



HAL
open science

Modèles d'objets discrets, connexes et séparants, en dimension quelconque

Jean-Luc Toutant

► **To cite this version:**

Jean-Luc Toutant. Modèles d'objets discrets, connexes et séparants, en dimension quelconque. domain_other. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2007. Français. NNT : . tel-00206680

HAL Id: tel-00206680

<https://theses.hal.science/tel-00206680>

Submitted on 17 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'identification :

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUE DU LANGUEDOC —

Thèse

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : **Informatique**
Formation Doctorale : **Informatique**
École Doctorale : **Information, Structures et Systèmes**

Modèles d'objets discrets, connexes et séparants, en dimension quelconque

par

Jean-Luc TOUTANT

À Soutenir le 11 décembre 2007 devant le Jury composé de :

M. Éric ANDRES, Professeur, Université de Poitiers, SIC, Rapporteur
M. Rémy MALGOUYRES, Université d'Auvergne, LLAIC, Rapporteur
M. Achille BRAQUELAIRE, Professeur, Université de Bordeaux, LABRI, Examineur
M. Srecko BRLEK, Professeur, Université du Québec à Montréal, LaCIM, Examineur
M. Jean-Claude BAJARD, Professeur, Université Montpellier II, LIRMM, Directeur de thèse
M. Christophe FIORIO, Maître de Conférence, Université Montpellier II, LIRMM, Encadrant de thèse
M. William PUECH, Maître de Conférence, Université Montpellier II, LIRMM, Encadrant de thèse

Sommaire

I	Géométrie discrète linéaire	xi
1	Bases de topologie discrète plane et droites discrètes	1
1.1	Espaces discrets	1
1.1.1	Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay	2
1.1.2	Les réseaux euclidiens	3
1.1.3	Espaces discrets réguliers	4
1.2	Relations d'adjacence et connexités discrètes	4
1.3	Courbes et droites discrètes	7
1.3.1	Codage des courbes	7
1.3.2	Spécificité du codage des segments de droites discrètes	8
1.4	Droites discrètes arithmétiques	9
1.5	Conclusion	11
2	Extension en dimensions supérieures	13
2.1	Définition et premières propriétés	13
2.2	Hyperplans discrets arithmétiques et propriétés topologiques	15
2.2.1	Hyperplans discrets naïfs et standard	15
2.2.2	Relations d'adjacence supplémentaires	17
2.2.3	Hyperplans discrets k -minimaux	19
2.3	Hyperplans discrets arithmétiques et périodicité	19
2.4	Fonctionnalité des hyperplans discrets arithmétiques	21
2.4.1	Définitions	22
2.5	Codages symboliques des plans discrets naïfs	23
2.5.1	Codage par hauteurs	24
2.5.2	Représentation par restes	24
2.6	Plans discrets gracieux	25
2.7	Conclusion	27

3	Connexité des hyperplans discrets	29
3.1	État de l'art	30
3.1.1	Décision sur la connexité d'un hyperplan discret	30
3.1.2	Étude de la 0-connexité des plans discrets	33
3.2	Propriétés des hyperplans discrets arithmétiques $(d - 1)$ -connexes	36
3.2.1	Premières propriétés	36
3.2.2	Principe de notre approche	38
3.2.3	Réductions arithmétiques préservant les composantes $(d - 1)$ -connexes	39
3.2.4	Cas rationnel : réponse algorithmique	42
3.3	Hyperplans discrets arithmétiques k -connexes	43
3.4	Conclusion	45
II	Modèles théoriques et pratiques de discrétisation séparants	47
4	Le passage du continu au discret : la discrétisation	49
4.1	Schémas de numérisation et modèles de discrétisation	50
4.1.1	Schémas de numérisations	50
4.1.2	Modèles de discrétisation	51
4.2	Propriétés des surfaces discrètes	55
4.2.1	Ensembles discrets minimaux et surfaces discrètes	55
4.2.2	Une première définition de surface discrète	57
4.2.3	Propositions alternatives	58
4.3	Conclusion	59
5	Modèles de discrétisation génériques pour les hypersurfaces	61
5.1	Modèles de discrétisation séparants	61
5.2	Caractérisation analytique	67
5.3	Approximations pratiques	69
5.4	Conclusion et perspectives	72
6	Applications : Cercles et hypersphères discrètes	75
6.1	Cercles discrets algorithmiques	75
6.1.1	Paramètres entiers	75
6.1.2	Cercles discrets algorithmiques à paramètres non entiers	83
6.2	Cercles discrets analytiques et épaisseur non constante	86
6.2.1	Couronnes discrètes analytiques	87
6.2.2	Cercles discrets analytiques à épaisseur non constante	88
6.3	Expressivité de nos modèles	93
6.3.1	Spécialisation et propriétés particulières	94

6.3.2	Liens avec les hypersphères discrètes analytiques	99
6.3.3	Cercles discrets 1-séparants	100
6.3.4	Cercles discrets 0-séparants	102
6.4	Conclusion et perspectives	102

Bibliographie		107
----------------------	--	------------

Introduction

La géométrie discrète a pour but de définir un analogue dans \mathbb{Z}^d de la géométrie euclidienne. Cela peut sembler un objectif très théorique et, quand, au XVIIIème siècle, J. Bernoulli s'interroge sur les propriétés de l'ensemble des points à coordonnées entières proches d'une droite [8], c'est bien le cas. Toutefois, sa volonté est de fournir des outils permettant d'accélérer les calculs par l'utilisation uniquement des entiers. Si, comme certains auteurs, nous faisons le parallèle entre la géométrie discrète et la broderie [64], la préoccupation première devient alors totalement pratique : comment bien représenter une droite, un cercle ou plus généralement une courbe sur une grille ? Finalement, l'apparition de l'informatique a donné tout son sens à l'étude de la géométrie discrète et réconcilie ces deux visions.

L'ordinateur est par essence une machine discrète, et des notions telles que le continu ou l'infini sont hors de sa portée. Elles ne peuvent qu'être approchées : il est possible de définir des nombres très petits ou très grands, mais pas infiniment petits ou infiniment grands. C'est le principal reproche qui puisse lui être adressé : il ne garantit pas des calculs exacts, mais des résultats dans la limite de ses capacités. Les imprécisions peuvent alors se propager de calcul en calcul et conduire non plus à des résultats imprécis mais à des résultats complètement faux. Il devient alors intéressant de travailler avec des entiers et d'avoir ainsi la garantie de l'exactitude des calculs. De ce point de vue, les travaux de J. Bernoulli prennent tout leur sens. De plus, l'ordinateur crée et manipule des données numériques et, en particulier, des images, et, puisque le continu est hors d'atteinte, ce ne sont finalement que des matrices, des grilles de points discrets. L'analogie avec la broderie, ou un canevas, devient alors évidente. À ceci près, que l'informatique soulève des questions plus fondamentales que la broderie, où seule la qualité artistique du rendu compte.

Ainsi, dès l'apparition des premiers traceurs à commande numérique, il a fallu fournir des algorithmes pour dessiner les primitives de base [14, 15]. Comme ces machines travaillaient par des déplacements unitaires, selon des directions précises, les algorithmes ont du s'adapter et, en conséquence, considérer un espace de travail équivalent à \mathbb{Z}^2 . Ce sont les débuts de la géométrie discrète en informatique. Rapidement, avec les périphériques d'affichage, les images numériques sont apparues et ont conduit à une étude importante des propriétés de la géométrie discrète. En particulier, A. Rosenfeld a formalisé des notions nécessaires, comme les relations d'adjacence, la

connexité ou encore la séparation de l'espace [74, 75, 76]. Il est alors apparu que les comportements des objets discrets n'étaient pas aussi bons que ceux des objets euclidiens. Un exemple typique est le fait que deux droites discrètes non-parallèles peuvent ne pas avoir de points en commun contrairement à leurs analogues euclidiennes. L'étude de ce genre de problèmes est difficile tant que nous ne disposons que d'une vision algorithmique des droites discrètes, c'est-à-dire tant qu'elles sont obtenues par l'application de critères locaux à des droites euclidiennes. Il devient nécessaire d'introduire une définition globale d'une droite discrète et indépendante de l'espace euclidien sous-jacent. C'est ce qu'a fait J.-P. Reveillès [71] en initiant la géométrie discrète arithmétique, ou analytique. La vision globale proposée pour la droite discrète, une forme analytique dépendant d'un paramètre d'épaisseur, permet de répondre à bon nombre de questions sur son comportement.

Néanmoins, à un objet euclidien ne correspond pas un unique analogue discret. En particulier, pour les droites discrètes arithmétiques, le paramètre d'épaisseur conduit à des ensembles discrets aux propriétés bien différentes. Et ce principe est valable pour tous les objets discrets : nous disposons d'algorithmes de tracé de cercles discrets fins, mais ils ne pavent pas le plan ; à l'inverse, nous disposons aussi d'une définition de cercles discrets pavant le plan, mais ils ne sont pas aussi fins que nous pourrions le souhaiter. Finalement, suivant le but applicatif visé, il faut jongler entre les représentations pour trouver celle qui fournit les propriétés recherchées.

Notre ambition dans ce mémoire est d'essayer de fournir un cadre théorique et général qui engloberait les diverses représentations discrètes d'un objet, sur le modèle de la définition des droites discrètes arithmétiques. De plus, nous cherchons aussi à munir les représentations les plus pertinentes de caractérisations analytiques. Plus précisément, nous proposons principalement des modèles de discrétisation qui mènent à des caractérisations analytiques d'hypersurfaces discrètes, munies de bonnes propriétés topologiques, en quelque sorte, des frontières d'objets discrets. La particularité de ces formes analytiques est qu'elles sont basées, non plus sur une épaisseur constante, comme dans les définitions existantes, mais sur une épaisseur fonction de la position et des spécificités de l'hypersurface représentée.

Nous commençons notre étude en rappelant les bases de la géométrie discrète. Partant de la définition d'un espace discret bidimensionnel cohérent et pratique, nous introduisons les deux relations d'adjacence possibles dans le plan et les notions de connexité discrète qui en découlent. Après avoir mentionné quelques résultats sur les courbes discrètes [74] et en particulier le codage de H. Freeman [36], nous nous focalisons sur les droites discrètes. En particulier, nous présentons différents moyens géométriques de vérifier qu'une courbe discrète particulière est une droite [75, 41] et terminons ce premier chapitre par la définition des droites discrètes arithmétiques de J. P. Reveillès [71].

Au chapitre suivant, nous nous intéressons à l'extension de ces résultats aux dimensions supérieures et en particulier aux hyperplans discrets arithmétiques [71]. Ceux-ci n'héritent pas de toutes les propriétés des droites discrètes. En particulier, la caractérisation de leur connexité par

l'épaisseur n'est plus valable. En fait, une droite discrète connexe présente la particularité d'être aussi un ensemble séparent, c'est-à-dire qu'elle sépare son complémentaire en deux composantes distinctes. C'est finalement cette propriété qui est directement transmise aux hyperplans discrets arithmétiques [5]. De plus, avec l'augmentation de la dimension, les relations d'adjacence possibles deviennent plus nombreuses. Notre apport est ici de caractériser les notions d'adjacence, de minimalité et de séparation par des normes, comme c'est implicitement le cas en dimension 2. Ce résultat nous sera utile au chapitre 5. Nous présentons aussi des propriétés importantes des hyperplans discrets arithmétiques comme leur fonctionnalité [10], leur périodicité ainsi que quelques représentations bidimensionnelles des plans discrets [26].

Les hyperplans discrets arithmétiques sont parfaitement caractérisés en tant qu'ensembles séparants. Par contre, leur connexité reste assez mal maîtrisée. C'est un problème épineux dont la résolution permettrait de mieux les comprendre. Le troisième chapitre présente donc notre étude sur la connexité des hyperplans discrets arithmétiques dont le vecteur est à composantes rationnelles. Elle a fait l'objet de deux publications, avec D. Jamet, [45, 44]. Après avoir présenté les différents travaux sur le sujet [38, 18], nous commençons notre étude par le cas de la $(d - 1)$ -connexité. Nous prouvons que les épaisseurs qui rendent un hyperplan discret arithmétique de vecteur normal donné $(d - 1)$ -connexe forment un intervalle et que l'étude peut donc se réduire à la détermination de la borne minimale de celui-ci. Ensuite, nous présentons différentes réductions arithmétiques, sur le vecteur normal de l'hyperplan et son épaisseur, préservant la connexité. Par leurs intermédiaires, nous pouvons réduire la dimension géométrique du problème jusqu'au cas de la dimension 1 où celui-ci est simple à résoudre. Nous proposons des algorithmes efficaces basées sur ces résultats pour déterminer la plus petite épaisseur rendant un hyperplan discret arithmétique $(d - 1)$ -connexe, ou bien, décider de la $(d - 1)$ -connexité d'un hyperplan discret arithmétique donné. La fin du chapitre est consacrée à l'extension de ces résultats aux autres connexités et clôt notre propos sur les primitives discrètes linéaires.

Le quatrième chapitre introduit les notions générales de discrétisation et de surfaces discrètes. Nous commençons par présenter les schémas de discrétisation [37, 39] : des processus locaux pour obtenir un pendant discret à un objet euclidien. Ensuite, nous nous intéressons plus particulièrement aux modèles de discrétisation où le processus est gouverné par un critère global. En particulier, ce sont les modèles supercouverture et naïf fermé étudiés par É. Andres [3]. Pour répondre à la question de savoir en quoi la discrétisation d'une surface peut être considérée comme un bon analogue discret de celle-ci, nous poursuivons en examinant les définitions théoriques de surfaces discrètes [12, 65, 61]. Il en ressort qu'une surface discrète doit être aussi fine que possible, séparente, et sans auto-intersection. Le premier critère n'est pas rempli par les modèles précédents, même dans le cas des hyperplans.

En conséquence, dans le cinquième chapitre, nous dérivons de nouveaux modèles de discrétisations. Combinés aux normes d'adjacence introduites au chapitre 2, nous sommes en mesure de définir toute une série de modèles avec des propriétés topologiques intéressantes. Nous les appli-

quons à des hypersurfaces particulières, définies implicitement par des polynômes, pour obtenir des ensembles fins et séparants. Néanmoins, ces modèles sont sous une forme géométrique, peu maniable. Nous les caractérisons donc analytiquement. Le résultat est une double inégalité dont le calcul des bornes met en jeu l'arithmétique flottante même dans le cas de polynômes à coefficients entiers. Ces discrétisations ne peuvent donc pas être déterminées précisément, de manière informatique. Nous introduisons donc ce que nous appelons des approximations contrôlées. Elles sont incluses dans nos modèles et conduisent à des ensembles discrets séparants. En outre, elles ne nécessitent que des calculs en nombres entiers, donc exacts, pour des polynômes à coefficients rationnels. Ces travaux ont donné lieu à une publication traitant du cas des courbes [34].

Le dernier chapitre est une application directe de nos modèles de discrétisation. L'hypersurface la plus importante à maîtriser, après l'hyperplan, reste l'hypersphère. C'est donc sur cet objet, et ses déclinaisons, la sphère et le cercle, que porte ce chapitre. Il se base en partie sur une de nos publications [33]. Nous disposons d'une abondante littérature sur le sujet à laquelle confronter nos résultats. Nous commençons donc par présenter les travaux les plus représentatifs sur les cercles discrets, d'abord ceux basés sur des approches algorithmiques [15], donc locales, puis ceux basés sur des approches analytiques [6], donc globales. Nous avons publié un article à classer dans cette seconde catégorie [32]. Il présentait une approche prometteuse : l'utilisation d'une épaisseur non constante dans la caractérisation analytique pour définir les cercles discrets. En particulier, cette définition englobe les définitions de meilleures approximations entières de cercles à paramètres entiers. Néanmoins, les autres types de cercles restent hors d'atteinte. En utilisant nos modèles de discrétisation, nous retrouvons finalement toutes les définitions de cercle présentées.

Première partie

Géométrie discrète linéaire

Chapitre 1

Bases de topologie discrète plane et droites discrètes

La géométrie discrète a pour but de définir des primitives géométriques sur un espace discret. La motivation sous-jacente n'est pas que théorique. En effet, les images numériques sont en fait des tableaux de points, soit des espaces discrets. Dans ce cadre particulier, cette géométrie prend un sens pour définir des objets, leurs frontières et les étudier. Ce n'est pas forcément l'exactitude par rapport à la géométrie usuelle qui va primer, mais nous allons plutôt nous attacher à définir de bons analogues discrets suivant des propriétés que nous jugeons importantes, par exemple, la connexité. Dans un premier temps, nous allons définir ce qu'est un espace discret, avant de le munir de propriétés topologiques basiques qui nous permettront de définir la notion de courbes discrètes. Dans la continuité, nous nous focaliserons sur la droite discrète, l'objet le plus étudié.

1.1 Espaces discrets

Un ensemble discret \mathbb{E} consiste en un ensemble de points, d'un espace métrique, tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe $\mathcal{V}(x)$, un voisinage de x , tel que $\mathbb{E} \cap \mathcal{V}(x) = \{x\}$. En fait, nous pouvons simplement voir un ensemble discret comme un ensemble de points isolés.

Ainsi définis, les ensembles discrets présentent la particularité d'être toujours dénombrables. En ce sens, ils s'avèrent particulièrement bien adaptés pour des traitements informatiques, puisque les ordinateurs ne peuvent justement pas appréhender des notions comme la continuité et l'infini. Finalement, pour résoudre un problème continu, une machine résout la plupart du temps un problème discret approchant et la qualité de la réponse est en grande partie tributaire de l'adaptation continu-discret.

Typiquement, si nous cherchons à tracer une droite, l'ensemble des éléments de \mathbb{E} qui vérifient son équation n'est pas une réponse satisfaisante, puisqu'il peut ne pas exister de tels éléments. Dans l'exemple présenté Figure 1.1(a), la droite ne contient qu'un seul élément de \mathbb{E} . Une réponse

plus convenable serait plutôt un ensemble d'éléments de \mathbb{E} dans le voisinage de la droite qui nous assure un tracé plus représentatif comme illustré Figure 1.1(b). Deux points sont mis en jeu ici, la désignation pour chaque point de l'espace réel d'un ou plusieurs représentants dans \mathbb{E} et la définition pour cet ensemble discret de la notion de connexité.

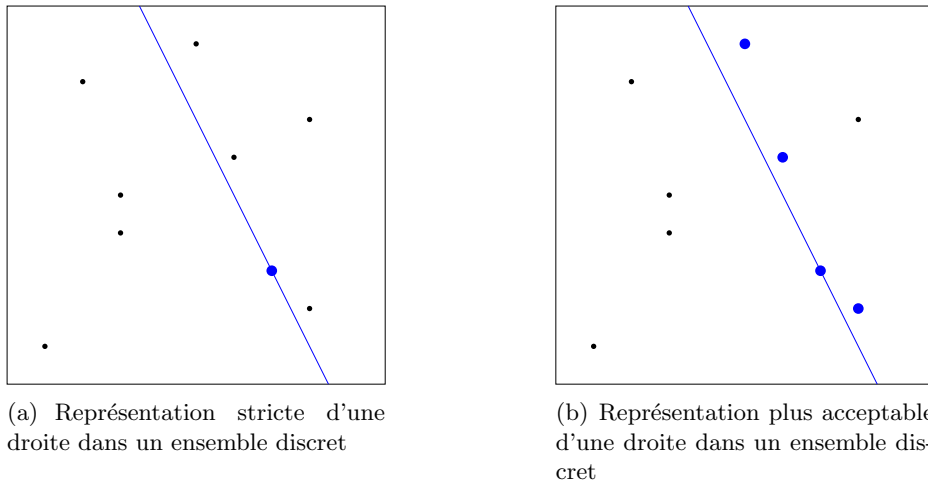


FIG. 1.1 – Différentes représentations d'une droite par des éléments d'un ensemble discret

1.1.1 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay

La manière la plus simple d'arriver à ce résultat est de construire le diagramme de Voronoï correspondant à notre ensemble discret \mathbb{E} et d'associer, à chaque élément, sa cellule de Voronoï. Cela revient à définir des classes d'équivalences en fonction de la position des points et finalement à fournir une couverture de l'espace. Nous présentons un exemple d'un tel diagramme Figure 1.2(a). La notion topologique de connexité devient alors naturelle. Deux points de \mathbb{E} sont adjacents s'ils appartiennent à des cellules dont l'intersection n'est pas vide et le graphe d'adjacence final est la triangulation de Delaunay de \mathbb{E} comme illustré Figure 1.2(b). La Figure 1.1(b) a en fait été obtenue en utilisant cette méthode comme l'illustre la Figure 1.2(c).

Toutes ces considérations sont très générales, et dans un tel ensemble discret, ni la position des éléments, ni la forme des cellules ne sont contraintes. Par conséquent, la précision n'est pas uniforme et les relations d'adjacence différentes d'un élément à l'autre. Le but étant la définition d'analogues discrets aux primitives euclidiennes, ces deux propriétés sont surtout des inconvénients puisqu'il n'est alors pas vraiment possible de trouver des caractéristiques globales pour une famille d'objets, celles-ci dépendant de l'ensemble discret sous-jacent. Pour éviter cela, nous allons nous restreindre à des ensembles discrets particuliers, les réseaux euclidiens.

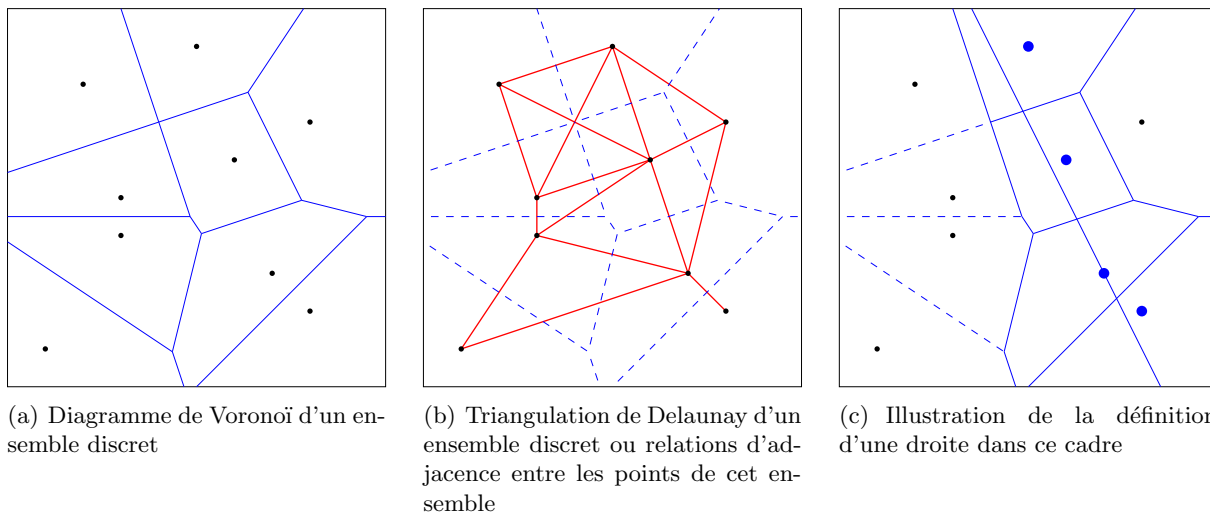


FIG. 1.2 – Représentation du plan par un ensemble discret et notion de connexité discrète

1.1.2 Les réseaux euclidiens

Les réseaux euclidiens sont des ensembles discrets dont les points sont localisés relativement à une base. Leur répartition est ainsi uniforme et l'ensemble n'a pas besoin d'être défini en extension, la donnée de la base suffit à le caractériser.

Définition 1.1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, la dimension de l'espace. Un *réseau euclidien* Λ est un sous-groupe discret du groupe $(\mathbb{R}^d, +)$, muni de sa loi additive usuelle. Si Λ' est un sous-groupe de Λ , alors Λ' est aussi un réseau euclidien. Nous dirons que Λ' est un sous-réseau de Λ .

Théorème 1.1. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors, Λ est un réseau euclidien si et seulement s'il existe un ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ de vecteurs \mathbb{R} -libres de \mathbb{R}^d tel que :

$$\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \dots \mathbb{Z}\lambda_r,$$

L'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ est appelé une base du réseau Λ .

Toutes les bases de Λ possèdent le même cardinal r , celui-ci est appelé le *rang* ou la *dimension* de Λ . Une propriété évidente des réseaux euclidiens vient répondre aux inconvénients formulés sur la définition de notre ensemble discret.

Proposition 1.2 (Invariance par translation). Soit $\mathbf{e} \in \Lambda$. Λ est invariant par translation de \mathbf{e} :

$$\Lambda = \Lambda \oplus \mathbf{e}.$$

Cette propriété assure une répartition régulière des éléments ainsi qu'un voisinage identique

pour chacun d'entre eux. La Figure 1.3(a) donne un exemple d'un réseau euclidien quelconque ainsi que de ses cellules et relations d'adjacence.

1.1.3 Espaces discrets réguliers

Nous avons aussi représenté sur cette figure les distances euclidiennes d'un élément à ses voisins. Ce sont les cercles en pointillés. Ils nous permettent de nous rendre compte que la solution n'est pas encore idéale. En effet, parmi les éléments adjacents, il existe trois distances différentes. L'idéal serait de pouvoir avoir une adéquation entre distance et voisinage. Il est visible qu'il y a une relation entre la longueur de l'arête commune entre deux cellules adjacentes et la distance entre les éléments associés. Une adéquation distance-voisinage met donc naturellement en jeu des polygones (ou des polytopes en dimension supérieure) réguliers. Deux cas sont possibles, un réseau hexagonal tel celui de la Figure 1.3(b) et un réseau carré comme Figure 1.3(c). Le cas du réseau hexagonal est idéal. Tous les voisins d'un élément sont à une distance identique. Néanmoins, si nous nous focalisons encore une fois sur un traitement informatique, bien que ce soit un ensemble discret, ce type de réseau pose un problème car il met en jeu pour sa construction le nombre irrationnel π . Au contraire, le réseau carré est lui très facilement représentable et manipulable en machine puisque nous pouvons le voir comme le réseau des entiers \mathbb{Z}^2 dans le plan (ou une homothétie de celui-ci). Son inconvénient est d'être un cas limite, c'est-à-dire qu'une cellule est adjacente à ses voisines aussi par ses sommets. Ce problème peut être en partie contourné en considérant différents types de connexité, par point, par segment,...

Le réseau carré s'avère un bon compromis entre qualité de la représentation de l'espace continu et simplicité de la manipulation informatique. D'ailleurs, la plupart des formats d'images (PPM, JPEG, PNG,...) stockent l'information sous une forme matricielle et la localisation sur les périphériques de sortie se fait sur une matrice écran.

Soit d la dimension de l'espace. Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ la *base canonique* de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^d . Un point $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$, avec $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$, est représenté par (x_1, \dots, x_d) . Nous nommons alors le réseau $\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbb{Z}\mathbf{e}_d$ l'*espace discret*. Il correspond à l'ensemble des points à coordonnées entières, \mathbb{Z}^d . N'importe lequel de ses sous-ensembles est un *ensemble discret* et un point \mathbf{v} de l'espace discret est appelé un *pixel* dans le plan (contraction de *picture element*, élément d'image) et un *voxel* dans le cas des autres dimensions. Les termes pixel et voxel pourront aussi désigner la cellule associée au point discret.

Nous allons maintenant nous focaliser sur le cas de l'espace discret à deux dimensions pour introduire les premières propriétés et les premiers objets discrets.

1.2 Relations d'adjacence et connexités discrètes

Deux pixels sont connexes si leurs cellules sont en contact. Deux cas de figure sont à envisager du fait de la forme carrée des pixels. Ils peuvent être en contact par une arête, c'est-à-dire partager

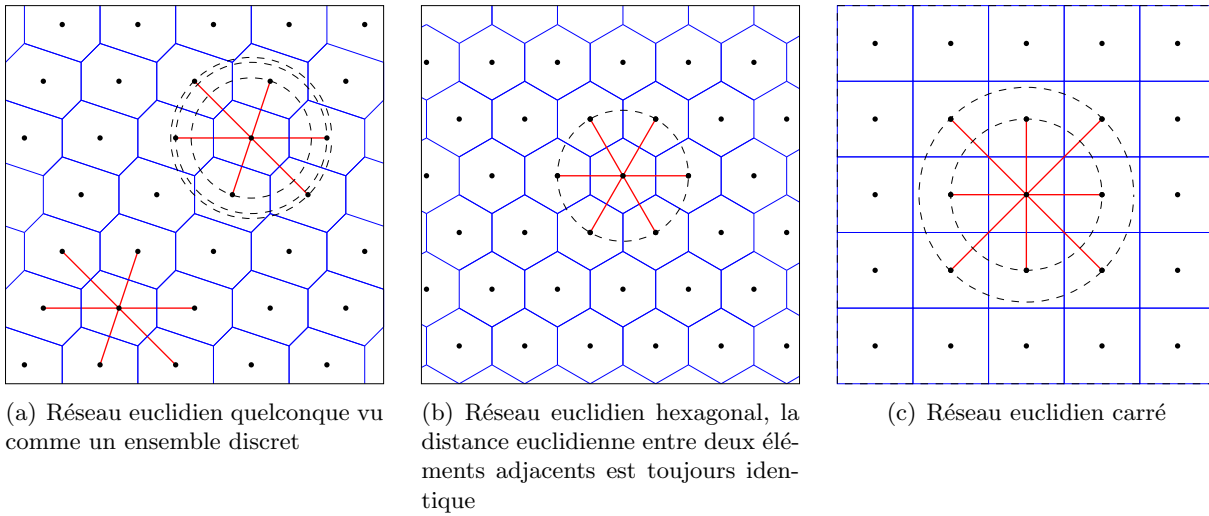


FIG. 1.3 – Réseaux euclidiens

une coordonnée, ou seulement par un sommet et n'avoir aucune coordonnée en commun. Dans le cas de la dimension 2, ces voisinages sont définis selon leur taille, soit, respectivement, le 4-voisinage et le 8-voisinage. Pour une généralisation plus aisée en dimension supérieure, nous parlerons plutôt de 1-voisinage et de 0-voisinage, 1 et 0 correspondant au nombre de coordonnées communes entre les deux pixels dans chacun des cas. Ces voisinages s'obtiennent grâce aux relations d'adjacence de la Définition 1.2.

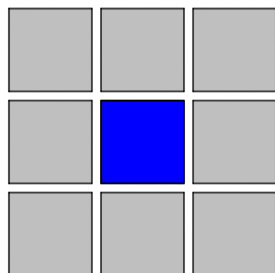
NOTATION. — Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, La *norme infinie* et la *norme 1* sont respectivement :

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq d} \{|x_i|\}$$

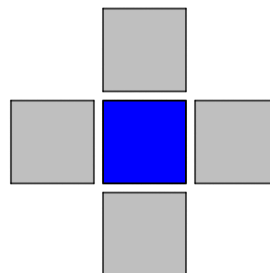
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$$

Définition 1.2 (Relations d'adjacence). Deux pixels \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 sont *0-adjacents* (respectivement *1-adjacents*) si et seulement si $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\infty} = 1$ (respectivement $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_1 = 1$).

Les Figures 1.4 et 1.5 présentent les voisinages discrets et la forme des boules basées sur les normes associées. Le fait que les relations d'adjacence s'expriment par des normes montre bien la cohérence de ces notions avec l'espace \mathbb{R}^2 sous-jacent. En effet, si nous le munissons d'une métrique issue d'une de ces normes, les pixels adjacents correspondent à la restriction aux points discrets d'une boule fermée de rayon 1, la plus petite contenant des points à coordonnées entières. Maintenant que la notion de voisinage discret est introduite, nous pouvons définir ce qu'est un ensemble discret connexe. Tout d'abord, intéressons-nous à la définition d'un chemin entre deux voxels.



(a) Pixels 0-adjacents dans le plan



(b) Pixels 1-adjacents dans le plan

FIG. 1.4 – Les différents voisinages dans le plan discret

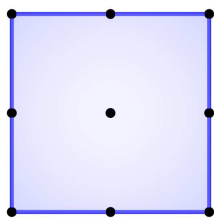
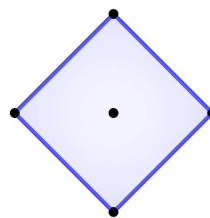
(a) Boule de rayon 1 basée sur la norme de 0-adjacence dans \mathbb{R}^2 (b) Boule de rayon 1 basée sur la norme de 1-adjacence dans \mathbb{R}^2

FIG. 1.5 – Normes d'adjacence et correspondance avec le voisinage discret dans le plan

Définition 1.3 (Chemins discrets). Soit une suite de voxels $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Cette suite est un *chemin discret 0-connexe* (respectivement *1-connexe*) si et seulement si chacun des \mathbf{v}_i est 0-adjacent (respectivement 1-adjacent) à son prédécesseur dans la suite.

Les notions de composante connexe et d'ensemble connexe découlent alors naturellement.

Définition 1.4 (Composantes discrètes et ensembles discrets connexes). Soit un ensemble discret \mathbb{E} et un de ses voxels \mathbf{v} . La *composante 0-connexe* (respectivement *1-connexe*) dans \mathbb{E} issue de \mathbf{v} est l'ensemble des voxels \mathbf{w} de \mathbb{E} tels qu'il existe un chemin 0-connexe (respectivement 1-connexe) reliant \mathbf{v} à \mathbf{w} dans \mathbb{E} . Si cette composante est égale à l'ensemble \mathbb{E} , alors il est lui-même dit *0-connexe* (respectivement *1-connexe*).

1.3 Courbes et droites discrètes

La notion de chemin discret décrite plus haut est très générale. Pour pouvoir introduire des propriétés topologiques sur de tels objets, A. Rosenfeld a proposé les raffinements suivants [74].

Définition 1.5 (Arcs discrets [74]). Un *arc discret 0-connexé* (respectivement 1-connexé) est un chemin 0-connexé (respectivement 1-connexé) $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que :

- (i) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ si et seulement si $i = j$,
- (ii) $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_\infty = 1$ (respectivement $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_1 = 1$) si et seulement si $j = i \pm 1$.

La condition (i) assure que l'arc ne contient pas de boucle tandis que la condition (ii) interdit que, d'un point de vue imagé, il ne se frôle lui-même. Cette définition fournit un analogue discret à la notion de courbes simples non fermées si nous considérons des arcs discrets infinis. Au contraire, elle ne permet pas d'atteindre les courbes simples fermées sans une légère variation.

Définition 1.6 (Courbes discrètes fermées [74]). Une *courbe discrète fermée 0-connexé* (respectivement 1-connexé) est un chemin 0-connexé (respectivement 1-connexé) $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que :

- (i) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ si et seulement si $i = j$,
- (ii) $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_\infty = 1$ (respectivement $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_1 = 1$) si et seulement si $j = i \pm 1 \pmod n$.

Cette définition présente les mêmes propriétés que la précédente, sauf qu'elle assure la 0-adjacence ou la 1-adjacence entre le premier voxel, \mathbf{v}_1 , et le dernier voxel, \mathbf{v}_n .

1.3.1 Codage des courbes

Le codage d'une courbe a pour but principal de rendre compacte l'information comparative-ment à sa définition en extension (un ensemble de pixels indépendants). Cela a un sens autant du point de vue évident de la compression que de celui de leur étude et de leur manipulation. Pour cela, d'autres propriétés importantes sont recherchées comme l'invariance par transformations géométriques, par exemple. Dans [36], H. Freeman propose de coder les 0-courbes en affectant à chacune des huit directions vers un 0-voisin, un label, habituellement un nombre de 0 à 7. Nous pouvons en faire de même avec les 1-courbes. La Figure 1.6 explicite ce codage et son application à des courbes discrètes. Ainsi, une courbe discrète peut simplement être représentée par les coordonnées d'un pixel initial et un mot codant les déplacements successifs pour la parcourir. Le gain au niveau de la taille du codage est significatif comparé à la représentation comme un ensemble de pixels indépendants. De plus, la translation de la courbe ne nécessite qu'une modification des coordonnées du pixel initial et des rotations de 90° sont facilement réalisables par des décalages des labels selon des valeurs paires.

Le code de Freeman n'est bien sûr pas l'unique code existant pour coder des courbes discrètes. Notamment, des travaux récents présentent et comparent différentes autres solutions [77].

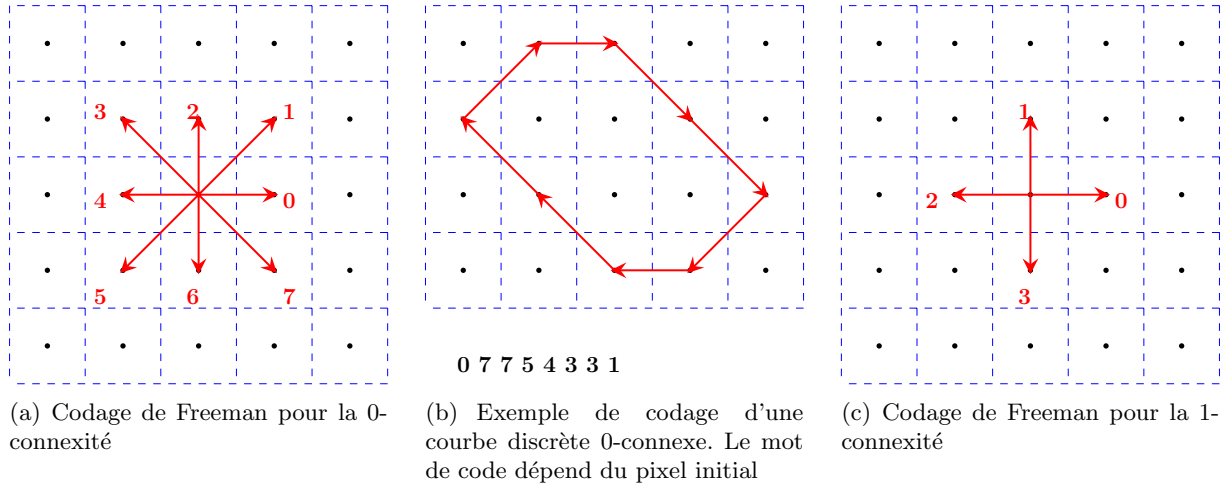


FIG. 1.6 – Codage de Freeman et représentation de courbes discrètes

1.3.2 Spécificité du codage des segments de droites discrètes

Parmi les courbes, les plus simples à analyser sont les droites. Plusieurs caractérisations ont été formulées pour identifier un segment de droite discrète, en quelque sorte, des tests de linéarité. Elles utilisent la représentation de l'ensemble discret sous la forme d'un mot obtenu selon le codage de Freeman. Nous ne parlons ici que du cas de segments car d'un point de vue pratique, un ordinateur ne manipulera que des objets finis et donc des segments de droite plutôt que des droites. Dans le cas plus théorique de l'étude des droites elles-mêmes, la notion de droite discrète est très fortement liée à la combinatoire des mots [43] et nous pouvons trouver des résultats sur la caractérisation des droites discrètes et non pas simplement de segments discrets dans [66], par exemple.

Le premier critère géométrique a été introduit par A. Rosenfeld dans [75]. Sa propriété de la corde a l'inconvénient de mettre en jeu des points de segments réels.

Définition 1.7 (Propriété de la corde [75]). Un ensemble de pixels \mathbb{E} vérifie la *propriété de la corde* si pour tout couple \mathbf{p} et \mathbf{q} de pixels de \mathbb{E} , et pour tout point $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$ du segment $[\mathbf{pq}]$, il existe un pixel $\mathbf{r} \in \mathbb{E}$ tel que :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{m}\|_{\infty} < 1.$$

Théorème 1.3 ([75]). Une courbe discrète 0-connexe finie est un segment de droite discrète si et seulement si elle vérifie la propriété de la corde et que son code de Freeman n'est constitué que de deux labels consécutifs (par exemple, des 0 et des 1).

Plus tard, S. H. Y. Hung introduit une propriété équivalente qui ne met en jeu que les pixels [41].

Définition 1.8 (Ensemble régulier [41]). Un ensemble de pixels \mathbb{E} est dit *régulier* si pour tout quadruplet $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ de \mathbb{E} , nous avons :

$$|p_1 - q_1| = |r_1 - s_1| \implies \left| |p_2 - q_2| - |r_2 - s_2| \right| \leq 1.$$

Théorème 1.4 ([41]). *Une courbe discrète 0-connexe finie est un segment de droite discrète si et seulement si elle est régulière et que son code de Freeman n'est constitué que de deux labels consécutifs (par exemple, des 0 et des 1).*

Ces propriétés permettent une caractérisation formelle des segments de droites discrètes mais ne sont pas constructives dans le sens où elles ne permettent pas de tracer ou de reconnaître un segment de droite discrète autrement que par des test exhaustifs.

1.4 Droites discrètes arithmétiques

Pour le tracé des droites discrètes, les premières approches furent algorithmiques. En effet, pour les besoins des traceurs numériques, divers algorithmes ont été développés dont le plus connu reste celui de J. Bresenham [14]. Ces approches ont l'inconvénient de se baser sur des critères locaux pour définir les droites discrètes ce qui a pour effet d'en masquer en partie les propriétés. Au début des années quatre-vingt-dix, J.-P. Réveillès propose une caractérisation globale sous la forme d'une expression analytique [71].

Définition 1.9 (Droites discrètes arithmétiques [71]). Soient $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. La *droite discrète arithmétique* $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ de *vecteur normal* \mathbf{n} , d'*ordonnée à l'origine* μ et d'*épaisseur arithmétique* ω est l'ensemble discret tel que :

$$\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \{ \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2; 0 \leq d_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p}) < \omega \},$$

avec, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $d_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \mu$, où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est le produit scalaire de \mathbf{a} et \mathbf{b} , soit, $d_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{x}) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \mu$.

D'un point de vue géométrique, cette définition revient à sélectionner tous les points discrets dans une bande d'épaisseur ω comme le montre la Figure 1.7. Comme nous l'avons dit cette définition donne une caractérisation globale d'une droite discrète, ce n'est plus simplement l'application d'un processus de discrétisation local à une droite mais un objet analytique à part entière. Parmi toutes les droites discrètes, nous pouvons distinguer la classe des rationnelles. Cette distinction à un sens pratique. En effet, un ordinateur travaille toujours sur un espace fini et dans ce cas, pour tout segment fini d'une droite discrète dont le vecteur normal est irrationnel, nous pouvons toujours trouver une droite discrète localement équivalente dont le vecteur normal est rationnel.

Proposition 1.5 (Droite discrète arithmétique rationnelle [71]). *Soient $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.*

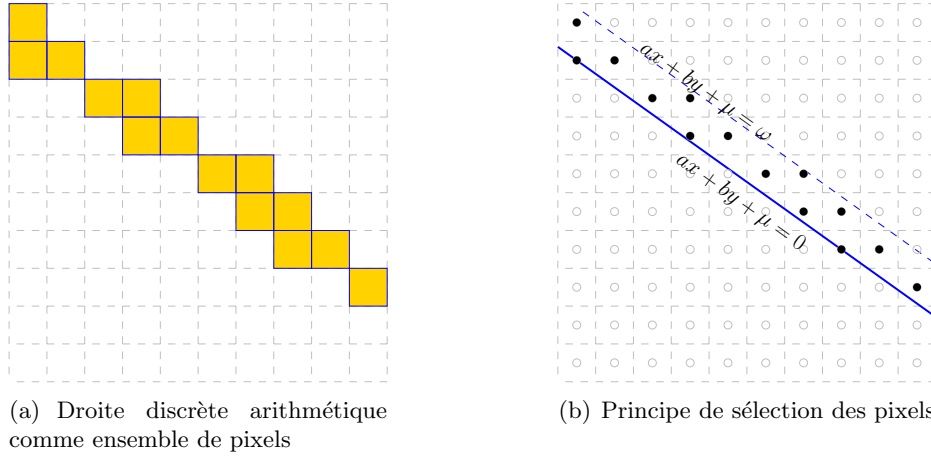


FIG. 1.7 – Droite discrète arithmétique de vecteur normal $\mathbf{n} = (5, 7)$ et d'épaisseur $\omega = 10$

Soit $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ une droite discrète arithmétique. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathbf{n} = \alpha \mathbf{m}$ et $\text{pgcd}\{m_1, m_2\} = 1$, alors il existe $\mu' \in \mathbb{Z}$ et $\omega' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \mathbb{D}(\mathbf{m}, \mu', \omega')$.

Cette classe d'équivalence permet de ne considérer par la suite que les droites discrètes dont les vecteurs normaux \mathbf{n} sont totalement irrationnels, ou entiers avec $\text{pgcd}\{n_1, n_2\} = 1$. Le fait de ne pas avoir à prendre en compte les cas où les composantes du vecteur normal ne sont pas premières entre elles simplifie notablement l'énoncé des résultats sur la connexité des droites arithmétiques discrètes. En effet, les droites discrètes arithmétiques fournissent un ensemble de pixels proches de la droite support, mais jusque-là nous n'avons donné aucune information sur leurs propriétés, notamment en terme de connexité. J. P. Reveillès l'a caractérisée en fonction de l'épaisseur arithmétique [71].

Théorème 1.6 (Connexité des droites discrètes arithmétiques [71]). Une droite discrète arithmétique $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est :

- 0-connexe si et seulement si $\omega \geq \|\mathbf{n}\|_\infty$,
- 1-connexe si et seulement si $\omega \geq \|\mathbf{n}\|_1$.

En particulier, des définitions ont été introduites pour les cas limites, les notions de droites discrètes naïve et standard.

Définition 1.10 (Droites naïves [71] et standard [35]). Soit une droite discrète arithmétique $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Elle est dite *naïve* (respectivement *standard*) si son épaisseur ω est telle que $\omega = \|\mathbf{n}\|_\infty$ (respectivement $\omega = \|\mathbf{n}\|_1$).

La Figure 1.8 donne un exemple de chacune de ces droites. Nous pouvons nous apercevoir que ce sont des ensembles de pixels minimaux (au sens de l'inclusion) qui assurent la 0-connexité

ou la 1-connexité. En fait, ceci est le cas de manière générale et les droites discrètes naïves et standard sont des courbes discrètes telles que définies précédemment.

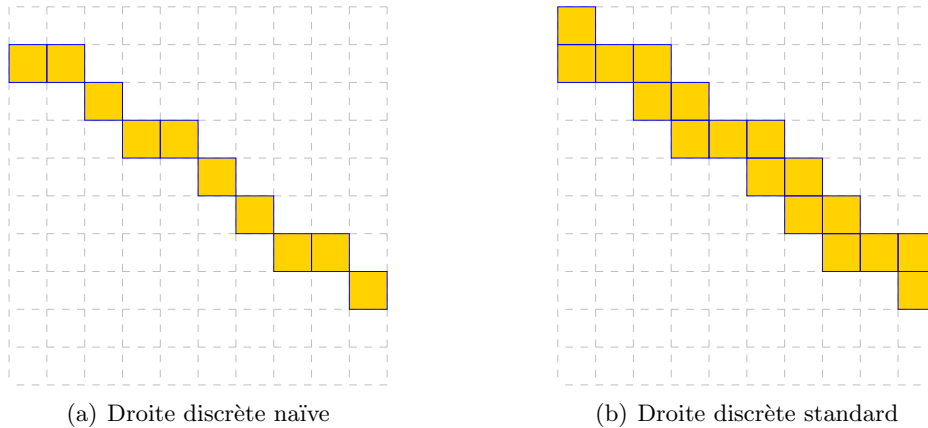


FIG. 1.8 – Droites discrètes naïve et standard de vecteur normal $\mathbf{n} = (5, 7)$ et d'épaisseur $\omega = 10$

Théorème 1.7 (Droites discrètes arithmétiques et courbes discrètes [71]). *Les droites discrètes naïves (respectivement standard) sont des courbes discrètes 0-connexe (respectivement 1-connexes).*

De plus, les droites discrètes naïves vérifient les tests de linéarité énoncés précédemment.

Théorème 1.8 (Droites discrètes naïves et linéarité [71]). *Les droites discrètes naïves sont des ensembles réguliers et vérifient la propriété de la corde.*

Les propriétés de la corde et les ensembles réguliers peuvent aussi être adaptés au cas de la 1-connexité et dans ce cadre, nous avons le même résultat pour les droites discrètes standard.

1.5 Conclusion

Dans le plan, l'espace discret le plus cohérent et le plus simple à manipuler numériquement s'avère être l'ensemble \mathbb{Z}^2 , il s'impose d'ailleurs naturellement dans les applications graphiques, en particulier, les formats d'images ou les périphériques d'affichage. Il est facile de munir cet espace discret d'une notion de voisinage. En fait, il n'existe pas une unique relation d'adjacence et nous disposons de deux voisinages discrets possibles. En accord avec chacun d'eux, il est néanmoins possible de définir les notions de courbes simples et de droites. Dans le cas des droites, une définition analytique permet d'identifier une classe très générale d'ensembles discrets approximant bien une droite. L'intérêt de ces droites discrètes arithmétiques est de fournir une caractérisation simple et globale. Parmi elles, les plus intéressantes sont alors les droites discrètes naïves et

standard. En effet, elles possèdent la propriété d'être des courbes discrètes simples (de manière imagée, ce sont des ensembles discrets connexes et fins) contrairement à la majorité des autres droites discrètes arithmétiques.

Chapitre 2

Extension en dimensions supérieures

De plus en plus d'applications ne se contentent plus d'images au sens traditionnel, mais requièrent des images volumiques, notamment dans le secteur médical. L'extension en dimensions supérieures des travaux sur les droites présente un intérêt pratique certain. En outre, elle permet de s'assurer de la bonne compréhension des objets et des propriétés mis en évidence dans le plan discret. En effet, le cas de la dimension 2 peut parfois être trompeur par sa simplicité, notamment la non-existence de la notion de trous. En particulier, il peut conduire à une interprétation erronée, ou tout du moins déformée, des concepts qui régissent la géométrie discrète. Dans ce chapitre, nous allons voir la généralisation la plus naturelle et la plus utile des droites discrètes arithmétiques, à savoir les hyperplans discrets arithmétiques. La plus naturelle parce qu'elle est simplement induite par le changement de dimension du vecteur normal ; et la plus utile parce qu'elle caractérise des objets permettant la représentation de volumes discrets en dimensions supérieures. Nous nous attarderons en particulier sur le cas rationnel, le seul représentable informatiquement de manière exacte, et sur le cas de la dimension 3, le plus utile pour les applications.

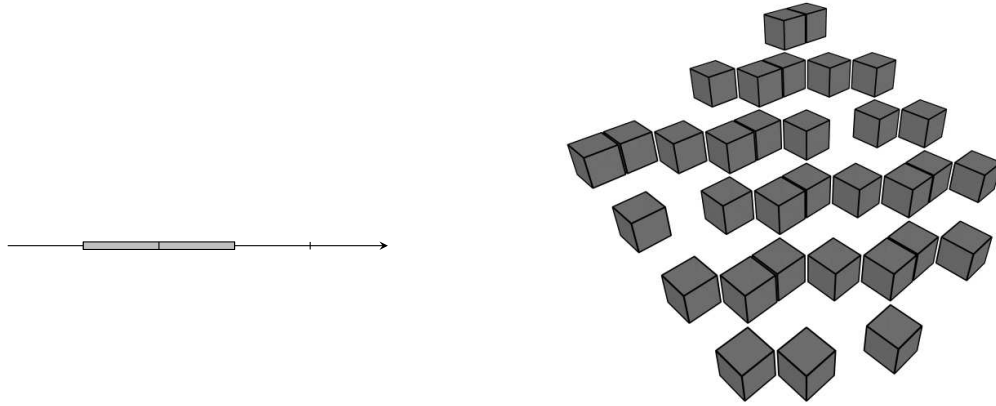
2.1 Définition et premières propriétés

La définition des droites discrètes arithmétiques s'étend naturellement en dimensions supérieures à celle des hyperplans discrets arithmétiques :

Définition 2.1 (Hyperplans discrets arithmétiques [5, 71]). Soit d , la dimension de l'espace. Soient aussi $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. L'*hyperplan arithmétique discret* $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, de *vecteur normal* \mathbf{n} , de *paramètre de translation* μ et d'*épaisseur arithmétique* ω est l'ensemble discret tel que :

$$\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; 0 \leq p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) < \omega \right\},$$

avec $p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) = \mu + \sum_{i=1}^d n_i v_i$, appelé le *reste* associé au voxel \mathbf{v} .



(a) Un point discret arithmétique

(b) Un plan discret arithmétique

FIG. 2.1 – Hyperplans discrets arithmétiques

Par abus de notation, nous ne mentionnons la dimension de l'espace que si cela s'avère nécessaire et nous nous référons plus simplement à $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ par $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Il est aussi intéressant de remarquer que l'étude de l'ensemble des hyperplans n'est pas nécessaire. En particulier, le changement de signe de certaines composantes du vecteur normal ou leur permutation correspond simplement à l'application de symétries ou de rotations. Au final, sans perte de généralité, l'étude des hyperplans discrets peut se restreindre à celle de ceux dont les composantes du vecteur normal \mathbf{n} sont uniquement des nombres positifs rangés par ordre croissant.

Nous connaissons déjà un représentant de cet ensemble générique, la droite discrète arithmétique, $\mathbb{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \mathbb{P}_2(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Deux autres, en particulier, nous serons utiles dans la suite de nos travaux, le point discret arithmétique $\mathbb{P}_1(n, \mu, \omega)$ et le plan discret arithmétique $\mathbb{P}_3(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, présentés Figure 2.1.

Un hyperplan discret arithmétique possède d'intéressantes propriétés de décomposition aussi bien en hyperplans plus fins qu'en hyperplans de dimension inférieure comme illustré Figure 2.2.

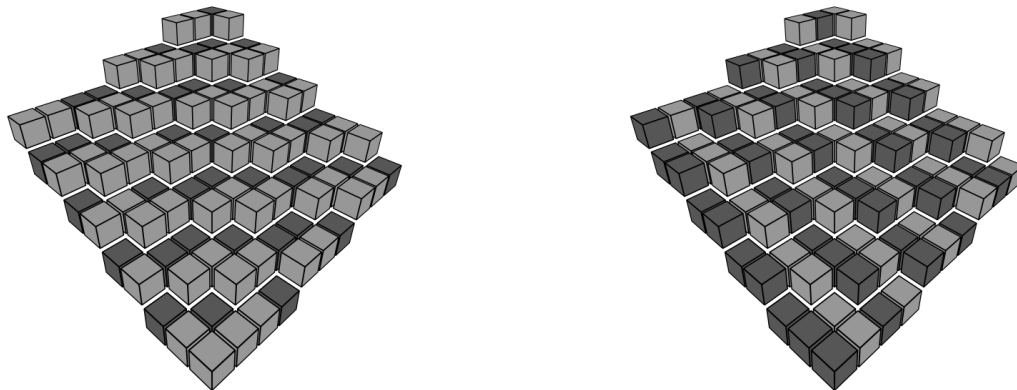
Proposition 2.1 (Décomposition en épaisseur [5]). *Soient ω, ω_1 et $\omega_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Alors, nous avons :*

$$\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega_1) \cup \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu - \omega_1, \omega_2).$$

Proposition 2.2 (Décomposition en dimension [5]). *Soit $d > 1$. Alors, nous avons :*

$$\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega) \cap \mathbb{P}_d(\mathbf{e}_d, k, 1) = \mathbb{P}_{(d-1)}(\mathbf{n}, \mu + k\mathbf{e}_d, \omega) \oplus k\mathbf{e}_d,$$

avec \oplus qui désigne la somme de Minkowski ($A \oplus B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$).



(a) Décomposition de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ en deux plans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega_1)$ et $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu - \omega_1, \omega_2)$ d'épaisseurs $\omega_1 = 12$ et $\omega_2 = 19$ (b) Une décomposition de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ en droites discrètes de vecteur directeur $(14, 31)$ et d'épaisseur $\omega = 31$

FIG. 2.2 – Décomposition du plan naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, avec $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$, $\mu = 0$ et $\omega = 31$, en épaisseur et en dimension

Comme dans le cas des droites discrètes, nous identifions la classe des hyperplans discrets rationnels.

Définition 2.2 (Hyperplans discrets arithmétiques rationnels [5]). S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, alors l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ et son vecteur normal \mathbf{n} sont dits *rationnels*.

Les hyperplans discrets arithmétiques rationnels présentent la propriété d'être équivalents à des hyperplans de vecteur normal $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\gcd\{n_1, \dots, n_d\} = 1$ ([5]), de paramètre de translation $\mu \in \mathbb{Z}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{N}^*$.

Lors de leur étude nous ne considérons donc que ces conditions plus restrictives.

2.2 Hyperplans discrets arithmétiques et propriétés topologiques

2.2.1 Hyperplans discrets naïfs et standard

Aussi naturellement que la définition de la droite discrète arithmétique s'étend aux hyperplans discrets arithmétiques, nous pouvons étendre les représentations *naïve* et *standard* comme illustré Figure 2.3.

Définition 2.3 (Hyperplans naïfs et standard [71]). Soit l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Par analogie avec le cas des droites, il est dit *naïf* si $\omega = \|\mathbf{n}\|_\infty$ et *standard* si $\omega = \|\mathbf{n}\|_1$.

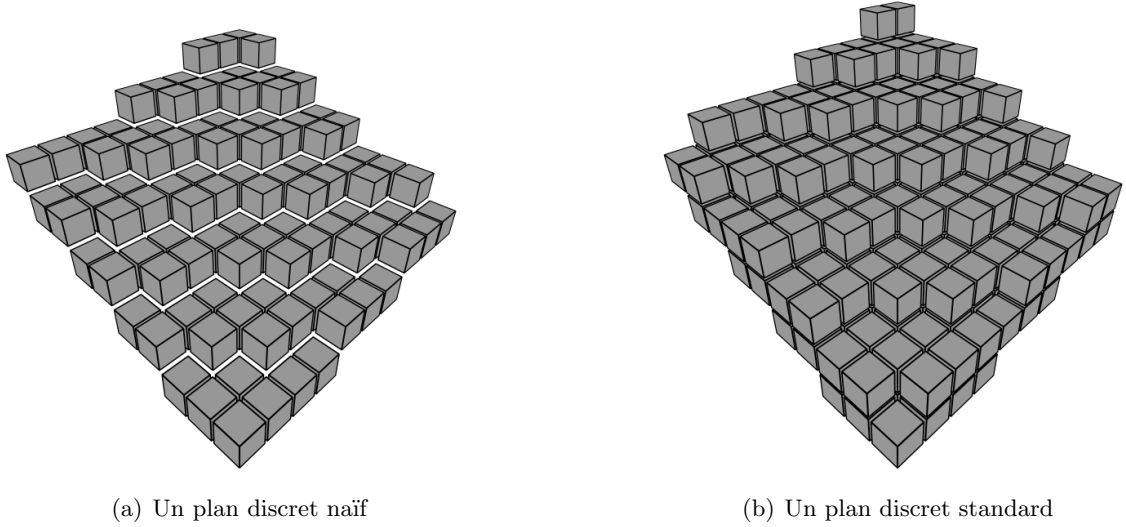


FIG. 2.3 – Plans discrets particuliers

Néanmoins, la définition originale des représentations naïves et standard qui caractérisait les droites connexes les plus fines n'est pas valable pour les hyperplans. Ce n'est pas vraiment une surprise puisque la propriété topologique principale que nous attendons d'un hyperplan n'est pas d'être connexe, mais plutôt de séparer l'espace en deux composantes connexes distinctes. Sa connexité n'est alors qu'une simple conséquence. Les notions d'ensembles discrets séparants et d'ensembles discrets minimaux expriment ces propriétés.

Définition 2.4 (Espaces discrets séparants). Un ensemble discret \mathbb{F} est dit *0-séparant* (respectivement *$(d-1)$ -séparant*) dans \mathbb{E} si et seulement si $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$ possède exactement deux composantes 0-connexes (respectivement $(d-1)$ -connexes) distinctes.

Définition 2.5 (Espaces discrets minimaux). Un ensemble discret \mathbb{F} est dit *0-minimal* (respectivement *$(d-1)$ -minimal*) dans \mathbb{E} si et seulement si il est 0-séparant (respectivement $(d-1)$ -séparant) dans \mathbb{E} et que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{F}$, $\mathbb{F} \setminus \{\mathbf{v}\}$ ne l'est pas.

Définition 2.6 (Points simples). Soit un ensemble discret \mathbb{F} k -séparant dans \mathbb{E} . Soit un voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{F}$. Si $\mathbb{F} \setminus \{\mathbf{v}\}$ est k -séparant dans \mathbb{E} , alors \mathbf{v} est qualifié de *point k -simple*.

La notion usuelle de 1-connexité dans le plan discret devient dans un espace de dimension d la notion de $(d-1)$ -connexité. Ceci est cohérent, mais laisse à penser que nous pouvons définir toute une série de nouveaux voisinages discrets quand la dimension augmente. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin. Dans l'immédiat, ces nouvelles propriétés nous permettent de caractériser les hyperplans discrets naïfs et standard.

Théorème 2.3 ([5]). *L'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est :*

- $(d - 1)$ -séparant dans \mathbb{Z}^d si et seulement si $\omega \geq \|\mathbf{n}\|_\infty$,
- 0-séparant dans \mathbb{Z}^d si et seulement si $\omega \geq \|\mathbf{n}\|_1$.

Théorème 2.4 ([5]). *Un hyperplan discret naïf (respectivement standard) est $(d - 1)$ -minimal (respectivement 0-minimal).*

2.2.2 Relations d'adjacence supplémentaires

Nous venons de définir les hyperplans discrets 0-minimaux et $(d - 1)$ -minimaux. Pourquoi ne pourrions-nous pas en faire de même pour tout entier k compris entre 0 et $d - 1$? Comme nous l'avons précisé au chapitre précédent dans la notation de k -adjacence, le k indique le nombre de coordonnées communes requises entre deux éléments 0-adjacents pour être k -adjacents. De manière naturelle, il y a donc autant de relations d'adjacence que de dimensions dans l'espace.

Définition 2.7 (Relations d'adjacence). Soient d , la dimension de l'espace et $k \in \{0, \dots, d - 1\}$. Deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont dits k -adjacents s'ils sont 0-adjacents ($\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_\infty = 1$) et possèdent au moins k coordonnées en commun.

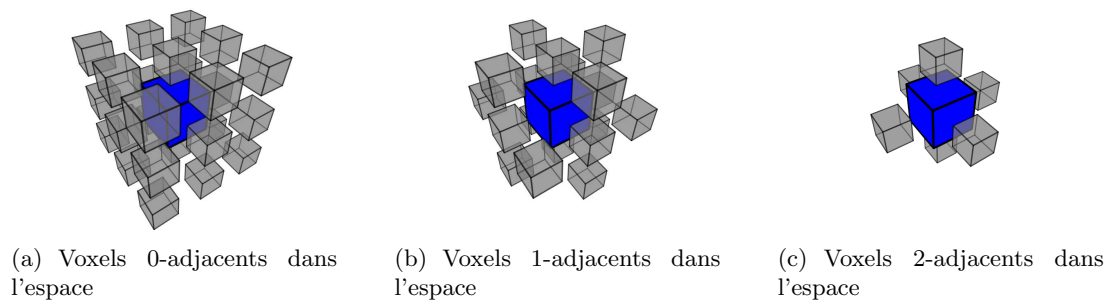


FIG. 2.4 – Les différents voisinages de l'espace discret tridimensionnel

Dans [33], nous avons introduit des normes, les normes d'adjacence, pour pouvoir mettre en relation les adjacences discrètes avec des voisinages dans un espace métrique défini sur \mathbb{R}^d , comme pour le cas de la dimension 2. Nous les redéfinissons ici.

Théorème 2.5. *Soient d la dimension de l'espace et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < d$. Alors, la fonction $[\cdot]_k$ définie par :*

$$[\cdot]_k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \max \left\{ \|\mathbf{x}\|_\infty, \frac{\|\mathbf{x}\|_1}{d - k} \right\},$$

est une norme.

Démonstration. Puisque $[\cdot]_k$ est définie comme le maximum de deux fonctions qui sont elles-mêmes des normes, la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont satisfaites. \square

Cette famille de normes permet de formaliser les relations de k -adjacence.

Théorème 2.6. Soient d la dimension de l'espace et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < d$. Deux voxels \mathbf{v}_1 et $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{Z}^d$ sont k -adjacents si et seulement si $[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2]_k = 1$.

Démonstration. Si \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont k -adjacents alors ils sont forcément 0-adjacents. Cela signifie que $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_\infty = 1$. Dans le même temps, pour être k -adjacents, les deux voxels doivent partager au moins k coordonnées, ce qui signifie que $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_1 \leq d - k$, ou encore que $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_1 / (d - k) \leq 1$. Donc deux voxels k -adjacents satisfont bien $[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2]_k = 1$.

Réciproquement, considérons deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 tels que $[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2]_k = 1$. Ils sont forcément 0-adjacents. De plus, $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_1 / (d - k) \leq 1$, donc les deux voxels partagent au moins k coordonnées. \square

Définition 2.8 (Normes de k -adjacence). Soient d la dimension de l'espace et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < d$. Nous nommons $[\cdot]_k$, *norme de k -adjacence*.

Dans [50], R. Klette introduit des semi-normes pour définir différentes métriques sur les espaces discrets d -dimensionnels. Elles s'avèrent très proches de nos normes de k -adjacence. En fait, le second terme, $\|\mathbf{x}\|_1 / (d - k)$, est remplacé par l'entier juste supérieur pour que l'application de la semi-norme à un vecteur entier conduise à une valeur entière. C'est ce seuillage qui les empêche d'être des normes dans le cas général.

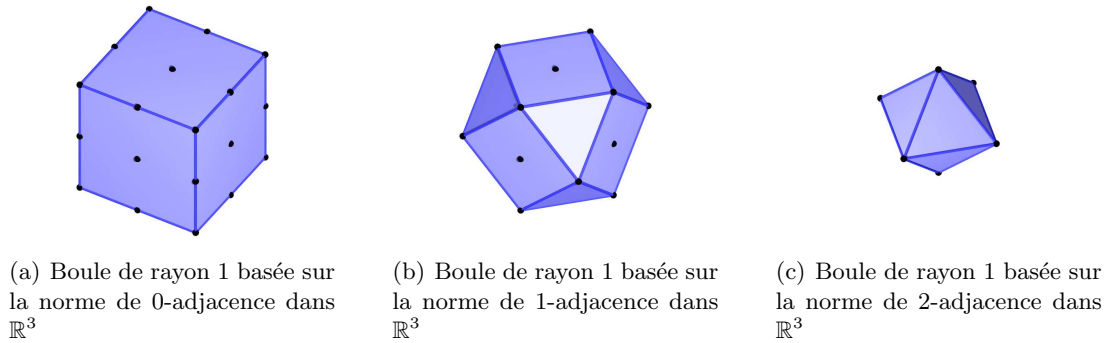


FIG. 2.5 – Normes d'adjacence et correspondance avec des voisinages discrets

La Figure 2.5 présente les boules de rayon 1 et basées sur les normes de k -adjacence dans l'espace discret tridimensionnel. Elles sont à mettre en relation avec les voisinages discrets illustrés Figure 2.4. Évidemment, les normes de 0-adjacence et de $(d - 1)$ -adjacence sont équivalentes aux normes discrètes usuelles : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $[\mathbf{x}]_0 = \|\mathbf{x}\|_\infty$ et $[\mathbf{x}]_{(d-1)} = \|\mathbf{x}\|_1$.

Ainsi, comme dans le cas du plan discret, nous pouvons considérer un voisinage discret comme la restriction aux points discrets d'un voisinage (la boule fermée de rayon 1) dans un espace métrique.

2.2.3 Hyperplans discrets k -minimaux

Les hyperplans discrets naïfs et standard sont donc respectivement $(d - 1)$ -minimaux et 0-minimaux dans \mathbb{Z}^d . Un résultat de E. Andres, R. Acharya et C. Sibata nous permet de caractériser de la même manière la k -minimalité et la k -séparabilité des hyperplans discrets arithmétiques par leur épaisseur [5]. Nous allons d'abord introduire une notation dans le but de simplifier ensuite la formulation du résultat.

Soient d la dimension de l'espace et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < d$. D. Jamet a défini des normes pertinentes pour exprimer la k -minimalité [43].

Théorème 2.7. *La fonction $]\cdot[_k$ définie par :*

$$\begin{aligned}]\cdot[_k : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \sum_{i=k+1}^d |x_{\sigma(i)}|, \end{aligned}$$

avec σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$, $|x_{\sigma(i)}| \leq |x_{\sigma(i+1)}|$, est une norme.

Démonstration. La séparation, l'homogénéité et la satisfaction de l'inégalité triangulaire sont des propriétés évidentes de ces fonctions. \square

Définition 2.9 (Normes de k -minimalité). Soient d la dimension de l'espace et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < d$. Nous nommons $]\cdot[_k$ la *norme de k -minimalité*.

Il est à noter que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $]\mathbf{x}[_{(d-1)} = \|\mathbf{x}\|_1$ ($=]\mathbf{x}[_0$) et $]\mathbf{x}[_0 = \|\mathbf{x}\|_\infty$ ($=]\mathbf{x}[_{(d-1)}$).

Nous caractérisons maintenant facilement les hyperplans discrets arithmétiques k -séparants ou k -minimaux, grâce à leur épaisseur, .

Théorème 2.8 (Hyperplans discrets séparants [5]). *L'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est k -séparant si et seulement si $\omega \geq]\mathbf{n}[_k$.*

Théorème 2.9 (Hyperplans discrets minimaux [5]). *L'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu,]\mathbf{n}[_k)$ est k -minimal.*

La Figure 2.6 présente un plan discret 1-minimal $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, c'est-à-dire tel que $\omega =]\mathbf{n}[_1$, sachant que les plans discrets présentés Figure 2.3 sont respectivement 2-minimal et 0-minimal.

2.3 Hyperplans discrets arithmétiques et périodicité

Une caractéristique importante des hyperplans discrets arithmétiques est leur périodicité. Elle réduit l'étude d'un hyperplan à des classes d'équivalence relativement aux périodes. Nous allons

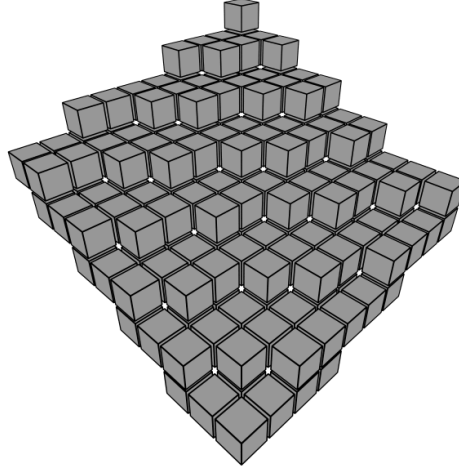


FIG. 2.6 – Plan discret 1-minimal

voir dans cette section que les vecteurs de période d'un hyperplan discret arithmétique forment un réseau euclidien dont le rang dépend du vecteur normal, et, surtout, de son caractère rationnel ou irrationnel. En particulier, les hyperplans discrets rationnels peuvent être ramenés à un nombre fini de classes d'équivalence.

Définition 2.10 (Vecteur de période). Le vecteur $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ est appelé *vecteur de période* de l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ si et seulement si :

$$\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) \oplus \mathbf{t},$$

\oplus étant la somme de Minkowski.

Remarque 2.1. Nous pouvons aussi considérer la périodicité en tant que reste. $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ est un vecteur de période de l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ si et seulement si pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$, $p_{(\mathbf{n}, \mu)}(\mathbf{v}) = p_{(\mathbf{n}, \mu)}(\mathbf{v} + \mathbf{t})$.

La périodicité d'un hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ se ramène à celle de l'ensemble discret $\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^d$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) &= \left(\bigcup_{\eta \in [-\mu, \omega - \mu[} \mathcal{P}(\mathbf{n}, \eta) \right) \cap \mathbb{Z}^d, \\ \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) &= \bigcup_{\eta \in [-\mu, \omega - \mu[} \left(\mathcal{P}(\mathbf{n}, \eta) \cap \mathbb{Z}^d \right). \end{aligned}$$

Parmi les hyperplans euclidiens, $\mathcal{P}(\mathbf{n}, \eta)$, bon nombre ne contiennent pas de points entiers. En fait, c'est seulement si $\eta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ avec $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ que $\mathcal{P}(\mathbf{n}, \eta) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$. Soit \mathbb{V} l'ensemble de ces

vecteurs entiers, nous avons alors :

$$\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left((\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^d) \oplus \mathbf{v} \right).$$

Un hyperplan discret arithmétique est une union de translatsés des voxels appartenant à $\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0)$. Ainsi, sa périodicité est la même que celle des points entiers de $\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0)$. Soit $\Lambda(\mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^d$. $\Lambda(\mathbf{n})$ un réseau euclidien de rang au plus $(d - 1)$ puisque c'est un sous-groupe discret de l'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0)$, lui-même de dimension $(d - 1)$.

Proposition 2.10 (Réseaux de périodes). *Les vecteurs de période d'un hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ forment un réseau euclidien que nous nommons son réseau de périodes $\Lambda(\mathbf{n})$, tel que $\Lambda(\mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^d$.*

Démonstration. Comme mentionné, un hyperplan discret est une union de translatsés de $\mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^d$. Il possède donc la même périodicité que ce réseau. \square

Désignons par $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbf{n})$, la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}n_1 + \dots + \mathbb{Q}n_d$ engendré par les composantes de \mathbf{n} . Le rang du réseau $\Lambda(\mathbf{n})$ est relié à $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbf{n})$.

Théorème 2.11. *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$. Le rang du réseau de périodes $\Lambda(\mathbf{n})$ de l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est $d - \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbf{n})$.*

Adaptée de la preuve de la Proposition 23 dans [10]. Ce résultat peut être facilement déduit de l'observation suivante : pour un vecteur non nul $(v_1, \dots, v_{(d-1)}) \in \mathbb{Z}^{(d-1)}$, $\frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i v_i \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe un entier non nul k tel que $\mathbf{t} = (kv_1, \dots, kv_{(d-1)}, t_d)$, avec $t_d = \frac{k}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i v_i$, est un vecteur de période de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Prouvons cet énoncé. Si $\frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i v_i \in \mathbb{Q}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $t_d = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i (kv_i)$ est un entier. $\mathbf{t} = (kv_1, \dots, kv_{(d-1)}, t_d)$ est donc tel que $p_{(\mathbf{n}, \mu)}(\mathbf{t}) = 0$. Par conséquent, \mathbf{t} appartient à Λ et est un vecteur de période de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Dans le cas contraire, si $\frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i v_i \notin \mathbb{Q}$, la densité de $(\frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{d-1} n_i (kv_i))_{k \in \mathbb{Z}}$ nous assure qu'il n'existe pas $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ différent de l'élément nul tel que $p_{(\mathbf{n}, \mu)}(\mathbf{t}) = 0$. \square

La valeur de $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbf{n})$ appartient à $\{1, \dots, d\}$, le rang de $\Lambda(\mathbf{n})$ varie de 0 à $(d - 1)$. La Figure 2.7 illustre les trois périodicités possibles pour les plans.

2.4 Fonctionnalité des hyperplans discrets arithmétiques

La périodicité est une propriété importante puisqu'elle réduit l'espace d'étude des hyperplans discrets arithmétiques. Cet espace peut aussi être réduit d'une autre manière, en considérant des réseaux sous-jacents et en les reliant.

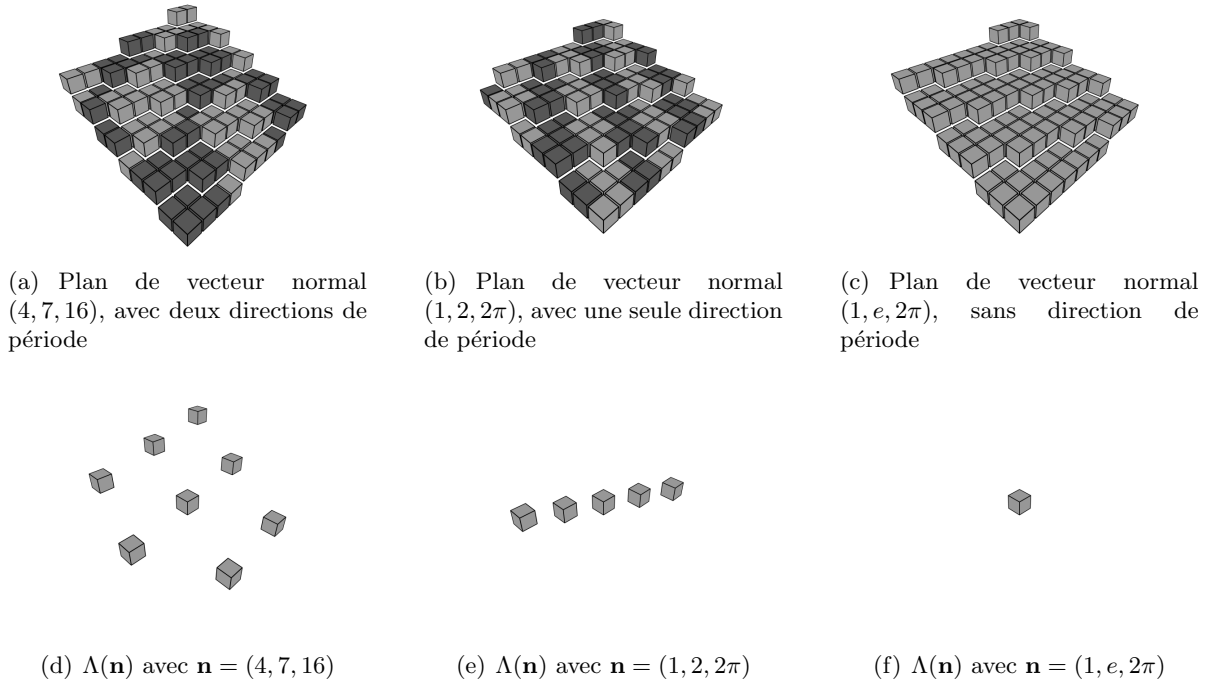


FIG. 2.7 – Exemples de plans discrets arithmétiques $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ avec différents rangs pour leurs réseaux de périodes $\Lambda(\mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{n}, 0) \cap \mathbb{Z}^3$

2.4.1 Définitions

Nous avons vu que les périodes d'un hyperplan discret arithmétique forment un réseau. Mais ce n'est pas le seul réseau sous-jacent à un hyperplan. Notamment, d'autres réseaux, qualifiés de fonctionnels ont été mis en évidence.

Définition 2.11 (Hyperplans discrets arithmétiques et vecteurs fonctionnels [10]). Soit $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ un hyperplan discret arithmétique. S'il existe un vecteur $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\gcd\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\} = 1$ et tel que la fonction $\pi_\alpha : \mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega) \rightarrow \Lambda_\alpha$ soit bijective, alors nous dirons que l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est *fonctionnel*. Nous dirons aussi que le vecteur $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ est un *vecteur fonctionnel* et que le réseau Λ_α est le *réseau fonctionnel* de $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$.

Théorème 2.12 (Fonctionnalité des hyperplans discrets arithmétiques rationnels [9]). *Tout hyperplan discret arithmétique rationnel est fonctionnel.*

Théorème 2.13 (Fonctionnalité des hyperplans discrets arithmétiques k -minimaux [10]). Soit $n \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Soit aussi $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu,]\mathbf{n}[_k)$, un hyperplan discret arithmétique k -minimal. Alors, $\alpha = \sum_{i=d-k+1}^d \mathbf{e}_i$ est un vecteur fonctionnel de $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu,]\mathbf{n}[_k)$.

Ces résultats signifient simplement que, étant donné un hyperplan discret fonctionnel dans un

espace de dimension d , il est possible de l'étudier au travers de son réseau fonctionnel qui est de dimension $(d - 1)$. La Figure 2.8 illustre la fonctionnalité pour le cas des droites discrètes naïves et standard.

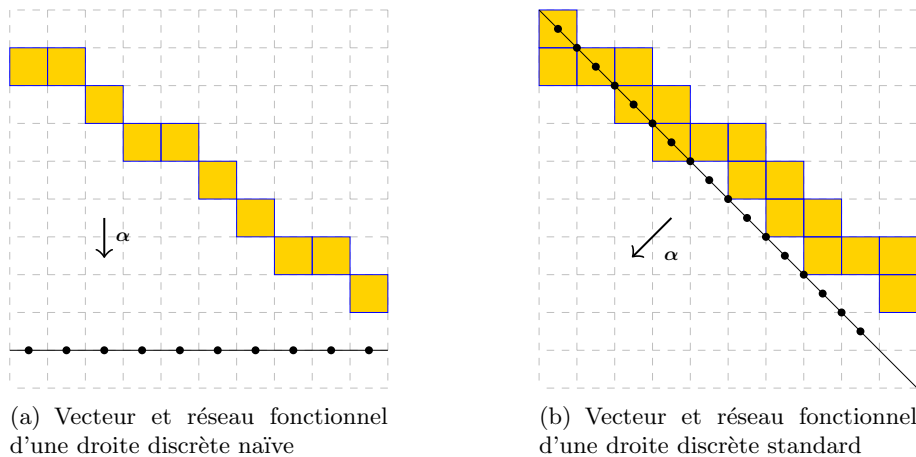


FIG. 2.8 – Fonctionnalité des droites discrètes arithmétiques

En fait, les cas des hyperplans discrets naïfs et standard avaient déjà été traités respectivement par J.-P. Reveillès [71] et J. Françon [35]. Les dernières sections de ce chapitre peuvent être vues comme des applications directes de la fonctionnalité aux plans discrets arithmétiques.

2.5 Codages symboliques des plans discrets naïfs

La fonctionnalité permet d'établir une bijection entre un hyperplan discret arithmétique dans un espace à d dimensions, $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, et un réseau euclidien, $\Lambda(\mathbf{n})$, de dimension $(d - 1)$. Cela est particulièrement intéressant dans le cas des hyperplans discrets naïfs puisque le réseau $\Lambda(\mathbf{n})$ est alors $\mathbb{Z}^{(d-1)}$. La fonctionnalité permet donc de passer d'une représentation d'un plan discret naïf en 3 dimensions à une représentation en 2 dimensions.

Définition 2.12 (Projection fonctionnelle des plans discrets naïfs). Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $0 \leq n_1, n_2 \leq n_3$. Soit aussi le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$. Nous définissons sa *projection fonctionnelle naïve* $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$ telle que :

$$\Pi(\mathbf{n}, \mu) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; \exists \mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3) \text{ et } \mathbf{p} = (v_1, v_2) \}.$$

Définie de cette manière, cette projection ne présente que peu d'utilité puisque, à partir de n'importe quel plan discret naïf, nous obtiendrons l'ensemble des pixels de \mathbb{Z}^2 . En fait, nous avons retiré l'information concernant la hauteur des voxels du plan initial. Des représentations

plus pertinentes consistent à enrichir la projection avec cette information, la plus évidente d'entre-elles étant simplement d'associer à chaque pixel la hauteur du voxel correspondant.

2.5.1 Codage par hauteurs

Dans sa thèse de doctorat [26], I. Debled-Renesson propose une représentation 2-dimensionnelle très simple d'un plan discret naïf, en associant à chacun des pixels de $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$, la hauteur du voxel correspondant dans le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$.

Définition 2.13 (Représentations par lignes de niveau [26]). Soit $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ un plan discret naïf. Sa *représentation par lignes de niveau* est la suite bi-dimensionnelle $h_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p})$, indexée par \mathbb{Z}^2 et d'alphabet infini \mathbb{Z} , définie par :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, h_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p}) = - \left\lfloor \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \mu}{n_3} \right\rfloor.$$

Cette représentation présente l'inconvénient d'être définie sur un alphabet infini, mais il est facile d'éliminer ce défaut en considérant la représentation par parité des hauteurs proposé par L. Vuillon [82] :

Définition 2.14 (Représentations par parité des hauteurs [82]). Soit $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ un plan discret naïf. Sa *représentation par parité des hauteurs* est la suite bi-dimensionnelle $\tilde{h}_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p})$, indexée par \mathbb{Z}^2 et d'alphabet $\{0, 1\}$, définie par :

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2, \tilde{h}_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p}) = h_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p}) \pmod{2}.$$

Cette représentation nous fait perdre une information de localisation, elle ne prend en effet que partiellement en compte le paramètre de translation. Néanmoins, elle reste tout à fait pertinente pour l'étude des configurations locales des plans arithmétiques naïfs.

2.5.2 Représentation par restes

En fait, l'information sur la hauteur des voxels n'est pas la plus complète. Elle ne permet pas, par exemple, de connaître directement les périodes du plan considéré. Un voxel \mathbf{v} est caractérisé par son reste $p_{(\mathbf{n}, \mu)}(\mathbf{v})$. La localisation de son projeté dans $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$, couplée à cette valeur, nous donne toutes les informations nécessaires, et, en particulier, nous pouvons facilement retrouver la hauteur.

Définition 2.15 (Tableaux de restes [26]). Soit $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ un plan discret naïf. Son *tableau de restes* est la suite bi-dimensionnelle $r_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p})$ indexée par \mathbb{Z}^2 et d'alphabet infini \mathbb{Z} définie par :

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2, r_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{p}) = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \mu \pmod{n_3}.$$

25	3	12	21	30	8	17	26	4	13	22
11	20	29	7	16	25	3	12	21	30	8
28	6	15	24	2	11	20	29	7	16	25
14	23	1	10	19	28	6	15	24	2	11
0	9	18	27	5	14	23	1	10	19	28
17	26	4	13	22	0	9	18	27	5	14
3	12	21	30	8	17	26	4	13	22	0
20	29	7	16	25	3	12	21	30	8	17
6	15	24	2	11	20	29	7	16	25	3
23	1	10	19	28	6	15	24	2	11	20
9	18	27	5	14	23	1	10	19	28	6

(a) $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$ avec $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$ et $\mu = 0$

	3				8			4		
11			7			3				8
	6			2	11			7		
		1	10			6			2	11
0	9			5			1	10		
		4			0	9			5	
3				8			4			0
		7			3				8	
6			2	11			7			3
	1	10			6			2	11	
9			5			1	10			6

(b) $\Pi(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ avec $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$, $\mu = 0$ et $\omega = 12$

FIG. 2.9 – Projection fonctionnelle naïve et projection quasi-fonctionnelle

Les lignes de niveau de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ s'obtiennent à partir du tableau de restes en isolant les séquences croissantes de la suite $r_{\mathbf{n}, \mu}$ suivant \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 .

Par la suite, quand nous parlerons de $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$, nous ne considérerons pas seulement la projection, mais aussi son enrichissement par les informations de restes et de hauteurs. Le résultat est donc conforme à la Figure 2.9(a).

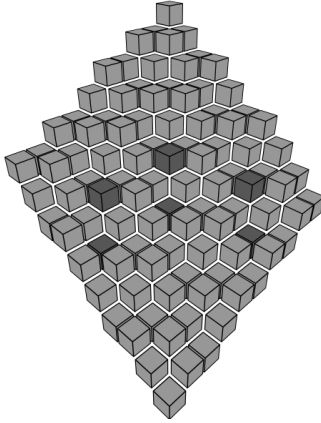
Sur le même principe, nous pouvons construire des projections que nous qualifions de quasi-fonctionnelles et qui nous permettent d'étudier certaines propriétés des plans d'épaisseurs quelconques. Nous utilisons de telles représentations dans la section et le chapitre suivants. La Figure 2.9(b) présente un exemple d'un tel objet.

Définition 2.16 (Projection quasi-fonctionnelle des plans discrets arithmétiques). Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $n_1, n_2 \leq n_3$. Soit aussi le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Nous définissons sa *projection quasi-fonctionnelle* $\Pi(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ telle que :

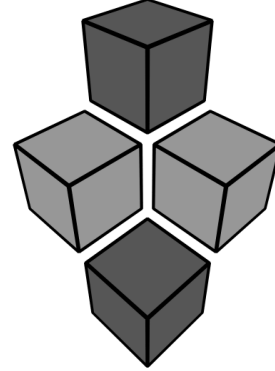
$$\Pi(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; \exists \mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3) \text{ and } \mathbf{p} = (v_1, v_2) \}.$$

2.6 Plans discrets gracieux

Il existe des représentations en 2-dimensions des plans discrets. Pour autant les problèmes ne se réduisent pas forcément aussi simplement. Par exemple un chemin discret 0-connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \|\mathbf{n}\|_\infty)$ est connexe dans $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$, mais la réciproque n'est pas vraie. Cela est dû à la présence de configurations particulières dans les plans discrets naïfs que nous illustrons Figure 2.10.



(a) Le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ avec $\mathbf{n} = (4, 5, 7)$ contient des sauts de hauteur



(b) La configuration correspondant à un saut de hauteur : les voxels foncés sont 0-connectés mais pas 0-adjacents bien qu'ils partagent deux coordonnées

FIG. 2.10 – Sauts de hauteur dans les plans discrets naïfs

Définition 2.17 (Saut de hauteur). Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $n_1, n_2 \leq n_3$. Soit aussi le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$. Un *saut de hauteur* est une configuration telle que deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ ne soient pas 0-adjacents bien que leur images dans $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$, \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 le sont.

V. Brimkov et R. Barneva déterminent les conditions propices à l'apparition de sauts de hauteur.

Proposition 2.14 (Plans discrets naïfs et sauts de hauteur [17]). Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^3$. Le plan discret naïf $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, n_3)$ contient des sauts de hauteur si et seulement si $n_1 + n_2 > n_3$.

Finalement, la définition des plans gracieux assure une épaisseur suffisante pour qu'un chemin connexe dans la projection quasi-fonctionnelle soit toujours un chemin dans le plan discret gracieux correspondant. Dans leur travaux, V. Brimkov et R. Barneva ne s'intéressent qu'au cas d'un segment, mais nous l'étendons ici, sans apports théoriques supplémentaires, à un chemin connexe quelconque.

Définition 2.18 (Plans discrets gracieux [17]). Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $n_1, n_2 \leq n_3$. Le plan discret $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est dit *gracieux* si $\omega = \max\{n_1 + n_2, n_3\}$.

Théorème 2.15 (Connexité équivalente entre plans et projections [17]). Soit γ un chemin discret 0-connexe dans $\Pi(\mathbf{n}, \mu)$. Alors l'ensemble des voxels \mathbf{v} du plan gracieux $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, qui se projettent sur les pixels de γ , forment un chemin 0-connexe.

Les plans discrets gracieux sont plus épais que les naïfs, mais plus fins que les standards. Ils sont les plus fins qui possèdent cette propriété d'équivalence entre leur connexité et celle de leurs projections quasi-fonctionnelles.

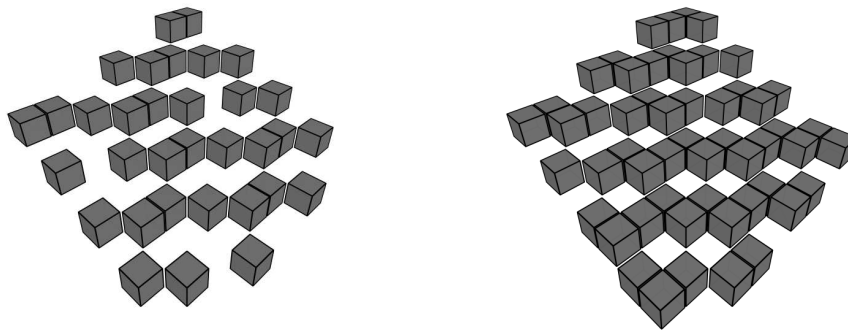
2.7 Conclusion

Après avoir introduit les normes de k -adjacence et de k -minimalité, nous avons passé en revue les différentes représentations des hyperplans discrets, ainsi que quelques propriétés fondamentales. Il ressort que la caractérisation classique de la connexité des droites discrètes par leur épaisseur n'est plus valide dans le cas des hyperplans. En fait, une droite discrète connexe est aussi un ensemble séparant et c'est plutôt de ce caractère que les hyperplans héritent. Finalement, la connexité des hyperplans discrets reste mal maîtrisée. Dans le chapitre suivant, nous allons donc étudier cette propriété et essayer de combler ce manque.

Chapitre 3

Connexité des hyperplans discrets

La caractérisation des droites discrètes arithmétiques en tant qu'ensembles séparants se propage simplement en dimensions supérieures aux hyperplans discrets arithmétiques. Il n'en va pas de même pour la notion de connexité. En effet, il est très facile d'exhiber des hyperplans discrets arithmétiques $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ 0-connexes, ou même 1-connexes, plus fins que le naïf, chose impossible dans le cas des droites. La Figure 3.1 illustre ces affirmations. De la même manière, un hyperplan discret arithmétique $(d - 1)$ -connexe $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ peut avoir une épaisseur plus petite que l'hyperplan standard $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \|\mathbf{n}\|_1)$ correspondant. En fait, il existe un résultat partiel concernant la connexité des hyperplans discrets k -séparants.



(a) Un plan discret arithmétique 0-connexe
($\omega = 11$)

(b) Un plan discret arithmétique 1-connexe
($\omega = 21$)

FIG. 3.1 – Plans discrets arithmétiques de vecteur normal $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$ plus fins que le naïf

Théorème 3.1 (Résultat partiel sur la connexité [5]). *Soit $k \in \{1, \dots, d - 1\}$. Si $\omega \geq \lceil \mathbf{n} \rceil_{(d-k)}$, alors l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est k -connexe.*

La connexité est une propriété topologique fondamentale des objets discrets. Elle joue un rôle

important autant dans leur caractérisation que dans la compréhension que nous pouvons en avoir. À côté de cela, les plans discrets sont les primitives de base pour la géométrie dans l'espace et en particulier la modélisation volumique. Améliorer la connaissance sur la connexité des plans, et plus généralement des hyperplans, présente donc un intérêt autant théorique que pratique. C'est ce point que nous allons développer dans ce chapitre. Il a évidemment déjà été traité dans la littérature. Y. Gérard [38] d'un côté, R. Barneva et V. Brimkov [18, 19] de l'autre, ont apporté des réponses plus complètes que celles fournies par le Théorème 3.1. Nous commencerons donc par revenir sur ces travaux avant de présenter notre étude sur le sujet. Notre apport principal est la mise en évidence de réductions arithmétiques, sur le vecteur normal de l'hyperplan discret arithmétique considéré, qui préservent la connexité. Elles permettent en particulier le développement d'algorithmes élémentaires et efficaces qui déterminent la connexité d'un hyperplan discret arithmétique [45, 44].

3.1 État de l'art

La connexité des hyperplans discrets arithmétiques n'est pas un problème neuf. Il a déjà été traité en partie selon deux approches : la décision sur la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel donné et l'étude de la 0-connexité des plans discrets arithmétiques rationnels.

3.1.1 Décision sur la connexité d'un hyperplan discret

Y. Gérard s'est intéressé à répondre à la première question, à savoir, celle de la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel donné [38]. Son approche se base sur des concepts novateurs et notamment la notion de graphes périodiques. Il fournit les bases pour un algorithme qui déterminerait la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel en réduisant son graphe de connexité, qui peut être infini, à un autre fini, en le quotientant par un sous-groupe du réseau de ses périodes.

Nous n'allons pas nous étendre ici sur la notion et les propriétés des graphes périodiques, mais nous allons transcrire ces résultats directement au niveau des hyperplans discrets arithmétiques rationnels. La principale propriété de ce type d'objets est l'existence d'un réseau de périodes (voir Proposition 2.10), et c'est sur celui-ci que vont reposer tous les résultats qui suivent.

Sans perte de généralité, nous considérons dans la suite que le paramètre de translation μ est nul. En effet, dans le cas d'hyperplans rationnels, quel que soit μ , l'hyperplan est simplement une translation de celui dont ce paramètre est nul. Un premier résultat définit les composantes infinies dans les hyperplans discrets arithmétiques rationnels.

Lemme 3.2. *Soient $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ un hyperplan discret arithmétique rationnel. Les voxels \mathbf{v}_1 et $\mathbf{v}_1 + \mathbf{t}$, avec $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ ($\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$) un vecteur de période de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ appartiennent à la même composante k -connexe de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ si et seulement si elle est infinie.*

25	3	12	21	30	8	17	26	4	13	22
11	20	29	7	16	25	3	12	21	30	8
28	6	15	24	2	11	20	29	7	16	25
14	23	1	10	19	28	6	15	24	2	11
0	9	18	27	5	14	23	1	10	19	28
17	26	4	13	22	0	9	18	27	5	14
3	12	21	30	8	17	26	4	13	22	0
20	29	7	16	25	3	12	21	30	8	17
6	15	24	2	11	20	29	7	16	25	3
23	1	10	19	28	6	15	24	2	11	20
9	18	27	5	14	23	1	10	19	28	6

(a) Un chemin 0-connexe entre deux voxels de même reste définit une composante 0-connexe infinie dans un plan discret arithmétique rationnel

25	3	12	21	30	8	17	26	4	13	22
11	20	29	7	16	25	3	12	21	30	8
28	6	15	24	2	11	20	29	7	16	25
14	23	1	10	19	28	6	15	24	2	11
0	9	18	27	5	14	23	1	10	19	28
17	26	4	13	22	0	9	18	27	5	14
3	12	21	30	8	17	26	4	13	22	0
20	29	7	16	25	3	12	21	30	8	17
6	15	24	2	11	20	29	7	16	25	3
23	1	10	19	28	6	15	24	2	11	20
9	18	27	5	14	23	1	10	19	28	6

(b) Représentation par projection de $\mathbb{P}_{/\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega)$ avec $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$, $\omega = 31$ et $\mathbf{t} = (5, -1, -1)$

FIG. 3.2 – Illustrations du Lemme 3.2 et de la Définition 3.1

Démonstration. Si un chemin k -connexe relie \mathbf{v}_1 et $\mathbf{v}_1 + \mathbf{t}$, alors, puisque \mathbf{t} est un vecteur de période, nous pouvons construire un chemin similaire entre $\mathbf{v}_1 + q\mathbf{t}$ et $\mathbf{v}_1 + (q+1)\mathbf{t}$, pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Par induction, la composante est donc bien infinie. Si nous avons une composante infinie, puisque le nombre de restes dans un hyperplan discret arithmétique rationnel est fini, alors elle contient au moins deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 de même reste $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_1) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_2)$. Le vecteur $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ est alors un vecteur de période. \square

Ce lemme nous donne une information importante permettant de réduire l'étude de la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel à celle d'une de ses sous-parties. Nous commençons par définir ce sous-ensemble.

Définition 3.1 (Quotient d'un hyperplan discret par un vecteur entier). Soient $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ ($\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$) et $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ un hyperplan discret arithmétique rationnel. Alors, nous définissons $\mathbb{P}_{/\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega)$, le quotient de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ par \mathbf{t} , tel que :

$$\mathbb{P}_{/\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega) = \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega) / \mathbb{Z}\mathbf{t}.$$

La décision sur la k -connexité d'un hyperplan se réduit à l'étude de ce sous-ensemble.

Lemme 3.3 (Réduction de l'espace de recherche). Soit \mathbf{t} un vecteur de période non nul de l'hyperplan discret arithmétique rationnel $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$. Alors la k -connexité de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ se ramène à la k -connexité de $\mathbb{P}_{/\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega)$ en considérant que deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_L de $\mathbb{P}_{/\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega)$ sont k -connectés s'il existe des voxels de leurs classes d'équivalence respectives k -connectés dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$.

En d'autres termes nous allons nous intéresser à la connexité entre les classes d'équivalence induites par le quotient. Si deux d'entre elles étaient connectées, elles le resteront.

Les vecteurs de période d'un hyperplan discret arithmétique rationnel $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ forment un réseau euclidien de rang au plus $d - 1$. Le fait de trouver un ensemble \mathbf{T} de $d - 1$ vecteurs de période indépendants dans un tel hyperplan ne nous assure pas que nous avons une base du réseau. Par contre, il nous assure que le cardinal de $\mathbb{P}/_{\mathbf{T}}(\mathbf{n}, \omega) = \bigcap_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \mathbb{P}/_{\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega)$ est fini, ce qui, en complément du Lemme 3.3, nous donne un moyen de décider si l'hyperplan discret initial est k -connexe.

D'un point de vue pratique, nous pouvons produire un algorithme fournissant cette réponse à partir des paramètres d'un hyperplan discret arithmétique rationnel, \mathbf{n} et ω . C'est l'Algorithme 1, dont une application est présentée Figure 3.3. Il consiste à construire incrémentalement \mathbb{C} , la composante k -connexe issue de l'origine, c'est-à-dire du voxel $\mathbf{0}$, qui appartient à $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ (Figure 3.3(a)). Quand un vecteur de période apparaît dans cette composante, l'espace de recherche \mathbb{E} , initialement $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$, est réduit en conséquence et \mathbb{C} est ramenée à ses représentants appartenant à ce nouvel espace de recherche (Figure 3.3(b)). Après un nombre d'étapes fini, l'algorithme termine car la composante \mathbb{C} restreinte à \mathbb{E} devient finie (Figure 3.3(c)). Alors, la décision sur la connexité de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ se fait en vérifiant que \mathbb{C} englobe bien tous les voxels de \mathbb{E} .

Algorithme 1 Décision sur la k -connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel

Entrées : $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \mathbb{Z}$

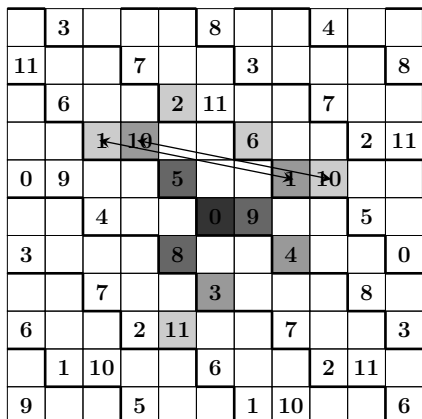
Sorties : Est-ce que le plan discret arithmétique rationnel $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est k -connexe ?

```

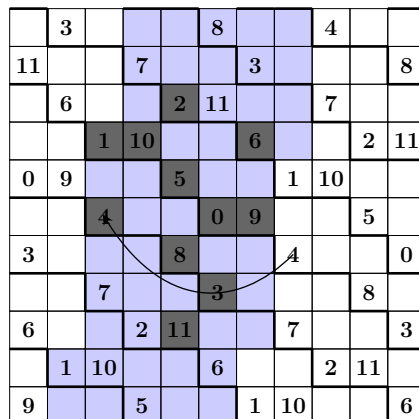
 $\mathbb{E} \leftarrow \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega);$ 
 $\mathbb{C} \leftarrow \{\mathbf{0}\};$ 
tant que  $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{C}$  tel que  $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}$   $k$ -adjacent à  $\mathbf{v}$  faire
   $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \cup \{\mathbf{v}\};$ 
  si  $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}$  tel que  $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})$  alors
     $\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{v} - \mathbf{w};$ 
     $\mathbb{E} \leftarrow \mathbb{E} \cap \mathbb{P}/_{\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \omega);$ 
    Translater les voxels de  $\mathbb{C}$  selon  $\mathbf{t}$  pour que  $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{E};$ 
  fin si
fin tant que
Renvoyer  $\mathbb{C} = \mathbb{E};$ 

```

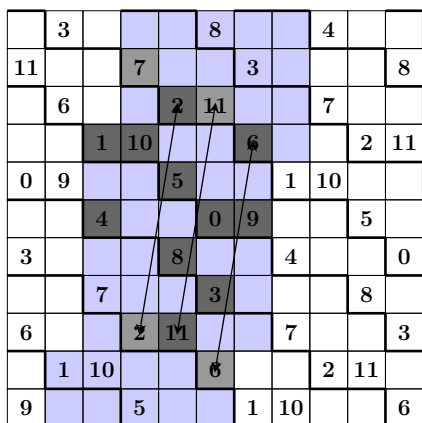
En conclusion, Y. Gérard fournit un algorithme capable de décider de la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel. Son approche est, en fait, beaucoup plus générale et peut s'appliquer à toute la classe des graphes qu'il définit, les graphes périodiques (non présentés ici). Par conséquent, l'algorithme ne tire pas pleinement parti des spécificités des hyperplans discrets arithmétiques rationnels, et reste, de notre point de vue, coûteux à mettre en oeuvre puisqu'il nécessite le stockage d'un graphe, qui peut être conséquent, et met en jeu des opérations ensemblistes, notamment des calculs de quotients d'hyperplans discrets.



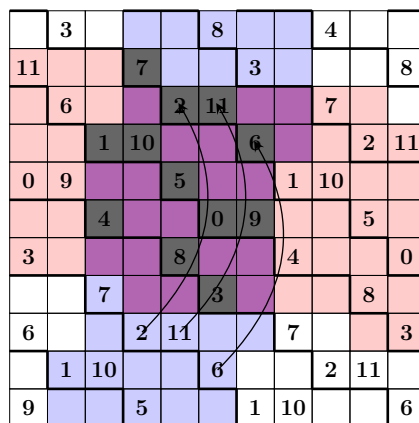
(a) Parcours de la composante connexe \mathbb{C} jusqu'à trouver un vecteur de période



(b) Réduction de l'espace de recherche \mathbb{E} et choix des représentants de chaque classe d'équivalence dans \mathbb{E}



(c) Reprise du parcours jusqu'à trouver un autre vecteur de période



(d) \mathbb{C} est entièrement déterminée, décision sur la connexité : $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ donc le plan $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe

FIG. 3.3 – Déroulement de l'Algorithme 1 appliqué au plan discret arithmétique rationnel $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ de vecteur normal $\mathbf{n} = (9, 14, 31)$ et d'épaisseur $\omega = 12$

3.1.2 Étude de la 0-connexité des plans discrets

L'étude précédente se place dans le cas très général de la k -connexité des hyperplans discrets arithmétiques rationnels. D'autres études ont été menées sur un sous-problème, celui des plans discrets arithmétiques rationnels 0-connexes. Plus particulièrement, dans [18], R. Barneva et V. Brimkov isolent des cas où des solutions explicites existent et proposent dans le même temps un algorithme pour traiter le cas général. Ce dernier s'avère malheureusement incorrect comme nous l'avons montré dans [45] (Exemple 3.1, plus loin dans cette section). La différence majeure avec les travaux de Y. Gérard concerne le but recherché. Alors que Y. Gérard cherche à décider

de la connexité d'un hyperplan discret arithmétique rationnel donné, R. Barneva et V. Brimkov déterminent la plus petite épaisseur qui rend un plan discret arithmétique rationnel 0-connexe. Dans cette étude, nous considérerons encore le paramètre de translation μ nul, puisqu'elle se limite aux plans discrets arithmétiques rationnels.

Réduction du problème en dimension

Les plans discrets naïfs sont toujours 0-connexe, et même 1-connexe, c'est une conséquence du Théorème 3.1. Partant de cette observation, V. Brimkov et R. Barneva réduisent le problème de la détermination de la 0-connexité d'un plan discret $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ à la détermination de la 0-connexité de sa projection fonctionnelle partielle $\Pi(\mathbf{n}, \omega)$, avec $\omega \leq \|\mathbf{n}\|_\infty$.

La notion de plans gracieux, qu'ils avaient introduite précédemment [17], leur permet de statuer sur l'équivalence entre la 0-connexité du plan discret et de sa projection quand le premier ne contient aucun saut de hauteur.

Lemme 3.4 (Connexités équivalentes [18]). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3$ tel que $n_2 + n_1 \leq n_3$. Alors, le plan discret arithmétique rationnel $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si sa projection $\Pi(\mathbf{n}, \omega)$ l'est.*

Grâce à une transformation invariante pour la 0-connexité, ce résultat peut se généraliser à l'ensemble des plans discrets arithmétiques.

Lemme 3.5 (Lemme de symétrie [18]). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3$ tel que $\|\mathbf{n}\|_\infty = n_3$. Soit aussi $\mathbf{m} = (n_3 - n_1, n_2, n_3)$. $\Pi(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si $\Pi(\mathbf{m}, \omega)$ l'est.*

Remarque 3.1. Par induction et du fait du rôle symétrique de n_1 et n_2 , ce résultat est tout aussi vrai pour $\mathbf{m} = (n_3 - n_1, n_3 - n_2, n_3)$ et $\mathbf{m} = (n_1, n_3 - n_2, n_3)$.

Quel que soit le vecteur normal du plan discret arithmétique initial, nous pouvons ramener son traitement à l'étude d'un plan dont le vecteur normal rentre dans le cadre du Lemme 3.4.

Théorème 3.6 (Equivalence entre 0-connexité du plan et de sa projection [18]). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. Alors, un plan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si sa projection $\Pi(\mathbf{n}, \omega)$ l'est.*

Ainsi, V. Brimkov et R. Barneva réduisent la dimension du problème d'un ensemble discret tridimensionnel à un ensemble discret bidimensionnel.

Passage au complémentaire

Nous venons de voir comment réduire la dimension géométrique du problème. Néanmoins, même la 0-connexité de la projection d'un plan discret reste ardue à évaluer. En effet, il faut arriver à déterminer que tous les pixels qui la composent appartiennent à la même composante connexe. V. Brimkov et R. Barneva utilise d'autres résultats sur les hyperplans pour simplifier encore le problème.

Soit $\bar{\Pi}(\mathbf{n}, \omega) = \Pi(\mathbf{n}, -\omega, \|\mathbf{n}\|_\infty - \omega)$, le complémentaire de $\Pi(\mathbf{n}, \omega)$ dans \mathbb{Z}^2 .

Lemme 3.7 (Complémentaire comme ensemble séparant [18]). *$\Pi(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si $\bar{\Pi}(\mathbf{n}, \omega)$ n'est pas 0-séparant.*

En d'autres termes, $\bar{\Pi}(\mathbf{n}, \omega)$ ne doit contenir aucun chemin discret 1-connexe infini. Or, dans les plans discrets arithmétiques rationnels, un chemin 1-connexe infini est toujours induit par un chemin discret entre deux voxels de même reste, c'est le résultat du Lemme 3.2.

Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. Nous notons par $\Gamma_1(\mathbf{n})$ l'ensemble des chemins discrets 1-connexes de $\Pi(\mathbf{n}, \|\mathbf{n}\|_\infty)$ reliant deux voxels de reste 0. Pour un chemin discret 1-connexe $\gamma \in \Gamma_1(\mathbf{n})$, $\max(\gamma)$ est défini tel que :

$$\max(\gamma) = \max\{r_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}); \mathbf{p} \in \gamma\}.$$

En d'autres termes, $\max(\gamma)$ est le plus grand reste dans γ .

Théorème 3.8 ([18]). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ et $\gcd\{n_1, n_2, n_3\} = 1$. Soit $\omega_0 \in \mathbb{N}_+^*$ la plus petite épaisseur telle que $\Pi(\mathbf{n}, \omega_0)$ est 0-connexe. Alors, nous avons :*

$$\omega_0 = \|\mathbf{n}\|_\infty - \min_{\gamma \in \Gamma_1(\mathbf{n})} \{\max(\gamma)\}.$$

Le problème de déterminer ω_0 peut donc être réduit au calcul de $\min\{\max(\gamma) \in \Gamma_1(\mathbf{n})\}$.

Solutions explicites

Sous certaines conditions, des solutions explicites peuvent permettre de conclure quant à la valeur de ω_0 .

Considérons le vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq 2n_2 + n_1 \leq n_3$. Soit $\Pi(\mathbf{n}, n_2 + n_1)$. Sur chaque ligne de niveaux, $\Pi(\mathbf{n}, n_2 + n_1)$ contient un chemin discret 1-connexe trivial, une droite standard. De plus, ces droites ne sont pas 1-connectées entre elles, puisque $\omega = n_2 + n_1$ et $n_3 \geq 2n_2 + n_1$. Ainsi, dans ce cas précis, nous avons :

$$\min\{\max(\gamma) \in \Gamma_1(\mathbf{n})\} = n_1 + n_2 - \gcd\{n_1, n_2\}.$$

Ce résultat associé aux lemmes précédents, et en particulier au lemme de symétrie, permet de définir des solutions explicites au problème de la 0-connexité des plans discrets arithmétiques.

Théorème 3.9 (Formules closes [18]). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. On a alors :*

- si $n_3 < n_1 + n_2/2$, $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si $\omega \geq n_1 + n_2 - n_3 + \text{pgcd}\{(n_3 - n_2), (n_3 - n_1)\}$,
- si $n_1 + n_2 < n_3 < 2n_2 - n_1$, $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si $\omega \geq n_2 - n_1 + \text{pgcd}\{n_1, (n_3 - n_2)\}$,
- si $n_3 \geq 2n_2 + n_1$, $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est 0-connexe si et seulement si $\omega \geq n_3 - (n_1 + n_2) + \text{pgcd}\{n_1, n_2\}$.

Contre-exemple à l'algorithme pour le cas général

En plus de ces solutions explicites, V. Brimkov et R. Barneva fournissent un algorithme pour résoudre le problème dans le cas général. Ils supposent que seule la connaissance de deux chemins discrets de $\Gamma_1(\mathbf{n})$ bien choisis, contenant exclusivement des déplacements haut et droite ou exclusivement des déplacements bas et droite, est nécessaire. Malheureusement, cette assertion est fautive et nous avons mis en évidence un contre-exemple [45].

Contre-exemple 3.1 ([45]). *Soit $\mathbf{n} = (4, 7, 16)$. Soit ω_0 , la plus petite épaisseur entière telle que $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega_0)$ est 0-connexe. Figure 3.4(a), les deux chemins de couleur foncée sont ceux calculés par l'algorithme de V. Brimkov et R. Barneva. Ils n'utilisent que deux types de déplacement chacun. Les restes maximaux de chacun d'eux sont 10 et 12, et $\omega_0 = 16 - \min\{10, 12\} = 6$. Figure 3.4(b), Nous pouvons voir que $\Pi(\mathbf{n}, 6)$ n'est pas 0-connexe, et du fait du Théorème 3.6, $\mathbb{P}(\mathbf{n}, 6)$ ne l'est pas non plus. En fait, la plus petite épaisseur qui rend $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ 0-connexe est 7 comme illustré Figure 3.4(c). Cette valeur peut être reliée au chemin de couleur claire de la Figure 3.4(a), qui ne peut être obtenu uniquement avec deux types de déplacements.*

L'approche de V. Brimkov et R. Barneva prend plus en compte les spécificités des hyperplans discrets arithmétiques que celle de Y. Gérard. Ils obtiennent ainsi des résultats probants, notamment en exhibant des solutions explicites au problème. Cependant, ces résultats restent partiels et restreints aux plans discrets 0-connexes. Ils semblent difficile à généraliser à d'autres connexités ou en dimensions supérieures puisqu'ils reposent sur des propriétés en dimension 2.

Dans les sections suivantes, nous allons voir comment résoudre simplement le problème de la connexité dans un cadre général. Notre premier terrain de recherche va être la $(d-1)$ -connexité, celle nous paraissant la plus simple à étudier, puisque le voisinage à considérer est le plus petit existant. Nous verrons ensuite que les autres connexités se déduisent simplement.

3.2 Propriétés des hyperplans discrets arithmétiques $(d-1)$ -connexes

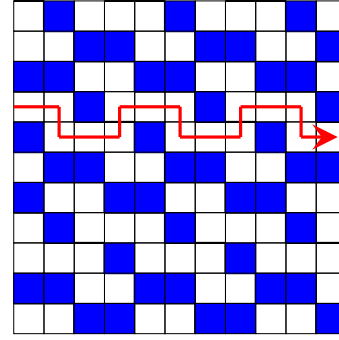
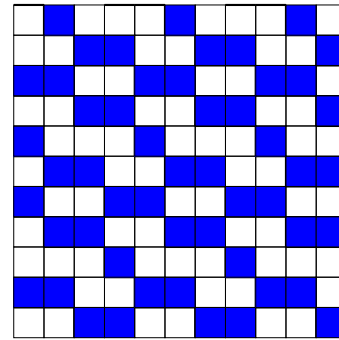
3.2.1 Premières propriétés

Nous allons commencer par donner quelques résultats sur les hyperplans discrets arithmétiques $(d-1)$ -connexes qui nous seront utiles pour réduire l'étude. Pour commencer, attachons-nous à définir une borne sur l'épaisseur minimale que peut prendre un hyperplan discret arithmétique $(d-1)$ -connexe.

Lemme 3.10 (Une borne minimale). *Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|\mathbf{n}\|_1 > \|\mathbf{n}\|_\infty$. Soient aussi $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe, alors $\omega > \|\mathbf{n}\|_\infty$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que les composantes de \mathbf{n} sont ordonnées, $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_d$ avec $n_{d-1} > 0$. Dans ce cas, $\|\mathbf{n}\|_\infty = n_d$. Supposons maintenant que

15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7
8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0
1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9
10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2
3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11
12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4
5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13
14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6
7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15
0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8
9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1

(a) Chemins 1-connexes dans $\Pi(\mathbf{n}, n_3)$ (b) $\Pi(\mathbf{n}, 6)$ n'est pas connexe(c) $\Pi(\mathbf{n}, 7)$ est 0-connexeFIG. 3.4 – Illustration du contre-exemple, $\mathbf{n} = (4, 7, 16)$

$0 < \omega \leq n_d$. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, alors $0 \leq p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) < \omega$ et $\omega \leq n_d < p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) + n_d = p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v} + \mathbf{e}_d)$ (\mathbf{e}_d étant le dernier vecteur de la base de l'espace vectoriel sous-jacent). Donc, $\mathbf{v} + \mathbf{e}_d \notin \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. En d'autres termes, deux voxels \mathbf{v} et \mathbf{w} tels que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_d \neq \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_d$ n'appartiennent pas à la même composante $(d - 1)$ -connexe de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Or \mathbf{n} n'est pas de la forme $\alpha \mathbf{e}_d$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ ne peut être $(d - 1)$ -connexe. \square

Cette borne n'est pas très précise. Elle s'avère néanmoins très utile pour prouver que l'ensemble des épaisseurs qui rendent $(d - 1)$ -connexe un hyperplan discret arithmétique, de vecteur normal et d'ordonnée à l'origine fixés, forment un intervalle.

Lemme 3.11. Soient $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ et $\mu \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{\omega \in \mathbb{R}_+^*; \mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega) \text{ est } (d - 1)\text{-connexe}\}$ est un intervalle.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité, que $0 < n_1 \leq \dots \leq n_d$. Soit une épaisseur $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est $(d - 1)$ -connexe. Du fait du Lemme 3.10, $\omega > n_d$. Soient $\Delta\omega \in \mathbb{R}_+$ et un voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) \in [\omega, \omega + \Delta\omega[$. Alors il existe q tel que $p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) - qn_d =$

$p_{\mathbf{n},\mu}(\mathbf{v}) - qp_{\mathbf{n},\mu}(\mathbf{e}_d) \in [0, \omega[$ parce que $\omega > p_{\mathbf{n},\mu}(\mathbf{e}_d)$. Puisque pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$, $p_{\mathbf{n},\mu}(\mathbf{v}) - ip_{\mathbf{n},\mu}(\mathbf{e}_d) \in [0, \omega + \Delta\omega[$, nous avons construit un chemin discret $(d-1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega + \Delta\omega)$ reliant le voxel \mathbf{v} à un voxel de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, $(d-1)$ -connexe par hypothèse. \square

Le Lemme 3.11 permet de réduire la détermination de l'ensemble des épaisseurs qui connectent un hyperplan à la détermination de la borne minimale de l'intervalle qu'elles forment. Nous la définissons comme la borne de $(d-1)$ -connexité. De plus, nous restreignons notre étude aux hyperplans discrets arithmétiques rationnels, pour lesquels nous savons que l'influence du paramètre de translation μ est nulle. Nous simplifions les notations en conséquence et notons donc $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ au lieu de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, 0, \omega)$ et $p_{\mathbf{n}}$ au lieu de $p_{\mathbf{n},0}$.

Définition 3.2 (Borne de $(d-1)$ -connexité). La *borne de $(d-1)$ -connexité* associée au vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ est le réel $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$ défini par :

$$\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n}) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R}_+^* ; \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega) \text{ est } (d-1)\text{-connexe} \}.$$

Une question reste en suspens et concerne l'appartenance de cette borne ou non à l'intervalle. Dans le cas d'un hyperplan discret arithmétique rationnel, elle n'y appartient pas. En effet, les voxels de tels hyperplans discrets n'ont pour reste que des entiers, et donc la connexité se fait dès que l'épaisseur dépasse un certain seuil entier. Ce seuil entier est la borne inférieure de l'intervalle des épaisseurs qui connectent le plan, mais ne satisfait pas lui-même cette propriété.

L'étude de la $(d-1)$ -connexité des hyperplans discrets arithmétiques se ramène donc à la détermination de cette borne de $(d-1)$ -connexité, $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$.

3.2.2 Principe de notre approche

La dimension d de l'espace discret considéré joue un rôle important dans la complexité du problème. En particulier, quand cette dimension est 1, nous savons entièrement caractériser $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$.

Lemme 3.12. *Soit $n \in \mathbb{R}^*$. Le point discret arithmétique $\mathbb{P}_1(n, \omega)$ est non vide si et seulement si $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. $\mathbb{P}_1(n, \omega)$ est non vide si ω est tel qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $0 \leq nv < \omega$. Cela est vrai dès que $\omega > 0$, pour $v = 0$. \square

Un autre résultat simple nous permet de réduire la dimension du problème quand le vecteur normal de l'hyperplan discret arithmétique considéré possède des composantes nulles.

Lemme 3.13. *Soient $d > 1$ et $d' = d - 1$. Soient aussi $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $n_i = 0$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{d'}$ tel que pour $j < i$, $m_j = n_j$ et pour $j \geq i$, $m_j = n_{i+1}$. Alors, l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe si et seulement si l'hyperplan $\mathbb{P}_{d'}(\mathbf{m}, \omega)$ est $(d'-1)$ -connexe.*

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité, que $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+$. Dans $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, un déplacement selon le vecteur de la base \mathbf{e}_i n'induit aucune variation du reste $p_{\mathbf{n}, \mu}$. De ce fait, pour tout voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$, les voxels $\mathbf{v} + k\mathbf{e}_i$ avec $k \in \mathbb{Z}$ appartiennent aussi à $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$. Ainsi, $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ est $(d - 1)$ -connexe si et seulement si $\mathbb{P}_d(\mathbf{n}, \mu, \omega) \cap \mathbb{P}_d(\mathbf{e}_i, k, 1)$ l'est. Cette intersection revient à supprimer une dimension de l'espace (passer de d à d') et donc à étudier la $(d' - 1)$ -connexité de $\mathbb{P}_{d'}(\mathbf{m}, \mu, \omega)$. \square

Dans le cas où des composantes du vecteur normal de l'hyperplan discret arithmétique que nous étudions sont nulles, nous pouvons donc réduire la dimension de l'objet étudié. Toute la stratégie va maintenant consister à trouver des transformations qui vont annuler des composantes de ce vecteur en préservant la $(d - 1)$ -connexité jusqu'à atteindre la dimension 1.

3.2.3 Réductions arithmétiques préservant les composantes $(d - 1)$ -connexes

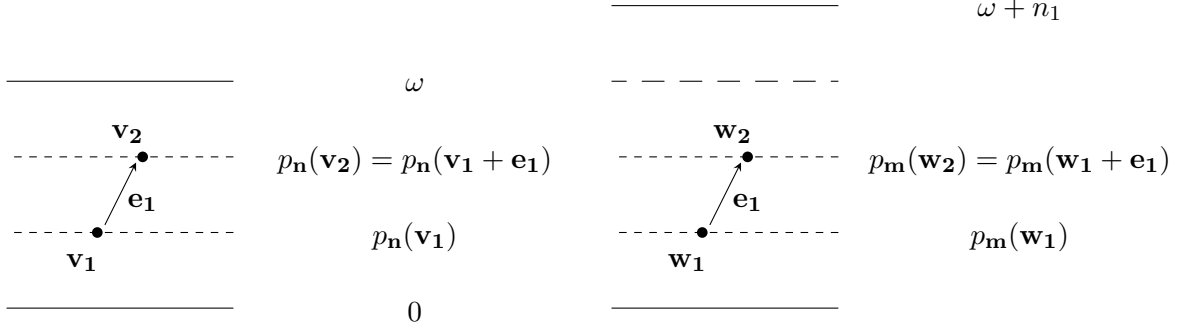
Dans cette section, nous montrons comment la détermination de $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$ se réduit à celle de $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{m})$, avec $\|\mathbf{m}\|_\infty < \|\mathbf{n}\|_\infty$, par une réduction élémentaire sur les composantes de \mathbf{n} .

Théorème 3.14. *Soit $\mathbf{n} \in (\mathbb{R}_+^*)^d$. Soit aussi $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbf{m} = (n_1, n_2 + n_1, \dots, n_d + n_1)$. Pour toute épaisseur $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d - 1)$ -connexe si et seulement si l'hyperplan $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ l'est aussi.*

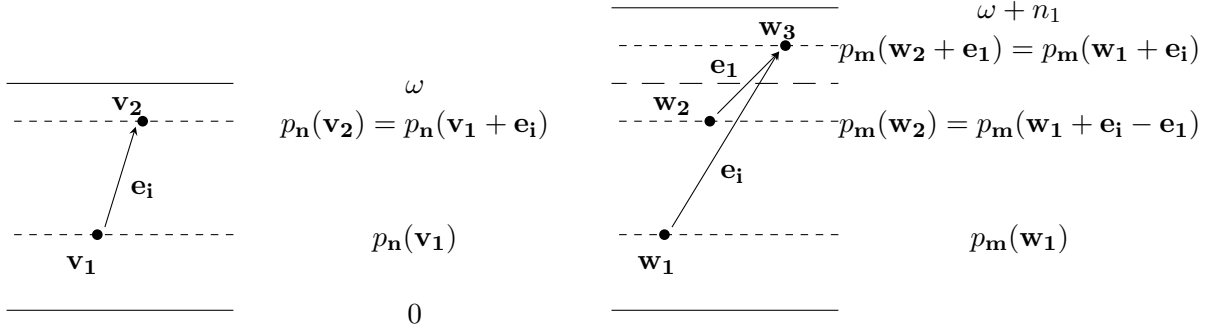
Démonstration. Supposons d'abord que $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d - 1)$ -connexe et montrons que $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ l'est aussi. Soient \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 deux voxels $(d - 1)$ -adjacents de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ tels que $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_2) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_i)$ avec $i \in \{1, \dots, d\}$. Soient alors \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2 les images de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1); p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_1) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w})\}, \\ \mathbb{E}_2 &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1); p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_2) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w})\}. \end{aligned}$$

Ces deux ensembles sont des images par translation d'un même réseau euclidien. Ainsi, pour que la $(d - 1)$ -connexité de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ induise celle de $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$, nous devons trouver au moins un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un chemin discret $(d - 1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ entre ces deux éléments. Si $i = 1$, alors, pour tout $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{E}_1$, il existe $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 soient $(d - 1)$ -adjacents.



Si $i \neq 1$, soit $\mathbb{E}_3 = \{\mathbf{w} \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1); p_n(\mathbf{v}_2 + \mathbf{e}_1) = p_m(\mathbf{w})\}$. Il s'ensuit que, pour tout $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{E}_3$, il existe un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{w}_3 soit $(d-1)$ -adjacent à \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 ou en d'autres termes, qu'il existe au moins un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un chemin discret $(d-1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ entre ces deux éléments.



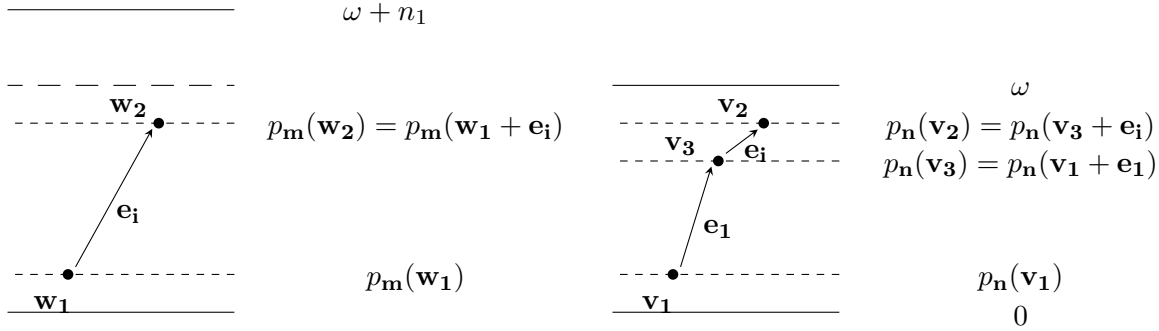
Ainsi, si $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe, alors $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ l'est aussi.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ est $(d-1)$ -connexe et montrons que $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ l'est aussi. Soient \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 deux voxels $(d-1)$ -adjacents de $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ tels que $p_m(\mathbf{w}_2) = p_m(\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}_i)$ avec $i \in \{1, \dots, d\}$. Soient alors \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2 les images de \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$:

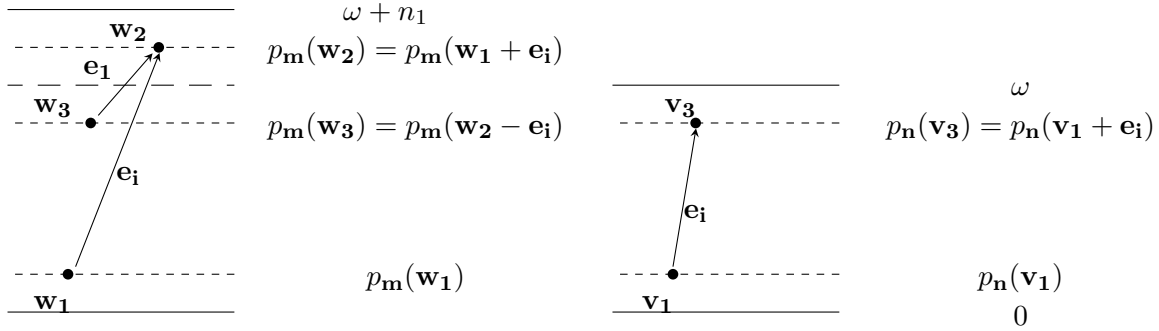
$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_m(\mathbf{w}_1) = p_n(\mathbf{v})\}, \\ \mathbb{E}_2 &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_m(\mathbf{w}_2) = p_n(\mathbf{v})\}. \end{aligned}$$

Supposons que $p_m(\mathbf{w}_2) < \omega$, \mathbb{E}_2 n'est donc pas vide et peut être mis en bijection avec \mathbb{E}_1 , puisque ce sont des images par translation d'un même réseau euclidien. Ainsi, pour que la $(d-1)$ -connexité de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ induise celle de $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$, nous devons trouver au moins un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un chemin discret $(d-1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ entre ces deux éléments. Si de plus $i = 1$, pour tout $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{E}_1$, il existe $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 soient $(d-1)$ -adjacents. Si $i \neq 1$, définissons l'ensemble $\mathbb{E}_3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_m(\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}_1) = p_n(\mathbf{v})\}$. Pour tout $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{E}_3$, $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ il existe $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{v}_3 est $(d-1)$ -adjacent à \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . En d'autres termes, il existe au moins un couple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un

chemin discret $(d-1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ entre ces deux éléments.



Supposons maintenant que $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_2) \geq \omega$. \mathbb{E}_2 est vide. Si $i = 1$, soit $j > 1$, sinon $j = 1$. Il existe alors $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ tel que $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_3 + \mathbf{e}_j) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_2)$ puisque $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_2) \in [\omega, \omega + n_1[$ et $\omega > \|\mathbf{n}\|_{\infty}$ (conséquence du Lemme 3.10). Définissons alors \mathbb{E}_3 tel que $\mathbb{E}_3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_3) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\}$. \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_3 peuvent être mis en bijection, puisque ce sont des images par translation d'un même réseau euclidien. Ainsi, pour que la $(d-1)$ -connexité de $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ induise celle de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$, nous devons trouver au moins un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_3$ tel qu'il existe un chemin discret $(d-1)$ -connexe dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ entre \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_3 . Par réflexivité, considérons, sans perte de généralité, que nous avons toujours $j = 1$ et $i \neq 1$. Alors, pour tout $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{E}_3$, il existe $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{E}_1$ tel que $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_3) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_3) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_2 - \mathbf{e}_1) = p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_i)$. Donc, il existe au moins un couple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ tel que \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_3 soient $(d-1)$ -adjacents.



Ainsi, si $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega + n_1)$ est $(d-1)$ -connexe, alors $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ l'est aussi et nous avons le résultat du théorème. \square

Par induction, une conséquence directe du Théorème 3.14 est :

Corollaire 3.15. Soit $\mathbf{n} \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ tel que $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Soient aussi $q = \lfloor n_2/n_1 \rfloor$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbf{m} = (n_1, n_2 - qn_1, \dots, n_d - qn_1)$. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, l'hyperplan discret arithmétique $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe si et seulement si le plan $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega - qn_1)$ l'est.

La seconde conséquence importante du Théorème 3.14 relie la borne de $(d-1)$ -connexité associée à \mathbf{n} avec celle associée à \mathbf{m} (comme défini dans le Corollaire 3.15).

Corollaire 3.16. Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $0 < n_1 \leq \dots \leq n_d$ et $q = \lfloor n_2/n_1 \rfloor$. Alors, nous avons :

$$\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n}) = \Omega_{(d-1)}(n_1, n_2 - qn_1, \dots, n_d - qn_1) + qn_1.$$

Cette réduction, ainsi que les Lemmes 3.12 et 3.13, nous permettent de construire des algorithmes efficaces pour déterminer la $(d-1)$ -connexité d'un hyperplan discret arithmétique donné, tout autant que la borne de $(d-1)$ -connexité.

3.2.4 Cas rationnel : réponse algorithmique

L'algorithme 2 explicite le calcul de la borne de $(d-1)$ -connexité pour un vecteur \mathbf{n} de composantes entières. Le plan $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est alors connexe pour toute épaisseur $\omega > \Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$. L'algorithme est initialisé avec une épaisseur ω nulle. Ensuite, nous utilisons le Corollaire 3.16 pour réduire les composantes de \mathbf{n} et accroître ω en conséquence. Dès qu'une composante du vecteur devient nulle, le Lemme 3.13 nous permet de réduire la dimension de \mathbf{n} jusqu'à atteindre le cas unidimensionnel où la solution est donnée par le Lemme 3.12. À chaque étape du processus, le vecteur \mathbf{n} est réordonné pour assurer que le Corollaire 3.16 puisse effectivement être appliqué. L'algorithme termine toujours puisque chaque composante est un entier positif qui décroît à chaque itération du processus. Cet algorithme termine forcément en moins de n_d itérations de la

Algorithme 2 Calcul de l'épaisseur minimale de $(d-1)$ -connexité

Entrées : $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, d-1\}, n_i \leq n_{i+1}$

Sorties : $\Omega_{(d-1)}(\mathbf{n})$

$\omega \leftarrow 0$

pour $i = 1$ à $d-1$ **faire**

tant que $n_i \neq 0$ **faire**

$q \leftarrow \lfloor \frac{n_{i+1}}{n_i} \rfloor$

pour $j = i+1$ à d **faire**

$n_j \leftarrow n_j - qn_i$

fin pour

$\omega \leftarrow \omega + qn_i$

 réordonner les composantes de \mathbf{n}

fin tant que

fin pour

renvoyer ω

boucle principale puisque chaque composante de \mathbf{n} est entière et décroît, donc diminue d'au moins 1, à chaque itération. Cette borne est très grossière et il nous semble probable qu'en optimisant les calculs, une borne de l'ordre de $\log(n_d)$ puisse être trouvée, du fait des similitudes de cet algorithme avec celui d'Euclide.

La décision sur la $(d-1)$ -connexité d'un hyperplan discret arithmétique de vecteur normal

entier est très similaire. En effet, nous avons juste à initialiser le processus avec l'épaisseur du plan et à chaque étape, la diminuer au lieu de l'augmenter. Alors, $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe si la valeur retournée par l'algorithme n'est pas négative.

3.3 Hyperplans discrets arithmétiques k -connexes

Dans cette section, nous allons voir comment nos résultats sur la $(d-1)$ -connexité des hyperplans discrets arithmétiques peuvent amener des réponses dans le cas des autres connexités.

Théorème 3.17. *Soit $k \in \{0, \dots, d-1\}$ et $k_i = \max\{i - (d-k) + 1, 1\}$. Soit aussi $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^d$ tel que :*

$$\forall i \in \{2, \dots, d\}, \sum_{j=k_i}^{i-1} n_j \leq n_i,$$

et $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^d$ tel que :

$$m_1 = n_1 \text{ et } \forall i \in \{2, \dots, d\}, m_i = n_i - \sum_{j=k_i}^{i-1} n_j.$$

Alors l'hyperplan arithmétique discret $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ est k -connexe si et seulement si $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe.

Démonstration. Supposons d'abord $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ k -connexe. Soit $B = \left\{ \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i + \sum_{j=k_i}^{i-1} \mathbf{e}_j; i \in \{1, \dots, d\} \right\}$. Nous commençons d'abord par prouver que deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_L de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ sont k -adjacents si et seulement s'il existe un chemin discret k -connexe $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq L}$ dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ tel que pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1) \in B$. Nous montrons ensuite que si deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont tels que $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \in B$ alors $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe. Soient deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_L de $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ tels que $[\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1]_k = 1$. Sans perte de généralité, supposons que $p_n(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1) \geq 0$. Nous pouvons écrire $\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^d a_i \mathbf{e}_i$ avec $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ et $[\mathbf{a}]_k = 1$. Notons g le plus grand indice pour lequel la composante a_g n'est pas nulle. Alors forcément, puisque $p_n(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1) \geq 0$, $a_g = 1$. Nous pouvons donc écrire $p_n(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_1) = p_n(\mathbf{e}_g - \sum_{i=1}^{g-1} \mathbf{e}_i)$. Or, $p_n(\mathbf{e}_g - \sum_{i=1}^{g-1} \mathbf{e}_i) \geq p_n(\mathbf{b}_g)$ puisque pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $p_n(e_i) = n_i$ et pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $\sum_{j=k_i}^{i-1} n_j \leq n_i$. Soit un voxel $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ tel que $p_n(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = p_n(\mathbf{b}_g)$. Alors $p_n(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_2) \geq 0$ et par induction nous pouvons donc construire un chemin dont les transitions sont toutes dans B pour relier \mathbf{v}_1 à \mathbf{v}_L . Ainsi, dans le cas où les transitions de B dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ induisent des chemins discrets $(d-1)$ -connexes dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$, nous aurons montré que la k -connexité du premier induit la $(d-1)$ -connexité du second. Soient \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 deux voxels $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ tel que $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \in B$. Soient les ensembles de leurs images dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \{ \mathbf{w} \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega); p_m(\mathbf{w}) = p_n(\mathbf{v}_1) \}, \\ \mathbb{E}_2 &= \{ \mathbf{w} \in \mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega); p_m(\mathbf{w}) = p_n(\mathbf{v}_2) \}. \end{aligned}$$

\mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2 peuvent être mis en bijection puisque ce sont les images par translation d'un même réseau euclidien. Il suffit donc de trouver un couple $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un chemin $(d-1)$ connexe entre \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$ pour que l'hyperplan discret soit $(d-1)$ -connexe. Or, $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_i) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_i - \sum_{j=k_i}^{i-1} \mathbf{e}_j)$, ou, en d'autres termes, $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_i) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}_i)$. En conséquence, pour tout $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{E}_1$, il existe $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 soient $(d-1)$ -adjacents et la première partie de la preuve est complétée.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$ est $(d-1)$ -connexe. Soient aussi deux voxels \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 $(d-1)$ -adjacents de $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$. Soient les ensembles de leurs images dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1 &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_1) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\}, \\ \mathbb{E}_2 &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega); p_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}_2) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\}.\end{aligned}$$

\mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2 sont en bijection puisque ce sont les images par translation d'un même réseau euclidien. Il suffit donc de trouver un couple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ tel qu'il existe un chemin k connexe entre \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ pour que cet hyperplan discret soit k -connexe. Or, $p_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_i) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_i - \sum_{j=k_i}^{i-1} \mathbf{e}_j)$ et $[\mathbf{e}_i - \sum_{j=k_i}^{i-1} \mathbf{e}_j] = 1$. Donc, pour tout $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{E}_1$, il existe $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{E}_2$ tel que \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 soient k -adjacents.

Au final, que deux voxels soient $(d-1)$ -connectés dans $\mathbb{P}(\mathbf{m}, \omega)$ implique que deux voxels de même reste dans $\mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega)$ soient k -connectés, et réciproquement. \square

À partir du Lemme 3.11 et du Théorème 3.17, Il est immédiat que, étant donné $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble des épaisseurs $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $P(\mathbf{n}, \omega)$ soit k -connexe est un intervalle. La détermination de cet intervalle est équivalente à celle de sa borne inférieure, que nous appelons borne de k -connexité associée à \mathbf{n} .

Définition 3.3 (Borne de k -connexité). Soit le vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$. La *borne de k -connexité* de \mathbf{n} est le nombre $\Omega_k(\mathbf{n})$ défini par :

$$\Omega_k(\mathbf{n}) = \inf \{\omega \in \mathbb{R}_+^*; \mathbb{P}(\mathbf{n}, \omega) \text{ est } k\text{-connexe}\}.$$

Une conséquence directe du théorème 3.17 est alors :

Corollaire 3.18. Soit $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Soit aussi $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^d$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^d$ tels que définis dans le Théorème 3.17. On a alors $\Omega_k(\mathbf{n}) = \Omega_{(d-1)}(\mathbf{m})$.

La borne de k -connexité est simple à déterminer pour des vecteurs vérifiant certaines propriétés. Dans le cas où ils ne les vérifient pas, il s'agit de leur trouver des équivalents. Nous avons une piste prometteuse pour résoudre ce problème, mais elle reste encore pour l'instant à l'état de conjecture et nous ne développerons pas plus en avant ce sujet. Simplement, nous pouvons signaler que le cas de la dimension 3 est complètement déterminé puisque nous disposons du Lemme de symétrie introduit par R. Barneva et V. Brimkov.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons partiellement caractérisé la k -connexité des hyperplans discrets arithmétiques rationnels. Nous nous sommes en effet assurés que les épaisseurs rendant un tel hyperplan k -connexe forment un intervalle et nous avons montré comment calculer sa borne inférieure par un algorithme et des transformations simples dans un grand nombre de cas. Il nous reste à trouver comment traiter les cas restants, c'est-à-dire en quelque sorte, étendre le Lemme de symétrie aux dimensions supérieures.

Il est à noter que les réductions arithmétiques introduites ne sont pas spécifiques au cas rationnel et permettent tout aussi bien de traiter le cas irrationnel. Néanmoins, il nous manque certains résultats importants (influence du paramètre de translation, appartenance ou non de la borne inférieure à l'intervalle des épaisseurs qui connectent, . . .) pour statuer dans le cas général. De plus, sous ces conditions, le processus ne fait que tendre vers la borne recherchée, sans jamais l'atteindre.

Comparativement aux résultats antérieurs, nous retrouvons un certain nombre de similitudes. Comme Y. Gérard, notre solution induit une réduction de la dimension de l'objet étudié. Mais, alors que Y. Gérard réduit le graphe de connexité selon la périodicité de l'hyperplan, nous réduisons arithmétiquement le vecteur normal associé. Comme V. Brimkov et R. Barneva, nous avons besoin de réductions arithmétiques semblables au Lemme de symétrie pour compléter l'étude. De plus, les solutions explicites qu'ils exhibent peuvent être retrouvées par notre approche, et étendues en dimensions supérieures. Nous ne nous sommes pas attardés sur ce sujet. En effet, ces solutions explicites nécessitent en dimension 3 le calcul du plus grand commun dénominateur des trois composantes du vecteur normal, mais aussi celui de deux d'entre elles. En dimensions supérieures, les cas à distinguer, tout comme les calculs de *pgcd* vont se multiplier. Puisque notre algorithme ne requiert que peu d'hypothèses et que nous espérons que sa complexité est proche du calcul du *pgcd* de toutes les composantes du vecteur normal, il reste très compétitif comparé aux solutions explicites.

Enfin, la transformation arithmétique utilisée est déjà présente dans la littérature, mais pas dans le contexte de la géométrie discrète. Dans [78], elle est présentée en tant qu'algorithme de fractions continues multidimensionnelles sous l'appellation *Fully Subtractive Algorithm*. Il semble aussi qu'elle puisse avoir des liens avec l'algorithme d'Arnoux-Rauzy et des généralisations du théorème de Fine and Wilf [21].

Deuxième partie

Modèles théoriques et pratiques de discrétisation séparants

Chapitre 4

Le passage du continu au discret : la discrétisation

Jusqu'ici, nous n'avons mentionné que des primitives discrètes linéaires. Elles sont suffisantes pour obtenir de bonnes approximations. En effet, les hyperplans discrets possèdent une plus grande expressivité que leur homologues continus : en géométrie euclidienne, un hyperplan tangent ne fournit localement qu'une bonne approximation d'une hypersurface ; dans le cas discret, un hyperplan tangent est localement l'hypersurface qui le supporte. Beaucoup de problèmes peuvent ainsi être traités par la simple utilisation de ce genre de primitives discrètes. Malgré tout, la caractérisation d'objets plus complexes, en particulier les hypersurfaces, reste nécessaire autant pour améliorer la compréhension globale des mécanismes sous-tendant la géométrie discrète que pour espérer de nouveaux développements.

En fait, un objet discret à proprement parler, c'est-à-dire simplement un ensemble de voxels, est rarement manipulé en tant que tel. Sa représentation en extension est coûteuse, et il lui est généralement préféré une représentation, beaucoup plus compacte, par les voxels ou surfels qui forment ses frontières. Pour un objet continu planaire, la frontière est équivalente à une courbe simple. Dès que la dimension de l'espace augmente, l'intérêt porté aux hypersurfaces devient évident.

Les hyperplans demeurent des objets élémentaires et il n'est pas sûr que des résultats aussi forts puissent être mis en évidence pour le cas plus complexe des hypersurfaces. En particulier, il semble improbable d'atteindre une définition, unique et globale, similaire à celle des hyperplans discrets arithmétiques. Néanmoins, une telle généralité n'est pas nécessairement requise, puisque, en pratique, seuls les hyperplans discrets naïfs et standard sont utilisés, à l'exception notable de certains travaux sur la reconnaissance bruitée [27].

Notre but dans ce chapitre est d'étudier les surfaces et plus généralement les hypersurfaces discrètes. Une première étape est bien sûr de s'intéresser au passage de l'espace continu à l'espace discret, soit comment obtenir des ensembles discrets ressemblant à des hypersurfaces. Nos

exigences se portent surtout sur le maintien de propriétés topologiques, comme la connexité ou le fait que l'objet sépare son complémentaire, et il s'agit finalement de définir la nature de la discrétisation. Dans un second temps, il est intéressant de se demander ce qu'est une surface discrète et ce que nous pouvons en attendre. Il existe des définitions théoriques que nous présentons plus loin.

4.1 Schémas de numérisation et modèles de discrétisation

Le but de la discrétisation est d'obtenir à partir d'un objet continu, un bon équivalent discret. Les termes de numérisation ou de voxelisation correspondent aussi à ce processus. Contrairement à ce qu'il est fait habituellement dans le cas d'une conversion analogique numérique classique, l'intérêt se porte autant sur l'approximation que sur les qualités topologiques de l'objet pour évaluer la qualité du processus. Dans cette première section, nous étudions particulièrement le premier point. En fait, nous allons voir des schémas et des modèles, qui, appliqués à une hypersurface, garantissent que l'ensemble discret résultant sera toujours une bonne approximation de l'hypersurface. Nous disposons pour cela d'un indicateur théorique, la convergence multigrille [52]. Il s'agit simplement de vérifier que le pas de discrétisation est proportionnel à l'erreur d'approximation commise. Ainsi, il est possible de garantir que le modèle converge vers l'objet continu sous-jacent quand la résolution de la grille devient infinie.

4.1.1 Schémas de numérisations

Les schémas de numérisation vont correspondre pour nous à des méthodes locales pour discrétiser un objet. Le premier introduit par H. Freeman [37] consiste à sélectionner le pixel le plus proche de chaque intersection d'une courbe donnée (ou de la frontière d'un objet) avec la grille formée par l'ensemble des droites verticales et horizontales passant par les points discrets. Ce processus, nommé *Grid Intersect Quantization* ou *GIQ*, est présenté Figure 4.1(a). Il est à la base notamment de certains des premiers algorithmes de tracé de droites et de cercles discrets. Il est plutôt destiné à obtenir une bonne approximation discrète d'une courbe. Dans le cas où l'intérêt se porte sur des objets et leurs frontières, deux autres schémas très similaires existent suivant si l'intérêt se porte sur une frontière extérieure ou intérieure de l'objet [39]. Lors du choix du pixel, ce n'est plus le plus proche globalement qui est sélectionné, mais le plus proche à l'intérieur, comme Figure 4.1(b), ou à l'extérieur de l'objet, comme Figure 4.1(c). La discrétisation interne est nommée *Object Boundary Quantization* ou *OBQ* et celle externe, *Background Boundary Quantization* ou *BBQ*. Enfin, parmi les schémas de numérisation, nous pouvons encore citer la *Convex Quantization* [55]. Elle consiste à associer à chaque pixel, un voisinage. La discrétisation d'une courbe est alors l'ensemble des pixels dont elle intersecte le voisinage. Ces discrétisations sont simples et faciles à étendre en dimension supérieure, mais peu formalisées.

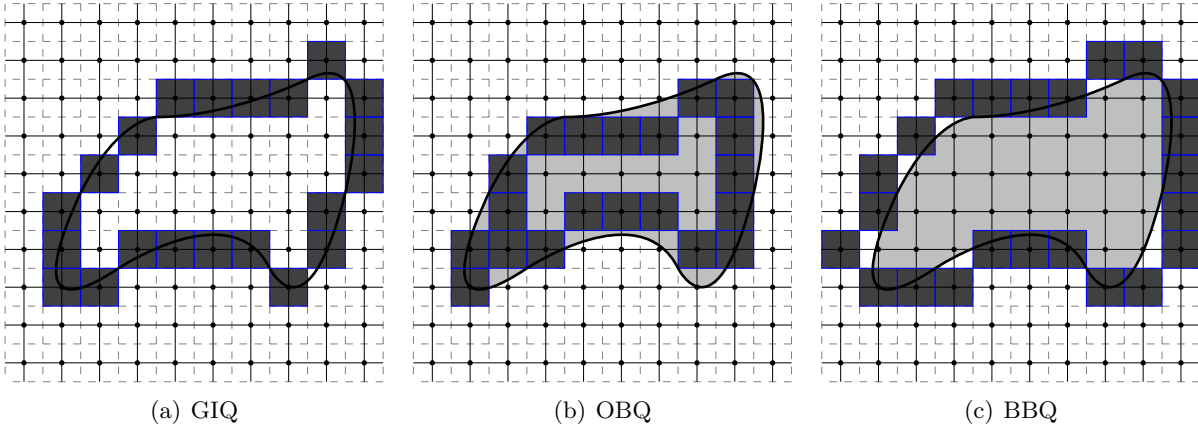


FIG. 4.1 – Schémas de numérisation usuels

4.1.2 Modèles de discrétisation

Nous distinguons les modèles de discrétisation des schémas de numérisation par leur plus grand formalisme. À bien des égards, les deux se recoupent, mais les modèles offrent une vision plus globale et plus ancrée dans l'espace euclidien sous-jacent. L'extraction de propriétés s'en retrouve simplifiée.

Pour assurer la convergence multigrille simplement et formellement, les modèles se basent sur un voisinage relatif au pas de discrétisation. Ainsi, si le pas est diminué d'un facteur particulier, ou de manière équivalente, la résolution augmentée, la précision de la discrétisation en est améliorée d'autant.

Ce genre de définition se formalise clairement dans le cadre de la morphologie mathématique, où le modèle supercouverture est défini.

Définition 4.1 (Modèle supercouverture [58, 80]).

$$S(\mathcal{O}) = (\mathcal{O} \oplus \bar{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 1/2)) \cap \mathbb{Z}^n,$$

où $\bar{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 1/2)$ est la boule fermée de rayon $1/2$ basée sur $\|\cdot\|_\infty$ et centrée sur l'origine de l'espace ; et \oplus représente la somme de Minkowski ($A \oplus B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$).

La supercouverture peut être vue comme la restriction aux points discrets d'une dilatation de l'objet initial \mathcal{O} . Ce formalisme nous fournit une information importante sur la qualité de l'approximation offerte, c'est en effet l'ensemble des points entiers d'un voisinage de \mathcal{O} , en l'occurrence :

$$\mathcal{O} \oplus \bar{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 1/2) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n; d_\infty(\mathbf{x}, \mathcal{O}) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Ainsi, chaque voxel appartenant à la discrétisation est plus proche de l'objet initial que n'importe

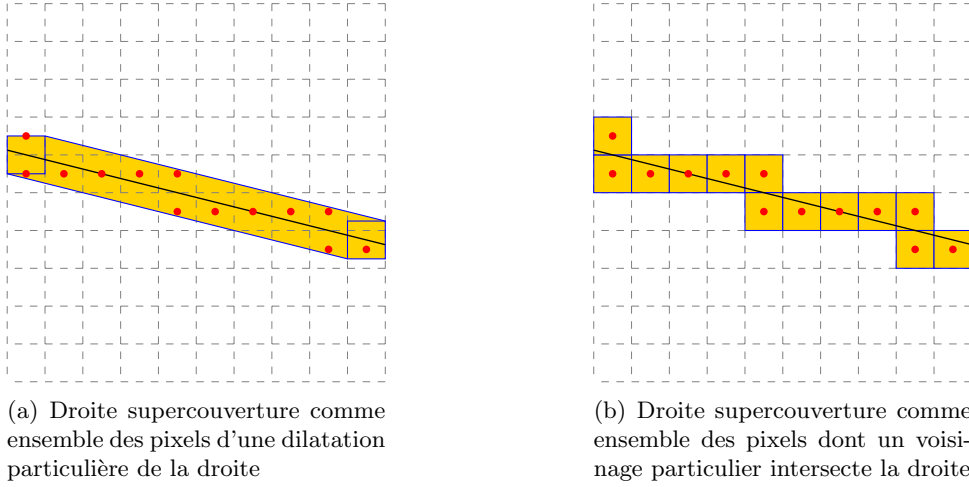


FIG. 4.2 – Différentes visions du modèle supercouverture

quel voxel ne lui appartenant pas, au sens de la métrique d_∞ construite sur $\|\cdot\|_\infty$:

$$S(\mathcal{O}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n; d_\infty(\mathbf{v}, \mathcal{O}) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Par symétrie, la supercouverture d'un objet \mathcal{O} se définit aussi comme l'ensemble des points discrets dont un voisinage particulier est intersecté par \mathcal{O} .

Proposition 4.1 (Modèle supercouverture). *Soit un objet \mathcal{O} . Sa supercouverture $S(\mathcal{O})$ est l'ensemble des voxels qu'il intersecte.*

Sous cette forme, l'équivalence avec le schéma de numérisation convexe basé sur $\overline{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 1/2)$ devient évidente. Les deux visions possibles du modèle supercouverture sont illustrées Figure 4.2.

La caractérisation par dilatation invite à l'extension puisqu'il est naturel de vouloir considérer des normes autres que $\|\cdot\|_\infty$. En particulier, É. Andres a défini un modèle similaire en se basant sur la norme $\|\cdot\|_1$, le modèle *naïf fermé* [3], $N(\mathcal{O})$, illustré Figure 4.3.

Définition 4.2 (Modèle naïf fermé [3]).

$$\begin{aligned} N(\mathcal{O}) &= (\mathcal{O} \oplus \overline{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_1, 1/2)) \cap \mathbb{Z}^n, \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n; (\mathbf{v} \oplus \overline{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_1, 1/2)) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset \}, \end{aligned}$$

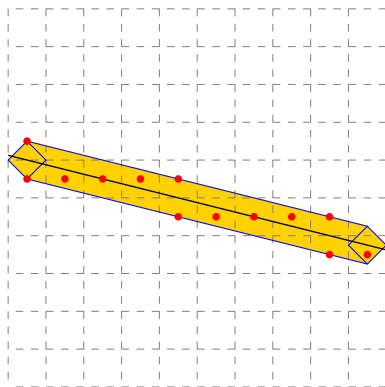
où $\mathcal{B}(\|\cdot\|_1, 1/2)$ est la boule de rayon 1/2 basée sur $\|\cdot\|_1$ et centrée sur l'origine de l'espace et \oplus représente la somme de Minkowski ($A \oplus B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$).

Ces deux modèles possèdent les mêmes propriétés, et de plus, $N(\mathcal{O}) \subseteq S(\mathcal{O})$.

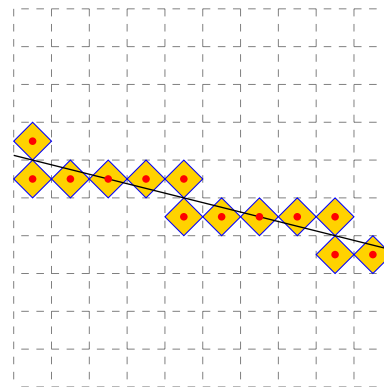
Proposition 4.2 (Propriétés des modèles supercouverture [22, 24] et naïf fermé [3]). *Soient deux objets euclidiens \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 . Nous avons alors :*

- $S(\mathcal{O}_1) = \bigcup_{o \in \mathcal{O}_1} S(o)$,
- $S(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) = S(\mathcal{O}_1) \cup S(\mathcal{O}_2)$,
- $S(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) \subseteq S(\mathcal{O}_1) \cap S(\mathcal{O}_2)$,
- si $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, alors $S(\mathcal{O}_1) \subseteq S(\mathcal{O}_2)$.

De même pour le modèle naïf fermé.



(a) Droite naïve fermée comme ensemble des pixels d'une dilatation particulière de la droite



(b) Droite naïve fermée comme ensembles des pixels dont un voisinage particulier intersecte la droite

FIG. 4.3 – Différentes visions du modèle naïf fermé

Les modèles supercouverture et naïf fermé d'un objet sont très faciles à caractériser globalement et fournissent de bonnes approximations discrètes selon des critères différents ($\|\cdot\|_\infty$ dans le premier cas et $\|\cdot\|_1$ dans le second). Néanmoins, ils ne permettent pas d'atteindre les primitives les plus courantes, à savoir les hyperplans discrets naïfs ou standard. En fait, de manière plus générale, les ensembles discrets k -minimaux sortent de leur cadre. L'image d'un point dans ces modèles n'est pas forcément un unique point discret comme l'illustre la Figure 4.4. Une hypersurface étant simplement une union de points, sa discrétisation par ces modèles, ne sera de ce fait pas exempte de points simples comme sur la Figure 4.5, par exemple, avec le cas d'une droite. De ce point de vue, ces modèles peuvent ne pas sembler pertinents.

É. Andres introduit un dernier modèle sur ce principe, le modèle α -supercouverture ou la supercouverture d'épaisseur α . Ici, au lieu de changer la norme, c'est le rayon de la boule qui varie. Pour ces modèles, les propriétés sont identiques à celles de la supercouverture explicitées Proposition 4.2.

Définition 4.3 (Supercouverture d'épaisseur α [3]). Soient un objet euclidien \mathcal{O} et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. La

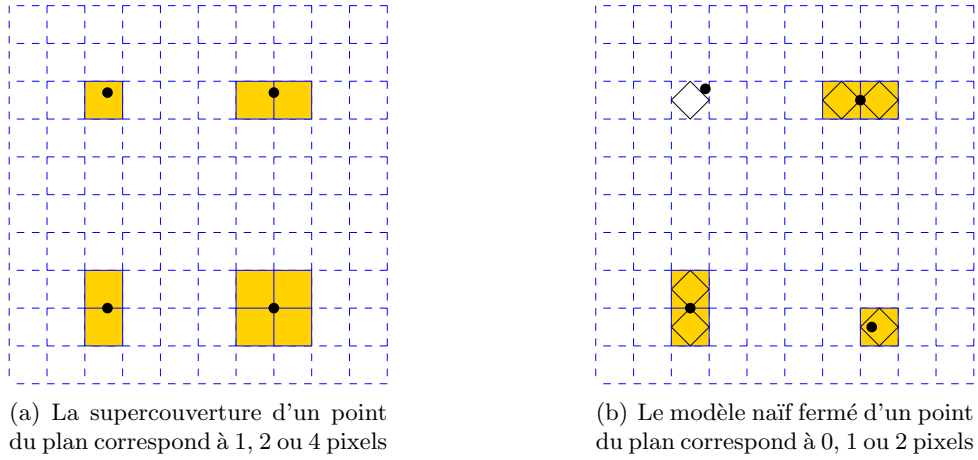


FIG. 4.4 – Modèle discret de points

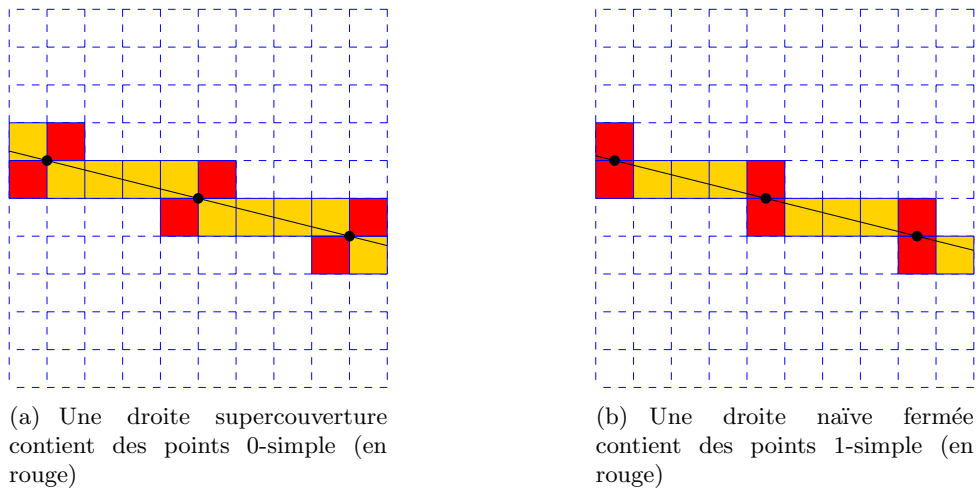


FIG. 4.5 – Droites supercouverture et naïve fermée

supercouverture d'épaisseur α , $S_\alpha(\mathcal{O})$ de \mathcal{O} est telle que :

$$\begin{aligned} S_\alpha(\mathcal{O}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n; d_\infty(\mathbf{v}, \mathcal{O}) \leq \frac{\alpha}{2} \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n; (\mathbf{v} \oplus \overline{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, \alpha/2)) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Les hyperplans discrets minimaux restent également inaccessibles avec cette définition.

En fait, pour comprendre ce qui fait de tous ces modèles de mauvais candidats pour atteindre la minimalité, exprimons le modèle supercouverture d'un hyperplan sous une forme analytique soit une double inégalité.

Théorème 4.3 (Expression analytique d'un hyperplan supercouverture [7]). *Soit un hyperplan euclidien $\mathcal{P}(\mathbf{n}, \mu)$ de vecteur normal $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ et de paramètre de translation $\mu \in \mathbb{R}$. La supercouverture de $\mathcal{P}(\mathbf{n}, \mu)$ satisfait alors :*

$$S(\mathcal{P}(\mathbf{n}, \mu)) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; -\frac{\|\mathbf{n}\|_1}{2} \leq p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}) \leq \frac{\|\mathbf{n}\|_1}{2} \right\}. \quad (4.1)$$

Il est facile de voir que les points simples dans de tels hyperplans sont le fait de paires de voxels $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tels que $p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}_1) = -p_{\mathbf{n}, \mu}(\mathbf{v}_2) = \|\mathbf{n}\|_1/2$. Une manière simple de contourner le problème est alors d'interdire arbitrairement l'une de ces deux valeurs. Pour cela, il suffit de munir l'espace d'une convention d'orientation [4]. En particulier, le modèle standard [4] est construit sur ce principe. Dans ce modèle, la discrétisation d'un hyperplan est un hyperplan discret standard [35], c'est-à-dire 0-minimal. Dans ce cadre, le choix arbitraire menant à la 0-minimalité est global. Nous pouvons tout aussi bien faire ces choix de manière locale, ce qui conduit à la notion de 0-discrétisation et plus généralement de k -discrétisation [16].

Pour finir le tour d'horizon des définitions théoriques, nous pouvons encore mentionner les nombreux résultats mettant en jeu la distance de Hausdorff [16, 72, 73, 79, 80].

4.2 Propriétés des surfaces discrètes

Comme tout échantillonnage, la discrétisation n'assure pas le respect du signal original et une perte d'information significative a lieu si les variations de l'hypersurface sont plus petites que le pas de discrétisation. La discrétisation d'une hypersurface n'assure donc pas nécessairement l'obtention d'une hypersurface discrète. La question est alors de savoir ce que nous attendons d'un tel objet discret et de pouvoir ainsi définir un cadre dans lequel l'analogie discret d'une hypersurface possède les bonnes propriétés pour être considéré comme une hypersurface discrète.

Dans le plan euclidien, il suffit d'avoir la continuité et l'absence de point double pour garantir une courbe simple, ou en d'autres termes, une frontière. En dimension supérieure, il existe des hypersurfaces qui, sous ces deux conditions locales, ne séparent pas l'espace, notamment le ruban de Möbius ou la bouteille de Klein. La caractérisation locale d'une hypersurface orientable, c'est-à-dire dont le complémentaire possède deux composantes connexes distinctes, s'avère plus complexe. Il en va de même dans l'espace discret.

4.2.1 Ensembles discrets minimaux et surfaces discrètes

Une courbe discrète plane est équivalente à un ensemble discret minimal, selon la définition de A. Rosenfeld. Ces objets sont facilement caractérisés de manière locale car ils peuvent être munis d'une paramétrisation, c'est-à-dire d'un parcours, unique à un changement de paramètre près (pixel initial et sens de parcours) [61]. Cela permet d'assurer que la courbe n'est pas en contact avec elle-même - un pixel ne peut être adjacent qu'avec son prédécesseur et son successeur dans la

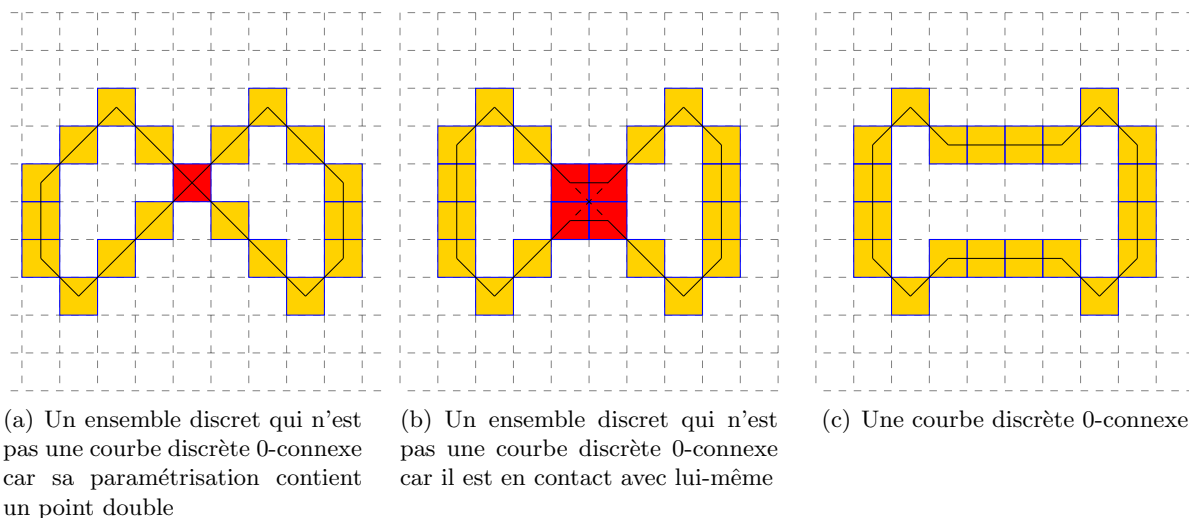
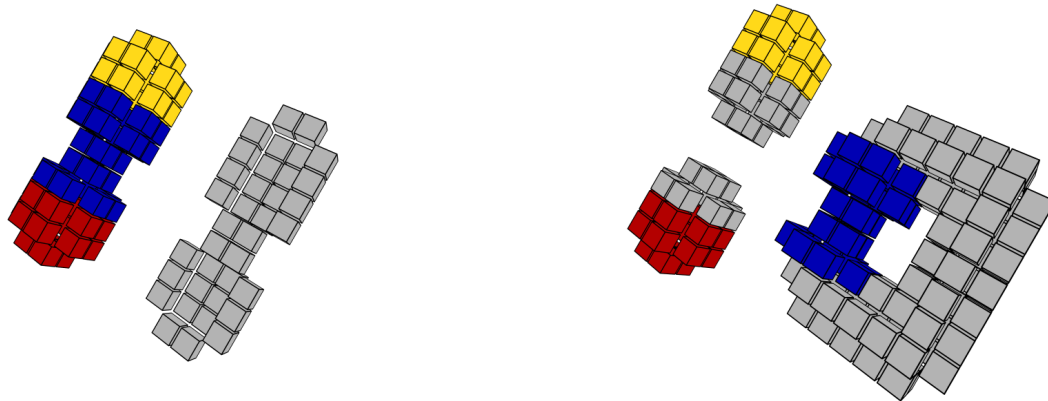


FIG. 4.6 – Illustration des conditions que doit satisfaire une courbe discrète 0-connexe

paramétrisation - et donc par des critères locaux, que le plan discret est bien séparé en uniquement deux composantes distinctes par la courbe. La Figure 4.6 fournit une illustration de ces propos.

La situation se complique en dimension supérieure. Il est naturel d'espérer que l'ensemble des surfaces (voir des hypersurfaces) discrètes orientables corresponde à celui des ensembles discrets minimaux. Comme pour le passage des droites discrètes aux hyperplans discrets, le cas de la dimension 2 est quelque peu trompeur. Tout d'abord, il n'est pas possible de caractériser les ensembles discrets minimaux par des critères locaux comme l'a montré R. Malgouyres [60]. Ils deviennent donc difficile à utiliser en pratique et une définition non locale de surfaces discrètes n'a que peu d'utilité. Ce problème semble lié à l'impossibilité de munir ces ensembles d'une paramétrisation. Des contacts peuvent avoir lieu entre deux parties de la surface sans remettre en cause la minimalité. Au cours d'une analyse locale, il est alors impossible d'assurer qu'il n'y a bien uniquement que deux composantes connexes dans le complémentaire. La Figure 4.7 reprend le contre-exemple proposé par R. Malgouyres dans [60] : l'objet de la Figure 4.7(a) ne peut clairement pas être un ensemble discret 2-minimal puisqu'il sépare l'espace en trois composantes 2-connexes distinctes ; pourtant il est localement équivalent à de tels ensembles comme le montre la Figure 4.7(b).

Cet exemple permet de mettre en évidence la principale carence des ensembles discrets minimaux, ils n'assurent pas que la surface discrète n'est pas en contact avec elle-même. Une analyse locale ne fournissant pas l'information sur le nombre global de composantes connexes du complémentaire, il est impossible de déterminer si un tel contact est nécessaire pour avoir deux composantes distinctes ou s'il en crée d'autres.



(a) Ensemble discret (et une coupe) séparant l'espace en trois composantes...

(b) ... localement équivalent à des ensembles discrets minimaux

FIG. 4.7 – Il n'existe pas de critères locaux pour définir les ensembles discrets minimaux

4.2.2 Une première définition de surface discrète

Dès le début des années 1980, D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld ont proposé une définition de surface discrète plus restrictive que la simple notion d'ensemble minimal [65]. Elle met en jeu deux connexités, une pour l'objet et l'autre pour son complémentaire.

En dimension 2, une courbe discrète 0-connexe est un ensemble 1-minimal. Cette dualité met en jeu la connexité de l'objet en lui-même, il est 0-connexe, et celle de son complémentaire, il est formé de deux composantes 1-connexes distinctes. Dans ce cadre un théorème de Jordan peut être prouvé [76].

Dans le cas tridimensionnel (ou en dimension supérieure), les paires d'adjacence pour un objet et son complémentaire permettant un tel résultat deviennent plus complexes à définir [51, 53, 54, 20]. Toujours est-il que D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld [65] ont introduit, dans le cas tridimensionnel, la notion de (m, n) -surfaces discrètes, où m et n représentent respectivement la connexité de l'objet et celle de son complémentaire. En général, nous considérerons (m, n) comme une paire d'adjacence permettant la satisfaction du critère de Jordan (en dimension 3, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ et $(1, 2)$).

Définition 4.4 (Points de (m, n) -surface [65]). Un voxel \mathbf{v} d'un ensemble discret \mathbb{E} est un *point de (m, n) -surface* s'il satisfait les conditions suivantes :

- (i). $\mathbb{E} \cap \mathcal{N}_0(\mathbf{v})$ a exactement une seule composante m -connexe,
- (ii). $\overline{\mathbb{E}} \cap \mathcal{N}_0(\mathbf{v})$ a exactement deux composantes n -connexes adjacentes à \mathbf{v} ,
- (iii). pour tout voxel \mathbf{w} de \mathbb{E} m -adjacent à \mathbf{v} , \mathbf{w} est n -adjacent aux deux composantes de $\overline{\mathbb{E}} \cap \mathcal{N}_0(\mathbf{v})$ ($\overline{\mathbb{E}}$ étant le complémentaire de \mathbb{E} dans \mathbb{Z}^d).

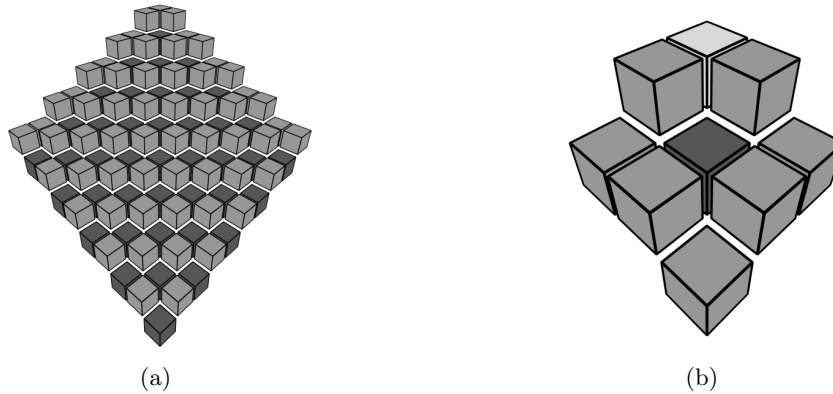


FIG. 4.8 – Les plans discrets naïfs ne sont pas des $(0, 2)$ -surfaces discrètes

Définition 4.5 ((m, n) -surfaces discrètes [65]). Une (m, n) -surface discrète est un ensemble discret \mathbb{E} dont tous les voxels sont des points de (m, n) -surface.

Définition 4.6 ((m, n) -surfaces discrètes fermées [65]). Une (m, n) -surface discrète fermée est une (m, n) -surface discrète de cardinal fini.

Ces caractérisations sont locales puisqu'elles se basent sur des propriétés des voxels et de leur voisinage immédiat. Dans la Définition 4.4, les Conditions (i) et (ii) sont celles que nous pouvons naïvement attendre pour caractériser les ensembles discrets minimaux. Comme l'a montré R. Malgouyres, cela est faux, et c'est seulement l'ajout de la Condition (iii) qui garantit une caractérisation locale en supprimant toute possibilité de contact.

Cette définition s'avère trop restrictive puisqu'elle n'admet pas, par exemple, les plans discrets naïfs. La Figure 4.8 montre un tel plan ; les voxels foncés \mathbf{v} ne sont pas des points de $(0, 2)$ -surface. En effet, sur l'agrandissement nous pouvons voir que le voxel clair viole la Condition (iii) en ne possédant pas de 2-voisins dans l'une des deux composantes de $\overline{\mathbb{E}} \cap \mathcal{N}_0(\mathbf{v})$.

4.2.3 Propositions alternatives

D'autres notions de surfaces discrètes plus générales ont donc été proposées depuis pour palier à ce défaut. En particulier, celles introduites par G. Bertrand et R. Malgouyres [12], les surfaces discrètes fortes, et celles introduites par R. Malgouyres [62], un peu plus tard. Les surfaces discrètes 1-fortes englobent les $(0, 2)$ -surfaces de D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld ainsi que les surfaces discrètes 1-connexes proposées par R. Malgouyres [12]. De plus, elles sont munies à la fois d'une caractérisation globale, que nous présentons ici, et de caractérisations locales [62, 63].

Définition 4.7 (Homotopie discrète). Soient deux ensembles discrets $A \subset B$. Alors, A est dit k -homotopique à B si il est possible de passer de B à A en enlevant successivement des points k -simples.

Définition 4.8 (Homotopie discrète forte[11]). Soit deux ensembles discrets $A \subset B$. A est dit *fortement k -homotopique* à B si tout ensemble C tel que $A \subset C \subset B$ est k -homotopique à B .

Ces propriétés topologiques peuvent être vues comme des analogues discrets naturels de propriétés usuelles du continu.

Définition 4.9 (Surfaces discrètes fortes [12]). Soit un ensemble discret k -minimal \mathbb{E} . Il sépare l'espace en deux composantes k -connexes que nous nommons \mathbb{C}_1 et \mathbb{C}_2 . Alors, \mathbb{E} est une k -surface discrète forte si et seulement si \mathbb{C}_1 est fortement homotopique à $\mathbb{C}_1 \cup \mathbb{E}$ et \mathbb{C}_2 est fortement homotopique à $\mathbb{C}_2 \cup \mathbb{E}$.

Là encore, nous pouvons voir qu'une condition est ajoutée à la simple notion de minimalité pour éviter les contacts ou, en termes topologiques, les singularités de la surface. Celle-ci est moins contraignante que dans la définition de D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld, mais en contre-partie l'expression des conditions locales est moins triviale.

Cette dernière notion de surface discrète résout le problème de l'expressivité limitée des $(0, 2)$ -surfaces discrètes, mais n'est pas générale dans le sens où elle ne permet pas de définir de surfaces discrètes 2-connexes, par exemple.

Nous pouvons encore mentionner d'autres notions de surfaces discrètes, en particulier, les surfaces de simplicité par exemple, qui doivent leur nom à une relation appariant les points simples [25] ou encore les publications [23, 20].

4.3 Conclusion

Cette profusion de définitions montre bien la difficulté de passer du cas bidimensionnel aux dimensions supérieures en conservant une certaine simplicité. La notion de courbe discrète communément acceptée est en relation directe avec les ensembles discrets minimaux. Cette notion de minimalité existe encore en dimensions supérieures, mais n'étant plus caractérisable par des critères locaux, elle ne présente plus un grand intérêt pratique. Pour la remplacer, les définitions de surfaces discrètes sont nombreuses, mais aucune ne s'est imposée par sa simplicité ou par son expressivité. La difficulté vient de l'apparition de configurations pathologiques.

Si nous revenons au cas des courbes, nous pouvons objecter à la définition de A. Rosenfeld, d'être par trop restrictive pour désigner les courbes discrètes simples. Par exemple, un carré discret ou les cercles discrets usuels, sur lesquels nous reviendront plus tard, ne rentrent pas dans son cadre. Or, nous avons pourtant envie de les désigner comme des courbes simples puisque leur complémentaire possède deux composantes connexes distinctes. Mais dans le même temps, ils possèdent des points simples, peu, mais bien présents et qui font qu'ils sont rejetés par la définition de A. Rosenfeld. Ces imperfections discrètes pourraient être vues comme des analogues des imperfections des courbes continues, des points non différentiables ou encore des points singuliers.

De ce point de vue, la définition des quasi-courbes introduite par R. Malgouyres apparaît comme un analogue moins restrictif des courbes discrètes.

Définition 4.10 (Quasi-courbes [62]). Un ensemble discret \mathbb{E} est une *quasi-courbe discrète 0-connexe* s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (i). \mathbb{E} est 0-connexe,
- (ii). pour tout voxel \mathbf{v} de \mathbb{E} , la cardinalité de $\mathcal{N}_0(\mathbf{v}) \cap \mathbb{E}$ est égale à 2,3, ou 4,
- (iii). pour tout cycle 0-connexe élémentaire (c'est-à-dire une configuration de trois voxels deux à deux adjacents) C de \mathbb{E} , il existe deux et seulement deux voxels \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 0-adjacents à des voxels de $\mathbb{E} \setminus C$. De plus aucun voxel de $\mathbb{E} \setminus C$ n'est 0-adjacent à la fois à \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 .
- (iv). Soit un voxel \mathbf{v} de \mathbb{E} 0-adjacent à au moins trois autres voxels de \mathbb{E} . Alors il existe une partition de $\mathcal{N}_0(\mathbf{v}) \cap \mathbb{E}$ en deux sous-ensembles \mathbb{F}_1 et \mathbb{F}_2 tels qu'ils ne soient pas 0-connexes et que dans chacun d'eux, les voxels soient 0-adjacents deux à deux.

La définition de A. Rosenfeld apparaît alors comme un bon analogue de la notion plus restrictive de variété, c'est-à-dire une courbe lisse. Et finalement, la caractérisation locale qu'il en donne correspond bien à cela. Pour être une 1-variété, une courbe doit localement être homéomorphe à une droite. Dans le plan discret, chaque pixel d'une droite discrète naïve ou standard possède uniquement deux voisins et l'homéomorphisme va se traduire par cette condition. Alors, la généralisation des courbes discrètes simples de A. Rosenfeld vers les hypersurfaces est immédiate dès que nous avons une définition qui correspond à l'homéomorphisme local avec un hyperplan dans l'espace discret.

Définition 4.11 (voxels k -fonctionnels). Soit un ensemble discret \mathbb{E} . Un voxel \mathbf{v} de \mathbb{E} est dit k -fonctionnel s'il existe un vecteur $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d$ et un voxel \mathbf{w} de $\mathbb{P}(\boldsymbol{\alpha},]\boldsymbol{\alpha}[_k)$ tel que $[\boldsymbol{\alpha}]_k = 1$ et $\mathcal{N}_0(\mathbf{v}) \cap \mathbb{E}$ est en bijection avec $\mathcal{N}_0(\mathbf{w}) \cap \mathbb{P}(\boldsymbol{\alpha},]\boldsymbol{\alpha}[_k)$.

Définition 4.12 ($(d-1)$ -variété discrètes). Un ensemble discret \mathbb{E} est une $(d-1)$ -variété discrète k -minimale si tous ses voxels sont k -fonctionnels.

Dans la suite, nous allons étudier la discrétisation d'hypersurfaces. Nous prendrons alors soin de vérifier au préalable que ces objets sont orientables et que leurs variations ne sont pas trop petites, vis-à-vis de la résolution, pour être bien captées. En fait, nous garantissons la séparabilité en ne considérant que des objets continus bien formés et nous n'utilisons donc pas vraiment de définition de surfaces pour les étudier. Nous nous assurons simplement de la connexité et de l'absence de points simples pour considérer ces objets discrets comme des hypersurfaces discrètes, ces deux conditions pouvant être vérifiées par une analyse locale. Nous reviendrons quand même sur les définitions de surfaces dans la dernière partie traitant des cercles et hypersphères discrètes.

Chapitre 5

Modèles de discrétisation génériques pour les hypersurfaces

La prépondérance des hyperplans naïfs et standard dans les applications est aisément compréhensible. La propriété topologique principale d'un hyperplan euclidien est d'être la frontière entre deux demi-espaces, c'est-à-dire l'ensemble le plus petit possible qui les sépare, soit le pendant continu des notions discrètes d'ensembles minimaux. Dans les applications, pour caractériser un objet, c'est justement sur ces frontières que la majeure partie de l'intérêt se porte. Elles sont parfois assimilables à des hyperplans, mais plus généralement, à des hypersurfaces. Certaines seulement, car toutes ne sont pas munies de propriétés qui en font des frontières, notamment le ruban de Möbius, la bouteille de Klein et leurs dérivées qui ne sont pas orientables. Notre ambition dans ce chapitre est de mettre en évidence des modèles de discrétisation qui permettent, appliqués à des hypersurfaces orientées, d'obtenir des ensembles discrets k -minimaux, ou, du moins proches de l'être. Dans le chapitre précédent nous avons présenté des modèles de discrétisation qui tendent déjà vers cela. Mais ceux-ci conduisent à la présence de points simples dans les discrétisations qui pourrait être évitée en brisant leur trop grande symétrie.

Notre apport principal est de fournir un modèle générique permettant une caractérisation géométrique valable quel que soit le type d'ensembles k -séparants que nous souhaitons obtenir. Nous proposons en plus des formules analytiques pour une utilisation directe et efficace de ces modèles. En fait, ce chapitre peut être à la fois vu comme une généralisation aux notions de k -adjacence des modèles naïf fermé et supercouverture, et comme une restriction de leur application à des hypersurfaces particulières dont les discrétisations sont munies de bonnes propriétés topologiques et facilement manipulables analytiquement.

5.1 Modèles de discrétisation séparants

Avant toute chose, nous définissons les objets continus que nous manipulons dans ce chapitre.

Définition 5.1 (*m*-variétés sans bord). Une *m*-variété est un espace topologique localement homéomorphe à un espace euclidien de dimension $(m - 1)$.

Définition 5.2 (Hypersurfaces). Une *hypersurface* est une $(d - 1)$ -variété sans bord plongée dans l'espace euclidien de dimension d (\mathbb{R}^d).

Cette définition assure bon nombre des propriétés que nous recherchons. En particulier, une hypersurface, définie de la sorte, ne peut s'intersecter (localement homéomorphe à $\mathbb{R}^{(d-1)}$), et est orientable (le fait d'être sans bord). Une hypersurface a donc bien les propriétés attendues pour être une frontière. Néanmoins, nous ne pouvons pas atteindre simplement l'intérieur et l'extérieur qui lui sont associés. Pour permettre cela, nous définissons implicitement les hypersurfaces que nous manipulons à partir de polynômes sans racine double (des fonctions seulement feraient l'affaire, mais nous utilisons des polynômes par simplicité). Ainsi, nous garantissons que l'hypersurface $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; f(\mathbf{x}) = 0\}$ est la frontière entre l'intérieur d'un objet $\mathcal{I} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; f(\mathbf{x}) < 0\}$ et son extérieur $\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; f(\mathbf{x}) > 0\}$.

La première condition à remplir étant la convergence multigrille, nous allons simplement baser notre premier modèle sur un critère de distance : considérer uniquement les voxels dans un voisinage métrique de l'hypersurface \mathcal{S} . C'est un principe classique et nous retrouvons bien sûr les définitions précédentes de supercouverture, modèle naïf fermé et autres. Notre apport est simplement la généralisation de la définition pour toute norme et tout rayon ainsi que l'application à un objet défini par un polynôme.

Définition 5.3 (Modèle fermé). Soient une norme $\|\cdot\|$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. La *discrétisation fermée* de \mathcal{S} , $\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}(f)$ basée sur la *norme* $\|\cdot\|$ et de *diamètre* ρ est telle que :

$$\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \exists \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\rho}{2} \right\}.$$

Pour un tel modèle, la convergence multigrille est trivialement satisfaite puisque celui-ci se base sur un critère de distance induit par la norme $\|\cdot\|$. De plus, chaque voxel de la discrétisation est plus proche de \mathcal{S} , au sens de la norme utilisée, que n'importe quel voxel hors de la discrétisation. En ce sens, c'est une meilleure approximation discrète de l'hypersurface.

Dans ce cadre très général, il est facile d'obtenir des objets discrets non séparants, voire même non connexes. Garantir de bonnes propriétés topologiques requiert des conditions sur le modèle de discrétisation aussi bien que sur l'hypersurface discrétisée. Il est évident que n'importe quelle norme et n'importe quel diamètre ne vont pas permettre d'obtenir des objets discrets séparants approchant la minimalité. Comme deux voxels \mathbf{v} et \mathbf{w} sont *k*-adjacents si et seulement si $[\mathbf{w} - \mathbf{v}]_k = 1$, les modèles basés sur une norme de *k*-adjacence et un diamètre de $\rho = 1$ sont les candidats les plus prometteurs. Dès lors, nous restreignons notre étude à ces cas particuliers. De plus, pour simplifier les notations, nous posons $\mathfrak{D}_{([\cdot]_k, 1)}(f) = \mathfrak{D}_k(f)$. Dans ces cas, nous sommes sûr que la discrétisation ne peut fusionner les deux composantes distinctes initiales du complémentaire.

Néanmoins, l'utilisation de ces modèles particuliers ne garantit pas totalement la conservation de la topologie. L'hypersurface discrétisée doit, en plus, présenter des caractéristiques telles qu'aucune des deux composantes connexes de son complémentaire, ni ne disparaisse, ni ne se divise lors de la discrétisation. L'existence d'au moins deux composantes connexes discrètes se traduit de manière imagée par la nécessaire existence de voxels aussi bien dans \mathcal{E} que dans \mathcal{I} assez loin de \mathcal{S} pour ne pas appartenir à $\mathfrak{D}_k(f)$. Plus formellement, cela revient à dire qu'il existe $\mathbf{v} \in \mathcal{I} \cap \mathbb{Z}^d$ et $\mathbf{w} \in \mathcal{E} \cap \mathbb{Z}^d$ tels que $(\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \oplus \bar{\mathcal{B}}([\cdot]_k, 1/2)) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Le maintien de l'intégrité de chacune d'elles est plus complexe à assurer sans faire intervenir les paires d'adjacence. Une condition suffisante générale peut néanmoins être énoncée : il faut que, pour tout voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $(\{\mathbf{v}\} \oplus \bar{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 1/2)) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, $(\{\mathbf{v} \oplus \bar{\mathcal{B}}(\|\cdot\|_\infty, 3/2)) \cap \mathcal{S}$ soit connexe. En fait, cela signifie qu'on autorise l'hypersurface discrète à être en contact avec elle-même si cela n'a que des conséquences locales.

Sous ces conditions, d'abord sur le modèle, puis sur l'hypersurface à discrétiser, la discrétisation $\mathfrak{D}_k(f)$ est k -séparante. En effet, nous avons garanti que son complémentaire possède exactement deux composantes k -connexes distinctes. Malheureusement, les modèles fermés ne permettent pas d'atteindre les objets discrets minimaux. Nous avons déjà illustré ce problème pour les cas particuliers des modèles supercouverture et naïf fermé. Il provient de leur forte symétrie et nous allons donc chercher à la casser.

Nous avons besoin de pouvoir orienter l'hypersurface \mathcal{S} , pour proposer des modèles asymétriques. Cela est possible suite aux restrictions faites précédemment sur le polynôme f : il n'admet pas de racines doubles. Il devient alors facile de proposer un premier modèle non symétrique.

Définition 5.4 (Modèle semi-ouvert positif). Soient une norme $\|\cdot\|$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. La *discrétisation semi-ouverte positive* de \mathcal{S} , $\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}^{+*}(f)$ basée sur la norme $\|\cdot\|$ et de diamètre ρ est telle que :

$$\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}^{+*}(f) = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{E} \cup \mathcal{S}) \cap \mathbb{Z}^d; \exists \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ and } \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| < \rho \right\}.$$

Ce modèle présente autant de bonnes propriétés que le précédent puisqu'il se base là-encore sur un critère de distance relatif à la norme utilisée, à ceci près qu'ici nous avons une approximation positionnée d'un seul côté de l'hypersurface, l'extérieur selon notre convention. Il est possible de définir un modèle semi-ouvert négatif, finalement équivalent à celui-ci en considérant le polynôme opposée de f , $-f$.

Les discrétisations $\mathfrak{D}_{([\cdot]_k, 1)}^{+*}(f)$, notées plus simplement $\mathfrak{D}_k^{+*}(f)$, sont k -séparantes et nous avons même un résultat plus fort.

Théorème 5.1. $\mathfrak{D}_k^{+*}(f)$ est le plus petit ensemble discret (au sens de l'inclusion) k -séparant approximant \mathcal{S} par l'extérieur (selon notre convention) et basé sur un critère de distance (en l'occurrence celle induite par $[\cdot]_k$).

Démonstration. Puisque la k -adjacence entre voxels se caractérise par la norme de k -adjacence, alors deux voxels \mathbf{v} et \mathbf{w} sont k -voisins si et seulement si $[\mathbf{v} - \mathbf{w}]_k = 1$ (Théorème 2.6). Soit \mathcal{S}_2 et

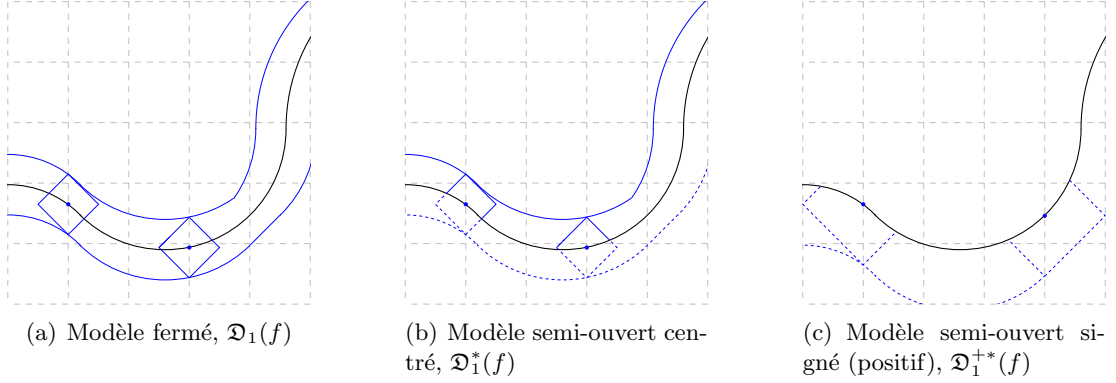


FIG. 5.1 – Illustration des définitions de nos différents modèles de discrétisation

\mathcal{E}_2 tels qu'aucun point de \mathcal{I} ne soit k -adjacent à un point de \mathcal{E}_2 et tels que $\{\mathcal{I}, \mathcal{S}_2, \mathcal{E}_2\}$ forme une partition de \mathbb{R}^d . En d'autres termes, nous avons $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d$, si $[\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k = 1$, alors $\mathbf{y} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{S}_2$. Cela est vérifié si et seulement si : $\mathcal{S}_2 \supseteq \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cup \mathcal{E}; \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}, [\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k < 1\}$. \square

Avec ce genre de modèles, nous pouvons espérer définir des discrétisations qui soient des ensembles discrets minimaux. Comparativement au modèle fermé, l'inconvénient est ici que l'approximation n'est située que d'un côté de l'hypersurface support. Néanmoins, nous avons toujours la possibilité de construire un modèle semi-ouvert centré.

Définition 5.5 (Modèle centré semi-ouvert). Soient la norme $\|\cdot\|$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$. La *discrétisation semi-ouverte* $\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}^*(f)$ basée sur la norme $\|\cdot\|$ et de *diamètre* ρ , de l'hypersurface \mathcal{S} est définie par :

$$\mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \rho)}^*(f) = \mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \frac{\rho}{2})}^-(f) \cup \mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \frac{\rho}{2})}^{+*}(f),$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \frac{\rho}{2})}^{+*}(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{E} \cup \mathcal{S}) \cap \mathbb{Z}^d; \exists \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ et } \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| < \frac{\rho}{2} \right\}, \\ \mathfrak{D}_{(\|\cdot\|, \frac{\rho}{2})}^-(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{S}) \cap \mathbb{Z}^d; \exists \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ et } \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\rho}{2} \right\}. \end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, cela revient à l'union des voxels $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$, tels que $f(\mathbf{v}) \geq 0$, contenus dans le déplacement d'une boule ouverte le long de \mathcal{S} et de ceux, tels que $f(\mathbf{v}) \leq 0$, contenus dans le déplacement d'une boule fermée le long de \mathcal{S} . Ce modèle présente des propriétés similaires à celles du modèle semi-ouvert positif quand il s'appuie sur une norme de k -adjacence et un diamètre de 1.

Théorème 5.2. $\mathfrak{D}_{([\cdot]_k, 1)}^*(f) = \mathfrak{D}_k^*(f)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) discrétisation semi-ouverte centrée k -séparant \mathbb{Z}^d .

Démonstration. Soient les ensembles :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{I}; \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}, [\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k > \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}; \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}, [\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k \geq \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{E}_2).\end{aligned}$$

Soient maintenant $\mathbf{x} \in \mathcal{I}_2$ et $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_2$. Vérifions que $[\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k > 1$. Il existe un ensemble \mathcal{M} tel que :

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d; [\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k = [\mathbf{x} - \mathbf{z}]_k + [\mathbf{z} - \mathbf{y}]_k \right\}$$

En particulier, puisque \mathcal{S} sépare \mathbf{x} et \mathbf{y} , $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Nous avons alors $[\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k = [\mathbf{x} - \mathbf{z}]_k + [\mathbf{z} - \mathbf{y}]_k$. Or, $[\mathbf{x} - \mathbf{z}]_k \geq 1/2$ et $[\mathbf{z} - \mathbf{y}]_k > 1/2$ puisque $\mathbf{x} \in \mathcal{I}_2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_2$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{S}_2$, donc $[\mathbf{x} - \mathbf{y}]_k > 1$. \square

Ces modèles semi-ouverts ne présentent bien sûr pas le défaut majeur des modèles fermés, nous les avons construits pour cela. Il est alors possible de poser des conditions simples à la minimalité locale des discrétisations auxquelles ils conduisent. Par locale, rappelons que nous entendons que la propriété est vraie pour une portion déterminée de l'hypersurface.

Définition 5.6 (Portion discrétisée d'hypersurface). Soit \mathcal{A} , une partie simplement connexe de \mathcal{S} . Sa discrétisation, la *portion discrétisée* de \mathcal{S} , $|\mathfrak{D}_k(f)|_{\mathcal{A}}$ est la sous-partie de $\mathfrak{D}_k(f)$ telle que les voxels sélectionnés sont ceux dont les voisinages intersectent \mathcal{A} . De même pour les autres modèles de discrétisation.

La minimalité est une propriété d'un ensemble dans un ensemble. Quand nous considérons une hypersurface discrète minimale, elle l'est implicitement dans \mathbb{Z}^d . Pour une portion d'hypersurface discrète, il est nécessaire de trouver un sur-ensemble discret pertinent pour exprimer cette propriété.

Définition 5.7 (Espace discret local à une portion discrétisée). Soit une portion discrétisée de \mathcal{S} , $|\mathfrak{D}_k(f)|_{\mathcal{A}}$. Son *espace discret local* est l'union d'elle-même et de l'ensemble des voxels du complémentaire de la discrétisation de \mathcal{S} k -adjacents à au moins un voxel de la portion discrétisée :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}} = |\mathfrak{D}_k(f)|_{\mathcal{A}} \cup \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathfrak{D}_k(f); \exists \mathbf{w} \in |\mathfrak{D}_k(f)|_{\mathcal{A}}, [\mathbf{v} - \mathbf{w}]_k = 1 \right\}.$$

De même pour les autres modèles de discrétisation.

Cette définition un peu complexe assure que nous disposons de toute l'information nécessaire pour juger localement de la minimalité d'un tracé, en particulier suffisamment de voxels du complémentaire de part et d'autre de l'hypersurface discrète. Le résultat qui suit fait intervenir la

normale de l'hypersurface, c'est-à-dire non plus la notion de continuité que nous avons considérée jusque-là, mais plutôt la notion plus restrictive de dérivabilité. Le fait d'utiliser des polynômes pour définir les hypersurfaces \mathcal{S} assure la dérivabilité. Nous pouvons donc formuler un résultat sur la minimalité d'une portion d'hypersurface.

Théorème 5.3. *Soit \mathcal{A} une partie simplement connexe de \mathcal{S} telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, la normale à \mathcal{S} en \mathbf{x} , $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ne soit pas telle que :*

$$(i). \text{ pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, d\}^2, |n_i(\mathbf{x})| = |n_j(\mathbf{x})|,$$

$$(ii). \text{ il existe } j \in \{1, \dots, d\} \text{ tel que, pour tout } i \in \{1, \dots, d\} \text{ avec } i \neq j, n_i(\mathbf{x}) = 0.$$

Alors, $|\mathfrak{D}_k^*(f)|_{\mathcal{A}}$ et $|\mathfrak{D}_k^{+*}(f)|_{\mathcal{A}}$ sont des ensembles k -minimaux dans leurs espaces discrets locaux respectifs. En particulier, pour $|\mathfrak{D}_0^*(f)|_{\mathcal{A}}$ et $|\mathfrak{D}_0^{+*}(f)|_{\mathcal{A}}$, la Condition (ii) est suffisante et pour $|\mathfrak{D}_{d-1}^*(f)|_{\mathcal{A}}$ et $|\mathfrak{D}_{d-1}^{+*}(f)|_{\mathcal{A}}$, la Condition (i) est suffisante.

Démonstration. Nous prouvons le résultat pour $|\mathfrak{D}_k^{+*}(f)|_{\mathcal{A}}$ sachant qu'il peut être prouvé de manière identique pour $|\mathfrak{D}_k^*(f)|_{\mathcal{A}}$. Par définition, nous avons $\mathcal{B}_k(1) = \mathcal{B}_0(1) \cap \mathcal{B}_{d-1}(d-k)$. Donc, si nous montrons qu'une portion d'hypersurface discrétisée 0-séparante est 0-minimale si nulle part la normale ne vérifie la Condition (ii) et qu'une portion d'hypersurface discrétisée $(d-1)$ -séparante est $(d-1)$ -minimale si nulle part la normale ne vérifie la Condition (i), alors le résultat sur la k -minimalité mettant en jeu les deux conditions s'en déduit, puisque localement $\mathcal{B}_k(1)$ se comporte soit comme $\mathcal{B}_0(1)$, soit comme $\mathcal{B}_{d-1}(d-k)$. Soit une discrétisation $\mathfrak{D}_k^{+*}(f)$ telle qu'elle ne soit pas k -minimale. Cela signifie qu'il existe un voxel $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_k^{+*}(f)$ qui n'est pas adjacent à une des composantes k -connexes du complémentaire. En d'autres termes, pour tout voxel \mathbf{w} tel que $[\mathbf{w} - \mathbf{v}]_k = 1$, $f(\mathbf{w}) \geq 0$, l'hypersurface \mathcal{S} ne sépare pas le k -voisinage de \mathbf{v} . Pourtant, le fait que \mathbf{v} appartienne à la discrétisation indique que la boule basée sur la norme de k -adjacence et de rayon 1 centrée en \mathbf{v} est intersectée par \mathcal{S} . Au final, \mathcal{S} n'intersecte qu'une seule hyperface de $\mathcal{B}_k(1) \oplus \{\mathbf{v}\}$. Pour que cela soit possible, il est nécessaire, comme f est de classe \mathcal{C}_∞ , que localement la normale à l'hypersurface soit identique à la normale à cette hyperface. Dans le cas de boules basées sur les normes de 0- et $(d-1)$ -adjacence, les normales aux hyperfaces \mathbf{n} sont respectivement telles qu'il existe un unique $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $n_i \neq 0$, et tels que $|n_1| = \dots = |n_d|$, d'où les conditions du théorème. \square

Nous avons finalement défini un cadre de discrétisation dans lequel, partant d'une hypersurface, non pas quelconque, mais vérifiant un nombre de propriétés nécessaires, et à l'aide de modèles de discrétisation génériques et très formels (ils sont basés sur un critère global de distance à l'hypersurface), nous sommes capables de garantir que l'ensemble discret résultant est séparant et même localement minimal. Cependant, les modèles de discrétisation sont pour l'instant définis sous une forme géométrique mêlant distance dans l'espace et évaluation d'une fonction et les discrétisations accessibles sont donc difficilement manipulables en tant qu'objets discrets à part entière.

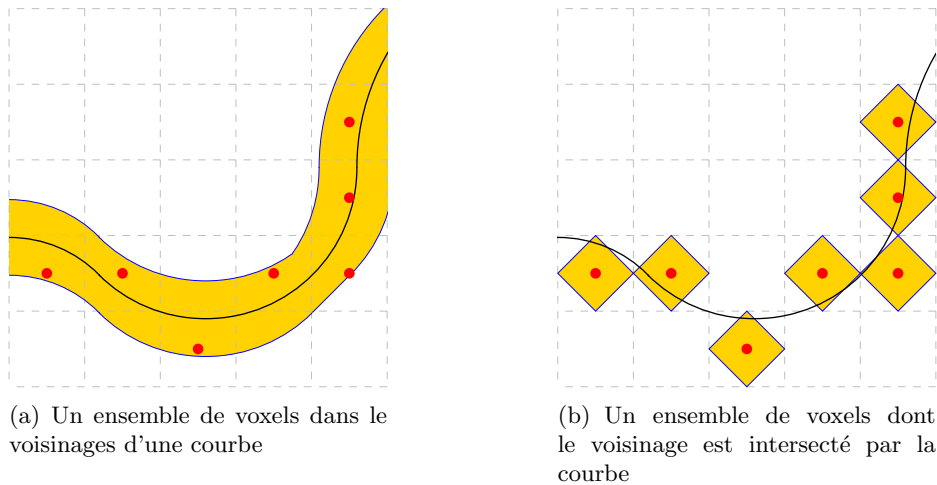


FIG. 5.2 – Illustration des deux visions possibles d'une discrétisation basée sur un critère de distance (norme de 1-adjacence en dimension 2)

5.2 Caractérisation analytique

Notre but est maintenant de proposer une caractérisation analytique des modèles de discrétisation présentés précédemment afin de pouvoir les utiliser en pratique. Nous cherchons à disposer de représentations globales et concises des discrétisations qui permettent d'accéder facilement aux propriétés locales, c'est-à-dire aux voxels qui les composent. Encore une fois, l'espace euclidien nous sert de référence. Nos discrétisations sont construites à partir d'hypersurfaces. Pour les manipuler simplement, nous avons fait le choix de les définir implicitement par une fonction. En cela, nous perdons une part d'expressivité, certaines hypersurfaces restant hors d'atteinte. Mais cette forme analytique nous fournit un plus grand contrôle et une plus grande compréhension de celles encore accessibles. Nous allons chercher à obtenir le même type de représentations pour les discrétisations issues de nos modèles. Elles ne se résumeront pas à une simple égalité comme dans le cas continu, mais plutôt, comme nous réalisons une approximation, à une double inégalité. C'est d'ailleurs déjà sous une telle forme arithmétique que les hyperplans discrets sont souvent définis.

Jusque là, nous avons considéré une discrétisation comme la restriction du voisinage d'une hypersurface à ses points discrets. D'une manière équivalente, une discrétisation basée sur un critère de distance est l'ensemble des voxels dont un voisinage particulier est intersecté par l'hypersurface. Ces deux visions sont illustrées Figure 5.2. La seconde représentation permet de déterminer la discrétisation simplement : puisque l'hypersurface intersecte le voisinage du voxel, cela signifie que la fonction qui la définit prend des valeurs aussi bien positives que négatives dans ce sous-espace. Si l'hypersurface n'intersectait pas le voisinage, alors le signe de la fonction y serait constant. Pour déterminer l'appartenance d'un voxel à la discrétisation, nous avons simplement

à nous assurer que les extremums atteints par f dans le voisinage du voxel encadrent 0. Un voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ appartient à la discrétisation $\mathfrak{D}_{\|\cdot\|,1}(f)$ si, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^d$:

$$\max_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq 1/2} (f(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})) \geq 0 \geq \min_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq 1/2} (f(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})),$$

condition qui peut être ré-écrite :

$$\min_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq 1/2} (f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})) \leq f(\mathbf{v}) \leq \max_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq 1/2} (f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})).$$

Pour simplifier les écritures, nous introduisons une définition de la variation de f :

Définition 5.8. La variation de f entre un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et son translaté par un vecteur $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^d$ est :

$$\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}).$$

D'après les restrictions imposées sur l'hypersurface \mathcal{S} , nous pouvons, de plus, réduire l'espace de définition de $\boldsymbol{\varepsilon}$: aucune des composantes du complémentaire ne peut être vide ; cela signifie que l'hypersurface n'est pas incluse entièrement dans le voisinage d'un point discret et donc qu'elle y entre et en sort. L'analyse se restreint donc uniquement à l'enveloppe du voisinage. Cela nous conduit à la caractérisation analytique suivante de nos divers modèles :

Théorème 5.4 (Caractérisation analytique de nos modèles). *La discrétisation fermée $\mathfrak{D}_k(f)$ de l'hypersurface \mathcal{S} se caractérise analytiquement de la manière suivante :*

$$\mathfrak{D}_k(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{[\boldsymbol{\varepsilon}]_k=1/2} \{ \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v}) \} \leq f(\mathbf{v}) \leq \max_{[\boldsymbol{\varepsilon}]_k=1/2} \{ \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v}) \} \right\}.$$

De la même manière, les autres modèles, basés sur les normes d'adjacence et un diamètre de 1, appliqués à des hypersurfaces conduisent à des formes analytiques :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_k^*(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{[\boldsymbol{\varepsilon}]_k=1/2} \{ \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v}) \} \leq f(\mathbf{v}) < \max_{[\boldsymbol{\varepsilon}]_k=1/2} \{ \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v}) \} \right\}. \\ \mathfrak{D}_k^{+*}(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; 0 \leq f(\mathbf{v}) < \max_{[\boldsymbol{\varepsilon}]_k=1} \{ \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v}) \} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons atteint un de nos objectifs, soit : dériver des définitions géométriques une forme analytique, donc théoriquement calculatoire, permettant la localisation immédiate de points. Comme recherché, c'est une caractérisation à la fois globale et facilement utilisable pour déterminer les voxels composant l'objet. En outre, nous n'avons pas rajouté d'hypothèses et nous avons simplifié le problème, puisque l'enveloppe du voisinage, et non plus le voisinage tout entier, est maintenant suffisante pour calculer l'appartenance d'un voxel à la discrétisation. Pour autant, ce dernier point reste une difficulté pratique, puisqu'il nécessite la recherche d'un minimum (ou/et

d'un maximum) de la fonction f sur une union d'objets linéaire, les hyperfaces du voisinage (en dimension 2, 4 arêtes, en dimension 3, 8 ou 16 faces, ...) et requiert des calculs en nombres flottants dont il est difficile de garantir la précision.

Le cas des hyperplans est particulier, puisque le vecteur normal est constant. Les calculs sont alors possibles et conduisent à retrouver les formes analytiques des hyperplans discrets minimaux.

5.3 Approximations pratiques

Il est évident que la nécessité de comparer des valeurs réelles nous empêche de garantir que le calcul informatique de l'ensemble des voxels de la discrétisation est bien l'ensemble discret théoriquement attendu. Nos modèles formels ne peuvent donc être qu'approchés. En conséquence, il nous semble justifié de proposer des approximations contrôlées de ceux-ci. Par contrôlée, nous entendons que l'imprécision est volontaire et que ses conséquences sur l'ensemble discret résultant sont parfaitement maîtrisées, en particulier qu'il est contenu dans la discrétisation théorique et qu'il est séparant. Pour atteindre cela, nous restreignons une dernière fois la définition de nos hypersurfaces \mathcal{S} , nous les définissons implicitement par des polynômes de degré n à coefficients dans \mathbb{N} ou de manière équivalente dans \mathbb{Q} . Le calcul d'un tel polynôme f en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^d$ ne met en jeu que des nombres rationnels et se fait en nombres entiers, c'est-à-dire rapidement, facilement et de manière exacte. En conséquence, nous allons introduire des approximations de nos modèles ne mettant en jeu qu'un nombre fini de points à coordonnées rationnelles pour assurer autant une grande rapidité d'exécution qu'une approximation contrôlée. Bien entendu, les deux objectifs sont diamétralement opposés, aller vite, c'est faire le moins de calculs possibles et donc perdre en précision.

Pour calculer rapidement, il est déjà possible de tirer parti du fait que nos discrétisations sont définies par des formes analytiques mettant en jeu des variations du polynôme f , $\Delta_\varepsilon f(\mathbf{v})$. En effet, le calcul de celles-ci peut se faire via un développement de Taylor-Young. Il conduit à un polynôme, toujours à coefficient dans \mathbb{Q} , mais plus simple à calculer puisque de degré plus faible. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \varepsilon) \\ &= f(\mathbf{x}) - \left(f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^i f}{\partial x_j^i}(\mathbf{x}) \frac{\varepsilon_j^i}{i!} \right) \right), \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^i f}{\partial x_j^i}(\mathbf{x}) \frac{\varepsilon_j^i}{i!} \right). \end{aligned}$$

Le calcul du développement est coûteux, mais il n'est à faire qu'une seule fois au préalable. Donc, dans le cas d'un grand nombre de voxels à tester ou de la construction d'un algorithme, ce choix est judicieux.

Nous définissons de bonnes approximations simples à calculer, ne nécessitant la prise en compte que d'un ensemble fini de points à coordonnées rationnelles. La connaissance de f en certains points de l'enveloppe du voisinage d'un voxel est en effet suffisante pour approcher la discrétisation de manière contrôlée.

Définition 5.9 (Discrétisé de voisinage). Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Nous appelons discrétisé de voisinage de diamètre ρ , l'ensemble de points $\mathbb{B}_k(\rho)$ tel que :

$$\mathbb{B}_k(\rho) = \left\{ \mathbf{x} \in \{-\rho, 0, \rho\}^d; [\mathbf{x}]_k = \rho \right\}$$

Définition 5.10 (Approximations analytiques). L'approximation de la discrétisation fermée $\tilde{\mathfrak{D}}_k(f)$ de l'hypersurface \mathcal{S} se caractérise analytiquement de la manière suivante :

$$\tilde{\mathfrak{D}}_k(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(\frac{1}{2})} \{\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v})\} \leq f(\mathbf{v}) \leq \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(\frac{1}{2})} \{\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v})\} \right\}.$$

De la même manière, les autres modèles, basés sur les normes d'adjacence et un diamètre de 1, appliqués à des hypersurfaces conduisent à des formes analytiques.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_k^*(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(\frac{1}{2})} \{\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v})\} \leq f(\mathbf{v}) < \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(\frac{1}{2})} \{\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v})\} \right\}. \\ \mathfrak{D}_k^{+*}(f) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; 0 \leq f(\mathbf{v}) < \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(1)} \{\Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} f(\mathbf{v})\} \right\}. \end{aligned}$$

En fait, la seule erreur de ces approximations est de ne pas sélectionner les voxels pour lesquels l'hypersurface ne coupe qu'une seule hyperface de leur voisinage. Pour mémoire, ce sont les configurations qui empêchent les modèles semi-ouverts d'atteindre la minimalité. Nous reviendrons sur ce point plus loin, mais la Figure 5.3 qui illustre la différence entre une discrétisation exacte et son approximation donne une idée de ce qu'on peut attendre comme résultat concernant la minimalité. Ces configurations restent marginales du fait des restrictions initialement imposées aux hypersurfaces \mathcal{S} . Une première propriété évidente de ces approximations sont d'être des sous-ensembles des discrétisations exactes.

Proposition 5.5. *Soit une hypersurface \mathcal{S} définie à partir d'un polynôme f . Nous avons :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_k(f) &\subseteq \mathfrak{D}_k(f), \\ \tilde{\mathfrak{D}}_k^*(f) &\subseteq \mathfrak{D}_k^*(f), \\ \tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(f) &\subseteq \mathfrak{D}_k^{+*}(f). \end{aligned}$$

Démonstration. Trivialement, au lieu de considérer l'enveloppe entière de la boule, nous restreignons l'étude à l'un de ses sous-ensembles. En ce sens, si ce dernier permet d'affirmer qu'un

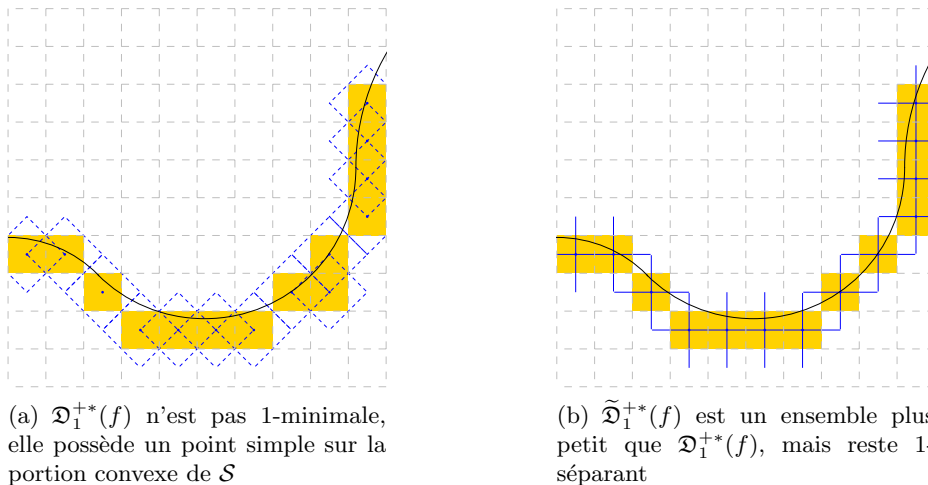


FIG. 5.3 – Différence entre le modèle semi-ouvert positif et son approximation

voxel appartient à l'approximation, considérer l'enveloppe entière conduit à la même conclusion pour ce voxel. □

Pour autant, elles conservent la propriété topologique principale des modèles, à savoir être des ensembles k -séparants.

Proposition 5.6 (Approximations et ensembles discrets séparants). *Soit une hypersurface \mathcal{S} définie à partir d'un polynôme f . $\tilde{\mathfrak{D}}_k(f)$, $\tilde{\mathfrak{D}}_k^*(f)$ et $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(f)$ sont des ensembles k -séparants.*

Démonstration. Supposons que $\tilde{\mathfrak{D}}_k(f)$ n'est pas k -séparant, c'est-à-dire qu'il existe deux voxels $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in (\mathbb{Z}^d \setminus \tilde{\mathfrak{D}}_k(f))$ tels qu'ils soient k -adjacents et tels que le segment $[\mathbf{vw}]$ intersecte \mathcal{S} . Or, le milieu \mathbf{x} de $[\mathbf{vw}]$ est tel que $\mathbf{x} = (\mathbb{B}_{1/2,k} \oplus \mathbf{v}) \cap (\mathbb{B}_{1/2,k} \oplus \mathbf{w})$. Puisque nous avons contraint \mathcal{S} pour qu'elle ne soit pas entièrement dans le voisinage d'un voxel, alors forcément, pour l'un des voxels \mathbf{v} ou \mathbf{w} l'évaluation de f pour les points du discrétisé de son voisinage n'a pas toujours le même signe. Par conséquent l'un des deux voxels appartient à $\tilde{\mathfrak{D}}_k(f)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale et prouve le résultat. Il en va de même pour les autres approximations. □

Ces approximations sont contrôlées dans le sens donné plus haut : elles sont incluses dans les discrétisations théoriques et sont des ensembles discrets séparants. Nous pourrions imaginer considérer un ensemble de points ε de l'enveloppe du voisinage plus conséquent pour améliorer la précision, mais le gain en qualité reste faible, la perte de simplicité importante, et aucune propriété nouvelle ne vient compenser cela.

5.4 Conclusion et perspectives

Nous venons de voir que le cadre de discrétisation que nous avons défini ne peut pas être utilisé en pratique puisqu'il faut étudier les variations d'une fonction sur des ensembles réels. Néanmoins, il est possible de définir de bonnes approximations incluses dans les discrétisations théoriques. Au final, ces approximations sont plus simples et possèdent de meilleures propriétés topologiques puisqu'elles restent séparantes, mais sont des ensembles plus petits. Bien sûr, tout cela n'est valable que pour des hypersurfaces particulières. Pour résumer, celles définies implicitement par une fonction f satisfaisant :

- (i). f est un polynôme de degré n à coefficient dans \mathbb{Q} sans point double,
- (ii). il existe des points discrets de l'intérieur et de l'extérieur de \mathcal{S} suffisamment loin d'elle pour ne pas appartenir à sa discrétisation.
- (iii). pour toute paire de points de \mathcal{S} proches, la restriction de \mathcal{S} à un petit espace local les englobant est connexe.

Dans le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées, les modèles de discrétisation et les approximations restent valables. Simplement, \mathcal{S} ne se discrétise pas en un ensemble séparant. Les modèles et leur approximation, basés sur les normes d'adjacence, assurent que les composantes connexes initiales du complémentaire ne peuvent fusionner dans l'espace discret, par contre, leur disparition ou leur division est possible. Dans beaucoup de cas, une résolution plus fine (nous n'avons considéré que le cas d'un pas de discrétisation de 1, soit la grille formée par \mathbb{Z}^d) peut permettre de vérifier les conditions indiquées et contourner ainsi ces limites. Nos conditions peuvent sembler trop restrictives. Certains points de rebroussement, par exemple, quelle que soit l'échelle avec laquelle nous les analysons, violeront toujours la Condition (iii) alors que nos modèles aussi bien que nos approximations les discrétisent toujours en ensembles k -séparants. Par contre, leur présence empêchera systématiquement d'atteindre la notion de minimalité.

Dans cette partie, nous avons essayé de voir comment concilier les notions d'hypersurfaces discrètes et les modèles de discrétisation. La minimalité pourtant moins restrictive que les définitions de surfaces discrètes est déjà difficile à atteindre. Cela conforte l'idée que la définition de courbes discrètes qu'étendent les définitions d'hypersurfaces discrètes est trop contraignante. Nos discrétisations d'hypersurfaces possèdent souvent quelques points simples et si nous comparons à la dimension 2, semblent plutôt étendre les quasi-courbes proposées par R. Malgouyres.

Pour finir, il est important de noter qu'il existe une autre approche de la notion d'hypersurface discrète. Elle se base sur les complexes cellulaires. Dans ce cadre, la frontière entre deux objets discrets est la frontière entre les voxels de l'intérieur et ceux de l'extérieur et n'est donc pas composée de points discrets mais d'éléments de contact entre voxels, c'est-à-dire, faces, arêtes, ... Le problème de la minimalité ne se pose plus et il y est plus simple de définir une notion d'hypersurface. Ainsi, quand il s'agit de travailler sur des données déjà sous forme discrète, c'est l'approche la plus pertinente. Par contre, il existe à notre connaissance très peu, voire aucun travaux, sur

la discrétisation de frontière continue en de tels objets. Le problème principal est sans doute le fait qu'on ne manipule pas une seule classe d'objets et qu'il est donc difficile d'obtenir une caractérisation pratique : dans le cas classique, tous les éléments sont des voxels, ici, il y a autant d'éléments différents que de dimensions dans l'espace considéré...

Il est intéressant de noter que finalement, les hyperplans apparaissent comme des cas idéaux. Les normes y sont équivalentes, la courbure ne variant pas, le tracé sépare toujours le voisinage discrétisé d'un voxel. Ainsi l'étude des objets linéaires est plus simple, et leurs propriétés plus fortes. Néanmoins, il reste encore beaucoup à faire pour certains objets linéaires, comme les droites dans l'espace tri-dimensionnel. En effet, les modèles de discrétisation présentés ne mènent à rien dans ce cadre, si ce n'est le modèle supercouverture [3]. En particulier, le modèle naïf fermé d'une droite peut ne pas être connexe. Bien que cela semble paradoxal, l'étude des courbes 3D et celle des surfaces sont généralement traitées séparément. Par exemple, C.A. Wüthrich et C. Lincke proposent des modèles de discrétisations différents pour les courbes [84] et les surfaces [59]. Leurs modèles pour les surfaces sont d'ailleurs très proches de ce que pourraient être des définitions géométriques de nos approximations. Pour en revenir aux droites, la courbe la plus simple à étudier, le cas de la 0-connexité est de mieux en mieux maîtrisé. Bien sûr, il existe depuis longtemps des algorithmes de tracé, mais les travaux d'O. Figueiredo et J.-P. Reveillès [30, 31] fournissent la première caractérisation géométrique simple. De plus, ils introduisent un algorithme de détermination des voxels d'une droite simple et élégant. Pour les comparer aux modèles de discrétisation de surfaces, c'est une caractérisation semi-ouverte positive. L'extension a été réalisée récemment en dimension supérieure par F. Feschet et J.-P. Reveillès [29]. Nous avons aussi publié sur le domaine en proposant une caractérisation à la fois analytique et géométrique d'une droite discrète selon un critère de distance globale tel qu'elle soit la plus fine possible et 0-connexe [81]. Ces modèles géométriques appliqués aux plans semblent conduire à des ensembles discrets minimaux, soit des plans standard et naïfs entre autres. De même, le cas des droites devrait pouvoir être facilement muni d'une caractérisation géométrique. Au contraire, la 1-connexité reste une énigme, surtout en cherchant à unifier modèles de courbes et de surfaces. Nous étudions actuellement ces problèmes avec Martine Dexet.

Chapitre 6

Applications : Cercles et hypersphères discrètes

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le cas particulier des cercles et des hypersphères discrètes. Parmi les hypersurfaces, ce sont en effet celles qui ont été les plus étudiées et pour lesquelles nous disposons donc de résultats auxquels confronter nos travaux. Nous commençons par détailler les approches algorithmiques et les critères qui les définissent. Ensuite, nous présentons les caractérisations analytiques, plus globales et plus récentes. En particulier, nous insisterons sur l'intérêt de l'utilisation d'une épaisseur non constante. Enfin, nous terminons ce chapitre en appliquant nos modèles de discrétisation aux hypersphères et aux cercles et en recoupant nos résultats avec ceux présentés précédemment.

6.1 Cercles discrets algorithmiques

6.1.1 Paramètres entiers

À partir des années 1960, des algorithmes de tracé de primitives géométriques ont commencé à faire leur apparition. En effet, le développement des premiers traceurs à commandes numériques nécessitait des algorithmes efficaces pour le tracé des primitives courantes, en premier lieu, les segments de droite, mais très rapidement aussi, les arcs de cercle. Une des principales caractéristiques de ces algorithmes est leur caractère incrémental, puisqu'ils devaient correspondre à des déplacements élémentaires de la tête d'écriture. L'algorithme de J. Bresenham [15] reste comme la référence historique. Il n'est ni le précurseur, ni le plus efficace de tous les algorithmes publiés. C'est peut-être tout simplement sa simplicité qui en a fait sa notoriété.

Dans l'abondante littérature sur le sujet, pas mal de redondances et d'optimisations arithmétiques sont présentes. Il n'y a en effet pas un très grand nombre de possibilités pour définir un cercle discret et la diversité provient surtout des buts applicatifs recherchés. Comme nous l'avons déjà souligné, un objet continu n'a pas un, mais des analogues discrets, chacun muni

d'une ou plusieurs de ses propriétés. Tracer un cercle discret fin conduit à différents résultats selon la connexité considérée, rechercher le pavage du plan conduit encore à un autre objet discret, etc. . . Globalement, la plupart des travaux se sont attachés à définir de bonnes approximations discrètes 0-connexes des cercles, puisque ce sont elles qui fournissent les tracés les plus fins possibles.

La plupart des algorithmes n'ont été définis que pour le tracé de cercles discrets de centre à coordonnées entières et de rayon entier, à quelques exceptions notables [64, 67]. La principale raison de cette restriction tient évidemment au fait qu'ils étaient destinés aux traceurs numériques fonctionnant avec une arithmétique entière. Ce cas particulier présente plusieurs avantages que nous exploitons dans ce qui suit pour simplifier sensiblement les algorithmes : certaines symétries du cercle sont conservées et tous les cercles de même rayon sont images par translation de celui centré sur l'origine. Ainsi, seule l'étude d'un octant (un huitième) du cercle centré sur l'origine s'impose, l'ensemble discret final s'obtenant ensuite par symétries et translations.

Meilleures approximations 0-connexe de cercles à paramètres entiers

Comme nous l'avons déjà signalé, pour des cercles discrets à paramètres entiers, il est suffisant de s'intéresser à un cercle centré sur l'origine et même seulement à un de ses octants, en l'occurrence, pour nous, le premier. De plus, les algorithmes sont incrémentaux. Cela signifie qu'ils considèrent un pixel initial et déterminent, à partir de celui-ci, par itérations successives, tous les pixels correspondant au premier octant du cercle discret. Ce pixel initial est trivialement $(r, 0)$ puisqu'il appartient au cercle euclidien. Ensuite, à chaque itération, un 0-voisin du dernier pixel déterminé est sélectionné. Ce processus garantit l'obtention d'un ensemble 0-connexe. En fait, à chaque étape, le choix se résume à comparer deux pixels seulement.

Proposition 6.1. *Soit un pixel $\mathbf{p} = (i, j)$ dans le premier octant d'un cercle discret 0-connexe $\mathbb{C}_0(r)$. En considérant un parcours dans le sens trigonométrique, le successeur de \mathbf{p} dans $\mathbb{C}_0(r)$ est soit $p_1 = (i, j + 1)$, soit $p_2 = (i - 1, j + 1)$.*

Démonstration. C'est simplement une conséquence de la convexité du cercle dans son premier octant. \square

Dans la suite nous considérons un pixel $\mathbf{p} = (i, j)$ appartenant au cercle discret en cours et nous nous intéressons au pixel suivant, à sélectionner parmi $\mathbf{p}_1(i, j + 1)$ et $\mathbf{p}_2(i - 1, j + 1)$.

Un cercle $\mathcal{C}(r)$ peut être vu comme une courbe implicite, et, en particulier, comme l'ensemble des racines du polynôme $c_r(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$. Une première manière d'effectuer une sélection entre pixels peut être de comparer la magnitude de leur reste, soit la valeur absolue de ce polynôme en chacun d'eux. En particulier, parmi les pixels \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 , il semble, intuitivement, que celui de reste minimum soit le plus proche du cercle. Les premiers à avoir proposé cette approche sont B. W. Jordan, W. J. Lennon et B. D. Holm [46]. Leur article traite du cas plus général des

courbes polynomiales, mais ils présentent en complément un algorithme de tracé de cercles. La même approche sera reprise quelques années plus tard par J. Bresenham [15]. Depuis, d'autres travaux sur le sujet sont parus, nous pouvons notamment citer ceux de M. D. McIlroy [64] sur lesquels nous reviendrons plus loin, ou encore ceux de Y. P. Kuzmin [57] qui réduit le nombre d'opérations arithmétiques en jeu dans la boucle de l'algorithme.

Initialement, l'algorithme de J. Bresenham permettait le tracé incrémental de l'intégralité du cercle pour répondre aux exigences des traceurs qui ne pouvaient pas tirer partie des symétries. Nous allons donner ici une version restreinte de cet algorithme et adaptée à la détermination des pixels du premier octant, comme mentionné plus haut.

Sachant que le pixel $\mathbf{p} = (i, j)$ appartient au cercle discret, lequel des pixels $\mathbf{p}_1 = (i, j + 1)$ et $\mathbf{p}_2 = (i - 1, j + 1)$ est le plus proche selon le critère du reste? Ce problème revient à comparer $|c_{(r)}(\mathbf{p}_1)|$ et $|c_{(r)}(\mathbf{p}_2)|$, ou encore à étudier le signe de la différence $\Delta = |c_{(r)}(\mathbf{p}_1)| - |c_{(r)}(\mathbf{p}_2)|$. Il est facile d'optimiser ce test en remarquant que $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) > c_{(r)}(\mathbf{p}_2)$, et en utilisant quelques arguments géométriques élémentaires :

- dans le cas où $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) \leq 0$, alors forcément $\Delta < 0$ et l'algorithme sélectionnera \mathbf{p}_1 ,
- dans le cas contraire, nous aurons de toute façon $c_{(r)}(\mathbf{p}_2) \leq 0$ et $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) \geq 0$, d'où $\Delta = 2(c_{(r)}(\mathbf{p}_1) - i) + 1$. Le signe de Δ nous donne le déplacement préférentiel : s'il est positif, le prochain pixel dans l'algorithme sera \mathbf{p}_2 , ou \mathbf{p}_1 sinon. Nous pouvons simplifier cette condition en notant que $c_{(r)}(\mathbf{p}_1)$ et i sont des entiers, et que donc $\Delta > 0$ est équivalent à $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) > i$.

Au final, la seule condition à tester est donc $c_{(r)}(i, j + 1) > i$. En rajoutant le calcul incrémentalement de $c_{(r)}$, nous obtenons l'Algorithme 3.

Algorithme 3 Tracé de cercle basé sur le reste

Entrées : $r \in \mathbb{N}$.

Sorties : $\mathbb{C}(r)$.

$i \leftarrow r$

$j \leftarrow 0$

$\Delta \leftarrow 0$

tant que $(i \geq j)$ **faire**

 AjouterPixel(i, j)

$\Delta \leftarrow \Delta + 2j + 1$

$j \leftarrow j + 1$

si $(\Delta > i)$ **alors**

$\Delta \leftarrow \Delta - 2i + 1$

$i \leftarrow i - 1$

fin si

fin tant que

Le critère du déplacement consiste à s'intéresser aux pixels du cercle les plus proches selon des déplacements uniquement verticaux ou horizontaux. Le premier à introduire ce critère est

M. L. V. Pitteway dans le cadre plus général des ellipses et des hyperboles [68]. Il publie plus tard plusieurs notes sur le cas particulier des cercles [70, 69] avant que B. K. P. Horn [40], M. Doros [28] ou encore J. Van Aken et M. Novak [1] ne complètent l'étude sur le sujet. En l'occurrence, puisque nous nous restreignons au premier octant, seuls les déplacements horizontaux seront pris en compte. Finalement la question revient à positionner le centre du segment $[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$ par rapport au cercle. Si le point $(i - 1/2, j + 1)$ est à l'intérieur du cercle, alors le pixel \mathbf{p}_2 est sélectionné, sinon, c'est le pixel \mathbf{p}_1 . Soit \mathbf{p} le pixel courant, nous cherchons à déterminer lequel de \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 appartient au cercle. Nous calculons donc $c_{(r)}(i - 1/2, j + 1) = c_{(r)}(\mathbf{p}_1) - i + 1/4$. Puisque $c_{(r)}(\mathbf{p}_1)$ et i sont des entiers, le terme $1/4$ peut être négligé, et la condition $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) \leq 0$ est alors équivalente à la condition $c_{(r)}(\mathbf{p}_1) > i$. Nous obtenons ainsi l'Algorithme 4, une version de l'algorithme dit du point milieu.

Algorithme 4 Tracé de cercle basé sur le déplacement

Entrées : $r \in \mathbb{N}$.

Sorties : $\mathbb{C}(r)$.

```

i ← r
j ← 0
Δ ← 0
tant que (i ≥ j) faire
  AjouterPixel(i,j)
  Δ ← Δ + 2j + 1
  j ← j + 1
  si (Δ ≥ i) alors
    Δ ← Δ - 2i + 1
    i ← i - 1
  fin si
fin tant que

```

Bien que basés sur des critères différents, les Algorithmes 3 et 4 sont identiques. Les critères de reste et de déplacement sont donc équivalents pour des cercles de centre à coordonnées entières et de rayon entier. Néanmoins, le premier critère venant à l'esprit pour une bonne approximation d'un objet euclidien reste de minimiser la distance euclidienne, ou en d'autres termes, de sélectionner à chaque étape parmi les pixels $\mathbf{p}_1 = (i - 1, j + 1)$ et $\mathbf{p}_2 = (i, j + 1)$, le plus proche du cercle. Aussi bien J. Bresenham [15] que M. D. McIlroy [64] ont prouvé l'équivalence de ce troisième critère avec les deux précédents pour des cercles à paramètre entiers. Il est important de noter que nous parlons ici de critères locaux. La minimisation de la distance n'intervient que pour déterminer quel pixel sélectionner entre \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 . En aucun cas, le fait de dire ici que l'algorithme se base sur un critère de distance (euclidienne) ne signifie qu'un voxel qui appartient au cercle discret est toujours plus proche du cercle réel que n'importe quel voxel ne lui appartenant pas.

Propriétés

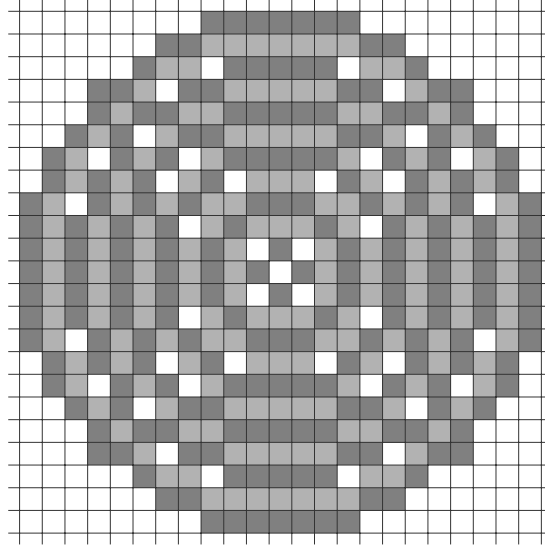


FIG. 6.1 – Cercles discrets dit de Bresenham

Ces cercles discrets approchent par des points à coordonnées entières les cercles euclidiens de manière à obtenir des ensembles connexes les plus fins possibles. Ils possèdent néanmoins deux défauts majeurs mis en évidence par Z. Kulpa [56] :

- de tels cercles concentriques de rayons successifs ne pavent pas le plan,
- de tels cercles ne sont pas des courbes fermées simples.

La première propriété est évidente en considérant la Figure 6.1 où nous présentons des cercles concentriques de rayons (entiers) successifs. En fait, ces cercles discrets ne sont pas des anneaux et donc ne pavent pas le plan, mais laissent apparaître des pixels qui ne sont membres d'aucun d'entre eux. C'est un fait important puisqu'il signifie que la finesse d'un cercle discret et sa capacité à paver le plan semblent être des caractéristiques incompatibles. Ainsi, comme attendu, atteindre l'une ou l'autre nécessitera des définitions différentes.

Le deuxième défaut de ces cercles discrets est qu'ils ne sont pas des courbes discrètes fermées simples, ou en d'autres termes, qu'ils ne sont pas toujours aussi fins que nous pourrions le souhaiter. En effet, pour des rayons particuliers, notamment sur la Figure 6.1, pour les rayons 4 et 11, ils présentent des points 0-simple sur leurs diagonales. En fait, de telles erreurs vont se produire pour tous les rayons solutions diophantiennes de l'équation $r^2 = 2i^2 - i + 1$. Les premières solutions de cette suite sont données dans le Tableau 6.1. Elles se raréfient avec l'augmentation du rayon, mais restent présentes.

Pour conclure sur ce type de cercles, signalons que nous n'avons parlé ici que d'algorithmes basés sur les pixels, mais il existe aussi des algorithmes qui comme dans le cas des droites discrètes

n	i	r
1	0	1
2	3	4
3	8	11
4	95	134
5	264	373
6	3 219	4 552
7	8 960	12 671
8	109 343	154 634
9	304 368	430 441
10	3 714 435	5 253 004

TAB. 6.1 – Rayons de cercles discrets présentant une sur-épaisseur sur leurs diagonales

tentent d'accélérer les calculs en considérant plusieurs pixels simultanément [83] ou en évaluant les paliers rencontrés dans ces objets [42, 85]. Nous ne nous étendrons pas plus sur le sujet, notre propos n'étant pas ici de déterminer l'algorithme le plus efficace, mais plutôt de comprendre par quels processus ces cercles discrets sont engendrés, et, bien souvent, les optimisations proposées masquent cette information.

Autres cercles discrets à paramètres entiers

La majorité des définitions de cercles discrets proposées se ramènent à celle que nous venons de présenter. Cela est tout à fait normal puisque c'est la meilleure approximation discrète qu'il est possible de déterminer. Néanmoins, d'autres cercles ont été étudiés pour répondre à d'autres problématiques que celle du tracé.

Au lieu de considérer la discrétisation d'un cercle, il est possible de considérer plutôt celle d'un disque. Dans ce cas, l'ensemble de pixels intéressant est celui qui sépare l'intérieur du disque de l'extérieur. Ces pixels sont en effet suffisants pour définir le disque lui-même. Cette notion a notamment été beaucoup étudiée par C. E. Kim [47, 48, 49]. D'un point de vue pratique, cet ensemble se détermine en sélectionnant à chaque itération le pixel le plus proche du cercle pour lequel le reste est négatif, $c_{(r)} \leq 0$. L'Algorithme 5 correspond à la détermination des pixels de ce cercle discret dans le premier octant. Le pixel initial est bien sûr toujours $(r, 0)$. La Figure 6.2 présente les ensembles discrets résultants. Nous pouvons noter encore une fois, l'absence de pavage du plan et le fait que ces cercles discrets ne sont pas des courbes discrètes simples fermées.

Parmi les cercles discrets déjà présentés, un défaut récurrent est l'absence de pavage du plan. Ce point est rédhibitoire pour toutes les applications qui font appel à des mécanismes de propagation, d'ondes en particulier. En effet, certains pixels ne sont jamais atteints bien que les cercles concentriques soient de rayons entiers consécutifs. Pour remédier à cela, la notion d'anneaux discrets est fondamentale [13, 28, 56]. Au lieu de la finesse du tracé, c'est l'adéquation

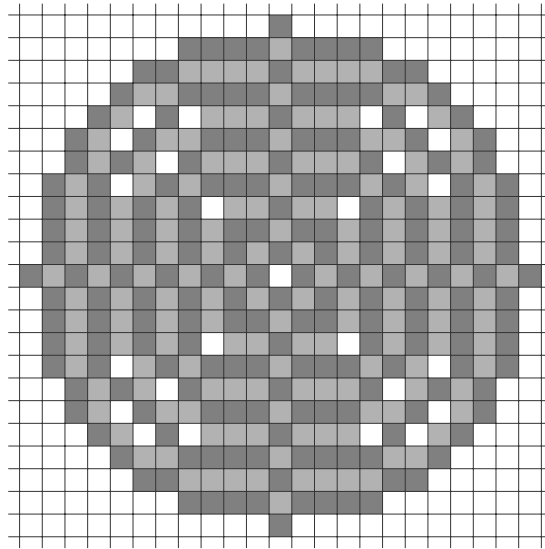


FIG. 6.2 – Frontières discrètes intérieures de disques

Algorithme 5 Tracé de frontière intérieure à un disque**Entrées :** $r \in \mathbb{N}$.**Sorties :** $\mathbb{C}(r)$. $i \leftarrow r$ $j \leftarrow 0$ $\Delta \leftarrow 0$ **tant que** $(i \geq j)$ **faire**AjouterPixel(i, j) $\Delta \leftarrow \Delta + 2j + 1$ $j \leftarrow j + 1$ **si** $(\Delta > 0)$ **alors** $\Delta \leftarrow \Delta - 2i + 1$ $i \leftarrow i - 1$ **fin si****fin tant que**

avec les anneaux qui est privilégiée. Des anneaux euclidiens concentriques pavant le plan réel, leur restriction à des entiers pavent forcément le plan discret. Nous pouvons considérer comme des cercles discrets les anneaux discrets les plus fins connexes. Ces objets sont représentés Figure 6.3. D'un point de vue pratique, les pixels entre deux cercles concentriques de rayons $r - \frac{1}{2}$ et $r + \frac{1}{2}$ sont sélectionnés. Cela conduit à un ensemble au moins 0-connexe et au plus 1-connexe. En développant la double inégalité et en se restreignant au cas entier, nous aboutissons à l'Algorithme 6.

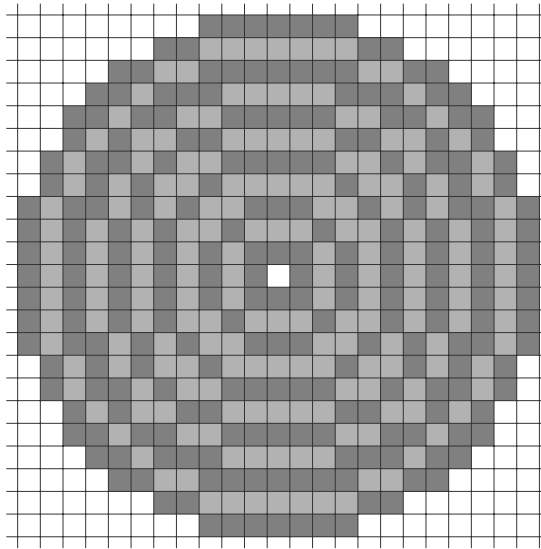


FIG. 6.3 – Anneaux discrets en tant que cercles discrets pavant le plan

Algorithme 6 Tracé d'un anneau discret**Entrées :** $r \in \mathbb{N}$.**Sorties :** $\mathbb{C}(r)$.

```

 $i \leftarrow r$ 
 $j \leftarrow 0$ 
 $\Delta \leftarrow 0$ 
tant que  $(i \geq j)$  faire
  AjouterPixel( $i, j$ )
   $\Delta \leftarrow \Delta + 2j + 1$ 
   $j \leftarrow j + 1$ 
  si  $(\Delta > r)$  alors
     $\Delta \leftarrow \Delta - 2i + 1$ 
     $i \leftarrow i - 1$ 
  sinon
    si  $(\Delta > -r + 2i - 1)$  et  $(i \geq j)$  alors
      AjouterPixel( $i, j$ )
       $\Delta \leftarrow \Delta - 2i + 1$ 
       $i \leftarrow i - 1$ 
    fin si
  fin si
fin tant que

```

Enfin, un dernier type de cercles discrets à paramètres entiers apparaît dans la littérature. Pour la géométrie discrète dans un espace à deux dimensions, il existe deux relations d'adjacence

possibles et donc deux types de connexité. Jusqu'ici nous n'avons parlé que de cercles discrets 0-connexes. Il est tout aussi possible de définir des cercles discrets 1-connexes. Simplement, l'idée de finesse du tracé fait, dans beaucoup de travaux, implicitement référence à la 0-connexité plutôt qu'à la 1-connexité.

Quelques études portent sur le sujet, notamment, [1]. Elle se base sur la minimisation du déplacement, ou le critère dit du point milieu. Considérant que le pixel $\mathbf{p} = (i, j)$ appartient au cercle discret, son successeur sera à choisir parmi $\mathbf{p}_1 = (i, j + 1)$ et $\mathbf{p}_2 = (i - 1, j)$ selon la position du point $\mathbf{x} = (i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ par rapport au cercle. Dans l'Algorithme 7, la variable Δ contient $c_{(r)}(\mathbf{x})$ et la sélection du pixel se fait selon le signe de Δ . Les cercles obtenus par l'Algorithme 7 sont présentés Figure 6.4.

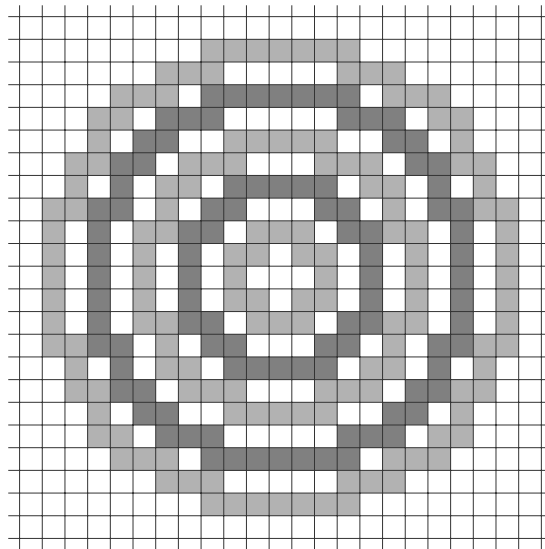


FIG. 6.4 – Cercles discrets 1-connexes

Dans le cas de la 1-connexité, une approche par minimisation du reste conduit à des différences dans l'ensemble résultant et est moins précise pour ce qui est de la distance euclidienne. Les trois critères qui étaient équivalents pour la 0-connexité ne le sont finalement plus pour la 1-connexité [1].

6.1.2 Cercles discrets algorithmiques à paramètres non entiers

La problématique des traceurs numériques n'est plus très actuelle. Néanmoins, les algorithmes sont toujours utiles et utilisés, en particulier pour les logiciels de dessins et les périphériques d'affichage numériques, typiquement les écrans d'ordinateur. Se restreindre aux paramètres entiers s'avère un choix pertinent puisqu'il ne met en jeu que l'arithmétique entière et garantit ainsi l'exactitude et la rapidité des calculs. Néanmoins, le tracé n'est qu'une utilisation d'une définition

Algorithme 7 Tracé de cercles discrets 1-connexes

Entrées : $r \in \mathbb{N}$.

Sorties : $\mathbb{C}(r)$.

$i \leftarrow r$

$j \leftarrow 0$

$\Delta \leftarrow -r$

tant que $(i \geq j)$ **faire**

 AjouterPixel(i, j)

si $(\Delta > 0)$ **alors**

$i \leftarrow i - 1$

$\Delta \leftarrow \Delta - 2i$

sinon

$j \leftarrow j + 1$

$\Delta \leftarrow \Delta + 2j$

fin si

fin tant que

de cercle discret. La reconnaissance est une autre application aussi importante. En particulier, calculer la courbure d'un ensemble discret fait implicitement intervenir la notion de cercle discret. Dans ce cas, pour avoir une bonne précision, se limiter à la recherche uniquement de cercles osculateurs à paramètres entiers n'est pas forcément un choix judicieux. Il est important de disposer de définitions plus générales. Certains travaux se sont attachés à la notion de cercles discrets avec des paramètres pas simplement entiers.

Cercles discrets à centre demi-entier et rayon au carré entier

Dans [64], M. D. McIlroy propose une définition de la meilleure approximation entière d'un cercle de centre \mathbf{o} et de rayon r tels que $(2\mathbf{o}) \in \mathbb{Z}^2$ et $(4r^2) \in \mathbb{Z}$, soit un cercle à paramètres demi-entiers. Avec de tels paramètres, les trois critères locaux énoncés jusque-là, minimisation du reste, de la distance ou du déplacement, ne conduisent plus tous au même ensemble discret. De plus, aucun d'eux ne permet forcément de localement sélectionner un unique pixel : les deux candidats peuvent avoir la même évaluation. En résumé, nous avons plusieurs définitions différentes et toutes conduisent à l'apparition de points 1-simples ailleurs qu'à proximité des diagonales.

M. D. McIlroy lève ces ambiguïtés en considérant l'intersection des ensembles définis par chacun des trois critères.

Théorème 6.2. *Soit le cercle $\mathcal{C}(\mathbf{o}, r)$ tel que $(2\mathbf{o}) \in \mathbb{Z}^2$ et $(4r^2) \in \mathbb{Z}$. Alors, l'intersection des trois ensembles obtenus respectivement par minimisation locale du reste, du déplacement et de la distance est un ensemble discret 1-séparant possédant des points 1-simples uniquement à proximité des diagonales.*

Ce cercle discret est composé des pixels pour lesquels les trois critères locaux sont unanimes.

En ce sens, M. D. McIlroy le qualifie de meilleure approximation entière. En fait, les critères de déplacement et de reste, les deux plus faciles à tester, sont suffisants pour lever toutes les ambiguïtés. Plus précisément, si le premier ne permet pas de faire un choix, le second conduit toujours à sélectionner le pixel à l'intérieur du cercle. Dans ces conditions, il est facile de construire un algorithme efficace. À noter que l'Algorithme 8, que nous présentons, ne trace que le premier octant d'un cercle et que l'espace de définition des centres est réduit. Contrairement au cas de paramètres entiers, translations et symétries d'un même octant ne sont plus suffisantes pour obtenir le cercle entier, les octants n'étant pas forcément symétriques. Néanmoins cet algorithme est suffisant, il faut juste tracer des octants de cercles avec des centres différents et appliquer à chaque fois les translations et symétries appropriées.

Algorithme 8 Tracé de cercle à paramètres demi-entiers

Entrées : r tel que $4r^2 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{o}(x, y) \in \{0, \frac{1}{2}\}^2$.

Sorties : $\mathbb{C}(r)$.

$i \leftarrow [r]$

$j \leftarrow 0$

$\Delta \leftarrow (i - x)^2 + (j - y)^2 - r^2$

si $(\Delta \geq 0)$ **alors**

$i \leftarrow i - 1$

$\Delta \leftarrow \Delta - 2(i - x) + 1$

fin si

tant que $(i \geq j)$ **faire**

AjouterPixel(i, j)

$\Delta \leftarrow \Delta + 2(j - y) + 1$

$j \leftarrow j + 1$

si $(\Delta \geq x)$ **alors**

$\Delta \leftarrow \Delta - 2(i - x) + 1$

$i \leftarrow i - 1$

fin si

fin tant que

Dans [64], M. D. McIlroy prouve aussi que sa définition ne peut être étendue à des cercles de paramètres moins restreints. Nous allons néanmoins voir maintenant une proposition faite pour couvrir les cercles discrets de paramètres quelconques.

Cercles discrets à paramètres quelconques

La seule définition, à notre connaissance, de cercles discrets algorithmiques, sans contraintes sur les paramètres, est celle de S. Pham [67]. Il est vrai que, dès que les paramètres deviennent irrationnels, une définition algorithmique n'a pas de sens pratique car elle n'est pas implantable informatiquement. Néanmoins, il est intéressant de savoir ce qu'est un cercle discret en général

pour mieux l'appréhender ; et puis, tous les cercles discrets à coordonnées rationnelles peuvent eux être utilisés.

En fait, S. Pham, sous une approche qui peut sembler différente, étend en quelque sorte l'algorithme de M. D. McIlroy vu précédemment : son algorithme utilise le critère local du déplacement et en cas d'ambiguïté choisit le pixel intérieur au cercle.

Algorithme 9 Tracé de cercles discrets à paramètres quelconques

Entrées : $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{o}(x, y) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$.

Sorties : $\mathbb{C}(r)$.

$i \leftarrow [r]$

$j \leftarrow 0$

$\delta_x \leftarrow -2(i - x) + 1$

$\delta_y \leftarrow 2(j - y) + 1$

$\Delta \leftarrow (i - \frac{1}{2} - x)^2 + (j - y)^2 - r^2$

tant que $(i \geq j)$ **faire**

 AjouterPixel(i, j)

$\Delta + = \delta_y$

$j \leftarrow j + 1$

$\delta_y \leftarrow \delta_y + 2$

si $(\Delta \geq 0)$ **alors**

$\Delta + = \delta_x$

$i \leftarrow i - 1$

$\delta_x \leftarrow \delta_x - 2$

fin si

fin tant que

L'initialisation de cet algorithme est remise en question par É. Andres et M.-A. Jacob [6]. En effet, le choix du pixel initial ne suit aucun critère usuel (déplacement, reste, distance). É. Andres et M.-A. Jacob proposent de changer cela pour assurer que ce premier pixel est aussi proche que possible du cercle selon la distance euclidienne. Comme l'algorithme se base sur le critère de déplacement, il nous semble plus logique que son initialisation suive ce même principe.

6.2 Cercles discrets analytiques et épaisseur non constante

Jusque-là, nous n'avons parlé que de cercles discrets algorithmiques. Finalement, plus que des définitions de cercles à proprement parler, ce sont des outils de tracé de tels objets. Ils ne sont pas guidés par un critère global qui assurerait une cohérence de l'ensemble, mais simplement par des critères locaux, d'ailleurs, seule l'étude d'un octant est souvent proposée. Ils sont importants puisqu'ils permettent un tracé efficace des cercles et parce que, pendant longtemps, nous ne disposions d'aucun autre moyen pour définir les cercles discrets. Mais l'absence d'un critère global est problématique car leurs propriétés ne sont pas immédiatement accessibles. Ce manque

est particulièrement visible quand les problèmes à résoudre concernent la localisation de points, comme le calcul de l'intersection de cercles. Dans ce cas, chacun des deux cercles discrets doit être défini en extension par l'algorithme de tracé avant que les deux ensembles discrets obtenus ne soient comparés pour déterminer leur intersection. C'est une mécanique lourde, surtout si nous la comparons à la simplicité de résolution de ce problème dans l'espace euclidien : trouver les solutions d'une équation du second degré dont les paramètres dépendent des centres des cercles. La vision récente d'une géométrie discrète analytique, initiée par J.-P. Reveillès [71] avec ses travaux sur les droites discrètes arithmétiques, semble une bonne direction pour dépasser ces limitations. Avec une caractérisation analytique des cercles discrets, la localisation de points est immédiate et pour notre exemple d'intersection de cercles, à chaque calcul d'un pixel d'un des deux cercles, nous savons immédiatement si il appartient ou non à l'autre. Plusieurs travaux récents apportent des réponses de ce type à la problématique de la définition des cercles discrets, à savoir des caractérisations analytiques.

6.2.1 Couronnes discrètes analytiques

La première approche analytique des cercles discrets est due à É. Andres [2, 6]. L'idée est de transcrire les résultats de J.-P. Reveillès [71] des droites aux cercles. Une droite discrète est l'ensemble des pixels dans une bande proche de la droite euclidienne support. Un cercle discret pourrait donc être l'ensemble des points discrets entre deux cercles concentriques proches du cercle euclidien support. E. Andres atteint ainsi la notion de couronne discrète et recoupe certains des résultats vus précédemment [13, 28, 56].

Définition 6.1 (Couronnes discrètes analytiques [2]). Soient $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ et $r_{min}, r_{max} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r_{min} \leq r_{max}$. Alors, une *couronne discrète* de centre \mathbf{o} et comprise entre r_{min} et r_{max} est l'ensemble des pixels \mathbf{p} satisfaisant :

$$r_{min} \leq (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_2)^2 < r_{max}.$$

Ces ensembles discrets n'ont pas de propriétés de connexité générale, en particulier en fonction de la grande latitude sur le choix des rayons. Par contre, par définition, ils conduisent au pavage du plan discret. Il suffit simplement de prendre des couronnes concentriques et d'assurer que, pour chacune d'elles, le rayon minimum est identique au rayon maximum de la précédente.

E. Andres propose de considérer certaines couronnes discrètes comme des cercles discrets.

Définition 6.2 (Cercles discrets analytiques [2]). Soient $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ et $r, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, le *cercle discret analytique* de centre \mathbf{o} , de rayon r et d'épaisseur ω , est une couronne discrète dont tous les pixels \mathbf{p} vérifient :

$$\left(r - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_1)^2 < \left(r + \frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Parmi eux, les cercles réguliers sont à distinguer.

Définition 6.3 (Cercles discrets réguliers [2, 6]). Un cercle discret analytique est dit *régulier* si son épaisseur ω est égale à 1.

Bien sûr, ils possèdent la propriété de pavage de plan en tant que couronnes discrètes, mais il existe en plus un résultat partiel de connexité les concernant : ils contiennent une courbe discrète fermée 0-connexe, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes 0-connexes, et sont inclus dans une courbe discrète fermée 1-connexe. En fait, les cercles discrets réguliers sont les plus fines couronnes discrètes connexes.

Les définitions analytiques apportent une connaissance supplémentaire sur les couronnes discrètes, en particulier, en termes de compréhension de leurs propriétés et de généralité. En termes de compréhension, puisque le mécanisme qui sous-tend au pavage du plan est bien visible, c'est simplement parce que les frontières, dans la définition des couronnes discrètes, sont des cercles euclidiens, qu'il est possible de les imbriquer en couvrant bien tout le plan. En termes de généralité, puisque nous pouvons manipuler théoriquement n'importe quelle couronne discrète. Bien sûr, il n'est pas possible de les représenter de manière exacte informatiquement si elles mettent en jeu des nombres réels, mais cela ne remet pas en cause la définition, c'est simplement une limitation pratique. De plus, l'extension en dimensions supérieures et la propagation des propriétés sont immédiates.

Définition 6.4 (Hypersphères discrètes analytiques [2]). Soient $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^d$ et $r, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, l'*hypersphère discrète analytique* de centre \mathbf{o} , de rayon r et d'épaisseur ω est l'ensemble des voxels \mathbf{v} satisfaisant :

$$\left(r - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^d (v_i - o_i)^2 < \left(r + \frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Ces définitions répondent à la problématique du pavage du plan, mais leur expressivité reste cantonnée à ce domaine. En particulier, ce sont des définitions différentes qui permettent d'obtenir des cercles discrets approchant la notion de courbes discrètes fermées.

6.2.2 Cercles discrets analytiques à épaisseur non constante

Toutes les définitions analytiques discrètes proposées jusque là, que ce soit pour les droites, les hyperplans, les cercles ou les hypersphères ont un point commun : l'épaisseur ω reste constante. Dans le cas des droites et des hyperplans discrets, cela semble judicieux puisque ce sont des objets linéaires. D'ailleurs, l'expressivité est maximale. Au contraire, les cercles ne sont pas des objets linéaires, et finalement, la restriction de l'épaisseur à une valeur constante ne permet pas d'atteindre l'ensemble des propriétés qu'attendues, seul le pavage du plan est accessible. Notre idée, avec D. Jamet et C. Fiorio, dans [32] était donc de tester l'intérêt d'une épaisseur non constante pour les cercles.

Intuitions sous-jacentes

En considérant que l'épaisseur est non plus une constante, mais une fonction du point où elle est évaluée, les possibilités de définition deviennent multiples et une première question est simplement d'estimer quelles fonctions épaisseur semblent pertinentes.

Considérons un cercle de centre $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$. Un point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ appartient à ce cercle s'il vérifie $(y_1 - o_1)^2 + (y_2 - o_2)^2 - r^2 = 0$. Localement, il peut être bien approché par sa tangente. En particulier, au point \mathbf{y} , la tangente a pour équation $2(y_1 - o_1)(x_1 - y_1) = 2(y_2 - o_2)(x_2 - y_2)$. L'analogie discret d'une droite est bien maîtrisée, et nous pouvons donc définir le cercle discret par ses tangentes discrètes $T_{\mathbf{y}}$, c'est-à-dire, des ensembles de pixels $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ tels que $-\|(y_1 - o_1, y_2 - o_2)\| \leq 2(y_1 - o_1)(p_1 - y_1) - 2(y_2 - o_2)(p_2 - y_2) < \|(y_1 - o_1, y_2 - o_2)\|$, où $\|\cdot\|$ est une des normes discrètes usuelles ($\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$). Ainsi, par ce biais, un cercle discret serait l'ensemble des pixels $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$-\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\| \leq (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_2)^2 - r^2 < \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|.$$

Tout ceci n'est pas rigoureux puisque les tangentes sont définies à partir des points du cercle et que leurs discrétisations sont translatées vers les pixels voisins pour obtenir le cercle discret. Néanmoins, cela donne une idée de ce que pourrait être une fonction épaisseur pertinente : une fonction relative au vecteur directeur de la tangente.

Une deuxième idée est d'appliquer les principes valides sur des droites directement sur les cercles. Les épaisseurs naïves et standard, celles qui ont un sens du point de vue topologique, sont obtenues, pour les droites, par application des normes discrètes usuelles ($\|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_1$) à leurs vecteurs normaux. Il pourrait être pertinent de s'intéresser au même principe pour les cercles. Dans ce cas, un cercle discret serait l'ensemble des pixels $\mathbf{p}(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

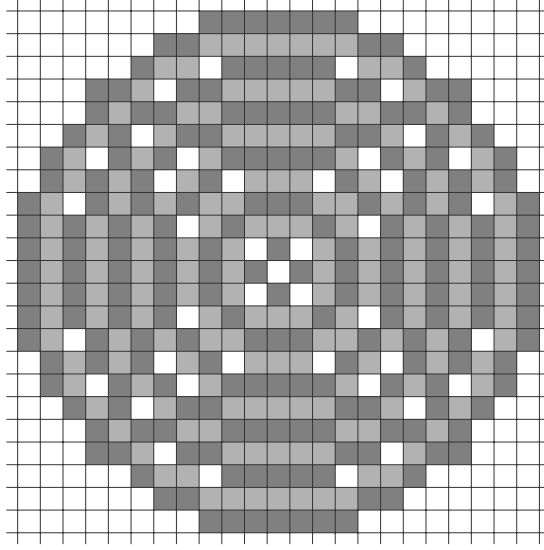
$$-\left\| \frac{(2(p_1 - o_1), 2(p_2 - o_2))}{2} \right\| \leq (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_2)^2 - r^2 < \left\| \frac{(2(p_1 - o_1), 2(p_2 - o_2))}{2} \right\|,$$

ou, après simplification, tels que :

$$-\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\| \leq (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_2)^2 - r^2 < \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|.$$

Cercles discrets analytiques

Les deux visions intuitives que nous avons données conduisent au même résultat. Ce fait n'est pas vraiment étonnant car les tangentes et les vecteurs normaux sont des objets dépendants les uns des autres. Nous définissons donc un cercle discret que nous qualifions d'arithmétique (pour le différencier du cercle discret analytique d'É. Andres et marquer l'influence des droites discrètes arithmétiques dans sa définition) de la manière suivante :

FIG. 6.5 – Cercles naïfs centrés en $(0, 0)$ et de rayon entiers

Définition 6.5 (Cercles discrets arithmétiques). Soit $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit aussi une norme $\|\cdot\|$. Le *cercle discret arithmétique* $\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|)$ de *centre* \mathbf{o} , de *rayon* r et de norme $\|\cdot\|$ est défini par :

$$\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\| \leq c_{(\mathbf{o}, r)}(\mathbf{p}) < \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|\},$$

avec $c_{(\mathbf{o}, r)}(\mathbf{p}) = (p_1 - o_1)^2 + (p_2 - o_2)^2 - r^2$.

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ contrôlent la connexité et même la minimalité des droites discrètes arithmétiques. En effet, les droites discrètes 1-minimales (respectivement. 0-minimales) de vecteur normal \mathbf{n} sont celles avec une épaisseur arithmétique égale à $\|\mathbf{n}\|_\infty$ (respectivement. $\|\mathbf{n}\|_1$). Nous allons donc particulièrement nous intéresser aux cercles discrets obtenus par notre définition et l'utilisation de ces normes discrètes. Par analogie avec le cas des droites discrètes, nous allons appeler cercle naïf un cercle basé sur $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 6.6 (Cercles discrets naïfs). Soit $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le cercle discret basé sur la norme infinie, $\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_\infty)$, est dit *naïf* :

$$\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_\infty) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty \leq c_{(\mathbf{o}, r)}(\mathbf{p}) < \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty\}.$$

La Figure 6.5 présentent des cercles naïfs. Ils semblent approcher la 1-minimalité, soit la caractéristique principale des droites naïves. En cela, ils se rapprochent des tracé de cercles algorithmiques dont nous avons parlé précédemment, en particulier des cercles de J. Bresenham et de M. D. McIlroy. Dans le cas de paramètres entiers, comme c'est le cas pour ces derniers cercles

discrets, nous pouvons considérer que le centre est l'origine du repère sans perte de généralité et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 6.3 (Cercles de Bresenham et cercles naïfs). *Soient r tel que $r^2 \in \mathbb{N}$. Le cercle de Bresenham $\mathbb{C}_0(r)$ est le cercle naïf $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_\infty)$:*

$$\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_\infty) = \mathbb{C}_0(r) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p}\|_\infty \leq c_r(\mathbf{p}) < \|\mathbf{p}\|_\infty\}. \quad (6.1)$$

Démonstration. Les pixels du cercle de J. Bresenham ne sont calculés que dans le premier octant. Si nous restreignons $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_\infty)$ dans le premier octant, nous avons la condition $-|p_1| \leq c_{(r)}(\mathbf{p}) < |p_1|$ puisque dans ce sous-espace $|p_1| \geq |p_2|$. Dans l'Algorithme 3, l'évaluation de $c_{(r)}$ en un pixel \mathbf{p} est comparée à p_1 pour déterminer son appartenance ; il appartient au cercle de Bresenham si $c_{(r)}(\mathbf{p}) < p_1$. De plus, comme le principe de sélection est la minimisation de la valeur absolue du reste, $|c_{(r)}(\mathbf{p})| \leq i$, ainsi nous avons l'équivalence entre les deux définitions de cercles discrets. \square

Nous avons caractérisé analytiquement les cercles de J. Bresenham, et même l'extension proposé par M. D. McIlroy puisque l'hypothèse n'est pas que le rayon soit entier, mais plutôt que son carré le soit. Ce résultat laisse espérer une caractérisation analytique des cercles discrets algorithmiques 1-connexes, en utilisant $\|\cdot\|_1$.

Par analogie avec le cas des droites discrètes, nous appelons cercle discret standard un cercle basé sur $\|\cdot\|_1$.

Définition 6.7 (Cercles standard). Un cercle discret basé sur la norme 1, $\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_1)$, est dit *standard* si :

$$\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_1) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\sum_{i=1}^2 |p_i - o_i| \leq c_{(\mathbf{o}, r)}(\mathbf{p}) < \sum_{i=1}^2 |p_i - o_i| \right\}.$$

Dans le cas de paramètres entiers, comme c'est le cas pour les cercles discrets algorithmiques 1-connexes, nous pouvons considérer que le centre est l'origine du repère sans perte de généralité et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 6.4 (Cercles algorithmiques 1-connexes et cercles standard). *Soit r tel que $r^2 \in \mathbb{N}$. Le cercle discret algorithmique 1-connexe $\mathbb{C}_1(r)$ est le cercle standard $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_1)$:*

$$\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_1) = \mathbb{C}_1(r) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p}\|_1 \leq c_r(\mathbf{p}) < \|\mathbf{p}\|_1\}. \quad (6.2)$$

Démonstration. À partir de notre caractérisation analytique, exprimons l'appartenance de pixels $(p_1 - 1, p_2)$ et $(p_1, p_2 + 1)$ à $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_1)$, dans le premier octant :

$$\begin{aligned} -p_1 - p_2 + 1 &\leq (p_1 - 1)^2 + p_2^2 - r^2 < p_1 + p_2 - 1, \\ -p_1 - p_2 - 1 &\leq p_1^2 + (p_2 + 1)^2 - r^2 < p_1 + p_2 + 1. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant ces conditions en $(p_1 - 1/2, p_2 + 1/2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq (p_1 - \frac{1}{2})^2 + (p_2 + \frac{1}{2})^2 - r^2 < 2p_1 + 2p_2 - \frac{3}{2}, \\ -2p_1 - 2p_2 - \frac{3}{2} &\leq (p_1 - \frac{1}{2})^2 + (p_2 + \frac{1}{2})^2 - r^2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, la connaissance de $c_{(r)}(p_1 - 1/2, p_2 + 1/2)$ permet de déterminer quel pixel choisir entre $(p_1 - 1, p_2)$ et $(p_1, p_2 + 1)$. En particulier, si $c_{(r)}(p_1 - 1/2, p_2 + 1/2) \geq 1/2$, c'est le premier qui est sélectionné. Puisque $c_{(r)}(p_1 - 1/2, p_2 + 1/2) \in (\mathbb{Z} + 1/2)$, cette condition peut être écrite $c_{(r)}(p_1 - 1/2, p_2 + 1/2) > 0$. Finalement, nous retrouvons la condition qui gouverne l'Algorithme 7. Et, puisque le pixel initial dans ce dernier est trivialement un pixel de $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_1)$, l'algorithme et l'expression analytique désignent le même ensemble discret. \square

Notre définition en utilisant les normes discrètes usuelles permet de retrouver des cercles discrets jusque-là seulement caractérisés analytiquement. Néanmoins, l'application de la norme euclidienne présente aussi un certain intérêt.

Du fait des propriétés partielles qu'ils possèdent, les cercles discrets basés sur la norme euclidienne sont dits *quasi-réguliers*.

Définition 6.8 (Cercles quasi-réguliers). Un cercle discret basé sur la norme 2, $\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_2)$, est dit *quasi-régulier* :

$$\mathfrak{C}(\mathbf{o}, r, \|\cdot\|_2) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \mid -\sqrt{\sum_{k=1}^2 (p_k - o_k)^2} \leq c_{(\mathbf{o}, r)}(\mathbf{p}) < \sqrt{\sum_{k=1}^2 (p_k - o_k)^2} \right\}.$$

Nous utilisons l'appellation de quasi-régulier car, dans le cas de cercles à paramètres entiers, de tels cercles concentriques et de rayons successifs pavent le plan.

Théorème 6.5 (Cercles quasi-réguliers et pavage du plan). *Le cercle quasi-régulier de paramètre entier $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_2)$ est le cercle analytique discret régulier $\mathbb{A}_r(r)$:*

$$\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_2) = \mathbb{A}_r(r). \tag{6.3}$$

De fait, de tels cercles pavent le plan.

Démonstration. Un cercle discret régulier $\mathbb{A}_r(r)$ est caractérisé par :

$$\mathbb{A}_r(r) = \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}^2; \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 \leq i^2 + j^2 < \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}.$$

Comme nous considérons des paramètres entiers, nous pouvons simplifier les bornes de la double inégalité : $-r < i^2 + j^2 - r^2 < r + 1$. De son côté, un cercle discret quasi-régulier $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_2)$ est

caractérisé par :

$$\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_2) = \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}^2; -\sqrt{i^2 + j^2} \leq i^2 + j^2 - r^2 < \sqrt{i^2 + j^2} \right\}.$$

Soient $k = \sqrt{i^2 + j^2}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + x - r^2. \end{aligned}$$

Cette fonction f est croissante et vérifie $f(r-1) < 0$ et $f(r) > 0$. Définissons donc $k_{min} \in \mathbb{R}$ tel que $f(k_{min}) = 0$. Nous avons alors $f(r-1) < f(k_{min}) < f(r)$ et par conséquent, $r < k_{min} < r+1$. Puisque $i^2 + j^2 - r^2$ est un entier, il suffit de trouver des bornes entières. Nous pouvons déterminer la borne inférieure en considérant $f(k)$. La définition de cercle discret induit $f(k) \geq 0$, soit $k \geq k_{min} > r$. De ce fait, nous obtenons la borne inférieure : $-r < i^2 + j^2 - r^2$. La borne supérieure $i^2 + j^2 - r^2 < r+1$ peut être obtenue de la même manière et finalement $\mathfrak{C}(r, \|\cdot\|_2) = \mathbb{A}_r(r)$. \square

En utilisant une fonction épaisseur en lieu et place de l'épaisseur constante habituelle, nous obtenons différentes définitions de cercles discrets pertinentes, puisqu'elles recoupent les travaux antérieurs sur le sujet. Bien sûr, ce sont des fonctions épaisseur particulières. Elles font intervenir la normale au cercle (ou, en d'autres termes, le gradient) et les normes usuelles. L'approche très intuitive qui nous a guidé ici a toutefois des limites. Déjà, nous ne recoupons que des définitions de cercles à paramètres entiers. Les travaux de S. Pham, par exemple, sont hors d'atteinte. Ensuite, nous ne caractérisons que des ensembles discrets centrés sur le cercle euclidien sous-jacent. Les frontières discrètes de disques de C. E. Kim, ou les schémas OBQ et BBQ, ne rentrent donc pas dans le cadre de notre approche. Nous allons maintenant voir en quoi nos modèles de discrétisation permettent de dépasser ces limites.

6.3 Expressivité de nos modèles

Nous venons de présenter la grande diversité d'objets différents qualifiés de cercles discrets. Notre but est maintenant de proposer un cadre général qui permette d'unifier toutes ces approches et toutes ces définitions. Pour cela, nous allons simplement appliquer nos modèles de discrétisation aux cercles, ou, plus généralement, aux hypersphères. Là-encore, dans les formes analytiques, l'épaisseur considérée n'est pas constante, mais fonction de l'endroit où elle est évaluée.

6.3.1 Spécialisation et propriétés particulières

Soient $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^d$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Nous définissons alors le polynôme $s_{(\mathbf{o},r)}$ tel que :

$$\begin{aligned} s_{(\mathbf{o},r)} &: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \sum_{i=1}^d (x_i - o_i)^2 - r^2 . \end{aligned}$$

Ce polynôme est caractéristique de l'hypersphère $\mathcal{S}_{(\mathbf{o},r)}$ de centre \mathbf{o} et de rayon r . Appliquons simplement nos modèles de discrétisations à cette surface particulière, $\mathcal{S}_{(\mathbf{o},r)}$. En particulier, nous calculons $\Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}$ pour tout voxel $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ et toute variation $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d 2\varepsilon_i (x_i - o_i) - \varepsilon_i^2 .$$

Il suffit donc d'évaluer cette fonction pour les points de $\mathbb{B}_k(1)$ ou de $\mathbb{B}_k(1/2)$ et d'en extraire le minimum et le maximum, qui définissent la double inégalité.

Définition 6.9 (Approximation des discrétisations d'hypersphères [33]). Les approximations des modèles fermé $\tilde{\mathcal{D}}_k(s_{(\mathbf{o},r)})$, semi-ouvert $\tilde{\mathcal{D}}_k^*(s_{(\mathbf{o},r)})$ et semi-ouverts signés, $\tilde{\mathcal{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$ et $\tilde{\mathcal{D}}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)})$, d'une hypersphère $\mathcal{S}_{(\mathbf{o},r)}$ sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_k(s_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1/2)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} \leq s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \leq \max_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1/2)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_k^*(s_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1/2)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} \leq s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) < \max_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1/2)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; 0 \leq s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) < \max_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d; \min_{\varepsilon \in \mathbb{B}_k(1)} \{ \Delta_{\varepsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \} < s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 6.1. Sans perte de généralité, pour étudier les propriétés d'une des discrétisations ou des approximations d'hypersphères, nous pouvons restreindre l'étude aux *points réels* vérifiant les doubles inégalités des formes analytiques pour une hypersphère centrée sur l'origine dans le sous-espace E de \mathbb{R}^d défini comme suit :

$$E = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_d \}.$$

Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^d$. Alors, il existe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, d\}, x_i = |v_{\sigma(i)} - o_{\sigma(i)}|$ avec σ une permutation de $\{1, \dots, d\}$ définie par $\forall i \in \{1, \dots, d-1\}, |v_{\sigma(i)} - o_{\sigma(i)}| \leq |v_{\sigma(i+1)} - o_{\sigma(i+1)}|$. Nous avons donc, $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_d$ et $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) = s_r(\mathbf{x})$. Finalement \mathbf{v} à le

même comportement par rapport à $s_{(\mathbf{o},r)}$ que \mathbf{x} par rapport à $s_{(r)}$.

Remarque 6.2. La Définition 6.9 ne fournit que des bornes formelles dans les expressions analytiques. Pour démontrer les propriétés qui vont suivre, nous avons besoin de les exprimer explicitement. En considérant la Remarque 6.1, nous pouvons écrire, pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$\begin{aligned} \min_{\epsilon \in \mathbb{B}_k(\lambda)} \{ \Delta_{\epsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{x}) \} &= \sum_{i=k+1}^d -2\lambda x_i - \lambda^2, \\ \max_{\epsilon \in \mathbb{B}_k(\lambda)} \{ \Delta_{\epsilon} s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{x}) \} &= \sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d 2\lambda x_i - \lambda^2, \end{aligned}$$

avec $k_{\mathbf{x}} = \max\{i \geq k; x_i < \lambda/2\}$.

Les discrétisations obtenues héritent bien sûr des propriétés mises en évidence de manière générale sur les modèles et leurs approximations. Elles sont donc séparantes et les lieux possibles d'apparition de points simples sont parfaitement localisés. Enfin, des résultats plus forts peuvent être énoncés.

Proposition 6.6 (Modèle positif approximé d'hypersphère et minimalité). *L'approximation du modèle semi-ouvert positif d'une hypersphère $\mathcal{S}_{(\mathbf{o},r)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$, est k -minimal dans \mathbb{Z}^d .*

Démonstration. Supposons que le voxel \mathbf{v} appartient à $\tilde{\mathcal{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$. Cela signifie que son image dans E , \mathbf{x} vérifie, en accord avec les Remarques 6.1 et 6.2 :

$$0 \leq s_{(r)}(\mathbf{x}) < \sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d 2x_i - 1.$$

Soit $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $[\mathbf{w} - \mathbf{v}]_k = 1$ et que $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{w})$ soit le plus grand possible. Sans perte de généralité, en accord avec la Remarque 6.1, nous considérons $\mathbf{y} \in E$ tel que $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{w}) = s_{(r)}(\mathbf{y})$. Nous avons alors :

$$s_{(r)}(\mathbf{y}) = s_{(r)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=k+1}^d 2x_i + 1.$$

En d'autres termes, $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k, x_k + 1, \dots, x_d + 1)$. Supposons maintenant que \mathbf{w} appartient à $\tilde{\mathcal{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$. Le point \mathbf{y} , image de \mathbf{w} , vérifie donc la double inégalité de la Définition 6.9 :

$$0 \leq s_{(r)}(\mathbf{y}) < \sum_{i=k_{\mathbf{y}}+1}^d 2y_i - 1.$$

Or, puisque pour tout $i > k$, $y_i = x_i + 1$, nous avons $k_{\mathbf{y}} = k$. D'où la réécriture :

$$0 \leq s_{(r)}(\mathbf{y}) < \sum_{i=k+1}^d 2x_i + 1.$$

En remplaçant $s_{(r)}(\mathbf{y})$ par son expression en fonction de $s_{(r)}(\mathbf{x})$ définie juste au-dessus, et en réarrangeant les termes, nous avons finalement :

$$s_{(r)}(\mathbf{x}) < 0,$$

c'est-à-dire que \mathbf{x} ne vérifie pas la double inégalité de la définition 6.9 et donc que \mathbf{v} n'appartient pas à la discrétisation. Or c'est l'hypothèse de base. Cette contradiction assure que tout voxel de $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$ est k -adjacent avec un voxel de la composante extérieure du complémentaire.

En conservant l'hypothèse $\mathbf{v} \in \tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$, supposons maintenant que $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$ est tel que $[\mathbf{w} - \mathbf{v}]_k = 1$ et que $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{w})$ soit le plus petit possible. Encore une fois, sans perte de généralité et en accord avec la Remarque 6.1, nous considérons $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ tel que $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{w}) = s_{(r)}(\mathbf{y})$. Nous avons alors :

$$s_{(r)}(\mathbf{y}) = s_{(r)}(\mathbf{x}) - \sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d 2x_i - 1,$$

En d'autres termes, $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_{k_{\mathbf{x}}}, x_{k_{\mathbf{x}}+1} - 1, \dots, x_d - 1)$. Supposons maintenant que \mathbf{w} appartient à $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$. Le point \mathbf{y} , image de \mathbf{w} , vérifie donc la double inégalité de la Définition 6.9 :

$$0 \leq s_{(r)}(\mathbf{y}) < \sum_{i=k_{\mathbf{y}}+1}^d 2y_i - 1.$$

En remplaçant $s_{(r)}(\mathbf{y})$ par son expression en fonction de $s_{(r)}(\mathbf{x})$ définie juste au-dessus, et en réarrangeant les termes, nous avons finalement :

$$\sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d 2x_i - 1 \leq s_{(r)}(\mathbf{x}),$$

c'est-à-dire que \mathbf{x} ne vérifie pas à la double inégalité de la Définition 6.9, et donc que \mathbf{v} n'appartient pas à la discrétisation. Or c'est l'hypothèse de base. Cette contradiction assure que tout voxel de $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$ est k -adjacent avec un voxel de la composante intérieure du complémentaire.

Tout voxel de la discrétisation est bien k -adjacent avec des voxels des deux composantes k -connexes du complémentaire, donc nous avons la k -minimalité. \square

Proposition 6.7 (Modèle négatif approximé d'hypersphère et précision). *L'approximation du*

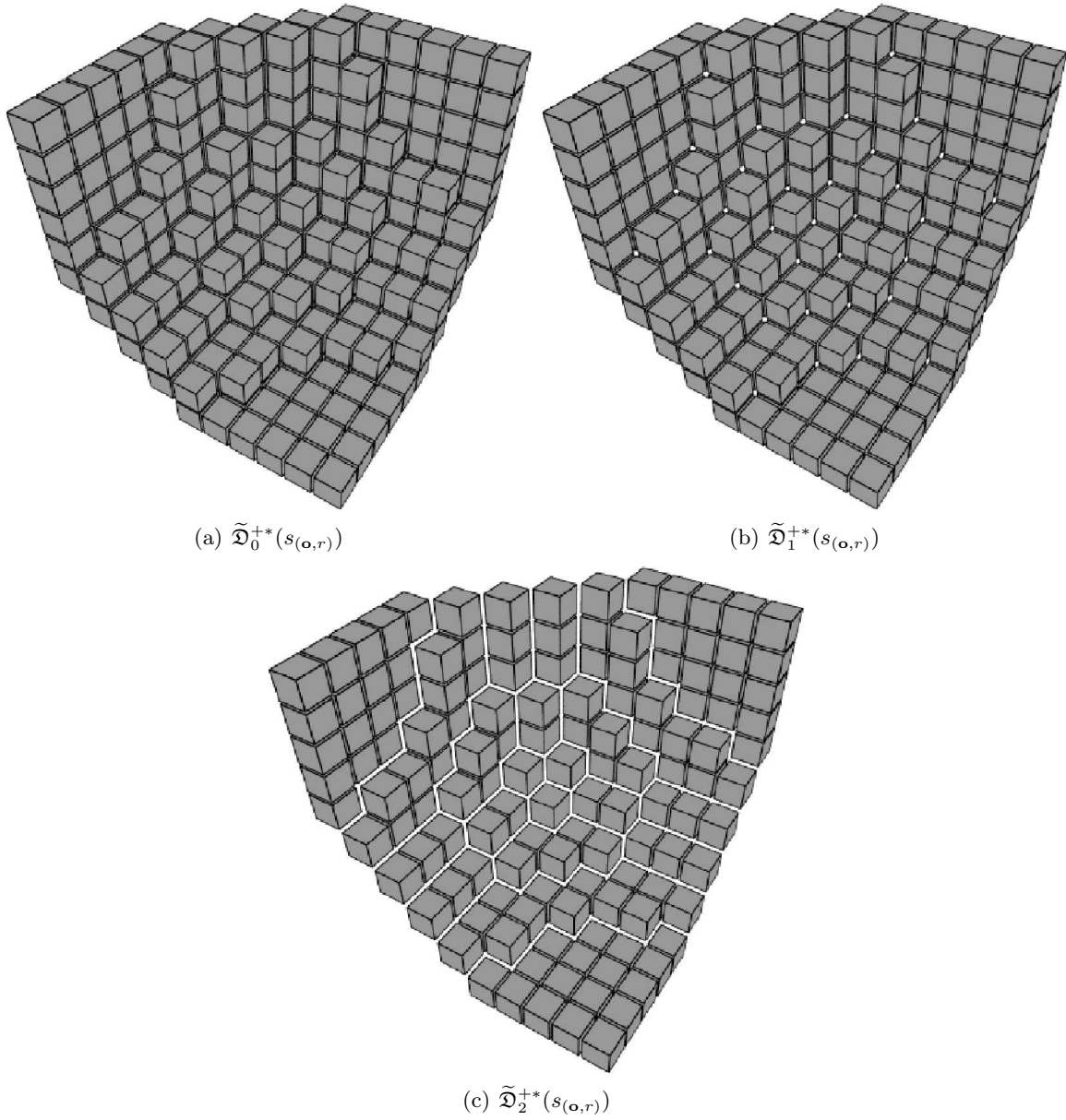


FIG. 6.6 – Les discrétisations d’hypersphères $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(s_{(\mathbf{o},r)})$ sont k -minimal

modèle semi-ouvert négatif d’une hypersphère $\mathcal{S}_{(\mathbf{o},r)}$, est équivalente au modèle lui-même :

$$\tilde{\mathfrak{D}}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)}) = \mathfrak{D}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)}).$$

Démonstration. Considérons un voxel \mathbf{v} . En accord avec la Remarque 6.1, nous considérons aussi

son image dans E, \mathbf{x} . Le voxel \mathbf{v} appartient à $\mathfrak{D}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)})$ si son image \mathbf{x} vérifie :

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1)} \left\{ \sum_{i=1}^d 2\varepsilon_i x_i - \varepsilon_i^2 \right\} < s_{(r)}(\mathbf{x}) \leq 0.$$

Calculons la borne minimale :

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1)} \left\{ \sum_{i=1}^d 2\varepsilon_i x_i - \varepsilon_i^2 \right\} &= \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{B}_k(1)} \left\{ \sum_{k=1}^d -2|\varepsilon_i| x_i - |\varepsilon_i|^2 \right\}, \\ &= \sum_{i=k}^d -2x_i - 1. \end{aligned}$$

Les arguments utilisés ici sont simplement de dire que le minimum ne peut être atteint que si le premier terme dans la somme est négatif et donc, que, pour tout i , $\varepsilon_i < 0$ et de dire que c'est en maximisant les ε_i associé au plus grands x_i , soit ceux avec les plus grands indices, qu'il est effectivement atteint. La borne minimale finalement obtenue est la même que celle de $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{-*}(s_{(\mathbf{o},r)})$. \square

Remarque 6.3. Nous ne nous sommes intéressés dans cette proposition qu'aux discrétisations semi-ouvertes négatives de diamètre 1. Elle reste vraie quel que soit le diamètre. En particulier, dans les discrétisations non signées, l'ensemble des voxels de la discrétisation et l'ensemble de ceux de l'approximation, à l'intérieur de l'hypersphère euclidienne, sont les mêmes.

La discrétisation semi-ouverte négative d'une hypersphère est parfaitement définie à partir de son approximation. Ce n'est en général pas le cas pour les autres modèles. Toutefois, nous avons un résultat assez similaire pour les modèles fermés d'hypersphères en restreignant le domaine de définition des paramètres de l'hypersphère.

Théorème 6.8 (Cas demi-entier et exactitude des approximations fermées). *Soient d la dimension de l'espace, $k \in \{0, 1, d-1\}$, $\mathbf{o} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^d$ et $r \in (\frac{1}{2}\mathbb{N}^*)$. Nous avons alors :*

$$\tilde{\mathfrak{D}}_k(s_{(\mathbf{o},r)}) = \mathfrak{D}_k(s_{(\mathbf{o},r)}).$$

Démonstration. Dans le cas de paramètres demi-entiers, pour tout voxel \mathbf{v} , nous avons $s_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{v}) \in (\mathbb{Z}/4)$. Ainsi l'approximation $\tilde{\mathfrak{D}}_k(s_{(\mathbf{o},r)})$ est à la discrétisation théorique $\mathfrak{D}_k(s_{(\mathbf{o},r)})$ si la différence entre leur bornes supérieures dans les formes analytiques n'excède pas 1/4 (le cas des bornes inférieures est réglé par la Remarque 6.3). Soit \mathbf{v} un voxel et \mathbf{x} son image dans E. le voxel \mathbf{v}

appartient respectivement à $\tilde{\mathcal{D}}_k(s_{(\mathbf{o},r)})$ et à $\mathcal{D}_k(s_{(\mathbf{o},r)})$ si \mathbf{x} vérifie, respectivement :

$$s_{(r)}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d x_i - \frac{1}{4},$$

$$s_{(r)}(\mathbf{x}) \leq \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1/2)} \left\{ \sum_{i=1}^d 2\varepsilon_i x_i - \varepsilon_i^2 \right\}.$$

Soit M la différence entre les deux bornes :

$$M = \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1/2)} \left\{ \sum_{i=1}^d (2\varepsilon_i x_i - \varepsilon_i^2) - \sum_{i=k_{\mathbf{x}}+1}^d (x_i - \frac{1}{4}) \right\},$$

$$M = \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1/2)} \left\{ -(d-k)(X - \frac{1}{4}) + \sum_{i=1}^d (2\varepsilon_i X - \varepsilon_i^2) \right\},$$

$$M = \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{B}_k(1/2)} \left\{ -(d-k)(X - \frac{1}{4}) + \sum_{i=1}^d (X^2 - (X - \varepsilon_i)^2) \right\},$$

$$M = dX^2 - (d-k)(X - \frac{1}{4}) - \sum_{i=1}^d \left(X - \frac{d-k}{2d} \right)^2,$$

$$M = dX^2 - (d-k)(X - \frac{1}{4}) - d \left(X^2 - \frac{d-k}{d} X + \left(\frac{d-k}{2d} \right)^2 \right),$$

$$M = \frac{(d-k)k}{4d}.$$

Différents arguments sont utilisés pour obtenir ce résultat. Tout d'abord, il est nécessaire de maximiser la première somme. C'est pour cela que nous fixons, pour tout i , $x_i = X$. Ensuite, pour minimiser la somme des carrés $(X - \varepsilon_i)^2$, tous les ε_i doivent être égaux. Puisque $[\boldsymbol{\varepsilon}] = 1/2$, pour tout i , $\varepsilon_i = (d-k)/2d$. Avec ce résultat, il est immédiat de vérifier que $M < 1/4$ pour $k \in \{0, 1, d-1\}$. \square

Ces propriétés sont valables pour toute hypersphère, mais nous ne possédons pas d'objets existants aussi généraux auxquels les comparer, si ce n'est les hypersphères discrètes analytiques.

6.3.2 Liens avec les hypersphères discrètes analytiques

Les hypersphères analytiques discrètes présentées précédemment ont pour principale caractéristique de paver l'espace. En fait, cette propriété n'est possible dans le discret que si elle est vraie pour les voisinages continus sous-jacents. Il faut donc que ces derniers s'emboîtent parfaitement pour que la propriété soit valide. En définissant les frontières de ces voisinages comme des cercles, cette condition est satisfaite simplement et conduit aux hypersphères discrètes analytiques. Cette

propriété est similaire à celles des hyperplans qui peuvent de la même manière paver le plan car la frontière des voisinages considérés est constituée par des hyperplans parallèles. Et justement, le pavage de l'espace par les hypersphères discrètes analytiques n'est possible que parce qu'une hypersurface parallèle à une hypersphère est aussi une hypersphère. Une hypersurface parallèle se définit comme l'ensemble des points à une distance euclidienne constante de l'hypersphère initiale. Donc en fait, nous pouvons ramener ce tracé à nos modèles de discrétisation en nous basant sur la norme euclidienne. Nous pouvons utiliser les modèles et cette norme sur n'importe quelle hypersurface, c'est d'ailleurs ce que É. Andres nomme le modèle pythagorien [3]. Il présente un grand intérêt sur les hypersphères, car il est alors simple à calculer et pertinent puisqu'il les munit de la propriété de paver le plan. Dans un cadre plus général, il est difficile à calculer et à bien approcher, la norme euclidienne n'étant pas une norme discrète contrairement à $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ou encore les normes d'adjacence. Cet exemple montre encore une fois, la nécessité de bien choisir l'analogie discret à un objet continu suivant l'application visée. Il sera impossible de paver l'espace avec des hypersphères discrètes minimales, à l'opposé, les hypersphères analytiques discrètes contiennent des points simples.

6.3.3 Cercles discrets 1-séparants

En se focalisant sur les cercles discrets, nous pouvons comparer nos caractérisations aux nombreuses définitions existantes. Bien sûr, celles en rapport avec la notion de couronne discrète et de pavage du plan [13, 28, 56] recourent notre propos sur les hypersphères discrètes analytiques, et nous ne reviendrons pas dessus.

Pour introduire cette partie, nous commençons par rappeler certains résultats en relation avec les modèles supercouverture et naïf fermé obtenus par E. Andres [3]. Il a notamment proposé une caractérisation analytique des cercles supercouverture et naïf fermé mettant en jeu une dizaine d'inégalités et surtout fait le lien avec les cercles les plus couramment utilisés, ceux de J. Bresenham :

Proposition 6.9 (Cercle de Bresenham et modèle naïf fermé [3]). *Le cercle de Bresenham est un cercle naïf fermé de centre et de rayon entiers.*

Le cercle de Bresenham peut donc être vu comme le modèle fermé, basé sur $[\cdot]_1$ et de diamètre 1 d'un cercle de centre et de rayon entiers.

Pour aller plus loin, commençons par spécialiser les formes analytiques de nos discrétisations d'hypersphères aux cercles et aux deux seules relations d'adjacence possibles dans le plan.

Soient $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Nous définissons alors le polynôme $c_{(\mathbf{o},r)}$ tel que :

$$\begin{aligned} c_{(\mathbf{o},r)} &: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto (x_1 - o_1)^2 + (x_2 - o_2)^2 - r^2 \end{aligned}$$

Ce polynôme est caractéristique du cercle $\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}$ de centre \mathbf{o} et de rayon r .

Définition 6.10 (Cercles discrets 1-séparant). Les approximation des modèles fermé, $\tilde{\mathfrak{D}}_k(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$, semi-ouverts signés, $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$ et $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{-*}(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$, ou non, $\tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$ peuvent être caractérisées analytiquement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_k(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - \frac{1}{4} \leq c_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{p}) \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - \frac{1}{4} \right\}, \\ \tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - \frac{1}{4} \leq c_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{p}) < \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - \frac{1}{4} \right\}, \\ \tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; 0 \leq c_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{p}) \leq 2\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - 1 \right\}, \\ \tilde{\mathfrak{D}}_k^{-*}(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}) &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2; -2\|\mathbf{p} - \mathbf{o}\|_\infty - 1 < c_{(\mathbf{o},r)}(\mathbf{p}) \leq 0 \right\}.\end{aligned}$$

L'ensemble $\tilde{\mathfrak{D}}_k^{+*}(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$ est 1-minimal, donc c'est une courbe discrète simple 0-connexe.

Le cercle de J. Bresenham est une approximation centrée autour du cercle continu de même paramètre. Les approximations qui peuvent donc être pertinentes dans ce cas sont donc les modèles $\tilde{\mathfrak{D}}_k(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$ et $\tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)})$. Si nous restreignons les paramètres du cercle support aux entiers, nous pouvons voir d'après leur écriture analytique que les approximations coïncident. Comme de plus un cercle de J. Bresenham est un cercle naïf fermé, nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.10 (Modèles de cercles non signés et cercles de J. Bresenham). *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Les modèles non signés de cercle sont alors équivalents à leurs approximations et au cercle de Bresenham :*

$$\mathbb{C}_0(r) = \mathfrak{D}_{[\cdot]_k}(\mathcal{C}_{(r)}) = \tilde{\mathfrak{D}}_{[\cdot]_k}(\mathcal{C}_{(r)}) = \mathfrak{D}_{[\cdot]_k}^*(\mathcal{C}_{(r)}) = \tilde{\mathfrak{D}}_{[\cdot]_k}^*(\mathcal{C}_{(r)}).$$

Démonstration. $\mathbb{C}_0(r) = \mathfrak{D}_k(\mathcal{C}_{(r)})$ vient du résultat de E. Andres de la Proposition 6.9, $\mathfrak{D}_k(\mathcal{C}_{(r)}) = \tilde{\mathfrak{D}}_k(\mathcal{C}_{(r)})$ est un cas particulier du Théorème 6.8. $\tilde{\mathfrak{D}}_k(\mathcal{C}_{(r)}) = \tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(r)})$ se déduit facilement de la Définition 6.10 et des hypothèses. De plus, $\tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(r)}) \subseteq \mathfrak{D}_k^*(\mathcal{C}_{(r)})$ et $\mathfrak{D}_k^*(\mathcal{C}_{(r)}) \subseteq \mathfrak{D}_k(\mathcal{C}_{(r)})$, or $\tilde{\mathfrak{D}}_k^*(\mathcal{C}_{(r)}) = \mathfrak{D}_k(\mathcal{C}_{(r)})$, d'où l'égalité avec le modèle semi-ouvert centré. \square

Nous venons de voir que la définition la plus courante et la plus étudiée de cercles discrets correspond bien à plusieurs de nos modèles. Les autres cercles approchant la 0-connexité pour des paramètres entiers sont les frontières intérieures de disque [48]. Elles correspondent aux discrétisations semi-ouvertes négatives approximées.

Concernant le cas de cercles à paramètres quelconques, nous retrouvons la définition proposée par S. Pham [67].

Théorème 6.11 (Modèles semi-ouverts et cercles de S. Pham). *Soit $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}$. Le cercle de S. Pham $\mathbb{C}_P(\mathbf{o}, r)$ de centre \mathbf{o} et de rayon r est alors le modèle semi-ouvert du cercle $\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}$, basé sur $[\cdot]_1$ et de diamètre 1 :*

$$\mathbb{C}_P(\mathbf{o}, r) = \tilde{\mathfrak{D}}_1^*(\mathcal{C}_{(\mathbf{o},r)}).$$

Démonstration. Dans le premier octant (les autres sont déduits par symétrie), un pas dans l'algorithme de S. Pham peut se résumer comme suit : à partir du voxel courant (i, j) appartenant

au cercle discret, il calcule $\Delta_{(i,j+1)} = r^2 - (i - \frac{1}{2} - x_0)^2 - ((j+1) - y_0)^2$; si $\Delta_{(i,j+1)} > 0$, alors le pixel $(i, j+1)$ appartient au cercle discret, sinon $\Delta_{(i,j+1)} \leq 0$ et c'est le pixel $(i-1, j+1)$ qui appartient au cercle discret.

Considérons maintenant un pixel (i, j) dans le premier octant tel qu'il appartienne à $\tilde{\mathcal{D}}_1^*(s_{(\mathbf{o},r)})$. Un simple calcul nous assure que seuls les pixels $(i-1, j+1)$ et $(i, j+1)$ peuvent aussi appartenir au cercle. Les conditions respectives pour chacun d'eux sont :

$$\begin{cases} -(i-1-x_0) - \frac{1}{4} \leq s_{(\mathbf{o},r)}(i-1, j+1) < (i-1-x_0) - \frac{1}{4} \\ -(i-x_0) - \frac{1}{4} \leq s_{(\mathbf{o},r)}(i, j+1) < (i-x_0) - \frac{1}{4} \end{cases},$$

ou en utilisant seulement $s_{(\mathbf{o},r)}(i, j-1)$ pour les exprimer :

$$\begin{cases} (i-x_0) - \frac{1}{4} \leq s_{(\mathbf{o},r)}(i, j-1) \\ s_{(\mathbf{o},r)}(i, j-1) < (i-x_0) - \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Un et un seul des deux appartient au cercle discret et c'est le signe de la différence entre $c_{(\mathbf{o},r)}(i, j-1)$ et $(i-x_0) - \frac{1}{4}$ qui le détermine. Puisque $\Delta_{(i,j+1)} = (c_{(\mathbf{o},r)}(i, j-1)) - ((i-x_0) - \frac{1}{4})$, alors $\mathcal{C}_P(\mathbf{o}, r)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_1^*(c_{(\mathbf{o},r)})$ définissent le même ensemble discret. \square

Il faut noter que l'initialisation de l'algorithme de S. Pham est sujette à caution. En particulier, E. Andres a proposé une correction pour que le pixel initial vérifie une condition basée sur la norme euclidienne. L'équivalence entre le processus de l'algorithme et une discrétisation semi-ouverte suggère qu'une bonne initialisation doit se baser sur la distance induite par $\|\cdot\|_1$.

6.3.4 Cercles discrets 0-séparants

Les discrétisations de cercles et leurs approximations basées sur la norme de 0-adjacence sont des ensembles 0-séparants. En particulier, parmi elles, nous retrouvons les cercles discrets algorithmiques 1-connexes [1], ce sont des discrétisations semi-ouvertes centrées. Il suffit de restreindre les bornes dans la caractérisation analytique de notre définition à des entiers pour retrouver la forme analytique de [32].

6.4 Conclusion et perspectives

Les premières définitions de cercles ont été algorithmiques, suite au besoin de guider les traceurs numériques. Pour cette problématique, seule l'étude des cercles discrets à paramètres entiers s'imposait. Dans ce cadre, trois visions du problème convergent vers une même solution : minimisation locale du reste de son polynôme caractéristique, minimisation locale de la distance euclidienne ou minimisation locale des déplacements verticaux ou horizontaux. Les cercles discrets obtenus par ces trois méthodes sont identiques et 0-connexes. Le résultat est un ensemble le plus

souvent 1-minimal et ne pavant pas le plan. Quand on s'intéresse au cas de cercles à paramètres quelconques, les trois critères ne sont plus équivalents et le meilleur compromis qualité/temps de calcul est de minimiser les déplacements verticaux ou horizontaux. Minimiser le reste est moins précis et minimiser la distance euclidienne est plus coûteux. D'autres définitions de cercles discrets existent, avec d'autres propriétés, notamment des cercles qui pavent le plan. Ces derniers ont été les premiers à avoir été munis d'une définition analytique, c'est-à-dire d'une caractérisation globale. Elle s'inspire de la définition des droites discrètes arithmétiques et utilise donc une épaisseur constante. Pour obtenir une plus grande expressivité, nous avons introduit d'autres caractérisations analytiques, les cercles discrets arithmétiques, dont l'épaisseur est fonction de la position où elle est évaluée. Dans ce cadre, une bonne partie des cercles discrets à paramètres entiers sont accessibles.

Si nous considérons maintenant nos modèles de discrétisation, ils unifient dans un même cadre tous les cercles discrets mentionnés dans ce chapitre. En particulier, nos cercles discrets arithmétiques ne sont finalement que des approximations grossières des modèles fermés. De plus, nos modèles définissent des hypersphères discrètes possédant de bonnes propriétés topologiques. Par exemple, les approximations semi-ouvertes positives d'hypersphères sont des ensembles discrets minimaux. Et même, ces objets discrets peuvent être considérés comme des $(d - 1)$ -variétés discrètes k -minimales, définition proposée en conclusion du chapitre sur les surfaces discrètes.

La caractérisation analytique de cercles et d'hypersphères discrètes peut sembler une problématique très théorique, et c'est en partie le cas. Un grand nombre des propriétés de ces objets ont déjà été mises en évidence et nous disposons de nombreux algorithmes de tracé. Néanmoins, il est un domaine où cela peut ouvrir de nouvelles perspectives pratiques, celui de la reconnaissance. Autant il est facile de tracer un cercle par des critères locaux, autant il est difficile de le reconnaître ainsi. Avec nos caractérisations, la décision sur l'appartenance d'un pixel à un cercle discret est immédiate. De plus, nos modèles peuvent être définis très simplement de manière géométrique à partir d'unions et de différences de disques. Ainsi, nous pensons pouvoir obtenir des résultats probants dans le domaine de la reconnaissance de cercles, le seul vrai écueil nous semblant être la gestion des imperfections du tracé, causées, par exemple, par du bruit.

Conclusion

Les droites, les plans et les hyperplans discrets sont les primitives qui ont été les plus étudiées. Elles sont aujourd'hui bien maîtrisées. En particulier, leur propriété topologique principale, être un ensemble séparent, est entièrement caractérisée par leur épaisseur. Concernant la connexité, un tel résultat n'avait pas encore été proposé. Nous avons apporté une réponse pour les hyperplans discrets arithmétiques de vecteurs normaux rationnels. Ce résultat repose principalement sur la mise en évidence de réductions arithmétiques, sur le vecteur normal et l'épaisseur d'un hyperplan, qui préservent la $(d-1)$ -connexité. Nous parlons de réductions, car ces transformations réduisent les composantes du vecteur normal. En les itérant, nous annulons une composante du vecteur normal et réduisons donc la dimension du problème. Quand celle-ci devient 1, le résultat est immédiat. Le cas des autres connexités se ramène à celui de la $(d-1)$ -connexité, encore une fois, par l'intermédiaire d'une réduction arithmétique sur les composantes du vecteur normal. Néanmoins cette équivalence n'est pour l'instant démontrée que sous certaines conditions. La détermination des cas qui échappent encore à notre étude est en bonne voie et nous espérons rapidement clore cette question.

Au contraire, l'extension du résultat aux hyperplans discrets arithmétiques irrationnels semble plus problématique. Notre algorithme revient en pratique à annuler, à chaque fois, une composante du vecteur normal. Dans le cas de vecteurs rationnels, donc d'entiers, une suite positive décroissante atteint toujours 0. Avec des vecteurs irrationnels, ce n'est plus le cas. Il est intéressant de noter que notre réduction correspond à un algorithme de fractions continues multidimensionnelles. Ce n'est pas un résultat très surprenant puisque de tels liens ont déjà été mis en évidence pour les droites. En revanche, l'algorithme mis en jeu est plus surprenant : celui-ci n'est pas considéré comme un bon algorithme de fractions continues. En particulier, appliqué à un vecteur irrationnel, toutes les composantes ne convergent pas vers 0. Cela est handicapant pour espérer déterminer par son intermédiaire la connexité des hyperplans discrets arithmétiques irrationnels. Il nous semble donc important de bien comprendre si notre résultat est dépendant de cet algorithme en particulier ou de la notion de fractions continues multidimensionnelles. Dans le second cas, il serait judicieux de choisir un autre algorithme rentrant dans ce cadre, avec de bonnes propriétés de convergence, et l'étude de la connexité des hyperplans discrets arithmétiques irrationnels serait facilitée.

La connaissance sur les objets géométriques plus complexes, comme les hypersurfaces, est beaucoup moins vaste. Leur utilité est évidente puisque la frontière d'un objet discret peut être vue comme une hypersurface. Actuellement, les modèles de discrétisation les plus formels, ne conduisent pas à de bons hyperplans discrets arithmétiques, à savoir des ensembles minimaux et ne permettent d'obtenir que des ensembles 0-séparants ou $(d - 1)$ -séparants. Ces défauts nous ont conduit à en construire de nouveaux que nous avons nommés des modèles semi-ouverts et à proposer l'utilisation des normes de k -adjacence pour en définir des versions pertinentes. Appliqués aux hyperplans, ces modèles permettent d'atteindre l'ensemble des hyperplans discrets arithmétiques minimaux. Dans le cas d'hypersurfaces plus complexes, à savoir, pour nous, définies implicitement par un polynôme sans racine double et sous quelques autres contraintes, la minimalité n'est pas atteinte. De plus, le calcul exact de la solution n'est pas possible informatiquement puisqu'il requiert l'étude de ce polynôme sur l'enveloppe d'une boule. Nous avons donc considéré des approximations par défaut de ces modèles qui conservent la propriété d'être séparants. De plus, dans le cas de polynômes à coefficients rationnels, elles peuvent être déterminées exactement par l'arithmétique entière.

Les discrétisations de surfaces n'atteignent pas la minimalité. Les définitions théoriques de surfaces discrètes la requièrent. Finalement, les deux visions ne coïncident pas. Ce fait est assez gênant et pose la question de la pertinence des définitions de surfaces discrètes et de courbes discrètes. En particulier, il nous semble intéressant de disposer d'une définition de courbe discrète moins restrictive que celle de D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld [65]. Les quasi-courbes introduites par R. Malgouyres [61] nous semblent de bons candidats, même si pour l'instant la définition ne caractérise que des courbes discrètes 0-connexes 1-séparantes. Dans le même temps, nous avons proposé, sans l'approfondir, une extension directe des courbes de D. G. Morgenthaler et A. Rosenfeld mettant en jeu la notion de fonctionnalité locale. Ces deux définitions nous semblent prometteuses et nous pensons les étudier plus précisément.

Pour valider nos modèles en pratique, nous les avons appliqués au cercle, courbe pour laquelle nous disposons d'une importante littérature. En particulier, tous les cercles que nous avons présentés ont pu être caractérisés par nos modèles. Nous avons déjà proposé une vision analytique des cercles discrets basée sur une épaisseur non constante [32]. Elle nous avait permis de retrouver un certain nombre des algorithmes de cercles discrets à paramètres entiers existants. Cette définition n'est en fait qu'une approximation grossière d'un de nos modèles. Au final, nous avons muni les définitions usuelles de cercles discrets de caractérisations analytiques. L'intérêt peut sembler limité puisque nous disposons déjà de nombreux algorithmes de tracé et beaucoup des propriétés de ces cercles ont déjà été mises en évidence. Néanmoins, une vision globale des cercles est nécessaire pour au moins un domaine, la reconnaissance. Il est plus facile de reconnaître un objet s'il est caractérisé globalement, en particulier par une forme analytique, plutôt que localement. Nous espérons donc obtenir des résultats intéressants dans ce domaine grâce à nos modèles. Nous avons d'ailleurs commencé à explorer quelques pistes, qui nous semblent prometteuses, avec M. Dexet.

Bibliographie

- [1] J. Van Aken and M. Novak. Curve-drawing algorithms for raster displays. *ACM Transactions on Graphics*, 4(2) :147–169, 1985.
- [2] E. Andres. Discrete circles, rings and spheres. *Computers & Graphics*, 18(5) :695–706, 1994.
- [3] E. Andres. *Modélisation Analytique Discrète d’Objets Géométriques*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Poitiers, 2000.
- [4] E. Andres. Discrete linear objects in dimension n : the standard model. *Graphical Models*, 65(1-3) :92–111, 2003.
- [5] E. Andres, R. Acharya, and C. Sibata. Discrete analytical hyperplanes. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 59(5) :302–309, 1997.
- [6] E. Andres and M.-A. Jacob. The discrete analytical hyperspheres. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(1) :75–86, 1997.
- [7] E. Andres, C. Sibata, R. Acharya, and K. H. Shin. New methods in oblique slice generation. In *SPIE Medical Imaging’96 : Image Display*, volume SPIE 2707, pages 580–589, 1996.
- [8] J. Bernoulli. Sur une nouvelle espèce de calcul. In *Recueil pour les Astronomes*, volume 1, pages 255–284, Berlin, 1772.
- [9] V. Berthé, C. Fiorio, and D. Jamet. Generalized functionality for arithmetic discrete planes. In *12th International Conference On Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI’05*, pages 276–286, Poitiers, France, April 2005.
- [10] V. Berthé, C. Fiorio, D. Jamet, and F. Philippe. On some applications of generalized functionality for arithmetic discrete planes. *Image and Vision Computing*.
- [11] G. Bertrand. On p -simple points. *Compte-Rendus de l’Académie des Sciences, Série 1, Mathématique*, 321(8) :1077–1084, 1995.
- [12] G. Bertrand and R. Malgouyres. Some topological properties of discrete surfaces. In *DGCI*, pages 325–336, 1996.
- [13] S. N. Biswas and B. B. Chaudhuri. On the generation of discrete circular objects and their properties. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 32(2) :158–170, November 1985.

- [14] J. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1) :25–30, 1965.
- [15] J. Bresenham. A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Communication of the ACM*, 20(2) :100–106, February 1977.
- [16] V. E. Brimkov, E. Andres, and R. P. Barneva. Object discretizations in higher dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 23(6) :623–636, 2002.
- [17] V. E. Brimkov and R. P. Barneva. Graceful planes and lines. *Theoretical Computer Science*, 283(1) :151–170, 2002.
- [18] V. E. Brimkov and R. P. Barneva. Connectivity of discrete planes. *Theoretical Computer Science*, 319(1-3) :203–227, 2004.
- [19] V. E. Brimkov, D. Coeurjolly, and R. Klette. Digital planarity - a review. *Discrete Applied Mathematics*, 155(4) :468–495, 2007.
- [20] V. E. Brimkov and R. Klette. Curves, hypersurfaces, and good pairs of adjacency relations. In *IWCIA*, pages 276–290, 2004.
- [21] M. G. Castelli, F. Mignosi, and A. Restivo. Fine and wilf’s theorem for three periods and a generalization of sturmian words. *Theoretical Computer Science*, 218(1) :83–94, 1999.
- [22] J.M. Chassery and A. Montanvert. *Geométrie discrète en analyse d’images*. Hermès, 1991.
- [23] J. C. Ciria, A. de Miguel, E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Quintero. A maximum set of (26, 6)-connected digital surfaces. In *IWCIA*, pages 291–306, 2004.
- [24] D. Cohen-Or and A. E. Kaufman. Fundamentals of surface voxelization. *CVGIP : Graphical Model and Image Processing*, 57(6) :453–461, 1995.
- [25] M. Couprie and G. Bertrand. Simplicity surfaces : a new definition of surfaces in z^3 . In *SPIE Vision Geometry V*, volume 3454, pages 40–51, 1998.
- [26] I. Debled-Rennesson. *Etude et Reconnaissance des Droites et Plans Discrets*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1995.
- [27] I. Debled-Rennesson, F. Feschet, and J. Rouyer-Degli. Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time. *Computers & Graphics*, 30(1) :30–36, 2006.
- [28] M. Doros. Algorithms for generation of discrete circles, rings, and disks. *Computer Graphics and Image Processing*, 10(4) :366–371, August 1979.
- [29] F. Feschet and J.-P. Reveillès. A generic approach for n-dimensional digital lines. In *DGCI*, pages 29–40, 2006.
- [30] O. Figueiredo and J.-P. Reveillès. A contribution to 3d digital lines. In *DGCI*, pages 187–198, 1995.
- [31] O. Figueiredo and J.-P. Reveillès. New results about 3d digital lines. In *SPIE Vision Geometry V*, volume 2826, pages 98–108, 1996.

- [32] C. Fiorio, D. Jamet, and J.-L. Toutant. Discrete circles : an arithmetical approach with non-constant thickness. In *SPIE Electronic Imaging'06 : Vision Geometry XIV*, volume 6066, pages 0C–1–0C–12, January 2006.
- [33] C. Fiorio and J.-L. Toutant. Arithmetic discrete hyperspheres and separatingness. In *DGCI*, pages 425–436, 2006.
- [34] C. Fiorio and J.-L. Toutant. Arithmetic characterization of polynomial-based discrete curves. In *SPIE Electronic Imaging'07 : Vision Geometry XV*, 2007.
- [35] J. Françon. Sur la topologie d'un plan arithmétique. *Theoretical Computer Science*, 156(1&2) :159–176, 1996.
- [36] H. Freeman. On the encoding of arbitrary geometric configurations. *IRE Transactions on Electronic Computers*, 10(2) :260–268, June 1961.
- [37] H. Freeman. Computer processing of line-drawing images. *ACM Computer Surveys*, 6(1) :57–97, 1974.
- [38] Y. Gérard. Periodic graphs and connectivity of the rational digital hyperplanes. *Theoretical Computer Science*, 283(1) :171–182, 2002.
- [39] F. C. A. Groen and P. W. Verbeek. Freeman-code probabilities of object boundary quantized contours. *Computer Graphics and Image Processing : an International Journal*, 7(3) :391–400, 1978.
- [40] B.K.P. Horn. Circle generators for display devices. *Computer Graphics and Image Processing*, 5(2) :280–288, June 1976.
- [41] S. H. Y. Houng. On the straightness of digital arcs. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7(2) :203–216, 1985.
- [42] S. Y. Hsu, L. R. Chow, and H. C. Liu. A new approach for the generation of circles. *Computer Graphics Forum*, 12(2) :105–110, 1993.
- [43] D. Jamet. *Géométrie Discrète : une Approche par la Combinatoire des Mots*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, 2005.
- [44] D. Jamet and J.-L. Toutant. Minimal thickness connecting rational arithmetic discrete planes. *Discrete Applied Mathematics (accepted for publication)*.
- [45] D. Jamet and J.-L. Toutant. On the connectedness of rational arithmetic discrete hyperplanes. In *DGCI*, pages 223–234, 2006.
- [46] B. W. Jordan Jr, W. J. Lennon, and B. D. Holm. An improved algorithm for the generation of nonparametric curves. *IEEE Transactions on Computers*, 22(12) :1052–1060, December 1973.
- [47] C.E. Kim. Digital convexity, straightness, and convex polygons. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4(6) :618–626, November 1982.

- [48] C.E. Kim. Digital disks. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(3) :372–374, May 1984.
- [49] C.E. Kim and T.A. Anderson. Digital disks and a digital compactness measure. In *STOC '84 : Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 117–124, New York, NY, USA, 1984. ACM Press.
- [50] R. Klette. The n -dimensional grid point space. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 30(1) :1–12, 1985.
- [51] R. Klette and A. Rosenfeld. Digital straightness - a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3) :197–230, 2004.
- [52] Reinhard Klette. Multigrid convergence of geometric features. In *Digital and Image Geometry*, pages 318–338, 2000.
- [53] T. Y. Kong, A. W. Roscoe, and A. Rosenfeld. Concepts of digital topology. *Topology and its Applications*, 46 :219–262, 1992.
- [54] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3) :357–393, 1989.
- [55] J. Koplowitz. On the performance of chain codes for quantization of line drawings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 3(2) :180–185, 1981.
- [56] Z. Kulpa. On the properties of discrete circles, rings, and disks. *Computer Graphics and Image Processing*, 10 :348–365, 1979.
- [57] Y. P. Kuzmin. An efficient circle-drawing algorithm. *Computer Graphics Forum*, 9(4) :333–336, 1990.
- [58] C. Lincke and C. A. Wüthrich. Towards a unified approach between digitizations of linear objects and discrete analytical objects. In *WSCG*, 2000.
- [59] C. Lincke and C. A. Wüthrich. Surface digitizations by dilations which are tunnel-free. *Discrete Applied Mathematics*, 125(1) :81–91, 2003.
- [60] R. Malgouyres. There is no local characterization of separating and thin objects in z^3 . *Theoretical Computer Science*, 163(1&2) :303–308, 1996.
- [61] R. Malgouyres. A definition of surfaces of z^3 : a new 3d discrete jordan theorem. *Theoretical Computer Science*, 186(1-2) :1–41, 1997.
- [62] R. Malgouyres. Local characterization of strong surfaces within strongly separating objects. *Pattern Recognition Letters*, 19(3-4) :341–349, 1998.
- [63] R. Malgouyres and G. Bertrand. A new local property of strong n -surfaces. *Pattern Recognition Letters*, 20(4) :417–428, 1999.
- [64] M. D. McIlroy. Best approximate circles on integer grids. *ACM Transactions on Graphics*, 2(4) :237–263, October 1983.

- [65] D. G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional digital images. *Information and Control*, 51(3) :227–247, 1981.
- [66] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics ii. sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62 :1–42, 1940.
- [67] S. Pham. Digital circles with non-lattice point centers. *The Visual Computer*, 9(1) :1–24, 1992.
- [68] M.L.V. Pitteway. Algorithm for drawing ellipses or hyperbolae with a digital plotter. *The Computer Journal*, 10(3) :282–289, 1967.
- [69] M.L.V. Pitteway. Integer circles, etc - some further thoughts. *Computer Graphics and Image Processing*, 3(3) :262–265, September 1974.
- [70] M.L.V. Pitteway. Integer circles, etc - three move extension bresenham’s algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, 3(3) :260–261, September 1974.
- [71] J.-P. Reveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d’Etat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.
- [72] C. Ronse and M. Tajine. Discretization in hausdorff space. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(3) :219–242, 2000.
- [73] C. Ronse and M. Tajine. Hausdorff discretization for cellular distances and its relation to cover and supercover discretizations. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 12(2) :169–200, June 2001.
- [74] A. Rosenfeld. Arcs and curves in digital pictures. *Journal of the ACM*, 20(1) :81–87, 1973.
- [75] A. Rosenfeld. Digital straight lines segments. *IEEE Transactions on Computers*, 23 :1264–1369, 1974.
- [76] A. Rosenfeld. A converse to the jordan curve theorem for digital curves. *Information and Control*, 29(3) :292–293, November 1975.
- [77] H. Sánchez-Cruz, E. Bribiesca, and R. M. Rodríguez-Dagnino. Efficiency of chain codes to represent binary objects. *Pattern Recognition*, 40(6) :1660–1674, 2007.
- [78] F. Schweiger. *Multidimensional Continued Fractions*. Oxford University Press, 2000.
- [79] M. Tajine and C. Ronse. Topological properties of hausdorff discretization, and comparison to other discretization schemes. *Theoretical Computer Science*, 283(1) :243–268, 2002.
- [80] M. Tajine, D. Wagner, and C. Ronse. Hausdorff discretization and its comparison to other discretization schemes. In *DGCI*, pages 399–412, 1999.
- [81] J.-L. Toutant. Characterization of the closest discrete approximation of a line in the 3-dimensional space. In *ISVC (1)*, pages 618–627, 2006.
- [82] L. Vuillon. Local configurations in a discrete plane. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 6(4) :625–636, 1999.

- [83] X. Wu and J. G. Rokne. Double-step incremental generation of lines and circles. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 37(3) :331–344, 1987.
- [84] C. A. Wüthrich. A model for curve rasterization in n-dimensional space. *Computers & Graphics*, 22(2-3) :153–160, 1998.
- [85] C. Yao and J. G. Rokne. Hybrid scan-conversion of circles. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(4) :311–318, 1995.