La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661. [version déposée]

Sébastien Maronne

UNIVERSITÉ PARIS 7-DENIS DIDEROT
Équipe REHSEIS-UMR 7596, 59 rue Nationale, Tour Montréal 1er étage,
Dalle les Olympiades, 75013 Paris.

Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 en
Épistémologie, Histoire des sciences

Sébastien MARONNE

La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661

Thèse dirigée par M. Marco PANZA, Directeur de recherche au CNRS

Devant être soutenue le mercredi 19 septembre 2007

Jury :
M. Henk BOS, Professeur à l'Université d'Utrecht et d'Aarhus, rapporteur.
M. Massimo GALUZZI, Professeur à l'université de Milan, rapporteur.
M. Vincent JULLIEN, Professeur à l'université de Nantes.
M. Roshdi RASHED, Directeur de recherche émérite au CNRS.
Mme Elisabeth SCHWARTZ, Professeur à l'université de Clermont-Ferrand.
M. Jean-Jacques SZCZECINIARZ, Professeur à l'université de Paris 7.

« Quel bonheur, quel repos pour un esprit fatigué de chercher la vérité en lui-même de se dire qu'elle est située, hors de lui, aux feuillets d'un in-folio jalousement conservé dans un couvent de Hollande. »

Marcel Proust, *Journées de lecture*

Remerciements

Je remercie très sincèrement Marco Panza, sans la direction duquel cette thèse n'aurait pas vu le jour, mais aussi Massimo Galuzzi, pour son soutien et ses conseils, Roshdi Rashed, pour ses encouragements, ainsi que tous les membres du jury, pour avoir accepté d'y participer.

Merci également à Carlos Alvarez, Karine Chemla, Renaud Chorlay, Jeanne Peiffer, Erwan Penchevre, Christine Proust, David Rabouin ainsi qu'à tous les membres du laboratoire REHSEIS à Paris 7.

Merci aussi à Dominique Descotes, Alex Esbelin, Sébastien Gandon ainsi qu'à tous mes collègues de Clermont-Ferrand, et aux conférenciers participants au séminaire IREM-MSH de recherche en histoire et épistémologie des sciences mathématiques de Clermont-Ferrand.

Merci enfin à mon épouse Catherine et à mon fils Octave pour leur affectueuse présence et leur patience durant ces années, ainsi qu'à mes parents et à ma famille pour leur support et leur confiance.

Table des matières

Introduction Générale

Deux lectures de la *Géométrie*

La *Géométrie* de Descartes a suscité des lectures et des réactions s'ordonnant successivement selon deux perspectives.

D'une part, on peut reconnaître dans le traité cartésien une méthode pour la résolution des problèmes géométriques[1]. Le projet central sous-tendant la *Géométrie* consisterait donc à articuler le programme classique de résolution des problèmes géométriques hérité des Anciens et l'algèbre des Modernes[2].

De ce point de vue, le programme cartésien fut fraîchement accueilli. L'affirmation sans cesse renouvelée par Descartes du caractère implacable

---

[1] Qu'on pense par exemple à phrase inaugurale de la *Géométrie* faisant écho à la conclusion déjà énoncée par Viète dans son *Isagoge* de « Nullum non problema solvere » :

> Tous les problesmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Cf. [Descartes(1637c), p. 369].

[2] Descartes écrit ainsi dans le *Discours de la Méthode* :

> J'avais un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et entre les mathématiques, à l'*analyse des géomètres et à l'algèbre*, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. [...] Puis, pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur, qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelque autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fût exempte de leurs défauts.

Cf. [Descartes(1637c), p. 17].

de la Méthode pour résoudre les problèmes se heurta au scepticisme et à l'incompréhension des mathématiciens contemporains, comme Beaugrand, Roberval ou Fermat, accentués par les « omissions » cartésiennes, comme en témoignent les nombreuses controverses qui suivirent la publication de la *Géométrie*[3].

D'autre part, on peut reconnaître une nouveauté dans la *Géométrie* : l'établissement d'une relation privilégiée entre courbe géométrique et équation algébrique, dont témoigne par exemple l'usage que fait Descartes de l'équation d'une courbe pour résoudre le problème des normales.

De ce point de vue, au contraire, la *Géométrie* connut ensuite une postérité féconde à travers l'interprétation et l'usage de ses objets et méthodes qui participèrent de la création de théories nouvelles. La définition d'une courbe par une équation et la méthode des normales furent ainsi à l'origine de nombreux développements ultérieurs dans la géométrie analytique et infinitésimale. On sait par exemple que la seconde édition latine de la *Géométrie* constitua une source fondamentale pour Newton dans l'élaboration de sa théorie des fluxions[4].

On retrouve d'ailleurs ces deux lectures exprimées à travers deux interprétations apparaissant dans le débat historiographique qui a eu lieu ces dernières années au sujet de la *Géométrie.* Ainsi la discussion entre Henk Bos et Enrico Giusti tient précisément à la primauté qu'on devrait donner à l'une ou l'autre de ces deux interprétations de la *Géométrie* pour rendre compte des intentions de son Auteur et de la « structure »[5] du traité[6].

Ainsi, pour Henk Bos, « le but premier de [la *Géométrie*] [est] de procurer une méthode générale pour résoudre des problèmes géométriques, et non d'établir une technique pour étudier des courbes »[7], tandis qu'au contraire pour Enrico Giusti, « le rapport courbe-équation occupe la position centrale

---

[3]Citons par exemple la controverse sur les tangentes avec Fermat, la controverse sur la solution du problème de Pappus que nous étudions ici, ou bien la controverse avec Beaugrand au sujet de Viète.

[4]Cf. *infra* [note 65, p. 35].

[5] Cf. l'article de Henk Bos : [Bos(1990)].

[6]Pour une présentation des positions de ces deux auteurs suivie d'une interprétation personnelle, on peut consulter l'ouvrage de Vincent Jullien : [Jullien(1996), p. 56-67]. Massimo Galuzzi discute également de l'interprétation plus ancienne et classique de Molland présentée dans [Molland(1976)] et de celle de Bos, en considérant en particulier le premier article de l'auteur sur le sujet [Bos(1981)], dans son [Galuzzi(1985)]. Cf. également [Panza(2005), p. 23-44].

[7]Cf. [Bos(2001), p. 228] et aussi [Bos(1990), p. 352-353].

dans la *Géométrie*, déterminant les problèmes et les méthodes, les choix et les exclusions »[8]. Néanmoins, les deux historiens s'accordent pour reconnaître que finalement c'est le programme de recherche fondée sur l'étude des courbes géométriques par leur équation qui prévalut à terme chez les mathématiciens du dix-septième siècle qui lurent la *Géométrie*[9].

On voit bien que la première de ces deux interprétations inscrit la *Géométrie* à l'apogée d'une tradition, tandis que la seconde la place à l'origine d'une postérité. Mais si « la *Géométrie* est dialogue d'un critère à l'autre, d'un versant à l'autre avec des moments de jonction »[10], qu'en est-il de l'œuvre géométrique cartésienne prise dans son ensemble et de celle de ses commentateurs dont Debeaune et Schooten ? Si « les deux concepts [de courbe équation et courbe-construction] continueront pendant quelque temps à progresser ensemble »[11], ne peut-on pas mettre en évidence dans la Correspondance et les éditions latines de la *Géométrie* les étapes qui ont conduit à la prééminence du premier concept et à la cristallisation de l'objet courbe-équation ?

Quatre Géométries

L'œuvre mathématique cartésienne dans son élaboration et dans sa réception dépasse en effet largement les bornes du court traité de cent vingt-sept pages censé en dévoiler le résultat le plus éclatant. Synthèse tardive et sans doute empressée, qui satisfaisait néanmoins son auteur, de réflexions longuement éprouvées sur les mathématiques[12], la *Géométrie* n'est que la première de quatre Géométries. À celle-ci, il faut ajouter « la *Géométrie* que Descartes n'a pas publiée »[13] constituée par les réponses cartésiennes de la

[8]Cf. [Giusti(1990), p. 436] et aussi [Giusti(2000), p. 42-43].

[9]Cf. [Bos(2001), p. 227-228] et [Giusti(2000), p. 44].

[10]Cf. [Jullien(1996), p. 67].

[11]Cf. [Giusti(2000), p. 44].

[12]Descartes confesse dans une lettre adressée à un Révérend Père Jésuite datée par Adam-Tannery d'octobre 1637 que la *Géométrie* fut écrite en moins d'un an entre 1635 et 1636 durant l'impression des *Météores* :

> C'est vn traitté que ie n'ay quasi composé que pendant qu'on imprimoit mes Meteores, & mesme i'en ay inuenté vne partie pendant ce temps-là ; mais ie n'ay pas laissé de m'y satisfaire, autant ou plus que ie ne me satisfais d'ordinaire de ce que i'ecris.

Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 458].

[13]Je reprends le titre d'un article de Pierre Costabel : [Costabel(1990)].

Correspondance[14] aux sollicitations et critiques portant sur la *Géométrie* et la Méthode, la première édition latine de 1649, et enfin la seconde édition latine de 1659-1661 publiées toutes deux sous la direction de Frans van Schooten.

Si la *Géométrie* a engendré de nombreux commentaires au sein de l'historiographie, une étude de ces Géométries, considérées comme formant un corpus, celui de la Géométrie cartésienne prise dans son ensemble, n'a pas encore vu le jour. Selon nous, une étude des thèmes de la *Géométrie* à partir de ce corpus étendu pourrait non seulement éclairer le traité cartésien mais permettre aussi la reconstruction d'une histoire de la théorie des courbes géométriques et des équations algébriques depuis 1637 jusqu'à 1661.

Pour ce faire, il est nécessaire et essentiel de lire la Correspondance et d'étudier l'évolution du programme cartésien avec les difficultés qui en découlent ainsi que la réception de ce programme par les mathématiciens contemporains — adversaires, amis, et disciples —. En effet, la Géométrie de la Correspondance, comme nous essaierons de le montrer, porte témoignage de cette histoire et apparaît comme un moyen terme entre la *Géométrie* et ses éditions latines.

Trois problèmes

Bien sûr, nous ne saurions prétendre étudier ici toutes les Géométries. Ce sont plutôt des études ponctuelles et approfondies de thèmes qui nous pa-

[14] D'autres historiens ont remarqué avant nous l'importance de la Correspondance pour étudier la Géométrie de Descartes. Un colloque a ainsi été consacré récemment en 1996 à la biographie intellectuelle de Descartes à travers la Correspondance cartésienne dont les Actes ont été publiés dans [Belgioioso(1999)]. Pour une étude des questions philologiques et interprétatives posées par l'examen des lettres de la Correspondance cartésienne, cf. [Armogathe(1999)]. Pour les mathématiques, cf. plus précisément [Giusti(1999)] et [Warusfel(1999)]. On peut consulter également l'article fondateur [Costabel(1990)] déjà cité et [Galuzzi(1985), p. 643 et n. 1 p. 661]. Vincent Jullien a proposé dans son article [Jullien(1999)] une distinction entre la *Géométrie* et les « mathématiques extérieures » à la *Géométrie* qu'on trouve dans la Correspondance, relevant d'une pratique plus contingente et traitant de sujets qui n'apparaissent pas nécessairement dans le traité cartésien tels que le problème de la quadrature de la cycloïde ou bien la question de Debeaune portant sur un problème inverse des tangentes. Notre propos est différent dans la mesure où nous considérons uniquement dans la Correspondance les discussions et les thèmes qui prolongent ceux de la *Géométrie*. Cf. également [Jullien et Charrak(2002)] pour une étude appuyée sur la Correspondance cartésienne des conceptions de Descartes sur la chute des graves, accompagnée d'une édition et traduction des lettres concernées.

raissent essentiels qui constitueront le travail de thèse présenté ici, propédeutique à une étude de plus grande ampleur de l'ensemble des textes des Géométries, en particulier ceux de la seconde édition latine.

Nous avons donc choisi d'étudier trois problèmes qui nous sont apparus comme centraux dans les Géométries cartésiennes : le problème de Pappus, le problème des tangentes et des normales, et un problème connu sous le nom de *Problema astronomicum*, jugé exemplaire de l'aveu même de Descartes, pour appliquer l'Algèbre à la Géométrie selon la Méthode.

Ces trois problèmes nous paraissent centraux pour trois raisons qui tiennent respectivement aux intentions de Descartes, à la réception de la *Géométrie* par les mathématiciens de l'époque, et enfin à l'interprétation historiographique des Géométries cartésiennes.

D'une part, Descartes lui-même reconnaît en effet explicitement ces trois problèmes comme centraux dans son programme d'application de l'algébre à la résolution des problèmes géométriques et, plus précisément, à la théorie des courbes géométriques, que ce soit dans le texte de la *Géométrie* ou bien dans la Correspondance.

D'autre part, ces trois problèmes ont chacun donné lieu à une controverse avec les mathématiciens qui reçurent la *Géométrie* : avec Roberval sur la solution du problème de Pappus, avec Fermat sur la méthode des normales, et avec Stampioen sur la solution du *Problema astronomicum*.

Enfin, l'étude des réponses apportées par Descartes au problème de Pappus et au problème des normales permet d'interroger la présence ou l'absence d'une théorie des courbes algébriques au sein des Géométries cartésiennes dans la mesure où le traitement des équations algébriques des courbes géométriques y apparaît assujetti ou affranchi par des considérations géométriques, comme, par exemple, celles portant sur les figures[15] ou bien sur l'exactitude de la construction ou de la démonstration[16].

---

[15]La question afférente étant : Quel traitement des figures résulte de l'usage de l'analyse algébrique par Descartes pour résoudre les problèmes géométriques ? On sait bien en effet que la Géométrie grecque est une géométrie de figures. Sur cette question chez Euclide et chez Apollonius, cf. respectivement [Manders(s.p.)] et [Saito(1985)].

[16]Dans son ouvrage [Bos(2001)], Henk Bos propose ainsi une étude de la transformation de ce concept d'« exactitude géométrique » chez Descartes. Plus précisément, cf. [Bos(2001), p. 3-23] pour une présentation générale de cette problématique.

Deux questions de continuité

Dès lors qu'on a pris connaissance des deux lectures de la *Géométrie* suggérées par les interprétations respectives de Henk Bos et Enrico Giusti, et du corpus étendu et nouveau des quatre Géométries, deux questions de « continuité » s'imposent. La première porte sur la continuité entre la *Géométrie* et la tradition géométrique grecque et arabe et conduit à essayer de déterminer la nouveauté de la *Géométrie* quant à la relation entre courbe et équation. La seconde question porte sur la continuité qui existe entre les Géométries.

Pour traiter la première question, nous inscrirons les problèmes traités dans la *Géométrie* au sein d'une tradition classique de résolution des problèmes géométriques, en les renvoyant plus précisément à une matrice commune, *Les Coniques* d'Apollonius[17].

Ajoutons qu'une seconde comparaison serait nécessaire entre la Géométrie cartésienne et les travaux des mathématiciens arabes s'inscrivant également dans une tradition héritée de la lecture des *Coniques* d'Apollonius. Nous pensons ici en particulier à Al-Khayyām et à Sharaf Al-Dīn Al-Tūsī. Nous n'aborderons pas ici cette question qui a été traitée par Roshdi Rashed dans plusieurs articles et ouvrages[18].

D'autre part, pour traiter de la seconde question, nous étudierons les réponses de Descartes au problème de Pappus et au problème des tangentes dans un Corpus étendu constitué par les Géométries cartésiennes. La Géomé-

[17] Cf. [Descartes(1637c), p. 368] :

> Iusques icy i'ay tasché de me rendre intelligible a tout le monde ; mais, pour ce traité, ie crains qu'il ne pourra estre leu que par ceux qui sçavent desia ce qui est dans les livres de Geometrie : car, d'autant qu'ils contienent plusieurs verités fort bien demonstrées, i'ay creu qu'il seroit superflus de les repeter, & n'ay pas laissé, pour cela, de m'en servir.

Le seul traité de Géométrie cité par Descartes pour justifier un résultat mathématique — ce qui n'est pas le cas des citations de Pappus —, est celui des *Coniques* d'Apollonius. Il s'agit, de façon fort signifiante, d'une part, des problèmes 52, 55, et 56 du livre I où sont construites les coniques à partir de la donnée de leur diamètre, côté droit et angle des ordonnées — *i.e.* à partir de la donnée de leur *symptoma* —, d'autre part, des théorèmes 11, 12, 13 du livre I des *Coniques* où est démontré qu'on peut faire correspondre à chaque conique un *symptoma*. Cf. resp. [Descartes(1637c), p. 402-403 et 404]. Nous reviendrons plus en détail sur cette filiation entre Descartes et Apollonius dans la suite.

[18] Cf. en particulier [Tūsī(1986), p. 12-29] pour une comparaison entre Sharaf Al-Dīn Al-Tūsī et Fermat et [Khayyām(1999), I, Introduction, p. xxvii-xxxii] pour une comparaison entre Al-Khayyām et Descartes.

trie de la Correspondance et celle de la première édition latine ne seraient-elles que de simples éclaircissements de la première, des commentaires, voire des développements de ce qui était déjà présent en 1637 ? Ou, au contraire, celles-ci témoigneraient-elles d'une histoire accompagnée de changements plus ou moins profonds dans les conceptions cartésiennes de la *Géométrie*, en particulier celles concernant l'usage de l'algèbre dans la résolution des problèmes géométriques et l'étude des courbes.

Dans la suite, nous apporterons quelques éléments de cette histoire des Géométries cartésiennes après 1637, qui mettent en évidence des modifications du projet initial, quoiqu'en dise Descartes, apportées à la suite des controverses avec les adversaires tels que Roberval ou Fermat, ou bien des questions posées par les disciples comme Debeaune ou Schooten.

La constitution des objets mathématiques dans les Géométries cartésiennes

Dans son ouvrage posthume *Sur la logique et la théorie de la science*, Jean Cavaillès décrit deux modalités pour la genèse d'un objet mathématique, la *thématisation* et la *généralisation*[19].

Dans le procès de constitution d'un objet mathématique, Cavaillès, en employant une métaphore spatiale, met ainsi en évidence deux mouvements de nature différente[20]. Le premier de ces mouvements est horizontal et se place au niveau de l'enchaînement démonstratif. Il conduit à l'épurement des éléments qui constituent la démonstration mais ne modifie pas l'essence de cette dernière en tant que telle. Nous ne le nommerons « généralisation »[21].

[19] Cf. [Cavaillès(1997)]. Pour éclairer ce texte difficile, on peut consulter l'étude pénétrante qu'en donne Gilles-Gaston Granger sur laquelle nous nous appuyons. Cf. [Granger(1988), p. 70-81]. Jean-Louis Gardies a fait également usage de ces catégories dans son ouvrage consacré à l'analyse. Cf. en particulier [Gardies(2001), Chap. VI, p. 131-160 et Conclusion p. 161-180]. Sur la philosophie des mathématiques de Cavaillès, cf. l'étude de Houria Sinaceur [Sinaceur(1994)] ainsi que la thèse récemment publiée de Pierre Cassou-Noguès [Cassou-Noguès(2001)].

[20] Cf. [Cavaillès(1997), p. 41] et [Granger(1988), p. 70-72].

[21] Cavaillès emploie le terme « passage au paradigme » que nous préfèrons remplacer par « généralisation » suivant en cela Jean-Louis Gardies. Voici comment Cavaillès définit la généralisation :

> Ce qui importe ici est le décrochage opéré à chaque suppression de singularité : c'est ce qui dans le calcul logique est représenté par la règle de

Le second de ces mouvements est vertical et tend à dégager à partir d'une opération ou d'une procédure attachées à un objet mathématique préexistant un objet nouveau. C'est ce que Cavaillès nomme « thématisation »[22].

Pour éclairer ces deux définitions, citons l'exemple qui est donné par Cavaillès :

> Ainsi l'addition, que le procès longitudinal [de la généralisation] rend indifférente aux nombres, lettres ajoutées, qui devient multiplication ou addition abstraite et dont le procès transversal [de thématisation] donne les lois d'associativité et de commutativité : dans le premier cas la notion se purifie suivant la même ligne en quelque sorte, par position de formes de plus en plus abstraites, dans le deuxième apparaît sur un autre plan la nouvelle forme que constituent les principes de la première.[23]

Les deux procès décrits par Cavailllès dans la constitution des objets mathématiques sont selon lui doublement enchevêtrés. En effet, en dépouillant l'opération des éléments qui lui sont indifférents ou étrangers, la généralisation rend possible la reconnaissance de celle-ci qui sera prise ainsi elle-même pour objet. D'autre part, la thématisation renforce la généralisation par « influence rétroactive » en rendant compte par exemple de limitations du calcul ancien[24] qui apparaissaient malgré les généralisations successives.

> substitution, savoir la possibilité de remplacer dans le nouvel élément celui dont il procède effectivement par un quelque autre, équivalent à lui du nouveau point de vue atteint.

Cf. [Cavaillès(1997), p. 43].

[22]Cavaillès définit ainsi la thématisation :

> La pensée ne va plus vers le terme créé mais part de la façon de créer pour en donner le principe par une abstraction de même nature que l'autre, mais dirigée transversalement.

Cf. [Cavaillès(1997), p. 44-45].

[23]Cf. [Cavaillès(1997), p. 46].

[24]Cf. [Granger(1988), p. 78-79]. Cavaillès écrit ainsi :

> On voit le double enchevêtrement des deux procès : d'une part, non seulement l'un et l'autre sont issus de la même surrection de sens, *mais encore l'abstraction du premier favorise le second* : comme cela se manifeste dans les définitions descriptives de certaines notions même élémentaires (puissances d'exposant irrationnels, intégrale de Lebesgue) où il importe de ne pas méconnaître qu'il s'agit de la position du nouvel acte, prolongeant malgré la rupture les actes antérieurs, puisque il les englobe comme cas particuliers [...]

C'est moi qui souligne. Cf. [Cavaillès(1997), p. 46].

Il reste que la thématisation peut s'appuyer sur d'autres modes de constitution d'objets mathématiques[25]. Un autre mode de genèse d'un objet mathématique consiste ainsi à ériger en un objet autonome un objet qui apparaissait auparavant comme une représentation ou une expression d'un objet donné. La prise d'autonomie de cet objet « conditionnel » en un objet « propre »[26] consiste ainsi en l'émancipation des conditions d'identité de ce dernier vis à vis de celles de l'objet auquel il référait[27].

*

* *

Suivant une première démarche analytique, avant de procéder à une étude proprement historique, identifions les modes de constitution des objets mathématiques dans les mathématiques du dix-septième siècle et en particulier dans les Géométries cartésiennes.

Il nous paraît ainsi que l'application du calcul littéral par Fermat et Descartes à la théorie des coniques procède d'une généralisation par rapport à la Géométrie grecque, en particulier par rapport à celle qu'on trouve dans les *Coniques* d'Apollonius. Il est ainsi tout à fait possible de reformuler les raisonnements classiques d'Apollonius, en usant du calcul littéral[28] mais cette reformulation ne modifie pas selon nous de façon essentielle l'analyse géométrique classique qu'on aurait pu reconstruire dans les termes de la Géométrie grecque[29].

Néanmoins, elle suggère et autorise une interprétation algébrique émancipée d'un contexte géométrique, en particulier de la considération des figures,

[25]Cf. [Gardies(2001), p. 167-175].

[26]Marco Panza introduit et développe cette distinction entre « objet propre » et « objet conditionnel » dans [Panza(1998)] et [Panza(2005), p. xii].

[27]On trouve aussi chez Enrico Giusti la description d'un « processus d'objectalisation des procédés »qui paraît similaire. Ce processus comporte trois étapes : pour devenir un objet mathématique, une propriété doit apparaître successivement comme une « solution de problème », un « instrument de recherche » et un « objet d'étude ». Cf. [Giusti(2000), p. 42-44] et [Panza(2005), n. 10, p. xii]. Selon Enrico Giusti, la « courbe-équation » adopterait le statut d'objet dans la *Géométrie* car elle apparaît comme solution du problème de Pappus, instrument de recherche pour la construction des équations, et objet d'étude pour le problème des normales.

[28]C'est exactement ce que fait Heath dans son édition modernisante [Apollonius(1896)] des *Coniques* d'Apollonius.

[29]Gilles-Gaston Granger considère ainsi que la « conique cartésienne, définie comme courbe plane du second degré à la faveur de la représentation algébrique [...] » offre un exemple de généralisation. Cf. [Granger(1988), p. 71].

constituant ainsi selon nous plutôt une condition nécessaire à la constitution d'un nouvel objet. C'est dans cette nouvelle interprétation que réside la thématisation de l'équation algébrique à une inconnue qui apparaît dans le Livre III de la *Géométrie* et sous-tend chez Descartes la théorie des courbes géométriques définie par une équation algébrique à deux variables par l'entremise des constructions point par point des dites courbes.

D'autre part, cette même interprétation algébrique permet la transformation de l'équation algébrique à deux variables, objet conditionnel exprimant une courbe géométrique et tendant à apparaître de plus en plus prééminent, en un objet propre autonome qui deviendra la courbe algébrique. Cette transformation ne sera véritablement réalisée qu'au sein du second livre de l'*Introduction in Analysin Infinitorum* d'Euler en 1748[30], après que l'impulsion initiale eut été donnée par Descartes.

Selon nous, les mathématiques du dix-septième siècle et en particulier les Géométries cartésiennes se situent dans cet entre-deux : postérieures à la généralisation, elles sont antérieures à la thématisation complète de l'équation algébrique à une variable comme à la genèse de la courbe algébrique dont les procès « s'enchevêtrent » avec celui du développement du calcul littéral.

Dans ces conditions, la tâche de l'historien consiste à dégager les conditions nécessaires et suffisantes de la thématisation de l'équation algébrique et de la genèse de la courbe algébrique.

[30]Cf. [Euler(1748), II].

Chapitre 1

Les Commentaires sur la *Géométrie*

Nous commencerons tout d'abord par rappeler brièvement ce que nous connaissons des Géométries pour information au lecteur. D'une part, nous présenterons les données dont nous disposons concernant la genèse et la datation des deux commentaires sur la *Géométrie* qui furent rédigés du vivant de Descartes, sur ses recommandations ou sous sa direction : l'*Introduction à la Géométrie* qu'on attribue à Haestrecht, et les *Notes Brèves* de Florimond Debeaune. D'autre part, nous décrirons succinctement la collection des traités et commentaires qui forment le contenu des deux éditions latines de la *Géométrie* de 1649 et 1659-1661.

La difficulté qui apparut dans la lecture de la *Géométrie* de 1637 chez les adversaires comme les disciples de Descartes nécessita assez rapidement la rédaction d'une introduction et de notes de commentaires par des disciples ou des alliés de Descartes comme Haestrecht, Schooten ou Debeaune, le philosophe dédaignant semble-t-il un tel travail d'éclaircissement, sans doute par refus de paraître ainsi revenir sur le texte de la *Géométrie* qu'il jugeait comme gravé dans le marbre. Un exemple typique de l'incompréhension, parfois bienveillante, que suscita la *Géométrie* est donné par cet extrait d'une lettre de l'ami de confiance de Descartes, Constantin Huygens, qui écrit le 24 mars 1637 :

> En ce qui est de vostre Geometrie, selon ce que vous nous advertissez rondement, il n'y a perspicuité de paroles qui serve. Il faut avoir passé par les grands vestibules du Temple, pour avoir le

> pied faict à penetrer *in illa adyta*[1]. Ie ne seray pas si vain de m'en declarer du tout capable, mais puis que vous en avez transmis quelque chose dans l'esprit du jeune Schooten, je ne serai pas si fayneant que je ne me desrobe un jour à mes occupations, tant que par son adresse je puisse apprendre veoir un peu de lumiere en ce mystere.[2]

Il paraît clair qu'à défaut de prendre la direction effective du travail éditorial des commentaires sur la *Géométrie*, Descartes suggéra en tout cas de façon certaine le contenu et les exemples à traiter qui reprennent des problèmes qui apparurent dans les controverses de l'époque, en particulier celle avec Fermat.

Nous ne traiterons dans la suite de la thèse que de quelques extraits des *Notes Brèves* de Florimond Debeaune et des deux éditions latines de 1649 et 1661 en relation avec les problèmes que nous étudierons, le problème de Pappus, le problème des normales et le *Problema astronomicum*. Nous pensons néanmoins qu'il est souhaitable de présenter également brièvement l'*Introduction à la Géométrie* de Haestrecht qui, jusqu'à présent, n'a pas connu véritablement d'étude détaillée et d'édition scientifique, à l'exception de l'édition dans la Correspondance d'Adam-Milhaud. En effet, ce sont les limitations de cette introduction qui conduiront Debeaune à rédiger ses *Notes Brèves*. Cela nous permettra en outre d'apporter des informations sur le contexte de la Correspondance cartésienne en 1638, après la publication de la *Géométrie*, d'autant que nous parlerons en détail dans la suite de la controverse de cette année entre Descartes et Fermat sur les tangentes.

Nous présenterons donc dans la suite le contexte qui présida à l'élaboration des différents commentaires sur la *Géométrie* de 1637 et donnerons une esquisse du contenu de ces différents traités.

1.1 L'*Introduction à la Géométrie* de Haestrecht

Nous disposons de trois textes, présentant de nombreuses variantes, de ce premier commentaire sur la *Géométrie*, dû très vraisemblablement à Godefroy de Haestrecht. Un *Calcul de Monsieur Descartes* a été imprimé dans

[1] Partie la plus secrète d'un sanctuaire. Du grec *aduton*, où l'on ne peut pénétrer.
[2] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 626-627].

l'édition d'Adam-Tannery à partir d'une copie manuscrite de la Bibliothèque de Hanovre[3]. Si l'on en croit l'annonce faite par Descartes à Mersenne dans une lettre du 13 juillet 1638, le texte de Hanovre est incomplet, car il ne présente que quatre exemples — et encore le quatrième est tronqué — des cinq ou six exemples annoncés. Voici ce qu'écrit Descartes à Mersenne :

> Vous y trouuerez le reste de l'introduction à ma Geometrie, que ie vous auois envoyé cy-devant ; ce reste ne contient que cinq ou six exemples, l'vn desquels est ce lieu plan dont M. (Fermat)[4] a tant fait de bruit ; et le dernier est, ayant quatre globes donnés, en trouver un cinquiesme qui les touche, duquel je ne crois pas que vos Analistes de Paris puissent venir à bout, & vous leur pourrez proposer, si bon vous semble, mais non pas, s'il vous plaist, comme de moy ; car ie me contente de parer, et je ne veux point me mettre en posture pour les combattre.[5]

Une seconde copie, retrouvée au British Museum parmi les manuscrits de Hobbes, est plus complète puisqu'elle présente bien cinq exemples, le cinquième correspondant au problème des quatre sphères, dans le cas où les sphères sont tangentes deux à deux. Ce texte a été imprimé par Adam-Milhaud dans leur édition de la *Correspondance* de Descartes[6]. Cette copie avait été envoyée par Mersenne à Hobbes le 1er mars 1640. Enfin, un troisième texte a été retrouvé récemment par F. de Buzon[7].

La première mention témoignant de la genèse de ce commentaire apparaît dans une lettre de Descartes à Mydorge du 1^er^ mars 1638. Descartes écrit ainsi :

> Au reste, permettez moy que ie vous demande comment vous

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 639-680].

[4]Il s'agit d'un lieu apparaissant dans la proposition II.5 du traité des *Lieux plans* d'Apollonius. Fermat le mentionne comme un exemple bel et difficile de sa méthode dans une lettre à Roberval du 22 septembre 1636. L'énoncé en est le suivant :

> Étant donnés quatre points A, D, E, F chercher le 5^e^ C, en sorte que les quatre carrés AC, CD, CE, CF soient égaux à l'espace donné *dd*.

Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 341-342].

[5]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 246-247].

[6]Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 323-352].

[7]Une copie du manuscrit et d'une première édition de celui-ci par Frédéric de Buzon m'a été communiquée par André Warusfel que je remercie. Dans ce texte, comme dans celui du manuscrit de Hanovre, ne figure pas le cinquième exemple correspondant au problème des quatre sphères.

> gouvernez ma Geometrie ; je crains bien que la difficulté des calculs ne vous en dégouste d'abord, mais il ne faut que peu de iours pour la surmonter, & par apres on les trouue beaucoup plus courts & plus commodes que ceux de Viete. On doit aussi lire le troisieme Livre avant le second, à cause qu'il est beaucoup plus aisé. Si vous desirez que ie vous enuoye quelques addresses particulieres touchant le calcul, i'ai icy vn amy qui s'offre de les écrire, et je m'y offrirois bien aussi, mais i'en suis moins capable que luy, à cause que je ne sçay pas si bien remarquer en quoy on peut trouuer de la difficulté.[8]

Auparavant, dans une lettre à Mersenne du 25 janvier 1638, Descartes préférait ne pas envoyer sa « vieille algèbre » à Mydorge, lui recommandant déjà de commencer sa lecture par le troisième livre, car écrivait-il :

> c'est un écrit qui ne me semble pas mériter d'estre vu ; et parce qu'il n'y a personne que je sache qui en ait de copie, ie serai bien aise qu'il ne sorte plus d'entre mes mains.[9]

D'autre part, dans une lettre du 31 mars 1638, Descartes indique à Mersenne que cette *Introduction* ou *Calcul* est destiné à Desargues[10]. Plus tard, il souhaitera dans une lettre à Mersenne du 31 juillet 1638 qu'elle soit être montrée aux Jésuites pour aider à faire comprendre la *Géométrie*[11].

L'*Introduction* ne vise pas à être un commentaire, comme le répondra plus tard Descartes à Debeaune, mais à procurer plutôt aux « commençants » en l'algèbre les bases qui leur permettront d'entendre le traité cartésien. L'initiation au calcul littéral et au calcul des radicaux constitue ainsi l'objet de la première partie de cet écrit[12].

1.2 Les *Notes Brèves* de Debeaune

La première difficulté, pour qui veut étudier les *Notes Brèves*, a trait au texte source. L'original français étant perdu, les deux premières sources auxquelles nous pouvons nous référer sont les deux traductions latines de

[8] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 22-23].
[9] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 501].
[10] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 88]. Donc à un débutant dans l'algèbre.
[11] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 276].
[12] Cf. [Haestrecht ?(1638a), p. 661-672] et [Haestrecht ?(1638b), p. 328-338].

Schooten qui figurent dans les éditions latines de la *Géométrie* de 1649 et 1659-1661[13]. D'autre part, nous disposons également de deux copies de l'original français : une copie retrouvée à Londres au British Museum et une copie figurant à Paris à la Bibliothèque Nationale auquelle est jointe une lettre de Debeaune à Schooten qu'on peut dater de 1648.

La première copie présente des corrections postérieures à 1649, le correcteur relevant des omissions faites par Schooten dans sa traduction latine de 1649. Selon Adam-Milhaud, ce texte, présentant de nombreuses omissions et erreurs de copie, envoyé peut-être par Mersenne en Angleterre comme l'*Introduction à la Géométrie*, serait certainement le plus ancien. Le texte de Paris, beaucoup plus complet et plus exact, est en revanche conforme à quelques exceptions près à la traduction latine de Schooten de 1649[14]. Adam-Milhaud l'ont du reste publié dans leur édition de la Correspondance cartésienne[15].

Cette copie de Paris présent d'autre part des ajouts relativement à la première version des *Notes Brèves* rédigée par Debeaune à la fin de l'année 1638 comme en témoigne une lettre de Debeaune à Schooten que nous datons de juin 1648[16] et qui mérite d'être citée. Découverte à la Bibliothèque Nationale avec la copie en français des *Notes Brèves* de Debeaune que nous venons de mentionner après la publication des *Œuvres* de Descartes dans l'édition d'Adam-Tannery, on la trouve seulement dans l'édition d'Adam-Milhaud[17]. Debeaune écrit :

> [...] j'apprends par la vôtre que vous avez traduit en latin certaines notes, que j'ai envoyées, il y a environ dix ans à Monsieur Descartes, faites sur sa *Géométrie* pour avoir occasion de m'éclaircir avec lui de quelques difficultés. Vous pouvez bien penser que je ne croyais pas qu'elles dussent être publiques, puisque je n'avais alors vu aucun autre livre de l'analyse spécieuse qu'Hérigone[18] et que j'eusse plus apporté de circonspection à les

---

[13] Cf. [Descartes(1649), p. 119-161] et [Descartes(1659-1661), I, p. 107-142].

[14] Nous en avons relevé certaines. Cf. *infra* [section 4.2.3, p. 117].

[15] Cf. [Debeaune(1638-1648)].

[16] Adam-Milhaud datent cette lettre de 1648-1649. Nous renvoyons pour les justifications de cette datation à notre article à paraître : [Maronne(2007)].

[17] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 321-322].

[18] Debeaune fait référence ici au deuxième tome du *Cursus Mathematicus*, manuel mathématique bilingue de cinq tomes composé en latin et en français par Pierre Hérigone et publié à Paris en 1634. Cf. [Hérigone(1634-1637), II]. Pour plus d'informations sur Hérigone

> écrire. Néanmoins c'est le moins que je dois à la peine que vous avez pris de les traduire que de trouver bon que vous en usiez à votre liberté. [...]
>
> Je désire seulement qu'avant de finir les observations sur les lieux, plans et solides, vous ajoutiez la dernière que je vous envoie à part de cette lettre, afin qu'il ne reste rien à désirer touchant ces lieux.[19]

Si l'ajoût de cette cinquième observation sur le problème de Pappus est attesté, nous suggérons en outre dans la suite en nous appuyant entre autres sur une lettre de Descartes du 25 décembre 1639 que la méthode des tangentes qu'on trouve dans le commentaire de Debeaune aurait été également ajoutée ultérieurement à la première version rédigée par Debeaune à la fin de l'année 1638[20]. On pourrait en conséquence dater le texte de Paris d'Adam-Milhaud de 1648 au plus tard.

Nous disposons par contre d'éléments de datation relativement précis sur la genèse de ce premier texte des *Notes Brèves*. Debeaune, qui ne se satisfaisait pas de l'*Introduction* à la *Géométrie* que lui avait communiqué Mersenne, lui avait annoncé dans une lettre du 13 novembre 1638 son projet « d'écrire l'éclaircissement de toutes les difficultés » se trouvant dans le traité cartésien[21]. Adam-Tannery conjecturent qu'à la même date Debeaune aurait informé Descartes de son dessein dans sa lettre incluse[22].

Trois mois plus tard, Descartes donnait son accord à Mersenne le 9 février 1639 pour qu'on lui envoyât les *Notes* de Debeaune « pour son utilité particulière »[23], notes dont Mersenne l'avait semble-t-il entretenu auparavant dans sa lettre du 15 janvier 1639[24]. Le 20 février 1639, Descartes répondait avec empressement et enthousiasme à Debeaune « pour le remercier de ses *Notes* sur la *Géométrie* »[25]. Ainsi, Descartes avait du recevoir dans l'inter-

---

et plus précisément sur son traité d'algèbre, on peut consulter [Massa Esteve(s.p.)] et [Cifoletti(1990), p. 136-162].

[19] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 321-322]. Sur cette cinquième observation, cf. *infra* [section 4.2.3, p. 118].

[20] Cf. *infra* [section 10.4.4, p. 364].

[21] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 526].

[22] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 524].

[23] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 499].

[24] Descartes répond à une lettre de Mersenne du 15 janvier 1639, lettre aujourd'hui perdue, lorsqu'il excepte les *Notes* de Debeaune de son interdiction à recevoir quelque écrit que ce soit par l'entremise de Mersenne.

[25] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 510-512].

valle séparant le 9 du 20 février les *Notes* envoyées par Debeaune, qui lui avaient été au préalable annoncées soit par Mersenne dans sa lettre du 15 janvier, soit par Debeaune lui-même dans une lettre du 13 novembre 1639.

Décrivons à présent succinctement le contenu des *Notes Brèves*[26]. Après une première partie consacrée à l'algèbre spécieuse et à sa relation avec la Méthode[27], qui relève de la philosophie des mathématiques, les notes suivantes prennent un tour plus technique et visent à éclaircir ou à compléter le texte cartésien.

Citons parmi elles celles qui nous paraissent les plus importantes : la cinquième observation sur le problème de Pappus[28] où Debeaune donne la classification d'une classe d'hyperboles solution du problème de Pappus et celle où Debeaune présente une nouvelle méthode des tangentes[29] sur lesquelles nous reviendrons dans la suite[30].

En effet, force est de constater en lisant le texte et la présentation donnée par Adam-Milhaud[31], qu'au sein des *Notes Brèves*, les deux notes précédentes font figure d'exception et apparaissent comme étant les seules véritables additions mathématiques de fond au texte de la *Géométrie*, qui plus est, sur deux points essentiels de ce texte : la résolution du problème de Pappus et la classification en genres, la méthode des normales.

Dans les autres notes où Debeaune procure par exemple l'analyse d'un problème dont Descartes n'avait fait que donner la construction[32], ou bien considère d'autres solutions particulières au problème de Pappus[33], on aurait bon droit à dire, comme Descartes, que Debeaune n'a fait que combler les omissions du texte de la *Géométrie* en produisant ici des éclaircissements, là des développements ou exemples nouveaux, qui n'ajoutent finalement rien, sur le fond, à la théorie cartésienne.

[26]Pour une description synthétique plus détaillée que la notre, cf. la présentation de Gérard Milhaud : [Descartes(1936-1963), III, p. 361-367].

[27]Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 368-372]. Sur cette partie, cf. la présentation de Gérard Milhaud [Descartes(1936-1963), III, p. 361-362], [Savini(2004), p. 285-290] et [Bos(2001), p. 300-301].

[28]Cf [Debeaune(1638-1648), p. 386-389].

[29]Cf [Debeaune(1638-1648), p. 390-392].

[30]Cf. respectivement *infra* [section 4.2.3, p. 116] et [section 10.5, p. 365].

[31]Cf. [Descartes(1936-1963), IV, p.361-367] et [Debeaune(1638-1648)].

[32]C'est le cas par exemple pour la construction des problèmes plans. Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 373-375].

[33]Comme dans les observations deuxième, troisième et quatrième sur le problème de Pappus. Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 378-385].

1.3 Les éditions latines de la *Géométrie* de 1649 et 1659-1661

La première mention de Descartes concernant le projet d'une édition latine de la *Géométrie* figure dans une lettre du 23 août 1638 qui se place après la controverse avec Fermat sur les tangentes[34]. Un tel projet, qui apparaît comme une réponse à l'accueil froid et polémique de la *Géométrie* en France, témoigne également de l'existence d'une école cartésienne aux Pays-Bas formée par de jeunes mathématiciens, comme Van Schooten fils ou Haestrecht, qui, au contraire de la communauté mathématique française, ont reçu non seulement très favorablement les Essais cartésiens mais se proposent de surcroît d'enseigner et de développer la Méthode[35]. Descartes écrit ainsi :

> En effect, que ces gens la [Fermat et Roberval] facent ou dient ou escriuent tout ce qu'ils voudront, ie suis resolu de les mepriser. Et au bout du conte, si les Francois me font trop d'iniustice, *convertam me ad gentes*. Ie suis resolu de faire imprimer bientost ma version latine pour ce suiet [...] Il y en a d'autres aussy qui enseignent ma Geometrie, sans en auoir eu de moy aucunes instructions & d'autres qui la commentent[36]. Ce que ie vous escris, affin que vous sçachiez que, si la vérité ne peut trouver place en France, elle ne lairra peut estre pas d'en trouuer ailleurs, & que ie ne mets point fort en peine.[37]

On trouve une seconde mention plus explicite de Descartes dans une lettre à Mersenne du 25 décembre 1639. Un an environ après avoir abandonné le projet de faire imprimer l'*Introduction* de Godefroy de Haestrecht[38], Descartes mentionne en réponse à une lettre de Mersenne du 10 décembre son projet d'une édition latine de la *Géométrie* auquelle serait adjointe les *Notes* de Debeaune :

---

[34]Cf. *infra* [chapitre 9, p. 303]. À cette époque, Descartes n'est pas encore entré en contact avec Debeaune.

[35]Sur la réception de la *Géométrie* et du *Discours de la Méthode* aux Pays-Bas, cf. [Costabel(1988)] et [Dibon(1990)].

[36]Descartes parle ici vraisemblablement de Haestrecht et van Schooten fils. Cf. également la lettre à Mersenne du 1er mars 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 30].

[37]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 334-335].

[38]Cf. la lettre de Descartes à Mersenne du 11 octobre 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 392-393].

> Je n'ai point dessein ni occasion de faire imprimer les *Notes* que Mr de Beaune a pris la peine de faire sur ma *Géométrie* ; mais s'il les veut faire imprimer lui-même, il a tout pouvoir ; *seulement aimerais-je mieux qu'elles fussent en latin, et ma Géométrie aussi*, en laquelle j'ai dessein de changer quasi tout le second Livre, en y mettant l'analyse des lieux, et y éclaircissant la façon de trouver les tangentes ; ou plutôt (à cause que je me dégoûte tous les jours de plus en plus de faire imprimer aucune chose), *s'il lui plaît d'ajouter cela en ses Notes, je m'offre de lui aider en tout ce qui sera de mon pouvoir.*[39]

Comme on le sait, ce fut finalement Frans van Schooten le fils[40], qui avait dessiné, alors jeune étudiant, les planches de la *Dioptrique* et de la *Géométrie*[41] qui entreprit l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes, vraisemblablement après l'édition qu'il avait donné en 1646 des *Œuvres* de Viète[42].

On trouve ainsi dans une liasse de manuscrits appartenant à Frans van Schooten le fils, conservée à la Bibliothèque universitaire de Groningue et publiée par Adam-Tannery[43] des annotations portant sur la *Géométrie* de 1637, mais aussi sur les leçons de Golius, écrites de la main de l'éditeur de la *Geometria*. Parmi ces annotations, certaines sont développées dans son Commentaire à l'édition latine de la *Géométrie* de 1649[44]. Bien que difficile à interpréter, ce texte apparaît donc comme un témoignage intéressant de la réception et la lecture de la *Géométrie* de 1637 par son futur éditeur, mais aussi semble-t-il de conversations avec Descartes.

La part d'intervention qui revient à Descartes dans l'élaboration de cette première édition latine de la *Géométrie* reste indéfinie, quels que soient par ailleurs les jugements et les nombreuses dénégations portés par celui-ci dans

[39] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 638-639]. Cf. également *infra* [section 4.2.1, p. 108].

[40] Le livre de référence sur Frans van Schooten est [Hofmann(1962)]. Cf. également [Maanen(1987), p. 21-31].

[41] Cf. la lettre de Descartes à Huygens du 13 juillet 1636 : [Descartes(1964-1974), I, p. 611].

[42] Cf. [Viète(1646)].

[43] Groningue, Ms. 108. Cf. [Descartes(1964-1974), X, Addition I, p. 635-647]. Ce manuscrit est attribué de façon erronée à F. van Schooten le père par Ch. Adam, à la suite de Bierens de Hans qui avait signalé le manuscrit dès 1878. Cf. la présentation de F. de Buzon *in* [Descartes(1987), p. 25-26]. Cf. également [Maanen(1987), p. 23-24].

[44] Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 637-644]

sa Correspondance[45].

À ce constat, une unique lettre dans toute la correspondance cartésienne fait figure d'exception. Il s'agit d'une lettre non datée de Descartes à Schooten[46], que nous datons dans un article sous presse de mars-avril 1648[47]. Cette lettre répond à une lettre perdue de Schooten au sujet de trois questions : la première concerne les « *Notes* de Monsieur de Beaune »[48], la deuxième s'applique à une « remarque de N [Roberval]. », la troisième porte sur une « annotation de Monsieur Haestrecht à la page 378 » de la *Géométrie*. Pour les deux dernières questions, Descartes confie à Schooten un « advertissement » et un éclaircissement écrits en latin que l'on retrouve insérés avec quelques modifications dans l'édition latine de la *Géométrie* de 1649[49].

1.3.1 La *Geometria* de 1649

Dans le commentaire de Schooten, un résumé est donné pour chaque Livre de la *Géométrie* précédant les notes consacrées au Livre concerné. Les notes du commentaire de Schooten sont indiquées par des lettres et sont classées dans l'ordre alphabétique pour chaque livre de la *Géométrie*[50]. Elles interviennent en plus grand nombre au fur et à mesure des trois Livres et le commentaire du dernier Livre de la *Géométrie* est le plus étendu. Cela ne fait qu'accréditer l'idée selon laquelle la partie algébrique de la *Géométrie* fut celle qui posât le plus difficultés aux contemporains de Descartes.

On retrouve du matériel de la Correspondance cartésienne dans l'édition latine. La note O[51] du Livre II est ainsi consacrée à la cycloïde et à la détermination des tangentes et du point d'inflexion de cette courbe

[45] Cf. par exemple la lettre de Descartes à Mersenne du 4 avril 1648 [Descartes(1964-1974), V, p. 143] ainsi que la lettre de Descartes à Carcavi du 17 août 1649 [Descartes(1964-1974), V, p. 392].

[46] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 574-583].

[47] Cf. [Maronne(2007)]. Cf. également *infra* [section 4.4.1, p. 127].

[48] Cf. l'éclaircissement de Tannery : [Descartes(1964-1974), II, p. 579-580].

[49] Il s'agit respectivement de la note E au Livre II [Schooten(1649b), p. 196-197] et de la note H au Livre III [Schooten(1649b), p. 251-252]. Sur cette première note, cf. *infra* [section 4.4.2, p. 132].

[50] Livre I : A à N, [Schooten(1649b), p. 165-180], Livre II : A à P, [Schooten(1649b), p. 185-230] et Livre III : A à X, [Schooten(1649b), p. 236-294]. Dans l'édition d'Adam-Tannery de la *Géométrie* [Descartes(1637c)], ces notes sont signalées par des astériques dans le texte et indiquées en bas de page.

[51] Cf. [Schooten(1649b), p. 223-229].

« mécanique ». Schooten paraît reprendre la démonstration donnée par Descartes dans sa lettre à Mersenne du 23 août 1638[52] pour laquelle on dispose d'un manuscrit autographe. Le philosophe aurait pu ainsi donner connaissance à Schooten de cette lettre voire lui suggérer d'ajouter une telle note. Un indice de ce premier fait est qu'on retrouve exactement les mêmes figures dans la lettre et dans l'édition latine.

On trouve un *Additamentum* à la suite du commentaire de Schooten[53] qui contient la solution d'un problème de gnomonique connu sous le nom de *Problema astronomicum*[54], apparu dans la controverse de 1638-1640 entre le mathématicien flamand Stampioen et Descartes représenté par son prête-nom Waessenaer[55], et, à la suite, une règle d'extraction des racines des binomes. Rappelons qu'une telle règle sert à transformer, lorsque cela est possible, l'expression $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ en $x+\sqrt{y}$, où x, y, a, b sont des nombres rationnels,

La solution du *Problema astronomicum* ainsi que la règle d'extraction des racines binômes sont toutes deux tirées d'un ouvrage polémique par Waessenaer, le *Den On-Wissen Wis-konstenaer*[56], publié en 1640, et consistent en des traductions latines du texte écrit en flamand agrémentées de commentaires et de démonstrations complétives.

Ainsi le *Problema astronomicum* est-il accompagné de notes rédigées par Érasme Bartholin[57], mathématicien danois, appartenant au cercle de Schooten ainsi que d'un théorème préliminaire et de sa démonstration dont Schooten est l'auteur[58]. D'autre part, Schooten adjoint une démonstration[59] à la

---

[52][Descartes(1964-1974), II, p. 307-313].

[53]*Additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis.* Cf. [Schooten(1649a)].

[54]Cf. [Schooten(1649a), p. 295-323]. Nous étudions en détail ce problème dans la troisième partie de la thèse. Cf. *infra* pour l'histoire du problème [chapitre 11, p. 377] et pour une étude mathématique de la solution de Descartes-Waessaner dans la traduction latine de Schooten comparée avec celle de Newton [chapitre 12, p. 401].

[55]Cf. *infra* [section 11.3, p. 385].

[56]Cf. [van Waessenaer(1640)] et *infra* [section 11.3.2, p. 388] pour une description du contenu de l'ouvrage.

[57]Cf. [Schooten(1649a), p. 318-323]. Cf. [Descartes(1964-1974), V, Suppléments, p. 571-575] pour des précisions biographiques sur Érasme Bartholin qui participa encore davantage à la seconde édition latine de 1659-1661.

[58]Sur ce théorème préliminaire, cf. *infra* [chapitre 13, p. 435]. Les démonstrations de ce théorème varient selon les éditions de 1649 et 1659-1661. Cf. *infra* [section 13.1, p. 437].

[59]Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 323-336].

règle d'extraction des racines de binômes qu'il revendique comme sienne[60].

1.3.2 La *Geometria* de 1659-1661

Le projet d'une seconde édition latine de la *Géométrie* de Descartes remonte à 1654. Il émane d'une demande de l'imprimeur Louis Elzevier comme en témoigne une lettre de Schooten à Christiaan Huygens du 25 octobre de la même année[61] dans laquelle l'éditeur de la *Geometria* sollicite de la part de son ancien élève un relevé des fautes de la *Géométria* de 1649[62]. Huygens répondit favorablement à cette demande et lui transmit copie de ses annotations en marge de son exemplaire dans une lettre d'octobre ou novembre 1654[63].

La deuxième édition latine de 1659-1661 connut une bien plus large diffusion et fut réimprimée deux fois en 1683 et 1695[64]. On peut la considérer comme une sorte d'encyclopédie de la Géométrie cartésienne eu égard aux nombreux traités des disciples cartésiens, dont en particulier ceux de l'école hollandaise, qu'elle contient.

Cette édition latine influença grandement les mathématiciens de la fin du dix-septième pour qui elle constitua un traité de formation mathématique incontournable et permit ainsi la diffusion des nouvelles méthodes analytiques.

---

[60] Cf. [Schooten(1649a), p. 323]. Cf. également la lettre de Descartes à Waessenaer du 1er février 1640 où le philosophe donne l'énoncé et la démonstration de la règle dans le cas des racines cubiques : [Descartes(1964-1974), III, p. 149-150]. Sur cette question, on peut consulter l'article de Pierre Costabel : [Costabel(1969)]. Cf. également *infra* [section 11.3.2, p. 388].

[61] Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 301].

[62] Il faudrait étudier la participation de Christiaan Huygens aux éditions latines de la *Géométrie* en particulier dans la correspondance échangée avec Schooten pour la préparation de la seconde édition de 1659-1661 où la collaboration de Huygens fut des plus actives. Cf. par exemple [Huygens(1888-1950), XIV, *Contributions aux commentaires de van Schooten sur la « Geometria » de Descartes. Editions de 1649 et 1659*, p. 409-427]. Pour un aperçu synthétique sur Huygens et son œuvre, cf. [Costabel et Martinet(1986), p. 33-47].

[63] Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 303-305]. Au sujet d'une controverse entre Schooten, d'un côté, Huygens et Roberval, de l'autre, concernant l'ajout d'une note à la solution cartésienne du problème de Pappus, cf. également [section 4.6, p. 144].

[64] Cf. [Descartes(1683)] et [Descartes(1695)]. L'édition de 1683 est identique à celle de 1659-1661. On trouve dans la dernière édition de 1695 le *Compendium Musicæ* de Descartes ainsi que des notes supplémentaires de Jacob Bernoulli : [Bernoulli(1695)]. Pour une biographie scientifique de Jacob Bernoulli, on peut consulter l'article récent de Jeanne Peiffer [Peiffer(2006)].

On sait par exemple que Newton s'adonna à une lecture approfondie du traité cartésien, accumulant des notes qui s'étalent de la fin de l'été 1664 au mois de mai 1665[65].

*

* *

Le premier volume de l'édition de 1659-1661 contient la traduction latine de la *Géométrie* de Descartes et des *Notes Brèves* de Debeaune par Schooten, qu'on retrouvait déjà dans la première édition latine de 1649. Suit le commentaire de Frans van Schooten qui a été étendu par rapport à celui qui figurait dans la première édition latine de 1649. On passe ainsi de 133 pages en 1649 à 202 pages en 1659. Les nouvelles notes sont indiquées par des lettres majuscules doublées voire triplées si nécessaire pour les différencier de celles de 1649 entre lesquelles elles sont insérées en suivant l'ordre du texte[66].

On peut citer comme exemple parmi ces ajouts la note où Schooten démontre comment on peut obtenir la construction des équations cubiques et quartiques par intersection d'un cercle et d'une parabole en employant la méthode des coefficients indéterminés[67].

Les notes de 1649 sont parfois reprises telles quelles et parfois augmentées. La note O du Livre II consacrée à la détermination de la normale à la conchoïde en fournit ainsi un exemple particulièrement intéressant[68]. Descartes, dans la *Géométrie* de 1637, s'était contenter de donner la construction, fort élégante, de la normale à la conchoïde, indiquant qu'en cherchant à déterminer cette normale en employant sa méthode « on pourroit [...] s'engager dans un calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens exemples »[69]. Alors que Schooten proposait seulement dans l'édition de 1649 la méthode

[65]Cf. [Newton(1967-1981), I, p. 143-448]. Pour une étude sur la méthode des normales de Descartes et la lecture qui en est faite par Newton, on pourra aussi consulter l'ouvrage récent de Marco Panza : [Panza(2005), p. 83-132]. Massimo Galuzzi traite ainsi en détail des *marginalia* de Newton à la *Geometria* de 1659-1661 dans [Galuzzi(1990)]. Cf. également son dernier article [Galuzzi(s.p.)].

[66]Livre I, GG, GGG :[Schooten(1659b), p. 154-159], Livre II, BB, CC et CCC, OO, PP : [Schooten(1659b), resp. p. 179-181, 182-206 et 206-223, 270, 276], Livre III, VV, X, Y et Z : [Schooten(1659b), resp. p. 324-330, 330-343, 343, 343-344].

[67]Cf. [Schooten(1659b), p. 323-324] et [Bos(2001), p. 256-258].

[68]Cf. [Schooten(1649b), p. 219-223] et [Schooten(1659b), p. 250-264].

[69]Cf. [Descartes(1637c), p. 423-424].

des normales de Descartes pour déterminer la normale à la conchoïde, il propose successivement dans l'édition de 1659 celle de Descartes[70], la méthode de Fermat[71] et une version améliorée de la méthode des normales de Descartes qui utilise le théorème de Hudde sur les racines doubles[72]. À la suite, on trouve une construction du point d'inflexion de la conchoïde dont van Heuraet est l'auteur[73] et Schooten ne manque pas de mentionner en introduction que Huygens avait trouvé en 1652 que l'ordonnée du point d'inflexion de la conchoïde doit vérifier une équation cubique et que ce dernier peut ainsi être construit en intersectant un cercle et une parabole[74].

Cette note est ainsi typique de la démarche de Schooten dans la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661. Soucieux de présenter une encyclopédie aussi complète que possible de la Géométrie cartésienne, Schooten associe ainsi non seulement des traités mais aussi des notes à son commentaire qui prolongent le texte de la *Géométrie*, rédigées par des mathématiciens hollandais de l'école cartésienne, qu'il nomme presque toujours[75].

À la suite du commentaire, on trouve un court traité de van Schooten sur la résolution des équations cubiques qui avait été déjà publié auparavant en 1646 en appendice d'un traité de description organique des sections coniques[76]. Cet appendice[77] qui visait à proposer une illustration géométrique de la résolution de nature algébrique par Descartes des équations cubiques[78]

[70] Cf. [Schooten(1659b), p. 250-253]. Le texte reprend celui de 1649.

[71] Cf. [Schooten(1659b), p. 253-255]. Pour une étude de cette méthode, cf. [Panza(2005), p. 113-118]. Bien que van Schooten se réfère à une présentation de Hérigone donnée dans un Supplément au *Cursus Mathematicus* [Hérigone(1644)], il a pu exploiter des copies des écrits de Fermat, dont la méthode de recherche d'*extremum* et la méthode des tangentes, qu'il avait rapportées de son voyage en France où il rencontra le géométre toulousain. Les manuscrits des copies sont à la bibliothèque de Groningen (GroUL Hs. 110) et ont été étudiées par Cornelius de Waard pour son édition du Supplément aux *Œuvres* de Fermat. Cf. [Maanen(1987), p. 21]. Sur le séjour de van Schooten en France, cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 563].

[72] Cf. [Schooten(1659b), p. 255-256]. Pour une étude de ce texte, cf. [Maanen(1984), p. 76-79]. Cf. également *infra* [section 5.5.2, p. 193].

[73] Cf. [Schooten(1659b), p. 259-262]. Pour une étude du texte, cf. [Maanen(1984), p. 80-88].

[74] Cf. [Schooten(1659b), p. 258]. Pour le texte de Huygens, cf. [Huygens(1888-1950), 12, p. 83-86 et p. 211-215].

[75] Un exception est fournie pour Huygens au sujet d'une note sur le problème de Pappus mais elle peut être expliquée par l'intervention de Roberval. Cf. *infra* [section 4.6, p. 148].

[76] Cf. [Schooten(1646)].

[77] Pour une étude de cet appendice, cf. [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 96-98].

[78] Qu'on pense en particulier à la façon abrupte dont Descartes introduit la racine

ne figurait pas dans l'édition de 1649. On peut donc penser que van Schooten avait les coudées plus larges en 1659-1661 pour ajouter des traités de son choix à l'œuvre de Descartes.

Pour les traités rédigés par lui mais aussi dans dans son commentaire, Schooten atténue ainsi la rupture voulue par Descartes avec la tradition classique de résolution des problèmes géométriques en illustrant par une construction géométrique aussi souvent que possible, comme dans cet exemple et plus encore dans le *De Concinnandis*, les manipulations algébriques d'origine arithmétique employées par Descartes, en particulier dans le Livre III de la *Géométrie* de 1637.

On retrouve ensuite l'*Additamentum*[79] qui, à l'exception d'une nouvelle démonstration d'un théorème préliminaire au *Problema Astronomicum*[80] est identique à celui de l'édition de 1649

Les deux essais qui suivent sont l'œuvre de Johann Hudde. Respectivement consacrés à la réduction des équations[81] et à une méthode pour trouver les *minima* et *maxima*[82], ils furent envoyés dans deux lettres à van Schooten datant de juillet 1657 et du 6 février 1658.

Ces essais sont remarquables dans la mesure où il présente une théorie des équations algébriques indépendamment des problèmes géométriques ou arithmétiques dont ces équations pourraient résulter[83]. Dans le premier, on trouve vingt-deux règles qui donnent des critères d'irréductibilité ou bien des méthodes de factorisation pour des équations ou des polynômes unitaires. Dans le second écrit, on trouve le théorème de Hudde. Ce théorème, qui donne une condition nécessaire pour qu'une équation algébrique possède une

---

négative dans l'équation de la trisection de l'angle en écrivant :

> Et la fausse FL est esgale a ces deux ensemble QN & NV, *ainsi qu'il est aysé a voir par le calcul.*

C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1637c), p. 471].

[79]Cf. [Schooten(1659a)].

[80]Cf. [Schooten(1659a), p. 369-371] et *infra* [section 13.1, p. 437].

[81]Cf. [Hudde(1659a)]. Pour une étude de ce traité, cf. [Penchèvre(2006), p. 41-47].

[82]Cf. [Hudde(1659b)]. Pour une étude de ce traité, cf. [Panza(2005), p. 104-113].

[83]Hudde écrit ainsi dans l'introduction du premier de ces deux essais :

> Quod igitur ad *Reductionem Æquationum* attinet, eam duobus modis considero, vel quatenus æquatio *absolutè* considerari potest, vel *relativè* in quantum scilicet illam ad aliquod Problema, è quo oirginem duxit, reffere licet.
>
> Primò verò eam *absolutè* considerabo [...]

Cf. [Hudde(1659a), p. 407].

racine double[84] est ensuite employé par Hudde pour trouver les *maxima* et les *minima* d'une quantité exprimée en fonction d'une autre variable par une équation algébrique.

À la suite des deux lettres de Hudde, un court traité de van Heuraet[85], communiqué également à van Schooten sous la forme d'une lettre datée du 13 janvier 1659, et consacré au problème de la rectification de courbes algébriques clôt le premier volume de la seconde édition latine de la *Géométrie*. On trouve dans ce traité l'énoncé d'un théorème énonçant que le problème de la rectification d'une courbe algébrique est équivalent à celui de la quadrature d'une courbe qui lui est associée. Après avoir donné une démonstration de ce théorème, Heuraet donne comme exemple le problème de la rectification de la parabole semi-cubique d'équation $y^2 = \frac{x^3}{a}$ qu'il réduit à celui de la quadrature de la parabole[86].

L'écart entre les dates de publication du premier et du second volume de la seconde édition latine de la *Géométrie* s'explique par le fait que Frans van Schooten mourut pendant l'impression de l'ouvrage. La publication du second volume de l'édition latine de la *Géométrie* ne se fit ainsi qu'en 1661.

*
*   *

Le traité qui ouvre le second volume a pour titre *Principia Matheseos Universalis*[87] et consiste en une introduction au calcul littéral et au calcul des radicaux. Il fut rédigé par Érasme Bartholin à partir de ses notes du cours de Frans van Schooten et publié dès 1651[88]. Frans van Schooten, grâce au soutien de Descartes et de la Princesse Elisabeth, succéda en effet à son père, à la mort de ce dernier en 1645, à une des deux chaires de mathématiques de l'université de Leyde[89] et fit ainsi entrer la *Géométrie* de Descartes dans les programmes d'enseignement de l'université.

[84] Cf. [Hudde(1659b), p. 515-516], [Panza(2005), p. 105-107] et *infra* [section 5.5, p. 186].

[85] Pour des informations sur la biographie scientifique de van Heuraet, cf. [Maanen(1984), p. 46-48].

[86] Pour une étude du traité de van Heuraet, cf. [Maanen(1984), p. 88-95] et [Panza(2005), p. 119-132].

[87] Cf. [Schooten(1661b)]. Sur ce traité, cf. [Savini(2004), p. 297-304], [Rabouin(2002)] et [Sasaki(2003), p. 393-395].

[88] Cf. [Schooten(1651)].

[89] Cf. [Savini(2004), p. 257] et la lettre de la princesse Elisabeth à Descartes du 27 décembre 1645 : [Descartes(1964-1974), IV, p. 339-340]. L'autre chaire était occupée par Jacob Golius.

Suivent deux traités posthumes de Debeaune édités et traduits en latin par Érasme Bartholin et consacrés à la théorie des équations[90]. Debeaune considère des équations cubiques et quartiques qu'il classe en fonction de leurs coefficients et s'intéresse le premier, à notre connaissance, dans le second traité à la localisation des racines d'une équation au sein d'intervalles dont les bornes sont calculées à partir des coefficients de l'équation. Newton, qui a fait son apprentissage mathématique avec l'édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661, s'intéresse à cette même question dans l'*Arithmetica Universalis* de 1707[91].

On trouve ensuite un traité en deux livres consacré aux sections coniques et intitulé *Elementa curvarum linearum* dont l'auteur est Jan de Witt, grand pensionnaire de Hollande, qui vécut un temps chez Schooten alors qu'il était étudiant. Dans le premier livre de ce traité[92], Jan de Witt adopte une approche cinématique pour décrire géométriquement les coniques. Il s'inscrit dans la tradition de la « description organique » des courbes géométriques[93] par des intersections de lignes droites qui sont les côtés d'angles mobiles. De surcroît, la préface de de Witt témoigne du fait qu'il voyait la description organique des coniques comme une propédeutique à une théorie générale des courbes d'ordre supérieur[94], programme de recherche qui sera développé plus tard de façon fort féconde par Newton et Maclaurin[95]

Dans le second Livre du traité, Jan de Witt donne une classification

[90]Cf. [Debeaune(1661)]. Érasme Bartholin avait en effet recueilli les écrits de Debeaune auprès du géomètre de Blois déjà gravement malade alors qu'il était de passage à Blois pour une publication. Cf. [Costabel(1971), p. 615]. Il semble qu'il laissa de côté plusieurs écrits qui sont aujourd'hui disparus malgré les instances répétées de van Schooten et Huygens. Cf. par exemple la lettre de Christiaan Huygens à Érasme Bartholin du 24 décembre 1656 : [Huygens(1888-1950), I, p. 528-529].

[91]Cf. [Newton(1707), *De limitibus æquationum*, p. 252-257].

[92]Cf. [Witt(1661), p. 158-242]. Récemment, cette première partie du traité de Jan de Witt a été éditée et commentée. Cf. [Witt(2000)]. Pour une présentation historique et mathématique, cf. également [Chasles(1837), p. 100-101] et [Coolidge(1990), p. 119-125].

[93]Cf. avant lui le traité de Schooten [Schooten(1646)].

[94]Cf. [Witt(1661), p. 155-157].

[95]Newton étendit ainsi la théorie aux cubiques et aux quartiques qui ont un point double *in* [Newton(1695), p. 636-641]. Maclaurin s'intéressa aux courbes de degré quelconque dans [Maclaurin(1720)] et plus particulièrement à la démonstration de propriétés élégantes des cubiques généralisant celle des coniques dans son traité posthume [Maclaurin(1748)]. Sur ces ouvrages de Maclaurin, cf. [Penchèvre(2006), p. 89-106]. Sur la description organique des courbes géométriques chez Newton et Maclaurin, cf. également la présentation classique de Michel Chasles : [Chasles(1837), p. 145-151].

complète des équations linéaires ou quadratiques de lieu géométrique en affirmant que les premières expriment des droites et les secondes des cercles ou des sections coniques[96]. Ce faisant, il adopte une démarche semblable à celle de Fermat dans l'*Isagoge ad locos planos et solidos*[97]. Wallis, qui avait déjà donné un traitement algébrique systématique des équations des coniques dans son traité des sections coniques engagea avec Hudde une querelle de priorité[98].

Le dernier traité qui clôt la seconde édition latine de la Géométrie est un traité posthume de Frans van Schooten édité par son frère Peter van Schooten, le *De concinnandis Demonstrationibus geometricis ex Calculo Algebraïco*[99].

Ce traité est traversé et fondé par deux thèses, l'une mathématique et l'autre historique, qui sont intimement liées. D'une part, selon van Schooten, il existe une parenté naturelle entre le « calcul algébrique » et la production de démonstrations géométriques *more veterum* : les secondes ne sont qu'une traduction naturelle et harmonieuse[100] des démonstrations obtenues suivant la Méthode cartésienne et usant du Calcul algébrique, ainsi qu'en témoigne le titre du traité de Schooten. Dans un cas comme dans l'autre, l'analyse tire sa certitude de la synthèse qui devient inutile. La démonstration par synthèse est en effet contenue dans l'analyse et peut être produite en procédant à rebours à partir de celle-ci qui possède une priorité heuristique.

La seconde thèse du traité *De concinnandis* est historique. Selon cette thèse, courante chez les mathématiciens du dix-septième siècle, les An-

[96] Cf. [Witt(1661), p. 243-340]. Pour une présentation historique et mathématique, cf. [Coolidge(1990), p. 125-127] et [Boyer(2004), p. 114-117].

[97] Cf. [Fermat(1636a)].

[98] Cf. [Wallis(1655b)] et [Wallis(1655a)]. Cf. [Boyer(2004), p. 110-111] pour une présentation du traité de Wallis.

[99] Cf. [Schooten(1661a)]. Récemment, Aldo Brigaglia a donné une étude du traité posthume de Schooten. Cf. [Brigaglia(1995), p. 223-231]. Cf. également [Chasles(1837), p. 99] pour une présentation du traité.

[100] Sur les exemples donnés par Schooten de cette traduction, cf. [Brigaglia(1995), p. 226-231]. Un exemple intéressant est fourni par le théorème de Ptolémée relatif au triangle coupé par une transversale que Schooten démontre synthétiquement et par l'analyse algébrique. Cf. [Schooten(1661a), p. 391-398]. Cf. également la note historique de Chasles : [Chasles(1837), Note VI, p. 291-294]. Henk Bos remarque enfin que les seuls occurrences d'analyse théorématique qu'il connaisse dans les œuvres des mathématiciens de l'époque classique apparaissent dans le présent traité. Il prend ainsi pour exemple le théorème géométrique qui équivaut à la formule algébrique moderne $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$. Cf. [Schooten(1661a), p. 366-368 et *sq.*]. Cf. [Bos(2001), p. 96-97 et n. 7, p. 97].

ciens auraient pratiqué et developpé en géométrie l'analyse conjointement à la synthèse, mais auraient dissimulé la première, ne conservant que la démonstration par synthèse afin de prétendre à plus de gloire.

1.3.3 Le rôle des éditions latines

Pour conclure, il est clair que les deux éditions latines de la *Géométrie* de Schooten jouèrent un rôle majeur à la fois dans le passage à la postérité des méthodes de la *Géométrie* de 1637, mai aussi dans la genèse des nouvelles théories mathématiques élaborées dans la seconde moitié du dix-septième, comme celle du calcul des fluxions de Newton ou bien du calcul différentiel de Leibniz.

Comme l'indique van Maanen[101], on peut voir deux aspects dans le travail de Schooten : l'un social et l'autre mathématique. Sur le plan social, Schooten contribua grandement au succès de la méthode cartésienne en enseignant, publiant et surtout en créant autour de lui un groupe de recherche actif formé par ceux qui contribueraient plus tard à la seconde édition latine de 1659-1661 : Hudde, de Witt, Heuraet mais aussi le grand Huygens qu'il introduisit aux mathématiques cartésiennes. Il poursuivit par ailleurs les contacts avec les mathématiciens français comme Mylon ou Fermat.

Sur le plan mathématique, Schooten rendit le texte accessible à l'ensemble de l'Europe mathématique en produisant une traduction latine. D'autre part, en écrivant un commentaire didactique, il favorisa la compréhension du traité cartésien, tout en le mettant en perspective à la fois avec la tradition classique mais aussi avec des traités des mathématiciens de l'époque moderne. Enfin, visant à donner, comme on l'a dit, une sorte d'encyclopédie de la Géométrie cartésienne, il donna un traitement à la fois plus systématique des questions traitées dans la *Géométrie*, mais aussi développa le champ de la théorie, parfois par l'entremise des mathématiciens de son groupe de recherche qu'il encouragea, comme en témoignent les lettres dédicatoires de Hudde ou de de Witt.

[101] Cf. [Maanen(1987), p. 24-25].

Première partie

Le problème de Pappus

Introduction

L'objet de cette première partie[102] est d'étudier la solution du problème de Pappus donnée par Descartes dans la *Géométrie* de 1637 à travers les controverses et les réponses cartésiennes apparaissant dans la Correspondance, depuis la fin de l'année 1631 avec la position du problème par Golius, jusqu'en 1649 à l'occasion de la dernière controverse avec Roberval par l'entremise de Carcavi. Par là, nous entendons éclairer le texte de la *Géométrie* en démontrant qu'il s'inscrit dans une histoire. Cet étude historique constituera le deuxième et le troisième chapitre de cette partie qui suivront un premier chapitre consacré à une étude détaillée de la solution cartésienne du problème de Pappus figurant dans la *Géométrie*.

L'histoire que nous entendons donner ici n'est pas seulement l'histoire de la résolution du problème de Pappus. De façon plus profonde, nous la considérons comme une part importante de l'histoire de la théorie cartésienne des courbes algébriques. Plus précisément, si nous nous risquons à une nouvelle étude de ce problème célèbre, c'est parce qu'il nous a semblé qu'une question aussi essentielle que celle de la correspondance entre équation algébrique et courbe géométrique apparaît comme omniprésente et problématique dans la solution cartésienne et les controverses qui suivirent.

En effet, une condition nécessaire pour pouvoir parler de théorie cartésienne des courbes algébriques, pour employer un vocabulaire moderne, consiste en l'identification entre les deux objets distincts que sont d'un côté, une courbe géométrique, et de l'autre, une équation algébrique. Cette identification est fondée pour un problème de lieu géométrique, sur la correspondance entre un point solution du problème et une racine de l'équation

[102] Cette partie a été rédigé durant un séjour de recherche à la Faculté de Sciences de l'Université Nationale Autonome de Mexico dans le cadre d'un projet ECOS-Nord-Mexique, du 8 mai au 31 juillet 2005. Je tiens à exprimer tous mes remerciements à mon hôte Carlos Alvarez pour son aide, son soutien et ses commentaires précieux.

algébrique exprimant le lieu géométrique, une des inconnues étant fixée. Descartes écrit ainsi :

> Mesme, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussy infinies pour la ligne x ; & ainsi on aura une infinité de divers poins tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on descrira la ligne courbe demandée.[103]

Une telle correspondance sous-tend ainsi la construction point par point d'une courbe donnée par une équation, qui s'opère en intersectant une courbe particulière (droite, parabole, parabole cartésienne) et un cercle. La garantie de l'existence d'une telle construction est essentielle dans le cas d'un problème de lieu, en particulier dans le cas général du problème de Pappus, car elle permet de reconnaître dans l'équation algébrique obtenue à l'issue de l'analyse géométrique une solution du problème géométrique, sans avoir pour autant besoin d'exhiber une construction effective de la courbe solution.

Néanmoins, nous verrons que cette identification entre courbe géométrique et équation algébrique pose problème dans la résolution du problème de lieu de Pappus. En particulier, nous étudierons en détail dans la suite comment le choix d'une position pour un point solution qui initie l'analyse géométrique, modifie les coefficients et les signes de l'équation algébrique résultant de cette analyse, du fait du refus par Descartes de considérer des coordonnées négatives. Nous serons ainsi amenés à nous poser la question de l'identification entre des parties du lieu géométrique et des équations algébriques.

Nous nous intéresserons ainsi à l'analyse de nature algébrique suggérée par Descartes qui porte sur l'équation algébrique obtenue à l'issue d'une première analyse géométrique, de nature classique, du problème de Pappus. Plus précisément, nous examinerons comment Descartes interprète les différents cas de figure, selon les différentes positions des droites du problème, laissés en suspens par l'analyse géométrique, qui tiennent à la nature positionnelle du problème de Pappus, dans le cadre de son analyse algébrique de l'équation algébrique résultante, par des changements de signe des coefficients de l'équation.

Nous chercherons ainsi à préciser si, à la différence d'une analyse purement géométrique, l'analyse de l'équation algébrique renvoie à des problèmes algébriques qui tendent à s'émanciper du problème géométrique initial.

[103] Cf. [Descartes(1637c), p. 386].

Précisément, les difficultés cartésiennes naissent, nous semble-t-il, de la contradiction entre, d'un côté, l'émancipation de l'algèbre par rapport à la géométrie en tant que théorie autonome, par exemple comme théorie des équations, et, de l'autre côté, la correspondance imposée entre les contructions géométriques et les opérations de arithmétique, qui participe néanmoins — entre autres — de la naissance de l'algèbre en tant que théorie, par exemple déja chez les mathématiciens arabes du IX$^{\text{ème}}$ et X$^{\text{ème}}$ siècles.

Pour reprendre les termes de Cavaillès, deux processus successifs de généralisation et de thématisation s'affrontent ici pour aboutir à terme à l'engendrement de l'objet courbe algébrique, bien que le second soit produit nécessairement par le premier. L'idée de correspondance entre les constructions géométriques et les opérations de l'arithmétique, suggérée par exemple aux mathématiciens arabes comme aux mathématiciens européens du dix-septième siécle, par leur lecture du Livre II des *Eléments* d'Euclide, relève ainsi de la généralisation. L'émancipation de l'algèbre en tant que théorie, à travers l'émergence de questions spécifiquement algébriques, dès lors qu'on étudie pour elles-mêmes les équations résultant de l'analyse géométrique, manifeste la thématisation de l'équation algébrique à une inconnue, qui permet à son tour la constitution de l'équation algébrique à deux variables en un objet propre, la courbe algébrique.

Une telle identification entre courbe géométrique et équation(s) algébrique(s) est en effet naturellement fondée sur une théorie des équations algébriques dont les caractéristiques — telles que la question des racines négatives — impriment leur marque dans la théorie cartésienne des courbes algébriques.

Une pierre de touche pour les considérations précédentes relèvera de la reconnaissance et du traitement par Descartes d'une seconde conique solution au problème de Pappus à quatre lignes. Cette question, qui intervient dans la controverse avec Roberval et possède donc de surcroît une pertinence non seulement mathématique mais encore historique, apparaît comme cruciale quant à l'établissement d'une théorie des courbes algébriques englobant la résolution des problèmes de lieu géométrique, théorie fondée donc sur l'identification entre courbe géométrique et non pas équation algébrique, comme c'est le cas en géométrie analytique moderne, mais à tout le moins famille d'équations algébriques. On tachera de décrire dans la suite les difficultés et les limites d'un tel projet.

Ces considérations guideront et structureront donc les analyses qui suivent, qu'elles soient d'ordre historique, comme dans le deuxième et le troisième chapitres, ou d'ordre mathématique, comme dans le premier. Le fait que ces questions se posent sur ces deux plans, mathématiques et historiques, nous semble témoigner de leur importance et d'un enjeu essentiel, renvoyant à la genèse chez Descartes d'une théorie des courbes algébriques, comme celle d'une théorie des équations algébriques qui lui est étroitement liée.

Chapitre 2

La solution de Descartes dans la *Géométrie* de 1637

Afin d'éclairer la solution cartésienne du problème de Pappus à quatre lignes, nous présentons d'abord une solution moderne, puis une étude complète du problème dans un cas de figure simple : celui où les quatre droites se coupent en formant un carré[1]. Nous étudierons ensuite en détail les deux solutions apparaissant dans la *Géométrie* de 1637, pour quatre et cinq lignes, la seconde conduisant à la « parabole cartésienne ».

2.1 Une solution moderne

De façon moderne, plaçons-nous dans un repère $x\mathsf{O}y$ orthogonal. Soient l_i, $i = 1, ..., 4$ quatre droites d'équations respectives $a_i x + b_i y + c_i = 0$. Recherchons le lieu des points C de coordonnées (x, y) dont le produit des distances aux droites l_1 et l_3 est égal au produit des distances aux droites l_2 et l_4. Nommons ces distances d_i, $i = 1, ..., 4$. On recherche donc le lieu déterminé par

$$d_1 d_3 = d_2 d_4. \tag{2.1}$$

Or, on a

$$d_i = \pm \frac{a_i x + b_i y + c_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \tag{2.2}$$

[1]Cet exemple nous a été suggéré par Massimo Galuzzi que nous remercions pour ses remarques et commentaires éclairants.

le signe du numérateur étant déterminé par la position du point C relativement à la droite l_i.

De façon plus générale, si le repère est oblique d'angle α, et qu'on projette le point C sur la droite l_i selon l'angle α_i, on aura[2]

$$d_i = \pm \frac{(a_i x + b_i y + c_i)\sin\alpha}{\sin\alpha_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos\alpha}}. \tag{2.3}$$

Dans les deux cas, il apparaît clairement du fait du double signe $\pm$ que la solution du lieu de Pappus est formée par un système de deux coniques. On peut se poser la question de la pertinence historique de ce fait mathématique[3] qui apparaît dans notre solution moderne. En effet, force est de constater que Descartes ne présente explicitement qu'une conique dans sa solution du problème de Pappus à quatre lignes. La question qui se pose est donc double. Descartes a-t-il reconnu la présence de deux courbes algébriques solutions au problème de Pappus et comment cette reconnaissance ou un traitement explicite de cette seconde courbe algébrique solution dépendent-ils de l'existence d'une théorie des courbes algébriques, si elle est bien présente chez Descartes ? Dans quelle mesure ce fait a-t-il été relevé par les mathématiciens contemporains et jugé important voire essentiel par eux pour une résolution entière du problème de Pappus, en particulier dans le cas de quatre lignes ?

D'autre part, on peut remarquer que l'expression (2.3) des distances obliques dans le cas général peut être obtenue à partir de (2.2) en multipliant cette dernière par un facteur constant qui ne dépend pas des coordonnées du point C mais seulement de l'angle de projection et de la droite considérée. Pour cette raison, le problème de Pappus tel qu'on l'a présenté dans (2.1) est conceptuellement équivalent au problème de lieu plus général déterminé par

$$d_1 d_3 : d_2 d_4 = m : n \tag{2.4}$$

où le rapport — quelconque — $m : n$ est donné, tel qu'il est formulé par Pappus dans le Livre VII de sa *Collection Mathématique*, du moins en employant la théorie des proportions[4]. Cela veut dire en outre qu'on peut se ramener,

[2]Pour un exposé mathématique et historique détaillé de géométrie analytique, on peut consulter par exemple [Dingeldey *et al.*(1911-1915)Dingeldey, Fabry, et Berzolari].

[3]Paul Tannery a pointé à plusieurs reprises ce fait dans ces notes et éclaircissements en indiquant qu'il avait été ignoré de Descartes. Cf. par exemple [Descartes(1964-1974), VI, p. 724].

[4]Cf. [Pappus(1982), II, p. 507-508].

sans véritable perte de généralité, au cas décrit dans (2.1), c'est-à-dire au cas de projections orthogonales sur les droites du problème, en introduisant une constante k dans l'équation (2.1).

Remarquons d'autre part que les courbes sont ici exprimées par une équation relativement à un repère extrinsèque. Au contraire, Descartes choisit un repère intrinsèque[5] au problème géométrique, prenant pour axe la première droite donnée de position et pour angle de projection des ordonnées, l'angle de projection sur cette même droite.

2.2 Un exemple simple : le cas du carré

Afin de fixer nos idées de façon plus claire sur, d'une part, la relation entre équation algébrique et courbe géométrique, d'autre part, la question des signes, nous envisageons à présent un exemple simple du problème de Pappus à quatre lignes : le cas où les quatre lignes AB, AD, CB et CD forment par leurs quatre points d'intersection un carré ABCD de côté unitaire. Choisissons d'autre part pour les angles donnés quatre angles droits.

Qu'il soit ainsi proposé de déterminer le lieu des points M vérifiant

$$d(\mathsf{M},\mathsf{AB}) \times d(\mathsf{M},\mathsf{CD}) = d(\mathsf{M},\mathsf{AD}) \times d(\mathsf{M},\mathsf{CB}). \tag{2.5}$$

Pour ce faire, considérons le repère intrinsèque au problème à coordonnées rectangulaires d'axe AB et d'origine A, et posons $\mathsf{A}m = x$ et $m\mathsf{M} = y$.

Selon qu'on se place dans une des 9 régions du plan découpées par les quatre droites, on obtient de façon évidente 9 équations. Si, par exemple, on se place dans la région (1) à l'intérieur du carré ABCD, on obtient l'égalité

$$y(1-y) = x(1-x) \text{ soit } y^2 = y - x + x^2, \tag{2.6}$$

tandis que si l'on se place dans la région (2), on trouve

$$y(y-1) = x(1-x) \text{ soit } y^2 = y + x - x^2. \tag{2.7}$$

Remarquons tout d'abord que nous obtenons ainsi les équations des deux coniques. La première, dégénérée, est formée par le couple des deux segments

[5] La notion moderne de coordonnées apparaît pour la première fois comme point de départ d'un traitement systématique de la Géométrie dans le premier chapitre du second livre de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* selon [Dingeldey *et al.*(1911-1915)Dingeldey, Fabry, et Berzolari, p. 17].

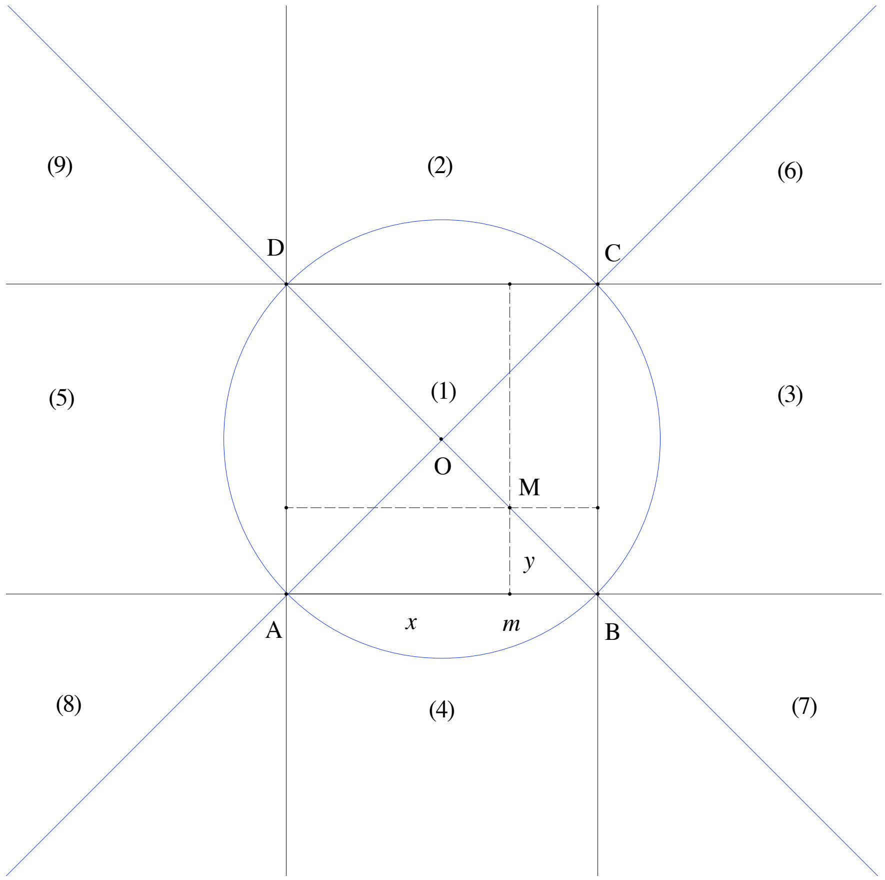

FIG. 2.1 – Un exemple simple : le cas du carré

AC et DB de droites d'équations respectives $y = x$ et $y = 1 - x$, tandis que la seconde est le quart de cercle DC de centre O et de rayon $\mathsf{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtiendrait de même ces deux équations, de façon moderne, en appliquant la formule (2.2) à la différence importante près que celles-ci s'appliqueraient alors au plan tout entier et non à une portion du plan délimitée par l'intersection des droites du problème, comme c'est le cas ici.

D'autre part, il est clair qu'il existe des relations entre les différentes égalités obtenues du fait de la symétrie du problème. En se plaçant dans la région (3), on déduira la même équation que l'équation (2.7) obtenue pour la région (2), puisque ayant échangé les rôles de x et y, on obtiendra les mêmes signes dans l'équation. Pour une raison semblable, il en est de même pour les régions (1) et (6). Les équations ainsi obtenues se réduisent donc à sept, en changeant comme l'indique Descartes dans sa propre solution[6] les signes $+$ et $-$ en toutes les façons possibles, à l'exception de trois signes $-$ dans le membre de droite, situation qu'on peut résumer par l'équation

$$y^2 = \pm y \pm x^2 \pm x. \tag{2.8}$$

Algébriquement, on retrouve le même résultat, puisque l'équation possédant trois coefficients affectés du signe $+$ ou $-$, on a $2^3 - 1$ possibilités, puisqu'on ne considère pas le cas où il y a trois signes $-$.

Mais précisons un peu plus la situation pour les trois équations qui correspondent à des quarts de cercle dans les régions (2), (3), (4) et (5). On obtient en effet :

$$\left\{ \begin{array}{r} (2) \text{ et } (3) : y^2 = y + x - x^2 \text{ ou } x^2 = x + y - y^2, \\ (4) : y^2 = -y + x - x^2, \\ (5) : x^2 = -x + y - y^2. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

On voit alors que de la première équation, symétrique en x et y, précisément celle qu'on obtient dans l'approche analytique « moderne », on peut déduire les deux suivantes en procédant aux deux changements de variable $y \to -y$ et $x \to -x$. Ce faisant, en choisissant judicieusement l'inconnue dont on extrait la racine, on ne considère que des équations possédant une seule racine positive et associées deux à deux, la racine positive de l'une correspondant à la racine négative de l'autre.

On a déjà signalé auparavant dans l'introduction que Descartes, afin de pouvoir donner une solution générale au problème de Pappus, se devait de proposer — en fait suggérer dans le cas général — une « description » des courbes solutions point par point, reposant sur la construction des équations par un cercle et une seconde courbe (droite, parabole, parabole cartésienne). Dans le cas du problème de Pappus à quatre lignes, il allait de surcroît fonder son analyse du problème, mais aussi sa classification des courbes solutions, et par là des courbes du second genre, sur l'extraction des racines carrées déduite de la construction des problèmes plans qu'il avait donnée auparavant au livre I.

Souvenons-nous que les équations données sous forme implicite en x et y, ainsi qu'on les considère aujourd'hui, ne rendent pas compte d'un aspect essentiel de l'approche cartésienne : chaque équation ne renvoie pas à une

[6]Cf. [Descartes(1637c), p. 385, l. 9]. Nous reviendrons en détail sur ce point dans la section suivante.

courbe géométrique décrite dans un plan, pas même dans un demi-plan, si l'on pense à l'exemple des coniques et des équations tirées d'Apollonius, mais seulement à un arc de courbe géométrique décrit dans une des neuf régions du plans découpées par les quatre droites, qu'il s'agissent de demi-bandes du plan ou du carré ABCD. De fait, c'est en procédant à l'extraction des racines que Descartes rend compte de cette relation entre courbe et équation dans le cadre de l'analyse algébrique d'un problème géométrique.

Ainsi, l'équation

$$y^2 = y + x - x^2 \tag{2.10}$$

possède une racine positive en y dans la région (2) tandis qu'elle possède deux racines positives dans la région (3) du fait du signe négatif de $x - x^2$. Dans ce cas, on obtient deux équations après avoir extrait les racines, qui correspondent chacune à une moitié du quart de cercle. Plus précisément, on aurait

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x - x^2}. \tag{2.11}$$

On peut remarquer qu'on obtient également l'expression correspondant à la plus grande des deux racines dans la région (2). Reste que, comme on l'a déjà dit, on peut toujours se ramener à une équation avec une unique solution positive en considérant x et non y.

Pour Descartes, qui, reconnaissant un arc de conique, en déduit que la conique entière est solution du problème, quelque soit par ailleurs la justification qu'il en donne, il est bien sûr préférable pour la facilité de la discussion de considérer une équation n'admettant qu'une racine positive. Ainsi, dans le cas précédent, il vaut mieux prendre l'équation symétrique en x. Nous verrons dans la suite que c'est ce qu'il fait également dans la solution du problème de Pappus à quatre lignes donnée par lui dans la *Géométrie*.

D'autre part, dans le cas des équations correspondant au couple de deux droites, la situation est semblable. On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{c} (1) \text{ et } (6) : y^2 = y - x + x^2 \text{ ou } x^2 = x - y + y^2, \\ (7) : y^2 = -y - x + x^2, \\ (9) : x^2 = -x - y + y^2, \\ (8) : y^2 = -y + x + x^2 \text{ ou } x^2 = -x + y + y^2. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Remarquons qu'on trouve ici une équation de plus que dans le cas du cercle en procédant au double changement de variables $y \to -y$ et $x \to -x$. Ce dernier était impossible dans le cas du cercle car il aurait conduit à trois coefficients négatifs. Ainsi, là où nous considérons une seule équation, usant du formalisme cartésien, on en obtient quatre en combinant les deux changements de variable précédents. Nous verrons qu'il en est de même pour la parabole cartésienne. En revanche, la situation apparaîtra plus compliquée pour le problème de Pappus à quatre lignes dans le cas général.

D'autre part, la situation apparaît différente selon qu'on se place dans le carré ou dans les régions (6), (7), (8) et (9). En effet, dans le carré on obtient les deux droites, car l'équation symétrique en x et y admet deux solutions positives. En revanche, dans les quatre autres régions, le coefficient constant de l'équation étant de signe positif, on obtient une seule racine positive et donc une seule des deux droites. Ainsi, à nouveau pour Descartes, bien que l'équation implicite en x et y obtenue dans les régions (1) et (6) soit la même, du fait de la différence de signe du coefficient constant, elle renvoie dans chacune des régions à deux objets géométriques différents : un couple de droites à l'intérieur du carré, une droite dans la région (6). Il en sera de même dans le cas plus général où une hyperbole est solution d'un problème de Pappus à quatre lignes.

Si nous avons pris la peine d'être un peu long et quelque peu laborieux au risque de lasser le lecteur, c'était du moins pour le convaincre des limites de l'équivalence entre équation algébrique et courbe géométrique. Dans un cas simple, on voit qu'au mieux cette correspondance est locale, dans le cadre de l'analyse d'un problème géométrique de lieu, tel que celui du problème de Pappus. D'autre part, celle-ci est fondée sur la construction des équations, et donc, dans le cas du problème de Pappus à quatre lignes, sur la construction des problèmes plans. Ainsi, on comprend mieux le choix de Descartes de considérer dans sa propre solution comme équation générale, l'équation obtenue après extraction de la racine (positive) en y.

2.3 La solution cartésienne

Intéressons-nous à présent à la solution cartésienne[7] telle qu'elle apparaît dans la *Géométrie* de 1637. Pour le problème de Pappus à quatre lignes[8],

[7]Sur la solution de Descartes au problème de Pappus, cf. [Vuillemin(1960), p. 99-112], [Whiteside(1960-1962), p. 290-295], [Szczeciniarz(2000), p. 127-133], [Bos(2001), Chap. 19, p. 271-284 et Chap. 23, p. 313-334], [Sasaki(2003), p. 204-225] et [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 26-38].

[8]Pour le texte original de la *Collection mathématique* de Pappus, auquel Descartes se réfère dans l'édition de Commandinus de 1588, cf. l'édition de Paul ver Eecke :

Descartes propose de déterminer le lieu géométrique des points C vérifiant

$$\mathsf{CB} \cdot \mathsf{CF} = \mathsf{CD} \cdot \mathsf{CH}, \tag{2.13}$$

tels que les quatre lignes droites AB, AD, EF et GH sont données de position, et les angles $\widehat{\mathsf{CBA}}$, $\widehat{\mathsf{CDA}}$, $\widehat{\mathsf{CFE}}$ et $\widehat{\mathsf{CHG}}$ sont donnés de grandeur.

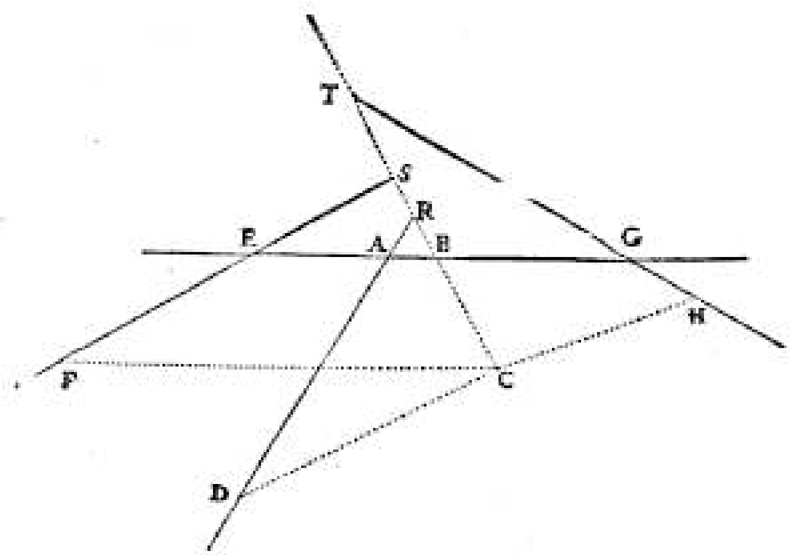

FIG. 2.2 – La figure du problème de Pappus : *Géométrie*(1637), p. 309

Descartes remarque d'autre part, comme nous l'avons signalé dans la section 2.1, que dans le cas où les lignes en question « ayent quelque autre proportion donnée [...] cela ne rend point la question plus difficile »[9].

2.3.1 La reformulation du problème

Décrivons tout d'abord la solution cartésienne. Préalablement, Descartes reformule les données du problème en introduisant un repère et des ordonnées : dire que les quatre lignes sont données de position, c'est dire en particulier que les trois dernières sont données de position relativement à la première droite AB. Dans la résolution du problème, la position relative des

[Pappus(1982), II, p. 507-508].

[9] Cf. [Descartes(1637c), p. 382].

trois dernières lignes l'une par rapport à l'autre n'interviendra à aucun moment. En témoigne l'absence du point d'intersection des droites AD et EF, ainsi que des droites EF et GH sur la figure 2.2 donnée par Descartes, qui sont pourtant des solutions évidentes du problème[10].

De ce point de vue, la reformulation cartésienne modifie le problème géométrique original et le rapproche du problème moderne de géométrie analytique[11], à la différence près du choix du repère intrinsèque lié aux données du problème. Il ne restera plus qu'à « rapporter » les trois autres droites du problème à l'une des données AB, axe du repère, et à l'une des inconnues CB, qui sera l'ordonnée, autrement dit, de façon moderne, à déterminer l'équation de ces droites[12], dans le repère d'axe AB, d'origine A et d'ordonnées BC ; ensuite, à déterminer les projetés du point C sur ces droites selon les angles donnés. Descartes, pour ce faire, usera du théorème des sinus, et non du théorème de Pythagore comme nous le faisons, dans le cas particulier où les angles donnés sont droits, considérant alors les distances du point C aux droites du problème. Nous verrons dans la suite que le raisonnement cartésien bien que plus général est semblable au nôtre.

Mais citons Descartes :

> Premierement ie suppose la chose comme desia faite & pour me demeler de la confusion de toutes ces lignes, ie considere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB, & CB, comme les principales, & ausquelles ie tasche de rapporter ainsi toutes les autres.[13]

Posons donc $\mathsf{AB} = x$ et $\mathsf{BC} = y$, coordonnées du point C dans le repère dont l'origine est donnée par l'intersection des deux droites AB et AD.

Considérons un point C solution se trouvant dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAG}}$, c'est à dire un des quatre angles délimités par les deux droites AD et AB. Remarquons que ces quatre angles ne sont pas les quatre quadrants déterminés par l'intersection de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées, qui, il est vrai, n'apparaît jamais donné explicitement à cette époque. Ce choix de Descartes n'est donc pas lié à la question des coordonnées négatives. Nous étudierons ci-après la signification d'un tel choix.

---

[10]On verra dans la suite que Roberval fera ce reproche à Descartes.

[11]Sur la question du repère dans la solution cartésienne du problème de Pappus, cf. [Dhombres(2000)].

[12]Descartes considère des proportions qui sont équivalentes à ces équations de droites.

[13]Cf. [Descartes(1637c), p. 382-383].

2.3.2 L'expression des lignes du problème et la question des signes

Descartes montre que chacun des segments CD, CF et CH peut s'exprimer sous la forme $\pm\alpha y \pm \beta x \pm \gamma$, où α, β et γ sont connues. Il nous suffira de décrire le calcul de CF pour en déduire facilement les deux autres.

Voici ce qu'écrit Descartes :

> Aprés cela pource que les lignes AB, AD, EF sont données par position, la distance qui est entre les points A & E est aussy donnée, & si on la nomme k, on aura EB esgal a $k + x$; mais ce seroit $k - x$, si le point B tomboit entre E & A ; $-k + x$, si E tomboit entre A & B. Et pource que les angles du triangle ESB sont tous donnés, la proportion de BE a BS est aussy donnée, & ie la pose comme z à d, si bien que BS est $\frac{dk+dx}{z}$, & la toute CS est $\frac{zy+dk+dx}{z}$, mais ce seroit $\frac{zy-dk-dx}{z}$, si le point S tomboit entre B & C ; & ce seroit $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, si C tomboit entre B & S. De plus, les trois angles du triangle FSC sont donnés, & en suite la proportion de CS à CF, qui soit comme de z à e, & la toute CF sera $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$.[14]

Si nous avons cité *in extenso* le calcul cartésien, c'est qu'il nous paraît poser de nombreuses questions, en particulier celle des signes. Suivons à présent pas à pas les calculs.

Tout d'abord, Descartes reformule la condition géométrique classique énonçant que les trois droites AB, AD et EF sont données de position, en écrivant que l'abscisse du point E d'intersection de la troisième droite EF avec l'axe des abscisses AB est donnée et posée égale à k.

Remarquons que pour nous, de façon moderne, l'abscisse du point E et l'abscisse du point C, avec la position choisie par Descartes, sont de signes opposés car ils sont situés de part et d'autre du point A. Au contraire, pour Descartes qui ne considère pas les coordonnées négatives, il n'en est rien. Les lettres ne désignent en effet pour lui que des quantités positives puisqu'elles désignent des segments[15]. En conséquence, il lui faudra discuter la question

[14] Cf. [Descartes(1637c), p. 383-384].

[15] On touche ici à une difficulté d'interprétation. On a trois possibilités pour interpréter les lettres employées par Descartes : elles peuvent renvoyer à la figure — le segment —, à la grandeur — la longueur — ou à la mesure — la mesure de la longueur, une unité ayant été fixée —. Nous considérerons qu'elles renvoient au segment. Cela signifie, d'une part,

des signes à affecter aux lettres qui représentent les segments selon leurs positions respectives les uns par rapport aux autres, comme nous le verrons dans la suite.

Ainsi, selon la position du point C relativement aux points E et A, connaissant $\mathsf{AE} = k$, on peut déduire trois expressions possibles pour EB :

$$\mathsf{EB} = \begin{cases} k + x, \\ k - x, \\ x - k. \end{cases} \tag{2.14}$$

Il importe de remarquer que Descartes est ambigu sur les raisons qui pourraient justifier ces trois positions différentes. On peut les compter au nombre de deux types : des changements de position des droites EF ou AD[16], un changement de la position du point C postulée dans l'analyse[17]. Mais une différence essentielle et remarquable existe entre ces deux types de changement de position. Dans le premier cas, du fait du changement de configuration, le changement de l'équation finale s'accompagne du changement de la courbe géométrique solution, tandis que dans le second cas, il se peut — car la solution est formée d'un système de deux coniques — que bien que l'équation finale du lieu soit modifiée, la courbe solution ne le soit pas.

Ainsi, si le premier type de changement de position renvoie à une recherche de généralité dans le traitement du problème, visant à considérer l'ensemble des positions possibles des droites AD, EF et GH, le second au contraire renvoie à la correspondance entre une courbe géométrique et une famille d'équations algébriques, exprimant chacune un arc de cette courbe géométrique, déterminé par la position arbitraire du point C postulée au début de l'analyse. Du point de vue de l'identification cartésienne recherchée entre courbe et équation, si tant est que Descartes vise une théorie des courbes algébriques dans la *Géométrie*, une telle ambiguité nous paraît témoigner des difficultés mathématiques inhérentes à un tel projet.

En effet, d'une part, l'interprétation de l'équation algébrique obtenue à l'issue de l'analyse n'est pas univoque, d'autre part, même si l'on imagine

qu'une unité n'a pas à être nécessairement spécifiée, d'autre part, que des changements d'unité ne modifient pas la signification des lettres. Pour une discussion sur ce sujet, cf. [Panza(2005), p. 24 et 31-33] et [Jullien(1996), p. 98].

[16] Par exemple, si la droite EF est placée comme la droite GH, on obtiendra l'expression $k - x$. Du reste, afin de traiter également ce second cas, Descartes choisit dans sa figure EF et GH de part et d'autre de AD qui fournit l'origine du repère.

[17] Par exemple, si le point C est supposé dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAE}}$, on pourra obtenir les deux dernières expressions pour EB.

que Descartes ne suppose pas ici un changement de position des droites du problème mais ne fait que considérer l'exemple d'une configuration parmi d'autres, il n'empêche que la multiplicité des équations obtenues auxquelles répondent des arcs de la courbe solution complique grandement l'identification entre courbe(s) et équation(s) et pose le problème de l'équivalence entre ces différentes équations. Doit-elle être par exemple établie sur le plan algébrique en exhibant des changements de variable qui permettent de passer d'une équation à une autre ?

Mais revenons à présent à ces trois expressions pour la ligne EB. Les lettres ne désignent ici que des quantités positives puisqu'elles désignent des segments. Mais, si nous acceptons qu'une lettre puisse désigner une quantité négative, du fait que AB et AE sont situées de part et d'autre de l'origine A, les abscisses associées seront de signes contraires. La première des trois expressions peut alors être abandonnée et on obtient, comme auparavant, dans notre formulation moderne d'une distance usant du double signe $\pm$:

$$\mathsf{EB} = \pm(x - k). \tag{2.15}$$

Descartes, en ne désignant pas par des lettres des quantités négatives afin de rendre compte des positions des points relativement à l'origine du repère, doit donc considérer trois cas de figure au lieu de deux, puisque il examine les positions relatives de trois points A, B et E au moyen de la relation « entre », au lieu d'examiner seulement les positions relatives des deux points B et E.

Dans son choix des positions des points G et E par rapport au point B dans la figure 2.2, il présente deux des trois cas précédents de figure possible : celui où le point E et le point G sont situés de part et d'autre de l'origine A et celui où le point B et le point G sont situés du même côté du point A.

La notion de « segment négatif » est-elle donc étrangère à Descartes ? Ou bien le refus d'introduire les quantités négatives en Géométrie relève-t-il d'un choix de sa part ? Une telle question ne nous paraît ni anachronique ni étrangère à la Géométrie cartésienne. En effet, force est de constater que par exemple dans la construction de l'équation de la trisection de l'angle[18], Descartes obtient trois points d'intersection entre la parabole et le cercle, dont les ordonnées correspondent aux solutions de l'équation. Parmi celles-ci, on trouve la racine « fausse », et le point correspondant F est bien situé de l'autre côté de l'axe des abscisses, relativement aux deux autres points dont les ordonnées sont les racines « vraies » de l'équation, solutions du problème

[18] Cf. [Descartes(1637c), p. 470-471].

géométrique d'origine. Et donc, en ce cas, on est bien dans la situation ou des segments désignés par des lettres renvoient à une quantité négative.

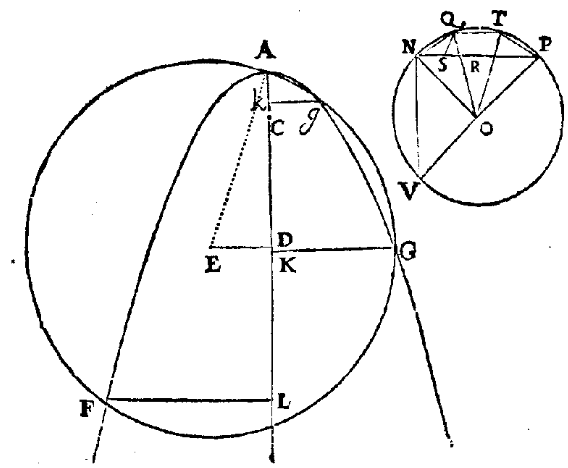

FIG. 2.3 – La figure de la trisection de l'angle : *Géométrie*(1637), p. 396

La différence des deux situations paraît tenir au fait qu'un segment renvoie à la racine d'une équation dans l'exemple de la trisection de l'angle. Dans ce cas, la figure géométrique est produite par l'équation tandis que dans le cas du problème de Pappus, l'analyse de la figure géométrique produit au contraire l'équation. Or il n'y a aucune raison géométrique pour considérér un segment négatif parmi les donnés[19].

On voit ici apparaître une différence de nature entre la courbe qui apparaît en tant que « solution de problème » de lieu géométrique et la courbe qui apparaît comme « instrument de recherche » pour la construction d'équations algébriques[20] car ces courbes sont engendrées à partir de deux contextes différents : l'un géométrique, l'autre algébrique.

Ainsi, du point de vue de la reconstitution de la genèse d'une théorie des courbes algébriques qui serait présente dans la *Géométrie* de Descartes, il

[19]Ce problème des grandeurs négatives en Géométrie n'est pas anodin. Il se pose encore pour Lazare Carnot qui critique dans sa *Géométrie de position* de 1803 l'introduction des grandeurs négatives en Géométrie. Cf. [Carnot(1803), Dissertation Préliminaire, p. ii-xvii].

[20]J'emprunte le vocabulaire correspondant aux catégories données par Enrico Giusti pour étudier la genèse d'un objet mathématique. Cf. [Giusti(2000), p. 42-45] et *supra* [Introduction Générale, n. 27, p. 21].

nous semble que, plus qu'à un objet mathématique, la courbe algébrique renvoie à différents « états d'incarnation » de ce même objet[21]. Les difficultés rencontrées par Descartes et les omissions qui en résultent nous semblent résulter de l'identification qu'il fait sans véritable justification de ces différents états d'incarnation, comme si le problème de Pappus ne jouait pour lui qu'un rôle génétique mais néanmoins non axiomatique dans la constitution d'une théorie des courbes algébriques à partir d'un fondement géométrique, cette considération lui épargnant les efforts — et peut-être l'ennui — de l'établissement d'une véritable articulation logique.

Retournons à présent au calcul de Descartes. Rapporter la droite EF aux droites AB et BC, c'est à dire au repère cartésien, c'est se donner d'espèce le triangle EBS et donc la proportion

$$\mathsf{BE} : \mathsf{BS} = z : d. \tag{2.16}$$

Se donner cette proportion est équivalent à se donner l'équation

$$dx - zy = dk \tag{2.17}$$

c'est-à-dire une équation de la droite EF dans le repère choisi[22]. En effet, lorsque le point B décrit l'axe AB, le point S décrit la droite EF.

Il n'est pas clair que l'interprétation — moderne — que nous avons donnée de la proportion en une équation de droite soit celle de Descartes. Néanmoins on peut affirmer que la proportion joue pour Descartes exactement le même rôle qu'une équation de droite pour nous : d'une part, elle donne la droite, d'autre part, elle intervient exactement de la même façon qu'une équation de la droite dans le calcul.

On comprend bien à présent le choix fait par Descartes du point d'intersection A de la droite AD avec la droite AB jouant le rôle de l'axe comme origine du repère. Une fois encore, ce choix est intrinsèque au problème et a pour but de faciliter le calcul. En effet, la droite AD passant par l'origine, on

[21] L'affirmation d' Enrico Giusti dans son livre [Giusti(2000), p. 42-45] selon laquelle on trouve déjà l'objet « courbe algébrique » dans la *Géométrie* de 1637 nous paraît sous-estimer cette différence de nature entre ces deux incarnations d'origine géométrique et algébrique qui précédent et annoncent en effet une cristallisation plus tardive de l'objet « courbe algébrique », qu'on pourrait observer selon nous plutôt dans la seconde édition latine de la *Geometria* de 1659-1661, en particulier dans les essais de l'école cartésienne, comme ceux de Hudde ou De Witt.

[22] On s'est donné ici un sens sur l'axe AB tel que l'abscisse du point C est positive. Dans ce cas, en s'autorisant à désigner par des lettres des quantités négatives, $\mathsf{EB} = x - k$.

élimine le coefficient constant dans son équation et dans l'expression de CD. La contrepartie est qu'on obtiendra donc l'équation du lieu géométrique solution sans coefficient constant, ce qui nuit à la généralité visée par Descartes[23], celui-ci désirant rapporter tous les lieux solides à des lieux de Pappus.

Considérons à présent la deuxième partie du calcul. À nouveau, Descartes est confronté à une discussion selon la position relative des points C, B et S, pour déduire CS de BS et BC, discussion comportant trois cas distincts. Les raisons en sont les mêmes que celles précédemment décrites. De la donnée de l'angle de projection sur la droite EF, Descartes déduit que le triangle CFS est donné d'espèce, et donc la proportion $\mathsf{CS} : \mathsf{CF} = z : e$. Il déduit ainsi finalement

$$\mathsf{CF} = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}. \tag{2.18}$$

Mais revenons à cette question des signes. On a vu que Descartes n'a traité qu'un des cas possibles. Il ajoute néanmoins pour terminer :

> [...] pour les signes +, & −, qui se ioignent à ces termes, ils peuuent estre changés en toutes les façons imaginables.[24]

La remarque de Descartes est vraie et aisée à établir sur le plan algébrique. On peut résumer le calcul cartésien par le schéma suivant :

$$\left.\begin{matrix}\mathsf{AE}\\ \mathsf{AB}\end{matrix}\right\} \to \mathsf{BE} \to \mathsf{BS}, \tag{2.19}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathsf{BS}\\ \mathsf{BC}\end{matrix}\right\} \to \mathsf{CS} \to \mathsf{CF}. \tag{2.20}$$

Du fait des trois expressions possibles pour BE et CS, on obtiendrait neuf équations, mais on trouve à deux reprises les deux mêmes expressions. On obtient ainsi sept équations qui correspondent bien à toutes les possibilités de changement de signe, à l'exception des trois signes −, soit $2^3 - 1$, puisque l'expression de CF est formée de trois termes, en sorte que la remarque de Descartes est bien fondée.

L'interprétation géométrique de ces changements de signe est naturellement liée à la position des droites. D'autre part, il est aisé de reconnaître les neuf régions du plan correspondantes aux neuf équations décrites ci-dessus[25], comme on le voit dans la figure 2.4.

---

[23] Descartes le regrettera lui-même dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p 511].

[24] Cf. [Descartes(1637c), p. 385].

[25] Dans le cas de AD, on n'aura que trois régions.

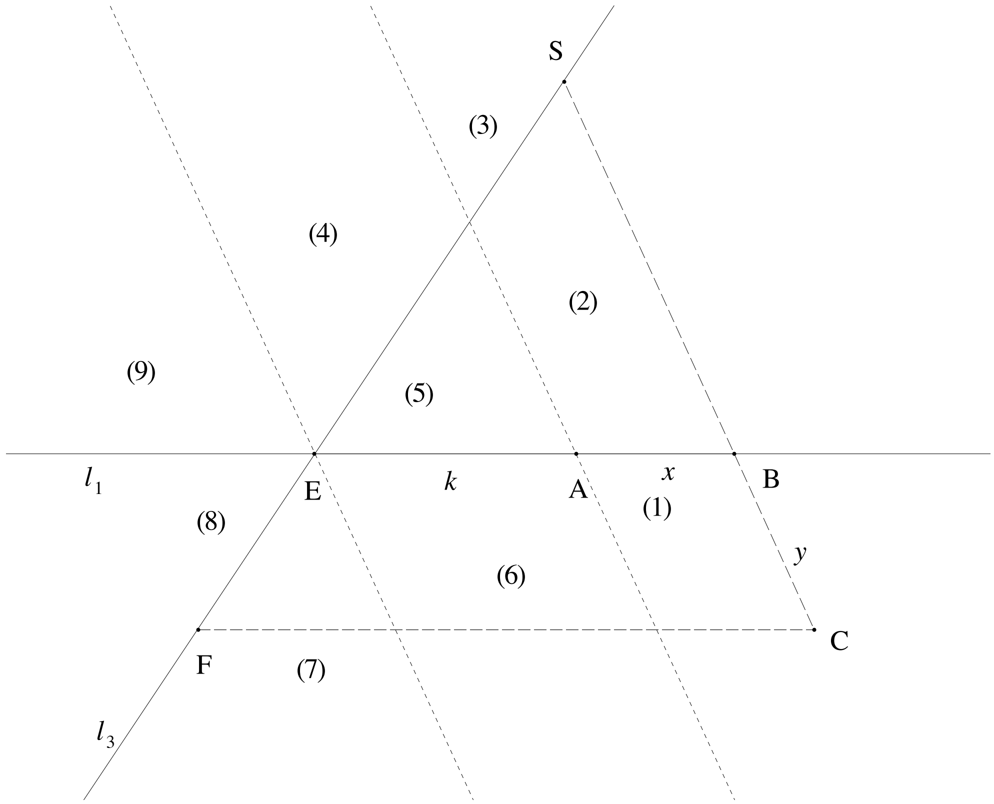

FIG. 2.4 – Les neuf régions du plan pour le calcul de CF

À présent, il est clair qu'on peut déduire les expressions de CD et CH par symétrie sans le moindre calcul. En effet, l'algorithme est identique, seuls changent les données qui sont au nombre de trois : l'abscisse du point d'intersection de la droite donnée avec l'axe des abscisses, les deux rapports correspondant aux rapports des côtés de deux triangles donnés d'espèce. Si on note $\mathcal{A}$ cet algorithme, on a :

$$\mathsf{CD} = \mathcal{A}(0, \frac{z}{b}, \frac{z}{c}), \tag{2.21}$$

$$\mathsf{CF} = \mathcal{A}(k, \frac{z}{d}, \frac{z}{e}), \tag{2.22}$$

$$\mathsf{CH} = \mathcal{A}(l, \frac{z}{f}, \frac{z}{g}). \tag{2.23}$$

Ainsi, la première analyse donnée par Descartes qui conduit à l'équation du lieu, possède une nature double. D'un côté, elle s'appuie sur une analyse géométrique classique, empruntant le vocabulaire des *Données* d'Euclide, mais, d'un autre côté, elle présente un caractère algébrique moderne. En effet, Descartes, par sa recherche de la généralité, non seulement associe une famille d'équations algébriques à une famille de configurations géométriques — qu'on considère des changements de position du point C ou différemment des changements de position de la droite EF —, mais encore traduit un changement de configuration par un changement de signe dans l'expression de CF. Ce faisant, Descartes transforme ainsi un problème géométrique en un problème algébrique.

2.3.3 Une comparaison avec la solution moderne

On peut enfin se poser la question de savoir dans quelle mesure la démarche cartésienne, exception faite de la question des signes, est essentiellement différente de la nôtre. Plaçons-nous dans le cas plus simple où les angles sont droits.

De façon moderne, on obtiendrait en usant de l'équation de la droite EF et de la formule (2.2) l'expression

$$d(\mathsf{C}, \mathsf{EF}) = \pm\frac{dx - zy - dk}{\sqrt{d^2 + z^2}}. \tag{2.24}$$

Modification faite pour ce qui regarde les signes, Descartes de son côté obtient

$$\mathsf{CF} = \pm\frac{dex - ezy - dek}{z^2}. \tag{2.25}$$

Mais si on nomme α l'angle des droites EB et ES, on a

$$\frac{\mathsf{BE}}{\mathsf{BS}} = \frac{z}{d} = \frac{1}{\tan\alpha} \text{ et } \frac{\mathsf{CS}}{\mathsf{CF}} = \frac{z}{e} = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{2.26}$$

Mais alors, de

$$d^2 + z^2 = z^2\tan^2\alpha + z^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}z^2 = \frac{z^4}{e^2}, \tag{2.27}$$

il est facile de déduire l'expression donnée par Descartes de CF.

On peut remarquer qu'une telle comparaison nous fournit la signification de la quantité z qui apparaît dans chacun des rapports correspondant aux angles formés entre la droite choisie comme axe des abscisses et les trois

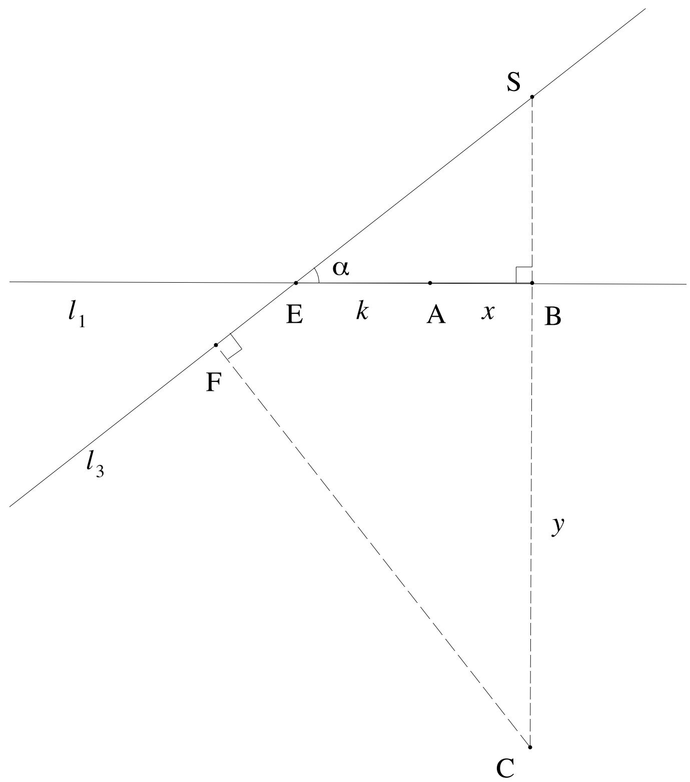

Fig. 2.5 – Calcul de CF : méthode cartésienne et méthode moderne

autres droites du problème : z semble jouer le rôle d'un segment unitaire pour mesurer les angles avec des lignes trigonométriques d'après l'équation (2.26), dans le cas de projections orthogonales sur les droites du problème. D'ailleurs, dans l'exemple numérique qu'il donne à la fin de sa résolution du problème de Pappus, Descartes prend[26] $z = 1$.

2.3.4 L'étude de l'équation du lieu

Descartes étudie l'équation du lieu de Pappus à quatre lignes au Livre II de la *Géométrie* intitulé de *De la nature des lignes courbes* après avoir donné une définition et une classification en genres des courbes géométriques[27].

[26] Cf. [Descartes(1964-1974), p. 405-406].

[27] Pour un exposé historique sur la classification des courbes replaçant Descartes dans une tradition initiée par les mathématiciens Grecs et poursuivie par les mathématiciens

Il énonce tout d'abord sans démonstration le théorème selon lequel toute courbe géométrique, et donc donnée par une équation algébrique[28], est solution d'un problème de Pappus.

Pour les coniques, mais seulement pour les coniques, un autre raisonnement géométrique est possible en se référant à Apollonius. Une conique étant donnée, il suffit de considérer un quadrilatère inscrit pour obtenir la propriété qui définit le lieu à quatre lignes en s'appuyant sur les propositions 54 à 56 du Livre III des *Coniques* d'Apollonius[29].

On sait que l'énoncé de Descartes est faux à partir des quartiques[30]. Comme le suggère Roshdi Rashed[31], on peut donc imaginer que Descartes n'a traité que les cas à 3, 4 et 5 droites et a ensuite généralisé son résultat sans le vérifier.

Mais citons Descartes :

> [...] Et mesme a cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, & par consequent faire changer tant les quantités connuës que les signes + et − de l'equation, il est evident [!] qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre,

Arabes, cf. [Rashed(2005c)]. On peut aussi voir [Rashed et Biard(1997)].

[28]Descartes a en effet écrit auparavant :

> Mais, pour comprendre ensemble toutes celles qui sont en la nature, & les distinguer par ordre en certains genres, ie ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les poins de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure precise & exacte, *ont necessairement quelque rapport a tous les points d'une ligne droite, qui peust estre exprimé par quelque equation, en tous par une mesme.*

C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1637c), p. 392].

[29]En fait, ces propositions établissent qu'une conique vérifie la propriété du lieu à trois lignes mais on peut en déduire assez facilement la propriété du lieu à quatre lignes. Cf. [Apollonius(1959), p. 274-280] et [Apollonius(1896), p. 120-125]. Cf. également [Galuzzi et di Sieno(1989)] qui discute la solution donnée par Newton dans les *Principia*.

[30]Récemment, Roshdi Rashed a donné un élégant contre-exemple fourni par une ovale de Cassini qui n'est solution d'aucun problème de Pappus. Cf. [Rashed(2005c), p. 46-48]. Ce contre-exemple s'appuie sur le fait qu'une ovale de Cassini ne peut être rencontrée par une droite du plan qu'en 0 ou 2 points. Or, en tant que solution d'un problème de Pappus à 7 ou 8 droites, elle devrait être rencontrée par les droites du problème en quatre points. Newton a relevé également l'erreur de Descartes, mais en comparant le nombre de coefficients qui détermine une courbe d'ordre n solution du problème de Pappus et une courbe d'ordre n quelconque. Pour les critiques de Newton sur la solution de Descartes, cf. [Galuzzi(s.p.)]. Cf. également [Bos(1981), Appendice].

[31]Cf. [Rashed(2005c), p. 48].

> qui ne soit utile a cete question, quand elle est proposée en 4 lignes droites ; ny aucune du second qui n'y soit utile, quand elle est proposée en huit ; ny du troisiesme, quand elle est proposée en douze : & ainsi des autres. *En sorte qu'il n y'a pas une ligne courbe qui tombe sous le calcul & qui puisse estre receüe en Geometrie, qui n'y soit utile pour quelque nombre de lignes.*[32]

Si nous avons donné cette citation cartésienne bien connue, c'est afin d'insister sur l'argument cartésien qui justifie le caractère évident d'un tel théorème. C'est l'infinie variation de la position des lignes droites données qui conduira à des équations où seront changées en toutes les façons imaginables quantités connues mais aussi signes $+$ et $-$. L'argument est donc de nature algébrique puisqu'il porte sur la généralité de l'équation algébrique obtenue à l'issue de l'analyse.

Mais une ambiguïté apparaît quant à la nature des équations considérées relativement à l'argument portant sur les signes, ambiguïté que nous avons déjà mentionnée auparavant et qui nous paraît découler du souci de généralité de Descartes.

C'est que les signes $+$ et $-$ ont déjà été signalés par Descartes comme devant être changés selon la position choisie pour le point C au commencement de l'analyse géométrico-algébrique. Dans ce cas, un exemple générique du problème de Pappus était considéré et les équations algébriques exprimaient un arc de courbe solution dans une région du plan délimitée par les droites du problème. Or Descartes paraît ici mentionner une équation exprimant une courbe entière, et suggère qu'en plus des modifications des coefficients, les modifications des signes $+$ et $-$ produiront toutes les courbes d'un genre donné.

Nous étudierons à nouveau cette question de la signification des changements de signes dans la section[33] consacrée au seul exemple détaillé par Descartes d'un problème de Pappus à cinq lignes, celui de la parabole cartésienne, « la premiere & la plus simple de toutes les lignes courbes qui servent en la question des anciens, quand elle est proposée en cinq lignes »[34].

En procédant pour les autres lignes comme dans le calcul précédent de

[32] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1637c), p. 397].
[33] Cf. *infra* [section 2.4, p. 85].
[34] Cf. [Descartes(1637c), p. 407-410].

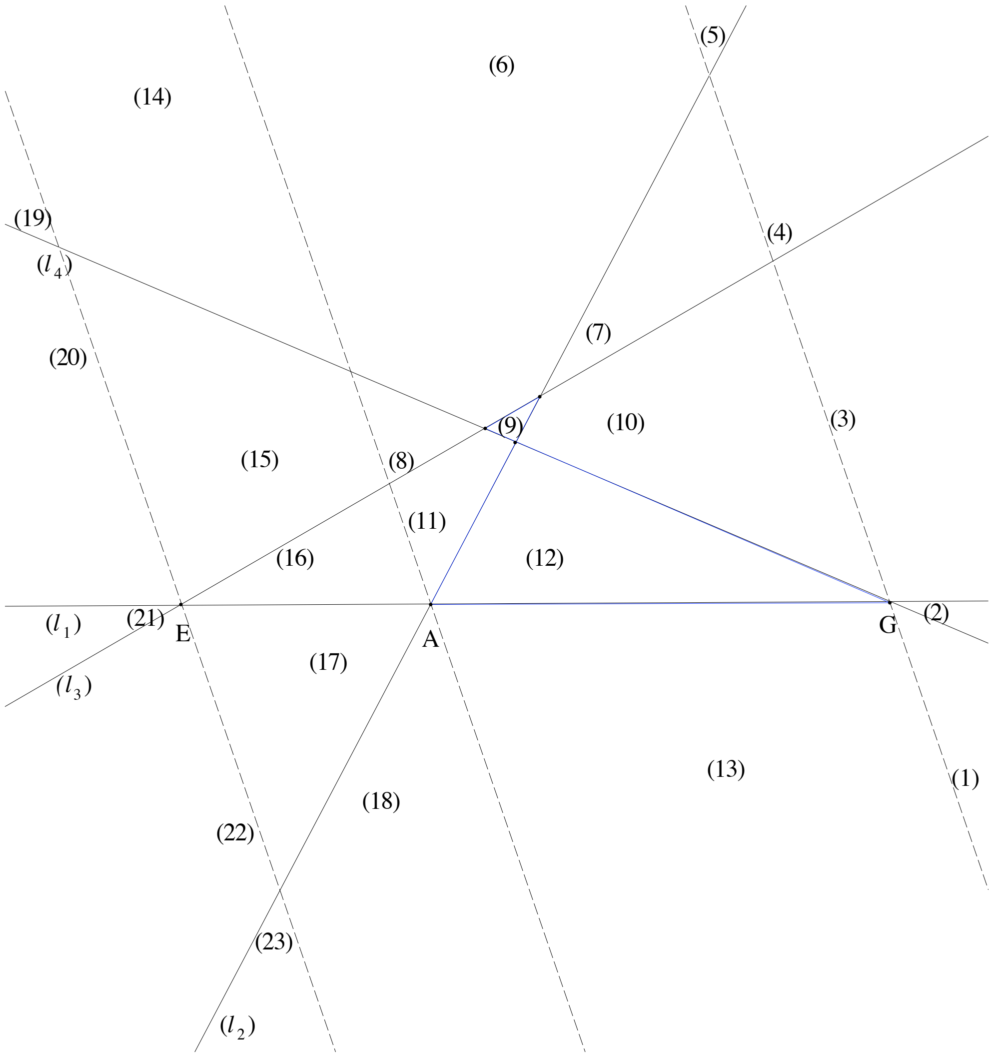

FIG. 2.6 – Les 23 régions du problème de Pappus

CF, Descartes obtient les expressions

$$\mathsf{CB} = y,\ \mathsf{CD} = \frac{czy + bcx}{zz},$$
$$\mathsf{CF} = \frac{ezy + dek + dex}{zz},\ \mathsf{CH} = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}. \qquad (2.28)$$

D'après l'équation du lieu (2.13), il déduit[35] ensuite, après transformation, l'équation

$$yy = \frac{(cfglz - dekzz)y + (bcgzx - cfgzx - dezzx)y + bcfglx - bcfgxx}{ezzz - cgzz} \tag{2.29}$$

tandis que dans le cas général, chacun des neuf coefficients de l'équation (2.29) sera affectée du symbole $\pm$.

Ainsi, en faisant varier les positions des lignes droites données, on obtiendra toutes les équations possibles avec toutes les combinaisons de signes $+$ et $-$, soit en tout $\frac{2^9}{2} - 1 = 255$ équations non équivalentes en y^2. En effet, l'expression (2.29) n'est pas modifiée en prenant l'opposé du numérateur et l'opposé du dénominateur. De plus, on rejette l'expression où tous les coefficients du numérateur sont négatifs et tous ceux du dénominateur sont positifs comme impossible.

D'autre part, en faisant varier la position des droites données, on fera varier les coefficients k et l, qui dépendent de la position des points d'intersection des droites CD, CF et CH avec la droite AB, ainsi que les coefficients b, c, d, e, f et g qui dépendent des angles formés par les droites CD, CF et CH avec la droite AB et des angles de projection.

En revanche, il n'en sera rien en faisant varier la position du point C pour une configuration donnée. Il faudra tenir compte de l'intersection des régions du plan correspondant respectivement à chacune des droites AD, EF, GH, auxquelles correspondent des expressions différentes de CD, CF et CH. On n'obtiendra ainsi qu'un certain nombre des 255 équations possibles pour une configuration donnée, ces équations correspondant à l'une ou l'autre des deux coniques solutions dans une région du plan délimité par les droites. Le comptage de ces régions, bien que fastidieux, ne présente pas de difficultés. On obtient 23 régions dans le cas de figure choisi par Descartes, comme on le voit sur la figure 2.6, et donc au plus 23 équations puisqu'on peut retrouver deux fois la même équation comme on l'a vu dans le cas du carré.

Descartes extrait ensuite la racine positive[36] de l'équation (2.29) en procédant à des changements d'inconnues pour simplifier l'expression. Il considère ainsi implicitement que l'équation est de la forme $y^2 = \pm ay + b^2$, et donc que le coefficient constant de l'équation est une quantité positive. Il ne considère donc pas la racine négative mais est-ce à dire qu'il n'en traite

[35] Cf. [Descartes(1637c), p. 398].

[36] Cf. [Descartes(1637c), p. 399]. Descartes parle de « *la* racine ».

pas ? On sait bien qu'étant donnée l'équation $y^2 = ay + b^2$, on obtient la racine négative de cette équation en considérant l'équation $y^2 = -ay + b^2$, autrement dit, en faisant le changement de variables $y \to -y$.

On peut ainsi vérifier facilement qu'on obtiendra l'équation

$$yy = \frac{(-cfglz + dekzz)y + (-bcgzx + cfgzx + dezzx)y + bcfglx - bcfgxx}{ezzz - cgzz} \tag{2.30}$$

qui est la transformée de l'équation (2.29) par le changement de variables $y \to -y$ en se plaçant dans la région (10). Cette équation exprime un arc du même lieu pris dans le demi-plan supérieur à l'axe des abscisses. Ainsi à cause du choix cartésien de procéder à l'extraction des racines en ne considérant que des racines positives, il est de toute façon nécessaire d'associer non pas une équation algébrique au lieu géométrique, mais deux équations algébriques associées par le changement de variable $y \to -y$, dont les racines positives donnent les ordonnées appliquées de part et d'autre de l'axe des abscisses.

À ce sujet, Rabuel écrit dans son Commentaire :

> Tandis qu'on trouve la valeur de CB, y négative, l'on continue à la chercher ailleurs, parceque c'est sa valeur positive, que l'on veut trouver. Ce n'est pas, qu'une valeur négative trouvée ne serve de quelque chose, puisque, [...] elle signifie, que la valeur positive est du côté opposé à celui, vers lequel on l'a supposé. Si CB ayant été posé du côté de D par rapport à la droite AB, on trouvoit par le calcul sa valeur négative, ce seroit une marque certaine, que la positive seroit de l'autre côté de AB, c'est-à-dire, du côté de S. Parceque, comme on le pratique dans les lieux géométriques, les CB, y sortant toutes de la ligne AB, si les $-y$ vont du côté de D, les $+y$ s'étendront du côté de S.[37]

Il est vrai que dans la recherche des lieux géométriques, on rencontre une attitude proche de celle de Descartes encore longtemps après ce dernier, qui consiste à se placer d'abord dans le quadrant correspondant aux coordonnées x et y positives et à exprimer la portion de lieu incluse dans chaque quadrant par des équations distinctes obtenues à partir de la première par des changements de variable du type $x \to -x$ et $y \to -y$[38]. C'est le cas par exemple du

[37]Cf. [Rabuel(1730), p. 151].

[38]Une telle prégnance des coordonnées positives peut conduire à des erreurs, comme celle de Wallis sur l'absence de diamètre dans la parabole cubique. Cf. [Whiteside(1960-1962), p. 296-297].

traité posthume de 1707 du Marquis de l'Hospital sur les sections coniques[39].

Descartes ajoute au sujet de l'équation (2.29) :

> [...] au moins en supposant ez plus grand que cg : car, s'il estoit moindre, il faudroit changer tous les signes + & −. Et si la quantité y se trouuoit nulle, ou moindre que rien en cete equation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle DAG, il faudroit le supposer aussy en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en changeant les signes + & –, selon qu'il seroit requis a cet effect. Et si, en toutes ces 4 positions, la valeur d'y se trouuoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé.[40]

Remarquons que Descartes ne mentionne pas le cas où $ez = cg$: le coefficient en y^2 est alors nul et on obtient une hyperbole. Il regrettera cette omission dans la lettre bien connue du 20 février 1639 à Debeaune[41].

Descartes fait dans cette citation deux remarques. La première concerne le signe de $ez - cg$ c'est-à-dire du coefficient de y^2. Descartes indique que si ce signe est négatif, il faut changer tous les signes + et −. Qu'entend-il par là ? Considérons, comme le fait Descartes dans la suite[42], l'équation précédente réécrite sous la forme

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfgx(l-x)}{z^2(ez-cg)} \tag{2.31}$$

où

$$2m = \frac{cfglz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2} \text{ et } \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}. \tag{2.32}$$

Dans le cas où la quantité $l - x$ est positive, ce qui est vérifié si le point C appartient par exemple à la région (13) contenue dans l'angle $\widehat{DAG}$, position retenue du reste par Descartes dans sa figure, le coefficient dans

---

[39] Cf. par exemple [L'Hospital(1707), Livre Septième. Des Lieux Géométriques, p. 206-248]. L'Hospital écrit ainsi en Avertissement :

> Lorsqu'il s'agira dans la suite de construire le lieu d'une équation donnée, on supposera toujours que AP(x) & PM(y) soient positives, c'est à dire que tous les points M tombent dans le même angle BAQ. *Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui sera renfermée dans cet angle.*

C'est moi qui souligne. Cf. [L'Hospital(1707), p. 208].

[40] Cf. [Descartes(1637c), p. 398-399].

[41] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 511] et *infra* [section 4.2.1, p. 108].

[42] Cf. [Descartes(1637c), p. 399].

l'équation (2.31) qui ne dépend pas de y sera négatif si $ez - cg < 0$. Ainsi, selon le signe de $2m - \frac{2n}{z}x$, l'équation (2.31) en y admettra ou bien deux racines positives ou bien deux racines négatives — non considérées par Descartes —, voire deux racines imaginaires.

On comprend que pour la facilité de la discussion, ce cas doive être rejeté et que Descartes considère plutôt le cas où l'équation quadratique n'admet qu'une racine positive, c'est-à-dire celui d'une équation du type $y^2 = \pm ay + b^2$. On peut d'ailleurs reconnaître une hyperbole dans l'équation (2.31) lorsque $ez - cg < 0$ puisque le coefficient en x^2 est alors positif. Voilà une autre raison de rejeter ce cas pour Descartes qui considère un cercle dans sa solution prototypique : il lui faut donc au contraire un coefficient en x^2 positif.

Ajoutons qu'on obtient bien une équation possédant deux racines positives en se plaçant dans la région (12) dans la figure étudiée par Descartes. Cette équation

$$y^2 = \frac{(dekz^2 + cfglz)y + (bcgz - cfgz + dez^2)xy - bcfglx + bcfgx^2}{ez^3 + cgz^2} \tag{2.33}$$

exprime la seconde conique solution qui est une hyperbole[43]. On retrouve la même équation dans la région (9). On peut le vérifier sans faire tous les calculs en remarquant que dans la région (9), par rapport à la région (12), la position du point C change uniquement par rapport aux droites l_2 et l_4 comme on le voit sur la figure 2.6[44]. On déduit ainsi la même expression pour CF et les expressions opposées de celles de CD et CH trouvées pour la région (9). La compensation des deux changements de signe dans l'égalité (2.13) conduit à la même équation (2.33).

On peut remarquer en outre que dans la région (10), par rapport à la région (12), la position du point C changeant seulement par rapport à la droite l_4, on n'obtient que le changement de signe de l'expression CH. On retrouve ainsi une équation du cercle solution considéré par Descartes qui est une ellipse dans le cas général.

On voit apparaître le double signe qu'on avait remarqué dans la solution moderne et donc l'existence de deux coniques solutions. Descartes aurait pu ainsi déduire assez simplement en employant le même raisonnement l'équation (2.33) de l'hyperbole dans la région (12) de celle (2.30) du cercle

[43]Cf. *infra* [figure 2.9, p. 84].

[44]Plus précisément, c'est un changement de l'ordre des points C, B, R et C, B, T qui conduit à ce résultat.

dans la région (10) ou (2.29) dans la région (13). Néanmoins, il ne mentionne nulle part l'existence d'une seconde conique solution.

On pourrait, il est vrai, arguer que Descartes a pu reconnaître cette hyperbole dans l'équation (2.31), lorsque $ez - cg < 0$, comme on l'a vu auparavant. Néanmoins, dans ce cas, il n'est pas clair qu'une telle hyperbole soit une seconde solution du *même* problème ou bien la solution d'un autre problème de Pappus dans l'esprit de Descartes, d'autant que dans le premier cas on sait d'après l'équation (2.33) qu'on n'obtient pas le même coefficient en y^2 que dans l'équation (2.31).

Mais que faire alors si $ez - cg < 0$? Descartes indique sans autre précision de « changer tous les signes + et − ». Si on échange tous les signes + et − du membre de droite, on obtiendra bien sûr une équation équivalente avec, cette fois-ci, un coefficient positif au dénominateur. La remarque de Descartes devient banale et ne modifie en rien le fait qu'une telle équation est de la forme $y^2 = \pm ay - b^2$, et donc ne correspond pas au type traité ensuite par lui, si l'on conserve la même position pour le point C. C'est l'interprétation de Schooten qui consacre une note dans son édition latine à démontrer par le calcul que les deux équations ainsi obtenues sont équivalentes[45].

Descartes extrait ensuite la racine positive de l'équation comme si elle était de la forme précédente. Si l'on suppose encore $ez - cg < 0$, pour ce faire, il faudrait supposer le point C en une position au sein de l'angle $\widehat{\mathsf{DAG}}$ telle que $l - x < 0$, ce qui est le cas si celui-ci est situé par exemple dans la région (2). On obtient alors l'équation

$$y^2 = \frac{(-dekz^2 - cfglz)y + (-bcgz + cfgz - dez^2)xy - bcfglx + bcfgx^2}{ez^3 + cgz^2} \tag{2.34}$$

qui est bien de la forme $y^2 = \pm ay + b^2$ mais correspond à l'hyperbole solution qu'on a déjà mentionnée. Remarquons qu'on obtient l'équation (2.33) de l'hyperbole qu'on a considérée auparavant en faisant le changement de variables $y \to -y$ dans l'équation (2.34).

La seconde remarque de Descartes porte sur les racines de l'équation obtenue. Celui-ci mentionne le cas où les racines seraient négatives ou nulles. Il est clair que l'équation (2.31) possède une racine nulle si et seulement si $bcfgx(l-x) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = l$, autrement dit lorsque le point C coïncide

[45] Schooten considère en fait le cas plus simple où $y = \frac{fe-dk}{d-c}$ avec $d - c < 0$ et montre par le calcul que de façon équivalente on a $y = \frac{-fe+dk}{-d+c}$. Cf. la note B au livre II : [Schooten(1649b), p. 193-194].

avec le point A ou le point G. Pour ce qui regarde les racines négatives, la remarque de Descartes n'a de sens que s'il considère l'équation comme ayant deux racines négatives. En ce cas, dit-il, il faut changer d'angle. Une telle remarque est cohérente avec le commentaire de Rabuel précédemment mentionné selon lequel les racines négatives de l'équation d'un lieu correspondent bien à des points du lieu, mais placés de l'autre coté de l'axe des abscisses.

Si Descartes ne considère qu'une conique comme solution du problème de Pappus, une telle remarque est assez naturelle. On voit bien ainsi dans l'exemple du cercle qu'il a choisi que celui-ci ne figure pas dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAE}}$[46].

Aussi, on peut bien imaginer, si l'on suppose une seule conique solution, que l'équation qu'on obtiendra dans cette région n'admettra pas de racines réelles positives, à l'exception de la racine nulle qui correspondra au point A. Mais alors, la seconde racine sera nécessairement négative dans ce dernier cas où $x = 0$, et correspondra à un point de la conique solution pris dans un autre angle. Dans les autres cas on obtiendra deux racines négatives ou deux racines imaginaires.

Ainsi, si l'on se place dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAE}}$ et plus précisément dans la région (17), on trouve l'équation

$$y^2 = \frac{(-dekz^2 - cfglz)y + (bcgz - cfgz + dez^2)xy + bcfglx + bcfgx^2}{ez^3 + cgz^2}. \tag{2.35}$$

Or, force est de constater qu'une telle équation est de façon évidente de la forme $y^2 = \pm ay + b^2$, et qu'elle correspond à la seconde conique solution déjà mentionnée auparavant. On peut d'ailleurs remarquer qu'on obtient l'équation (2.34) en faisant le changement de variables $x \to -x$ dans l'équation (2.35). Il paraît alors à nouveau étonnant que Descartes ait pu ignorer ce cas.

La dernière remarque de Descartes qui envisage le cas où toutes les équations n'admettraient d'autre solution que la solution nulle, quelle que soit la région où se trouve le point C, c'est-à-dire que le problème soit sans solution autre que le point A, est tout à fait générale et relève du point de vue de l'algèbre et non à proprement parler de la situation géométrique pour laquelle il paraît difficile et peu naturel d'imaginer un cas où il n'y aurait pas de solution. À nouveau, Roberval en géomètre fera ce reproche à Descartes en affirmant que le problème admet toujours des solutions. La remarque de

[46]Cf. *infra* la figure de Descartes [figure 2.7, p. 78].

ce dernier démontre ainsi une fois de plus la transformation opérée par Descartes du problème géométrique positionnel en un problème de géométrie algébrique.

Les remarques répétées de Descartes sur les changement de signes dans l'équation du lieu soulèvent un même problème d'interprétation rencontré aussi bien par Schooten dans son édition latine que par l'historiographie. Il est tentant, en particulier pour un lecteur moderne, de qualifier ces remarques d'algébriques. *A contrario*, l'étude de l'équation algébrique du lieu à partir du signe de ses coefficients qui est donnée par Descartes, ainsi que les transformations algébriques qu'il suggère, ne peuvent être interprétées que dans le contexte géométrique positionnel du problème de Pappus, et donc en se référant à une équation donnée dans une région et non dans tout le plan.

Les raisons d'être profondes de l'étude cartésienne nous paraîssent ainsi brouillées par l'interprétation géométrique qui doit être donnée pour une résolution complète du problème géométrique initial, du fait de la quantité de cas de figure que cette interprétation requiert en l'absence du concept de coordonnées négatives. L'altération de la compréhension profonde de la démarche résolutive par ces considérations suggèrerait donc qu'elles forment un habillage d'une solution algébrique appuyée sur l'étude de l'équation algébrique du lieu de Pappus plutôt que la solution heuristique du problème.

Il y aurait donc eu nécessité, à la fois pour des raisons didactiques mais aussi pour assurer une certaine continuité avec la tradition géométrique classique, de donner une résolution plus laborieuse et plus exhaustive dans l'étude des différentes positions du point C. Une telle démarche de clarification semble s'opposer à celle retenue par Descartes dans la *Géométrie*, celui-ci privilégiant la concision et ne prisant guère les longs calculs, dès lors que leur raison d'être n'apparaît plus clairement.

De surcroît, on pourrait ainsi penser que l'omission cartésienne de la seconde conique solution qui sera relevée et critiquée par Roberval relève plutôt d'un défaut dans l'exposition que dans la compréhension.

2.3.5 La construction de l'équation du lieu et la détermination des coniques solutions

Descartes propose ensuite la détermination et la construction de la conique exprimée par l'équation (2.29), selon les différents cas, dans la suite du livre II de la *Géométrie*[47] et ne considére donc explicitement qu'une conique solution.

Pour ce faire, il extrait la racine en y de l'équation (2.31) et déduit l'équation

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}. \tag{2.36}$$

Posant ensuite[48] « pour abréger »

$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2} \text{ et } -\frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}, \tag{2.37}$$

il obtient finalement l'équation

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}. \tag{2.38}$$

Il commente ensuite cette équation en écrivant :

> Et il est evident que, la question n'estant proposée qu'en trois au quatre lignes, on peut tousiours avoir de tels termes ; excepté que quelques uns d'entre eux peuvent estre nuls, & que les signes + & − peuvent diversement estre changés.[49]

Descartes, pour garantir la généralité de l'équation (2.38), s'appuie ainsi sur des changements de signes des termes de l'équation, argument qu'il a déjà donné plusieurs fois auparavant, ainsi que sur la possibilité de considérer certains des termes comme nuls. En effet, on peut supposer par exemple que le terme en y — resp. le terme en xy — dans l'équation (2.31) est nul, auquel cas on obtient $m = 0$ — resp. $n = 0$ —.

Dans le premier cas, le changement des connues qui conduit à introduire $\frac{p}{m}$ dans l'équation (2.37) peut être effectué de la même façon en remplaçant m par une autre lettre m'. Les expressions qu'on trouve dans la discussion donnée à la suite par Descartes dans le cas où $m \neq 0$ peuvent ainsi être

[47] Cf. [Descartes(1637c), p. 398-406]. Cf. aussi [Scott(1952), p. 108-111], [Bos(2001), p. 320-325] et [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 33-38].

[48] Nous ajoutons le signe − devant $\frac{p}{m}$ qui manque dans l'édition de 1637 et dans les éditions latines de 1649 et 1659-1661. Descartes fait son calcul en effet dans la suite comme si le signe figurait. Cf. [Descartes(1637c), p. 399].

[49] Cf. [Descartes(1637c), p. 399].

reprises pour traiter le cas $m = 0$ à condition de différencier dans celles-ci la lettre m qui résulte du changement des données (2.32) et doit être égalée à 0 de celle qui résulte du changement des données (2.37).

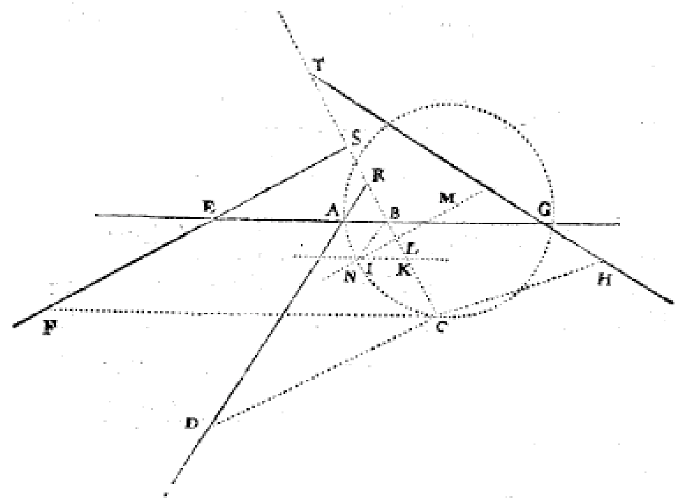

FIG. 2.7 – *Géométrie*(1637), p. 331

Descartes construit[50] ensuite le segment KI égal et parallèle à l'abcisse BA tel que $\mathsf{BK} = m$. La ligne $\mathsf{KL} = \frac{n}{z}x$ est obtenue en tirant la droite IL définie par la proportion $\mathsf{IK} : \mathsf{KL} = z : n$. Mais alors $\mathsf{LC} = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$. D'autre part, le rapport $\mathsf{KL} : \mathsf{IL}$ est donné. Descartes le pose égal au rapport $n : a$ et obtient $\mathsf{IL} = \frac{a}{z}x$.

Selon le signe de m et $\frac{n}{z}x$ dans l'équation générale du lieu de Pappus dont l'équation (2.38) fournit un exemple, Descartes doit indiquer dans quel sens il trace les segments correspondants, ce qui complique sa présentation puisque les lettres désignent toujours des segments non orientés, c'est-à-dire des quantités positives[51].

Les deux autres cas à considérer dans la discussion, lorsque les coefficients m ou $\frac{n}{z}x$ sont nuls, sont mentionnés en passant par Descartes[52]. Nous verrons

[50]Cf. [Descartes(1637c), p. 400].

[51]Hudde sera le premier semble-t-il à désigner par des lettres des quantités négatives dans son traité [Hudde(1659a)] publié dans la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661. Cf. [Scott(1952), p. 106].

[52]Descartes se contente de dire qu'il ne faut point tirer dans ce cas les lignes IK et IL mais ne précise pas la construction à effectuer. Il est vrai qu'elle n'est pas difficile.

dans la suite que Debeaune insérera une observation dans les *Notes Brèves* où il donne la détermination et la construction des coniques solutions dans ces cas dans ces deux cas[53].

Bien sûr, l'équation de la droite IL dans le repère d'axe AB, d'origine A et d'ordonnée BL est $y = m - \frac{n}{z}x$ mais comme on l'a vu auparavant Descartes considére une proportion pour définir cette droite.

Descartes détermine ensuite les coniques solutions en procédant à une discussion portant sur le terme $\frac{p}{m}x^2$. Il écrit :

> Or, cela fait, il ne reste plus, pour la ligne LC, que ces termes
>
> $$\mathsf{LC} = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$
>
> d'où ie voy que, s'ils estoient nuls, ce point C se trouveroit en la ligne droite IL ; & que, s'ils estoient tels qua la racine s'en pust tirer [...] ce point C se trouveroit en une autre ligne droite qui ne seroit pas plus malaysée a trouver qu'IL. Mais lorsque cela n'est pas, ce point C est tousiours en l'une des trois sections coniques, ou en un cercle, dont l'un des diametres est en la ligne IL, & la ligne LC est l'une de celles qui s'appliquent par ordre a ce diametre, ou au contraire LC est parallele au diametre auquel celle qui est en la ligne IL est appliquée par ordre. A sçavoir, si le terme $\frac{p}{m}xx$ est nul, cette section conique est une Parabole ; & s'il est marqué du signe +, c'est une Hyperbole ; & enfin, s'il est marqué du signe −, c'est une Ellipse. Excepté seulement si la quantité *aam* est égale à *pzz*, & que l'angle ILC soit droit : auquel cas on a un cercle au lieu d'une Ellipse.[54]

Descartes mentionne ainsi une alternative pour la détermination de la conique solution : soit la ligne IL correspond au diamètre et la ligne LC à l'ordonnée[55], soit la ligne LC est parallèle au diamètre et la ligne IL correspond alors à l'ordonnée[56].

Il précise ensuite pour le premier cas le sommet, le côté droit, ainsi que le centre et le côté traversant, pour chaque conique solution[57] en se réclamant

[53]Cf. *infra* [section 4.2.3, p. 116].
[54]Cf. [Descartes(1637c), p. 401].
[55]C'est le cas du cercle solution étudié par Descartes. Cf. [figure 2.7, p. 78].
[56]Cette situation est représentée par une hyperbole. Cf. [figure 2.8, p. 83].
[57]Cf. [Descartes(1637c), p. 402-405].

pour la construction de ces dernières des problèmes associés dans le Livre I des *Coniques* d'Apollonius[58]. On peut bien sûr se poser la question de savoir comment Descartes a trouvé une telle construction[59], autrement dit retrouver l'analyse cachée qui lui a permis de déterminer l'expression de la position du sommet et du centre, ainsi que celle du côté droit et du côté traversant à partir de l'équation (2.38). Une telle recherche ne nous semble pas artificielle. Descartes écrit en effet dans une lettre du 31 mars 1638 à Mersenne la célèbre formule :

> Mais le bon est, touchant cete question de Pappus, que ie n'en ay mis que la construction & la demonstration entiere, sans en mettre toute l'analyse, laquelle ils s'imaginent que i'ay mise seule : en quoy ils tesmoignent qu'ils y entendent bien peu. Mais ce qui les trompe, c'est que i'en fais la construction, comme les Architectes font les bastimens, en prescrivant seulement tout ce qu'il faut faire, & laissant le travail des mains aux charpentiers et aux masons. [...] Pour l'analyse, i'en ay omise une partie, affin de retenir les esprits malins en leur devoir ; car si ie leur eusse donnee, ils se fussent vantez de l'avoir sceue long tems auparavant, au lieu que maintenant ils n'en peuvent rien dire qu'ils ne descouvrent leur ignorance.[60]

Connaissant « l'équation générale » d'une conique[61]

$$Y^2 = rX \pm \frac{r}{q}X^2 \tag{2.39}$$

tirèe des *symptoma* des *Coniques* d'Apollonius, où X désigne l'abscisse mesurée à partir du sommet, Y l'ordonnée correspondante, r le côté droit et q le côté traversant, l'équation (2.38) suggère de reconnaître dans la droite IL le diamètre de la section conique solution, et dans IL et LC l'abscisse et l'ordonnée du point C relativement à ce diamètre.

---

[58] Il s'agit respectivement des propositions 52 et 53 pour la parabole, 54 et 55 pour l'hyperbole, 56 à 58 pour l'ellipse. Cf. [Apollonius(1959), resp. p. 97-100, 101-106, 106-112] et [Apollonius(1896), p. 52-52]. Cf. également *infra* [section 6.4.2, p. 209].

[59] Henk Bos a proposé une reconstruction fondée sur l'usage de la méthode des coefficients indéterminés. Cf. [Bos(2001), p. 323-324].

[60] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 83].

[61] Descartes emploie ainsi dans la méthode des normales une équation semblable à la (2.39) pour se donner une ellipse. Cf. [Descartes(1637c), p. 414-415].

En posant

$$\left\{\begin{array}{c} x' = \frac{a}{z}x \\ y' = y - m + \frac{n}{z}x \end{array}\right. \tag{2.40}$$

on déduit de l'équation (2.38)

$$y' = \sqrt{m^2 + \frac{oz}{a}x' - \frac{pz^2}{ma^2}x'^2}. \tag{2.41}$$

Comme le remarque Massimo Galuzzi[62], lorsque $pz^2 = ma^2$ et que l'angle $\widehat{\mathsf{ILC}}$ est droit, on déduit aussitôt que l'équation (2.41) est celle d'un cercle qui correspond à la figure 2.7 donnée par Descartes. De même, lorsque $\frac{p}{m} = 0$, on obtient clairement une parabole dont le sommet N, qui se trouve sur la droite IL, est déterminé par $\mathsf{IN} = \frac{amm}{oz}$ et dont le côté droit est égal à $\frac{oz}{a}$.

À présent, on peut déterminer les deux sommets de la conique à centre considérée en résolvant l'équation quadratique en x correspondant à la valeur nulle de l'expression (2.41) de y'. On peut ainsi déduire le demi-côté traversant et le centre de la conique. On obtient ainsi, dans le cas de l'ellipse, pour l'équation (2.41)

$$x' = \frac{aom}{2pz} + \sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{4p^2z^2} + \frac{a^2m^3}{pz^2}}. \tag{2.42}$$

en ne considérant que la racine positive à la manière de Descartes. On déduit aisément de l'équation (2.42) le centre M de l'ellipse déterminé par

$$\mathsf{IM} = \frac{aom}{2pz}, \tag{2.43}$$

le côté traversant

$$\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2} + \frac{4a^2m^3}{pz^2}}, \tag{2.44}$$

et le côté droit

$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} + \frac{4m}{p}z^2a^2}, \tag{2.45}$$

car comme l'indique Descartes dans sa propre construction « pour le côté traversant, il faut trouver une ligne qui soit a ce costé droit comme *aam* est

[62] Cf. [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 36]. Massimo Galuzzi ajoute néanmoins avec prudence que même si l'équation (2.39) facilite la discussion, elle n'apparaît pas dans la *Géométrie*.

e *pzz* »[63]. Une justification possible pour obtenir cette proportion consiste à identifier dans les équations (2.38) et (2.41) les coefficients en X^2 et x'^2.

Le raisonnement précédent est de nature algébrique et ne s'appuie pas véritablement sur la résolution d'un problème géométrique, il ne nécessite d'ailleurs pas de figure. Néanmoins, il peut être interprété de cette façon, en se fondant par exemple sur la résolution des problèmes plans dans le Livre I de la *Géométrie*[64], et être ainsi employé de façon légitime en Géométrie. D'autre part, il s'inscrit naturellement dans le contexte de l'algèbre considéré comme une théorie des équations qui est developpée par Descartes dans le Livre III de la *Géométrie*. De ce point de vue, cette « divination » de l'analyse cachée par Descartes est ainsi fidèle à l'auteur de la *Géométrie*.

Schooten propose un éclaircissement pour l'analyse cartésienne dans son édition latine de 1659-1661 où il étudie l'ensemble des cas de figure correspondant aux coniques solutions[65]. Dans le cas de l'ellipse, par exemple, en identifiant l'expression de LC^2 tirée de l'équation (2.38) à $\frac{r}{2c}\mathsf{NL} \times \mathsf{LQ}$, où Q désigne le sommet opposé à N, r le côté droit et c le côté traversant, tirée du *symptoma* de l'ellipse, il détermine en usant de la méthode des coefficients indéterminés le centre, le côté droit et le côté traversant de l'ellipse[66].

Pour l'hyperbole, on peut reconstruire le même raisonnement que précédemment, sauf dans le cas où le discriminant de l'équation en x tirée de l'équation (2.41), ou bien de façon équivalente de l'équation (2.38), est négatif, soit $o^2 - 4pm < 0$. L'équation en x tirée de (2.41) n'admet alors pas de solutions réelles. Descartes considère ce cas à la suite des précédents. Il écrit ainsi :

> Mais quand, cette section estant une Hyperbole, on a $+mm$, & que la quantité oo est nulle ou plus petite que $4pm$, on doit tirer du centre M la ligne MOP parallele a LC, & CP parallele a LM ; & faire MO esgale a $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; ou bien la faire esgale a m, si la quantité ox est nulle ; puis, considerer le point O comme le sommet de cete Hyperbole dont le diametre est OP, & CP la

[63] Cf. [Descartes(1637c), p. 403]. Descartes donne d'abord le côté droit puis le côté traversant.

[64] Cf. [Descartes(1637c), p. 374-375].

[65] Il s'agit de la note CC. Cf. [Descartes(1659-1661), I, p. 182-206].

[66] Le cas de l'ellipse est étudié par Massimo Galuzzi qui juge que Schooten « suit fidèlement Descartes, bien que de manière un peu gauche ». Cf. [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 36-37] et [Descartes(1659-1661), I, p. 185-195].

ligne qui luy est appliquée par ordre [...][67]

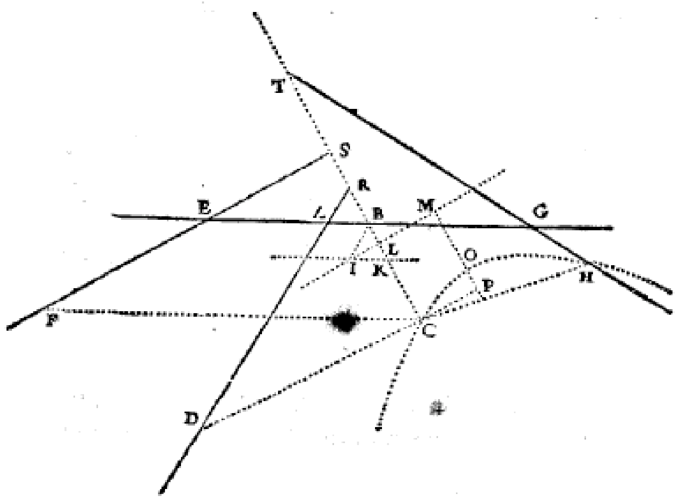

FIG. 2.8 – *Géométrie*(1637), p. 331

LC représentant une ordonnée, pour déterminer le sommet de l'hyperbole, il suffit de déterminer le minimum de l'expression (2.41). Pour ce faire, on peut par exemple identifier l'équation en x

$$m^2 - y'^2 + \frac{oz}{a}x' - \frac{pz^2}{ma^2}x'^2. \tag{2.46}$$

à une équation qui possède une racine double, en s'inspirant de la méthode des normales de Descartes. On trouve ainsi

$$x' = \frac{mao}{2pz} \text{ et } y' = \sqrt{m^2 - \frac{o^2m}{4p}}. \tag{2.47}$$

Comme précédemment, on peut alors déduire le côté droit et le côté traversant[68], bien que nous devions reconnaître que notre « divination » est dans ce cas plus contournée.

[67]Cf. [Descartes(1637c), p. 403-404].

[68]Schooten donne une analyse de même inspiration que celle précédemment décrite dans cas de l'ellipse et donc plus élémentaire que la notre. Cf. [Descartes(1659-1661), I, p. 204-206].

Descartes donne enfin une démonstration synthétique « fort évidente » en prenant l'exemple de l'ellipse qui, bien sûr, se limite à une vérification, ne procurant ainsi aucune explication sur la façon de trouver les expressions du côté droit et du côté traversant ainsi que le centre de l'ellipse[69].

2.3.6 Un exemple numérique

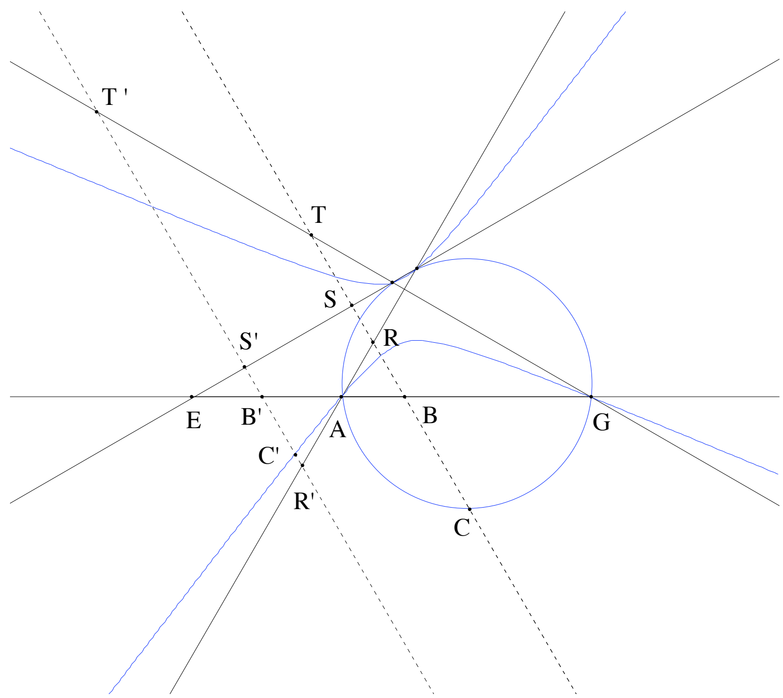

FIG. 2.9 – Le cercle et l'hyperbole solutions du problème de Pappus $\mathsf{CD} \times \mathsf{CH} = \mathsf{CB} \times \mathsf{CF}$

Descartes considère pour terminer un exemple numérique[70]. Prenant comme données numériques[71] $z = 1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$, $e = 2$, $f = 1$,

[69]Cf. [Descartes(1637c), p. 404-405].

[70]Au sujet de cet exemple numérique et de la figure de Descartes, on peut consulter [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 38-45].

[71]Cf [Descartes(1637c), p. 405]. Rabuel donne la mesure des angles des droites et des projections de la figure de la *Géométrie* dans un des exemples qu'il traite dans ses *Commentaires*. Cf. [Rabuel(1730), p. 203-205]. Pour chaque conique solution qui apparaît dans la solution générale de Descartes dans la *Géométrie*, il propose ainsi de nombreux

$g = \frac{2}{3}$, $k = 3$, $l = 5$ qui correspondent, une unité de longueur étant fixée, à la configuration de droites apparaissant dans les figures de la *Géométrie*[72], il obtient pour l'équation du cercle

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2 \text{ ou bien } y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2}. \qquad (2.48)$$

D'autre part, on trouve pour l'équation de l'hyperbole

$$y^2 = -\frac{8}{3}y + \frac{2}{3}xy + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \text{ ou bien } y = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}x^2}. \quad (2.49)$$

Cette hyperbole solution qu'on a représentée dans la figure 2.9 n'est pas celle dont une branche apparaît dans la figure 2.8 et n'est pas mentionnée par Descartes.

On peut remarquer toutefois que la construction de celle-ci correspond bien à celle décrite par Descartes en s'appuyant sur la figure 2.8[73].

2.4 Le problème de Pappus à cinq lignes et la parabole cartésienne

Considérons à présent l'exemple de la parabole cartésienne traitée par Descartes au livre II de la *Géométrie* après sa résolution du problème de Pappus à quatre lignes[74].

2.4.1 La parabole cartésienne solution du problème de Pappus

Que soient données cinq lignes droites dont quatre parallèles AB, IH, ED, GF et à égale distance ($\mathsf{AI} = \mathsf{AE} = \mathsf{GE}$) l'une de l'autre, et une cinquième

exemples en faisant varier la configuration des droites et l'équation du problème de lieu. Cf. [Rabuel(1730), p. 146-253].

[72]Cf. par exemple [figure 2.7, p. 78].

[73]En effet, les coefficients de l'équation (2.49) donnent $m = \frac{4}{3}$, $o = \frac{7}{9}$, $p = \frac{16}{27}$ et $(\frac{7}{9})^2 < 4 \times \frac{16}{9} \times \frac{4}{9}$.

[74]Cf. [Descartes(1637c), p. 408-410]. Pour plus de détails, on peut voir la reconstruction et l'étude donnée par Henk Bos. Cf [Bos(2001), p. 274-276 et p. 325-333]. Hen Bos propose également une conjecture sur l'invention de la parabole cartésienne par Descartes dans [Bos(1992)].

droite GA perpendiculaire aux autres. Qu'on suppose également que les projections du point C sur ces lignes droites se fassent à angles droits et qu'on obtienne ainsi les points B, H, D, F et M. On cherche alors le lieu des points C vérifiant

$$\mathsf{CF} \times \mathsf{CD} \times \mathsf{CH} = \mathsf{CB} \times \mathsf{CM} \times \mathsf{AI}. \tag{2.50}$$

où AI est constante.

Qu'on pose $\mathsf{CB} = y$, $\mathsf{CM} = x$ et $\mathsf{AI} = a$. On se place ainsi dans un repère à coordonnées rectangulaires d'axe AB et d'origine A. On notera de plus que AG représente pour nous l'axe des ordonnées.

Si on suppose que le point C se trouve entre les lignes AB et DE, il est aisé de déduire l'équation

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy. \tag{2.51}$$

Descartes suppose d'autre part dans sa figure, sans le dire, que le point C se trouve au-dessus de la droite AG. Il est clair qu'on obtiendrait la même équation en se plaçant au-dessous de la droite, et donc un arc de courbe géométrique symétrique par rapport à la droite AG du premier obtenu au-dessus.

D'autre part, on peut calculer les équations qu'on obtiendrait en choisissant les quatre autres positions possibles pour le point C[75], à savoir :

$$\text{au delà de } \mathsf{GF} : y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy, \tag{2.52}$$
$$\text{entre } \mathsf{GF} \text{ et } \mathsf{DE} : y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = -axy, \tag{2.53}$$
$$\text{entre } \mathsf{AB} \text{ et } \mathsf{IH} : y^3 + 2ay^2 - a^2y - 2a^3 = -axy, \tag{2.54}$$
$$\text{au delà de } \mathsf{IH} : y^3 + 2ay^2 - a^2y - 2a^3 = axy. \tag{2.55}$$

Ce faisant, on constate bien qu'on obtient deux courbes comprenant chacune deux branches. Il s'agit des deux courbes d'équations respectives, au sens moderne, (2.51) et (2.53) représentées dans la figure 2.11 qu'on obtient en écrivant l'équation du lieu

$$y(a - y)(2a - y) = \pm axy. \tag{2.56}$$

Le vocabulaire adopté par Descartes nous paraît assez significatif. Il nomme ainsi les deux branches symétriques par rapport à l'axe des abscisses « adjointes », tandis qu'il nomme les deux branches symétriques par

[75]Notons qu'en supposant que C se situe au delà de GF, on obtient la même équation que (2.51).

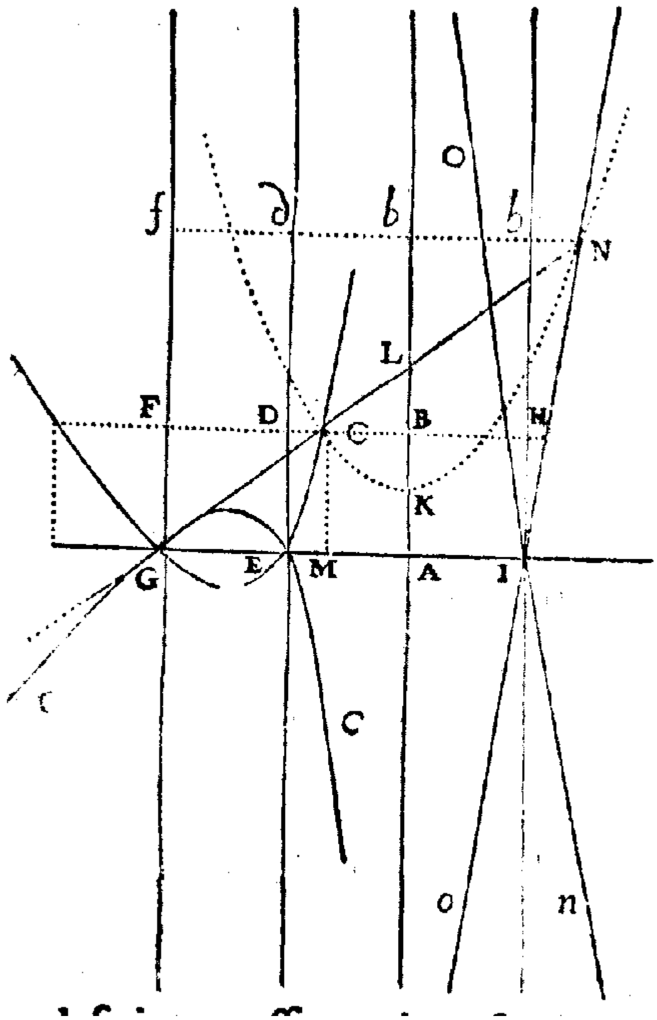

FIG. 2.10 – *Géométrie*(1637), p. 336.

rapport à la droite IH « contreposées » des branches paraboliques[76]. En ce cas donc, il semble reconnaître en un sens plutôt quatre courbes que deux, ces quatre courbes étant obtenues à partir d'une première parmi celles-là par des transformations successives permettant d'obtenir une adjointe et deux contreposées. Bien sûr, de telles transformations, bien que pouvant être interprétées géométriquement, seront des transformations portant sur les équations algébriques obtenues lors de l'analyse du problème. Mais qu'en

[76]Cf. [Descartes(1637c), p. 409-410].

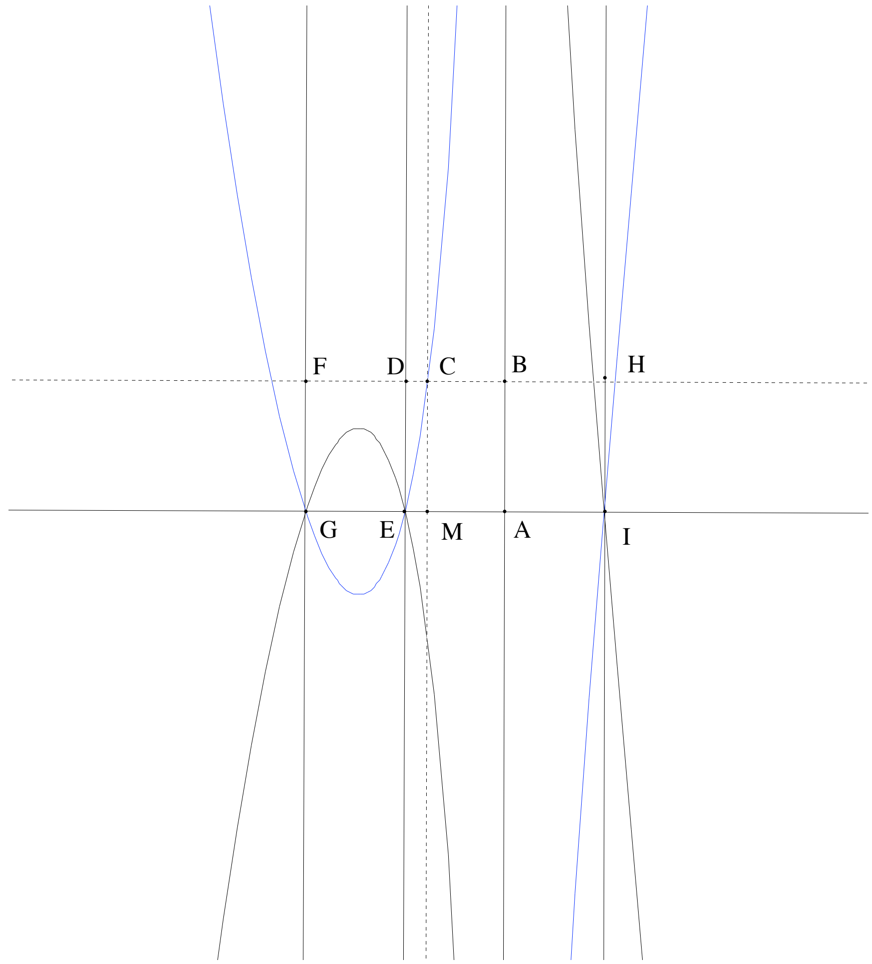

FIG. 2.11 – Les deux courbes solutions du problème de Pappus à cinq lignes

est-il du rapport entre courbe géométrique solution et équation algébrique ?

Plaçons-nous ainsi dans le demi plan supérieur délimité par la droite AG, axe des ordonnées. Autrement dit, pour nous, de façon moderne, considérons seulement les abscisses x positives. Ajoutons qu'une telle considérationest toute naturelle pour un géomètre classique du fait de la symétrie de la courbe géométrique. Ne fait-on pas de même dans le cas des coniques rapportées à leur axe par leur *symptoma* ?

On remarque donc qu'on obtient quatre équations distinctes. Ces équations sont reliées par deux types de changement de variables $x \to -x$ et

$y \to -y$. Pour Descartes qui ne dénote par des lettres que des quantités positives, le premier changement de variable permettrait d'obtenir l'équation algébrique de la courbe pour les abscisses négatives, tandis que le second joue le même rôle pour les ordonnées négatives. Mais on peut aussi interpréter ce changement, eu égard au vocabulaire cartésien précédemment décrit, comme portant sur les quatre branches des deux courbes géométriques.

Ainsi, dans notre exemple, l'équation (2.55) (resp. (2.54)) est obtenue à partir de l'équation (2.52) ou (2.51) (resp. (2.53)) par le changement de variables $y \to -y$, et réciproquement. Ce faisant on obtient trois arcs de la première (resp. seconde) courbe géométrique solution dans la partie correspondant aux abscisses positives[77]. Pour obtenir la courbe géométrique complète, il faut procéder au changement de variables $x \to -x$ dans chacune des équations (2.51) et (2.53). On se rend compte alors que ces deux équations se correspondent par ce même changement de variables, du fait de la symétrie des courbes par rapport à l'axe des y.

Apparaît ici une difficulté résultant du choix cartésien d'écarter les quantités négatives. Deux courbes géométriques distinctes sont exprimées par la même famille d'équations algébriques. La différence provient du fait que chacune de ces équations algébriques correspond pour l'une et l'autre courbe géométrique à des parties différentes du plan. À nouveau, on retrouve la même caractéristique des équations algébriques obtenues par analyse algébrique d'un lieu géométrique. Elle n'exprime ici qu'un arc de courbe pris dans une demi-bande du plan.

Ainsi, là où nous considérons une équation algébrique comme exprimant une courbe géométrique dans le plan, comme c'est le cas pour les équations (2.51) et (2.53) qui expriment de façon moderne chacune une cubique solution, Descartes considère quatre équations algébriques obtenues par les changements de variable $x \to -x$ et $y \to -y$ à partir de l'équation (2.51).

Ajoutons que de tels changements de variable échangeant racines négatives et racines positives de l'équation, soit en x, soit en y, il n'est donc besoin pour Descartes que de considérer la ou les racines positives pour une équation algébrique donnée représentant un arc de la courbe. La théorie cartésienne paraît ainsi bien fondée et cohérente, bien que sujette à des complications et à des risques de confusions.

[77]Cf. [figure 2.10, p. 87].

2.4.2 La description de la parabole cartésienne par mouvement composé

Descartes avait initialement présenté la solution du problème de Pappus à cinq lignes dans ce cas très particulier en disant :

> [...] le point cherché sera en la ligne courbe, qui est descrite par le mouvement d'une parabole en la façon cy dessus expliquée.[78]

Il faisait ici référence à une description par mouvement d'une courbe par l'intersection d'une règle glissante et d'une courbe donnée mue selon une droite[79].

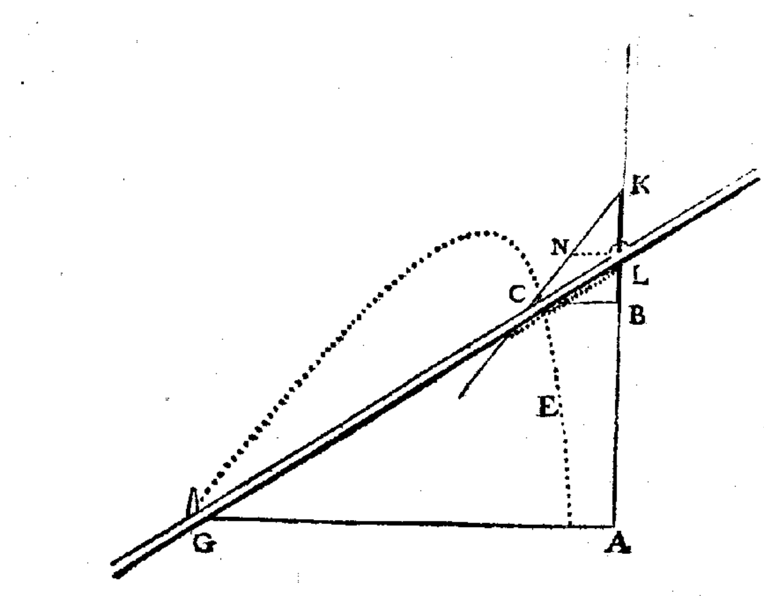

FIG. 2.12 – *La Géométrie*, p. 321

Après donc avoir obtenu l'équation par une analyse algébrique du problème géométrique, Descartes allait montrer que cette équation est celle de la courbe décrite par le mouvement composé d'une droite et d'une parabole. Il écrit ainsi :

[78]Cf. [Descartes(1637c), p. 408]. Pour une étude de la relation entre ces deux modes de donation de la parabole cartésienne suivie d'une tentative de reconstruction de la démarche de Descartes, cf. [Bos(1992)].

[79]Cf. [Descartes(1637c), p. 393-395].

> Aprés cela ie considere la ligne courbe CEG, que i'imagine estre descrite par l'intersection, de la parabole CKN, qu'on fait mouvoir en telle sorte que son diametre KL est tousiours sur la ligne droite AB, & de la reigle GL qui tourne cependant autour du point G en telle sorte qu'elle passe tousiours dans le plan de cete Parabole par le point L.[80]

Posant $\mathsf{KL} = a$ et prenant également le côté droit de la parabole égal à a, Descartes considère alors le point C, situé entre les droites AB et DE, comme étant un point de la parabole. Du fait des triangles semblables GMC et CBL, on a

$$\mathsf{GM} : \mathsf{MC} = \mathsf{CB} : \mathsf{BL} \text{ soit } \frac{2a+y}{x} = \frac{y}{\mathsf{BL}}, \tag{2.57}$$

et

$$\mathsf{BL} = \frac{xy}{2a-y} \text{ d'où } \mathsf{BK} = \frac{2a^2 - ay - xy}{2a-y}. \tag{2.58}$$

D'autre part, le point C appartient à la parabole de côté droit a, d'où

$$\mathsf{BK} : \mathsf{BC} = \mathsf{BC} : a \text{ soit } \frac{\frac{2a^2-ay-xy}{2a-y}}{y} = \frac{y}{a}. \tag{2.59}$$

On déduit ensuite finalement bien l'équation (2.51).

Le commentaire de Descartes qui suit nous paraît essentiel. Il écrit :

> Et il [le point C] peut estre pris *en tel endroit de la ligne* CEG *qu'on veuille choisir*[81], ou aussy en son adiointe $c\mathsf{EG}c$ qui se descrit en mesme façon, excepté que le sommet de la Parabole est tourné vers l'austre costé, ou enfin en leur contreposées $\mathsf{NI}o$, $n\mathsf{IO}$, qui sont descrites par l'intersection que fait la ligne GL en l'autre costé de la Parabole KN.[82]

Ce que Descartes ne dit pas, c'est l'équation qu'on obtiendra en prenant le point C en une position quelconque de la courbe CEG. Il nous suffira de donner la figure 2.13[83] pour montrer que si un tel point C se trouve sur la courbe CEG entre les droites DE et FG[84], et donc que pour nous il admette

---

[80] Cf. [Descartes(1637c), p. 408-409].

[81] C'est moi qui souligne.

[82] Cf. [Descartes(1637c), p. 409-410].

[83] Dans ce cas $\mathsf{GM} = \mathsf{AG} - \mathsf{AM} = 2a - y$ et $\mathsf{BK} = \mathsf{BL} + \mathsf{LK}$. Cette somme au lieu d'une différence explique le changement d'équation.

[84] Cf. [figure 2.10, p. 87].

une abscisse négative, on obtiendra l'équation (2.53) qu'on devra interpréter cette fois-ci comme renvoyant à la courbe CEG et non à la courbe cEGc, comme c'était le cas dans l'analyse algébrique donnée par Descartes. De la même façon, on vérifie qu'on obtient les trois autres branches de courbe, ainsi que l'indique Descartes, comme exprimées par les équations trouvées lors de l'analyse algébrique correspondant à la position du point C donnée relativement aux droites du problème.

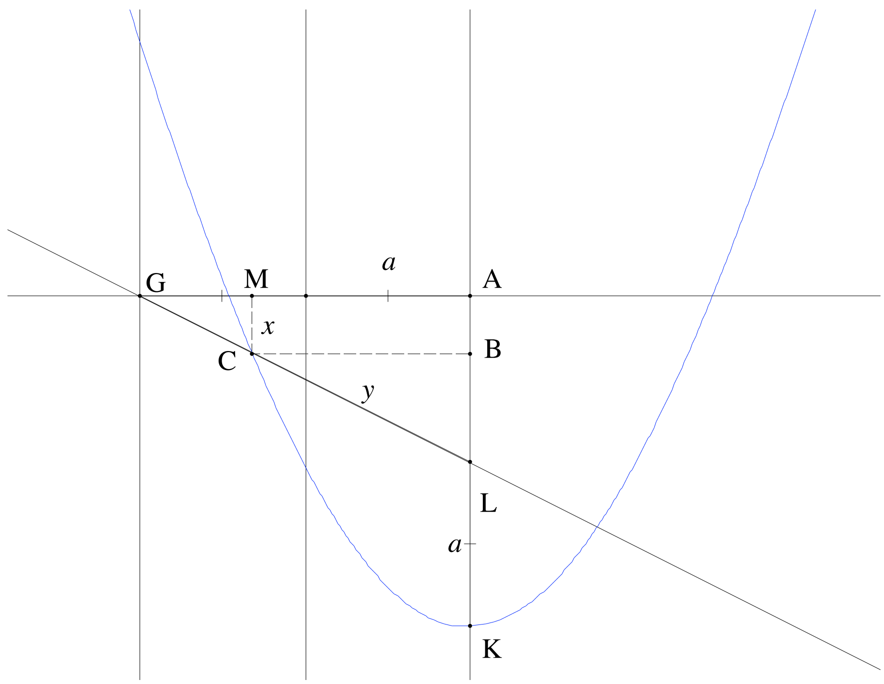

FIG. 2.13 – La description de la parabole cartésienne par mouvement composé

Reste qu'à nouveau la correspondance entre équation algébrique et courbe géométrique apparaît ici bien plus compliquée que ne la présente Descartes et de surcroît en contradiction avec celle correspondant à l'analyse algébrique d'un problème de lieu géométrique. En effet, l'interprétation de l'équation algébrique (2.53) ne renvoie pas à la même cubique solution que dans la solution du problème de Pappus à cinq lignes.

On retrouve ainsi, dans le cas d'une description d'une courbe par mouvement, les mêmes difficultés dans l'établissement d'une correspondance entre équation(s) algébrique(s) et courbe géométrique que celles rencontrées lors de l'analyse algébrique.

Il est toutefois remarquable que Descartes choisisse de donner l'équation algébrique qui peut être lue par nous comme exprimant l'une des deux courbes géométriques solutions entière.

Chapitre 3

Une histoire du problème de Pappus avant la *Géométrie* : 1631-1637

Comme on le sait bien, le problème de Pappus fut suggéré par Golius[1] à Descartes à la fin de l'année 1631[2]. Deux lettres de Descartes à Golius, la première datée par Adam et Tannery de janvier 1632, la seconde, du 2 février 1632, en portent témoignage[3]. Dans la seconde lettre, Descartes se félicite du « favorable jugement » de Golius sur son analyse du problème[4]. La première lettre, bien plus détaillée, contient des informations intéressantes sur la solution donnée par Descartes à la fin de l'année 1631.

3.1 La lettre à Golius de janvier 1632

Dans cette lettre à Golius de janvier 1632, Descartes commence par se reprocher au sujet des lignes courbes solutions du problème « [d'en avoir]

[1]Le personnage de Golius est à de nombreux égards intéressant et mystérieux. Professeur de mathématiques et de langues orientales à Leyde, il est d'autant plus étrange, comme le notent Adam et Tannery, que dans une lettre du 1[er] mars 1638 à Mersenne, Descartes se plaigne que Golius n'entende pas sa Géométrie. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 30].

[2]Au sujet de cette première étude par Descartes du problème de Pappus, cf. [Bos(2001), Chap. 19, p. 271-283].

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), I, resp. p. 232-234 et 236-237].

[4]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 236-237].

seulement expliqué quelques especes, au lieu d'en definir les genres tous entiers », puis indique comme il aurait pu faire[5]. Nous laissons de côté cette première critique qui n'intéresse pas notre propos[6]. Remarquons simplement que la première partie du livre II de la *Géométrie* de 1637 développe ces arguments[7] bien que Descartes, un peu plus loin, soit bien obligé d'avouer qu'il ne pourra pas donner la classification en espèces pour le problème de Pappus à cinq lignes[8].

3.1.1 Deux critiques de Descartes sur sa solution

En revanche, citons *in extenso* les deux autres critiques qui suivent :

> Ie vous diray aussi que i'y [dans la solution] ai mis diverses choses, lesquelles ie sçay bien n'avoir pas suffisamment expliquées, comme lors que i'ay parlé des *quatre moyens de preparer les Equations, afin de les comparer les unes aux autres*, & generalement tout ce que i'ay dit de *la façon d'appliquer les lignes courbes à quelques exemples donnez, où ie devois pour le moins mettre un exemple de cinq ou six lignes droites données par position, ausquelles i'appliquasse la ligne courbe demandée.* Mais i'ay apprehendé la peine d'en faire le calcul. Et pour en parler franchement, il m'a semblé que ie devois laisser encore quelque chose pour exercer les autres, afin qu'ils éprouvassent si la question est difficile. Toutesfois si vous desirez sçavoir la methode dont ie me voudrois

[5]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 233]. Suit un passage rédigé en latin [Descartes(1964-1974), I, p. 233-234]. La classification qui y est donnée par Descartes des courbes solutions du problème de Pappus a pour critère la description par un unique mouvement continu et la détermination des points appartenant à la courbe par des relations simples. Descartes commence ainsi :

> Datis quotcunque rectis lineis, puncta omnia ad illas iuxta tenorem quæstionis relata, contingent unam *ex lineis quædescribi possunt unico motu continuo, & omni ex parte determinato ab aliquot simplicibus relationibus* ;

Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 233].

[6]Sur cette question, on peut consulter [Bos(2001), Chap. 24, p. 335-361].

[7]Cf. [Descartes(1637c), p. 388-396]. Descartes reprend ensuite l'explication de la question de Pappus dans le cas à quatre lignes.

[8]Il ne considère que deux cas : le premier où toutes les droites sont parallèles conduit à une droite, le second où quatre des cinq lignes sont parallèles, tandis que la cinquième les coupe à angles droits conduit à la parabole « cartésienne ». Cf. [Descartes(1637c), p. 407-411] et *supra* [section 2.4, p. 85].

> servir, pour trouver tels exemples, ie m'oblige ou de vous l'écrire, ou plutost de vous la dire, lorsque j'aurai l'honneur de vous voir à Leyde, ou ici [...][9]

De ces deux critiques, la première semble la plus énigmatique. Descartes y indique un procédé pour comparer des équations, ce procédé se décomposant en quatre moyens, et regrette un manque d'explications de sa part[10]. Or, dans la solution donnée par lui au sein de la *Géométrie* de 1637, on ne trouve nulle trace d'un tel procédé de comparaison. De quelle méthode et de quelles équations peut-il s'agir ?

On a vu dans le chapitre précédent que l'équation auquelle conduit l'analyse algébrique de la question de Pappus à quatre lignes dépend de la position du point C[11] qu'on a postulée au commencement de l'analyse. De surcroît, comme les lettres chez Descartes désignent des segments, selon la position du point C, on obtient autant d'équations en x, y, où les signes $+$ en $-$ sont changés, comme l'indique Descartes à plusieurs reprises. Ces équations expriment relativement au repère choisi un arc d'une des deux coniques solutions inclus dans une des régions du plan délimitées par les intersections des quatre droites[12].

Ainsi, en choisissant une position du point C, on montre que les coordonnées du point C vérifient l'équation exprimant un arc d'une conique qu'on peut déterminer et construire ensuite. Néanmoins, les points appartenant à la conique mais pas à l'arc considéré ne vérifie pas nécessairement l'équation précédente.

Le passage de l'arc de conique à la conique entière peut se justifier de deux façon : l'une aisée est géométrique, l'autre plus complexe est algébrique. En effet, géométriquement il est clair qu'un arc de conique solution définit une (unique) conique entière solution. Mais il est plus difficile de montrer qu'une famille d'équations algébriques renvoyant à différentes régions du plan délimitées par les droites du problème correspond à une même conique solution. Comme on l'a vu auparavant, à la différence d'une solution moderne qui à un point C quelconque, donné par ses coordonnées et dont la position

---

[9] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 234].

[10] C'est là un procédé rhétorique courant chez Descartes. Pour répondre à la louange, il n'a de cesse de dénoncer à dessein des défauts passés inaperçus pour son interlocuteur. Cf. par exemple la lettre bien connue à Debeaune du 20 février 1639 : [Descartes(1964-1974), II, p. 510-512]. Nous reviendrons plus tard sur cette lettre.

[11] Cf. *supra* [figure 2.2, p. 56] et [section 2.3.2, p. 58].

[12] Cf. *supra* [section 2.3.4, p. 66].

n'est pas précisée, associe l'équation d'une conique, et par là une conique entière, l'analyse algébrique cartésienne associe une famille d'équations correspondant chacune à une portion de la conique.

On peut alors se demander s'il entre dans le propos cartésien de comparer au moyen de l'algèbre ces différentes équations au sein d'une analyse entière du problème de Pappus à quatre lignes, qui prenne en compte toutes les positions possibles du point C, afin par exemple de reconnaître que deux équations parmi celles-ci définissent la portion d'une même conique. Ou, au contraire, celui-ci considère t-il comme évident l'équivalence entre la donnée d'un arc de courbe et la donnée d'une courbe solutions d'un problème de lieu géométrique ?

Ajoutons que si l'on reconnaît la présence d'une seconde conique solution, la première procédure décrite auparavant revêt un tout autre enjeu. En effet, les équations apparaissant peuvent exprimer l'une ou l'autre conique solution. D'autre part, il va de soi que ces questions s'étendent au cas général du problème de Pappus, et que dans ce cas l'évidence géométrique tend à disparaître du fait de l'absence d'une théorie préexistante, comme celle des *Coniques* d'Apollonius.

Suivant la première hypothèse, on serait fondé à interpréter les « moyens » évoqués par Descartes comme des règles algébriques de transformation portant sur les équations obtenues afin de déterminer si elles appartiennent à une même famille exprimant une des deux coniques solutions. On sait que Descartes a reconnu ne pas avoir donné l'analyse complète du problème de Pappus[13]. Par là, entendait-il qu'il n'avait pas donné toute l'analyse précédemment décrite de l'équation algébrique du lieu qui suit l'analyse géométrique qui conduit à cette équation[14] ?

La deuxième critique que Descartes s'adresse porte sur « l'application de courbes à quelques exemples donnés », dont celui du problème de Pappus à cinq ou six lignes droites. Ici, Descartes semble vouloir traiter un problème « réciproque » du problème de Pappus et bien plus général que celui-ci : étant donné une courbe algébrique, trouver un exemple du problème de Pappus dont elle est solution. Il est clair qu'une démonstration du théorème énonçant

[13]Il est important de signaler que, selon nous, Descartes parle alors du problème de Pappus à quatre lignes. Cf. la lettre à Mersenne du 31 mars 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 83] et *supra* [section 2.3.5, p. 80]. Cf. aussi la lettre de Debeaune du 20 février 1639 : [Descartes(1964-1974), II, p. 511].

[14]Pour une discussion consacrée à ces deux analyses, cf. [Gardies(2001), Chap. V, p. 107-130].

que toute courbe algébrique est pappusienne est inaccessible à Descartes, tout au plus peut-il envisager de donner quelques exemples, initiative qu'il rejette par avance eu égard à « la peine d'en faire le calcul ». Néanmoins, comme on l'a vu, Descartes ne manquera pas d'énoncer un théorème tel, sans démonstration ni exemples au second livre de la *Géométrie* de 1637, comme on l'a vu auparavant[15].

3.2 Les défis cartésiens et les solutions des adversaires : 1632-1637

Dressons à présent succinctement une histoire des défis cartésiens lancés aux autres mathématiciens au sujet du problème de Pappus, qui ponctuent la période de 1632 à 1637. Ceux-ci attestent de la reconnaissance immédiate et pérenne de l'importance de ce problème par Descartes. D'autre part, nous présenterons ensuite les éléments dont nous disposons sur les solutions qui furent apportées à la même époque par les adversaires de Descartes, Fermat et Roberval.

3.2.1 Les défis cartésiens

Descartes écrivait ainsi à Mersenne dans une lettre datée par Adam et Tannery du 5 avril 1632 :

> Vous m'aviez écrit la derniere fois, de quelqu'un [Beaugrand ?] qui se vantoit de resoudre toutes sortes de Questions Mathematiques. Ie seray bien aise de sçavoir si vous lui aurez proposé la question de Pappus, que ie vous avois envoyée : car ie vous diray que i'ay employé cinq ou six semaines à en trouver la solution, & que si quelqu'autre la trouve, *ie ne croiray pas qu'il soit ignorant en Algebre.*[16]

A la suite de son envoi de la solution et de ses deux lettres à Golius, Descartes avait donc communiqué à Mersenne[17] le problème qui lui avait demandé cinq

[15]Cf. *supra* la citation donnée *in* [section 2.3.4, p. 67].

[16]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 244].

[17]Adam et Tannery conjecturent qu'il aurait transmis le problème à Mersenne dès janvier 1632. Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 244].

ou six semaines de labeur[18], peut-être pour traiter l'ensemble des cas possibles au moins dans le cas des quatre lignes[19]. Ainsi, Descartes avait reconnu très tôt l'importance et la généralité du problème de Pappus. De surcroît, il désigne le champ auquel appartient ce problème comme étant celui de la recherche en algèbre appliqué à la résolution des problèmes géométriques.

Dans une seconde lettre qui suit celle précédemment citée, datée par Adam et Tannery du 3 mai 1632, il ajoutait :

> [...] ie n'ay pas bon esprit pour iuger [...] de ce que vous me mandez du probleme de Pappus : car il faut bien aller au delà des sections coniques & des lieux solides, pour le resoudre en tout nombre de lignes données, ainsi que le doit resoudre un homme qui se vante de *nullum problema solvere*[20], & que ie pense l'avoir resolu.[21]

Après avoir critiqué un traité de Viète annoté et commenté par Beaugrand[22], Descartes semble ici répondre à une solution du problème de Pappus à quatre lignes pour la dédaigner, en déplaçant le débat sur le terrain de la solution générale du problème de Pappus, affirmant que lui-même dispose d'une solution répondant à de tels critères. Au delà de la morgue habituelle cartésienne, on ne peut qu'être étonné par la certitude qui prévaut ici. À défaut de restituer indubitablement l'argument qui permet à Descartes en 1632 d'affirmer qu'il a résolu le problème général de Pappus, nous pouvons toutefois rappeler l'argument donné dans la *Géométrie* de 1637.

L'argument donné par Descartes est constitué de deux parties[23]. D'une part, chaque ligne tirée du point C à angle donné peut s'exprimer sous la forme $\pm ax \pm by \pm c$. Soit $n = 2p$ un nombre entier pair supérieur ou égal à 2. L'équation du lieu répondant au problème de Pappus à $2n-1$ lignes est de la forme

$$y \prod_{i=1}^{n-1}(a_i x + b_i y + c_i) = k \prod_{i=1}^{n-1}(a'_i x + b'_i y + c'_i). \tag{3.1}$$

[18] Leibniz rapporte également ce fait d'après le témoignage de Hardy. Cf. l'éclaircissement d'Adam et Tannery : [Descartes(1964-1974), I, p. 235].

[19] C'est la raison alléguée par Leibniz. Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 235].

[20] Descartes fait ici référence à la conclusion de Viète dans son *Isagoge*.

[21] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 245].

[22] Il s'agit du traité publié en 1631 : *Francisci Vietæ ad Logisticem Speciosa Notæ priores.* Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 245 et 248].

[23] Cf. [Descartes(1637c), p. 384-385]

tandis que celle répondant au problème de Pappus à $2n$ lignes est de la forme

$$y\prod_{i=1}^{n-1}(a_i x + b_i y + c_i) = \prod_{i=1}^{n}(a'_i x + b'_i y + c'_i), \tag{3.2}$$

D'autre part, en fixant la quantité y[24], on obtient une équation en x de degré au plus égal à $n-1$ dans le premier cas et n dans le second cas[25]. Du degré de ces équations, Descartes déduit une classification en genres[26] des courbes géométriques en écrivant que les courbes précédentes dont l'équation est de degré $n-1$ ou n sont du genre $p = \frac{n}{2}$. Par exemple, pour $n = 2$, les courbes solutions du problème de Pappus à trois ou quatre lignes, qui sont exprimées par une équation algébrique de degré inférieur ou égal à 2, sont les courbes du premier genre[27].

D'autre part, bien qu'il considère uniquement les cas $n = 2, 4$ et 6, Descartes paraît suggérer dans la *Géométrie*, en particulier dans le paragraphe qui conclut le traité, qu'on peut construire les équations précédentes de degré n ou $n-1$ en intersectant un cercle et une seconde courbe d'ordre $p = \frac{n}{2}$ et décrire ainsi la ligne courbe solution par une construction point par point[28].

Rappelons rapidement les exemples considérés par Descartes. Dans le cas du problème de Pappus à trois ou quatre lignes, les courbes solutions qui sont les coniques peuvent être construites point par point en intersectant un cercle et une droite[29]. Mais une telle construction revêt une importance bien plus grande dans le cas du problème de Pappus à cinq lignes qui conduit à une cubique, courbe du second genre pour Descartes, car de telles courbes ne sont pas connues auparavant et données indépendamment du problème, comme les coniques solutions du problème de Pappus à quatre lignes. Descartes écrit ainsi :

---

[24]Une exception survient dans le cas où les droites données sont parallèles. Dans ce cas, les coefficients a_i en x sont nuls, et on obtient une famille de droites parallèles aux ordonnées. Dans ce cas, on ne peut et il n'est pas besoin de fixer y.

[25]On obtiendrait également une équation en y de degré au plus égal à n dans le problème de Pappus à $2n-1$ ou $2n$ lignes en fixant x. C'est ainsi que procède Descartes pour le problème de Pappus à quatre lignes.

[26]Cf. [Descartes(1637c), p. 396-397]. Cf. également les études de Jules Vuillemin [Vuillemin(1960), p. 108-109] et Henk Bos [Bos(2001), p. 356-357]. Pour l'étude d'un lien entre histoire des mathématiques et histoire de la philosophie manifesté dans l'interprétation donnée par Vuillemin, cf. [Schwartz(2005), p. 16-17].

[27]Cf. [Descartes(1637c), p. 396].

[28]Cf. [Descartes(1637c), p. 372-373]. Cf. également [Bos(2001), p. 372-373].

[29]Cf. [Descartes(1637c), p. 385-386].

> Pour les lignes qui servent aux autres cas, ie ne m'aresteray point a les distinguer par especes ; car ie n'ay pas entrepris de dire tout ; & ayant expliqué la façon de trouver une infinité de poins par ou elles passent, ie pense avoir assés donné le moyen de les descrire.[30]

En effet, les courbes solutions du problème de Pappus à cinq lignes qui sont des cubiques peuvent être construites par points par intersection d'un cercle et d'une parabole. Descartes s'arrête à la construction des équations de degré 5 ou 6 , et donc des courbes solutions du problème de Pappus à 11 et 12 lignes, c'est-à-dire du troisième genre, par l'intersection d'un cercle et de la parabole cartésienne qui est une cubique du deuxième genre[31].

Comme on l'a dit précédemment, les derniers mots de Descartes dans la *Géométrie* suggèrent néanmoins que les constructions précédentes peuvent être généralisées à l'ordre n. Il écrit ainsi :

> [...] puis, outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'un cercle d'une ligne droite, & tous ceux qui sont solides, en coupant aussy d'un cercle une Parabole, & enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composés, en coupant tout de même d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composé que la Parabole ; il ne faut que suivre la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés a l'infini. Car en matiere de progressions Mathematiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouver les autres. Et i'espere que nos neveux me sçauront gré, non seulement des choses que i'ay ici expliquées, mais aussy de celles que i'ay omises volontairement, affin de leur laisser le plaisir de les inventer.[32]

De façon générale, on pourrait dire pour résumer que ce qui fonde la solution du problème de Pappus et de tout problème géométrique pour Descartes est que la construction par points d'un lieu de Pappus de genre p — *i.e.* d'ordre $2p$ ou $2p-1$ — est un problème qu'on peut résoudre car il fait appel à l'intersection d'un cercle et d'une courbe de genre strictement inférieur à p. Connaissant « les premiers termes de la progression », on pourrait ainsi construire point par point et donc décrire les courbes solutions d'un problème

[30] Cf. [Descartes(1964-1974), VI, p. 411]. Cette citation contraste avec le paragraphe concernant les lignes courbes du premier genre : [Descartes(1637c), p. 407].

[31] Cf. [Descartes(1637c), p. 477-484].

[32] Cf. [Descartes(1637c), p. 485].

de Pappus à un quelconque nombre de lignes. On sait que cette théorie sera plus tard critiquée vivement par Fermat dans sa *Dissertation Tripartite*[33].

Bien sûr, une telle hypothèse est essentielle pour reconnaître dans l'équation du lieu obtenue à l'issue de la première analyse géométrique décrite par Descartes non pas un nouveau problème mais la donnée d'une courbe géométrique quelque soit le degré de cette équation.

Enfin, dans une troisième lettre, datée par Adam et Tannery de juin 1632, Descartes, mentionnant Mydorge, insistait à nouveau :

> [...] Mais i'aimerois bien encore mieux qu'ils s'exerçassent à chercher la proposition de Pappus : car de dire que M. Mydorge l'a mise en ses Coniques, c'est ce qui n'est pas facile à persuader à ceux qui l'ont examinée un peu de près, comme i'ay fait, & ie ne pense pas qu'ils le pussent persuader non plus à M. G(olius), qui m'a dit l'avoir autresfois proposée à M. M(ydorge), ainsi que vous pourrez aisément sçavoir, si vous luy en voulez écrire.[34]

Plus tard, à la fin de l'année 1633, en réponse à un défi du mathématicien flamand Stampioen, Descartes proposait une nouvelle fois à la fin de sa lettre la question « proposee a toute la posterite par Pappus », question « qui s'estend plus loin [que les équations cubiques] »[35].

3.2.2 Les solutions des adversaires

Enfin, dans une lettre à Mersenne d'avril 1634 selon Adam et Tannery, Descartes ne manquait pas de suggérer que la question de Pappus fut proposée au « Candidatus de la chaire de Ramus », et donc à Roberval[36]. Celui-ci donna semble-t-il une solution de la question de Pappus à trois et quatre lignes en 1637. C'est du moins ce qu'il affirme dans une lettre à Fermat du 4 août 1640, où il prétend l'avoir résolue « depuis plus de trois ans, quoique, pour n'y rien oublier, il ne [fallût] guère moins de discours qu'aux six premiers livres des *Éléments* »[37]. Carcavi confirme ce témoignage dans sa lettre à Descartes du 24 septembre 1649, sur laquelle nous reviendrons dans la suite :

---

[33]Cf. [Rashed(2001), p. 13 *sq*] et [Bos(2001), p. 418-420]. Pour une étude historique et mathématique de la théorie de la construction des équations jusqu'en 1750, cf. [Bos(1984)].

[34]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 256].

[35]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 278].

[36]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 288].

[37]Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 201].

> [...] & ayant pris vostre enonciation en mesme sens que vous, il m'en a fait voir la desmonstration, ainsi que ie vous ay dit, il y a tres-longtemps, & mesme la publia dés l'année 1637, en l'assemblée de quelques Messieurs qui conferoient des Mathematiques.[38]

Le parti-pris de Roberval dans son traitement du problème à trois et quatre lignes et sa prise en compte, semble-t-il, de la multiplicité des cas de figure paraît radicalement différent de celui de Descartes qui vise à mettre en évidence la généralité de la question dans son rapport à une théorie des courbes algébriques. À la concision et aux omissions du second s'oppose la prolixité et les développements du premier dans leurs solutions respectives du problème de Pappus.

Fermat, de même, avait proposé dans une lettre à Roberval du 20 avril 1637 de lui envoyer ses solutions du lieu *ad tres et quatuor lineas*[39]. De ces deux solutions, seule nous est parvenue la première qui a été publiée par Henry-Tannery au premier tome de leur édition des *Œuvres* de Fermat. Il s'agit d'une solution géométrique synthétique très élégante selon Tannery[40].

La solution de Descartes au problème de Pappus, au moins dans le cas à trois ou quatre lignes, se trouvait donc lors de la publication de la *Géométrie* de 1637 en concurrence avec d'autres solutions classiques apportées par les adversaires de Descartes, Roberval et Fermat. Seule une solution dans le cas général, dont Descartes s'enorgueillissait dès 1632, comme on l'a vu, pouvait donc lui donner l'avantage. Pour ce faire, cette dernière devait s'appuyer comme on l'a vu sur une théorie de construction des équations de degré quelconque.

[38] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 415].

[39] Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 105].

[40] Cette solution a été publiée dans le premier tome des *Œuvres* de Fermat. Cf. [Fermat(1891-1922), I, p. 87-89]. Cf. également [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 59].

Chapitre 4

Les controverses sur le problème de Pappus après la *Géométrie* :1637-1656

4.1 Les affirmations cartésiennes : 1638-1639

Descartes[1], dans deux lettres à Mersenne datées par Adam et Tannery de fin décembre 1637 et janvier 1638, rappelait le caractère proprement nouveau de sa résolution de la question de Pappus[2] n'ayant « pû estre trouvée par aucun des anciens ; & [dont] on peut dire qu'elle ne l'a pû estre non plus par aucun des modernes »[3]. Ce faisant, il opposait sa propre démarche à celle de restitution des œuvres perdues des Géomètres anciens, telles que les *Lieux plans* d'Apollonius, entreprises par Ghetaldi, Snellius ou Fermat[4].

Ainsi une résolution générale et entière du problème de Pappus constituait, au regard des déclarations de Descartes, un des enjeux premiers de la *Géométrie* de 1637 afin d'installer cette dernière en tête du mouvement de modernité mathématique issue d'un nouvel usage de l'algèbre pour la résolution de problèmes géométriques.

[1]Des parties de ce chapitre ont été présentées sous une forme plus ancienne dans [Maronne(2007)] et [Maronne(s.p.)].

[2]Cf. resp. [Descartes(1964-1974), I, p. 478 et 491].

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 478]. On a vu pourtant auparavant que Roberval prétendait en avoir donné une solution en 1637, de même que Fermat, du moins pour lieu à 3 et 4 lignes. Cf. *supra* [section 3.2.2, p. 103].

[4]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 478 n.].

4.1.1 La « composition » des lieux solides

D'autre part, si Descartes dédaignait les restitutions des *Lieux plans* d'Apollonius entreprises par ses contemporains, c'est parce que le second enjeu qu'il poursuivait dans sa résolution du problème de Pappus était de donner la « composition » c'est-à-dire la classification de tous les lieux solides. Ainsi écrivait-il dans la lettre bien connue à Mersenne du 31 mars 1638, où il se pose en Architecte lassé des plaintes des maçons à qui il laisse le travail des calculs, qu'il « [avait mis] dans la question de Pappus tout ce qu'il faut pour les sçavoir de plus pour les entendre[5] ». Dans la *Géométrie*[6], il en avait ainsi déduit ce qu'il nommait dans cette même lettre un « corollaire des lieux »[7]. Du reste, n'avait-il pas déjà clôt sa solution du problème de Pappus dans la *Géométrie* au livre II par la remarque suivant ce même corollaire ?

> Mais le plus haut but qu'ayent eu les anciens en cete matiere a esté de paruenir a la composition des lieux solides : Et il semble que tout ce qu'Apollonius a escrit des sections coniques n'a esté qu'à dessein de la chercher.[8]

La composition des lieux solides donnée par Descartes reposait sur l'identification entre deux « incarnations » de l'objet courbe algébrique : d'une part, les courbes géométriques rapportées par des équations du second degré à un axe coordonné, d'autre part, les courbes géométriques solutions du problème de Pappus exprimées par une équation donnée par analyse algébrique.

On a déjà vu que ces incarnations, telles qu'elles apparaissent dans la *Géométrie*, bien qu'assez proches et présentées comme identiques par l'Auteur, demeurent néanmoins distinctes et présentent des différences de nature mathématique non négligeables, telles que le caractère local ou global de l'expression de la courbe par l'équation. Au contraire, l'objet courbe algébrique tel qu'il s'est cristallisé par exemple dans notre géométrie algébrique moderne apparaît bien comme identique sous ces deux manifestations.

Remarquons ici que ce qui nous paraît sceller la constitution d'un objet mathématique, ce n'est pas seulement la présence de plusieurs incarnations se présentant comme « solutions de problème », « objets d'étude », ou

[5]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 83].
[6]Cf. [Descartes(1637c), p. 407].
[7]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 82 et 84].
[8]Cf. [Descartes(1637c), p. 407].

« instruments de recherche »[9], mais à terme, l'établissement d'un « isomorphisme » entre celles-ci. Il nous semble ainsi que l'élucidation de la question des signes examinée en détail auparavant au sein de la *Géométrie* apparaît comme une condition nécessaire pour la constitution de la courbe algébrique en un objet mathématique.

En effet, seule cette élucidation autorise l'identification entre ses différentes incarnations, comme par exemple celle apparaissant à l'issue de l'analyse algébrique d'un problème de lieu géométrique comme solution, l'équation algébrique exprimant *localement* un arc de courbe géométrique, ou bien celle à l'origine d'un problème des normales comme objet d'étude, l'équation algébrique exprimant alors *globalement* la courbe.

Descartes ne pouvait que renvoyer plus tard Mersenne à la lecture de la *Géométrie* dans une lettre du 9 février 1639 et dédaignait le caractère nouveau de l'*Isagoge ad locos solidos* de Fermat qui lui avait été envoyé par Mersenne le 1^er^ mars 1638 selon Adam et Tannery. Ainsi écrivait-il :

> C'est *Isagoge ad locos solidos* que vous m'auez cy deuant envoyé, & ie n'en desire point voir d'avantage, car ie donne tous ces lieux eu 2 livre de ma Geomet., en y construisant la question de Pappus, ainsy que i'ay auerti en la pa(ge) 334[10] ; & ceux qui y cherchent quelque autre chose, monstrent par la qu'ils ne les entendent pas.[11]

Dans la lettre à Mersenne du 31 mars 1638, Descartes indiquait ensuite encore plus précisément ce qu'il entendait et qui constituait à ses yeux, au sein de la résolution du problème de Pappus, une composition des lieux solides :

> Or par cete seule equation de la page 326[12],
>
> $$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}x^2}$$
>
> a sçavoir en changeant seulement les marques + et −, ou supposant quelques termes pour nuls, ie comprends toutes celles qui peuvent se rapporter à quelque lieu plan ou solide. Ie ne croy pas qu'il soit possible de rien imaginer de plus general, ny plus court,

[9]Cf. *supra* [Introduction Générale, n. 27, p. 21] les catégories adoptées par Enrico Giusti pour qualifier la genèse d'un objet mathématique.

[10]Il s'agit du « corollaire des lieux » précédemment mentionné.

[11]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 495].

[12]Cf. *supra* [équation 2.38, p. 77].

> ny plus clair & facile que cela, ny que ceux qui l'auront vne fois compris doiuent apres prendre la peine de lire les longs escris des autres sur mesme matiere.[13]

Ainsi, le traitement choisi par Descartes de l'équation (2.29) du lieu de Pappus, qui consistait en l'étude de l'équation algébrique (2.38) déduite de la première en procédant à l'extraction de la racine positive, lui paraissait tenir lieu de composition des lieux solides.

4.2 Debeaune et le problème de Pappus

4.2.1 Les regrets cartésiens : la lettre à Debeaune du 20 février 1639

Néanmoins, Descartes reconnaissait à la même époque les défauts de son traitement du problème de Pappus et de la composition des lieux solides qu'il en déduisait. Ces aveux et regrets se manifestent dans la lettre bien connue à Debeaune du 20 février 1639[14] qui suit la réception de l'envoi par ce dernier des *Notes* Brèves.

Descartes y admet ainsi implicitement les mérites et l'avantage de la composition des lieux solides donnée par Fermat qui partait des équations algébriques du second degré à deux inconnues rapportant une courbe algébrique à un axe des coordonnées[15], puisqu'il écrivait à peine deux semaines plus tard, le 20 février 1639, à Debeaune :

> Premierement, au lieu de m'être employé, depuis la page 324 iusques à 334, à construire la question de Pappus, & de n'avoir parlé des lieux apres cela qu'en forme de corollaire, i'eusse mieux fait d'expliquer par ordre tous les lieux, & de dire en suitte que, par ce moyen, la question de Pappus estoit construite.[16]

L'équation (2.38) du lieu de Pappus, que Descartes jugeait parfaitement générale dans sa lettre à Mersenne du 31 mars 1638, présentait ainsi plusieurs défauts sous ce même aspect qui allaient se révéler au cours des discussions et

[13] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 84].
[14] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 510-523].
[15] Pour une étude de l'*Isagoge* et plus généralement de la géométrie analytique de Fermat, cf. [Rashed(2001), p. 9-15] et [Mahoney(1994), p. 72-142].
[16] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 510-511].

controverses. Les deux premiers étaient relevés par Descartes, toujours dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639 :

> De plus, i'ay obmis le cas où il n'y a point d'yy, mais seulement xy, avec quelques autres termes, ce qui donne toujours un lieu à l'hyperbole, dont la ligne que i'ai nommée AB est asymptote, ou parallele à l'asymptote[17]. Et en l'équation de la page 325[18], dont ie fais un modelle pour toutes les autres, il n'y a aucun terme qui soit composé de quantités connuës ; ce qui est bon pour la question de Pappus, à cause qu'il ne s'y en trouve iamais par la façon que ie l'ay reduitte ; mais il y en falloit mettre vn, pour ne rien obmettre touchant les lieux.[19]

Le second défaut consistait en l'absence de terme constant qui résultait d'un choix de simplification de Descartes dans l'analyse algébrique du problème[20]. Quant au premier, il s'agissait de l'oubli du cas où le coefficient de y^2 est nul dans l'équation (2.29). Bien que dans le cas où celui de x^2 ne le fût pas, la solution de Descartes eut pu être modifiée sans grandes difficultés, en échangeant x et y, restait le cas où ne figurait que xy qui correspondait à une hyperbole. Debeaune traitera ce cas de façon exhaustive dans ses *Notes Brèves*[21].

Dans ce dernier cas, en fixant l'une des deux inconnues, on obtient une équation du premier degré et non du second degré. Le fait que le degré de l'équation à une inconnue déduite de l'équation algébrique à deux inconnues d'une courbe géométrique d'ordre n, l'autre inconnue étant fixée, puisse prendre tous les valeurs entre 0 et n, a pu constituer une difficulté pour les lecteurs de Descartes. En effet, la réduction opérée par Descartes, afin de construire les courbes géométriques point par point, des équations algébriques à deux inconnues aux équations algébriques à une inconnue, a pour conséquence de focaliser l'attention sur ces dernières et donc sur la variation de leur degré selon le choix de l'inconnue fixée et la structure de l'équation algébrique à deux inconnues du départ.

L'approche cartésienne d'extraction des racines dans le problème de Pappus, dont on a tenté de montrer qu'elle était adaptée au caractère « local » des

[17] L'asymptote est incorrecte. Il s'agit de la ligne BC et non AC. Cf. [Bos(2001), p. 320, n. 18].

[18] Cf. *supra* [équation (2.29), p. 70].

[19] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 511].

[20] Cf. *supra* [section 2.3.2, p. 62].

[21] Cf. [Debeaune(1649), p. 142-146] et [Debeaune(1638-1648), III, p. 386-389].

équations obtenues lors de l'analyse algébrique d'un problème géométrique, bien qu'elle conduise à des difficultés et apparaisse ainsi aux yeux du lecteur moderne inutile et embarrassée, est néanmoins incontournable.

En effet, bien qu'une équation algébrique implicite à deux inconnues exprime une courbe géométrique, à moins qu'elle ne soit donnée par une construction, par exemple issue du mouvement d'une courbe connue comme dans le cas de la parabole cartésienne, elle ne *donne* pas la courbe, en particulier dans le cas d'un problème de lieu. D'autre part, quoique la génération des courbes par le mouvement d'une courbe connue — droite, cercle, parabole[22] — permette d'obtenir des courbes de degré de plus plus en plus élevés, elle ne permet pas d'obtenir *toutes* les courbes géométriques. En revanche, elle permet d'obtenir par un tracé continu les courbes — parabole, parabole cartésienne — qu'on emploiera pour la construction point par point d'une courbe géométrique quelconque.

C'est donc dans le cas général l'équation explicite exprimant la ou les racines positives de l'équation en x ou y qui donne la courbe par points. Cela nous permet de comprendre le choix de Descartes d'étudier dans sa solution du problème de Pappus à quatre lignes l'équation explicite (2.38), malgré les difficultés qui en découlent, plutôt que l'équation implicite (2.29), fournissant ainsi peut-être le modèle d'une étude du cas général à n lignes.

De façon moderne, la difficulté précédente concernant le degré des équations à deux et une inconnues qui expriment ou donnent la courbe géométrique, peut être palliée dès lors qu'on dispose d'un concept de degré global d'un polynôme à deux variables, qui passe par la reconnaissance du degré des termes du type $x^\alpha y^\beta$. La considération de tels termes dans une équation algébrique pour la classification des courbes géométriques en genre avait d'ailleurs dû poser problème à Debeaune car dans cette même lettre du 20 février 1639, Descartes précisait et rappelait plus loin ce qu'il avait déjà dit auparavant dans la *Géométrie* :

> Quand on a x^2y ou x^2y^2 dans une équation, le lieu est d'une ligne du second genre ; & i'ay mis, en la p. 319[23], que lorsque l'équation ne monte que iusques au rectangle des deux quantitez indeterminées, c'est à dire lors qu'il n'y a que xy, le lieu est solide ; mais que, lors qu'elle monte à la troisiéme ou quatriéme dimension *des deux ou de l'une*, c'est à dire lors qu'il y a xxy, ou bien x^3

[22] Cf. [Descartes(1637c), p. 393-395].
[23] Cf. [Descartes(1637c), p. 392-393].

&c., le lieu est plus que solide.[24]

Il fallait donc observer le degré global de l'équation en x et y pour procéder à la classification, et donc opérer pour ce faire implicitement sur une polynôme à deux variables, tandis que la résolution cartésienne du problème de Pappus à quatre lignes considérait ensuite une équation à une inconnue y dont on extrayait la racine positive.

De la coexistence de ces deux objets — équation à une inconnue et équation à deux inconnues — pouvaient ainsi résulter des tiraillements et des mécompréhensions pour les mathématiciens contemporains qui découvraient la *Géométrie*.

En effet, si la construction point par point d'une courbe géométrique réduisait la question de la construction géométrique d'une équation à deux inconnues à celle de la construction géométrique d'une infinité d'équations à une inconnue, ces mêmes équations étaient construites à nouveau à partir de deux équations à deux inconnues exprimant respectivement un cercle et une droite, parabole, ou parabole cartésienne dans le cas des courbes géométriques des trois premiers genres, c'est-à-dire d'ordre inférieur ou égal à 6.

Ce faisant, Descartes réduisait les constructions d'une infinité d'équations à deux variables à trois constructions réglées portant sur des équations algébriques exprimant les courbes géométriques correspondant aux figures de de la géométrie « ordinaire » euclidienne, c'est à dire le cercle et la droite, mais également deux figures géométriques nouvelles, du moins considérées en tant que figures premières de la géométrie des solides et des sursolides : la parabole et la parabole cartésienne.

Enfin Descartes, revenait dans cette lettre sur sa construction des coniques solutions du problème de Pappus. Il écrivait :

> Et les deux constructions que i'ay données pour l'hyperbole, pages 330 & 331[25] se pouvoient expliquer par une seule. Ie n'ay point donné l'analyse de ces lieux, mais seulement leur construction, comme i'ay fait aussi de la pluspart des regles du troisiéme Livre.[26]

Il semblait ainsi regretter d'avoir masqué l'analyse de la construction du problème de Pappus à quatre lignes. Certes, il avait détourné ainsi les « esprits

[24] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 512].

[25] Cf. [Descartes(1637c), p. 402-403 et 403-404]. Cf. également *supra* [section 2.3.5, p. 76].

[26] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 511].

malins » de sa *Géométrie*, mais par cette omission, il empéchait du même coup de reconnaître les raisons pour lesquelles sa solution du problème de Pappus constituait une composition des lieux solides.

4.2.2 Une question de lieu de Debeaune

À l'automne 1638, Debeaune communiqua une série de questions à la communauté mathématique par l'entremise de Mersenne portant sur des lignes liées à ses recherches en dioptrique. Dans la première de ces questions, il s'agissait de déterminer la tangente à une courbe donnée par une équation, qu'on demandait en outre de déterminer, la donnée de l'équation apparaissant non pas comme donnant une courbe algébrique mais comme posant un problème de lieu géométrique. Nous reviendrons dans le seconde partie consacrée à la méthode des normales sur cette question et celles qui la suivirent, consacrées à des problèmes inverses de tangentes, c'est-à-dire proposant de déterminer une courbe, une propriété de sa tangente étant donnée[27], mais nous souhaitons nous intéresser ici au problème de lieu associé à la première ligne de Debeaune, car il montre de façon exemplaire les deux façons dont on peut interpréter l'équation algébrique d'une courbe géométrique à l'Âge classique.

On trouve une définition de cette première ligne dans un pamphlet de Beaugrand publié par C. de Waard dans un Supplément aux *Œuvres de Fermat*[28] ainsi que dans la deuxième observation consacrée au problème de Pappus dans les *Notes Brèves* de Debeaune[29] qui prend cette ligne comme exemple. Voici ce qu'écrit Debeaune pour présenter et définir sa première ligne :

> Soit en la figure suivante [4.1] une ligne courbe AX, et une ligne droite AY à laquelle tous les points de la courbe soient rapportés

[27]Cf. *infra* [Chapitre 10, p. 345].

[28]Cf. [Beaugrand(1640)]. On trouve un extrait du début de ce pamphlet qui concerne cette ligne dans [Mersenne(1945-1988), VIII, p. 90-92]. Beaugrand donne ensuite la tangente puis la construction de cette courbe en reconnaissant qu'il s'agit d'une hyperbole. Cf. [Beaugrand(1640), p. 109-110]. Nous reviendrons plus en détail sur ce texte dans la suite. Cf. *infra* [section 8.3.1, p. 276].

[29]Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 379-381] et [Debeaune(1649), p. 131-134]. D'autre part, Debeaune reprend cette même courbe dans sa note « sur la page 341 et les suivantes où est comprise l'invention pour trouver les contingentes des lignes courbes ». Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 390-392] et [Debeaune(1649), p. 147-150]. Nous reviendrons dans la suite sur cet exemple. Cf. [section 10.5, p. 365].

> son sommet A de laquelle la propriété soit telle qu'ayant pris quelconque point en icelle comme X duquel soit menée la ligne XY, perpendiculairement ordonnée à la ligne AY et ayant pris une ligne à discrétion comme AB, < AB+ > la ligne AY soit à la ligne AY comme la même ligne AY à la ligne XY.[30]

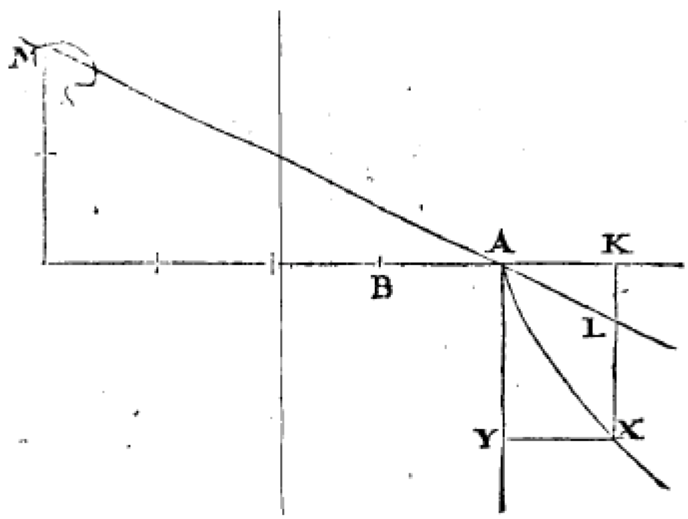

FIG. 4.1 – [Debeaune(1649), p. 132]

Posons AB $= b$, AY $= y$ et XY $= x$. La courbe cherchée vérifie ainsi la proportion

$$b + y : y = y : x \tag{4.1}$$

qui conduit à l'équation

$$y^2 = xy + bx. \tag{4.2}$$

La question de la nature de la première ligne de Debeaune posa bien des difficultés aux mathématiciens participant à la discussion autour des questions de Debeaune. En effet, nous allons voir que, de façon surprenante pour nous, l'ensemble des protagonistes à l'exception de Descartes éprouvèrent bien des difficultés à reconnaître une hyperbole à partir de la proportion (4.1) ou de l'équation équivalente (4.2) qui définissaient la première ligne de Debeaune.

[30]Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 379].

Deux semaines après sa première lettre adressée à Mersenne, le 10 octobre 1638, Debeaune remerciait ainsi Roberval pour

> [son] escript contenant la composition et demonstration de la premiere des lignes courbes que i'auois enuoyees au Reuerend Pere Mersenne, et l'inuention de l'asymptote de l'autre [...]
>
> [...] la premiere des miennes est manifestement du premier genre, [...] et toutesfois n'est pas vne de celles la [les sections coniques]. Ie seray fort aise d'en auoir vostre sentiment.
>
> [...] Au reste, i'ay faict l'analyse de ces deux lignes, mais ie ne vous enuoye que celle de la seconde, d'aultant que vous auéz parfaictement descript la premiere [...][31]

Du reste, Roberval, mais aussi Beaugrand, n'avaient pas plus reconnu la véritable nature de la courbe solution du problème de lieu géométrique donné par Debeaune, le premier parvenant néanmoins à une synthèse géométrique. Au contraire pour Descartes, il s'agissait bien d'une hyperbole donnée par une équation algébrique.

Plus tard, Debeaune allait reconnaître son erreur et s'en débrouiller avec l'aide de Descartes. Il écrivait ainsi dans une lettre du 13 novembre 1638 à Mersenne :

> [...] Ie mets auec la presente la demonstration comment ma premiere ligne courbe est une hyperbole, ce que ie n'auois pas remarqué auant l'aduis de M^r^ Des Cartes[32], et estoit une des difficultés que ie luy proposois, mais ie l'ay esclaircie avec les aultres, comme ie vous ay mandé. Vous la ferés, s'il vous plaist, voir a M^r^ Roberval, et, si vous voulés, a M^r^ de Beaugrand. Vous la pouués mesmes enuoyer a M^r^ Des Cartes, si vous le trouués a propos. Il ne seroit pas bon qu'il vist ce que M^r^ Roberval m'a escript touchant ceste ligne, car il n'auoit pas remarqué, non plus que moy, que ce fust une hyperbole.[33]

Dans sa lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, Descartes écrivait :

> Je suis bien aise que M. de Beaune se soit satisfait touchant ses lignes. il pourra voir si ma reponse s'accorde avec ce qu'il en

[31] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 517-518].

[32] On a retrouvé une démonstration synthétique parmi les papiers de Boulliaud. Cf. [Mersenne(1945-1988), VIII, p. 178-181].

[33] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 526].

> a trouvé ; mais je m'étonne de ce qu'après avoir remarqué que la definition que je donne des lignes du premier genre, convient à la premiere des siennes, il n'a pas pour cela reconnu qu'elle est une hyperbole ; car il est tres certain qu'elle en est une, et je luy en envoyerois la construction, sinon que je veux croire qu'il l'a desja trouvée depuis ma reponse.[34]
>
> [...] Comme luy & le geostaticien me semblent plaisans, en ce qu'ils se vantent d'auoir trouué les deux lignes de M. de Beaune, & toutefois ils n'ont pas seulement sceu connoistre que la premiere, qui est incomparablement plus aisée que l'autre, est vne hyperbole.[35]

On le voit clairement, Descartes domine ici le débat qui porte sur la reconnaissance de la nature d'une courbe géométrique donnée par une équation algébrique — en l'occurence, une hyperbole —. D'autre part, on observe également l'attitude favorable de Descartes, dès novembre 1638, à l'encontre de Debeaune. Descartes, qu'il confie ses solutions au mathématicien de Blois ou qu'il corrige les erreurs de ce dernier, entend le faire avec bienveillance. En effet, il a bien compris, déjà à cette époque, que Debeaune pourra devenir un zélateur précieux de la Méthode en France du fait de ses compétences mathématiques.

Il nous semble ressortir de cet exemple de l'hyperbole que la transformation de l'équation algébrique, posant un problème de lieu géométrique, en l'équation algébrique, donnant une courbe algébrique, bien qu'initiée par Descartes dans sa *Géométrie*, est encore loin d'être complète, du moins pour les mathématiciens qui lui sont contemporains. C'est que vont confirmer d'ailleurs les observations de Debeaune dans les *Notes Brèves*.

[34] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 424].

[35] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 434-435]. La question avait du semblé difficile et indécise à Paris car, plus loin, dans cette même lettre, Descartes revient sur cette question à l'invitation de Mersenne qui craignait que le philosophe se soit mépris. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 444-445].

4.2.3 Les observations de Debeaune dans les *Notes Brèves*

La deuxième observation sur le problème de Pappus

Descartes avait auparavant souligné la généralité de l'équation (2.38) dans une lettre à Mersenne du 31 mars 1638[36], généralité qui outrepassait la résolution du problème de Pappus et faisait de cette équation un modèle pour toutes les équations des courbes du premier genre, qui devait permettre de déterminer et construire aisément les coniques correspondantes en s'appuyant sur la discussion donnée par Descartes des différents cas de figure dans sa résolution du problème de Pappus.

Debeaune allait répondre à cette difficulté en insérant une observation dans les *Notes Brèves*[37] où il prenait l'exemple de sa première ligne pour tâcher d'éclairer « le cas où il n'y aurait point de m en l'équation [qui] pourrait donner de la difficulté ».

Mais pourquoi Debeaune avait-il échoué à reconnaître une hyperbole dans l'équation (4.2) ? En résolvant l'équation en y, suivant en cela la méthode cartésienne dans la résolution du problème de Pappus à quatre lignes, on obtient l'équation

$$y = \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}. \tag{4.3}$$

On reconnaît en effet algébriquement qu'il s'agit d'une hyperbole du fait du coefficient en x^2 dans l'équation (4.3).

En suivant la méthode donnée par Descartes dans sa construction du problème de Pappus[38], il faut donc construire[39] la droite AL qui a pour équation $y = \frac{1}{2}x$. On déduit alors $\mathsf{AL} = \sqrt{\frac{5}{4}}x$. On peut alors appliquer l'analyse dont nous avons proposé une reconstruction auparavant[40] pour retrouver les expressions du côté droit, du côté traversant et la position du centre. En effectuant les changements d'inconnues

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{5}{4}}x \\ y' = y - \frac{1}{2}x \end{cases} \tag{4.4}$$

[36] Cf. *supra* [section 4.1.1, p. 107].
[37] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 378-381].
[38] Cf. *supra* [section 2.3.5, p. 81].
[39] Cf. *supra* [figure 4.1, p. 113].
[40] Cf. *supra* [section 2.3.5, p. 81].

on obtient ainsi pour le côté traversant $\sqrt{20}b$ et pour le côté droit $\sqrt{\frac{4}{5}}b$.

De son côté, Debeaune démontre que cette ligne est une hyperbole en s'appuyant sur la discussion donnée par Descartes de l'équation (2.38) dans sa solution du problème de Pappus à quatre lignes[41]. Il montre ensuite que cette hyperbole a pour diamètre AL et pour ordonnées XL puis en donne la construction[42].

Pour ce faire, Debeaune prend bien garde à différencier[43] dans les expressions données par Descartes du côté droit et du côté traversant la quantité m qui provient du premier changement des données qui conduit à l'introduction de $2m$, et doit donc être égalée à 0 dans le cas présent, et la quantité m qui provient du second changement des données qui conduit à l'introduction de $-\frac{p}{m}$.

En témoignent plusieurs références qui apparaissent dans la version française des *Notes Brèves* de Adam-Milhaud mais disparaîtront dans l'édition latine de la *Géométrie* de 1649. Debeaune écrit ainsi :

> [...] de sorte que ce modèle [l'équation (2.38)] peut servir a construire toute sorte de lieux plans et solides, puisqu'il contient tous les lieux et termes qui se peuvent trouver en leurs équations *posant toutefois que m^2 dans le vinculum ne peut pas < être > le même que m du commencement*[44]

Il paraît ainsi vraisemblable que c'est cette difficulté d'application des formules cartésiennes lorsque $m = 0$ qui fit que le mathématicien de Blois échouât à reconnaître dans un premier temps une hyperbole dans l'équation (4.3). Pourtant, rien n'empéchait Debeaune de reconnaître initialement dans l'équation (4.3) que le coefficient en x^2 était strictement positif. C'est donc que pour lui, comme vraisemblablement pour Roberval et Beaugrand, la reconnaissance d'une hyperbole, sur le modèle des Anciens, ne pouvait se faire qu'en exhibant son centre, son côté droit et son côté traversant.

D'autre part, on peut inférer de tels échecs que l'analyse cartésienne de la construction du problème du Pappus, pour laquelle van Schooten donnerait

[41] Cf. [Descartes(1637c), p. 401].

[42] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 379-381].

[43] Cf. *supra* [section 2.3.5, p. 77].

[44] C'est moi qui souligne. Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 377]. La partie en italiques manque dans l'édition latine de 1649. Cf. [Debeaune(1649), p. 130].Cf. également [Debeaune(1638-1648), p. 377, l. 4-6].

une version seulement dans l'édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661, était ignorée à cette époque par les adversaires de Descartes, voire même par ses disciples.

Une cinquième observation

Debeaune, dans une lettre à Schooten que nous datons de juin 1648[45], recommandait à ce dernier de joindre une dernière observation à ses *Notes Brèves*. Il écrivait ainsi :

> Je désire seulement qu'avant de finir les observations sur les lieux, plans et solides, vous ajoutiez la dernière que je vous envoie à part de cette lettre, afin qu'il ne reste rien à désirer touchant ces lieux.[46]

Comme l'ont montré Adam-Milhaud en comparant les deux copies et la traduction latine de 1649 des *Notes Brèves*[47], cette observation, qui ne figure pas dans la première version des *Notes* de Debeaune, est la cinquième observation dans l'édition latine. Celle-ci répond aux critiques que Descartes s'était adressées dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639[48] au sujet de sa classification des lieux solides déduite de sa solution du problème de Pappus.

Debeaune y développe en particulier le cas où il n'y aurait pas de y^2 dans l'équation du lieu de Pappus, omission avouée par Descartes dans cette même lettre. C'est plus la méthode de Debeaune que la difficulté mathématique qui apparaît dans cette note qui mérite notre intérêt.

Debeaune écrit ainsi :

> Or cette équation ne contient au plus que quatre termes, savoir un où x soit sans y, un où y soit sans x, un où il y ait xy et enfin un où il n'y ait point de x ni de y, de sorte que toute la variété se réduira aux 17 formes d'équations et constructions qui sont de l'autre part.[49]

[45] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 321-322]. Adam-Milhaud datent cette lettre de 1648-1649. Nous renvoyons pour les justifications de cette datation à notre article à paraître : [Maronne(2007)].

[46] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 322].

[47] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 357-358 et p. 364-365].

[48] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 510-511] et *supra* [section 4.2.1, p. 108].

[49] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 387].

Il considère ainsi toutes les équations du type

$$xy \pm bx \pm cy \pm df = 0 \tag{4.5}$$

soit en tout $2^3 - 1 = 7$ équations[50], et 10 autres équations où l'un ou plusieurs des termes précédents sont nuls.

L'observation de Debeaune constitue ainsi une classification complète des hyperboles solutions du problème de Pappus dans le cas où les coefficients en x^2 et y^2 dans l'équation (2.29) sont nuls, seule omission reconnue par Descartes.

Debeaune ajoute enfn pour terminer :

> Il est vrai que nous pouvons réduire la variété des équations à un moindre nombre en changeant les quantités indéterminées l'une en l'autre, et à cette fin, nous avons mis celles qui peuvent recevoir ce changement l'une en suite de l'autre. Même nous eussions pu comprendre les constructions de celles où les quatre termes ne se trouvent pas dans celles où ils sont tous simples. Mais d'autant qu'il eût fallu beaucoup plus de discours, et que la chose eût été moins claire, nous avons mieux aimé en user de la façon ci-dessus.[51]

Au moins pour l'élision des cas où certains des termes de l'équation sont nuls, Debeaune paraît ainsi renvoyer à la démarche cartésienne dans la *Géométrie*, qui reflète une interprétation moderne des équations, mais a pu paraître obscure aux lecteurs de la *Géométrie*, dont lui-même, plus encore à cause de la briéveté du discours cartésien.

Mais à quelle époque Debeaune a-t-il rédigé cette dernière observation ? À la suite de Adam-Milhaud[52], il est possible de proposer des hypothèses. A-t-il rédigé cette note ou un brouillon de celle-ci pour lui seul à la suite de la lettre de Descartes du 20 février 1639, ne la communiquant pas à Descartes, pour ne la proposer à Schooten qu'en juin 1648 ? Ou bien Debeaune l'a-t-il seulement rédigée au printemps 1648 ? Quelle que soit l'époque de la rédaction de cette note, impossible à présent à déterminer, deux questions nous paraissent néanmoins plus importantes. Descartes fut-il informé préalablement par Debeaune de son envoi à Schooten ? Pourquoi Debeaune juge-t-il nécessaire et

[50] Comme les lettres désignent des quantités positives, on ne peut obtenir l'équation $xy + bx + xy + df = 0$.

[51] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 389].

[52] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 357-358].

essentiel en juin 1648 de faire en sorte « qu'il ne reste rien à désirer touchant ces lieux [plans et solides] » ?

La première question portant sur l'implication de Descartes et la seconde sur le contexte mathématique qui apparaît dans la Correspondance sont mises en rapport par un moyen terme : un nouveau commentaire de Debeaune. Comme nous l'avons déjà dit, ce rapport est essentiel pour comprendre la relation qui existe entre les Géométries. Cet exemple, parmi d'autres, témoigne ainsi d'une histoire de la Géométrie cartésienne, affrontée aux controverses et réalisée finalement dans l'édition latine de 1649.

Debeaune, qui devait rencontrer Descartes en France à cette époque[53] , aurait-il pu commettre l'indélicatesse de reprendre les « omissions »de son ami, de surcroît à partir des propres confidences de celui-ci, sans l'en aviser auparavant ? Cela nous paraît peu probable. Aurait-il pu *a fortiori* prendre de lui-même cette initiative ? Il fallait soit que le contexte l'y encourageât fortement, soit qu'il répondît à une sollicitation de Descartes. Nous verrons dans une prochaine section[54] que le renouveau de la polémique sur la solution du problème de Pappus par Descartes, intervenu au printemps 1648, aurait pu fournir un tel contexte.

4.3 La controverse avec Roberval : 1638-1646

On remarque ainsi que des conceptions auparavant présentées par Descartes comme gravées dans le marbre de la *Géométrie* ne laissent pas de changer et d'évoluer au gré de la discussion scientifique souvent vive avec les mathématiciens contemporains[55]. Ceux-ci proposaient à la même époque des théories et des méthodes originales et concurrentes de celle produite par celui qui se voulait l'apôtre de la nouveauté et de la modernité en mathématiques, surpassant les Anciens là ou d'autres ne faisaient que les restituer. Ces méthodes rencontraient du reste parfois plus de succès dans la communauté scientifique à l'exemple de la méthode des tangentes de Fermat, qui allait

[53]Cf. la lettre de Descartes à Debeaune du 5 juin 1648 : [Descartes(1964-1974), V, p. 562]. Il semble de surcroît que la présente lettre de Debeaune à Schooten réponde à une lettre de Schooten transmise par Descartes à cette occasion.

[54]Cf. *infra* [section 4.4, p. 127].

[55]C'est ce dont témoigne par exemple la lettre de Descartes à Debeaune du 20 février 1639 à propos de la composition des lieux solides et de sa solution du problème de Pappus. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 511] et *infra* [section 4.2.1, p. 108].

également influencer les conceptions cartésiennes sur le problème[56].

Face aux prétentions cartésiennes touchant à la résolution du problème de Pappus, allait donc s'élever un certain nombre de voix, de 1637 jusqu'à 1648, pour dénoncer des erreurs et des manquements dans la solution donnée dans la *Géométrie* de 1637. Si celles-ci, au départ de peu de poids, ne feront d'abord que susciter le mépris de Descartes, on verra que l'année 1648 constituera un tournant décisif.

Ce changement s'exprimera par l'arrivée d'une critique nouvelle et profonde de Roberval communiquée en 1649 par Carcavi, relative à l'ignorance supposée de Descartes de la seconde conique solution au problème de Pappus, et par des réactions cartésiennes bien différentes, renvoyant semble-t-il à quelque embarras de l'Auteur vis à vis de la solution qu'il avait tant prisée et vantée dans les années précédentes.

Mais avant d'en arriver là, il nous faut d'abord narrer les épisodes de la controverse avec Roberval depuis 1638 jusqu'à 1646.

4.3.1 La composition des lieux solides

Comme on le sait bien, la controverse entre Roberval[57] et Descartes commença dès 1638[58] et prit pour point de départ la querelle au sujet de la méthode des tangentes de Fermat.

Des doutes et critiques de Roberval au sujet de la solution cartésienne du problème de Pappus, plus précisément pour ce qui regarde la composition des lieux solides, apparaissent à travers la réponse donnée par Descartes à ce sujet dans la lettre à Mersenne déjà citée du 31 mars 1638. Descartes écrit

[56]Cf. *infra* [chapitre 9, p. 303].

[57]Pour une narration des épisodes de la dispute entre Descartes et Roberval, plus particulièrement pour la période 1646-1649, on peut consulter l'étude de Paul Tannery [Tannery(1893), Chap. IV, « La seconde dispute entre Roberval et Descartes »]. Cf. également [Jullien(2006), p. 439-448]. Pour un aperçu synthétique sur Roberval et son œuvre, cf. [Costabel et Martinet(1986), p. 21-31].

[58]On connaît la lettre de Roberval contre Descartes datée par Adam et Tannery d'avril 1638 et se terminant par une recension critique de la *Géométrie* : [Descartes(1964-1974), II, p. 114]. Celle-ci ne comporte pas de remarques sur le problème de Pappus, mais sur une « omission » apparaissant dans la construction des problèmes sursolides par l'intersection d'un cercle et de la parabole cartésienne, et sur une « faute » quant à la possibilité de la factorisation d'un polyôme de degré 3 par $(x-\alpha)^2$ lorsque α est une racine double de celui-ci, question déterminée par l'usage de la méthode des coefficients indéterminés pour le problème des normales. Cf. [Descartes(1637c), p. 418-419]

ainsi :

> Pour ce qui est de connoistre a quel lieu l'equation faite [pour le lieu de Pappus] appartient, que vous dites que M^r de Roberval eut desire que i'eusse mis en ma Geometrie, s'il luy plaist de lire depuis la penultieme ligne de la page 326 iusques a la page 332[59], & de le rapporter au corollaire des lieux, page 334[60], il trouvera que ie les ay mis tous exactement.[61]

Ainsi, l'enjeu que nous avons décrit auparavant portant sur l'équivalence entre la résolution du problème de Pappus à quatre lignes et la composition des lieux solides, enjeu clairement mis en avant par Descartes dans la *Géométrie* et dans la Correspondance, n'avait pas été à cette époque reconnu par Roberval, mais plutôt vraisemblablement dénié par ce dernier.

La controverse avec Roberval allait se poursuivre dans la suite par différentes remarques d'abord de détail et ensuite davantage fondées et pertinentes sur le plan mathématique.

4.3.2 Les figures du problème de Pappus

En 1642, Descartes répliquait avec mépris dans une lettre à Mersenne du 13 octobre :

> Ceux qui reprenent les figures de ma Dioptrique & Geometrie, sont aussi ridicules, et ne font paroistre qu'une ignorance ou malignité puerile. [...] Et de vouloir, page 331[62], qu'on marquast tous les poins ou la ligne droite coupe l'hyperbole[63], c'est vouloir vne chose impertinante, a cause que ces intersections ne seruent de rien au suiet ; & l'hyperbole estant une figure sans fin, on ne la peut jamais tracer toute entiere. [...] *& il n'y a rien en tout cela qui n'ait esté fait auec dessein, ni que je voulusse changer en faisant r'imprimer le liure.*[64]

[59]Descartes renvoie ici à sa construction du problème de Pappus à quatre lignes. Cf. [Descartes(1637c), p. 399-405] et *supra* [section 2.3.5, p. 76].
[60]Cf. [Descartes(1637c), p. 406-407].
[61]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 84].
[62]Cf. [Descartes(1637c), p. 402].
[63]Cf. [figure 4.2, p. 123].
[64]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 583-584].

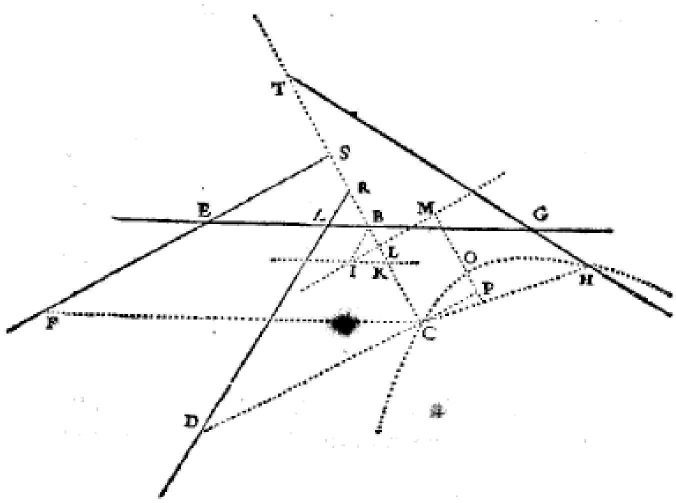

FIG. 4.2 – *Géométrie*(1637), p. 331

Il est très vraisemblable que Roberval fut parmi les détracteurs celui qui fit une telle remarque car elle apparaîtra plus tard, sous une forme différente et encore plus pertinente, sous son nom dans la Correspondance de Descartes avec Carcavi de 1649, mais également sous sa propre plume dans sa Correspondance avec Huygens en 1656, comme nous le verrons dans la suite.

Cette remarque sur la figure donnée par Descartes dans la *Géométrie*, figure gravée par van Schooten, futur éditeur des *Geometria* de 1649 et 1659-1661, est tout à fait juste et pertinente car, de fait, la figure est fausse. Si celle-ci sera reprise dans les éditions suivantes, c'est vraisemblablement parce qu'une nouvelle impression sur bois eût été trop coûteuse.

En effet, il est tout à fait clair que les coniques solutions du problème de Pappus à quatre lignes donné par l'égalité[65]

$$\mathsf{CB} \cdot \mathsf{CF} = \mathsf{CD} \cdot \mathsf{CH}, \tag{4.6}$$

ne peuvent couper les quatre droites données de position AB, AD, EF et GH qu'en quatre de leur six points d'intersection : les points A et G, ainsi que les points d'intersection des droites AD et EF, et des droites EF et GH.

Ces points vérifient bien la condition précédente (4.6) puisqu'ils conduisent à des expressions nulles de part et d'autre de l'égalité. De sur-

[65]Cf. *supra* [égalité (2.13), p. 56].

croît, pour cette même raison, toute autre point d'intersection avec les quatre droites est impossible.

Or, dans les figures 4.2 et 4.3 données par Descartes apparaissent seulement deux de ces points d'intersection : il s'agit des points A et G. Au contraire, les deux points d'intersection de la droite EF avec les droites AD et GH qui sont bien solutions du problème de Pappus donné par l'égalité (4.6) sont tous deux absents de la figure.

De surcroît, le point d'intersection entre l'arc d'hyperbole solution et la droite GH ne se trouve pas là où il devrait être dans la figure 2.8, ce que remarquera plus tard Roberval.

Notons que la remarque faite à Descartes par Roberval en 1642 ne semblait pas porter sur la fausseté de la figure, comme ce sera le cas plus tard, mais bien plutôt sur son caractère incomplet. Quant à la réponse emportée de Descartes, elle étonne car elle n'effleure pas, peut-être par mauvaise foi et à dessein, le véritable enjeu sous-tendu par la critique. Ainsi, dire que les intersections de la courbe solution avec les quatre droites du problème « ne servent de rien au sujet » paraît au mieux exagéré. On verra que Descartes reviendra plus tard plus en détail sur une observation semblable.

Si en effet dans la résolution donnée par Descartes un tel point intervient de façon marginale du fait que Descartes rapporte trois des quatre droites à l'une qui joue le rôle d'un axe des abscisses[66], il en est tout autrement pour une solution géométrique de type projectif utilisant le théorème de l'hexagramme mystique de Pascal ou bien la théorie des transversales présentée par Apollonius au livre III des *Coniques*[67]. En effet, plutôt dans ce cas que de considérer quatre droites données de position, on considère plutôt un quadrilatère auquel seront circonscrites les coniques solutions. On voit ainsi que selon la théorie géométrique invoquée, projective ou algébrique, le problème géométrique initial est reformulé.

4.3.3 L'interprétation du texte de Pappus

La controverse ne s'était toujours pas éteinte en 1646. À cette époque, Roberval semblait toujours poursuivre Descartes de ses questions et critiques.

[66] Cf. *supra* [section 2.3.1, p. 56].

[67] C'est ainsi que procède Newton dans les *Principia*. Cf. le Livre I, Section 5, Lemme XVII et XVIII. Du reste, Newton fera exactement la critique inverse à Descartes. Cf. également [Galuzzi et di Sieno(1989)].

Descartes, dans une lettre à Mersenne qu'on suppose du 2 mars 1646, exigeait de la part de son contradicteur qui prétendait que sa solution était incomplète, de mettre ses critiques et sa solution par écrit. Roberval s'en était en effet auparavant entretenu avec Mersenne qui l'avait rapporté à Descartes. Piqué au vif, ce dernier n'avait pas voulu différer de répondre avec acrimonie :

> *La premiere est que M. de Roberual dit que ie n'ay pas resolu le lieu de Pappus, & qu'il a vn autre sens que celuy que ie luy ay donné*. Sur quoy ie vous supplie tres-humblement de luy vouloir demander, de ma part, quel est cét autre sens, et qu'il prenne la peine de le mettre par écrit, afin que ie le puisse mieux entendre. Car, puis qu'il dit qu'il s'est offert de me le demonstrer, lorsque i'estois à Paris, (comme, de fait, ie croy qu'il m'en a dit quelque chose, mais ie ne sçay plus du tout ce que c'est), il ne me doit pas refuser cette faueur [...][68]

La critique dénoncée par Descartes concerne le sens que Roberval aurait accordé au texte de Pappus. Tannery rapproche dans une note[69] cet extrait d'un autre passage qui apparaît dans une lettre postérieure de Descartes à Mersenne du 12 octobre 1646[70] pour tâcher de préciser la critique de Roberval. Il considère ainsi que celle-ci visait l'interprétation et la traduction par Descartes dans la version latine de Commandin d'un passage obscur de Pappus concernant la composition par les Anciens d'une ligne courbe solution du problème de lieu à plus de quatre lignes. Descartes écrit en effet dans la *Géométrie* que :

> [Pappus] aiouste que les anciens en avoient imaginé une qu'ils montraient y estre utile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere.[71]

Il propose comme « divination » de cette ligne courbe solution une conchoïde de parabole solution du problème de Pappus à cinq lignes, en supposant que le cas le plus manifeste examiné par les Anciens est celui où quatre des cinq droites sont parallèles, la cinquième leur étant perpendiculaire[72]. Il

[68] C'est moi qui souligne. Cf.[Descartes(1964-1974), IV, p. 363].
[69] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 364-366].
[70] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 526].
[71] Cf. [Descartes(1637c), p. 380].
[72] Cf. [Descartes(1637c), p. 408-411] et *supra* [section 2.4, p. 85]. Cette cubique joue un rôle essentiel dans la *Géométrie*. Elle est la seule solution étudiée par Descartes d'un

identifie ensuite la parabole cartésienne à cette courbe solution, visant ainsi rhétoriquement à légitimer et à fonder son choix d'une courbe solution très particulière solution du problème de Pappus à cinq lignes.

Quand on sait que cette courbe est la seule véritablement traitée par Descartes dans cette même solution, et qu'il use de celle-ci pour la construction des problèmes sursolides, une légitimation par les Anciens ne pouvait apparaître qu'utile, bien que non absolument nécessaire. Ainsi, si la traduction de Descartes était sans doute assez libre, la remarque de Roberval ne pouvait que lui apparaître anodine, « rien qui concernast la Geometrie, mais seulement la Grammaire », dirait-il plus tard à Mersenne dans une lettre du 12 octobre 1646[73].

Dans la note que nous avons déjà mentionnée[74], Tannery écarte au contraire l'hypothèse selon laquelle Roberval reprocherait à Descartes de n'avoir donné qu'une seule des deux coniques solutions du problème de Pappus à quatre lignes, même s'il pense que Roberval devait avoir reconnu sans peine ce défaut de la solution cartésienne alors que celui-ci approfondissait la question, ainsi qu'en témoigne une remarque de ce dernier transmise par Carcavi à Descartes dans sa lettre du 9 juillet 1649[75]. Néanmoins celui-ci n'aurait guère attaché d'importance à cet oubli[76].

Plus tard, dans une lettre datée par Adam et Tannery de septembre 1646 et adressée à Mersenne contre Descartes, Roberval persistait en indiquant à la fin de celle-ci que

> [...] dans sa Geometrie imprimée, on [pouvait] luy faire le mesme reproche touchant le lieu ad tres & quatuor lineas qu'a

problème de Pappus à cinq lignes. Il donne d'autre part la normale d'une courbe cubique plus générale mais conceptuellement semblable. Cf. [Descartes(1637c), p. 415 et 420-422]. Il emploie ensuite cette même courbe pour construire les problèmes « sursolides » — *i.e* ceux conduisant à des équations de degré 5 ou 6 — en l'intersectant avec un cercle. Cf. [Descartes(1637c), p. 477-484]. Pour plus de précisions, on peut consulter l'étude de Massimo Galuzzi [Galuzzi(1996)] ainsi que [Bos(2001), p. 368-372].

[73] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 526].

[74] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 365].

[75] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 373-374] et [section 4.5, p. 138].

[76] Tannery ajoute d'ailleurs à titre de justification :

> Mais, quelqu'important que nous puisse paraître aujourd'hui ce défaut, ce n'était point une de ces erreurs tangibles sur lesquelles les géomètres d'alors, cherchaient, dans leurs disputes, à s'attaquer.

Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 365].

faict, sur le mesme suiect, Apollonius à Euclide.[77]

Ainsi, Descartes n'aurait « pas fait la synthèse complète du lieu à 3 ou 4 lignes, mais seulement celle d'une partie de ce lieu, prise au hasard, et cela, assez peu heureusement »[78]. Roberval s'offrait ensuite de satisfaire le Père Mersenne sur ce dernier point, ce qu'il ne fit jamais à notre connaissance. Il apparaît en filigrane dans cette citation de la Préface du Livre I des *Coniques* une question importante qui va réapparaître en 1648 assortie d'une accusation contre la solution cartésienne : celle de la complétude de la solution cartésienne.

Que conclure de ces épisodes de la controverse entre Descartes et Roberval, présentant des critiques assez anodines à l'exception d'une, sur les intersections de la courbe solution avec les quatre droites du problème et de la dernière implicitement présentée néanmoins ? Il semble que durant toutes ces années, bien que Roberval ne fût pas convaincu par la solution cartésienne, bien qu'il ait semble-t-il disposé selon son témoignage d'une solution au problème à quatre lignes, comme Fermat, à aucun moment il n'ait pu véritablement mettre Descartes en difficulté sur un point mathématique d'enjeu important, quoiqu'il ait promis par ailleurs. Une telle situation semble donc montrer que Roberval fût incapable durant cette époque de comprendre véritablement en profondeur le problème de Pappus, et par là les défauts de la solution cartésienne. Nous allons voir qu'au contraire la situation va changer radicalement en 1648 avec une nouvelle solution apportée au problème de Pappus à trois et quatre lignes par Pascal.

4.4 La controverse de 1648

4.4.1 La lettre de Descartes à Schooten de mars-avril 1648

Dans une lettre à Schooten au sujet de l'édition latine de la *Géométrie* que nous datons de mars-avril 1648[79], Descartes répondait négligemment à Schooten au sujet des *Notes Brèves*[80] car il savait que Debeaune y pourvoi-

[77]Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 507-508].

[78]Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 508, n].

[79]Nous renvoyons à nouveau pour les justifications de cette datation à notre article sous presse [Maronne(2007)].

[80]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 575].

rait[81].

Cette première question de Schooten portait sur le vocabulaire. Debeaune use en effet dans son commentaire du terme « axe » au sens moderne, entendant par là pour reprendre les termes de Descartes une ligne droite à laquelle tous les points de la courbe sont rapportés[82]. Schooten, qui procédait à la traduction latine de l'écrit du géomètre de Blois, ne l'avait pas compris, entendant ce même terme au sens classique : dans Apollonius, l'axe d'une conique est en effet, parmi tous ses diamètres, celui qui coupe les ordonnées à angles droits[83]. Debeaune, dans une lettre du juin 1648[84] et Descartes dans cette même lettre[85] dissipaient sans difficultés ce malentendu.

Descartes développait ensuite bien plus précautionneusement des arguments contre une « remarque de N. », proposant même à Schooten d'insérer un avertissement dans son édition latine :

> *Pour la remarque de N., elle est impertinente, encore qu'elle ne soit pas tout à fait fausse.* Car on sçait bien que, les mesmes lignes droites étant posées & la question n'estant point changée, *le lieu ne peut pas estre tout ensemble au cercle & à l'hyperbole.* Et il ne faut pas aussi avoir grande science pour connoistre que la ligne courbe doit passer en cet exemple par les quatre intersections qu'il remarque. Car, dans la figure de la page 325[86], on voit à l'œil que, puisque CB multipliée par CF doit produire vne somme égale à CD multipliée par CH, le point C se rencontre necessairement aux quatre intersections susdites, à sçavoir : en l'intersection A, pour ce qu'alors les lignes BC & CD sont nulles, & par consequent,

[81] Cf. la lettre de Debeaune à Schooten de juin 1648 : [Descartes(1936-1963), III, p. 321-322]. Debeaune répond àux mêmes questions de Schooten sur les *Notes Brèves* qui semblent d'ailleurs lui avoir été transmises par Descartes. Cf. en particulier la lettre de Descartes à Debeaune du 5 juin 1648 : [Descartes(1964-1974), V, p. 563-564]. Dans cette lettre, on apprend que Schooten avait écrit à Descartes, avant que celui-ci ne parte pour la France, en joignant à sa lettre une enclose et un livre pour Debeaune. Il s'agit vraisemblablement selon Adam et Tannery [Descartes(1964-1974), V, p. 563-564] du traité de Schooten [Schooten(1646)] intitulé *De organicâ conicarum* auquel est joint un appendice *De cubicarum æquationum resolutione* que l'on retrouve dans la seconde édition latine [Descartes(1659-1661), I, p. 345-368].

[82] Cf. [Descartes(1637c), p. 414].

[83] Cf. [Apollonius(1959), Déf. VII, p. 4].

[84] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 321-322].

[85] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 575].

[86] Cf. [Descartes(1637c), p. 398]. Il s'agit de la figure représentant un cercle solution qui passe par les points A et G. Cf. [figure 4.3, p. 129].

estant multipliées par les deux autres, elles composent deux riens, qui sont égaux entr'eux ; tout de mesme, en l'intersection G, les lignes CH & CB sont nulles ; & ainsi, en l'vne des deux autres intersections qui ne sont pas marquées dans la figure, CD & CF, & dans l'autre, CH & CF sont nulles. Mais on peut changer la question, en sorte que le mesme n'arriue point ; et cela n'empesche pas que, voulant vser de brieueté et rapporter tous les cas à vn seul exemple, comme i'ay fait, (à sçavoir, ie les ay tous rapportéz à l'exemple proposé dans la figure de la page 311[87]), ie n'aye eu raison, apres avoir donné le vray lieu de cet exemple, qui est vn cercle, d'y appliquer aussi l'hyperbole, afin que, toutes les lettres IKLBCD &c. s'y trouvant aux mesmes lieux qu'auparauant, on pust entendre le peu que i'en voulois dire, plus facilement qu'on n'eust fait si la figure eust esté changée. Il me semble donc que vous ne deuez point y mettre d'autre figure ; car il faudroit aussi changer le discours, & la solution en seroit plus embroüillée. *Mais vous pourrez mettre cet aduertissement dans la page 331*[88]*, ou quelqu'autre semblable.*[89]

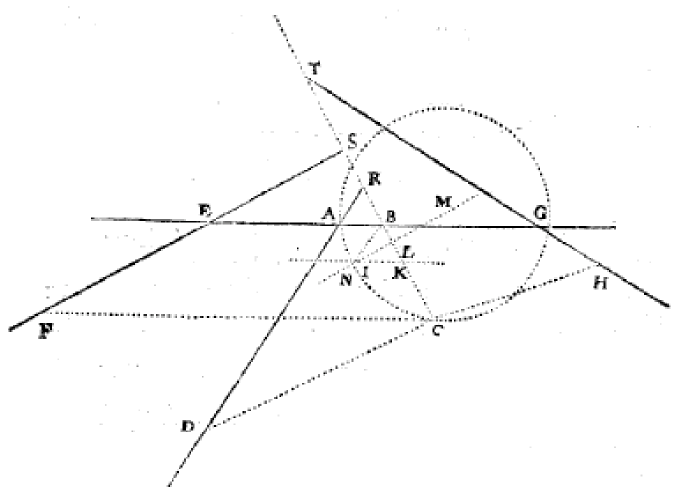

FIG. 4.3 – *Géométrie*(1637), p. 325

[87]Cf. [Descartes(1637c), p. 384] et [figure 2.2, p. 56].
[88]Cf. ([Descartes(1637c), p. 403]
[89]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 576].

Si auparavant Descartes avait répondu dédaigneusement aux attaques contre sa solution du problème de Pappus, il répond ici à la fois de façon bien plus nuancée et plus détaillée à cette remarque « pas tout à fait fausse », et il arrive même à proposer d'insérer un éclaircissement figurant avec quelques modifications et additions dans les éditions latines de la *Géométrie*[90].

La remarque est double. D'une part, le lieu de Pappus peut-il être composé d'une hyperbole et d'un cercle ? De façon plus générale, est-il composé de deux coniques ? D'autre part, la figure faisant apparaître le cercle solution de la page 325[91] n'est-elle pas incomplète du fait que la ligne courbe ne passe pas par les quatre points d'intersection des quatre droites ? N'est-il pas abusif également d'user de la même figure dans le cas du cercle et de l'hyperbole ?

Comme l'indique Tannery, Roberval avait fait à Descartes un reproche préfigurant la seconde remarque en 1642[92] et on peut donc penser à la suite de Adam et Tannery que « N. » peut désigner Roberval. La réponse de Descartes portant sur les quatre points d'intersection des quatre droites données de position du problème qui appartiennent à la ligne courbe solution est tout à fait claire. À nouveau, comme en 1642, celui-ci indique que là ne réside pourtant pas l'enjeu du problème de Pappus et qu'une remarque sur les points d'intersection de la courbe solution avec les droites du problème est anodine.

L'hypothèse que l'ensemble de ces remarques proviennent de Roberval est renforcée par un autre épisode apparaissant dans la Correspondance du printemps 1648 avec Mersenne. Le 4 avril 1648, Descartes, furieux, se plaignait dans une lettre à Mersenne de l'envoi par celui-ci de remarques de Roberval à Schooten contre sa *Géométrie*[93] :

> *Au reste, ie n'ai pû lire sans quelque indignation ce que vous me mandez auoir escrit au S^r. Schooten, touchant ma Geometrie*, & vous m'en excuserez, s'il vous plaist. I'admire votre credulité : vous auez vû plusieurs fois tres clairement, par experience, que ce que le Roberval disoit contre mes escrits estoit faux & impertinent, & toutefois vous supposez que i'y doy changer quelque chose, *a cause que Roberval dit qu'il manque quelque chose en ma solution du lieu ad 3 & 4 lineas*, comme si les visions d'vn tel

[90] Cf. [Schooten(1649b), p. 196-197] et [Schooten(1659b), I, p. 224-225].

[91] Cf. [figure 4.3, p. 129].

[92] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 580]. Nous avons mentionné dans la section précédente cette critique.

[93] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 141-144].

> homme deuoient estre considerables. Ma Geometrie est comme elle doit estre pour empescher que le Rob. & ses semblables n'en puissent medire sans que cela tourne a leur confusion ; car ils ne sont pas capables de l'entendre, & ie l'ay composée ainsi tout a dessein, en y omettant ce qui estoit le plus facile, & n'y mettant que les choses qui en valoient le plus la peine. Mais ie vous avouë que, sans la considération de ces esprits malins, ie l'aurois escrite tout autrement que ie n'ay fait, & l'aurois renduë beaucoup plus claire ; ce que ie feray peutestre encore quelque iour, si ie voy que ces monstres soient assez vaincus ou abaissez.
>
> Ce qui est cause que ie n'ay point voulu voir la version de Schooten, encore qu'il l'ait desiré ; car, si i'eusse commencé a la corriger, ie n'eusse pû m'empescher de la rendre plus claire qu'elle n'est, ce que ie ne désire point. Et pource que Schooten n'est pas sçavant en latin, ie m'assure que sa version sera bien obscure, & qu'il y aura peutestre des equiuoques, qui donneront des prétextes de cauillation à ceux qui en cherchent ; mais on ne pourra me les attribuër, a cause que son latin n'est point du tout semblable au mien.[94]

Descartes — aurait-il reconnu dans la remarque de Roberval un défaut dans sa solution du problème de Pappus qui lui avait échappé ?— se défaisait ainsi aux dépens de Schooten du fardeau des polémiques et controverses qui n'avaient pas cessé depuis la publication de la *Géométrie* de 1637. Non pas qu'il n'eût point vu la version de ce dernier comme il le prétendait, ajoutant, menteur maladroit, que l'autre l'avait pourtant désiré. La lettre de Descartes à Schooten témoigne en effet du contraire. Au fond, il s'agissait pour Descartes une fois encore de prendre masque et bouclier qui pût préserver sa *Géométrie* des « esprits malins » et de leurs accusations.

Après avoir formé le projet d'une nouvelle publication remaniée de la *Géométrie*, répondant aux controverses apparues lors de la Correspondance et apportant des additions et des éclaircissements, Descartes avait abandonné ce projet à ses disciples, dont Schooten et Debeaune, non sans pour autant conserver la main mise sur cette initiative, dont il avait connaissance, à notre sens régulièrement, par des communications de notes et commentaires qui lui étaient procurées par Schooten, et sur lesquelles ils intervenaient, en suggérant des corrections, voire en en donnant lui-même comme on le voit

[94] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 143].

ici.

Ces deux remarques sur la nature de la solution du lieu de Pappus nous semblent démontrer une certaine maîtrise et compréhension du problème mathématique sous-jacent de la part de Roberval. La solution est en effet bien donnée par un système de deux coniques, comme nous l'avons vu dans notre solution moderne[95] ce que Descartes passe sous silence — par négligence ou à dessein — dans sa propre résolution du problème. On a ainsi constaté plus précisément l'existence d'une seconde conique solution qui est une hyperbole[96].

En effet, comme l'observe Tannery[97], Descartes répond à tort que « le lieu ne peut estre tout ensemble au cercle et à l'hyperbole ». Cette réponse erronée contraste avec le soin apporté par Descartes a joindre un avertissement qui sera reproduit plus tard par Schooten dans l'édition latine de 1649. Celui-ci n'aurait-il pas considéré tous les cas de figure possibles et ce faisant n'aurait pas fait la synthèse complète du lieu ?

Toujours est-il que cette remarque mathématiquement plus profonde semble poser plus de problèmes à Descartes qui abandonne, pour une fois, la morgue dont il a fait preuve jusqu'à cette lettre à l'égard de ceux qui critiquaient sa *Géométrie*[98]. Bien sûr, ce changement d'attitude ne peut que nous interroger sur les raisons qui poussent Descartes à en rabattre, et cela d'autant plus qu'on le compare aux dénégations opposées à Mersenne dans la lettre du 4 avril 1648[99] et à Carcavi dans celle du 17 août 1649[100], lorsque ceux-ci interrogent le philosophe au sujet de sa participation à l'édition latine de la *Géométrie*.

Considérons à présent plus en détail l'éclaircissement apporté par Descartes dans cette même lettre.

4.4.2 L'éclaircissement de Descartes

Nous citons *in extenso* la traduction française de cet éclaircissement donnée par Adam-Milhaud :

[95] Cf. *supra* [section 2.1, p. 49].
[96] Cf. *supra* [section 2.3.4, p. 73].
[97] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 580].
[98] Cf. *supra* [section 4.3, p. 120.].
[99] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 143].
[100] Cf [Descartes(1964-1974), V, p. 392].

> Il faut noter que l'hyperbole est appliquée ici à une position des lignes, avec laquelle cadre seulement le cercle, comme on le montrera peu après : ce qu'on a fait par amour de la clarté et en même temps de la briéveté ; car il est plus facile d'entendre ce qui est écrit ici, quand les notations (ou les lettres) A B C D, etc., se trouvent aux mêmes endroits dans toutes les figures, que s'il fallait les chercher tantôt sur l'une, tantôt sur l'autre. Et il ne s'ensuit non plus de là aucune erreur : car la question n'a pas encore été déterminée. Elle ne l'est qu'à la page 333[101] ; car il peut se faire, en y changeant peu de chose, que l'hyperbole cadre avec la même position des lignes, avec laquelle coïncide le cercle, et une hyperbole qui ne passe pas par des intersections des lignes données, de la manière dont elle est représentée ici : comme, par exemple, si le rectangle $\mathsf{FC} \times \mathsf{CD}$ doit être plus grand que le rectangle $\mathsf{CB} \times \mathsf{CH}$ d'une quantité donnée, ou quelque chose de pareil. Par un même amour de briéveté, on ne fait pas non plus mention ici d'hyperboles opposées, non pas que l'auteur les ignore, attendu que peu après, à la page 336[102], il a développé quatre lignes voisines de l'hyperbole qui sont opposées entre elles. Mais il faut noter que, dans sa *Géométrie*, il a presque toujours négligé ce qui est plus facile, mais n'a rien omis de ce qui est plus difficile en ce qu'il a entrepris de traiter ; et c'est pour cela qu'il a mieux aimé représenter ici une position de lignes, avec laquelle cadre un cercle, que d'autres positions, avec lesquelles cadreraient des ellipses ou des hyperboles, parce que l'invention de celle-là offre une particulière difficulté...[103]

Au début comme à la fin de cette note, Descartes semble renvoyer à la présence d'*une seule* conique solution, le cercle, qu'il associe ainsi à une position donnée des lignes, et qui passe par les quatre points d'intersection précédemment décrits des quatre lignes données de position du problème. Rien donc ici au sujet d'une seconde conique solution, bien au contraire.

Il est vrai néanmoins que Descartes renvoie aux deux conchoïdes de parabole qui sont solutions du problème de Pappus à cinq lignes où quatre des

[101] Précisément, quand Descartes « [explique] les quantités données par nombres » et déduit l'équation (2.48) du cercle. Cf [Descartes(1637c), p. 405-406]. Cf. également *supra* [section 2.3.6, p. 84].
[102] Cf. [Descartes(1637c), p. 408].
[103] Cf. [Descartes(1936-1963), IV, p. 319].

cinq droites sont parallèles, la cinquième leur étant perpendiculaire[104] qu'il nomme « adjointes » car elles sont obtenues à partir de la même parabole selon que « le sommet est tourné vers [l'un ou] l'autre côté ». Descartes les décrit comme étant formée chacune par deux lignes « contreposées » qui proviennent de chacun des deux arcs de parabole symétriques par rapport à l'axe[105]. Toutefois, il paraît plutôt insister sur le fait que chacune est formée comme l'hyperbole de deux branches qu'il a bien considérées. De surcroît, la configuration très particulière ici choisie et la génération de la ligne courbe solution par le mouvement d'une parabole induisent, nous semble-t-il, une reconnaissance plus aisée par Descartes de la seconde courbe solution.

Henk Bos a ainsi donné une reconstruction de l'invention par Descartes en 1632 de la solution du problème de Pappus à cinq lignes[106] qui peut s'accorder avec notre argument. Descartes aurait déduit cette solution de celle du problème de Pappus à trois lignes dont deux sont perpendiculaires à la troisième[107] en employant sa méthode de description d'une courbe par l'intersection avec une règle pivotante d'une première courbe se déplaçant le long d'une règle fixe, qui est donnée par lui dans la *Géométrie*[108]. Or, dans ce cas, on a en effet deux paraboles d'équations $y(a-y) = \pm cx$ qui sont solutions du problème de Pappus à trois lignes[109] $d_1d_2 = cd_3$, et apparaissent naturellement du fait de la symétrie de la configuration 4.4.

Un géomètre — plus encore un Grec — considérerait sans doute la précision de la seconde parabole comme superflue puisque c'est la « même » parabole, de même qu'il aurait jugé incongru de mentionner deux bissectrices quand l'usage n'en retient qu'une, mais il en est tout autrement dans le cas général du problème de Pappus où les deux coniques solutions peuvent être de nature distincte.

Descartes justifie d'autre part son choix d'une unique figure par un souci conjugué de simplicité et de généralité et l'on retrouve ici la même affirmation qui sous-tend la solution donnée dans la *Géométrie* de 1637. Il affirme en effet avoir donné une solution générale et entière car il a usé d'une position des lignes qui, bien que très particulière, puisqu'elle conduit à un cercle, est

---

[104] Cf [Descartes(1637c), p. 408-411] et *supra* section [2.4, p. 85.]
[105] Cf. [Descartes(1637c), p. 409-410].
[106] Cf. [Bos(2001), p. 274-278].
[107] Cf. [Bos(2001), p. 277-278].
[108] Cf. [Descartes(1637c), p. 393-395] et [Bos(2001), p. 278-281].
[109] Deux hyperboles d'équations $xy = \pm c(a-y)$ sont aussi solutions du problème de Pappus à trois lignes $d_1d_3 = cd_2$. Cf. [figure 4.4, p. 135].

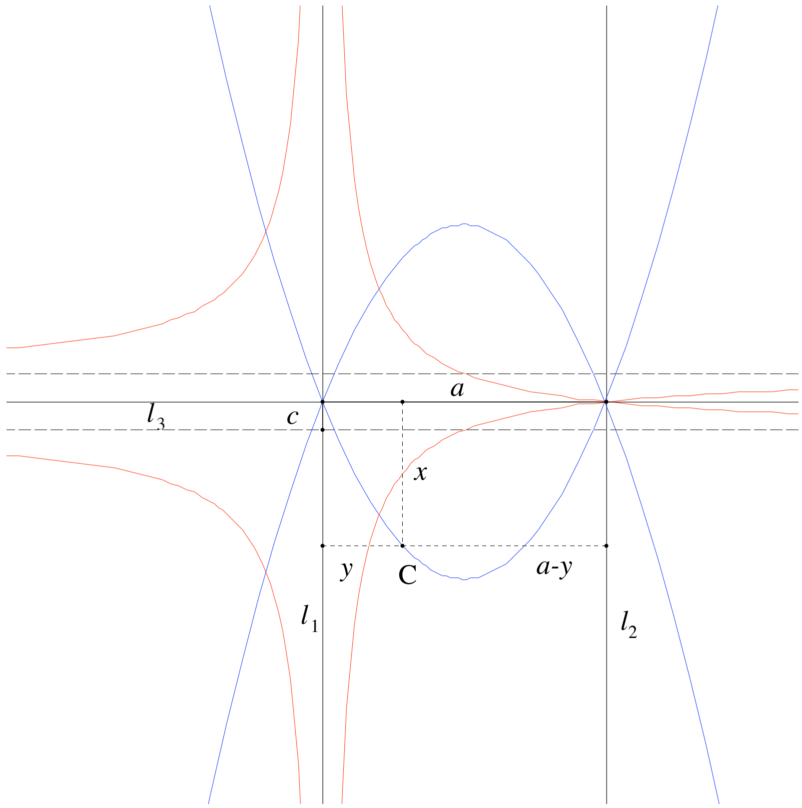

FIG. 4.4 – Le problème de Pappus à trois lignes

générique et peut donc être appliquée sans changement de raisonnement ni de notations à d'autres positions, en modifiant simplement les signes + et − qui interviendront dans les calculs et l'équation finale.

Quant à la figure erronée et incomplète de Schooten 4.2, Descartes en rend doublement compte. Il propose en effet de considérer le lieu de Pappus donné par l'égalité

$$\mathsf{CD} \times \mathsf{CF} = \mathsf{CB} \times \mathsf{CH} + Q \tag{4.7}$$

à la place de $\mathsf{CD} \times \mathsf{CH} = \mathsf{CB} \times \mathsf{CF}$, où Q est une quantité donnée, par exemple un rectangle ou un carré donné si l'on veut conserver l'homogénéité, pour répondre à l'erreur maladroite portant sur l'intersection de l'hyperbole avec la droite GH. Descartes échange ainsi les rôles de CF et CH et propose une généralisation du problème de Pappus en ajoutant « une quantité donnée ou quelque chose de pareil » à l'équation du lieu.

D'autre part, pour ce qui regarde le caractère incomplet de la figure, puisque manque la seconde branche d'hyperbole, il renvoie à l'exemple de la conchoïde de parabole traitée dans le cas du problème de Pappus à cinq lignes.

En reprenant les données numériques fournies par Descartes[110] , on trouve que le problème donné par l'équation (4.7) avec $Q = 0$ admet pour solutions une hyperbole et une ellipse[111] représentées dans la figure 4.5.

Si on interprète à présent « quantité donnée » au sens de constante[112] ainsi que semble le suggérer Descartes, on obtiendra une équation[113] qui ne permet pas d'obtenir une branche d'hyperbole passant à la fois par les points C et H comme dans la figure 4.2[114]. Ajoutons qu'une manipulation semblable dans l'équation (2.49)[115] de la première hyperbole solution passée sous silence par Descartes n'aboutit pas plus.

Ainsi, à nouveau, les réponses de Descartes portant sur une seconde conique solution paraissent au mieux évasives.

4.4.3 Une solution de Pascal

On trouve dans la correspondance de Huygens une lettre de Mersenne à Constantin Huygens qu'on date du 17 avril 1648[116], portant sur un nouveau

110 Cf. [Descartes(1637c), p. 405] et *supra* [section 2.3.6, p. 84].

111 En se plaçant dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAG}}$, on obtient une hyperbole d'équation $y = -\frac{1}{4} - \frac{31}{28}x \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{11}{8}x + \frac{457}{784}x^2}$, tandis qu'en se plaçant dans l'angle $\widehat{\mathsf{DAE}}$, on obtient une ellipse d'équation $y = -\frac{47}{44} + \frac{23}{44}x \pm \sqrt{\frac{47}{1936} + \frac{107}{968}x - \frac{263}{1936}x^2}$.

112 Rabuel est revenu sur cette remarque de Descartes. Cf [Rabuel(1730), p. 211-212]. Il montre dans plusieurs exemples qu'en conservant les mêmes lignes mais en modifiant l'équation du lieu de Pappus, on peut bien en effet obtenir d'autres coniques solutions que le cercle comme une parabole : cf. [Rabuel(1730), p. 182-183] ou une ellipse : cf. [Rabuel(1730), p. 208]. Il affirme également que le lieu défini par $\mathsf{CB} \times \mathsf{CH} = \mathsf{CD} \times \mathsf{CF} - \frac{7}{3}\mathsf{BC}$ correspond à la figure 4.2. Cf. [Rabuel(1730), p. 235]. Cela est faux d'après notre vérification. Il considère ainsi dans ces exemples que la quantité Q peut contenir un ou des termes inconnus. Ajoutons qu'il ne mentionne nulle part dans son *Commentaire* l'existence de deux coniques solutions.

113 Il s'agit de l'équation $y = -\frac{1}{4} - \frac{31}{28}x \pm \sqrt{\frac{3}{7}Q + \frac{1}{16} - \frac{11}{8}x + \frac{457}{784}x^2}$.

114 En faisant varier Q, on obtient une famille d'hyperboles disjointes dont deux distinctes passent respectivement par les points C et H comme on le voit dans la figure 4.5.

115 Cf. *supra* [équation 2.49, p. 85].

116 Bien que le manuscrit autographe porte la mention du 17 mars 1648, les éditeurs respectifs de la correspondance de Huygens et Mersenne supposent que Mersenne s'est

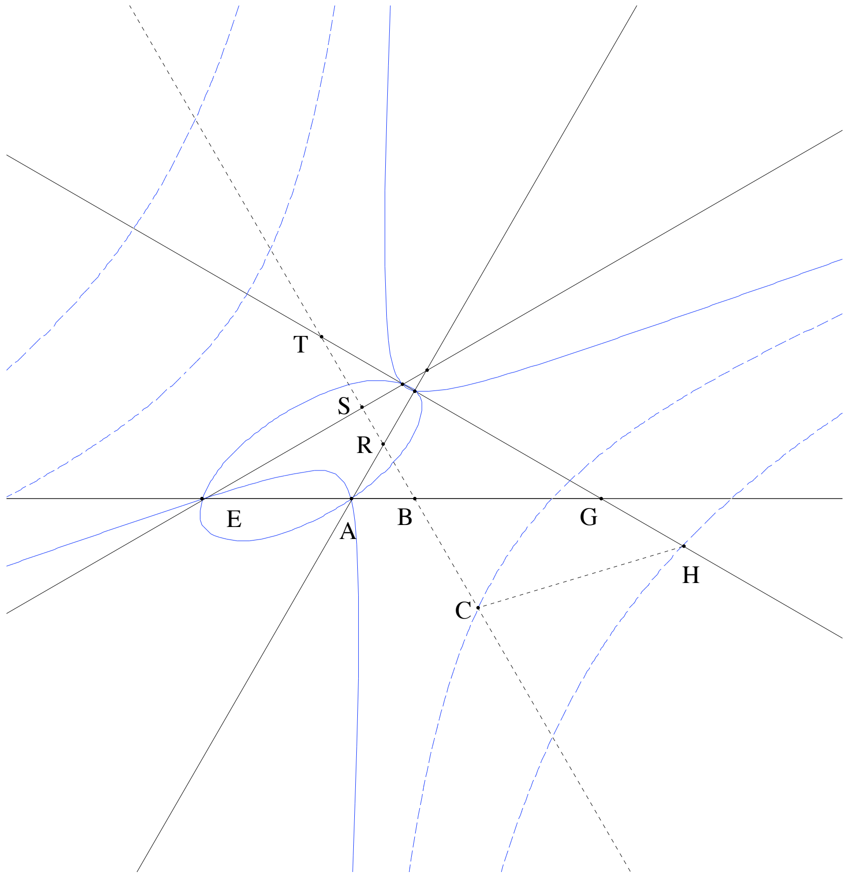

FIG. 4.5 – L'ellipse et l'hyperbole solutions du problème de Pappus $\mathsf{CD} \times \mathsf{CF} = \mathsf{CB} \times \mathsf{CH}$

développement de la polémique engagée par Roberval contre la solution par Descartes du problème de Pappus. Cette reprise de la polémique résultait d'une nouvelle solution au problème apparemment complète, apportée par le jeune Blaise Pascal. Voici ce qu'écrivait alors Mersenne :

> Si votre Archimède [Christiaan Huygens] vient avec vous, nous lui ferons voir l'un des plus beaux traitez de Geometrie qu'il ayt jamais vû, qui vient d'estre achevé par le jeune Paschal. C'est

trompé dans la date. La présente lettre répond en effet de façon manifeste dans sa dernière partie à une lettre précédente de Constantin Huygens datée du 6 avril. Mersenne aurait ainsi commis une erreur en écrivant le nom du mois. Cf. [Mersenne(1945-1988), XVI, p. 229] et [Huygens(1888-1950), XXII, p. 425 n.].

> la solution du lieu de Pappus ad 3 et 4 lineas *qu'on pretend icy n'avoir pas esté résolu par Mr des Cartes en toute son estendüe.* il a fallu des lignes rouges, vertes et noires etc. pour distinguer la grande multitude de considérations [configurations ?].[117]

Dans le traité cité par Mersenne intitulé par Leibniz *De loco solido* et aujourd'hui perdu, Pascal donnait en effet une solution projective du problème de Pappus à quatre lignes, reposant sur différentes définitions et propriétés de l'hexagramme mystique[118].

A défaut d'une restitution de la solution de Pascal, on peut toutefois remarquer que, sans doute pour la première fois, la solution algébrique cartésienne rencontrait une vraie concurrente dans la solution projective pascalienne qui établissait l'équivalence entre deux modes de définition des coniques, le premier fondé sur la circonscription à un quadrilatère donné, reformulation sous un mode projectif de l'énoncé du problème de Pappus, le second fondé sur le théorème de l'hexagramme mystique.

Il est à cet égard remarquable que la géométrie projective et la géométrie algébrique s'affrontent à la même époque sur le terrain d'un même problème, aussi célèbre que le problème de Pappus, en présentant chacune des éclairages différents mais également féconds, témoignant de la puissance et de la généralité de chacune des deux méthodes.

Si Roberval n'avait semble-t-il toujours pas satisfait en janvier 1648 le voeu exprimé par Descartes en 1646 de produire par écrit ses critiques ou mieux encore une solution véritablement claire et complète du problème de Pappus, Pascal l'avait suppléé et lui avait peut-être décillé les yeux quant aux défauts de la solution cartésienne, ceci au plus tard en avril 1648. Comme nous allons le voir, la nature des critiques de Roberval en 1649 aura considérablement changé, démontrant ainsi une plus grande compréhension mathématique du problème de sa part. On serait ainsi porté à croire que Pascal et sa solution furent à l'origine d'un tel changement.

4.5 La Correspondance avec Carcavi de 1649

On retrouve à nouveau des critiques de Roberval visant la solution cartésienne du problème de Pappus en 1649. Celles-ci furent transmises par

[117] C'est moi qui souligne. Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 83-84] et [Mersenne(1945-1988), XVI, p. 230].

[118] Pour plus de détails, cf. l'article de R. Taton : [Taton(1962), p. 214 et p. 225-231].

Carcavi dans une première lettre du 9 juillet 1649[119] à laquelle Descartes répondit le 17 août 1649[120], et dans une seconde lettre du 24 septembre 1649[121] laissée cette fois-ci sans réponse par Descartes qui interrompit alors sa Correspondance avec Carcavi.

Dans sa première lettre, ce dernier indiquait trois critiques :

> 1. Page 326[122]. Que le point C est par tous les angles que vous avez nommez, & que vous ne nommez point celuy ou il ne peut estre ; & que iamais la question n'est impossible.[123]

Les deux premières critiques de Roberval concernent la présence possible du point C dans chacun des quatre angles définis par Descartes dans sa solution du problème de Pappus, à savoir les angles $\widehat{DAG}$, $\widehat{DAE}$, $\widehat{EAR}$ et $\widehat{RAG}$, qui, comme on l'a déjà remarqué, ne correspondent pas aux quatre quadrants du repère choisi par Descartes et contiennent des régions qui conduiront à des équations différentes lors de l'analyse algébrique[124].

Il est clair que ces critiques renvoient implicitement à la seconde conique solution[125], ce qui sera confirmé par la seconde lettre de Carcavi à Descartes. En effet, en affirmant que le point C peut être choisi à l'intérieur des quatre angles, et donc que la conique traversera ces quatre angles, Roberval considère que la figure 4.3 et la solution de Descartes sont incomplètes.

Quant à la troisième critique, elle renvoie à une remarque de Descartes tout à fait générale apparaissant dans sa solution du problème, énonçant que dans le cas où les équations obtenues dans chacun des quatre angles ne possèdent pas de racines (positives) non nulles, « la question serait impossible au cas proposé »[126].

Que doit-on entendre ici par « impossible » ? Car une valeur nulle pour y donnera néanmoins le point A pour solution. Et c'est sans doute ce qu'entend

[119] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 373].
[120] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 394-397].
[121] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 415-416, Éclaircissement, p. 422-425].
[122] Cf. [Descartes(1637c), p. 398-399].
[123] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 373].
[124] Cf. *supra* [figure 2.6, p. 69] et [figure 2.9, p. 84].
[125] Comme le remarque d'ailleurs Tannery :

> [...] il n'est guère admissible que la reconnaissance de l'existence de points du lieu dans les quatre angles n'ait pas été immédiatement suivie de la conclusion que le lieu comprenait plusieurs coniques.

Cf [Descartes(1964-1974), V, p. 423].
[126] Cf. [Descartes(1637c), p. 399].

par là Roberval, lorsqu'il écrit que le problème ne sera jamais impossible. Descartes, qui semble mentionner implicitement le cas du point dans la lettre à Mersenne précédement citée du 31 mars 1638[127], comme « un cas, des plus aysez de tous, qu'[il a] omis pour sa trop grande facilité », pourrait qualifier dans ce cas le problème de lieu d'impossible, refusant de compter le point au sein des coniques solutions et reprenant ainsi la distinction traditionnelle d'origine euclidienne entre point et ligne[128].

Descartes répondait à chacune de ces trois critiques[129] dans la lettre qui suivait du 17 août 1649 :

> A quoy ie n'ay pas beoin de rien adioûter pour faire voir clairement qu'il se trompe, premierement en ce qu'il dit le point C est *par tous les angles que i'ay nomméz*. Car, en l'exemple proposé[130], il ne se peut trouver dans l'angle DAE [...] Ainsi le cercle CA passe par les angles DAG & EAR, mais non point par l'angle DAE.
>
> [...] Il est evident aussi qu'il se trompe, en ce qu'il dit que ie n'ay pas nommé l'angle où le point C ne peut estre ; car, ayant nommé tous les quatre angles qui se sont par l'intersection des deux lignes DR et EG, i'ay nommé toute la superficie indefiniment estenduë de tous costez, & par consequent tous les lieux, tant ceux où le point C peut estre, que ceux où il ne peut pas estre ; en sorte qu'il auroit esté superflu que i'eusse considéré d'autres angles.
>
> Enfin, il se trompe de dire que cette question n'est iamais impossible ; car, bien qu'elle ne le soit pas en la façon que ie l'ay proposée, on la peut proposer en plusieurs autres, dont quelquesunes sont impossibles, & ie les ay voulu toutes comprendre dans mon discours.[131]

Force est de constater que ces réponses ne sont guère convaincantes. Dans

[127] C'est l'hypothèse de Tannery. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 84]. Il se ravise néanmoins dans [Descartes(1964-1974), VI, *Note sur le problème de Pappus*, p. 725] et considère que Descartes mentionnerait le cas où le coefficient en y^2 est nul dans l'équation du lieu de Pappus à quatre lignes.

[128] Rabuel prétend donner deux exemples de « lieu impossible » qu'il a produit en modifiant l'équation *ad hoc* de façon à ce qu'elle ne possède pas de racines réelles. Cf. [Rabuel(1730), p. 183 et 200].

[129] J'ajoute des *alineas* au texte.

[130] Cf. *supra* la figure 4.3, p. 129.

[131] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 395-397].

la première, après avoir engagé une polémique stérile sur le sens accordé par Roberval à « se trouver par les angles »[132], Descartes ne semble considérer que le cercle comme unique conique solution au problème. Le cercle ne passe pas en effet par l'angle DAE au contraire de l'hyperbole comme dans la figure 2.9[133]. Descartes paraît donc ignorer à nouveau et de façon plus explicite encore la seconde conique solution. Quant aux deux autres réponses, elles demeurent évasives.

Quant aux deux autres réponses, elles demeurent évasives. Si dans la dernière, Descartes invoque à nouveau un souci de généralité pour justifier sa remarque, dans la première, apparaissent au contraire, il nous semble, les limites de la démarche cartésienne, inhérentes aux limites de son algèbre et aux difficultés de calcul apparaissant dans la résolution du problème de Pappus.

En effet, pour nommer l'angle où le point C ne peut être, il faut non pas étudier une équation algébrique prototypique, comme le fait Descartes dans sa solution de la *Géométrie*, mais toutes les équations algébriques produites en choisissant toutes les positions possibles pour le point C, puis comparer leurs coefficients, afin d'étudier et comparer les racines — en particulier, le signe de ces racines — de ces dernières. Une telle recension ne peut être que compliquée et fastidieuse mais est nécessaire pour qui veut proposer une théorie des courbes algébriques, où une correspondance est établie entre courbe géométrique et équation(s) algébrique(s).

Mais Carcavi allait revenir à la charge en présentant des critiques bien plus fondées et pertinentes sur le plan mathématique dans une lettre du 24 septembre 1649[134] :

> [1] Il [Roberval] ne s'est pas aussi arresté aux figures de vostre livre, mais seulement à vostre enonciation ; car celle de la page 331[135] monstre evidemment le peu d'intelligence de celuy à qui vous vous estes fié pour la tracer : c'est ou le lieu est représenté par une hyperbole, laquelle, ne passant par aucun des six points où les quatre lignes peuvent s'entrecoupper, couppe neantmoins la ligne TG au point H, fort éloigné de tous ces six points, qui est une absurdité si manifeste, qu'encore que ledit sieur de Roberval

[132] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 395-396].
[133] Cf. *supra* [figure 2.9, p. 84].
[134] J'ajoute à nouveau des *alineas* numérotés.
[135] Cf. [Descartes(1637c), p. 404] et [figure 4.2, p. 123].

> croye que vous ne vous soyez pas donné la peine de construire ce lieu, il ne doute pas toutesfois que vous ne la voyïez incontinent.
>
> [2] De mesme que celle de la page 308[136], où vous dites que, *pour trois ou quatre lignes données, les points cherchez se rencontrent tous en une section conique ;* ce qui n'est pas veritable : *car ils ne se trouvent pas tous dans une de ces sections*, quand vous prendriez les deux hyperboles opposées pour une section, comme nous faisons avec les Anciens.
>
> [3] Et il m'a fait remarquer que cette faute peut bien avoir esté cause d'une autre dans la page 313[137], où vous dites qu'*on pourra trouver une infinité de points par lesquels on décrira la ligne demandée.* Car *il se pourra faire que tous ces points ne seront pas dans une mesme ligne*, sçavoir, lors que quelques-uns d'iceux seront dans l'un des espaces qui sont distinguez par les quatre lignes données, & d'autres en un autre espace.
>
> [4] Et finalement, il soûtient que vous ne sçauriez donner aucun cas auquel la question ne soit tousiours possible [...][138]

Ces quatre dernières critiques de Roberval ne reçurent jamais de réponse de Descartes. Leur clairvoyance et leur profondeur contrastent avec le caractère anecdotique des remarques des premières années. Les deux premières et la dernière critiques apparaissent comme un point d'aboutissement de la controverse et touchent selon nous au coeur de la théorie cartésienne des courbes algébriques.

Ainsi, la figure 4.3[139] est clairement fausse et témoigne selon Roberval que Descartes « ne [se soit] pas donné la peine de construire ce lieu ». Au delà de la charge polémique, il faut retenir que Roberval met ici en lumière les difficultés de la correspondance entre équation algébrique et courbe géométrique. Mais plus importante encore est la deuxième critique. Roberval énonce en effet pour la première fois explicitement que la solution de Descartes est incomplète car elle ne considère qu'une conique solution et en déduit une conséquence qui attaque les fondements de la théorie cartésienne des courbes algébriques.

La construction point par point de la courbe géométrique solution que tire

[136] Cf. [Descartes(1637c), p. 381].
[137] Cf. [Descartes(1637c), p. 381].
[138] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 415-416].
[139] Cf. *supra* [figure 4.3, p. 129].

Descartes de l'équation algébrique exprimant celle-ci relativement à l'axe AB d'origine A et d'ordonnées BC ne va en effet pas de soi dans le cas général à n lignes. Pour illustrer cela, prenosn l'exemple du problème de Pappus à quatre lignes que nous avons étudié en détails.

Considérons les régions $(\mathcal{R}_i)_{i=1,\ldots,23}$ du plan correspondant à la figure 2.6[140] et associons à chacune une équation $P_i(x, y)$. Si l'on veut construire toute la courbe point par point, il faudra résoudre chacune de ces équations en y, non pas en « prenant successivement infinies diverses grandeurs »[141] pour x, mais en se restreignant à un intervalle $[\alpha_i, \beta_i[$[142] pour x correspondant à la région $\mathcal{R}_i$. On construira ainsi l'arc de la courbe appartenant à cette même région. Ainsi, pour construire *toute* la courbe solution, il faudra « recoller » ces différents arcs.

D'autre part, il est vrai que dans le cas général du problème de Pappus à un nombre quelconque de lignes où deux courbes algébriques sont solutions, en construisant les équations du lieu qu'on obtiendra en postulant diverses positions du point C lors de l'analyse, à moins de disposer d'un critère permettant d'affirmer que deux équations sont ou ne sont pas celles d'arcs ou de branches d'une même courbe, on pourrait mal décrire ces courbes solutions en recollant ensemble des arcs de l'une et de l'autre. Cette difficulté est d'ailleurs évacuée dans le problème à quatre lignes car Descartes s'appuie non pas sur une construction par point mais sur les *Coniques* d'Apollonius pour décrire une des deux coniques solutions en donnant côté droit, diamètre, centre et côté traversant[143].

Un tel critère de différenciation des équations algébriques du lieu est une condition nécessaire pour l'établissement d'une théorie des courbes algébriques et apparaît difficile voire impossible à établir en raison de la complexité résultant des différents signes possibles comme on l'a vu auparavant lors de l'analyse mathématique. Or Descartes ne dit non seulement rien à ce sujet, mais encore esquive à plusieurs reprises la question qui en constitue l'origine dans la controverse : l'existence d'une seconde conique solution.

Nous allons voir à présent que cette question va se poser à nouveau lors de la préparation par Schooten en 1656 de la seconde édition latine de la *Géométrie*, engendrant une nouvelle controverse entre Schooten, Huygens et Roberval.

---

[140] Cf. *supra* [figure 2.6, p. 69].
[141] Cf. [Descartes(1637c), p. 386].
[142] Par exemple, l'intervalle $[0, l[$ pour la région (13).
[143] Cf. [Descartes(1637c), p. 400-404].

4.6 Une reprise de la controverse en 1656 entre Roberval et Schooten

Schooten, qui projetait une nouvelle édition de la *Géométrie* dès 1654 à la demande de Louis Elzevier, s'était adressé le 25 octobre de cette même année à Christiaan Huygens pour obtenir de sa part un relevé des fautes de la *Geometria* de 1649[144].

Moins de deux années plus tard, Huygens sollicitait l'avis de Roberval au sujet de la *Géométrie* de Descartes dans une lettre qu'on date de mars 1656 :

> Vous me ferez plaisir de m'enseigner les lieux dans la Geometrie de des Cartes ou vous avez trouvé de l'abus, car il y a ici des personnes [Schooten ?] qui soutiennent que tout se peut concilier.[145]

Dans sa réponse datée du 6 juillet 1656, Roberval, après avoir rappelé dans un premier paragraphe ses critiques que l'on retrouvait déjà transmises par Carcavi dans ses lettres du 9 juillet 1649 et du 24 septembre 1649, expliquait ainsi ce qu'il jugeait être à l'origine des fautes cartésiennes dans la résolution du problème de Pappus :

> La faute du bon-homme vient, à mon aviz de ce qu'il n'a pas connu qu'un tel lieu pour estre parfait, demande deux sections à la fois, et chacune tout entiere. Par une section entiere, j'entens ou une circonference de cercle entiere, ou une Ellipse entiere, ou une Parabole entiere, ou deux hyperboles opposees entieres qui ne sont ensemble qu'une section, ou deux lignes droites infinies qui s'entrecoupent[146] ; et en general ce que peut faire un plan coupant une superficie conique entiere, et composee de deux cornets opposez au sommet l'un de l'autre, suivant la definition d'Apollonius : il faut, dis-je deux de ces sections entieres, autant qu'en peuvent faire deux plans : tellement qu'une circonference de cercle, pour exemple, n'est pas suffisante, mais il luy faut encore pour l'ordinaire, deux hyperboles opposees, affin que le lieu

[144]Cf. *supra* [section 1.3.2, p. 34].

[145]Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 397].

[146]Ces deux droites correspondent naturellement au cas d'une hyperbole dégénérée mais il n'est pas clair que Roberval les considère ainsi. Néanmoins, il faut parfois considérer qu'une ligne droite seule forme un lieu ainsi que le rappelle Huygens dans la réponse qui suit.

> soit tout parfait ; et souvent il faut quatre hyperboles opposees deux à deux[147]. Par le moyen de deux tels lieux entiers, le point C se trouvera dans tous les espaces que j'ai specifiez[148], sans que le probleme puisse jamais estre impossible.[149]

La précision de Roberval dans cet extrait nous paraît montrer qu'il a soit disposé lui-même, soit pris connaissance en 1656 d'une solution claire et complète du lieu de Pappus qui lui découvrait le défaut de la solution cartésienne, à savoir l'absence de la seconde conique solution au problème. Roberval développe et éclaircit d'ailleurs ici les critiques qui apparaissaient déjà en 1649 communiquées par Carcavi à Descartes.

On peut se poser la question de savoir quand Roberval découvrit ce défaut de la solution cartésienne. Si celui-ci avait découvert ce défaut dès 1639-1640, comme le suggère Tannery, pourquoi n'en faisait-il état que bien plus tard en 1649 par l'intermédiaire de Carcavi ou en 1656 à la requête de Christiaan Huygens ? À nouveau, c'est nous semble-t-il la nouvelle solution de Pascal en 1648 et la controverse qui s'ensuivit qui constituent un tournant dans la postérité de la solution cartésienne du problème de Pappus. Malheureusement, la solution de Pascal étant perdue, une telle hypothèse demeure conjecturale.

Dans la même lettre, Roberval citait l'avertissement de Descartes inséré avec quelques modifications par Schooten dans son édition de 1649 sans, semble-t-il, en soupçonner l'auteur :

[147]La remarque de Roberval est tout à fait exacte. Dans un des deux problèmes de Pappus à trois lignes, on obtient en effet deux hyperboles solutions comme on le voit dans la figure 4.4. Plus généralement, on sait qu'un faisceau de coniques à quatre points base ne contiendra que des hyperboles lorsque un de ces points est intérieur au triangle formé par les trois autres [Dingeldey *et al.*(1911-1915)Dingeldey, Fabry, et Berzolari, p. 171]. Ainsi lorsque les quatre points d'intersection solutions des quatre droites du problème de Pappus forment cette configuration, c'est-à-dire lorsque ces points sont les sommets d'un quadrilatère non croisé et non convexe, les solutions du problème seront nécessairement deux hyperboles. Ajoutons que cette remarque de Roberval paraît montrer qu'il a pris connaissance de nombreux cas de figure du problème.

[148]Roberval avait indiqué auparavant dans la lettre que les points C du lieu de Pappus se trouvent dans tous les espaces triangles et quadrangles éventuellement infinis délimités par les quatre lignes droites du problème, à l'exception peut-être d'au plus un. Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 449-450]. Si cela est vrai pour l'exemple choisi par Descartes — cf. la figure 2.9 —, cela n'est pas vrai en général comme on le voit dans la figure 4.5 et la figure 4.6, une des deux figures données par Huygens comme contre-exemples dans sa lettre à Roberval du 27 juillet 1656 citée *infra*. Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 464].

[149]Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 450-451].

> Je scay bien que Monsieur Schoten page 197, de ses commentaires sur cette geometrie, tache d'excuser la faute de son auteur[150], voulant qu'il se doive entendre quelquefois quand les rectangles sont tels que l'un soit à l'autre (*majus datò quam in ratione*).[151]

Descartes avait en effet considéré dans l'avertissement inséré dans sa lettre à Schooten[152] que le lieu de Pappus pouvait être entendu en se donnant la différence des rectangles comme dans l'équation (4.7), plutôt qu'en se donnant plus classiquement le rapport entre les deux rectangles *i.e*

$$\mathsf{CD} \times \mathsf{CF} : \mathsf{CB} \times \mathsf{CH} = G_1 : G_2 \tag{4.8}$$

où $G_1 : G_2$ est un rapport donné.

Huygens reprenait les arguments de Roberval dans une lettre qu'il adressait à Schooten le 25 juillet 1656 en donnant la figure de l'hyperbole solution[153] et répondait favorablement à Roberval dans une seconde lettre[154] probablement du 27 juillet 1656 tout en corrigeant certaines de ses assertions :

> Ayant examiné vos remarques sur des Cartes je les trouve tresbelles et veritables [et votre censure très juste]. Et je m'estonne qu'il s'est laisse eschapper des fautes si grossieres en une matiere ou il a voulu monstrer ce qu'il scavoit par dessus l'antiquitè [de plus que les autres]. Je ne me suis pas donnè la peine de faire le calcul selon l'algebre, mais en considerant seulement la figure avec attention, j'ay veu que si l'on distingue les 2 lignes AB, CD, sur lesquelles il faut mener les droites CP ; CO, qui sont l'un des rectangles, d'avec les 2 autres AB, BF sur lesquelles tombent les droites CM, CN qui font l'autre rectangle (j'ay fait icy les 2 premieres plus grosses que les 2 autres). J'ay donc veu, que par toutes les intersections d'une grosse et d'une menue, il doibt passer deux lieux et que par consequent le point C se trouve dans tous les espaces ou il y a un angle compris d'une grosse et d'une menue. Et quelquefois aussi dans les autres [...] Quant aux deux

[150] C'est-à-dire les intersections fautives de l'hyperbole solution avec les quatre droites du problème. Cf. la figure 4.2, p. 123.

[151] Cf. [Huygens(1888-1950), I,p. 451] et *supra* [section 4.4.2, p. 132].

[152] Cf. [section 4.4.2, p. 132].

[153] Cf [Huygens(1888-1950), I, p. 461-462].

[154] Nous plaçons entre crochets les mentions qui apparaissent dans la copie de Huygens.

> lieux entiers du point C, je crois qu'on le trouvera tousjours ainsi, pourvu que par un lieu entier on entende aussi quelquefois une seule ligne droite ; et c'est ce que fait un plan qui touche deux cones opposez[155] [...] au reste la speculation de ce double lieu me semble tresexcellente et j'ay escrit à Monsieur Schoten, en luy envoyant vostre lettre, qu'il seroit tres bien de la mettre dans ses commentaires.[156]

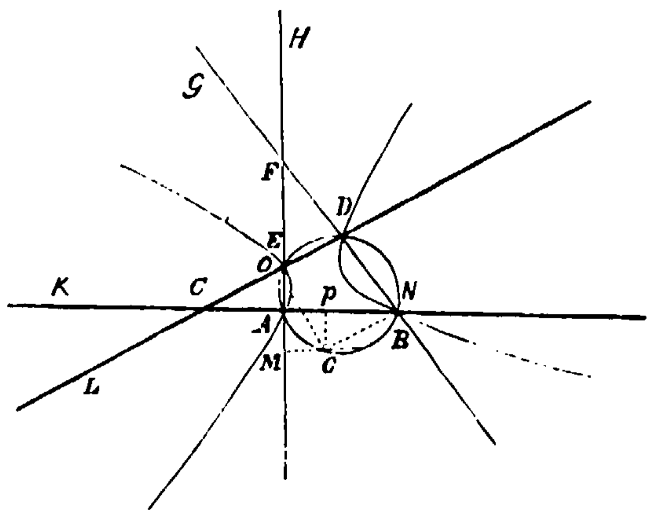

FIG. 4.6 – La Figure de Huygens dans la lettre à Roberval du 27 juillet 1656

Les deux extraits des lettres de Huygens à Schooten et Roberval nous semblent à nouveau éclairer les relations qui se manifestent entre algèbre et géométrie au sein de la solution du problème de Pappus. Car, si Huygens, comme il le confesse à Schooten puis à Roberval, « ne s'[est] pas donnè la peine de faire le calcul selon l'algebre », sans doute en raison de l'« embarras » de celui-ci, en revanche, il lui est tout à fait aisé de décrire et comprendre la situation géométrique concernant les deux coniques solutions.

[155]C'est ce qui peut se produire lorsque les quatre droites sont parallèles ou concourantes. Huygens donne d'ailleurs ce second exemple dans cette même lettre pour montrer à Roberval que dans ce cas quatre espaces délimités par les droites ne seront pas traversés par le lieu. Cf. également [Rabuel(1730), p. 158-159 et 161-163] où sont traités ces deux exemples.

[156]Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 464].

D'autre part, l'usage du terme « double lieu » pour qualifier les deux solutions témoigne de l'étonnement à considérer qu'un problème de lieu géométrique eût pu conduire non pas à une mais à deux courbes géométriques solutions.

Schooten répondit trois jours après aux critiques de Roberval transmises par Huygens le 28 juillet 1656[157] de façon détaillée en prenant la défense de Descartes. Il ne céda qu'à demi aux instances de Huygens en ne modifiant rien du texte de la solution du problème de Pappus à quatre lignes donnée par Descartes dans la *Géométrie*, respectant en cela la volonté de l'Auteur, mais en ajoutant une seconde note BB où il mentionne l'hyperbole solution, sans citer Huygens ni Roberval, mais en se conformant néanmoins d'assez près à une lettre postérieure de Huygens du 6 décembre 1656 consacrée à cette question et bien plus longue et détaillée[158].

[157] Cf. [Huygens(1888-1950), I, p. 466-470].

[158] Pour la note BB et la lettre de Huygens, cf. resp. [Schooten(1659b), p. 179-181] et [Huygens(1888-1950), I, p. 519-524]. Les références précédentes sont empruntées au commentaire susnommé [Huygens(1888-1950), XIV, p. 414].

Conclusion

Il nous semble avoir démontré dans cette partie que la théorie cartésienne des courbes géométriques est fondée sur une théorie des équations algébriques à une inconnue, qui rejette les racines négatives sans les ignorer, en procédant par des changements de variable du type $x \rightarrow -x$. Ainsi, ce n'est pas l'équation algébrique implicite à deux variables en x et y, mais l'équation algébrique explicite en y correspondant à l'extraction de la racine carrée dans le cas des courbes du premier genre, *i.e.* les coniques, qui est mise en correspondance avec un arc d'une courbe géométrique. En effet, seule une telle équation permet de construire la courbe point par point.

Aussi, plutôt que de parler de la genèse d'un objet mathématique « courbe algébrique », il nous semble préférable de parler de la genèse d'un couple d'objets mathématiques formé par l'équation algébrique à une inconnue $P_y(x) = 0$ et l'équation algébrique à deux inconnues ou plutôt à deux variables $P(x, y) = 0$.

Mais précisons les termes de « courbe géométrique » et « courbe algébrique ». Par courbe géométrique, nous entendons une courbe *exprimée* par une équation algébrique et *donnée* par une construction géométrique qu'on peut dériver de l'équation : construction point par point, construction par mouvement d'une courbe géométrique donnée, construction par référence à une courbe déjà donnée, comme dans le cas des coniques solutions du problème de Pappus construites par référence aux propositions d'Apollonius. Par courbe algébrique, nous entendons une courbe *donnée* par une équation algébrique à deux variables.

Si le rejet des racines négatives peut être réglé dans le cas de la théorie des équations algébriques à une inconnue, en revanche, il a un coût pour la théorie des courbes géométriques exprimées par une équation algébrique, en particulier pour ce qui concerne l'analyse algébrique des problèmes de lieu géométrique. En ne s'autorisant pas à désigner par des lettres des quantités négatives, donc en n'introduisant pas en quelque sorte pour parler de façon moderne la « mesure algébrique » des segments, Descartes s'oblige à limiter la correspondance entre courbe géométrique et équation algébrique à des arcs de courbe, établissant ainsi une correspondance seulement locale. Au mieux peut-il ainsi associer à une courbe géométrique une famille d'équations algébriques.

Une courbe algébrique serait alors pour Descartes une classe d'équivalence d'équations algébriques. Néanmoins, même dans ce cas, il faudrait alors disposer d'un critère uniquement algébrique pour démontrer que deux équations algébriques distinctes appartiennent ou n'appartiennent pas à la même classe d'équivalence. Bien que Descartes semble fonder un tel critère sur la composition de changements de variables du type $x \to -x$ ou $y \to -y$, il lui est néanmoins nécessaire de s'appuyer sur une figure[159] pour conclure.

Ainsi, on pourrait dire pour résumer que bien que l'objet « équation algébrique » soit thématisé dans le Livre III de la *Géométrie*, l'objet « courbe algébrique » n'est néanmoins pas dégagé, et ce à cause du problème des coordonnées négatives.

De surcroît, une question comme celle de l'existence d'une seconde conique solution au problème de Pappus rendait, au delà de la nécessité logique à procurer un tel critère pour établir une véritable théorie des courbes algébriques, une telle entreprise urgente et nécessaire pour développer la Méthode et conserver au problème de Pappus son rôle de pierre de touche de la nouvelle Géométrie algébrique. En effet, la reconnaissance géométrique d'une telle solution étant évidente, il importait pour démontrer la puissance de la nouvelle Méthode de faire preuve de la même simplicité en usant de l'algèbre, ce qui n'était possible qu'à condition d'élucider la question des signes, condition nécessaire à l'élaboration d'une théorie des courbes algébriques.

Au delà de la question de savoir si Descartes a reconnu ou non la seconde conique solution — la seconde possibilité heurte notre bon sens —, on peut remarquer pour conclure que le véritable enjeu de cette question tient d'une part à la reconnaissance non pas d'une seconde *courbe géométrique* solution mais d'une seconde *courbe algébrique* solution, d'autre part à la possibilité de différencier non pas les deux courbes géométriques solutions, en s'appuyant

[159]Par exemple, dans le cas du problème de Pappus à cinq lignes, Descartes ne différencie pas les deux courbes algébriques solutions car une même équation peut désigner l'une ou l'autre courbe selon la région où l'on se place. L'usage de la figure lui permet néanmoins de différencier les deux courbes géométriques solutions. Cf. *supra* [section 2.4, p. 85].

sur une figure géométrique, mais les deux courbes algébriques solutions.

Si Descartes n'ignorait sans doute pas qu'une seconde courbe géométrique fût solution, il devait tout autant savoir que la discussion dans le cas général du problème de Pappus et dans le cadre de sa théorie des courbes géométriques serait rendue beaucoup plus difficile.

Cela explique peut-être, plutôt que l'ignorance, les silences et les esquives répétés de Descartes sur cette question durant la controverse avec Roberval, à la suite de la solution donnée par Pascal, concurrente véritable de la solution cartésienne, tant pour ce qui regarde la généralité que la puissance de la Méthode.

Deuxième partie

Les méthodes des normales et des tangentes

Introduction

L'objet de cette partie est de proposer une reconstruction historique et mathématique du processus de transformation de la méthode cartésienne des normales qui apparaît dans la *Géométrie* de 1637 en la méthode des tangentes qu'on trouve dans les *Notes Brèves* de Florimond Debeaune dont la rédaction commença à la fin de l'année 1638.

D'une part, nous nous efforcerons de montrer que cette transformation résulte directement de la controverse entre Descartes et Fermat sur les tangentes de l'année 1638 et que l'exposé de Debeaune ne fait que constituer un achèvement du procès engagé par la controverse. D'autre part, nous étudierons la méthode des normales de Descartes, la méthode des tangentes de Fermat, ainsi que les arguments qui apparaissent durant la controverse au regard des deux théories où apparaissent pour la première fois dans le développement des mathématiques, bien que sous une forme et dans un contexte différents, l'analyse géométrique qui sous-tend ces méthodes, à savoir la théorie des tangentes et la théorie des lignes *minimum* figurant respectivement au Livre I et au Livre V des *Coniques* d'Apollonius.

Une telle étude nous permettra de dégager la modernité commune aux méthodes respectives de Descartes et Fermat qui réside dans l'application de méthodes algébriques d'origine arithmétique, comme la méthode des coefficients indéterminés ou la méthode d'adégalisation, à un problème géométrique une fois qu'une première analyse géométrique classique a été produite, ainsi que la raison d'être des critiques cartésiennes sur la méthode de Fermat qui portent en fait implicitement sur le choix d'une telle analyse géométrique et sur l'articulation de celle-ci avec l'analyse arithmetico-algébrique qui la suit.

Cette partie est divisée en six chapitres. Dans le premier chapitre, nous considérerons la présentation qui est faite par Descartes de sa méthode au sein du second livre de la *Géométrie* et tenterons de mettre en évidence la modernité et l'enjeu de celle-ci. Pour ce faire, nous procéderons dans le deuxième chapitre à une comparaison détaillée de la méthode cartésienne avec les démonstrations des propositions du Livre V des *Coniques* d'Apollonius qui concernent la détermination du segment *minimum* tiré d'un point sur l'axe d'une conique à cette dernière. Nous décrirons également dans un troisième chapitre le rapport qu'entretient la méthode des normales avec la dioptrique qui en manifeste selon nous un enjeu important.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons trois versions de la méthode des tangentes de Fermat. La première de ces versions apparaît dans un écrit latin intitulé *De tangentibus linearum*, envoyé par l'entremise de Mersenne à Descartes vraisemblablement en décembre 1637. Elle accompagne un premier écrit intitulé *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* et paraît en fournir une application, bien que cette question sera débattue durant la controverse. Nous étudierons également une seconde version qu'on trouve exposée pour la première fois dans une lettre de Fermat à Mersenne postérieure à l'envoi précédent où Fermat propose une interprétation différente de son premier écrit latin. Nous considérerons ensuite un pamphlet de Beaugrand contre Descartes, daté vraisemblablement de 1640 et envoyé par Mersenne en Angleterre pour la popularisation de la méthode, qui présente une troisième version de la méthode des tangentes de Fermat où la tangente est considérée comme une sécante à la courbe en un point double. Enfin, nous procéderons à une comparaison détaillée de la méthode de Fermat avec les démonstrations des propositions du Livre I des *Coniques* d'Apollonius qui concernent la détermination de la tangente à une conique en un point donné.

Dans le cinquième chapitre, nous étudierons la controverse entre Descartes et Fermat sur les tangentes qui suivit la publication de la *Géométrie* en 1637 et l'envoi par Fermat à Descartes de sa propre méthode à la fin de cette même année. Cette controverse qui se déroule pour l'essentiel durant la première moitié de l'année 1638 est constituée en grande partie par les critiques de Descartes sur la méthode de Fermat. On s'est plu jusque-là dans l'historiographie à souligner les outrances et la mauvaise foi de Descartes. Quant à nous, nous essaierons de montrer que les arguments polémiques de Descartes dans la controverse avec Fermat sont les exacerbations d'arguments mathématiques implicites qui portent sur les fondements géométriques distincts des deux méthodes, fondements géométriques dont on peut constater une première apparition dans les *Coniques* d'Apollonius. Nous terminerons ce chapitre en examinant la démonstration que Descartes prétend donner de la règle de Fermat dans la lettre à Hardy de juin 1638. Nous essaierons de montrer que cette démonstration, qui témoigne d'une avancée importante dans la compréhension du problème des tangentes par Descartes suite à la controverse avec Fermat, constitue un moyen terme entre la première méthode des normales présentée dans la *Géométrie* de 1637 et la méthode des tangentes des *Notes Brèves* de Debeaune, qui en découle.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous nous intéresserons aux questions posées par Debeaune et aux réponses qu'elles reçurent de Roberval, Beaugrand, Descartes et Debeaune lui-même, qui apparaissent dans la Correspondance cartésienne de l'automne 1638 au printemps 1639. La première de ces questions porte sur la détermination de la tangente à une courbe dont l'équation est donnée, tandis que la seconde et celles qui suivirent sont consacrées à des problèmes « inverses » des tangentes. Nous essaierons de montrer que les fruits de la controverse sur les tangentes ont été assimilés au cours de cet épisode par Debeaune avec l'aide de Descartes sinon sous la direction de ce dernier, et que cette assimilation conduisit à la rédaction de la méthode des tangentes qu'on trouve dans les *Notes Brèves* et qui conclut du côté cartésien la controverse.

Chapitre 5

La méthode des normales de Descartes dans la *Géométrie* de 1637

À la différence du problème de Pappus pour lequel on dispose d'une histoire relativement bien documentée d'avant la *Géométrie*, dont on trouve les éléments, les dates comme les protagonistes dans la Correspondance cartésienne[1], on ne possède pas de témoignages sur le contexte qui présida à l'élaboration par Descartes de la méthode des normales qui apparaît, comme le problème qu'elle résoud, mentionnée pour la première fois, du moins dans le contexte général de la théorie des courbes données par une équation dans la *Géométrie* de 1637[2].

À notre connaissance, on trouve en effet seulement mentionnés des éléments épars renvoyant à la méthode des normales, bien que de façon assez obscure, dans une suite d'essais des *Excerpta Mathematica* consacrés aux

[1]Cf. *supra* [chapitre 3, p. 95].

[2]Une conjecture, peut-être aventureuse, serait d'affirmer qu'eu égard à l'absence de mention antérieure à la *Géométrie* du problème des normales, lorsque Descartes écrit à un jésuite — Dériennes [?] — dans une lettre qu'on date du 22 février 1638 [?] que « [la *Géométrie*] est un traitté [qu'il] n' [a] quasi composé que pendant qu'on imprimoit [ses] Meteores, & mesme [qu'il] en [a] inventé une partie pendant ce temps-là », il ferait référence à l'invention de la méthode des normales. Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 458 et p. 670]. On en déduirait alors que la méthode des normales, telle qu'elle apparaît dans la *Géométrie* de 1637, c'est-à-dire appliquée à une courbe géométrique quelconque donnée par une équation algébrique, est en quelque sorte le résultat d'un premier jet que Descartes n'aurait pas nécessairement eu le temps de retravailler.

ovales, et donc dans le contexte de la théorie de la dioptrique[3].

Avant de considérer en détails la présentation de la méthode des normales telle qu'elle apparaît dans la *Géométrie* de 1637, nous voulons en donner une transcription moderne, dans le cadre d'une théorie des courbes algébriques, supposant d'une part l'identification entre courbe géométrique et équation algébrique, d'autre part un concept nouveau de tangente à l'œuvre dans la méthode, qu'on retrouve dans les mathématiques de la fin du dix-septième siècle.

Une telle présentation a souvent été donnée dans l'historiographie[4]. On voit bien qu'elle fait de la méthode des normales de Descartes un des jalons qui prépara l'invention du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton avec, par exemple, les méthodes de Roberval et de Fermat.

On peut aller plus loin et affirmer comme Enrico Giusti, qu'une telle transcription reflète non seulement la véritable structure de la *Géométrie* mais aussi les intentions de Descartes [5]. Les considérations qui ne relèveraient pas du rapport courbe-équation qui apparaissent dans la *Géométrie* seraient ainsi secondaires et d'ordre rhétorique[6]. La « courbe-équation » accéderait ainsi déjà au statut d'objet dans la *Géométrie* de 1637[7].

Nous souhaitons discuter cette affirmation à partir de ce qui en constitue le noyau, à savoir la possession par Descartes dans la *Géométrie* de 1637 d'une méthode des normales, en confrontant la transcription modernisante qu'on peut faire de celle-là, et les questions qui ne manquent pas alors de se poser, à la présentation littérale de Descartes.

Nous entendons ainsi mettre en évidence la présence d'éléments allogènes à une pensée uniquement algébrique, sauf à considérer, si on veut apporter une explication, que Descartes ignorât l'existence de procédés algébriques de calcul moins embarrassés ou bien éprouvât des scrupules géométriques d'ordre rhétorique : je pense en particulier à l'usage d'un cercle et non d'une droite pour toucher la courbe sur lequel je reviendrai.

Une réponse moins contournée peut être apportée selon nous en abandonnant l'interprétation selon laquelle l'objet « courbe algébrique » serait déjà présent dans la *Géométrie* de 1637, qui affirme donc que l'équation

[3]Nous étudions ces textes *infra*, [chapitre 7, p. 229].

[4]On peut évoquer par exemple des auteurs comme Montucla et Duhamel. Cf. resp. [Montucla(1799-1802), II, p. 130-131] et [Duhamel(1864), p. 284-290].

[5]Cf. *supra* [Introduction Générale, p. 14] et [Giusti(1990), p. 436].

[6]Cf. [Giusti(1990), p. 436].

[7]Cf. *supra* [Introduction Générale, n. 27, p. 21].

algébrique d'une courbe géométrique deviendrait un objet d'étude pour lui-même, indépendamment d'un contexte géométrique.

Nous considérons au contraire que le texte cartésien présente un état antérieur d'un tel processus qui ne montre pas l'objet « courbe algébrique » mais la genèse de cet objet, où s'entrelacent problème géométrique et méthode arithmético-algébrique. Les éléments de la méthode cartésienne des normales rendus artificiellement désassortis à cette dernière par une interprétation seulement algébrique ne seraient ainsi que les vestiges d'une composante géométrique classique d'origine.

5.1 Une présentation modernisante

5.1.1 Description de la méthode

Soit une courbe Γ dont on connaît l'équation $\mathrm{P}(x, y)$ en coordonnées rectangulaires relativement à un axe $\mathsf{A}x$. On se propose de déterminer en un point C de la courbe d'abscisse $\mathsf{AM} = x$ et d'ordonnée $\mathsf{CM} = y$ la normale à cette courbe, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à la tangente.

Si P est le point d'intersection de cette droite avec l'axe des x, le cercle de centre P qui passe par C sera tangent à la courbe. Il admettra en effet au point C une tangente commune avec la courbe Γ.

Si P est seulement voisin de ce point, le cercle coupera la courbe Γ en un second point C' qui se rapprochera indéfiniment du point C, lorsque le point P se rapprochera indéfiniment du pied de la normale. On obtiendra ainsi le point cherché lorsque les deux points C et C' concideront.

Posons $\mathsf{CP} = s$ et $\mathsf{AP} = v$. Dans le repère orthogonal d'axe $\mathsf{A}x$, le cercle de centre P qui passe par le point C admet pour équation

$$s^2 = y^2 + (v - x)^2. \tag{5.1}$$

Éliminant y — ou x — entre l'équation $\mathrm{P}(x, y) = 0$ de la courbe algébrique et l'équation (5.1) du cercle, on obtient une équation polynomiale $\mathrm{Q}(x) = 0$, en général de degré $2n$ du fait des termes carrés en x et y dans l'équation du cercle, dont les racines donnent les abscisses des points d'intersection de la courbe et du cercle. Le cercle est tangent à la courbe si et seulement si le polynôme $\mathrm{Q}(x)$ possède une racine double e qui est égale à l'abscisse x du point C.

On peut écrire alors une équation à coefficients indéterminés de la forme

$$a_0+a_1x+...+a_{2n-1}x^{2n-1}+x^{2n} = (x-\alpha)^2(b_0+b_1x+...+b_{2n-3}x^{2n-3}+x^{2n-2}). \tag{5.2}$$

a_0, ..., a_{2n-1} sont les coefficients du polynôme résultant $\mathrm{Q}(x)$. Ils dépendent d'une part des coefficients de l'équation de la courbe qui sont connus, d'autre part, de s et v qui sont inconnues. α est l'abscisse du point C. b_0, ..., b_{2n-3} sont inconnues.

On déduit ainsi de l'ensemble des identités établies pour chacun des coefficients un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues en employant la méthode des coefficients indéterminés. En éliminant successivement les $2n-2$ coefficients indéterminés b_0, ..., b_{2n-3} ainsi que s, on parvient finalement à une équation en v et x qui permet de déterminer v.

Pour donner une idée d'un tel système, arrêtons-nous aux cubiques[8], c'est-à-dire à l'ordre 3 pour l'équation $\mathrm{P}(x,y)=0$ et donc en général au degré 6 pour le polynôme résultant $\mathrm{Q}(x)$.

On obtient ainsi dans le cas général d'une cubique d'équation

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+ky+l=0 \tag{5.3}$$

un polynôme résultant

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(x) &= [ax^3+cx(s^2-(v-x)^2)+ex^2+g(s^2-(v-x)^2)+hx+l]^2 \\ &- (s^2-(v-x)^2)[bx^2+d(s^2-(v-x)^2)+fx+k]^2\end{aligned} \tag{5.4}$$

dont les coefficients sont donnés après développement par les expressions

[8]On peut trouver une présentation générale à l'ordre n avec des formules de sommation dans [Panza(2005), p. 88-92].

suivantes divisées par $(a-b)^2+(c-1)^2$ pour obtenir un polynôme unitaire[9] :

$$\left\{\begin{array}{l}
a_0 = l^2 + (2gl - k^2)s^2 + (-2dk + g^2)s^4 - d^2s^6 + (4dk - 2g^2)s^2v^2 \\
+3d^2s^4v^2 + (-2gl + k^2)v^2 - 3d^2s^2v^4 + (-2dk + g^2)v^4 + d^2v^6 \\
a_1 = 2hl + (2cl - 2fk + 2gh)s^2 + (2cg - 2df)s^4 + (4g^2 - 8dk)s^2v \\
-6d^2s^4v + (4gl - 2k^2)v + (-4cg + 4df)s^2v^2 + (-2cl + 2fk - 2gh)v^2 \\
+(12d^2)s^2v^3 + (8dk - 4g^2)v^3 + (2cg - 2df)v^4 - 6d^2v^5 \\
a_2 = (2el - 2gl + h^2 + k^2) + (-2bk + 2ch + 4dk + 2eg - f^2 - 2g^2)s^2 \\
+(-2bd + c^2 + 3d^2)s^4 + (8cg - 8df)s^2v + (4cl - 4fk + 4gh)v \\
+(4bd - 2c^2 - 18d^2)s^2v^2 + (2bk - 2ch - 12dk - 2eg + f^2 + 6g^2)v^2 \\
+(-8cg + 8df)v^3 + (-2bd + c^2 + 15d^2)v^4 \\
a_3 = (2al - 2cl + 2fk + 2eh - 2gh) + (2ag - 2bf + 2ce - 4cg + 4df)s^2 \\
+(-8bd + 4c^2 + 12d^2)s^2v + (-4bk + 8dk + 4eg - 2f^2 - 4g^2)v \\
+(-2ag + 2bf - 2ce + 12cg + 4ch - 12df)v^2 + (8bd - 4c^2 - 20d^2)v^3 \\
a_4 = (2ah + 2bk - 2ch - 2dk + e^2 - 2eg + f^2 + g^2) \\
+(2ac - b^2 + 4bd - 2c^2 - 3d^2)s^2 + (4ag - 4bf + 4ce - 8cg + 8df)v \\
+(-2ac + b^2 + bc^2 - 12bd + 15d^2)v^2 \\
a_5 = (2ae - 2ag + 2bf - 2ce + 2cg - 2df) \\
+(4ac - 2b^2 + 8bd - 4c^2 - 6d^2)v
\end{array}\right. \tag{5.5}$$

D'autre part, à partir de l'identité algébrique

$$\mathrm{Q}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + x^6 \tag{5.6}$$
$$= (x-\alpha)^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4) \tag{5.7}$$

on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha^2 b_0 = a_0 \\
-2\alpha b_0 + \alpha^2 b_1 = a_1 \\
b_0 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_2 = a_2 \\
b_1 - 2\alpha b_2 + \alpha^2 b_3 = a_3 \\
b_2 - 2\alpha b_3 + \alpha^2 = a_4 \\
b_3 - 2\alpha = a_5
\end{array}\right. \tag{5.8}$$

La comparaison des expressions des coefficients a_0, ... a_5 du polynôme résultant $\mathrm{Q}(x)$ et du système (5.8) obtenu en usant de la méthode des coefficients indéterminés, qui exprime le fait que ce polynôme $\mathrm{Q}(x)$ admet α

[9] On conservera néanmoins les mêmes notations a_i pour ne pas alourdir une formule déjà compliquée.

comme racine double, montre clairement que l'élimination successive des coefficients b_0, ..., b_3 est simple et qu'elle peut même être donnée par un algorithme[10]. Au contraire la détermination de s et v est difficile et ne va pas de soi comme la donation d'un algorithme pour ces calculs à la vérité impraticables dans le cas général.

5.1.2 Les difficultés d'une interprétation modernisante

Une interprétation modernisante qui situe d'emblée la méthode des normales dans la Géométrie algébrique de la fin du dix-septième siècle achoppe sur un premier obstacle de taille qui, du reste, a déjà été relevé par l'historiographie : les difficultés d'application d'une telle méthode à une courbe algébrique quelconque dont l'équation présente des puissances de x ou y impaires apparaîssent insurmontables en général. D'ailleurs, même dans le cas d'équations plus simples comme celle du *folium*, qui est donnée par $x^3 + y^3 = nxy$, dont Descartes propose à ses adversaires de déterminer la tangente[11], la complication est réelle du fait de la seule présence de puissances impaires des variables. Bien sûr, c'est le choix de toucher la courbe par un cercle et non par une droite, qui conduit en général à l'élévation au carré des termes qui composent l'équation qui est à l'origine d'une telle difficulté.

Les tenants de l'interprétation modernisante que nous avons citée présentent deux arguments qui sont corrélés et qu'on illustrera par deux citations empruntées à Tannery et Duhamel qui nous paraissent typiques : le premier porte sur la difficulté d'application de la méthode, le second sur le concept de tangente à l'œuvre dans celle-ci.

Tannery écrit ainsi :

> J'ai à peine besoin de faire remarquer que sa méthode analytique [la méthode des normales de Descartes] aurait été très sim-

[10]Nous reviendrons en détail sur cette question. Cf. *infra* [section 5.5, 186].

[11] Cf. la lettre de Descartes à Mersenne de janvier 1638 : [Descartes(1964-1974), I, p. 490-491]. On trouve la réponse de Fermat dans un écrit de 1638 annexé à une lettre à Mersenne de juin-juillet 1638. Cf. [Fermat(1638b), p. 156-157 (resp. p 327-328)]. Il n'est pas anodin que Descartes propose dans une autre lettre à Mersenne du 23 août 1638 pour tromper Roberval l'équation $x^3 + 3xy^2 = nx^2 - ny^2$ sans mentionner qu'il s'agit de l'équation du même *folium* ou galand rapportée à un autre repère après un changement de coordonnées. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 316-317, 336 et éclaircissement p. 342]. Dans ce cas, en effet, on peut appliquer la méthode en éliminant y^2 et obtenir ainsi sans élévation du degré une équation résultante cubique en x.

> plifiée si, au lieu de couper par un cercle à éléments arbitraires la courbe à laquelle il est proposé de mener une tangente, il l'eût coupée par une droite passant par les mêmes points d'intersection, c'est-à-dire s'il eut cherché *directement*[12], par son analyse, la tangente et non la normale.[13]

Duhamel écrit ainsi :

> On voit que ce principe très simple sur lequel est fondée la méthode peut s'énoncer ainsi : une ligne quelconque variable qui coupe une courbe donnée en un point fixe et en un second point qui se rapproche indéfiniment du premier, devient tangente à cette courbe quand les deux points d'intersection coïncident.[14]

Ainsi, si l'on s'accorde à penser que Descartes dispose du concept de tangente évoqué par Dumamel dans sa méthode des normales, qu'il entend appliquer sa méthode à une courbe algébrique quelconque, on ne peut que se demander pourquoi il n'a pas choisi *directement* la droite tangente et non le cercle tangent. Car Descartes pouvait-il ignorer la complication de sa méthode, du moins ainsi entendue ? Cela paraît difficile. Mais s'il la vante tant par ailleurs, n'est-ce pas qu'il entendait l'appliquer d'une autre façon. A nouveau, une fois une telle interprétation accordée, on peut apporter deux réponses[15] : soit Descartes a ignoré une telle simplification de sa méthode, soit il ne s'agit de la part de Descartes que d'un choix philosophique ou bien rhétorique, donc extrinsèque aux mathématiques, puisqu'il ne peut être justifié — au contraire il est même dénié — par des considérations algébriques.

Il nous semble que de telles réponses devraient conduire à discuter les postulats interprétatifs précédents et à poser les deux questions suivantes : Descartes entendait-il appliquer sa méthode de cette manière à une courbe algébrique quelconque ? Disposait-il véritablement dans la *Géométrie* de 1637 d'un nouveau concept de tangente relativement aux Géomètres Grecs ? Ces

[12] C'est moi qui souligne.

[13] Cf. [Tannery(1899), p. 336].

[14] Cf. [Duhamel(1864), p. 285]. Cette interprétation de la tangente remonte à Lagrange. Cf. [Lagrange(prairial an V, 1797), p. 117]. Cf. également sur cette question des tangentes la conférence de Massimo Galuzzi [Galuzzi(2006)] ainsi que la conférence de Roshdi Rashed [Rashed(2006)] qui rapproche la conception de la tangente d'Apollonius de celle qu'on attribue aux mathématiciens du dix-septième siècle, qui consiste à regarder la tangente comme une sécante en un point double à la courbe.

[15] Pour une autre interprétation, on peut consulter l'article de Massimo Galuzzi. Cf. [Galuzzi(1980), p. 48-50].

deux questions aboutissent à une troisième qui serait : La méthode des normales de Descartes dans la *Géométrie* de 1637 ne relève-t-elle que de la Géométrie Algébrique ou également de la Géométrie classique ?

5.2 Deux remarques

Une telle présentation modernisante de la méthode des normales nous suggère deux remarques et questions.

Tout d'abord, on peut remarquer que Descartes se donne une méthode des normales et non des tangentes. Bien sûr, posséder l'une, c'est disposer de l'autre car les deux problèmes sont équivalents. Néanmoins, le choix cartésien d'étudier une courbe géométrique en considérant sa normale et non la tangente est bien différent de celui de Fermat, au delà de la différence des méthodes. Il conduit par exemple à transformer le problème des tangentes en un problème métrique alors qu'il s'agit d'un problème affine[16].

Il nous faut donc répondre d'abord à la question de savoir en quoi la détermination des normales à une courbe géométrique permet d'étudier celle-là. Une réponse, moderne, serait de dire qu'une telle étude peut conduire aux notions de courbure et de cercle osculateur et donc, nous permettre d'aller plus loin dans la connaissance de la courbe que là où une simple étude des tangentes nous aurait conduit, comme en témoigne le calcul différentiel moderne, en ce qu'il s'agit là de propriétés du second ordre de dérivation. Néanmoins, une telle réponse nous mène au danger de projeter une conception et un résultat qui n'apparaîtront sur la scène mathématique qu'avec les recherches de Newton de 1664-1665, certes tirées des lectures par ce dernier de la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661[17].

Il existe encore d'autres réponses, considérant la méthode des normales de Descartes comme *de facto* une méthode des tangentes, qui nous paraissent également devoir être écartées. Ainsi, par exemple, il ne paraît pas qu'un tel choix de la part de Descartes reflète l'idée « de considérer les lignes courbes comme des polygones rectilignes composés d'une infinité de côtés » ainsi que l'affirme par exemple Rabuel dans sa présentation initiale de la méthode[18], choix qui pourrait être plus proche des conceptions de Fermat[19], ou bien

[16] Cf. la remarque de Jean Itard *in* [Itard(1974), p. 340-341].
[17] Cf. [Panza(2005), p. 183-241].
[18] Cf. [Rabuel(1730), p. 297-298].
[19] Cf. [Itard(1948), p. 244-251].

de concevoir une ligne courbe comme la trajectoire d'un mouvement à la manière de Roberval. Comme on va le voir dans la suite, ce choix paraît renvoyer au contraire, d'une part, de l'aveu même de Descartes, au contexte de la dioptrique, et relever d'autre part d'une tradition géométrique ancienne de détermination des lignes *minima* et des normales à des courbes géométriques particulières, comme le cercle chez Euclide, ou bien les coniques chez Apollonius.

Si, plus tard, Debeaune dans sa reformulation des *Notes Brèves*[20], comme Descartes en prétendant démontrer la méthode de Fermat par une analyse algébrique dans une lettre à Hardy de juin 1638[21], considéreront les tangentes et non plus les normales à une courbe géométrique donnée par une équation algébrique, ce sera à la suite de la controverse avec Fermat, comme nous essaierons de le montrer dans un prochain chapitre[22].

Du reste, la postérité de ce problème dans la théorie des courbes de la fin du dix-septième siècle peut conduire l'historien des mathématiques à focaliser son interprétation et son analyse de la méthode des normales de Descartes sur la relation de celle-ci au problème des tangentes, en évacuant la question du choix par Descartes de la normale.

Un exemple parmi d'autres de cette réinterprétation apparaît ainsi dans la Préface de l'*Analyse des Infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* du Marquis de l'Hospital. Celui-ci y écrit :

> Il [Descartes] n'a pourtant pas laissé de s'en servir [l'« analyse ordinaire » *i.e.* l'analyse algébrique finie] heureusement dans la *Recherche des Tangentes*[23] ; & la Méthode qu'il découvrit pour cela, luy parut si belle, qu'il ne fist point de difficultés de dire, que ce Problème « étoit le plus utile & le plus général, non seulement qu'il sçut, mais même qu'il eût jamais desiré de sçavoir en Géométrie.[24]

Ainsi, et c'est sans doute une conséquence de la lecture de la *Géométrie* de 1637, et plus particulièrement des éditions latines de cette dernière de 1649 et 1659-1661 par les mathématiciens de l'époque, la création du calcul différentiel par Leibniz mais aussi du calcul des fluxions par Newton a

[20]Cf. *infra* [section 10.5, p. 365].
[21]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 170-173] et *infra* [section 9.5, p. 336].
[22]Cf. *infra* [chapitre 9, p. 303].
[23]C'est moi qui souligne.
[24]Cf. [L'Hospital(1696), Préface (non paginée)].

détourné les mathématiciens, dès la fin du dix-septième siècle, d'une lecture de la méthode de Descartes comme étant premièrement une méthode des normales et non des tangentes, ce qu'elle était pourtant bien dans la *Géométrie* de 1637, comme en témoigne la préface de l'Hospital.

Bien que le passage décrit précédemment s'opère en 1638 à l'occasion de la controverse avec Fermat, comme on l'a dit et comme on essaiera de le montrer plus en détail par la suite, il demeure néanmoins une question qui nous semble devoir être éclaircie : quel était le problème initial auquel répondait la méthode des normales ? Nous verrons dans la prochaine section que Descartes lui-même par son exposé introductif, qui a été peu, voire pas commenté jusqu'ici, nous apporte peut-être une réponse.

Notre seconde remarque, toujours liée au choix de la normale et non de la tangente par Descartes, porte sur l'emploi qu'il fait dans sa méthode des normales du cercle tangent dont le centre se situe sur l'axe des abscisses. Cet usage du cercle tangent complique singulièrement les calculs puisqu'il élève en général l'équation du degré n au degré $2n$ lors de l'élimination, comme on l'a vu auparavant dans le cas d'une cubique quelconque, à moins qu'il n'apparaisse pas de termes de degré impair en x — ou bien en y — dans l'équation de la courbe, comme c'est le cas pour les deux premiers exemples choisis par Descartes, le premier étant celui de l'ellipse[25]. Le choix par Descartes d'une méthode des normales apparaît donc en outre coûteux sur le plan de l'algorithme de calcul.

On sait d'autre part que Florimond Debeaune procurera plus tard dans ses *Notes Brèves* une méthode des tangentes en considérant l'intersection de la droite tangente et de la courbe et en usant du théorème des triangles semblables dans son analyse algébrique. Il apportera ainsi une solution plus aisée puisque lors de l'élimination on obtient cette fois-ci une équation du même degré que celle de la courbe.

Une autre remarque, plus anodine, touche au théorème employé par Descartes pour établir l'équation du cercle. En effet, en usant pour ce faire du théorème de Pythagore, Descartes s'oblige à ne considérer que des repères à coordonnées rectangulaires. Certes, il est possible d'adapter la méthode au cas général d'un repère à coordonnées obliques, mais il faudra alors consentir à introduire encore un peu plus de complexité dans les calculs, déjà em-

[25]Du fait de la forme des équations des coniques que Descartes a tirées de sa lecture des propositions 11-13 du livre I *Coniques* d'Apollonius, où il n'est pas question d'équations mais de *symptoma*, c'est-à-dire, pour le dire vite, de propriétés essentielles mais non existentielles des sections de cône, il en aurait été de même pour la parabole et l'hyperbole.

barrassés du fait du choix du cercle tangent[26]. Il faudrait ainsi remplacer l'équation (5.1) du cercle par l'équation

$$y^2 = s^2 - (v - x)^2 + 2y(v - x)\cos\theta, \tag{5.9}$$

où θ désigne l'angle de projection des ordonnées. On introduirait ainsi une difficulté dans l'élimination de la variable y du fait de l'apparition du terme $2y(v - x)\cos\theta$ dans l'équation précédente[27].

Qu'on compare donc les deux méthodes proposées par Descartes dans la *Géométrie* de 1637 et par Debeaune dans les *Notes Brèves* de 1638-1639, et on se rendra compte du changement opéré en deux ans. Ces deux méthodes sont caractérisées selon nous par trois données : l'objet du problème, l'objet « instrument de recherche »[28], le théorème employé. Dans la *Géométrie*, Descartes considère le problème des normales, introduit le cercle tangent à la courbe algébrique et emploie le théorème de Pythagore tandis que Debeaune considère le problème des tangentes, n'introduit pour ce faire que la tangente à la courbe algébrique, et emploie le théorème des triangles semblables.

Les choix présidant à ces trois données des méthodes sont intimement liés. Aussi, l'étude de ces trois composantes prises ensemble et de leurs relations mutuelles au sein des deux méthodes successives nous paraît essentielle pour bien comprendre la genèse de la méthode des normales, puis de la méthode des tangentes.

Une même question dirigera pour ce faire l'étude qui va suivre. Il ressort des remarques précédentes qu'elle peut être posée en fait de trois façons différentes selon le cadre qu'on choisit : Pourquoi Descartes donne-t-il une méthode des normales plutôt qu'une méthode des tangentes ? Pourquoi emploie-t-il un cercle tangent et non une droite tangente ? Pourquoi emploie-t-il le théorème de Pythagore et non celui des triangles semblables ?

De surcroît, comme on l'a vu auparavant[29], une réponse à ces questions semble devoir passer par une attention apportée au rapport qu'entretient la méthode des normales avec une tradition géométrique classique, plutôt qu'à la seule recherche d'une théorie des courbes algébriques déjà à l'œuvre dans la *Géométrie* de 1637.

[26] Ce que remarquera Beaugrand dans un pamphlet publié en 1640 et étudié *infra* [section 8.3.1, p. 276].

[27] Comme le remarque Marco Panza dans [Panza(2005), n. 19, p. 88].

[28] J'emprunte le terme à Enrico Giusti. Cf. [Giusti(2000), p. 44-45] et *supra* [n. 27, p. 21].

[29] Cf. *supra* [section 5.1.2, p. 164].

5.3 La présentation cartésienne dans la *Géométrie* de 1637

5.3.1 Mesurer les angles

Il importe à présent, pour bien comprendre ce qui pût motiver le choix de Descartes de donner une méthode des normales, de citer *in extenso* la présentation initiale de Descartes :

> *Et enfin pour ce qui est de toutes les autres proprietés qu'on peut attribuer aux lignes courbes*[30], *elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes.* Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, aux poins ou elles sont rencontrées par celles avec qui elles font *les angles qu'on veut mesurer*, ou, ce que ie prens icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes, la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée a trouuer, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy ie croiray auoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lorsque i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits sur tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçavoir en Geometrie.[31]

Dans cette présentation, Descartes propose une double réduction pour ce qui regarde l'étude d'une courbe algébrique. Tout d'abord, toutes les propriétés ne procédant ni des symétries de la courbe qui s'expriment à travers la forme et la simplicité de l'équation — diamètres, axes, centres —, ni de questions de quadrature, que Descartes n'aborde pas au sein de la *Géométrie*, relèvent de la mesure d'angles pris entre cette courbe et d'autres lignes.

Descartes ne nous dit pas s'il s'agit de lignes droites ou de lignes courbes, mais l'usage qu'il fait du terme « ligne » dans la *Géométrie* peut laisser

[30] Les propriétés d'une courbe géométrique dont l'équation algébrique est donnée précédemment mentionnées par Descartes dans ce même paragraphe apparaissent au sein des solutions des problèmes suivants : la recherche de diamètres, axes, centres, et par là le choix de la construction géométrique la plus aisée parmi celles qui découlent des déterminations précédentes, ainsi que les problèmes de quadrature. Cf. [Descartes(1637c), p. 412-413].

[31] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1637c), p. 413].

raisonnablement penser qu'il s'agit de lignes droites[32].

Une ligne droite étant donnée, la mesure de l'angle de la courbe algébrique avec celle-ci en un point d'intersection donné est donc définie et déterminée par l'angle formé par la normale à la courbe algébrique et la ligne, Descartes indiquant qu'on se ramène alors au cas de l'angle de deux droites.

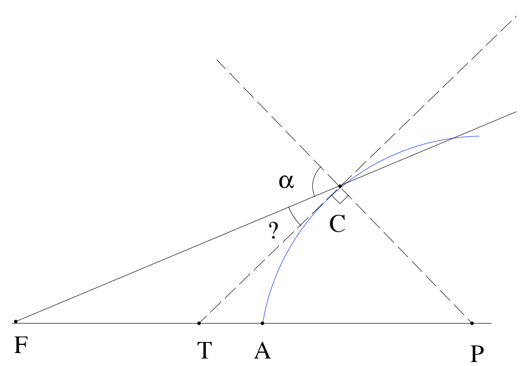

FIG. 5.1 – Mesures de l'angle formé en un point par une courbe algébrique et une ligne droite.

Quant à la conclusion célèbre du paragraphe cité, si l'on s'en tient aux remarques précédentes, le « problesme le plus utile et le plus general... » ne serait pas selon Descartes primitivement celui des normales, mais plutôt celui de la mesure d'angles pris entre une courbe algébrique et une ligne droite. Mais pourquoi ce problème présenterait-il un tel enjeu ? Et dans quel contexte apparaît-il ? Un contexte bien déterminé nous semble permettre de donner une réponse à cette question : il s'agit de la théorie de la dioptrique.

Mais avant de considérer plus en détail ce dernier point et de tenter de désigner l'enjeu pointé par Descartes[33], intéressons-nous à l'objet mathématique « normale » et à la définition esquissée par Descartes dans la présentation de sa méthode. Notre perspective d'étude pour ce faire sera de

[32]Dans la *Géométrie*, Descartes emploie les termes « ligne », « ligne droite », « ligne courbe », « courbe ». Il arrive assez fréquemment que le premier de ces termes désigne implicitement une ligne droite, au contraire il ne désigne jamais seul une ligne courbe— Descartes emploie par exemple en outre un adjectif qualificatif comme dans « lignes plus composées » —.

[33]Cf. *infra* [chapitre 7, p. 229].

situer le texte cartésien et sa modernité au regard d'une tradition géométrique classique constituée par le livre V des *Coniques* d'Apollonius qui comporte une théorie des droites *extrema* tirées d'un point à une conique, ainsi que le livre III des *Éléments* d'Euclide consacré au cercle. Nous tenterons ainsi d'éclairer les relations entre tangente, droite *minimum* et normale au sein des trois théories d'Euclide, Apollonius et Descartes.

5.3.2 Normales et tangentes

Si l'on considère la *Géométrie* de 1637, il est clair que Descartes propose une théorie des normales, qu'il définit préalablement comme la droite perpendiculaire à la tangente au point de contact. Il présente d'ailleurs sa méthode comme une

> Facon generale pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données ou leurs contingentes a angles droits.[34]

C'est là une différence avec Apollonius qui, se proposant d'étudier dans le Livre V les lignes *minima* tirées d'un point à une conique. Une caractérisation de la normale n'apparaît qu'ultérieurement dans ce même livre au sein de propositions et fait l'objet de démonstrations comme on le verra plus en détail dans la suite[35].

Après cette brève incise, Descartes ne fait nulle mention de la droite tangente dans la suite de sa méthode. Dans la figure 5.3, celle-ci n'apparaît pas. CF et CG sont ainsi des sécantes intervenant dans la définition et la construction de la première ovale cartésienne. Et, au sein du texte, c'est non pas la droite tangente, mais un cercle tangent dont la donnée apparaît comme équivalente à celui de la normale. En effet, après avoir réduit la détermination de la normale à la celle de son point d'intersection P avec l'axe de la courbe algébrique, Descartes écrit :

> Et a cet effect il faut considerer que, si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, sans la coupper : mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche ou plus esloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre.[36].

[34]Cf. [Descartes(1637c), p. 413].
[35]Cf. [section 6.3, p. 201].
[36]Cf. [Descartes(1637c), p. 417].

La définition de la normale, à savoir la droite perpendiculaire à la tangente, est donc vite abandonnée après avoir été brièvement évoquée. La véritable définition opératoire de la normale apparaît comme le rayon du cercle tangent dont le centre se trouve sur l'axe de la courbe algébrique. En effet, il existe bien sûr une infinité de cercles tangents à la courbe parmi lesquels un seul a son centre sur l'axe de la courbe.

On peut remarquer que Descartes, pour qualifier la tangence du cercle à la courbe géométrique, paraît se référer à une définition euclidienne classique de la tangente, comme la droite qui touche la courbe sans la couper[37], qui apparaît dans les définitions 2 et 3 du Livre III des *Eléments* d'Euclide[38]. La formulation de Descartes n'est d'autre part pas symétrique : de la même façon que la définition 3 du Livre III des *Eléments* d'Euclide traite d'une droite tangente au cercle, Descartes traite d'un cercle tangent à la courbe.

Mais l'affirmation précédente de Descartes peut-elle être démontrée sans faire usage d'un nouveau concept de tangente ? Cela est non seulement tout à fait possible comme nous allons le voir mais une telle démonstration ne fait que répéter sous un autre « habillage » une démonstration d'Apollonius.

Procédons par analyse. Il suffit donc, en supposant l'existence d'un cercle tangent et d'une droite tangente en un point donné d'une courbe algébrique, de démontrer que le rayon d'un tel cercle est perpendiculaire à la tangente au point de contact. Pour ce faire, nous allons procéder par l'absurde.

Soient donc le cercle tangent au point C à la courbe AC dont le centre pris sur l'axe de celle-ci est P et CT la tangente à la courbe qui coupe l'axe au point T. Supposons que l'angle $\widehat{\mathsf{PCT}}$ ne soit pas droit. Soit PD la droite issue du point P' perpendiculaire à la tangente au point D et qui coupe la courbe au point C'. Alors on a $\mathsf{PC} > \mathsf{PD} > \mathsf{PC}'$ car la perpendiculaire est minimale et la tangente tombe « à l'extérieur » de la courbe. Ainsi le cercle de centre P traverserait la courbe, d'où la contradiction. On a donc nécessairement $\mathsf{D} \equiv \mathsf{C} \equiv \mathsf{C}'$.

On vient donc de démontrer l'assertion de Descartes, énoncée par lui avec un vocabulaire géométrique classique, en usant d'une part d'arguments uniquement géométriques, et en se réclamant d'autre part d'une conception classique de la tangente. Les arguments qu'on a employés ne sont en fait que la reformulation et la généralisation analytiques de la démonstration

[37]Pour un exposé synthétique éclairant sur la notion de tangente dans l'Antiquité, on peut consulter [Itard(1948), p. 239-241] et [Rashed(2006), p. 1-9].

[38]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 386].

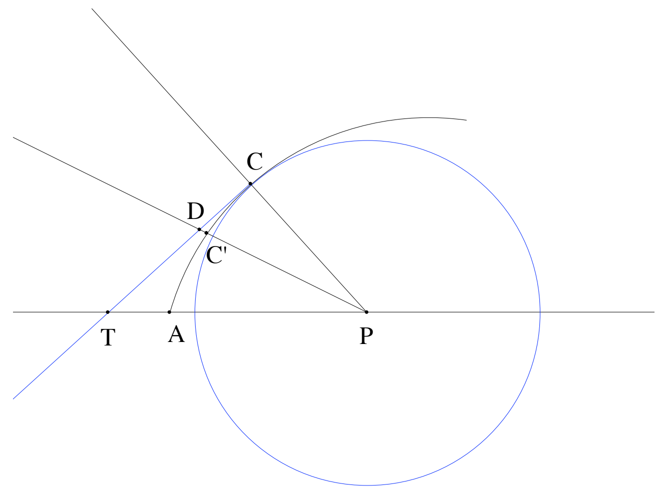

FIG. 5.2 – Le cercle et la droite tangents à la courbe

synthétique d'Apollonius de la proposition 32 du Livre V des *Coniques*[39] qui établit qu'une droite perpendiculaire à la tangente au point de contact est *minimum*, en remplaçant dans l'énoncé de l'argument d'Apollonius droite *minimum* par cercle tangent[40] et conique par courbe algébrique quelconque. Nous étudierons dans la suite ces propositions et leur démonstration[41].

Nous pouvons néanmoins déjà remarquer qu'une telle reformulation du théorème, bien qu'elle ne s'accompagne pas d'une modification réelle de la démonstration géométrique de ce dernier, désigne naturellement à présent le point de contact comme un point double d'intersection. C'est une telle désignation qui va permettre d'assurer un moyen terme entre le substrat géométrique de la méthode et la composante arithmético-algébrique de celle-ci.

D'ailleurs, la citation donnée précédemment se décompose en deux parties dont la première, strictement géométrique, décrit le passage de la normale au cercle tangent, et la seconde, du cercle tangent à un cercle sécant, opérant

[39]Cf. [Apollonius(1959), p. 388-389], [Apollonius(1990), I, p. 94-96]

[40]La droite *minimum* demeure bien qu'elle ne soit plus mise en évidence : c'est le rayon PC du cercle tangent.

[41]Cf. *infra* [section 6.4.4, p. 213].

ainsi une transition avec la seconde partie de la méthode qui consiste en une analyse arithmético-algébrique. Descartes, disposant en effet d'une théorie des équations, pourra parler du cercle coupant la courbe et du cercle touchant la courbe de la même façon, en étudiant les racines du polynôme résultant[42].

Pour comprendre à présent le lien que nous voulons établir entre Apollonius et Descartes, il nous faut rappeler la façon dont se décompose la méthode des normales de Descartes. Celui-ci procède selon une double analyse dont les deux parties sont de nature très différente, comme l'a remarqué Marco Panza dans la reconstruction qu'il donne de cette méthode[43].

5.3.3 Une analyse géométrique

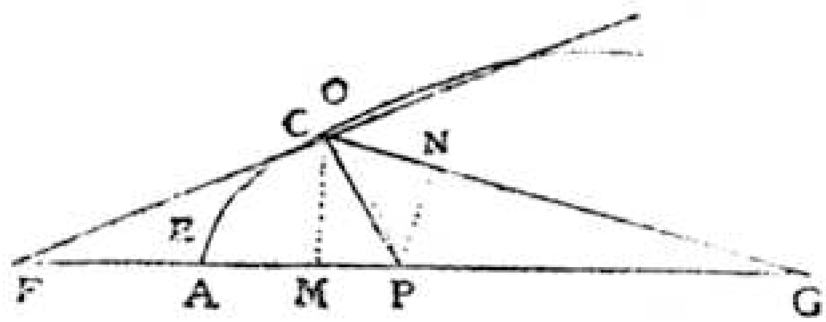

FIG. 5.3 – La *Géométrie* (1637), p. 341.

La première de ces deux analyses est en effet classique et géométrique. Elle conduit à éliminer une des deux coordonnées x ou y entre l'équation à coordonnées rectangulaires $\mathrm{P}(x, y) = 0$ donnée par la courbe relativement à un axe $\mathsf{A}x$ et l'expression

$$s^2 = y^2 + (v - x)^2 \tag{5.10}$$

formée par la normale $\mathsf{PC} = s$, l'abscisse $\mathsf{AM} = x$, l'ordonnée $\mathsf{CM} = y$ et le segment compris entre l'origine et le pied de la normale $\mathsf{PM} = v$, obtenue

[42]Unguru et Fried insistent sur cet aspect qui différencie Descartes d'Apollonius, si on se réfère en particulier au Livre IV des *Coniques* consacré aux contacts entre deux coniques. Cf. [Unguru et Fried(2001), p. 133-135].

[43]Cf. [Panza(2005), p. 84-92].

par Descartes en appliquant le théorème de Pythagore au triangle CMP[44]. Nous n'entrons pas ici dans le détail car nous allons voir qu'on retrouve exactement la même manipulation, conçue néanmoins différemment, dans les propositions V.4 et V.8 des *Coniques* d'Apollonius.

Une interprétation possible de ce calcul et de l'expression à laquelle il conduit n'est donnée par Descartes qu'après une série de trois exemples où il traite le cas de l'ellipse, d'une conchoïde de parabole, et d'une ovale[45]. Il s'agit pour le moment d'« employer [une telle équation] à trouver v ou s, qui déterminent le point P qui est demandé ». Ce n'est qu'à ce moment-là que Descartes introduit le cercle tangent, comme on l'a vu dans la section précédente, mais sans avoir précisé que l'équation (5.1) donnée par le théorème de Pythagore était celle du cercle rapportée à l'axe de la courbe.

Il faut[46] à ce point noter l'exception que constituent le cercle et la droite relativement aux autres courbes algébriques qui sont données par des équations. Ces deux lignes peuvent en effet être exprimées respectivement par des équations ou des proportions en employant le théorème de Pythagore et le théorème des triangles semblables, mais de telles équations ou proportions n'ont pas le même statut que les équations des autres courbes algébriques. Elles n'apparaissent pas en effet mises en évidence en tant que telles par Descartes dans l'emploi qu'il fait de ces dernières, comme on peut le voir dans la résolution du problème de Pappus pour les droites et dans la méthode des normales pour le cercle. Dans le cas du cercle, Descartes dispose d'ailleurs d'une autre équation que celle tirée du théorème de Pythagore, qui est de la même forme que celle tirée du *symptoma* de l'ellipse, à savoir l'équation $y^2 = 2rx - x^2$ rapportée à un axe portant le rayon r. Descartes utilisera d'ailleurs cette dernière équation à l'occasion de la controverse sur les tangentes avec Fermat, dès lors qu'il considérera le cercle isolèment.

La distinction entre ces deux équations du cercle est importante dans la mesure où, bien que Descartes ne considère pas uniquement des repères intrinsèques à une courbe géométrique, comme c'est en fait le cas pour le coniques où il s'appuie sur les *symptoma* des courbes données par des équations, à notre connaissance, il ne manipule jamais ensemble deux courbes géométriques distinctes qu'il aurait rapportées au même axe, à l'exception

---

[44] Cf. *supra* [section 5.1.1, p. 161], [Panza(2005), p. 85-86], et pour le texte [Descartes(1637c), p. 413].

[45] Cf. [Descartes(1637c), p. 414-416] et *infra* [section 5.3.5, p. 179].

[46] Le développement qui suit est tiré de discussions avec Massimo Galuzzi qui a insisté sur une telle différence lors de conférences consacrées à la Géométrie cartésienne.

notable d'une courbe et d'un cercle, et d'une courbe et d'une droite, avec la réserve toutefois que les équations qui expriment ces dernières ne sont que l'expression des théorèmes géométriques qui fondent la géométrie euclidienne — le théorème de Pythagore et le théorème des triangles semblables — et ne sont jamais reconnues explictement comme des équations exprimant le cercle ou la droite relativement à un rapport donné[47].

Ainsi, sans avoir précisé auparavant que l'équation (5.1) référait au cercle, Descartes va opérer une transition entre sa première analyse géométrique classique et une seconde analyse arithmético-algébrique, grâce à la théorie des équations dont il dispose et qu'il développera dans le Livre III de la *Géométrie*, en indiquant que les racines de l'équation obtenue après élimination d'une des deux inconnues entre l'équation de la courbe et l'équation donnée par le théorème de Pythagore sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec le cercle sécant. Citons Descartes :

> Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle couppe la ligne courbe CE, l'equation par laquelle on cherche la quantité x ou y, ou quelque autre semblable, en supposant $\mathsf{PA}[= v]$ & $\mathsf{PC}[=$

[47]Le fait que l'usage exclusif de ces deux théorèmes constitue un des principes fondamentaux de sa méthode pour résoudre les problèmes géométriques a été exposé plus tard par Descartes dans une lettre à Elisabeth qu'on date de novembre 1643 au sujet de la résolution du problème des trois cercles. Descartes écrit ainsi :

> I'observe tousiours, en cherchant une question de Geometrie, que les lignes, dont ie me sers pour la trouver, soient paralleles, ou s'entrecouppent à angles droits, le plus qu'il est possible ; & et ie ne considre point d'autres Theoremes, sinon que les costez des triangles semblables ont semblable proportion entr'eux, & que, dans les triangles rectangles, le quarré de la base est égal aux deux quarrez des costez. Et ie ne crains point de supposer plusieurs quantitez inconnus, pour reduire la question à tels termes, qu'elle ne depende que de ces deux Theoremes ; au contraire, i'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, ie voy plus clairement tout ce que ie fais, & en les demeslant ie trouve mieux les plus courts chemins, & m'exempte de multiplications superfluës ; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, & qu'on se serve d'autres Theoremes, bien qu'il puisse arriver, par hazard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutesfois il arrive quasi tousiours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la demonstration du Theoreme dont on se sert fort prsente en l'esprit ; & en ce cas on trouve, quasi toujours, qu'il depend de la consideration de quelques triangles, qui sont ou rectangles, ou semblables entr'eux, & ainsi on retombe dans le chemin que je tiens.

Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 38-39].

> *s*] être connües, contient necessairement deux racines, qui sont inesgales. [...] mais plus ces deux poins [d'intersection du cercle avec la courbe], C, & E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines, & enfin elles sont entierement esgales, s'ils sont tous deux ioins en un, c'est a dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe CE sans la coupper.[48]

5.3.4 Une analyse algébrique d'origine arithmétique

Une seconde analyse, celle-ci non plus d'origine géométrique et classique, mais d'origine arithmétique et moderne suit. Cette analyse s'appuie sur une proposition de nature algébrique : le théorème de factorisation pour un polynôme. Voici comment Descartes la présente :

> De plus il faut considerer, que lorsqu'il y a deux racines esgales en une equation, elle a necessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy mesme la quantité qu'on y suppose estre inconnüe moins la quantité connue qui luy est esgale, & et qu'après cela, si cete dernière somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant quil luy en manque ; affin quil puisse y avoir separement equation entre chascun des termes de l'une, & chacun des termes de l'autre.[49]

Grâce à cette proposition, Descartes peut employer la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre le problème des normales. Voici comment Descartes décrit cette méthode en soulignant son importance en conclusion de son exposé consacré a la détermination de la normale à une courbe géométrique :

> Mais ie veux bien en passant vous avertir que l'invention de supposer deux equations de mesme forme, pour comparer separement tous les termes de l'une a ceux de l'autre, & ainsi en faire naistre plusieurs d'une seule, dont vous avés vû icy un exemple, peut servir une infinité dautres Problesmes, & n'est pas l'une des moindres de la methode dont ie me sers.[50]

[48]Cf. [Descartes(1637c), p. 417-418].
[49]Cf. [Descartes(1637c), p. 417-418].
[50]Cf. [Descartes(1637c), p. 423].

On remarquera que Descartes emploie parfois « équation », parfois « forme d'équation ». Cela pourrait renvoyer à une distinction portant sur le contexte de l'équation, géométrique ou arithmétique.

Dans le premier cas, l'équation exprime en effet pour Descartes un lieu géométrique et apparaît comme étant le résultat d'une analyse géométrique qu'on pourrait reformuler sans difficultés en termes classiques[51]. Dans le Livre I consacré à la solution générale du problème de Pappus, un tel lieu est construit point par point en fixant une des deux inconnues, dès lors qu'on n'a pas reconnu derrière l'équation une courbe connue — comme dans le cas de la solution particulière du problème de Pappus à quatre lignes, où Descartes par un changement de variable se ramène à des équations équivalentes aux *symptoma* des coniques donnés par Apollonius —.

Dans le second cas, c'est de la « nature des équations », dont il est question, comme l'indique le titre liminaire donné par Descartes à la première des sections composant la partie consacrée aux équations dans le livre III de la *Géométrie*[52], indépendamment d'une interprétation géométrique de celles-ci. L'équation est considérée arithmétiquement dans le sens où on opère sur celle-ci et sur les lettres désignant des quantités qu'elle contient comme s'il s'agissait de nombres. En ce sens, c'est plutôt de polynôme dont il est question.

Selon nous, c'est ici que réside la nouveauté importante apportée par Descartes, à savoir le fait de pouvoir concilier des méthodes géométriques et arithmétiques pour résoudre des problèmes géométriques en s'appuyant sur une correspondance préétablie entre arithmétique et géométrie.

5.3.5 Les exemples cartésiens

Considérons à présent les exemples choisis par Descartes pour illustrer sa méthode[53]. Ils sont au nombre de trois. Nous n'examinerons dans cette section que le premier et le troisième de ces exemples qui portent sur une ellipse et une conchoïde de parabole rapportées à leur axe par une équation en coordonnées « cartésiennes ». Nous renvoyons l'étude du second exemple

[51] Jean-Louis Gardies a beaucoup insisté sur ce point dans son ouvrage consacré à l'analyse. Cf. [Gardies(2001), Chap V, « Les deux formes d'analyse impliquées dans la démarche cartésienne », p. 107-130].

[52] Cf. [Descartes(1637c), p. 444].

[53] À nouveau, dans la suite, nous échangeons x et y relativement aux notations de Descartes pour nous conformer à l'usage courant.

qui porte sur une ovale exprimée par une équation en coordonnées bipolaires à une prochaine section[54] où nous verrons que la détermination de la normale pour une telle courbe exprimée de cette façon, exhibe la première et seule occurrence connue de l'application de la méthode des normales par Descartes, dans un texte rédigé antérieurement à la *Géométrie* que nous avons déjà mentionné auparavant, celui des *Excerpta Mathematica*.

Le premier exemple porte sur une ellipse dont l'équation est donnée par

$$y^2 = rx - \frac{r}{q}x^2, \tag{5.11}$$

que Descartes déduit de son propre aveu[55] de la proposition 13 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius qui introduit le *symptoma* de l'hyperbole. Dans ce cas, l'élimination de y avec l'équation (5.1) est aisée du fait de la seule présence d'une puissance paire, en l'occurrence carrée de y, et conduit à l'équation résultante de degré 2

$$x^2 + \frac{qr - 2qv}{q - r}x + \frac{qv^2 - qs^2}{q - r} = 0. \tag{5.12}$$

En identifiant une telle équation avec l'équation indéterminée qui admet une racine double e

$$x^2 - 2ex + e^2 = 0, \tag{5.13}$$

on déduit aussitôt en égalisant e à x :

$$v = x - \frac{r}{q}x + \frac{r}{2}. \tag{5.14}$$

Comme l'indique Descartes, on pourrait trouver s par le troisième terme de l'équation, mais cela est inutile car la connaissance de v suffit à déterminer le point P[56]. Ce faisant, Descartes paraît ainsi insister sur le fait que, pour parler de façon moderne, le système déduit de l'usage de la méthode des coefficients indéterminés est bien déterminé et qu'on peut trouver l'expression de chacune des inconnues de ce dernier. Le fait qu'il fasse cette remarque à l'issue du traitement d'une exemple par trop simple et particulier, celui de l'ellipse, relativise bien sûr la connaissance et la compréhension que Descartes pouvait avoir d'un problème typiquement algébrique qui ne sera abordé que

[54]Cf. [chapitre 7, p. 229].
[55]Cf. [Descartes(1637c), p. 415].
[56]Cf. [Descartes(1964-1974), p. 419].

bien plus tard par Leibniz puis Cramer. Je veux parler des conditions sur les coefficients d'un système qui président à la détermination de celui-ci.

Néanmoins, on peut tout de même affirmer au regard de la présentation par Descartes de sa méthode de résolution des problèmes géométriques qu'il était conscient qu'une condition nécessaire pour qu'un système soit déterminé est qu'il présente autant d'inconnues que d'équations. Il écrit en effet :

> Et on doit trouver autant de telles Equations, quon a supposé de lignes, qui estoient inconnuës. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, & que nonobstant on nomette rien de ce qui est desiré en la question, cela tesmoigne quelle nest pas entierement determinée.[57]

Dans le troisième exemple, il s'agit de déterminer la tangente d'une courbe cubique qui est une conchoïde de parabole et qu'on nomme à présent « parabole cartésienne », d'équation

$$x^3 - bx^2 - cdx + bcd + dxy = 0. \tag{5.15}$$

Cette cubique joue un rôle essentiel dans la *Géométrie*. Elle est apparue auparavant sous une forme conceptuellement semblable mais plus simple comme solution du problème de Pappus à cinq lignes[58] et sera employée par Descartes au livre III de la *Géométrie* pour construire les problèmes « sursolides » — *i.e* ceux conduisant à des équations de degré 5 ou 6 —[59].

L'équation résultante de l'équation (5.15) de la parabole cartésienne et de l'équation du cercle (5.1) en éliminant l'inconnue y est

$$\begin{aligned} Q(x) = x^6 - 2bx^5 + (-2cd + b^2 + d^2)x^4 + (4bcd - 2d^2v)x^3 \\ +(-2b^2cd + c^2d^2 - d^2s^2 + d^2v^2)x^2 - 2bc^2d^2x + b^2c^2d^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Descartes, qui use d'équations homogènes, indique que cette équation doit avoir la « mesme forme » que l'équation

$$(x - e)^2(x^4 + fx^3 + g^2x^2 + h^3x + k^4) = 0 \tag{5.17}$$

[57] Cf. [Descartes(1637c), p. 372].

[58] Descartes l'a proposée comme « divination » de la ligne courbe solution du problème de Pappus à cinq lignes, en supposant que le cas le plus manifeste examiné par les Anciens est celui où quatre des cinq droites sont parallèles, la cinquième leur étant perpendiculaire [Descartes(1637c), p. 408-411]. Elle est la seule solution étudiée par Descartes d'un problème de Pappus à cinq lignes. Cf. *infra* [section 2.4, p. 85].

[59] Cf. [Descartes(1637c), p. 477-484]. Pour plus de précisions, on peut consulter l'étude de Massimo Galuzzi [Galuzzi(1996)] ainsi que [Bos(2001), p. 368-372].

qui donne

$$\begin{aligned} & x^6+(f-2e)x^5+(g^2-2ef+e^2)x^4+(h^3-2eg^2+e^2f)x^3 \\ & +(k^4-2eh^3+e^2g^2)x^2+(-2ek^4+e^2h^3)x+e^2k^4=0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

sans écrire l'égalité à zéro de ces expressions qu'il nomme « équations », paraissant renvoyer à l'objet algébrique polynôme, en employant de surcroît l'expression « mesme forme ».

Il nous faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} f-2e=-2b \\ g^2-2ef+e^2=-2cd+b^2+d^2 \\ h^3-2eg^2+e^2f=4bcd-2d^2v \\ k^4-2eh^3+e^2=-2b^2cd+c^2d^2-d^2s^2+d^2v^2 \\ -2ek^4+e^2h^3=-2bc^2d^2 \\ e^2k^4=b^2c^2d^2 \end{cases} \tag{5.19}$$

c'est-à-dire déterminer f, g, h, k, s et v.

Comme le préconise Descartes, en usant successivement de la première, de la dernière, de la seconde et de l'antépénultième équation, on détermine simplement f, g, h et k. On obtient :

$$f=2e-2b \tag{5.20}$$

$$k^4=\frac{b^2c^2d^2}{e^2} \tag{5.21}$$

$$g^2=3e^2-4be-2cd+b^2+d^2 \tag{5.22}$$

$$h^3=\frac{2b^2c^2d^2}{e^3}-\frac{2bc^2d^2}{e^2} \tag{5.23}$$

$$\tag{5.24}$$

Descartes ajoute d'ailleurs à l'issue de ce calcul :

> Et ainsi il faudroit continuer, suivant ce mesme ordre, iusques a la derniere, s'il y en avoit davantage en cete somme ; car c'est chose qu'on peut touiours faire en mesme façon.[60]

Par cette remarque, Descartes semble donc distinguer le problème de la détermination des coefficients indéterminés de celui de la détermination

[60] Cf. [Descartes(1637c), p. 421].

de s et v, affirmant que le premier est réglé par sa méthode. On pourrait dire autrement qu'il prétend que celle-ci procure un algorithme pour la détermination des coefficients indéterminés. Dans ses conditions, la simplicité de la détermination de v et de s dans l'exemple présent pourrait laisser penser que Descartes n'a pas entrevu la difficulté de la résolution d'un tel problème dans le cas général comme nous l'avons montré auparavant, ou qu'il envisageait au contraire un autre mode d'application de sa méthode des normales qui contournait un tel problème de calcul. Comme on l'a dit, la première hypothèse nous paraît peu plausible, d'autant que Descartes ne cessa de vanter sa méthode, et qu'il était prudent autant sans doute qu'il pouvait être de mauvaise foi.

Mais avant de formuler une hypothèse sur un autre mode d'application de la méthode des normales qui aurait permis à Descartes de se dispenser de calculs difficiles voire insurmontables, qu'il ne prisait guère, pour appliquer sa méthode, revenons à ces mêmes calculs pour voir dans quelle mesure la forme et la simplicité de l'équation de la parabole cartésienne permettrait ou non d'inférer le théorème de Hudde en résolvant le système.

Le système précédent (5.19) est très particulier dans la mesure où en procédant aux éliminations des coefficients indéterminés f, k, g, h dans le même ordre que Descartes, on aboutit à un système « quasi-déterminé »[61] en v et s, où v apparaît isolé, alors que les deux autres procédures d'élimination que nous avons vues auparavant[62], qui usent du système triangulaire supérieur ou du système triangulaire inférieur, paraissent compliquer inutilement les calculs en introduisant v, v^2 ou s^2 dans les calculs d'élimination des coefficients indéterminés. On sait que dans le cas général on retrouve dans chaque équation des monômes formés de puissances de s et v et qu'un tel choix alors ne se justifie plus.

On pourrait ainsi penser que c'est la structure particulière du système associé à la détermination de la normale à la conchoïde de parabole qui suggéra à Descartes la procédure d'élimination qu'il recommande.

Descartes obtenait donc aisément

$$v = \frac{2}{d^2}x^3 - \frac{3b}{d^2}x^2 + \frac{b^2}{d^2}x - \frac{2c}{d}x + x + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{x^2} - \frac{b^2c^2}{x^3} \tag{5.25}$$

[61] Ce système « quasi-déterminé » est formé par la troisième et la quatrième équations du système (5.19), où l'on a remplacé f, k, g, h par leurs expressions, qui donnent respectivement immédiatement v puis s^2.

[62] Cf. *supra* [section 5.1.1, p. 161].

sans du reste utiliser l'expression de k^4.

5.4 La transformation des équations des courbes

Aussi, peut-on imaginer que Descartes entendait appliquer sa méthode des normales non pas à une courbe algébrique quelconque mais à une courbe dont l'équation a été transformée de façon à faire disparaître le plus de puissances impaires, en éliminant bien-sûr de préférence les plus grandes lorsque c'est possible, de l'une ou l'autre variable[63].

Considérons ainsi la classification des cubiques données par Newton en 1695 dans son *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*[64].

Newton y énonce, sans démonstration[65] que l'équation d'une cubique plane quelconque peut être transformée en l'une des quatre formes suivantes :

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{5.26}$$
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{5.27}$$
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{5.28}$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{5.29}$$

On reconnaît immédiatement la forme de la seconde équation (5.27) qu'on vient de traiter dans un cas particulier. Le fait que les coefficients soient donnés ici de façon plus générale ne modifie pas la façon d'appliquer la méthode des normales de Descartes à une telle courbe par rapport à la conchoïde de parabole précédente.

Quant aux deux dernières équations (5.28) et (5.29), il est aisé de leur appliquer la méthode des normales et même l'algorithme donné par l'équation (5.48). On obtient ainsi immédiatement pour l'équation (5.27) de

[63]Cf. par exemple *supra* [note 11, p. 164].

[64]Ce traité sera publié plus tard comme appendice au traité *Opticks* de Newton en 1704. Pour plus d'informations, on peut consulter l'introduction de D.T. Whiteside. Cf. [Newton(1695), p. 568-578]. Pour le texte et sa traduction, cf. [Newton(1695), p. 579-645].

[65]Une démonstration sera apportée plus tard et publiée en 1717 dans son traité [Stirling(1717)] par Stirling, alors jeune étudiant à Baliol College à Oxford, avec l'assentiment de Newton Cf. [Newton(1695), p. 575-575].

la même façon qu'auparavant pour l'ellipse

$$\mathrm{Q}(x) = x^3 + \frac{b+1}{a}x^2 + \frac{c-2v}{a}x + \frac{d+v^2-s^2}{a} \tag{5.30}$$

et

$$v = \frac{c}{2} + (b+1)x + \frac{3a}{2}x^2. \tag{5.31}$$

Et on obtient pour l'équation (5.28) avec des calculs plus longs mais guère plus difficiles

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^6 + \frac{2b}{a}x^5 + \frac{b^2+2ac}{a^2}x^4 + \frac{2ad+2bc}{a^2} + \frac{c^2+b^2+1}{a^2}x^2 \\ &+ \frac{2cd-2v}{a^2}x + d^2 + v^2 - s^2 \end{aligned} \tag{5.32}$$

et

$$v = cd + (c^2+2bd+1)x + 3(ad+bc)x^2 + 2(b^2+2ac)x^3 + abx^4 + 3a^2x^5. \tag{5.33}$$

Seule la première équation (5.26) pose problème. En effet, on obtient le polynôme résultant

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x) &= x^6 + \frac{2b-4v}{a+1}x^5 + \frac{b^2+2c(a+1)-2(a+1)s^2+2(a+3)v^2}{(a+1)^2}x^4 \\ &+ \frac{2bc+2d(a+1)-2bs^2+4s^2v-4cv+2bv^2-4v^3}{(a+1)^2}x^3 \\ &+ \frac{(2bd+cd+e)-2cs^2+s^4-2s^2v^2-4dv+v^4}{(a+1)^2}x^2 \\ &+ \frac{2cd-2ds^2-2e^2v+2dv^2}{(a+1)^2}x + \frac{d^2-e^2s^2+e^2v^2}{(a+1)^2}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Cette fois encore la difficulté majeure tient à la résolution des deux équations finales en s et v du fait de la présence des puissances non seulement s^2, v et v^2, mais encore s^2v et v^3 dans le coefficient en x^3, et s^4, s^2v^2 et v^4 dans le coefficient en x^4. Ces puissances apparaissant dans deux coefficients du polynôme, on sait d'avance grâce au théorème de Hudde que les premières ou les dernières demeureront dans l'une ou l'autre des deux équations finales en s et en v. En effet, on ne peut éliminer qu'un coefficient à la fois du polynôme $\mathrm{Q}(x)$ dans chacune des ces deux équations, par le choix judicieux d'une progression arithmétique ou en éliminant successivement les coefficients indéterminés, et donc on aura intérêt comme le recommande Descartes à éliminer d'une part le coefficient en x^2, d'autre part le coefficient en x^3 du polynôme résultant.

De cette difficulté, la plus importante de la méthode des normales comme on l'a vu, Descartes ne dit mot, présentant même au contraire et peut-être à dessein des exemples dont elle est totalement absente.

Un tel défaut, certes rédhibitoire, peut être pallié pour les premiers ordres dès lors qu'une classification des courbes géométriques d'un ordre donné a été établie, à condition qu'elle réduise celles-ci à des classes d'équation, après transformation des coordonnées, dont les formes sont suffisamment simples pour pouvoir appliquer la méthode des normales de Descartes sans difficulté particulière. C'est le cas pour les coniques, comme on l'a vu, et à l'exception d'une classe d'équations, c'est aussi le cas pour les cubiques. De surcroît, ces transformations doivent inclure, si besoin est, le passage de coordonnées obliques à des coordonnées orthogonales pour appliquer la méthode des normales.

C'est donc peut-être l'idée qu'il était possible, une courbe étant donnée par une équation, de simplifier cette dernière par des transformations judicieuses des coordonnées qu'avait Descartes en tête lorsqu'il vantait l'application de sa méthode des normales, à moins que plus ambitieusement il ne supposât qu'une généralisation de la classification des coniques était possible pour les courbes d'ordre supérieur, projet qui fut du reste mené à bien par Newton pour les cubiques, et à nouveau pour les cubiques mais aussi pour les quartiques par Euler dans le second livre de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748.

5.5 Une démonstration du théorème de Hudde

Mais revenons sur calculs qui interviennent dans la méthode des normales de Descartes, en particulier sur ceux qui conduisent à l'élimination des coefficients indéterminés de l'équation (5.7) On peut décomposer le système (5.8) en deux sous-systèmes dont l'un est triangulaire, que ce soit celui constitué par les quatre premières équations ou bien par les quatre dernières. On déterminera ainsi b_0, ... b_3 relativement aux coefficients a_0, ..., a_3 ou a_5, ...,

a_2 à condition qu'un tel système soit déterminé. Il ne reste plus alors qu'à résoudre le sous-système formé par les deux équations restantes, les deux dernières ou les deux premières, pour déterminer s et v.

Une autre méthode — celle recommandée par Descartes — consiste à utiliser alternativement les deux systèmes triangulaires précédents et à déterminer de la sorte b_0, b_3, b_1, b_2 en résolvant successivement la première, la dernière, la seconde et la pénultième équation. Il ne reste plus alors qu'à résoudre le système formé par les deux équations « médianes » du système, à savoir, dans le cas présent, la troisième et l'antépénultième, pour déterminer s et v. Bien sûr, les deux démarches que nous avons décrites sont généralisables à l'ordre n.

Ainsi, en remplaçant b_0, b_3, b_1, b_2 par leurs expressions et en factorisant chacune des équations par une puissance convenable de α, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Q}_2(\alpha) = -2a_0 - a_1\alpha + a_3\alpha^3 + 2a_4\alpha^4 + 3a_5\alpha^5 + 4\alpha^6 = 0 \\ \mathrm{Q}_3(\alpha) = -3a_0 - 2a_1\alpha - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 + 2a_5\alpha^5 + 3\alpha^6 = 0 \end{array} \right. \tag{5.35}$$

On peut alors remarquer que les deux équations précédentes sont les transformées de l'équation $\mathrm{Q}(\alpha) = a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+a_4\alpha^4+a_5\alpha^5+\alpha^6 = 0$ obtenues en multipliant chacun des coefficients a_0, ..., a_5 ainsi que le coefficient unitaire du terme de plus haut degré par les termes d'une suite arithmétique de raison 1 : {-3,-2, ...,3} pour la première équation, {-2,-1, ...,4} pour la seconde. D'ailleurs en retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on retrouve bien l'équation $\mathrm{Q}(\alpha) = 0$.

Nous venons donc de démontrer, en suivant les indications données par Descartes dans sa méthodes des normales pour procéder à l'élimination successive des inconnues du système linéaire d'équations, ce qu'on nomme le « théorème de Hudde ». Il s'agit d'un théorème que Hudde place en tête de son *Epistola secunda ad maximis et minimis* publiée dans la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661[66]. Rappelons l'énoncé de ce théorème sous une forme moderne[67] :

[66]Cf. [Hudde(1659b), I, p. 507-516] et *supra* [section 1.3.2, p. 37]. Marco Panza dédie une section de son ouvrage sur Newton au théorème et à la règle de Hudde. Cf. [Panza(2005), p. 104-113]. Cf. également [Zeuthen(1966), p. 327-329].

[67]Pour la présentation originale de Hudde, cf. [Hudde(1659b), I, p. 507] ou [Panza(2005), p. 105].

Théorème 5.1 (Hudde) *Si α est une racine double de l'équation*

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \tag{5.36}$$

et que $\{\tau_i\}_{i=0}^{n}$ est une progression arithmétique quelconque, alors α est une racine de l'équation transformée qu'on note

$$\mathrm{P}_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \tau_i a_i x^i = 0. \tag{5.37}$$

En effet, il est clair que la démonstration précédente vaut pour n'importe quelle équation et pour n'importe quelle progression arithmétique. Nous n'avons fait en effet que travailler sur la forme générique d'une équation algébrique. D'autre part, pour introduire une progression arithmétique quelconque du type $\{a + kb\}_{k=0}^{6}$, il suffit de considérer la combinaison linéaire $(a + 2b)\mathrm{Q}(\alpha) + b\mathrm{Q}_2(\alpha)$.

On peut remarquer de surcroît que la méthode d'élimination de Descartes l'a conduit à deux transformées de l'équation initiale $\mathrm{Q}(x) = 0$ où l'un des coefficients de l'équation est éliminé : respectivement le terme a_2 et le terme a_3[68]. Aurait-il choisi le système triangulaire inférieur, il aurait été conduit au système suivant où le terme a_1 est éliminé dans la première équation et où apparaît le polynôme dérivé du polynôme $\mathrm{Q}(x)$ dans la seconde équation :

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_1(\alpha) = -a_0 + a_2\alpha^2 + 2a_3\alpha^2 + 3a_4\alpha^4 + 4a_5\alpha^5 + 5\alpha^6 = 0 \\ \mathrm{Q}_0(\alpha) = a_1\alpha + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + 4a_4\alpha^3 + 5a_5\alpha^4 + 6\alpha^5 = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

Enfin, le système triangulaire supérieur l'aurait conduit à la progression arithmétique $\{-4, -3, ..., 2\}$ qui permet d'éliminer le coefficient a_4 dans la première équation du système et à la progression arithmétique $\{-5, -4, ..., 1\}$ qui permet d'éliminer le coefficient a_5 dans l'autre équation.

Ainsi, en usant de l'une quelconque des trois précédentes procédures d'élimination des inconnues b_0, ..., b_3, on obtient un système de deux équations qui sont respectivement les transformées de l'équation initiale par deux progressions arithmétiques entières de raison 1 qui permettent d'éliminer chacune un des six coefficients de l'équation résultante.

[68]D'où le choix de notre notation.

La démonstration que donne Hudde de son théorème consiste à développer l'expression (5.7) de la façon suivante[69] :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}(x) = b_0\alpha^2 - 2b_0\alpha x \;&+\; b_0x^2 \\
+b_1\alpha^2 x \;&-\; 2b_1\alpha x^2 + b_1\alpha^2 x^3 \\
&+\; b_2\alpha^2x^2 - 2b_2\alpha x^3 + b_2x^4 \\
&\qquad\qquad + b_3\alpha^2x^3 - 2b_3\alpha x^4 + b_3x^5 \\
&\qquad\qquad\qquad + \alpha^2x^4 - 2\alpha x^5 + x^6
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

La disposition précédente, que nous empruntons à Hudde, permet aussitôt de retrouver sous une présentation différente le système (5.8). Il est clair, du fait d'une telle disposition, que la transformation de chaque coefficient a_i du polynôme $\mathrm{Q}(x)$ en $\tau_i a_i$, où $\{\tau_i\}_{i=0}^4$ est une progression arithmétique quelconque, peut se traduire dans l'écriture précédente par la transformation de la ligne d'équation

$$b_i\alpha^2x^i - 2b_i\alpha x^{i+1} + b_i\alpha^2x^{i+2} \tag{5.40}$$

en l'expression

$$b_i\tau_i\alpha^2x^i - 2b_i\tau_{i+1}\alpha x^{i+1} + b_i\tau_i\alpha^2x^{i+2}. \tag{5.41}$$

Si l'on substitue à présent α à x, on obtient en reprenant les notations précédentes[70] :

$$\mathrm{Q}^*(\alpha) = \sum_{i=0}^{4} b_i\alpha^{i+2}(\tau_i - 2\tau_{i+1} + \tau_{i+2}). \tag{5.42}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que chaque terme $b_i\alpha^{i+2}(\tau_i - 2\tau_{i+1} + \tau_{i+2})$ est nul pour déduire $\mathrm{Q}^*(\alpha) = 0$. Hudde y pourvoit en s'appuyant sur un lemme préliminaire, aisé à établir, qui énonce que la somme des termes d'une progression arithmétique ternaire quelconque multipliés respectivement par 1,-2, et 1 et par une quantité z quelconque est égale à zéro.

Il n'y a pas de certitude en Histoire. Néanmoins, bien que la démonstration de Hudde soit différente de celle que nous avons donnée auparavant, elle fait intervenir la méthode des coefficients indéterminés dans le cas

[69] Bien que la démonstration de Hudde porte sur un cas particulier, celui d'une équation de degré 5 possédant une racine double, comme d'habitude à cette époque, elle n'en est pas moins tout à fait générale et applicable à une équation quelconque, ce que note bien au passage Hudde lui-même. Cf. [Hudde(1659b), p. 507-509] et [Panza(2005), p. 105-107] pour une reformulation générale de la démonstration du théorème de Hudde.

[70] On pose de plus $b_4 = 1$, le polynôme $\mathrm{Q}(x)$ étant unitaire.

d'un polynôme admettant une racine double comme le suggère la méthode des normales cartésienne ou bien la méthode des tangentes reformulée par Debeaune. De surcroît, l'application de l'une ces deux méthodes conduit non seulement à la démonstration du théorème de Hudde pour des progressions arithmétiques particulières, mais encore à la production de l'équation transformée qui établit le théorème. Il paraît donc vraisemblable qu'une telle application de la méthode des normales ou de la méthode des tangentes ait procuré à Hudde l'invention du théorème cela néanmoins malgré les calculs investis dans la détermination du polynôme résultant[71].

En effet, s'il est vrai qu'un tel théorème est indépendant de la détermination du polynôme résultant, et donc du choix de la méthode des normales de Descartes ou bien de la méthode des tangentes de Debeaune, néanmoins encore faut-il, comme on l'a fait, distinguer le problème de l'élimination des coefficients indéterminés b_0, ..., b_3 de celui de l'élimination des quantités s et v. Si tel n'est pas le cas, les calculs afférents à ce second problème ne doivent pas masquer la compréhension qu'on pourrait avoir du premier phénomène. Pour cette raison, on peut imaginer que l'application d'une de ces deux méthodes à des exemples simples, comme par exemple ceux donnés par Descartes de l'ellipse et de la parabole cartésienne, ou bien ceux fournis par une équation entière du type $y = f(x)$, ou mieux encore de la seconde de ces méthodes qui conduit à des calculs moins embarrassés, aurait pu donner à Hudde l'idée d'étudier séparément les deux problèmes d'élimination.

Une telle interprétation paraît d'autant plus vraisemblable que l'application faite par Hudde de son théorème à des problèmes de recherche d'*extremum* peut être interprétée également dans le cadre d'une application de la méthode des normales de Descartes ou de la méthode des tangentes de Debeaune à des courbes d'équation $y = f(x)$, comme l'a établi Marco Panza dans son ouvrage récent consacré à Newton[72]. Quand on sait que derrière cette application du théorème de Hudde à la solution de problèmes d'*extremum* se cache une amélioration de la méthode des normales qui conduit à transformer cette méthode en un algorithme[73], le fait que l'existence d'un tel théorème ne soit que le résultat de l'application de cette même méthode nous paraît montrer la puissance de cette dernière, ou du moins de

[71] On peut alors se poser la question de savoir pourquoi Hudde n'a pas donné la démonstration de Descartes, question à laquelle nous n'avons pas de réponse.

[72] Cf. [Panza(2005), p. 107-113].

[73] Cf. [Panza(2005), p. 112].

sa composante purement algébrique qui apparaît ainsi pour la première fois *généralisée* indépendamment du contexte du problème des normales qui a présidé à son origine par Hudde.

Notons pour terminer que la possibilité de la reconnaissance d'un tel algorithme ne dépend pas du choix de la méthode des normales de Descartes ou de la méthode des tangentes de Debeaune[74]. Pour le comprendre, intéressons-nous au cas[75] d'une courbe algébrique donnée par une équation du type

$$y = \mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{5.43}$$

On déduit comme polynôme résultant

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x) &= (\mathrm{P}_n(x))^2 - (s^2 - (v-x)^2) \\ &= (a_0^2 + v^2 - s^2) + (2a_1a_0 - 2v)x + (1 + a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + (\sum_{i=3}^{n} a_i x^i)^2 \end{aligned} \tag{5.44}$$

avec la méthode des normales de Descartes et

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x) &= \mathrm{P}_n(x) - \frac{\sigma}{v}(x - v) \\ &= a_0 + \sigma + (a_1 - \frac{\sigma}{v})x + \sum_{i=2}^{n} a_i x^i \end{aligned} \tag{5.45}$$

avec la méthode des tangentes de Debeaune. Ces polynômes résultants admettant l'abscisse du point de contact de la courbe avec la tangente, qu'on note α, comme racine double, d'apès le théorème de Hudde, on tire les équations

$$\tau_0(a_0^2+v^2-s^2)+\tau_1(2a_1a_0-2v)\alpha+\tau_2(1+a_1^2+2a_0a_2)\alpha^2+\sum_{i=3}^{2n}\tau_i(\sum_{k=0}^{i} a_k a_{i-k})\alpha^i = 0 \tag{5.46}$$

et

$$\tau_0(a_0 + \sigma) + \tau_1(a_1 - \frac{\sigma}{v})\alpha + \sum_{i=2}^{n} \tau_i a_i \alpha^i = 0. \tag{5.47}$$

---

[74]Cf *infra* [section 10.5, p. 365] pour une présentation détaillée de la méthode sur laquelle nous nous appuyons ci-après.

[75]Cf. également [Panza(2005), p. 109-110].

On peut alors déduire que

$$v = \frac{\tau_0(v^2 - s^2) + \tau_2\alpha^2 + (\mathrm{P}_n^2)^*(\alpha)}{2\tau_1\alpha} \tag{5.48}$$

et

$$\frac{\sigma}{v} = \frac{\tau_0\sigma + \mathrm{P}_n^*(\alpha)}{\tau_1\alpha}. \tag{5.49}$$

Il est clair qu'en prenant une progression arithmétique dont le premier terme τ_0 est nul, on a dans les deux cas un algorithme qui permet de déterminer respectivement la sous-normale et le coefficient angulaire de la tangente. En choisissant une progression arithmétique de raison 1, on n'aura fait bien-sûr que dériver le polynôme. D'autre part, une telle constatation est aussi simple à faire pour la méthode des normales de Descartes que pour la méthode des tangentes de Debeaune même si sa mise en œuvre dans le premier cas est plus difficile.

On a vu auparavant qu'une procédure d'élimination des coefficients indéterminés b_0, ... b_3 conduisait à une telle progression arithmétique mais que ce n'était pas celle suggérée par Descartes. On peut donc imaginer que Descartes lui-même n'a pas conçu la possibilité d'un tel algorithme qui aurait pourtant pu lui être dévoilée par l'application de sa propre méthode et qui donc apparaissait déjà en germe dans celle-ci, quelle que soit par ailleurs la complexité d'un tel algorithme.

5.5.1 Retour sur les exemples cartésiens

Revenons-en ainsi aux exemples cartésiens. Dans l'exemple de l'ellipse, on peut remarquer qu'on aurait pu obtenir le même résultat en appliquant l'algorithme décrit auparavant qui conduit à l'expression (5.48) de v avec la progression arithmétique $\{0, 1, 2\}$ en remplaçant le polynôme $(\mathrm{P}_n(x))^2$ par l'expression $rx - \frac{r}{q}x^2$. Du reste, on peut ajouter que la simplicité de l'équation fait que le polynôme dérivé d'une telle expression apparaît de façon évidente, bien qu'il reste à rendre compte du facteur x dans l'expression. On retrouvera une considération semblable lorsque nous examinerons ultérieurement l'exemple de l'ovale.

Considérons d'autre part l'exemple de la parabole cartésienne. Pour obtenir l'équation (5.25) qui donne v, Descartes avait du auparavant écrire l'équation suivante, qu'il ne donne pas, en remplaçant f, g^2 et h^3 par leurs expressions et en ordonnant les puissances de e comme il le fait d'ailleurs dans l'équation (5.25) :

$$\frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2} + 4cde - 2b^2e - 2d^2e - 4e^3 + 6be^2 = 4bcd - 2d^2v. \quad (5.50)$$

On remarque assez facilement que cette équation (5.50) correspond au facteur $\frac{1}{e^4}$ près à la transformée $\mathsf{Q}^*(x)$ du polynôme résultant de l'équation (5.16) par la progression arithmétique de raison 1 qui élimine le coefficient du terme x^2, c'est-à-dire $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Sur cet exemple, il est ainsi tout à fait possible de remarquer la similitude entre les coefficients de l'équation (5.50) et ceux du polynôme de l'équation (5.16). Eusse-t-il fait cette constatation et inféré le théorème de Hudde qui en découlait, Descartes aurait pu déduire directement l'expression de v de celle du polynôme $\mathrm{Q}(x)$ en écrivant $\mathrm{Q}^*(x)$ et aurait ainsi disposé d'un algorithme fonctionnant dans les cas les plus simples, c'est-à-dire ceux où les expressions s et v comme dans le cas présent n'interviennent que dans deux termes du polynôme résultant, qui plus est de façon isolée dans l'un de ces deux termes. Mais que faire dans le cas général ?

Une réponse pourrait consister à penser qu'une telle préoccupation est moderne et relève de la géométrie analytique et qu'elle fut étrangère à Descartes.

5.5.2 Une application par Schooten du théorème de Hudde au problème des normales

On trouve en outre dans le commentaire de Schooten à la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661 une note[76] consacrée à détermination de la normale à la conchoïde de Nicomède où van Schooten applique une version améliorée de la méthode des normales de Descartes fondée sur l'usage du théorème de Hudde[77].

Considérons la conchoïde de droite AB, de pôle G et d'intervalle AE. Posons $\mathsf{AG} = b$, $\mathsf{AE} = \mathsf{LC} = c$. Il est commode de rapporter cette courbe à la droite perpendiculaire à AB passant par le pôle G et d'origine A en coordonnées rectangulaires. Posons $\mathsf{AM} = x$ et $\mathsf{MC} = y$. On trouve ainsi pour

[76] Cf. [Schooten(1659b), p 253-262] et *supra* [section 1.3.2, p. 35].
[77] Cf. [Schooten(1659b), p. 255-256]. Pour une étude, cf. [Maanen(1984), p. 76-79].

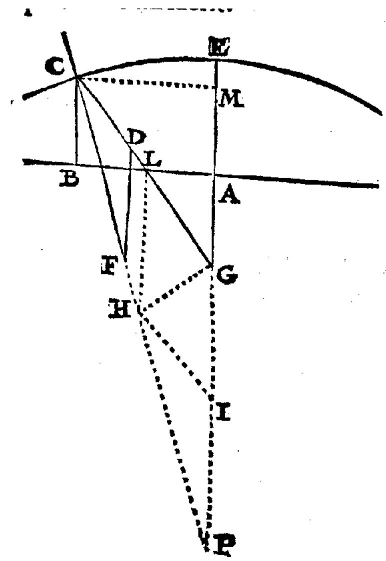

FIG. 5.4 – La normale à la conchoïde

l'équation de la conchoïde

$$x^2y^2 = (c^2 - x^2)(x + b)^2. \tag{5.51}$$

Posons maintenant $\mathsf{CP} = s$ et $\mathsf{AP} = v$ en reprenant les notations cartésiennes pour la normale et la sous-normale. On a alors

$$s^2 = y^2 + (x + v)^2. \tag{5.52}$$

Éliminant y entre les équations (5.51) et (5.52), on obtient immédiatement

$$s^2 = \frac{(c^2 - x^2)(x + b)^2}{x^2} + (x + v)^2 \tag{5.53}$$

soit, après développement,

$$s^2 = \frac{b^2c^2}{x^2} + \frac{2bc^2}{x} + c^2 - b^2 + v^2 - 2bx + 2vx. \tag{5.54}$$

Bien que l'équation (5.54) ne soit pas polynomiale, elle peut être rendue telle en multipliant chacun de ses termes par x^2. En appliquant alors la règle de Hudde au polynôme obtenu avec une série arithmétique bien choisie, on obtient clairement le même résultat qu'en l'appliquant directement à l'équation (5.54).

D'autre part, eu égard à la forme de l'équation (5.54), il suffit d'éliminer le terme constant pour déduire une équation en v et x. Pour ce faire, on emploie la série arithmétique $\{-2, -1, 0, 1\}$. C'est exactement ce que comprend Schooten qui écrit pour présenter son calcul :

> [...] poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex PC, cum subtilissimo ac sæpiùs laudato nostro Huddenio secundam hanc operationem omnino insuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipsius y $[x]$ dimensiones multiplicare, inevrtendo porrò signa + & − quantitatum, per y $[x]$ & yy $[x^2]$ divisarum.[78]

On obtient ainsi d'après le théorème de Hudde l'équation

$$\frac{-2b^2c^2}{x^2} - \frac{2bc^2}{x} - 2bx + 2vx = 0 \tag{5.55}$$

soit

$$v = b + \frac{bc^2}{x^2} + \frac{b^2c^2}{x^3}. \tag{5.56}$$

[78] Cf. [Schooten(1659b), p. 255].

Chapitre 6

La théorie d'Apollonius des droites *minimum* dans le livre V des *Coniques*

Auparavant, alors que nous distinguions deux analyses de nature différente dans la méthode de Descartes, l'une géométrique classique, l'autre arithmético-algébrique, nous avions indiqué que cette première analyse faisait écho à une démonstration déjà présente dans le Livre V des *Coniques* d'Apollonius au moment où ce dernier se propose de déterminer pour une conique quelconque le segment intercepté entre le point sur l'axe de la section d'où est tiré la droite minimum et l'abscisse du point de contact avec la courbe. Avant de revenir sur une telle démonstration dans le cas de la parabole, nous souhaitons décrire rapidement la théorie des droites *minimum* d'Apollonius.

6.1 Golius et le manuscrit arabe des *Coniques*

A l'époque de Descartes, seulement les quatre premiers des huit livres des *Coniques* étaient parvenus aux mathématiciens dans une version grecque et avaient été édités à la Renaissance d'abord assez fautivement par Memmo[1]

[1]Cf. [Apollonius(1537)].

puis dans une version de référence par Commandino[2].

Les livres V à VII apparaissent pour la première fois traduits de l'arabe dans l'édition d'Edmund Halley de 1710, accompagnés d'une reconstruction du huitième livre. Aussi, Descartes ne pouvait avoir accès en version latine au livre V qui présentait la théorie des normales. Néanmoins, on sait par une lettre adressée à Huygens, que Golius avait rapporté du levant un manuscrit arabe des sept livres des *Coniques* qui fut précisément celui qu'utilisa plus tard Halley. Professeur de mathématiques et de langues orientales à Leyde, Golius avait fait un voyage au Levant en 1625 qui dura quatre ans. À son retour, il rapporta de nombreux ouvrages mathématiques en langue arabe. Hardy, mathématicien et orientaliste français ami de Descartes, usera des services de celui-ci en 1638 pour solliciter auprès de Heinsius, bibliothécaire à Leyde, deux de ces livres ainsi que les sept livres des *Coniques* d'Apollonius en arabe.[3].

On sait par ailleurs que Golius, bien qu'il promit une publication et une traduction de ce texte, différa celles-ci si bien qu'il ne les donna jamais, tout en conservant le manuscrit par devers lui, retardant ainsi sa publication. D'une telle promesse, témoigne un simple feuillet imprimé de date incertaine contenant la traduction latine par Golius de la préface et des trois premières et du début de la quatrième proposition du Livre V[4].

La communauté mathématique française, dont en particulier Gassend et Mydorge, par l'entremise de Mersenne était par ailleurs informée dés la fin de 1629 de la découverte du manuscrit et curieuse d'en connaître le contenu. Ainsi Golius, dans une lettre à Mersenne du 29 janvier 1630, pour laquelle on dispose d'un manuscrit annoté en marge par Mydorge, résumait le contenu du début du Livre VI et du Livre VII et dénombrait les propositions des livres V, VI et VII, sans doute en réponse à des questions proposées par Mydorge lui-même par l'entremise de Mersenne[5].

Aucune preuve textuelle n'existe de la consultation par Descartes du manuscrit arabe des *Coniques* d'Apollonius — avec l'aide de Golius ? —. Nous ne pourrons donc souligner dans la suite qu'une — indéniable ? — parenté

[2]Cf. [Apollonius(1566)].

[3]Cf. la lettre de Descartes à Huygens datée par Roth de juin 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 664]. Au sujet de ces deux manuscrits, on peut voir l'éclaircissement de Tannery : [Descartes(1964-1974), II, p. 285-286].

[4]Cf. [Apollonius(1990), I, p. lxxxvi-lxxxvii]. Pour plus de détails sur l'histoire des manuscrits au dix-septième siècle, cf. :[Apollonius(1990), I, p. xxi-xxv].

[5]Cf. [Mersenne(1945-1988), I, p. 383-391].

conceptuelle entre la méthode d'Apollonius et celle de Descartes.

Il reste qu'à défaut de pouvoir établir une influence du géomètre grec par l'entremise d'un texte arabe, il nous semble possible et préférable d'esquisser une analyse comparée de la théorie cartésienne et apollinienne des normales, afin de montrer les ressemblances et les différences existant entre ces deux théories et, par là, la part d'originalité et de tradition de la méthode des normales présentée dans la *Géométrie*.

D'ailleurs Descartes était conscient du rapprochement qu'on pouvait opérer entre sa méthode et celle d'Apollonius, et du fait que la racine double d'une équation algébrique $\mathrm{P}(x) = 0$ donnait un extremum pour une quantité $y = \mathrm{P}(x)$, ou autrement dit que le problème de la recherche des *extrema* d'une quantité $\mathrm{P}(x)$ et de la détermination de ses racines doubles était équivalent. Il écrivait ainsi dans une lettre à Mersenne qu'on date de janvier 1638 après avoir proposé la détermination de la tangente au folium d'équation $x^3 + y^3 = nxy$ à Fermat[6] :

> [...] la mienne [méthode des normales] s'estend generallement a tous ceux [les problèmes] qui peuvent tomber sous l'examen de la Geometrie ; non seulement en ce qui regarde les contingentes des lignes courbes, mais il est aussy fort aysé de l'appliquer a trouver *maximas* & *minimas*, en toute autre sorte de Problesmes. De façon que s'il l'avoit assez bien comprise, il [Fermat] n'auroit pas dit, aprs l'avoir leüe, que i'ay omis cette matiere en ma Geometrie. Il est vray toutesfois que ie n'y ai point mis ces termes *de maximis* & *minimis*, dont la raison est, qu'ils ne sont connus que parce qu'Apollonius en a fait l'argument de son 5e Livre, & que mon dessein n'a point esté de m'arrester à expliquer aucune chose de ce que quelques autres ont desia sceu, ny de reparer les Livres perdus d'Apollonius, comme Viete, Snellius, Marinus Getaldus, &c., mais seulement de passer au dela de tous costés, comme i'ay assez fait voir en commençant par une question que Pappus tesmoigne n'avoir pû estre trouvée par aucun des anciens ;[7]

[6] Cf. *supra* [note 11, p. 164].
[7] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 491].

6.2 Une lettre de Mylon

On retrouve l'interprétation de la droite *minimum* à une conique comme le rayon d'un cercle tangent à la courbe dans une lettre du mathématicien Claude Mylon[8] à Mersenne du 25 février 1645[9], alors que ce dernier se trouvait en Italie.

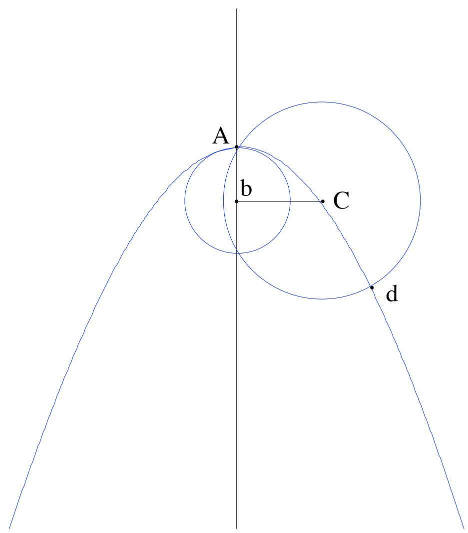

Fig. 6.1 – La proposition de Mylon

Mylon mentionne ainsi un traité de géométrie dont Chauveau ou lui-même serait l'auteur où sont démontrées « quelques propositions coniques, qui servent aux détermination des problèmes, dont plusieurs sont dans le 5me Livre d'Apollonius que [Mersenne] [avait] envoyé »[10].

Il donne ensuite comme exemple la proposition suivante :

> En voicy une qui est un corollaire fr la 3e dudit Livre : *Si dans l'axe de la parabole est pris* Ab*, l'égale à la moitié du costé droit*

[8] Sur Mylon, cf. [Mesnard(1991)].

[9] Cf. [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 376-380].

[10] Cf. [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 378]. De Waard conjecture que le manuscrit en question est celui dont Abraham Echellensis s'occupa. Ce manuscrit arabe constitue une paraphrase des *Coniques*. Il était arrivé à Rome en 1578 et fut traduit par Echellensis puis publié en 1661 dans l'édition des *Conica* de Borelli [Apollonius(1661)]. Cf. [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 380-381]. Pour des informations sur ce manuscrit et sa diffusion, cf. [Apollonius(1990), I, p. xxii].

> *et du point* b *sur l'axe soit eslevée une perpendiculaire* bC *dans laquelle soit pris un point quelconque* C*, le cercle dont le centre est* C *et le rayon* CA*, ne rencontrera point la parabole de l'autre costé de l'axe, vers la partie contraire du centre et du costé du centre* C*, la rencontrera en un seul point* [d].[11]

Il serait ainsi intéressant de trouver les raisons qui font que Mylon, comme peut-être Descartes, interprète les droites *minimum* à une conique chez Apollonius comme les rayons de cercles tangents à la courbe.

6.3 Le Livre V des *Coniques* d'Apollonius

Dans le livre V des *Coniques*, Apollonius propose une théorie des lignes *extrema* qui sont tirées d'un point à une conique[12].

Apollonius traite dans ce livre des *Coniques* de problèmes de détermination et de construction d'une droite *minimum* à une conique donnée issue d'un point donné quelconque intérieur ou extérieur à la section conique en définissant initialement la droite *minimum* tiré d'un point situé sur l'axe de la conique. Il démontre ensuite par une réduction à l'absurde dans les propositions 24 et 25[13] qu'il existe une unique droite *minimum* tiré de l'axe à un même point d'une conique en s'appuyant sur la détermination de la sous-droite *minimum*[14] qu'il a donné auparavant pour chaque conique. Cette unicité ne va en effet pas de soi dès lors qu'on n'a pas adopté comme point de vue de départ celui de la normale, perpendiculaire à la tangente au point de contact.

D'autre part, Apollonius démontre ensuite dans la proposition 12 et dans la proposition 34 du livre V qu'une droite *minimum* tirée à la conique depuis

---

[11] Cf. [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 378-379]. La démonstration suit.

[12] On peut consulter les traductions de Toomer, ver Eecke et Heath. Cette dernière, bien qu'il s'agisse plutôt d'une transcription moderne, nous a paru souvent éclairante. Cf. [Apollonius(1990), I, p. 2-261], [Apollonius(1959), p. 331-477] et [Apollonius(1896), Normals as maxima and minima, p. 139-167]. Pour plus de détails, on peut consulter le résumé qui est donné du Livre V par Toomer : [Apollonius(1990), p. xxxviii-lxi], le riche commentaire donné par Knorr : [Knorr(1993), Apollonius and Euclide, p. 313-321], le chapitre de Zeuthen qui lui est consacré dans son ouvrage fondateur : [Zeuthen(1886), p. 284-309], et pour un point de vue opposé à ce dernier, l'ouvrage de Unguru et Fried : [Unguru et Fried(2001), p. 146-220].

[13] Cf. [Apollonius(1959), p. 382-384] et [Apollonius(1896), p. 151-152].

[14] Je forge ce néologisme sur le modèle de sous-normale et sous-tangente.

un point sur l'axe est aussi *minimum* pour un point pris sur elle-même à l'intérieur de la conique ou pour un point pris sur elle-même « prolongée » à l'extérieur de la conique. L'éloignement entre ces deux propositions tient au fait que la première ne fait appel qu'à des considérations élémentaires sur les côtés et les angles et se déduit simplement de la définition d'une droite *minimum* tirée depuis un point sur l'axe. On peut remarquer que cette proposition n'est employée nulle part ailleurs dans le Livre V comme le fait Toomer[15]. Dans la seconde, en revanche, Apollonius se sert de la proposition 29 du Livre V qui établit qu'une droite *minimum* est perpendiculaire à la tangente au point de contact.

En ce sens, on peut considérer qu'Apollonius donne une théorie des normales dans le Livre V des *Coniques*, puisqu'il déduit ses propositions les plus importantes des propositions 29 et 34[16].

En prenant les notations de la Figure 6.2, PC représente la normale à la conique AC au point C selon Descartes et le segment de longueur minimale tiré du point P pris sur l'axe à la conique selon Apollonius. De façon équivalente, cela revient à dire que le cercle de centre P passant par le point C rencontre la courbe en ce seul point sans la traverser, autrement dit est tangent à la courbe. C'est précisément la propriété caractéristique apparaissant dans la *Géométrie* qu'on a citée auparavant.

Il paraît donc qu'on retrouve dans le livre V des *Coniques* d'Apollonius les origines de la réduction du problème de la normale au problème de la détermination du point P d'intersection de la normale avec l'axe opérée par Descartes, ainsi qu'une caractérisation équivalente de ce point P par une propriété de *minimum*. Descartes nous semble ainsi présenter dans la *Géométrie*, bien qu'implicitement, une généralisation et une reformulation de la définition des droites *minimum* donnée par Apollonius.

En effet, en reformulant la caractérisation du point P et en choisissant le critère de la tangence du cercle de centre P passant par C à la courbe algébrique, et en s'appuyant au passage sur une définition classique de la tangence — toucher sans couper —, Descartes se donne une définition opératoire au sein de sa théorie des courbes définies par une équation : l'intersection du cercle tangent et de la courbe algébrique se traduira alors par un équation résultante admettant une racine double correspondant à l'abscisse x du point

[15]Cf. [Apollonius(1990), I, p. xliii]. Toomer pense donc que cette proposition serait insérée par souci de complétude par Apollonius.

[16]On trouvera une démonstration fouillée et convaincante de cette thèse liée à des considérations méthodologiques dans la conférence de Roshdi Rashed [Rashed(2007)].

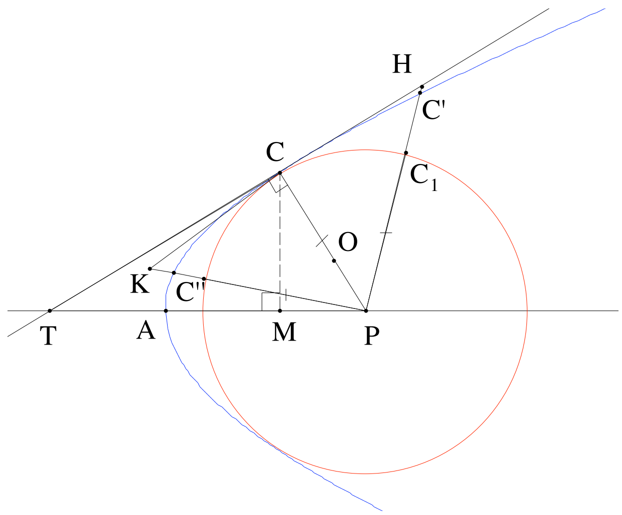

FIG. 6.2 – La droite *minimum* et la normale à une conique selon Apollonius et Descartes.

de contact C.

6.4 Droites *minimum* et tangentes chez Apollonius

On sait bien qu'une droite *minimum* tirée d'un point à une conique est normale à celle-ci au point de contact, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente, ce que démontre Apollonius dans trois séries de propositions[17], mais le fait que l'objet du Livre V pour le Géomètre grec soit de proposer une théorie des normales culminant dans la détermination de l'enveloppe des normales à une conique[18] fait débat[19] parmi les historiens.

Dans sa préface au Livre V, Apollonius revendique une démarche strictement opposée à celle de Descartes de traitement séparé des tangentes et des

[17]Cf. *infra* [section 6.4, p. 203].

[18]Cf. par exemple [Apollonius(1896), « Propositions leading immediately to the determination of the *evolute* », p. 168-178].

[19]C'est l'interprétation entre autres de Heath et Zeuthen. Montrer que tel n'est absolument pas le cas est l'objet du texte polémique de [Unguru et Fried(2001), Chap IV, p. 146-220] précédemment cité.

droites *minimum* pour les coniques. Il écrit ainsi[20] :

> Il faut que tu saches que nos prédécesseurs et nos contemporains ne se sont que peu attachés à l'examen des minimales, et ont montré, grâace à cela, quelles sont les droites qui touchent la section, et la réciproque [...] Pour notre part, nous avons montré ces choses dans le premier livre, sans utiliser pour démontrer cela ce qui a trait aux lignes minimales [...][21]

Apollonius paraît ainsi critiquer ses prédécesseurs qui avait déduit les tangentes des lignes *minimum* pour les coniques, ou d'autres courbes géométriques, peut-être à l'imitation d'Euclide pour le cercle qui détermine la tangente comme étant la droite perpendiculaire au rayon issu du point de contact, qui constitue bien une droite *minimum* pour tout point pris sur elle-même, relativement au cercle. Au contraire, Apollonius a donné une théorie séparée des tangentes, qu'il présente comme une théorie nouvelle et originale, et semble vouloir faire de même pour les droites *extrema*, même s'il établira ensuite la relation de perpendicularité qui existe entre ces deux objets géométriques.

Il démontre ainsi seulement dans les propositions 27 à 29 que la droite *minimum* et la tangente sont perpendiculaires au point de contact[22], cette dernière ayant été étudiée de manière indépendante au Livre I[23]. Il prouve ainsi que les droites *minima* sont *normales* à la conique. Il est intéressant de remarquer que pour ce faire, il propose une première série de deux démonstrations correspondant respectivement au cas de la parabole, et des coniques à centre, l'hyperbole et de l'ellipse, puis une dernière démonstration applicable à une conique quelconque. En effet, cette dernière démonstration est généralisable.

---

[20] Je donne la traduction française de ce texte difficile à interpréter qui m'a été aimablement communiquée par Roshdi Rashed que je remercie. On retrouvera bientôt cette traduction dans une nouvelle édition critique et traduction à paraître des *Coniques* d'Apollonius placée sous la direction de Roshdi Rashed.

[21] Cf. [Rashed(2007), p. 6-7]. On trouve dans ce même passage de la conférence une analyse de la préface d'Apollonius au Livre V. Une traduction anglaise disponible en volume est celle de Toomer [Apollonius(1990), I, p. 2]. Cf. également la traduction française de Ver Eecke [Apollonius(1959), p. 331] à partir du texte latin de Halley et la traduction de Heath [Apollonius(1896), p. lxxiv].

[22] Cf. [Apollonius(1959), p. 384-387] et [Apollonius(1896), p. 152-153].

[23] Cf. les propositions 33 à 36 du Livre I. Cf. [Apollonius(1959), p. 60-66] et [Apollonius(1896), p. 25-27]. Nous reviendrons sur ces démonstrations dans le chapitre consacré aux méthodes des tangentes de Fermat. Cf. [section 8.4, p. 286].

6.4.1 Les propositions 27 et 28 du Livre V : des démonstrations quantitatives intrinsèques

Les deux premières démonstrations se fondent sur l'emploi de la propriété caractéristique du segment intercepté entre le pied de la tangente sur l'axe et le sommet d'une conique, établies auparavant au livre I dans les propositions directes 33, 34 et leurs réciproques 35, 36.

Dans le cas de la parabole, par exemple, Apollonius démontre dans les propositions 33 et 35 du Livre I qu'un tel segment est égal au segment découpé par l'abscisse du point de contact[24]. Avec les notations de la Figure 6.2, on a ainsi

$$\mathsf{AT} = \mathsf{AM}, \tag{6.1}$$

ce qu'on pourrait exprimer autrement en disant que la sous-tangente est égale au double de l'abscisse.

D'autre part, ces deux démonstrations font appel à la propriété caractéristique du segment intercepté entre le pied d'une droite *minimum* sur l'axe et l'abscisse du point de contact avec la conique établies au même livre V, dans les propositions directes 8, 9, 10 et leurs réciproques 13, 14, 15[25].

Toujours dans le cas de la parabole, Apollonius démontre ainsi dans les propositions 8 et 13 du Livre V qu'un tel segment est constant et égal à la moitié du côté droit[26]. Si on appelle AL le côté droit de la parabole, avec les notations de la Figure 6.2, on a ainsi

$$\mathsf{PM} = \frac{1}{2}\mathsf{AL}, \tag{6.2}$$

ce qu'on pourrait exprimer autrement en disant que la « sous-droite *minimum* est constante et égale à la moitié du côté droit, dès lors qu'on a identifié droite *minimum* et normale.

Ces propriétés caractéristiques de la tangente ou de la droite *minimum* tirée depuis un point sur l'axe à une conique sont établies selon un même mode de démonstration par Apollonius. La condition suffisante apparaît dans une première proposition. Elle est démontrée par synthèse en supposant la propriété vérifiée pour une droite dont on va montrer qu'elle est tangente ou *minimum*. On peut, comme on le verra, reconstruire sans difficultés l'analyse

[24]Cf. [Apollonius(1959), p. 60-61 et p. 64-65] et [Apollonius(1896), p. 25-26].
[25]Cf. [Apollonius(1896), p. 143-146] et [Apollonius(1959), p. 345-358 et p. 361-365].
[26]Cf. [Apollonius(1896), p. 143-144] et [Apollonius(1959), p. 345-348 et p. 361-362].

correspondante en « retournant » cette démonstration et produire ainsi non seulement une démonstration de la condition nécessaire, mais encore une démonstration heuristique de la propriété caractéristique de la tangente ou de la droite *minimum*. Néanmoins, ce n'est pas ainsi que procède Apollonius. La condition nécessaire réciproque apparaît dans une seconde proposition. Elle est démontrée par une réduction à l'absurde qui s'appuie sur l'existence de la tangente ou de la droite *minimum* et la condition suffisante précédemment établie[27].

On peut remarquer que le mode de démonstration choisi ici par Apollonius peut répondre parfaitement à la critique de la Géométrie classique qui fut faite par les mathématiciens du dix-septième siècle, ces derniers reprochant à leurs prédecesseurs grecs d'avoir dérobé leur analyse des problèmes et des théorèmes qu'ils avaient établis, n'en donnant seulement que la synthèse, pour prétendre à plus de gloire[28].

En usant des propriétés de la sous-tangente, de la sous-droite *minimum* et du *symptoma* de la conique considérée, Apollonius démontre que les deux triangles rectangles de côté commun l'ordonnée du point de contact, dont les hypoténuses sont données par la tangente et la droite minimum, et le second côté de l'angle droit par la sous-tangente et la sous-droite *minimum*, sont semblables. Autrement dit en reprenant les notations de la figure 6.2, Apollonius démontre que les triangles rectangles PMC et CMT sont semblables et en déduit que l'angle $\widehat{\mathsf{PCT}}$ est droit c'est-à-dire que la droite *minimum* et la tangente sont perpendiculaires au point de contact.

Réciproquement, si on part de l'hypothèse que la droite *minimum* et la tangente sont perpendiculaires au point de contact, en usant par exemple de la proposition 29 du Livre V, dont la démonstration géométrique est qualitative et générale et ne présuppose pas la connaissance de la sous-droite *minimum*, l'argument de la démonstration précédente peut être retourné. On déduira ainsi en usant de la similitude des triangles la sous-droite *minimum* de la sous-tangente et *vice-versa* et on disposera donc d'une relation quanti-

[27] Pour cette raison sans doute, Heath ne cite jamais les démonstrations des conditions nécessaires dans son édition modernisante des *Coniques* et ne fait que citer les références des propositions.

[28] Un exemple parmi d'autres nombreux d'une telle critique est donné dans la préface du traité posthume de van Schooten [Schooten(1661a)] publié dans la seconde édition latine de la *Géométrie*. Cf. [Schooten(1661a), p. 343-344] et *supra* [section 1.3.2, p. 40]. Dans ce traité, van Schooten essaie d'établir un parallèle entre ce qui a pu être l'analyse des Anciens et l'analyse algébrique des Modernes, en particulier celle de Descartes.

tative entre sous-normale, sous-tangente et ordonnée du point de contact[29]. Comme nous le verrons dans la suite, c'est exactement de cette façon que Fermat appliquera dans un premier temps sa méthode de recherche d'*extremum* à la détermination des tangentes à une courbe quelconque[30].

Donnons la démonstration d'Apollonius dans le cas de la parabole. On déduit des expressions précédentes (6.1) et (6.2) la proportion

$$\mathsf{PM} : \mathsf{AL} = \mathsf{AM} : \mathsf{MT} \tag{6.3}$$

et l'égalité

$$Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{MT}) = Rect(\mathsf{AL}, \mathsf{AM}). \tag{6.4}$$

Or, comme le *symptoma* de la parabole donne

$$Quad(\mathsf{CM}) = Rect(\mathsf{AL}, \mathsf{AM}), \tag{6.5}$$

on déduit finalement

$$Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{MT}) = Quad(\mathsf{CM}). \tag{6.6}$$

Apollonius indique ensuite que l'angle $\widehat{\mathsf{CMT}}$ étant droit, il en est de même de l'angle $\widehat{\mathsf{TCP}}$. En effet, il est aisé de déduire de l'égalité (6.6) une proportion qui permet d'établir que les triangles rectangles PMC et CMT sont semblables et le résultat souhaité[31], en supposant néanmoins que les ordonnées sont orthogonales, autrement dit que la droite AM est l'axe — au sens classique — de la conique. Cette dernière supposition est donc un élément clef de la démonstration. Du reste, Apollonius ne donne dans le Livre V qu'une théorie des droites *extrema* tirées d'un point situé sur l'axe d'une conique et non sur un diamètre quelconque.

Bien qu'un Moderne pourrait regarder une telle limitation comme un défaut de généralité, il est néanmoins possible de pallier ce défaut apparent

[29] L'usage d'une proposition semblable par les Géomètres Grecs contemporains d'Apollonius pour déduire une théorie des tangentes d'une théorie des droites *minima*, auquel ce dernier ferait référence dans sa Préface au Livre V pour le critiquer, a été suggéré par Jan Hogendijk dans [Apollonius(1990), I, p. xxxix]. Unguru et Fried développent également cette hypothèse. Cf. [Unguru et Fried(2001), p. 161-162].

[30] Cf. *infra* [section 9.4.1, p. 332].

[31] Ceci fait l'objet du premier des lemmes relatifs au Livre V des *Coniques* qui figurent dans le Livre VII de la *Collection Mathématique* de Pappus. Il s'agit de la proposition 203. Cf. [Pappus(1982), II, p. 750-751].

en se référant à d'autres propositions des *Coniques* qui traitent de ce qu'on pourrait appeler aujourd'hui des changements d'axes et de coordonnées. On aperçoit ici un problème qu'on a déjà évoqué auparavant alors qu'on parlait de l'emploi de la méthode des normales de Descartes[32], auquel nous avons suggéré de répondre de la même façon.

Dans les propositions 46 et 47-48 du Livre I, Apollonius a en effet déterminé les diamètres et les ordonnées correspondantes de la parabole et des coniques à centre[33]. Ainsi, dans le cas de la parabole, les diamètres sont les droites parallèles au diamètre principal, c'est-à-dire le diamètre déterminé par la section de cône engendrant la conique, et les ordonnées correspondantes sont les droites parallèles à la tangente au point d'intersection du diamètre avec la conique[34].

Ensuite, dans les propositions 49 et 50, Apollonius démontre que la propriété du *symptoma* établie pour le diamètre principal de la section du cône est vérifiée pour un diamètre quelconque[35]. D'autre part, bien qu'il définisse le nouveau côté droit déterminant l'application des aires par une proportion déduite de la figure géométrique, Apollonius n'exprime pas ce dernier en fonction du côté droit dépendant du diamètre principal. Il donnera plus tard une telle expression du côté droit d'un diamètre quelconque mais en fonction du côté droit de l'axe dans la proposition 5 du Livre VII pour la parabole[36].

On peut remarquer que le diamètre principal et les autres diamètres n'ont pas le même statut[37], mais je veux m'intéresser ici à deux propositions des *Coniques* déduites par Apollonius des théorèmes précédents sur les diamètres, qui permettent de justifier la réduction qu'il opère à l'axe dans certains de ses énoncés et de ses démonstrations, comme c'est le cas par exemple dans sa théorie des droites *minima* du Livre V.

[32]Cf. *supra*[section 5.2, p. 168].
[33]Cf. [Apollonius(1959), p. 85-88] et [Apollonius(1896), p. 36-38].
[34]Cf. [Apollonius(1959), Prop. 46, p. 85-86] et [Apollonius(1896), p. 36].
[35]Cf. [Apollonius(1959), p. 88-94] et [Apollonius(1896), p. 39-41].
[36]Cf. [Apollonius(1959), p. 556-557] et [Apollonius(1896), p. 224-225].
[37]Unguru et Fried insistent sur cet aspect de la question dans une section intitulée « The place of diameters ». Cf. [Unguru et Fried(2001), p. 103-107].

6.4.2 Les propositions 53 du Livre I et 5 du Livre VII : la réduction à l'axe

Dans la proposition 53 du Livre I, Apollonius après avoir construit dans la proposition précédente une parabole dont le sommet, l'*axe*, l'angle *droit* d'inclinaison des ordonnées et le côté droit sont donnés, c'est-à-dire en exhibant le cône dont cette conique constitue une section, démontre comment on peut se ramener à ce premier cas pour un diamètre quelconque et des ordonnées obliques d'angle quelconque. D'autre part, dans la proposition 5 du Livre VII, Apollonius exprime le côté droit d'un diamètre quelconque en fonction du côté droit de l'axe et redémontre à cette occasion implicitement la propriété de la sous-droite *minimum* à la parabole.

Les démonstrations de ces propositions s'appuient sur deux versions complémentaires d'une même figure[38] ainsi que sur la proposition 49 du Livre I, et sont de même nature. Ajoutons que cette réduction à l'axe est opérée par Apollonius pour la construction de toutes les coniques[39].

Considérons d'abord la proposition 53 du Livre I[40] et donnons la construction d'Apollonius. Qu'il soit donc proposé de construire la parabole de sommet C, de diamètre CN , d'angle d'inclinaison des ordonnées θ et de côté droit $\mathsf{B}\Lambda$.

Soit F le point pris sur ce diamètre tel que $\mathsf{CF} = \frac{1}{2}\mathsf{B}\Lambda$. Que l'angle $\widehat{\mathsf{FCT}}$ soit pris égal à l'angle d'inclinaison des ordonnées. Soient les droites FT perpendiculaire à CT, TM parallèle à CN et CM perpendiculaire à TM. Soit A le milieu de TM. Enfin soit AE la droite perpendiculaire à CN qui rencontre CT en O. Soit AL tel que $Rect(\mathsf{AL}, \mathsf{AM}) = Quad(\mathsf{CM})$.

Alors la parabole de sommet A, d'axe AM et de côté droit AL est la parabole cherchée. Comme Apollonius a démontré auparavant, comment exhiber le cône dont cette conique constitue une section, le problème est donc résolu.

Donnons la démonstration qui sous-tend cette construction. Cette parabole passe par le point C par définition de AL d'après la propriété du *symptoma*. La droite CT est tangente au point C, d'après la proposition 33 du Livre I, car par construction $\mathsf{AT} = \mathsf{AM}$. D'autre part la droite CN est

[38]Cf. [figure 6.3, p. 210]. Je modifie les notations des points par rapport à Apollonius pour conserver les mêmes notations tout au long du chapitre.

[39]Cf. la proposition 55 du Livre I pour l'hyperbole et la proposition 58 du Livre I pour l'ellipse [Apollonius(1959), resp. p. 104-106 et p. 111-112] et [Apollonius(1896), resp. p. 45-47 et p. 51-52].

[40]Cf. [Apollonius(1959), p. 99-101] et [Apollonius(1896), p. 43-44].

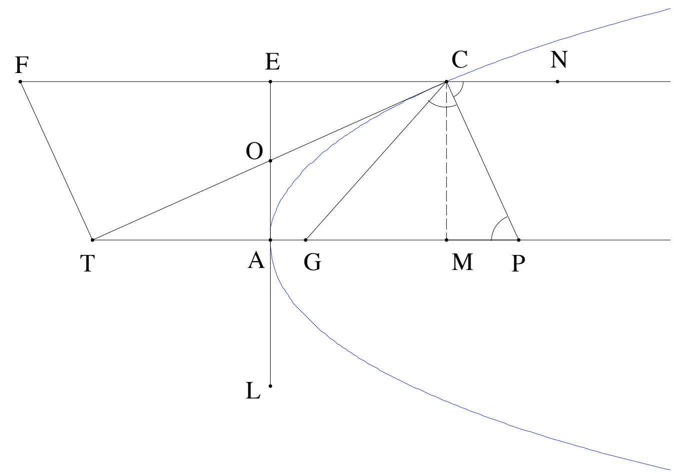

FIG. 6.3 – La réduction d'un diamètre à l'axe.

un diamètre de la section, d'après la proposition 46 du Livre I, car elle est parallèle à l'axe, et ses ordonnées sont parallèles à la tangente CT.

Du fait de la similitude des triangles FTC et OEC et par construction du point F, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{OC} : \mathsf{CE} &= \mathsf{FC} : \mathsf{CT} && (6.7)\\ &= \mathsf{B}\Lambda : 2\mathsf{CT}. && (6.8)\end{aligned}$$

Mais alors d'après la proposition 49 du Livre I, $\mathsf{B}\Lambda$ est le côté droit correspondant au diamètre CN.

La proposition V du Livre VII[41] fait appel à une figure quasi identique à celle construite dans la proposition 53 du Livre I. Le point F n'y apparaît pas et est remplacé par le point P, pied de la droite perpendiculaire à la tangente en C, qui joue exactement le même rôle. En effet, du fait de l'isométrie des triangles OEC et OAT, déduite de la propriété de la sous-tangente établie dans la proposition 33 du Livre I[42], il est bien clair que les triangles FTC et CTP sont isométriques. On a donc

$$\mathsf{PT} = \mathsf{FC} = \frac{1}{2}\mathsf{B}\Lambda. \qquad (6.9)$$

[41]Cf. [Apollonius(1959), p. 556-557], [Apollonius(1990), I, p. 392-395] et [Apollonius(1896), p. 224-225].

[42]Apollonius utilise ce résultat dans la démonstration de la proposition 49 du Livre I.

Apollonius retrouve d'ailleurs cette expression de PT en se référant à la similitude des triangles CTP et ECO et à la proposition 49 du Livre I, en employant exactement le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 53 du Livre I.

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathsf{TP} &= \mathsf{TA} + \mathsf{AM} + \mathsf{MP} && (6.10) \\ &= 2\mathsf{AM} + \mathsf{MP} && (6.11) \end{aligned}$$

d'après la propriété de la sous-tangente établie dans la proposition 33 du Livre I. Apollonius détermine ensuite l'expression de la sous-normale

$$\mathsf{MP} = \frac{1}{2}\mathsf{AL} \tag{6.12}$$

en partant de l'égalité (6.6), et en faisant le raisonnement réciproque de celui présenté auparavant dans le cas de la parabole, déduisant ainsi la sous-droite *minimum* de la sous-tangente. Il aurait pu tout autant, comme on l'a dit auparavant, déduire *vice-versa* d'une telle égalité la sous-tangente de la sous-droite *minimum*.

Il obtient ainsi finalement l'expression du côté droit $\mathsf{B}\Lambda$ correspondant au diamètre CN par rapport à celle du côté droit AL de l'axe :

$$\mathsf{B}\Lambda = \mathsf{AL} + 4\mathsf{AM}. \tag{6.13}$$

On peut remarquer que le côté droit de l'axe est *minimum* parmi tous les côtés droits des diamètres de la parabole. Cette conséquence de la proposition 5 du Livre VII est énoncée par Apollonius dans la proposition 32 du Livre VII[43] et fournit la seule application dans toutes les *Coniques* de cette proposition.

La parenté qui existe entre la proposition 53 du Livre I et la proposition 5 du Livre VII nous paraît essentielle pour comprendre le statut de l'axe parmi les diamètres et la relation entre tangente et droite *minimum*.

Ces deux propositions permettent à Apollonius d'opérer une réduction qualitative puis quantitative d'un diamètre quelconque à l'axe de la conique. La première réduction est qualitative dans la mesure où elle montre qu'on peut toujours se ramener au cas de l'axe, sans perte de généralité, au moyen d'une construction géométrique. La seconde réduction est quantitative dans

[43] Cf. [Descartes(1964-1974), p. 596-597] et [Apollonius(1990), I, p. 458-461].

la mesure où elle procure l'expression du côté droit d'un diamètre quelconque en fonction du côté droit de l'axe.

Quant à la relation entre droite *minimum* et tangente, elle apparaît dès qu'on se propose une telle réduction, comme dans le problème de la construction d'une conique dont l'origine, le diamètre, l'angle de projection des ordonnées et le côté droit sont donnés. On dispose ainsi d'un cadre bien identifié qui put engager les mathématiciens de l'époque d'Apollonius à déduire une théorie des tangentes de celle des droites *minimum* en usant d'une démonstration identique à celle suggérée par les propositions 27 et 28 du Livre V.

6.4.3 La propriété dioptrique du foyer de la parabole

On peut remarquer pour terminer que la figure 6.3 particulièrement riche peut nous permettre de déduire aisément la propriété dioptrique du foyer de la parabole. Construisons le milieu G du segment PT. Il est clair que

$$\mathsf{AG} = \frac{1}{2}\mathsf{MP} = \frac{1}{4}\mathsf{AL}. \tag{6.14}$$

D'autre part, G étant le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle PCT, $\widehat{\mathsf{GPC}} = \widehat{\mathsf{GCP}}$. Par ailleurs, comme les droites CN et GP sont parallèles, on a $\widehat{\mathsf{NCP}} = \widehat{\mathsf{GPC}}$. D'où l'égalité des angles $\widehat{\mathsf{GCP}}$ et $\widehat{\mathsf{NCP}}$. La normale est ainsi la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathsf{NCG}}$ et les droites NC et CG font des angles égaux avec la tangente CT. D'après la loi de la réfraction, un rayon lumineux tombant suivant NC se réfléchira donc suivant la droite CG.

Une telle démonstration se rapproche de celle de Dioclès dans la proposition 1 de son traité *Des Miroirs Ardents* à la différence que celui-ci part de la position du foyer sur l'axe — *i.e.* la distance du foyer au sommet de la parabole est égale au quart du côté droit. — pour en déduire ensuite que ce dernier est le milieu du segment dont les extrémités sont le pied de la tangente et le pied de la normale pris sur l'axe[44].

On peut tirer argument d'une telle démonstration, comme le font Unguru et Fried[45], pour en déduire que dans le contexte de la Dioptrique, il est naturel de considérer la normale comme objet premier plutôt que la droite

[44]Roshdi Rashed a donné une traduction commentée ce traité parmi d'autres textes des Catoptriciens Grecs sur les miroirs ardents qui nous sont parvenus en arabe. Cf. [Rashed(2000), p. 40-41 et p. 102-105].

[45]Cf. [Unguru et Fried(2001), p. 162-167].

minimum. Néanmoins la variété des démonstrations qu'on trouve chez les Catoptriciens Grecs peut incliner à relativiser un tel jugement[46]. Notons qu'une telle remarque peut aussi s'appliquer à Descartes pour justifier son choix de la normale, dès lors qu'on a accepté que le contexte de la genèse et de l'application de la méthode des normales dans la Géométrie cartésienne est la théorie de la dioptrique.

6.4.4 Les propositions 29, 31 et 32 du Livre V : des démonstrations qualitatives extrinsèques

La seconde démonstration donnée par Apollonius dans la proposition 29[47], du fait que la droite *minimum* et la tangente sont perpendiculaires au point de contact, procède par l'absurde et s'applique à une conique quelconque pour un diamètre quelconque. Elle peut d'ailleurs être généralisée à une courbe algébrique. D'autre part, elle n'use d'aucun résultat de la théorie des tangentes ou des droites *minima*, mais uniquement de la définition de ces deux notions.

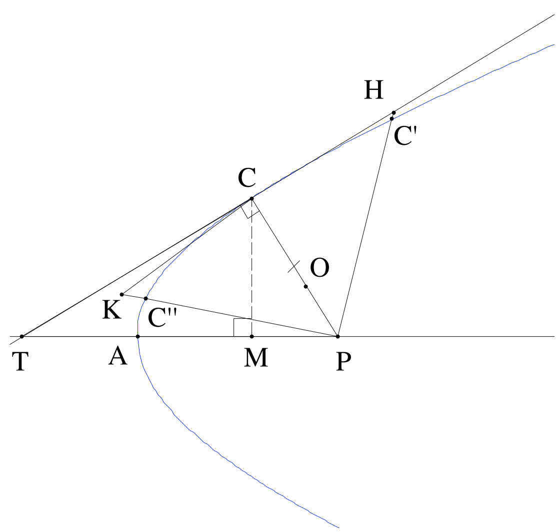

FIG. 6.4 – La droite *minimum* et la tangente à une conique selon Apollonius

[46]Cf. la comparaison faite par Roshdi Rashed des différentes démonstrations au sujet du miroir parabolique : [Rashed(2000), p. 272-285].

[47]Cf. [Apollonius(1959), p. 386-387], [Apollonius(1990), I, p. 90-93] et [Apollonius(1896), p.153].

Indiquons brièvement cette démonstration. Il s'agit donc de démontrer que tangente et droite *minimum* sont perpendiculaires au point de contact. Supposons que PC ne soit pas perpendiculaire à la tangente TC à la courbe au point C. Soit PH la perpendiculaire à la tangente où H est le point d'intersection des deux droites. Comme l'angle $\widehat{\mathsf{PHC}}$ est droit, on a alors $\mathsf{PC} > \mathsf{PH}$ car le plus grand angle sous-tend le plus grand côté. D'autre part, $\mathsf{PH} > \mathsf{PC}'$ où C' est le point d'intersection de la droite PH et de la conique, car la tangente tombe à l'extérieur de la conique. D'où finalement $\mathsf{PC} > \mathsf{PC}'$. Mais cela est impossible par définition de la droite PC qui est un *minimum*.

Il est aisé de démontrer de façon semblable une première réciproque partielle, à savoir que la droite perpendiculaire à la droite *minimum* au point de contact est tangente en ce point à la conique. C'est ce que fait Apollonius dans la proposition 31 du même livre[48].

À nouveau, présentons brièvement la démonstration d'Apollonius. Supposons que la droite CT ne soit pas tangente à la conique. Il est donc possible d'intercaler une droite CK entre la droite CT et la conique. Qu'on tire la perpendiculaire à la droite CK du point P qui la coupe au point K, et la courbe au point C''. Comme l'angle $\widehat{\mathsf{PKC}}$ est droit, on a $\mathsf{PC} > \mathsf{PK}$. D'autre part, $\mathsf{PK} > \mathsf{PC}''$ car la droite CK tombe à l'extérieur de la conique. D'où finalement $\mathsf{PC} > \mathsf{PC}''$. Mais cela est impossible par définition de la droite PC qui est un *minimum*.

On peut remarquer que l'argument de cette démonstration est de fait identique à celui de la proposition 29. On ne fait en effet que remplacer la tangente CT par une droite intercalée CK, en s'appuyant en fait sur l'unicité de la tangente. On pourrait ainsi, en supposant l'existence de la tangente, déduire directement de la proposition 29 la contradiction dans la démonstration de la proposition 31, sans passer par une nouvelle démonstration. Supposons en effet que CK est tangente à la courbe au point C. La droite CK est perpendiculaire à la droite *minimum* PC d'après la proposition 29. Mais alors l'angles $\widehat{\mathsf{PCK}}$ est droit, ce qui est absurde, car on a supposé l'angle $\widehat{\mathsf{PCT}}$ droit.

C'est d'ailleurs exactement ce que fait Apollonius dans la seconde réciproque partielle de la proposition 29 qu'il démontre dans la proposition 32, à savoir qu'une droite perpendiculaire à la tangente au point de contact est une droite *minimum*. Cette proposition, qui correspond à la définition liminaire donnée par Descartes de la normale et à l'introduction qui suit

[48] Cf. [Apollonius(1959), p. 388-389], [Apollonius(1990), I, p. 94-95] et [Apollonius(1896), p. 153].

sans démonstration du cercle tangent, se déduit de la proposition 29 par une réduction à l'absurde dès lors qu'on a posé l'existence d'une droite *minimum.* En effet, en introduisant celle-ci on obtiendra deux angles à la fois distincts et droits de sommet commun le point de contact, d'où une contradiction. Comme on l'a déjà vu, et comme le note Itard[49], la nécessité pour Apollonius d'introduire en plus de la proposition 29 les propositions 31 et 32, qui s'appuient sur elle au moyen d'une réduction à l'absurde, n'est que la conséquence d'un mode d'exposition synthétique qui ne saurait autoriser le mathématicien héllène à s'appuyer sur l'existence *a priori* de la tangente et de la droite *minimum.*

L'existence de cette droite *minimum* tirée depuis un point sur l'axe a été garantie auparavant par Apollonius dans les propositions 4 à 11 du livre V pour les différentes coniques en introduisant la sous-droite *minimum* au point de contact avec la conique[50].

Remarquons néanmoins que l'existence d'une droite *minimum* tirée d'un point *quelconque* à une conique — *i.e* non nécessairement sur l'axe, intérieur ou extérieur à la section — n'est pas encore garantie par une construction de la droite *minimum.* Une telle construction, obtenue en intersectant une hyperbole et la conique considérée, n'apparaîtra que dans les propositions 55 à 63[51] et présuppose, comme on l'a vu, les propositions précédentes dans le cas de points pris à l'extérieur de la section conique.

Cette construction de la normale apparaît en effet après qu'Apollonius en a établi les conditions de possibilité dans les propositions 49 à 54, qu'on peut considérer comme formant les *diorismes* d'une telle construction. Rappelons que parmi celles-ci on trouve les propositions 51 et 52[52] qu'on peut interpréter de façon moderne comme conduisant à la détermination de l'enveloppe des normales à une conique, point culminant selon les commentateurs du Livre V, où Apollonius détermine le nombre de normales qu'on peut mener d'un point à une conique, dont l'abscisse est strictement supérieur au demi côté droit, en fonction de l'ordonnée tirée à angle droit de ce point, donnant au passage le centre de courbure de la conique, dont on peut mener une seule

[49]Cf. [Itard(1948), p. 240-241]

[50]Cf. [Apollonius(1959), p. 334-360] et [Apollonius(1896), p. 140-146].

[51]Cf. [Apollonius(1896), p. 180-186]. Plus précisément, dans les propositions 58 à 61, Apollonius considère le cas d'un point extérieur à la conique, et dans les propositions 62 et 63, le cas d'un point intérieur à la conique.

[52]Cf. [Apollonius(1959), p. 418-434] et [Apollonius(1896), p. 168-179] pour un exposé en notations modernes.

normale à la conique, tandis que pour une ordonnée inférieure à la sienne, on pourra mener deux normales, et pour une ordonnée supérieure, aucune[53].

Ces propositions sont qualitatives et extrinsèques à la théorie des droites *minima* et des tangentes dans la mesure où elles ne nécessitent aucunement que tangente et droite *minimum* aient été déterminées auparavant, par exemple en fournissant l'expression de la sous-tangente et de la sous-droite *minimum*. Elles présuposent uniquement une définition — classique — de la tangente et de la droite *minimum*. On pourrait même proposer une nouvelle réduction en remarquant qu'en remplaçant droite *minimum* par cercle tangent, ces propositions nécessitent uniquement une définition classique de la tangente.

Pour cette raison, il est clair que ces propositions peuvent être généralisées à une courbe algébrique quelconque, comme ne manqueront pas de le remarquer Fermat et Descartes, chacun à leur façon. Ajoutons en outre que ces propositions sont valables pour des diamètres quelconques de la conique.

6.5 Droites *minimum* et tangentes chez Euclide

La première démonstration d'Apollonius présentée précédemment généralise de façon remarquable la démonstration de la proposition 18 du livre III des *Éléments* où Euclide énonce un théorème semblable pour le cercle[54]. Soit une droite tangente au cercle. Si on tire le diamètre issu du point de contact, alors il est perpendiculaire à la tangente. Reprenons les notations de la Figure 6.2. La proposition 18 énonce ainsi que la droite PC est perpendiculaire à la tangente CT au cercle au point C. Quant à la démonstration donnée par Euclide, elle présente en quelque sorte un cas limite de la démonstration précédente, puisque la contradiction ne provient pas de l'inégalité mais de l'égalité $\mathsf{PC} = \mathsf{PC}_1$, le point P étant le centre du cercle.

Mais qu'en est-il d'une théorie des droites *minimum* pour le cercle dans le livre III des *Eléments* d'Euclide ? Les propositions 7 et 8 établissent que la droite *minimum* tirée sur la circonférence d'un point à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle est porté par la droite passant par le centre du cercle[55].

[53] Pour une analyse mathématique détaillée de ces propositions, cf. [Rashed(2007), p. 12-21].

[54] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p 428-429].

[55] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 401-409].

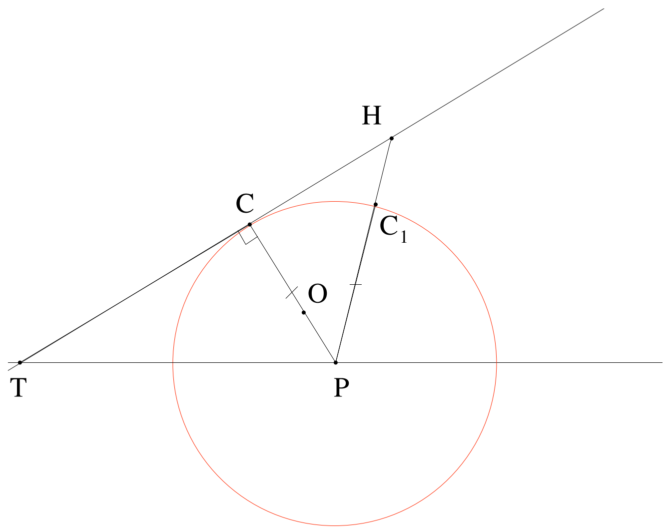

FIG. 6.5 – La droite *minimum* et la tangente à un cercle selon Euclide

Ainsi les droites *minimum* à un cercle, en prenant une définition semblable à celle d'Apollonius pour les coniques, sont les diamètres et la proposition 18 du Livre III des *Éléments* constitue donc bien un cas particulier de la proposition 31 du Livre V des *Coniques* d'Apollonius dans le cas du cercle.

Exactement de la même façon, la seconde démonstration d'Apollonius présentée précédemment généralise la démonstration donnée par Euclide de la proposition 16, où il énonce que la droite perpendiculaire à un diamètre est tangente au cercle à l'extrémité du diamètre[56]. Au sein de l'énoncé de la proposition 16, la droite perpendiculaire au diamètre n'est d'ailleurs pas caractérisée par le fait de toucher le cercle sans le couper — cette caractérisation apparaîtra seulement dans le Porisme qui suit, vraisemblablement en partie interpolé[57] —, mais par le fait d'une part qu'elle tombe à l'extérieur du cercle, d'autre part qu'il soit impossible d'intercaler une autre droite entre celle-ci et la circonférence.

A ces deux propositions, Euclide en ajoute une troisième, la proposition 19, énonçant que si une droite est tangente au cercle, et si à partir du point

[56]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 423-427].
[57]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 425].

de contact on mène la perpendiculaire à la tangente, cette droite passera par le centre du cercle — *i.e.* sera *minimum* d'après la proposition 7 du Livre III —[58]. À nouveau, cette proposition, comme la proposition 32 du livre V chez Apollonius, se déduit par une réduction à l'absurde de la proposition 18 du livre III en supposant l'existence de la tangente au cercle en un point donné. Cette existence a bien été établie par la construction de ce problème dans la proposition 17 du livre III[59].

Il existe ainsi un parallélisme strict entre les propositions et les démonstrations respectives d'Euclide et Apollonius pour ce qui regarde la relation de perpendicularité entre droite tangente et droite *minimum*[60], et de ce point de vue, si l'on ne soucie pas dans un premier temps de l'ordre et de la hiérarchie de ces propositions, la démarche d'Apollonius apparaît comme une généralisation de celle d'Euclide.

6.6 Une comparaison d'Euclide et Apollonius avec Descartes

Comparons à présent l'articulation entre droite *minimum* et tangente au sein des théories respectives d'Euclide, Apollonius et Descartes. Ces deux objets et les théories afférentes sont-ils présentés par ces mathématiciens de façon indépendante ? Ou, au contraire, l'un de ces deux objets et la théorie afférente sont-ils donnés premièrement, déterminant, au moyen de la construction d'une droite perpendiculaire, les seconds ?

Afin de clarifier et de comparer les relations entre, droite tangente, droite *minimum* et cercle tangent au sein de la théorie des droites *minima* d'Apollonius au livre V des *Coniques*, de la théorie du cercle d'Euclide au livre III, et enfin de la méthode des normales présentée par Descartes dans la *Géométrie*, notons comme suit les assertions figurant dans les énoncés des propositions :

a) La droite CT est tangente à la courbe —cercle, conique, courbe géométrique — au point C.

---

[58] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 430-431].

[59] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 427-428].

[60] Unguru et Fried procède à une comparaison détaillée entre la théorie des coniques d'Apollonius et la théorie du cercle d'Euclide. Cf. [Unguru et Fried(2001), Chap VII, p. 332-357].

b) La droite CT et la droite PC sont perpendiculaires au point C de la courbe —cercle, conique, courbe géométrique —.

c1) La droite PC contient le centre P du cercle.

c2) La droite PC est *minimum* à la conique au point C.

c3) Le cercle de centre P est tangent à la courbe géométrique au point C.

On peut alors résumer ainsi la situation[61] :

– Euclide énonce dans le cas du cercle : b) $\wedge$ c1) $\Rightarrow$ a) (Prop. 16), a) $\wedge$ c1) $\Rightarrow$ b) (Prop. 18) et a) $\wedge$ b) $\Rightarrow$ c1) (Prop. 19) ;
– Apollonius dans le cas d'une conique : a) $\wedge$ c2) $\Rightarrow$ b) (Prop. 29), b) $\wedge$ c2) $\Rightarrow$ a) (Prop. 31), a) $\wedge$ b) $\Rightarrow$ c2) (Prop. 32) ;
– Descartes dans le cas d'une courbe algébrique : a) $\wedge$ b) $\Rightarrow$ c3).

Ainsi Euclide, dans le cas du cercle, obtient la tangente à partir de la droite *minimum* par construction de la perpendiculaire. Une telle obtention est « naturelle » dans le cas du cercle puisque les droites *minima* sont données par les diamètres. Apollonius, dans le cas des coniques, fait le choix de proposer deux théories indépendantes des tangentes et des droites *minimum* au Livre I et au Livre V puis de montrer comment on peut obtenir l'une à partir de l'autre par construction de la perpendiculaire. Descartes enfin, dans le cas des courbes algébriques, obtient la droite *minimum* à partir de la tangente par construction de la perpendiculaire. Cette obtention apparaît également naturelle car Descartes a substitué à la droite *minimum* un cercle tangent. Dès lors, le respect du principe d'ordre et de simplicité commande de déduire le cercle tangent de la droite tangente.

On peut d'ailleurs remarquer que la relation entre cercle tangent et droite *minimum* apparaît en filigrane dans les propositions 11 et 12 des *Eléments* d'Euclide qui portent sur des cercles tangents intérieurement ou extérieurement. Ces propositions peuvent être démontrées en effet en employant les propositions 7 et 8 consacrées aux droites *extrema* du cercle comme l'a remarqué Heath[62].

Ainsi, au delà des choix différents d'ordre et de hiérarchisation des objets, nous observons que les propositions et les démonstrations d'Euclide, Apollonius et Descartes portant sur les droites *minima* et les tangentes apparaissent comme les résultats de deux généralisations, d'abord du cercle aux coniques, puis des coniques aux courbes algébriques. Nous avons là, pour reprendre

[61]Nous empruntons cette idée à Bernard Vitrac. Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 430].
[62]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 416-417].

une expression de Cavaillès, un exemple de généralisation[63].

Ainsi, malgré les reformulations, considéré sous ce seul point de vue, la nature géométrique des relations entre droite *minimum* et tangente n'a pas été modifiée selon nous entre Euclide, Apollonius et Descartes. Les mêmes conceptions classiques de tangente et de droite *minimum* sont à l'œuvre chez chacun de ces mathématiciens.

6.7 La droite *minimum* à la parabole selon Apollonius : les propositions 4 et 8 du Livre V des *Coniques*

Nous allons apporter une autre preuve de cette généralisation en montrant que la première analyse géométrique classique donnée par Descartes dans sa méthode des normales n'est autre que la reformulation et la généralisation des analyses correspondant aux démonstrations synthétiques données par Apollonius dans les premières propositions du Livre V pour déterminer la sous-droite *minimum* à une section conique[64].

Ce faisant, nous souhaitons discuter une question qui parcourt l'ensemble de notre étude : comment l'algèbre appliqué à la résolution des problèmes géométriques des Anciens modifie-t-il chez les mathématiciens Modernes l'interprétation des objets mathématiques qui y apparaissent ? L'algèbre des Modernes entretient-elle un rapport avec l'analyse qui aurait été cachée par les Anciens ?

Pour établir la comparaison entre les démonstrations d'Apollonius et la méthode de Descartes, et pour ne pas alourdir inutilement l'argument, nous considérerons seulement le cas de la parabole qui, du fait de sa simplicité, permettra de rendre plus claires les relations de parenté que nous nous proposons de mettre en évidence.

[63] Cf. *supra* [Introduction, p. 19].

[64] Cf. les propositions 4 à 11 : [Apollonius(1990), I, p. 8-47], [Apollonius(1959), p. 334-360] et [Apollonius(1896), p. 140-146].

6.7.1 La proposition 4 du Livre V des *Coniques* d'Apollonius

Rappelons à présent l'énoncé de la proposition 4 du livre V dans la traduction de Paul ver Eecke :

> Si l'on prend, sur l'axe d'une parabole, un point dont la distance au sommet de la section est égale à la moitié du côté droit, et si, de ce point, l'on mène des droites quelconques à la section, la plus petite de ces lignes sera celle qui est menée au sommet de la section, et celles qui sont plus rapprochées de cette dernière seront plus petites que celles qui sont plus éloignées. D'autre part, le carré de[65] l'une quelconque de ces droites dépassera le carré de cette droite minima d'un excédent équivalent au carré de la droite découpée entre le sommet et la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette droite quelconque sur l'axe.[66]

Ainsi, en modifiant les notations d'Apollonius et en adoptant celles que nous avons employées précédemment pour présenter la méthode des normales de Descartes, dans la proposition 4 du livre V, Apollonius établit que si $\mathsf{AP} = \mathsf{A}\Lambda$ où $\mathsf{A}\Lambda$ est égal à la moitié du côté droit de la parabole, alors la droite *minimum* tirée du point P à la parabole est AP et que pour toute sécante PC coupant la parabole au point C d'abscisse AM, on a

$$Quad(\mathsf{CP}) = Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}). \tag{6.15}$$

Apollonius considère initialement quatre sécantes tirées du point P que nous avons représentées sur la figure 6.6. Parmi celles-ci, l'une est donnée par le segment découpé par l'ordonnée du point P, deux coupent la parabole en un point dont l'abscisse est inférieure à AP, et la dernière coupe la parabole en un point dont l'abscisse est supérieure à AP. Apollonius se contente néanmoins de donner la démonstration pour une seule sécante que nous nommons PC.

D'après le *symptoma* de la parabole, on a

$$\begin{aligned} Quad(\mathsf{CM}) &= Rect(2\mathsf{A}\Lambda, \mathsf{AM}) && (6.16)\\ &= 2Rect(\mathsf{A}\Lambda, \mathsf{AM}) && (6.17) \end{aligned}$$

[65] Ver Eecke ne donne pas une traduction entiérement géométrique en traduisant « carré de » et non « carré sur ».

[66] Cf. [Apollonius(1959), p. 334-335]. Cf. également [Apollonius(1990), I, p. 8-11].

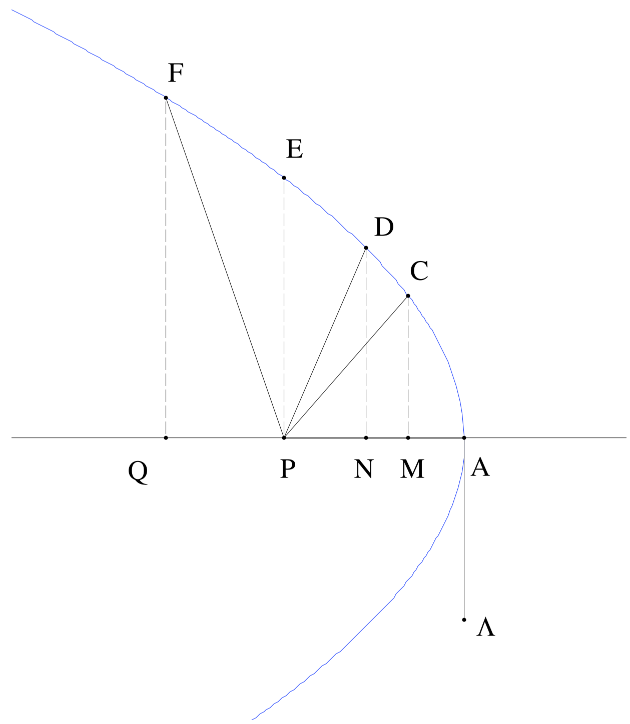

FIG. 6.6 – La droite *minimum* à la parabole selon Apollonius : Proposition V.4

d'après la proposition 1 du Livre II des *Eléments*[67]. Par hypothèse, on déduit donc

$$Quad(\mathsf{CM}) = 2Rect(\mathsf{AP}, \mathsf{AM}). \tag{6.18}$$

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient

$$Quad(\mathsf{CP}) = Quad(\mathsf{CM}) + Quad(\mathsf{PM}). \tag{6.19}$$

Mais d'après l'égalité (6.18), on déduit

$$Quad(\mathsf{CP}) = 2Rect(\mathsf{AP}, \mathsf{AM}) + Quad(\mathsf{PM}). \tag{6.20}$$

Or la proposition 7 du Livre II des *Éléments* d'Euclide[68] donne

$$Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}) = Quad(\mathsf{PM}) + 2Rect(\mathsf{AP}, \mathsf{AM}). \tag{6.21}$$

[67]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 327-328].
[68]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 338-340].

On obtient ainsi

$$Quad(\mathsf{CP}) = Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}). \tag{6.22}$$

Apollonius indique ensuite que les droites PF et PD sont plus grandes que la droite CP qui est plus grande que la droite AP. Bien qu'il ne donne pas de démonstration de ces inégalités ni de la décroissance de la longueur des cordes à mesure que leur extrémité se rapproche du sommet, il est aisé de reconstruire cette démonstration[69] qu'on trouve d'ailleurs développée dans la démonstration de la proposition 8.

6.7.2 La proposition 8 du Livre V des *Coniques* d'Apollonius

Rappelons tout d'abord l'énoncé de cette proposition dans la formulation d'Apollonius :

> Si l'on prend sur l'axe d'une parabole, un point dont la distance au sommet de la section est plus grande que la moitié du côté droit ; si l'on pose à partir de ce point, du côté du sommet de la section, un segment de l'axe égal à la moitié du côté droit ; si l'on élève à l'extrémité de ce segment, perpendiculairement à l'axe, une droite que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la section, et si l'on mène la droite reliant ce point de rencontre au point donné en premier lieu, cette dernière droite sera la plus petite de toutes celles que l'on peut mener de ce point donné sur l'axe à la section ; tandis que, parmi les autres droites, celle qui est plus rapprochée de part et d'autre de cette droite minima sera plus petite que celle qui en est plus éloignée. D'autre part, l'excédent du carré de l'une quelconque des droites menées sur le carré de la droite minima sera équivalent au carré du segment intercepté entre les droites qui, des extrémités de ces droites, sont abaissées de maniére ordonnée sur l'axe.[70]

Autrement dit, en reprenant nos notations, si P est un point de l'axe tel que $\mathsf{AP} > \mathsf{A}\Lambda$, où $\mathsf{A}\Lambda$ est la moitié du côté droit de la parabole, et si

[69]Cf. [Apollonius(1959), n. 2, p. 336]. On peut néanmoins suspecter des lacunes, ce qui a conduit Halley à procéder à des interpolations. Cf. [Apollonius(1959), n. 1, 2, 3 p. 335 et n. 1, p. 336].

[70]Cf. [Apollonius(1959), p. 345].

le point M est pris entre A et P tel que $\mathsf{PM} = \mathsf{A}\Lambda$, où MC est abaissée perpendiculairement à l'axe sur le point P, alors la droite PC est la droite minimum tirée du point P à la courbe. Si C' est un autre point de la courbe, $\mathsf{C}'\mathsf{P}$ augmente lorsque le point C' s'éloigne du point C. D'autre part,

$$Quad(\mathsf{C}'\mathsf{P}) = Quad(\mathsf{CP}) + Quad(\mathsf{MM}'). \tag{6.23}$$

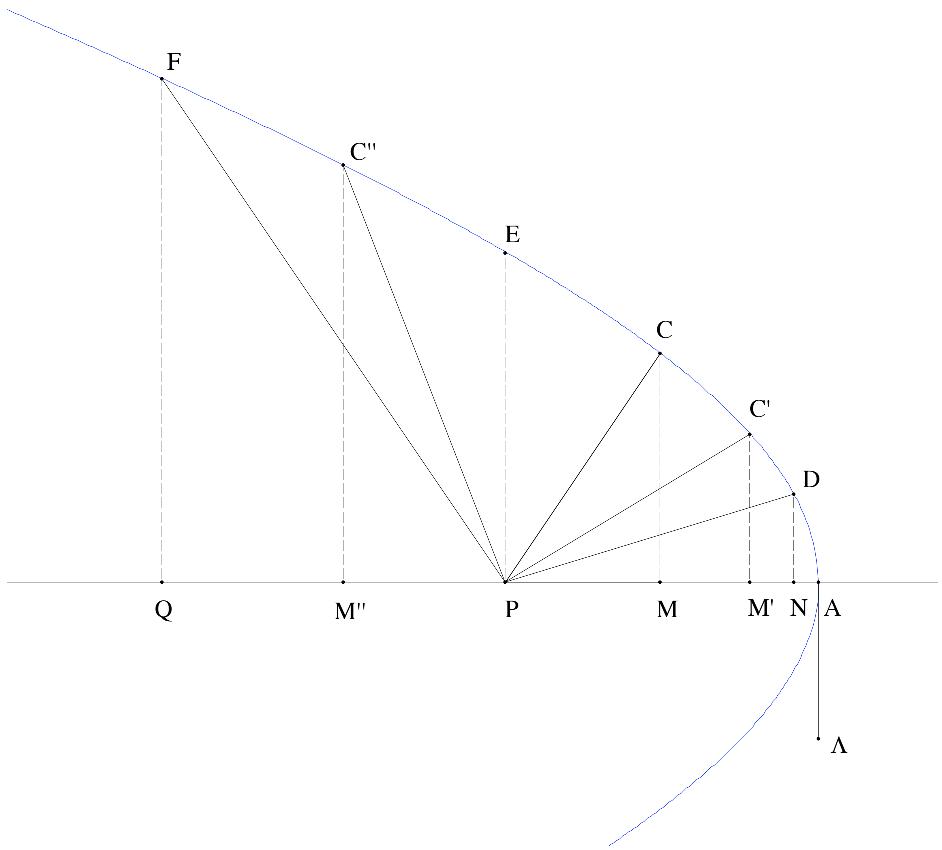

FIG. 6.7 – La droite *minimum* à la parabole selon Apollonius : Proposition V.8

Apollonius considère initialement six sécantes à la parabole tirées du point P, en plus de la droite *minimum* CP, que nous avons représentées sur la figure 6.7 Parmi celles-ci, deux sont données respectivement par les segments découpés par l'ordonnée et l'abscisse du point P, deux coupent la parabole en un point dont l'abscisse est supérieure à AP et deux coupent la parabole en un point dont l'abscisse est inférieure à AP. Apollonius ne considère pas le cas où l'abscisse du point d'intersection avec la parabole est placée entre P et M. On peut remarquer néanmoins que ce cas peut être traité de la même façon que lorsque cette abscisse est supérieure à AP.

Apollonius démontre dans un premier temps l'égalité souhaitée pour les sécantes $\mathsf{PC'}$, PD[71], PA et en déduit que la droite PC est *minimum* pour l'arc de parabole AC. Il démontre ensuite l'égalité souhaitée pour les sécantes EP, $\mathsf{PC''}$, PF[72] et en déduit que la droite PC est *minimum* pour l'arc de parabole CF.

Pour nous, nous nous contenterons de donner la démonstration correspondant à la corde $\mathsf{PC'}$ et la démonstration de la décroissance de la longueur des cordes pour l'arc de parabole AC.

D'après le *symptoma* de la parabole, on a

$$\begin{aligned} Quad(\mathsf{C'M'}) &= Rect(2\mathsf{A}\Lambda, \mathsf{AM'}) && (6.24)\\ &= 2Rect(\mathsf{A}\Lambda, \mathsf{AM'}) && (6.25)\end{aligned}$$

d'après la proposition 1 du Livre II des *Eléments*[73]. Par hypothèse, on déduit donc

$$Quad(\mathsf{C'M'}) = 2Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{AM'}). \quad (6.26)$$

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$Quad(\mathsf{PC'}) = Quad(\mathsf{C'M'}) + Quad(\mathsf{PM'}) \quad (6.27)$$

D'après la proposition 4 du Livre II des *Eléments* d'Euclide[74], on a d'autre part

$$Quad(\mathsf{PM'}) = Quad(\mathsf{PM}) + Quad(\mathsf{MM'}) + 2Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{MM'}). \quad (6.28)$$

D'après les égalités (6.26) et (6.28), on déduit

$$\begin{aligned} Quad(\mathsf{PC'}) &= 2Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{AM'}) + 2Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{MM'}) \\ &+ Quad(\mathsf{PM}) + Quad(\mathsf{MM'}) && (6.29)\\ &= Rect(\mathsf{PM}, \mathsf{AM}) + Quad(\mathsf{PM}) + Quad(\mathsf{MM'}) && (6.30)\end{aligned}$$

[71]Pour cette sécante, Apollonius se contente d'une simple constatation.
[72]Pour cette sécante, Apollonius se contente d'une simple constatation.
[73]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 327-328].
[74]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 331-333].

On déduit de l'égalité (6.26)

$$Quad(\mathsf{PC}') = Quad(\mathsf{CM}) + Quad(\mathsf{PM}) + Quad(\mathsf{MM}'). \tag{6.31}$$

Enfin, d'après le théorème de Pythagore, on obtient

$$Quad(\mathsf{PC}') = Quad(\mathsf{PC}) + Quad(\mathsf{MM}'). \tag{6.32}$$

Ajoutons qu'il est bien clair qu'en posant dans la démonstration précédente $\mathsf{C} = \mathsf{M} = \mathsf{A}$, $\mathsf{C}' = \mathsf{C}$ et $\mathsf{M}' = \mathsf{M}$, on retrouve la démonstration de la proposition 4.

A présent, en supposant la même égalité établie pour les sécantes PA, PD et PC', il est aisé de déduire la décroissance de la longueur des cordes à mesure que leur extrémité se rapproche du point C, en écrivant

$$\begin{aligned} Quad(\mathsf{PC}) &= Quad(\mathsf{PA}) - Quad(\mathsf{AM}) = Quad(\mathsf{PD}) - Quad(\mathsf{NM}) \\ &= Quad(\mathsf{PC}') - Quad(\mathsf{M}'\mathsf{M}). \end{aligned} \tag{6.33}$$

6.7.3 Une démonstration par analyse des propositions 4 et 8 du Livre V

Les deux démonstrations de la proposition 5 et de la proposition 8 procèdent par synthèse. Elles établissent en effet une condition suffisante pour qu'une sécante tirée d'un point P pris sur l'axe soit une droite *minimum* à la parabole et, pour ce faire, présupposent un critère dont elles ne donnent aucune raison d'être. Quant à la condition nécessaire portant sur le cas général, elle est démontrée dans la proposition 13 du même livre par une réduction à l'absurde qui s'appuie sur l'existence de la droite *minimum* et sur les propositions 5 et 8. C'est là une conséquence du mode d'exposition synthétique choisi par Apollonius et plus généralement par les géomètres Grecs, comme nous l'avons remarqué auparavant.

Dès lors, on peut se poser la question de reconstruire une démonstration analytique et heuristique de la propriété caractéristique de la droite *minimum* à la parabole, nous inscrivant ainsi dans la traduction de lecture de la Géométrie grecque par les mathématiciens du dix-septième siècle.

Pour cela nous considérerons la figure 6.7.

Supposons donc que la droite CP est *minimum* à la conique. On peut déduire des égalités (6.17) et (6.19)

$$Quad(\mathsf{CP}) = 2Rect(\mathsf{A}\Lambda, \mathsf{AM}) + Quad(\mathsf{PM}). \tag{6.34}$$

En ajoutant à présent $2Rect(\mathsf{AP},\mathsf{AM})$ à chacun des membres de l'égalité, on déduit

$$\begin{aligned} & Quad(\mathsf{CP}) + 2Rect(\mathsf{AP},\mathsf{AM}) \\ = \; & 2Rect(\mathsf{A\Lambda},\mathsf{AM}) + Quad(\mathsf{PM}) + 2Rect(\mathsf{AP},\mathsf{AM}) && (6.35) \\ = \; & 2Rect(\mathsf{A\Lambda},\mathsf{AM}) + Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}) && (6.36) \end{aligned}$$

d'après la proposition 7 du Livre II des *Eléments* d'Euclide.

On déduit ensuite en transposant $2Rect(\mathsf{AP},\mathsf{AM})$

$$\begin{aligned} Quad(\mathsf{CP}) &= Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}) + 2Rect(\mathsf{A\Lambda},\mathsf{AM}) - 2Rect(\mathsf{AP},\mathsf{AM}) && (6.37) \\ &= Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AM}) - 2Rect(\mathsf{AP}-\mathsf{A\Lambda},\mathsf{AM}) && (6.38) \\ &= Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{AP}-\mathsf{A\Lambda}-\mathsf{AM}) - Quad(\mathsf{AP}-\mathsf{A\Lambda}) && (6.39) \end{aligned}$$

d'après la proposition 6 du Livre II des *Eléments* d'Euclide.

Et finalement

$$Quad(\mathsf{CP}) = Quad(\mathsf{AP}) + Quad(\mathsf{PM}-\mathsf{A\Lambda}) - Quad(\mathsf{AP}-\mathsf{A\Lambda}). \qquad (6.40)$$

En s'appuyant uniquement sur des propositions du Livre II des *Éléments* d'Euclide et sur le *symptoma* de la parabole, on vient donc de déterminer par analyse la sous-droite *minimum* de la parabole. Remarquons que l'égalité (6.40) peut être interprétée de deux façons. On peut dire que le carré $Quad(\mathsf{CP})$ est *minimum* lorsque la sous-droite *minimum* PM est égale à la moitié du côté droit $\mathsf{A\Lambda}$. On peut dire aussi qu'une telle droite est *monachon kai elachiston i.e.* singulière et minimum[75], à savoir qu'elle est solution — double — d'un problème — celui donné par l'égalité (6.34) qui est satisfait en général par deux droites, autrement dit, pour parler algébriquement, qu'elle est racine double de l'équation quadratique (6.34).

Si l'on pose maintenant, en reprenant les notations cartésiennes, $\mathsf{AM} = x$, $\mathsf{CM} = y$, $\mathsf{A\Lambda} = r$, $\mathsf{PC} = v$, $\mathsf{AP} = s$, et que l'on se propose de « traduire » l'analyse précédente, l'égalité (6.17) devient l'équation

$$y^2 = 2rx, \qquad (6.41)$$

[75]Je reprends l'expression de Pappus dans le Livre VII de la *Collection Mathématique* à propos d'un rapport intervenant dans un problème de la *Section déterminée* d'Apollonius. Cf. [Pappus(1982), II, Prop. 61, p. 584] et *infra* [section 8.4.6, p. 299].

l'égalité (6.19), l'équation

$$y^2 + (v - x)^2 = s^2 \tag{6.42}$$

et l'égalité (6.34) peut être interprétée en l'équation

$$2rx + (v - x)^2 = s^2. \tag{6.43}$$

On retrouve ainsi la procédure qu'emploie Descartes dans sa méthode des normales. Mais quelles modifications avons nous apportées en opérant ces traductions ? Nous avons tout d'abord procédé à une généralisation de l'argument d'Apollonius en remplaçant la conique par une courbe géométrique et le *symptoma* par une équation algébrique, mais cette modification n'est pas la plus fondamentale et ne fait que constituer une généralisation.

Nous avons en effet transformé le problème géométrique de la droite *minimum* en problème de cercle tangent puis le problème de cercle tangent en un problème algébrique de racine double qui peut à présent être résolu sans considérer la figure initiale par une méthode arithmetico-algébrique puissante, la méthode des coefficients indéterminés.

Ainsi, nous pourrions dire que la première analyse qu'on trouve dans la méthode des normales de Descartes généralise la méthode d'Apollonius, tandis que la seconde analyse arithmético-algébrique met en évidence la thématisation de l'équation algébrique à une inconnue. Néanmoins, ce qui montre qu'il n'y a pas constitution de la courbe algébrique en objet qui serait mise en évidence par la méthode des normales est la présence concomitante du cercle et de cette première analyse géométrique d'inspiration apollinienne.

Chapitre 7

Une question de dioptrique

Reste à comprendre à quelle théorie renvoie le choix de la normale et non de la tangente, ainsi que l'enjeu du problème de la mesure des angles qui est apparu comme justification du problème des normales dans la présentation de cette dernière par Descartes au sein de la *Géométrie*. En employant le terme « mesurer un angle », le philosophe paraît en effet renvoyer à un domaine de problèmes géométriques qui pourrait être très vraisemblablement celui de la dioptrique.

Or, la seule et première occurrence avant la *Géométrie* de 1637 de la notion de cercle tangent et de normale à une courbe donnée ainsi que de calculs suggérant, bien qu'implicitement, l'usage possible de la méthode des coefficients indéterminés et de la méthode des normales, apparaît dans une suite de textes des *Excerpta Mathematica* consacrés à un problème de dioptrique portant sur les ovales.

On peut ainsi penser que le contexte de la méthode des normales a pu être fourni au moins en partie par des questions de dioptrique comme nous allons essayer de le montrer dans cette section où nous examinerons en détail quelques-uns de ces fragments sur les ovales et les textes de la *Géométrie* de 1637 qui en sont issus.

7.1 Les fragments sur les ovales dans les *Excerpta Mathematica*

Ces textes sur les ovales sont formés de trois essais : *X. Ovales Opticæ quatuor*, *XI. Earum Descriptio & Tactio* et *XII : Earumdem Octo Vertices, Ho-*

rumque Usus[1]. Ces fragments, non datés, ont été publiés parmi d'autres de façon posthume en 1701 à Amsterdam[2]. Tannery conjecture qu'ils datent d'avant 1629 « à l'époque où Descartes, déjà en possession de la loi de la réfraction, étudiait mathématiquement la question de la forme des lunettes avant de passer à l'application »[3], mais néanmoins aucun argument décisif, explicité par Tannery, n'étaye à notre connaissance une telle hypothèse. À tout le moins, la seule datation qu'on peut proposer de façon certaine, est que de telles fragments sont antérieurs à la *Géométrie*, puisqu'on trouve dans celle-ci les mêmes problèmes traités avec succès mais aussi avec plus de soin.

En effet, Tannery qualifie les fragments sur les ovales de « premières ébauches » , ajoutant que « ce caractère est encore beaucoup plus accusé par le désordre de la composition »[4]. Il n'entre pas dans notre propos de revenir sur l'édition de ces textes, publiés apparemment de façon désordonnée dans l'édition posthume de 1701, et qui constitue un problème épineux auquel Kokiti Hara a essayé de répondre dans son article[5].

Nous nous contenterons quant à nous de traiter seulement deux exemples

[1]Cf. [Descartes(1701a), resp. p. 310-312, 312-320, 320-324]. Plus précisément, cf. [Descartes(1701a), p. 311] pour l'introduction du cercle tangent et de la normale à l'ovale. Pour la mention d'un « generale theorema ad inveniendas contingentes », cf. [Descartes(1701a), p. 316]. Pour plus de précisions, on peut consulter le mémoire fondateur de Paul Tannery ainsi que les notes qui en ont été tirées par Charles Adam dans la grande édition : cf. [Tannery(1899)] et [Descartes(1964-1974), X, p. 325-328] ; l'article de Kokiti Hara : [Hara(1985)] ; et un article récent de Roshdi Rashed, qui relève déjà cette occurrence : [Rashed(2005a)]. Dans cet article, Roshdi Rashed propose entre autres une reconstruction élégante de l'invention par Descartes des ovales en l'associant à la résolution d'un problème inverse des tangentes, d'abord dans un contexte infinitésimal sans qu'il soit fait usage de coordonnées. Cf. [Rashed(2005a), p. 342-347]. Il présente ensuite une reconstitution de la solution qui aurait été donnée par Descartes d'un problème semblable posé par Debeaune en 1638, portant cette fois-ci sur une hyperbole et s'inscrivant dans le cadre de sa théorie des courbes données par une équation présentée dans la *Géométrie*. Cf. [Rashed(2005a), p. 352-353].

[2]Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 279-284 et p. 647-651] pour une étude des sources. On dispose aussi d'un manuscrit de la bibliothèque de l'université de Leyde qu'on a trouvé parmi les papiers de Huygens, pour l'établissement du texte.

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 281].

[4]Cf. [Tannery(1899), p. 330-331]. Plus loin, Tannery parle de « suite d'essais du premier jet, avec leurs erreurs et leurs maladresses ordinaires, et sans que les résultats définitifs aient été donnés ». Cf. [Tannery(1899), p. 333].

[5]Cf. [Hara(1985), p. 70-71 et p. 80-82]. Hara critique également l'édition de Adam et Tannery. Nous utiliserons et critiquerons dans la suite de certaines des conclusions de Kokiti Hara quant à l'édition du texte et à l'ordre des fragments.

parmi les nombreux développements présentés par Descartes et dictés par l'étude systématique des différentes classes des ovales, ainsi que des différents cas de figures selon les positions respectives des foyers et du pied de la normale. Le premier de ces exemples est consacré à un problème inverse des normales, tandis que le second concerne la détermination de la normale à une ovale à deux foyers, selon un mode semblable à celui du deuxième exemple de la méthode des normales présenté dans la *Géométrie*.

7.1.1 Un problème inverse des normales

Dans le premier fragment du premier essai sur les ovales intitulé *Ovales Opticæ Quatuor*[6], Descartes se propose de résoudre selon une démarche analytique le problème de dioptrique suivant :

> Étant donnés A, B, C sur une ligne droite, trouver une ligne courbe dont le sommet soit A, l'axe AB, et qui soit incurvée de telle sorte que les rayons venant du point B, après qu'ils auront subi une réfraction sur celle-ci, poursuivent au-delà, comme s'ils étaient venus du point C, ou bien inversement.[7]

Pour ce faire, Descartes introduit le milieu N du segment BC et pose pour les connues $\mathsf{NA} = a$ et $\mathsf{NB} = b$, qui désignent donc respectivement la demi-somme des distances des foyers à l'origine et la demi-distance entre les foyers.

Il pose ensuite pour les inconnues $\mathsf{DA} = x$ et

$$\mathsf{CE} + \mathsf{BE} = 2a - 2y \tag{7.1}$$

au sujet desquelles il écrit :

> Et soit x et y[8] deux quantités indéterminées, dont l'une des deux, demeurant indéterminée, désignera tous les points de la ligne courbe, et l'autre sera déterminée de la manière selon laquelle la ligne courbe doit être décrite. Et pour trouver cette

[6] Cf. [Descartes(1701a), p. 310-311]. Paul Tannery, Kokiti Hara et Roshdi Rashed étudient également ce fragment. Cf. [Tannery(1899), p. 334-335], [Hara(1985), p. 56] et [Rashed(2005a), p. 338-340]. Nous empruntons les traductions du texte latin qui suivent à Roshdi Rashed sauf mention contraire.

[7] Cf. [Descartes(1701a), p. 310] et [Rashed(2005a), p. 338].

[8] Il faut prendre bien garde au fait que malgré la notation de Descartes, y ne désigne pas une ordonnée.

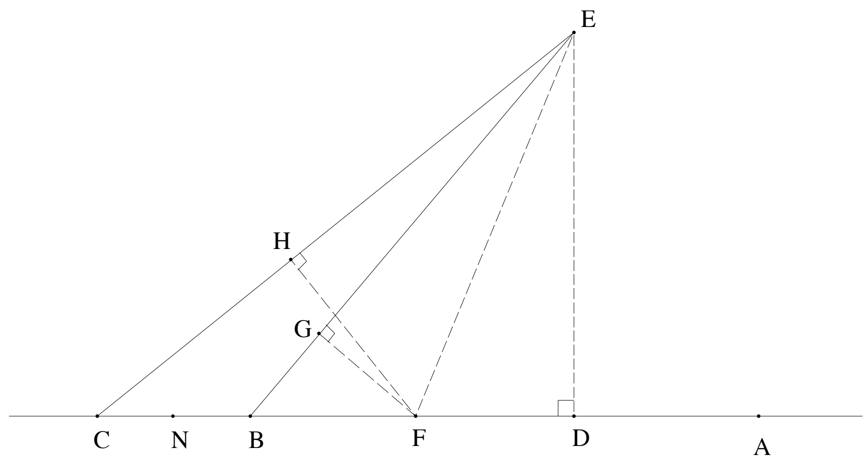

FIG. 7.1 – Un problème inverse des normales

> manière, je cherche tout d'abord le point F, à partir duquel [pris] comme centre je conçois que soit décrit le cercle qui touche la courbe en E ; ensuite je dis que la ligne BE multipliée par FC est à CE multipliée par BF comme < HF à FG, c'est-à-dire comme > l'inclinaison du rayon réfracté dans un milieu transparent à l'inclinaison du même dans un autre.[9]

Descartes pose donc *a priori* l'équation (7.1) et affirme que la détermination de la courbe solution du problème dioptrique se réduit à celle du paramètre y, qu'on ne peut imaginer que par rapport à l'abscisse x. Le choix d'une telle détermination, qui peut passer par la donnée d'une expression de y en fonction de x, ou bien par la donnée d'une équation implicite en x et y, paraît être suggérée par la nature même des inconnues : alors que l'inconnue x désigne un segment de la figure, l'inconnue y apparaît dans l'expression de la somme des deux rayons vecteurs aux foyers comme un paramètre sans représentation géométrique, du moins explicite.

Qui plus est, une seconde difficulté dans l'interprétation de ce texte touche au mélange de deux systèmes de coordonnées différentes, cartésiennes et bipolaires, auquel on est confronté pour déterminer la courbe en recherchant

[9] Cf. [Descartes(1701a), p. 310-311] et [Rashed(2005a), p. 339].

une relation entre une abscisse et un rayon vecteur[10].

Il est clair que dans le cas où y est constante égale à 0, la courbe correspondant à l'équation (7.1) sera une ellipse de foyers B et C et de centre N. Le choix de Descartes de l'équation (7.1) pourrait ainsi relever d'une intention de généraliser l'équation en coordonnées bipolaires de l'ellipse en considérant non plus la somme des rayons vecteurs aux foyers comme constante mais comme variant selon la position de x. Un autre argument permettant de justifier pareille intention est fourni par la nature même du problème de dioptrique que Descartes entend traiter. Ce problème aplanétique généralise en effet le problème anaclastique dont l'ellipse est solution.

Au huitième discours de la *Dioptrique*[11], Descartes s'était en effet proposé de rechercher par la géométrie les formes des lentilles de réfraction « pour rendre [ces instruments de visions] les plus parfaits qui puissent estre »[12]. Il s'agissait pour obtenir une image nette dans un télescope de pouvoir faire converger les rayons issus d'une source lumineuse vers un foyer.

Descartes avait ainsi montré que tous les rayons incidents, qui rencontrent une lentille elliptique en étant parallèle à l'axe de la section, sont réfractés vers le foyer le plus éloigné, à condition que le rapport de la distance entre les foyers au grand axe mesure l'indice de réfraction du matériau de la lentille[13]. On trouve également une démonstration de cette question dans une pièce du Journal d'Isaac Beeckman intitulée *Ellipsis in qua omnes radiii paralleli concurrent in puncto medii densioris*, qui date vraisemblablement du début de l'année 1629[14]. Aussi, serions nous portés à croire, à la différence de Tannery, que l'étude des ovales par Descartes serait postérieure à ces deux pièces du Journal de Beeckmann, puisqu'elle concerne un problème plus difficile et plus général. Du reste, les ovales ne sont mentionnées, à notre connaissance, en aucun autre endroit avant la *Géométrie*.

[10]Kokiti Hara parle ainsi d'un « bizarre mélange » et considère que le paramètre y définit en fait une famille d'ellipses plutôt qu'une courbe. Cf. [Hara(1985), p. 56].

[11]Cf. [Descartes(1637a), p. 165-196]. Pour plus de détails, on peut consulter la présentation de Scott. Cf. [Scott(1952), Chap. IV, p. 27-64].

[12]Cf. [Descartes(1637a), p. 165.].

[13]Cf. [Descartes(1637a), p. 168-171].

[14]Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 338-339]. Cette pièce précède une autre semblable consacrée au cas de l'hyperbole, qui est fixement datée par Beeckmann dans son Journal du 1er février 1629. Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 341-342]. Pour une étude de cette pièce, cf. [Sasaki(2003), p. 167-170].

Ajoutons pour terminer que la valeur nulle du paramètre y dans l'équation (7.1) est obtenue pour le point A[15], sommet de la courbe cherchée, qui est donné et possède donc une abscisse nulle. Cela résulte du choix de $2a$ pour le terme constant. On peut d'ailleurs vérifier que pour toutes les ovales étudiées par Descartes, la position $y = 0$ est obtenue pour les sommets. Le fait qu'il affecte arbitrairement y du même coefficient dans l'équation (7.1)paraît témoigner en outre du souci de se donner une équation simple et possédant une symétrie, démarche naturelle pour qui procède à une recherche analytique d'une équation qu'il ignore *a priori*.

Après avoir donc affirmé que la détermination de la courbe solution se réduit à celle du paramètre y en fonction de x, Descartes indique que pour ce faire, il suffit de déterminer la normale à la courbe. Considérant la normale et le cercle tangent de centre F, il affirme ainsi que[16]

$$\mathsf{BE} \cdot \mathsf{FC} : \mathsf{CE} \cdot \mathsf{BF} = \mathsf{HF} : \mathsf{FG}. \tag{7.2}$$

En effet, les triangles FHC et CED sont semblables donc

$$\mathsf{FH} : \mathsf{FC} = \mathsf{ED} : \mathsf{EC}. \tag{7.3}$$

De même, les triangles FGB et BED sont semblables donc

$$\mathsf{FB} : \mathsf{GF} = \mathsf{EB} : \mathsf{ED}. \tag{7.4}$$

En composant les rapports des proportions (7.3) et (7.4), on déduit la proportion (7.2).

On retrouve la même égalité (7.2) démontrée dans le raisonnement synthétique de la *Géométrie* où, le philosophe, partant de la donnée de l'équation en coordonnées bipolaires d'une ovale du premier genre, démontre qu'elle répond au problème dioptrique équivalent à celui déjà présenté dans le fragment que nous étudions[17].

Mais alors, si on pose

$$\mathsf{HF} : \mathsf{FG} = d : c \tag{7.5}$$

[15] Car $\mathsf{CA} + \mathsf{BA} = 2a$.

[16] Cf. [figure 7.1, p. 232].

[17] Cf. [Descartes(1637c), p. 432-433].

pour le rapport du sinus de l'angle d'incidence sur le sinus de l'angle de réfraction, et $\mathsf{NF} = v$[18] alors on a

$$\mathsf{FC} = v + b,\ \mathsf{FB} = v - b \tag{7.6}$$

et la proportion (7.2) devient

$$\frac{\mathsf{BE} \times (v+b)}{\mathsf{CE} \times (v-b)} = \frac{d}{c}. \tag{7.7}$$

On déduit ainsi l'expression de v

$$v = b \times \frac{d\mathsf{CE} + c\mathsf{BE}}{d\mathsf{CE} - c\mathsf{BE}}. \tag{7.8}$$

en fonction des rayons vecteurs CE et BE.

Revenons à présent au raisonnement cartésien tel qu'il nous semble devoir être interprété. Si l'on détermine v en fonction de x — ou bien y — en appliquant la méthode des normales, à condition de disposer également d'expressions de BE et CE en fonction de x et y, qui correspondent précisément aux premiers résultats donnés par Descartes[19], en identifiant cette expression de v à celle donnée par l'équation (7.8), on obtiendra une équation entre le paramètre y et l'abscisse x qui nous permettra de décrire la courbe cherchée.

D'autre part, une fois une telle équation obtenue entre x et y, on peut en déduire une équation de la courbe, exprimée dans l'un ou l'autre système de coordonnées, cartésiennes ou bipolaires, en remplaçant l'une des deux inconnues par son expression en fonction de l'autre, obtenue en résolvant l'équation précédente entre x et y selon l'inconnue qu'on se propose de déterminer. Ajoutons que l'équation (7.7) suggère plutôt l'introduction des coordonnées bipolaires pour décrire la courbe aplanétique et réduit d'autre part le problème d'une telle description à la détermination de v.

Considérons à présent la première série des résultats de Descartes. Il donne[20] successivement les expressions de BD, BD^2, CD, CD^2, BE, CE et DE sans les calculs correspondants. Ces derniers peuvent néanmoins être reconstruits sans difficultés. En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles

[18] À la différence de la *Géométrie*, Descartes considère le segment NF et non le segment AF, où F est le pied de la normale et N est le milieu des foyers. Je modifie les notations de Descartes et emploie les mêmes notations que dans la *Géométrie*.

[19] Cf. [Descartes(1701a), p. 311, l. 12-13] et les équations (7.14).

[20] Cf. [Descartes(1701a), p. 311].

EBD et ECD, on déduit deux expressions de ED^2

$$\mathsf{BE}^2 - \mathsf{BD}^2 = \mathsf{ED}^2 = \mathsf{CE}^2 - \mathsf{CD}^2 \tag{7.9}$$

d'où

$$\mathsf{CE}^2 - \mathsf{BE}^2 = \mathsf{CD}^2 - \mathsf{BD}^2. \tag{7.10}$$

Mais

$$\mathsf{CD} = a + b - x \text{ et } \mathsf{BD} = a - b - x \tag{7.11}$$

donc

$$\mathsf{CD}^2 - \mathsf{BD}^2 = 4b(a - x). \tag{7.12}$$

D'après l'équation (7.1), on obtient

$$\mathsf{CE} - \mathsf{BE} = \frac{2b(a - x)}{a - y}. \tag{7.13}$$

Mais comme $\mathsf{CE}+\mathsf{BE} = 2(a-y)$ d'après l'équation (7.1), on déduit finalement

$$\mathsf{CE} = (a - y) + \frac{b(a - x)}{a - y} \text{ et } \mathsf{BE} = (a - y) - \frac{b(a - x)}{a - y} \tag{7.14}$$

qui correspondent bien aux expressions données par Descartes de CE et BE, lesquelles sont développées et réduites au même dénominateur.

Les calculs ici effectués ne dépendent pas de l'expression de $\mathsf{CE} + \mathsf{BE}$ et sont valables lorsqu'on remplace $a-y$ par une expression quelconque du type $2\mathsf{P}(y)$. Il suffit ainsi de remplacer dans l'équation (7.14) $a - y$ par $P(y)$. La méthode pour déterminer les rayons vecteurs BE et CE en fonction de x et y est donc générale et peut même être traduite en un algorithme.

L'expression suivante qui est donnée par Descartes est celle de DE^2. D'après le théorème de Pythagore, on a par exemple[21]

$$\mathsf{DE}^2 = \mathsf{BE}^2 - \mathsf{BD}^2 \tag{7.15}$$

soit en employant l'expression (7.14)

$$\mathsf{DE}^2 = (a - y)^2 + \frac{b^2(a - x)^2}{(a - y)^2} + 2b(a - x) - (a - b - x)^2. \tag{7.16}$$

[21] En considérant le triangle rectangle CED, on obtient bien sûr la même expression de ED.

Descartes indique quant à lui[22] DE^2 sous la forme du quotient d'un polynôme en y de degré 4, développé et ordonné selon les puissances de y, par $y^2 - 2ay + a^2$[23]. Il écrit ensuite :

> Soit maintenant $\mathsf{NF} = c$ & $\mathsf{FE} = d$: c et d doivent être trouvées à partir de [DE], parce que l'équation, que produit le triangle rectangle FDE, dont les côtés sont déterminés, doit être rendue égale à celle là
>
> $$xx - 2ex + ee$$
>
> en faisant seulement la différence $= x$, & en même temps $e = x$.[24]

Suit enfin un calcul de FD^2 sur lequel s'interrompt brutalement le fragment, soit que Descartes ait échoué à conclure le calcul, soit qu'il ait jugé ce dernier inutile. On remarquera en outre que Descartes note l'expression NF, qui joue le même rôle que la sous-normale, et la normale EF par les lettres c et d, donc comme des données.

À notre connaissance, on trouve dans cette citation, la première esquisse d'une application de la méthode des normales. En effet, Descartes indique explicitement que l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec le cercle tangent est racine double d'une équation déduite en appliquant le théorème de Pythagore au triangle FDE dont les côtés sont la normale, la sous-normale et l'ordonnée. D'autre part, il paraît suggérer plus implicitement l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer v lorsqu'il écrit en outre « doit être rendue égale ».

Dans l'interprétation de ce texte difficile et elliptique, on rencontre une difficulté qui concerne l'explicitation des deux équations entre lesquelles on élimine une des deux inconnues, x ou y, pour obtenir le polynôme résultant. Dans le cas d'une équation en coordonnées cartésiennes, la première de ces deux équations est celle de la courbe, la seconde correspond au cercle, et l'inconnue éliminée est l'abscisse ou l'ordonnée. Ici, la situation apparaît plus complexe du fait du mélange entre le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées bipolaires.

D'autre part, à la différence d'un problème direct de normales, on obtient une équation entre deux inconnues x et y dans laquelle v est supposée connue. Pour appliquer la méthode des coefficients indéterminés afin de trouver une expression de v, il faut éliminer une des deux inconnues x ou y en posant

[22] Cf. [Descartes(1701a), p. 311].

[23] Il a réduit au même dénominateur et développé le numérateur.

[24] Traduction personnelle. Cf. [Descartes(1701a), p. 311].

par exemple *a priori* une expression de y en fonction de x — ou bien de x en fonction de y — pour se ramener à un polynôme à une indéterminée. Pour cela, il faut d'une part choisir laquelle des deux inconnues on exprime en fonction de l'autre et, d'autre part, quelle forme algébrique on donne à cette expression.

On peut remarquer que Descartes, après avoir considéré DE comme une fraction rationnelle en y propose de regarder l'équation obtenue en usant du théorème de Pythagore dans le triangle DEF comme une équation en x pour appliquer sa méthode. Cette indécision entre x et y nous paraît mettre en évidence le problème rencontré par Descartes dans sa solution interrompue. L'analyse géométrique, s'appuyant sur une généralisation de l'équation en coordonnées bipolaires de l'ellipse, pour trouver la courbe solution l'a poussé dans un premier temps à vouloir trouver une expression de y en fonction de x, mais elle semble ne pas aboutir ou du moins elle a été abandonnée par Descartes.

Nous allons voir qu'il est possible au contraire de trouver l'expression de x en fonction de y, comme le suggère l'analyse algébrique du problème déduite de l'étude des équations produites par les applications successives du théorème de Pythagore, en poursuivant les calculs suggérés par Descartes, et en usant comme seuls outils de la méthode des normales et de celle des coefficients indéterminés, tout comme le philosophe lui-même aurait pu le faire.

Poursuivons donc de notre côté les calculs suggérés par Descartes. On a d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle DEF

$$\mathsf{EF}^2 = \mathsf{ED}^2 + \mathsf{DF}^2 \tag{7.17}$$

soit d'après (7.16), en posant $\mathsf{EF} = s$,

$$s^2 = (a-y)^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{(a-y)^2} + 2b(a-x) - (a+b-x)^2 + (a-v-x)^2, \tag{7.18}$$

et

$$s^2 = (a-y)^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{(a-y)^2} + 2b(a-x) + (v+b)(v-b-2(a-x)). \tag{7.19}$$

D'où, en réduisant, l'équation

$$(a-y)^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{(a-y)^2} - 2v(a-x) - b^2 + v^2 - s^2 = 0. \tag{7.20}$$

Or, on recherche une équation entre x et y qui permette de décrire la courbe. D'après la méthode des normales de Descartes, en éliminant x ou y entre cette équation cherchée et l'équation (7.20), on obtient une équation qu'on identifie à une équation possédant une racine double.

Recherchons plus simplement, comme nous le suggère l'équation (7.20), une expression de $a-y$ en fonction de x ou bien de $a-x$ en fonction de y. En remplaçant dans l'équation (7.20) $a-y$ ou bien $a-x$ par leur expression, on obtient de même une équation en x ou bien en y, qu'on identifie à une équation possédant une racine double, et dont on déduit une expression de v en fonction de x ou bien de y.

Comme on l'a dit, l'interprétation géométrique de cette racine double suggère d'éliminer plutôt le paramètre y qui ne dénomme aucun segment de la figure et donc de se donner *a priori* une expression de $a-y$ en fonction de x. En effet, éliminerait-on l'abscisse x, quelle signification géométrique pourrait-on attribuer au fait que l'équation en y ainsi obtenue possède une racine double ? Ainsi la symétrie qui existe entre l'abscisse x et l'ordonnée y dans le cas d'une équation en coordonnées cartésiennes d'une courbe algébrique, lorsqu'on lui applique la méthode des normales, n'existe pas dans le problème inverse des normales qui conduit aux ovales, car la variable y joue le rôle d'un paramètre sans représentation géométrique explicite comme l'abscisse.

Les calculs précédents suggèrent-ils à présent une idée pour se donner une expression de $a-y$ ou bien de $a-x$ et surtout une forme pour cette expression, à savoir le degré du polynôme qui lui correspond ?

Considérons ainsi l'expression (7.13) de la différence $\mathsf{CE}-\mathsf{BE}$ ou bien, de façon équivalente, les expressions (7.14) de CE et BE. Si l'on suppose que ces expressions sont du premier degré en y, comme l'est $\mathsf{CE}+\mathsf{BE}$, hypothèse la plus simple, alors on peut écrire

$$\frac{b(a-x)}{a-y} = f + gy \tag{7.21}$$

où f et g sont des coefficients indéterminés. On peut alors éliminer $a-x$ dans l'équation (7.20) et on déduit l'équation

$$(a-y)^2 + (f+gy)^2 - 2v\frac{(a-y)(f+gy)}{b} - b^2 + v^2 - s^2 = 0. \tag{7.22}$$

qui devient après développement et réduction

$$y^2 + \frac{-2ab + 2bfg + 2fv - 2agv}{b + bg^2 + 2gv} y + \frac{a^2 - b^3 + bf^2 - 2afv + bv^2 - bs^2}{b + bg^2 + 2gv} = 0. \tag{7.23}$$

Identifions cette équation à une équation à racine double $y^2 - 2\alpha y + \alpha^2$. En considérant le coefficient en y et en remplaçant α par y on obtient

$$v = \frac{-ab + by + bfg + bg^2 y}{ag - f - 2gy} \tag{7.24}$$

soit

$$v = b \times \frac{g(f + gy) - (a - y)}{g(a - y) - (f + gy)}. \tag{7.25}$$

Remplaçons à présent CE et BE par leur expression en y dans l'équation (7.8), on trouve une seconde expression de v

$$v = b \times \frac{(c + d)(a - y) - (c - d)(f + gy)}{(c + d)(f + gy) - (c - d)(a - y)}. \tag{7.26}$$

En identifiant ces deux expressions, on trouve immédiatement

$$g = \frac{c - d}{c + d}. \tag{7.27}$$

D'autre part, pour $y = 0$, on obtient $\mathsf{CE} = a + f$ et $\mathsf{BE} = a - f$. En imposant la condition $\mathsf{CE} = \mathsf{CA}$ et $\mathsf{BE} = \mathsf{BA}$ pour $y = 0$, on déduit $f = b$. On obtient ainsi finalement

$$\mathsf{CE} = a + b - \frac{2d}{c + d} y \text{ et } \mathsf{BE} = a - b - \frac{2c}{c + d} y. \tag{7.28}$$

On vérifie d'autre part que

$$\mathsf{CE} - \frac{d}{c}\mathsf{BE} = \mathsf{AC} - \frac{d}{c}\mathsf{AB}. \tag{7.29}$$

D'après la classification donnée par Descartes dans la *Géométrie*, une ovale définie par l'égalité 7.29 appartient au troisième genre des ovales et est cordiforme[25]. Ajoutons que les coefficients en y de CE et BE sont plus

[25] Cf. les *Notes pour la classification des ovales* de Paul Tannery : [Descartes(1964-1974), X, p. 327-328].

embarrassés que dans les cas qui sont traités par Descartes dans la suite des fragments sur les ovales parce qu'on a imposé la condition $\mathsf{CE}-\mathsf{BE}=2a-2y$. Ce faisant, par cette condition, on a choisi une ovale parmi l'infinité d'ovales solutions du problème dont les rayons vecteurs sont de la forme

$$\mathsf{CE}=a+b-ky \text{ et } \mathsf{BE}=a-b-k\frac{c}{d}y, \tag{7.30}$$

avec $k>0$.

Descartes, dans l'essai *Earumdem Octo Vertices, Horumque Usus* de classification qui suit, choisira comme représentant de cette classe de solutions l'ovale donnée par les rayons vecteurs[26]

$$\mathsf{AE}=a-dy \text{ et } \mathsf{BE}=b-cy. \tag{7.31}$$

en modifiant ces notations pour les foyers et les distances des foyers au sommet que nous reprenons ci-après : A et B étant les foyers d'abscisses respectives $\mathsf{CA}=a$ et $\mathsf{CB}=b$ relativement au sommet de la courbe C.

Dans d'autres calculs figurant dans ces essais sur les ovales et portant sur d'autres genres, dont celui que nous étudions dans la section suivante, mais aussi dans la *Géométrie* dans le cas d'une ovale du premier genre[27], il choisira un représentant où le coefficient en y du premier rayon vecteur est unitaire, soit dans le cas présent

$$\mathsf{AE}=a-y \text{ et } \mathsf{BE}=a-\frac{c}{d}y. \tag{7.32}$$

On vient ainsi de donner la reconstruction d'une solution suggérée par la présentation et les calculs cartésiens du problème inverse des normales qui conduit à l'équation en coordonnées bipolaires d'une ovale. Une telle solution nécessite d'une part d'abandonner les coordonnées cartésiennes, qui n'interviennent que comme de simples auxiliaires de calculs dans les éliminations qui conduisent à l'équation finale en y, et d'autre part, de travailler sur un paramètre y donné de façon indépendante, qui détermine l'expression des deux rayons vecteurs définissant les points de la courbe.

On peut imaginer que c'est cette difficulté sur laquelle a buté Descartes dans un premier temps mais qu'il a pu ensuite surmonter en inventant peut-être les coordonnées bipolaires à cette occasion. C'est ce dont témoigne plus tard la construction point par point des ovales présentée dans la *Géométrie*, qui ne se fait qu'en employant les rayons vecteurs[28] et sans aucun recours

[26]Cf. [Descartes(1701a), p. 320].
[27]Cf. [Descartes(1637c), p. 416].
[28]Cf. [Descartes(1637c), p. 424-427].

aux abscisses, qui interviennent seulement dans l'application de la méthode des normales à une ovale.

Il reste néanmoins une difficulté à écarter sur laquelle Descartes ne se prononce pas dans la *Géométrie*. Qu'en est-il de l'interprétation géométrique de la racine double du polynôme en y dans le cas des ovales ? Nous reviendrons sur cette difficulté dans la prochaine section.

Remarquons enfin pour terminer que, dès lors qu'on dispose de l'équation en coordonnées bipolaires de l'ovale et de l'expression de ses rayons vecteurs BE et CE, on peut en déduire directement l'expression de v en usant de l'équation (7.8), déduite de l'application de la loi de réfraction, avant même que d'appliquer la méthode des normales à l'ovale. C'est vraisemblablement ainsi que procède Descartes dans la suite de ses calculs, disposant ainsi d'un moyen de vérifier l'exactitude de ceux-ci.

7.1.2 La normale à une ovale à deux foyers

Considérons à présent un autre exemple de Descartes, qui apparaît dans le second essai *Earum Descriptio et Tactio*. Descartes y propose le problème suivant :

> Datis tribus punctis A, B, C, quæritur linea cujus ope radii omnes, in vitro dispositi tanquam si venirent a puncto A, disponatur egrediendo ejus superficiem, cujus vertex sit in puncto C, tanquam si venirent a puncto B, vel si tenderent versus B ; vel denique ut radii, in aere dispositi tanquam si venirent a puncto A, disponantur un vitro tanquam si venirent a puncto B.[29]

On le voit : il s'agit du même problème que le précédent aux notations près. Dans les fragments suivants, qui sont placés dans le désordre, Descartes va étudier les différents cas de figure selon, d'une part, les positions respectives des foyers A et B par rapport au sommet C de la courbe, et d'autre part, selon la position du centre F du cercle tangent par rapport aux foyers A et B. Mais, pour ce faire, Descartes va poser *a priori* cette fois l'expression des rayons vecteurs BE et AE tirés d'un point E de la courbe aux foyers. Voici le premier cas qu'il présente :

> Cadat punctum B inter A & C ; & F, centrum circuli tangentis curvam, cadat inter A & B, si fiat $\mathsf{AE} = a - y$, & $\mathsf{BE} = cy + b$, erit

[29] Cf. [Descartes(1701a), p. 313].

> FA ad FB ut $-y+a$ ad $ccy+bc$; hoc est, inclinatio radii AE in vitro ad inclinationem radii BE producti in aere, ut 1 ad c [...] [30]

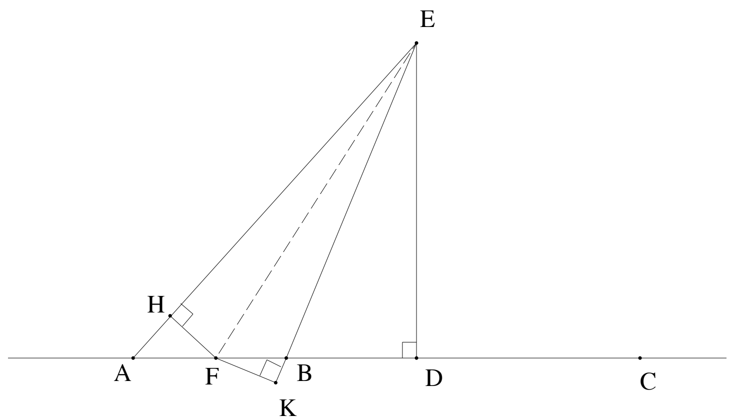

FIG. 7.2 – La normale à une ovale à deux foyers

Posons[31]

$$\mathsf{AC}=a,\ \mathsf{AE}=a-y,\ \mathsf{BC}=b,\ \mathsf{BE}=b+cy. \tag{7.33}$$

L'ovale ainsi définie vérifie l'équation en coordonnées bipolaires

$$\mathsf{AE}+\frac{1}{c}\mathsf{BE}=\mathsf{AC}+\frac{1}{c}\mathsf{BC}. \tag{7.34}$$

Selon Descartes, il s'agit d'une ovale du quatrième genre qui est toujours oviforme. Elle permet donc de résoudre un problème aplanétique avec un rapport du sinus de l'angle d'incidence sur le sinus de l'angle de réfraction égal à $\frac{1}{c}$.

Posons $\mathsf{CF}=v$. On a $\mathsf{FA}=a-v$ et $\mathsf{FB}=v-b$. La proportion

$$\mathsf{FA}\cdot\mathsf{BE}:\mathsf{FB}\cdot\mathsf{AE}=\mathsf{FH}:\mathsf{FK} \tag{7.35}$$

[30] Cf. [Descartes(1701a), p. 314].

[31] Descartes le fait plus loin. Cf. [Descartes(1701a), p. 315]. Comme nous l'avons déjà dit, il change ses notations. Nous procédons au même changement afin de rendre la comparaison avec le texte de Descartes plus aisée pour le lecteur.

devient

$$\frac{(a-v)(b+cy)}{(v-b)(a-y)} = \frac{1}{c}. \tag{7.36}$$

Descartes, peut ainsi déduire directement une expression du rapport[32]

$$\mathsf{FA} : \mathsf{FB} = \frac{a-y}{c^2y+bc} \tag{7.37}$$

mais aussi, bien qu'il ne l'écrive pas, de la sous-normale

$$\mathsf{AF} = v = \frac{ab+abc-by+ac^2y}{a+bc-y+c^2y} \tag{7.38}$$

qu'il pourra comparer avec celle trouvée en appliquant sa méthode des normales afin de contrôler le résultat tiré de l'application de sa méthode des normales[33].

Considérons à présent les résultats présentés par Descartes. Il donne successivement les expressions de l'abscisse DC, DE en fonction de y, et de FD et FE en fonction de y et v.

Dans ce cas, l'inconnue y a une signification différente de celle du premier exemple. Elle sert ainsi à paramétrer une courbe donnée plutôt qu'à individuer une courbe cherchée[34].

Bien que ne figurant pas, les calculs sont aisés à reconstruire et sont construits sur le même modèle que les calculs qu'on a rencontrés auparavant dans le problème inverse des normales. En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles EBD et EAD, on déduit deux expressions de ED^2

$$(a-y)^2 - (a-x)^2 = (b+cy)^2 - (b-x)^2 \tag{7.39}$$

qui permettent de déterminer[35]

$$\mathsf{DC} = x = \frac{c^2y^2 - y^2 + 2ay + 2bcy}{2a-2b}. \tag{7.40}$$

[32] Cf. [Descartes(1701a), p. 313].

[33] Kokiti Hara considère que ce fragment suppose le calcul suivant qui emploie la méthode des normales pour déterminer la sous-normale AF, et qu'il est donc postérieur à ce dernier. Il aurait été ainsi déplacé par l'éditeur. Cf. [Hara(1985), p. 63 et 65-66]. Nous pensons au contraire qu'il est indépendant d'un tel calcul.

[34] Suggestion de Massimo Galuzzi.

[35] Dans le texte de Descartes, l'expression est fautive en deux endroits. On trouve au numérateur cy^2 à la place de c^2y^2 et au dénominateur $2d-2b$ à la place de $2a-2b$. Dans les deux cas, eu égard à la non répercussion des erreurs dans les calculs qui suivent, il s'agit d'une faute de copie. La seconde faute est relevée par Hara et par Costabel dans les Additions à Adam et Tannery. Cf. [Hara(1985), p. 62] et [Descartes(1701a), p. 693].

On déduit d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle[36] AED

$$\mathsf{DE}^2 = \mathsf{AE}^2 - \mathsf{AD}^2 \tag{7.41}$$

soit

$$\mathsf{DE}^2 = (a-y)^2 - (a-x)^2. \tag{7.42}$$

En remplaçant x par son expression (7.40) en fonction de y, on obtient un polynôme de degré 4 en y. Descartes de son côté obtient également un polynôme de degré 4 en y pour DE^2, mais en employant l'expression de BE et le triangle rectangle BED, qui conduisent à une expression plus compliquée[37].

En appliquant ensuite le théorème de Pythagore au triangle FED, on déduit

$$\mathsf{FE}^2 = \mathsf{ED}^2 + \mathsf{FD}^2 \tag{7.43}$$

soit

$$\mathsf{EF}^2 = (a-y)^2 - (a-x)^2 + (v-x)^2 \tag{7.44}$$

et en posant $\mathsf{EF} = s$, on obtient après simplification

$$(a-y)^2 + 2(a-v)x - a^2 + v^2 - s^2 = 0 \tag{7.45}$$

En remplaçant x par son expression (7.40), et en identifiant l'équation (7.45) à une équation du second degré à racine double, puis en appliquant la méthode des coefficients indéterminés, on retrouve bien l'expression (7.38) de v.

Précédemment, on a obtenu un polynôme de degré 4 pour l'expression de ED^2 car on a remplacé x^2 par son expression (7.40) en fonction de y. En fait, cette substitution complique les calculs et est inutile. En effet, en appliquant le théorème de Pythagore au triangle FED, comme le suggère l'étape suivante de la méthode des normales, les termes en x^2 se simplifient et on obtient un polynôme en y de degré 2 au lieu du degré 4. Cette simplification du calcul n'échappa pas à Descartes comme en témoignent les expressions de l'ordonnée DE données dans les fragments sur les ovales qui suivent[38] mais aussi l'exemple de l'ovale du premier genre traité par Descartes dans la *Géométrie* de 1637[39] où le philosophe conserve x^2 dans les expressions de ED^2.

[36] Bien sûr, on obtiendrait à la fin le même résultat avec le triangle BED.
[37] Cf. [Descartes(1701a), p. 315].
[38] Cf. [Descartes(1701a), p. 317 et 321-323].
[39] Cf. [Descartes(1637c), p. 417].

Mais revenons aux calculs de Descartes. Après avoir calculé FD en employant l'expression (7.40), le philosophe en déduit une expression de FE^2 qui est un polynôme de degré 2, du fait de l'élimination dans le calcul des termes en x^2, que nous avons expliquée auparavant. Par ailleurs, il ne donne aucune autre simplification de l'expression de FE^2. Voici ce qu'il écrit[40] :

> Nuc quæratur punctum F quod sit *centrum circuli tangentis curvum*[41] in puncto E, & fiat : $\mathsf{FC} = f$,
>
> $$\mathsf{FD} = \frac{yy - ccyy - 2bcy - 2ay + 2af - 2bf}{2a - 2b}$$
>
> cujus FD quadratum si addatur quadrato ED, sit quadratum
>
> $$\begin{aligned}\mathsf{FE} = \sqrt{\frac{1}{4aa - 8ab + 4bb}}&(-4ab + 4bb + 4aacc - 4abcc)yy \\ &+(4af + 4bfcc - 4afcc - 4bf)yy + (8aab - 8abb + 8aabc - 8abbc)y \\ &+(-8abcf + 8bbcf - 8aaf + 8abf)y + 4aaff - 8abff + 4bbff\end{aligned}$$
>
> Unde, *per generale Theorema ad inveniendas contingentes*[42], habeo
>
> $$\begin{aligned}&(-ab + bb + aacc - abcc)y + (af + bfcc - afcc - bf)y \\ &= (-aab + abb - aabc + abbc) + (abcf - bbcf + aaf - abf)\end{aligned}$$
>
> ac proinde linea f, sive quantitas CF, erit
>
> $$\mathsf{CF} = \frac{-aby + bby + aaccy - abccy + aab - abb + aabc - abbc}{-ay - bccy + accy + by + aa - ab + abc - bbc},$$ [43]

À notre connaissance, on trouve ici l'unique mention antérieure à la *Géométrie* de 1637 d'un « théorème général d'invention des contingentes » pour justifier un calcul où l'on pourrait voir apparaître de façon moderne le calcul de la dérivée du polynôme en y situé au numérateur sous la racine. Tannery écrit d'ailleurs vraisemblablement à ce propos :

[40] Descartes note la sous-normale f.
[41] C'est moi qui souligne.
[42] C'est moi qui souligne.
[43] Cf. [Descartes(1701a), p. 316].

> Les développements sont si succincts qu'on est tenté de croire que Descartes possédait, pour l'application de sa méthode des tangentes, des moyens d'abrévation tout à fait analogues à ceux que nous fournit le calcul des dérivées.[44]

Nous avons déjà étudié auparavant les relations entre la méthode des normales de Descartes et le théorème de Hudde et il nous semble que les moyens d'abrévation auxquels fait référence Tannery peuvent être clairement éclaircis dans cet exemple en s'appuyant seulement sur la méthode des normales telle que nous la connaissons, comme le contexte de la solution cartésienne nous invite à le faire.

Descartes, obtenant une équation résultante en y de degré 2 de la forme

$$b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0 \tag{7.46}$$

où la sous-normale v apparaît isolée dans le coefficient b, en déduit en effet l'égalité

$$2b_2y = -b_1 \tag{7.47}$$

et une expression de la sous-normale.

Mais cette déduction est immédiate et aisée lorsqu'on identifie la première équation à une équation possédant une racine double

$$y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 = 0 \tag{7.48}$$

et qu'on use de la méthode des coefficients indéterminés, en substituant pour terminer α à y, suivant en cela les préceptes de la méthode des normales de Descartes. On obtient en effet

$$\frac{b_1}{b_2} = -2\alpha \text{ et } 2b_2y = -b_1. \tag{7.49}$$

Dans ce cas particulièrement simple du degré 2, on peut déduire de la méthode des normales un algorithme qui produit le polynôme dérivé du polynôme résultant. Néanmoins, comme on a essayé de le montrer lorsqu'on a étudié les relations entre le théorème de Hudde et la méthode des normales, un tel algorithme ne peut être mis en évidence que dans les cas les plus simples et ne saurait prétendre à la généralité de l'algorithme du calcul différentiel s'appliquant à un polynôme de degré quelconque.

---

[44] Cf. [Tannery(1899), p. 338]. Cf. également [Hara(1985), p. 65-66].

Ajoutons pour terminer que Descartes n'introduit pas la normale dans l'équation à racine double en y qu'il considère et fait porter son calcul sur le carré de la normale. Si l'on souhaite s'appuyer sur la méthode des normales de Descartes pour justifier cette stratégie, il est tout à fait clair que la normale n'intervenant que dans le terme constant du polynôme, elle ne joue aucun rôle et peut donc être ignorée dans l'équation. Une autre interprétation possible serait d'imaginer que Descartes considère la normale comme une droite *minimum*. Dans ce cas, FE étant considérée comme une sécante à l'ovale dont la longueur varie en fonction de y, on sait que en effet que cette droite sera *minimum* à condition que le carré de sa longueur, considérée comme une fonction polynôme en y, admette une racine double.

Descartes, de son côté, déduit ensuite FA et FB de CF et suggère comme unique simplification de diviser les numérateurs par $(a-b)^2$. En revanche, il n'indique pas que l'expression de CF peut être simplifiée en divisant le numérateur et le dénominateur par $a-b$. Descartes retrouve alors l'inverse du rapport (7.37) qu'il avait posé auparavant[45].

Il poursuit néanmoins la vérification et conclut :

> Ergo est FB in AE ad FA in BE, ut c ad 1, hoc est ut FK ad FH.[46]

Ajoutons que l'absence de simplifications dans le calcul paraît confirmer l'hypothèse selon laquelle Descartes ne fait que vérifier à l'aide de sa méthode des normales une expression déjà connue pour la sous-normale, ou plutôt pour le rapport FB : FA, plus simple à considérer.

On possède à présent suffisamment d'éléments pour esquisser une conclusion relative à ces fragments sur les ovales. Nous pensons que Descartes disposait de sa méthode des normales lorsqu'il a rédigé ces notes, et qu'il a pu l'employer pour résoudre un problème inverse des normales. Cette recherche l'a ainsi conduit à inventer les coordonnées bipolaires pour découvrir les ovales. Une fois ce problème résolu, il a pu appliquer sa méthode des normales à des problèmes directs des normales, en se donnant réciproquement une ovale par son équation en coordonnées bipolaires, et en vérifiant ainsi la validité de ses calculs en comparant les deux expressions de la sous-normale dont il disposait ou plutôt celles du rapport des distances du pied de la

[45] En fait, on lit dans le texte $\mathsf{FA} = -y+a$ et $\mathsf{FB} = c^2y+bc$. On peut penser que Descartes ne s'est pas donné la peine de diviser les dénominateurs égaux de FA et FB puisqu'ils se simplifient dans le calcul de FA : FB.

[46] Cf. [Descartes(1701a), p. 316].

normale aux foyers.

7.2 Les ovales dans la *Géométrie* de 1637 et le problème des normales

Considérons à présent les ovales dans la *Géométrie* de 1637[47]. Descartes choisit une ovale du premier genre comme second exemple de l'emploi de sa méthode des normales. En outre, la figure[48] qu'il emploie pour présenter sa méthode est celle de ce second exemple.

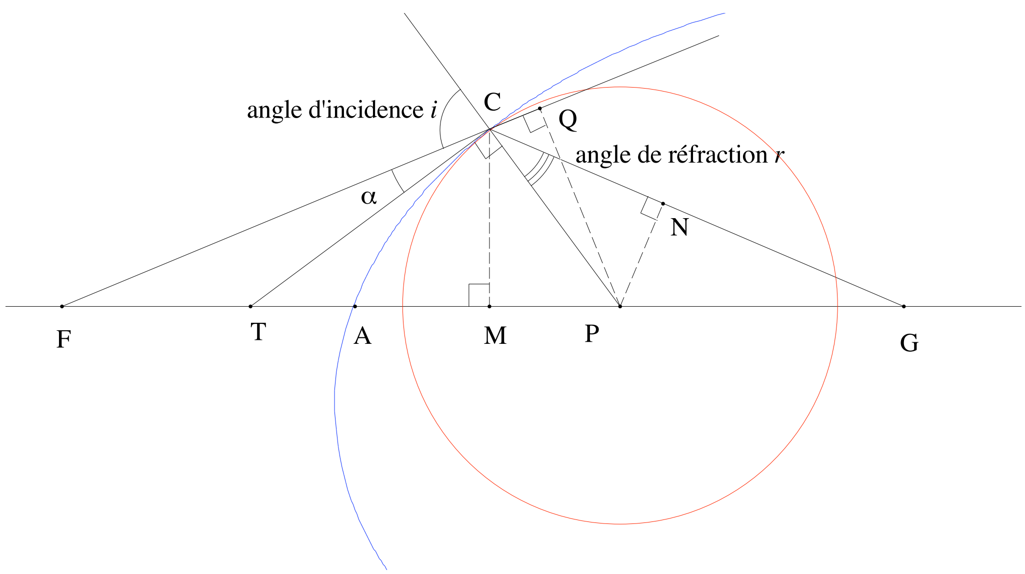

FIG. 7.3 – La Méthode des Normales et la Dioptrique

Rappelons la définition de cette première ovale donnée par Descartes dans la *Géométrie*. Celle-ci n'est pas donnée au moyen d'une équation entre abscisse x et ordonnée y vérifiée par tout point C appartenant à la courbe, ni par une équation en coordonnées bipolaires, mais par la proportion équivalente à cette dernière

$$\mathsf{CF} - \mathsf{FA} : \mathsf{GA} - \mathsf{GC} = d : e. \tag{7.50}$$

[47]Pour une étude des ovales dans la *Géométrie*, cf. [Hara(1985), p. 76-80] et [Sasaki(2003), p. 230-234].

[48]Cf. *supra* [figure 5.3, p. 175].

Comment peut-on interpréter la méthode des normales de Descartes dans ce cas puisque il n'y est pas question d'équation de courbe algébrique ? Posons $\mathsf{AF} = c$ et $\mathsf{AG} = b$ pour les lignes données, puis $\mathsf{FC} = c + z$ afin de simplifier les calculs. On déduit alors facilement $\mathsf{GC} = b - \frac{e}{d}z$[49].

Descartes[50], en appliquant le théorème de Pythagore aux deux triangles rectangles CMG et CMF, va éliminer CM^2 et déduire x exprimé en fonction de z. Puis il remplace x par cette expression, et non x^2 pour ne pas alourdir le calcul comme on l'a vu, en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles PCM et CMF — ou de même CMG — , et obtenir finalement une équation quadratique en z, selon la même méthode que celle reconstruite par nous à partir des résultats figurant dans les fragments sur les ovales, et dans le même ordre.

On peut rapprocher ce raisonnement de celui qu'opérera plus tard Descartes dans le problème des trois cercles[51]. On a en effet trois équations à trois inconnues en appliquant le théorème de Pythagore aux trois triangles rectangles CMF, CMG et PCM :

$$y^2 = \frac{e^2}{d^2}z^2 - \frac{2be}{d}z + 2bx - x^2 : \text{Triangle rectangle } \mathsf{CMG} \quad (7.51)$$

$$y^2 = z^2 + 2cz - 2cx - x^2 : \text{Triangle rectangle } \mathsf{CMF} \quad (7.52)$$

$$y^2 = s^2 - v^2 + 2vx - x^2 : \text{Triangle rectangle } \mathsf{PCM} \quad (7.53)$$

qu'on élimine deux à deux[52] pour obtenir une équation quadratique en z.

On peut donner une interprétation de ces éliminations en termes de courbe géométrique. Rien ne garantit que celle-ci soit celle de Descartes, si ce n'est la volonté qu'il aurait pu avoir de rendre cohérent cet exemple avec l'interprétation générale de sa méthode des normales. D'ailleurs Descartes n'ajoute rien à ce sujet dans le texte de la *Géométrie*.

Les deux premières équations (7.51) et (7.52) correspondent à deux familles de cercles paramétrées par z, de centres les foyers F et G. Leurs points d'intersection, z étant donné, forment l'ovale. La troisième équation (7.53)

[49] À nouveau, les notations changent. Descartes emploie dans la *Géométrie* z pour désigner le paramètre qui intervient dans l'expression des rayons vecteurs.

[50] Cette fois-ci, nous ne détaillons pas les calculs qui sont semblables à ceux présentés auparavant.

[51] Cf. la lettre de Descartes à Elisabeth de novembre 1643 : [Descartes(1964-1974), IV, p. 38-42].

[52] Il est vrai que Descartes n'introduit pas de lettre pour désigner CM^2. Néanmoins, les méthodes, bien que différentes, nous paraissent suivre la même inspiration.

correspond au cercle tangent au point C. Ainsi, si le point P n'est pas le centre du cercle tangent à l'ovale, le cercle de centre P passant par C coupera l'ovale en un second point qui appartiendra à un cercle de la famille définie par l'équation (7.51) ou (7.53). L'équation quadratique résultante en z possédera ainsi deux racines distinctes et au contraire une racine double dans le cas du cercle tangent.

Après avoir déterminé la normale à l'ovale, Descartes utilise dans la suite la normale pour démontrer synthétiquement que la première ovale est solution d'un problème dioptrique. Il annonçait du reste lui-même cet usage de la méthode des normales en écrivant :

> Au reste, afin que vous sçachiés que *la consideration des lignes courbes, icy proposée, n'est pas sans usage*, & qu'elles ont diverses propriétés qui ne cedent en rien a celles des sections coniques, je veux encore adiouter icy l'explication de certaines Ovales, que vous verrés estre tres utiles pour la Theorie de la Catoptrique & de la Dioptrique.[53]

Descartes va ainsi démontrer qu'en supposant que :

> la proportion qui est entre d & e [...][54] mesure les réfractions du verre proposé, [...] le rayon qui vient du point F au point C, doit tellement s'y courber, en entrant dans ce verre [AC], qu'il s'aille rendre aprés vers G[55].

Pour ce faire, il lui faut établir par le calcul que si on désigne par i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction, on a en supposant que le point C vérifie la proportion (7.50)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{d}{e}, \tag{7.54}$$

d'après le principe qu'on nomme aujourd'hui de Descartes-Snellius.

C'est alors qu'intervient la normale dans le problème car il est clair qu'en tirant du point P les perpendiculaires PQ et PN sur les droites AF et AG, on a

$$\frac{\mathsf{PQ}}{\mathsf{PN}} = \frac{\sin i}{\sin r}. \tag{7.55}$$

[53] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1637c), p. 424].
[54] La proportion qui entrait dans la définition de la première ovale.
[55] Cf. [Descartes(1637c), p. 432].

Il s'agit donc de vérifier par le calcul qu'on a bien

$$\frac{\mathsf{PQ}}{\mathsf{PN}} = \frac{d}{e}, \tag{7.56}$$

ce qui est aisé en calculant les expressions de PQ et PN qu'on déduit, d'une part, de l'expression de la normale précédemment trouvée, d'autre part, du théorème des triangles semblables en considérant les deux couples de triangles semblables PQM et CMF, PNG et CNG[56], comme Descartes l'a fait auparavant dans les fragments sur les ovales.

Bien-sûr, Descartes donne ici un raisonnement synthétique dont il n'explique pas les raisons d'être. Nous espérons avoir montré que ces raisons dêtre sont contenues dans l'analyse qu'on peut déduire des calculs portant sur le problème inverse des normales qui l'a conduit à inventer les ovales.

Que peut-on enfin conclure d'un tel usage de la méthode des normales ? D'une part, on peut remarquer que l'angle qui apparaît dans la théorie de la Dioptrique présentée par Descartes est l'angle pris avec la normale de la courbe dioptre. En ce sens la mention initiale par Descartes du problème de la mesure d'angles entre une droite et une courbe renverrait à une question de Dioptrique. L'enjeu qui entourait à cette époque la réalisation de verres les meilleurs qui soient pour les lentilles et télescopes et l'élaboration d'une théorie liée pourrait justifier l'importance accordée par Descartes à ce problème jugé initialement « le plus utile, & le plus general... », si notre interprétation est correcte.

Un autre indice concordant serait la mention par Descartes de l'opération de « mesurer » un angle. Cette mention n'est pas anodine et ne renvoie pas au vocabulaire de la Géométrie d'inspiration euclidienne. Au second Discours de la Dioptrique, Descartes indique en effet que l'inclinaison des angles d'incidence et de réfraction

> [...] se doit *mesurer*[57] par la quantité des lignes droites comme CB ou AH, & EB ou IG[58] non par celle [la quantité] les angles, tels que sont ABH ou GBI [...] Car la raison ou proportion qui est entre ces angles, varie a toutes les diverses inclinations des rayons ; au lieu que celle qui est entre les lignes AH & IG ou semblables,

[56] Cf. [Descartes(1637c), p. 432].
[57] C'est moi qui souligne.
[58] *I.e.* les sinus des angles.

demeure la mesme en toutes les refractions qui sont causées par les mesmes cors[59].

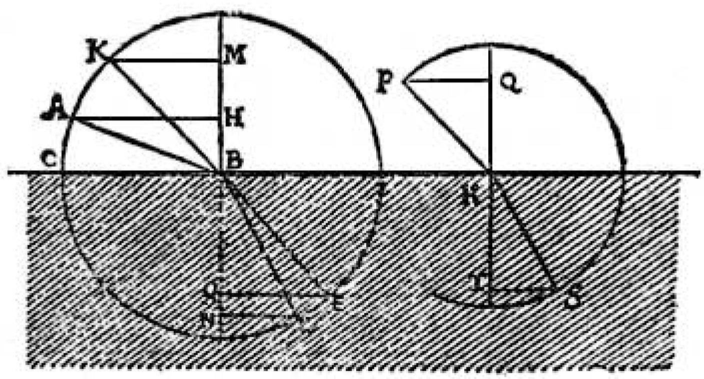

FIG. 7.4 – La Dioptrique (1637) : Discours second. De la réfraction.

Ainsi, en employant le terme de « mesurer un angle », Descartes nous semble renvoyer à un fait mathématique important et signifiant de l'usage qu'il souhaite faire de la méthode des normales : le choix d'une mesure des angles adéquate en Dioptrique, à savoir le sinus.

[59]Cf. [Descartes(1637c), p. 101].

Chapitre 8

Les méthodes des tangentes de Fermat

On sait qu'à la fin de l'année 1637 Fermat fit parvenir dans l'urgence à Descartes par l'entremise de Carcavi et Mersenne en tout quatre écrits latins dans deux envois successifs[1]. Fermat devait souhaiter prouver à l'auteur de la *Géométrie* que sur deux des points essentiels du traité, à savoir, d'une part la composition des lieux solides, d'autre part la méthode des normales, il possédait déjà une théorie et une méthode indépendantes de celles publiées par Descartes.

Dans le premier envoi qui nous intéresse ici, apparaissaient le *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* et le *De tangentibus linearum curvarum*[2]. Le second envoi comprenait l'*Ad locos planos et solidos Isagoge* avec son *Appendice*[3].

Après les critiques de Fermat reçues par Descartes au sujet de la *Diop-*

[1]Cf. la présentation du premier groupe de ces écrits par de Waard : [Mersenne(1945-1988), VI, p. 387]. Cf. également pour une discussion sur la datation de la rédaction de ces écrits [Mahoney(1994), p. 416-417]. Cette discussion figure dans un *Conspectus* chronologique des écrits de Fermat : [Mahoney(1994), p. 415-423].

[2]Cf. [Fermat(1629-1636)]. Tannery a donné une traduction française du texte latin dans laquelle il adopte des notations symboliques modernes, ce qui peut masquer la profonde similitude de style entre l'analyse donnée par Fermat qui constitue la première partie de sa solution et une analyse géométrique classique. Nous reviendrons dans la suite plus en détails sur ce point. Le texte est aussi donné dans [Descartes(1964-1974), I, p. 493-495] et [Mersenne(1945-1988), VI, p. 388-389].

[3]Cf. [Fermat(1636a)] et [Fermat(1636b)]. Pour une étude de ces traités, cf. [Rashed(2001), p. 9-15] et [Bos(2001), Chap 13, p. 205-210].

trique, ce dernier reçut ces écrits brefs comme un véritable « cartel »[4] annonçant une querelle de priorité. Il critiqua en retour les deux premiers écrits dans une lettre à Mersenne datée par Adam et Tannery et de Waard de janvier 1638[5], tandis qu'il dédaignait les deux autres consacrés à la composition des lieux solides, affirmant ne pas les avoir lus, lorsqu'il les renvoya à Mersenne, avec une lettre datée par Adam et Tannery du 1er mars 1638[6].

Des deux textes brefs de Fermat et de cette première critique de Descartes exprimée dans la lettre à Mersenne de janvier 1638 naquit la controverse sur les tangentes. Nous commencerons donc par étudier ces deux écrits latins de Fermat ainsi que les compléments et les éclaircissements sur la méthode d'*extremum* et des tangentes qui suivirent sous la forme de remarques dans les lettres de la Correspondance de Fermat avec Mersenne et Descartes de 1638 ou bien sous forme d'écrits annexés. Ce n'est qu'ensuite, dans le chapitre suivant[7], que nous examinerons les arguments de la controverse.

Nous n'entendons pas proposer dans ce chapitre une reconstruction de la genèse des méthodes d'*extremum* et des tangentes de Fermat. De nombreuses études sur ce sujet difficile ont déjà été données auxquelles nous renvoyons le lecteur[8]. De notre côté, nous étudierons plus modestement les modalités d'ap-

---

[4]Selon les mots mêmes qu'emploierait plus tard Descartes dans la lettre à Mersenne du 29 juillet 1638. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 175].

[5]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 486-496] et [Mersenne(1945-1988), VI, p. 13-21].

[6]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 28]. Cf. également la lettre à Mersenne datée par Adam et Tannery du 25 janvier 1638 : [Descartes(1964-1974), I, p. 503].

[7]Cf. *infra* [chapitre 9, p. 303].

[8]Citons d'abord les études « historiques » de Montucla et Duhamel. Cf. [Montucla(1799-1802), II, p. 136-143] et [Duhamel(1864)]. Cf. également [Zeuthen(1966), p. 329-337]. On peut voir aussi l'article de Jean Itard [Itard(1948)], celui détaillé et polémique de Per Strømholm [Strømholm(1968)], et le chapitre de l'ouvrage de Mahoney sur Fermat consacrée à cette question ainsi qu'à la controverse sur les tangentes avec Descartes : [Mahoney(1994), Chap IV, p. 143-213]. Cet ouvrage présente certains défauts qui ont été trés sévèrement dénoncés par André Weil dans sa recension [Weil(1973)] mais aussi par Jean Itard dans [Itard(1974), p. 335] Plus précisement au sujet de [Mahoney(1994), Chap IV], cf. [Weil(1973), p. 1145-1147]. On peut aussi consulter l'ouvrage de Giovanna Cifoletti [Cifoletti(1990)] qui fournit des informations sur la diffusion de la méthode de Fermat ainsi qu'un aperçu de la littérature critique : [Cifoletti(1990), p. 39-59]. Kirsti Møller Pedersen apporte une présentation éclairante et synthétique de la méthode de Fermat en la replaçant dans le contexte des autres méthodes de l'époque dans [Pedersen(2000), p. 23-26]. Enfin, plus récemment, Herbert Breger a consacré un article à l'interprétation du terme « adæquare » en adoptant une approche à la fois philologique et analytique. Pour justifier la présence de deux emplois radicalement différents de ce terme, le premier renvoyant à une égalité, tandis que

plication par Fermat de sa méthode d'*extremum* au problème des tangentes et l'évolution de ces modalités d'application en relation avec la controverse sur les tangentes avec Descartes de l'année 1638. Nous nous poserons ainsi les deux questions suivantes : Comment Fermat interprète-t-il le problème des tangentes comme un problème d'*extremum* ? Comment cette interprétation est-elle modifiée par la controverse avec Descartes sur les tangentes ?

8.1 La première méthode de Fermat : *extremum* et tangente

Pour la datation de l'invention de cette méthode par Fermat, la célèbre lettre de Fermat à Roberval du 22 septembre 1636 fixe un *terminus a quo* et un *terminus ad quem*. Fermat écrit en effet :

> Sur le sujet de la méthode *de maximis et minimis*, vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagnet vous a donnée, vous avez vu la mienne que je lui baillai, il y a environ sept ans, étant Bordeaux.[9]

Une seconde lettre à Roberval du 16 décembre 1636, moins souvent citée, apporte une information essentielle sur l'existence d'une seconde version de la méthode d'*extremum*. Fermat écrit ainsi :

> Toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides, et *ad superficiem*, que j'ai achevées, et celles encore des parties aliquotes des nombres[10], dépendent de la méthode dont M. Despagnet ne vous a pu faire voir qu'un seul cas, parce que,

le second renverrait à une égalité approchée, Herbert Breger conjecture une intervention de Carcavy sur les textes dont nous disposons. Cf. [Breger(1994)]. Cf. aussi l'article de Michel Blay [Blay(1999)]. Pour une comparaison entre la méthode de Fermat et celle du mathématicien arabe Al-Tūsī, cf. également l'introduction de Roshdi Rashed *in* [Tūsī(1986), I, p. xxvii-xxxii]. Cf. enfin [Panza(2005), p. 113-118] où Marco Panza étudie la présentation par van Schooten au sein de son commentaire de la *Géométrie* de la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat dans le cas du problème de la normale à la conchoïde.

[9] Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 71]. Pour d'autres remarques sur la méthode *de maximis et minimis* par Fermat dans des lettres de la même année 1636, cf. également [Fermat(1891-1922), II, p. 5-6, 56, 72-74].

[10] On peut remarquer que la méthode de recherche d'*extremum* est ici présentée par Fermat comme une méthode générale s'appliquant à la fois à des questions de théorie des nombres ou de géométrie analytique. Une telle affirmation apparaît dans d'autres lettres

> depuis que je n'ai eu l'honneur de le voir, *je l'ai beaucoup étendue et changée.*
>
> Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposerai de trouver à un point donné en la seconde conchoïde[11] de Nicomède.[12]

Pour ces raisons, nous daterons la méthode d'*extremum* présentée dans le premier écrit de Fermat[13] de 1629-1636 sans plus de précisions tandis que Mahoney, qui ne cite pas cette dernière lettre, lui assigne plutôt la date de 1629[14].

---

de la Correspondance de Fermat. Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 5, 56]. Montucla doute de la vérité de cette affirmation et pense que Fermat désigne plus généralement ici « sa méthode d'analyser les problèmes ». Cf. [Montucla(1799-1802), II, p. 137]. Breger remarque en conclusion de son article que la question intéressante de l'utilisation par Fermat de sa méthode de recherche d'*extremum* en théorie des nombres n'a pas encore été élucidée : [Breger(1994), p. 216-217].

[11]Pappus fait allusion aux deuxième, troisième et quatrième conchoïdes de Nicomède après avoir décrit la première conchoïde dans la proposition XXVI du Livre IV de la *Collection Mathématique*. Rappelons que la première conchoïde de Nicomède a pour équation polaire $\rho = a + \frac{b}{\cos\theta}$. Selon ver Eecke, l'équation polaire de la deuxième conchoïde de Nicomède serait $\rho = \frac{b}{\cos\theta} - a$, avec $a < b$ (pour la troisième et la quatrième, on aurait respectivement $a = b$, $a > b$). Cf. [Pappus(1982), I, n. 6, p. 186]. Henry-Tannery suppose que Fermat entend plutôt la conchoïde de cercle et renvoie au *Supplementum Geometriæ* de Viète dans lequel ce dernier comprend bien en effet la seconde conchoïde comme une conchoïde de cercle, en introduisant un parallèle entre les deux conchoïdes de Nicomède et les deux constructions par *neusis*. Cf. [Viète(1646), p. 240] et [Viète(1983), p. 388]. Sachant par ailleurs que lorsque le pôle se situe sur le cercle, on obtient les limaçons d'Étienne Pascal, une telle interprétation de la part de Fermat est plausible. Ajoutons pour terminer qu'auparavant Fermat avait proposé à Roberval dans la lettre précédemment citée du 22 septembre 1636 l'invention de la tangente à la — première ? — conchoïde de Nicomède en un point donné. Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 72]. Pour la discussion qui s'ensuivit sur le point d'inflexion de la conchoïde entre Roberval et Fermat, cf. [Itard(1948), p. 252-254]. Cf. également la note mathématique de Jules Vuillemin sur la conchoïde : [Vuillemin(1960), p. 148-152].

[12]C'est moi qui souligne. Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 94].

[13]Cf. [Fermat(1629-1636)].

[14]Cf. [Mahoney(1994), n. 1, p. 143-144 et p. 416]. Pour une discussion sur la nature des deux méthodes évoquées dans cette lettre par Fermat et la chronologie de leur invention, cf. [Strømholm(1968), p. 47-55 et 57-64].

8.1.1 L'algorithme de recherche d'*extremum*

Dans ce premier écrit[15], Fermat présente une méthode de « recherche du maximum et du minimum » d'une quantité $Q(x)$ exprimée par une équation algébrique en une variable x[16].

Citons Fermat dans le texte original latin[17] :

> Statuatur quilibet quæstionis terminus esse A $[x]$ (sive planum, sive solidum, aut longitudo, prout propositio satisfieri par est), et inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub A $[x]$, gradu, ut libet, involutis,[18]

Si l'on suppose que Fermat respecte le formalisme de Viète introduit dans l'*Isagoge*[19], l'énoncé précédent signifie que l'expression de la quantité Q est homogène[20].

Rappelons maintenant la démarche de la méthode telle qu'elle est exposée par Fermat. Il s'agit après avoir substitué $x+e$ à la variable x dans la quantité $Q(x)$ d'« adégaler » la quantité qui en résulte $Q(x+e)$ avec la quantité $Q(x)$ donnée. Fermat utilise le verbe « adæquare » et ses dérivés en l'empruntant

[15]Nous entendons « premier » dans l'ordre de la divulgation : comme on l'a vu, cet écrit sur la méthode d'*extremum* est le premier transmis par Fermat à Mersenne.

[16]Nous employerons dans la suite des notations cartésiennes plutôt que celles de Viète qui sont employées par Fermat.

[17]L'interprétation du texte de Fermat pose en effet problème.

[18]Cf. [Fermat(1891-1922), I, p. 133]. Tannery traduit :

> Soit a $[x]$ une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en $[x]$,au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques.

Cf. [Fermat(1891-1922), III, p. 121].

[19]Cf. [Viète(1591)].

[20]On pourrait introduire une limitation supplémentaire en imposant que la quantité x et la quantité $Q(x)$ soient du même ordre, autrement dit, que lorsque la quantité $Q(x)$ désigne une surface, la quantité x désigne également une surface comme les termes contenus dans l'expression de $Q(x)$. Cette interprétation restrictive qui est donnée par Marco Panza dans sa traduction figurant dans [Descartes(2005), n. 2, p. 487], si nous l'avons bien comprise, nous paraît contredite par le premier exemple de Fermat où la quantité Q désigne un rectangle et la quantité x un segment.

à Diophante[21] pour indiquer la relation — que nous noterons[22] « $\sim$ » — qui lie ces deux quantités. On obtient ainsi une formule $Q(x) \sim Q(x+e)$ dite « adégalité », à laquelle Fermat propose d'appliquer la procédure suivante :

- retrancher les éléments communs de part et d'autre — clairement les termes ne contenant pas e ou une puissance de e —,
- diviser tous les termes de l'équation par la puissance de e de degré le moins élevé,
- éliminer les termes qui après l'opération précédente contiennent encore e ou une puissance de e, substituer « = » à « $\sim$ » et résoudre l'équation en x ainsi obtenue.

D'après Fermat, on obtiendra ainsi des valeurs de x correspondant à des *maxima* ou à des *minima* de l'expression $Q(x)$. Ceci est en général faux : il est

[21] Cf. les propositions 11 et 14 du Livre V : [Diophante(1959), p. 202-204 et 208-209]. Dans les éditions de Xylander et Bachet, il s'agit des propositions 14 et 17 du Livre V. Cf. [Diophante(1575), p. 131 et 133] et [Diophante(1621), p. 309-310 et 318]. On y trouve déclinés le substantif « adæqualitas » et l'adjectif « adæqualis »pour traduire le terme grec $\pi\alpha\rho\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$. Ce terme désigne la méthode de Diophante d'« approximation par une limite » selon la traduction de ver Eecke : [Diophante(1959), n. 2, p. 203]. Il s'agit de trouver une solution d'une équation indéterminée qui approche autant que possible un nombre donné. Pour une description de cette méthode, cf. [Diophante(1964), p. 95-98 (présentation de la méthode) et p. 206-210 (texte)] et [Heath(1981), II, p. 477-479]. Il semble que Fermat emprunte plutôt le terme que la méthode. Pour une étude sur la relation de Fermat à Diophante, cf. [Weil(1984), p. 24-29] et [Bachmakova(1966), p. 299 *sq.*]. Dans cet article, Isabelle Bachmakova donne une interprétation des procédures de Diophante et de Fermat dans les termes de la géométrie algébrique. L'analyse mathématique brillante qui en découle pose néanmoins une question historique : Fermat disposait-il d'une telle interprétation au moins dans les cas simples ? À notre connaissance, une interprétation des questions de l'analyse diophantienne dans des termes de géométrie algébrique n'apparaît en effet qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Cf. [Houzel(1998)] pour un exposé synthétique mathématique et historique. Cf. également la présentation mathématique moderne de la méthode de la corde par Roshdi Rashed dans [Diophante(1984), chapitre I : La méthode de la corde, p. lxxxv-cxxxvi]. Breger centre son article sur la signification du terme « adæquare » et l'interprète au contraire comme signifiant « to put equal » ne voyant aucune égalité approchée. Cf. [Breger(1994), p. 197-199]. Il étudie ensuite en détail le passage de Diophante concerné et sa relation à la méthode de Fermat [Breger(1994), p. 199-202] en s'appuyant *in fine* sur la même hypothèse concernant la lecture « géométrique » par Fermat de Diophante. Il écrit ainsi :« Thus we need not be surprised by FERMAT's seeing a curve, where DIOPHANTUS only talked about number theory ». Cf. [Breger(1994), p. 202]. À nouveau, une telle conjecture nous semble devoir être étayée.

[22] Nous empruntons ce symbole à Tannery qui l'introduit dans sa traduction française. Cf. [Fermat(1891-1922), III, p. 122]. Fermat utilise la langue naturelle et emploie « adæquabitur ». Cf. [Fermat(1891-1922), I, p. 134].

clair que des *extrema* de $Q(x)$ sont nécessairement atteints parmi ces valeurs de x, mais ce n'est pas toujours le cas. Autrement dit, l'équation obtenue par Fermat dans la dernière étape de son algorithme exprime plutôt une condition nécessaire et non pas une condition suffisante que x doit satisfaire pour déterminer un *extremum* de $Q(x)$. Fermat ne le note pas et confond ainsi condition nécessaire et condition suffisante, ce qui était habituel au dix-septième siècle.

Une telle présentation de la méthode de Fermat offre un premier désavantage. Sur le plan de la forme, elle présente un algorithme de nature arithmétique mais pas de démonstration géométrique qui sous-tende cet algorithme. En particulier, le statut géométrique des opérations de simplification portant sur l'inconnue e est passé sous silence. Néanmoins Fermat apparaît rigoureux dans la mesure où de telles opérations, qui relèvent de l'algèbre arithmétique, s'appliquent seulement à une *adégalité* pendant que les opérations de l'algèbre géométrique, comme la résolution de l'équation finale en x, s'appliquent à une *égalité*.

8.1.2 Un exemple d'application

Considérons à présent le premier exemple d'application de la méthode d'*extremum* donné par Fermat. Cet exemple reprend le problème classique de la section d'un segment donné AC en un point E tel que le produit $\mathsf{AE} \times \mathsf{EC}$ soit *maximum*.

Ce problème est traité par Euclide dans un cadre plus général[23] dans la proposition 27 du Livre VI des *Eléments*[24] qui fournit un diorisme — *i.e* une condition de détermination[25] — pour l'application elliptique d'une aire[26]. D'autre part, la proposition 5 du Livre II des *Eléments*[27], dont une partie de la démonstration est identique à une partie de la démonstration de la proposition précédente qui en constitue une généralisation, comme le remarque Bernard Vitrac[28], permet de résoudre le même problème, cette

[23]Les rectangles sont remplacés par des parallélogrammes au sein d'une théorie de la similitude des figures.

[24]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 224-226] et [Euclide(1956), II, p. 257-260].

[25]Pour une définition, cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 137-138].

[26]Un tel diorisme est équivalent de façon moderne à la condition de positivité du discriminant d'une équation du second degré de la forme $bx - cx^2 = A$ pour que celle-ci admette une racine réelle. Cf. [Euclide(1956), II, p. 259 et p. 263-265].

[27]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 333-335] et [Euclide(1956), I, p. 382-385].

[28]Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 226].

fois-ci pour les rectangles et dans le cadre d'une théorie de l'isométrie des figures[29].

Posons l'inconnue $\mathsf{AE} = x$ et $\mathsf{AC} = b$. La quantité dont on se propose de rechercher l'*extremum* est

$$Q(x) = bx - x^2. \tag{8.1}$$

qui doit être adégalée à

$$Q(x+e) = bx + be - x^2 - 2ex - e^2. \tag{8.2}$$

En simplifiant les termes communs et en divisant par e, on obtient l'adéquation

$$b \sim 2x + e \tag{8.3}$$

et en supprimant[30] e l'équation

$$b = 2x. \tag{8.4}$$

En appliquant la méthode, on trouve ainsi aisément que le *maximum* est obtenu pour $x = \frac{b}{2}$.

Fermat termine enfin par une sentence sur la généralité de la méthode contrastant avec le caractère à la fois élémentaire et particulier de l'exemple qu'il a choisi affirmant qu'« il est impossible de donner une méthode plus générale »[31]. Cette affirmation sera l'objet de critiques acerbes de la part de Descartes lors de la controverse sur les tangentes.

8.1.3 Deux méthodes de recherche d'*extremum* ?

L'unicité de l'algorithme de recherche d'*extremum* mais l'existence de deux fondements de nature différente de cet algorithme, l'un infinitésimal, l'autre algébrique, révélés ultérieurement par Fermat, a conduit certains historiens à affirmer l'existence de deux méthodes d'*extremum* de Fermat[32]. On

[29] De façon moderne, en écrivant $bx - x^2 = \frac{b^2}{4} - (\frac{b}{2} - x)^2$.

[30] Fermat écrit « elidatur e ». Cf. [Fermat(1629-1636), p. 134]. Comme le remarque Stromholm, il n'est pas question dans cette présentation de la méthode de poser $e = 0$ pour Fermat. Cf. [Strømholm(1968), p. 51].

[31] « nec potest generalior dari methodus ». Cf. [Fermat(1629-1636), p. 134].

[32] Cette question et celle conséquente de la chronologie des deux méthodes est l'objet principal de l'article de Per Strømholm [Strømholm(1968)]. Au contraire, l'objet de l'article de Herbert Breger est de révoquer l'existence d'une seconde méthode fondée sur l'adégalité en tant qu'egalité approchée, ce dernier considérant une telle interprétation comme une des étrangetés de l'historiographie fermatienne. Cf. [Breger(1994), p. 194].

peut ainsi considérer comme Montucla[33] que le fondement de l'algorithme de Fermat consiste en ce que l'accroissement ou la diminution de la quantité $Q(x)$ au voisinage de son *extremum* est nulle pour une variation infiniment petite e de la variable x. Bien qu'une telle explication ne soit pas donnée par Fermat, elle ne fait que développer la composante infinitésimaliste de la méthode qu'on retrouve dans le concept d'adégalité en tant qu'il signifie une égalité à la limite. Selon une telle interprétation, la méthode de Fermat consiste à négliger les termes en e d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement selon les puissances de e de l'adégalité $Q(x+e) - Q(x) \sim 0$.

Une seconde justification de la méthode, suggérée par Fermat lui-même dans un écrit postérieur[34] dont la date de rédaction est incertaine[35] est de nature purement algébrique et fondée sur une considération de racine double. Supposons que la quantité $Q(x)$ admette pour *extremum* y_0 en x_0. Alors pour y suffisamment proche de y_0, l'équation $Q(x) = y$ a deux racines encadrant x_0 qui coïncident en une racine double lorsque y devient y_0[36]. Dès lors, la position de $e = 0$ dans l'*équation* $Q(x) = Q(x+e)$ ne renverrait pas à l'identification de e avec un accroissement infiniment petit mais au fait que l'équation $Q(x) = y$ admet une racine double lorsque y est un *extremum* de $Q(x)$[37]. On connaît enfin le célèbre écrit envoyé à Brulârt de Saint-Martin

[33] Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 111]. C'est également l'interprétation de Duhamel. Cf. [Duhamel(1864), p. 271-273]. Cette hypothèse est critiquée par Itard à la suite de Tannery. Cf. [Itard(1948), p. 236-237].

[34] Cf. [Fermat(1640b)]. Dans cet écrit, Fermat s'appuie sur la méthode de *syncrisis* de Viète exposée dans le Chapitre XVI du traité *De recognitione æquationum*, qui consiste à exprimer les racines d'une équation en fonction de ses coefficients, pour justifier l'algorithme de sa méthode. Cf. [Viète(1646), p. 104-108] et [Viète(1983), p. 207-215]. Pour cela, il considère d'abord l'exemple de la quantité $Q(x) = bx - x^2$ déjà traité dans [Fermat(1629-1636)] puis celui de la quantité $Q(x) = bx^2 - x^3$ traité également dans un écrit antérieur [Fermat(1638a)] sur lequel nous reviendrons dans la suite. Pour une étude détaillée de la méthode de *syncrisis* chez Fermat, cf. [Mahoney(1994), p. 147-150].

[35] Mahoney le date de 1639-1640. Cf. [Mahoney(1994), n. 3, p. 145 et p. 418]. De Waard donne quant à lui pour datation 1643-1644 [Fermat(1891-1922), V *Suppl*, p. xvi], Itard 1640-1642 [Itard(1948), n. 8, p. 237] et Strømholm 1638 [Strømholm(1968), p. 58-63]... Cet « important morceau », comme le présente Tannery, apparaît ainsi exemplaire d'un problème épineux pour qui veut étudier Fermat : celui de la datation de ses écrits.

[36] Pour une description plus précise, cf. [Itard(1948), p. 236-239], [Strømholm(1968), p. 52-53], [Mahoney(1994), p. 147-161].

[37] Comme le remarque Marco Panza, le point essentiel dans les deux cas est que les *maxima* et les *minima* apparaissent comme des points doubles. Cf. [Panza(2005), p 117-118].

le 31 mars 1643[38] où Fermat propose une démonstration par synthèse de sa méthode en comparant les développements des expressions polynomiales $Q(x-e)$ et $Q(x+e)$ avec $Q(x)$[39].

8.1.4 La première méthode des tangentes

Le premier exemple donné par Fermat[40] qui avait pour but, d'une part d'exposer une application claire et simple de la méthode, d'autre part de persuader de la validité de celle-ci en retrouvant la solution d'un problème bien connu, est suivi par un second exemple qui nous intéresse au premier chef. Il s'agit de la détermination de la tangente de la parabole. Fermat écrit :

> Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.[41]

Fermat prétend donc par le truchement de l'exemple du problème de la détermination de la tangente à la parabole, d'une part exposer une nouvelle méthode des tangentes, d'autre part mettre en évidence la relation de celle-ci à la méthode de recherche du *maximum* et du *minimum* d'une quantité qu'il a précédemment énoncée.

L'énoncé du problème par Fermat est le suivant :

> Soit donnée, par exemple, la parabole BDN, de sommet D, de diamètre DC ; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.[42]

[38] Cf. [Fermat(1643)]. On trouve aussi ce texte dans [Mersenne(1945-1988), XII, p. 143-148]. Pour une étude détaillée, cf. [Strømholm(1968), p. 51-54], [Mahoney(1994), p. 195-205] et [Tūsī(1986), I, p. xxix-xxx].

[39] En fait, comme le remarque Strømholm, bien qu'élégante, la démonstration de Fermat est fausse si l'on n'impose pas une condition de majoration des facteurs e^n en supposant au moins $e < 1$, et encore dans ce cas, faut-il supposer l'existence d'un unique *extremum* dans l'intervalle $[x-e, x+e]$. Or Fermat passe sous silence cette condition. Cf. [Strømholm(1968), p. 53]. On peut néanmoins arguer que Fermat possédait au moins l'intuition non formalisée d'un telle condition sur la quantité e comme en témoigne par exemple son choix d'employer le terme « adégaler ». Quant à la condition d'unicité de l'*extremum* dans l'intervalle considéré, elle ne pouvait lui apparaître du fait de la confusion qu'il fait entre condition nécessaire et condition suffisante.

[40] Pour un exposé sur la méthode des tangentes de Fermat, cf. [Itard(1948), p. 241-252] et [Strømholm(1968), p. 55-57].

[41] Cf. [Fermat(1629-1636), p. 134 (resp. p. 122)].

[42] Cf. [Fermat(1629-1636), p. 135 (resp. p. 122)].

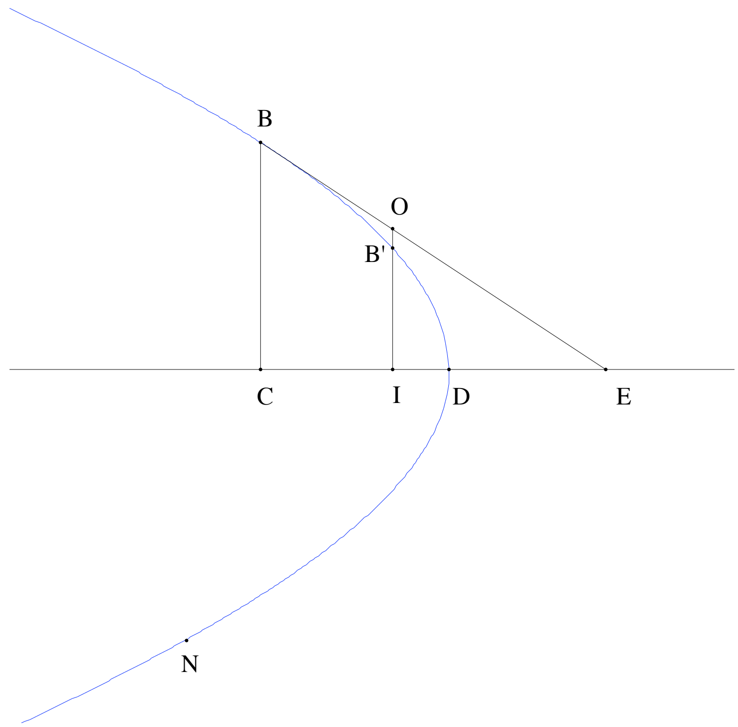

FIG. 8.1 – L'invention de la tangente à la parabole par Fermat

Voici comment Fermat procède dans cet exemple bien connu. Soit O un point de la droite tangente BE d'ordonnée OI. Du fait de la définition classique de la tangente[43], ce point tombe à l'extérieur de la parabole[44]. Du fait de l'équation de la parabole et de la position de la parabole par rapport à sa tangente, on a

$$\mathsf{CD} : \mathsf{DI} > \mathsf{BC}^2 : \mathsf{OI}^2 \tag{8.5}$$

et du fait des triangles semblables BCE et OIE, on a

$$\mathsf{BC}^2 : \mathsf{OI}^2 = \mathsf{CE}^2 : \mathsf{IE}^2. \tag{8.6}$$

Il vient donc

$$\mathsf{CD} : \mathsf{DI} > \mathsf{CE}^2 : \mathsf{IE}^2. \tag{8.7}$$

[43]Pour un rappel sur la notion de tangente dans l'Antiquité, cf. [Itard(1948), p. 239-241]. Cf.également la conférence de Rashed [Rashed(2006)] pour une étude du concept de tangente chez Apollonius.

[44]En tant que la parabole est considérée comme figure.

Il importe de remarquer que jusqu'ici le style de Fermat est celui d'une analyse géométrique classique formulée dans la langue naturelle, ce que pourrait masquer la traduction algébrisante de Tannery[45].

Posons[46] $\mathsf{CD} = b$ qui est donnée, puisque le point B est donné, $\mathsf{CE} = x$ et $\mathsf{CI} = e$. On déduit facilement de l'expression précédente

$$b(x-e)^2 > (b-e)x^2. \tag{8.8}$$

Fermat substitue alors à la relation d'inégalité « $>$ » la relation d'adégalité « $\sim$ » et applique l'algorithme de recherche d'*extremum*. Il obtient ainsi aisément $x = 2b$.

Remarquons que Fermat repousse l'« adégalisation » au plus loin de son raisonnement, après avoir obtenu par une analyse géométrique classique fondée sur la convexité de la demi-branche supérieure de la parabole l'inégalité (8.8). Il aurait pu en effet transformer directement l'égalité (8.6) en l'adégalité (8.8) en usant de la propriété spécifique de la parabole[47] sans se servir de l'inégalité (8.5). Il suffisait pour cela d'écrire

$$\mathsf{BC}^2 : \mathsf{OI}^2 = b : (b-e) \tag{8.9}$$

mais alors il aurait été nécessaire de supposer que le point O se trouvât sur la parabole. Nous verrons que Fermat proposera cet aménagement dans une lettre postérieure à Mersenne à titre d'éclaircissement de la méthode.

Le choix de Fermat dans ce premier écrit pourrait renvoyer à un souci de rigueur. En différant l'adégalisation au profit d'un raisonnement géométrique, puisqu'il ne donne pas dans cet écrit de démonstration géométrique de son algorithme[48], Fermat se prévient d'une critique globale de sa méthode des tangentes. Dans le cadre d'un envoi à Descartes visant à exposer une méthode des

[45]Cf. [Fermat(1629-1636), p. 135 (resp. p. 123)].

[46]À nouveau, nous prenons des notations différentes de celles de Fermat mais nous respectons la correspondance entre les notations des inconnues dans les deux exemples : x désigne ainsi la variable et e l'accroissement.

[47]*I.e.* la proposition 11 du Livre I des *Coniques*. On a en fait seulement besoin de la proposition 20 du Livre I qui énonce que, dans la parabole, les abscisses sont entre elles dans la même raison que le carré des ordonnées. Cf. [Apollonius(1959), resp. p. 21-24 et p. 42-43]. Cette proposition bien connue avant Apollonius, rappelée par Archimède dans la proposition 3 de la *Quadrature de la parabole*, peut être déduite directement de la définition planimétrique des coniques sans passer par le symptôme. Cf. [Gardies(2001), p. 138-139] pour une discussion relative à ces deux propositions.

[48]Nous avons vu que la lettre à Brulârt de Saint-Martin du 31 mars 1643 pouvait constituer une démonstration synthétique de l'algorithme de Fermat. Cf. [Fermat(1643)] et [*supra*, section 8.1.3, p. 263].

tangentes concurrente à la méthode des normales présentée dans la *Géométrie* de 1637, un tel choix — défensif — apparaît d'ailleurs tout à fait naturel. Mais on peut donner une autre interprétation des intentions de Fermat en considérant que la présentation donnée par lui de la méthode des tangentes dévoile plutôt qu'un choix une origine géométrique classique qu'on retrouve dans les *Coniques* d'Apollonius, comme nous le verrons dans la suite[49].

L'analyse géométrique classique donnée initialement par Fermat pose deux problèmes : un logique, l'autre didactique. D'une part, pour justifier son raisonnement géométrique, Fermat doit user d'une propriété connue de convexité de la parabole qui non seulement sera ignorée lorsqu'on se proposera de déterminer la tangente d'une courbe quelconque dans le cas général, mais encore dépendra précisément du calcul apparaissant lors de l'adégalisation. D'autre part, en procédant ainsi, Fermat masque dans le calcul la quantité Q dont la méthode des tangentes revient à trouver l'*extremum*, alors qu'il a initialement présenté sa méthode des tangentes comme une application de la méthode de recherche d'*extremum*.

8.1.5 Le fondement de la méthode de Fermat : une propriété d'*extremum*.

Aussi, la question se pose naturellement après l'affirmation initiale de Fermat concernant la réduction de l'invention des tangentes à sa méthode de recherche du *maximum* et du *minimum* de la détermination de cette quantité au sein de l'exemple de l'invention de la tangente à la parabole. Nous allons voir que cette question fait débat à la fois pour les mathématiciens de l'époque (Descartes, Roberval) et pour les historiens (Montucla, Duhamel).

En effet, on peut proposer plusieurs hypothèses pour l'*extremum* dont il est question ici. Tel Duhamel[50], on peut identifier la quantité Q comme étant celle correspondant au rapport $\mathsf{OI}^2 : \mathsf{DI}$ qu'on peut regarder comme présenté implicitement dans la proportion (8.5), bien que Fermat n'en dise rien. En effet, un tel rapport sera *minimum* au point B lorsque le point O se déplacera sur la tangente. On remarquera simplement qu'ensuite, au lieu d'adégaliser les rapports $\mathsf{BC}^2 : \mathsf{CD}$ et $\mathsf{OI}^2 : \mathsf{DI}$, Fermat emploie les lignes CE et IE qui sont proportionnelles aux lignes BC et OI, ce qui revient à considérer

[49]Cf. *infra* [section 8.4, p. 286.]

[50]Cf. [Duhamel(1864), p. 292]. Mahoney reprend également cette interprétation. Cf. [Mahoney(1994), p. 166-169].

de façon équivalente que le point O se déplace sur la tangente. On retrouve ainsi l'adégalité

$$\frac{x^2}{b} \sim \frac{(x-e)^2}{b-e}. \tag{8.10}$$

Bien sûr, si l'échange entre termes moyens et extrêmes de la proportion ne pose aucune difficulté au lecteur moderne qu'est Duhamel et paraît révéler la véritable nature du calcul de Fermat, une telle manipulation est impossible dans le cadre de la théorie euclidienne des proportions où s'inscrit le calcul de Fermat. En effet, le carré OI^2 n'est pas homogène au segment DI.

Néanmoins, on peut répondre assez aisément à cette difficulté, faisant ainsi en sorte que l'interprétation modernisante de Duhamel puisse rendre compte d'une intention cachée de Fermat. Il suffit pour cela de remarquer qu'on doit considérer à la place du rapport précédent le rapport $\mathsf{BC}^2 : \mathsf{DL} \cdot \mathsf{CD}$ où DL est le côté droit de la parabole considérée. Un tel problème ne se pose pas dans l'application de la méthode à la tangente aux coniques à centre.

Dans un autre écrit visant à éclaircir la méthode d'*extremum* et des tangentes[51], Fermat détermine ainsi la tangente à l'ellipse en appliquant exactement de la même façon sa méthode[52]. En effet, si D et D' sont les sommets de l'ellipse, en reprenant les notations précédentes, on a d'après la propriété de l'ellipse[53]

$$\mathsf{BC}^2 : \mathsf{CD} \cdot \mathsf{CD}' = \textit{constante}. \tag{8.11}$$

Il suffit à présent d'adégaler les rapports $\mathsf{CE}^2 : \mathsf{DC} \cdot \mathsf{CD}'$ et $\mathsf{IE}^2 : \mathsf{DI} \cdot \mathsf{ID}'$. En posant la donnée $\mathsf{D}'\mathsf{C} = b'$, on obtient l'adégalité

$$\frac{x^2}{bb'} \sim \frac{(x-e)^2}{(b-e)(b'+e)}. \tag{8.12}$$

[51] Cf. [Fermat(1638a)]. On trouve une version française de cet écrit qui présente le texte complet — dans le texte latin, manque le dernier exemple — dans [Fermat(1891-1922), V *Suppl*, p. 72-83] et [Mersenne(1945-1988), VII, Appendice III, p. 442-446]. De Waard conjecture que cet écrit a été rédigé après que Descartes eut fait à dessein une application fautive de la méthode des tangentes de Fermat à l'ellipse et à l'hyperbole. Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 442].

[52] Cf. [Fermat(1638a), p. 144-146 (resp. p. 129-130)].

[53] Cette propriété est valable pour le cercle et l'hyperbole. Il s'agit de la proposition 21 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius. Cf. [Apollonius(1959), p. 43-44]. À nouveau, la démonstration d'une telle proposition ne requiert pas la connaissance du *symptoma* bien qu'elle puisse bien sûr en être déduite de façon immédiate.

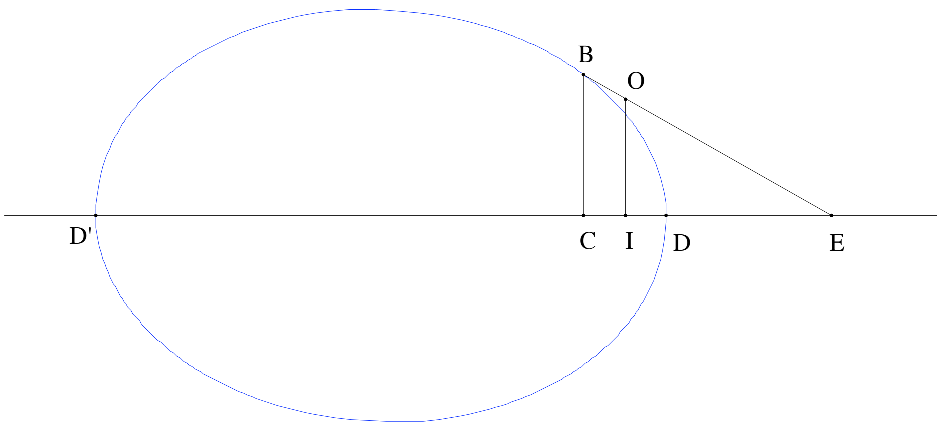

FIG. 8.2 – La tangente à l'ellipse

Telle aurait été l'intention de Fermat, elle aurait en effet offert l'avantage de simplifier les calculs, de recourir à une définition plus élémentaire que le *symptoma* des coniques qui considère simplement la proportionnalité entre les carrés des ordonnées et les abscisses, et enfin, principalement, de dissimuler, comme c'était l'usage à l'époque dans les communications scientifiques, le ressort véritable de l'application de la méthode de recherche d'*extremum* au problème des tangentes. Le fait que Roberval, partisan de Fermat dans la querelle, ne reconnut pas plus tard précisément le lien entre méthode des tangentes et méthode de recherche d'*extremum* témoignerait alors d'une suite malheureuse de la volonté dissimulatrice de Fermat[54].

Nous verrons dans la suite qu'une telle formulation pouvait renvoyer également à une lecture par Fermat de la proposition 33 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius alors que Fermat disposait déjà de sa méthode de recherche d'*extremum*.

Montucla émet quant à lui l'hypothèse que le *maximum* serait celui du rapport $\mathsf{EI} : \mathsf{IB}''$, où le point B'' est le point d'intersection d'une sécante variable tirée du point E à la parabole. Il écrit ainsi :

[54]D'ailleurs, dans ses versions postérieures de la méthode des tangentes, Fermat s'il conservera sa méthode d'adégalisation, renoncera à son interprétation en terme d'*extremum* du problème des tangentes.

> Il n'y a ici de *maximum* ou de *minimum*, que la raison de [EC à CB] [...] Or, en considérant la question de cette manière, la règle de Fermat réussit très bien et donne exactement la tangente.[55]

Cela revient à regarder de façon équivalente comme devenant *maximum* ou *minimum* la mesure de l'angle $\widehat{\mathsf{B''EI}}$.

Une telle interprétation du premier écrit de Fermat est réfutée à juste titre par Duhamel car elle suppose que

> le point variable, qui détermine l'expression de la grandeur qui doit devenir maximum, se meut sur la courbe elle-même, tandis que Fermat dit expressément qu'il le fait se déplacer sur la tangente.[56]

Néanmoins il est vrai qu'on retrouve ainsi le calcul de Fermat. Supposons dans les calculs précédents que le point O appartient à la parabole. En adégalisant les carrés des rapports EC : CB et EI : IO, on déduit du *symptoma* de la parabole en reprenant les notations précédentes

$$\frac{x^2}{b} \sim \frac{(x-e)^2}{b-e}. \tag{8.13}$$

On peut enfin dire de façon moderne qu'en supposant que la parabole a pour équation[57] $y^2 = rx$, la quantité $y^2 - rx$ le long de la tangente présentera un *minimum* égal à 0 au point de contact B avec la parabole[58].

Le problème historiographique qui apparaît alors naturellement consiste à déterminer quel(s) calcul(s) d'*extremum* sous-tend(ent) les différentes applications de la méthode des tangentes par Fermat.

8.2 La deuxième méthode de Fermat : adégalisation et tangente

La présentation succincte et envoyée hâtivement de sa méthode des tangentes n'avait pas du satisfaire Fermat lui-même, puisque dans une lettre

[55] Cf. [Montucla(1799-1802), II, p. 140].

[56] Cf. [Duhamel(1864), p. 298].

[57] Ici x et y désignent bien sûr respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la la parabole.

[58] C'est ainsi que Jean Itard présente la méthode des tangentes de Fermat. Cf. [Itard(1948), p. 243].

postérieure à Mersenne de l'année 1638 dont la datation pose problème[59], Fermat allait donner un résumé de sa méthode des tangentes sous une forme plus générale et modifier son choix initial :

> Outre le papier envoyé à R(oberval) et (Pascal), pour suppléer à ce qu'il y a de trop concis, il faut que M. Descartes sache, qu'après avoir tiré la parallèle [OI] qui concourt avec la tangente et avec l'axe ou diamètre des lignes courbes, je lui donne premièrement le nom qu'elle doit avoir comme ayant un de ses points dans la tangente, ce qui se fait par la règle des proportions qui se tire de deux triangles semblables. Après avoir donné le nom, tant à notre parallèle qu'à tous les autres termes de la question, tout de même qu'en la parabole, je considère derechef cette parallèle *comme si le point qu'elle a dans la tangente étoit en effet en la ligne courbe*[60], et suivant la propriété spécifique de la ligne courbe, je compare cette parallèle par adégalité avec l'autre parallèle [BC] tirée du point donné à l'axe ou diamètre de la ligne courbe.
>
> Cette comparaison par adégalité produit deux termes inégaux qui enfin produisent l'égalité (selon ma méthode) qui nous donne la solution de l'équation.
>
> Et ce qu'il y a de merveilleux, est que l'opération nous indique si la figure courbe est convexe ou concave, si la tangente est parallèle à l'axe ou diamètre, et de quel côté elle fait son concours lorsqu'elle n'est pas parallèle ; ce qui serait trop long à décrire le menu, et suffit de dire que nous trouvons des équations impossibles pour avoir pris le concours du mauvais côté, etc...[61]

8.2.1 Adégalisation et tangente

En reprenant les notations précédentes, on peut donner la transcription suivante de la méthode de Fermat telle qu'il la présente dans cet extrait d'une lettre à Mersenne. Supposons que la propriété spécifique de la ligne courbe soit exprimée par une relation polynomiale entre une puissance de l'ordonnée BC et l'abscisse $\mathsf{CD} = b$ de la forme[62] $\mathsf{BC}^n = P(b)$. En considérant le point

[59]De Waard propose janvier 1638 tandis qu'Henry-Tannery rattachent cette lettre à celle de Fermat du 20 avril 1638. Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 6].

[60]C'est moi qui souligne.

[61]Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 7-8].

[62]Dans le cas de la parabole, on a $n = 2$ et $P(b) = rb$.

O comme appartenant à la tangente, on déduit de l'égalité (8.6)

$$\mathsf{OI} = \frac{P(b)(x-e)}{x}. \tag{8.14}$$

Considérant d'autre part le point O comme appartenant à la courbe, on déduit l'adégalité

$$\mathsf{OI}^n \sim P(b-e). \tag{8.15}$$

On déduit finalement de ces deux expressions de OI l'adéquation

$$P(b)(x-e)^n \sim P(b-e)x^n \tag{8.16}$$

qu'on traite selon la méthode.

8.2.2 La méthode expliquée et envoyée à Descartes

Remarquons que la méthode de Fermat peut être appliquée lorsque l'équation de la courbe est donnée par une équation implicite polynomiale $Q(b,c) = 0$ entre l'abscisse $\mathsf{CD} = b$ et l'ordonnée $\mathsf{BC} = c$ du point B. Il suffit alors d'appliquer la méthode à l'équation

$$Q(b-e, \frac{c(x-e)}{x}) = 0. \tag{8.17}$$

Dans la présentation de la méthode donnée par Fermat dans sa lettre précédente, la possibilité d'une telle application de la méthode demeurait néanmoins implicite. Cela donna lieu à une critique de Descartes dans une lettre à Mersenne de janvier 1638[63] où il proposait à Fermat d'appliquer sa méthode à la détermination de la tangente au *folium* qui était donné par une équation[64] implicite $X^3 + Y^3 = nXY$ entre abscisse et ordonnée.

On trouve dans un autre écrit annexé à une lettre de Fermat à Mersenne de juin-juillet 1638[65] intitulé « Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes » une nouvelle présentation qui met clairement en évidence cette possibilité d'appliquer la méthode des tangentes à des courbes données par une équation implicite, « la méthode générale

[63] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 490-491] et *infra* [section 9.1.3, p. 310].

[64] Nous employons des majuscules pour différencier l'abscisse X de la sous-tangente x.

[65] Cf. [Fermat(1638b)].

pour trouver les tangentes des lignes courbes [méritant] d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été »[66].

Posons dans la figure 8.1, $\mathsf{BC} = c$[67].

Fermat écrit ainsi[68] :

> [...] [DI] sera $[b - e]$, [OI] sera $[\frac{cx-ce}{x}]$. Et de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes [DI] et [OI] que nous venons de leur donner.
>
> Cela étant fait, il est certain que le point [I] de la ligne [OI], étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne [OI] sera plus grande ou plus petite que la l'appliquée qui s'appuye à la courbe du point [I] :— plus grande lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple [celui de la parabole], et plus petite lorsque la courbe est convexe en dedans ; car la regle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe.
>
> Quoique la ligne [OI] soit inégale à l'appliquée tirée du point [I], je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne [B′I][69], suivant la propriété spécifique de la courbe.
>
> Comme en la parabole, par exemple, je fais
> comme [CD] à [DI], ainsi [BC] quarré à [OI] quarré
>
> $$[\text{soit } b : b - e = c^2 : \frac{c^2(x-e)^2}{x^2}] \tag{8.18}$$
>
> ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes
> comme [CD] à [DI], ainsi [EC] quarré à [EI] quarré,
>
> $$[\text{soit } b : b - e = x^2 : (x-e)^2] \tag{8.19}$$
>
> car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables [ECB], [EIO].
>
> Ou bien encore je pourrois comparer le quarré [FE] avec le rectangle compris sous le côté droit $[r]$ et la ligne [OI], comme si

[66] Cf [Fermat(1638b), p. 154 (resp. p. 325)].

[67] Cf. *supra* [figure 8.1, p. 265]. Je modifie les notations de Fermat par souci d'uniformité.

[68] Je modifie les notations de Fermat dans la citation.

[69] Remarquons que Fermat remplace BC par B′I pour la comparaison par adéquation par rapport à la présentation précédente.

> ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les appliquées à la courbe qui ont la proprieté que nous donnons par *adéquation* à la ligne [OI][70].
>
> $$[\text{soit } \frac{c^2(x-e)^2}{x^2} = r(b-e)]. \tag{8.20}$$
>
> Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par e. J'efface tout ce qui reste mêlé avec e et égalise le surplus, de sorte que par cette dernière équation, je connois la valeur de $[x]$ et par conséquent la ligne [EC] et la tangente.[71]

La présentation donnée ici par Fermat est tout à fait claire. Les trois modes d'utilisation des deux propriétés spécifiques de la parabole correspondant aux propositions 11 et 20 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius — *symptoma* et proportionnalité des carrés des ordonnées aux abscisses — conduisent à la même équation

$$b(x-e)^2 = (b-e)x^2 \tag{8.21}$$

qui correspond à l'inégalité (8.8) donnée dans la première présentation de la méthode envoyée à Mersenne à la fin de l'année 1637.

Fermat applique ensuite sa méthode pour déterminer la tangente au *folium*[72] sans difficultés. Il est aisé de résumer son calcul de façon moderne. Soient (b, c) les coordonnées du point B duquel on se propose de déterminer la tangente au *folium*. Posons x pour la sous-tangente comme on l'a fait jusqu'ici. Il faut appliquer la méthode de Fermat à l'équation

$$(d-e)^3 + (\frac{d(x-e)}{x})^3 = n(d-e)\frac{d(x-e)}{x}. \tag{8.22}$$

On obtient ainsi[73] en divisant par e puis en éliminant les termes contenant e

$$x = \frac{nbd - 3b^3}{3d^2 - nb}. \tag{8.23}$$

[70] Remarquons qu'on retrouve ici l'interprétation donnée par Itard du calcul de Fermat. Cf. *supra* [note 58, p. 270].

[71] Cf. [Fermat(1638b), p. 155 (resp. p. 326)].

[72] Cf. [Fermat(1638b), p. 156-157 (resp. p 327-328)].

[73] Fermat ne connaissant pas le signe du numérateur et du dénominateur et ne considérant pas de grandeurs orientées, il substitue au symbole de soustraction la notation « = » qu'il emprunte à Viète pour désigner la soustraction du plus petit au plus grand. De façon moderne, il considère ainsi la valeur absolue du numérateur et du dénominateur. Cf. [Viète(1591), cap. IV, præc. 2].

On voit ainsi que Fermat paraît être revenu sur le caractère géométriquement rigoureux mais conséquemment particulier de sa présentation de l'invention de la tangente à la parabole dans le premier écrit sur la tangente à la parabole communiqué à Descartes.

Dans cette lettre à Mersenne, il présente ainsi, d'une part, une adégalisation en lieu et place d'une comparaison pour les ordonnées BC et OI de la courbe, en choisissant le point O à la fois sur la tangente et sur la courbe, ce qui revient à supposer l'accroissement e infiniment petit. Fermat indique d'autre part que la résolution de l'équation qui proviendra de l'adégalisation permettra d'étudier qualitativement la tangente et sa position par rapport à la courbe.

Ce faisant, il met de côté l'interprétation en terme d'*extremum* du problème des tangentes qu'il avait pourtant suggéré auparavant dans son écrit. D'autre part, bien qu'il mette plus clairement en évidence la généralité de sa méthode, Fermat doit préciser à nouveau sa méthode des tangentes dans un second écrit afin de montrer qu'elle ne se restreint pas aux courbes géométriques dont l'équation algébrique est sous la forme $y^n = P(x)$ mais permet de traiter également des courbes géométriques dont l'équation algébrique $Q(x, y) = 0$ est implicite.

8.2.3 L'écrit de Fermat de 1640 sur les tangentes

Plus tard, dans un autre écrit sur les tangentes daté par Mahoney de 1640[74], le seul pour lequel on dispose d'un autographe de Fermat[75], on retrouve une présentation semblable de la méthode des tangentes. Fermat écrit ainsi :

> Nous considérons en fait dans le plan d'une courbe quelconque deux droites données de position, dont on peut appeler l'une *diamètre*, l'autre *ordonnée*. Nous supposons la tangente déjà trouvée en un point donné sur la courbe, et nous considérons par *adégalité* la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la

[74]Cf. [Fermat(1640a)]. Pour la datation, cf. [Mahoney(1994), p. 419] et [Mersenne(1945-1988), IX, p. 273].

[75]Cf. [Breger(1994), p. 195-196]. Breger remarque dans cet écrit l'emploi fluctuant par Fermat d'« adæqualitas » et d'« æqualitas ». Le second est ainsi utilisé à la place du premier pour exprimer une même idée. Cet emploi a été corrigé par les éditeurs des *Œuvres* de Fermat. Cf. [Fermat(1891-1922), I, p. 426].

> courbe même, mais sur la tangente à trouver. En éliminant, suivant notre théorie des maxima et minima, les termes qui doivent l'être, nous arrivons à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre, par suite la tangente elle-même.[76]

Fermat applique ensuite sa méthode à la cissoïde et à la conchoïde[77]. Le géomètre toulousain indique enfin des extensions de sa méthode des tangentes dans ce même écrit en employant la technique ingénieuse consistant « pour éviter les radicaux, [à] substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes », et « aux arcs des courbes les longueurs correspondantes des tangentes trouvées »[78]. ll détermine ainsi la tangente aux courbes transcendantes que sont la cycloïde[79] et la quadratrice[80] avant de s'intéresser à la recherche des points d'inflexion d'une courbe[81].

8.3 La troisième méthode de Fermat : sécante et tangente

8.3.1 Le pamphlet de Beaugrand de 1640

On trouve une troisième version de la méthode des tangentes de Fermat dans un écrit publié par C. de Waard dans le Supplément aux *Œuvres de Fermat*[82]. Il s'agit d'un factum non daté[83] contre la méthode des normales de Descartes composé par Beaugrand[84]. Selon de Waard, cet écrit fut vraisemblablement l'un des « deux excellents traités » envoyés par Mersenne à

[76] Cf. [Fermat(1640a), p. 159 (resp. p. 141)].
[77] Cf. [Fermat(1640a), p. 159-162 (resp. p. 141-143)].
[78] Cf. [Fermat(1640a), p. 162 (resp. p. 143)]. Cf. également [Itard(1948), p. 244-251].
[79] Pour une étude de cet exemple, cf. [Pedersen(2000), p. 29-31].
[80] Cf. [Fermat(1640a), p. 162-166 (resp. p. 144-146)].
[81] Cf. [Fermat(1640a), p. 166-167 (resp. p. 146-147)]. Sur cette question, cf. [Itard(1948), p. 252-254].
[82] Cf. [Beaugrand(1640)].
[83] De Waard propose l'automne 1638 comme datation dans [Beaugrand(1640), p. 101] et le printemps 1640 dans [Mersenne(1945-1988), VIII, n. 1, p. 101].
[84] Pour des informations sur Beaugrand, cf. [Beaugrand(1640), p. 98-102]. Pour une étude de cet écrit, cf. [Cifoletti(1990), p. 114-128].

Haack pour en faire part à Pell[85].

Dans cet écrit, Beaugrand présente une suite d'exemples tout à fait intéressants d'application d'une nouvelle version de la méthode des tangentes de Fermat sans mentionner que ce dernier en serait l'auteur. L'attribution de cette nouvelle version de la méthode à Fermat est néanmoins suggérée par des reproches de plagiat de la part de Desargues, Fermat lui-même et Pascal[86].

Dans son introduction, Beaugrand se réfère à Apollonius, à qui il attribue la méthode des tangentes qu'il va présenter. Il écrit ainsi :

> Pour te mieux faire connoistre les deffauts de la façon du S. des Cartes pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données à angles droicts, *je veux te monstrer l'artifice dont il est vraysemblable que Apollonius s'est servy pour trouver les tangentes des sections coniques*, qui est general et qui peut estre employé à toutes sortes de lignes courbes sans aucune exception.[87]

Cette référence à Apollonius suggère l'existence d'une relation entre la méthode des tangentes de Fermat et les démonstrations par Apollonius des propositions traitant des tangentes aux coniques sur laquelle nous reviendrons[88].

8.3.2 L'ellipse et l'hyperbole

Les premiers exemples donnés par Beaugrand sont ceux de la tangente à l'ellipse et à l'hyperbole. Beaugrand écrit ainsi :

> Soit une ellipse ACH et qu'il faille tirer une ligne droite qui la touche au poinct C. tracer l'axe, ou un autre diametre, comme AB et la ligne droite HCE, supposant seulement que le poinct H soit dans l'Ellipse avec les ordonnées CD, HG. D'autant que les lignes BD, DC, DA sont données, nous nommerons la premiere b, la seconde h et la troisiesme d. Et la ligne DE estant celle dont

[85] Cf. la lettre de Mersenne à Haack du 12 mai 1640 et l'éclaircissement de C. de Waard *in* [Mersenne(1945-1988), IX, p. 306 et 310]. Le second traité était semble-t-il un écrit de Fermat lui-même, vraisemblablement [Fermat(1640a)], que nous venons d'étudier, selon De Waard. Cf. [Mersenne(1945-1988), IX, p. 273].

[86] Cf le compte-rendu de ces critiques donné par de Waard : [Beaugrand(1640), p. 114].

[87] C'est moi qui souligne. Cf. [Beaugrand(1640), p. 102].

[88] Cf. *infra* [section 8.4, p. 286].

> nous voulons chercher la mesure pour sçavoir par quel poinct du diametre BA doit passer la droicte qui touche l'Ellipse au poinct C, nous l'appelerons *a* [x] *et la ligne* DG *o, pour la raison que je toucheray ci-apres.*[89]

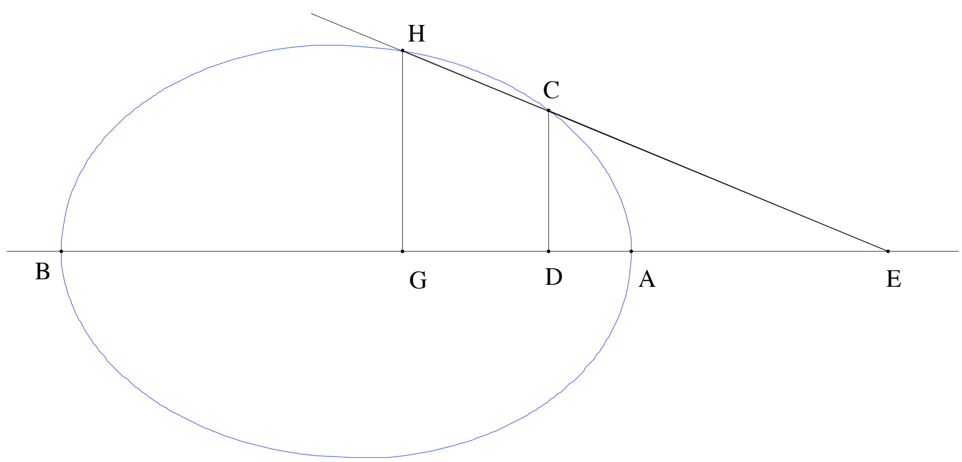

FIG. 8.3 – La tangente à l'ellipse selon Beaugrand

D'après la proposition 21 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius, on a :

$$Rect(\mathsf{BD}, \mathsf{DA}) : Rect(\mathsf{BG}, \mathsf{GA}) = Quad(\mathsf{DC}) : Quad(\mathsf{HG}) \tag{8.24}$$

d'où

$$\mathsf{GH}^2 = \frac{(b-o)(d+o)h^2}{bd}. \tag{8.25}$$

D'autre part, du fait de la similitude des triangles, on a

$$\mathsf{DE} : \mathsf{DC} = \mathsf{EG} : \mathsf{GH} \tag{8.26}$$

d'où

$$\mathsf{GH} = \frac{h(x+o)}{x}. \tag{8.27}$$

[89] C'est moi qui souligne. Cf. [Beaugrand(1640), p. 102].

Des deux expressions précédentes (8.25) et (8.27), on déduit l'équation

$$\frac{(x+o)^2}{x^2} = \frac{(b-o)(d+o)}{bd} \tag{8.28}$$

et après simplification des termes communs et division par o, on obtient l'équation[90]

$$bdo + 2bdx = -dx^2 + bx^2 - ox^2. \tag{8.29}$$

Beaugrand écrit alors :

> Or si la ligne HCE touche l'ellipse au poinct C, il est nécessaire que la ligne GD soit o, c'est a dire nulle, auquel cas il est très évident que toutes les quantitez qu'elles aura multipliees sont nulles [...][91]

et obtient pour la sous-tangente de l'ellipse

$$x = \frac{2bd}{-d+b}. \tag{8.30}$$

Il ajoute ensuite que « si la ligne ACH est une hyperbole, on conclura avec la mesme facilité » que

$$x = \frac{2bd}{d+b} \tag{8.31}$$

Il semble que Beaugrand soit le premier à introduire cette notation o qui met en évidence un des défauts logiques du calcul de Fermat qu'on retrouve dans le calcul infinitésimal[92], à savoir la division par une quantité qu'on pose ensuite égale à zéro. Ce défaut sera critiqué plus tard, en particulier par Berkeley dans son traité *The Analyst* de 1734[93].

D'autre part, Beaugrand introduit une nouveauté essentielle en considérant la tangente comme la limite d'une sécante c'est-à-dire comme

---

[90]Dans le texte de Beaugrand, on trouve une faute de copie : $-dda$ $[-d^2x]$ à la place de $-daa$ $[-dx^2]$. Cf. [Beaugrand(1640), p. 103].

[91]Cf. [Beaugrand(1640), p. 103].

[92]Margaret Baron qui étudie cet exemple assigne une postérité à cette notation du fait du voyage et des contacts pris par Beaugrand en Italie, remarquant au passage que « James Gregory, who subsequently made use of the symbol, saw a copy of this method distributed in Italy by Beaugrand ». Cf. [Baron(1969), p. 173].

[93]Cf. [Berkeley(1734)]. Au sujet des critiques de Berkeley sur le calcul infinitésimal, cf. l'article de Michel Blay [Blay(1986)]. Pour une présentation classique d'ensemble des critiques sur le calcul infinitésimal au dix-huitième siècle, cf. [Boyer(1959), p. 224-267].

une sécante en un point double de la courbe. On retrouve cette conception dans la démonstration de la règle de Fermat par Descartes dans sa lettre à Hardy de juin 1638 comme nous le verrons dans la suite[94]. On peut ainsi penser que l'exposé de Beaugrand a pu être inspiré par la lecture de la lettre de Descartes à Hardy même si l'on ne dispose pas de preuves matérielles.

Ajoutons pour terminer qu'en conséquence l'adéquation dans les deux premières méthodes de Fermat est remplacée ici par une équation.

8.3.3 Les hyperboles généralisées

Beaugrand introduit ensuite des courbes plus générales qu'on pourrait nommer « hyperboles généralisées » en s'appuyant sur la théorie des proportions[95] :

> Mais [...] au lieu d'une Ellipse ou d'une hyperbole, [...] concevez que ACH soit une ligne courbe, dont la nature soit telle que les lignes DC, HG, S, T, X, Z, *etc.* y estant continuellement proportionnelles, le rectangle BDA soit au rectangle BGA comme DC à T ou comme DC a X ou bien comme DC a Z,[96]

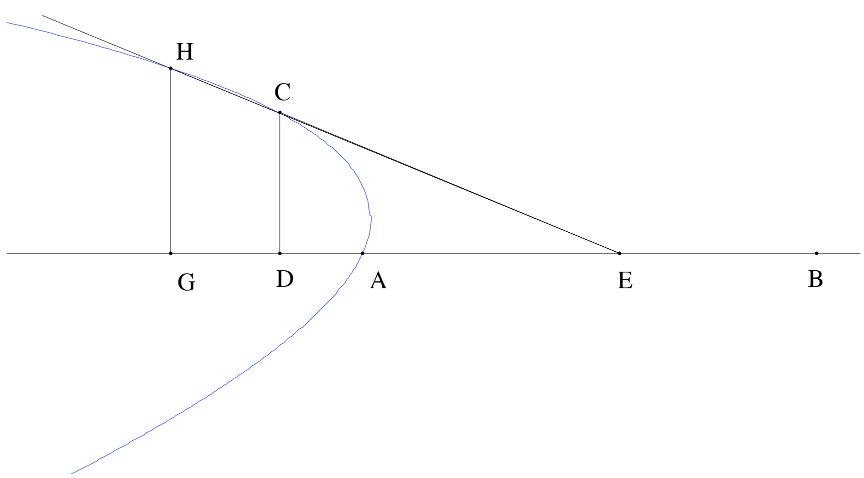

FIG. 8.4 – La tangente aux hyperboles généralisées

[94]Cf. *infra* [section 9.5, p. 336].
[95]Pour une étude de ces exemples, cf. [Cifoletti(1990), p. 119-126].
[96]Cf. [Beaugrand(1640), p. 104].

Beaugrand obtient ainsi des hyperboles généralisées définies par les proportions

$$\begin{aligned} Rect(\mathsf{BD},\mathsf{DA}) : Rect(\mathsf{BG},\mathsf{GA}) &= \mathsf{DC} : \mathsf{T} = (\mathsf{DC} : \mathsf{HG})^3, &(8.32)\\ Rect(\mathsf{BD},\mathsf{DA}) : Rect(\mathsf{BG},\mathsf{GA}) &= \mathsf{DC} : \mathsf{X} = (\mathsf{DC} : \mathsf{HG})^4, &(8.33)\\ Rect(\mathsf{BD},\mathsf{DA}) : Rect(\mathsf{BG},\mathsf{GA}) &= \mathsf{DC} : \mathsf{Z} = (\mathsf{DC} : \mathsf{HG})^5, ... &(8.34)\end{aligned}$$

En appliquant la méthode des tangentes décrite précédemment par Beaugrand, on obtient l'équation

$$\frac{bd}{(b+o)(d+o)} = \frac{x^n}{(x+o)^n} \tag{8.35}$$

avec $n = 3, 4, 5, ...$ au lieu de l'équation (8.28). En ôtant les termes semblables, en divisant par o puis en ôtant les termes affectés d'une puissance de o, on obtient pour la sous-tangente

$$x = \frac{nbd}{b+d} \tag{8.36}$$

pour $n = 3, 4, 5$[97] qui ne correspond pas au résultat faux donné sans démonstration par Beaugrand

$$x = \frac{2bd}{b-nd} \tag{8.37}$$

pour $n = 1, 2, 3$.

Beaugrand s'inspire vraisemblablement ici de la généralisation opérée par Fermat pour les paraboles et les hyperboles. On trouve en effet dans une lettre de Fermat à Roberval du 22 septembre 1636 la première mention de la parabole cubique. Fermat écrit ainsi :

> [...] j'ai quarré infinies figures comprises de lignes courbes, comme, par exemple, si vous imaginiez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du diamètre. Cette figure approchera de la parabole et ne diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrés, je prends en celle-ci celle des cubes ; et c'est pour cela que M. de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition, l'appelle *parabole solide*.[98]

[97] Bien sûr, le résultat est vrai pour n quelconque.
[98] Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 73].

Dans un traité postérieur sur les quadratures de Fermat[99], daté par Mahoney de 1658-1659[100], mais dont une partie du matériel fut rédigé avant 1640, comme en témoigne la lettre précédente, on retrouve des paraboles mais aussi des hyperboles généralisées au sujet desquelles Fermat écrit :

> Pour ce qui regarde les centres de gravité et les tangentes des hyperboles et paraboles [généralisées], leur invention, dérivée de ma *Méthode de maximis et minimis*, a été communiquée aux géométres modernes, il y a environ vingt ans. Les plus célèbres mathématiciens de la France voudront bien sans doute le faire savoir aux étrangers, afin que dans l'avenir il n'y ait point de doute à cet égard.[101]

Il est vrai en effet qu'on trouve dans une lettre de Fermat à Mersenne datée par Henry-Tannery de février 1638[102] un extrait assez obscur consacré aux paraboles généralisées qui sera inséré par Mersenne dans sa lettre à Descartes du 28 avril 1638[103]. Fermat y écrit :

> Et pour leur faire envie de quelque chose d'excellent, il faut estendre les lieux d'un point à plusieurs *in infinitum* : et par exemple, au lieu qu'on dit d'ordinaire :
>
> *Trouver une parabole en laquelle, prenant quelque point qu'on voudra, il produise toujours un mesme effet.*
>
> ie veux proposer
>
> *Trouver une parabole en laquelle prenant tels 2, 3, 4, 5, &c. points que vous voudrez, ils produisent tousiours un mesme effet, & ainsy à l'infiny*

Descartes donnera les centres de gravité et les tangentes de ces paraboles généralisées sans démonstration dans une lettre à Mersenne du 13 juillet 1638[104]. On peut donc imaginer que Beaugrand connaissait d'après Fermat et Descartes ces « hyperboles généralisées » lorsqu'il décida de les introduire dans son écrit.

---

99 Cf. [Fermat(1658-1659)].

100 Cf.[Mahoney(1994), p. 421]. Pour une étude de ce traité, cf. [Mahoney(1994), p. 244-267].

101 Cf. [Fermat(1658-1659), p. 266 (resp. p. 224)].

102 Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 134].

103 Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 120-121].

104 Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 247-250].

8.3.4 La parabole cartésienne

Beaugrand détermine ensuite la tangente à la parabole cartésienne[105] dans le cas plus général où la parabole est mue sur un diamètre, c'est-à-dire lorsque celle-ci est rapportée à ce diamètre selon des ordonnées obliques et non nécessairement orthogonales comme dans le cas de l'axe au sens classique[106]. Beaugrand n'employant pas le théorème de Pythagore, à la différence de Descartes, mais seulement le théorème des triangles semblables dans la méthode des tangentes qu'il propose, il peut en effet traiter de la même façon le cas des ordonnées obliques au diamètre et celui des ordonnées perpendiculaires à l'axe. Ce faisant, il insiste sur la nature affine et non métrique du problème des tangentes[107] et dénonce la difficulté des calculs qui résultent dans le traitement du cas général en coordonnées obliques en employant la méthode de Descartes. Beaugrand écrit ainsi :

> Si tu prens la peine de chercher les tangentes des mesmes lignes par l'invention que le S^r des Cartes s'attribüe et qu'il dit n'estre pas une des moindres de sa methode, il te sera facile de juger combine celle-cy est plus simple, facile et generale, et particulierement si tu suppose que les ordonnées ne rencontrent pas leur diametre à angles droicts, comme il est necessaire en sa methode, si on ne veut s'embarasser dans un labyrinte dont l'issüe seroit extraordinairement difficile. C'est ce qui l'a obligé luy mesme, lorsqu'il a voulu pratiquer sa reigle en la ligne courbe, qu'il nomme *seconde parabole*, de concevoir cette ligne comme engendrée par le mouvement d'une parabole sur son axe et non sur un diamètre, qui est coupé obliquement par ses ordonnées.[108]

Il conclut enfin son calcul en soulignant fort pertinemment les avantages de sa méthode et les inconvénients de celle de Descartes sur le plan de la généralité comme sur celui de la simplicité des calculs :

[105]De Waard mentionne en note l'existence d'une construction de cette tangente à la parabole cartésienne par Roberval au moyen de sa méthode mécanique des mouvements composés. Cf. [Beaugrand(1640), p. 108, n. 2]. Pour la construction de Roberval, cf. [Roberval(1693b), p. 110-111].

[106]Cf. [Beaugrand(1640), p. 105-108]. Sur la génération de la parabole cartésienne, cf. *supra* [section 2.4.2, p. 90].

[107]La pertinence de cette remarque a été soulignée par Jean Itard. Cf. [Itard(1974), p. 340-341]. Cf. également [Cifoletti(1990), p. 126-128].

[108]Cf. [Beaugrand(1640), p. 105].

> Tu voy que ie n'ay point supposé que l'angle BAX [des ordonnées de la parabole] fust droict comme le S. des Cartes et que la construction, qui se tire de cette analyse, a lieu lorsqu'il est oblique tout ainsy que quand il est droit. Je ne me suis point servy non plus pour trouver la valeur de la ligne DE [la sous-tangente] d'autres equations que de la principale qui n'a pas monté iusques au sixiesme degré comme la sienne.[109]

Beaugrand présente ensuite une seconde critique, complémentaire de la première, au sujet des embarras de calcul qui apparaissent en usant de la méthode des normales de Descartes, alors même qu'on se limite au cas des coordonnées rectangulaires. Il écrit ainsi :

> Bien que l'on suppose que le diametre coupe ses ordonnées à angles droicts, le procédé de sa reigle [celle de Descartes] ne laisse pas d'estre assez souvent si long et penible, qu'il a faict perdre l'escrime au S$^{\text{r}}$ de Beaulne, qui s'en vouloit servir pour trouver la tangente à la ligne courbe [...][110]

8.3.5 La première ligne de Debeaune

Pour ce faire, il va donc proposer l'exemple de la première ligne de Debeaune, qui est une hyperbole, et que nous avons rencontrée auparavant[111].

Voici ce qu'écrit Beaugrand pour présenter et définir la première ligne de Debeaune, avant d'en donner la tangente puis la construction :

> Prenez la ligne droite SAX pour son axe, le poinct A pour son sommet, et dans la ladicte ligne tel poinct qu'il vous plaira, comme E ; et ayant eslevé la perpendiculaire EF, si vous la faictes esgale a la troisiesme proportionnelle aux lignes SE, AE, le poinct E sera dans la courbe [...][112]

Posons[113] $\mathsf{SA} = b$, $\mathsf{AE} = d$. La détermination par Beaugrand de la tangente au point F est courte autant qu'aisée. Considérons la sécante FM à la courbe et posons $\mathsf{EL} = o$ et $\mathsf{XE} = x$.

[109]Cf. [Beaugrand(1640), p. 108].
[110]Cf. [Mersenne(1945-1988), VIII, p. 91].
[111]Cf. *supra* [section 4.2.2, p. 112].
[112]Cf. [Beaugrand(1640), p. 109-110] et [Mersenne(1945-1988), VIII, p. 91].
[113]Nous modifions ici les notations de Beaugrand par souci d'uniformité dans l'exposition.

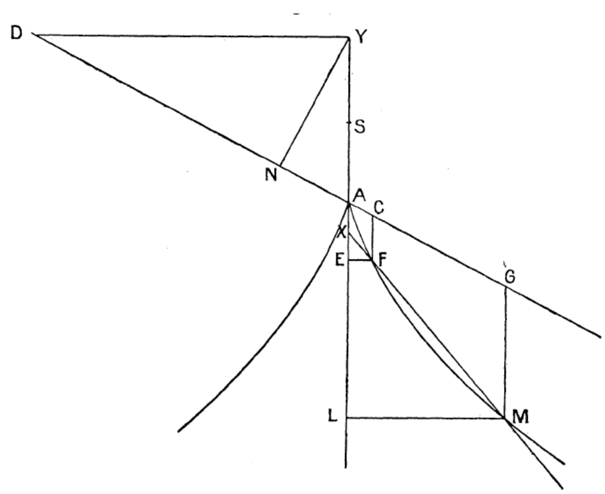

FIG. 8.5 – [Beaugrand(1640), p. 109]

D'après la propriété de la courbe, on a

$$\mathsf{EF} = \frac{d^2}{b+d} \text{ et } \mathsf{LM} = \frac{(d+o)^2}{b+d+o}. \tag{8.38}$$

Du fait de la proportionnalité des quatre lignes $\mathsf{XE} = x$, $\mathsf{XL} = x + o$, EF et LM, on obtient ainsi

$$\frac{d^2(x+o)}{b+d} = \frac{(d+o)^2 x}{b+d+o}. \tag{8.39}$$

Or, lorsque la sécante FM devient tangente à la courbe au point F, on a $\mathsf{EL} = o = 0$. Calculant et ôtant les termes contenant o, on obtient ainsi la sous-tangente

$$x = \frac{d^2 + bd}{2b + d}. \tag{8.40}$$

Après avoir donné la tangente de cette courbe, Beaugrand ajoute :

> [...] [Ce] qui est la résolution que je donnay audict S. de Beaulne sur cette question, de laquelle il mandoit avoir besoin dans quelque dessein touchant la Dioptrique.[114]

et termine son exposé en remarquant que la courbe en question est une hyperbole.

[114]Cf. [Beaugrand(1640), p. 110] et [Mersenne(1945-1988), VIII, p. 91].

Nous verrons dans la suite que Debeaune avait en effet demandé à Beaugrand de lui faire parvenir la méthode de Fermat appliquée à sa première ligne pour lui servir d'exemple en septembre 1638[115].

8.4 La tangente à la parabole selon Apollonius : les propositions 33 et 35 du Livre I des *Coniques*

L'objet de cette section est de mettre en évidence une relation entre la méthode des tangentes de Fermat et les *Coniques* d'Apollonius. L'hypothèse que nous défendons ici est que l'application de la méthode de recherche d'*extremum* de Fermat au problème des tangentes, dans le premier écrit consacré à la tangente à la parabole ou bien dans celui consacré à la tangente à l'ellipse, renvoie à une analyse géométrique et à un problème d'*extremum* qu'on peut retrouver dans les propositions apolliniennes consacrées à la détermination de la tangente à une conique[116].

Pour établir la comparaison entre les démonstrations d'Apollonius et la méthode de Fermat, et pour ne pas alourdir inutilement l'argument, nous considérerons, en détails, seulement le cas de la parabole qui du fait de sa simplicité permettra de rendre plus claires les relations de parenté que nous nous proposons de mettre en évidence.

Dans chacune de ces deux propositions réciproques l'une de l'autre, qui permettent à Apollonius de caractériser la tangente à la parabole par l'égalité entre l'abscisse et le segment sur l'axe tiré du sommet et intercepté par la tangente du point considéré, le géomètre grec emploie une démonstration par l'absurde. Mais rappelons tout d'abord l'énoncé de ces deux propositions 33 et 35 du Livre I des *Coniques* :

> Si l'on prend un point sur une parabole ; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point

[115] Cf. la lettre de Debeaune à Mersenne du 25 septembre 1638 : [Descartes(1964-1974), V, p. 515] et *infra* [section 10.2.1, p. 348].

[116] Il s'agit des propositions 32 à 40 du livre I des *Coniques* d'Apollonius. Cf. [Apollonius(1959), p. 58-74] et [Apollonius(1896), p. 22-30].

que l'on a pris, sera tangente à la section.[117]

Réciproquement,

> Lorsqu'une droite rencontrant un diamètre à l'extérieur de la section est tangente à une parabole, la droite, amenée de manière ordonnée du point de contact sur le diamètre, découpera sur le diamètre, à partir du sommet de la section, une droite égale à celle qui est située entre le sommet et la tangente ; et nulle droite ne tombera dans l'espace compris entre la tangente et la section.[118]

Considérons à présent les deux démonstrations fournies par Apollonius.

8.4.1 La démonstration de la proposition I.33

Soit donc E un point du diamètre d'une parabole pris à l'extérieur de la courbe et tel que

$$\mathsf{ED} = \mathsf{DC} \tag{8.41}$$

où C est le pied de l'ordonnée issue de du point B au diamètre DC [119].

Pour démontrer dans la proposition I.33 que la droite EB est tangente, Apollonius va démontrer que cette droite tombe à l'extérieur de la parabole. Pour cela, il va user comme on l'a dit d'une réduction à l'absurde en démontrant que s'il existe un point O de la droite EB placé à l'intérieur de la parabole, on aboutit à une contradiction.

On a

$$Quad(\mathsf{B'I}) : Quad(\mathsf{BC}) > Quad(\mathsf{OI}) : Quad(\mathsf{BC}) \tag{8.42}$$

par hypothèse, puisqu'on a supposé que le point O se trouvait à l'intérieur de la parabole. D'autre part, du fait des triangles semblables, on a

$$Quad(\mathsf{OI}) : Quad(\mathsf{BC}) = Quad(\mathsf{EI}) : Quad(\mathsf{EC}), \tag{8.43}$$

d'où

$$Quad(\mathsf{B'I}) : Quad(\mathsf{BC}) > Quad(\mathsf{EI}) : Quad(\mathsf{EC}). \tag{8.44}$$

Enfin, d'après la proposition 20 du Livre I des *Coniques*, on a

$$Quad(\mathsf{B'I}) : Quad(\mathsf{BC}) = \mathsf{DI} : \mathsf{DC}, \tag{8.45}$$

[117] Cf. [Apollonius(1959), p. 60] et [Apollonius(1896), p. 25].

[118] Cf. [Apollonius(1959), p. 64] et [Apollonius(1896), p. 26].

[119] Nous modifions les notations d'Apollonius en adoptant celles que nous avons employées précédemment pour présenter la méthode de Fermat.

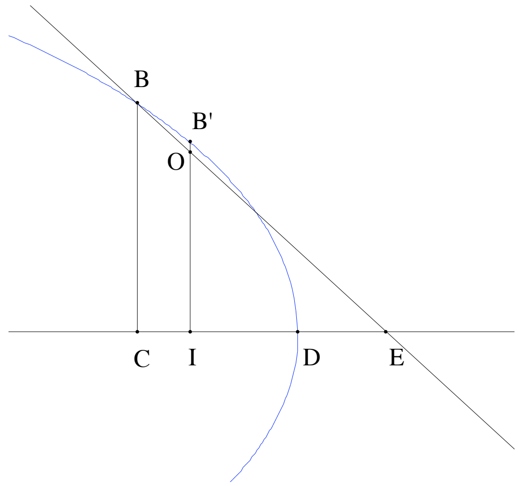

FIG. 8.6 – La tangente à la parabole selon Apollonius : Proposition I.33

d'où

$$\mathsf{DI} : \mathsf{DC} > Quad(\mathsf{EI}) : Quad(\mathsf{EC}). \tag{8.46}$$

Il s'agit là de la première partie de la démonstration.

Pour aboutir à une contradiction, il suffit d'introduire ED dans le rapport $\mathsf{DI} : \mathsf{DC}$ en écrivant que

$$\mathsf{DI} : \mathsf{DC} = 4Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DI}) : 4Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DC}), \tag{8.47}$$

mais comme $\mathsf{ED} = \mathsf{DC}$, on a

$$4Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DC}) = Quad(\mathsf{EC}), \tag{8.48}$$

et on déduit finalement

$$4Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DI}) : Quad(\mathsf{EC}) > Quad(\mathsf{EI}) : Quad(\mathsf{EC}). \tag{8.49}$$

Or, affirme Apollonius, comme EI n'est pas bisecté en D, on a

$$4Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DI}) < Quad(\mathsf{EI}), \tag{8.50}$$

d'où la contradiction.

Comme le remarque Heath[120], la réduction à l'absurde d'Apollonius peut être aisément transformée en une démonstration directe établissant que si le

[120] Cf. [Apollonius(1896), p. 25, n.].

point O, distinct de B, appartient à la tangente, alors il se trouve à l'extérieur de la parabole. En effet, en usant des mêmes propriétés, et en partant de la dernière inégalité, on démontre bien que $\mathsf{OI} > \mathsf{B'I}$. Mais une telle modification n'est pas fondamentale. Tout au plus, peut-on imaginer qu'Apollonius a voulu user d'une réduction à l'absurde car il voulait procéder comme Euclide l'avait fait dans le cas du cercle.

Mais il est possible de procéder autrement à une modification plus fondamentale de l'argument d'Apollonius. En effet, on peut remarquer, comme Paul ver Eecke[121], que cette proposition est la réciproque de celle que nous énonçons habituellement de façon moderne en disant que, dans la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse. Une telle modification de l'énoncé nous paraît assez significative.

En effet, Apollonius insiste sur une modalité de donation de la tangente à la parabole dans la proposition 33 du Livre I qui conduira à une construction aisée de celle-ci dans la proposition 49 du Livre II[122], et déduit de cette même proposition 33 la démonstration de la proposition 35 réciproque, qui apparaît finalement comme inessentielle. Au contraire, le lecteur moderne effectue quant à lui le chemin inverse. Il insiste ainsi plutôt sur une propriété de la tangente que sur une modalité de donation constructive de celle-ci.

Une autre façon de procéder serait de conserver la direction de l'argument d'Apollonius, mais de supposer la tangente donnée, et en prenant un point sur la tangente distinct du point de contact, donc extérieur à la parabole, de renverser les inégalités qui apparaissent. On peut alors interpréter la première partie de la démonstration d'Apollonius comme mettant en évidence une propriété d'*extremum* du rapport $Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DI}) : Quad(\mathsf{EI})$ qui est atteint lorsque le point I concide avec le point C.

8.4.2 Le fondement de la démonstration d'Apollonius : un diorisme pour l'application elliptique d'une aire

L'argument final qui permet d'aboutir à une contradiction n'est ni complètement élémentaire, ni, à notre connaissance, courant dans la

[121] Cf. [Apollonius(1959), p. 60, n.].
[122] Cf. [Apollonius(1959), p. 163-165] et [Apollonius(1896), p. 72].

littérature géométrique grecque[123]. Apollonius considère ici que lorsqu'on coupe un segment CE en un point I, le *maximum* du rectangle $Rect(\mathsf{EI}, \mathsf{IC})$ est atteint lorsque le point I est le milieu du segment. Plus précisément, ce *maximum* est égal à $\frac{1}{4}Quad(\mathsf{EC})$.

Nous avons auparavant déjà rencontré ce problème chez Fermat. La solution de ce problème constitue en effet le premier exemple donné par Fermat pour appliquer sa méthode d'*extremum*[124].

Comme l'indique ver Eecke[125], il est vrai qu'on peut déduire un tel résultat de la proposition 6 du livre II des *Eléments*[126]. D'autre part, nous avons déjà vu que, sous une forme plus générale, la solution de ce problème fournit un diorisme pour l'application elliptique d'une aire[127].

8.4.3 La démonstration de la proposition I.34

Dans le cas des coniques à centre, Apollonius fonde également sa démonstration sur ce même diorisme pour l'application elliptique d'une aire.

La proposition I.34 énonce ainsi :

> Si l'on prend un point sur une hyperbole, sur une ellipse ou sur une circonférence de cercle ; si, de ce point, l'on abaisse une droite de manière ordonnée sur le diamètre, et si des segments du côté transverse ont même rapport que celui que possèdent entre elles les droites qui sont découpées, à partir des extrémités du côté transverse de la figure, par la droite menée de manière ordonnée, de telle sorte que les segments situés du côté du sommet soient homologues, la droite qui relie le point pris sur le côté transverse

---

[123] Paul ver Eecke prend la peine d'ailleurs de développer l'argument d'Apollonius. Cf. [Apollonius(1959), p. 61-62]. Cet argument apparaissait déjà dans la démonstration de la proposition 22 du livre I qui énonce :

> Lorsqu'une droite, située entre deux diamètres [conjugués], coupe une ellipse, son prolongement coupera chacun de ces diamètres en dehors de la section.

Cf. [Apollonius(1959), p. 47].

[124] Cf. *supra* [section 8.1.2, p. 261].

[125] Cf. [Apollonius(1959), p. 61-62].

[126] De façon moderne, en posant $\mathsf{EI} = x$ et $\mathsf{CE} = b$, cela revient à écrire la quantité $bx - x^2$ sous la forme $(\frac{b}{2})^2 - (x - \frac{b}{2})^2$. On aura reconnu le problème géométrique élémentaire du rectangle de périmètre donné qui possède l'aire la plus grande.

[127] Cf. *supra* [section 8.1.2, p. 261] et [Euclide(1990-2001), II, p. 226].

et le point pris sur la section sera tangente à la section. [128]

Voici la démonstration d'Apollonius qui consiste en une réduction par l'absurde.

Soit E un point du diamètre d'une conique à centre pris à l'extérieur de la courbe et tel que

$$\mathsf{ED} : \mathsf{ED}' = \mathsf{DC} : \mathsf{CD}', \tag{8.51}$$

où C est le pied de l'ordonnée issue de du point B au diamètre DC[129].

Supposons qu'un point O de la droite EB tombe à l'intérieur de la conique. Traçons les deux droites parallèles à la droite EB passant par D et D' qui coupent CB et IB respectivement en F, G et K, L. Soit H le point d'intersection de la droite DF avec la droite $\mathsf{D}'\mathsf{B}$.

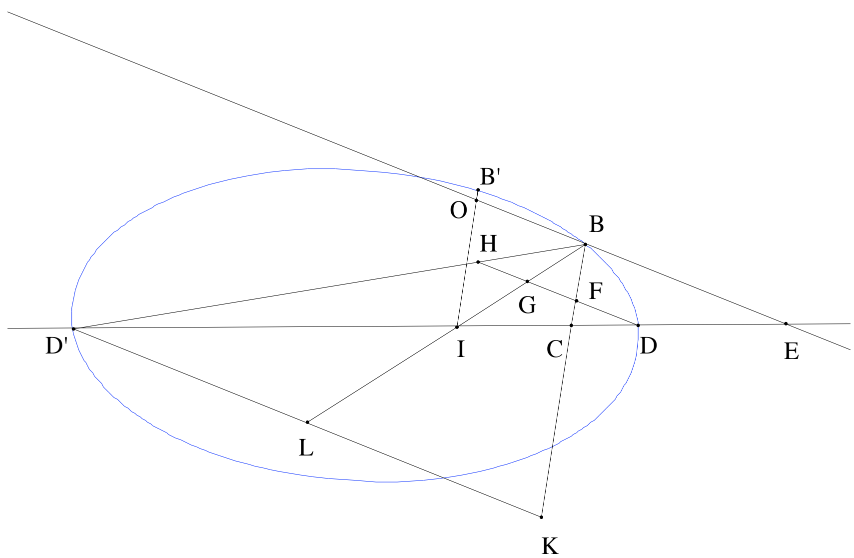

FIG. 8.7 – La tangente à une conique à centre selon Apollonius : Proposition I.35

D'après les parallèles, la proportion (8.51) peut être transformée en

$$\mathsf{BH} : \mathsf{BD}' = \mathsf{FD} : \mathsf{D}'\mathsf{K} \tag{8.52}$$

[128] Cf. [Apollonius(1959), p. 62-64] et [Apollonius(1896), p. 26-27].

[129] Nous modifions les notations d'Apollonius en adoptant celles que nous avons employées précédemment pour présenter la méthode de Fermat.

D'autre part,

$$\mathsf{BH} : \mathsf{BD'} = \mathsf{FH} : \mathsf{D'K}. \tag{8.53}$$

On déduit ainsi

$$\mathsf{FD} = \mathsf{FH}. \tag{8.54}$$

et F est le milieu de DH.

Mais alors

$$Rect(\mathsf{DF}, \mathsf{FH}) > Rect(\mathsf{DG}, \mathsf{GH}) \tag{8.55}$$

soit

$$\mathsf{FH} : \mathsf{GH} > \mathsf{DG} : \mathsf{DF} \tag{8.56}$$

et d'après les parallèles

$$\mathsf{D'K} : \mathsf{D'L} > \mathsf{DG} : \mathsf{DF} \tag{8.57}$$

soit

$$Rect(\mathsf{D'K}, \mathsf{DF}) > Rect(\mathsf{D'L}, \mathsf{DG}). \tag{8.58}$$

et

$$Rect(\mathsf{D'K}, \mathsf{DF}) : Quad(\mathsf{EB}) > Rect(\mathsf{D'L}, \mathsf{DG}) : Quad(\mathsf{EB}). \tag{8.59}$$

En usant de triangles semblables, cette inégalité devient

$$Rect(\mathsf{D'C}, \mathsf{DC}) : Quad(\mathsf{EC}) > Rect(\mathsf{D'I}, \mathsf{ID}) : Quad(\mathsf{EI}). \tag{8.60}$$

soit

$$Rect(\mathsf{D'C}, \mathsf{DC}) : Rect(\mathsf{D'I}, \mathsf{ID}) > Quad(\mathsf{EC}) : Quad(\mathsf{EI}). \tag{8.61}$$

Or, d'après la proposition 21 du Livre I des *Coniques*, on a

$$Quad(\mathsf{BC}) : Quad(\mathsf{B'I}) > Quad(\mathsf{EC}) : Quad(\mathsf{EI}) \tag{8.62}$$

et en usant de triangles semblables, on déduit

$$Quad(\mathsf{BC}) : Quad(\mathsf{B'I}) > Quad(\mathsf{BC}) : Quad(\mathsf{OI}). \tag{8.63}$$

D'où la contradiction.

Il est clair que la démonstration d'Apollonius dans le cas plus compliqué des coniques à centre est de même nature que celle qu'il donne pour la tangente à la parabole. Le géométre alexandrin use ainsi du même diorisme que nous traduisons par une propriété d'*extremum*. Pour ce faire, il emploie ce qu'on pourrait nommer un lemme qui lui permet d'introduire le milieu F du segment DH. D'autre part, l'inégalité (8.61) fait clairement apparaître une propriété d'*extremum* du rapport $Rect(\mathsf{D'I}, \mathsf{ID}) : Quad(\mathsf{EI})$ qui est atteint lorsque le point I concide avec le point C. La différence entre les deux démonstrations d'Apollonius pour la parabole et les coniques à centre tient au fait que dans le second cas il doit employer la théorie des proportions et les droites parallèles de la figure pour se ramener à la configuration du milieu et au diorisme associé.

Avec les remarques précédentes, on peut à présent interpréter la démarche d'Apollonius[130] dans les deux démonstrations précédentes comme une *analyse trans-configurationnelle* [131] qui transforme le problème de la détermination de la tangente à une conique en un problème de diorisme pour un problème de section d'une droite donnée.

Par « analyse trans-configurationnelle », j'entends qu'Apollonius transforme non seulement le problème des tangentes mais encore la configuration géométrique qui lui est associée, en introduisant de fait une nouvelle figure, celle du segment associé au problème de section, où n'apparaît plus la section conique. D'autre part, il transforme un problème positionnel — celui des tangentes — en un problème qualitatif —celui d'*extremum* —. Chez les Géométres Grecs, ce dernier problème conserve néanmoins un aspect positionnel qui tient à la situation des points. Cet aspect qualitatif disparaîtra au dix-septième siècle dès lors que le formalisme de l'algèbre permettra de se dispenser de figures[132].

Ainsi, le cas de la tangente à la parabole correspondrait au diorisme du problème de section suivant : déterminer un point I sur une droite donnée ED « à l'extérieur » du point D tel que le rapport $Rect(\mathsf{ED}, \mathsf{DI}) : Quad(\mathsf{EI})$ ait une valeur donnée. D'autre part, le cas des coniques à centre correspondrait au diorisme du problème de section consistant à déterminer un point I sur

[130]Roshdi Rashed a proposé récemment dans une conférence [Rashed(2006)], dont il nous a aimablement fourni le texte, l'idée que la notion de division harmonique serait à la base des démonstrations d'Apollonius sur les tangentes. Il considère ainsi qu'Apollonius aurait pu parvenir à cette conception en considérant le cas du cercle. Cf. [Rashed(2006), p. 8]. L'interprétation qui suit reprend cette même idée bien que sous une autre forme.

[131]J'emprunte ce terme à Marco Panza et interprète la notion associée à ce terme dans un sens légérement différent de celui qui apparaît dans [Panza(2007), p. 31-35]. Cette interprétation me semble néanmoins suggérée naturellement par l'Auteur.

[132]Pour une analyse de ces questions, cf. également [Panza(2007), p. 52-54].

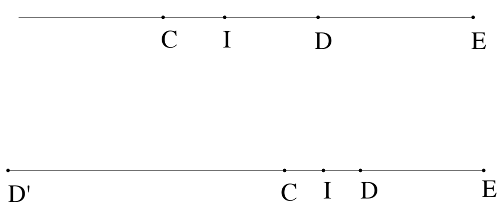

FIG. 8.8 – La section déterminée d'une ligne

droite donnée contenant trois points donnés E, D et D' tel que le rapport $Rect(\mathsf{D'I}, \mathsf{ID}) : Quad(\mathsf{EI})$ ait une valeur donnée.

Bien qu'une telle reconstruction soit purement conjecturale, il nous semble qu'un tel raisonnement est plausible de la part d'Apollonius. On trouve en effet dans le traité aujourd'hui perdu de *La section déterminée* des problèmes de même nature que ceux que nous venons d'évoquer. En effet, bien que le traité soit perdu, de nombreux lemmes de Pappus qui lui sont consacrés dans le Livre VII de la *Collection Mathématique*[133] permettent de préciser son contenu. Robert Simson a ainsi proposé à l'aide de ces informations une restitution du traité[134] comme plus tôt Snellius en 1608[135].

Le problème général du traité de *La section déterminée* consiste à couper une droite donnée contenant quatre points donnés A, B, Γ et Δ en un point X tel que le rapport des deux rectangles $Rect(\mathsf{AX}, \mathsf{BX}) : Rect(\Gamma\mathsf{X}, \Delta\mathsf{X})$ ait une valeur donnée $\alpha : \beta$ ce qui revient algébriquement à résoudre une équation quadratique de la forme

$$(a + x)(b + x) = k(c + x)(d + x). \tag{8.64}$$

Pour résoudre ces problèmes de section qui font intervenir des rectangles

[133] Cf. [Pappus(1982), II, p. 530-596].

[134] Cf. [Simson(1776), p. 1-373]. Pour une description du traité d'Apollonius, cf. [Zeuthen(1886), p. 195-202], [Zeuthen(1919), p. 48-50], [Heath(1981), II, p. 180-181] et [Pappus(1986), II, p. 514-522].

[135] Cf. [Snellius(1608)]. Sur les restitutions des textes perdus d'Apollonius par Snellius, cf. la thèse de Liesbeth de Wreede consacrée à l'œuvre mathématique de Snellius [de Wreede(2007), p. 60-69].

et des carrés, il suffit d'employer les propositions 5 et 6 du Livre II des *Éléments* d'Euclide. On retrouve ainsi le même cadre démonstratif que nous venons de mettre en évidence pour la détermination des tangentes : l'algèbre géométrique et l'application des aires.

Pour traiter ces problèmes, Apollonius opère une subdivision en 9 problèmes, eux-mêmes subdivisés en différents cas, selon l'éventuelle coïncidence des points donnés de la droite et la position du point X par rapport aux points donnés[136]. Parmi ces neuf problèmes, le cinquième correspond au problème de section obtenu pour la détermination de la tangente à l'ellipse.

Plus précisément, en se donnant pour ordre des points sur la droite donnée A, B, X et Γ, Apollonius propose de déterminer le point X tels que les rapports suivants aient une valeur donnée :

$$\begin{aligned} Rect(\mathsf{AX},\mathsf{BX}) &: Quad(\mathsf{\Gamma X}), && (8.65)\\ Rect(\mathsf{AX},\mathsf{\Gamma X}) &: Quad(\mathsf{BX}), && (8.66)\\ Rect(\mathsf{BX},\mathsf{\Gamma X}) &: Quad(\mathsf{AX}), && (8.67)\end{aligned}$$

Ainsi le troisième cas de ce problème est le même que le problème de section obtenu pour la détermination de la tangente à l'ellipse. Malheureusement, Pappus ne donne aucun lemme renvoyant à ce cas mais précise néanmoins que le diorisme de ce problème apparaît dans une proposition séparée[137]. Une telle coïncidence permet de corroborer une hypothèse déjà formulée par Hieronymus Zeuthen et Alexander Jones selon laquelle les problèmes des trois traités des sections d'Apollonius — *La section d'aire*, *La section du rapport* et *La Section déterminée* — avaient pour objet la théorie des coniques[138].

Il est d'autant plus remarquable que Fermat opère bien plus tard une

[136] Alexander Jones donne un *synopsis* du traité à partir de la restitution de Simson [Pappus(1986), II, p. 515-516].

[137] Cf. [Pappus(1986), II, p. 515-516]. Pour le texte de Pappus concerné, cf. [Pappus(1986), I, p. 90 et 194] et [Pappus(1982), II, p. 483 et 596].

[138] Cf. [Pappus(1986), II, p. 522-527] et [Zeuthen(1886), p. 343-365]. Cf également [Zeuthen(1919), p. 40-50] pour une présentation de ces traités des *Sections* d'Apollonius. On sait qu'au dix-septième siècle, le cas particulier dans le problème du traité de *La section déterminée* où le rapport de section est égal à 1, qui est traité par Apollonius, prendra une importance particulière. Cest la théorie projective de l'involution de Desargues. Cette seconde lecture du traité de *La section déterminée* est développée par Zeuthen dans [Zeuthen(1886), p. 195-202] et apparaît également dans l'interprétation de Roshdi Rashed du concept de tangente chez Apollonius : [Rashed(2006)].

relation entre sa méthode de recherche d'*extremum* et le traité de *La section déterminée* comme nous allons le voir[139].

8.4.4 La démonstration de la proposition I.35

La démonstration de la proposition réciproque I.35 se déduit de la démonstration[140] de la proposition I.33 et en particulier de la propriété d'égalité de la sous-tangente au double de l'abscisse du point considéré par une nouvelle réduction à l'absurde, qui ne s'appuie en fait que sur la définition classique de la tangente comme droite touchant une courbe sans la couper.

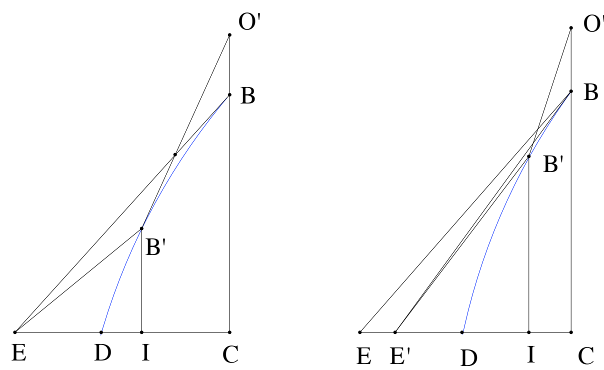

FIG. 8.9 – La tangente à la parabole selon Apollonius : Proposition I.35

Supposons d'une part que la tangente EB ne vérifie pas l'égalité $\mathsf{ED} = \mathsf{DC}$. Soit I le point du diamètre tel que $\mathsf{ED} = \mathsf{DI}$ d'ordonnée IB'. La droite EB' est tangente à la parabole d'après la proposition I.33 et tombe donc à l'extérieur de celle-ci. Elle rencontre donc la droite EB. Mais alors, les droites EB et EB' coïncident, ce qui contredit l'hypothèse initiale sur la tangente EB.

Apollonius ne donne pas de justification de ce fait. On peut dire par exemple qu'étant tangente et donc extérieure à la parabole, la droite EB' coupera l'ordonnée CB en un point O' situé « au dessus » du point B et donc rencontrera bien la droite EB du fait que les points B' et O' sont situés de part

[139] Cf. *infra* [section 8.4.6, p. 299].

[140] Heath ne prend pas la peine de l'indiquer.

et d'autre de la droite EB. On peut remarquer que le même argument peut être appliqué à la tangente EB. Cet argument tient à la définition classique de la tangente comme la droite qui touche la courbe sans la couper. Celle-ci implique l'unicité de la tangente tirée d'un point à la parabole — ou à une conique —, du moins bien sûr à la demi-parabole, ce qui est toujours implicite dans un tel raisonnement chez les géomètres Grecs du fait de la symétrie de la figure[141].

Supposons d'autre part qu'on puisse placer dans l'espace entre la tangente EB et la courbe une droite $\mathsf{BE'}$. Soit I le point du diamètre tel que $\mathsf{E'D} = \mathsf{DI}$ d'ordonnée $\mathsf{IB'}$. La droite $\mathsf{E'B'}$ est tangente à la parabole d'après la proposition I.33 et tombe donc à l'extérieur de celle-ci. Elle rencontrera donc la droite $\mathsf{E'B}$[142] et les droites seront confondues, d'où la contradiction.

8.4.5 La notion de tangente chez Euclide et Apollonius

Le parallélisme de structure entre les propositions du Livre I des *Coniques* d'Apollonius qui caractérisent la tangente à une conique comme découpant sur le diamètre à partir du sommet un segment égal à un segment donné, et les propositions du Livre III des *Eléments* d'Euclide qui caractérisent la tangente au cercle comme perpendiculaire au diamètre au point de contact est clair.

Après une première proposition établissant une condition suffisante pour être la tangente, selon une même définition— « tomber à l'extérieur de la courbe » —, démontrée selon une réduction à l'absurde, suit une proposition réciproque[143] démontrée également par l'absurde. L'existence une fois établie, apparaît une seconde considération relative à l'unicité de la tangente[144] : le fait qu'une autre droite ne puisse être intercalée entre la tangente ainsi caractérisée et la courbe.

Le mode de démonstration par l'absurde provient naturellement de la définition de la tangente chez Apollonius qui est la même que celle d'Eu-

---

[141] C'est par exemple le cas du cercle dans Euclide. Cf. le commentaire de Vitrac aux propositions 17 du livre III consacrée à la tangente au cercle : [Euclide(1990-2001), II, p. 428].

[142] Il s'agit du même argument que précédemment.

[143] En fait, deux propositions réciproques partielles dans le cas d'Euclide. Cf. les propositions 18 et 19 du Livre III : [Euclide(1990-2001), II, p. 428-430].

[144] Cf. le commentaire de Bernard Vitrac dans le cas d'Euclide : [Euclide(1990-2001), II, p. 426].

clide dans le cas du cercle. D'ailleurs, il nous paraît important de remarquer qu'on retrouve encore cette même définition classique dans l'Écrit de Fermat consacré à la tangente à la parabole.

Néanmoins, au delà du parallélisme entre les deux structures des propositions chez Euclide et Apollonius portant sur la tangente, qui tient à une définition commune de la tangente chez l'un et l'autre, une différence d'importance apparaît sur le plan conceptuel. Si Euclide a caractérisé la tangente au cercle comme perpendiculaire au diamètre — donc à une droite *minimum*, qui apparaît, dans ce cas, « naturellement » comme la première, Apollonius, dans le Livre I, a, au contraire, caractérisé la tangente à une conique *indépendamment* de la considération des droites *minimum*, par la détermination du segment sur l'axe tiré du sommet et intercepté par la tangente.

Il a ainsi rappelé que la tangente au cercle, comme celle à l'hyperbole ou à l'ellipse, pouvait être caractérisé par une proportion déterminant le segment ED[145]. Il s'agit de la proportion $\mathsf{ED} : \mathsf{EN} = \mathsf{DC} : \mathsf{CN}$ qu'emploiera Apollonius au Livre II dans la proposition 49 pour donner une construction de la tangente issue d'un point du plan à une hyperbole ou une ellipse, en distinguant la position de ce point par rapport à la conique à centre[146], ne considérant d'ailleurs pas à cette occasion le cas du cercle, sans doute par souci d'éviter la pédanterie d'introduire une construction bien plus complexe que celle présentée par Euclide dans les *Eléments*.

Ce n'est qu'au livre V des *Coniques* qu'Apollonius démontrera, comme Euclide dans le cas du cercle, que la droite *minimum* et la tangente en un point d'une conique sont perpendiculaires, établissant ainsi qu'une théorie des tangentes est équivalente à une théorie des droites *minimum* menées à une conique. Apollonius ne prendra d'ailleurs pas la peine à cette occasion de mentionner le cas du cercle comme il l'avait fait au Livre I dans le cas des tangentes. N'avait-il pas reconnu que c'était précisément de cette façon que la tangente et la normale au cercle avaient été traitées au Livre III des *Eléments*, ce qui rendait donc inutile et redondante une telle considération au sein du Livre V, qui, à l'inverse des quatre premiers Livres des *Coniques*, ne présentait plus des Eléments mais bien des recherches nouvelles.

---

[145]Nous revenons sur cette question dans le chapitre suivant. Cf. *infra* la Figure 9.3, p. 320. Cf. [Apollonius(1959), p. 62-64] et [Apollonius(1896), p. 26-27].

[146]Cf. [Apollonius(1959), p. 163-169] et [Apollonius(1896), p. 73-76].

8.4.6 Fermat et Apollonius

On aura reconnu, il nous semble clairement, dans notre reconstruction de la démonstration de la proposition 33 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius la première analyse donnée par Fermat dans son application de la Méthode d'*extremum* à la détermination de la tangente à la parabole. Cette analyse apparaît ainsi comme le résultat de la modification d'une démonstration par réduction à l'absurde en une analyse trans-configurationnelle[147] qui transforme un problème géométrique positionnel de détermination d'une tangente, en supposant que la tangente est donnée, en un problème algébrique quantitatif de recherche d'*extremum* d'un rapport.

Une telle modification est rendue possible principalement pour deux raisons : d'une part, la possession par Fermat d'une méthode de détermination d'*extremum* fondée sur un outil arithmético-algébrique puissant : la méthode d'adégalisation, d'autre part, la reprise par Fermat — qu'elle soit le résultat ou non d'une lecture — de la démonstration de la proposition 33 du Livre I d'Apollonius d'où peut être tirée une telle analyse, la condition d'*extremum* du rapport y apparaissant de façon implicite.

Ces deux raisons renvoient la première à un art : l'algèbre, la seconde à une théorie : la théorie des coniques d'Apollonius. Mais l'analyse trans-configurationnelle initiale de Fermat qui doit garantir la correspondance entre géométrie et algèbre pose un problème qui sera mis en exergue par Descartes dans ses critiques : géométriquement particulière et non générale, comme par exemple l'analyse trans-configurationnelle qui sous-tend la méthode des normales de Descartes, elle dépend essentiellement des propositions d'Apollonius du Livre I consacré aux tangentes.

Le rapport dont on considérera l'*extremum* ne correspond ainsi pas à un problème géométrique à la fois général, signifiant et bien déterminé. Au contraire, si une généralisation de l'argument de Fermat est bien possible, comme l'a remarqué Duhamel, elle perd complétement pied avec la réalité géométrique d'origine du problème des tangentes. En effet, rechercher l'*extremum* d'un rapport du type $\frac{y^n}{f(x)}$ pour une courbe d'équation $y^n = f(x)$ n'a plus qu'une signification analytique et non géométrique.

De surcroît, la puissance de la méthode d'adégalisation conduira Fermat dans la suite à mettre de côté son interprétation originelle du problème des tangentes en termes d'*extremum* : dès lors, le rapport heuristique de la méthode d'invention des tangentes de Fermat au Livre I des *Coniques*

[147] Cf. *supra* [section 8.4.3, p. 293].

d'Apollonius aura disparu[148].

L'ensemble des critiques de Descartes découleront ainsi du rapport entre algèbre et géométrie au sein de la Méthode de Fermat. En effet, il semble que le géométre toulousain, à l'inverse de Descartes, ne pose pas pour principe un accord de l'art de l'Algèbre à la théorie de la Géométrie. En un sens paradoxalement, bien qu'elle présente une origine géométrique, la méthode de Fermat basculera à terme dans le domaine de l'Algèbre et, plus tard, dans celui de l'Analyse, chez Newton et Leibniz, du fait de la puissance de la méthode d'adégalisation.

D'autre part, comme on l'a vu auparavant, l'élément clef de la démonstration d'Apollonius constitue le premier exemple traité par Fermat dans l'écrit consacré à sa Méthode d'*extremum* qu'il relie à sa Méthode des tangentes[149]. Ainsi apparaît nous semble-t-il un nouvel indice de l'inspiration apollinienne de Fermat. Cet indice permet de rendre compte du choix par Fermat du premier exemple pour appliquer sa Méthode d'*extremum* dans le premier écrit envoyé à Descartes : un tel résultat, bien qu'apparemment extérieur au problème de la tangente à la parabole, est en effet employé par Apollonius lui-même dans la résolution qu'il donne de ce même problème au sein des *Coniques*.

Un autre élément de ressemblance entre la démarche de Fermat et celle d'Apollonius tient à la relation qu'opère le géomètre toulousain entre sa méthode de recherche d'*extremum* et le traité d'Apollonius de *La section déterminée*. Dans un second écrit de 1638 sur *extremum* et tangente diffusé à titre d'éclaircissement[150], il écrit ainsi :

> Pour établir la certitude de cette méthode, je prendrai un exemple du Livre d'Apollonius, *De la section déterminée*, lequel au rapport de Pappus (Livre VII, commencement[151] renfermait des limitations [*i.e.* diorismes] difficiles et notamment celle qui suit et que je considère comme la plus difficile. Pappus (Livre

[148]Ce dont témoigne le fait que, quelques années plus tard en 1655, Wallis en utilisant une méthode des tangentes relevant du calcul infinitésimal écrira dans [Wallis(1655b)] : « Estque hæc nostra demonstratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliisque, [...] afferuntur ». Cf. [Wallis(1655b), p. 322].

[149]Fermat a considéré cette question dans un autre écrit postérieur intitulé également *Méthode du maximum et du minimum*. Cf. [Fermat(1640b)]. On peut consulter l'étude que Mahoney donne de cet écrit : [Mahoney(1994), p. 153-154].

[150]Cf. *supra* [section 8.1.5, p. 268].

[151]Cf. [Pappus(1982), II, p. 482].

> VII)[152] la suppose trouvée et, sans la démontrer vraie, la regarde comme telle et en tire d'autres conséquences. En cet endroit, Pappus appelle un rapport minimum $\mu o \nu \alpha \chi \grave{o} \nu$ $\kappa \alpha \grave{\iota}$ $\epsilon \lambda \acute{\alpha} \chi \iota \sigma \tau o \nu$ (singulier et minimum), parce que, si l'on propose une question sur des grandeurs données, et qu'elle soit en général satisfaite par deux points, pour les valeurs maxima et minima, il n'y aura qu'un point qui satisfasse. C'est pour cela que Pappus appelle *minimum* et *singulier* (c'est-à-dire unique) le plus petit rapport de tous ceux qui peuvent être proposés dans la question. Commandin doute en cet endroit de la signification du terme $\mu o \nu \alpha \chi \grave{o} \nu$ qu'emploie Pappus, parce qu'il ignore la vérité que je viens d'expliquer.
>
> Voici la proposition. — *Soit une droite donnée* OMID *et sur cette droite quatre points donnés* O*,* M*,* I*,* D[153]*. Il faut diviser le segment* MI *en un point* N*, en sorte que*[154] *le rapport du rectangle* OND *au rectangle* MNI *soit plus petit que le rapport d'un rectangle semblable quelconque* OND *à un autre quelconque* MNI.[155]

Fermat donne ensuite la solution du problème cité[156] puis la tangente à l'ellipse[157].

Il importe enfin de remarquer l'interprétation que donne Fermat d'un *extremum* en termes de racine double sur laquelle nous avons déjà insisté auparavant[158]. Une telle interprétation laisse penser que Fermat était parfaitement conscient de la parenté conceptuelle entre sa méthode et celle de Descartes.

---

[152] Il s'agit de la proposition 61 du Livre VII. Cf. [Pappus(1982), II, p. 584-586].

[153] Les points sont donnés dans cet ordre donc il est inutile de donner la figure.

[154] Je modifie la traduction de Tannery.

[155] Cf. [Fermat(1638a), p. 142 resp. (p. 127)]. On retrouve une mention de *La section déterminée* et du problème associé suivi d'une solution dans l'écrit postérieur [Fermat(1640b), p. 147-148, 151-152 resp. (p. 131, 134-135)].

[156] Cf. [Fermat(1638a), p. 142-144 resp. (p. 128-129)]. Pour une étude comparée de ce problème chez Apollonius et Fermat, cf. [Hofmann(1963)]. Cf. également [Bachmakova(1966), p. 301-302] et [Mahoney(1994), p. 150-152].

[157] Cf. *supra* [section 8.1.5, p. 268].

[158] Cf. *supra* [section 8.1.3, p. 262].

Chapitre 9

La controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'examiner la controverse entre Descartes et Fermat sur les tangentes[1] depuis la publication de la *Géométrie* de 1637 jusqu'aux questions de Debeaune, soit, environ durant les six premiers mois de l'année 1638.

Dans une premier temps, nous étudierons les critiques apportées par Descartes sur la méthode des tangentes que Fermat prétend déduire de sa méthode de recherche d'*extremum*. Pour ce faire, nous emploierons une perspective fondée sur notre discussion consacrée à la comparaison des théories des droites *minimum*, l'une implicite chez Euclide, dans le livre III des *Eléments* consacré au cercle, les deux autres explicites chez Apollonius et Descartes. Nous souhaitons ainsi examiner les critiques cartésiennes, qu'on a dédaignées jusqu'à présent en accusant leur auteur de mauvaise foi, au regard des théories précédemment évoquées.

Nous examinerons pour terminer la démonstration de la règle de Fermat proposée par Descartes dans sa lettre à Hardy de juin 1638. Ce dernier épisode de la controverse avec Fermat que nous étudierons, en tant qu'il constitue le point d'intersection d'un faisceau de problèmes et de discussions formé par les éléments de la controverse avec Fermat, les questions de Debeaune et la nouvelle méthode des tangentes proposée par Debeaune, nous amènera à la

[1] Sur la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat, cf. l'étude qui lui est consacrée par Gaston Milhaud :[Milhaud(1921), p. 149-175]. Cf. également la comparaison des méthodes de Fermat et Descartes par Derek Whiteside *in* [Whiteside(1960-1962), p. 356-357] et Vincent Jullien *in* [Jullien(1999), p. 327-330].

conclusion de ce chapitre.

Intéressons-nous à présent à la réception de la méthode de Fermat par Descartes.

9.1 La lettre de Descartes à Mersenne de janvier 1638

Dans une lettre à Mersenne de janvier 1638[2], Descartes développe deux séries d'arguments contre les deux premiers écrits de Fermat, consacrés à sa méthode de recherche d'*extremum* et à l'invention de la tangente à la parabole, présentée comme exemple générique de la méthode des tangentes. Le philosophe souhaitait voir cette lettre montrée à Fermat, mais Mersenne la transmit finalement seulement à Pascal et Roberval qui firent une première réponse aujourd'hui perdue[3].

9.1.1 Une application fausse de la méthode de Fermat à la tangente à la parabole

Le premier argument de Descartes renvoie à la question de la détermination de la quantité Q qui doit être prise comme *maximum* ou *minimum* pour déterminer la tangente à la parabole au point B. Cette quantité n'est en effet pas explicitée par Fermat. Or Descartes propose d'identifier cette quantité Q avec le segment variable EB tirée du point E situé sur l'axe jusqu'à la parabole, et pour variable la quantité $\mathsf{EC} = x$ dont elle dépend. La tangente sera alors le segment *maximum* parmi toutes ceux qui fournissent une valeur pour le segment EB et correspondra donc au *maximum* de la quantité algébrique $Q(x)$.

Un premier problème se pose assez rapidement quant à la façon dont on doit considérer les lignes EB sécantes à la parabole pour pouvoir parler de la tangente comme ligne *maximum.* Il est clair qu'exceptés la tangente et l'axe, une droite quelconque du faisceau issu du point E coupera la parabole en deux points B_1 et B_2. Si l'on ne rejette pas alors le segment EB_2 qui « traverse » la parabole, on ne pourra considérer la tangente comme la valeur maximale de EB car l'ensemble des valeurs de ce segment n'est naturellement pas borné.

[2]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 486-493].

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 495-496] et [Mersenne(1945-1988), VII, p. 13 et 21].

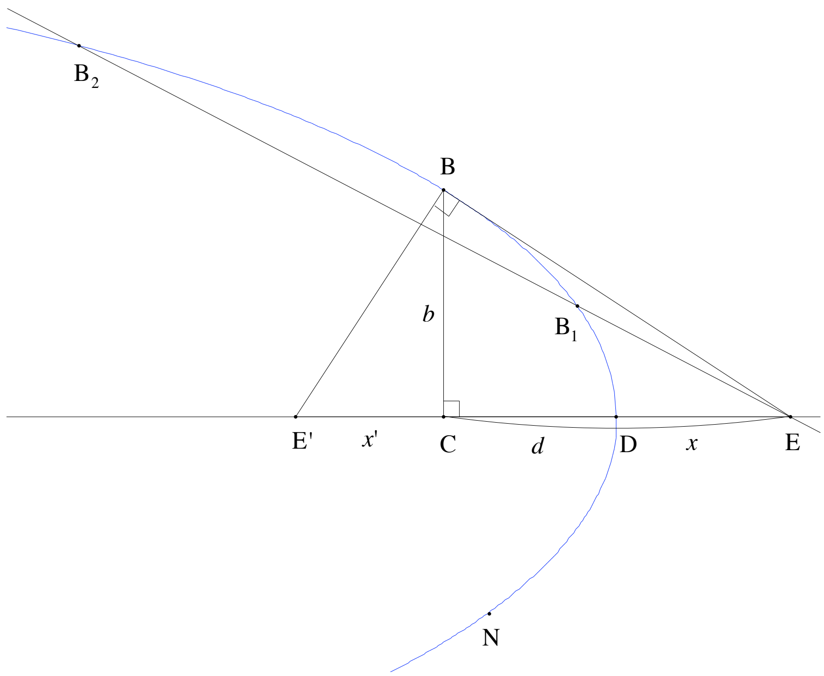

FIG. 9.1 – La critique de l'invention de la tangente à la parabole de Fermat par Descartes

Géométriquement, il faut donc s'entendre préalablement sur cette question qui sera précisément un point de controverse entre Descartes et Roberval.

Mais revenons au calcul de Descartes. Posons[4] $\mathsf{BC} = b$ et $\mathsf{CD} = d$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\mathsf{BE}^2 = \mathsf{BC}^2 + \mathsf{CE}^2 \text{ soit } (Q(x))^2 = b^2 + x^2. \tag{9.1}$$

Supposons $\mathsf{CE} = x + e$. On aura $\mathsf{CD} = d + e$ et comme le côté droit de la parabole est $\frac{b^2}{d}$, on déduira facilement que

$$(Q(x+e))^2 = \frac{b^2}{d}(d+e) + (x+e)^2. \tag{9.2}$$

Adégalant les expressions (9.1) et (9.2) et appliquant la méthode de Fermat, on trouvera alors l'équation

$$\frac{b^2}{d} + 2x = 0. \tag{9.3}$$

[4]Nous adaptons la notation de Descartes.

qui, d'après Descartes,

> ne donne point la valeur de la ligne A [x], comme assure l'auteur, & par consequent [la] regle [de Fermat] est fausse.[5]

Remarquons que cette application par Descartes de la méthode de recherche du *maximum* et du *minimum* de Fermat au problème de l'invention de la tangente à la parabole est présentée par lui comme scrupuleuse. À chaque étape du calcul, Descartes cite ainsi l'extrait du texte de Fermat correspondant. Qu'on trouve un résultat différent de celui escompté apparaît donc préjudiciable : c'est ce que souhaite montrer Descartes.

9.1.2 L'interprétation de l'*extremum* dans la méthode des tangentes

Cette interprétation de la méthode de Fermat par Descartes a été qualifiée par les mathématiciens de l'époque et par de nombreux historiens comme fausse, étonnament fausse même, et relevant ainsi d'entêtement mélé de mauvaise foi[6] Il nous semble qu'une telle interprétation, bien que ne reflétant pas les intentions de Fermat, contient néanmoins deux critiques fondées sur le plan mathématique et pas seulement rhétorique.

Tout d'abord, le calcul mis en place par Descartes a pour objectif de mettre en cause la réduction de la méthode des tangentes de Fermat à sa méthode de recherche du *maximum* et du *minimum*. Descartes écrit ainsi à la suite de son calcul :

> Mais il se mesconte encor bien plus en l'exemple de la mesme parabole, dont il tasche de trouver la contingente. *Car outre qu'il ne suit nullement sa regle, comme il paroist assés de ce que son calcul ne se rapporte point à celuy que je viens de faire* [...][7]

[5] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 488].

[6] Cf. par exemple la mention qu'en fait Itard [Itard(1948), p. 243] ainsi que le commentaire qui confine parfois à la caricature de [Mahoney(1994), p. 177-181]. Cette idée est reprise et développée par Marco Panza dans ses notes mathématiques consacrées à la présente lettre. Cf. [Descartes(2005), n. 9, p. 486-487]. Selon Gaston Milhaud, qui fait exception, « [la] sincérité [de Descartes] est hors de doute ». Plus loin, il écrit : Ainsi, dans son étude sur la controverse des tangentes [Milhaud(1921), p. 149-175], l'historien tâche de retrouver « parmi les raisons de [l'] étrange attitude [de Descartes], des besoins intellectuels, plus ou moins conscients en la circonstance, qui ne pouvaient que faire honneur à son tempérament de géométre ». Cf. [Descartes(1964-1974), p. 162].

[7] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p 488].

Cette critique de Descartes nous semble de bon droit. Bien qu'on puisse exprimer *géométriquement* le problème de la recherche des tangentes comme un problème de recherche d'une quantité *extremum*, cette interprétation n'est pas manifestée dans la solution donnée par Fermat. D'ailleurs, elle n'est pas reconnue comme telle par les mathématiciens de l'époque — y compris les partisans de Fermat comme Roberval —. Comme on l'a dit, à l'inverse du premier exemple, l'adéquation du type $Q(x) \sim Q(x+e)$ n'apparaît pas explicitement dans le calcul. La critique de la réduction de la méthode d'invention des tangentes de Fermat à sa méthode de recherche d'*extremum* apparaît donc selon nous comme l'objet premier — et justifié — de la critique de Descartes.

C'est alors qu'apparaît une question naturelle à laquelle Descartes répond par l'exemple précédent : qu'arrive-t-il si on applique strictement la méthode de recherche d'*extremum* à l'invention de la tangente à la parabole ? Il importe donc d'exhiber une quantité dont la détermination de l'*extremum* relativement à une variable x permettra de déterminer la tangente à la parabole. Le choix de Descartes consistant à identifier cette quantité avec le segment variable EB nous paraît pouvoir être expliqué au regard du résultat du calcul cartésien et renvoyer à une question que nous avons déjà évoquée précédemment : Quel est le bon « instrument de recherche » pour étudier une courbe géométrique : la normale ou la tangente ? Nous avons vu que Descartes répondait à cette question : la normale. Au contraire, Fermat paraît répondre ici : la tangente. Voyons dans quel mesure le résultat obtenu par Descartes à l'issue de son calcul donne une nouvelle réponse à cette question.

Car le résultat du calcul de Descartes n'est pas faux mais simplement mal interprété. On reconnaît sans peine l'expression de la sous-normale à la parabole[8] comptée négativement car les segments[9] $\mathsf{E'C}$ et CD sont de sens opposé. En effet, la normale est bien la ligne minimale tirée du point $\mathsf{E'}$ à la parabole et la relation de Pythagore appliquée au triangle $\mathsf{E'CB}$ conduit à un calcul identique à celui présenté par Descartes. Pour obtenir la valeur correcte de la sous-tangente, il suffit de remarquer que du fait des triangles semblables $\mathsf{BE'C}$ et BEC, on a la proportion

$$\mathsf{E'C} : \mathsf{BC} = \mathsf{BC} : \mathsf{EC} \tag{9.4}$$

qui permet d'écrire l'ordonnée du point B comme moyenne proportionnelle

[8]Gaston Milhaud faisait déjà cette remarque dans [Milhaud(1921), p. 153-154]. Cf. également [Mahoney(1994), p. 179].

[9]Cf. [figure 9.1, p. 305].

entre la sous-normale et la sous-tangente à condition que le repère soit rectangulaire, ce qu'a supposé ici Descartes, à la différence de Fermat, comme il l'avait déjà fait pour sa méthode des normales. En effet, on obtient

$$\frac{\frac{b^2}{2d}}{b} = \frac{b}{\mathsf{EC}} \quad \text{soit} \quad \mathsf{EC} = 2d = 2\mathsf{CD}. \tag{9.5}$$

Descartes pouvait-il ignorer la véritable signification de son calcul et ne pas reconnaître l'expression de la sous-normale à la parabole ? Cela nous paraît peu probable, en particulier pour ce qui concerne la seconde partie de la question. Mais alors, quel sens donner au choix de cet exemple par Descartes : une critique du choix de Fermat d'une méthode des tangentes et non des normales. Car l'exemple choisi par Descartes montre que c'est la normale et non la tangente qui apparaît « naturellement » quand on entend traiter le problème de l'étude d'une courbe géométrique par une méthode de recherche d'*extremum*, puisque la normale est une droite *minimum*.

La concurrence entre normale et tangente renvoie donc ici une fois encore à un débat sur les relations entre algèbre et géométrie qu'on a déjà évoqué au sujet de la solution par Descartes du problème de Pappus. En effet, géométriquement, il n'y a pas difficulté à caractériser la tangente comme ligne *maximum* parmi les sécantes à la courbe, en ajoutant la restriction introduite par Descartes précisant que les lignes EC devant être considérées sont celles qui ne « traversent » pas la courbe. Mais, algébriquement, il y a difficulté au contraire à écarter celles-ci, du moins si l'on s'en tient à la façon choisie par Descartes consistant à utiliser la relation de Pythagore dans les triangles rectangles dont l'hypoténuse est une sécante à la courbe, à moins de considérer non plus l'*extremum* d'un segment mais l'*extremum* d'un rapport, par exemple le rapport angulaire associé à la tangente.

Autrement dit, ce que semble vouloir montrer Descartes ici c'est que la définition géométrique de la tangente comme ligne *maximum* n'est pas algébriquement opératoire au contraire de la définition de la normale comme ligne *minimum*, comme le montrent sa méthode des normales présentée dans la *Géométrie* et son interprétation de la méthode de Fermat.

Ajoutons que la perspective évoquée par Descartes, selon notre interprétation, nous paraît également renvoyer à nouveau à la théorie des droites *minimum* présentée par Apollonius au Livre V des *Coniques* dont nous avons déjà traité dans un chapitre précédent. N'écrit-il pas dans la suite de sa lettre :

> Il est vray toutesfois que je n'y ay point mis [dans la *Géométrie*]ces termes de *maximis et minimis*, dont la raison est, qu'ils ne sont connus que par ce qu'Apollonius en a fait l'argument de son *5e Livre*, et que mon dessein n'a point esté de m'arrester à expliquer aucune chose de ce que quelques autres ont desja sceu, [...]mais seulement de passer au delà de tous costés,[10]

La méthode de Fermat pour les tangentes n'apparaîtrait ainsi aux yeux de Descartes que comme une application maladroite de sa méthode de recherche d'*extremum*, prenant malheureusement la tangente et non la normale comme « instrument de recherche » [11] pour étudier les courbes géométriques définies par une équation algébrique.

9.1.3 La comparaison de la méthode des normales et de la méthode des tangentes

Auparavant, Descartes avait établi un parallèle intéressant entre sa méthode des normales et la méthode des tangentes de Fermat :

> si on change quelque mots de la regle qu'il propose, pour trouver *maximam* et *minimam*, on la peut rendre vray et est assez bonne. [...]
>
> Mais encore que je l'aurrois [la règle de Fermat] ignorée, et que luy l'aurroit parfaitement sceue, il ne me semble pas qu'il eust pour cela aucune raison de la comparer avec celle qui est en ma *Geometrie*, touchant le premier sujet.
>
> Car premierement la sienne [...] est telle que, sans industrie et par hazard, on peut aisement tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer, lequel n'est autre chose qu'une fausse position, fondée sur la façon de demonstrer qui reduit a l'impossible [...]
>
> Au lieu que la mienne est tirée d'une connoissance de la nature des equations, qui n'a jamais esté, que je sçache, assés expliquée ailleurs que dans le *troisieme Livre* de ma *Geometrie*. De sorte qu'elle n'eust sceu estre inventée par une personne qui aurroit

[10] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 491].

[11] Je reprends ici le termes d'Enrico Giusti. Cf. *supra* [Introduction Générale, n. 27, p. 21] et [chapitre 5, p. 160].

> ignoré le fonds de l'Algebre ; et elle suit la plus noble façon de demonstrer qui puisse estre, à sçavoir celle qu'on nomme *a priori.*
>
> Puis outre cela, sa regle pretendue n'est pas universelle comme il luy semble, et elle ne se peut estendre à aucune des questions qui sont un peu difficiles [...][12]
>
> au lieu que la mienne s'estend generallement à tous ceux qui peuvent tomber sous l'examen de la Geometrie ; non seulement en ce qui regarde les contingentes des lignes courbes, mais il est aussi fort aysé de l'appliquer à trouver *maximas* et *minimas*, en toute autre sorte de problemes.[13]

Suivons l'argument de Descartes. La comparaison qu'il établit ici entre sa méthode et celle de Fermat nous semble opérer une distinction répondant à celle qu'avait initiée le géomètre toulousain par l'envoi de deux écrits distincts, le premier donnant une règle de recherche d'*extremum*, le second présentant une méthode des tangentes qu'il prétendait réduite à sa première règle. Car il nous semble assez clair que dans le texte précédent, Descartes considère la méthode d'adégalisation de Fermat, et qu'il oppose à celle-ci sa méthode des coefficients indéterminés.

Ainsi, la comparaison et la critique de Descartes procèdent de la reconnaissance d'une triple opposition entre sa méthode et celle de Fermat : normale contre tangente, racine double contre *extremum*, méthode des coefficients indéterminés contre méthode d'adégalisation. Si, dans un premier temps, Descartes, comme on a essayé de le mettre en évidence, a voulu démontrer qu'en admettant la règle de Fermat, la tangente n'était pas l'instrument de recherche naturel pour étudier les courbes géométriques en considérant un problème d'*extremum*, dans un second temps, nous voyons que dans le texte précédent il critique cette fois-ci la méthode des tangentes elle-même sur deux points.

D'une part, à la différence de la méthode des normales, elle ne s'applique pas à des questions « qui sont un peu difficiles » où l'on ne dispose pas d'équation explicite du type $y^n = P(x)$ comme dans le cas de la tangente au *folium* d'équation $x^3 + y^3 = nxy$ que Descartes propose à la suite dans cette même lettre en défi à Fermat[14]. Nous avons vu que cette critique était

[12]Descartes propose ensuite l'exemple de la tangente au *folium.* Cf. *supra* [note 11, p. 164].
[13]Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 490-491].
[14]Cf. par exemple *supra* [note 11, p. 164].

injustifiée[15]. Fermat donnera en effet sans difficultés la tangente au *folium* dans un écrit ultérieur annexé à une lettre à Mersenne de juin-juillet 1638 où il détaille à nouveau sa méthode[16].

D'autre part, et c'est ce que démontrera dans la suite Descartes lorsqu'il proposera une démonstration de la règle de Fermat dans la lettre à Hardy de juin 1638[17], la règle de recherche d'*extremum* se réduit selon lui au même fondement que la méthode des normales, puisqu'on peut interpréter un *extremum* comme une racine double.

9.2 L'écrit contre Roberval et Pascal du 1^er^ mars 1638

La lettre précédente, comme on le sait, ne fut pas communiquée à Fermat par Mersenne, mais d'abord à Roberval et Etienne Pascal qui prirent la défense de Fermat contre Descartes. Après un premier écrit de ces derniers, perdu, adressé à Descartes, s'ensuivirent une réplique de Descartes annexée à une lettre à Mydorge, datée par Adam et Tannery du 1^er^ mars 1638[18], puis une réponse de Roberval d'avril 1638[19].

Descartes avait voulu faire part de l'ensemble des pièces du procès au sujet des tangentes entre lui et Fermat à Mydorge, mais aussi à Hardy[20], et plus tard à Debeaune[21].

Sauf à postuler que Descartes se moqua de tous ceux-là, la thèse de la mauvaise foi nous semble donc difficile à tenir, du moins pour l'intégrité de la controverse. De surcroît, elle apparaît comme une explication psychologique souvent invoquée — la morgue de Descartes — extrinsèque et non intrinsèque qui témoignerait d'un débat mathématique et non uniquement polémique.

L'écrit de Descartes contre Roberval et E. Pascal se compose de deux parties. Dans une première partie[22], Descartes répond à une critique qu'avaient semble-t-il adressé Roberval et Pascal sur sa définition de la tangente

[15] Cf. *supra* [section 8.2.2, p. 272].
[16] Cf. [Fermat(1638b), p. 156-157 (resp. p 327-328)].
[17] Cf. *infra* [section 9.5, p. 336].
[18] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 1-13].
[19] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 103-115].
[20] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 22].
[21] Cf. *infra* [section 10.4.3, p. 362].
[22] Cf. [Descartes(1964-1974), p. 2-3].

comme ligne maximale, tandis que dans la deuxième partie il revient sur l'inégalité (8.5)[23].

Sa réponse dans la première partie de l'écrit est double. D'une part, la ligne tangente EB est définie comme la ligne maximale parmi les sécantes tirées du point E, d'autre part les lignes EB_2 qui « traversent » la parabole ne doivent pas être considérées. Descartes vise ainsi à rappeler qu'une telle définition géométrique de la tangente est tout à fait correcte.

Dans sa lettre contre Descartes d'avril 1638, Roberval critiquera à nouveau cette définition de la tangente comme ligne maximale et l'interprétation cartésienne de la réduction de la méthode des tangentes de Fermat à la méthode de recherche d'*extremum*, considérant que les restrictions énoncées par Descartes quant aux lignes traversant la parabole n'ont pas de sens[24]. Nous laissons pour le moment de côté la seconde discussion qui donnera lieu à un développement intéressant sur la tangente au cercle. Notons en revanche que dans sa remise en cause de la tangente comme ligne maximale, Roberval paraît ignorer la réduction pourtant revendiquée par Fermat de sa méthode des tangentes à sa méthode de recherche d'*extremum*, puisqu'il écrit :

> [...] pour trouver la plus grande, Monsieur de Fermat a employé le raisonnement propre pour la plus grande ; et que pour trouver les touchantes, il a employé le raisonnement propre pour les touchantes, n'abusant pas du mot de plus grande pour celuy de touchante [...][25]

Descartes écrit ensuite dans sa lettre contre Roberval et Pascal :

> Et je dirai seulement que, cette règle estant corrigée comme elle doist estre, le vray moyen de l'appliquer à l'invention des contingentes des lignes courbes est de chercher ainsy le point E, duquel l'on puisse tirer une ligne jusques à B, qui soit la plus grande *ou la plus petite*[26] qu'on puisse tirer du mesme point E jusques à la ligne courbe donnée. Ce que M^r de Fermat tesmoigne n'avoir point sceu, puisqu'il en use d'une autre façon, en cherchant la tangente de la parabole, à savoir d'une façon en laquelle (pour nommer les choses par leur nom, et sans avoir pour cela aucun

[23]Cf. *supra* [p. 265].
[24]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 105-107].
[25]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 107].
[26]C'est moi qui souligne.

> dessein de l'offenser) il se trouve un paralogisme, qui ne peut en aucune façon estre excusé.[27]

Le fait qu'en énonçant la façon dont doit être appliquée la règle de Fermat de recherche d'*extremum* au problème des contingentes, Descartes n'indique pas seulement la ligne EB comme la plus grande mais aussi comme la ligne *minimum* nous paraît devoir être mis en exergue. Cette déclaration de Descartes pourrait en effet être comprise comme une allusion à l'interprétation correcte du résultat obtenu en usant de la règle de Fermat, c'est à dire la détermination de la normale comme ligne *minimum* tirée du point E' à la parabole.

9.2.1 L'usage de la propriété spécifique de la courbe dans la méthode de Fermat

La mention par Descartes d'un paralogisme dans l'écrit de Fermat sur la parabole, déjà esquissée dans la présente lettre[28] et développée, sans doute avec exagération, dans la suite de l'écrit contre Roberval et E. Pascal, ne nous semble pas relever à nouveau uniquement de mauvaise foi mais pointer un fait important que nous avons relevé auparavant dans notre propre analyse du texte de Fermat.

En effet, l'inégalité (8.5) employée par Fermat procède d'une propriété de convexité de la demi-branche supérieure de la parabole qui dépend de la position de la tangente par rapport à la courbe. Cette position supposée *a priori*, qui découle en fait du calcul de Fermat, comme le géométre toulousain le reconnaîtra plus tard dans sa lettre à Mersenne de janvier 1638[29], procède donc bien d'un paralogisme. Qui plus est, une telle constatation est impossible dans le cas d'une courbe algébrique quelconque où nécessite un calcul préliminaire qui établira une inégalité équivalente à (8.5).

Or, comme on l'a vu, il eut été tout à fait possible pour Fermat d'introduire l'adégalisation entre rapports en lieu et place de cette inégalité (8.5), mais alors il se serait sans doute exposé à une critique globale de sa méthode du fait du manque de rigueur logique de la définition de l'adéquation comme relation portant sur des objets géométriques tels que des segments ou des rapports de segments.

[27] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 3].
[28] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 488-489].
[29] Cf. *supra* [section 8.2, p. 270] et [Mersenne(1945-1988), VII, p. 7-8].

En effet, il nous semble que pour Fermat la relation d'adégalisation joue exactement le même rôle que, plus tard, les infiniments petits dans le calcul infinitésimal. Une telle relation est mathématiquement opératoire mais logiquement problématique dès lors qu'on prétend la justiifer selon le canon euclidien. La contrepartie d'un renoncement à une telle entreprise – difficile — est le recours à l'inégalité (8.5), source de confusion entre la propriété spécifique de la courbe, qui est donnée et qui correspond à une égalité tirée de l'équation de la courbe, et une propriété générique de convexité ou concavité, qui n'est pas donnée, et qui renvoie au sens de l'inégalité — qui ne modifie d'ailleurs en rien le calcul —.

Voici ce qu'écrit Descartes avant de présenter ses calculs[30] visant à prouver que la méthode de Fermat appliquée à l'ellipse et à l'hyperbole conduit à des erreurs :

> Je veux bien pourtant avouer que, pour appliquer son raisonnement à l'hyperbole, il ne faut pas substituer *hyperbolen* au lieu de *parabolen*, mais qu'il y faut outre cela changer un petit mot [...] au lieu de dire : *major erit proportio* CD *ad* DI *quam quadrati* BC *ad quadratum* OI, il faut en parlant de l'hyperbole, dire seulement : *major erit proportio* CD *ad* DI *quam* BC *ad* OI, ou bien *major erit proportio quadrati* CD *ad quadratum* DI *quam quadrati* BC *ad quadratum* OI. D'où tout le reste suit en mesme façon que si on compare les lignes CD et DI aux quarréz de BC et OI. Et cecy s'estend genrallement à toutes les lignes courbes qui sont au monde.[31]

Une telle critique de Descartes peut sembler spécieuse et véritablement de mauvaise foi. Paul Tannery écrit ainsi :

> Quand au fonds de la dispute, il suffira de remarquer que Descartes s'attache à la lettre de l'Ecrit de Fermat *de maximâ et minimâ*, et affecte de ne pas comprendre la méthode qui s'y trouve exposée, à la vérité d'une façon un peu obscure, mais conforme à l'usage du temps. [...] Descartes feint de croire, au contraire, que, quelle que soit la courbe, on pourra poser soit $[\frac{\mathsf{CD}}{\mathsf{DI}} > \frac{\mathsf{BC}^2}{\mathsf{OI}^2}]$, soit même $[\frac{\mathsf{CD}}{\mathsf{DI}} > \frac{\mathsf{BC}}{\mathsf{OI}}]$, ce qui est méconnaître absolument le sens des

[30]Les calculs sont présentés en trois colonnes correspondant au cas de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 5-11].

[31]Cf. [Descartes(1964-1974), p. 4-5].

calculs qui suivent.[32]

Mais tâchons de dégager l'enjeu sous-jacent que Descartes souhaite mettre ici en évidence au delà du caractère outrancier du propos. Pour ce faire, il importe de ne pas considérer isolèment une lettre et un thème mathématique qui y est présent, mais un ensemble de lettres et les variations du thème qui y apparaissent.

L'argument mathématique de Descartes qui interroge le statut de l'inégalité (8.5) est discuté par Roberval dans sa lettre contre Descartes[33] et repris enfin par Descartes dans une lettre à Mersenne du 3 mai 1638[34].

Roberval retient deux fautes dans ce qu'il juge être la fausse application par Descartes de la méthode des tangentes de Fermat. D'une part, l'inégalité (8.5) qu'emploie Descartes dans le cas de l'ellipse est fausse lorsqu'on suppose le point O entre les points B et E. Pour la rendre vraie, il faudrait le supposer au contraire au delà du point B. Roberval ajoute ensuite :

> [Fermat] ayant raisonné par une propriété spécifique de la parabole, & laquelle ne convient pas à l'ellipse ny à l'hyperbole, la force du raisonnement luy a fait conclure une autre propriété specifique de la parabole, que CE est double de CD.[35]

D'autre part, selon Roberval, la seconde faute de Descartes consiste à user d'une propriété universelle et non spécifique pour déduire une propriété spécifique de la même courbe, à savoir l'expression de la sous-tangente, comme dans le cas de l'inégalité qu'il emploie pour l'hyperbole. Cette inégalité, comme le remarque Roberval, s'applique en effet aux lignes droites, mais aussi à la parabole et à l'ellipse, Roberval écrit ainsi :

> Au contraire M. Descartes voulant a tort contredire M. de Fermat, fabrique un raisonnement a sa mode, auquel il n'employe que des proprietez si universelles, qu'elles conviennent non seulement a toutes les sections coniques, mais encore aux lignes droites sans se servir d'aucune proprieté specifique. Ayant supposé la construction de la fig(ure) comme cy-devant, il dit *Major est proportio CD ad DI, quam BC ad OI, quia punctum O est extra hyperbolen* ; cette propriété ne convient pas à l'hyperbole

[32] Cf. [Descartes(1964-1974), II, Éclaircissement, p. 14-15].
[33] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 107-113].
[34] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 130-131].
[35] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 110].

> seule, mais aussi à la parabole & à l'ellipse, & de plus aux lignes droites BE & CE, quand il n'y auroit ny parabole ny ellypse, ny hyperbole ; partant par cette proprieté si universelle, ainsi employée sans autres plus specifiques, il est impossible de trouver les tangentes de l'hyperbole [...][36]

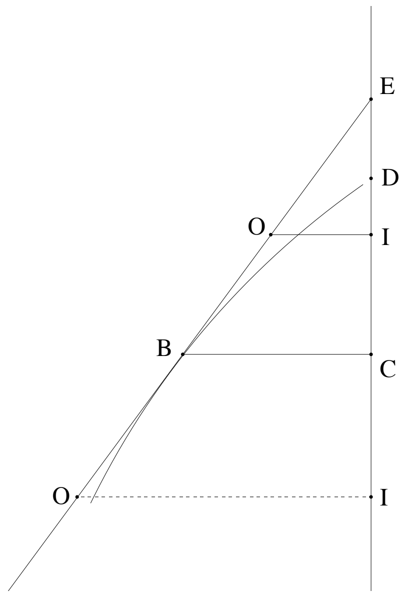

FIG. 9.2 – La figure de Roberval

La critique de Roberval sur la fausse application par Descartes de la méthode des tangentes de Fermat nous semble présenter clairement une ressemblance et une dissemblance importante avec une critique « moderne » comme celle de Tannery que nous avons citée précédemment. En effet, si Roberval a clairement reconnu que l'inégalité (8.5) relève d'une propriété spécifique de la courbe donnée par la proportion des carrés des ordonnées aux abscisses, il n'introduit pas de hiérachie entre cette propriété équivalente à l'équation exprimant la parabole dans un repère convenable, et la propriété de la sous-tangente de la parabole.

Ainsi, en employant le vocabulaire de Cavaillès, il n'y a pas pour Roberval constitution de la proportion ou équation algébrique exprimant une propriété spécifique de la courbe *géométrique* en une courbe *algébrique*. Or, il nous

[36]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 112].

semble que la situation est différente chez Descartes qui reconnaît pour sa part une hiérarchie parmi les propriétés spécifiques d'une courbe géométrique. Ainsi, pour le philosophe, l'équation $y^2 = px$ *donne* la parabole tandis que l'expression de la sous-tangente ou de la sous-normale n'en fait rien.

Descartes répond à Roberval dans la lettre à Mersenne du 3 mai 1638 en assurant d'un côté qu'il faut bien user d'une propriété spécifique de l'hyperbole ou de l'ellipse pour trouver la sous-tangente à ces courbes. En revanche, il nie à nouveau le fait que l'inégalité (8.5) constitue une propriété spécifique de la courbe, puisqu'elle s'applique à l'ellipse et à l'hyperbole en prenant le point O soit seulement au delà du point B, soit seulement sur le segment BE.

Selon Descartes, pour rendre une telle propriété spécifique, il faudrait supposer que la propriété soit vraie de part et d'autre du point B et de plus traiter les deux cas de figure $\mathsf{EI} = x \pm e$ en montrant ainsi qu'on trouve la même chose[37],

> car sans cela le raisonnement de cete operation est imparfait et ne conclud rien. Voyla serieusement la verité de cete affaire.[38]

C'est ainsi que Descartes clôt la discussion sur l'inégalité (8.5) propriété spécifique ou non de la parabole, en ajoutant néanmoins une dernière remarque qui renvoie non à une application de la méthode des tangentes mais à la démonstration de la méthode de recherche d'*extremum*. Fermat, lorsqu'il prendra connaissance de la lettre de Descartes, écrira à Mersenne dans une lettre datée par de Waard de fin juin-début juillet 1638[39] et ne manquera pas de prendre acte de la clôture de cette partie de la controverse sur les tangentes, tout en reconnaissant la nature du dernier propos de Descartes :

> Il [Descartes] a déja franchi qu'elle est bonne pour les tangentes, en se servant d'une propriété spécifique des lignes courbes, ce qu'il dit ne pouvoir être sous-entendu en mon écrit latin. [...] La méthode donc est bonne, au sens auquel je l'emploie pour les tangentes. Et n'importe de dire qu'il faut faire deux opérations, l'une par $[x + e]$ et l'autre par $[x - e]$, car une seule suffit pour la construction, quoyque la démonstration que je n'ai pas encore donnée, tire son principal fondement de ce que $[x+e]$ fait le même chose que $[x - e]$.[40]

[37]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 130-131].
[38]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 131]
[39]Nous revenons sur cette lettre dans la suite. Cf. *infra* [section 9.4, p. 330].
[40]Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 323].

Remarquons que la remarque de Descartes et la réponse de Fermat renvoient clairement à la démonstration synthétique de la méthode de Fermat qui n'apparaîtra que plus tard, en 1643, annexée à la lettre à Brulârt de Saint-Martin[41].

Cette partie de la controverse, au delà des « outrances » cartésiennes possède ainsi un véritable arrière-fonds mathématique. De surcroît, il nous paraît essentiel d'insister sur les conditions de possibilité d'une telle controverse. En effet, si la controverse se déploie autour de la notion de « propriété spécifique » dans le cadre de la théorie des *Coniques* d'Apollonius, c'est, nous semble-t-il, du fait de l'absence au sein de la communauté mathématique de l'époque d'une constitution de la proportion ou de l'équation algébrique à deux variables exprimant une courbe géométrique en l'objet courbe algébrique.

9.3 La lettre de Descartes à Mersenne du 3 mai 1638

Dans sa lettre à Mersenne du 3 mai 1638[42], Descartes allait poursuivre la controverse et répondre point par point aux objections de Roberval en présentant sa réponse comme une conclusion au débat :

> j'ayme mieux mettre icy pour une fois tout ce que j'en pense, affin de n'avoir jamais plus besoin d'en parler.[43]

9.3.1 La tangente considérée comme ligne *maximum*

La première remarque de Descartes porte sur la dénégation de Roberval concernant le rapport entre la méthode de recherche d'*extremum* de Fermat et sa méthode des tangentes. Voici ce qu'écrit Descartes[44] :

> [1] Premierement lorsqu'ils disent qu'il n'y a point de *maxima* dans la Parabole, et que Mr F. trouve les tangentes par une regle du tout separée de celle dont il use pour trouver *maximam*,

[41] Cf. *supra* [section 8.1.3, p. 263].
[42] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 122-134].
[43] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 123].
[44] Les *alinea* comme les italiques qui suivent sont les miennes et visent à mettre en évidence les éléments de l'argumentation cartésienne.

ils luy font tort en ce qu'ils veulent faire croire qu'il ait ignoré que la regle qui enseigne à trouver les plus grandes, sert aussy à trouver les tangentes des lignes courbes, ce qui seroit une ignorance tres grossiere, à cause que c'est principalement à cela qu'elle doit servir ; et ils dementent son escrit, où après avoir expliqué sa méthode pour trouver les plus grandes, il met expressement : *Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscunque curvis reducimus*.[45]

[2] Il est vray qu'il ne l'a pas suivie en l'exemple qu'il en a donné touchant la parabole, mais la cause en est manifeste ; car estant defectueuse pour ce cas la et ses semblables (au moins en la façon qu'il la propose), il n'aura pû trouver son conte en la voulant suivre, et cela l'aura obligé à prendre un autre chemin par lequel, rencontrant d'abord la conclusion qu'il sçavoit d'ailleurs estre vraye, il a pensé avoir bien opéré, et n'a pas pris garde à ce qui manquoit en son raisonnement.

[3] Outre cela, lorsqu'ils disent que la ligne EP, tirée au dedans de la parabole, est absolument parlant, plus grande que la ligne EB ils ne disent rien qui serve à leur cause[46] ; car il n'est pas requis qu'elle soit la plus grande absolument parlant mais seulement qu'elle soit la plus grande sous certaines conditions, comme ils ont eux-mesmes defini au commencement de l'escrit qu'ils m'ont envoyé[47], où ils disent que cette invention de M^r^ Fer. est touchant les plus grandes et les moindres lignes, ou *les plus grans et les moindres espaces que l'on puisse mener ou faire sous certaines conditions proposées*, et ils ne sçauroient nier que la ligne EB ne soit la plus grande qu'on puisse mener du point E jusques à la parabole, sous les conditions que j'ay proposées, à savoir en sorte qu'elle n'aille que jusques à elle, sans la traverser ; comme ils ont assez deu entendre dès le premier coup.[48]

Ainsi, à nouveau, Descartes déroule le même argument qu'on peut décomposer en trois points : D'une part, si l'on souhaite faire dépendre comme Fermat une méthode des tangentes de la règle de recherche de *maxi-*

[45]Descartes cite ici le texte de Fermat. Cf. [Fermat(1629-1636), p. 134].

[46]Cf. la figure de Roberval *in* [Descartes(1964-1974), II, p. 105] où la ligne EP traversante est cité comme contre-exemple.

[47]Il s'agit du premier écrit perdu de Roberval et E. Pascal.

[48]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 123-125].

mum, il faut considérer la tangente comme ligne *maximum* et on aboutit alors à une méthode défectueuse dans le cas de la parabole et des coniques. La méthode d'invention des tangentes donnée par Fermat, quoiqu'il en dise, ne se déduit pas de sa méthode de recherche de *maximum*. La tangente est bien une ligne *maximum* sous la condition qu'on considère les lignes menées d'un point sur l'axe qui ne traversent pas la courbe.

9.3.2 L'exemple de la tangente au cercle

Descartes va alors introduire l'exemple de la tangente au cercle « où toutefois la regle de M^r Fer. manquera, en mesme façon [que dans l'exemple de la tangente à la parabole] ».

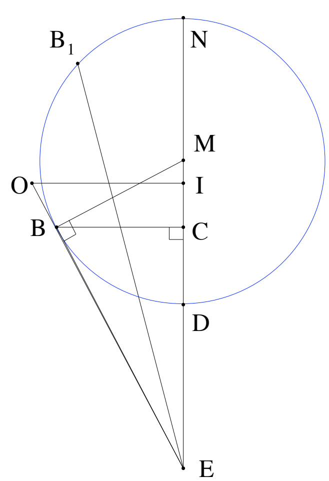

Fig. 9.3 – La tangente et la normale au cercle selon Euclide et Descartes (1)

Considérons le calcul effectué par Descartes. Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas fait sur le modèle du calcul figurant dans la détermination de la tangente à la parabole[49], quoiqu'en dise Descartes. En effet, en reprenant les mêmes notations, c'est à dire en posant $\mathsf{BC} = b$, $\mathsf{CD} = d$ et $\mathsf{EC} = x$, et

[49]Cf. *supra* [section 9.1.1, p. 304].

en procédant de même, c'est à dire en appliquant le théorème de Pythagore au triangle BCE et en usant du fait que NC $= \frac{b^2}{d}$, on obtient au lieu de l'équation (9.2) l'équation

$$(Q(x+e))^2 = (\frac{b^2}{d} - e)(d+e) + (x+e)^2, \tag{9.6}$$

puis après adégalisation et application de la méthode de Fermat

$$x = -\frac{b^2}{2d} + \frac{d}{2}. \tag{9.7}$$

Il est aisé de vérifier à nouveau, d'une part, qu'on obtient bien la sous-normale CM comptée négativement dont on aurait pu déduire la sous-tangente, d'autre part, qu'un tel calcul pourrait s'appliquer sans difficulté à l'ellipse, ainsi qu'à l'hyperbole au signe près.

Néanmoins, Descartes procède différement quant au choix des lignes qui entrent dans le calcul. Cette fois-ci, il prend pour variable CD $= x'$ et pour données ED $= a$ et DN $= c$ le diamètre du cercle. Ainsi, le point E est fixé et le point B varie sur le demi-cercle. On a

$$x' = a - x \tag{9.8}$$

mais aussi

$$x' = c - \frac{b^2}{d}. \tag{9.9}$$

En employant le même raisonnement, Descartes obtient ainsi

$$(Q(x'))^2 = x'(c - x') + (a + x')^2 \tag{9.10}$$

et

$$(Q(x'+e))^2 = (c - x' - e)(x' + e) + (a + x' + e)^2, \tag{9.11}$$

puis après adégalisation et application de la méthode de Fermat

$$ec + 2ea = 0 \quad \text{soit} \quad a = -2c. \tag{9.12}$$

Ainsi, la variable x' est éliminée et on ne peut donc déduire l'expression de CD $= x'$ en fonction de DN $= b$ et ED $= c$ « ce qui monstre manifestement l'erreur de la regle »[50].

[50] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 126].

Or, si on suppose que Descartes a d'abord effectué son calcul comme il l'avait fait auparavant, en partant de l'équation (9.6) et en procédant aux changements d'inconnue, il est aisé d'une part de déduire l'équation (9.11), d'autre part, en observant l'équation (9.7), de prévoir l'élimination de la variable x' dans l'équation (9.12). En effet, si l'on sait que le calcul précédent de Descartes masque en fait celui conduisant à la détermination de la normale, l'équation (9.12) ne fait qu'indiquer au signe près que $\mathsf{ND} = 2\mathsf{FD}$, autrement dit que le diamètre est le double du rayon !

Mais une telle constatation met en évidence les raisons d'être du calcul cartésien. En effet, le calcul de Descartes portant en fait selon notre interprétation sur le carré de droite *minimum i.e.* le carré du rayon FD^2 et non sur le carré de la tangente ED^2, cette quantité est bien sûr constante pour tout point B du cercle. C'est ce qu'exprime la dernière équation (9.12) obtenue par Descartes. Dans ces conditions, une telle quantité n'admet pas d'*extremum* en *un* point du cercle.

Il nous paraîtrait étonnant que Descartes eut pu ignorer un tel changement dans son application de la méthode de Fermat. Une première raison à ce changement tient sans doute à la difficulté plus grande d'interprétation que celui-ci introduit, puisqu'en produisant l'élimination de la variable x' choisie, il paraît remettre encore plus en cause la validité de la méthode de Fermat. Descartes reviendra d'ailleurs sur ce problème, bien qu'implicitement, dans un appendice à la lettre que nous examinons ci-après lorsqu'il se proposera de corriger la méthode de Fermat en en donnant le véritable fondement[51].

La proposition 8 du Livre III des *Éléments* d'Euclide

Descartes avait choisi cet exemple du cercle car il répondait à une allusion faite par Roberval dans son écrit précédent. En effet, dans sa lettre adressée contre Descartes, Roberval prétendait que :

> On pourroit par une mesme absurdité soûtenir que, d'un point donné hors un cercle dans le plan d'iceluy, la plus grande ligne que l'on puisse mener jusques à la circonference est la touchante, et ainsy donner un dementy à Euclide, qui a demonstré que cette plus grande est celle qui est menée du mesme point par le centre jusques à la circonférence concave ; de laquelle plus grande on pourroit dire, par la raison de Monsieur Descartes, qu'elle n'est

[51] Cf. *infra* [section 9.3.3, p. 324].

> pas seulement menée jusques à la circonférence du cercle, mais outre la circonférence, quoyqu'elle se termine en un point d'icelle circonférence.[52]

Roberval fait référence ici à la proposition 8 du livre III des *Eléments* d'Euclide[53] qui énonce :

> Si un certain point est pris à l'extérieur d'un cercle et qu'à partir de ce point certaines droites soient conduites *à travers le cercle* dont une par le centre, les autres au hasard, parmi les droites menées à la rencontre de la *circonférence concave*, *la plus grande* est celle qui passe par le centre ; parmi les autres, la plus proche de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que la plus éloignée ; d'autre part parmi les droites menées à la rencontre de la *circonférence convexe*, *la plus petite* est celle qui est comprise entre le point et le diamètre et parmi les autres, la plus proche de la plus petite est toujours plus petite que la plus éloignée, et seulement deux droites égales seront menées à partir du point à la rencontre du cercle de chaque côté de la plus petite [droite].[54]

Cette proposition d'Euclide appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, Euclide considère la partie convexe et la partie concave du cercle en référence au point E choisi à l'extérieur du cercle comme « point de vue ». Ainsi, comme le remarque Bernard Vitrac, le propos euclidien renvoie clairement à un contexte optico-astronomique[55].

La proposition 7 précédente discute des cordes tirées d'un point intérieur au cercle[56], pris sur un diamètre du cercle. Dans ce cas, les deux segments CN et CD apparaissent comme respectivement la corde *maximum* et la corde *minimum* tirées du point C. Dans la proposition 8, on considère un point E extérieur à la circonférence. Les deux segments EN et ED apparaissent de la même façon respectivement comme la droite *maximum* tirée à la partie concave de la circonférence et la droite *minimum* tirée à la partie convexe de la circonférence. On dispose ainsi d'un traitement presque complet des

[52] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 106-107].
[53] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 404-409].
[54] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 404-405].
[55] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 408-409].
[56] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 401-404].

droites *minimum* au cercle[57] considérées comme ligne *minimum* mais aussi *maximum*, comme dans le cas de l'ellipse traité par Apollonius au sein du livre V des *Coniques*.

En revanche, la tangente au cercle n'est pas considérée par Euclide au sein de ces propositions. Elle aurait pu en effet être définie comme étant à la fois la ligne *minimum* tirée à la partie concave de la circonférence et la ligne *maximum* tirée à la partie convexe de la circonférence, apparaissant ainsi comme un cas limite pour les deux catégories de droites envisagées. Ce n'est que plus tard dans les propositions 16 et 17 du livre III que la tangente sera définie comme droite perpendiculaire au diamètre — *i.e.* à la droite *minimum* — puis construite[58]. Si ce n'est un choix d'ordre dans l'exposition, rien n'empéchait donc Euclide de définir dans cette proposition la tangente de la même façon que la normale en tant que ligne *extremum* ou bien comme cas limite.

On pourrait d'ailleurs remarquer que cette seconde caractérisation de la tangente qu'on pourrait tirer d'une lecture de la proposition euclidienne écarte les difficultés et conduit à l'idée de point double et à une conception de la tangente comme droite limite de sécantes à la courbe, conception qui sera reprise par Descartes dans la lettre à Hardy de juin 1638 et par Beaugrand dans sa méthode des tangentes

Dans le cas du cercle, c'est donc la droite *minimum* qui apparaît la première puisqu'elle correspond en effet à un diamètre du cercle. Seulement ensuite la perpendiculaire au diamètre est définie comme étant la tangente. D'autre part, une caractérisation de la tangente comme ligne *extremum* oblige à considérer une condition sur le cercle dépendant du point E dont est tirée la tangente au cercle, à savoir la convexité ou la concavité d'un arc du cercle vu du point E.

9.3.3 Une correction de Descartes

Descartes propose ensuite de corriger la méthode de Fermat de la façon suivante[59] :

[57] N'est pas considéré en effet le cas où le point est situé sur la circonférence, traité en complément par Heath. Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 408 et n. 44] et [Euclide(1956), II, p. 20-21].

[58] Cf. [Euclide(1990-2001), I, p. 423-428].

[59] J'ajoute les *alineas*.

> Premierement donc a ces mots : *et inventâ maximâ*, il est bon d'adiouster : *vel aliâ quâlibet cuius ope possit postea maxima inveniri.* Car souuent, en cherchant ainsy la plus grande, on s'engage en beaucoup de calclus superflus. Toutefois cela n'est pas un point essentiel.
>
> Mais le principal, & celuy qui est le fondement de toute la regle, est omis en l'endroit ou sont ces mots : *Adæquentur duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia*, lesquels ne signifient autre chose, sinon que la somme qui explique *maximam in terminis sub A gradu ut libet involutis*, doit estre supposée egale a celle qui l'explique *in terminis sub A & E gradibus ut libet coefficientibus.*
>
> Et vous demanderez, s'il vous plaist, a ceux qui la soutienent si ce n'est pas ainsy qu'ils l'entendent, auant que de les avertir de ce qui doit y estre adiousté. A sçavoir au lieu de dire simplement : *Adæquentur* il falloit dire *Adæquentur tali modo ut quantitas per istam æquationem invenienda sit quidem una cum ad maximam aut minimam refertur, sed una emergens ex duabus quæper eandem æquationem possent inveniri essentque inæquales, si ad minorem maximâ vel ad maiorem minimâ referentur.*[60]

La première addition de Descartes pourrait concerner le choix de la quantité *extremum* dont on regarde la détermination comme équivalente à celle de la tangente. Nous avons vu en effet auparavant qu'on pouvait interpréter le calcul de Fermat comme renvoyant à la détermination d'*extremum* de quantités différentes qu'on peut associer au problème des tangentes[61].

Quant à la seconde addition suggérée par Descartes, sa compréhension est difficile. Descartes pourrait faire référence ici à l'interprétation de la valeur de la variable x qui rend la quantité $Q(x)$ *extremum* comme racine double de l'équation $Q(x) = 0$. Descartes suggérerait ainsi que la méthode de Fermat se fonde sur la considération de la tangente comme une sécante en un point double au point de contact, ce dont témoignerait l'addition de la condition selon laquelle la valeur de la variable x qui permet de rendre la quantité $Q(x)$ *extremum* « provient de deux quantités qui peuvent être trouvées avec

[60] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 127].

[61] Cf. [section 8.1.5, p. 267]. Cf. également les différents calculs suggérés par Fermat dans sa « deuxième méthode » exposée dans [Fermat(1638b)] bien qu'il ne fasse plus référence au problème d'*extremum* sous-jacent. Cf. *supra* [section 8.2.2, p. 272].

la même équation mais sont inégales »[62].

Une telle interprétation paraît être confirmée par la conclusion de la lettre. Descartes y écrit :

> Or il est a remarquer que cete condition, qui estoit omise, est la mesme que i'ay expliquée en la page 346[63] comme le fondement de la methode dont ie me suis servi pour trouver les tangentes, & qu'elle est aussy tout le fondement sur lequel la regle de M^r F. doit estre apuiée.[64]

Descartes fait en effet ici référence à son interprétation du cercle tangent comme un cercle rencontrant la courbe en un point double au point de contact.

Descartes prend ensuite pour exemples d'une telle correction les problèmes de la tangente à la parabole[65] et de la tangente au cercle[66] qu'il a considérés dans ses précédentes critiques.

Ainsi, dans le cas du cercle[67], « ce n'est pas assez de chercher le quarré de la plus grande en deux façons »[68] en adégalant, pour reprendre les termes de Fermat, les expressions (9.10) de $(Q(x'))^2$ et (9.11) de $(Q(x'+e))^2$, mais il faut considérer l'équation

$$\frac{(Q(x'))^2}{(Q(x'+e))^2} = \frac{x'(c-x')}{(x'+e)(c-x'-e)}. \tag{9.13}$$

En appliquant ensuite la méthode d'adégalisation de Fermat, on trouve

$$x' = \frac{ac}{2a+c}. \tag{9.14}$$

Cela revient à user de la proportion[69]

$$\mathsf{BE}^2 : \mathsf{OE}^2 = \mathsf{BC}^2 : \mathsf{OI}^2 \tag{9.15}$$

---

[62] Marco Panza consacre une discussion détaillée à cet extrait dans une note à la Correspondance cartésienne et aboutit à la même conclusion. Cf. [Descartes(2005), n. 20, p. 664-666].

[63] Cf. [Descartes(1637c), p. 417-418].

[64] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 129].

[65] Cf. *supra* [section 9.1.1, p. 304].

[66] Cf. *supra* [section 9.3.2, p. 320].

[67] Cf. *supra* [figure 9.3, p. 320].

[68] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 127-128].

[69] Descartes n'introduit pas le segment OI dans sa figure.

en supposant le point I placé non pas entre D et C mais au delà de C de sorte à obtenir $+e$. On considére ainsi comme *extremum* au point de contact, *permutando*, le rapport $\mathsf{OI}^2 : \mathsf{OE}^2$ qui correspond au carré du sinus de l'angle $\widehat{\mathsf{BEC}}$, mais Descartes ne fait pas référence à cet *extremum*. Cela paraît naturel puisqu'il prétend expliquer la méthode de Fermat par la notion de point double d'intersection entre tangente et courbe, qu'il a employée dans le cas du cercle au sein de sa méthode des normales, souhaitant ainsi l'emporter dans sa querelle de priorité avec Fermat.

D'autre part, dans le cas de la parabole[70],Descartes écrit :

> Ie prends B [b] pour BC, & D [d] pour DC, d'où il suit que le costé droit est $\frac{Bq}{D}$ [$\frac{b^2}{d}$], & *sans m'arrêter à chercher la plus grande*, je cherche seulement le quarré de BC en d'autres termes que ceux qui sont connus, en prenant A [x] pour la ligne CE, & par apres en prenant $A+E$ [$x+e$] pour la mesme [...][71]

Descartes obtient ainsi une première expression de BC « par le triangle BCE ». En effet, on a

$$x : b = x + e : \mathsf{BC} \tag{9.16}$$

soit

$$\mathsf{BC} = \frac{b(x+e)}{x}. \tag{9.17}$$

Cela revient à considérer la proportion[72]

$$\mathsf{CE} : \mathsf{BC} = \mathsf{IE} : \mathsf{OI} \tag{9.18}$$

en supposant le point I placé non pas entre D et C mais au delà de C de sorte à obtenir $+e$. Descartes identifie de son côté BC à OI dans le calcul.

D'autre part, en cherchant BC « par la parabole » , on obtient l'équation

$$\mathsf{BC}^2 = \frac{b^2}{d}(d+e). \tag{9.19}$$

Usant de l'équation (9.17), on obtient

$$\frac{b^2(x+e)^2}{x^2} = \frac{b^2}{d}(d+e) \tag{9.20}$$

[70]Cf. *supra* [figure 9.1, p. 305].

[71]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 129].

[72]Descartes n'introduit pas dans la figure le segment OI employé par Fermat. Cf. *supra* [figure 8.1, p. 265].

En appliquant ensuite la méthode d'adégalisation de Fermat, on trouve le résultat correct

$$x = 2d. \tag{9.21}$$

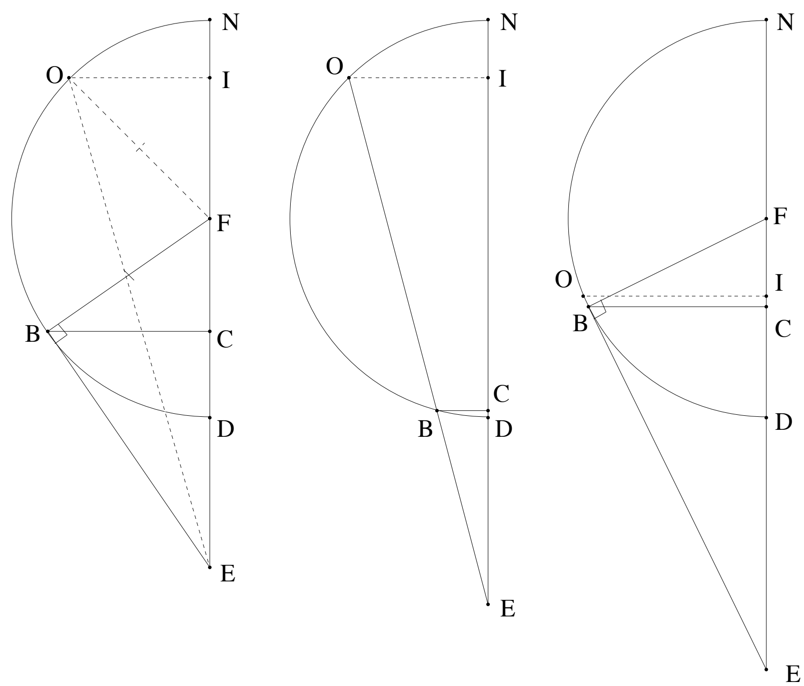

FIG. 9.4 – La tangente au cercle selon Descartes (2)

Descartes ajouta un billet à la lettre précédente pour éclaircir le calcul qu'il donnait pour la tangente au cercle. Bien que le texte du billet soit long, il nous semble nécessaire d'en donner une citation presque intégrale car ce billet apporte selon nous une conclusion explicative claire à la controverse :

> Pour entendre [...] le défaut de la regle de Monsieur de Fermat, il faut considerer ces trois figures, & penser que lors qu'il dit : *Statuatur idem qui prius terminis esse* $A + E$, cela signifie qu'ayant posé EC pour A [x], & EI pour $A + E$ [$x + e$], il imagine EI estre egal à EC, comme on voit en la troisième figure, & que neantmoins il en fait le calcul tout de mesme que si elles estoient

> inégales, comme on le voit en la premiere & seconde figures, en cherchant premierement EB par EC, qu'il nomme A $[x]$, puis EO par EI, qu'il nomme $A + E$ $[x + e]$, & cela va fort bien ;
>
> mais la faute est en ce qu'apres les avoir ainsi calculées, il dit simplement : *Adæquentur*. Et on la peut voir clairement par la premiere figure, où si l'on suppose la ligne EO estre egale à EB[73], il n'y a rien qui determine les deux points B & O à s'assembler en un endroit de la circonference du cercle plustots qu'en l'autre, sinon que toute cette circonference ne fust qu'un seul point, d'où vient que toutes les quantitez qui demeurent en l'equation se trouvent égales à rien.
>
> Mais pour faire que ces deux points B & O ne se puissent assembler qu'en un seul endroit, à sçavoir en celuy où EB est la plus grande qu'elle puise estre sous la condition proposée, il faut considerer la seconde figure, & a cause des des deux triangles semblables ECB & EIO, il faut dire : comme EC ou BC est à EB, ainsi EI ou OI est à EO ; au moyen de quoy, on fait qu'à mesure que la quantité EB est supposée plus grande, la quantité EO est supposée plus petite, à cause que les points E, B, O sont tousiours là en mesme ligne droite ; & ainsi lors que EB est supposée égale à EO, elle est supposée la plus grande qu'elle puisse estre ; c'est pourquoy on y trouve son conte. Et c'est là le fondement de la regle qui est obmis.[74]

Dans ce billet, Descartes paraît confirmer qu'il entendait dans son addition à la méthode de Fermat que le fondement de cette dernière réside dans l'interprétation de la tangente comme sécante à la courbe en un point double.

La première figure donnée par Descartes paraît renvoyer implicitement à la raison qui justifie l'échec du premier calcul de Descartes pour déterminer la tangente au cercle, c'est-à-dire le fait que la droite *minimum* tirée d'un point du diamètre au cercle coïncidant avec le rayon. Dans ce cas, en effet, lorsqu'on fait varier O, FO est constant et « il n'y a rien qui détermine les deux points B et O à s'assembler en un endroit de la circonférence du cercle plustost qu'en l'autre ».

[73] *En marge* : « Notez que ie suppose icy que c'est le point E qui est donné, et non le point B.

[74] J'ajoute les *alineas*. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 133-134].

Descartes propose alors de considérer non plus une droite tournant autour d'un point fixe comme E situé sur le diamètre de la courbe mais autour d'un point fixe situé sur la courbe elle-même comme le point B, modification qu'il précisera et développera dans la lettre à Hardy de juin 1638[75]. On peut remarquer en effet comme Duhamel que dans le premier cas la droite EO peut rencontrer la courbe en un point double sans qu'elle lui soit tangente[76], ce qui est en revanche impossible dans le second cas.

Descartes revient ensuite sur l'interprétation de la méthode en terme d'*extremum* en introduisant les rapports angulaires de la tangente $\mathsf{EC} : \mathsf{EB}$ et $\mathsf{BC} : \mathsf{EB}$ correspondant au cosinus et au sinus de l'angle de la droite tangente et du diamètre, qui apparaissent comme *extremum* au point de contact. Le fait de considérer une droite tournant autour du point B lui permet enfin de justifier pourquoi on peut considérer la tangente EB comme une ligne *maximum*.

9.4 La lettre de Fermat à Mersenne de juin-juillet 1638

Fermat rédigea à la fin de juin ou au début de juillet 1638 une réponse[77] accompagnée d'un appendice présentant une nouvelle version de sa méthode[78] au vu de la lettre de Descartes à Mersenne du 3 mai 1638, qui lui avait été communiquée par ce dernier seulement après le 1er juin[79].

Nous avons déjà mentionné et étudié la première partie de cette réponse[80]. Fermat revenait sur la question du cercle pour apporter la réponse suivante :

> Du point D il faut tirer DA sur le cercle, en telle sorte qu'elle soit la plus grande qui, du point D, puisse être menée audit cercle, sans le franchir (ce qui, en effet, ne veut dire autre chose que chercher la tangente AD).
>
> Si nous prenons CN pour A [x], et DA pour la plus grande, selon la méthode, nous trouverons une équation impossible, d'où

[75] Cf. *infra* [section 9.5, p. 336].

[76] Duhamel propose une comparaison détaillée ainsi qu'une interprétation moderne de ces deux méthodes distinctes. Cf. [Duhamel(1864), p. 298-308].

[77] Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 322-324] et [Fermat(1891-1922), II, p. 152-154].

[78] Cf. [Fermat(1638b)] et *supra* [section 8.2.2, p. 272].

[79] Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, p. 322] et [Fermat(1891-1922), II, p. 152].

[80] Cf. *supra* [section 9.2.1, p. 317].

il conclud que la méthode est insuffisante.

Je réponds que je n'ai garde de prendre DA pour la plus grande (bien que la limitation de M. Descartes semble lui pouvoir donner ce nom), d'autant que la méthode, n'agissant que par la propriét spécifique du cercle, en trouve toujours de plus grandes qui peuvent être tirées audit cercle jusques au point B. Mais la méthode satisfait d'ailleurs à cette question, qui y peut très facilement être réduite, comme M. Descartes a reconnu. Et voici comment :

Puisque DA touche le cercle, DA est à AC, perpendiculaire, en moindre proportion qu'aucune autre ligne tirée du point D au cercle, de l'un et de l'autre côté du point A, n'est à la peprendiculaire tirée, du point auquel elle concourt avec le cercle, sur le diametre ; ce qui paroit d'abord.

Cherchons donc par la méthode un point au cercle comme A, en sorte que DA *ad* AC *habeat minimam proportionem ; dabitur punctum* A*, ideoque tangens.*[81]

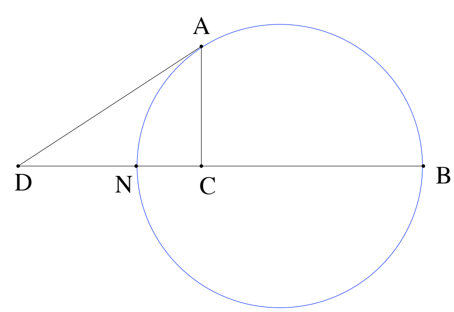

Fig. 9.5 – La tangente au cercle selon Fermat

Pour la première fois, à la suite de Descartes dans la lettre du 3 mai 1638, on voit ainsi Fermat introduire explicitement le rapport angulaire DA : AC associé à la tangente comme *extremum* au point de contact.

[81] Cf. [Fermat(1891-1922), II, p. 153-154] et [Mersenne(1945-1988), VII, p. 323-324].

Cette interprétation du problème d'*extremum* associé au problème des tangentes qui préfigure le triangle caractéristique chez Barrow et Leibniz n'apparaît selon nous, ni dans la première version de la méthode envoyée à Mersenne à la fin de l'année 1637, ni dans la deuxième version où le problème d'*extremum* a été écarté. C'est à notre connaissance le seul exemple où un tel rapport apparaît chez Fermat[82]. On peut ainsi conjecturer que la considération du rapport angulaire dans le problème des tangentes par Descartes et Fermat est un résultat de la controverse sur les tangentes.

9.4.1 Méthode des tangentes et droite *minimum*

Dans cet écrit, Fermat présente en outre une autre méthode pour trouver la tangente qui s'appuie sur la détermination de la droite *minimum* tirée du diamètre de la courbe au point de contact puis sur la construction de la droite perpendiculaire à cette droite en ce même point. Fermat écrit ainsi :

> Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de Maximis et Minimis* peut être appliquée à l'invention de tangentes, la voici :
>
> Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*.
>
> Cherchons donc le point O dans le diamètre [de la courbe], de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvée par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe[83].

Fermat donne à la suite une démonstration de cette proposition selon laquelle une droite perpendiculaire à une droite *minimum* est tangente au point de contact. Cette démonstration généralise de façon remarquable la proposition 29 du Livre V que nous avons étudiée auparavant[84].

La voici :

> Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite [$\mathsf{AD'}$] la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle

[82]Cf. également [Strømholm(1968), p. 57].
[83]Cf. [Fermat(1638b), p. 158-159 (resp. p 329-330)].
[84]Cf. *supra* [section 6.4.4, p. 213].

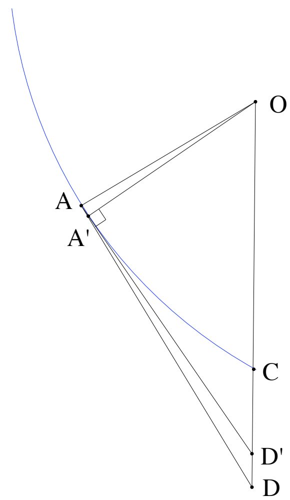

FIG. 9.6 – Droite *minimum* et tangente chez Fermat

> fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire [OA′], elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou en dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe, sera plus courte que la perpendiculaire [OA′], et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.
>
> Que si la ligne CA est convexe en dehors, soit la tangente DA sur laquelle soit tiré la perpendiculaire AO, il paroit par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente.[85]

Fermat donne ensuite comme exemple d'application de cette méthode l'invention de la tangente à la parabole[86] qui présente des calculs semblables

[85]Cf. [Fermat(1638b), p. 159 (resp. p 330)].
[86]Cf. [Fermat(1638b), p. 160-161 (resp. p 330-332)].

à ceux qu'avait donnés Descartes dans sa fausse application de la méthode figurant dans la lettre à Mersenne de janvier 1638[87].

Plus loin, Fermat indique que ce mode d'application de la méthode de recherche d'*extremum* au problème des tangentes précéda celui présenté à Mersenne dans différentes lettres et écrits de l'année 1638 dont le présent écrit[88]. Il écrit ainsi :

> C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI, ou son quarré, sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie. La raison est prise des asymmétries [radicaux] qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles [...]
>
> La méthode de M. Descartes n'oste pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle page 342, — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,
>
> $$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y = x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x \tag{9.22}$$
>
> il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini ; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer.[89]

Mais l'embarras dans les calculs résultant de l'application du théorème de Pythagore qui conduit à la considération de racines carrées, comme dans le cas de la méthode des normales de Descartes, ainsi que se plaît à le remarquer Fermat, le conduisit à abandonner cette méthode pour une nouvelle qu'il présente ainsi comme supérieure à celle de Descartes.

En effet, en considérant *directement* la tangente et non pas par l'entremise de la droite *minimum*, on use du théorème des triangles semblables à la place du théorème de Pythagore. Ce faisant, d'une part, on ne double plus en

[87] Cf. *supra* [section 9.1.1, p. 304].

[88] Cf. [Fermat(1638b), p. 154 (resp. p. 325)]. Pour nous, Fermat fait ici référence à la seconde méthode des tangentes de Fermat. Cf. *supra* [section 8.2, p. 270].

[89] Cf. [Fermat(1638b), p. 161 (resp. p 332)].

général le degré de l'équation de la courbe, d'autre part, on se dispense de l'élimination des racines carrées résultantes des puissances de degré impaire de l'inconnue x ou y éliminée.

Fermat présente ainsi sa dernière méthode des tangentes comme « [levant] toutes les difficultés », alors que les deux méthodes de Fermat et Descartes fondées sur la considération de la droite *extremum* ou du cercle tangent « paroissent insuffisantes ». En effet, on n'éleve pas le degré de l'équation $Q(b, c) = 0$ de la courbe entre l'abscisse $\mathsf{CD} = b$ et l'ordonnée $\mathsf{BC} = c$ du point B en appliquant la méthode d'adégalisation à l'équation[90] $Q(b-e, \frac{c(x-e)}{x}) = 0$ et on ne « [rencontre] jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode ».

La critique de Fermat sur la méthode des normales de Descartes et l'exemple qu'il choisit font ainsi clairement apparaître la compréhension par le géométre toulousain du double problème de complexité dans les calculs qui apparaît lorsqu'on se propose de considérer les droites *minimum* préalablement aux tangentes[91].

Cette question de l'élimination des racines carrées dans une équation sera étudiée en d'autres endroits de la correspondance par Fermat[92] et par Descartes dans un des écrits de la publication posthume des *Excerpta Mathematica*[93].

Le géomètre toulousain désigne ensuite le problème des ovales de Descartes comme un problème inverse des tangentes[94], affirmant au passage qu'il dispose d'une solution au problème. Il écrit ainsi :

> On pourrait ensuite chercher la converse de cette proposition [sur la détermination des tangentes] et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir ; à laquelle question aboutisse celles des verres brûlants

[90] Cf. *supra* [section 8.2.2, p. 272].

[91] Cf. également *supra* [section 5.4, p. 186].

[92] Cf. [Mersenne(1945-1988), VII, éclaircissement p. 334].

[93] Cf. [Descartes(1701b), « IX. Æquationium Assymetriæ Remotio », p. 308-310 (resp. 8)].

[94] Sur l'interprétation du problème des verres brûlants comme un problème inverse des tangentes par les contemporains et les successeurs de Descartes, Fermat, Huygens, Newton, cf. [Rashed(2005a), p. 342-343]. Nous avons donné auparavant une restitution conjecturale de la solution de Descartes *in* [chapitre 7, p. 229]. Des problèmes inverses des tangentes liés à des questions de dioptrique apparaîtront à l'automne 1638 au travers des questions de Debeaune. Cf. *infra* [section 10.3, p. 353].

> proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il agrée, nous en conférerons quand il lui plaira.[95]

La conclusion de l'écrit concerne la querelle de priorité entre Descartes et Fermat au sujet de la méthode des tangentes qui a nourri la controverse entre les deux mathématiciens. Fermat rappelle ainsi que « [ses] questions *de Maximis et Minimis* et *de Tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner ».

La présentation chronologique de l'invention de ses méthodes par Fermat paraît avoir deux objets. D'une part, le géomètre toulousain souhaite mettre en évidence sa possession d'une méthode de même nature que celle de Descartes, qui serait antérieure à la *Géométrie* de 1637. D'autre part, Fermat veut présenter sa méthode actuelle des tangentes comme une amélioration de celles fondées sur la considération de la droite *minimum* dont la méthode des normales de Descartes. La présentation chronologique de Fermat doit donc être relativisée et rapportée au contexte de la querelle de priorité dans lequel elle s'inscrit.

9.5 La démonstration de la règle de Fermat par Descartes dans la lettre à Hardy de juin 1638

On trouve dans une lettre à Hardy[96] datée de juin 1638 par Adam et Tannery une démonstration de la règle de Fermat que prétend donner Descartes. Plus précisément, voici ce que le philosophe écrit :

> Mais pour ce que i'ay mis, dés mon premier Escrit, qu'on la pouvoit rendre bonne en la corrigeant, & que i'ay toûjours depuis soûtenu la mesme chose, ie m'assure que vous ne serez pas marry que ie vous en dise icy le fondement ; aussi bien ie me persuade que ces Messieurs, qui l'estiment tant, ne l'entendent pas, ny peut-estre mesme celuy qui en est l'Autheur.[97]

[95] Cf. [Fermat(1638b), p. 162 (resp. p 333)].
[96] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 169-173]. Au sujet de cette démonstration, cf. [Duhamel(1864), p. 303-306].
[97] Cf. [Descartes(1964-1974), p. 170].

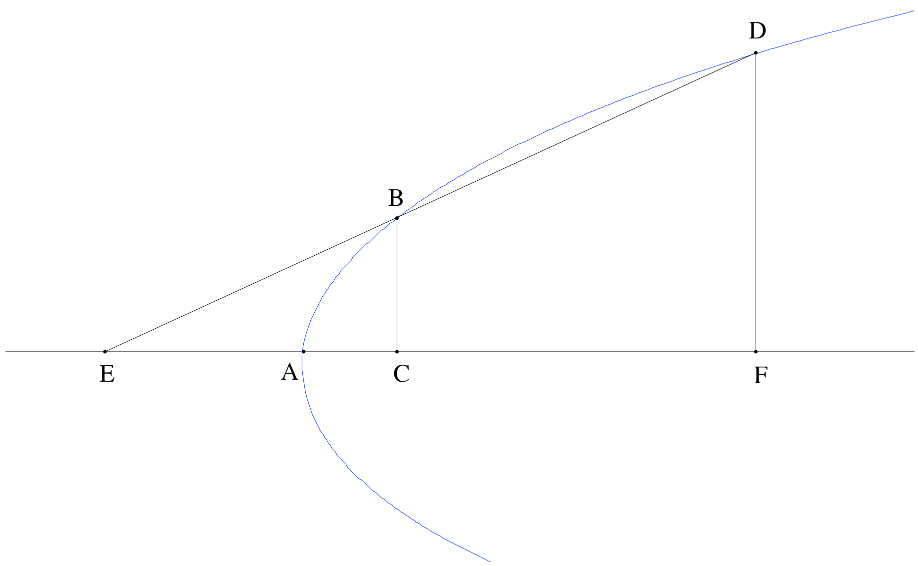

FIG. 9.7 – La tangente et la normale au cercle selon Euclide et Descartes

L'énoncé du problème selon Descartes est le suivant :

> Soit donc la ligne courbe donnée ABD, & que le point B de cette ligne soit aussi donné, à sçavoir, ie fais l'ordonnée $\mathsf{BC} = b$, & le diamètre $\mathsf{AC} = c$, & qu'on demande un point en ce diametre, comme E, qui soit tel que la ligne droite, qui en sera menée vers B, couppe cette courbe en B, & encore en un autre point, comme D, & en sorte que l'ordonnée DF soit à l'ordonnée BC en raison donnée, par exemple, comme g à h.[98]

Posons maintenant $\mathsf{EC} = x$ et $\mathsf{CF} = e$[99]. Descartes va prendre comme exemple pour la courbe dont il cherche la tangente « la premiere des lignes que Monsieur de Fermat a imaginées à l'imitation de la parabole, c'est à dire celle en laquelle les segmens du diametre ont entr'eux mesme proportion que les cubes des ordonnées[100]. »

On a par hypothèse

$$\mathsf{BC} : \mathsf{DF} = g : h \tag{9.23}$$

[98]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 170].

[99]Je modifie les notations de Descartes par souci d'uniformité.

[100]Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 171]. Au sujet des paraboles et hyperboles généralisées de Fermat, cf. *supra* [section 8.3.3, p. 280].

soit
$$\mathsf{DF} = \frac{bh}{g}. \tag{9.24}$$

Les triangles ECB et EFD sont semblables ce qui est équivalent à dire de façon moderne que le point D appartient à la droite EB. On a donc
$$\mathsf{EC} : \mathsf{BC} = \mathsf{EF} : \mathsf{DF} \tag{9.25}$$
d'où
$$\mathsf{DF} = \frac{b(x+e)}{x}. \tag{9.26}$$

Du fait de la propriété de la courbe, on a
$$\mathsf{AC} : \mathsf{AF} = \mathsf{BC}^3 : \mathsf{DF}^3 \tag{9.27}$$
soit
$$\mathsf{DF}^3 = \frac{b^3(c+e)}{c}. \tag{9.28}$$

En usant des deux expressions de DF et DF^3 (9.26) et (9.28), et en divisant par e, on obtient une équation en x^3
$$x^3 = 3cx^2 + 3cxe + ce^2. \tag{9.29}$$

Descartes écrit ensuite :

> Mais pour ce qu'il y a icy deux quantités inconnües, à sçavoir a $[x]$ & e, & qu'on n'en peut trouver qu'une par une seule équation, il en faut chercher une autre, & il est aisé par la proportion des lignes BC & DF qui est donnée[101].

En effet, en usant des deux expressions de DF (9.24) et (9.26), on obtient l'équation
$$hx = gx + ge. \tag{9.30}$$

> [...] et par le moyen de cette équation on trouve aisément l'une des deux quantitez a $[x]$ ou e, au lieu de laquelle il faut par apres substituer en l'autre équation [(9.29)] les termes qui luy sont égaux, afin de chercher en suitte l'autre quantité inconnüe. Et c'est icy le chemin ordinaire de l'Analyse pour trouver le point E, ou bien la ligne CE, lors que la raison qui est entre les lignes BC & DF est donnée[102].

[101] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 171-172].
[102] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 172].

Mais lorsque la droite EB est tangente à la courbe au point B, le segment DF coïncide avec BC. La proportion (9.23) devient alors une « proportion d'égalité » et on déduit $g = h$. Mais alors l'équation (9.30) implique $e = 0$. Substituant $e = 0$ dans l'équation (9.29), on déduit

$$x^3 = 3c. \tag{9.31}$$

Descartes conclue :

> Voila donc le fondement de la regle, en laquelle il y a virtuellement deux équations [(9.29) et (9.30)], bien qu'il ne soit besoin d'y faire mention expresse que d'une [(9.29)], à cause que l'autre [(9.30)] sert seulement à faire effacer ces Homogenes.[103]

Cette prétendue démonstration de la règle de Fermat par Descartes nous semble réaliser une synthèse de la méthode des tangentes de Fermat et de la méthode des normales de Descartes. En ce sens, il ne s'agit donc pas d'une démonstration de la règle de Fermat quoiqu'en dise Descartes. De la méthode des tangentes de Fermat, Descartes nous semble avoir déduit l'usage de la droite sécante, remplaçant ainsi cercle tangent par droite tangente. D'autre part, le rapport angulaire correspondant à la tangente nous semble aussi être considéré par Descartes au sein du problème des tangentes bien qu'implicitement. De la méthode des normales, et plus généralement de sa Méthode algébrique de résolution des problèmes géométriques, Descartes nous paraît avoir déduit un traitement purement finitiste et algébrique du problème. Cette synthèse est ainsi le résultat fructueux de la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat.

Remarquons néanmoins que la démonstration proposée ici par Descartes est plus élémentaire que l'analyse qu'il employait dans sa méthode des normales. Il n'emploie ainsi ni théorème de factorisation ni méthode des coefficients indéterminés. Il mobilise au contraire un principe du raisonnement algébrique qu'on retrouve en d'autres endroits de la Correspondance[104] et qui apparaissait déjà dans le 1er Livre de la *Géométrie*[105]. Il s'agit de l'idée qu'on doit associer autant d'équations que d'inconnues cherchées avant de « démêler

[103] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 173].

[104] Cf. par exemple le problème des trois cercles et le *Problema Astronomicum*.

[105] Descartes écrivait ainsi :

> Et on doit trouver autant de telles Equations qu'on a supposé de lignes qui estoient inconnues.

Cf. [Descartes(1637c), p. 372].

les équations » pour reprendre un terme souvent employé par Descartes, c'est-à-dire éliminer successivement les inconnues en opérant des substitutions ou des combinaisons linéaires judicieusement choisies entre les équations.

Ainsi, dans le cas du problème des tangentes, il faut considérer deux équations pour les deux inconnues x et e dans le cas général d'une sécante en remarquant que le cas des tangentes sera traité pour $e = 0$.

9.6 L'*extremum* d'un rapport

Si on pense à l'avertissement initial de Descartes dans sa lettre du 3 mai 1638 selon laquelle la règle de Fermat manquerait de même façon dans le cas du cercle comme dans celui de la parabole, il est bien clair qu'en effet la difficulté à caractériser *directement* la tangente comme ligne *maximum* dans le cas général d'une courbe algébrique sans scinder la courbe en deux arcs convexes et concaves en tant qu'ils sont vus du point E est la même que celle dans le cas du cercle. Dans les deux cas, la caractérisation géométrique de la tangente en tant que ligne *maximum* dont on dispose ne peut être interprété par le calcul algébrique d'adégalisation de la méthode de Fermat. S'y ajoute, dans le cas de la parabole, le fait que peuvent apparaître des segments dont la longueur n'est pas bornée.

C'est qu'en effet, si on peut définir géométriquement la tangente et la normale comme des lignes *extrema*, cette définition n'est opératoire sur le plan algébrique, que ce soit avec la méthode de Fermat ou la méthode de Descartes, sans modification conceptuelle, que dans le cas de la normale où l'on minimise le carré de celle-ci. Au contraire, dans le cas de la tangente, comme l'ont explicité dans la suite Fermat et Descartes, il faut comprendre qu'on recherche l'*extremum* d'un rapport, à savoir par exemple le coefficient angulaire de la tangente $\mathsf{BC} : \mathsf{CE}$[106].

Or, il est clair que la méthode de recherche du *maximum* et du *minimum* telle qu'elle était proposée initialement par Fermat porte d'une part sur une quantité ou plutôt une grandeur géométrique telle qu'une ligne, une surface ou un volume, et non un rapport. D'autre part, comme on l'a vu, elle présuppose une analyse qu'on peut nommer trans-configurationnelle [107] transformant un problème géométrique initial, la recherche de la tangente,

[106] Ou de façon complètement équivalente, un autre rapport direct ou inverse de mesure d'angle associé au triangle BCE.

[107] Cf. *supra* [section 8.4.3, p. 293] et [section 8.4.6, p. 299].

en un nouveau problème équivalent qu'on pourrait résoudre par l'algèbre — dans le cas de Fermat, par la méthode d'adégalisation —, à savoir la détermination d'un *extremum*.

La reconnaissance de la détermination de l'*extremum* du rapport $\mathsf{BC} : \mathsf{CE}$ ou bien du rapport $\mathsf{BC}^2 : \mathsf{CD}$ dans le cas de l'exemple de la parabole traité auparavant par Fermat[108] comme associé au problème des tangentes pose donc deux difficultés de nature distincte : comprendre d'une part qu'on peut considérer non seulement une grandeur géométrique mais aussi un rapport en tant que quantité possédant des *extrema*, proposer une analyse trans-configurationnelle générale ou au moins généralisable qui transforme le problème de recherche de la tangente à une courbe algébrique quelconque en un problème de détermination de l'*extremum* d'un rapport.

On peut remarquer au passage qu'une façon de rendre compte du rapport en tant que quantité est de considérer que celui-ci mesure un angle. Une façon possible de traiter les angles serait ainsi non de les traiter en tant que grandeurs[109], mais plutôt de traiter les rapports qui les mesurent[110].

Mais pourquoi Fermat, lorsqu'il appliquait la méthode d'adégalisation au problème des tangentes en ayant réduit précédemment celui-ci à un problème d'*extremum* par une analyse trans-configurationnelle, et Descartes, lorsqu'il appliquait la méthode des coefficients indéterminés au problème des normales ayant réduit celui-ci à un problème de point double d'intersection entre un cercle tangent et la courbe, n'ont-ils pas pris conscience du caractère central du rapport angulaire ?

Une première réponse tient au statut problématique conjoint du rapport et de la droite dans la tradition géométrique classique et par voie de conséquence dans les mathématiques du dix-septième siècle : le premier qui permet de déterminer la seconde dans un repère convenable n'a pas un statut de quantité. Quant à la droite, elle est placée à part des lignes courbes et n'est pas définie comme elles par une équation mais au mieux implictement

[108]Cf. *supra* Fig. 8.1, p. 265.

[109]On connaît bien les difficultés qui en résultent chez Euclide : par exemple, la définition de multiple entier quelconque d'un angle dont on a besoin dans la définition de la proportion au Livre V des *Éléments*, ou bien le caractère non archimédien de l'ensemble formé par le genre des angles — non nécessairement rectilignes — qu'illustre la querelle autour de l'angle de contingence.

[110]C'est exactement ce que fait Descartes au sein de la *Dioptrique* lorsqu'il formule le principe de réfraction en insistant sur le fait qu'il faut considérer l'égalité des mesures d'angle et non des angles.

par la donnée d'un rapport, comme dans le cas du problème de Pappus.

Mais il existe une seconde raison de plus grand poids qui tient aux origines communes des méthodes de Fermat et Descartes. Nous avons essayé de montrer en effet que ces deux méthodes peuvent être interprétées comme l'application d'une analyse trans-configurationnelle et d'une méthode algébrique à deux problèmes de tangente et de droite *minimum* qu'on trouve traités indépendamment au Livre I et au Livre V des *Coniques* d'Apollonius.

Une seconde question qu'on peut se poser tient à l'explication du fait que la considération du carré de la normale comme *extremum* conduise à des calculs corrects alors que tel n'est pas le cas pour le carré de la tangente, bien que comme on l'a vu, les mêmes calculs déduits du théorème de Pythagore puissent s'appliquer à l'une comme à l'autre[111]. Pour répondre à cette question, il faut comprendre la nécessité de considérer le problème des tangentes comme un problème d'*extremum* portant non plus sur un segment ou sur le carré de ce segment, mais sur le rapport associé à une mesure de l'angle compris entre la tangente et l'axe des abscisses.

Cette seconde question, Descartes la pose à Fermat dans sa lettre du 27 juillet 1638 qui témoigne d'une trêve dans la controverse :

> Et voyant la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes[112], je n'ai autre chose y répondre, sinon qu'elle est très bonne[113], et que si vous l'eussiez expliquée au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit. Ce n'est pas qu'on ne pût proposer divers cas, qui obligeraient chercher derechef d'autres biais pour les démesler, mais je ne doute point que vous ne les trouvassiez aussi bien que celui-là[114].

[111] C'est précisément le ressort de l'application à dessein spécieuse par Descartes de la méthode de Fermat à la détermination de la tangente à la parabole et au cercle.

[112] Cf. *supra* [section 8.2.2, p. 272].

[113] Cf. également la lettre à Mersenne du 27 juillet 1638 [Descartes(1964-1974), II, p. 272] où Descartes identifie cette version de la méthode de Fermat figurant dans l'écrit [Fermat(1638b)] à celle qu'il avait donnée dans sa correction de la lettre du 3 mai 1638 [Descartes(1964-1974), II, p. 127-131] et [section 9.3.3, p. 324], ajoutant au sujet de Fermat :

> Ie croy que s'il n'auoit point vû ce que i'ay mandé y deuoir estre corrigé, il n'eust pas sceu s'en demesler.

[114] L'exemple du *folium*.

Il est vrai que je ne vois pas encore pour quelle raison vous voulez que votre premire règle, pour chercher les plus grandes et les moindres, se puisse appliquer l'invention de la tangente, en considérant la ligne qui la coupe à angles droits comme la plus courte, plutôt qu'en considérant cette tangente comme la plus grande, sous les conditions qui la rendent telle[115]. *Car pendant qu'on ne dit point la cause pourquoi elle réussit en l'une de ces façons plutôt qu'en l'autre, il ne sert de rien de dire que cela arrive, sinon pour faire inférer de là que, même lorsqu'elle réussit, elle est incertaine.*

Et en effet, il est impossible de comprendre tous les cas qui peuvent être proposés dans les termes d'une seule règle, si on ne se réserve la liberté d'y changer quelque chose aux occasions, ainsi que j'ai fait en ce que j'en ai écrit, où je ne me suis assujetti aux termes d'aucune règle ; mais j'ai seulement expliqué le fondement de mon procédé, et en ai donné quelques exemples, afin que chacun l'appliquât après selon son adresse aux divers cas qui se présenteraient.[116]

[115]Cf. *supra* [section 9.4.1, p. 332].

[116]Les *alineas* et les italiques sont ajoutés par moi. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 281-282].

Chapitre 10

Les questions de Debeaune

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier un épisode particulier de la Correspondance mathématique cartésienne. Il s'agit de la correspondance échangée entre Debeaune, Mersenne et Descartes, mais aussi Beaugrand et Roberval, de l'automne 1638 au printemps 1639, à l'occasion des questions proposées par le premier concernant des problèmes directs et inverses des tangentes.

Cet épisode, qui suit et entretient la controverse avec Fermat de 1638 sur les tangentes, précède l'élaboration par Debeaune d'un commentaire à la *Géométrie*, les *Notes Brèves*.

Nous allons procéder chronologiquement en discutant des extraits des différentes lettres entre les acteurs de cette discussion mathématique, qu'on trouve pour leur plus grande partie dans des Additions au Volume V de la Correspondance éditée par Adam et Tannery[1].

10.1 Descartes et Debeaune

Etudier l'implication de Descartes au sein de la discussion mathématique tournant autour des questions de Debeaune nous semble important pour deux raisons. Pour la première fois, Descartes voit sa méthode appliquée à la résolution de questions nouvelles par un mathématicien de premier rang, Debeaune, dans un contexte non polémique. Nous nous trouvons ainsi en présence des premiers développements de la théorie cartésienne des courbes et

[1] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 513-542].

des équations présentée dans la *Géométrie*, et plus précisément de la méthode des normales.

D'autre part, la participation de Descartes à ces développements, manifestée par ses réponses, remarques et conseils prodigués à Debeaune, nous paraît éclairer l'objet de la *Géométrie* de 1637 et les intentions de l'Auteur. Notre première raison d'étudier l'implication de Descartes dans la discussion consacrée aux questions de Debeaune procède donc d'un regard en arrière. La voix de Descartes, qui domine les débats, et celle de Debeaune, suivant ses conseils, nous donnent à entendre, pour la première, le projet de la *Géométrie* de 1637, et pour la seconde, ce qu'il en est de la réalisation de ce projet.

La difficulté d'interprétation du traité cartésien touche à la détermination précise parmi les nombreuses omissions apparaissant dans la *Géométrie* de celles dont l'élucidation supposée aisée, au pire laborieuse, est laissée au lecteur, et qui ne remettent en rien en cause la théorie et, au contraire, d'omissions qui manifesteraient une faiblesse réelle de la *Géométrie*. Descartes affirme que toutes les omissions sont du premier genre et présente ainsi par avance les traités de Debeaune et Schooten qui suivront comme de simples commentaires, ce que font d'ailleurs également leurs auteurs. De même, l'historiographie s'accorde en général pour reconnaître un Descartes souvent triomphant.

Néanmoins, il nous semble intéressant de nous demander dans quelle mesure les commentaires qui suivent la *Géométrie* modifient ou ne modifient pas véritablement la théorie des courbes et des équations qui y est présentée, comblant alors simplement certaines omissions de l'auteur. C'est ici qu'interviennent les questions de Debeaune comme catalyseur d'un changement avéré dans la Méthode.

En effet, les questions de Debeaune conduiront à l'élaboration par ce dernier d'une note sur les tangentes dans le commentaire des *Notes Brèves* où le géomètre de Blois propose une modification substantielle de la méthode des normales de Descartes[2].

Or les réponses de Descartes nous paraissent éclairer non seulement le point d'arrivée, c'est-à-dire la nouvelle méthode des tangentes présentée dans les *Notes Brèves*, mais surtout le chemin qui y conduit.

On sait que Debeaune recueillera de plus en plus l'attention et la faveur de Descartes qui n'aura alors de cesse de le rallier à son côté, afin d'en faire le représentant, en quelque sorte officiel, de sa Méthode en France. Ce

[2]Cf. *supra* [section 4.2, p. 108].

ralliement passera par des confidences, des conseils qu'il importe de discuter afin de préciser le rôle joué par Descartes dans l'élaboration des *Notes Brèves* et de cette nouvelle méthode des tangentes. Notre seconde raison d'étudier l'implication de Descartes procède donc d'un regard vers la postérité de la *Géométrie*.

Dans ce qui suit, nous conduirons notre étude de l'implication de Descartes dans la discussion mathématique autour des questions de Debeaune en présentant dans l'ordre chronologique des extraits des lettres entre Descartes, Mersenne et Debeaune.

10.2 La lettre du 25 septembre 1638 : la tangente de la première ligne de Debeaune

La première lettre de Debeaune à Mersenne dont nous disposons est datée du 25 septembre 1638. Elle avait été précédée d'une lettre, aujourd'hui perdue, dans laquelle Debeaune se plaignait à Mersenne de difficultés qu'il avait rencontrées dans sa lecture de la *Géométrie* et mentionnait pour la première fois deux lignes courbes apparues au cours de ses recherches en Dioptrique, interrogeant à leur sujet Descartes par l'entremise du Père Minime[3]. À nouveau, on remarquera que la théorie de la Dioptrique apparaît au centre des enjeux des problèmes se posant à Debeaune, comme c'était déjà le cas au sein de la *Géométrie* pour la méthode des normales[4].

Descartes répondra une première fois à ces questions dans une lettre, elle aussi perdue, du 11 octobre 1638[5]. Nous reviendrons sur cette lettre dans la suite. Mersenne d'autre part communiquera les questions de Debeaune à Roberval et à Beaugrand, qui donneront des réponses, incomplètes et incorrectes à des degrés divers.

Debeaune écrit ainsi à Mersenne le 25 septembre 1638 :

> I'ay receu deux lettres de vostre part, dans la premiere desquelles est contenue *l'inuention de la premiere contingente de celles que ie desirois sçauoir de M^r^ Des Cartes, trouuée par M^r^ de Beaugrand*. Ie luy ay beaucoup d'obligation de la peyne qu'il

[3]Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 513].

[4]Cf. *supra* [chapitre 7, p. 229].

[5]C'est ce qu'il indique à Mersenne au début d'une lettre du 15 novembre 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 420].

> a prise a mon subiect, mais ma difficulté ne consistoit pas tant d'auoir ceste ligne, qui ne me sert de rien, comme de sçauoir *le moyen de trouuer ces sortes de lignes, qui est vne science geometrique* que ie desirois auoir, et qui m'est beaucoup vtile a expliquer mes pensees. Et neanmoins M^r de Beaugrand n'auoit point mis ce moyen, ni mesmes la demonstration de sa proposition.
>
> [...] ie n'ay peu resouldre plusieurs des difficultés de sa Geometrie et *principalement les deux que je vous ay enuoyees*. Depuis que i'ay eu du loisir au champt de m'y apliquer entierement, ie les ay resolues et trouué ces lignes que ie desirois et la science de les trouuer. Ie voy bien qu'on en peult deduire l'inuention de ce qu'il [Descartes] a dict, mais il fault necessairement *y adiouster et faire vne equation nouvelle*, ce qui ne conuient pas a un de ses exemples. Et ie croy qu'il n'a point pensé au cas des exemples que ie lui ay proposés [...] la premiere de mes lignes courbes n'est pas vne de celles la [les sections coniques], et neanmoins est du premier genre suiuant sa definition de la page 319. *C'est pour quoy il n'a pas adiousté ce qui est nécessaire, outre ce qu'il dict, pour trouver les contingentes de ces sortes de ligne* [...][6]

Nous avons déjà rencontré auparavant cette première ligne mentionnée par Debeaune. Elle apparaît être l'objet à la fois d'un problème de lieu[7] et d'un problème de tangente[8]. Nous avons ainsi vu qu'un écrit de Beaugrand contre la méthode des normales de Descartes nous apporte la définition de la première ligne de Debeaune. Dans cet écrit, Beaugrand détermine la tangente à la ligne de Debeaune en employant une troisième version de la méthode de Fermat fondée sur la considération de la tangente comme sécante en un point double à la courbe, et termine son exposé en remarquant que la courbe en question est une hyperbole.

10.2.1 Debeaune et la méthode de Fermat

Debeaune avait donc reçu de Beaugrand en septembre 1638 une réponse à la question de la contingente de cette première ligne. Restait que Debeaune ne connaissant pas la méthode de Fermat à l'époque, et désirant semble-

[6] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 515].
[7] Cf. [section 4.2.2, p. 112].
[8] Cf. [section 8.3.1, p. 276].

t-il une méthode générale, n'y avait vu qu'une solution particulière sans démonstration.

Il nous paraît important d'insister sur la remarque faite par Debeaune au sujet de la solution qui lui fut donnée par Beaugrand. D'une part, il ne reconnaît pas une méthode — en l'occurrence, la méthode des tangentes de Fermat —, mais un calcul et une solution particulière. D'autre part, il paraît précisément exiger de son correspondant une méthode générale des *tangentes*. Ce faisant, Debeaune déplace le champ des problèmes, et par là l'étude de l'objet mathématique « courbe algébrique », des normales vers les tangentes. Du reste, même si, comme il le reconnaît lui-même dans la seconde partie de sa lettre, on peut déduire la tangente à une courbe algébrique de la méthode des normales cartésienne, il semble pour autant viser l'élaboration d'une nouvelle méthode « directe » et plus appropriée des tangentes.

Deux semaines après cette première lettre adressée à Mersenne, Debeaune écrivait à Roberval le 10 octobre 1638 :

> [...]A ceste obligation ie vous supplie d'en adiouster vne aultre, *de m'enuoyer au plus tost, par nostre messager, la methode de M^r Fermat que vous m'avés promis, auec l'analyse de ma premiere ligne pour m'en seruir d'exemple.*[9]

On notera que Debeaune ne disposait donc toujours pas de la méthode de Fermat en octobre 1638 et que l'exemple d'application qu'il demande à Roberval de lui fournir est précisément celui de sa première ligne. Debeaune n'avait donc toujours pas reconnu depuis la lettre à Mersenne du 25 septembre 1638 que la solution donnée par Beaugrand répondait à la requête transmise à Roberval. Néanmoins, bien qu'ignorant encore le procédé de la méthode des tangentes de Fermat, il avait été semble-t-il informé entre temps de le puissance de la méthode du géomètre de Toulouse.

Il nous semble important de relever l'ignorance par Debeaune de la méthode de Fermat à l'automne 1638 peu après les épisodes les plus marquants de la controverse sur les tangentes, afin de préciser les éléments du contexte mathématique entourant alors le futur auteur des *Notes Brèves* et de la méthode des tangentes qui figure dans ce commentaire.

[9]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 518].

10.2.2 Une difficulté : la résolution du système en s^2 et v

Revenons aux deux difficultés mentionnées par Debeaune dans sa lecture de la *Géométrie*. On a vu auparavant[10] que la première ligne de Debeaune était une hyperbole d'équation

$$y^2 = xy + bx. \tag{10.1}$$

Le calcul conduisant à la détermination de la sous-normale en appliquant la méthode de Descartes est donné par Debeaune dans son commentaire des *Notes Brèves* à la suite de la détermination de la sous-tangente obtenue en appliquant la nouvelle méthode des tangentes[11]. En éliminant x entre l'équation (10.1) et l'équation[12]

$$x^2 = s^2 - v^2 + 2vy - y^2 \tag{10.2}$$

où s désigne la normale et v la sous-normale, Debeaune obtient l'équation de degré 4

$$y^4+(b-v)y^3+(\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}b^2-2bv-\frac{1}{2}s^2)y^2+(bv^2-b^2v-bs^2)y+\frac{1}{2}b^2v^2-\frac{1}{2}b^2s^2 = 0 \tag{10.3}$$

qui posséde une racine double. En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, on identifie l'équation (10.3), en reprenant les notations de Debeaune dans les *Notes Brèves*, à l'équation

$$(y^2 - 2ey + e^2)(y^2 + fy + g^2) = 0 \tag{10.4}$$

soit

$$y^4 + (-2e + f)y^3 + (g^2 - 2ef + e^2)y^2 + (-2eg^2 + e^2f)y + e^2g^2 = 0. \tag{10.5}$$

Il suffit ainsi de résoudre en f, g^2, s^2, v le système

$$\begin{cases} b - v = -2e + f \\ \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}b^2 - 2bv - \frac{1}{2}s^2 = g^2 - 2ef + e^2 \\ bv^2 - b^2v - bs^2 = -2eg^2 + e^2f \\ \frac{1}{2}b^2v^2 - \frac{1}{2}b^2s^2 = e^2g^2 \end{cases} \tag{10.6}$$

[10] Cf. [section 4.2.2, p. 112].

[11] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 391-392] et [Debeaune(1649), p. 148-150].

[12] Nous nous intéressons ici au calcul algébrique. Pour plus de précisions sur la méthode des normales et le contexte géométrique, cf. *supra* [section 5.1.1, p. 161] et *infra* [section 10.5, p. 365].

Tannery indique que la première difficulté de Debeaune résulterait du fait qu'il a obtenu dans le cas de sa première ligne l'équation (10.3) qui est du quatrième degré, alors que les exemples dans la *Géométrie* ne conduisent qu'à des équations du second ou du sixième degré. En effet, dans le cas de l'équation de l'ellipse $y^2 = rx - \frac{r}{q}x^2$ déduite du *symptoma* des *Coniques* d'Apollonius, qui est donnée par Descartes comme premier exemple, la forme de l'équation conduit à une élimination simple de y qui n'élève pas le degré de l'équation. Il en est de même d'ailleurs pour toutes les coniques, du moins lorsqu'elles sont exprimées par leur équation déduite du *symptoma* qu'on trouve dans les propositions 11 à 13 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius, mais aussi pour l'ovale considérée dans le second exemple, en sorte que le seul exemple faisant apparaître un doublement du degré de l'équation de la courbe concerne la parabole cartésienne[13]. Au sujet des difficultés de Debeaune, Tannery écrit ainsi :

> N'ayant plus de modèle sous les yeux, et ne s'étant pas encore bien assimilé la méthode nouvelle des coefficients indéterminés, le géomètre de Blois s'était trouvé dérouté.[14]

Il nous semble que la difficulté de Debeaune tient plutôt à la résolution du système (10.6) en s^2 et v. Voici ce qu'écrit Debeaune[15] au sujet de la solution de sa première difficulté :

> C'est qu'il faut multiplier
>
> $$y2 - 2ye + e2$$
>
> par[16]
>
> $$y2 + yf + l2$$
>
> [...] qui sera egal à celle que je vous ai envoyé. Or, par le second lieu d'icelle, on aura la quantité f, et par le dernier la quantité $l2$, et par la troisiesme la quantité $s2$, exprimée toutesfois par des quantités partie cognues et partie incognues, d'aultant que la quantité v incognue y entrera. Puis après on aura encores, par le quatriesme, la mesme quantité $s2$, exprimée par une aultre façon, et enfin par l'équation de ces deux qui sont egales à $s2$, on

[13]Sur les exemples cartésiens, cf. *supra* [section 5.3.5, p. 179].
[14]Cf. [Tannery(1904), p. 462].
[15]On remarquera qu'il utilise la notation d'Hérigone pour les puissances.
[16]Dans cette lettre, Debeaune emploie l au lieu de g.

> viendra à cognoistre la quantité v que l'on cherchoit. *Voyla la regle generale à laquelle on peut adjouster quelques moyens d'abreger le travail.* Et de mesme façon on resoudra ma seconde difficulté, et j'ay trouvé qu'elle tomboit dans un lieu solide.[17]

En effet, il est aisé de déduire à partir de la première et de la quatrième équation du système (10.6) une expression de f et de g^2

$$f = b + e - 2v \tag{10.7}$$

$$g^2 = \frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2} \tag{10.8}$$

mais l'expression de g^2 contient s^2 et v^2 alors que dans l'exemple choisi par Descartes de la parabole cartésienne, on détermine les coefficients indéterminés *indépendamment* de s^2, v et v^2. En effet, dans le système à six équations[18] obtenu pour la détermination de la normale à la parabole cartésienne, la sous-normale v apparaît seulement dans la troisième équation, et son carré v^2 et la normale s^2 apparaissent seulement dans la quatrième équation. Cette situation particulière permet à Descartes, par simple substitution, de déduire directement v des coefficients indéterminés[19].

Au contraire, dans le cas de la première ligne de Debeaune, en substituant à f et à g^2 leurs expressions (10.7) dans la deuxième et la troisième équation du système (10.6), on obtient un système de deux équations en s^2, v et v^2. En éliminant s^2 entre les deux équations, on obtient finalement une équation du premier degré en v[20]. Comme l'indiquait Debeaune dans sa lettre, il faut donc nécessairement « ajouter une équation nouvelle » qui ne figure pas dans le système d'équations (10.6).

La premiere difficulté de Debeaune portait donc sur la résolution du système en s^2 et en v une fois que les coefficients indéterminés ont été trouvés. Une telle difficulté était la conséquence directe du choix des exemples par Descartes qui masquaient ce point faible de la méthode, comme on l'a observé auparavant[21].

D'autre part, Debeaune indique une méthode, plus précisément un algorithme jugé par lui plus général, pour obtenir v à partir de s^2, une fois

[17] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 516].
[18] Cf. *supra* [équation (5.19), p. 182].
[19] Cf. *supra*, [section 5.3.5, p. 183].
[20] Pour le calcul, cf. [Debeaune(1638-1648), p. 391-392] et [Debeaune(1649), p. 149-150].
[21] Cf. *supra* [section 5.3.5, p. 179].

qu'on a éliminé successivement les coefficients indéterminés. On a vu qu'il reprochait à Descartes le caractère par trop particulier des premiers exemples choisis pour appliquer sa méthode des normales, bien que l'exemple de parabole cartésienne pût néanmoins apparaître comme faussement prototypique. Dans ce dernier exemple, Descartes avait bien présenté un algorithme général, mais seulement pour l'élimination des coefficients indéterminés.

10.3 La deuxième ligne de Debeaune et le problème inverse des tangentes : la lettre du 10 octobre 1638

La deuxième difficulté mentionnée par Debeaune « qui tomboit dans un lieu solide » renvoie à sa seconde ligne et à un problème inverse des tangentes. Debeaune écrivait dans une lettre à Roberval du 10 octobre 1638 déjà citée[22] :

> Au reste, i'ay faict l'analyse de ces deux lignes, mais ie ne vous envoye que celle de la seconde, d'aultant que vous avés parfaitcement descript la premiere ; et ie trouve que, par la seule proprieté que i'ay donnée a la seconde, elle se peult cognoistre et descrire comme vous verrés, et que le probleme est solide.[23]

L'analyse de la première ligne renvoyant à un problème de lieu, Debeaune paraît donc mettre sur le même plan problème de lieu et problème inverse des tangentes. Ces deux problèmes proposent de déterminer une courbe géométrique, par une construction point par point ou bien par une identification à une courbe d'une classe connue — par exemple, les coniques — à partir de la donnée d'une propriété spécifique.

10.3.1 L'énoncé du problème inverse des tangentes

Debeaune annexait donc son analyse portant sur sa deuxième ligne à la lettre à Roberval du 10 octobre 1638[24]. L'énoncé de la question est le suivant :

> Soit la courbe AXE de laquelle le sommet soit A, l'axe AYZ, et que la propriété de ceste courbe soit telle, qu'ayant pris en icelle

[22]Cf. *supra*, p. 113.
[23]Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 517].
[24]Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 519-524].

> tel poinct qu'on vouldra, comme X, duquel soit menée la ligne droite XY perpendiculairement ordonnée à l'axe, et par le mesme poinct X ayant mené la touchante GXN, sur laquelle, au poinct X, eleuant la perpendiculaire XZ iusques a l'axe, il y ait mesme raison de ZY à YX que d'une ligne donnée, comme AB, a la ligne YX moins AY.[25]

On peut remarquer qu'il s'agit d'un problème à proprement parler non pas inverse des tangentes mais inverse des normales, hérité par Debeaune de sa lecture de la *Géométrie*. Si, dans un premier temps, c'est la tangente qui est considérée, ensuite la propriété de la courbe est définie par une proportion vérifiée par la sous-normale.

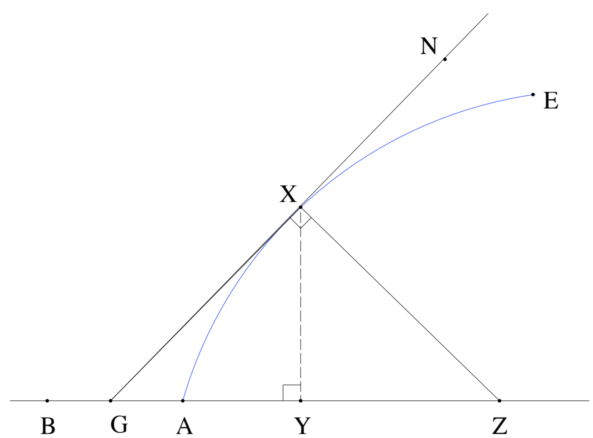

FIG. 10.1 – La deuxième ligne de Debeaune

Posons AY $= y$, AZ $= v$, AB $= \beta$ et YX $= x$. La courbe cherchée vérifie ainsi la proportion

$$v - y : x = \beta : x - y \tag{10.9}$$

dont on déduit une expression de x en fonction de v et y

$$x = \frac{vy - y^2}{v - y - \beta}. \tag{10.10}$$

[25] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 519].

10.3.2 La solution de Debeaune dans la lettre à Roberval du 10 octobre 1638

Résumons le calcul de Debeaune[26]. Il élimine x entre l'équation (10.10) et la relation cartésienne (10.2) tirée du cercle tangent. Debeaune obtient ainsi une équation du quatrième degré en y qu'il identifie avec une équation à deux indéterminées possédant deux racines égales. Ayant éliminé les coefficients indéterminés puis le carré de la normale s^2, en suivant la même « méthode générale » indiquée par lui dans sa lettre du 25 septembre, il tire finalement une équation cubique en v et y. Eliminant enfin v entre cette équation et la condition (10.9), il aboutit à une équation cubique en x et y

$$x^3 + (\beta - 3x - y)x^2 - (\beta y + 3y^2)x - \beta^2 y - y^3 = 0 \tag{10.11}$$

qui lui fait dire que le problème est solide. Debeaune prétend ainsi avoir trouvé une équation de la courbe cherchée qui lui permettra de construire celle-ci point par point[27].

Le calcul, maîtrisé et bien mené, n'apporte néanmoins que peu de satisfaction à Debeaune qui n'en voit pas de démonstration. Qu'a t-il fait sinon appliquer, certes à tort, la méthode générale qu'il décrivait précédemment à Mersenne ?

Dans une lettre du 13 novembre 1638, Debeaune écrivait ainsi à Mersenne pour se plaindre de la solution qu'il avait donnée pour sa seconde ligne en complément de sa lettre à Roberval du 10 octobre 1638[28] :

> Pour l'escript ou analyse, que ie lui [à Roberval] ay enuoyé de ma seconde ligne, ie n'en suis pas satisfaict moy mesme. Ie ne sçay ce que M^r^ Roberual en aura trouué, car ie n'en ay poinct encores eu response. *C'est seulement vn calcul, mais ie n'en ay peu trouuer la demonstration, et, par consequence, ie n'en puis faire aulcun estat. I'auois faict ce calcul sur le modele de celuy de l'aultre ligne*, mais le default que i'y trouue est que la quantité que ie nomme v doibt estre fixe et non variable en la premiere equation [(10.2)] par laquelle i'exprime x et dans la se-

---

[26] Nous nous inspirons de la présentation de Tannery : [Tannery(1904), p. 465-467].

[27] Introduisant des changements de variables, Debeaune démontre enfin qu'une telle courbe, bien que du second genre dans la classification cartésienne, peut être construite à la règle et au compas. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 523-524].

[28] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 519-524].

> conde [équation (10.10)] elle doibt estre variable, affin que le calcul conclue. Voila pourquoy ie croy que tout ce calcul ne conclud rien. Ie seray fort aise que vous faciés voir ce que ie vous en mande a M^{r} Roberval ; mais tant s'en fault qu'il doibve estre veu de M^{r} Des Cartes. Il ne vault qu'a estre mis au pannier aux bourriers ; aussi l'ay-ie enuoyé pour en auoir advis, et auant d'en auoir moy mesme examiné la demonstration, me fiant seulement au calcul que ie pensois auoir trouué.
>
> I'escris a M^{r} Descartes la lettre cy-incluse, que ie laisse ouuerte, affin que vous la voyés. [...] Vous m'obligerés beaucoup de vous ioindre auec moy pour obtenir l'inuention de ma seconde ligne courbe, et luy mander, a ceste fin, qu'on ne l'a peu trouuer a Paris.[29]

Plus tard, dans sa lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, Descartes relevait avec bienveillance l'erreur de Debeaune :

> [...] La premiere [lettre][30] ne contient que la solution que donne Monsieur de Beaune pour sa 2(^{e}) ligne, en laquelle je voy qu'*il pratique parfaitement bien les plus difficiles operations de mon analise*[31], et j'admire qu'il en ait pû tant apprendre du peu que j'en ay écrit. [...] pourveu qu'il continuë à s'y exercer, il surpassera tous ceux qui se servent des autres methodes. Ce n'est pas à dire pourtant que sa solution soit vraye, [...] cherchant la tangente d'une courbe, sans en sçavoir d'autre proprieté que celle de cette tangente, *il a fait un cercle en logique* ; de quoy vous l'avertirez, s'il vous plaist, en telle façon qu'il ne le puisse prendre qu'en bonne part ; *car je voudrois le pouvoir servir, et je lui suis très obligé de ce qu'il tasche à faire valoir ce qui vient de moy.*[32]

La collaboration avec Debeaune voulue par Descartes se poursuivit : Debeaune allait être, par l'entremise de Mersenne, informé des éléments et des développements de la controverse entre Descartes et Fermat de 1638 au sujet

---

[29] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 528].

[30] Dans sa lettre du 25 octobre, Mersenne avait communiqué à Descartes contre l'avis de Debeaune l'analyse de la deuxième ligne que ce dernier avait annexé à la lettre adressée pour Roberval du 10 octobre.

[31] Descartes fait-il ici allusion à la question de la résolution du système en s^2 et en v à laquelle on est confrontée en appliquant la méthode des normales ?

[32] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 438-439].

des tangentes durant le premier semestre de l'année 1639, comme on va le voir dans la section suivante.

D'autre part, on sait bien que Descartes donne dans sa célèbre lettre à Debeaune du 20 février 1639 une solution très élégante[33] de ce problème inverse des tangentes[34]. Voici comment Chasles résume la méthode cartésienne dans son *Aperçu* :

> Ce problème, difficile, même avec le secours du calcul intégral, et qui a occupé, à la naissance de ce calcul, Leibnitz et les frères Bernoulli, a été résolu par Descartes, qui, avec son habitude de vaincre les plus grandes difficultés en Géométrie, sut ramener la question aux lieux géométriques, en considérant chaque point de la courbe comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines ; et découvrit ainsi que la courbe avait une asymptote parallèle à l'axe fixe, et que la soutangente prise sur cet asymptote était constante. Ces propriétés ont conduit Descartes à la construction de toutes les tangentes de la courbe, et à celle de la courbe elle-même par l'intersection de deux règles qui se mouvaient avec des vitesses déterminées. L'incommensurabilité de ces deux mouvements lui fit voir que la courbe était *mécanique*, et de celles auxquelles ne s'appliquait point son analyse. Aussi n'en donna-t-il pas l'équation.[35]

10.3.3 Deux problèmes de même nature ?

Pour Debeaune, il semble ainsi apparaître que la caractérisation d'une courbe par une propriété de la sous-normale exprimée par une proportion ou une équation est tout aussi légitime qu'une caractérisation par la propriété exprimée par une proportion ou une équation entre l'abscisse et l'ordonnée.

La façon dont Debeaune résumera son problème inverse à l'intention du Père Mersenne et des mathématiciens parisiens dans sa lettre du 5 mars 1639 nous paraît confirmer une telle interprétation. Debeaune écrit ainsi :

[33] « Un des documents les plus importants dans l'histoire du nouveau calcul » selon Chasles. Cf. [Chasles(1837), p. 97].

[34] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 514-517 et Éclairicissement, p. 520-523]. Nous n'aborderons pas ici la résolution par Descartes de ce problème qui a été étudié en détail par Jules Vuillemin : [Vuillemin(1960), p. 11-25]. Cf. également [Milhaud(1921), p. 169-175] et [Costabel(1985)].

[35] Cf. [Chasles(1837), p. 97].

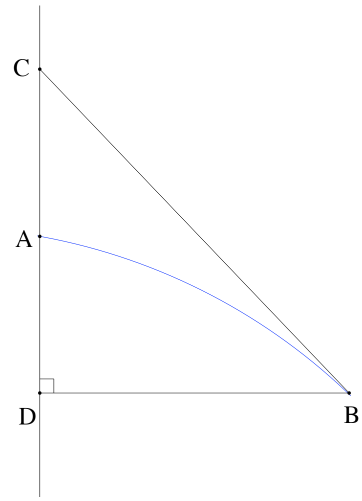

FIG. 10.2 – Le problème inverse des tangentes résumé par Debeaune

> Mais, pour esclaircir la matiere, soit quelconque ligne courbe AB, son sommet A, son axe AD, la ligne DB perpendiculairement ordonnée sur iceluy, la tangente de la courbe au point B, CB, qui rencontre l'axe prolongé au poinct C ; on a methode, ayant une equation qui explique le rapport d'entre les lignes AD et DB, de trouver la ligne CD. Ie demande au contraire, la methode, ayant une equation qui explique le rapport entre CD et DB de pouuoir trouver la ligne AD.[36]

On remarquera d'une part que Debeaune six mois plus tard, en mars 1639, formule sa méthode en usant de la sous-tangente et non de la sous-normale, reprenant ainsi la reformulation de la Méthode de Descartes qui apparaît dans les *Notes Brèves*. À nouveau, Debeaune témoigne ainsi du changement de perspective que nous avons essayé auparavant de montrer à l'oeuvre dans les réponses et questions des acteurs de la discussion mathématique autour de ses deux premières lignes. D'autre part, Debeaune emploie alors explicitement comme mode d'expression privilégié d'une propriété l'équation. Une double transformation s'est donc opérée par rapport à l'origine : tangente pour normale, équation pour proportion.

[36] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 535].

10.4 La genèse de la méthode des tangentes de Debeaune

Considérons à présent la suite des échanges entre Descartes et Debeaune par l'entremise de Mersenne durant l'année 1639.

10.4.1 La datation de la méthode des tangentes de Debeaune

Il va de soi que les communications de Descartes concernant des tangentes prennent un relief différent vis à vis de la « nouvelle » méthode des tangentes présentée par Debeaune dans les *Notes Brèves*, selon qu'elles précéderaient son élaboration ou au contraire qu'elles la suivraient. Dans le second cas, d'ailleurs, l'insistance de Descartes et de Debeaune sur ces questions auraient de quoi surprendre le lecteur, puisque la question aurait était déjà réglée.

Dans la suite, nous allons précisément interroger cette chronologie, certes à partir d'éléments assez ténus, mais néanmoins relativement signifiants. Un premier examen de la succession des échanges entre Descartes et Debeaune à ce sujet durant l'année 1639 fera, nous l'espérons, apparaître aux yeux du lecteur une hypothèse, que nous examinerons ensuite sur le plan strictement mathématique, concernant l'élaboration par Debeaune de sa méthode des tangentes.

On retrouve la note « sur la page 341 et suivantes où est comprise l'invention pour trouver les contingentes des lignes courbes » dans les deux copies en français dont nous disposons[37] mais aussi en latin dans l'édition latine de van Schooten de 1649[38]. D'autre part, on sait d'après la Correspondance que Descartes reçut le commentaire de Debeaune dans l'intervalle séparant le 9 du 20 février 1639[39].

Reste bien sûr à s'interroger sur ce qui figurait alors dans ce premier texte et ce qu'il en était plus précisément de la méthode des tangentes. Une telle réflexion n'a rien d'incongrue pour plusieurs raisons. D'une part, l'original de Debeaune est perdu. D'autre part, on sait que Debeaune procéda à au moins un ajout postérieur à son commentaire d'après une lettre adressée à

[37]Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 390-391].

[38]Cf. [Debeaune(1649), p. 147-150]. Cf. également *infra* [section 10.5, p. 365].

[39]Nous renvoyons pour plus de détails à la présentation du texte et des sources que nous avons donnée *supra* [section 1.2, p. 26].

Schooten de juin 1648[40].

D'ailleurs, cette note ajoutée ultérieurement à la première rédaction des *Notes* fait précisément écho à une critique que Descartes s'était adressé dans la lettre à Debeaune du 20 février 1639, dans laquelle il accusait réception des *Notes* de ce dernier. Nous n'entrerons pas ici dans le détail mathématique de cette note[41], néanmoins, rappelons qu'au sein du texte des *Notes Brèves*, elle n'apparaît pas comme un commentaire ou un éclaircissement, mais bien comme un complément à la classification des lieux donnée dans la *Géométrie*, qui reflète un changement de position mathématique.

Exactement de la même façon, la méthode des tangentes présentée par Debeaune apparaît elle aussi comme une addition. Et, toujours de la même façon, dans la lettre à Debeaune du 20 février 1639, Descartes opère une critique concernant sa méthode des tangentes à la suite d'une première critique concernant sa résolution du problème de Pappus et sa classification des lieux.

Comme nous avons essayé de le montrer tout au long des pages précédentes, les deux additions sur le problème de Pappus et la méthode des normales sont en quelque sorte allogènes au texte : elles ne participent ainsi pas d'un développement naturel mais au contraire d'un changement, désigné comme tel par Descartes dans sa lettre à Debeaune, pour ce qui regarde la classification en genres et la solution du problème de Pappus.

10.4.2 La lettre de Descartes à Debeaune du 20 février 1639

On le sait bien, Descartes fit une réponse enthousiaste à Debeaune le 20 février 1639, après réception des commentaires de ce dernier. De cette lettre bien connue, nous n'extrayons que deux des passages relatifs à la question des tangentes que nous faisons précéder de l'avertissement initial donné par Descartes :

> [...] Et par tout ie prens garde que vous auez plustost eu dessein d'excuser mes fautes, que de les decouurir ; de quoi i'ay veritablement sujet de vous remercier, à cause que c'est un grand témoignage de vostre bienveillance ; mais ie ne vous aurois par

[40] Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 321-322] et *supra* [section 1.2, p. 27].

[41] Nous avons déjà étudié cette observation. Cf. *supra* [section 4.2.3, p. 118]. On peut consulter également le texte et la présentation donnés par Adam-Milhaud. Cf. [Descartes(1936-1963), IV, p. 364-365] et [Debeaune(1638-1648), p. 386-389].

> moins remercié, si vous les auiez remarquées, à cause de l'utilitè que i'en aurois pû retirer. Et afin que vous sçachiez que ie ne me flatte pas tant que ie n'y reconnoisse beaucoup de manquemens [en la *Géométrie*], ie vous en diray icy quelques-vns.
>
> [...] Et au contraire, pour les tangentes ie n'ai donné qu'un simple exemple de l'analyse, pris mesme d'un biais assez difficile, & i'y ai obmis beaucoup de choses qui pouuoient y être adjoûtées pour la facilité de la pratique. Toutesfois ie puis assurer que ie n'ay rien obmis de tout cela qu'a dessein [...]
>
> [...] Ie ne crois pas qu'il soit possible de trouver généralement la converse de ma regle pour les tangentes, ny de celle dont se sert Monsieur de Fermat non plus, bien que la pratique en soit en plusieurs cas plus aisée que de la mienne.[42]

Les extraits ici présentés, qu'ils soient lus pour eux-mêmes ou au regard du contexte de la correspondance au sujet des questions de Debaune que nous avons tâché de restituer dans les pages précédentes, nous paraissent suggérer, à défaut de démontrer, un nouvel élément décisif concernant la genèse de la méthode des tangentes présenté dans les *Notes Brèves*.

Descartes semble en effet ici s'adresser à Debeaune comme si, dans le texte qui lui avait été confié par ce dernier ne figurait pas cette nouvelle méthode des tangentes, puisqu'il se fait à lui-même le reproche de n'avoir présenté dans sa méthode des tangentes « qu'un simple exemple de l'analyse, pris mesme d'un biais assez difficile ». Or, dans un avertissement initial, il a indiqué à Debeaune qu'il allait présenter par après des manquements en la *Géométrie* — qu'il allait nommer par la suite de façon plus favorable des « omissions » —, que Debeaune n'avait par relevés. Un de ces manquements, comme on l'a vu, tenait à la classification en genres et à la solution du problème de Pappus.

On remarquera à nouveau le changement de perspective qui s'est opéré, comme on a essayé de le montrer, entre autres, à l'occasion des questions de Debeaune. Car, considérée en tant que méthode des tangentes, il est en effet tout à fait vrai que l'analyse cartésienne est malaisée, et, par voie de conséquence, la pratique plus difficile que celle de la méthode de Fermat, comme le remarque d'ailleurs lui-même Descartes.

Cette lettre de Descartes témoigne ainsi du projet du philosophe de proposer une synthèse de la méthode des tangentes de Fermat et de sa méthode

[42] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 510-514].

des normales dans une nouvelle version de la *Géométrie*. Comme on l'a vu, la composante mathématique de ce projet apparaissait déjà dans la lettre à Hardy de juin 1638[43].

10.4.3 L'envoi des pièces de la controverse sur les tangentes par Descartes à Debeaune

De surcroît, pour préciser le rôle et l'implication de Descartes, nous disposons en effet de plusieurs témoignages qui apparaissent dans la correspondance entre Descartes, Mersenne et Debeaune du premier semestre de l'année 1639.

Descartes écrit ainsi dans sa lettre à Mersenne du 20 février 1639 :

> Monsieur de Beaune me mande [...] que vous luy auez fait voir toute notre dispute de M. (Fermat) & de moy, touchant sa regle pour les Tangentes[44]. Ie serois bien aise qu'il vist aussi ce que i'en ay vne fois écrit à M. Hardy[45], où i'ay mis la demonstration de cette regle, laquelle M. (Fermat) n'a iamais donné, quoy qu'il l'eust promise, & que nous l'en ayons pressé, vous & moy. Vous en aurez aisément un copie de M. Hardy, & ie seray bien aise que M. de Beaune iuge par là, qui c'est qui a le plus contribué à l'inuention de cette regle.[46]

Cette lettre témoigne d'un premier fait important quelle que soit par ailleurs l'incertitude qui entoure la genèse de la méthode des tangentes présentée par Debeaune dans les versions française et latine des *Notes Brèves* dont nous disposons. Elle démontre en effet que Debeaune n'a pas élaboré son commentaire seul, sans documents, mais, qu'au contraire, il a pu prendre connaissance à la même époque des éléments relatifs à la discussion autour de ses lignes, dont en particulier la détermination de la tangente à sa première ligne envoyée par Beaugrand, puis des pièces de la controverse entre Fermat et Descartes au sujet des tangentes qui lui furent communiquées par Mersenne, enfin, plus tard, de la démonstration par Descartes de la règle de Fermat dans la lettre à Hardy de juin 1638.

---

[43] Cf. *supra* [section 9.5, p. 336].

[44] Debeaune a bien reçu ces pièces. il le confirme dans sa lettre à Mersenne du 26 février 1639 [Descartes(1964-1974), V, p.531-532].

[45] Cf. la lettre de Descartes à Hardy qu'Adam et Tannery datent de juin 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 169-173] et *supra* [section 9.5, p. 336].

[46] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 526].

La question bien sûr essentielle qui apparaît ici tient à l'antériorité ou à la postériorité de la communication à Debeaune de tout ou partie de ces documents relativement à la rédaction de son commentaire sur les tangentes. Mais, de toute façon, Descartes nous invite ici à mettre en relation quatre textes mathématiques : la méthode des normales de la *Géométrie*, l'exposé de la méthode des tangentes de Fermat par Beaugrand, la démonstration de la règle de Fermat par Descartes, et la méthode des tangentes proposée par Debeaune.

D'autre part, cette lettre atteste du changement de terrain adopté définitivement par Descartes, qui s'est produit suite à la controverse avec Fermat. La règle de Fermat pouvant être démontrée par la même Méthode ayant permis auparavant à Descartes d'élaborer sa méthode des normales dans la *Géométrie*, ainsi que Descartes prétend le montrer dans la lettre à Hardy de juin 1638, c'est donc la Méthode qui fonde la règle de Fermat et lui donne tout son sens. De ce fait, il n'y a donc pas lieu de comparer la méthode des normales de Descartes et la règle de Fermat, puisqu'elles son fondées toutes deux, dans l'esprit de Descartes, sur la Méthode. La controverse apparaît donc hors de propos.

Par la suite, nous allons voir à travers deux lettres de Debeaune à Mersenne que la discussion va se poursuivre entre Descartes et Debeaune au sujet des tangentes, et plus particulièrement au sujet de la démonstration de la règle de Fermat par Descartes, réclamée avant d'être appréciée par Debeaune. Plus tard, dans une lettre du 26 mars 1639, voici ainsi ce qu'il écrit à Mersenne :

> Ie vous ay mandé, au prochain dimanche suiuant la reception de la lettre de M^r^ Des Cartes[47]
>
> [...] et i'attends de vous [Mersenne] sa démonstration [celle de Descartes] de la regle de M^r^ Fermat.
>
> [...] Il m'a du tout esté impossible de prendre assés de loisir pour escrire a M^r^ Des Cartes par ce voiage : ie veux dire de digerer et mettre par escript les pensées que ie luy veux enuoyer.[48]

Finalement, Debeaune recevra bien cette démonstration dans la semaine

[47]Il s'agit de la lettre du 20 février 1639 pour remercier Debeaune de son envoi des *Notes Brèves*. Il semble ainsi que Debeaune ne reçut cette lettre de Descartes que dans la semaine du 13 au 20 mars, Mersenne l'ayant probablement gardé quelque temps. Debeaune lui aurait ainsi envoyé une lettre pour en accuser réception le 20 mars.

[48]Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 536-539].

qui suit, puisqu'il écrit à Mersenne le 3 avril 1639 :

> I'ay receu les trois lettres et le pacquet que vous m'aués enuoyés ceste sepmaine, *et i'ay receu vn particulier contentement de la demonstration de M^r^ Des Cartes touchant la regle de M^r^ Fermat.*[49]

Pour conclure, que nous montrent toutes ces lettres ? D'une part, une relation constante entre Debeaune et Descartes qui continue à se manifester après l'envoi des *Notes Brèves*, d'autre part, la communication par Descartes à Debeaune de l'ensemble des pièces concernant la dispute sur les tangentes, dont en particulier la démonstration de la règle de Fermat.

10.4.4 La lettre de Descartes à Mersenne du 25 décembre 1639

Du reste, une dernière lettre de l'année 1639 de Descartes à Mersenne nous invite à nouveau à penser que la méthode des tangentes de Debeaune ne figurait peut-être pas dans la première version des *Notes Brèves* envoyées à Debeaune.

Le 25 décembre 1639, Descartes écrivait ainsi au sujet du projet d'une éditon latine de la *Géométrie*[50] :

> Je n'ai point dessein ni occasion de faire imprimer les *Notes* que Mr de Beaune a pris la peine de faire sur ma *Géométrie* ; mais s'il les veut faire imprimer lui-même, il a tout pouvoir ; *seulement aimerais-je mieux qu'elles fussent en latin, et ma Géométrie aussi*, en laquelle j'ai dessein de changer quasi tout le second Livre, en y mettant l'analyse des lieux, et y éclaircissant la façon de trouver les tangentes ; ou plutôt (à cause que je me dégoûte tous les jours de plus en plus de faire imprimer aucune chose), *s'il lui plaît d'ajouter cela en ses Notes, je m'offre de lui aider en tout ce qui sera de mon pouvoir.*[51]

À la fin de l'année 1639, Descartes ressentait ainsi la nécessité de reformuler la méthode des normales apparaissant dans la *Géométrie* de 1637. Mais quel intérêt pouvait présenter une telle reformulation pour Descartes si elle

[49] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 539].
[50] Cf. *supra* [section 1.3, p. 30].
[51] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 638].

apparaissait déjà dans le texte des *Notes Brèves* qui lui avait été communiqué au début de l'année 1639 ?

10.5 La méthode des tangentes de Debeaune dans les *Notes Brèves*

10.5.1 La présentation de la méthode des tangentes par Debeaune dans les *Notes Brèves*

Dans les *Notes Brèves*, la note « Sur la page 341 et suivantes ou est comprise l'inuention pour trouuer les contingentes des lignes courbes » reprend assez clairement les remarques faites par Debeaune sur la méthode des normales lors de la discussion de l'automne 1638 portant sur la première et la deuxième ligne que nous venons d'étudier. Ainsi, le commentaire de Debeaune s'ouvre par la question de la généralité de la méthode cartésienne des tangentes opposée au caractère particulier des exemples choisis par Descartes :

> [...] il est à remarquer que *les exemples proposés en cette Géométrie ne peuvent être suivis exactement qu'en fort peu de cas et qu'ils ont été expressemment accomodés à ce qui devait puis après [être] démontré touchant la figure des verres brûlants.* Il faut donc savoir que la règle proposée en ce lieu pour trouver les tangentes des lignes courbes, *en tant qu'elle est générale* ne consiste qu'à trouuer une équation en laquelle ce qui est nommé y puisse être pris pour deux diverses quantités lorsque ce qui est nommé v ne se rapporte pas à la tangente et que, lorsque il s'y rapporte, deux quantités s'assemblent en une *en quelle façon que cela se puisse*, et après à comparer cette équation avec une autre composée de $y^2 - 2ey + e^2$; *en laquelle façon aussi que cela se puisse* [...][52]

Il apparaît clairement dans ce commentaire que Debeaune écrit après la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat. Sa formulation nous semble ainsi clairement témoigner du changement de perspective qui a eu lieu à cette occasion.

[52]C'est moi qui souligne. Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 390].

Nous avons vu en effet qu'on trouve les origines géométriques de la méthode des normales dans le Livre V des *Coniques* d'Apollonius[53]. D'autre part, nous avons essayé également de montrer que la formulation et la genèse de la méthode des normales ont été influencées par la question des verres brûlants apparaissant dans la *Dioptrique*[54]. L'interprétation et la reformulation de cette méthode en une méthode des tangentes fut ainsi le résultat de de la controverse avec Fermat. Cette nouvelle interprétation fit apparaître alors la complexité de l'algorithme cartésien comparé à celui de Fermat et révéla une faiblesse qu'il fallait pallier.

Mais disons le à nouveau, l'interprétation que nous faisons de la méthode des normales comme une méthode des tangentes afin de lire l'une à l'aune de l'autre nous paraît étrangère à Descartes à l'origine. Selon nous, une méthode des tangentes n'est pas l'objet principal de la réflexion et du projet cartésien de la *Géométrie* et n'apparaît pas avant 1638 et l'opposition à Fermat. Ce postulat d'interprétation de la méthode cartésienne nous paraît d'ailleurs être le résultat d'une lecture biaisée, dirigée vers la théorie des courbes algébriques et du Calcul infinitésimal de la fin du dix-septième siècle, qui s'appuie d'ailleurs sur la réécriture *a posteriori* de la *Géométrie* cartésienne par les mathématiciens de cette époque, comme le Marquis de l'Hospital.

10.5.2 L'application de la méthode des tangentes à la première ligne de Debeaune dans les *Notes Brèves*

Le fait que Debeaune choisisse de prendre pour exemple dans son commentaire la question portant sur sa première ligne[55] donne à penser que les questions de Debeaune ont joué, au moins pour ce dernier, un rôle dans l'élaboration d'une méthode des tangentes.

Comme on le sait, le géomètre de Blois reformule à cette occasion la méthode des normales de Descartes. En effet,

> au lieu de s'imaginer que la courbe AFM est touchée au point M par un cercle dont le rayon est MN, il vaut mieux imaginer

[53] Cf. *supra* [chapitre 6, p. 197].

[54] Cf. *supra* [chapitre 7, p. 229].

[55] Cf. [Debeaune(1638-1648), p. 390-392]. Marco Panza donne une étude très détaillée de la méthode des tangentes de Debeaune dans [Panza(2005), p. 92-104]. Pour cette raison, notre présentation sera relativement brève.

qu'elle est touchée par la ligne droite MP, à cause que par ce moyen on s'exempte de la multiplication superflue [...][56]

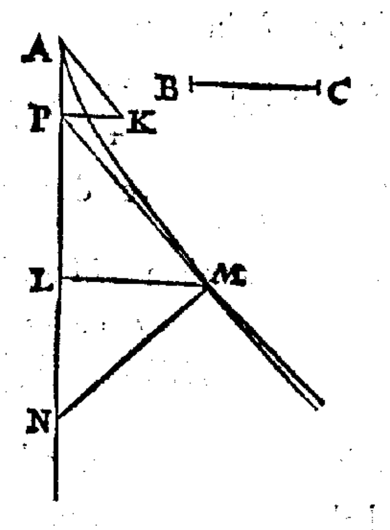

FIG. 10.3 – *Geometria* (1649), p. 147

Ainsi, posant d'une part $\mathsf{AL} = x$ et $\mathsf{LM} = y$, d'autre part[57] $\mathsf{AP} = v$ et $\mathsf{PK} = s$, où le triangle APK est semblable au triangle PLM, on a

$$\mathsf{AP} : \mathsf{PK} = \mathsf{PL} : \mathsf{LM}, \tag{10.12}$$

d'où

$$y = \frac{xs - vs}{v}, \tag{10.13}$$

qui est une équation du premier degré en y, alors que l'équation (10.2) était du second degré. Cette équation du premier degré est bien sûr celle de la droite tangente dans le repère, à condition d'identifier $\frac{v}{s}$ comme son coefficient angulaire. Une telle constatation, essentielle et non triviale, apparaît comme un des résultats de la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat.

De surcroît, cette relation est établie à partir du théorème des triangles semblables, et non pas à partir du théorème de Pythagore. Il s'ensuit qu'elle peut s'appliquer sans plus de difficultés lorsque les coordonnées sont obliques.

[56]Cf. [Debeaune(1638-1648), p 390].

[57]Debeaune reprend ici la même notation pour désigner la sous-tangente que celle employée par Descartes pour désigner la sous-normale.

Eliminant y entre (10.1) et (10.13), on déduit l'équation

$$x^2 = \frac{bs - vs}{v - s}x - \frac{bvs}{v - s} \tag{10.14}$$

.

Cette équation admet une racine double e lorsque la droite MP est tangente à la courbe, ce que ne précise pas Debeaune. On obtient finalement la solution

$$v = \frac{bx}{2b + x}. \tag{10.15}$$

Ensuite, comme on l'a vu[58], Debeaune montre que la méthode des normales de la *Géométrie* permet également de résoudre le problème, bien que plus difficilement, puisqu'on obtient cette fois en éliminant y entre l'équation (10.1) et l'équation (10.2) une équation de degré 4 en x[59].

[58]Cf. *supra* [section 10.2.2, p. 350].
[59]Cf. *supra* [section 10.2.2, p. 350].

Conclusion

L'objet de cette seconde partie était de s'interroger sur les raisons qui poussèrent Descartes à donner une méthode des normales, plus embarrassée du point de vue du calcul algébrique qu'une méthode des tangentes, comme celle donnée ultérieurement par Debeaune dans les *Notes Brèves*.

La reconstruction précédente nous paraît rendre compte d'une origine possible pour la méthode des normales proposée par Descartes dans sa *Géométrie*. Le paradoxe qui apparaît devant les yeux du lecteur moderne proviendrait ainsi du conflit entre l'origine géométrique et la traduction algébrique opérée par Descartes, toutes deux constitutives de la méthode des normales.

En effet, l'origine géométrique de la méthode des normales entre en conflit avec l'usage de l'algèbre du point de vue de la simplicité de la méthode : l'équation du cercle provoque en général le doublement du degré de l'équation de la courbe algébrique lors de l'élimination et du passage à l'équation résultante.

Il nous semble ainsi avoir démontré qu'on pouvait rapporter la composante géométrique de la méthode des normales de Descartes à une origine mathématique sinon historique constituée par la théorie des droites *minimum* d'Apollonius, et à un contexte, la théorie de la Dioptrique, qui ont tous deux participé de la genèse de la méthode, en imposant la normale comme son objet.

La transformation profonde qui s'est opérée entre la première et la troisième méthode de Fermat est de même nature que celle qui a eu lieu pour la méthode des normales de Descartes dans le même intervalle. L'introduction d'une méthode algébrique puissante a conduit dans les deux cas à la marginalisation puis à l'abandon des éléments de la méthode dont la raison d'être était étrangère au fondement algébrique du calcul parce qu'il relevaient d'une tradition géométrique classique. Ainsi la première analyse géométrique qui apparaissait dans la première version de chacune des deux méthodes non seulement est modifiée dans les versions suivantes mais n'est plus à proprement parler géométrique dans la mesure où ce sont les méthodes algébriques qui la suivent qui ont commandé sa modification.

Si l'analyse géométrique initiale qui apparaît dans les méthodes de Descartes et Fermat procède d'une généralisation des démonstrations d'Apollonius, la genèse de la courbe algébrique comme objet, du fait de l'introduction de méthodes arithmético-algébriques comme celle de l'adégalisation ou des coefficients indéterminés, est en marche.

Comme nous avons essayé de le montrer, tant sur le plan mathématique, en analysant les différentes versions des méthodes des normales et des tangentes de Descartes et Fermat, que sur le plan historique, en mettant en évidence les discussions et les échanges entre Descartes, Fermat et leurs soutiens, c'est dans la Correspondance et plus précisément dans la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat qu'il faut chercher les origines et les raisons de cette transformation fondamentale.

La controverse sur les tangentes avec Fermat a en effet conduit Descartes à réinterpréter et à modifier profondément sa méthode des normales en une méthode des tangentes, rejetant définitivement l'origine et le contexte de la méthode qui apparaissaient encore dans la *Géométrie* de 1637.

À l'issue de l'analyse historique et mathématique de la controverse sur les tangentes que nous avons conduite, il nous paraît à présent possible d'interpréter les critiques de Descartes en les expurgeant de la mauvaise foi dont fait preuve leur Auteur.

Ainsi, la critique du manque de généralité dont souffrirait la méthode de Fermat nous paraît renvoyer à une critique de l'analyse trans-configurationnelle[60] pratiquée par Fermat dans son application de la méthode de la recherche d'*extremum* au problème de la tangente à la parabole. Le choix du rapport $\mathsf{BC}^2 : \mathsf{CD}$ fait par Fermat dans sa première méthode, qui provient, comme nous l'avons vu, de — sa lecture de ? — la proposition 33 du livre I des *Coniques* d'Apollonius consacrée à ce même sujet, conduit à produire une analyse trans-configurationnelle qui, bien que généralisable à une courbe algébrique quelconque, paraît liée à la forme de l'équation des coniques.

Un tel argument peut en effet être appliqué d'une part aux autres coniques, comme le fait d'ailleurs Fermat dans le cas de l'ellipse à la suite d'Apollonius, en considérant, pour le dire de façon moderne, que le *mini-*

[60]Cf. *supra* [section 8.4.3, p. 293] et [section 8.4.6, p. 299].

mum de la quantité $\frac{y^2}{rx \pm \frac{r}{q}x^2}$ le long de la tangente est atteint au point de contact de la tangente avec l'ellipse ou l'hyperbole.

Néanmoins, comme on l'a déjà remarqué auparavant, pour généraliser l'analyse trans-configurationnelle de Fermat, il faudrait transformer le problème de la détermination de la tangente en un point à une courbe d'équation $y^n = f(x)$, où $f(x)$ est une fonction polynôme, en celui de la détermination de l'*extremum* de la quantité $\frac{y^n}{f(x)}$ le long de la tangente. On sait en effet que cet *extremum* est atteint au point de contact avec la courbe et qu'il s'agit d'un *minimum* ou *maximum* selon que la courbe est convexe ou concave.

Une telle modification qui a été suggérée par Duhamel[61] apparaît néanmoins difficile voire impossible directement pour Fermat car elle implique une rupture. Une telle quantité et son *extremum* ne peuvent être en effet interprétés géométriquement à la différence du coefficient angulaire de la tangente.

Or, ce que nous semble affirmer Descartes est qu'une telle analyse trans-configurationnelle ne doit dépendre aucunement de la forme de l'équation de la courbe algébrique qu'on considère mais se placer au contraire à un niveau supérieur de généralité. Pour le dire autrement, Descartes affirme qu'une telle analyse peut et doit être extrinsèque à l'équation de la courbe, de la même façon que le rapport entre droite *extremum* et tangente peut être démontré géométriquement de façon complètement extrinsèque, ainsi que l'a fait d'ailleurs Apollonius dans la proposition 29 du Livre V des *Coniques*.

Pour ces raisons, Descartes juge sa méthode des normales supérieure à celle de Fermat à la fois sur le versant géométrique et le versant algébrique. Sur le versant géométrique, parce qu'il n'est pas « naturel » de considérer un problème d'*extremum* pour les *droites* tangentes. Sur le plan algébrique, parce que la méthode des normales de Descartes est fondée sur une théorie des équations algébriques appliquée au problème géométrique grâce à l'interprétation du problème de tangence —entre un cercle ou une droite et une courbe géométrique — comme un problème de point double.

Mais si la généralisation suggérée par Duhamel de l'argument de Fermat n'aboutit pas, il est possible néanmoins d'introduire géométriquement un problème d'*extremum* équivalent au problème des tangentes. Il suffit de considérer pour cela un des rapports angulaires associés à la tangente, ce que feront précisément Descartes et Fermat dans un second temps. Transcris

[61]Cf. [Duhamel(1864), p. 292-293].

dans le langage cartésien, cela aménera à non plus considérer le cercle tangent mais la droite tangente associée à ce rapport, considération dont découle la méthode des tangentes de Debeaune.

Une tel changement de point de vue n'a rien d'élémentaire ni d'anodin. Selon nous, pas plus Descartes qui considère la normale et le cercle tangent, que Fermat qui considère la tangente et un rapport déduit de la théorie des sections coniques n'ont conscience, avant la controverse, du changement profond qui peut être apporté à leurs méthodes respectives en considérant le rapport angulaire.

Au delà des aspects polémiques, la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat possède ainsi un immense enjeu mathématique qui sera exploité plus tard par Newton et Leibniz pour l'invention du calcul infinitésimal : la mise en évidence du rapport angulaire de la tangente comme objet mathématique essentiel pour traiter le problème des tangentes[62].

La méthode des tangentes de Debeaune consitue ainsi non seulement une concrétisation de l'observation par Descartes de l'importance du rapport angulaire associé à la tangente mais encore un jalon posé sur le chemin de l'invention du calcul infinitésimal[63].

[62]Pour Newton, on pourra consulter la reconstruction détaillée qui est donnée par Marco Panza dans [Panza(2005), p. 183-242].

[63]Cf. [Panza(2005), p. 100-104].

Troisième partie

Le *Problema Astronomicum*

Introduction

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier un problème de gnomonique mathématique connu sous le nom de *Problema astronomicum* ou « problème des trois bâtons », jugé exemplaire selon l'aveu même de Descartes « pour remarquer l'industrie de bien desmeler les équations »[64].

Bien que le nombre des hypothèses du *Problema astronomicum* varient selon les mathématiens qui s'y intéressent[65], et que la question de la dépendance de ces hypothèses les unes par rapport aux autres constituent un enjeu du problème, on peut décrire ce problème de la façon suivante. Il s'agit de déterminer le lieu et le jour de l'année dans lesquels trois bâtons A, B, C placés verticalement sur un plan horizontal, dont les longueurs sont données ainsi que la longueur AB, produiront des ombres dont l'extrémité passera par le pied de chacun des deux autres bâtons.

Dans une premier chapitre historique, nous dresserons l'histoire du *Problema astronomicum* et nous nous efforcerons de montrer, d'une part, que celui-ci n'a pas cessé de retenir l'attention de Descartes en apparaissant régulièrement dans son œuvre, comme dans celle de son école, bien que sous des formes différentes, d'autre part, qu'il figure à l'intersection d'un faisceau de problèmes géométriques qui lui sont liés, comme le problème d'Apollonius des cercles tangents.

Après avoir mis en évidence l'enjeu historique du *Problema astronomicum*, nous conduirons dans un second chapitre une étude proprement mathématique du problème et de ses diverses occurrences. Le noyau de cette étude sera constitué par un examen détaillé des relations entre algèbre et géométrie dans les solutions de Descartes et Newton. Nous soulignerons ainsi les difficultés mathématiques inhérentes au projet cartésien apparaissant dans

[64]Cf. une lettre de Descartes sans nom ni date, datée par Adam-Tannery de juin 1645 sur laquelle nous reviendrons dans la suite : [Descartes(1964-1974), IV, p. 228].

[65]Cf. *infra* [section 12.1.3, p. 408].

la résolution du problème.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous nous intéresserons à un théorème préliminaire de nature algébrique démontré diversement par Schooten dans les éditions latines de la *Géométrie* de 1649 et 1659-1661, qui établit qu'on peut déduire de cinq conditions entrant dans les hypothèses du *Problema astronomicum* une sixième condition sur laquelle s'appuie Descartes sans justification pour proposer sa solution du problème.

Chapitre 11

L'histoire du *Problema astronomicum*

Des *Cogitationes Privatæ* de 1619-1621 à la *Correspondance* de 1630, de la controverse de 1638-1640 avec Stampioen à l'édition latine de la *Géometrie* de 1649, mais aussi dans la *Correspondance* de 1645, des problèmes de gnomonique mathématique apparaissent sous des formes diverses dans la Géométrie cartésienne. On retrouve ainsi des questions conceptuellement semblables dont les énoncés et les hypothèses sont modifiés. Parmi ces questions, le *Problema astronomicum* occupe une place centrale.

Ces apparitions s'ordonnent selon deux séries renvoyant à des époques et à des contextes différents. Dans une première section, nous nous intéresserons à deux questions de gnomonique mathématique qui apparaissent dans les écrits et la correspondance du jeune Descartes : les *Cogitationes Privatæ* de 1619-1621 et la *Correspondance* de 1630. Comme on le verra, ces questions sont conceptuellement semblables à celle du *Problema astronomicum.* Nous étudierons ensuite l'histoire du *Problema Astronomicum* : son apparition dans la controverse de 1638-1640 entre Stampioen et Waessenaer et sa reprise par Schooten dans les éditions latines de la *Géométrie.*

Ce faisant, nous souhaitons ainsi montrer l'importance et la rémanence de ce problème méconnu par l'historiographie dans la Géométrie cartésienne.

11.1 Prologue : une lettre de Descartes de juin 1645

Dans une lettre de Descartes sans nom ni date qu'Adam-Tannery datent de juin 1645[1], on trouve des recommandations de la part de Descartes sur des questions à soumettre pour éprouver la Méthode enseignée dans la *Géométrie* de 1637. Descartes commence par revenir sur une question proposée par son correspondant, celle consistant à trouver une sphère tangente à quatre sphères données[2], qu'il juge comme relevant du « Calcul » c'est-à-dire du calcul littéral[3].

Le caractère remarquable des exemples présentés ici tient à leur variété. Pour « faire preuve des diuers usages de l'Algebre », Descartes propose ainsi une question arithmétique sur les nombres tri-parfaits[4] qu'il a traitée dans la Correspondance avec Mersenne de l'année 1638[5] après avoir dans un premier temps dénié l'intérêt de telles questions[6], et comme question « touchant les lignes courbes », le problème inverse des tangentes qui lui avait été proposé par Debeaune à l'automne 1638[7]. Descartes paraît ainsi revenir sur les limitations strictes qu'il avait imposées à la Methode huit ans plus tôt dans la *Géométrie*.

D'autre part, dans cette même lettre, Descartes recommande à son correspondant la « question des trois bâtons » comme un problème exemplaire pour apprendre à pratiquer la combinaison et l'élimination des équations dans la résolution des problèmes géométriques. Citons Descartes :

---

[1]Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 227-232].

[2]Sur cette question, cf. *infra* [section 11.2.2, p. 384].

[3]L'initiation au calcul littéral et au calcul des radicaux est par exemple l'objet de la première partie de l'Introduction à la *Géométrie* qu'on attribue à Haestrecht comme des *Principia Matheseos Universalis* rédigées par Érasme Bartholin à partir de ses notes du cours de Frans van Schooten. Cf. [Haestrecht ?(1638a), p. 661-672], [Haestrecht ?(1638b), p. 328-338], [Schooten(1651)] et [Schooten(1661b)].

[4]C'est-à-dire les nombres dont la somme des diviseurs est égal au triple de ces mêmes nombres.

[5]Cf. la lettre à Mersenne du 13 juillet 1638 : [Descartes(1964-1974), II, p. 250-251]. Descartes donne dans cette lettre plusieurs nombres tri-parfaits sans démonstration, indiquant que pour les trouver, il n'a fait qu'employer « son Analyse ».

[6]Cf. la lettre à Mersenne d'octobre ou novembre 1631 : [Descartes(1964-1974), I, p. 229-230].

[7]Cf. la lettre de Descartes à Debeaune du 20 février 1639 : [Descartes(1964-1974), II, p 514-517]. Cf. également *supra* [section 10.3, p. 353].

> Pour des questions, celle des quatre globes, que vous me mandez avoir enuoyée, est fort bonne, afin d'éprouver si on sçait bien le calcul ; *mais pour remarquer aussi l'industrie de bien demesler les équations, ie n'en sçache point de plus propre que celle des trois bâtons*[8], dont la solution n'a peut-estre point encore passé iusqu'en Bourgogne.[9] *Tres baculi erecti sunt ad perpendiculum, in horisontali plano, ex punctis A, B, C. Et baculus A est 6 pedum, B 18 pedum, C 8 pedum, & linea AB est 33 pedum. Et unâ atque eâdem die extremitas umbræ solaris, quam facit baculus A, transit per puncta B & C ; extremitas umbræ baculi B, per A & C ; & ex consequenti etiam baculi C, per A & B. Quæritur in quanam poli altitudine, & qua die anni contingat. Et supponimus illas umbras describere accurate conicas sectiones, ut quæstio sit Geometrica, non Mechanica.*[10]

Ce problème des trois bâtons est le *Problema astronomicum* qu'on retrouve, parmi d'autres questions, à l'origine de la controverse entre Stampioen et Waessenaer, prête-nom de Descartes, de l'année 1638-1640[11].

11.2 Descartes et la gnomonique mathématique

La gnomonique mathématique occupa durant le dix-septième siècle une place importante dans le champ de la recherche et des études mathématiques[12].

Clavius avait en effet donné en 1581 une somme savante sur la théorie mathématique de la gnomonique qui fera autorité au siècle suivant, les *Gnomonices Libri Octo*[13]. Dans le cadre de l'enseignement jésuite pratiqué à la

---

[8] C'est moi qui souligne.

[9] La Bourgogne pourrait désigner ici les Pays-Bas espagnols ou la France-Comté. Cf. les éclaircissements de Adam-Tannery *in* [Descartes(1964-1974), IV, p. 232 et 665-666].

[10] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 228-229].

[11] Cf. *infra* [section 11.3, p. 385].

[12] Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'ouvrage de Jean Pares : [Pares(1988)]. En particulier, pour une histoire de « la Gnomonique jusqu'au XVIIème siècle », cf. [Pares(1988), Chap. II, p. 17-29]. Pour « les causes du développement de la Gnomonique au XVIIème », cf. [Pares(1988), Chap. III, p. 31-60].

[13] Cf. [Clavius(1581)]. Cf. également le quatrième tome des *Œuvres Mathématiques*

Flèche, on peut supposer que Descartes avait du au moins passer un de ces ouvrages par les mains. Reste que le lien entre une lecture éventuelle par Descartes des ouvrages de Clavius consacrés à la gnomonique et la mention par Descartes de deux questions relevant de cette théorie mathématique en 1619-1621 dans ses *Cogitationes Privatæ* et dans une lettre à Mersenne du 15 avril 1630 ne peut être que conjectural.

Un autre témoin de l'engouement pour les questions portant sur la théorie et la pratique des cadrans solaires, proche de Descartes, est le géomètre lyonnais Desargues. Celui-ci a consacré deux travaux à la Gnomonique, le premier figurant dans son second *Brouillon Project* publié en août 1640[14], le second tiré à part, fin 1640, comme complément[15]. Ce second écrit retiendra l'attention de Descartes qui jugera, dans une lettre à Mersenne du 28 janvier 1641, l'invention qui y est présentée « fort belle, & d'autant plus ingenieuse qu'elle est plus simple »[16]. De surcroît, ce dernier suggérera un procédé facilitant la pratique de la méthode du géomètre lyonnais[17].

La méthode présentée par Desargues dans ce dernier écrit s'appuie sur une idée géométrique fort simple. Il s'agit de retrouver un cercle de section du cône des rayons solaires, trois directrices — qui correspondent à trois rayons solaires observés au cours d'une journée — étant données. Pour cela, Desargues remarque qu'il suffit de prendre sur ces trois génératrices trois longueurs égales à partir du sommet. On obtiendra ainsi trois points déterminant un cercle de section dont le centre appartiendra à l'axe du cône des rayons, c'est-à-dire au style du cadran solaire. Ce dernier sera ainsi déterminé par le sommet du cône et ce dernier point.

Cette question n'est pas sans rapport avec celle plus complexe que Desargues posera à Descartes en 1641 par l'entremise de Mersenne et qui sera évoquée dans la suite[18].

[Clavius(1611-1612), IV] qui contient l'ensemble des traités de Clavius consacrés à la gnomonique.

[14]Il s'agit de la dernière partie intitulée « Manière universelle de tracer au moyen du style placé, tous quadrans plats d'heures égales au Soleil, avec la reigle, le compas, l'equierre et le plomb ». Cf. l'édition de Poudra [Desargues(1864), I, p. 352-358].

[15]« Maniere vniverselle de poser le style aux rayons du soleil en quelconque endroit possible, avec la regle, le compas, l'esquerre et le plomb ». Cf. [Desargues(1864), I, p. 385-392]. Cf. également pour une étude de ces méthodes [Desargues(1864), I, p. 395-39] et [Pares(1988), p. 61-72]. Cf. également [Oudet(1994), p. 331-346].

[16]Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 294 et p. 298].

[17]Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 295 et p. 298-299].

[18]Cf. *infra* [section 11.3.4, p. 392].

Nous disposons par ailleurs de deux éléments dans la *Correspondance* attestant de l'attention que Descartes a accordées à deux questions de gnomonique de même nature que celle du *Problema astronomicum* et antérieures à la controverse de 1638-1640 avec Stampioen.

11.2.1 Une question de Gnomonique dans les *Cogitationes Privatæ* de 1619-1621

On trouve ainsi l'énoncé d'une question de gnomonique dans les *Cogitationes Privatæ*, notes rédigées par Descartes en 1619-1621[19].

Voici la note contenant cette question et deux remarques qui la suivent — et la complètent ? —, ces trois passages figurant au sein d'un seul et même paragraphe, dans la présentation de Foucher de Careil reprise par Adam-Tannery :

> *Quæstio in gnomonicâ.*— Sit sub lineâ æquinoctiali horizontali horologium faciendum, cujus linea æquinoctialis est data, ac præthereà tria puncta ad quæ umbræ extremitas debeat pertingere, dum Sol est in tropico Capricorni[20], quomodocumque data sint, modò ne in rectam lineam incidant : centrum Solis horologij reperire est & longitudinem styli.
>
> Hoc reducitur ad circulum tres alios inæquales tangentem, quorum centra in rectam lineam incidant.
>
> Nulla figura est, in totâ extensione, in quâ & circa quam circulus duci possit, quomodocumque figura fiat, præter triangularem, quæ Divinitatis hieroglyphicon.[21]

Si la seconde remarque paraît sibylline, la première met clairement en relation la question de gnomonique qui intéresse le jeune Descartes avec celle d'un cercle tangent à trois cercles donnés, question qui sera reprise par lui

[19]Cf. [Descartes(1619-1621)]. Le titre paraît être une invention du premier éditeur de ces notes inédites, Foucher de Careil. Ces fragments proviennent d'un manuscrit de Leibniz, qui en avait pris copie auprès de Clerselier, le 1er juin 1676, lors de son séjour à Paris. Ce manuscrit est malheureusement aujourd'hui disparu, en sorte qu'Adam-Tannery n'ont disposé que de l'édition défectueuse de Foucher de Careil pour établir le texte. Pour l'histoire du texte et les détails de son établissement, cf. [Descartes(1964-1974), X, Avertissement, p. 207-212].

[20]C'est-à-dire lors du solstice d'hiver.

[21]Cf. [Descartes(1619-1621), p. 229].

bien plus tard pour être proposée dans sa Correspondance à la Princesse Elisabeth[22].

Néanmoins, l'indication ajoutée par Descartes selon laquelle les centres seraient alignés, rend le problème impossible à résoudre pour trois cercles. Si l'on suppose que la proposition cartésienne est correcte, on est conduit à penser qu'il s'agit d'une erreur de transcription. Ainsi, soit il n'est question que d'un cercle tangent à deux cercles donnés, soit les centres des cercles ne sont pas alignés, auquel cas on pourrait imaginer que la négation « ne », figurant initialement à l'exemple de ce qui précède, aurait disparu.

Le choix cartésien de s'intéresser à une telle question paraît assez naturel dans le contexte de l'époque, d'autant plus qu'il s'insère dans une tradition dont un des acteurs essentiels est le mathématicien jésuite Clavius.

Il s'agit de déterminer, sous l'équateur, au solstice d'hiver, la position d'un gnomon ainsi que son sommet, lorsque l'extrémité de son ombre est soumise à la condition de passer par trois points donnés non alignés. Le fait que Descartes précise que les points en question ne sont pas alignés n'est pas anodin. On sait en effet que lors des deux équinoxes, l'extrémité de l'ombre d'un gnomon placé à l'équateur décrit une droite de part et d'autre de ce dernier. On se trouve alors dans le cas dégénéré d'une branche d'hyperbole qui correspond à la trajectoire de l'ombre dans les autres cas[23].

Néanmoins, il nous semble plus important de s'interroger sur la nature de la solution dont Descartes pouvait disposer à l'époque pour cette question. S'agissait-il d'une solution géométrique ou algébrique ? Dans le second cas, Descartes aurait-il reconnu, dès 1619-1621 ou bien au plus tard en 1630, l'intérêt et la pertinence d'une solution qu'il jugerait plus tard, bien que sous des formes différentes, comme particulièrement adaptée pour mettre en lumière l'usage et la puissance de sa Méthode.

[22]Cf. les lettres de Descartes à Elisabeth du 17 novembre 1643 et du 29 novembre 1643 *in* [Descartes(1964-1974), IV, resp. p. 37-42 et p. 45-50]. Cf. également ces mêmes lettres *in* [Descartes(2003), resp. p. 155-158 et p. 163-166], ainsi que l'Appendice consacré par H. Bos à cette question : [Descartes(2003), p. 202-211]. On trouve aussi une étude de ce problème dans [Galuzzi et Rovelli(s.p.), p. 141-154]. Viète a donné dans l'*Apollonius Gallus* une solution synthétique classique au problème. Pour une étude de la solution de Viète, mais aussi de ces questions de contact chez Ghetaldi et Toricelli, cf. [Brigaglia et Nastasi(1986), p. 83-98].

[23]On peut visualiser la trajectoire de l'ombre d'un gnomon placé en un point quelconque de la terre un jour donné, qui est une conique, sur le site internet d'un physicien de l'université de Nantes dont voici le lien http ://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Soleil/Heure/Gnomon.html

11.2.2 Les problèmes envoyés à Mersenne dans la lettre du 15 avril 1630

Le fait de retrouver dix années plus tard, sous une forme plus générale, la question de gnomonique posée dans les *Cogitationes Privatæ*, parmi les trois questions transmises par Descartes à Mersenne dans une lettre datée du 15 avril 1630, alors que Descartes se propose de jauger le talent des mathématiciens parisiens, nous paraît hautement significatif de l'importance et de la rémanence de cette question dans l'œuvre mathématique cartésienne. Descartes, ayant envoyé peu de temps auparavant la solution de problèmes posés par Mydorge à Mersenne, jointe à une lettre datée par Adam-Tannery du 4 mars 1630[24], prenait alors son tour de questions. Il écrivait ainsi, avec, comme toujours, un blasement accompagné de la plus grande immodestie :

> Pour des problesmes, ie vous en enuoyeray vn milion pour proposer aus autres, si vous le desirés ; mais ie suis si las des Mathematiques, & en fais maintenant si peu d'estat, que ie ne sçaurois plus prendre la peine de les soudre moy-mesme. I'en mettray ici *trois que i'ay autrefois trouués sans aide que de la Geometrie simple, c'est a dire avec la reigle & le compas*[25].
>
> *Invenire diametrum sphæræ tangentis alias quatuor magnitudine & positione datas.*
>
> *Invenire axem parabolæ tangentis tres lineas rectas positione datas & indefinitas, cujus etiam axis secet ad angulos rectos aliam rectam etiam positione datam & indefinitam.*
>
> *Invenire stilum horologij in data mundi parte describendi, ita ut umbræ extremitas, data die anni, transeat per tria data puncta, saltem quando istud fieri potest.*
>
> I'en trouuerois bien de plus difficiles si i'y voulois penser, mais ie ne croy pas qu'il en soit de besoin.[26]

Remarquons tout d'abord que la troisième et dernière question de gnomonique est précédée de celle des quatre sphères. De façon assez remarquable, ces deux questions font écho en les généralisant à la question de gnomonique et à celle des trois cercles que Descartes avait mises en relation dix

[24] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 125].
[25] C'est moi qui souligne.
[26] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 139].

années auparavant dans les *Cogitationes privatæ*, puisqu'il indiquait alors que la première pouvait être réduite à la seconde. Quant au second problème mentionné, nous ne sachons pas qu'il ait laissé d'autre trace dans la Correspondance et même dans l'oeuvre mathématique cartésienne dont nous disposons.

La question des quatres sphères apparaîtra plus tard comme le cinquième et dernier exemple proposé dans l'*Introduction à la Géométrie* de Godefroy de Haestrecht[27], dans le cas plus simple où les sphères données sont tangentes deux à deux[28]. Cette question, dont Descartes dit dans une lettre à Mersenne du 13 juillet 1638 « [qu'il] ne [croit] pas que [ses] analystes de Paris puissent [en] venir à bout »[29], apparaît également dans la lettre de Descartes de 1645 précédemment mentionnée[30] où celui-ci recommande le *Problema astronomicum*.

Descartes propose ainsi de déterminer la position et le sommet d'un gnomon, lorsque l'extrémité de son ombre est soumise à la condition de passer par trois points donnés, un jour donné de l'année, en un lieu donné[31]. On retrouve ainsi sous une forme plus générale la question que Descartes avait notée dix ans auparavant dans les *Cogitationes Privatæ*. La discussion que Descartes paraît souligner en mentionnant la possible absence de solution pourrait faire référence selon nous au cas limite des équinoxes à l'équateur où les points donnés doivent être choisis nécessairement alignés, puisque dans ce cas la trajectoire de l'extrémité de l'ombre du gnomon est une droite. On peut aussi faire l'hypothèse, comme Pierre Costabel, que Descartes veut dire par là que, dans le cas d'une hyperbole, les points se trouvent sur une seule et même branche[32].

D'autre part, il importe de remarquer que le défi lancé par Descartes pour la résolution de ces questions est double, et que de surcroît son Auteur, par sa formulation, invite sciemment à suivre une fausse piste. Ainsi, il s'agit non seulement de résoudre ces questions, mais avec la règle et le compas seul,

[27] Cf. [Haestrecht ?(1638b)] et *supra* [section 1.1, p. 24]. Pour la solution de la question des quatres sphères ou globes, cf. [Haestrecht ?(1638b), p. 346-352].

[28] On notera la similitude de rapport entre ces deux questions des quatre globes et les deux questions des trois cercles proposées par Descartes à la Princesse Elisabeth.

[29] Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 246].

[30] Cf. *supra* [section 11.1, p. 378].

[31] Pierre Costabel donne une étude de cette question et la met en relation avec le *Problema Astronomicum* et le problème des trois cercles. Cf. [Costabel(1990), p. 380-384]. Cf. également *infra* [section 12.1.2, p. 405].

[32] Cf. [Costabel(1990), p. 380].

autrement dit de reconnaître qu'il s'agit de problèmes plans. Descartes passe sous silence l'algèbre qui permet, après élimination et réduction, d'obtenir une équation quadratique caractéristique d'un problème plan, insistant à dessein sur sa résolution d'autrefois — géométrique ou algébrique ? — « sans aide que de la Geometrie simple ».

11.3 Le *Problema astronomicum* et la controverse Stampioen-Waessenaer de 1638-1640

11.3.1 Stampioen et le *Problema Astronomicum*

En 1638, Stampioen dit « le jeune » pour le distinguer de son père, mathématicien flamand né en 1610 et demeurant à la Haye, proposa un défi mathématique sous la forme d'une affiche portant pour titre :

> *Problema Astronomicum & Geometricum* voor-gestelt DOOR IOHAN STAMPIOEN DE JONGHE Mathematicus, Residerende in's Graven-Haghe, Aende Vytgevers van het Antwerpsch Vraeg-Stuck[33] [1638].

Dans une liasse de manuscrits appartenant à F. van Schooten le fils[34], on trouve un exemplaire de cette affiche[35] dans lequel figure l'énoncé du problème en flamand.

Pour rendre compte de l'apparition en 1638 du *Problema astronomicum* dans le placard de Stampioen et de sa relation avec la question de gnomonique tout à fait semblable posée dix-huit années auparavant, on peut remarquer que dans les *Cogitationes Privatæ*, cette question suit une question posée par Isaac Beeckman à Descartes d'après Stevin[36]. On connaît par ailleurs les contacts de Beeckman avec Stampioen. On sait, par exemple, qu'il transmit à Descartes une question de Stampioen en 1633 selon le témoignage

[33] Problème Astronomique & Géométrique, *proposé par Jean Stampioen le Jeune Mathématicien, demeurant à La Haye, aux Bailleurs de la Question d'Anvers*. Trad. personnelle.
[34] Cf. *supra* [section 1.3, p. 31].
[35] Cf.[Descartes(1964-1974), X, p. 646-647].
[36] Cf. [Descartes(1619-1621), p. 228].

de ce dernier[37], question auquelle Descartes répondit de façon cavalière et méprisante[38]. Évidemment, dans une telle hypothèse demeurent de nombreux éléments de conjecture. Néanmoins, le fait qu'une question posée à l'origine par Descartes réapparaisse dans un défi de Stampioen adressé au mathématicien français ne laisse pas d'intriguer. Beeckman serait un intermédiaire naturel pour cette transmission.

Stampioen le jeune[39] avait acquis une réputation certaine dans les Provinces-Unies lorsque il brisa des lances avec Waessenaer, arpenteur et jeune élève de l'école cartésienne hollandaise, et Descartes lors de la controverse de 1638-1640[40]. Descartes, relatant la controverse dans une lettre à Mersenne du 29 janvier 1640, écrivait ainsi :

> [...] il c'est trouué vn homme [Stampioen] de ce pais si habile en l'art de Charlatan que, sans rien du tout sçauoir en Mathematiques, *il n'a pas laissé de faire profession de les enseigner & de passer pour le plus sçauant de tous ceux qui s'en meslent.* Et ce, par la seule impudence de se vanter qu'il sçauoit tout ce qu'il auoit ouy dire estre ignoré par les autres ; & de faire des liures qui prometoient des merueilles au titre, mais qui ne contenoient au dedans que des fautes ou des pieces derobées ; & de dire effrontement toutes sortes d'iniures a ceux qui lui contredisoient, & les provoquer par gageures[41].

[37] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 573-574].

[38] Cf. [Descartes(1964-1974), I, p. 275-280] et aussi les Additions : [Descartes(1964-1974), I, p. 573-578]. Descartes soumet à la fin de sa réponse le probème de Pappus ainsi que le problème des quatres sphères dans le cas où celles-ci sont en contact deux à deux, présentant cette dernière question sous une forme à dessein embrouillée et compliquée. Pour une étude de ce problème, cf. [Galuzzi et Rovelli(s.p.), chapitre 5, Descartes et Stampioen, p. 135-140].

[39] Pour des informations sur la vie et la carrière de Stampioen, on se reportera à la notice biographique détaillée de J. van de Ven *in* [Descartes(2003), p. 299-303]. Les indications qui suivent lui sont empruntées. On peut également consulter l'article de H. Bosmans : [Bosmans(1927), p. 116-119].

[40] Pour une histoire de la controverse et l'indication de références supplémentaires, cf. [Descartes(2003), p. 301-302]. Cf. également [Bosmans(1927), p. 125 *sq.*]. On peut enfin voir les éclaircissements de Adam-Tannery *in* [Descartes(1964-1974), II, p. 581-582 & p. 611-615] et [Descartes(1964-1974), III, p. 16-17], ainsi que les notes et l'appendice de Roth « The Stampioen-Waessenaer Affair, november-december, 1639 » *in* [Descartes(1964-1974), II, resp. p. 686-687 & p. 710-726].

[41] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 5].

En 1638, Stampioen avait en effet rejoint la cour de La Haye pour devenir le précepteur en mathématiques du prince Guillaume d'Orange. Il semble également que la princesse Elisabeth recourut à ses services avant de s'adresser à Descartes[42]. Plus tard, en 1644, Stampioen serait également le premier maître en mathématiques de Christiaan Huygens.

Cette affiche fixe la première occurrence du *Problema astronomicum* au sein de la controverse de 1638-1640. Auparavant, une première « Question aux Ingénieurs bataves » avait été proposée par Jean-Baptiste d'Anvers[43] en 1638 et des solutions de cette question avaient été données, critiquées et complétées par Waessenaer et Stampioen[44]. D'autre part, en avril 1639, Stampioen publiait un nouveau livre d'algèbre, en flamand, qu'il annonçait déjà depuis longtemps et dont le titre témoigne de l'ambition affichée par l'Auteur :

> *Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel, waer door alles ghevanden wordt, inde Wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt voor desen bekendt.* Door Iohan Stampioen d'Ionghe, Mathematicus, Residerende in's Graven Hague. 's Graven Hage, gedruckt ten Huyse van den Autheur, in Sphæra-Mundi[45]. — 1639, in-4, 366 pages.

On ne trouve pas dans cet ouvrage de solution donnée au *Problema astronomicum* par Stampioen.

---

[42]Cf. la lettre de Descartes à Pollot du 21 octobre 1643 *in* [Descartes(1964-1974), IV, p. 26-27] et [Descartes(2003), p. 133]

[43]Il s'agit d'un pseudonyme adopté par Stampioen.

[44]Cf. [Descartes(2003), p. 301] et [Descartes(1964-1974), II, p. 611-612]. Descartes traite le problème dans une lettre adressée vraisemblablement à van Schooten fin 1638 ou début 1639 selon Adam-Milhaud. Cette hypothèse nous semble préférable à celle de Adam-Tannery qui indiquent Huygens comme destinataire et adoptent fin octobre 1639 comme datation. Cf. [Descartes(1936-1963), III, p. 142-154] et [Descartes(1964-1974), II, p. 600-615].

[45]Algèbre ou nouvelle méthode, par laquelle on trouve en mathématiques tout ce qui est trouvable, chose qui, jusqu'ici, n'a jamais été connue. *Par Jean Stampioen le jeune, Mathématicien, demeurant à la Haye. À La Haye, imprimé chez l'Auteur, à la Sphæra Mundi.* Trad. Adam-Tannery. Littéralement, *Stel-Regel* signifie règle de supposition et renverrait à l'introduction de l'inconnue en algèbre [Communication personnelle de Henk Bos]. Le privilège est daté du 25 mars 1639. Cf. éclaircissement *in* [Descartes(1964-1974), II, p. 581-582].

11.3.2 L'écrit flamand de Waessenaer

C'est dans un écrit en flamand publié sous le nom de Waessenaer deux ans plus tard, en novembre 1640, que l'on retrouve le *Problema astronomicum* accompagné d'une solution qui est la première à notre connaissance. Je donne *in extenso* le titre de cet ouvrage très rare[46], qui me semble témoigner de l'enjeu qu'il revêtait alors pour Waessenaer et Descartes :

> DEN ON-WISSEN WIS-KONSTENAER I.I. STAMPIOENIUS ONTDECKT. *Door sijen ongegronde Weddinge ende mis-lucte Solutien van sijne eygene Questien. Midtsgaders Eenen generalen Regel* om de Cubic-wortelen ende alle andere te trecken uyt twee-namighe ghetallen : dewelcke voor desen niet bekent en is geweest. Noch de Solution van twee sware Geometrische Questien door de Algebra : dienstlich om alle andere te leeren ontbinden. Door Iacobus à Waessenaer, Landmeeter tot Vytrecht. Tot Leyden, gedruckt by Willem Christiaens voor Iohannes Maire[47] — 1640, in-4, 88 pages.

Comme l'indique son titre, cet ouvrage se compose de trois parties[48]. La première consiste en une préface polémique de trente pages qui relate la querelle. On sait qu'elle est de la main de Descartes qui la donna à traduire à Antoine van Surck[49].

Dans la deuxième partie, figure, sans démonstration, une règle d'extraction de racines de binomes, c'est à dire servant à transformer, lorsque cela est possible, l'expression $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ en $x+\sqrt{y}$, où x, y, a, b sont des nombres rationnels. Celle-ci répond à l'énoncé fautif qui avait été donné par Stampioen

[46] C'est ce qu'indique Pierre Costabel qui mentionne son existence à la Bibliothèque d'Amsterdam. Cf. [Costabel(1990), p. 377, n.], On le trouve également à la British Library de Londres.

[47] La sottise du mathématicien J.J. Stampioen révélée par son imprudente gageure et ses solutions manquées de ses propres questions. Comme aussi une règle générale *pour extraire les racines cubiques et toutes autres des expressions binomes ; laquelle règle n'a pas été connue jusqu'à présent. Enfin les solutions par l'algèbre de deux difficiles questions de Géométrie, utiles pour apprendre à résoudre toutes les autres. Par Jacob a Waessenaer, Arpenteur à Utrecht. Leyde, imprimé chez Willem Christiaens pour Jean Maire.* Trad. Adam-Tannery légèrement modifiée. Cf. [Descartes(1964-1974), II, p. 613].

[48] Nous reprenons ici la description de l'ouvrage donnée par Adam-Tannery *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 30-31].

[49] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 30] et la lettre de Huygens à Descartes du 14 août 1640 *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 754].

dans son *Algebra* dans le cas de la racine cubique[50]. Une lettre de Descartes à Waessenaer du 1er février 1640[51] prouve de surcroît que Descartes en est le seul inventeur[52].

Enfin, dans la troisième partie, on trouve l'analyse et la solution de deux problèmes antérieurement proposés par Stampioen dont le second n'est autre que le *Problema astronomicum* de 1638. Quant au premier problème, il s'agit de celui que Stampioen soumit en défi, par l'entremise de Beeckman à Descartes en 1633[53]. Ce dernier y répondit facilement et en communiqua la solution mais non l'analyse à Stampioen[54], avec morgue et dédain, comme à son habitude, engendrant ainsi un ressentiment tenace qui conduirait plus tard à la querelle.

Pour les raisons que vous venons de rappeler, regardant la composition des deux premières parties du *Den On-Wissen Wis-konstenaer*, les historiographes s'accordent à reconnaître en Waessenaer un « homme de paille », un nouveau masque pour Descartes, dans la controverse avec Stampioen, et ce de façon encore plus prégnante pour ce qui regarde l'élaboration de ce dernier ouvrage[55].

Mais, quel est l'auteur des solutions apportées aux deux problèmes de Stampioen dans la troisième partie du *Den On-Wissen Wis-konstenaer* ? En particulier, quel est l'auteur de la solution du *Problema astronomicum* ? Dans sa lettre du 1er février 1640, Descartes rappelle à Waessaner qu'il attend de

---

[50] Adam-Tannery reproduisent la règle de Stampioen selon l'énoncé donné par Waessenaer dans [van Waessenaer(1640), p. 35-36]. Cf. l'éclaircissement *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 149-150].

[51] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 21-30]. Descartes confie dans cette lettre à Waessenaer l'énoncé et la démonstration de la règle dans le cas des racines cubiques.

[52] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 29]. Cf. également l'aveu fait par Descartes dans une lettre à Mersenne du 30 septembre 1640 : [Descartes(1964-1974), III, p. 187].

[53] Selon le propre témoignage de Stampioen dans un de ses pamphlets. Cf. [Descartes(1964-1974), I, Additions, p. 574]. Ce problème propose de déterminer un triangle rectangle dans lequel sont inscrits un carré et deux cercles qui interceptent des sécantes données selon des longueurs données.

[54] Cf. la lettre de Descartes à Stampioen *in* [Descartes(1964-1974), I, p. 275-280 et Additions, p. 573-578]. Dans ces Additions, Adam-Tannery reproduisent l'énoncé de ce problème accompagné de son analyse et de sa solution qui figurent dans le pamphlet de Waessenaer. Cf. [van Waessenaer(1640), p. 60-63]. Pour une étude de ce problème, cf. [Galuzzi et Rovelli(s.p.), chapitre 5, Descartes et Stampioen, p. 135-139].

[55] C'est ainsi l'objet principal de l'article de H. Bosmans cité auparavant et consacré à la dispute Stampioen-Waessenaer et à « l'auteur principal » de ce dernier écrit. Cf. [Bosmans(1927), p. 114-115, 126, 139-140].

sa part des solutions, tâche dont il l'aurait auparavant chargé :

> J'aurai aussi plaisir à avoir votre solution des deux questions de St[ampioen], dès qu'elle sera achevée.[56]

Ce dernier combla-t-il les attentes du maître exigeant qu'était Descartes ? La suite de l'histoire du *Problema astronomicum* nous semble apporter des éléments de réponse à cette question.

11.3.3 L'implication de Descartes dans la solution du *Problema Astronomicum*

On sait ainsi que le jeune arpenteur d'Utrecht força Descartes à différer son voyage en France à l'automne 1640, jugeant le soutien de ce dernier indispensable pour préparer l'édition du *Den On-Wissen Wis-konstenaer* et parer aux attaques de Stampioen ? Descartes écrivait ainsi, dans une lettre à Huygens du 31 juillet 1640 :

> Mais Waessenaer ne desire pas que ie parte auant l'impression de ce que l'opiniastreté de son adversaire l'a contraint d'escrire, et quoy que ce soit vne drogue dont ie suis fort las, l'honneur toutefois ne me permet pas de m'exemter d'en voir la fin, ny le service que ie doy à ce pais d'en dissimuler la vérité. Vous la trouverez icy en la preface de Waessenaer, dont ie lui feray encore differer l'impression 15 iours, ou plus s'il en est besoin, affin d'en attendre votre iugement, s'il vous plaist me faire la faveur de me l'escrire, et il nous servira de loy inuiolable.[57]

Cette insistance de la part de Waessenaer paraît témoigner, d'une part, du manque d'assurance mathématique de ce dernier, d'autre part, de l'implication sans doute reconnue par tous de Descartes dans la controverse. De surcroît, connaissant le caractère cartésien, il paraît étonnant que celui-ci ait reporté son départ par bienveillance pour un jeune disciple. Au contraire, peut-être, ce report pourrait être l'expression d'une défiance qui semble se

[56] Il s'agit de la traduction française donnée par Adam-Tannery du texte original écrit en flamand par Descartes. Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 29]. Pour le texte original flamand, cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 22].

[57] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 753]. Pour la réponse de Huygens du 14 août 1640, déjà cité *supra*, cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 754]. Les deux lettres sont citées par H. Bosmans : [Bosmans(1927), p. 137-140].

confirmer dans la suite : Waessenaer pouvait-il l'emporter seul sur Stampioen ?

On dispose ainsi de deux éléments dans la correspondance cartésienne semblant attester d'un refroidissement entre Descartes et Waessenaer, peut-être conséquence de la déception cartésienne devant les insuffisances mathématiques de son disciple.

Dans la lettre déjà citée de Descartes où apparaît le *Problema astronomicum* désigné sous le nom de problème des trois bâtons, Descartes raille un « Sieur W. » qui pourrait bien être Waessenaer :

> Encore que les propositions du Reuerend Pere Iesuite que vous auiez pris la peine de m'envoyer soient tres-vrayes, ie n'espere pas pour cela qu'il en puisse déduire la quadrature du cercle, comme il me semble que vous m'aviez mandé qu'il prétend. De façon que, s'il en publie quelque livre, *il est croyable que le sieur W. y pourra trouuer à reprendre ; mais il seroit assez plaisant, s'il s'amusoit à y reprendre ce qui n'est pas faux, & qu'il obmit ce qui l'est.*
>
> Ie ne vous ay rien mandé, touchant ce qu'il a écrit de ma Réponse à ses questions, que tout simplement ce que i'en pensois, & comme l'écriuant à vous seul ; car ie ne sçavois point qu'on vous eust donné son Escrit pour me le faire voir. Mais ie ne croy pas pour cela vous auoir rien écrit que ie me soucie qu'il sçache, & ie laisse entierement à vostre discretion de luy faire voir ma lettre, ou vn extrait d'icelle, ou rien du tout.[58]

Waessenaer est présenté ici comme un polémiste prompt, quoique maladroit et entravé par son manque de clairvoyance mathématique. Descartes rappellerait-il ici l'emportement de Waessenaer durant la controverse avec Stampioen, emportement qui n'aurait pu être assuré par de réelles compétences mathématiques, obligeant Descartes à une plus grande implication dans la rédaction des pièces de la controverse ? Les questions, qu'Adam-Tannery attribuent à Waessenaer, la réponse de Descartes, suivies des répliques de chacun, en relation semble-t-il avec un écrit du premier, n'ont pas laissé d'autre trace[59]. L'attitude de Descartes, pour ce qui regarde ces échanges et la communication éventuelle à en donner à Waessenaer, témoigne en tout cas de sa défiance mélée de lassitude à l'encontre de ce dernier.

[58] C'est moi qui souligne. Cf.[Descartes(1964-1974), IV, p. 227-228]

[59] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 227, n.]

11.3.4 La question de Desargues

Une seconde lettre pourrait témoigner de la dégradation des relations entre Descartes et Waessenaer. Dans cette lettre du 18 décembre 1648, dont le destinataire est inconnu, Descartes écrit ainsi :

> Je ne vous sçaurois commodément enuoyer la proposition que vous me demandez, parce qu'il ne m'en souvient presque plus & que ie suis occupé à d'autres pensées ; c'est pourquoy ie vous supplie de m'en dispenser. Et je vous l'enuoyerois tres-volontiers, si vous ne la demandiez que pour vous seul ; mais, parce que vous la voudriez faire imprimer, *je vous dirai icy franchement que je suis trop mal satisfait de certains Geometres, pour leur vouloir plus rien apprendre. Tout le meilleur qu'ils sçauent vient presque de moy, & neantmoins ils veulent persuader aux ignorans qu'il n'y a personne qui les égale.*[60]

Si dans des Additions, P. Tannery juge qu'un destinataire possible serait Adrien Auzout[61], Pierre Costabel, dans une note en appendice[62], émet une autre hypothèse qui mettrait en rapport cette lettre avec les difficultés rencontrées par Schooten dans la publication et la traduction latine de la solution de Descartes-Waessanaer du *Problema Astronomicum*, qu'il donne dans un *Additamentum* concluant sa première édition latine de la *Géométrie* de 1649[63].

Le destinataire de cette lettre serait Schooten et le disciple décevant et présomptueux évoqué par Descartes ne serait autre que Waessenaer. Bien que Pierre Costabel fasse allusion à l'*Additamentum* de Schooten, celui-ci, soit qu'il repousse à plus tard une divulgation, soit qu'il manque d'éléments, ne produit ni argument décisif ni lien clair entre le *Problema astronomicum*, Waessenaer et la proposition citée par Descartes.

Cette proposition, éditée par Clerselier à la suite de la lettre du 18 décembre 1648 précédemment citée[64], répond à une question antérieure proposée par Desargues en 1641[65]. Malgré ses préventions inaugurales, Descartes

[60] C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 255].
[61] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 554].
[62] Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 662].
[63] Cf. *infra* [section 11.4, p. 394].
[64] Cf. [Descartes(1657-1667), III, p. 475-479].
[65] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 707]. Pour cette raison, Adam-Tannery ont quant à eux repoussé cette proposition dans des Additions *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 707-

semble bien avoir gardé copie de celle-ci, puisque il ne fait que repousser une communication publique de cette dernière, et non un envoi à titre privé. Ceci paraît indiquer, comme le remarque Pierre Costabel, que Descartes lui-même avait disposé cette proposition dans son propre classement de ses minutes, disposition qui fut reprise par Clerselier[66]. Cette proposition était la suivante :

> Datâ quâlibet conicâ sectione & puncto extra eius planum vt libet sito, quæritur circulus qui sit basis coni quem describit linea recta, ex dato puncto, vt vertice, circa datam conicam sectionem conversa ; nam, quòd superficies ita descripta sit conica, [...][67]

Il s'agit donc de trouver un cercle de section d'un cône, une section quelconque de ce cône ainsi que son sommet étant donnés. La solution cartésienne du *Problema astronomicum* introduisant un cercle de section du cône des rayons lumineux, partant de la donnée de cinq points qui déterminent une ellipse décrite par l'extrémité de l'ombre d'un des bâtons, il paraît clair que la question de Desargues et le *Problema astronomicum* sont liées, à tout le moins mathématiquement sinon historiquement.

Dans cette première série d'occurrences du *Problema astronomicum*, Descartes est apparu plusieurs fois, mais souvent en retrait. S'il s'est intéressé au problème en 1638-1640 lors de la controverse Stampioen-Waessenaer, sa participation à l'analyse et à la solution figurant dans le *Den On-Wissen Wiskonstenaer* est très probable bien qu'indéterminée dans sa nature. Ainsi, s'il a sans doute pallié les insuffisances de son jeune disciple Waessenaer, seul un examen mathématique détaillé de la solution et de sa traduction donnée par Schooten dans ses éditions latines de la *Géométrie* pourra nous permettre de conjecturer ce que fut la solution cartésienne. D'autre part, nous avons vu que Descartes recommandera plus tard dans une lettre de 1645 cette même question pour s'exercer à la Méthode et à « bien demesler les équations ».

714]. Cf. également l'éclaircissement [Descartes(1964-1974), III, p. 715-717] qui apporte des éléments supplémentaires sur l'histoire du problème, procurés par Mersenne dans son Traité [Mersenne(1644)].

[66] Pierre Costabel critique, nous semble-t-il à bon droit, l'hypothèse de Paul Tannery selon laquelle le destinataire de la lettre se serait lui-même procuré une copie de la démonstration de Descartes et l'aurait jointe à la lettre. L'ensemble serait plus tard parvenu dans cette disposition entre les mains de Clerselier. Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 707] pour l'hypothèse défendue par Paul Tannery et [Descartes(1964-1974), V, p. 662] pour la critique de Pierre Costabel.

[67] Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 708].

11.4 Schooten et les éditions latines de 1649 et 1659-1661

11.4.1 L'*Additamentum* de Frans van Schooten

Dans un *Additamentum* figurant à la suite de son commentaire au sein des deux éditions latines de la *Géométrie* de 1649 et 1659-1661[68], Frans van Schooten fit le choix de reprendre à son tour la solution du *Problema astronomicum* de l'écrit de Waessenaer en la traduisant en latin[69] et d'ajouter la règle d'extraction des racines des binomes extraite du même ouvrage[70]. Voici comment celui-ci annonçait et présentait la solution du problème :

> Cæterùm, ut pateat, non facilè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ à Waessenaer Anno 1640 sub titulo : *Den onwissen Wiskonstenaer I.I. Stampioënius*, in lucem prodiit. Verùm enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.[71]

Le *Problema astronomicum* apparaît dans cette présentation comme une pierre de touche pour la *Géométrie* et sa Méthode. Par cette déclaration et son choix, Schooten faisait de ce problème l'enjeu principal de la controverse de 1638-1640 avec Stampioen, controverse qu'il réduisait à la conclusion cartésienne triomphante du *Den On-Wissen Wis-konstenaer* de Waessenaer, « livre très ingénieux », présentant une « solution très habile » de ce problème dont Stampioen avait pu croire qu'il « échappât à la *Géométrie* » et ne pouvait être résolu au moyen de la méthode cartésienne.

Pour autant, capter un tel héritage n'était pas sans comporter quelques difficultés, posées, une fois encore, par les « omissions » cartésiennes. Il semblait ainsi nécessaire et souhaitable à Schooten d'insérer un théorème géométrique préliminaire et une démonstration de son cru, correspondant à

[68] Cf. resp. [Schooten(1649a)] & [Schooten(1659a)].

[69] Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 295-323] et [Schooten(1659a), p. 369-389].

[70] Cf. *supra* [section 1.3.1, p. 33].

[71] Sans changement dans les deux éditions latines. Cf. respectivement [Schooten(1649a), p. 295] et [Schooten(1659a), p. 369].

une hypothèse employée dans la solution mais non démontrée[72].

11.4.2 Les notes d'Érasme Bartholin

De moindres difficultés dans la solution du *Problema astronomicum* engagèrent d'autre part Schooten à requérir aux services d'Érasme Bartholin[73] pour annoter certains éléments de la solution[74] qui pourraient inspirer de la difficulté aux lecteurs moins exercés à la méthode[75].

Bartholin s'ouvrait à Wormius dans une lettre datée à Leyde du 12 novembre 1649 de la tâche qui lui avait été confiée :

> *Cùm autem [Schooten] rogatus esset per litteras à Mathematicis in Galliâ*, ut quæstionem quandam difficillimam, hic a Stampioenio ante annos aliquot propositam (qui 600 Florenos, Sponsione cum alio quodam facta de quæstionis illius solutione, perdidit, quippe problema propositum solvere non potuit) & Belgicè editam, subjungeret operi huic Des-Cartes, additis Commentariis, quibus via pateret unicuique perveniendi ad obscurissimam & subtilissimam propositæ quæstionis solutionem, noluit petitionibus eorum refragari ; *& cùm audivisset me jam paratos habere in eam Commentarios, quos memoriæ causâ conscripseram, petiit à me, ut paucis eos subnecti concederem* : cujus me petitioni morigerum gessi.[76]

Ainsi, Schooten joignit quelques notes personnelles de lecture prises auparavant par Bartholin à titre d'éclaircissements pour sa traduction de la solution « très obscure et très subtile » du *Problema astronomicum*, figurant dans le *Den On-Wissen Wis-konstenaer*. Bartholin, vraisemblablement

[72]Cf. *infra* [Chapitre 13, p. 435] et pour les différentes démonstrations de ce théorème [section 13.1, p. 437].

[73]Sur Érasme Bartholin, cf. *supra* [note 57, p. 33].

[74]Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 318-323] & [Schooten(1659a), p. 385-389]. Les notes sont inchangées d'une édition à l'autre.

[75]Schooten écrit ainsi :

> Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla occurant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque minùs exercitatis scrupulum injicere possent ; placuit ea, quæ ad eorum explicationem [...] D. Erasmius Bartholinus [...] concinnavit, paucis hic adjicere.

Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 318] et [Schooten(1659a), p. 384-385].

[76]C'est moi qui souligne. Cf. [Descartes(1964-1974), V, p. 573].

à la suite de Schooten, accorde une place centrale au *Problema astronomicum* dans la controverse de 1638-1640 avec Stampioen, indiquant que celui-ci échouat à en donner une solution. Cela le conduit à une inexactitude puisque le motif de la gageure qui conduisit Stampioen à perdre 600 florins portait *in fine* sur la règle d'extraction des racines cubiques donnée dans le traité d'algèbre de Stampioen[77]. En choisissant d'insister sur la fausseté de cette règle, Descartes visait en effet vraisemblablement à démontrer, par extension, le caractère spécieux de l'ouvrage tout entier de son adversaire, concurrent de la *Géométrie*.

Au regard des compléments apportés par Schooten et Bartholin, Il semble donc que Waessenaer ne fût pas d'un grand secours pour éclaircir la solution « très obscure et très subtile » du *Problema astronomicum* qui figurait dans le *Den On-Wissen Wis-konstenaer*. Cela accentue la présomption selon laquelle celui-ci n'aurait fait que rassembler et du reste assez mal les éléments de la solution cartésienne.

11.5 Les mathématiciens français et le *Problema astronomicum*

D'autre part, d'après Bartholin, l'initiative de Schooten d'insérer dans son édition latine de 1649 le *Problema astronomicum* avait été suggérée à ce dernier par des lettres provenant de mathématiciens français. S'agissait-il de ceux que Schooten avait rencontrés auparavant lors de son voyage en France de 1641 : Mersenne, mais aussi Carcavi, Hardy, Roberval et Mylon[78] ? À cette époque, un an à peine après la fin de la querelle entre Stampioen et Waessenaer — prête-nom de Descartes —, peut-être Schooten s'était-il fait l'interprète de certaines questions et pièces de la dispute auprès des mathématiciens français, dont le *Problema astronomicum* et le *Den On-Wissen Wis-konstenaer* ?

En effet, l'usage du flamand dans la controverse, qui avait obligé Des-

[77]Cf. la traduction française des différents textes de compromis entre Stampioen et Waessenaer de novembre-décembre 1639 *in* [Descartes(1964-1974), II, p. 720-726].

[78]Cf. l'éclaircissement de Adam-Tannery dans un supplément *in* [Descartes(1964-1974), V, p. 563]. Cf. également la lettre de Descartes à Mersenne datée par Adam-Tannery de septembre 1641 qui contient une pointe contre Schooten *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 435]. Cf. enfin la note de B. Rochot relative à cette lettre *in* [Mersenne(1945-1988), X, p. 761-762].

cartes à recourir aux services d'un traducteur en 1640, comme on l'a vu, empêchait en France une diffusion véritablement documentée des éléments mathématiques de la querelle. Cela inquiétait Descartes, car les nombreuses rodomontades de Stampioen durant la controverse après la publication — en flamand — de son traité d'algèbre eussent pu donner le sentiment à Paris d'un revers dans la diffusion de la *Géométrie* aux Pays-Bas, après les difficultés rencontrées en France. En outre, des rumeurs de la dispute étaient parvenue aux oreilles de Mersenne. Cette divulgation malvenue était le fait d'Adrien Rivet, ministre professeur de théologie à l'université de Leyde, qui avait rapporté la gageure à Mersenne en 1639[79].

Dans une lettre à Mersenne du 6 août 1640, Descartes, soupçonnant Stampioen d'avoir le projet de faire parvenir aux mathématiciens parisiens un dossier en français relatant mensongèrement à son propre avantage la controverse, prenait les devants en envoyant sa propre règle d'extraction des racines cubiques ainsi que la règle défectueuse de Stampioen qui avaient constitué l'objet final de la querelle :

> Le papier que vous trouuerez avec cette lettre contient le suiet d'vne gageure dont M^{r} Rivet vous auoit escrit, & c'est Golius qui m'a prié de vous l'enuoyer, sur ce qu'il a eu auis *que ce badin [Stampioen], qui a perdu, fait translater quelque escrit en françois pour le faire imprimer & en demander le iugement des mathematiciens de Paris.*[80]

Le *Problema astronomicum* avait pu ainsi être communiqué en France parmi d'autres objets et pièces de la querelle avec Stampioen, que ce soit par l'entremise de Descartes, Schooten, ou bien Stampioen. Les mathématiciens français auraient suggéré plus tard à Schooten, si l'on en croit Bartholin, d'insérer la solution de ce problème dans l'édition latine de la *Géométrie* de 1649. Si l'identité de ces mathématiciens nous demeure inconnue, les relations entre Mylon et Schooten, concernant en particulier le *Problema astronomi-*

---

[79]Cf. la lettre de Descartes à Mersenne du 25 décembre 1639 *in* [Descartes(1964-1974), II, p. 636-637], ainsi que la lettre de Descartes à Mersenne du 29 janvier 1640 *in* [Descartes(1964-1974), III, p. 6-7].

[80]Cf. [Descartes(1964-1974), III, p. 148]. L'écrit de Stampioen cité par Descartes nous est inconnu, si tant est qu'il ait existé. Cf. [Mersenne(1945-1988), IX, p. 551, n.]. Cf. également l'article [Costabel(1969)] de Pierre Costabel qui porte sur ce document envoyé par Descartes à Mersenne, contenant une règle d'extraction des racines cubiques. Mersenne l'emportera plus tard en 1644-1645 lors de son voyage en Italie, parmi d'autres pièces des mathématiciens français.

cum, sont moins ignorées.

11.5.1 Une suggestion de Claude Mylon ?

On sait que Mylon entretint une conversation suivie avec Schooten. Lorsque ce dernier se rendit à Paris en 1641, Mylon lui montra semble-t-il une solution originale du *Problema astronomicum*, inspirée par sa lecture de l'ouvrage du gnomoniste italien Muzzio Oddi intitulé *Degli Horologi Solari*[81]. Ce traité[82] avait été signalé auparavant par Cavalieri à Mersenne dans une lettre du 23 novembre 1641[83].

Lipstorp, un des élèves de Schooten, dans son traité *Specimina Philosophiæ Cartesianæ* de 1653[84] narre ainsi les circonstances dans lesquelles, selon lui, son maître parvint à la solution du *Problema astronomicum* figurant dans l'édition latine de 1649 :

> [...] Hujus autem solutioni ansam dederat Ampliss. Dn. Mylon, Mathematicus et IC. Parisiensis, qui Domino Scotenio Lutetiis adhuc commoranti et aliis illud proposuit, eâ conditione, ut qui primus solutionem ejus inveniret, illam publici juris faceret. Itaque Cl. Scotenius ex Galliis domum redux, huic solutioni totum se impendit, et superatis omnibus difficultatibus brevi ejùs victor evasit, hoc ipso Iuculenter ostendens non facilè problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat aut ejusdem methodo solvi non possit.[85]

La narration de Lipstorp, bien que trop partiale et laudative, confirme ainsi les échanges de Mylon et Schooten, lors du voyage de ce dernier en France, au sujet d'une solution du *Problema astronomicum*. Si Adam-Tannery indiquent

[81] Cf. la note biographique consacrée à Mylon *in* [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 376-377] précédant la lettre adressée par Mylon à Mersenne du 25 février 1645 : [XIII, p. 377-383]CM. A. Beaulieu ne donne malheureusement pas de sources. Pour plus de précisions sur le mathématicien Mylon, cf. l'article de Jean Mesnard qui lui est consacré : [Mesnard(1991)].

[82] Cf. [Oddi(1638)]. Oddi avait déjà écrit un premier traité de gnomonique en 1614. Cf. [Oddi(1614)].

[83] Cf. [Mersenne(1945-1988), XIII, p. 376]. Cf. la lettre en question *in* [Mersenne(1945-1988), X, p. 793].

[84] Cf. [Lipstorp(1653)]. Sur ce traité, cf. [Savini(2004), p. 320-325].

[85] Cité par Adam-Tannery *in* [Descartes(1964-1974), IV, p. 232]. Cf. [Lipstorp(1653), p. 12-13]. On reconnaît *in fine* une citation textuelle de la présentation par Schooten du *Problema astronomicum* dans l'édition latine de 1649.

en se référant à la controverse de 1638-1640 entre Stampioen et Waessenaer dans leur commentaire de la citation que Lipstorp est mal renseigné[86], leur conclusion paraît quelque peu hâtive car Lipstorp connaît le contexte de la controverse[87], et ne peut avoir été ainsi renseigné que par son maître, Schooten, témoin puis protagoniste de ces deux développements dans l'histoire du *Problema astronomicum*.

11.6 Une solution de Newton dans l'*Arithmetica Universalis*

Newton donne une solution du *Problema Astronomicum* dans ses *Lectures on Algebra, 1673-1683*[88] publiées plus tard en 1707 dans l'*Arithmetica Universalis*. Cette solution lui fut vraisemblablement inspirée par sa lecture de l'*Additamentum* de F. van Schooten.

Ajoutons que, précédant immédiatement le *Problema Astronomicum*, on trouve un groupe de cinq problèmes qui traitent de problèmes de contact entre droites et cercles[89]. Le dernier de ces problèmes propose ainsi de « décrire un cercle passant par un point donné et tangent à deux autres cercles donnés de grandeur et de position »[90]. L'ordre choisi par Newton semble donc suggérer à nouveau une relation entre le *Problema astronomicum* et le problème des cercles, comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

[86]Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 232].
[87]Cf. [Lipstorp(1653), p. 12-13].
[88]Cf. [Newton(1673-1683), p. 266-279].
[89]Cf. [Newton(1673-1683), p. 252-266].
[90]Cf. [Newton(1673-1683), p. 262-266].

Chapitre 12

Les solutions du *Problema astronomicum*

Après la reconstruction que nous avons donnée de l'histoire du *Problema astronomicum*, il importe à présent de procéder à une étude mathématique détaillée de ce problème, en examinant les énoncés et les solutions qui en sont donnés par les différents protagonistes.

12.1 Le problème et ses hypothèses

12.1.1 Les pré-requis mathématiques du problème

Rappelons tout d'abord les pré-requis mathématiques du problème[1]. Que soit donné un bâton quelconque AR, de longueur α, élevé verticalement en un point donné A du globe terrestre, et qu'on cherche tout d'abord la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre de ce bâton, un jour donné de l'année. Il est clair, que relativement à la position du bâton, seule la latitude λ intervient. D'autre part, le jour de l'année est donné par la déclinaison solaire δ qui indique l'inclinaison des rayons solaires par rapport à l'équateur. Soit RS la droite parallèle à l'axe polaire.

On peut montrer facilement[2] qu'on retrouve ces deux angles dans le cône

[1] Pierre Costabel et Derek Whiteside donnent également une discussion mathématique sur le problème. Cf. resp. [Costabel(1990), p. 377-378, 380-385] et [Newton(1673-1683), p. 267-268].

[2] Cf. [figure 12.1, p. 402].

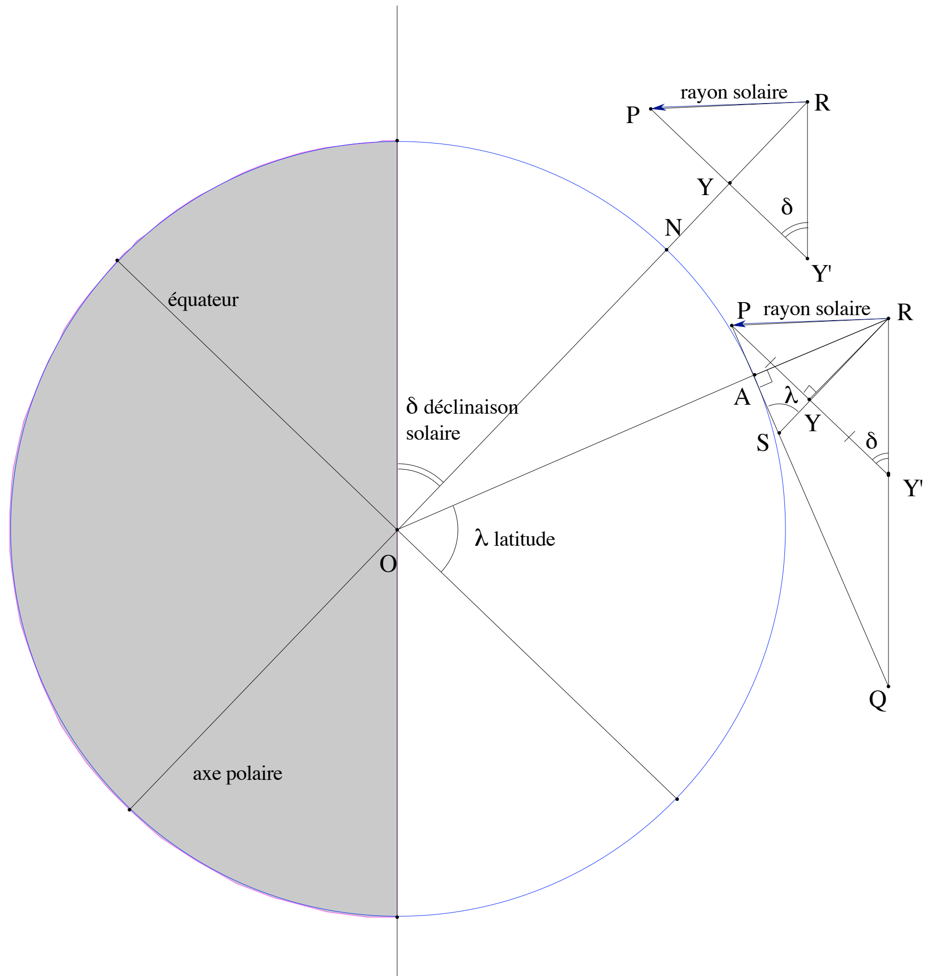

FIG. 12.1 – Le cône des rayons solaires (1)

dont le sommet est l'extrémité R du bâton, les génératrices les rayons lumineux au cours d'une journée, et dont l'axe RS est parallèle à l'axe du monde du fait de la rotation diurne de la terre autour de ce même axe. Ainsi, le demi-angle au sommet R du cône est égal au complément de la déclinaison solaire δ tandis que l'angle entre l'axe du cône et l'horizontale est égal à la latitude λ.

Si l'on néglige d'autre part la variation de la déclinaison solaire un jour donné, l'angle au sommet du cône sera supposé constant et on aura donc un cône circulaire de révolution. Descartes avait naturellement remarqué cette condition sur la nature de la courbe décrite par les extrémités des ombres respectives de chacun des bâtons. Dans sa lettre, datée par Adam-Tannery de juin 1645, il ajoute après avoir donné l'énoncé du problème à son correspondant :

> Et supponimus illas umbras describere accurate conicas sectiones, ut quaestio sit Geometrica, non Mechanica.[3]

En effet, une telle supposition était nécessaire pour résoudre le problème selon la méthode de la *Géométrie* puisque Descartes en avait exclu les courbes mécaniques.

Finalement, la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton AR sera une conique ou du moins un arc de conique. D'autre part, le point A, pied du bâton, appartiendra à un axe de la conique. Au pôle, le jour du solstice d'été, la conique sera un cercle de centre A le pied du bâton. Remarquons qu'on retrouve ainsi « physiquement » l'idée projective de la réduction des coniques au cercle par une projection orthogonale bien choisie.

À présent, il est possible d'interpréter le *Problema astronomicum* et les problèmes de gnomonique qui lui sont liés dans un cadre purement géométrique. Ce faisant, nous prétendons d'une part restituer les raisons d'être du problème et de ses solutions, d'autre part éclairer les relations du *Problema astronomicum* avec la question de Desargues et le problème des cercles tangents d'Apollonius, relations que nous avons mises en évidence dans la section historique précédente.

Il est clair d'après les remarques précédentes que si la déclinaison solaire δ et la latitude λ sont données, le triangle PRS est donné de forme, plus précisément à une homothétie près de centre A. Le cône des rayons lumineux est donc donné à une translation de son sommet près sur la verticale issue du point A.

D'autre part, sous ses mêmes conditions, la direction du plan de section du cône est donnée, et donc la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A est donné de forme *i.e.* à une similitude près.

Mais si la conique est donnée de forme et de grandeur, alors le sommet du cône et donc le cône sont donnés. Ainsi la longueur α du bâton A est donnée. Sous l'hypothèse que trois points suffisent à déterminer une conique de grandeur[4], lorsqu'elle est déjà connue de forme, on retrouve les deux problèmes de

[3] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 229].

[4] Pierre Costabel propose une conjecture concernant la connaissance par Descartes d'une telle propriété. Cf. [Costabel(1990), p. 381].

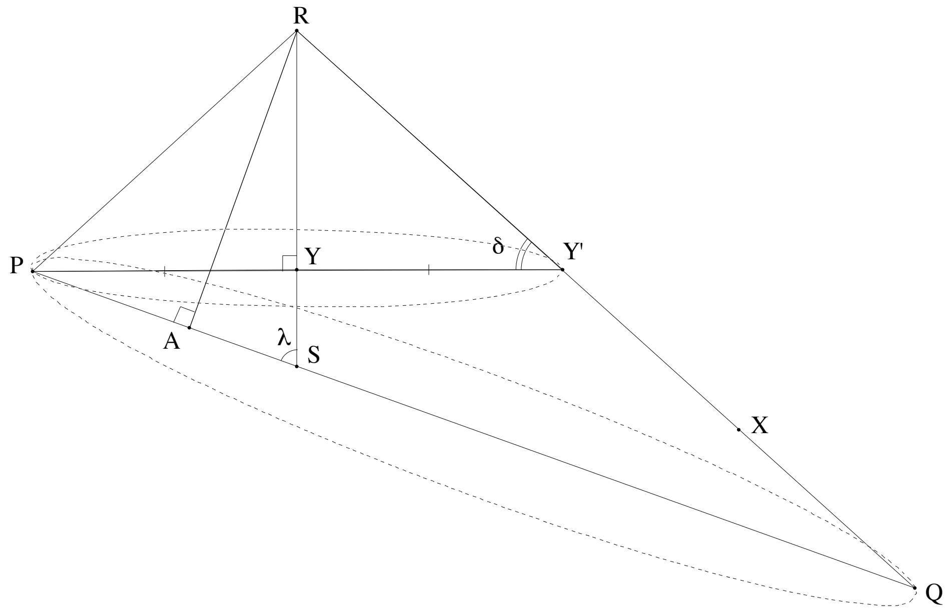

FIG. 12.2 – Le cône des rayons solaires (2)

gnomonique de Descartes des *Cogitationes Privatæ* et de la lettre à Mersenne du 15 avril 1630.

Réciproquement, si la longueur α du bâton A est donnée et la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A est donnée, pour trouver la déclinaison solaire δ et la latitude λ il suffit de déterminer le cercle de section du cône passant par le point P. On pourra ainsi calculer

$$\tan\delta = \frac{\mathsf{AR}}{\mathsf{AS}} \text{ et } \tan\lambda = \frac{\mathsf{RY}}{\mathsf{PY}}. \tag{12.1}$$

On retrouve donc une question semblable à celle de Desargues de 1641[5].

[5]Cf. *supra* [section 11.3.4, p. 392].

12.1.2 La gnomonique et le problème des cercles tangents

Reste à établir la relation entre les problème de gnomonique des *Cogitationes Privatæ* et de la lettre à Mersenne du 15 avril 1630 et le problème d'Apollonius des cercles tangents suggérée par Descartes. Ce travail a déjà été fait par Pierre Costabel[6] que nous paraphrasons ci-après.

Cette relation du problème de gnomonique avec le problème des cercles tangents permet en outre de rendre compte de la connaissance par Descartes de la propriété selon laquelle trois points suffisent à déterminer la section d'un cône dont le sommet est donné à une translation près. Qui plus est, la mention explicite du problème des trois cercles dans le texte des *Cogitationes Privatæ*, bien que sous une forme difficile à interpréter, paraît accréditer l'idée selon laquelle Descartes serait parvenue à la propriété précédente en réduisant son problème de gnomonique au problème des trois cercles comme il l'indique lui-même.

Il s'agit donc de déterminer le sommet du bâton A en supposant donnés la déclinaison solaire δ et la latitude λ, ainsi que trois points B, C et D du plan horizontal appartenant à la conique décrite par l'extrémité d l'ombre du bâton A.

Soient b, c, d et B', C', D' les projections orthogonales respectives des points B, C, D sur la droite RS parallèle à l'axe polaire et sur le plan orthogonal à cette droite[7].

Les droites BB', CC', DD' sont ainsi parallèles à la droite RS et comme les points appartiennent par hypothèse au cône des rayons solaires dont l'angle de définition est égal au complémentaire δ^c de la déclinaison solaire, on a

$$\mathsf{RB}' = \mathsf{R}b\cot\delta,\ \mathsf{RC}' = \mathsf{R}c\cot\delta,\ \mathsf{RD}' = \mathsf{R}d\cot\delta. \tag{12.2}$$

On peut ainsi déduire trois familles de trois cercles formées par un cercle tangent extérieurement intérieurement et/ou extérieurement à deux autres[8].

[6]Cf. [Costabel(1990), p. 381-382]. L'historien ne cite pas le premier problème de 1619-1621 mais seulement le second où la relation avec le problème des trois cercles est bien plus implicite, puisqu'elle est seulement indiquée par le fait qu'un problème précédent est celui des quatre sphères.

[7]Cf. [figure 12.3, 406].

[8]Cf. [figure 12.4, 407]. Costabel ne considère que celle ou un cercle est tangent extérieurement aux deux autres.

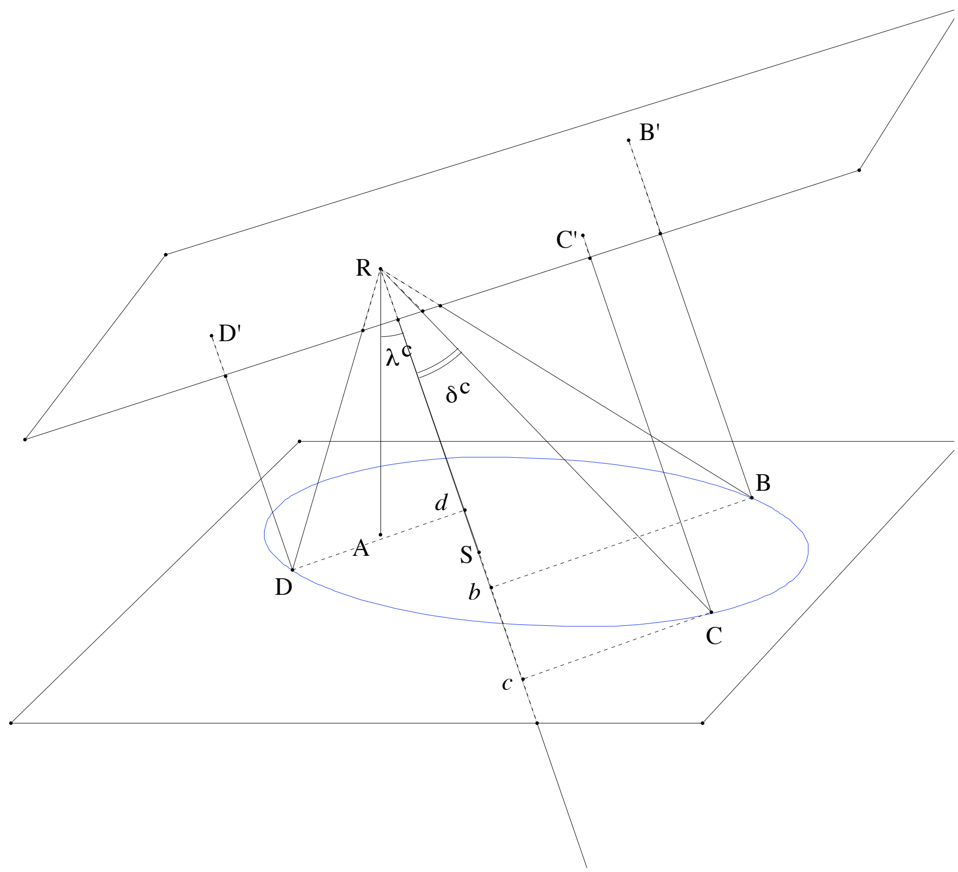

FIG. 12.3 – Les problèmes de gnomonique et le problème des trois cercles (1)

Ainsi le point R est le centre d'un cercle passant par D' et tangent extérieurement aux cercles de centres B' et C' de rayons respectifs $\mathsf{DB}\cot\delta$ et $\mathsf{DC}\cot\delta$.

Il s'agit d'un cas particulier du problème des trois cercles. Une fois déterminé le point R dans le plan orthogonal, la longueur RD' est donnée, et par suite la longueur $\mathsf{R}d$ car la déclinaison solaire est connue. Connaissant d'autre part la latitude λ, on déduit la longueur $\mathsf{RA} = \alpha$ du bâton.

Ajoutons à présent une remarque nouvelle qui nous paraît confirmer définitivement la divination de Pierre Costabel. La configuration 12.4 des cercles tangents est très particulière. Ses symétries proviennent de la disposition des projections b, c, d sur la droite RS. C'est peut-être à cette configu-

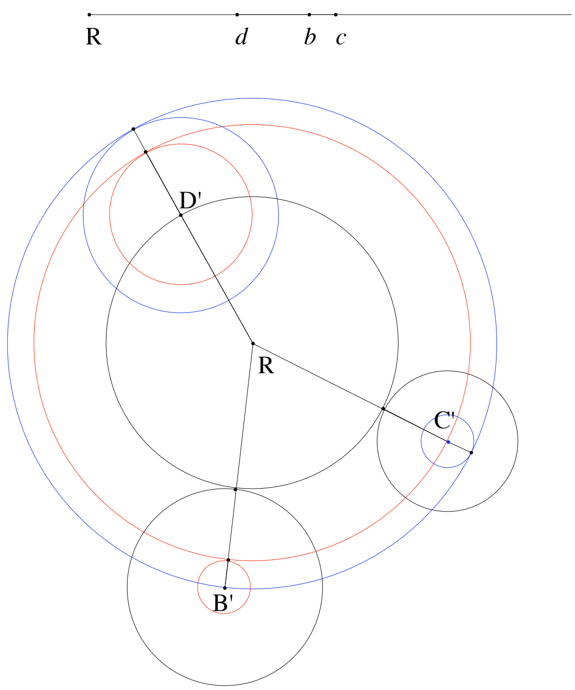

FIG. 12.4 – Les problèmes de gnomonique et le problème des trois cercles (2)

ration, bien que de manière obscure, que faisait référence Descartes lorsqu'il écrivait dans ses *Cogitationes Privatæ* :

> Hoc reducitur ad circulum tres alios inæquales tangentem, quorum centra in rectam lineam incidant.[9]

D'autre part, on peut remarquer que la réduction du problème gnomonique au problème des trois cercles présentée ici est purement géométrique et non algébrique. Le fait qu'une telle réduction soit déjà remarquée par Descartes dans les *Cogitationes Privatæ* en 1619-1621, alors qu'il ne possède pas encore sa méthode algébrique pour résoudre les problèmes géométriques, laisse penser qu'il s'agissait bien de cette première réduction à laquelle il faisait référence à l'époque. De surcroît, l'hypothèse est corroborée par la

[9]Cf. [Descartes(1619-1621), p. 229] et *supra* [section 11.2.1, p. 381].

mention « avec la reigle & le compas » de la lettre du 15 avril 1630 de Descartes à Mersenne qui paraît indiquer une résolution géométrique classique.

12.1.3 Les hypothèses physiques du problème et leur traduction géométrique

Si l'on compare les énoncés du *Problema astronomicum* donnés par Stampioen[10], Descartes[11], Schooten[12] et Newton[13], on remarque que ceux-ci sont différents les uns des autres quant aux hypothèses mentionnées. Après une partie commune, il semble que la reconnaissance par certains des auteurs d'hypothèses non nécessaires à la solution du problème les aient conduit soit à ne mentionner que les données nécessaires et suffisantes, soit à expliciter des relations entre les hypothèses. Bien sûr, au constat de la surdétermination de la question s'ajoutait une difficulté bien plus grande : disposer d'une solution ne requérant qu'au nombre minimal d'hypothèses.

Voici la transcription que l'on peut donner de ces différents énoncés. Nous rappelons tout d'abord la partie commune, puis les hypothèses de chacun :

Problème 12.1 (*Problema astronomicum*) *En un lieu, trois bâtons A, B, C sont élevés perpendiculairement à un plan horizontal aux points* A, B *et* C. *Le bâton A mesure 6 pieds, le bâton B 18 pieds et le bâton C 8 pieds. Le segment* AB *mesure 33 pieds. Un même jour, l'extrémité de l'ombre du bâton A passe par les points* B *et* C*,*

Stampioen *puis celle de B par* A *et celle de C par* A.[14]

Descartes *celle de B par* A *et* C*,* par conséquent *celle de C par* A *et* B.[15]

Schooten *celle de B par* A *et* C*, et celle de C par* A*,* donc *par* B.[16]

Newton *celle de B par* A *et* C*, et celle de C par* A.[17]

[10] Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 646-647].

[11] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 228-229].

[12] Cf. [Schooten(1649a), p. 301] et [Schooten(1659a), I, p. 372].

[13] Cf. [Newton(1673-1683), p. 266].

[14] Ajouté à la main en note dans l'exemplaire de Schooten : « et celle de B par C ». Cf. [Descartes(1964-1974), X, p. 647].

[15] Cf. [Descartes(1964-1974), IV, p. 228-229].

[16] Cf. [Schooten(1649a), p. 301] et [Schooten(1659a), p. 372]. L'énoncé est inchangé dans les deux éditions.

[17] Cf. [Newton(1673-1683), p. 266-267].

Sous ces hypothèses, quelle est la déclinaison solaire et l'élévation polaire, i.e. *quel jour de l'année et en quel lieu de la terre cela s'est-il produit ?*

Traduisons à présent géométriquement les hypothèses portant sur les ombres des bâtons. Soit $\mathcal{C}$ la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. Cette conique passe par les points B et C par hypothèse. Son grand axe, passant par le point A, est PQ. Elle est coupée respectivement par la droite AB au point E et par la droite AC au point F. Soit DG la droite passant par A et parallèle à la droite BC. La conique $\mathcal{C}$ est coupée par la droite DG aux points D et G. Désignons enfin par α, β et γ les longueurs des bâtons A, B et C. Par conservation des rapports de longueur par projection selon la direction des rayons solaires, on peut traduire géométriquement les hypothèses portant sur les ombres par la donnée de rapports de segments, les longueurs des bâtons étant connues et données en nombres.

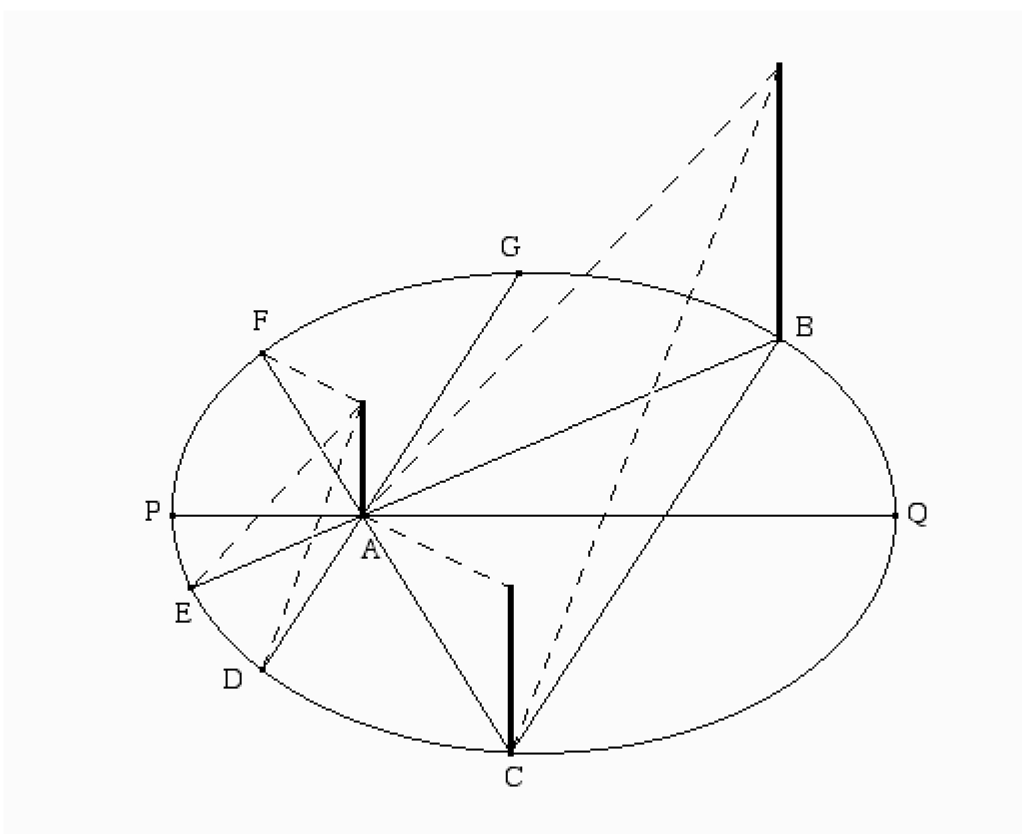

FIG. 12.5 – Le *Problema astronomicum*

Lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton B passe par le point A, l'extrémité de l'ombre du bâton A passe par le point E et on a :

$$\mathsf{BA} : \mathsf{AE} = \beta : \alpha. \tag{12.3}$$

De même, lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton C passe par A,

$$\mathsf{CA} : \mathsf{AF} = \gamma : \alpha. \tag{12.4}$$

Lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton B passe par C,

$$\mathsf{BC} : \mathsf{AD} = \beta : \alpha. \tag{12.5}$$

Et lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton C passe par B,

$$\mathsf{CB} : \mathsf{AG} = \gamma : \alpha. \tag{12.6}$$

Ainsi, se donner une hypothèse sur les ombres du bâton B ou du bâton C revient à se donner un point par lequel la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A doit passer.

Descartes use quant à lui dans sa solution du *Problema astronomicum* d'un cinquième rapport qui n'est pas directement fourni par les hypothèses, puisqu'il ne correspond à aucune hypothèse portant sur les ombres des bâtons, pour lequel il ne donne pas de démonstration :

$$\mathsf{GA} : \mathsf{AD} = \beta : \gamma. \tag{12.7}$$

Ce dernier rapport peut être déduit des rapports (12.5) et (12.6), ce qui oblige à disposer des six hypothèses sur les ombres. Le théorème préliminaire donné par Schooten et précédemment mentionné, en montrant que l'hypothèse correspondant à la proportion (12.6) peut être déduite de la proportion (12.5), pourvoit à cette tâche et complète la démonstration de Descartes-Waessenaer, en montrant qu'il suffit de disposer de cinq hypothèses sur les ombres.

On peut ainsi résumer de la façon suivante les différents énoncés. Sous l'hypothèse commune que l'extrémité de l'ombre du bâton A décrit une conique qui passe par les points B et C :

- Stampioen suppose (12.3) et (12.4) ;
- Descartes, (12.3) et (12.5), ajoutant que (12.3) et (12.5) impliquent (12.4) et (12.6), et utilisant dans sa solution (12.3), (12.4), (12.5) et (12.7) ;
- Schooten, (12.3), (12.4) et (12.5), démontrant dans un théorème préliminaire que (12.3), (12.4) et (12.5) impliquent (12.6), et en déduisant (12.7) ;
- Newton, (12.3), (12.4) et (12.5).

12.1.4 Le nombre des hypothèses et la nature des solutions

Avant d'entrer dans le détail de l'analyse mathématique des solutions, commençons par quelques observations préliminaires. On peut remarquer que l'énoncé de Stampioen, le premier à avoir proposé le problème en 1638, est donné en nombres et non en lignes : Stampioen donne des valeurs numériques pour les mesures des longueurs des bâtons et la distance entre les bâtons A et B. Il s'agit là de la pratique courante du mathématicien flamand, qu'on retrouve à l'œuvre dans son traité *Algebra ofte nieuwe stel-regel* de 1640[18].

D'autre part, il est clair que l'énoncé de Newton dérive de celui de Schooten figurant dans l'édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661[19]. Si Newton ne mentionne pas l'hypothèse portant sur la sixième ombre — *i.e.* l'ombre de C passant par B —, c'est parce qu'il a reconnu dans sa lecture de la solution embrouillée présentée par Schooten que cette hypothèse pouvait en être aisément écartée, ce qu'il fait dans sa solution élégante du problème.

Schooten, que ce soit dans son annotation du placard de Stampioen ou dans son achèvement de la solution de Descartes-Waessenaer, avec la démonstration d'un théorème préliminaire énonçant que la sixième hypothèse peut être déduite des cinq premières, insiste au contraire sur les relations de dépendance entre les hypothèses du problème. Un problématique différente de nature algébrique[20] — héritée des vestiges de la solution cartésienne ? — nous semble ici s'ajouter à la question de nature géométrique posée par le *Problema astronomicum* : Un problème étant donné, si on lui associe un certain nombre d'équations comportant des lignes données et des lignes inconnues, qu'en est-il de la détermination du problème ? Comment cette question se manifeste-t-elle dans l'étude des équations du problème ?

Ajoutons qu'une telle problématique est moderne dans la mesure où elle

[18]C'est ce qu'indique H. Bos qui remarque cependant que Stampioen a consacré une brève section finale à l'algèbre littérale où il montre comment des théorèmes d'Euclide et Viète peuvent être déduits en usant de cet art. Cf. [Descartes(2003), p. 203].

[19]Comme le note D.T. Whiteside. Cf. [Newton(1673-1683), p. 266-267 n.].

[20]L'algèbre dont nous parlons ici n'est pas la théorie des équations mais renverrait plutôt à la détermination et à la résolution d'un système de m équations à n inconnues dans le cadre d'une théorie des courbes algébriques. Il s'agirait donc plutôt d'un art qui constituerait les origines de la théorie de l'algèbre linéaire, et qu'on retrouve plus tard, entre autres, chez Leibniz, Cramer ou Mac Laurin, dans le même cadre de la géométrie algébrique. Cf. [Dieudonné(1996), p. 58-61] pour une présentation d'ensemble. Pour une étude détaillée de l'histoire de la théorie de l'élimination, cf. [Penchèvre(2006)].

est quantitative : elle ne s'intéresse pas seulement à la question « si certaines « choses » sont données, d'autres sont-elles données ? » mais à la question du rapport entre le *nombre* des données et le nombre des inconnues.

De surcroît, l'énoncé cartésien et son abrupte concision manifestée par l'usage d'« *ex consequenti* » pour signifier le conditionnement des deux dernières hypothèses par les quatre premières nous paraît témoigner, en amont, de la présence de cette problématique algébrique s'ajoutant au problème géométrique initial, seul considéré par Newton.

Une solution trigonométrique

Bien sûr, c'est la formulation initiale du problème par Stampioen qui a poussé Descartes dans ses retranchements, puisque le mathématicien hollandais n'énonçait que quatre hypothèses. Si la solution de Stampioen ne nous est pas parvenue, peut-on lui en faire crédit, alors qu'on le reconnaît pour un algébriste peu inspiré, comme en témoigne sa règle défectueuse d'extraction de la racine cubique des nombres binômes ? L'historien de l'Astronomie Jean-Baptiste Delambre nous permet de répondre de façon convaincante à cette question. Celui-ci fait un compte rendu critique et ironique du problème et de la solution donnée par Newton dans son *Histoire de l'Astronomie au dix-huitième siècle*. Voici ce qu'il écrit :

> Si ce problème n'a aucune utilité réelle, il a du moins le mérite d'être l'un des plus extraordinaires qui aient jamais été proposés : jamais aucun hasard n'en pourra fournir les données.
>
> [...] Son analyse occupe quatre pages ; ses équations sont hérissées de radicaux, et en se bornant même à ce qui est indispensable, le calcul est encore d'une longueur énorme et bien inutile.
>
> [...] mais Newton, *apparemment pour montrer les ressources de son analyse, se complaît à accumuler les difficultés au lieu de les écarter. Il est évident qu'il n'a en vue que les géomètres et nullement les astronomes, qui savent fort bien que ce n'est pas dans les ouvrages d'analyse qu'il faut chercher les solutions des problèmes usuels de trigonométrie.*[21]

[21] C'est moi qui souligne. Cf. [Delambre(1827), p. 37, 40, 42]. Cité par Whiteside : [Newton(1673-1683), p. 278].

La dernière partie de la citation que nous avons placée en italique s'applique remarquablement à Descartes et à sa solution et pose clairement les enjeux de la controverse avec Stampioen. Stampioen disposait possiblement d'une solution trigonométrique du problème. En effet, à cette époque, la trigonométrie sphérique était utilisée dans la résolution de problèmes de gnomonique et Stampioen connaissait et maîtrisait cette théorie mathématique[22].

On peut imaginer que Stampioen ayant donné le problème en nombres, il avait fabriqué un tel problème à partir d'une solution numérique qu'il connaissait déjà, et ne s'était donc pas intéressé à la question de la dépendance des conditions. Il lui suffisait simplement de se donner assez d'hypothèses sur les ombres, en l'occurence quatre, pour retrouver la déclinaison solaire et la latitude en employant possiblement la trigonométrie sphérique comme Delambre plus tard[23].

Une solution algébrique

Or, comme le remarque Delambre dans son commentaire et dans la solution trigonométrique qu'il donne[24], dans ce cas :

> De ses cinq observations nous supprimons la cinquième comme superflue,
>
> [...] Newton [et Descartes] voulait trouver l'ellipse, dont on aura aucun besoin pour ce problème.[25]

Ainsi, Stampioen, qui n'avait besoin que de quatre hypothèses car il employait une méthode trigonométrique, obligeait Descartes, si ce dernier voulait répondre au défi lancé contre sa *Géométrie*, non seulement à la production d'une solution au problème conforme à la Méthode, mais encore à une

[22]Il a ainsi publié un traité de trigonométrie sphérique en 1627 intitulé *Kort by-voegsel der sphaerische triangulen*. Cf. la note biographique de J. van de Ven : [Descartes(2003), p. 300].

[23]Un heureux hasard — ou l'infortune ? — nous ont fait trouver au moment de l'impression de cette thèse un article particulièrement détaillé et intéressant sur la courbe d'ombre d'un gnomon que nous n'avons pu que rapidement consulter [Collignon(1888)]. On y trouve d'abord une étude de l'équation de cette courbe qui emploie la trigonométrique sphérique. Cf. [Collignon(1888), p. 53-67]. L'auteur résoud ensuite des problèmes de gnomonique dont celui des trois bâtons et son problème « inverse » qui correspond aux questions de gnomonique posées par Descartes. Cf. [Collignon(1888), p. 67-72].

[24]Cf. [Delambre(1827), p. 35-42].

[25]Cf. [Delambre(1827), p. 40, 42].

réflexion de nature algébrique sur les relations de dépendance entre les hypothèses. En effet, Descartes et Newton ont besoin dans leur solution de la conique décrite par l'ombre de l'extrémité du bâton A. Plus précisément, ils déduisent de l'équation de la conique les distances de A aux sommets et au centre de cette dernière — il s'agit en effet d'une ellipse —, et emploient ces distances pour trouver la latitude et la déclinaison solaire. Une conique étant déterminée par cinq points, ils ont donc besoin de la donnée de cinq ombres.

Descartes et Newton se proposent ainsi de déterminer la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. La nature de la conique — ellipse, parabole, hyperbole — et la position des points B et C — d'un même côté ou de part et d'autre de l'axe PQ — bien que naturellement déterminées par l'énoncé ne sont pas précisées et doivent donc faire l'objet d'une analyse préalable. Ainsi, pour celui qui ne dispose pas d'une désignation générique de *toutes* les coniques sous la forme, par exemple, d'une équation algébrique du second degré à deux inconnues, il serait nécessaire de procéder à une disjonction des cas (six en l'occurence), avant de montrer qu'un seul conduit à la solution tandis que les autres sont impossibles. Au contraire, Descartes et Newton recourent tous deux au formalisme algébrique pour désigner une conique par une équation, bien que de façon assez différente.

Schooten avait été impuissant à soutenir complètement et à comprendre véritablement l'enjeu algébrique sous-jacent portant sur la dépendance des hypothèses du *Problema Astronomicum*, qui transparaît dans la solution de Descartes-Waessenaer, bien que masqué par la rédaction défectueuse et incomplète de Waessenaer. Néanmoins, l'éditeur de la *Geometria* était parvenu à démontrer que les cinq premières hypothèses du problème conditionnent la sixième. Schooten n'ayant pas mis clairement en évidence cette composante algébrique du problème, par voie de conséquence, elle n'apparaît plus dans la lecture et la solution de Newton qui se contente d'utiliser élégamment cinq hypothèses en dédaignant la sixième.

Une solution projective

Néanmoins, Newton déplace cette question de la détermination dans le champ de la géométrie projective. Une autre façon de procéder pour déterminer la latitude et la déclinaison solaire serait en effet de supposer que la conique décrite par l'ombre est un cercle[26]. Un cercle étant défini par trois

[26]Cela est le cas, physiquement, en se plaçant au pôle nord le jour du solstice d'été.

points, on serait assuré de la détermination de la question, en n'usant que de trois observations d'ombres[27]. On pourrait ensuite en déduire la solution pour l'ellipse, la projection orthogonale de l'ellipse sur un cercle conservant les rapports de segments de même direction. Newton écrit ainsi en note dans son *Waste Book* :

> The Problem in Schooten *de tribus baculis* may be solved more easily by supposing y^e Ellipsis to be a circle first & reducing it to y^e desired [Ellipsis].[28]

Une autre démonstration projective, fondée sur l'usage du théorème de l'hexagramme mystique de Pascal, a été également proposée par Édouard Collignon[29].

12.2 La solution de Descartes-Waessenaer

Voici donc la solution de Descartes-Waessenaer proposée et traduite par Schooten dans l'*Additamentum* figurant dans les éditions latines de 1649[30] et 1659-1661[31].

12.2.1 Une analyse algébrique préliminaire : l'équation de l'ellipse

Descartes, qui s'appuie sur le livre des *Coniques* d'Apollonius, comme il l'a fait au livre II de la *Géométrie* pour résoudre le problème de Pappus à

[27]Delambre fait d'ailleurs référence à une solution donnée par Adriaen Metius au problème dans lequel un gnomon et trois ombres sont donnés. Cf. [Delambre(1827), p. 38]. D'autre part, Jan van Maanen conjecture que Descartes aurait pu assister aux leçons de mathématiques pratiques de Adriaen Metius à Franeker en 1629 : [Maanen(1987), p. 15-16]. L'intérêt de Adriaen Metius pour la gnomonique apparaît entre autres dans son ouvrage le plus connu [Metius(1626)].

[28]Cf. la note de Newton dans son Waste Book (ULC. Add. 4004 : 96^v) citée par Whiteside in [Newton(1673-1683), p. 269, n.].

[29]Cf. *supra* [note 23, p. 413] et [Collignon(1888), p. 67-70].

[30]Cf. [Schooten(1649a), p. 295-323].

[31]Cf. [Schooten(1659a), p. 369-389]. Comme nous l'avons remarqué, le seul changement non de détail dans la solution du *Problema astronomicum* apporté par Schooten en 1659-1661 concerne la démonstration du théorème préliminaire.

quatre lignes, use de l'équation[32]

$$Y^2 = rX - \frac{r}{q}X^2 \tag{12.8}$$

après avoir indiqué qu'il considère tout d'abord par souci de brièveté que la conique est une ellipse et que les points B et C sont de part et d'autre de l'axe. Cette équation permet d'exprimer l'ellipse dans le repère à coordonnées rectangulaires dont l'axe est le grand axe de l'ellipse PQ, auquel appartient d'après les hypothèses physiques le point A pied du bâton, et dont l'origine est le point Q. Ajoutons que r désigne le côté droit ou paramètre et q le grand axe de l'ellipse.

L'analyse du problème dans la présentation de Schooten s'ouvre ainsi par la remarque préliminaire suivante :

> Deinde, etiam facilè perspexi, umbram illam non hyperbolam, nec Parabolam, se Ellipsin descripsisse, eamq́ue observationem, quæ prima recensetur, non matutino tempore, sed ante mediam noctem fuisse. Quibus brevitatis causâ suppositis, ad Problematis solutionem ita procedo.[33]

Après avoir déterminé lors d'une première partie de l'analyse la position du point A sur l'axe PQ de l'ellipse en résolvant une équation quadratique, il suffira à Descartes de remarquer qu'on aboutit à une équation sans racine réelle positive dans les autres cas obtenus pour des positions différentes des points B et C par rapport à l'axe et pour une hyperbole ou une parabole[34]. Ainsi, pour trouver l'ellipse et ainsi résoudre le *Problema astronomicum*, il faut donc déterminer trois quantités : p l'abscisse du point A, q l'axe PQ et r le côté droit de l'ellipse.

Plaçons-nous dans le repère à coordonnées rectangulaires dont l'axe est donné par la ligne méridienne PQ et l'origine est Q. Descartes pose, d'une part, $\mathsf{AQ} = p$, $\mathsf{PQ} = q$ et $\mathsf{QO} = r$ pour indiquer respectivement l'abscisse du point A, le grand axe et le côté droit de l'ellipse, d'autre part, $\mathsf{MQ} = x$, $\mathsf{HQ} = y$ et $\mathsf{KQ} = z$, pour désigner les abscisses des points B, C et D qu'il se propose de déterminer en fonction des premières.

[32]Nous écrivons cette équation de façon moderne en usant d'une notation différente de celle de Descartes. Nous employons des majuscules pour les différencier des minuscules x et y qui sont employées dans la solution de Descartes. Cf. la proposition 13 du livre I des *Coniques* [Apollonius(1959), p. 24-28] pour le *symptoma* de l'hyperbole.

[33]Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 302] et [Schooten(1659a), p. 372-373].

[34]Cf. resp. [Schooten(1649a), p. 309] et [Schooten(1659a), p. 378].

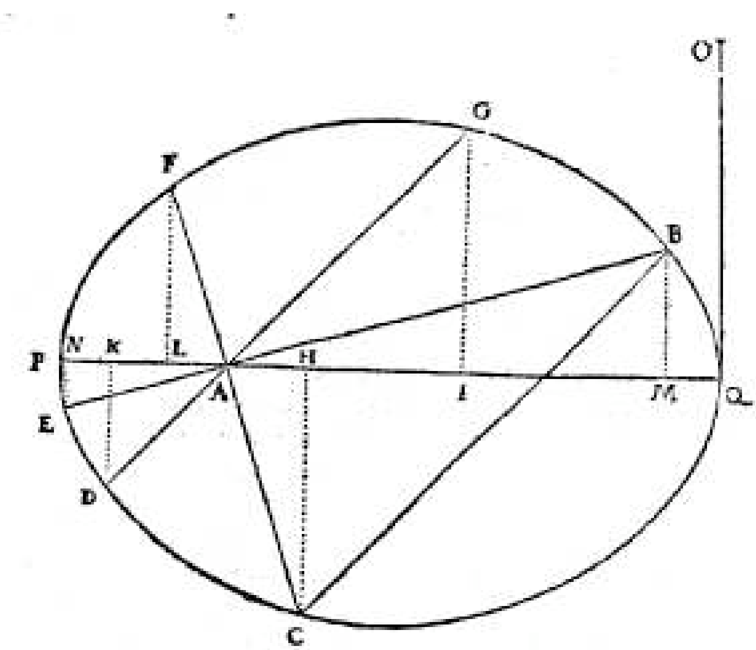

FIG. 12.6 – *Geometria*(1649), p. 301

12.2.2 Première partie de l'analyse : la détermination de la position du point A sur le grand axe de l'ellipse

Descartes pose alors les trois rapports (12.3), (12.4) et (12.7) :

$$\mathsf{BA} : \mathsf{AE} = \beta : \alpha = 3 : 1,$$
$$\mathsf{CA} : \mathsf{AF} = \gamma : \alpha = 4 : 3,$$
$$\mathsf{GA} : \mathsf{AD} = \beta : \gamma = 9 : 4.$$

Les deux premiers rapports sont donnés par hypothèse. En revanche la donnée du troisième rapport ne va pas de soi et n'est pas justifiée. Cette omission, qui sera l'objet du théorème préliminaire donné par Schooten, n'est néanmoins guère étonnante eu égard au style cartésien et au contexte de la querelle avec Stampioen.

Descartes déduit alors de ces rapports les abscisses et les ordonnées respectives des points E, F et G en fonction de celles des points B, C et D, ainsi que de p, l'abscisse du point A. Il obtient ainsi, par exemple, que le point E a pour abscisse $\mathsf{QN} = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x$ et pour ordonnée $\mathsf{EN} = \frac{1}{3}\mathsf{BM}$.

On détermine alors facilement les trois abscisses x, y et z des points B, C et D en fonction de p et q en écrivant que les points E, F et G appartiennent à l'ellipse et que donc leurs coordonnées vérifient l'équation (12.8) de la courbe. Ainsi, par exemple, pour le point E et le point B, en éliminant l'ordonnée BM^2, on obtient l'équation

$$\frac{1}{9}(rx - \frac{rx^2}{q}) = r(\frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x) - \frac{r(\frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x)^2}{q} \tag{12.9}$$

dont on tire facilement une équation du premier degré en x qui admet pour solution

$$\mathsf{MQ} = x = \frac{4p^2 - 3pq}{2p - q}. \tag{12.10}$$

On trouve également de la même façon

$$\mathsf{HQ} = y = \frac{7p^2 - 4pq}{6p - 3q}, \tag{12.11}$$

$$\mathsf{KQ} = z = \frac{13p^2 - 4pq}{18p - 9q}. \tag{12.12}$$

Descartes pose ensuite sans justification[35] la relation

$$\mathsf{BM} + \mathsf{HC} = 3\mathsf{DK} \tag{12.13}$$

portant sur les ordonnées des points B, C et D, dont il va déduire une équation en p et q qui lui permettra de déterminer la position du point A sur le grand axe, *i.e.* d'exprimer p en fonction de q. La relation (12.13) peut être tirée de la condition (12.5). En effet, on a

$$\mathsf{BM} + \mathsf{HC} : \mathsf{DK} = \mathsf{BC} : \mathsf{AD} = \beta : \alpha = 3 : 1 \tag{12.14}$$

Descartes, qui a employé auparavant la condition (12.7), *a priori* non évidente, pour déterminer l'abscisse z du point D, aurait pu la déduire des abscisses x et y des points B et C en utilisant également cette même condition (12.5). En effet, pour les mêmes raisons, on a :

$$\mathsf{MH} : \mathsf{AK} = \mathsf{BC} : \mathsf{AD} = \beta : \alpha = 3 : 1, \tag{12.15}$$

[35] C'est l'objet de la note C d'E. Bartholin. Cf. [Schooten(1649a), p. 318].

soit

$$y - x = 3(z - p). \tag{12.16}$$

L'équation (12.16) montre ainsi que deux abscisses données parmi x, y et z déterminent la troisième. C'est d'ailleurs ainsi que procède Newton dans sa solution, qui, ayant pris le point A pour origine du repère, obtient une relation semblable à celle des ordonnées sans terme résiduel, *i.e.* p dans le cas de la présente solution.

En utilisant l'équation de l'ellipse et en remplaçant x, y et z par leurs expressions en p et q, Descartes déduit alors de la relation (12.13) l'équation « hérissée de radicaux »

$$\begin{aligned}&\sqrt{-144p^3 + 288p^2q - 171pq^2 + 27q^3}\\ &\quad+\sqrt{-49p^3 + 98p^2q - 61pq^2 + 12q^3}\\ &= \sqrt{-169p^3 + 338p^2q - 205pq^2 + 36q^3},\end{aligned} \tag{12.17}$$

et divisant par $q - p$[36], il obtient

$$\begin{aligned}&\sqrt{-144p^2 + 144pq - 27q^2} + \sqrt{-49p^2 + 49pq - 12q^2}\\ &= \sqrt{-169p^2 + 169pq - 36q^2}.\end{aligned} \tag{12.19}$$

Ici aussi, le calcul peut être simplifié et éclairci. Il suffit d'user à la place de l'équation (12.8) de l'ellipse la proposition 21 du Livre I des *Coniques* d'Apollonius[37] qui dit que

$$\begin{aligned}Quad(\mathsf{BM}) : Rect(\mathsf{QM}, \mathsf{MP}) &= Quad(\mathsf{HC}) : Rect(\mathsf{QH}, \mathsf{HP})\\ &= Quad(\mathsf{DK}) : Rect(\mathsf{QK}, \mathsf{KP})\end{aligned} \tag{12.20}$$

[36] Pour ce faire, il faut remarquer que, par exemple pour le deuxième radicande :

$$\begin{aligned}-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3 &= -49(pp - 2pq + qq) - 12pqq + 12q^3\\ &= -49p(q-p)^2 + 12qq(q-p)\\ &= (q-p)[-49p(q-p) + 12qq]\end{aligned} \tag{12.18}$$

Cela est obtenu ici à l'inversion des signes près comme le remarque E. Bartholin dans sa note F. Cf. [Schooten(1649a), p. 319]. Si on suppose $2p > q$, inégalité vérifiée par la solution trouvée ensuite par Descartes, on montre facilement que l'expression $-49pp + 49pq - 12qq$ est strictement positive. Il faut donc corriger les expressions sous les racines dans l'équation (12.17) pour qu'elles soient positives.

[37] Cf. [Apollonius(1959), p. 43-44].

et permet d'écrire l'égalité (12.13)

$$\sqrt{x(q-x)} + \sqrt{y(q-y)} = 3\sqrt{z(q-z)}. \tag{12.21}$$

On remarque ensuite que les expressions x, y, z et $q-x$, $q-y$, $q-z$ peuvent être respectivement factorisées par p et $q-p$. On déduit ainsi de l'équation (12.10)

$$x = \frac{p(4p-3q)}{2p-q} \text{ et } q-x = \frac{(q-p)(q-4p)}{2p-q}. \tag{12.22}$$

Si la première factorisation de x par p est évidente, la seconde de $q-x$ par $q-p$, moins claire, lui est équivalente du fait de la symétrie des points P et Q. Géométriquement, ces deux factorisations correspond aux deux cas triviaux où tous les points sont confondus au point Q — *i.e.* $p=0$ — ou au point P — *i.e.* $p=q$ —. Algébriquement, on peut aussi remarquer qu'en faisant $p=q$ dans les expressions x, y et z on obtient $x=y=z=q$, d'où la deuxième factorisation de $q-x$, $q-y$, $q-z$ par $q-p$. Descartes complique donc à loisir les calculs et en dérobe les raisons profondes.

Il introduit ensuite une inconnue auxiliaire $n=q-p$ qui va lui permettre de se ramener à des expressions du premier degré en pn sous les racines et donc à une équation du second degré en pn. En effet, si une élimination des radicaux de l'équation (12.17) aurait conduit à une équation de degré 6, l'équation (12.19), bien que plus simple, conduirait tout de même à une équation de degré 4. Ce changement d'inconnue lui est suggéré sans doute par l'égalité des coefficients numériques en p^2 et q^2 sous chaque racine de l'équation (12.19).

Ainsi, posant $q-p=n$, on a

$$\sqrt{144pn-27q^2} + \sqrt{49pn-12q^2} = \sqrt{169pn-36q^2}. \tag{12.23}$$

Éliminant les radicaux, on obtient l'équation en pn

$$(pn)^2 = \frac{335q^2}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}, \tag{12.24}$$

qui admet pour solution $pn = \frac{1}{4}q^2$ et $pn = \frac{143}{768}q^2$, dont seule convient la seconde, pour des raisons astronomiques liées au problème.

En effet, en rétablissant dans la première solution l'expression de n, on trouve l'équation $p^2 = pq - \frac{1}{4}q^2$ qui admet pour solution double $p = \frac{1}{2}q$. Cela impliquerait que le bâton A est placé au milieu de PQ. Il serait dans ce cas le centre de l'ellipse. Cela est impossible pour des raisons physiques car l'ombre à midi AP du bâton A est la plus courte et ne peut être égale à AQ.

Rétablissant dans la seconde solution l'expression de n, on trouve l'équation $p^2 = pq - \frac{143}{768}q^2$ qui admet pour solutions $p = \frac{1}{2}q \pm \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Descartes déduit ainsi finalement

$$\mathsf{AQ} = p = \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}} \text{ et } \mathsf{PA} = \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}, \tag{12.25}$$

puisqu'il a supposé auparavant que le point P était obtenu en considérant l'extrémité de l'ombre du bâton A à midi. De surcroît, il précise le rapport $\mathsf{PA} : \mathsf{AQ}$ exprimant la position du point A sur l'axe indépendamment de q :

$$\mathsf{PA} : \mathsf{AQ} = \sqrt{3} - \frac{7}{8} : \sqrt{3} + \frac{7}{8}. \tag{12.26}$$

Il ne reste plus qu'à revenir sur les hypothèses concernant la nature de la conique et la position des points B et C relativement au grand axe, que Descartes avait préalablement écartées afin d'alléger la solution. Lorsqu'on suppose une position différente pour les points B et C ou bien que la conique est une hyperbole ou une parabole, en suivant le même chemin, on trouve des équations qui n'admettent pas de racines réelles positives, d'où le rejet de telles hypothèses.

12.2.3 Seconde partie de l'analyse : une double expression du côté droit r de l'ellipse conduisant à la détermination du grand axe $\mathsf{PQ} = q$ de l'ellipse

Intéressons-nous à présent à la figure du cône[38] PQR. Soit S le point d'intersection de l'axe RS du cône PQR des rayons solaires et du diamètre principal PQ de l'ellipse décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. Soit Y le pied de la perpendiculaire issue du point P tirée sur l'axe RS du cône. Soit V le centre de l'ellipse et ZV la moitié du diamètre transverse. On a déjà posé $\mathsf{PQ} = q$. Posons maintenant $\mathsf{AV} = qv$ et $\mathsf{SV} = fqv$.

Le choix des inconnues de Descartes pour désigner AV qui contrevient apparemment à la doctrine de l'homogénéité exprimée dans le premier livre

[38]Cf. [figure 12.7, p. 422]. La figure donnée par Schooten n'use pas d'une représentation perspective. Pour cette raison, elle est difficile à lire pour un Moderne. Cf. [Schooten(1649a), p. 303].

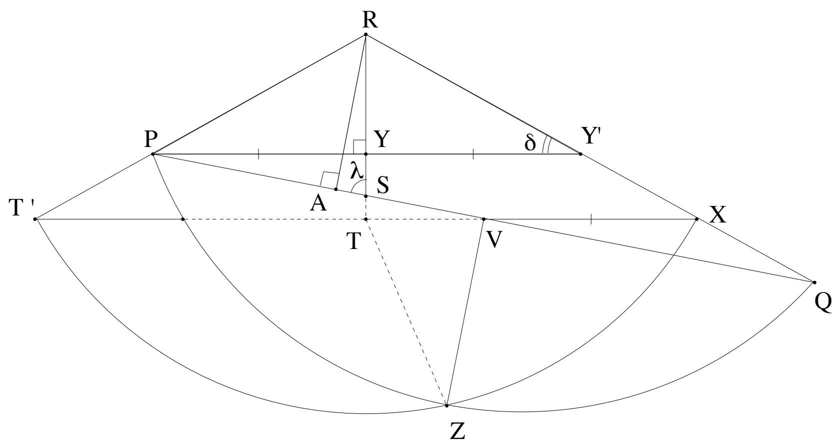

FIG. 12.7 – La figure du cône PQR

de la *Géométrie* peut s'expliquer grâce au calcul précédent de l'expression de p en fonction de q. En effet, on déduit facilement de l'équation (12.25) que

$$\mathsf{AV} = \frac{7q}{16\sqrt{3}} \text{ et } v = \frac{7}{16\sqrt{3}}. \tag{12.27}$$

En revanche, f est inconnue et va être déterminée par Descartes.

Descartes va exprimer l'ordonnée BM[39] du point B et ZV[40] la moitié du second diamètre de l'ellipse de deux façons différentes[41], pour en déduire deux expressions de r, qui lui permettront d'obtenir une équation en v, f et q et ainsi de déterminer f en fonction de q.

Deux expressions de l'ordonnée BM du point B conduisant à une première expression du côté droit r de l'ellipse

Dans un premier temps, il suffit de remarquer que d'après le théorème de Pythagore, on peut déduire une première expression de BM

$$\mathsf{BM}^2 = \mathsf{AB}^2 - \mathsf{AM}^2, \tag{12.28}$$

[39] Cf. [figure 12.6, p. 417].
[40] Cf. [figure 12.7, p. 422].
[41] Cf. [Schooten(1649a), resp. p. 309-310 et p. 310-313].

qui dépendra de α la longueur du bâton A et de $\mathsf{PQ} = q$ l'axe focal de l'ellipse.

Il faut néanmoins prendre garde à ne pas reproduire sans discernement les données numériques fournies par Stampioen. En effet, bien que dans l'énoncé de ce dernier la longueur α du bâton A et la longueur AB soient données en nombres, étant respectivement égales à 6 et 33, il est clair que AB, qui correspond à une ombre du bâton A, dépend de α. Plus précisément, on a :

$$\frac{11}{2} = \frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{AR}} = \tan(\delta' + \lambda'), \tag{12.29}$$

où δ' et λ' sont les angles complémentaires respectivement de la déclinaison solaire et de la latitude. Descartes et Newton, qui n'emploient pas de trigonométrie dans leur solution du problème, passent ce fait sous silence. Remarquons simplement que disposant de ce rapport grâce aux données de l'énoncé, on peut ainsi déduire très facilement avec une table trigonométrique la somme $\delta' + \lambda'$.

Descartes donc, dans sa solution, n'emploie pas la valeur numérique de AB mais l'exprime en fonction de la longueur du bâton, écrivant

$$\mathsf{AB} = \frac{11}{2}\alpha. \tag{12.30}$$

Calculant d'autre part $\mathsf{AM} = p - x$ en remplaçant p par son expression (12.25), il obtient

$$\mathsf{AM} = \frac{143q}{112\sqrt{3}}, \tag{12.31}$$

et d'après (12.28),

$$\mathsf{BM}^2 = \frac{121\alpha^2}{4} - \frac{143^2 q^2}{112^2 \cdot 3}. \tag{12.32}$$

D'autre part, en utilisant l'équation de l'ellipse, on a

$$\mathsf{BM}^2 = rx - \frac{rx^2}{q}, \tag{12.33}$$

d'où en remplaçant x par son expression (12.10) en fonction de q, on obtient

$$\mathsf{BM}^2 = \frac{143q}{56^2 \cdot 3} r. \tag{12.34}$$

De ces deux expressions (12.32) et (12.34) de BM^2, on tire alors une équation du premier degré en r, qui, une fois réduite, admet pour solution

$$r = \frac{11 \cdot 14 \cdot 56 \cdot 3\alpha^2}{13q} - \frac{143q}{4}. \tag{12.35}$$

Deux expressions du demi-axe transverse de l'ellipse conduisant à une deuxième expression du côté droit r de l'ellipse

Déterminons à présent une seconde expression du côté droit r « en usant de la figure du cône »[42] PQR. Pour cela, considérons ZV le demi-diamètre transverse. On a clairement [43]

$$\mathsf{ZV}^2 = \frac{1}{4}qr. \tag{12.36}$$

D'autre part, soit TXZ le plan rencontrant le plan horizontal PQZ de l'ellipse en ZV et coupant perpendiculairement l'axe du cône RS en T. Ce plan coupera le cône selon un cercle de centre T et de rayon TZ = TX, où X appartient à RQ. En employant le théorème de Pythagore, puisque ZV est perpendiculaire à TV[44], on obtient alors

$$\mathsf{ZV}^2 = \mathsf{TZ}^2 - \mathsf{TV}^2 = \mathsf{TX}^2 - \mathsf{TV}^2. \tag{12.37}$$

Reste à déterminer TX et TV. Or, comme les triangles ARS, TSV et PYS sont semblables, on a

$$\mathsf{RS} : \mathsf{AR} = \mathsf{SV} : \mathsf{TV} = \mathsf{PS} : \mathsf{PY}. \tag{12.38}$$

En usant des notations précédentes, et posant $\mathsf{RS} = m$, on obtient facilement

$$\mathsf{TV} = \frac{fvq\alpha}{m} \text{ et } \mathsf{PY} = \frac{\frac{1}{2}q\alpha - fvq\alpha}{m}. \tag{12.39}$$

Remarquant que $\mathsf{TX} = \mathsf{TV} + \mathsf{PY}$[45], on déduit

$$\mathsf{TX} = \frac{\frac{1}{2}q\alpha}{m}. \tag{12.40}$$

On obtient ainsi

$$\mathsf{ZV}^2 = \frac{\frac{1}{4}q^2\alpha^2 - f^2v^2q^2\alpha^2}{m^2}. \tag{12.41}$$

[42] Cf. [figure 12.7, p. 422].

[43] Il suffit de prendre $x = \frac{q}{2}$ dans l'équation de l'ellipse.

[44] En effet, ZV est orthogonal au plan RPQ.

[45] En effet, PY = VX. En voici une démonstration donnée par E. Bartholin dans sa note L. Cf. [Schooten(1649a), p. 321]. Soit Y′ le point d'intersection de PY et RQ. Les triangles PY′Q et VXQ sont semblables dans le rapport 2 car V, centre de l'ellipse, est le milieu du segment PQ. D'autre part, comme le cône RPY′ est un cône droit circulaire d'axe RY, Y est le milieu de PY′. D'où, le résultat. On peut remarquer que les triangles PYV et VXQ sont donc isométriques.

D'autre part, en employant le théorème de Pythagore dans le triangle ARS, on a

$$\mathsf{RS}^2 = \mathsf{AR}^2 - \mathsf{AS}^2 \tag{12.42}$$

soit

$$m^2 = \alpha^2 - (qv - fqv)^2 \tag{12.43}$$

Finalement, des deux expressions (12.36) et (12.41) de ZV^2, en remplaçant m^2 par son expression (12.43), on tire l'équation

$$\frac{\frac{1}{4}\alpha^2 q^2 - f^2 v^2 q^2 \alpha^2}{\alpha^2 - (qv - fqv)^2} = \frac{1}{4} qr. \tag{12.44}$$

Une expression de α^2 en fonction de f, v et q

On a

$$\frac{\mathsf{TX}}{\mathsf{RT}} = \frac{\mathsf{PY}}{\mathsf{RY}} = \tan(\delta), \tag{12.45}$$

d'où

$$\mathsf{RT} \cdot \mathsf{PY} = \mathsf{RY} \cdot \mathsf{TX}. \tag{12.46}$$

Il est facile de déduire de la similitude des triangles ARS, TSV et PYS, comme on l'a fait pour PY et TX, les expressions

$$\mathsf{RT} = \frac{\alpha^2 + q^2 v^2 - f v^2 q^2}{m} \text{ et } \mathsf{RY} = \frac{\alpha^2 + q^2 v^2 - f v^2 q^2 + \frac{1}{2} f v q^2 - \frac{1}{2} q^2 v}{m}. \tag{12.47}$$

Remplaçant RT, PY, RY et TX par leur expression précédemment trouvée, on obtient une expression de α^2 en fonction de f, v et q :

$$\alpha^2 = f v^2 q^2 - q^2 v^2 + \frac{\frac{1}{4} q^2}{f} - \frac{1}{4} q^2 v. \tag{12.48}$$

Détermination de f

Il ne reste plus qu'à remplacer α^2 par cette dernière expression (12.48), d'abord dans l'équation (12.44) pour obtenir l'équation

$$r = q - 4 f v^2 q. \tag{12.49}$$

On a donc trouvé deux expressions du côté droit r, (12.35) et (12.49), dont on déduit l'égalité

$$d\frac{\alpha^2}{q} - hq = q - 4fv^2q, \tag{12.50}$$

en désignant pour abréger par d et h les coefficients numériques de l'expression (12.35). Mais, comme d'après l'équation (12.48),

$$\frac{\alpha^2}{q} = q(fv^2 - qv^2 + \frac{\frac{1}{4}q}{f} - \frac{1}{4}qv), \tag{12.51}$$

on peut éliminer q de l'équation (12.50) et obtenir une équation quadratique en f dont tous les coefficients sont déterminés puisqu'on connaît l'expression numérique (12.27) de v. Comme $0 < f < 1$, parmi les deux racines positives de l'équation, seule convient

$$f = \frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}. \tag{12.52}$$

On peut alors déterminer l'expression numérique de q en remplaçant α par 6, f et v par leur expressions respectives (12.52) et (12.27) dans l'équation (12.50) puis déterminer la latitude et la déclinaison solaire.

On a en effet

$$\tan\lambda = \frac{\mathsf{AR}}{\mathsf{AS}} = \frac{(1-f)qv}{\alpha} \tag{12.53}$$

et

$$\tan\delta = \frac{\mathsf{TR}}{\mathsf{TX}} = \frac{\frac{1}{2}q\alpha}{\alpha^2 + q^2v^2(1-f)} \tag{12.54}$$

d'où on tire comme valeurs numériques

$$\lambda \approx 80\,\mathrm{deg}\,45\,\mathrm{min} \;\text{ et }\; \delta \approx 19\,\mathrm{deg}\,27\,\mathrm{min}\,. \tag{12.55}$$

Le problème est donc résolu. D'après les angles obtenus, les trois gnomons ont été placés en un lieu intérieur au cercle polaire un jour de l'année proche du solstice d'été à la mi-mai.

12.3 La solution de Newton

12.3.1 L'équation de l'ellipse selon Newton

Considérons à présent la solution newtonienne. Celle-ci, résultat d'une lecture de l'édition latine de la *Géométrie*, présente un éclairage de la solution cartésienne, absent de la traduction de Schooten, et plus encore de la mise en forme embrouillée de Waessaner. Newton dispose d'une part d'un symbolisme algébrique plus efficace pour désigner de façon générale toutes les coniques par une équation du second degré à deux inconnues dont les coefficients sont indéterminés. D'autre part, bien qu'il utilise l'algèbre pour la résolution du problème géométrique, la prééminence est donnée à la géométrie à travers le choix de relations géométriques astucieuses conduisant à des équations algébriques simples.

Newton, se plaçant dans le repère d'axe PQ et d'origine A, use de l'équation[46]

$$a^2 \pm bX \pm cX^2 = Y^2. \tag{12.56}$$

proposant ainsi de déterminer les quantités a^2, b et c, et préalablement les signes de ces deux dernières — *i.e* la nature de la conique et la position des points B et C relativement à l'axe PQ —, pour trouver l'ellipse et ensuite résoudre le problème.

Ce faisant, il s'appuie sur le *De Elementis Curvarum Linearum libri duo* de Johann de Witt qui proposait dans la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661 un traitement et une classification systématique des sections coniques en tant qu'exprimées par des équations algébriques du second degré à deux inconnues.

Newton emploie d'autre part une notation personnelle pour désigner l'indétermination des signes figurant dans l'équation de façon opératoire : « $\perp$ » indique le signe indéterminé des quantités b et c, tandis que dans le calcul « $\top$ » indiquera le signe contraire[47]. En effet, pour Newton, une lettre désigne une quantité positive. D'autre part, le premier coefficient a^2, correspondant au carré des ordonnées du point A, est en effet nécessairement positif.

12.3.2 Première partie de l'analyse : une expression du coefficient en X^2 de l'équation de l'ellipse en fonction des deux autres

Dans cette première partie, Newton détermine la nature de la conique en déterminant respectivement le signe de b et de c dans l'équation (12.56). Ensuite, il calcule c en fonction de a et b.

[46]Cf. [Newton(1673-1683), p. 268-269].

[47]Dans la suite, nous substituons aux notations de Newton les notations $\pm$ et $\mp$.

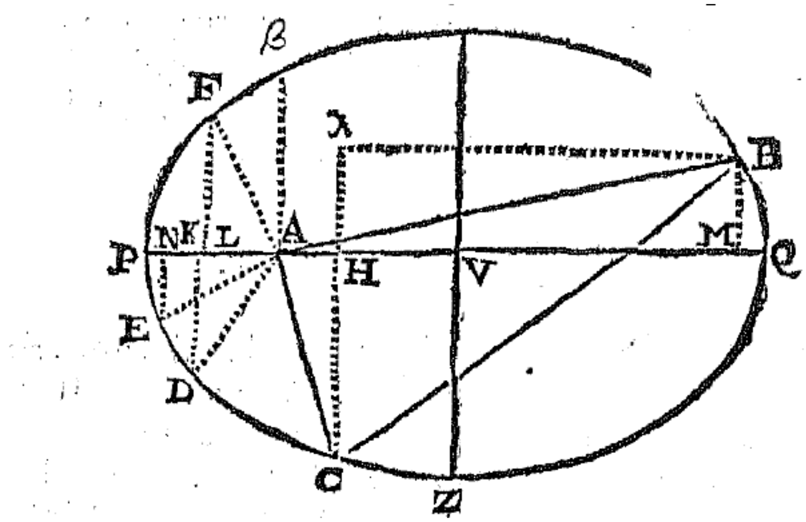

FIG. 12.8 – *Arithmetica Universalis* (1707), p. 183

En effet des rapports (12.3) et (12.4), Newton déduit, comme Descartes, que les coordonnées respectives (x, s) du point B et (y, t) du point C vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{c} a^2 \pm bx \pm cx^2 = s^2 \\ a^2 \mp \frac{1}{3}bx \pm \frac{1}{9}cx^2 = \frac{1}{9}s^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} a^2 \pm by \pm cy^2 = t^2 \\ a^2 \mp \frac{3}{4}by \pm \frac{9}{16}cy^2 = \frac{9}{16}t^2 \end{array} \right. \tag{12.57}$$

Eliminant s^2 et t^2, on obtient les coordonnées (x, s) et (y, t) des points B et C exprimées en fonction de a, b et c :

$$\mathsf{AM} = x = \frac{2a^2}{\pm b} \text{ et } \mathsf{BM}^2 = s^2 = 3a^2 \pm 4\frac{a^4c}{b^2} \tag{12.58}$$

$$\mathsf{AH} = y = \frac{1}{3}\frac{a^2}{b} \text{ et } \mathsf{CH}^2 = t^2 = \frac{4}{3}a^2 \pm \frac{1}{9}\frac{a^4c}{b^2} \tag{12.59}$$

Il résulte ainsi que le signe de b est positif[48].

Usant de la relation équivalente à (12.13), déduite du rapport (12.5),

$$3 : 1 = \mathsf{BC} : \mathsf{AD} = x - y : \mathsf{AK} = t \pm s : \mathsf{DK}, \tag{12.60}$$

[48]Pour Newton, les lettres désignent des quantités positives.

Newton obtient ainsi les coordonnées[49] (z, u) du point D

$$\mathsf{AK} = z = -\frac{5}{9}\frac{a^2}{b} \text{ et } \mathsf{DK}^2 = u^2 = (\frac{4}{3}a^2 \pm \frac{1}{9}\frac{a^4c}{b^2}) \pm (3a^2 \pm 4\frac{a^4c}{b^2}). \quad (12.61)$$

Les coordonnées (z, u) du point D vérifiant l'équation de la conique $a^2 + bX \pm cX^2 = Y^2$, Newton en déduit après réduction l'équation entre les coefficients a, b et c

$$143b^4 \pm 196a^2b^2c = 0 \quad (12.62)$$

dont il tire

$$\pm c = -\frac{143b^2}{196a^2}. \quad (12.63)$$

Ainsi, le signe de c est négatif[50] et la conique recherchée est donc une ellipse d'équation

$$a^2 + bX - cX^2 = Y^2. \quad (12.64)$$

Avant de commencer la seconde partie de l'analyse, Newton donne les expressions de AV, des demi-diamètres VQ et VZ, en remplaçant c par son expression (12.63) :

$$\mathsf{AV} = \frac{98a^2}{143b}, \ \mathsf{VQ} = \frac{112a^2\sqrt{3}}{143b} \text{ et } \mathsf{VZ} = \frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}. \quad (12.65)$$

12.3.3 Seconde partie de l'analyse : une double expression du coefficient en X de l'équation de l'ellipse conduisant à la détermination du coefficient constant

Nous modifions ici les désignations des points par Newton pour les rendre conformes à celles de la solution cartésienne et renvoyons à la figure 12.7[51]. Nous rappelons que le point Y' appartient à la génératrice RQ du cône et que PY' est perpendiculaire à l'axe RT du cône.

[49]On peut remarquer que Newton donne une abscisse négative au point D en raison de sa position par rapport à l'origine A, cela en contradiction avec son usage habituel. Les abscisses des points B et C sont en effet positives.

[50]Pour Newton les lettres désignent des quantités positives.

[51]Cf. *supra*, p. 422.

Détermination de b

Pour déterminer b en fonction de a, Newton va exprimer la distance RZ du sommet du cône au cercle de section du cône de centre T et de rayon TZ de deux façons différentes.

On peut montrer facilement en introduisant le point Y' que

$$\mathsf{RZ} = \mathsf{RX} = \frac{\mathsf{RP} + \mathsf{RQ}}{2}. \tag{12.66}$$

D'autre part, comme la droite VZ est orthogonale au plan PRQ, elle est perpendiculaire à la droite RV et le triangle RVZ est rectangle en V. En considérant les triangles rectangles RAV et RVZ, on obtient

$$\mathsf{RZ}^2 = \mathsf{RA}^2 + \mathsf{AV}^2 + \mathsf{VZ}^2. \tag{12.67}$$

Posons $\mathsf{RA} = \alpha$[52] pour la longueur du bâton, $\mathsf{AV} = e$, $\mathsf{VP} = \mathsf{VQ} = f$ et $\mathsf{VZ} = g$[53] pour les deux demi-diamètres de l'ellipse. On obtient à partir des deux expressions (12.66) et (12.67) de RZ l'équation

$$\left(\frac{\sqrt{f^2 - 2ef + e^2 + \alpha^2} + \sqrt{f^2 + 2ef + e^2 + \alpha^2}}{2}\right)^2 = \alpha^2 + e^2 + g^2 \tag{12.68}$$

qui, une fois réduite, devient

$$\frac{\alpha^2 f^2}{g^2} = \alpha^2 + e^2 - f^2 + g^2. \tag{12.69}$$

Remplaçant à présent α par sa valeur 6, e, f, g par leurs expressions (12.65) déjà trouvées en fonction de a et b, Newton peut déterminer b^2 en fonction de a et obtient

$$b^2 = \frac{(49a^4 + 36)49a^2}{48a^2 + 1287}. \tag{12.70}$$

[52]Newton posait $\mathsf{RA} = d$. Nous reprenons la notation précédente.

[53]Cf. *supra* [figure 12.7, p. 422]. Ici nous conservons les notations de Newton et abandonnons celles de Descartes qui dépendaient de la forme de l'équation de l'ellipse qu'il s'était donnée. Descartes posait ainsi $\mathsf{AV} = qv$, $\mathsf{VP} = \frac{q}{2}$ et $\mathsf{VZ} = \frac{1}{4}rq$.

Détermination de a

Newton introduit ensuite une seconde expression de b^2 afin d'obtenir une équation qui lui permettra de déterminer la valeur de a. Pour obtenir une seconde expression de b^2 en fonction de a, Newton emploie, comme le fait Descartes, la relation (12.28)

$$\mathsf{AM}^2 + \mathsf{BM}^2 = \mathsf{AB}^2$$

dont il déduit l'équation

$$\frac{4a^4}{b^2} + \frac{4a^2}{49} = 33^2 \tag{12.71}$$

en remplaçant l'abscisse et l'ordonnée de B par leur expression et AB par sa valeur numérique, soit

$$b^2 = \frac{4 \cdot 49a^4}{53361 - 4a^2}. \tag{12.72}$$

Des deux expressions (12.70) et (12.72), on déduit l'équation quadratique en a^2

$$4a^4 = 981a^2 + 39204, \tag{12.73}$$

qui admet comme solution réelle positive

$$a^2 = \frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} \approx 280,2254144... \tag{12.74}$$

On en déduit finalement les expressions numériques de b, puis

$$\mathsf{AQ} \approx 10,958788... \text{ et } \mathsf{AP} \approx 33,335382... \tag{12.75}$$

Remarquant d'autre part que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\widehat{ARQ} + \widehat{ARP}) = 90 - \delta \\ \frac{1}{2}(\widehat{ARQ} - \widehat{ARP}) = 90 - \lambda, \end{cases} \tag{12.76}$$

il ne reste plus qu'à calculer

$$\frac{\mathsf{AQ}}{\mathsf{AR}} = \tan \widehat{ARQ} \text{ et } \frac{\mathsf{AP}}{\mathsf{AR}} = \tan \widehat{ARP}. \tag{12.77}$$

pour déduire la déclinaison solaire δ et la latitude λ. Newton obtient enfin comme solution

$$\delta \approx 19\,\text{deg}\,27\,\text{min}\,10\,\text{sec} \;\text{ et }\; \lambda \approx 80\,\text{deg}\,45\,\text{min}\,2\,\text{sec}\,. \tag{12.78}$$

12.4 Une comparaison des solutions de Descartes-Waessenaer et Newton

Pour résoudre le *Problema astronomicum*, Descartes et Newton doivent trouver l'équation de l'ellipse décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. Pour ce faire, ils doivent déterminer trois coefficients. Descartes détermine ainsi $\mathsf{AP} = p$, le côté droit r et le diamètre $\mathsf{PQ} = q$ de l'ellipse et Newton les coefficients a, b et c de l'équation (12.56).

Dans une première partie de l'analyse décrite comme telle par Newton, Descartes détermine la position du point A sur l'axe PQ en exprimant $\mathsf{AP} = p$ en fonction de q tandis que Newton exprime le coefficient c en fonction de a et b.

Ces deux démarches diffèrent en fait assez peu sur le fond. Bien que Newton, en introduisant une notation nouvelle, puisse conduire simultanément le calcul du coefficient c de l'équation en fonction de a et b et la détermination de la conique, alors que Descartes est contraint à une discussion des différents cas, la méthode et les calculs sont de même nature. Ils s'appuient ainsi chacun sur la donnée des trois points B, C et D de la conique. On déduit d'ailleurs aisément des expressions (12.65) de AV et VQ l'expression (12.27) de v trouvée par Descartes à l'issue de cette première partie.

Dans la seconde partie de l'analyse, la méthode algébrique est toujours la même chez Descartes et Newton mais la différence est plus notable. Cette méthode consiste à obtenir deux expressions d'un coefficient de l'équation de l'ellipse — r pour Descartes et b pour Newton — en fonction d'un troisième coefficient — q pour Descartes et a pour Newton — afin de déterminer cette dernière quantité. Ces deux expressions sont obtenues à partir de l'équation de l'ellipse et à partir de la figure du cône. La différence notable entre les deux solutions de Descartes et Newton tient au raisonnement géométrique employé pour déduire la seconde de ces expressions à partir du cône.

Chez Newton, l'usage du triangle de section PRQ simplifie considérablement la détermination du coefficient constant a de l'équation ainsi que celle de la latitude et de la déclinaison solaire. L'application par Newton de la méthode algébrique cartésienne de résolution des problèmes géométriques apparaît ainsi comme élégante parce qu'elle s'appuie sur l'intuition géométrique pour simplifier les calculs algébriques. Au contraire, la solution de Descartes-Waessenaer paraît plus embrouillée et les raisons profondes des calculs algébriques intervenant dans l'élimination successive des inconnues paraissent avoir été ignorés par Waessenaer et Schooten qui les restituent assez maladroitement.

Chapitre 13

Un théorème géométrique préliminaire

Comme nous l'avons vu, afin de déduire le rapport (12.7) employé mais non justifié par Descartes dans sa solution du *Problema astronomicum*, Schooten énonce un théorème préliminaire dont voici l'énoncé :

> postquam eodem die extremitas umbræbaculi A, transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit, extremitas umbræbaculi B transiisse per C & A, nec non ejus qui in C per A : Demonstrandum est eandem transiisse pariter per B.

Cela revient à dire, après traduction géométrique, que les hypothèses (12.3), (12.4) et (12.5) impliquent l'hypothèse (12.6) en supposant que les points B et C appartiennent à l'ellipse décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. On obtient en effet le rapport (12.7) en composant le rapport (12.5) et l'inverse du rapport (12.6).

Si l'on interprète les proportions précédentes comme donnant les points D, E et F de l'ellipse décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A qui passe par les points B et C, le théorème géométrique préliminaire de Schooten énonce que le point G est aussi donné. Une esquisse de démonstration peut alors être aisément donnée. En effet, on sait que cinq points définissent une ellipse et une seule. L'ellipse BCDEF est donc donnée. La droite AD étant donnée, le point d'intersection de l'ellipse BCDEF et de la droite AD sera donc aussi donné.

Du fait de l'égalité de certains des rapports, le théorème précédent peut être réduit au théorème géométrique suivant qui porte sur des proportions :

Théorème 13.1 *Soit* BCEF *une ellipse dont* A *est un point intérieur*[1]*, passant par les points* B *et* C*, qui coupe respectivement la droite* AB *au point* E *et la droite* AC *au point* F*. Soit la droite* DG *passant par le point* A *et parallèle à la droite* BC*, qui coupe la conique* BCEF *aux points* D *et* G*.*

Si

$$\mathsf{BA} : \mathsf{AE} = \mathsf{BC} : \mathsf{AD} \tag{13.1}$$

alors on a

$$\mathsf{CA} : \mathsf{AF} = \mathsf{CB} : \mathsf{AG}. \tag{13.2}$$

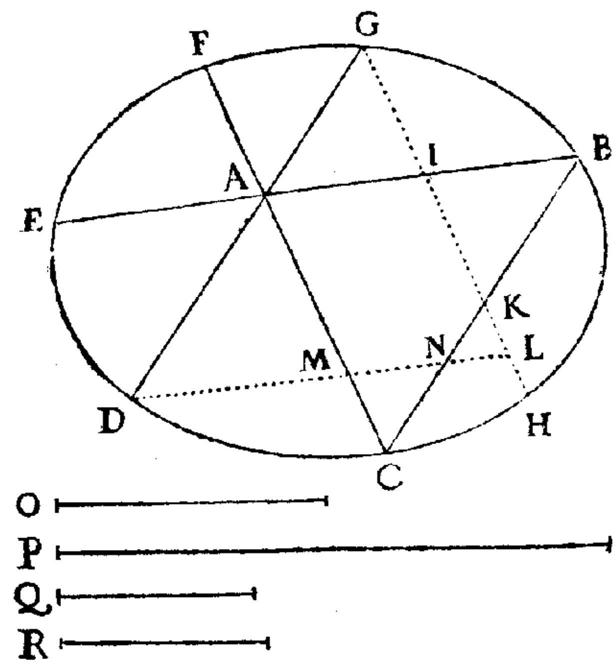

FIG. 13.1 – *Geometria*(1649), p. 296

Bien qu'un tel théorème ne soit pas énoncé explicitement par Schooten, il correspond néanmoins à la démonstration qu'il donne.

[1]Dans la démonstration et la figure données par Schooten, le point A n'est pas situé sur le grand axe de l'ellipse comme c'est le cas par hypothèse physique dans le *Problema astronomicum*. Cela pourrait indiquer une interprétation des conditions du théorème en termes de lieu. Cf. *infra* [section 13.3, p. 444].

13.1 Les démonstrations de van Schooten

Si l'on compare les deux démonstrations données par van Schooten de ce théorème figurant dans les éditions de 1649 et de 1659-1661[2], on constate que celles-ci diffèrent considérablement quant à leur esprit. La première démonstration de 1649 est analytique et de style classique et la seconde démonstration de 1659-1661 est synthétique et de style cartésien.

Le changement que van Schooten opére dans la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661 témoigne ainsi de l'insatisfaction légitime qu'il avait dû nourrir en 1649, échouant à compléter alors la solution du *Problema astronomicum* en suivant la Méthode cartésienne.

Dans cette section, nous étudierons les deux démonstrations de style cartésien du théorème préliminaire (13.1) qu'on trouve dans l'édition latine de 1659-1661, à savoir la cette démonstration synthétique de l'*Additamentum* ainsi qu'une démonstration anlytique proposée par Schooten dans son traité *De Concinnandis*[3].

13.1.1 La démonstration synthétique de 1661

Voici à présent la démonstration[4] proposée dans l'*Additamentum* de l'édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661[5].

Menons[6] la droite GH passant par le point G et parallèle à la droite AC, qui coupe respectivement les droites AB et BC aux points I et K[7], et la conique BCEF au point H.

Schooten pose $\mathsf{AB} = a$, $\mathsf{BC} = b$, $\mathsf{AC} = c$, $\mathsf{AF} = d$, $\mathsf{AE} = e$; $\mathsf{HK} = x$, $\mathsf{AG} = z$, et déduit facilement $\mathsf{GK} = c$, $\mathsf{CK} = z$, $\mathsf{KB} = b - z$.

[2]Cf. respectivement [Schooten(1649a), p. 295-300] et [Schooten(1659a), p. 369-371].

[3]Cf. [Schooten(1661a)] et *supra* [section 1.3.2, p. 40].

[4]Nous reprenons les notations de Schooten bien qu'il y ait des doublons parmi les lettres qui désignent les segments dans la démonstration du théorème préliminaire avec celles apparaissant dans les solutions du *Problema Astronomicum* données par Descartes et Newton. En revanche, les points sont désignés identiquement.

[5]Cf. [Schooten(1659a), p. 369-371].

[6]Cf. la figure 13.1, p. 436.

[7]Schooten ne mentionne pas le cas où les points A, B et C sont placés de telle sorte que les points I et K soient extérieurs à l'ellipse. Dans ce cas, la proposition 17 du livre III des *Coniques* d'Apollonius restant vraie, la démonstration demeure valable. Néanmoins dans le *Problema astronomicum* cette éventualité ne peut se produire, les points B et C étant situés de part et d'autre du grand axe de l'ellipse selon l'hypothèse initiale de Descartes corroborée ensuite dans l'analyse du problème.

Partant de l'hypothèse du théorème portant sur la proportion initiale (13.1), il va démontrer synthétiquement qu'on peut déduire la proportion cherchée (13.2), ce qui revient à déterminer $\mathsf{AG} = z$ dans le formalisme cartésien des équations.

Par hypothèse, on a la proportion (13.1) soit

$$\mathsf{AD} = \frac{be}{a}. \tag{13.3}$$

D'après la proposition 17 du livre III des *Coniques* d'Apollonius[8], on a

$$Rect(\mathsf{DA}, \mathsf{AG}) : Rect(\mathsf{CK}, \mathsf{KB}) = Rect(\mathsf{FA}, \mathsf{AC}) : Rect(\mathsf{GK}, \mathsf{KH}). \tag{13.4}$$

On déduit alors de la proportion (13.4) en usant de l'expression (13.3) de AD l'équation

$$abd - adz = bex. \tag{13.5}$$

D'autre part, toujours d'après la proposition 17 du Livre III d'Apollonius, on a

$$Rect(\mathsf{FA}, \mathsf{AC}) : Rect(\mathsf{GI}, \mathsf{IH}) = Rect(\mathsf{EA}, \mathsf{AB}) : Rect(\mathsf{EI}, \mathsf{IB}). \tag{13.6}$$

En usant des triangles semblables BCA et BKI, on a

$$\mathsf{BC} : \mathsf{CA} = \mathsf{BK} : \mathsf{KI}, \tag{13.7}$$

soit

$$\mathsf{KI} = \frac{cb - cz}{b}, \tag{13.8}$$

dont on tire facilement HI. De même, en usant des triangles semblables AGI et BCA, on a

$$\mathsf{BC} : \mathsf{BA} = \mathsf{AG} : \mathsf{AI}, \tag{13.9}$$

soit

$$\mathsf{AI} = \frac{az}{b}, \tag{13.10}$$

dont on tire facilement EI et IB.

On déduit alors de la proportion (13.6) en usant des expressions précédemment trouvées l'équation

$$abdz + bbde - adz^2 - bedz = bcez - cez^2 + bexz. \tag{13.11}$$

[8]Cf. [Apollonius(1959), p. 210-212]. Sur l'usage de cette proposition par Newton et la théorie projective des transversales, cf. [Whiteside(1960-1962), p. 275 *sq.*].

Or, multipliant par z l'équation (13.5), on obtient

$$abdz - adz^2 = bexz. \tag{13.12}$$

On peut ainsi éliminer x dans l'équation (13.11) et déduire l'équation

$$z^2 = \frac{cb + db}{c} z - \frac{bbd}{c}. \tag{13.13}$$

Cette équation admet pour solutions $z = b$ et $z = \frac{db}{c}$ dont seule convient

$$z = \frac{db}{c}, \tag{13.14}$$

qui équivaut à la proportion (13.2).

On a donc démontré le théorème préliminaire 13.1.

13.1.2 La démonstration analytique de 1661

Dans son traité posthume *De concinnandis*, figurant dans la seconde édition latine de 1659-1661[9], Schooten revient sur la démonstration synthétique qu'il a donné de ce théorème préliminaire dans l'*Additamentum*, et propose à titre d'éclairage trois nouvelles démonstrations : une analyse de style cartésien[10], une analyse géométrique classique[11] reprenant celle de l'*Additamentum* de 1649, et enfin une synthèse géométrique classique[12] qu'il présente comme une traduction de la démonstration synthétique de style cartésien figurant dans l'*Additamentum* de 1659-1661.

Voici comment l'éditeur de la *Géométrie* présente la démonstration du théorème par analyse de style cartésien :

> [...] visum fuit calculum è quo eandem resolutionem tunc deprompsi hìc in medium afferre, *ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ab oculos ponere*. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæad explicationē ejus p. 369 & 370 ulteriùs sunt allata, *inspiciendus erit deinceps sequens calculus*.[13]

[9] Cf. [Schooten(1661a)] et *supra* [section 1.3.2, p. 40].
[10] Cf. [Schooten(1661a), p. 403-404].
[11] Cf. [Schooten(1661a), p. 404-413].
[12] Cf. [Schooten(1661a), p. 413-420].
[13] C'est moi qui souligne. Cf. [Schooten(1661a), p. 403].

Voici l'analyse de style cartésien que donne Schooten[14]. En utilisant les expressions (13.3) de AD et (13.14) de AG, Schooten déduit de la proportion (13.4), tirée de la proposition 17 du livre III des *Coniques* d'Apollonius l'expression

$$\mathsf{KH} = x = \frac{acd - add}{ce} \tag{13.15}$$

dont on tire facilement IH.

En usant des triangles semblables BAC et AIG, on a

$$\mathsf{BC} : \mathsf{CA} = \mathsf{AG} : \mathsf{GI}, \tag{13.16}$$

d'où d'après l'expression (13.14) de AG

$$\mathsf{GI} = d = \mathsf{AF} \tag{13.17}$$

dont on tire facilement $\mathsf{IK} = c-d$ qu'on pose égal à f pour abréger les calculs.

Toujours en usant des triangles semblables BAC et AIG, on a

$$\mathsf{CA} : \mathsf{AB} = \mathsf{GI} : \mathsf{IA}, \tag{13.18}$$

soit

$$\mathsf{IA} = \frac{ad}{c}, \tag{13.19}$$

dont on tire facilement EI.

De même, en usant des triangles semblables CAB et KIB, on a

$$\mathsf{CA} : \mathsf{AB} = \mathsf{KI} : \mathsf{IB}, \tag{13.20}$$

soit

$$\mathsf{IB} = \frac{ad}{c}. \tag{13.21}$$

Il ne reste plus qu'à « vérifier » la proportion (13.6), tirée de la proposition 17 du Livre III des *Coniques* d'Apollonius, en remplaçant HK et AG par leurs expressions respectives (13.15) et (13.14). Schooten obtient ainsi[15]

$$Rect(\mathsf{GI}, \mathsf{IH}) : Rect(\mathsf{FA}, \mathsf{AC}) = \mathsf{IH} : \mathsf{AC} = \frac{cef + adf}{ce} : c \tag{13.22}$$

[14]Cf. [Schooten(1661a), p. 403-404].

[15]Schooten inverse les termes des rapports.

et

$$Rect(\mathsf{EI}, \mathsf{IB}) : Rect(\mathsf{EA}, \mathsf{AB}) = \frac{acef + a^2df}{c^2} : ae. \tag{13.23}$$

Pour ce faire, il suffit de remarquer l'égalité du produit des extrêmes et des moyens termes de la proportion.

Schooten termine sa démonstration en indiquant :

> Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenerimus, quæsitum illud, quod cum hoc concesso omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.[16]

Le commentaire ajouté par Schooten à la suite de cette démonstration analytique nous paraît particulièrement instructif. Selon ce dernier, celle-ci permettrait de comprendre la démonstration synthétique donnée dans l'*Additamentum*. Schooten écrit ainsi :

> *Porro ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supra dicta resolutio à me deducta fuerit : haud gravabor eandem calculum hìc ulteriùs ita disponere, dictaquamque resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuivis sedulo hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat.* Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas conficiendi, subministraverit ; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficlioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unicè studuisse videntur, quo sua inventa eorumque demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.[17]

Néanmoins, force est de constater que la démonstration et les explications de Schooten ne rendent pas véritablement compte de l'heuristique de la démonstration synthéthique précédente.

[16]Cf. [Schooten(1661a), p. 404].

[17]C'est moi qui souligne. Cf. [Schooten(1661a), p. 404-405].

13.2 Une démonstration possible de Descartes

La démonstration de Schooten ne pouvait répondre au défi de Stampioen qui, comme on l'a vu, considérait seulement quatre hypothèses et non cinq. Au regard de l'énoncé donné par Descartes du *Problema astronomicum*, nous proposons ici la reconstruction d'une démonstration algébrique à partir de celle de Schooten, qui pourrait être selon nous la démonstration originale de Descartes, prémiminaire à sa solution et à son nouvel énoncé du *Problema astronomicum*.

Dans la démonstration proposée par Schooten, l'usage de la proposition 17 du livre III des *Coniques* d'Apollonius conduit aux deux équations (13.5) et (13.11), en usant de l'hypothèse (13.3), c'est-à-dire de l'expression de AD. Posons $\mathsf{AD} = y$.

Sans recourir aux hypothèses (13.15) et (13.3), on obtient facilement à partir de la proportion (13.4) l'équation

$$xy = db - dz \tag{13.24}$$

et à partir de la proportion (13.6) l'équation

$$b^2dz + b^2dy - bdz^2 - bdyz = bcyz - cyz^2 + bxyz. \tag{13.25}$$

Éliminant x entre ces deux équations et remarquant que $b - z$ peut être factorisé, on obtient le résultant suivant

$$(b - z)(adyz - ceyz + bdey - bdez) = 0. \tag{13.26}$$

D'autre part, menons par le point D la droite DL parallèle à la droite AB qui coupe respectivement les droites AC et BC aux points M et N, et la conique BCEF au point L[18].

Posons $\mathsf{NL} = t$. En raisonnant comme précédemment et en employant la proposition 17 du Livre III des *Coniques* d'Apollonius, on obtient le résultant

$$(b - y)(ceyz - adyz + bdez - bdey) = 0. \tag{13.27}$$

Une même symétrie se manifeste ici de façon équivalente, géométriquement et algébriquement. Géométriquement, il suffit d'échanger les points B et C.

[18]Cette dernière hypothèse est différente de celle de la figure 13.1. Cf. la figure 13.2.

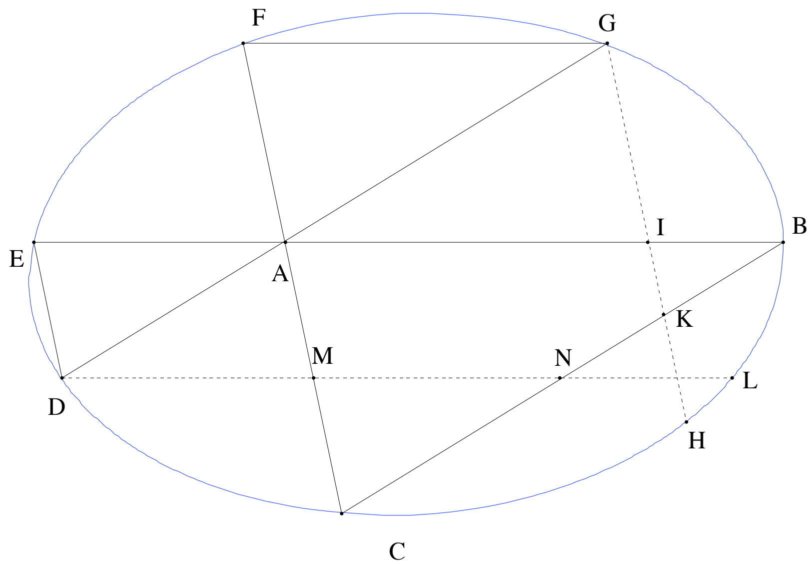

FIG. 13.2 – Une démonstration possible de Descartes

Ce faisant, on opère les permutations :

$$\begin{cases} \mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}, \\ \mathsf{E} \leftrightarrow \mathsf{F}, \\ \mathsf{G} \leftrightarrow \mathsf{D}. \end{cases} \tag{13.28}$$

Algébriquement, les deux résultants (13.26) et (13.27) sont symétriques selon les permutations

$$\begin{cases} a \leftrightarrow c, \\ d \leftrightarrow e, \\ y \leftrightarrow z. \end{cases} \tag{13.29}$$

De surcroît, on retrouve dans les deux résultants (13.26) et (13.27) comme second facteur une expression et son opposée, invariantes au signe près selon ces permutations.

Finalement, du fait de la propriété de l'ellipse exprimée par la proposition 17 du livre III des *Coniques* d'Apollonius, et indépendamment de toute hypothèse sur y et z, les deux résultants (13.26) et (13.27) doivent être simultanément nuls.

Considérons à présent l'équation

$$adyz - ceyz + bdey - bdez = 0 \tag{13.30}$$

correspondant au second facteur de chacun des résultants. Elle peut être écrite sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned} dz(ay-be) - ey(cz-bd) &= 0, & (13.31)\\ d(z-y)(ay-be) + y(ady-cez) &= 0, & (13.32)\\ e(z-y)(cz-bd) + z(ady-cez) &= 0. & (13.33) \end{aligned}$$

Cela montre l'équivalence des trois conditions :

$$\begin{aligned} ay &= be \quad \text{ou bien} \quad \mathsf{BA : AE = BC : AD}, & (13.34)\\ cz &= bd \quad \text{ou bien} \quad \mathsf{CA : AF = CB : AG}, & (13.35)\\ ady &= cez \quad \text{ou bien} \quad \mathsf{BA : AE \times AF : CA = AG : AD}. & (13.36) \end{aligned}$$

et inclut le cas particulier $z = y = b$, $a = e$ et $c = d$ qui correspond géométriquement au cas où le point A est le centre de l'ellipse[19].

La condition (13.36) expliquerait ainsi le choix de Descartes dans sa solution du *Problema astronomicum* du rapport (12.7) non évident géométriquement, mais qu'on peut déduire soit des seuls rapports (12.3) et (12.5), soit des seuls rapports (12.4) et (12.6). Dans le cadre de la controverse avec Stampioen, il s'agissait en effet pour le philosophe de lancer un défi portant sur une compréhension profonde de la dépendance des hypothèses fondée à la fois sur la théorie géométrique des coniques d'Apollonius mais aussi sur l'art algébrique de deméler les équations. D'autre part, l'équivalence des conditions précédentes explique également le choix de Descartes de préciser dans son énoncé par le terme « *ex consequenti* » le fait que les hypothèses (12.3) et (12.5) impliquent les hypothèses (12.4) et (12.6).

13.3 Une question de lieu

On peut enfin se poser la question de l'existence et de l'unicité du point A puisqu'on a vu que la démonstration de Schooten du théorème 13.1

[19]Cette possibilité est exclue par les hypothèses physiques du *Problema astronomicum*, d'où la légitimité de son rejet. Nous l'avons déjà rencontrée auparavant dans la solution cartésienne.

considérait *a priori* une position quelconque du point A à l'intérieur de l'ellipse, et pas celle sur l'axe donnée par le *Problema astronomicum*.

Il est clair que lorsque le segment BC est fixé et que l'on déplace le segment DG sur l'ellipse parallèlement au segment BC, le point A déterminé par la condition (13.34) — (13.35) ou (13.36) — décrit un lieu géométrique $\mathcal{L}$ symétrique[20] par rapport au diamètre P′Q′ de l'ellipse d'ordonnées DG du fait de la symétrie des résultants précédemment mentionnée.

En effet, lorsque le point A décrit une transversale DG donnée, le point E — resp. F déterminé par la condition (13.34) — resp. (13.35) — décrit une parabole passant par B et D — resp. C et G —. De surcroît, ces deux paraboles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au diamètre d'ordonnées DG. Les points E et F convenables sont alors obtenus en prenant les intersections de ces deux paraboles avec l'ellipse.

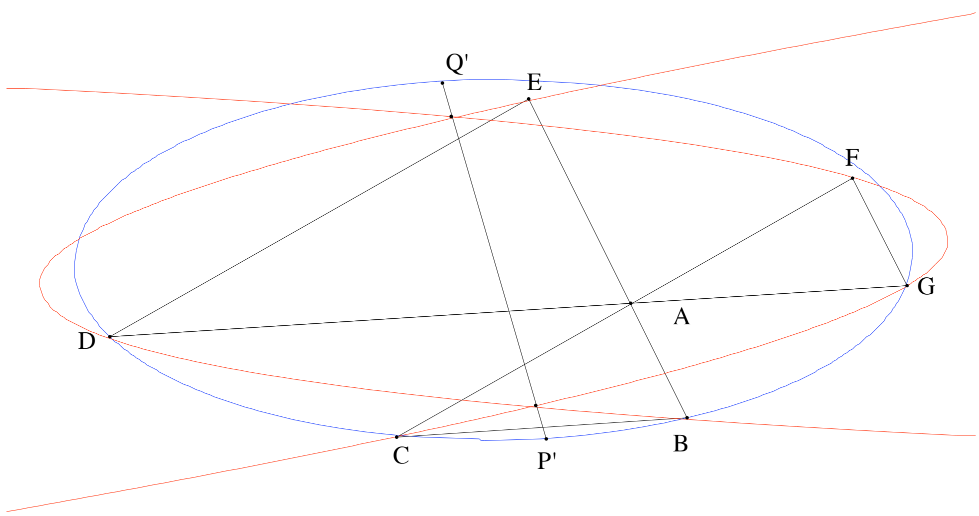

FIG. 13.3 – Le lieu des points E et F

Plaçons-nous dans le repère d'axe le diamètre de l'ellipse P′Q′, d'origine Q′ et d'ordonnées obliques les transversales DG. Par symétrie, il suffit de considérer les points A, B et E. Soient (x', y'), $(x'_{\mathsf{B}}, y'_{\mathsf{B}})$ et $(x'_{\mathsf{E}}, y'_{\mathsf{E}})$

[20]La symétrie est oblique de direction les ordonnées du diamètre.

leurs coordonnées respectives. L'ellipse admet une équation de la forme $Y = \sqrt{r'X - \frac{r'}{q'}X^2}$ qu'on écrira pour abréger $Y = \varphi(X)$.

On déduit de la condition (13.34)

$$\frac{y' + y'_{\mathsf{B}}}{y'_{\mathsf{E}} - y'} = \frac{2y'_{\mathsf{B}}}{\varphi(x') - y'} = \frac{x' - x'_{\mathsf{B}}}{x'_{\mathsf{E}} - x'}. \tag{13.37}$$

et les coordonnées $(x'_{\mathsf{E}}, y'_{\mathsf{E}})$ exprimées en fonction de celles de A et B. En écrivant que point E appartient à l'ellipse, on trouve l'équation du lieu géométrique $\mathcal{L}$ décrit par le point A

$$2y'_{\mathsf{B}}y' + (y' + y'_{\mathsf{B}})(\varphi(x') - y') = \varphi[2x'_{\mathsf{B}} + (x' - x'_{\mathsf{B}})(\varphi(x') - y')]. \tag{13.38}$$

qui définit une quartique.

13.4 Une démonstration projective

Voici enfin une démonstration projective du théorème 13.1 indiquée par Whiteside en note[21] à la solution du *Problema astronomicum* présentée par Newton, dans laquelle on use du théorème de Pascal sur l'« hexagramme mystique[22] ».

On sait par hypothèse que la droite AD est parallèle à la droite BC et que

$$\mathsf{BA} : \mathsf{AE} = \mathsf{BC} : \mathsf{AD}.$$

On en déduit que les triangles ABC et EAD sont semblables et que la droite ED est parallèle à la droite AC.

Considérant à présent l'hexagramme BCFGDE inscrit dans l'ellipse, d'après le théorème de Pascal, les points de rencontre des trois couples de droites DG et BC, ED et FC, FG et EB sont sur une même droite qui est la droite de l'infini du fait du parallélisme des droites de chacun des deux premiers couples.

On en déduit ainsi que la droite FG est parallèle à la droite EB. Mais alors, les triangles FGA et ABC sont semblables et on a

$$\mathsf{CA} : \mathsf{AF} = \mathsf{CB} : \mathsf{AG}.$$

De surcroît, la réciproque étant évidente en usant d'un raisonnement similaire, il est clair que les deux hypothèses sont en fait équivalentes.

[21] Cf. [Newton(1673-1683), n. 346, p. 268-269].
[22] Cf. également [Collignon(1888), p. 68-70].

Conclusion

Nous avons observé dans cette partie un dialogue à distance entre Descartes et Newton ceux-là dominant de très haut les autres protagonistes dans leur compréhension du *Problema astronomicum*. Ce dialogue nous semble faire apparaître une opposition de style mathématique qui renvoie à des interprétations différentes de la relation entre algèbre et géométrie.

Si Descartes se propose de voir en tout problème ou théorème géométrique la manifestation d'une propriété algébrique, réglée par l'usage de la méthode, Newton se refuse à figer la Géométrie dans le marbre de l'algèbre, et à sacrifier ainsi l'élégance des démonstrations à la construction d'un système[23].

Le programme de la *Géométrie* demandait le génie algébrique d'un Descartes du fait du cadre systématique qu'il prétendait imposer à la Géométrie, et de ce fait dépasser de très loin dans les problèmes les plus difficiles les capacités de la plupart des élèves et disciples. Les « omissions » de Descartes visant à éloigner les « esprits malins » aggravèrent de surcroît cette incompréhension mélée de défiance pour Stampioen, ou de respect pour Schooten qui visait à diffuser la Méthode.

L'ironie de l'Histoire vaut à Descartes que celui-là seul qui comprit profondément son projet, Newton, son plus illustre lecteur, le rejeta. Cela le philosophe le regrettera sans doute. Le mathématicien lui objectera que la véritable fécondité de la *Géométrie* tient bien plus dans l'interprétation de ses objets et de ses méthodes par ce même Newton, qui conduisit à la théorie des fluxions et à l'analyse[24].

[23] Je reprends ici une thèse chère à Massimo Galuzzi. Cf. par exemple [Galuzzi et di Sieno(1989)].

[24] Sur ce sujet, cf. [Panza(2005), p. 83-132].

Conclusion Générale

> « Les livres sont l'œuvre de la solitude et les *enfants du silence*. Les enfants du silence ne doivent rien avoir de commun avec les enfants de la parole, les pensées nées du désir de dire quelque chose, d'un blâme, d'une opinion, c'est-à-dire d'une idée obscure. »
>
> Marcel Proust, *Contre Sainte-Beuve*

Les pans de l'histoire des Géométries cartésiennes entre 1637 et 1661 que nous avons décrits dans les chapitres précédents nous ont montré que les conceptions présentées par Descartes comme gravées dans le marbre de la *Géométrie* ont évolué au gré des controverses avec Fermat ou Roberval qui ont porté successivement sur les tangentes et sur la solution cartésienne du problème de Pappus.

Cette évolution est allée dans le sens d'une prééminence du concept de courbe-équation qui a été imposée par la puissance des méthodes arithmético-algébriques utilisées pour résoudre des problèmes portant sur des courbes géométriques définies par des équations algébriques, que ce soient la méthode des coefficients indéterminés de Descartes ou la méthode d'adégalisation de Fermat.

Il apparaît ainsi que la *Géométrie* présentait un alliage de considérations classiques et modernes qui a éclaté lors des discussions et controverses qui suivirent la publication du traité de Descartes.

Les premières parmi ces considérations apparaissent comme le produit de la généralisation de résultats ou de théories de la tradition géométrique grecque et arabe, comme la théorie des droites *minimum* d'Apollonius. Les secondes sont issues du champ de l'algèbre arithmétique et initient un processus de thématisation de l'équation algébrique et de transformation de l'équation algébrique à deux variables en un objet propre, la courbe algébrique.

Etudier la Correspondance de Descartes, mais aussi celle de Mersenne, Fermat et Huygens, c'est donc non seulement exhiber le moyen terme entre la *Géométrie* de 1637 et la *Geometria* de 1659-1661, mais encore rendre compte historiquement et mathématiquement de faits et d'événements qui participent de l'activité des mathématiciens et d'une dynamique des concepts mathématiques[25].

Faire cela c'est donc réintroduire l'histoire et sa nécessité *a contrario* d'un geste de retrait de la part de Descartes qui prétendait donner à la fois le premier et le dernier texte de Géométrie.

[25] Ce que Cavaillès nomme « l'expérience mathématique ». Cf. [Sinaceur(1994), p. 22-25].

Bibliographie

[Alvarez(2000)] Carlos Alvarez : « Descartes lector de Euclides ». *In [Alvarez et Martinez(2000)]*, pages 15–68, 2000.

[Alvarez(s.p.)] Carlos Alvarez : « François Viète, Thomas Harriot and their solution of the van Roomen problem. An example of the solution of a geometric problem by means of the *Analytic Art* ». s.p.

[Alvarez et Martinez(2000)] Carlos Alvarez et Rafael Martinez, éditeurs. *Descartes y la ciencia del siglo XVII*, Mexico, 2000. Siglo veintiuno editores.

[Apollonius(1537)] Apollonius : *Apollonii Pergæi philosophi mathematicique excellentissimi Opera...* Venice, édition de Giovanni-Battista Memmo, 1537.

[Apollonius(1566)] Apollonius : *Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et commmentariis Eutocii Ascalonitæ.* 2 vols., Bologna, édition de F. Commandino, 1566.

[Apollonius(1661)] Apollonius : *Apollonii Pergæi conicorum lib. V, VI, VII, paraphraste Abalphato Asphahanensi, nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber. Ex codicibus arabicis mss.* ex typ. J. Cocchini, Florentiæ, édition de Giovanni Alfonso Borelli et Abraham Ecchellensis (traduction), 1661.

[Apollonius(1706)] Apollonius : *Apollonii Pergaei de Sectione rationis libri duo, ex arabico msto latine versi. Accedunt ejusdem de Sectione spatii libri duo, restituti... Praemittitur Pappi Alexandrini præfatio ad VII-mum collectionis mathematicae, nunc primum græce edita, cum lemmatibus ejusdem Pappi ad hos Apollonii libros.* E theatro Sheldoniano, Oxoniæ, édition de Edmund Halley, 1706.

[Apollonius(1710)] Apollonius : *Apollonii Pergæi Conicorum libri octo (cum Pappi Alexandrini lemmatibus et Eutocii Ascalonitæ commen-*

tariis) et Sereni Antinensis de sectione cylindri et coni libri duo. E theatro Sheldoniano, Oxoniæ, édition de Edmund Halley, 1710.

[Apollonius(1891)] APOLLONIUS : *Apollonii Pergæi quæ græce extant cum commentariis antiquis*. Bibliotheca Scriptorum Græcorum et Romanorum Teubneriana. Teubner, édition de I. L. Heiberg, 1891.

[Apollonius(1896)] APOLLONIUS : *Apollonius of Perga,* Treatise on conic sections *edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject*. Cambridge University Press/W. Heffer & Sons Ltd (reprint 1961), Cambridge, édition de T.L. Heath (traduction anglaise), 1896.

[Apollonius(1959)] APOLLONIUS : *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. Albert Blanchard, Paris, édition de Paul ver Eecke (traduction et notes), 1959.

[Apollonius(1990)] APOLLONIUS : *Conics, books V to VII : the arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. 2 vols., Springer, New York, édition de G.J. Toomer, 1990.

[Armogathe(1990)] Jean-Robert ARMOGATHE : « La publication du Discours et des Essais ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages 17–25. 1990.

[Armogathe(1999)] Jean-Robert ARMOGATHE : « La *Correspondance* de Descartes comme laboratoire intellectuel ». *In [Belgioioso(1999)]*, pages 5–22. 1999.

[Bachmakova(1966)] Isabelle BACHMAKOVA : « Diophante et Fermat ». *Revue d'Histoire des Sciences*, 19 : 289–366, 1966.

[Baillet(1691)] Adrien BAILLET : *La vie de Monsieur Des Cartes* (2 vols.). Chez Daniel Horthemels, Paris, 1691.

[Baron(1969)] Margaret BARON : *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* Pergamon Press, Oxford, 1969.

[Beaugrand(1640)] Jean de BEAUGRAND : « De la manière de trouver les tangentes des lignes courbes par l'algèbre et des imperfections de celle du S. des C. ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume V *Suppl*, pages 102–113 (Présentation 98–101). 1640.

[Belgioioso(1990)] Giulia BELGIOIOSO, éditeur. *Descartes, Il metodo e i saggi. Atti del Convegno per il 350e anniversario della pubblicazione del Discours de la Méthode e degli Essais, 2 vols.*, Firenze, 1990. Armando Paoletti.

[Belgioioso(1999)] Giulia Belgioioso, éditeur. *La biografia intellettuale di René Descartes attraverso la Correspondance : atti del Convegno « Descartes et l'Europe savante », Perugia, 7-10 octobre*, Napoli, 1999. Vivarium.

[Berkeley(1734)] George Berkeley : *The Analyst*. J. Tonson, London, 1734.

[Bernoulli(1695)] Jacob Bernoulli : « Notæ et Animadversiones Tumultuariæ in Universum Opus ». *In [Descartes(1695)]*, volume II, pages 421–468. 1695.

[Bix(1998)] Robert Bix : *Conics and Cubics. A Concrete Introduction to Algebraic Curves*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1998.

[Blay(1986)] Michel Blay : « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley ». *Revue d'Histoire des Sciences*, 39(3) : 223–253, 1986.

[Blay(1999)] Michel Blay : « Méthodes mathématiques et calcul de l'infini au temps de Fermat ». *Historia Scientiarum*, pages 57–71, 1999.

[Bos(1981)] Henk J.M. Bos : « On the representation of curves in Descartes' *Géométrie* ». *Archive for history of exact sciences*, 24 : 295–338, 1981.

[Bos(1984)] Henk J.M. Bos : « Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory : the "construction of equations", 1637-ca. 1750 ». *Archive for history of exact sciences*, 30 : 331–380, 1984.

[Bos(1990)] Henk J.M. Bos : « The structure of Descartes' *Géométrie* ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages p. 349–369, 1990.

[Bos(1992)] Henk J.M. Bos : « Descartes, Pappus' Problem and the Cartesian Parabola : a conjecture ». *In* P.M. Harman et Alan E. Shapiro, éditeurs : *An investigation of difficult things — Essays on Newton and the History of the Exact Sciences*, pages 71–96. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Bos(1998)] Henk J.M. Bos : « La structure de la *Géométrie* de Descartes (traduction française de [Bos(1990)]) ». *Revue d'Histoire des Sciences*, 51(2-3) : 291–317, 1998.

[Bos(2001)] Henk J.M. Bos : *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2001.

[Bos(2003)] Henk J.M. Bos : « Descartes, Elisabeth and Apollonius' Problem ». *In [Descartes(2003)]*, pages 202–212. 2003.

[Bosmans(1927)] Henri Bosmans : « L'auteur principal de l'*On-Wissen Wiskonstenaer I.I. Stampioenius ontdeckt door Jacobus a Waessanaer*, Leyde, 1640 ». *Revue des questions scientifiques*, 1(11) : 113–141, 1927.

[Boyer(1959)] Carl B. Boyer : *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (réimpression de l'édition de 1949 chez Hafner). Dover, New-York, 1959.

[Boyer(2004)] Carl B. Boyer : *History of analytic geometry* (réimpression de l'édition de 1956 chez Scripta Mathematica). Dover, New-York, 2004.

[Breger(1994)] Herbert Breger : « The mysteries of adæquare : A vindication of Fermat ». *Archive for history of exact sciences*, 46(3) : 193–219, 1994.

[Brigaglia(1995)] Aldo Brigaglia : « La riscoperta dell'analysi classica e i problemi apolloniani ». *In [Panza et Roero(1995)]*, pages 221–270. 1995.

[Brigaglia et Nastasi(1986)] Aldo Brigaglia et Pietro Nastasi : « Le ricostruzioni appolloniane in Viète e in Ghetaldi ». *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI(fasc. 1) : 83–133, 1986.

[Briot et Bouquet(1865)] Briot et Bouquet : *Leçons de Géométrie Analytique* (5ème édition revue et corrigée). F^d Tandou et C^ie, Paris, 1865.

[Carnot(1803)] Lazare Carnot : *Géométrie de position* [réimprimé chez Blanchard, 1993]. J.-B.-M. Duprat, Paris, 1803.

[Cassou-Noguès(2001)] Pierre Cassou-Noguès : *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*. Problèmes et Controverses. Vrin, Paris, 2001.

[Cavaillès(1981)] Jean Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques* (republication de l'édition de 1938 avec une introduction de J.-T. Desanti et une préface de H. Cartan). Hermann, Paris, 1981.

[Cavaillès(1994)] Jean Cavaillès : *Œuvres Complètes de Philosophie des Sciences*. Hermann, Paris, 1994.

[Cavaillès(1997)] Jean Cavaillès : *Sur la logique et la théorie de la science*. Vrin, Paris, édition de G. Canguilhem, Ch. Ehresmann, et J. Sebestik pour l'édition présente, 1997.

[Chasles(1837)] Michel Chasles : *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (réimprimé chez Jacques Gabay, 1989). M. Hayez, Bruxelles, 1837.

[Cifoletti(1990)] Giovanna Cleonice Cifoletti : *La méthode de Fermat : son statut et sa diffusion : algèbre et comparaison de figures dans l'histoire de la méthode de Fermat.* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. Nouvelle série, 33. Société française d'histoire des sciences, Paris, 1990.

[Clavius(1581)] Christophorus Clavius : *Gnomonices Libri Octo, in quibus, non solum horologiorum solarium, sed aliarum quoque rerum quæ ex gnomonis umbra cognosci possunt, descriptiones Geometrice demonstrantur.* Apud Francesco Zanetti, Romæ, 1581.

[Clavius(1611-1612)] Christophorus Clavius : *Opera Mathematica.* 5 vols., Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz, Moguntiæ, 1611-1612.

[Collignon(1888)] Édouard Collignon : « Recherches sur la courbe d'ombre d'un piquet vertical ». *In Compte rendu de la 17e session d'Oran*, volume 17, pages 53–72, Paris, 1888. Association française pour l'avancement des sciences, Au secrétariat de l'Association.

[Coolidge(1990)] Julian Lowell Coolidge : *The Mathematics of Great Amateurs* (second edition) with an introductory essay by Jeremy Gray. Oxford University Press, Oxford, 1990.

[Costabel(1969)] Pierre Costabel : « Descartes et la racine cubique des nombres binômes ». *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, XXII : 97–116, 1969.

[Costabel(1971)] Pierre Costabel : « Debeaune ». *In* Charles Coulston Gillispie, éditeur : *Dictionary of scientific biography*, volume III, pages 614–615. Scribner's sons, 1971.

[Costabel(1982)] Pierre Costabel : *Démarches originales de Descartes savant.* Vrin, Paris, 1982.

[Costabel(1985)] Pierre Costabel : « Descartes et la mathématique de l'infini ». *Historia Scientiarum*, XXIX : 37–49, 1985.

[Costabel(1988)] Pierre Costabel : « La réception de la *Géométrie* et les disciples d'Utrecht ». *In [Méchoulan(1988)]*, pages 59–64. 1988.

[Costabel(1990)] Pierre Costabel : « La *Géométrie* que Descartes n'a pas publiée ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages 371–385, 1990.

[Costabel et Martinet(1986)] Pierre Costabel et Monette Martinet : *Quelques savants et amateurs de Science au XVII^e siècle.* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 14. Paris, 1986.

[de Wreede(2007)] Liesbeth de Wreede : *Willebrord Snellius (1581-1626) : a Humanist reshaping the Mathematical Sciences.* Thèse de doctorat, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2007.

[Debeaune(1638-1648)] Florimond Debeaune : « Notes brèves sur la géométrie de Mr. D. C. ». *In [Descartes(1936-1963)]*, volume III, pages 368–401 (Présentation, p. 353–367). 1638-1648.

[Debeaune(1649)] Florimond Debeaune : « Notæ breves ». *In [Descartes(1649)]*, pages 119–161. 1649.

[Debeaune(1659)] Florimond Debeaune : « Notæ breves ». *In [Descartes(1659-1661)]*, pages 107–142. 1659.

[Debeaune(1661)] Florimond Debeaune : « Florimondi de Beaune duo tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus æquationum ». *In [Descartes(1659-1661)]*, pages 49–152. 1661.

[Delambre(1827)] Jean-Baptiste Delambre : *Histoire de l'Astronomie au dix-huitième siècle.* Bachelier, Paris, 1827.

[Desargues(1864)] Girard Desargues : *Œuvres de Desargues.* 2 vols., Leiber, Paris, édition de M. Poudra, 1864.

[Descartes(1619-1621)] René Descartes : « Cogitationes privatæ ». *In [Descartes(1964-1974)]*, volume X, pages 213–256. 1619-1621.

[Descartes(1637a)] René Descartes : « La Dioptrique ». *In [Descartes(1637b)]*, pages 1–153 et [Descartes(1964-1974), VI, p. 79–228] [les références renvoient à cette dernière édition]. 1637a.

[Descartes(1637b)] René Descartes : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique. Les Meteores. & la Geometrie qui sont des essais de cette Methode.* [Descartes(1964-1974), VI] [les références renvoient à cette dernière édition]. I. Maire, Leyde, 1637b.

[Descartes(1637c)] René Descartes : « La Géométrie ». *In [Descartes(1637b)]*, pages 297–413 et [Descartes(1964-1974), VI, p. 367–485] [les références renvoient à cette dernière édition]. 1637c.

[Descartes(1649)] René Descartes : *Geometria à Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune,... in* *linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten.* Ex officinâ Ioannis Maire, Lugduni Batavorum, édition de Frans van Schooten, 1649.

[Descartes(1657-1667)] René DESCARTES : *Lettres de M. Descartes.* 3 vols., Angot, Paris, édition de Claude Clerselier, 1657-1667.

[Descartes(1659-1661)] René DESCARTES : *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune,... gallice conscriptis, in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera et studio Francisci a Schooten,... Editio secunda. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus... Johannis Huddenii epistolæ duæ, quarum altera de æquationum reductione, altera de maximis et minimis agit. Henrici Van Heuraet epistola de curvarum linearum in rectas transmutatione. Francisci a Schooten principia matheseos universalis, seu introductio ad Cartesianæ geometriæ methodum conscripta ab Er. Bartholino,... editio secunda. Florimondi de Beaune duo tractatus posthumi, alter de natura et constitutione, alter de limitibus æquationum, ab Erasmio Bartholino edita. Johannis de Witt de elementis curvarum linearum libri duo, opera Francisci a Schooten editi. Francisci a Schooten tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraïco, in lucem editum a Petro a Schooten* (2 vols.). Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, Amstelædami, édition de Frans van Schooten, 1659-1661.

[Descartes(1683)] René DESCARTES : *Renati Des Cartes Geometria. Edition tertia. Multis accessionibus exornata, & plus alterâ sui parte adaucta* (2 vols.). ex typographia Blaviana, Amstelodami, édition de Frans van Schooten, 1683.

[Descartes(1695)] René DESCARTES : *Renati Des Cartes Geometria ; accedit in super Compendium Musicæ* (2 vols.). sumptibus Friderici Knochii, Francofurti ad Mœnum, édition de Frans van Schooten, 1695.

[Descartes(1701a)] René DESCARTES : « Excerpta ex Ms. R. Des-Cartes ». *In [Descartes(1701b)]*, pages 1–17 (pagination spéciale en fin de volume) et [Descartes(1964-1974), X, p. 277–324] [les références renvoient à cette dernière édition]. 1701a.

[Descartes(1701b)] René DESCARTES : *Opuscula posthuma physica et mathematica.* Ex Typographia P. & J. Blaeu, Amstelodami, 1701b.

[Descartes(1824-1826)] René DESCARTES : *Œuvres de Descartes.* 11 vols., F.-G. Levrault, Paris, édition de Victor Cousin, 1824-1826.

[Descartes(1936-1963)] René DESCARTES : *Correspondance de Descartes.* 8 vols., Alcan-PUF, Paris, édition de Charles Adam et Gérard Milhaud, 1936-1963.

[Descartes(1954)] René DESCARTES : *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition.* Dover, New York, édition de David Eugene Smith and Marcia L. Latham, 1954.

[Descartes(1964-1974)] René DESCARTES : *Œuvres de Descartes.* 11 vols., Vrin, Paris, édition de Charles Adam et Paul Tannery, 1964-1974.

[Descartes(1987)] René DESCARTES : *Abrégé de Musique. Compendium Musicæ.* Épiméthée. PUF, Paris, édition de Frédéric de Buzon, 1987.

[Descartes(2002)] René DESCARTES : *The Correspondence between Descartes and Henricus Regius*, volume XXXVII de *Quæstiones Infinitæ.* Zeno Institute of Philosophy, Utrecht, édition de Erik-Jan Bos, 2002.

[Descartes(2003)] René DESCARTES : *The Correspondence of René Descartes 1643*, volume XLV de *Quæstiones Infinitæ.* Zeno Institute of Philosophy, Utrecht, édition de Theo Verbeek, Erik-Jan Bos et Jeroen van de Ven, 2003.

[Descartes(2005)] René DESCARTES : *Tutte le lettere. 1619-1650. Testo francese, latino e olandese.* Bompiani, Milano, édition de Giulia Belgioioso, 2005.

[Descotes(2005)] Dominique DESCOTES : « Aspects littéraires de la *Géométrie* de Descartes ». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 55(154) : 163–191, juin 2005.

[Dhombres(1994)] Jean DHOMBRES : « La culture mathématique au temps de la formation de Desargues : le monde des coniques ». *In [Dhombres et Sakarovitch(1994)]*, pages 55–85. 1994.

[Dhombres(2000)] Jean DHOMBRES : « La banalidad del referencial cartesiano ». *In [Alvarez et Martinez(2000)]*, pages 69–98, 2000.

[Dhombres et Sakarovitch(1994)] Jean DHOMBRES et Joël SAKAROVITCH, éditeurs. *Desargues en son temps*, Paris, 1994. Librairie Albert Blanchard.

[Dibon(1984)] Paul DIBON : « Clerselier, éditeur de la Correspondance de Descartes ». *In La storia della filosofia come sapere critico : studi* *offerti a Mario Dal Pra*, Filosofia, 2, pages 260–282. F. Angeli, Milano, 1984.

[Dibon(1990)] Paul DIBON : « La réception du *Discours de la Méthode* dans les Provinces-Unies ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages 635–650. 1990.

[Dieudonné(1996)] Jean DIEUDONNÉ, éditeur. *Abrégé d'Histoire des Mathématiques* (nouveau tirage). Hermann, Paris, 1996.

[Dingeldey *et al.*(1911-1915)Dingeldey, Fabry, et Berzolari] F. DINGELDEY, E. FABRY et L. BERZOLARI : « Géométrie algébrique plane ». *In* Jules MOLK, éditeur : *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, volume 3 de *Tome III—Géométrie*. Gauthier-Villars, 1911-1915.

[Diophante(1575)] DIOPHANTE : *Rerum arithmeticarum libri sex, quorum duo adjecta habent scholia Maximi Planudis, item liber de numeris polygonis seu multangulis*. Basel, édition de G. Xylander, 1575.

[Diophante(1621)] DIOPHANTE : *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex, et De Numeris Multangulis Liber Unus*. Paris, édition de Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, 1621.

[Diophante(1893)] DIOPHANTE : *Opera omnia cum græcis commentariis*. Bibliotheca Scriptorum Græcorum et Romanorum Teubneriana. Teubner, Stuttgart, édition de Paul Tannery, 1893.

[Diophante(1959)] DIOPHANTE : *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Librairie Albert Blanchard, Paris, édition de Paul ver Eecke (traduction et notes), 1959.

[Diophante(1964)] DIOPHANTE : *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra* (repblication of the second (1910) edition of the work first published by the Cambridge University Press in 1885). Dover, New York, édition de T.L. Heath, 1964.

[Diophante(1984)] DIOPHANTE : *Les Arithmétiques. Tome III. Livre IV*. CUF. Les Belles Lettres, Paris, édition de Roshdi Rashed (établissement du texte et traduction), 1984.

[Duhamel(1864)] DUHAMEL : « Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes ». *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, XXXII : 269–330, 1864.

[Euclide(1589)] EUCLIDE : *Elementorum Libri XV accessit XVI de solidum regolarium cuiuslibet intra quodlibet comparatione*. Apud Sanctium & Soc., Romae, édition de Christophorus Clavius, 1589.

[Euclide(1625)] EUCLIDE : *Euclidis Data... Adiectus est... Marini philosophi commentariis Graecè et Latinè*. M. Mondière, Paris, édition de Claude Hardy, 1625.

[Euclide(1956)] EUCLIDE : *The thirteen books of Euclid's Elements* (3 vols.). Dover, New-York, édition de T.L. Heath (traudction anglaise et commentaires), 1956.

[Euclide(1990-2001)] EUCLIDE : *Les Éléments* (4 vols.). PUF, Paris, édition de Bernard Vitrac (Traduction et Commentaires) et Maurice Caveing (Introduction Générale), 1990-2001.

[Euler(1748)] Leonhard EULER : *Introduction in Analysin Infinitorum* (2 vols.). Apud Marcum-Michælem Bousquet & Socios, Lausanne, 1748.

[Fermat(1629-1636)] Pierre de FERMAT : « Methodus ad disquirendam maximam et minimam. De tangentibus linearum curvarum ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 133–136 (resp. 121–123). 1629-1636.

[Fermat(1636a)] Pierre de FERMAT : « Ad locos planos et solidos isagoge ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 91–103 (resp. 85–96). 1636a.

[Fermat(1636b)] Pierre de FERMAT : « Appendix ad isagogen topicam continens solutionem problematum solidum per locos ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 103–110 (resp. 96–101). 1636b.

[Fermat(1638a)] Pierre de FERMAT : « Ad eandem methodum (*Inc* : « volo meâ methodo... ») ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 140–147 (resp. 126–130). 1638a.

[Fermat(1638b)] Pierre de FERMAT : « Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes ». *In [Fermat(1891-1922)] (resp. [Mersenne(1945-1988)])*, volume II (resp. VII), pages 154–162 (resp. p. 325–333). 1638b.

[Fermat(1640a)] Pierre de FERMAT : « An eamdem methodum (*Inc* : « doctrinam tangentium antecedit... ») ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 158–167 (resp. 131–136). 1640a.

[Fermat(1640b)] Pierre de Fermat : « Methodus de maxima et minima (*Inc* : « Dum *syncriseos* et *anastrophes* Vietææ methodum expenderem... ») ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume I (resp. III pour la traduction française), pages 147–153 (resp. 131–136). 1640b.

[Fermat(1643)] Pierre de Fermat : « Méthode de Maximis et Minimis (Lettre à Brûlart de Saint-Martin) ». *In [Fermat(1891-1922)]*, volume V *Suppl*, pages 120–125. 1643.

[Fermat(1658-1659)] Pierre de Fermat : « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus ». *In [Fermat(1891-1922)]*, pages I, p. 255–285 (resp. III, p. 216–237). 1658-1659.

[Fermat(1679)] Pierre de Fermat : *Varia opera mathematica*. J. Pech, Toulouse, 1679.

[Fermat(1891-1922)] Pierre de Fermat : *Œuvres de Fermat*. 5 vols., Gauthier-Villars, Paris, édition de Charles Henry et Paul Tannery, 1891-1922.

[Fermat(1999)] Pierre de Fermat : *Œuvres de Pierre Fermat, tome I. La théorie des nombres*. Librairie Albert Blanchard, Paris, édition de Roshdi Rashed, Christian Houzel et Gilles Christol, 1999.

[Freguglia(1999)] Paolo Freguglia : *La geometria fra tradizione e innovazione*. Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

[Galuzzi(1980)] Massimo Galuzzi : « Il Problema delle Tangenti nella "Géométrie" di Descartes ». *Archive for history of exact sciences*, 22 : 37–51, 1980.

[Galuzzi(1985)] Massimo Galuzzi : « Recenti interpretazioni della *Géométrie* di Descartes ». *In* C. Mangioni, éditeur : *Scienzia e Filosofia : saggi in honore di Ludovico Geymonat*, pages 643–663. Garzanti, Milano, 1985.

[Galuzzi(1990)] Massimo Galuzzi : « I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages 387–417, 1990.

[Galuzzi(1995)] Massimo Galuzzi : « L'influenza della geometria nell'evoluzione del pensiero di Newton ». *In [Panza et Roero(1995)]*, pages 271–288. 1995.

[Galuzzi(1996)] Massimo Galuzzi : « La soluzione dell'equazione di sesto grado nella *Géométrie* di Descartes ». *In Per una storia critica della scienza*, volume 26 de *Quaderna di Acme*, pages 315–330. Cisalpino, Bologna, édition de M. Beretta, 1996.

[Galuzzi(2006)] Massimo Galuzzi : « Le problème des tangentes d'Euclide à Newton ». Conférence prononcée à Clermont-Ferrand le 29 mars 2006, 2006.

[Galuzzi(s.p.)] Massimo Galuzzi : « Newton critic of Descartes ». *Oriens-Occidens*, s.p.

[Galuzzi et di Sieno(1989)] Massimo Galuzzi et Simonetta di Sieno : « La quinta sezione del primo libro dei *Principia*. Newton e il 'problema di Pappo' ». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39 (122) : 51–68, 1989.

[Galuzzi et Rovelli(s.p.)] Massimo Galuzzi et Daniela Rovelli : *Essais sur les mathématiques de Descartes*. Librairie Albert Blanchard, Paris, s.p.

[Gardies(2001)] Jean-Louis Gardies : *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*. Problèmes et Controverses. Librairie Philosophique J. Vrin, Patis, 2001.

[Giusti(1990)] Enrico Giusti : « Numeri, grandezze e Géométrie ». *In [Belgioioso(1990)]*, pages 419–439, 1990.

[Giusti(1999)] Enrico Giusti : « La Geometrie e i matematici contemporanei ». *In [Belgioioso(1999)]*, pages 217–233. 1999.

[Giusti(2000)] Enrico Giusti : *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses, Paris, édition de trad. G. Barthelemy, 2000.

[Goldstein(2004)] Catherine Goldstein : « L'arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne : une approche microsociale ». *Sciences et techniques en perspective*, 8 (IIe série)(1) : 14–47, 2004.

[Granger(1968)] Gilles-Gaston Granger : *Essai d'une philosophie du style*. Philosophies pour l'âge de la science. Librairie Armand Colin, Paris, 1968.

[Granger(1988)] Gilles-Gaston Granger : *Pour la Connaissance Philosophique*. Odile Jacob, Paris, 1988.

[Haestrecht ?(1638a)] Godefroi de HAESTRECHT ? : « Calcul de Mons. Des Cartes. [Introduction à sa Géométrie] ». *In [Descartes(1964-1974)]*, pages 659–680. 1638a.

[Haestrecht ?(1638b)] Godefroi de HAESTRECHT ? : « Introduction à la Géométrie ». *In [Descartes(1936-1963)]*, volume III, pages 328–352 (Présentation, p. 323–327). 1638b.

[Hara(1985)] Kokiti HARA : « Comment Descartes a-t-il découvert ses ovales ? ». *Historia Scientiarum*, 29 : 51–82, 1985.

[Heath(1981)] Thomas HEATH : *A History of Greek Mathematics* (republication de l'édition de Clarendon Press de 1921) (2 vols.). Dover, New-York, 1981.

[Hérigone(1634-1637)] Pierre HÉRIGONE : *Cursus mathematicus, nova brevi et clara methodo demonstratus* (5 vols.). H. Le Gras, Paris, 1634-1637.

[Hérigone(1644)] Pierre HÉRIGONE : *Cursi Mathematici Tomus Sextus Ac Ultimus sive Supplementum.* Simeon Piget, Paris, 1644.

[Hofmann(1962)] Joseph Ehrenfried HOFMANN : *Frans van Schooten der Jüngere.* F. Steiner, Wiesbaden, 1962.

[Hofmann(1963)] Joseph Ehrenfried HOFMANN : « Ueber ein Extremwertproblem des Apollonius und seine Behandlung bei Fermat ». *Nova Acta Leopoldina,* Neue Folge, Band 27(167) : 105–113, 1963.

[Houzel(1997)] Christian HOUZEL : « Descartes et les courbes transcendantes ». *In [Rashed et Biard(1997)]*. 1997.

[Houzel(1998)] Christian HOUZEL : « L'analyse diophantienne et la géométrie algébrique ». *In Encyclopédie philosophique universelle*, volume I. L'univers philosophique, pages 1069–1075. PUF, Paris, 1998.

[Hudde(1659a)] Johann HUDDE : « Epistola prima de reductione æquationum ». *In [Descartes(1659-1661)]*, volume I, pages 406–506. 1659a.

[Hudde(1659b)] Johann HUDDE : « Epistola seconda de Maximis et Minimis ». *In [Descartes(1659-1661)]*, volume I, pages 507–516. 1659b.

[Huygens(1888-1950)] Christiaan HUYGENS : *Œuvres Complètes.* 22 vols., Martinus Nijhoff, La Haye, 1888-1950.

[Itard(1948)] Jean ITARD : « Fermat précurseur du calcul différentiel ». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 4 : 589–610, réédité *in* [Itard(1984)], p. 235–256 [les références renvoient à cette dernière édition], 1948.

[Itard(1956)] Jean ITARD : « La *Géométrie* de Descartes ». *Les conférences du Palais de la Découverte*, Série D(39) : réédité *in* [Itard(1984)], p. 269–280 [les références renvoient à cette dernière édition], 7 janvier 1956.

[Itard(1974)] Jean ITARD : « A propos d'un livre sur Pierre Fermat ». *Revue d'Histoire des Sciences*, XXVII(4) : 335–346, 1974.

[Itard(1984)] Jean ITARD : *Essais d'histoire des mathématiques.* Librairie Albert Blanchard, Paris, édition de Roshdi Rashed, 1984.

[Jullien(1996)] Vincent JULLIEN : *Descartes. La Géométrie de 1637.* Philosophies. PUF, Paris, 1996.

[Jullien(1999)] Vincent JULLIEN : « Les frontières dans les mathématiques cartésiennes ». *Historia Scientiarum*, 8(3) : p. 211–238, réédité et augmenté *in* [Jullien(2006)], p. 311–356 [les références renvoient à cette dernière édition], 1999.

[Jullien(2006)] Vincent JULLIEN : *Philosophie naturelle et géométrie au XVII*e *siècle.* Sciences, Techniques et Civilisations du Moyen-Âge à l'aube des Temps Modernes. Honoré Champion Éditeur, Paris, 2006.

[Jullien et Charrak(2002)] Vincent JULLIEN et André CHARRAK : *Ce que dit Descartes touchant la chute des Graves : de 1618 à 1646, étude d'un indicateur de la philosophie naturelle cartésienne.* Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq, 2002.

[Kempe(1875-1876)] A.B. KEMPE : « On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7 : 213–216, 1875-1876.

[Khayyām(1999)] Omar Al KHAYYĀM : *Al-Khayyām mathématicien.* Sciences dans l'Histoire. Albert Blanchard, Paris, édition de Roshdi Rashed et Bijan Vahabzadeh, 1999.

[Knorr(1993)] Wilbur Richard KNORR : *The Ancient Tradition of Geometric Problems* (republication of the edition published by Birkhaüser, Boston, 1986). Dover, New York, 1993.

[Lagrange(prairial an V, 1797)] Joseph Louis LAGRANGE : *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.* Journal de l'Ecole Polytechnique, 9e cahier. Impr. de la République, prairial an V, 1797.

[L'Hospital(1696)] G.F.A. de L'Hospital : *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Imprimerie Royale, Paris, 1696.

[L'Hospital(1707)] G.F.A. de L'Hospital : *Traité analytique des sections coniques...* Vve J. Bounot et fils, Paris, 1707.

[Lipstorp(1653)] Daniel Lipstorp : *Specimina Philosophiæ Cartesianæ quibus accedit Ejusdem Authoris Copernicus Redivivus*. Apud Joannem & Danielem Elzevirios, Lugduni Batavorum, 1653.

[Maanen(1984)] J.A. van Maanen : « Hendrick van Heuraet (1634-1660 ?) : His life and Mathematical Work ». *Centaurus*, 27 : p. 218–279, réédité *in* [Maanen(1987)], p. 43–106 [les références renvoient à cette dernière édition], 1984.

[Maanen(1987)] J.A. van Maanen : *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*. Elinkwijk, Utrecht, 1987.

[Maclaurin(1720)] Colin Maclaurin : *Geometria organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis*. impensis G. et J. Innys, Londini, 1720.

[Maclaurin(1748)] Colin Maclaurin : « Appendix : De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus ». *In A Treatise of Algebra in three parts...* A. Millar and J. Nourse, London, 1748.

[Mahoney(1994)] Michael Sean Mahoney : *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (2nde édition)*. Princeton University Press, Princeton, 1994.

[Mancosu(1996)] Paolo Mancosu : *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford University Press, New-York, 1996.

[Mancosu(2007)] Paolo Mancosu : « Descartes and Mathematics ». *In* Janet Broughton et John Carriero, éditeurs : *A Companion to Descartes*, Blackwell Companions to Philosophy. Blackwell, 2007.

[Manders(1995)] Kenneth Manders : « Descartes et Faulhaber ». *Archives de philosophie*, 58 : 1–12, 1995.

[Manders(2006)] Kenneth Manders : « Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes ». *Historia Mathematica*, 33 : 184–209, 2006.

[Manders(s.p.)] Kenneth Manders : « The Euclidean diagram ». *In* Paolo Mancosu, éditeur : *The philosophy of mathematical practice*. Oxford University Press, Oxford, s.p.

[Maronne(2007)] Sébastien MARONNE : « Sur une lettre de Descartes qu'on dit de 1639 ». *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13(1), 2007.

[Maronne(s.p.)] Sébastien MARONNE : « Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649. ». *In Actes du Symposium Symposium « Les Correspondances savantes de Descartes et de ses contemporains »*, s.p.

[Massa Esteve(s.p.)] Maria Rosa MASSA ESTEVE : « Symbolic Language in the Algebraization of Mathematics : the *Algebra* of Pierre Hérigone (1580-1643) ». s.p.

[Méchoulan(1988)] Henry MÉCHOULAN, éditeur. *Problématique et réception du* Discours de la Méthode *et des* Essais, Paris, 1988. Vrin.

[Mersenne(1644)] Marin MERSENNE : *Universæ geometriæ, mixtæque mathematicæ Synopsis, et bini refractionum demonstratarum Tractatus*. apud Antonium Bertier, Paris, 1644.

[Mersenne(1945-1988)] Marin MERSENNE : *Correspondance du P. Marin Mersenne, religieux minime*. 17 vols., PUF/CNRS, Paris, édition de Cornélis de Waard et Armand Beaulieu, 1945-1988.

[Mesnard(1991)] Jean MESNARD : « Sur le chemin de l'Académie des sciences : le cercle du mathématicien Claude Mylon (1654-1660) ». *Revue d'Histoire des Sciences*, XLIV(2) : 241–251, 1991.

[Metius(1626)] Adriaen METIUS : *Arithmeticæ libri duo et geometriæ libri sex lib VI. Huic adjungitur trigonometriæ planorum methodus succincta*. ex officina Elzeviriana, Lugduni Batavorum, 1626.

[Milhaud(1921)] Gaston MILHAUD : *Descartes savant*. Librairie Félix Alcan, Paris, 1921.

[Molland(1976)] George MOLLAND : « Shifting the foundations : Descartes' transformation of ancient geometry ». *Historia Mathematica*, 3 : 21–49, 1976.

[Montucla(1799-1802)] Jean MONTUCLA : *Histoire des Mathématiques*. 4 vols., H. Agasse, Paris, édition de Lalande (2 derniers vols.), 1799-1802.

[Newton(1673-1683)] Isaac NEWTON : « Lectures on Algebra, 1673-1683 ». *In [Newton(1967-1981)]*, volume V. 1673-1683.

[Newton(1695)] Isaac NEWTON : « Enumeratio Linearum Tertii Ordinis ». *In [Newton(1967-1981)]*, volume VII, pages 565–655. 1695.

[Newton(1704)] Isaac Newton : « Enumeratio Linearum Tertii Ordinis ». *In Opticks or, a Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*, pages 138–163 (pagination du second livre de l'*Opticks*). printed for Sam. Smith. and Benj. Walford., London, 1704.

[Newton(1707)] Isaac Newton : *Arithmetica Universalis ; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. Typis Academicis, Cantabrigiæ, 1707.

[Newton(1720)] Isaac Newton : *Universal Arithmetick : or, a treatise of arithmetical Composition and Resolution to which is added Dr. Halley's Method of finding the Roots of Æquations Arithmetically.* J. Senex, London, édition de Raphson (traduction) et Cunn (vérification et correction), 1720.

[Newton(1967-1981)] Isaac Newton : *The Mathematical Papers of Isaac Newton (8 vol.).* Cambridge University Press, Cambridge, édition de D.T. Whiteside, 1967-1981.

[Oddi(1614)] Muzzio Oddi : *Degli Horologi Solari nelle Superficie Piane.* Giacomo Lantoni, Milan, 1614.

[Oddi(1638)] Muzzio Oddi : *Degli Horologi Solari.* il Ginammi, Venise, 1638.

[Oudet(1994)] Jean-François Oudet : « Le *style* de Desargues. L'observation associée à la théorie pour placer le style d'un cadran solaire ». *In [Dhombres et Sakarovitch(1994)]*, pages 331–339. 1994.

[Panza(1992)] Marco Panza : *La forma della quantità. Analisi algebrica e analisi superiore : il problema dell'unità della matematica nel secondo dell'illuminismo* (2 tomes). Numéro 38-39 *in* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. Nouvelle série. Société française d'histoire des sciences, Paris, 1992.

[Panza(1997)] Marco Panza : « Classical Sources for the Concept of Analysis and Synthesis ». *In* Michael Otte et Marco Panza, éditeurs : *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, pages 365–414, Dordrecht, Boston, London, 1997. Kluwer.

[Panza(1998)] Marco Panza : « Quelques distinctions à l'usage de l'historiographie des mathématiques ». *In* F. Rastier, J.-M. Salanskis et R. Sceps, éditeurs : *Herméneutique : textes, sciences*, pages 357–383. PUF, Paris, 1998.

[Panza(2005)] Marco PANZA : *Newton et les origines de l'*analyse *: 1664-1666*. Sciences dans l'Histoire. Librairie Albert Blanchard, 2005.

[Panza(2007)] Marco PANZA : « What is new and what is old in Viète's *analysis restituta* and *algebra nova*, and where do they come from ? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viète ». *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13(2), 2007.

[Panza et Roero(1995)] Marco PANZA et Clara Silvia ROERO, éditeurs. *Geometria, flussioni e differenziali. Tradizione e innovazione nella matematica del seicento*, Napoli, 1995. La Città del Sole.

[Pappus(1588)] PAPPUS : *Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversæ at commentariis illustratæ*. Pesaro, édition de F. Commandino, 1588.

[Pappus(1982)] PAPPUS : *La Collection Mathématique*. 2 vols., Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, édition de Paul ver Eecke (traduction et notes), 1982.

[Pappus(1986)] PAPPUS : *Book 7 of the Collection* (2 vols). Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, édition de Alexander Jones (traduction et commentaires), 1986.

[Pares(1988)] Jean PARES : « La Gnomonique de Desargues à Pardies. Essai sur l'évolution d'un Art scientifique. ». *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, 17, 1988.

[Pedersen(2000)] Kirsti Møller PEDERSEN : « Techniques of the calculus, 1630-1660 ». *In From the Calculus to Set Theory 1630-1910. An Introduction History*, Princeton Paperbacks, pages 10–48. Princeton University Press, Princeton and Oxford, édition de I. Grattan-Guinness, 2000.

[Peiffer(2006)] Jeanne PEIFFER : « Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann ». *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 2(1) : 1–28, juin 2006.

[Penchèvre(2006)] Erwan PENCHÈVRE : *Histoire de la théorie de l'élimination*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2006.

[Rabouin(2002)] David RABOUIN : *Mathesis universalis. L'idée de « mathématique universelle » à l'âge classique*. Thèse de doctorat, Université Paris IV-Sorbonne, Paris, 2002.

[Rabouin(s.p.)] David Rabouin : « *Mathesis*, Méthode, Géométrie chez Descartes ». *In* Frédéric de Buzon et Denis Kambouchner, éditeurs : *Lectures de Descartes*, Paris, s.p. Ellipses.

[Rabuel(1730)] Claude Rabuel : *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*. Marcellin Duplain, Lyon, 1730.

[Rashed(1984)] Roshdi Rashed : *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Sciences et Philosophie Arabes (Études et Reprises). Les Belles Lettres, 1984.

[Rashed(1997)] Roshdi Rashed : « La *Géométrie* de Descartes et la distinction entre courbes géométriques et courbes mécaniques ». *In [Rashed et Biard(1997)]*, pages 1–22. 1997.

[Rashed(1999)] Roshdi Rashed : « Fermat et les débuts de l'analyse moderne diophantienne ». *In [Fermat(1999)]*, chapitre I, pages 1–16. 1999.

[Rashed(2000)] Roshdi Rashed : *Les Catoptriciens Grecs. Les Miroirs ardents*. CUF. Les Belles Lettres, Paris, 2000.

[Rashed(2001)] Roshdi Rashed : « Fermat and Algebraic Geometry ». *Historia Scientiarum*, 11(1) : 1–23, 2001.

[Rashed(2005a)] Roshdi Rashed : « De la Dioptrique à la Géométrie : les ovales de Descartes ». *Physis*, XLII(2) : 333–354, 2005a.

[Rashed(2005b)] Roshdi Rashed : « La modernité mathématique : Descartes et Fermat ». *In [Rashed et Pellegrin(2005)]*, pages 239–252. 2005b.

[Rashed(2005c)] Roshdi Rashed : « Les premières classifications des courbes ». *Physis*, XLII(1) : 1–64, 2005c.

[Rashed(2006)] Roshdi Rashed : « Le concept de tangente dans les *Coniques* d'Apollonius ». Conférence prononcée au Colloque « Les coniques d'Apollonius », Paris, le 2 juin 2006.

[Rashed(2007)] Roshdi Rashed : « Lire les anciens textes mathématiques. Le cinquième livre des Coniques d'Apollonius ». Conférence prononcée au Séminaire de recherche en Histoire et Épistémologie des mathématiques, Clermont-Ferrand, 16 mai 2007.

[Rashed et Biard(1997)] Roshdi Rashed et Joël Biard, éditeurs. *Descartes et le Moyen-Âge*, Études de philosophie médiévale LXXV, Paris, 1997. Vrin.

[Rashed et Pellegrin(2005)] Roshdi Rashed et Pierre Pellegrin, éditeurs. *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre* *de Jules Vuillemin.* Sciences dans l'Histoire. Librairie Albert Blanchard, Paris, 2005.

[Roberval(1693a)] Gilles Personne de ROBERVAL : « Divers Ouvrages de M. de Roberval ». *In Divers Ouvrages de Mathématiques et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, pages 65–302. Imprimerie Royale, Paris, 1693a.

[Roberval(1693b)] Gilles Personne de ROBERVAL : « Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes ». *In [Roberval(1693a)]*, pages 69–111. 1693b.

[Saito(1985)] Ken SAITO : « Book II of Euclid's *Elements* in the light of the theory of conic sections ». *Historia Scientiarum*, 28 : 31–60, 1985.

[Sasaki(2003)] Chikara SASAKI : *Descartes's Mathematical Thought*. Boston Studies in the Philosophy of Science. Kluwer, 2003.

[Savini(2004)] Massimiliano SAVINI : *Le développement de la méthode cartésienne dans les Provinces-Unies (1643-1655).* Conte Editore, Lecce, 2004.

[Schooten(1646)] Frans van SCHOOTEN : *De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione... Cui subnexa est Appendix de Cubicarum Æquationum resolutione.* ex Officinâ Elzeviriorum, Lugduni Batavorum, 1646.

[Schooten(1649a)] Frans van SCHOOTEN : « Additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis ». *In* [Descartes(1649)], pages 295–336. 1649a.

[Schooten(1649b)] Frans van SCHOOTEN : « In Geometriam Renati Des Cartes commentarii ». *In [Descartes(1649)]*, pages 162–294. 1649b.

[Schooten(1651)] Frans van SCHOOTEN : *Principia matheseos universalis seu Introductio ad Cartesianæ Geometriæ Methodum. Conscripta ab Erasmio Bartholino.* ex Officinâ Elzeviriorum, Lugduni Batavorum, 1651.

[Schooten(1659a)] Frans van SCHOOTEN : « Additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam problematis & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis ». *In* [Descartes(1659-1661)], volume I, pages 369–400. 1659a.

[Schooten(1659b)] Frans van SCHOOTEN : « In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii ». *In [Descartes(1659-1661)]*, volume I, pages 143–344. 1659b.

[Schooten(1661a)] Frans van SCHOOTEN : « De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco ». *In* [Descartes(1659-1661)], volume II, pages 341–420. 1661a.

[Schooten(1661b)] Frans van SCHOOTEN : « Principia matheseos universalis seu Introductio ad Cartesianæ Geometriæ Methodum. Conscripta ab Erasmio Bartholino ». *In [Descartes(1659-1661)]*, pages 1–48. édition de Érasme Bartholin, 1661b.

[Schwartz(2005)] Elisabeth SCHWARTZ : « Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin ». *In [Rashed et Pellegrin(2005)]*, pages 1–28, 2005.

[Scott(1952)] J.F. SCOTT : *The scientific work of René Descartes.* Taylor and Francis, London, 1952.

[Serfati(1993)] Michel SERFATI : « Les compas cartésiens ». *Archives de philosophie*, 56 : 197–230, 1993.

[Simson(1776)] Robert SIMSON : *Roberti Simson,... Opera quaedam reliqua, scilicet I. Apollonii Pergaei de Sectione determinata libri II. restituti, duobus insuper libris aucti. II. Porismatum liber... III. De Logarithmis liber. IV. De Limitibus quantitatum et rationum, fragmentum. V. Appendix... nunc primum post auctoris mortem in lucem edita, impensis quidem Philippi, comitis Stanhope, cura vero Jacobi Clow,... cui auctor omnia sua manuscripta testamento legaverat...* in ædibus academicis, excudebant R. et A. Foulis, Glasguæ, 1776.

[Sinaceur(1994)] Hourya SINACEUR : *Jean Cavaillès. Philosophie mathématique.* Philosophies. PUF, 1994.

[Snellius(1608)] Wilebrord SNELLIUS : *Wilebrordi Snellii Apollonius Batavus, seu exsuscitata Apollonii Pergæi* ΠΕΡΙ ΔΙΩΡΙΣΜΕΝΗΣ ΤΟΜΗΣ. excudebat J. a Dorp, Lugodini, 1608.

[Stampioen d'Ionghe(1639)] Johan STAMPIOEN D'IONGHE : *Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel, waer door alles ghevanden wordt, inde Wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt voor desen bekendt.* In Sphæra-Mundi, 's Graven Hage, 1639.

[Stedall(2002)] Jacqueline A. STEDALL : *A Discourse Concerning Algebra. English Algebra to 1685.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Stirling(1717)] James Stirling : *Lineæ Tertii Ordinis Neutonianæ, sive Illustratio Tractatus D. Neutoni De enumeratione Linearum Tertii Ordinis*. E. Whistler, Oxoniæ, 1717.

[Strømholm(1968)] Per Strømholm : « Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A Reconstruction ». *Archive for history of exact sciences*, 5 : 47–69, 1968.

[Szczeciniarz(2000)] Jean-Jacques Szczeciniarz : « Descartes, la géométrie et la Géométrie ». *In Seminario sobre O Cartesianismo. Actas do 4º Encontro Évora sobre História e Filosofia da Ciência*, pages 105–143, Évora, 2000. Universidade de Évora.

[Tannery(1893)] Paul Tannery : « La Correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques ». *In [Tannery(1926)]*, pages 149–268. 1893.

[Tannery(1899)] Paul Tannery : « Les « *Excerpta ex M. SS. R. Descartes* » ». *In [Tannery(1926)]*, pages 323–339. 1899.

[Tannery(1904)] Paul Tannery : « Pour l'histoire du problème inverse des tangentes ». *In [Tannery(1926)]*, pages 457–477. 1904.

[Tannery(1926)] Paul Tannery : *Mémoires Scientifiques*, volume VI : Sciences Modernes. Edouard Privat/Gauthier Villars, Toulouse/Paris, édition de Gino Loria, 1926.

[Taton(1962)] René Taton : « L'œuvre de Pascal en géométrie projective ». *Revue d'Histoire des Sciences*, XV : 197–252, 1962.

[Taton(1994)] René Taton : « Desargues et le monde scientifique de son époque ». *In [Dhombres et Sakarovitch(1994)]*, pages 23–54. 1994.

[Timmermans(1995)] Benoît Timmermans : *La résolution des problèmes de Descartes à Kant. L'analyse à l'âge de la révolution scientifique.* L'interrogation philosophique. PUF, Paris, 1995.

[Tūsī(1986)] Sharaf Al-Dīn Al Tūsī : *Œuvres Mathématiques* (2 vols.). Sciences et Philosophie arabes. Les Belles Lettres, Paris, édition de Roshdi Rashed (établissement du texte et traduction), 1986.

[Unguru et Fried(2001)] Sabetai Unguru et Michael N. Fried : *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext*, volume 222 de *Mnemosyne Supplementa*. Brill, Leiden, 2001.

[van Heuraet(1659)] Hendrik van Heuraet : « Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas ». *In [Descartes(1659-1661)]*, pages 517–520. 1659.

[van Waessenaer(1640)] Jacob van WAESSENAER : *Den On-Wissen Wiskonstenaer I.I. Stampioenius ontdeckt...* gedruckt by Willem Christiaens voor Iohannes Maire, Leyden, 1640.

[Viète(1591)] François VIÈTE : *In artem analytice Isagoge.* I. Mettayer, Tours, 1591.

[Viète(1631)] François VIÈTE : *Francisci Vietæ ad Logisticen Speciosam Notæ priores.* Guillaume Baudry, Paris, édition de Jean de Beaugrand, 1631.

[Viète(1646)] François VIÈTE : *Francisci Vietæ Opera mathematica : in unum Volumen congesta, ac recognita, Operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis, Matheseos Professoris.* ex officina B. et A. Elzeviriorum, Lugduni Batavorum, édition de Frans van Schooten, 1646.

[Viète(1983)] François VIÈTE : *The Analytic Art.* Kent State University Press, Kent, édition de T. Richard Witmer, 1983.

[Vuillemin(1960)] Jules VUILLEMIN : *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes.* Epiméthée. PUF, Paris, 1960.

[Wallis(1655a)] John WALLIS : « De sectionibus conicis ». *In [Wallis(1693-1699)]*, volume I, pages 295–354. 1655a.

[Wallis(1655b)] John WALLIS : « De Sectionibus conicis tractatus ». *In Operum mathematicorum pars altera, qua continentur : de Angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica ; de Sectionibus conicis tractatus ; Arithmetica infinitorum, sive de Curvilineorum quadratura, etc. ; Eclipseos solaris observatio.* typis L. Lichfield, veneunt apud O. Pullein, Oxoniæ, 1655b.

[Wallis(1693-1699)] John WALLIS : *Opera Mathematica* (3 vols.). E theatro Sheldoniano, Oxoniæ, 1693-1699.

[Warusfel(1999)] André WARUSFEL : « Fermat et la naissance de l'analyse moderne ». *In [Belgioioso(1999)]*, pages 235–260, 1999.

[Weil(1973)] André WEIL : « Review of « The mathematical career of Pierre de Fermat », by M.S. Mahoney ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, VI(79) : 1138–1149, 1973.

[Weil(1980)] André WEIL : « History of mathematics : why and how ». *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Helsinki, 1980. Acad. Sci. Fennica.

[Weil(1984)] André Weil : *Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*. Birkhauser, Boston, 1984.

[Whiteside(1960-1962)] Derek Thomas Whiteside : « Patterns of Mathematical Thoughts in the later Seventeenth Century ». *Archive for history of exact sciences*, 1 : 179–388, 1960-1962.

[Witt(1661)] Jan de Witt : « Elementa curvarum linearum libri duo ». *In [Descartes(1659-1661)]*, volume II, pages 153–340. 1661.

[Witt(2000)] Jan de Witt : *Jan de Witt's Elementa curvarum linearum, Liber primus*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, édition de Albert W. Grootendorst (traduction, introduction et commentaire), 2000.

[Zeuthen(1886)] H.G. Zeuthen : *Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum*. Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn, Kopenhagen, 1886.

[Zeuthen(1902)] H.G. Zeuthen : *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Âge*. Gauthier-Villars, Paris, édition de Jean Mascart pour la traduction française, 1902.

[Zeuthen(1919)] H.G. Zeuthen : « Sur l'origine de l'algèbre ». *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser*, II (4), 1919.

[Zeuthen(1966)] H.G. Zeuthen : *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrundert* (Nachdruk der ersten Auflage von 1903). Johnson Reprint Corporation, New York, 1966.