur quadrillage avec systématiquement la vérification
- par pliage,
- par utilisation de l’équerre.</td><td>Symétrique d’un point</td><td>Pb 15</td><td rowspan="5">Amener l’élève à dégager Σortho, et Σdist et/ ou mettre en œuvre Σpoint_invariant
Amener l’élève à formuler des explications : mise en œuvre de Σortho et Σpliage_2</td></tr>
<tr><td>Symétrique d’une figure et observation du symétrique du point D</td><td>Pb 07</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formulation des explications et construction avec quadrillage et vérification à l’équerre</td><td>Pb 02</td></tr>
<tr><td>Construction sur quadrillage de la figure de l’« item d)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avec observation sur les oiseaux et utilisation du milieu de [AA’] et [BB’]</td><td>Pb 01</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Application au Pb 06 et vérification par pliage conservation angles
Construction de la maison à l’équerre compas (ou règle graduée) et en plaçant des points A, B pour rappeler le Pb 01
Vérification par pliage (ou calque)</td><td>Pb 06</td><td rowspan="2">Amener l’élève à dégager Σforme
Amener l’élève à réinvestir Σortho et Σdist
Amener l’élève à mettre en œuvre Σpliage_2 ou Σcalque_1</td></tr>
<tr><td>Pb 18</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pour travailler sur des figures qui ont des intersections avec l’axe (construction à l’équerre pour rappeler le Pb 01)</td><td>Pb 04</td><td>Amener l’élève à réinvestir Σpoint_invariant, Σortho, Σdist et Σforme</td></tr>
</table>

Tableau 100. Prof_2 : Séquence didactique proposée pour Cédric

Le professeur commence sa séquence en proposant un problème de reconnaissance et de construction de l’axe de symétrie[61]. Comme il l’affirme, dans ce problème les isométries sont mêlées. Le but de son choix est d’amener Cédric à *fixer sa représentation sur la symétrie*

[61] Voir feuille d’activité proposée par ce professeur, dans l’annexe 3, « Professeur 2 ».

axiale. La consigne du problème autorise l'utilisation du papier calque dans la résolution de ce problème.

Ensuite, il propose à Cédric un travail sur quadrillage, avec vérification par pliage et à l'équerre. Il propose alors les problèmes : Pb 15, Pb 07 et Pb 02. L'objectif du « Pb 15 » est d'amener Cédric à reconnaître le symétrique d'un point. Compte tenu des instruments et des techniques mis à disposition de Cédric, nous supposons qu'il souhaite l'amener à mettre en oeuvre les propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances à l'axe. En proposant « Pb 07 », il envisage de faire passer Cédric de l'identification de symétriques des points isolés à celle des symétriques des sommets d'une figure. Par ailleurs, en proposant ce problème, le professeur explicite son objectif de faire observer par Cédric le point invariant sur l'axe. Cette décision du professeur confirme notre hypothèse faite dans l'analyse des copies « Anissa » et « Béatrice » selon laquelle, pour ce professeur, cette propriété est fondamentale pour l'apprentissage par l'élève de la symétrie orthogonale, indépendamment de son état de connaissances. Cette décision est due alors à sa connaissance mathématique. Enfin, en proposant « Pb 02 », le but du professeur est d'amener Cédric à *formuler des explications* et à construire le symétrique d'une figure sur quadrillage. Il insiste sur la vérification avec l'équerre, pour renforcer chez Cédric la connaissance de la propriété d'orthogonalité.

Nous pouvons interpréter les objectifs du professeur en proposant cette séquence destinée à amener Cédric à la fois à dégager et à mettre en œuvre les contrôles Σortho et Σpoint_invariant, et à renforcer le contrôle Σdist.

Le professeur propose ensuite « Pb 01 » dans le but que Cédric « observe » les oiseaux et « utilise » le milieu des segments [AA'] et [BB']. Il nous semble que le professeur cherche encore à montrer à Cédric l'égalité des distances des points symétriques à l'axe.

Le professeur propose ensuite « Pb 06 » en demandant à Cédric de vérifier par pliage et d'observer la conservation des angles de la figure. En fait, il s'agit certainement de mettre en évidence la conservation de la mesure des angles, que l'on voit bien avec les triangles qui sont superposables. Le professeur cherche à faire dégager le contrôle par la forme qui semble avoir manqué à Cédric dans la construction du problème-maison, car il a construit un quadrilatère non rectangle comme symétrique du rectangle. Donc son but était d'amener Cédric à dégager Σ_forme. Puis, il propose « Pb 18 ». Pour construire la figure symétrique, Cédric doit utiliser l'équerre et le compas (ou la règle graduée). Cependant, le professeur fait une modification du « Pb 18 ». Il placerait deux points A et B sur la figure pour rappeler à Cédric ce qu'il a observé dans le « Pb 01 ». En mettant ces points en évidence sur la figure, ainsi qu'en indiquant les instruments à utiliser, il met en place une sorte de guidage pour que Cédric puisse mener à bien sa construction. Il semble que le professeur envisage d'amener Cédric à mettre en œuvre le contrôle Σortho. Par ailleurs, il se réfère à la conservation des angles dégagés dans le problème « Pb 06 ». Ceci peut indiquer qu'il envisage également d'amener

Cédric à réinvestir le contrôle Σ_forme. Enfin, il suggère de vérifier la construction par pliage ou calque. Le professeur termine sa séquence, en proposant à Cédric de travailler avec des figures qui coupent l'axe de symétrie (Pb 04). En effet, il cherche à amener Cédric à réinvestir le contrôle Σpoint_invariant qu'il a dégagé dans le travail sur « Pb 07 ». Le professeur indique à nouveau l'utilisation de l'équerre *pour rappeler le Pb 01*. Cette décision semble confirmer la conception mathématique du professeur qui soutient de la construction de ses projets d'enseignement de la symétrie orthogonale. Pour lui, l'enseignement la symétrie orthogonale passe par l'apprentissage par l'élève de la propriété d'invariance des points sur l'axe.

<u>Professeur 3</u>

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _3	Contrôles associés
Dans la construction (ou la reconnaissance) du symétrique d'un point, l'égale distance est prise en compte. C'est beaucoup plus fluctuant pour la perpendicularité.	Σdist Σortho (non stable)
Problème d'anticipation et planification 4) (problème-maison) *si plus complexe.*	absence de contrôles d'anticipation

Tableau 101. Prof_3 : Prise d'information sur l'activité de Cédric

Comme les Prof_1 et Prof_2, ce professeur identifie un contrôle concernant l'égalité des distances chez Cédric. De plus, comme le Prof_1, il constate une certaine instabilité du contrôle lié à la perpendicularité. En ce qui concerne le problème-maison, il semble expliquer l'abandon de la construction de Cédric par la difficulté d'anticiper et de planifier l'action à réaliser.

Séquence didactique

<table>
<tr><th>Extraits du questionnaire du Prof_3</th><th>Problème</th><th>Objectif</th></tr>
<tr><td>Si l'hypothèse « égale distance » est réaliste, Cédric dira plutôt E que C</td><td>Pb 15</td><td rowspan="3">a) Tester l'absence du contrôle Σortho
Amener l'élève à re-dégager Σdist et Σortho</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Donc retour sur la connaissance</td><td>Pb 08</td></tr>
<tr><td>Pb 01</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Justification avec perpendicularité et milieu</td><td>Pb 12</td><td rowspan="3">b) Amener l'élève à réinvestir Σdist et Σortho</td></tr>
<tr><td>Pb 13</td></tr>
<tr><td>Pb 11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Faire remarquer la conservation des longueurs et des angles (le symétrique et la figure sont superposables par pliage)</td><td>Pb 04</td><td rowspan="2">c) Amener l'élève mettre en œuvre Σtaille_1, Σforme et vérification par Σpliage_2</td></tr>
<tr><td>Pb 18</td></tr>
</table>

Tableau 102. Prof_3 : Séquence didactique proposée pour Cédric

Pour Cédric, le professeur propose une séquence didactique partagée en trois étapes. La première consiste à vérifier son hypothèse sur l'état de connaissances de l'élève avant de proposer une activité de remédiation. Il propose alors le problème « Pb 15 ». Le choix du symétrique de A permet au professeur de conclure si l'élève envisage l'orthogonalité ou non. En effet, la prise en compte de l'orthogonalité et de l'égalité des distances mène au choix de C, tandis que la prise en compte de l'égalité des distances uniquement, mène au choix de E. Dans le deuxième cas, le professeur propose les problèmes « Pb 08 » et « Pb 01 », dans le but d'amener Cédric à dégager la connaissance manquante. Dans ces problèmes, la perpendicularité des droites reliant deux points symétriques à l'axe, ainsi que l'égalité de distances, sont mises en évidence par le codage sur les figures.

Dans l'étape « b » de sa séquence, le professeur propose les trois problèmes suivants : « Pb 12 », « Pb 13 » et « Pb 11 », concernant la reconnaissance et/ou la construction d'axe de symétrie de figures données. D'après l'explication du professeur, son but est d'amener Cédric à justifier qu'une droite est axe de symétrie d'une figure avec les propriétés de « perpendicularité » et de « milieu ».

Dans l'étape « c », le professeur propose les problèmes « Pb 04 » et « Pb 18 ». Il s'agit de problèmes de construction du symétrique des figures complexes. Le but du professeur est d'amener Cédric à remarquer la conservation des longueurs et des angles. Ceci se ferait par l'utilisation du pliage pour vérifier la construction : *le symétrique et la figure sont superposables par pliage*. Nous avons observé dans l'analyse des productions du professeur pour Anissa et Béatrice, que ce professeur insistait sur la mise en relation symétrie/pliage. Cette décision pour Cédric confirme cette hypothèse.

Comme dernier problème de sa séquence, il propose à Cédric le « Pb 18 ». Pour cette décision, l'unique explication donnée est : *dans l'épreuve*. Il nous semble que le but du professeur est de tester la stabilité des connaissances acquises au cours de la résolution des problèmes. Autrement dit, son but serait d'établir un nouveau diagnostic.

Professeur 4

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _4	Contrôles associés
J'ai du mal à me faire une idée. *Cédric semble savoir à peu près reconnaître que 2 figures sont symétriques (exercice1* (problème-flèche) *5a) b) en partie pour le 4)* (problème-maison)*) mais il perd ses repères dans un environnement plus complexe (exercice2)* (problème segment-losange) *Il semble manquer de moyens sûrs ou stables de validation de ses choix ou de ses constructions, ou d'un manque de moyens de contrôle.* **Extrait de l'entretien** : *non stable, ça veut dire […] que là* (problème-maison, droites perceptivement orthogonales à l'axe) *il a l'air d'y avoir quelque chose de perpendiculaire à l'axe… et là* (même problème droite horizontale) *il fait quelque chose qui n'est pas perpendiculaire.*	Σortho (non stable) Manque de contrôle pour valider

Tableau 103. Prof_4 : Prise d'information sur l'activité de Cédric

En ce qui concerne les problèmes de reconnaissance, le professeur identifie chez Cédric une certaine compétence à reconnaître deux figures symétriques, mais qui n'est pas stable dans un *environnement plus complexe*. Ici, le professeur se réfère au problème segment-losange, où le segment est une sous-figure d'une figure complexe et où Cédric a donné une réponse erronée. En prenant en compte également les constructions de Cédric, il identifie une certaine instabilité, voire un manque, de moyens de contrôle. Lors de l'entretien, nous lui avons demandé en quoi consistait pour lui cette instabilité, ce manque de contrôle. L'explication du professeur (cf. tableau ci-dessus) renvoie à la non stabilité du contrôle Σortho.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_4	Problème	Objectif
Je lui proposerais un travail – pour qu'il fasse (avec) *avec plus de « rigueur » ses constructions du symétrique d'un point, à l'équerre et à la règle graduée.* *Fait soigneusement (angles bien droits)*	Pb 08	Amener l'élève à dégager Σortho, et aussi Σdist
Si le symétrique d'un segment (Pb d'axe oblique) (gêne pour Cédric à l'exercice 2)	Pb 15	

Le problème Pb 04 qui combine différents axes et la possibilité de faire des constructions simples et soignées	Pb 04	Amener l'élève à mettre en œuvre Σdist et Σortho
Où l'on voit (pour le a)) (item a : parallélogramme) *que 2 segments de même longueur, à la même distance d'un axe et parallèles à cet axe, peuvent ne pas être symétriques (s'ils sont décalés)*	Pb 12	Montrer la non validité de Σparallélisme_segment

Tableau 104. Prof_4 : Séquence didactique proposée pour Cédric

Ce professeur propose tout d'abord un travail avec le problème « Pb 08 » (reconnaissance et construction d'un point symétrique) en envisageant que Cédric fasse avec plus de « rigueur » la construction du symétrique d'un point. Pour construire ces points, il doit utiliser l'équerre et la règle graduée. Le choix de cette méthode confirme notre hypothèse faite au cours de l'analyse de la copie Anissa, qu'en proposant ces instruments il amène l'élève à penser aux propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distance, ce qui constitue une sorte de guidage. Puis, il propose « Pb 15 » qui consiste à identifier le symétrique d'un point donné sur quadrillage. Il prend en compte le fait que l'axe de symétrie dans ce problème est oblique, ce qui a pu gêner Cédric dans la reconnaissance du symétrique du segment [MN] dans le problème segment-losange. Nous pensons que par ce problème, le professeur veut amener Cédric à mettre en œuvre les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances dans le cas, plus simple, d'une figure qui ne comporte qu'en un point isolé.

Ensuite, le professeur propose des problèmes de construction de figures symétriques. Il précise deux raisons pour le choix de ce problème. D'une part, parce que les axes de symétrie dans les figures données ont des orientations différentes (verticale, oblique, horizontale). D'autre part, parce que ce problème donne la possibilité de faire des constructions *simples et soignées*. D'après le professeur, la simplicité réside dans le fait que *ces figures possèdent peu de segments, contrairement à la maison*. Cette deuxième raison peut montrer un effort du professeur pour simplifier la tâche de l'élève. Ceci montre que la caractérisation de sa conception d'enseignement/apprentissage suite à l'analyse d'Anissa et Béatrice, se confirme.

Pour terminer sa séquence, il propose le problème « Pb 12 » (reconnaissance et construction d'axe de symétrie). Dans ce choix, il ne prend en compte que le parallélogramme (item a). Son but est de montrer à Cédric que *2 segments de même longueur, à la même distance d'un axe et parallèles à cet axe peuvent ne pas être symétriques (s'ils sont décalés)*. Dans sa prise d'information sur l'activité de cet élève, le professeur ne se réfère pas à la conservation ou non, par Cédric, du parallélisme des segments dans la résolution des problèmes. Nous lui avons alors demandé de nous fournir des informations supplémentaires à propos de ce choix ,et aussi comment il pense montrer cela à Cédric. Le professeur répond qu'il avait fait ce choix à cause *de la réponse de l'élève au problème segment-losange* (rappelons que Cédric a choisi le segment symétrique dans le prolongement du segment initial) et qu'il le travaillerait avec *le pliage, par exemple*. Nous pensons alors que ce professeur peut attribuer le choix du segment [MO] comme symétrique de [NM] (problème segment-losange) à la conservation du parallélisme des segments symétriques. Ainsi, en proposant ce problème, il cherche à montrer la non validité de Σparallélisme_segment.

Professeur 5

Prise d'information sur l'activité de l'élève

Extraits du questionnaire du Prof _5	Contrôles associés
Il lie la symétrie à la notion de distance mais indifféremment, distance à une droite (sait-il vraiment ce que c'est ?) ou distance à un point.	Σdist_point/point Σortho (non stable)
Dès que l'axe est oblique, il ne visualise pas le symétrique d'une figure. Il ne sait pas construire le symétrique d'un point.	Manque d'images mentales, donc de moyens de contrôle pour anticiper
Il est plus performant dans la recherche d'axes. A noter qu'il trace un axe supposé, puis l'élimine sans penser à l'effacer (l'« item d » de l'exercice 5). *Là aussi, pas de constructions, mais distances*	Σdist

Tableau 105. Prof_5 : Prise d'information sur l'activité de Cédric

Le professeur identifie un contrôle de distance chez Cédric, mais il se pose la question : de quelle distance s'agit-il ? D*istance à une droite ou distance à un point* ? Le professeur s'interroge à propos de la prise en compte de la perpendicularité par Cédric. Plus loin, dans sa séquence, le professeur affirme : *il reporte les longueurs mais hésite entre perpendicularité ou pas*. De plus, pour lui, Cédric a une difficulté à « visualiser » une figure symétrique ou à construire le symétrique d'un point quand l'axe de symétrie est oblique. Cela signifie l'absence de contrôles pour anticiper une action.

Séquence didactique

Extraits du questionnaire du Prof_5	Problème	Objectif
Comment superposer F et F' ? Quelle manipulation ? *Oral :* *Le mot pliage devrait revenir dans sa tête* *Pliage suivant quelle droite ?* *C'est une symétrie par rapport à quelle droite ?*	Pb 01	Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec le pliage le long de l'axe : re-dégager Σpliage_2

Ensuite je proposerais, comme avec Anissa, de mettre en relief l'orthogonalité (il reporte les longueurs, mais hésite entre perpendicularité ou pas (exercice 4) (problème-maison)	Voir séquence didactique proposée pour Anissa (cf. p. 240)

Tableau 106. Prof_5 : Séquence didactique proposée pour Cédric

Comme pour les élèves Anissa et Béatrice, ce professeur démarre sa séquence didactique pour Cédric avec un travail à l'oral, en s'appuyant sur l'aspect visuel de la symétrie. Pour ce faire, il propose le problème Pb 01. Son objectif est de réactiver les connaissances de Cédric sur le pliage et par la même occasion, l'aider à développer les images mentales associées à la symétrie. Ensuite, il propose la même séquence de problèmes que pour Anissa, qui consiste à construire le symétrique d'un point d'abord, et puis des figures symétriques (avec ou sans quadrillage), en utilisant l'équerre. Cependant, le professeur signale que cette fois-ci il mettrait l'accent sur l'orthogonalité, même si pour les autres élèves il recommande également l'utilisation de l'équerre.

Dans la prise d'information sur l'activité d'Anissa, ce professeur n'a explicité que des connaissances erronées. Chez Béatrice et Cédric, il identifie quelques connaissances correctes, même si elles ne lui semblent pas suffisamment stables. Cependant, le professeur propose la même séquence de problèmes pour ces trois élèves. Nous lui avons demandé plus d'informations à propos de cette décision. Sa réponse à cette question est la suivante :

Extrait de l'entretien : *Oui bah… cette fois-ci, mon but étant de faire remarquer l'orthogonalité, quoi… là, lui les distances égales… mais l'orthogonalité il voit beaucoup moins. Donc, ces seraient les mêmes éléments, mais ces seraient sans doute pas les mêmes questions* […]. *Je mettrais l'accent sur l'orthogonalité.*

La réponse du professeur indique que dans son projet d'enseignement, la différence entre ces trois élèves réside dans les étapes du travail à l'oral, où il adapterait les questions à chaque élève.

6.4.2. Synthèse des résultats obtenus

La prise d'information sur l'activité de Cédric

Contrôles (Σ)	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Σdist					
Σortho	quasi absent		non stable	non stable	non stable
Σdemi_plan					
Σforme		absent			
Σpliage_2					
Autre	Σdist_point/ point	Σdist_point/ point	absence Σ p/ anticiper	absence Σ p/ valider	Σdist_point/ point absence Σ p/ anticiper

Tableau 107. Prise d'information des professeurs sur l'activité de Cédric : description en termes de contrôles

Comme nous pouvons le constater à partir du tableau ci-dessus, l'avis quasi unanime des professeurs est que Cédric possède le contrôle par l'égalité des distances, Cependant, pour trois de ces professeurs il s'agit de la distance point/point, comme chez Béatrice. Par ailleurs, le contrôle par l'orthogonalité est identifié comme non stable, voire quasi absent chez Cédric.

Trois professeurs remarquent l'absence de contrôles pour anticiper ou pour valider chez Cédric. Le Prof_2 suppose l'absence du contrôle Σforme.

Projets d'enseignement

Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Amener l'élève à dégager le Σortho	Amener l'élève à développer les images mentales associées à la symétrie axiale par opposition aux autres isométries	Tester l'absence du contrôle Σortho Amener l'élève à re-dégager Σdist et Σortho	Amener l'élève à dégager Σortho, et aussi Σdist	Amener l'élève à développer les images mentales de la symétrie en relation avec pliage par rapport à l'axe : re-dégager Σpliage_2
Amener l'élève à distinguer Σdist (point-droite) de Σdist_point/point	Amener l'élève à dégager Σortho, et Σdist et/ou mettre en œuvre Σpoint_invariant	Amener l'élève à réinvestir Σdist et Σortho	Amener l'élève à mettre en œuvre Σdist et Σortho	Amener l'élève à réinvestir les contrôles Σortho, Σdist et Σsens_inverse
Amener l'élève à formuler Σortho et Σdist	Amener l'élève à formuler des explications : mise en œuvre de Σortho	Amener l'élève à mettre en œuvre Σtaille_1, Σforme et vérifier par Σpliage_2	Montrer la non validité de Σparallélisme_seg ment	Vérifier à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles : établir un nouveau

	et Σpliage_2			diagnostic
Amener l'élève à mettre en œuvre Σortho et Σdist pour analyser sa construction, et formuler	Amener l'élève à dégager Σforme			
Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist, pour construire et pour analyser	Amener l'élève à réinvestir Σortho et Σdist			
	Amener l'élève à mettre en œuvre Σpliage_2 et Σcalque_1			
	Amener l'élève à réinvestir Σpoint_invariant, Σortho, Σdist et Σforme			

Tableau 108. Objectifs des projets d'enseignement des professeurs : cas Cédric

D'après le Prof_1, Cédric mobilise un contrôle par l'égalité des distances, mais il ne s'agit pas pour lui de la distance point/droite (Σdist). Son premier objectif est alors de faire redécouvrir à Cédric la notion de distance d'un point à une droite. En effet, d'après sa conception d'enseignement/apprentissage, il amène l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes. Pour cela, il propose des problèmes où Cédric sera amené à distinguer les distances point/point et point/droite, cette dernière étant liée à la notion de droite perpendiculaire. Ensuite, comme pour les deux élèves précédentes, le professeur amène Cédric à formuler les *propriétés fondamentales* de la symétrie. Cédric doit aussi se servir de ces propriétés pour expliciter les raisons des erreurs commises dans la résolution des problèmes de la copie. Ainsi, il nous semble que la structure de contrôle de la conception cible contiendra les contrôles suivants : Σdist, Σortho.

Le Prof_2 constate également que Cédric à une idée globale de la symétrie avec égalité des distances. Cependant, pour lui, Cédric fait une confusion entre les symétries orthogonale et centrale. De plus, il ne semble pas percevoir la conservation des angles par la symétrie. Son premier objectif est alors de développer chez l'élève les images mentales associées à la symétrie axiale par opposition aux autres isométries. Ensuite, comme pour les deux élèves précédents et d'après sa conception mathématique de la symétrie orthogonale, son objectif est d'enseigner à Cédric les propriétés d'orthogonalité, d'égalité des distances et celle d'invariance des points sur l'axe de symétrie. L'étape suivante de son projet d'enseignement pour Cédric est de l'amener à dégager le contrôle par la forme de la figure. La structure de contrôle de la conception visée contiendrait ainsi les contrôles suivants : Σdist, Σortho, Σpoint_invariant, Σforme.

Comme les professeurs précédents, le Prof_3 identifie un contrôle chez Cédric concernant l'égalité des distances, mais il constate une certaine instabilité du contrôle lié à la perpendicularité. Ainsi, son premier objectif est de vérifier son hypothèse sur l'état de connaissance de l'élève avant de proposer une activité de remédiation. Il propose alors un problème pour tester l'absence de Σortho. Si son hypothèse se confirme, il envisage d'amener Cédric à dégager ce contrôle absent. Il envisage également d'amener Cédric à remarquer la conservation des longueurs et des angles par la symétrie, en lui montrant que les figures symétriques se superposent par pliage. Ainsi, la structure de contrôle de la conception cible contiendrait les contrôles suivants : Σortho, Σdist, Σtaille_1, Σforme, Σpliage_2.

Le Prof_4 identifie chez Cédric une certaine compétence pour reconnaître des figures symétriques, mais constate l'instabilité du contrôle lié à la perpendicularité et le manque de contrôles de validation. Il envisage alors d'amener l'élève à dégager le contrôle par la perpendicularité. Par ailleurs, il suppose que la réponse erronée de Cédric à un des problèmes de reconnaissance peut être liée à une association par l'élève de la symétrie axiale et du parallélisme des segments. Pour cette raison, il envisage également de montrer à Cédric, par l'utilisation du pliage, la non validité du contrôle Σparallélisme_segment. La conception cible devrait alors contenir les contrôles suivants : Σortho, Σdist, Σpliage_2.

Le Prof_5 suppose également que Cédric lie la symétrie à la notion de distance, toutefois, il ne s'agirait pas de la distance point/droite. De plus, il constate chez l'élève un manque d'images mentales, donc de moyens de contrôles pour anticiper. Son projet d'enseignement pour Cédric est assez proche de ceux proposés pour Anissa et Béatrice. Il amène d'abord l'élève à dégager le contrôle par pliage, puis à prendre conscience que la symétrie inverse le sens de la figure, et enfin à dégager et à réinvestir les contrôles liés aux propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances. Ainsi, la structure de contrôle de la conception visée devrait contenir les contrôles suivants : Σortho, Σdist, Σsens_inverse, Σpliage_2.

<u>Les problèmes choisis</u>

ID Problème	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4	Prof_5
Pb 01					
Pb 02					
Pb 03					
Pb 04					
Pb 05					
Pb 06					
Pb 07					
Pb 08					
Pb 09					
Pb 10					
Pb 11					

Pb 12					
Pb 13					
Pb 14					
Pb 15					
Pb 16					
Pb 17					
Pb 18					
Autres					
Pb-flèche					
Pb segment-losange					
Pb-segment					
Pb-maison					
Exercice 5 (reconnaissance et construction d'axe de symétrie)					

Tableau 109. Problèmes choisis par les professeurs dans les séquences didactiques pour Cédric

Comme dans le cas de Béatrice, le choix des problèmes par les professeurs pour favoriser l'apprentissage de Cédric est diversifié. Toutefois quatre problèmes ressortent comme les plus fréquemment proposés par les professeurs : Pb 01, Pb 04, Pb 15 et Pb 18.

Avec les problèmes « Pb 01 » et « Pb 15 », les professeurs cherchent à faire travailler l'élève sur les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances à l'axe de la symétrie. Le Prof_4 utilise le Pb 15 dans le but de tester son hypothèse concernant l'absence du contrôle Σortho. Les problèmes « Pb 04 » et « Pb 18 » sont proposés dans le but de réinvestir ces connaissances.

Connaissances intervenant dans la prise de décisions didactiques par les professeurs

Professeur 1

Connaissances	Anissa	Béatrice	Cédric
Connaissances des programmes :			
symétrie et pliage			
technique du calque			
manipulation			
Connaissances des mathématiques			
propriétés fondamentales : orthogonalité et égalité des distances			
la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage			
Connaissances relevant d'expérience de l'enseignement et du fonctionnement des élèves :			
aspect visuel de la symétrie			
Conception de l'enseignement/apprentissage			
on apprend à partir de ce qu'on sait déjà (appui sur les connaissances anciennes correctes)			

on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes soient insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées avant de dégager des nouvelles) ;			
amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes ;			
apprentissage progressif (première remédiation dans un premier temps, avant de passer à des cas plus complexes)			
la formulation favorise l'apprentissage			
importance du réinvestissement des connaissances			

Professeur 2

Connaissances	Anissa	Béatrice	Cédric
Connaissances des programmes : symétrie et pliage			
technique du calque			
Connaissances des mathématiques propriétés d'orthogonalité, d'égalité des distances et d'invariance des points			
Conception de l'enseignement/apprentissage on apprend à partir de ce qu'on sait déjà (appui sur les connaissances anciennes correctes)			
les connaissances nouvelles permettent d'invalider les anciennes			
amener l'élève à dégager de nouvelles connaissances qui se substitueront aux anciennes ;			
vérifier leur acquisition en cours de l'apprentissage (établir un nouveau diagnostic)			
le professeur prépare des exercices progressifs (guider l'élève pour qu'il puisse mener à bien sa construction			
la formulation favorise l'apprentissage			
importance du réinvestissement des connaissances			

Professeur 3

Connaissances	Anissa	Béatrice	Cédric
Connaissances des programmes : symétrie et pliage			
manipulation			
apprentissage de transformations, au collège			
Connaissances des mathématiques la symétrie est caractérisée par la superposition de figures par pliage			
Conception de l'enseignement/apprentissage on ne peut pas apprendre une nouvelle connaissance tant qu'on n'est pas conscient que nos anciennes soient insuffisantes (déstabilisation des connaissances erronées, avant d'en dégager de nouvelles)			
la formulation favorise l'apprentissage			
anticipation de l'action à réaliser			
importance du réinvestissement des connaissances			

Professeur 4

Connaissances	Anissa	Béatrice	Cédric
Connaissances des programmes : symétrie et pliage			
Connaissances des mathématiques propriétés de l'orthogonalité et d'égalité des distances			
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : Les situations de guidage fonctionnent en certains cas			
Conception d'enseignement/apprentissage L'élève apprend à partir des exercices progressifs ; le professeur guide l'élève dans leur réalisation, en proposant des étapes ; « mâcher » le travail de l'élève pour lui faciliter la tâche			
le contrôle des pré-requis permet de prendre des décisions par rapport à l'opportunité d'engager l'élève dans un nouvel apprentissage			
lorsque l'élève a réussi un exercice, il doit réussir tout exercice qui met en jeu le même savoir			
mobilisation de connaissances nouvelles pour déstabiliser des connaissances erronées			
importance du réinvestissement des connaissances			

Professeur 5

Connaissances	Anissa	Béatrice	Cédric
Connaissances des programmes : symétrie et pliage			
Connaissances des mathématiques propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances			
Connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et du fonctionnement des élèves : Les élèves sont très visuels (s'appuyer sur la visualisation avant de passer à la mathématisation), efficacité du travail à l'oral, gagner du temps)			
Conception d'enseignement/apprentissage en cas d'échec de l'élève, le professeur doit envisager de tout recommencer			
le professeur prépare des exercices progressifs (construction d'un point symétrique, deux points...)			
vérification régulière des acquis de l'élève : établir un nouveau diagnostic			
importance du réinvestissement des connaissances			

6.5. Conclusion

L'objectif de cette expérimentation auprès des professeurs a été de répondre à deux questions de recherche. La première consiste à savoir quels sont les types de problèmes qui peuvent favoriser le passage d'une conception initiale (Ci) à une conception cible (Cj), et comment décrire ces problèmes en termes de variables didactiques. La deuxième question concerne l'identification des éléments qui fondent les décisions didactiques prises par les professeurs dans le but de faire évoluer Ci vers Cj. Pour ce faire, nous avons fourni aux professeurs les copies « Anissa », « Béatrice » et « Cédric ». L'analyse de ces copies a été présentée dans le chapitre précédent.

Pour réaliser cette étude, nous nous sommes appuyés d'une part sur la formalisation des contrôles relatifs à la symétrie orthogonale que nous avons réalisée a priori, et d'autre part sur le modèle des niveaux du professeur qui nous a servi d'outil d'analyse des productions des professeurs. Étant donné que nos professeurs sont placés au niveau du « projet didactique » (niveau +1) (cf. schéma 7, p. 41), nous avons cherché à identifier dans leurs productions les connaissances liées à leurs projets « global » (niveau +2) et « éducatif » (niveau +3) qui ont pu influencer leurs décisions didactiques.

Les connaissances qui semblent avoir influencé les décisions des professeurs sont les suivantes :

- connaissances des programmes scolaires ;
- connaissances relevant de l'expérience de l'enseignant et des connaissances du fonctionnement des élèves ;
- connaissances mathématiques ;
- conceptions de l'enseignement/apprentissage.

Prise d'information sur l'activité de l'élève (détermination des Ci)

Les résultats de nos études montrent que les conceptions des professeurs à propos de l'enseignement/apprentissage semblent avoir joué un rôle essentiel dans l'identification des conceptions initiales des élèves.

En partant des mêmes copies d'élèves, les professeurs ont fait des diagnostics différents. Certains professeurs ont identifié chez l'élève des contrôles corrects en plus de contrôles faux, même dans les cas où toutes les réponses données par l'élève sont erronées. D'autres semblent avoir repéré seulement ce qui est erroné dans ces réponses. Prenons l'exemple des Prof_1 et Prof_5 dans le cas d'Anissa :

- Le Prof_1 semble s'appuyer sur le fait que l'élève apprend à partir de ce qu'il sait déjà. Il cherche alors à trouver ce qui est juste et ce qui est faux, dans la production de cette élève. De cette manière, il constate d'une part que pour Anissa l'image d'un segment par la symétrie est un segment parallèle et que le segment image est obtenu par le déplacement horizontal. D'autre part, il constate qu'elle connaît la propriété de conservation de longueurs des segments par la symétrie, et qu'elle sait que les figures symétriques sont de part et d'autre de l'axe. La structure de contrôle de la conception Ci identifiée par ce professeur chez Anissa, contiendrait ainsi les contrôles erronés Σparallélisme_segment, Σtranslation, Σhor, et les contrôles corrects Σtaille_1, Σdemi-plan.
- Le Prof_5 considère qu'en cas d'échec, tout est à recommencer. Étant donné que les réponses d'Anissa sont toutes erronées, il constate l'absence du contrôle par superposition des figures par pliage chez cet élève, et que pour elle, la symétrie correspond à un glissement horizontal. Dans ce cas, la structure de contrôle de la conception Ci identifiée contiendrait les contrôles erronés suivants : Σtranslation et Σhor.

Ces exemples montrent que la conception initiale (Ci) identifiée par ces deux professeurs chez Anissa, n'est pas la même.

Construction des projets didactiques (détermination des Cj)

Les résultats de nos études montrent que la construction des projets d'enseignement des professeurs est fortement influencée par leurs conceptions sur l'enseignement/apprentissage, ainsi que par leurs propres connaissances à propos de la symétrie orthogonale. Pour illustrer ceci, reprenons encore les exemples des Prof_1 et Prof_5. A partir du diagnostic de la conception initiale chez Anissa, ces professeurs proposent les projets d'enseignement suivants :

- Pour le Prof_1, il est nécessaire d'amener l'élève à prendre conscience de l'insuffisance de ses connaissances anciennes, avant de l'engager dans l'apprentissage de nouvelles connaissances. Ainsi, il cherche d'abord à déstabiliser les contrôles erronés en proposant un travail avec le papier calque. Ensuite il cherche à renforcer les contrôles corrects pour enfin amener l'élève à dégager les connaissances nouvelles, orthogonalité et conservation des distances à l'axe. La structure de contrôle de la conception cible contiendrait les contrôles suivants : Σortho, Σdist, Σtaille_1, Σdemi_plan, Σcalque_1 ;
- Le Prof_5 cherche à développer chez Anissa des images mentales liées à la symétrie en s'appuyant sur le pliage. Anissa doit aussi prendre conscience que la symétrie inverse le sens de la figure. Dans la suite de la séquence, il cherche à faire dégager les propriétés d'orthogonalité et d'égalité des distances. La structure de contrôle de la conception cible contiendrait les contrôles suivants : Σpliage_2, Σsens_inverse, Σortho et Σdist.

Comme pour la conception initiale (Ci), ces exemples montrent que la conception cible (Cj) envisagée par ces professeurs peut être également différente.

Nous avons essayé de repérer les connaissances mathématiques à propos de la symétrie orthogonale qui semblent avoir influencé les décisions de chacun des professeurs :

- Pour le Prof_1, l'orthogonalité et l'égalité des distances sont les *propriétés fondamentales* à l'apprentissage de la symétrie orthogonale par l'élève. Les Prof_4 et Prof_5 ont privilégié également ces propriétés dans leurs projets.
- Le Prof_2, indépendamment de ce qu'il observe dans l'activité de l'élève, envisage de lui enseigner la propriété d'invariance des points sur l'axe de symétrie. Il semble que pour lui, l'enseignement de cette propriété soit essentiel pour l'apprentissage de cette notion par l'élève ;
- Pour le Prof_3, c'est la mise en relation de la symétrie avec la superposition des figures par pliage qui est l'aspect de la symétrie le plus important ;

Étant donné que les conceptions initiale et cible ne sont pas les mêmes pour tous les professeurs, nous n'avons pas pu faire d'analyse comparative en termes de problèmes utilisés par les professeurs pour favoriser le passage de l'une à l'autre. Ces résultats montrent que la méthodologie adoptée nous a permis d'apporter des éléments de réponse à la question Q4. Néanmoins, cette méthodologie a pu être une contrainte dans la recherche de la réponse à la question Q3. Il nous semble que pour décrire le passage d'une conception à une autre, il aurait fallu donner aux professeurs les conceptions Ci et Cj. Ceci reste ainsi, dans cette recherche, une perspective ouverte.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Retour à la problématique et questions de recherche

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de l'étude de prise de décisions didactiques. Notre principal intérêt a été d'étudier la façon dont les professeurs prennent les décisions didactiques afin de faire avancer les élèves vers l'apprentissage d'une connaissance visée, et aussi les contraintes qui influencent ces décisions. Ceci nous a amené à modéliser, dans un premier temps, les connaissances des élèves concernant un objet mathématique donné.

Notre recherche est ancrée dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), où une connaissance est caractérisée par les situations ou les problèmes qui lui sont spécifiques. En effet, cette théorie s'intéresse à la modélisation des connaissances que l'on veut enseigner, ou celles que l'on veut que l'élève apprenne. De plus, elle préconise que les connaissances se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle des situations. Ainsi, au sein de cette théorie, nous avons choisi des outils qui contiennent des principes méthodologiques et des règles pour rendre compte de notre objectif de modélisation des connaissances d'élèves d'une part, et de la prise de décisions didactiques d'autre part. Ces outils sont d'une part le modèle cK¢ (Balacheff 1995, 2002), et d'autre part le modèle des niveaux de l'activité des professeurs (Margolinas 2002, 2005).

Dans le modèle cK¢, l'apprentissage est considéré comme le passage d'une conception à une autre. En partant de cette hypothèse, nous avons cherché à caractériser les conceptions d'élèves sur un objet mathématique donné. La notion mathématique que nous avons choisie est la symétrie orthogonale. Le choix d'une notion du domaine géométrique est issu d'une part, de l'hypothèse que la géométrie peut favoriser l'interaction entre les connaissances liées à la perception et les connaissances géométriques. Cette caractéristique de la géométrie est intéressante pour notre modélisation, dans la mesure où elle facilite le repérage des connaissances sous-jacentes à la résolution des problèmes par l'élève. D'autre part, le choix de la symétrie orthogonale a été motivé par les résultats des recherches dans ce domaine qui sont significatifs et consistants, constituant ainsi un point de départ pour notre étude.

En nous appuyant sur la formalisation proposée par le modèle cK¢ où une conception est caractérisée par le quadruplet (P, R, L, Σ), nous avons fait le choix d'entrer dans la modélisation à partir de l'identification de la structure de contrôle des conceptions de la symétrie orthogonale. Ce choix est fondé sur l'hypothèse que ces structures prennent une place importante dans l'étude a priori des comportements d'un sujet qui résout un problème, car ils rendent compte de son fonctionnement dans la conduite de l'action réalisée (Gaudin, 2005). De cette problématique sont issues les deux premières questions de recherche :

> *Q1 : Comment caractériser l'ensemble des contrôles des conceptions susceptibles d'être mobilisés par l'élève dans la résolution d'un problème relatif à la symétrie orthogonale ?*
>
> *Q2 : À partir de l'ensemble des contrôles, peut-on accéder aux autres éléments qui caractérisent une conception, notamment les opérateurs et les problèmes ? Si oui, comment ?*

Nous empruntons au modèle cK¢ l'hypothèse que l'action rationnelle d'un sujet résolvant un problème est localement logique du point de vue de l'observateur. Ainsi, une conception C mise en œuvre par un sujet peut fonctionner pour résoudre un certain type de problème, et ne plus fonctionner pour en résoudre un autre. Une conception C est alors légitimée par une sphère de pratique. Cette légitimité s'impose alors en fonction du problème que le sujet résout. En effet, il existe des problèmes qui peuvent révéler la fausseté ou les limites de C, d'autres qui permettent de la renforcer, et d'autres encore qui permettent de la déstabiliser.

Cette hypothèse nous amène au cœur de la problématique de modélisation des décisions didactiques des professeurs. Étant donné que l'apprentissage est considéré comme le passage d'une conception à une autre, nous nous sommes demandé quels types de problèmes favorisaient ce passage. De cette interrogation est issue notre troisième question de recherche :

> *Q3 : Quels sont les types de problèmes qui favorisent le passage d'une conception initiale Ci à une conception cible Cj, et comment décrire ces problèmes en termes de variables didactiques ?*

Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à la question de savoir quels sont les éléments qui pourraient intervenir dans le choix de tels problèmes par les professeurs. La question que nous nous sommes posée est alors la suivante :

Q4 : Sur quels éléments se fondent les décisions didactiques prises par un professeur dont l'objectif est de faire évoluer les conceptions mobilisées par un élève ?

Dans ce qui suit, nous montrerons les principaux résultats de cette recherche.

Principaux résultats

Étude théorique

Dans le but de répondre aux questions Q1 et Q2, nous avons envisagé de modéliser les connaissances sur la symétrie orthogonale d'un élève générique.

Dans un premier temps, nous avons précisé la nature des problèmes mettant en jeu la symétrie orthogonale et les variables à prendre en compte dans notre recherche. Pour ce faire, nous avons pris comme point de départ les résultats des recherches concernant la problématique de construction du symétrique d'un segment, les orientations des programmes officiels en vigueur en France pour la classe de sixième du collège, ainsi que l'analyse de quelques manuels scolaires. Nous avons ciblé les types de problèmes : reconnaissance et construction de figures symétriques. Étant donné que les recherches précédentes sont placées dans la problématique de construction du symétrique d'un segment par rapport à l'axe de symétrie, nous avons choisi d'élargir notre étude aux figures complexes (composées de segments, d'arcs de cercle…).

Dans un deuxième temps, en partant de l'hypothèse que les contrôles rendent compte des critères qui renvoient au choix, à la décision, à l'adéquation et à la validité d'une action (Gaudin, 2002), nous avons réalisé une étude théorique de la notion de symétrie orthogonale du point de vue mathématique et didactique. Cette étude nous a permis d'identifier les critères qui peuvent être pris en compte par les élèves dans la résolution des problèmes de reconnaissance et de construction de figures symétriques, et d'envisager les différentes valeurs qu'ils peuvent admettre. Ces critères et les valeurs associées nous ont permis d'accéder aux contrôles mis en œuvre dans la résolution de tels problèmes. De plus, nous avons également formalisé d'autres contrôles qui ne relèvent pas de ces critères. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les théorèmes en acte identifiés dans les recherches, et sur l'étude des programmes et manuels scolaires.

Par ailleurs, l'anticipation de l'action concrète que l'élève peut réaliser sur la figure dans les problèmes de construction, nous a permis de décrire a priori les procédures susceptibles d'être utilisées par l'élève dans la résolution de ces problèmes (globales, semi-analytiques et analytiques). Soulignons que ces procédures ne concernent que les problèmes de construction de figures symétriques. En effet, le caractère implicite de l'action dans les problèmes de reconnaissance, qui rend difficile l'anticipation de cette action de l'élève, ne nous a pas permis de réaliser une telle description.

A partir de cette étude théorique, nous n'avons pas réussi à caractériser les autres éléments des conceptions. Nous pensons que la méthodologie adoptée n'est pas appropriée pour atteindre cet objectif. Ceci nous a conduit à mettre en place une expérimentation auprès des élèves pour pouvoir dégager ces éléments à partir des actions observées.

Expérimentation auprès des élèves

1. Résultats de l'analyse quantitative

L'étude quantitative nous donne un aperçu global des types de réponses, et des procédures utilisées par les élèves. Ce qui nous a permis d'identifier les variables didactiques qui ont pu influencer les choix de procédures des élèves.

Les résultats montrent que les élèves ont mieux réussi les problèmes de reconnaissance que les problèmes de construction. Notre hypothèse est que le fait que les réponses soient données joue un rôle important dans ces résultats. En effet, dans la résolution de ce type de problème, l'élève n'a pas besoin d'exécuter des actions concrètes sur la figure, la tâche consiste simplement à choisir parmi les figures candidates celle qui lui semble la plus pertinente. Ce choix peut relever de plusieurs aspects (explicitation des propriétés géométriques qui permettent d'affirmer que deux figures sont symétriques, perception spatio-graphique des figures symétriques, élimination de figures peu plausibles). Ainsi, la possibilité de donner une réponse erronée serait plus limitée.

Par ailleurs, cette étude confirme les résultats des recherches concernant le rôle de certaines variables didactiques. Les orientations verticale et horizontale des segments sur la feuille ont amené plusieurs élèves à choisir la direction horizontale, ou celle donnée par le prolongement d'un segment de la figure.

En ce qui concerne le type de procédures utilisées dans la construction, nos études montrent que les élèves privilégient les procédures analytiques (correctes ou non) pour construire les images des figures. Nous avons fait l'hypothèse que les instruments de dessin mis à disposition des élèves a pu jouer un rôle dans ce choix des élèves. Les procédures semi-analytiques apparaissent davantage dans la construction de l'image de la figure complexe (figure-maison) que dans la construction de l'image du segment. Nous avons fait l'hypothèse que les élèves ont eu recours à ces procédures dans le but de prendre appui sur les éléments de la figure, pour ensuite construire son image de façon perceptive globale. Ils s'appuient alors spontanément sur les propriétés de conservation des longueurs des segments et des mesures des angles par la symétrie.

2. Résultats de l'analyse des copies Anissa, Béatrice et Cédric

Dans le but d'étudier les décisions didactiques des professeurs, nous avons souhaité leur fournir les données à partir desquelles nous pourrions identifier les éléments sur lesquels ils s'appuient pour construire des séquences d'enseignement. Pour cela, nous étions amenés à réaliser une analyse de ces copies en termes de modèle cK¢.

Nous avons élaboré trois copies présentant une certaine diversité en termes de conceptions mobilisées. Pour les analyser, nous nous sommes appuyés sur la formalisation des contrôles construite a priori. Cette étude nous a permis d'identifier chez ces élèves les contrôles, les opérateurs et les systèmes de représentation des conceptions mobilisées par ces élèves dans la résolution de quatre problèmes donnés. Cependant, nous avons pu identifier les opérateurs mobilisés par les élèves dans les problèmes de construction, seulement. En effet, à partir de la méthodologie utilisée (analyse des copies), le caractère implicite de l'action des élèves dans les problèmes de reconnaissance ne nous a pas permis d'accéder à ces éléments. Nous pensons qu'il faudrait mettre en place un dispositif spécifique (une étude de cas avec enregistrement vidéo des actions des élèves, des entretiens avec les élèves, par exemple), et pouvoir accéder aux éléments de l'action de l'élève, notamment les opérateurs, mobilisés dans la résolution de problèmes.

Pour atteindre notre objectif de caractérisation des conceptions de ces trois élèves, nous avons mis en relation les éléments de conceptions dégagés chez ces élèves : les contrôles avec les opérateurs et les variables des problèmes résolus. Cette mise en relation nous a montré que dans certains cas, les variables du problème ont favorisé chez l'élève la mise en œuvre de contrôles différents. Nous avons fait l'hypothèse qu'il pouvait s'agir soit d'un cas d'évolution de la conception initialement mobilisée par l'élève, soit d'un cas de cohabitation de conceptions chez cet élève. Cependant, la caractérisation des éléments des conceptions ne nous semble pas suffisante pour caractériser la (ou les) conception(s) présente(s) chez le sujet. La question qui se pose est : comment savoir, à partir de ces éléments, s'il s'agit d'une ou de plusieurs conceptions cohabitant chez un même sujet ? Ainsi, la question de la caractérisation des conceptions reste-t-elle encore ouverte.

Par ailleurs, cette étude montre la pertinence et l'efficacité de la formalisation des contrôles que nous avons réalisée, dans le but de modéliser les connaissances de l'élève sur la symétrie orthogonale. En effet, dans certains cas où les réponses des élèves paraissaient confuses, voire contradictoires, grâce à l'analyse en termes de contrôles nous avons pu reconstituer un raisonnement cohérent chez le sujet dans la résolution des problèmes. Nous pensons ainsi avoir mis en évidence l'intérêt, didactique, d'étudier l'activité de l'élève en termes de structure de contrôle.

La caractérisation des éléments des conceptions, notamment de la structure de contrôle chez ces trois élèves, constitue le point de départ pour étudier la prise de décisions didactiques des professeurs.

Expérimentation auprès des professeurs

Nous avons présenté l'analyse des productions de cinq professeurs. A partir des copies des élèves que nous leur avons fournies (Anissa, Béatrice et Cédric), la tâche de ces professeurs consistait à décrire d'abord ce qui semblait, selon eux, être la symétrie orthogonale pour ces élèves, et ensuite à proposer un projet d'enseignement favorisant l'apprentissage de cette notion mathématique par les dits élèves. Nous avons cherché, dans les productions de ces professeurs, des éléments des réponses à nos questions Q3 et Q4. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur la formalisation des contrôles réalisée, et aussi sur le modèle des niveaux des professeurs.

Cette étude nous a permis d'identifier quelques éléments sur lesquels les professeurs fondent leurs décisions didactiques. Parmi ces éléments, nous avons repéré les connaissances des programmes scolaires, du fonctionnement des élèves, et notamment leurs connaissances des mathématiques et leurs conceptions de l'enseignement/apprentissage. C'est à la lumière de ces connaissances que les professeurs ont réalisé le diagnostic des conceptions initiales des élèves et qu'ils ont fixé les conceptions cibles de leur projet d'enseignement.

Étant donné qu'ils s'appuient sur des connaissances différentes, les conceptions Ci et Cj identifiées par ces professeurs chez les élèves ne sont pas les mêmes. Nous n'avons pas pu alors faire une analyse comparative en termes de problèmes utilisés par les professeurs pour favoriser le passage de l'une à l'autre. Nous pensons que la méthodologie adoptée s'est révélée efficace pour l'identification des éléments sur lesquels les professeurs s'appuient pour prendre leurs décisions. Cependant, elle a pu être une contrainte pour répondre à la question concernant la description du passage de la conception Ci à la conception Cj, en termes de problèmes et de variables didactiques. Ainsi, nous avons fait l'hypothèse que pour étudier ce passage, il allait falloir fournir aux professeurs la conception initiale Ci et la conception cible Cj.

Perspectives de recherche

A partir des résultats obtenus, d'autres questions sont apparues qui ouvrent des perspectives de recherche ultérieure :

Par rapport à la modélisation de connaissance s :

- A partir des contrôles, des opérateurs et des systèmes de représentation utilisés par un sujet dans la résolution de problèmes, comment savoir si une ou plusieurs conceptions sont présentes chez ce sujet ? Comment les caractériser ?
- Comment distinguer un cas de cohabitation entre plusieurs conceptions différentes, d'un cas d'évolution d'une conception à une autre chez un sujet ?

Par rapport à la modélisation de décisions didactiques :

- Quels sont les types de problèmes qui favorisent le passage d'une conception initiale Ci à une conception cible Cj, Ci et Cj étant connues, et comment décrire ces problèmes en termes de variables didactiques ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSLAN, S. (2005), L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale s : est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ? Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

ARTIGUE, M. (1989), Épistémologie et didactique, *Cahier DIDIREM,* n° 3, IREM de Paris.

ASSUDE, T. (2005), Time management in the work economy of a class, a case study: integration of Cabri in primary school mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 183-203.

ASTOLFI, J. P. (1997), *L'erreur, un outil pour enseigner*, Éd. E.S.F.

BALACHEFF, N. (2002), Cadre, registre et conception, *Les Cahiers Leibniz*. n° 58.

BALACHEFF, N. (2001), Les connaissances, pluralité de conceptions : le cas des mathématiques. *Les Cahiers Leibniz*, n°19.

BALACHEFF, N. (2000), Les connaissances, pluralité de conceptions (le cas des mathématiques). In : Tchounikine. *Actes de la Conférence Ingénierie de la Connaissance*, IC 2000, Toulouse. p. 83-90.

BALACHEFF, N. (1995), Conception, Connaissance et Concept. *Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques, Séminaires* 1994-1995. p. 219-244. Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 18, p. 147-176.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005), cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In *Mercier A. & Margolinas C. (Ed.), Balises en Didactiques des Mathématiques*, p. 75 – 106. Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions.

BALTAR, P. M. (1996), Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble.

BALTAR, P. M. (1998), Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège, *Petit x*, n° 49, p. 45-78.

BARBIN, E. (1991), Les Éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée. *Repères-IREM*, n° 4, p. 119-133.

BARBÉ. J. et al. (2005), Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 235-268.

BAUTIER, T. (1988), Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale plane. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD-IMAG, Institut Fourier, Université Joseph Fourier*. Grenoble, année 86-87, mai 88, p. 197-238.

BELLEMAIN, F. (1992), Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre. Thèse d'Université, LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier. Grenoble.

BERKASSAN, M. (1997), Modélisation et psychothérapie. *Journal Métaphore* n° 22, septembre 1997.

BERTHELOT, R., SALIN, M.-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 1.

BITTAR, M. (1998), Les vecteurs dans l'enseignement secondaire - aspects outil et objet dans les manuels - étude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier-crayon et Cabri-géomètre II. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

BLOCH, I. (2005), Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ? *Actes du Séminaire National des Didactiques des Mathématiques*, mars – 2005, Paris.

BLOCH, I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 1.

BLOCH, I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19, n° 2, p. 135-194.

BROCKART, J. P. & al. (1985), *Le fonctionnement des discours. Un modèle psychologique et une méthode d'analyse*, Paris, Delachaux & Niestlé, 175 pp. (2e édition, 1994).

BRONCKART, J.P. (1977), *Théories du langage. Une introduction critique*, Bruxelles, Dessart & Mardaga, 361 pp. (2e édition, 1984 ; 3e édition, 1987; 4e édition, 1995).

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques.

BROUSSEAU, G. (1990), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 9, n° 3, p. 309–336.

BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactiques des mathématiques*, Vol. 7, n° 2, p. 33-115.

BROUSSEAU, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 4, n° 2, p. 164-198.

BRUILLARD, E. (1997), *Les machines à enseigner*. Paris : Hermes.

BRUNER, J. S. (1960). *The process of Education*, Cambridge, Mass. Harvard University Press.

BURTON, R. R. & BROWN, J. S. (1976), A tutoring and student modeling paradigm for gaming environments. *In Colman, R. and Lorton, P. Jr. (Eds.) Computer science and education, ACM SIGCSE* Bulletin, 8, 1, 236-246.

CAPLAT, G. (2002), *Modélisation cognitive et résolution de problèmes*. INSA, Lyon. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

CARBONELL, J. R. (1970), AI in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction, *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, 11, 4, p. 190-202.

CARVALHO, N. T. B. & LABORDE, C. (2000), Transformations géométriques et configurations en 4e et 3e. Une première classification des taches proposées aux élèves et leur répartition dans deux manuels. *Petit x*, n°52, p. 43-71.

CHARLIER, B. (1998), Apprendre et changer sa pratique d'enseignement : expériences d'enseignants. Bruxelles : De Boeck

CHAACHOUA H. & MARIOTTI M. A. (2005), Pourquoi modéliser les connaissances ? Étude d'une question vive. In *Mercier A. & Margolinas C. (Ed.), Balises en Didactiques des Me thématiques*, p. 73-74. La Pensée Sauvage - Éditions.

CHAACHOUA, H. & LIMA, I. (2003), De la modélisation des conceptions des élèves à la prise de décisions didactiques par l'enseignant : le rôle d'un environnement informatique, In *Actes du Colloque Européen ITEM* (Intégration de Technologies à l'Enseignement des Mathématiques, (Ed. Lagrange J.-B. et al.). Reims : EDUTICE http://archiveedutice.ccsd.cnrs.fr/ITEM2003/fr/

CHARNAY, R. & MANTE, M. (1992), De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation, *Repères-IREM*, n° 7, avril 1992.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 19 n° 2, p. 221-266.

CHEVALLARD, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17 n° 3, p. 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 12, n° 1, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et d'informatique*, Université de Grenoble 1.

CLANCEY, W. (1979), Tutoring rules for guiding a case method dialogue, International *Journal of Man-Machine studies*, 11, 25-49.

COMITI, C., GRENIER, D., MARGOLINAS, C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac et al. (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, p. 93-129. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions.

COPPÉ, S. (1993), *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 1.

COULANGE, L. (2000), *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, Vol. 5, p. 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R., (1988), Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 1, p. 57-74 IREM de Strasbourg.

GALLOU-DUMIEL, E. (1987), Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en Didactiques des mathématiques*, Vol. 8, 12, p. 5-60.

GAUDIN, N. (2005), *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

GAUDIN, N. (2002), Conceptions de fonction et registre de représentations, étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics (22)2,* p. 35-47.

GRENIER, D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse d'Université. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier.

GRENIER, D. & LABORDE, C. (1987), Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale. In *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres*. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions.

HART, K. M. (1981), *Children's understanding of mathematics*: 11-16. Alden Press, Oxford, London.

HENRY, M. (1997), Les premiers apprentissages en géométrie et en probabilités : des processus de modélisation comparables. In *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires DidaTech*, n° 178 (Ed. Eberhard, M.). Institut IMAG Grenoble, p. 5-36.

HERSANT, M. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005), Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 113-151.

HOC J. M. (1987), *Psychologie cognitive de la planification*. Grenoble : PUG.

HUBERMAN, M. (1988), La pédagogie de maîtrise : idées - force, analyses, bilans. In M. Huberman & al. (dir.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires ? Les propositions de la pédagogie de maîtri*se (pp. 12-44). Lausanne : Delachaux & Niestlé.

IKONOMOU, A. & KALDRIMIDOU, M. (1999), Interaction in the mathematics classroom: some epistemological aspects. In *European Research in Mathematics Education – From a study of teaching practices to issues in teacher education,* Vol. 1. Ed: Konrad K et al. Publishing House: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, p. 168-181.

JAHN, A. P. (1998), *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

JOHSUA S. DUPIN J.-J. (2003), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* (1e ed. 1993). Presses Universitaires de France. Paris, France.

LABORDE, C. (1992), Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. In *Actes du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques – ICME 7*. Québec, Canada.

LABORDE, C. (1988), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherche en didactiques des Mathématiques*, Vol. 9, n°3, p. 337-364.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. In N. Balacheff et M. Vivet (la pensée sauvage éditions), *Didactique et intelligence artificielle*. *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol. 14, n°1.2, pp. 165-210.

LABORDE, C. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005), Introduction teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 1-12.

LE MOIGNE , J. L. (1990), *La modélisation des systèmes complexes*. Dunod.

LIMA, I. & TRGALOVÁ, J. (2005), Diagnóstico de concepções e decisões didáticas: um estudo de caso no contexto da simetria axial. In *Actes du V CIBEM - Congresso Ibero-americano de Educação Matemática.* Juillet, 2005. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – Portugal.

LOCKE, J. (2001), *Essai sur l'entendement humain*. Livres I et II, Vrin.

MARGOLINAS, C. (2005), La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In Simmt E. et Davis B. (ed.), *Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques*, CMESG/GCEDM, Edmonton.

MARGOLINAS, C. (2002), Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In Dorier, J.-L. et al. (Eds.) *Actes de la 11[e] École d'Été de Didactique des Mathématiques* – Corps, août 2001, p. 141-156. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions.

MARGOLINAS, C. (1997), Projet pour l'étude du rôle du professeur en situation. In *Actes du Séminaire de DidaTech, séminaires 1997.* Laboratoire Leibniz, Grenoble, p. 37-54.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions.

MARGOLINAS, C. (1992), Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherche en didactiques des mathématiques*, Vol. 12, n° 1, p. 113-158.

MARGOLINAS C. et al. (2005), What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3.

MARGOLINAS, C., RIVIÈRE, O. (2005), La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit X*, n° 69. p. 32-57.

MESA, V. (2004), Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach, *Educational Studies of Mathematics*, Vol. 56 N° 3, p. 255-286.

MIYAKAWA, T. (2005), *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

NICAUD, J. F. (1989), APLUSIX : Un système expert pédagogique et un environnement d'apprentissage dans le domaine du raisonnement algébrique/, *T.S.I. (Techniques et Sciences Informatiques)*, Vol 8, n° 2, p. 145-155.

PAPERT, S. (1980), *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, New York.

PAVLOV, I. P., (1927), *Conditioned reflexes: An investigation of the physiological activity of the cerebral cortex* (G. V. Anrep, Ed.). London : Oxford.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2002), Didactique des mathématiques In Bressoux, P. et al. (Eds.) *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction*. Rapport de recherche pour Cognitique, Programme École et Sciences Cognitives, Ministère de la Recherche.

PIAGET, J. (1979), *La psychogenèse des connaissances et sa signification épistémologique*, Point Seuil.

PIAGET, J. (1974), *Réussir et comprendre*, Puf.

PIAGET, J. (1971), *The child's conception of the world*. London: Routledge & Kegan Paul.

PIAGET. J. & GARCIA, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion, Paris.

PIERON, M. (1993), *Analyser l'enseignement pour mieux enseigner*. Paris : Ed. Revue E.P.S.

PORTUGAIS, J. (1996), Formation des maîtres : des conditions nécessaires et suffisantes à la théorisation des phénomènes de formation. *Repères – IREM*, n° 23, p. 109-118.

PY, D. (1998), Quelques méthodes d'intelligence artificielle pour la modélisation de l'élève. *Sciences et Techniques éducatives*, Vol. 5, No. 2.

RAGOT, A. (1991), L'observation de la production des élèves : conditions de fiabilité, rôle dans la conception des situations didactiques. *Construction de savoirs mathématiques au collège. Rencontres pédagogiques, n° 30*. INRP (Institut National de Recherche Pédagogique).

RATSIMBA-RAJOHN, H. (1982), Éléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherche en didactiques des Mathématiques,* Vol. 3 n° 1, p. 65-113.

RICHARD, J. F. (1990), *Les activités mentales : comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris : Armand Colin.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2005), A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 269-298.

ROLET, C. (1996), *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions des futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*. Thèse de doctorat de l'Université de Lyon 1.

SADOVSKY, P. & SESSA, C. (2005), The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 85-112.

SANGARE, M. (2000), *La rotation : Approche Cognitive et didactique - Une étude de cas au Mali*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

SCHOENFELD, A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

SENSEVY, G. et al. (2005), An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics* 59/1-2-3, p. 153-181.

SHANNON, C., WEAVER, W. (1949), *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana: University of Illinois Press.

SHULMAN, L. S. (1986), Those who understand. Knowledge growth in teaching, *Educational Resaearcher*, 15 (2), 4-14.

SKINNER, B. F., (1938), *The behavior organisms*, New York, Appleton Century Crofts.

SOURY-LAVERGNE, S., BALACHEFF, N. (2003), Baghera Assessment project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society. *Cahiers Leibniz*, n°81, Avril 2003 , Laboratoire Leibniz, Grenoble.

SOURY-LAVERGNE, S. (1994), *Analyse des décisions de l'enseignant dans une situation de magicien d'Oz*. Mémoire de D.E.A., Grenoble : Université Joseph Fourier.

STEINBRING, H. (1998), Elements of epistemological knowledge growth in teaching. *Journal Mathematics Teacher Education* 1, p. 157-189.

TAVIGNOT, P. (1993), Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 13, n° 3. p. 257-294.

TAHRI, S. (1993), *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur CABRI-GÉOMÈTRE pour l'analyse de décisions didactiques*. Thèse d'Université, Université Joseph Fourier, Grenoble.

TCHOUNIKINE, P. (2003), Quelques éléments sur la conception et l'ingénierie des EIAH. In *Actes des deuxièmes assises nationales du GdR I3*.

TCHOUNIKINE, P. (2002), Pour une ingénierie des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain. *Revue I, information – interaction – intelligence. 2(1).* www.revue-i3.org.

VERGNAUD, G. (1998), Au fond de l'action, la conceptualisation. *Pédagogie d'aujourd'hui : Savoirs théoriques et savoirs d'action*, (2 Ed.). Paris : P.U.F

VERGNAUD, G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde P. Tavignot, (Eds), *20 ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble : La pensée Sauvage- Éditions, p 177-191.

VERGNAUD, G. (1990), La Théorie des Champs Conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3. p. 133-170.

VERGNAUD, G. (1981), Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol 2, n°2, p. 215-232.

VYGOTSKY, L. (1985), *Pensée et Langage*, Paris : Éditions Sociales.

WALLISER, B. (1977), *Systèmes et Modèles. Introduction critique à l'analyse de systèmes*. Editions du Seuil, Paris.

WEBBER, C. (2003), *Modélisation informatique de l´apprenant - Une approche basée sur le modèle ck¢ et la théorie de l´émergence*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

WENGER, E. (1987), Artificial Intelligence and Tutoring Systems. Computational and Cognitive Approches to the Communication of Knowledge. Ed : Morgan Kaufmann Publishers, INC. Los Altos, California.

Manuels scolaires

BORREANI, J. et al. (2000) *Maths 6^e*. Paris : Éditions **Magnard**.

CHAPIRON, G. et al. (2000). *Collection **Triangle** mathématiques 6e*, 2^e Édition, Paris : Hatier.

DELORD, R. et al. (2000). *Collection **Cinq sur Cinq*** 6e Ed. 2000, Paris : Hachette Éducation.

MALAVAL, J. et al. (2000) *Collection **Transmath** Math 6e*, Édition 2000, Paris : Nathan.

PENE N & DEPRESLE P. (2000). ***Nouveau Décimale** Math 6e*, Paris : Belin.

SERRA, E. et al. (2000). *MATH mathématiques 6e.* Édition 2000, Paris : **Bordas**/Her

Programmes Scolaires

Mathématiques (2001). *Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).* Centre national de documentation pédagogique. Applicable à la rentrée 2002

Mathématiques (2001). *Cycle des approfondissements (cycle 3).* Centre national de documentation pédagogique. B. O. (bulletin officiel) n° 42 du 23 novembre 2000, n° 13 du 29 mars 2001.

*Les mathématiques au col*lège (1996). Programmes de Mathématiques.

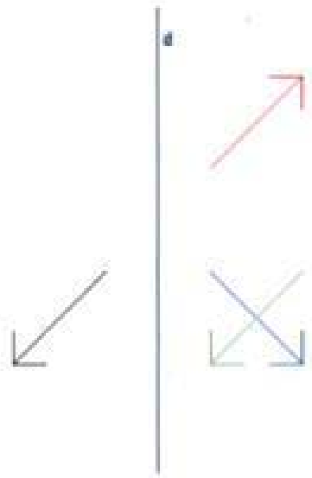
ANNEXES

Annexe 1 : Copies des élèves

Anissa

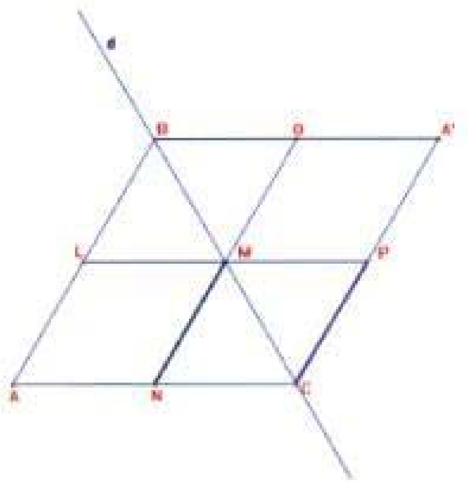
Prénom Anissa 4e

1) Quelle est la couleur de la flèche symétrique de la flèche noire par rapport à la droite (d) ? Justifie ta réponse.



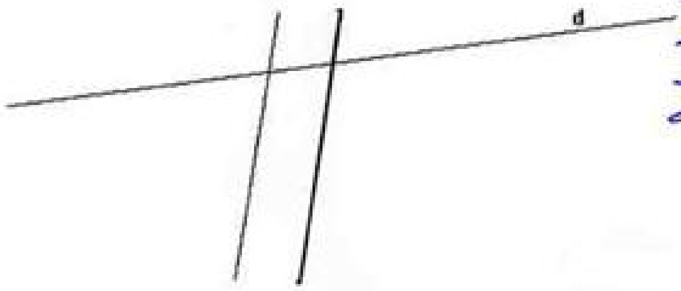
C'est la verte car elle va dans le même sens que la noire et si l'on plie la feuille sur le trait, les deux flèches seront l'une sur l'autre.

2) Soit un triangle équilatéral ABC. Le point A' est le symétrique du point A par rapport à la droite d. L est le milieu du segment [AB], M est le milieu du segment [BC] et N le milieu du segment [AC]. P est l'intersection de la droite (LM) avec la droite (CA') et O est l'intersection de la droite (NM) avec la droite (BA'). Quel est le symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d ? Justifie ta réponse.



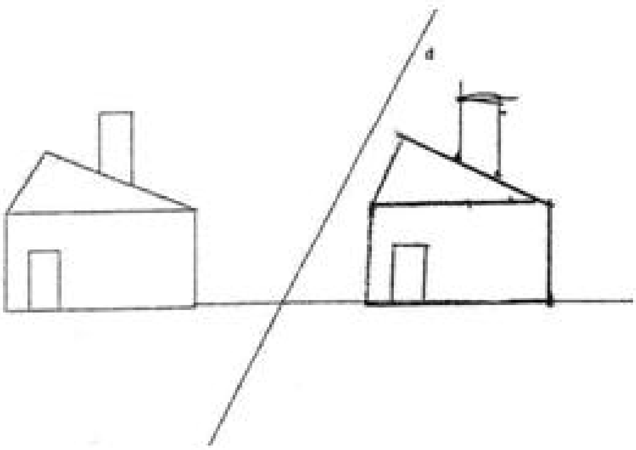
Le symetrique du segment [NM] est [PC], ça se voit

3) Avec les instruments usuels construis le symétrique du segment ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.



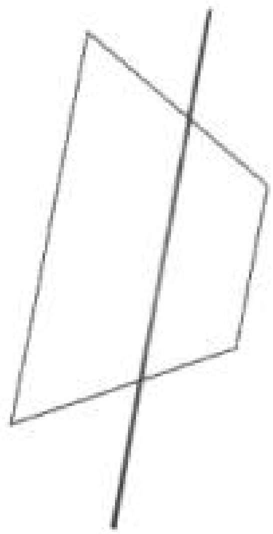
J'ai mesuré le trait et puis avec la règle j'ai reproduit le même jusqu'à côté.

4) Avec les instruments usuels construis le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.

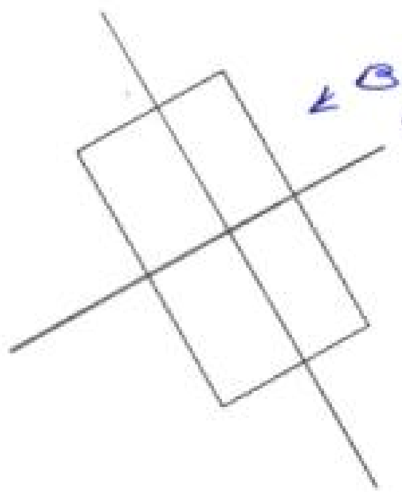


5) Avec la règle non graduée et le compas, construis si possible le(s) axe(s) de symétrie de chaque figure ci-dessous. Justifie chaque réponse.

a) il y a 1 axe de symétrie

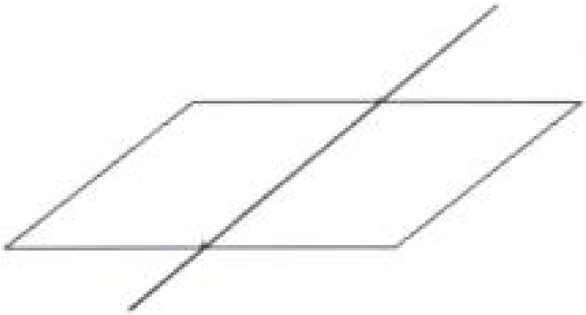


b)



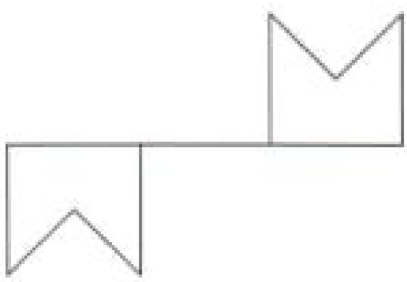
B/ il y a 2 axes de symétries

c)



c) il y a un axe de symétrie

d)

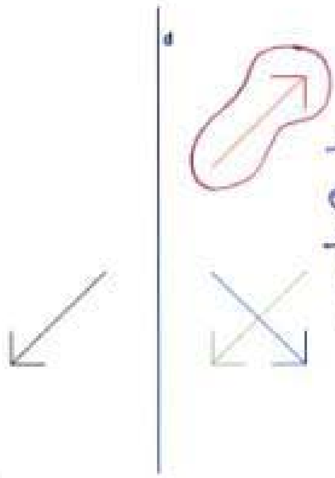


D) il n'y a pas d'axe de symetrie car les figures sont éloigner l'une de l'autre.

Béatrice

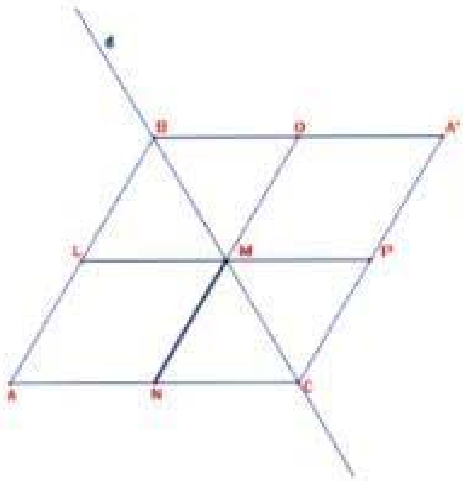
Prénom Béatrice 4e

1) Quelle est la couleur de la flèche symétrique de la flèche noire par rapport à la droite (d) ? Justifie ta réponse.



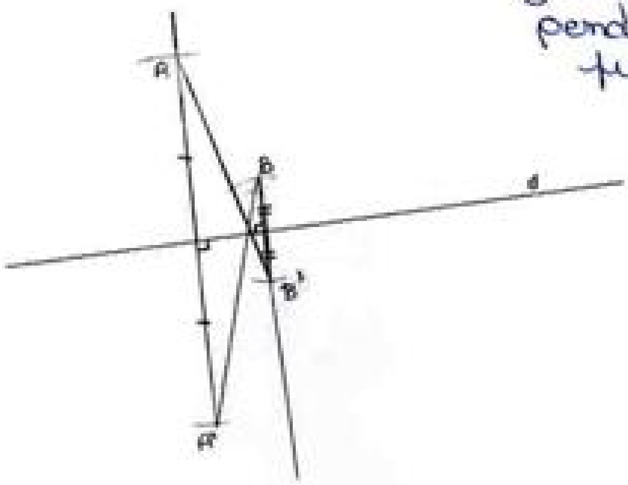
La couleur de la flèche symétrique à la flèche noire est la rouge car si on plie le papier on verra que les 2 flèches sont superposées.

2) Soit un triangle équilatéral ABC. Le point A' est le symétrique du point A par rapport à la droite d. L est le milieu du segment [AB], M est le milieu du segment [BC] et N le milieu du segment [AC]. P est l'intersection de la droite (LM) avec la droite (CA') et O est l'intersection de la droite (NM) avec la droite (BA'). Quel est le symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d ? Justifie ta réponse.



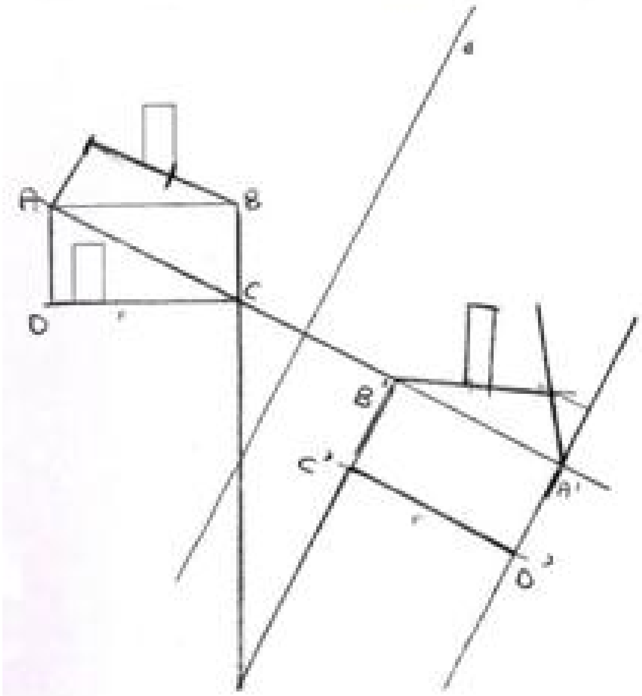
La symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d est [MO] car ON est l'axe de symétrie.

3) Avec les instruments usuels construis le symétrique du segment ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.



J'ai tracé la droite A perpendiculaire à la droite d puis j'ai reporté la mesure de a jusqu'à la droite d avec le compas puis j'ai effectué la même chose pour le point B.

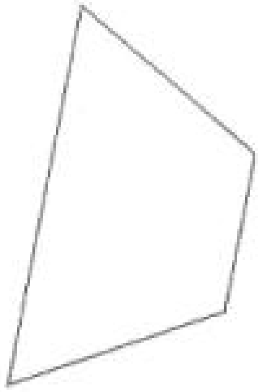
4) Avec les instruments usuels construis le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.



J'ai tracé la perpendiculaire A à la droite d et pareil pour les autres.

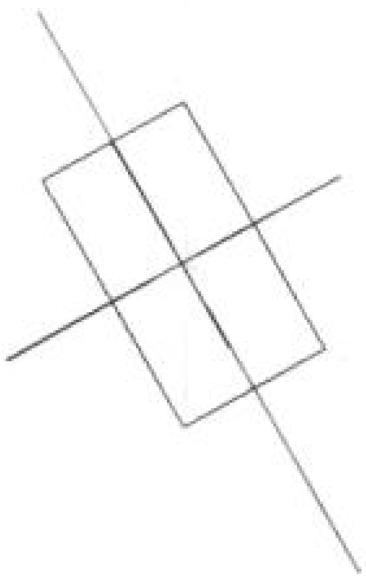
5) Avec la règle non graduée et le compas, construis si possible le(s) axe(s) de symétrie de chaque figure ci-dessous. Justifie chaque réponse.

a)



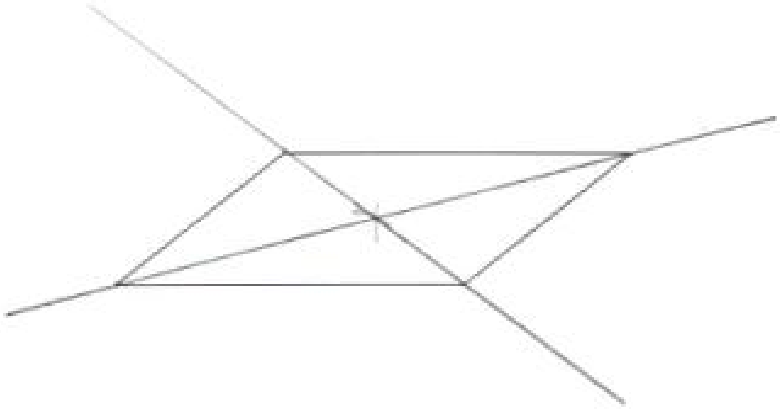
Non parce qu'il n'y a aucun point possible pour y faire.

b)



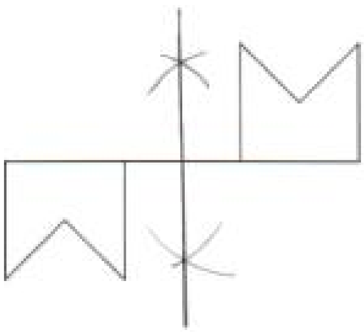
2 axes, car c'est un rectangle.

c)



Il y a 2 axes de symétrie.

d)

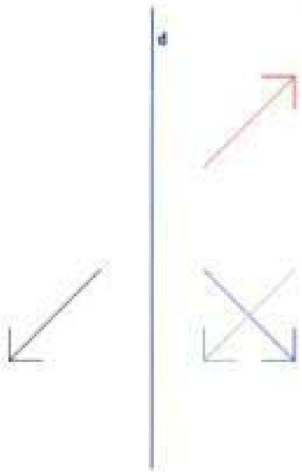


Non, il n'y a pas d'axe de symétrie.

Cédric

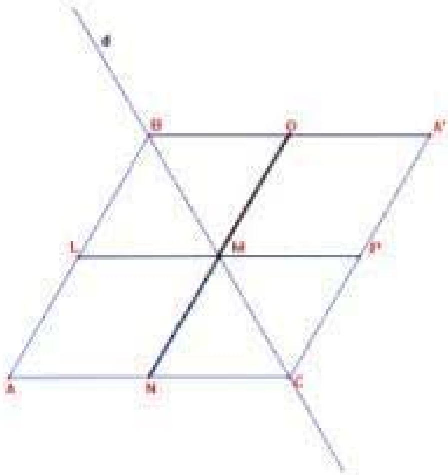
Prénom Cédric 4e

1) Quelle est la couleur de la flèche symétrique de la flèche noire par rapport à la droite (d) ? Justifie ta réponse.



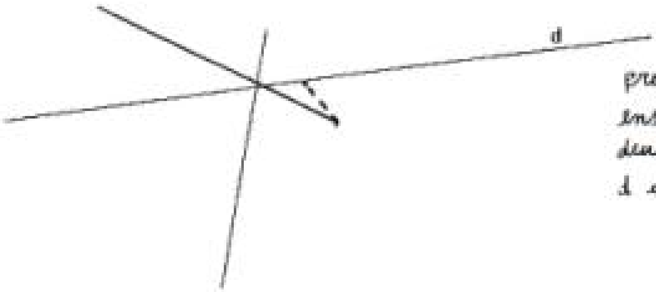
Bleu, Parce que la pointe de la flèche Noire est à égale distance de la droite (d) que la pointe que la pointe de la flèche bleue.

2) Soit un triangle équilatéral ABC. Le point A' est le symétrique du point A par rapport à la droite d. L est le milieu du segment [AB], M est le milieu du segment [BC] et N le milieu du segment [AC]. P est l'intersection de la droite (LM) avec la droite (CA') et O est l'intersection de la droite (NM) avec la droite (BA'). Quel est le symétrique du segment [NM] par rapport à la droite d ? Justifie ta réponse.



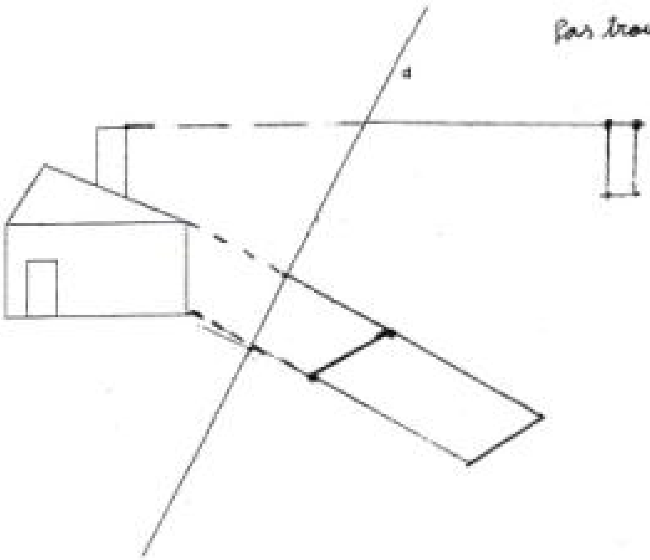
Le symétrique de [MN] par rapport à la droite (d) est le segment [MO]. Ils sont à distances égales du point M.

3) Avec les instruments usuels construis le symétrique du segment ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.



J'ai pris la symétrie du premier point par rapport à la droite d, ensuite j'ai pris la symétrie du deuxième point par rapport à la droite d et j'ai fait ma construction.

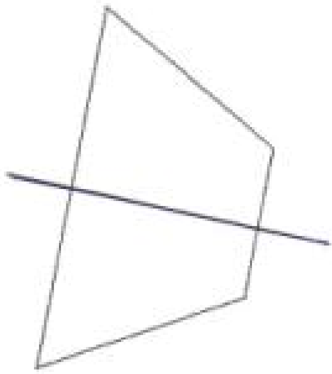
4) Avec les instruments usuels construis le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à la droite *d*. Explique ta construction.



Pas trouvé. Désolé

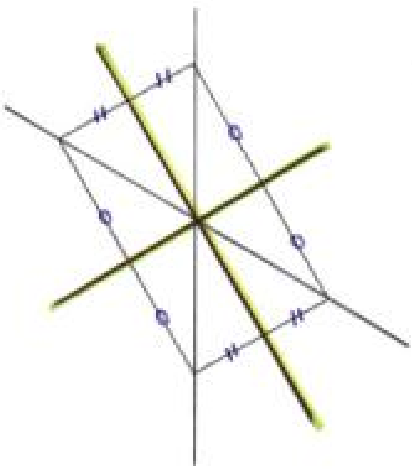
5) Avec la règle non graduée et le compas, construis si possible le(s) axe(s) de symétrie de chaque figure ci-dessous. Justifie chaque réponse.

a)



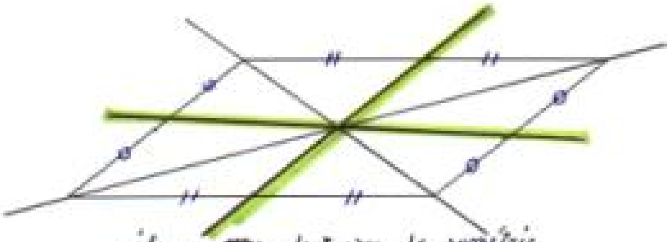
Oui, il y a un axe de symétrie.

b)



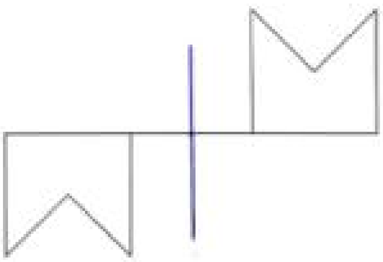
Il y a deux axes.

c)



il y a [redacted] deux axes de symétrie

d)

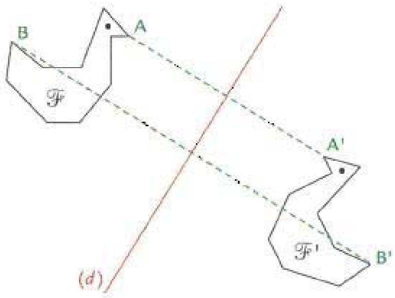


Non, il n'y a pas d'axe de symétrie.

Annexe 2 : Série de problèmes

Pb 1

Les figures F et F' sont symétriques (A' est le symétrique de A, B' est le symétrique de B, …).



a) Que peux-tu dire à propos de la droite (d) ?

b) Que peux-tu dire à propos des segments [AA'] et [BB'] ?

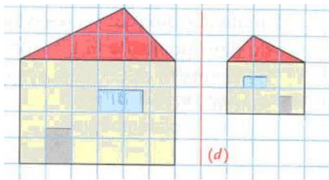
(tu peux utiliser l'équerre, la règle graduée ou le compas)

Pb 2

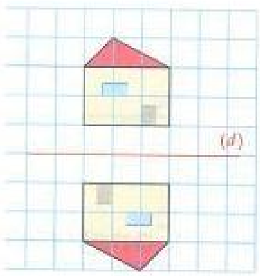
Indique pourquoi les deux maisons ne sont pas symétriques par rapport à la droite (d).

a)

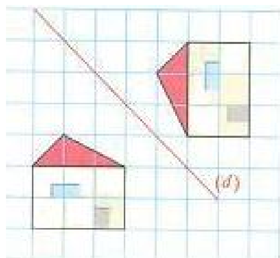
b)



c)



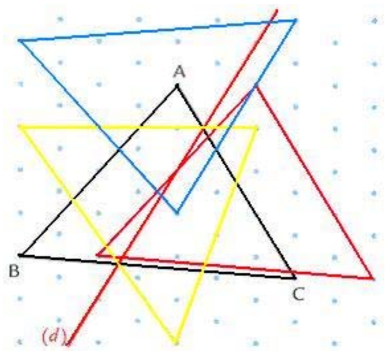
d)



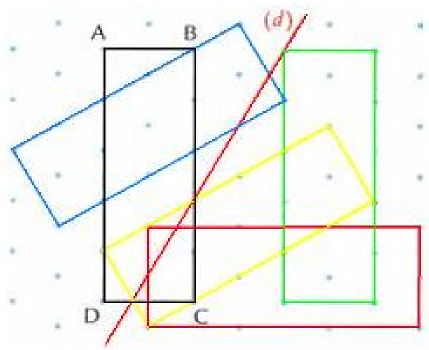
Pb 3

Dans chaque cas, l'une des figures ci-dessous est la symétrique de la figure nommée par rapport à la droite (d). Laquelle ?

a)



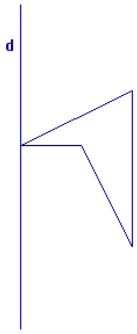
b)



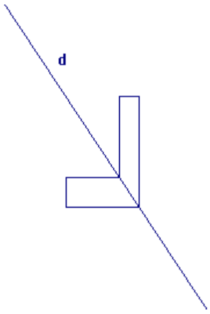
Pb 4

Construis le symétrique de chaque figure par rapport à la droite (d).

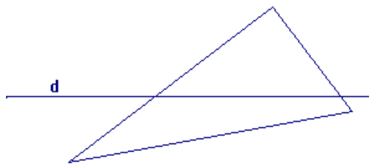
a)



b)



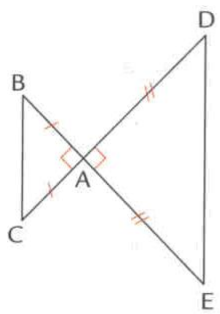
c)



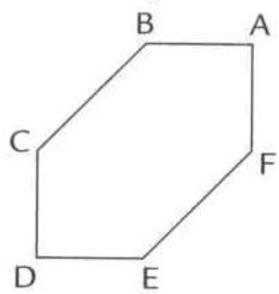
Pb 5

Ces figures admettent-elles des axes de symétrie ? Si oui, utilise la règle non graduée et le compas pour les tracer.

a)

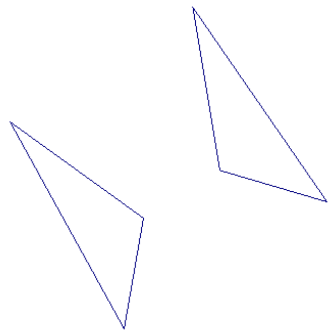


b)



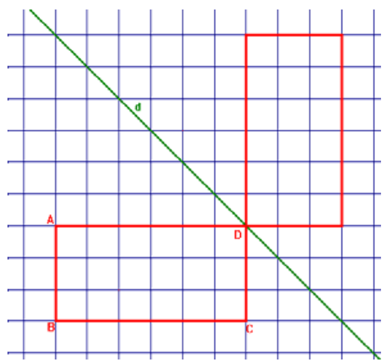
Pb 6

La figure formée par ces deux triangles admet un axe de symétrie. Trace-le avec les instruments de géométrie.



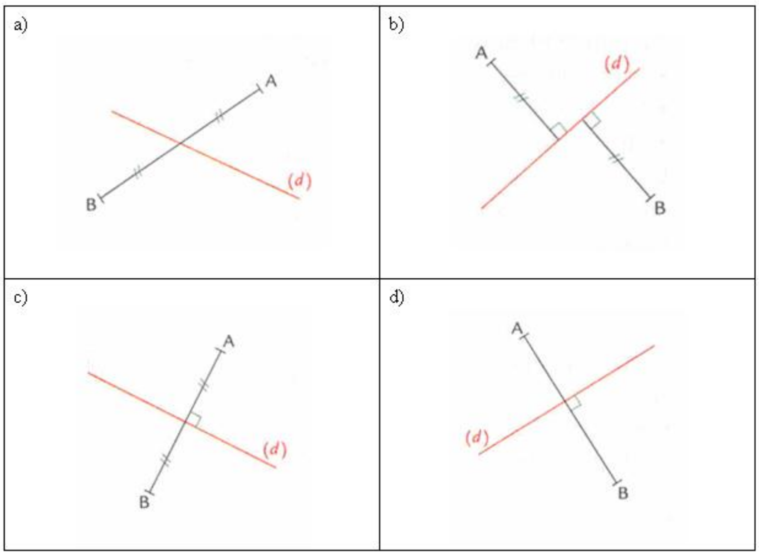
Pb 7

Les deux rectangles ci-dessous sont symétriques par rapport à la droite (d). Nomme A’, B’, C’, D’ les symétriques des sommets correspondants du rectangle ABCD. Justifie ton choix.



Pb 8

Indique par oui ou non si le point B est le symétrique du point A par rapport à la droite (d). Si non, construis dans ton cahier le symétrique A’ de A.

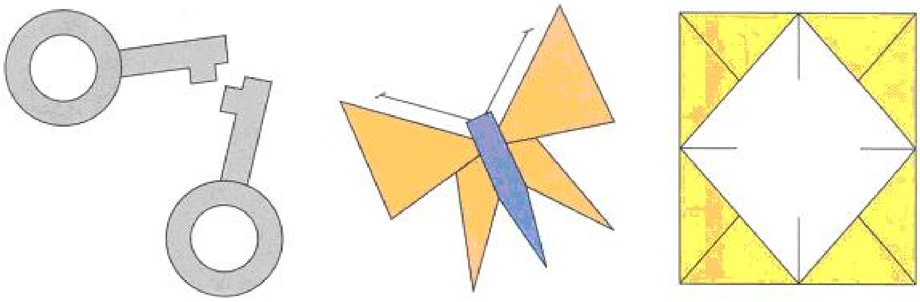


Pb 9

Marjorie a réalisé chacun de ces dessins en utilisant du papier calque qu'elle a plié.

a) A ton avis, comment Marjorie a-t-elle procédé ?

b) Utilise du papier calque pour retrouver chacune des droites sur lesquelles Marjorie a plié la feuille.



Pb 10

Des élèves jouent dans la cour. Ils partent d'un point D (départ), vont toucher le mur en un point M de leur choix et doivent rejoindre le point A (arrivée) le plus vite possible. On cherche le parcours le plus court.

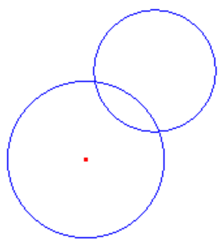
a) Sur une feuille blanche, place les points D et A et trace la droite d (elle représente le mur). Place le symétrique A' du point A par rapport à la droite d.

b) Place un point M sur la droite d et compare la longueur des parcours DMA et DMA'.

c) Où faudra-t-il placer le point M sur la droite (d) pour que le parcours soit le plus court ? Justifie ton choix.

Pb 11

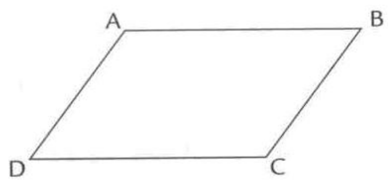
Trace l'axe de symétrie (d) de cette figure avec les instruments de géométrie. Explique ta construction.



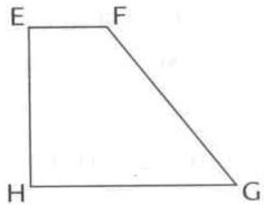
Pb 12

Dans chaque cas, indique si la figure admet un (ou plusieurs) axe(s) de symétrie. Vérifie par pliage et justifie chaque réponse.

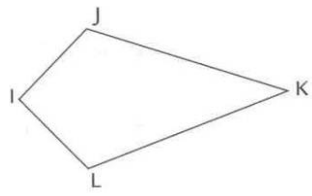
a)



b)



c)



Pb 13

Soit un segment [AB], C le cercle de diamètre AB, O son centre, M un point de C, N le symétrique de M par rapport à O. Soit I le milieu de [MB]. Montrer que la droite (IO) est l'axe de symétrie du bonnet d'âne AMBNO.

Pb 14

Annie était absente au cours de mathématiques. Son amie Marie lui téléphone pour lui expliquer comment terminer la figure commencée au cours précédent. Elle a déjà construit le carré ABCD et la diagonale (BD) (figure A)

Figure A

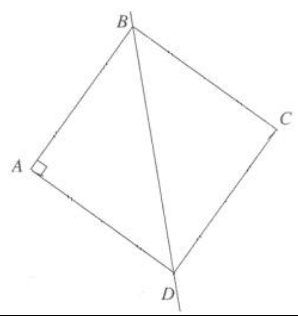
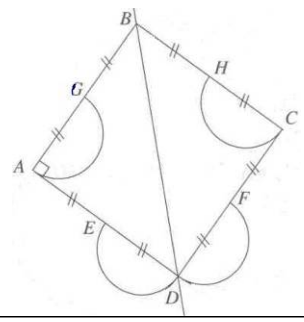


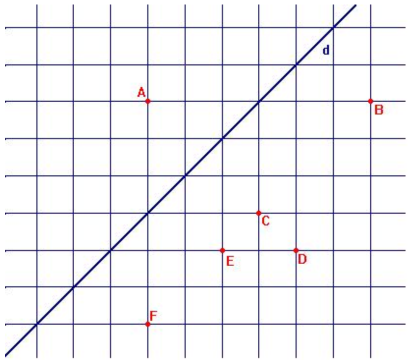
Figure B



Écrire un programme de construction que Marie communiquerait à Annie pour compléter sa figure comme ci-dessus (Figure B).

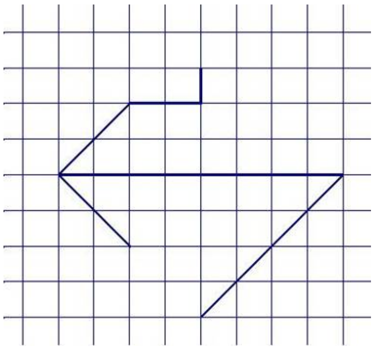
Pb 15

Sur la figure ci-dessous, quel est le symétrique du point A par rapport à la droite (d) ? Explique pourquoi.



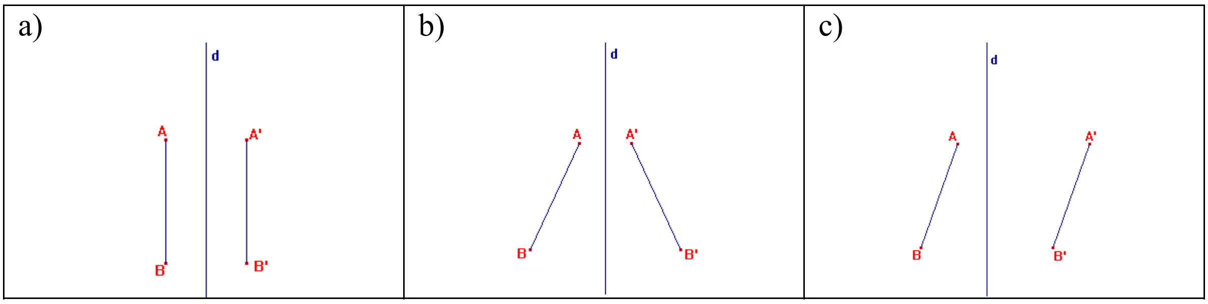
Pb 16

Complète la figure ci-dessous de façon à ce qu'elle possède un axe de symétrie



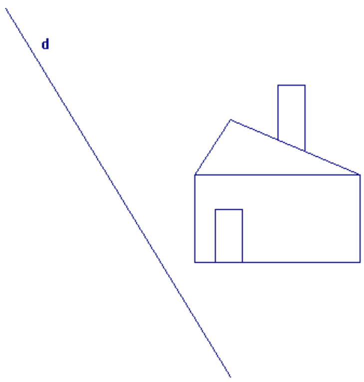
Pb 17

Dans un seul cas le segment [A'B'] n'est pas symétrique du segment [AB]. Lequel ? Utilise les propriétés de la symétrie que tu connais pour justifier ta réponse.



Pb 18

Avec les instruments usuels construis le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à la droite d. Explique ta construction.



Annexe 3 : Productions des professeurs

Professeur 1

Fiche de l'Enseignant

1) Vous enseignez actuellement :

(X) Au collège   Précisez le niveau 6e - 4e - 3e

( ) Au Lycée   Précisez le niveau

( ) A l'université   Précisez le niveau

( ) Autre   Précisez

2) Vous avez 25 année(s) d'expérience en enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est selon vous celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

(−) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note

( ) L'élève résout des problèmes

(+) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

mais ça dépend des élèves : tous ne fonctionnent pas de manière identique.

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?

(X) Oui   ( ) Non

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat, …)

DEA EIAHD

Questionnaire – Anissa

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1. Pour Anissa :

P_1 : " L'image d'un segment par la symétrie est un segment parallèle " : toutes les figures correspondent à cette conception.
Sauf en 5a : " le segment et son image ont même longueur ". P_2
Sauf en 5a.b : " le segment-image est obtenu en déplaçant horizontalement le segment antécédent ". P_3
Sauf en 3 : " le segment et son image sont de part et d'autre de l'axe ". P_4

Rem : la bonne réponse à 5d semble due à l'utilisation de P_3, car P_1 et P_2 sont vérifiées et P_4 le sera si on arrive à construire l'axe.

2. 1ère étape : avec du papier-calque.
Reprendre l'ex 1 : calquer d et la flèche noire, retourner le calque en faisant coïncider d et son image calquée. Observer à quelle flèche se superpose la noire.
Même opération avec le segment [MN] de l'ex 2.

Le but de cette manipulation est de faire comprendre à Anissa qu'un segment et son image ne sont pas forcément parallèles. En disposant verticalement l'axe, j'attirerai l'attention de cette élève sur l'effet-miroir de la symétrie : c'est très "visuel" et les élèves captent assez vite ce moyen de contrôle "à vue d'oeil"

2ème étape : avec Pb01.
L'objectif est de faire observer les deux propriétés fondamentales de la symétrie : perpendicularité et distances des points à l'axe égales. Il s'agit de constater que P_3 est fausse.
Anissa doit comprendre (on l'espère !) que pour aller de A à A', on se déplace perpendiculairement à d puis d'une distance égale, l'horizontale n'ayant rien à voir là-dedans.
Puis Pb15 : pour justifier le choix de C ou D, Anissa doit reformuler avec ses mots la propriété de perpendicularité. Ensuite, pour discriminer C et D, elle reformulera la ppté des distances.
Enfin P02 : pour renforcer l'assimilation et l'énonciation des deux pptés. Le dessin b permet en outre à Anissa d'évoquer la non-isométrie des figures, ppté qu'elle semble avoir bien intégrer.

Dans l'étape 2, Anissa a travaillé sur des figures construites par quelqu'un d'autre.

3ème étape : Anissa va construire elle-même des images ou des axes de symétrie.
Avec P04 : je demande à Anissa de nommer les points puis leur image. Elle choisit elle-même ses instruments. Je l'invite à contrôler avec le calque, si l'observation "à vue d'oeil" ne suffit pas.
En complément, je lui demande de rédiger un programme de construction.

Avec P05 : les segments isométriques apparaissent clairement. En se servant de plus de sa ppté P_4, Anissa devrait identifier

C et E comme images de B et D (par exemple). Elle pourra placer les milieux de [BC] et [DE], puis tracer la droite qui doit passer par A : je demanderai à Anissa d'expliquer cette observation. Dans ce Pb05, les deux pptés fondamentales de la symétrie sont vérifiées. Je propose ensuite le Pb12 pour qu'Anissa formule successivement dans a puis b la non-vérification de ces deux propriétés.

J'arrête là avec Anissa : si elle a franchi avec succès toutes ces étapes, je pense que cela suffit pour une première remédiation. J'ai volontairement omis (sauf dans Pb05-b) de montrer à Anissa le cas où un segment et son image sont parallèles. Ce sera pour plus tard.

Questionnaire – Béatrice

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1. Difficile d'identifier des éléments de conception constants chez Béatrice. Elle sait mieux construire un dessin elle-même qu'analyser un dessin fait par d'autres. Je tente néanmoins de dégager quelques règles :
"Quand on plie, une figure et son image se superposent" mais Béa. ne sait pas clairement comment on doit plier. (ex 1 et 2).
"La droite qui passe par un point et son image est ⊥ à l'axe, et on reporte la longueur point-axe pour avoir l'image".
"Un segment et son image sont de part et d'autre de l'axe".

2. <u>1ère étape</u>. Béa parle de pliage : je vais essayer de lui faire trouver qu'on ne plie pas n'importe comment. Je lui fais d'abord découper le trapèze de l'ex 5.a. Elle essaie différents pliages jusqu'à ce qu'elle trouve le bon : cette bonne pliure donne l'axe. Récipt, c'est l'axe qui doit donner la pliure : Béa va donc plier les dessins des ex 1-2 pour trouver les bons segments-images.

2ème étape: Béa sait bien construire l'image d'un segment en construisant les images des extrémités: je lui demande de vérifier par pliage que sa construction de l'ex 3 est bonne. Elle peut donc être sûre de sa méthode. Mais elle se perd dans une figure plus complexe (ex4).
A partir du Pb04.a), je lui demande de nommer les extrémités des segments et de repasser chaque segment avec une couleur différente (pour qu'elle les identifie visuellement). Couleur après couleur, elle construit les images.
Contrôle par pliage : les segments de même couleur doivent se superposer.
Mêmes opérations pour le Pb 04 c). On saute le b): la figure est trop petite et la construction risque d'être confuse.

3ème étape: Retour sur l'ex4. Je demande à Béa d'analyser ce qui est juste et ce qui est faux dans ce qu'elle a produit, au besoin en mettant des couleurs. Elle sera amenée à utiliser les 2 pptés qu'elle connaît : $[AA'] \perp d$ et distances points-droite égales.
Si elle ne réussit pas, elle décalquera la maison-antécédent et, en retournant le calque, elle essaiera de trouver les points justes et les points faux.
Pour l'instant, je ne lui demande pas de refaire l'ex4.

4ème étape: recherche d'un éventuel axe de symétrie.
Pb09: Béa doit le faire tel qu'il est proposé.
Ensuite je lui demande de trouver une méthode de construction de cet axe à partir du dessin des dés, sans décalquer ni plier.
Elle sera donc amener à constater que les 2 propriétés qu'elle connaît bien font que l'axe de symétrie passe par le milieu de tous les segments point-image.
Vérification sur le papillon puis le Pb 06.
On teste ensuite avec le Pb12 où deux figures n'ont pas d'axe de symétrie: Béa pourra essayer d'en tracer un, puis vérifier si cet axe passe par les milieux des segments point-image.

Questionnaire – Cédric

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

    a. Les éléments pris en compte

    b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

    c. D'autres remarques

1. Cédric se rappelle qu'il y a une histoire de "distances égales" mais pour lui, il s'agit de distances entre deux points, non de distance point-droite (ex 1.2.3 5b.c).
Il ne connait pas la définition de la distance point-droite, l'idée de perpendicularité n'apparait que dans l'ex 4, et encore, pas toujours.
Cédric sait qu'un segment et son image sont situés de part et d'autre de l'axe de symétrie.

2. <u>1ère étape</u> : redécouvrir la notion de distance d'un point à une droite.
<u>Pb 10</u> : il s'agit de montrer à Cédric qu'il y a plusieurs segments joignant un point et une droite, mais un seul de longueur minimale : on l'obtient avec la perpendiculaire.

<u>Pb 15</u> : il s'agit ici de consolider les observations du pb précédent, en faisant bien la distinction entre les 2 cas de figures : (perpendiculaire équivaut à distance point-droite) et

(non-perpendiculaire equivaut à non distance point-droite).
Sur le dessin : d est une médiane de [AC], [AD] [AE] et [AF] mais la médiatrice de seulement [AC]. Cédric sera amené à dire qu'il ne suffit pas que d passe par un milieu d'un segment pour que les extrémités du segment soient symétriques. Il doit donc comprendre que d doit être perpendiculaire au segment. Il doit être amené à dire que les deux propriétés sont indispensables.

2ème étape : analyse des erreurs faites.
Je lui fais reprendre l'ex 5c pour qu'il analyse sa construction et trouve l'erreur qu'il a faite. Puis je l'invite à comparer avec le 5b en lui demandant de formuler les différences entre les figures 5c et 5b. Il doit trouver pourquoi la 5b est juste et la 5c fausse.

J'espère qu'à ce stade il a compris de façon ferme et définitive que les 2 pptés (perpendiculaire + distances égales) sont indissociables et à utiliser conjointement.

3eme étape : Cédric va mettre en pratique ce qu'il vient d'apprendre avec le Pb18, semblable à l'ex 4 qu'il avait un peu amorcé mais pas terminé. Instruments laissés au choix de l'élève
Enfin, je lui demanderai d'analyser ce qu'il a produit dans l'ex4, de déterminer ce qu'il a fait juste et ce qu'il a fait faux.

Professeur 2

Fiche de l'Enseignant

1) Vous enseignez actuellement :

(X) Au collège Précisez le niveau 5e, 4e, 3e

( ) Au Lycée Précisez le niveau ____

( ) A l'université Précisez le niveau ____

( ) Autre Précisez ____

2) Vous avez 20 année(s) d'expérience en enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est selon vous celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

(-) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note

(+) L'élève résout des problèmes

(+) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?

( ) Oui (X) Non mais j'ai suivi plusieurs stages.
- Raisonnement
- Evaluation
- situations - problème etc....

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat, …)

Questionnaire – Anissa

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1 Pour Anissa la symétrie axiale semble être une transformation qui conserve les grandeurs (distance, angle) mais elle l'associe au "glissement" donc à la translation –
figure 1) ; 2) ; 3) et 5 c)
de plus le "glissement" est majoritairement horizontal – quelque soit la position de l'axe de symétrie

2 Je proposerais d'abord de revenir sur les exercices faits par Anissa. <u>En premier lieu</u>, par <u>pliage</u> et transparence (ou calque) j'associerais le Pb 01 et la figure 1 de manière à faire retrouver la flèche bleue à Anissa –
Il lui faudra faire les observations suivantes
- les oiseaux face à face
- les flèches s'écartant de l'axe d.
- perpendicularité par rapport à l'axe (équerre)
- égalité des distances de A à l'axe et de A' à l'axe
de B à l'axe et de B' à l'axe
(utilisation du compas)

1

J'utiliserais ensuite le Pb 15.
Recherche du symétrique d'un point ~~par~~ quadrillage sans pliage, sans calque - Utilisation de l'équerre pour vérification - de la règle graduée

Idée analogue sur Pb 07 mais sur une figure et observation du point D qui est sur l'axe et qui a pour symétrique D.

Pb 02 sur les maisons pour lui faire énoncer les raisons pour lesquelles la symétrie n'est pas vérifiée.
Anissa devrait alors comprendre son erreur sur la figure 4 et se corriger avec le Pb 18 -

Exercices d'entraînement avec Pb 04 et utilisation du point d'intersection de la figure avec l'axe.
Pb 06 pour terminer -

Recherche de l'axe de symétrie d'une figure

Pb 12 : Recherche et vérification par pliage -

Pb 05 Recherche des axes de symétrie mais je laisserais le choix des instruments (règle graduée, équerre ou compas)

Remarque : Dans toute la série d'exercices, après construction je laisserais la possibilité à Anissa d'utiliser un calque pour vérifier par pliage l'exactitude de ses constructions -

Je proposerais aussi, après le travail sur la figure 1 et Pb 01 un travail à main levée, pour vérifier que l'image du symétrique prend corps dans son esprit

Compléter à main levée
Situation 1
pour que d soit axe de symétrie

situation 2

2A

Questionnaire – Béatrice

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

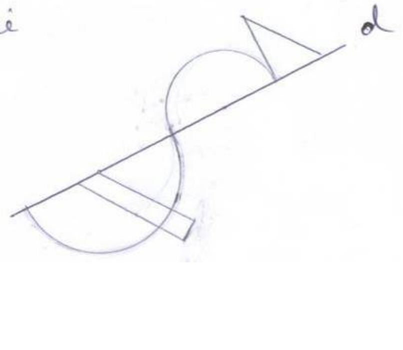
(1) Idees confuses pour Beatrice.
Elle semble posséder * la construction du symetrique d'un point, d'un segment - figure 3) et 4) (construction de A')
* l'idée de la conservation des grandeurs (distances - angles)
* l'idée que l'axe de symétrie passe par le milieu du segment reliant un point et son image
mais l'idée de la perpendicularite est confuse ....

(2) Je proposerai à Beatrice le Pb 15 pour commencer avec verification par pliage de maniere à mettre en évidence [AC] ⊥ d et egalité des distances à l'axe (position B écartée)
Puis le Pb 01 avec observation - de la position des oiseaux en face à face
- de la construction point par point (tracé d'autres points et segments en pointillé)

(J)

Ensuite utilisation du Pb 02 avec formulation des erreurs
et mise en place de la vérification point par point
objet avec objet
(fenêtre - porte ....)
et j'utiliserais le quadrillage d) pour lui proposer de
construire par quadrillage l'image de la maison par
symétrie et avec vérification à l'équerre et compas -
Ce dernier quadrillage pourrait servir de "témoin"
pour le Pb 18 mais je placerais sur le pb 18 le
nom de quelques points pour inciter Béatrice à travailler
point par point et avec vérification (finale) par pliage ou calque
Ensuite j'utiliserais le Pb 04 pour construire l'image
d'une figure ayant des points d'intersection avec l'axe

Pour l'axe de symétrie d'une figure je proposerais
le Pb 17 et dans le cas médiane je proposerais de relier [AA']
et [BB'] de manière à ce que Béatrice reconnaisse la figure
5a) qu'elle a écartée
Je passerais ensuite au Pb 12 avec vérification par pliage
puis au Pb 05 mais sans imposer la règle non graduée et
le compas puis le Pb 11 de manière à travailler également
sur le cercle -
Je pourrais également proposer avant le Pb 11 de compléter
à main levée une figure pour qu'elle possède un axe
de symétrie



Questionnaire – Cédric

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1) Cédric semble avoir une idée globale de la symétrie avec égalité de distances. Par contre il ne dispose pas d'outils de construction corrects et fait une confusion entre symétrie axiale et symétrie centrale. Il ne semble pas percevoir la conservation des angles.
Je commencerais par lui présenter des situations oui-non mêlant différentes transformations (voir document joint) afin de fixer sa représentation sur la symétrie axiale.
Puis je proposerais un travail sur quadrillage avec systématiquement la vérification - par pliage
– par utilisation de l'équerre

Pb 15 : Symétrique d'un point
Pb 07 : symétrique d'une figure et observation du symétrique du point D
Pb 02 : Formulation des explications

(1)

et construction avec quadrillage et vérification à l'équerre de la maison du cas d)

Ensuite je proposerais le Pb 01 avec observations sur les oiseaux et utilisation du milieu de [AA'] et de [BB']

Application au Pb 06 et vérification par pliage conservation angles

puis Pb 18 : construction de la maison à l'équerre compas (ou règle graduée) et en plaçant des points A, B pour lui rappeler le Pb 01

Vérification par pliage (ou calque)

J'utiliserais ensuite le Pb 04 pour travailler sur des figures qui ont des intersections avec l'axe.

(construction à l'équerre pour rappeler le Pb 01)

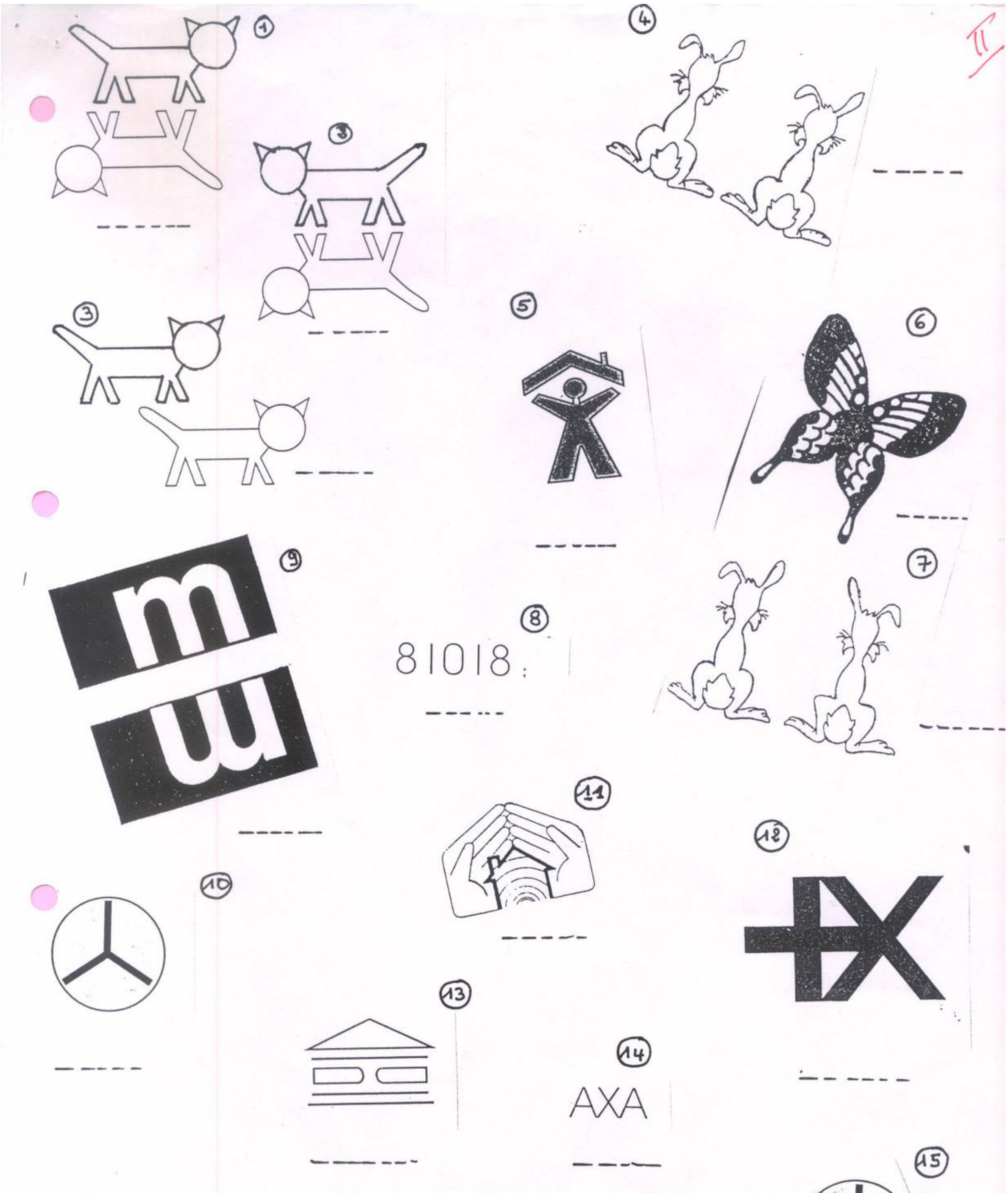
Pour l'axe de symétrie d'une figure.

je proposerais le Pb 08 pour prendre conscience que l'axe est la médiatrice du segment

puis le Pb 17 et après avoir reconnu les 2 cas de symétrie je lui ferais joindre les points A, A' et B, B' ce qui lui permettrait de reconnaître dans le 3e cas l'impossibilité pour d d'être axe de symétrie du parallélogramme.

Je passerais ensuite au Pb 12 avec vérification par pliage puis recherche sur le Pb 11. pour travailler sur le cercle.

Annexe Professeur 2 : problème proposé à Cédric



Les figures ci dessus possèdent-elles un axe de symétrie ? - Répondre par oui ou non
Au besoin, utiliser un papier calque pour vérifier
- Tracer l'axe de symétrie lorsque la propriété est vérifiée.

travail collectif
au rétroprojecteur

Fiche 2

Professeur 3

Fiche de l'Enseignant

1) Vous enseignez actuellement :

( ) Au collège Précisez le niveau ____________

( ) Au Lycée Précisez le niveau ____________

( ) A l'université Précisez le niveau ____________

(X) Autre Précisez IUFM Grenoble

2) Vous avez 37 année(s) d'expérience en enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est selon vous celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

( ) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note

( ) L'élève résout des problèmes

( ) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

(−) Le prof s'en tient à une des 3 propositions ci-dessus
(+) Le prof choisit en fonction de la connaissance, des élèves, du moment de l'apprentissage, etc. . . .

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?

(X) Oui DEA. ( ) Non

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat, …)

Questionnaire – Anissa

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

I. Hypothèses quant aux erreurs d'Anissa.

Deux cas sont à envisager :

a. Anissa a déjà étudié la translation

b. Anissa ne l'a pas étudiée.

En quatrième la symétrie est déjà une connaissance ancienne (primaire).

$\boxed{\text{Cas a}}$. Pourraient ici se télescoper ~~deux~~ connaissances, la nouvelle ayant déstabilisé l'ancienne.

- Anissa sait que la symétrie correspond à un pliage, mais ne contrôle pas ni mentalement ni physiquement son affirmation.
- Anissa parle de flèches qui vont dans le même sens. ~~Or~~ les flèches qui vont dans le m sens sont vues à propos de la translation.

Cette image de la translation a pu être activée par ce 1er exemple. Si les objets choisis avaient été autres que des flèches, il se peut que cette images mentales liées à la translation n'aient pas été activées.

En tout cas, pour tous les autres tracés, 3 et 4 Anitta effectue une translation horizontale (parallèle à un bord) et pour 2) elle choisit aussi le translaté de [MN] par $t_{\overrightarrow{MP}}$

cette explication n'est pas en contradiction avec 5).

pour a) : le parallélisme est prégnant car les 2 côtés parallèles sont "translatés" mais symétriques pour elle. Elle dessine l'axe car c'est demandé et elle sait que l'axe passe entre les 2 figures "au milieu".

(Cette connaissance est mise en oeuvre dans 4), l'axe passe au milieu des 2 coins de maisons en bas. Mais cette connaissance s'efface devant la prégnance du parallélisme dans 3) : il n'était pas possible de faire passer l'axe "au milieu" tout en dessinant les 2 segments parallèles)

b) c) d) sont également cohérents avec cette interprétation.

Pour c) il y a un seul axe car les 2 autres côtés sont horizontaux et seraient éléments QA de construction de la Translation horizontale.

Pour le rectangle Anissa a pu raisonner de m̂ avec les parallélisme ou savoir — car le rectangle est très étudié depuis le primaire — qu'il avait 2 axes de symétrie.

Cas b) Si Anissa n'a pas étudié la Translation — alors ses images mentales liées à la symétrie sont à revoir. Il se trouve qu'elles recouvrent des images mentales liées à la translation.

2. Propositions.

Cas a) Dans ce cas je propose de faire travailler Anissa sur les 2 transformations à la fois. Par exemple donner une figure, un translaté et un symétrique. Reconnaître, distinguer en utilisant le vocabulaire lié aux 2 transformations. Vérifier physiquement.
Faire dessiner ensuite ou avant donner des figures découpées et les placer sur le papier pour avoir translaté et symétrique.
Faire faire des dessins à main levée aussi. Faire évoquer mentalement l'action de pliage et de glissement.

cas b) On ne travaille cette fois que sur la symétrie qui devrait être mise en relation avec le pliage soit pour effectuer la symétrie, soit pour vérifier après coup, soit pour anticiper, (ou même

→ 3A

pour vérifier au départ exemple Pb 01).

On pourrait essayer (avec l'appel au pliage) Les exercices doivent être sur un support permettant le pliage direct

(1) (Pb 17
Pb ~~1~~2

(Pb 03 est trop chargé pour elle).

(2) (Pb 02
Pb 07
(Pb 16) Pb 15.

(3) (Pb 18
Pb 04
Pb 08
⋮
etc
⋮

(1) : - image globale.
- remise en cause des images actuelles

(2) : - approche plus "fine" sur quadrillage.
- mise en relation de points.

(3) : - tracés (demander d'abord une anticipation globale)
- vers l'énoncé des propriétés et usage.

(remarque : pour l'anticipation on pourrait avoir des figures découpées à placer dans la position de symétrique).

Questionnaire – Béatrice

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1. Béatrice
   - sait utiliser les instruments pour construire le symétrique d'un point.
   - n'a pas d'image mentale du symétrique d'une figure. Pb aussi si l'axe coupe la figure (cf 3)
     (confusion symétrie centrale/symétrie axiale ?)
   - Les connaissances ~~sur~~ les figures usuelles (parallélogramme, rectangle) occultent les connaissances sur la symétrie ?
     et/ou
     ne sait pas déterminer l'axe.
   - La symétrie est associée au pliage mais comme Anissa ….

(5)

2. Propositions.

Idem Anissa en ce qui concerne l'usage du pliage.

- Eviter les tracés dans un premier temps

Pb 07

Pb 15 {sans quadrillage
{(sans dessiner le symétrique de A)

Pb 08 aussi mais justifier sans dessin.

Pb 17

(Pb 02)

c'est à dire transformer les connaissances d'action en connaissances pour reconnaître et justifier.

- Tracer des axes de symétries :

06
11
12

et 16.

- Tracer le symétrique de figures (en anticipant) et en verbalisant. ex 04.

- Pb 13.

b) Pb 12
Pb 13 – Pb 11 → justification avec perpendicularité et milieu

c) Pb 04
Pb 18 → faire remarquer la conservation des longueurs et des angles.
(le symétrique et la figure sont superposable par pliage).
cf exo 4) dans l'épreuve.

Questionnaire – Cédric

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

    a. Les éléments pris en compte

    b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

    c. D'autres remarques

1. Cédric .

- Dans la construction (ou la reconnaissance) du symétrique d'un point, l'égale distance est prise en compte. C'est beaucoup plus fluctuant pour la perpendicularité.
- langage très correct (tout est relatif).
  ex 3)
- Pb d'anticipation et planification 4).
  si plus complexe.

2. Propositions

a) Pb T5 Si l'hypothèse "égale distance" est réaliste, Cedric dira plutôt E que C.
donc retour sur la connaissance
Pb 08 Pb 01

(1)

Professeur 4

Fiche de l'Enseignant

1) Vous enseignez actuellement :

(✓) Au collège — Précisez le niveau 6ème, 4ème, 3ème.

( ) Au Lycée — Précisez le niveau ____________

( ) A l'université — Précisez le niveau ____________

( ) Autre — Précisez ____________

2) Vous avez 10 année(s) d'expérience en enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est selon vous celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

(−) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note

( ) L'élève résout des problèmes

(+) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?

(✓) Oui (peu) — ( ) Non

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat, …)

- une conférence de Monsieur Marc Legrand sur le débat scientifique

Questionnaire – Anissa

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

① l'axe de symétrie doit plus ou moins partager la figure entre une partie gauche et une partie droite ; sinon il semble ignoré (exercices 3 et 5 a))

Validation du caractère symétrique par 2 aspects :

i) – par l'existence de côtés parallèles d'un côté et de l'autre, voire par la possibilité de passer de l'une à l'autre par translation (sauf en 5 a))

ii) apparemment nécessité d'une deuxième validation par la prise en compte, de façon mal définie, d'une égalité de distances des 2 parties par rapport à l'axe :

- (peut être "distance moyenne" (pour 1) et 2)))
- (la longueur du morceau d'axe entre les 2 segments (symétriques) semble être égale à la longueur du bout de segment qui dépasse par dessus (pour le 3))
- (la distance à l'axe (mesurée horizontalement) de la base des maison est la même)

etc…

(2)

D'abord Pb01. (je l'avais d'abord éliminé sans bien le lire)

Séquence

- Blocement du Pb08
  en changeant consigne
  - d'abord dire si oui ou non B est le symétrique de A
    en vérifiant par pliage
  - l'enseignant fait le point
    - c) est le seul cas où B est le symétrique de A
    - [AB] est perpendiculaire à (d) pour le milieu de B
  - En prenant comme modèle ~~la~~ figure c)
    construis à l'équerre et à la règle graduée le symétrique A' de A pour les figures a) b) et d).
    sur les figures de l'énoncé
  - L'enseignant invite enfin à vérifier par pliage.

- Pb 15 : comme consolidation du nouvel acquis
  l'élimination de B comme symétrique de A
  peut préparer le terrain à refaire correctement l'exercice 4)

- Pb 17 . pour tendre à défaire l'idée que
  2 segments symétriques sont parallèles nécessairement
  ~~des~~ c'est parfois le cas 1ère figure
  mais en général ça n'l'est pas (figures 2 et 3)

  le professeur invite à valider ceci par pliage d'une part et par la propriété « de distances égales » mise en évidence grâce au Pb08 (modifié)
  correcte

en général ça ne l'ai pas

Questionnaire – Béatrice

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

(1) Il semble que pour Béatrice 2 figures symétriques situées de part et d'autre d'un axe se tournent le dos font idéalement l'une par rapport à l'autre un angle de 180°

Quand il s'agit d'effectuer une construction Béatrice pense à prendre l'équerre, elle sait construire le symétrique d'un point isolé, mais sa représentation fausse de ce que sont deux figures symétriques la gêne

à mesure que l'on trace le symétrique d'une figure, celle-ci doit, pour Béatrice partir en sens inverse de la figure initiale en s'en éloignant le plus vite possible.

pour le 3) et le 4) c'était bien commencé

mais pour le 3) Béatrice semble perdre de vue qu'elle construit le symétrique d'un segment initial, celui-ci ~~elle~~ sera baptisé finalement [A'B]

pour le 51 elle n'a pas vu l'axe de symétrie
car les côtés ne semblent pas être disposés
de façon à pouvoir être
symétriques l'un de l'autre.
(selon sa notion)

②.

d'abord $\boxed{\text{Pb 09}}$
but : approche pratique du pliage
(Béatrice a montré, par sa justification de l'exercice 1
qu'elle n'a pas une « connaissance concrète » de l'effet
d'un pliage)

$\boxed{\text{Pb 12}}$
but permettre au professeur de s'assurer que Béatrice
ne refait pas l'erreur du parallélogramme

$\boxed{\text{Pb 03}}$ précédé du Pb 7 qui facilite le Pb 03 (ou moins pour les cas ce sont des rectangles s'éloignant obliquement de l'axe)

reconnaître, cette fois-ci sans pliage, les figures symétriques qui ne se ~~tou~~ « tournent pas le dos ».

$\boxed{\text{Pb 1 et Pb 2}}$
but mettre en place un outil de vérification, qui prenne en
compte la perpendicularité, de la symétrie d'une
figure et ceci point par point.

grâce à ceci, peut-être que Béatrice, si elle refaisait ~~le~~
l'exercice n° 41, ne se baserait pas uniquement sur un
point construit à l'équerre pour faire le symétrique
de la maison.

~~Pb 08~~.

Questionnaire – Cédric

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

(1) J'ai du mal à me faire une idée :

Cédric semble pouvoir à peu près reconnaître que 2 figures sont symétriques (ex 1) 5 a) b) en partie pour le 4))

mais il perd ses repères dans un environnement plus complexe (ex 2)

Il semble manquer de moyens sûrs ou stables de validation de ses choix ou de ses constructions ou d'un manque de moyens de contrôle

(2) je lui proposai un travail

– pour qu'il fasse après plus de « réussites » ses constructions du symétrique d'un point à l'équerre et à la règle graduée

Pb n°08. fait soigneusement (angles bien droits)

– puis le pb 15 où le symétrique d'un segment (pb d'axe oblique) (gêné pour Bédric à l'exercice 2).

– puis le pb 04 qui combine différents axes et la possibilité de faire des constructions simples et soignées

puis le pb 12 où on voit (pour b a) que 2 segments, de même longueur, à la même distance d'un axe et parallèles à cet axe peuvent ne pas être symétriques (s'ils sont décalés).

Professeur 5

Fiche de l'Enseignant

1) Vous enseignez actuellement :

(X) Au collège — Précisez le niveau 5 . 4 _ 3 .

( ) Au Lycée — Précisez le niveau ______

( ) A l'université — Précisez le niveau ______

( ) Autre — Précisez ______

2) Vous avez 33 . année(s) d'expérience en enseignement.

3) Parmi les situations ci-dessous, quelle est selon vous celle qui est la plus favorable (mettez + dans la case correspondante) et la moins favorable (mettez - dans la case correspondante) pour l'acquisition d'une connaissance par l'élève ?

( ) L'élève assiste au cours clairement présenté par l'enseignant, est attentif, écoute et note

(−) L'élève résout des problèmes (pour la majorité de nos élèves)

(+) L'élève est guidé progressivement par l'enseignant vers la connaissance visée.

4) Avez-vous fait une formation en didactique des mathématiques ?

( ) Oui — (X) Non

Si oui, précisez laquelle (Formation Initiale à l'IUFM, Stage de Formation Continue, IREM, DEA, Doctorat, …)

Questionnaire – Anissa

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

   a. Les éléments pris en compte

   b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

   c. D'autres remarques

1/ le mot pliage est écrit mais il n'a aucune signification pour elle car elle effectue des glissements horizontaux (confusion avec la translation qui est au programme de 4°. ?)
Tout est à retravailler..

2/ Séquence : qu'est-ce qu'un pliage ? Je le visualise :
Comment je construis le symétrique d'un point ---

pb 2(a) (oral) : les figures ne sont pas symétriques, c'est écrit ... donc son exercice 4 est faux. (ce doit être sa conclusion)

pb 1 les figures sont symétriques . On a plié suivant quelle droite ?
. On a effectué une symétrie par rapport à ---

dialogue. { on remarque à nouveau que les oiseaux sont face à face et pas " dans le même sens " ! pas de glissement.

. Elle répond aux questions posées en visualisant l'orthogonalité et les ~~milieu~~ distances égales (codages marqués).
(compte tenu de ses difficultés je ne parlerais pas de médiatrice)

. En marquant le texte je lui proposerais de tourner la feuille et de visualiser la figure quand l'axe est horizontal, vertical.

pb. 2 (à l'oral) réponses. b. c - d. à me donner
Je lierais le c. au reflet de la maison dans l'eau.

pb17 : toujours à l'oral mais sans justification (bien avec sa réponse 3)
La phase "jeux" étant terminée, elle doit apprendre à construire des images.

Symétrique d'un point : (à l'équerre).
avec quadrillage : pb 15 – 7.
sans quadrillage : pb 8.

Symétrique d'une figure : pb 04.

A la maison : pb 18 : (la maison est à droite de l'axe !)

(celle au compas étant liée à la notion propriété de la médiatrice, je l'étudierais ultérieurement.

Je lui proposerais auparavant de construire les symétriques d'un triangle avec l'axe hors du triangle et vertical puis oblique. pb 04 : commencer par le c. puis a, puis b. et je vérifierais à chaque étape pour analyser les erreurs éventuelles.

Questionnaire – Béatrice

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

    a. Les éléments pris en compte

    b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

    c. D'autres remarques

1/ Elle semble confondre symétrie axiale et symétrie centrale. Elle connait le ~~procédé~~ mot pliage mais ne plie pas suivant l'axe. (ex 1)
Elle sait construire les symétriques de deux points (ex3) mais essaie d'utiliser (mal) les propriétés de la symétrie quand beaucoup de symétriques sont nécessaires (ex. 4)
Elle semble apprendre (ex 5-6 "car c'est un rectangle") sans comprendre (diagonales axes d'un parallélogramme mais pas d'un rectangle) (ON) axe de sym dans le n° 2 pas dans le 5)

2/ Séquence : visualisation du symétrique → quel pliage ?
construction du symétrique d'une figure

. Observations du pb 01. et du pb. 07. } pliage suivant quelle droite ? (oral)
Mise en pratique avec du calque : pb. 09. (b).
le pliage étant identifié, je proposerais le pb 02 (oral) pour elle aussi je parlerais de reflet dans l'eau (c)

Ensuite nous étudierions le symétrique d'une figure

Reprise sur. pb 07 : elle nomme correctement les images respectives (ce qu'elle n'a pas su faire dans l'exercice 4).

Ensuite, à l'épreuve (pour les mêmes raisons qu'Anissa et Cedric)

pb. 04. (comme Anissa. ex. avec le triangle auparavant)

et pb. 18. Je lui expliquerais après construction comment elle pouvait utiliser les conservations des longueurs, les angles...

Questionnaire – Cédric

1. Pourriez-vous décrire ce qu'est la symétrie axiale pour cet élève (propriétés attribuées pour cette notion par l'élève, types d'erreurs, moyen de contrôle …)

2. Quelle séquence d'apprentissage proposez-vous pour cet élève ? Justifiez tous les choix faits dans cette séquence :

    a. Les éléments pris en compte

    b. Les raisons du choix de problèmes et conditions d'utilisation de ces problèmes (quels instruments, techniques, moyens de validation sont à disposition de l'élève)

    c. D'autres remarques

1/ Il lie la symétrie à la notion de distance mais indifféremment distance à une droite (sait-il vraiment ce que c'est ?) ou distance à un point.
Dès que l'axe est oblique il ne visualise pas le symétrique d'une figure. Il ne sait pas construire le symétrique d'un point.
Il est plus performant dans la recherche d'axes.
A noter qu'il trace un axe supposé puis l'élimine sans penser à l'effacer. Là aussi, pas de construction mais des tracés.

2/ pb.01 : Comment superposer F et F' ? Quelle manipulation ?
oral. Le mot pliage devrait revenir dans sa tête.
Pliage suivant quelle droite ?
C'est une symétrie par rapport à cette droite.

Ensuite je procéderais comme avec Anissa.
en mettant en relief l'orthogonalité (il reporte des longueurs mais hésite entre perpendiculaire ou pas (ex 4)

Index des Figures

Index des Tableaux

Index des Schémas