



**HAL**  
open science

## Corrélation, indépendance et modèles inverses

Vincent Vigneron

► **To cite this version:**

Vincent Vigneron. Corrélation, indépendance et modèles inverses: Applications au traitement des biosignaux. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2007. tel-00203102

**HAL Id: tel-00203102**

**<https://theses.hal.science/tel-00203102>**

Submitted on 9 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Habilitation à Diriger des Recherches

présentée à

l'Université d'Evry Val d'Essonne

par

VINCENT VIGNERON

Corrélation, indépendance et modèles inverses.  
Applications au traitement des biosignaux.

Soutenue le 17 décembre 2007 devant le jury composé de

Rapporteurs	M. Guy DEMOMENT	Prof. SUPELEC
	M. Pierre-Yves GUMÉRY	Prof. UJF
	M. Ali MANSOUR	HDR ENSIETA/UBO
Examineurs	M. Christian JUTTEN	Prof. UJF
	M. Luc JAULIN	Prof. ENSIETA/UBO
	M. Said MAMMAR	Prof. Université d'Evry

*A mes parents,  
A Isabelle, Pierre et Paul,  
sans qui tout cela  
n'aurait finalement aucun sens.*

# Remerciements

Merci bien évidemment à Ali Mansour, Pierre-Yves Guméry, Luc Jaulin, Christian Jutten, Jacques Duchêne, Saïd Mammar et Guy Demoment pour le temps qu'ils ont accepté de sacrifier à l'analyse de mon travail en étant membre de mon jury. Cependant ce n'est pas l'essentiel de mon message. Un dénominateur commun en réuni en effet ses membres : l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à certains de mes travaux.

Merci surtout à Christian pour m'avoir accueilli pendant 3 ans à Grenoble. Je ne peux que me réjouir de l'ambiance agréable de travail que j'y ai rencontrée, et des amitiés qui se sont formées. Jeanny, PYC, Michelle, Denis, Stéphane, marie-no : merci pour les excellents moments passés ensemble.

Mes remerciements vont également à mes premiers doctorants et postdoc que j'ai fait souffrir Riadh, Ana Paula, Sébastien, Aurélien, Ryadh, El-Mostafa. Le travail avec eux m'a encouragé à préparer cette HDR et leur réussite professionnelle est déjà ou sera ma plus belle récompense.

Enfin, un merci à tous les samosiens (Mad, Cat, Imen, Cécile et Olivier) et tout spécialement à Marie Cottrell (l'« icône » du SAMOS, dirait Patrick!) pour la confiance qu'elle a bien voulu m'accorder depuis le début. Cette confiance est essentielle dans la vie d'un chercheur car sa carence compromet l'efficacité de son travail. Je tiens à la remercier ici pour ce concours implicite.

Je n'oublie pas ma petite famille qui a souvent dû faire le sacrifice de ses loisirs pour une cause discutable. sic. Merci enfin aussi aux relecteurs anonymes pour leur relecture attentive et les longues discussions communes qui ont permis de débroussailler le terrain parfois ardu des démonstrations et pardon à ceux que j'ai oublié involontairement.





Première partie

# Corrélation et indépendance



# Chapitre 1

## Introduction générale et organisation du document

Les activités que j'ai menées depuis une dizaine d'années relèvent essentiellement du domaine du traitement du signal, mais aussi de l'analyse de données et de l'analyse numérique. Ce document ne décrit pas de façon exhaustive tous mes travaux. Il a été rédigé autour d'une idée directrice : les relations de corrélation et de dépendance qui peuvent exister entre des signaux. J'ai choisi de faire une présentation détaillée de mes travaux qui se justifie par la fait que certains d'entre eux ne sont qu'en cours de publication et que d'autres ont été publiés avec un nombre de pages volontairement réduit par l'éditeur. Il m'est ainsi plus facile de parvenir à une présentation homogène et d'inclure en certains endroits des développements complémentaires.

Le point de départ est mon intérêt certain pour la résolution de problèmes inverses. Ce paradigme apparaît dans divers domaines des sciences : théorie de l'information, physique statistique, thermodynamique, traitement d'images [46], etc. Nous ne nous attacherons pas ici à faire une synthèse ou des rapprochements des diverses approches inverses. On peut trouver dans les travaux de Jaynes (professeur à l'Université de Cambridge) de nombreuses réflexions sur le sujet [104]. Nous nous intéressons par contre aux outils mathématiques qui permettent de résoudre de tels problèmes.

Ces activités peuvent être rangées sous trois volets qui sont exposés ci-après de façon succincte.

Le premier volet, intitulé La séparation de sources consiste à retrouver les sources non observées, à partir de l'observation des signaux mélangés issus du réseau de capteurs. Sans hypothèse supplémentaire, ce problème est mal posé. Classiquement, des hypothèses fortes sur le signal *utile* et sur les autres (bruits) sont utilisées : par exemple, le bruit est supposé Gaussien ou le spectre de la source utile est connu, ou bien possède une référence du signal de bruit (méthode de Widrow-Hoff). Hélas, lorsque tous les signaux sont de même nature (signaux de parole reçus par un microphone, signaux de télécommunications reçus par un réseau d'antennes, etc.), ceci n'est plus possible. En introduisant l'hypothèse d'indépendance sur les sources à séparer, on peut montrer [32] que l'on peut résoudre le problème si le mélange est linéaire<sup>1</sup> et qu'il y ait au plus une source Gaussienne. Les méthodes issues de ce résultat relèvent de l'ACI, et mettent en jeu une mesure d'indépendance et des statistiques d'ordre supérieur à 2 [138]. Nous avons proposé des résultats sur la séparabilité dans un article de la revue *Neurocomputing* [204].

L'ACI n'exploite pas de propriétés (temporelles notamment) des sources, mais suppose que ces dernières sont iid. Si les sources sont colorées (le premier « i » de iid est faux), ou si les sources sont parcimonieuses ( par exemple à valeurs discrètes ou fortement sous-Gaussiennes), on peut proposer des méthodes plus simples, reposant sur des décorrélations (ordre 2). Ces méthodes ont l'avantage de pouvoir séparer des signaux Gaussiens. Toutefois, de sérieux verrous d'une part théoriques et d'autre part algorithmiques restent encore non complètement résolus. Citons par exemple :

- le problème des mélanges non linéaires : en général, il n'est pas possible de séparer des mélanges non linéaires en utilisant seulement l'indépendance (de résultat est dû à Darmais [41]). Il faut ajouter des contraintes pour

---

1. On a alors un modèle du type  $\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t)$ .

*régulariser*. L'adjonction de contraintes structurelles proposées par Kagan [108] débouchent sur une classe de mélanges non-linéaires qui peuvent facilement être transformés en mélanges linéaires et qui deviennent ainsi séparables. Certains auteurs affirment que des systèmes séparant dont la transformation est une fonction « assez » lisse (comme des réseaux de neurones) suffisent pour régulariser. Nous avons proposé dans IEEE TAC [120] et dans JESA [121] des techniques d'estimation aveugle qui donne de bons résultats dans le cas linéaire et serait aisément applicable dans le cas non-linéaire.

- le cas des mélanges fortement bruités : un grand nombre de méthodes de séparation de sources supposent implicitement que le modèle d'observation (mélange instantané/convolutif ou linéaire/non-linéaire) est exact et que les données ne sont pas bruitées. En pratique, lors de l'application, ces méthodes se heurtent à des difficultés car la réalité est souvent plus complexe. Il est donc impératif de prendre en compte le bruit, ce qui entraîne un problème d'estimation de la matrice de séparation et, même si l'estimation est exacte, la restauration des sources bruitée. L'effet de non-linéarités peut, en outre, être catastrophique pour le rapport signal à bruit. Dans *Signal Processing Letters* [60], nous proposons une nouvelle approche qui exploite la *diversité temps-échelle* spatiale des sources afin de construire un ensemble de matrices à partir de la transformée en ondelettes des signaux observés (cf. chap.2.5).
- l'exploitation complète des informations générales comme la coloration temporelle, la non-stationnarité. Il s'agit encore de l'extension de travaux récents proposés pour des mélanges linéaires. L'article précité [60] est une réponse à cette problématique.

Dans [204], nous avons montré que la maximisation de la vraisemblance pouvait conduire à des solutions exactes erronées. J'ai proposé une mesure de cette erreur, en tenant compte de l'erreur d'estimation de la distribution estimée des sources.

Enfin, nous avons voulu soumettre la SAS à de vrais problèmes tirés du monde réel. La séparation effective des signaux électrocardiographiques ou d'électromyographie à partir de mesures non invasives mais effectuées par un plus grand nombre de capteurs que celui habituellement employé en clinique est un vaste problème. Outre l'indépendance statistique, nous avons cherché à exploiter les caractéristiques larges des signaux : la non stationnarité, la coloration ou le caractère discret des signaux, les observations étant (le plus souvent) très bruitées. Un des avantages de la SAS est de ne pas nécessiter la connaissance d'un signal de référence, comme c'est usuel dans les méthodes classiques de traitement du signal. L'extraction de sources de même nature est possible : des signaux de brouillage, même ressemblant aux signaux utiles, peuvent aussi être extraits sans problème particulier. L'application de l'utilisation des techniques de séparation de sources dans la conception de réseaux de capteurs « intelligents » mérite donc une analyse approfondie (cf. Partie II).

Le troisième volet de ce document se préoccupe d'apprentissage inverse par piégeage par marche aléatoire. Ce n'est pas un avatar des modes qui secouent les Statistiques depuis 20 ans, c'est la réponse naturelle des traiteurs de signaux à la complexité croissante des problèmes produits par les systèmes multicapteurs actuels, que ce soit en imagerie ou en télécommunication. Le modèle, baptisé MIME<sup>2</sup>, s'appuie sur une topologie et un algorithme conçus pour supporter l'apport d'une grande quantité d'informations. *Il n'y a plus de contrainte sur la dimension des données ni sur la taille de l'échantillon*. Considérons un ensemble de  $p$  capteurs recevant des signaux  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$  et  $\mathbf{y}(t)$  un vecteur de réponses à prédire. Le signal  $x_i(t)$  fourni par chaque capteur  $i$  peut être vu comme la réponse du modèle inverse  $x_i(t) = g_i(\mathbf{y}(t))$ ,  $i = 1, \dots, p$ , ou bien en notation vectorielle  $\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{y}(t))$ .  $g_i$  est un modèle *parcimonieux* qui encode la réponse fonctionnelle de chaque capteur pour toute valeur de  $\mathbf{y}(t)$ ; les  $g_i$  peuvent être des opérateurs linéaires ou non-linéaires. La réponse du modèle  $\mathbf{y}(t)$  est calculée par une marche aléatoire (algorithme de Metropolis [147]) à partir des observations  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  en combinant les réponses des fonctions  $g_i$ . En dépliant artificiellement l'espace des données, MIME peut donc traiter des problèmes de très grande dimension. Les précisions obtenues sont en général très bonnes. Nous avons publié cette approche dans la revue *International Journal of Neural Systems* [198]. Plusieurs résultats théoriques sur la convergence du modèle ont été donnés.

Sa généralité le rend applicable à une grande variété de problèmes, en particulier aux problèmes mal posés et/ou de grandes dimensions, même dans les cas où la connaissance a priori est faible ou peu fiable ou en cas de données manquantes (cf. §3.2.3). Une tâche majeure est celle de l'estimation de la sortie du modèle, afin de réduire l'influence des données manquantes. Pour cette tâche, il est utile de pouvoir accéder aux performances des traitements, même de façon approchée, en terme de gain d'erreur de modélisation, par exemple par simple

---

2. MIME=Mode inverse par piégeage par marche aléatoire.

visualisation (cf. §3.2.2).

On notera la contradiction évidente avec les deux volets précédents où, au contraire, « chercher à comprendre les données, c'est souvent chercher à trouver de l'information cachée dans un gros volume de données » [45], *i.e.* chercher des dépendances linéaires ou non entre les variables observées pour résumer celles-ci à un petit nombre de paramètres. Il y a donc un réel besoin de méthodes mathématiques nouvelles pour exploiter ces informations de grandes dimensions qui se prêtent peu aux traitements à grande échelle. MIME mise sur l'apprentissage *contrôlée* d'un mélange de modèles. La notion de performance collective recouvre l'idée d'une réponse ajustée et surtout d'une réponse adaptative. Ce sont là, en quelques mots les enjeux majeurs de notre approche « coopérative ».

L'approche ensembliste constitue le quatrième et dernier volet de cet exposé. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les variables étaient indépendantes dans le but de connaître la densité jointe. Pourtant, cette indépendance ne correspond pas, le plus souvent, à une situation réelle; par exemple, l'hypothèse de *dépendance faible*, bien connue en Probabilités, n'est pas utilisée en séparation de source, car une telle hypothèse produirait alors des résultats difficiles à interpréter. Ensuite, l'approche probabiliste réclame des connaissances sur les lois jointes qui sont difficiles à obtenir en pratique hormis par estimation empirique, avec l'aléa qu'on lui connaît en grande dimension. . .

Au contraire d'une variable probabilisée qui est définie par sa densité de probabilité  $p(x)$  et son domaine de variation, une variable *intervalisée*  $x$  n'est représentée que par son support, noté  $[x]$ . On interprète un intervalle comme le représentant d'un réel mal connu. Si un nombre  $a$  et la borne  $b$  de  $a$  approxime la valeur d'une grandeur  $x$  telle que  $|x - a| \leq b$ , alors l'arithmétique des intervalles prétend que  $x \in [a - b, a + b]$ . Selon l'approche ensembliste, la solution d'un problème d'estimation est un ensemble dans lequel se trouve la solution de façon garantie. Si l'on obtient  $\emptyset$ , c'est qu'il n'y a pas de solution. Les ensembles peuvent être modélisés par des pavés, des cercles, des ellipses, des polyèdres à  $n$  côtés, etc. Le modèle ellipsoïdal a été largement étudié du fait de ses similitudes avec la loi Gaussienne. Dans nos recherches, nous nous sommes limités aux ensembles de type pavé, c'est à dire à des vecteurs d'intervalles.

Contrairement à l'approche bayésienne par exemple, l'approche ensembliste permet de s'affranchir de la connaissance des distributions des signaux et de la couleur du bruit. D'autres arguments plaident en faveur de l'approche ensembliste :

- elle ne réclame aucune information sur  $x$  à part la dimension de son support,
- les erreurs de mesure pour une donnée expérimentale sont souvent données sous forme d'écart de tolérance et non en terme de densité de probabilité. L'approche ensembliste constitue donc une approche « naturelle » pour traiter des mesures capteurs [100].
- les incertitudes dues aux erreurs numériques peuvent être incorporées explicitement lors du calcul du domaine des variables, alors qu'en probabilité, la loi des erreurs, supposée plus ou moins connue, sert à exprimer la vraisemblance des données [101].
- en optimisant de façon *garantie* n'importe quel critère non convexe, elle constitue un concurrent sérieux pour les méthodes formelles qui, elles, utilisent des approches itératives ne permettant d'analyser qu'une très petite portion de l'espace de recherche et ne permettent pas de conclure avec certitude que les solutions du problème ont été trouvées.

Les avantages de cette approche en SAS par rapport à une autre méthode basée sur un algorithme itératif sont la simplicité d'implémentation et l'estimation garantie. Par contre, les performances de ce type de méthodes sont moins bonnes que celle d'une méthode adaptative lorsque le nombre de signaux croît, mais elles sont généralisables pour un nombre quelconque de sources et de capteurs. Nous avons publié cette approche dans JESA [121].

Cette étude a été suivie par une autre étude plus récente où nous avons proposé d'utiliser le calcul ensembliste pour faire de l'estimation floue garantie. Cette étude a été publiée dans *Reliable Computing* [208].

Durant mes années de recherche, j'ai travaillé à l'application de ces méthodes à l'analyse et à l'interprétation de signaux physiologiques tels que ceux enregistrés en électromyographie, en électrocardiographie ou en électroencéphalographie en collaboration avec plusieurs hôpitaux parisiens. Le but de ce projet était la conception d'un système d'acquisition et d'analyse multicapteurs, dans lequel la sensibilité (indésirable) des réponses des capteurs est éliminée par séparation aveugle de sources, et non par des prouesses technologiques coûteuses. On s'est intéressé à deux types d'application : l'électrocardiogramme fœtal (ECGf) et l'électromyogramme du diaphragme (EMGdi).

Le but d'un tel dispositif était de rendre possible la surveillance de l'électrocardiogramme fœtal (ECGf) qui est un élément clé de la surveillance prénatale et pendant l'accouchement : l'objectif est de détecter d'éventuelles anomalies pouvant traduire un état de souffrance fœtale aiguë et nécessitant une prise en charge rapide afin d'éviter une évolution fatale ou l'évolution vers des séquelles graves et invalidantes<sup>3</sup>. L'autre application est la synchronisation de divers types d'appareil avec la commande ventilatoire reflétée par l'activité électromyographique du diaphragme (EMGd), aujourd'hui mesurée en milieu clinique de façon invasive et monocapteur. Cette perspective d'application concerne essentiellement la ventilation mécanique dite « neuro-assistée ». Il a en effet été démontré [183] qu'il pouvait être utile d'asservir une machine d'assistance ventilatoire non pas à un signal de nature mécanique, mais à un signal de nature électrophysiologique.

Ces deux applications ont en commun les difficultés suivantes : actuellement, on est capable de mesurer le rythme cardiaque fœtal (RCF) mais pas l'ECGf complet ; de plus, l'EMGd est réalisé de façon invasive en plaçant des électrodes sous-cutanées ou par voie œsophagienne. Dans les deux cas, le positionnement des capteurs est délicat. Nous proposons ici d'améliorer le confort de l'examen et le diagnostic :

- en extrayant le signal cardiaque complet du fœtus de façon non-invasive,
- en résolvant le problème de positionnement du capteur et en s'affranchissant du déplacement des « organes » (fœtus pour l'ECGf, diaphragme pour l'EMGd) par le jeu de la sélection des capteurs.

Il s'agit d'un projet à finalité *générique* : l'instrumentation et les méthodes pourront être utilisées pour d'autres types de mesures.

L'utilisation de plusieurs électrodes, placés en réseaux, conduit à des dispositifs d'acquisition de signal qui ne sont pas réalisables par des moyens analogiques, mais accessibles uniquement par le traitement numérique du signal. On peut ainsi, par exemple, recombinaison des signaux et extraire ceux qui proviennent d'une direction donnée ou chercher les électrodes les plus favorables au sens du meilleur rapport signal sur bruit. Notre dispositif, actuellement opérationnel, permet de mesurer 71 tensions *différentielles* grâce à une matrice de 9×8 capteurs. On peut ainsi sélectionner les meilleures tensions, faire des mesures et recommencer périodiquement la recherche des meilleures électrodes. Cette sélection automatique par commutation électronique doit permettre de changer d'électrode lorsque la source est mobile. On cherche à (i) exploiter le volume d'information provenant d'un système à grande dimension, à (ii) tirer parti de la diversité spatiale (distribution de capteurs) et temporelle pour faciliter le traitement du signal ultérieur et en particulier la séparation des signaux. Soulignons qu'il n'existe pas de dispositifs multi-capteurs similaire pour l'enregistrement des ECGf ou des EMGd.

Nous avons déposé un brevet logiciel pour ce travail [200], qui sera suivie d'un article de revue dans *IEEE instrumentation* en préparation.

Les thèmes abordés dans chaque chapitre : séparation de sources, mode de piégeage par marche aléatoire et analyse par intervalles sont autant de déclinaisons des problèmes inverses.

---

3. Le manque de spécificité des mesures est à l'origine d'une inflation du taux de césarienne avec extraction d'enfants bien portant (en France, il y a 25% de césariennes sur 700.000 naissances par an).

# Problèmes sous contraintes et séparation de sources

*« This is largely because dependence has so many more possibilities a priori than independence that these will usually need to be drastically restricted in any particular context. »* (Bartlett [9, p. 251])

## 2.1 Le problème de la séparation de sources

Considérons un ensemble de  $p$  capteurs recevant des signaux émis par  $n$  sources inconnues  $s_j(t), j = 1, \dots, n$ . Le signal  $x_i(t)$  fourni par chaque capteur  $i$  est alors un mélange inconnu des sources inconnues :

$$x_i(t) = \mathcal{F}(s_1(t), \dots, s_n(t)), \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.1)$$

ou bien en notation vectorielle :  $\mathbf{x}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{s}(t))$ , où  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$  et  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T$ . Un tel mélange est observé par exemple pour des capteurs sensoriels. Le problème de la séparation aveugle de sources [86] consiste à concevoir des méthodes d'apprentissage capables de retrouver les  $n$  sources  $s_j(t)$ , supposées indépendantes dans leur ensemble. En introduisant l'hypothèse d'indépendance sur les sources à séparer, on peut montrer [32] que l'on peut résoudre le problème si le mélange est linéaire, et qu'il y a au plus une source Gaussienne :  $\mathcal{F}$  est alors une simple matrice  $A$  à coefficients réels ou complexes et on a  $\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t)$ . Les méthodes issues de ce résultat ont fondé les bases de l'analyse en composantes indépendantes (ACI) et mettent en jeu une mesure d'indépendance et des statistiques d'ordre supérieur. Parmi ces derniers travaux, on peut citer [92, 129, 139, 161].

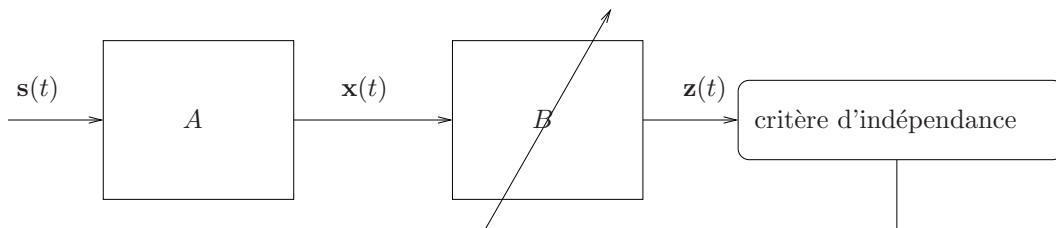


FIGURE 2.1 – Principe de la séparation de sources dans le cadre de mélanges instantanés. La matrice de séparation  $B$  est déterminée à partir des observations  $\mathbf{x} = A\mathbf{s}$  (mélanges des sources  $\mathbf{s}$ ) de telle sorte que les sources estimées  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{z} = B\mathbf{x}$  soient les plus indépendantes possibles, ou encore que  $BA = I$ .



Ce problème, dû au manque d'informations *a priori*, pourrait rester sans solution si l'on ne rajoutait pas comme hypothèse l'indépendance statistique des sources  $s_i$ . Cette hypothèse peut paraître forte mais elle est généralement vérifiée dans les cas réels. Il nous faut donc estimer les sources  $\mathbf{s}$  à partir des seules observations  $\mathbf{x}$  et de l'hypothèse d'indépendance par l'intermédiaire d'une matrice de séparation  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\hat{\mathbf{s}} = B \mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Il existe plusieurs types de mélanges [107], mais nous ne nous intéresserons qu'aux mélanges linéaires instantanés. Néanmoins, dans un contexte réaliste de mélanges fortement non stationnaires comme les signaux acoustiques audio ou des mélanges convolutifs, les performances sont limitées. Dans le dernier cas en particulier, la séparation dans le domaine fréquentiel est alors nécessaire. Un inconvénient de l'approche fréquentielle est que les sources sont séparées dans chaque canal de fréquence à une permutation près. Il est donc nécessaire de détecter les permutations éventuelles avant de reconstruire les sources temporelles. Une idée a consisté à utiliser une méthode de diagonalisation conjointe de matrices spectrales pour estimer les matrices de mélanges. La mesure de diagonalité est issue du maximum de vraisemblance et exploite la non-stationarité des signaux [161, 162].

La diagonalisation conjointe est un processus itératif, où la matrice de séparation est initialisée à une matrice identité. Etant donné un ensemble de matrices carrées d'ordre  $m$ ,  $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_J\}$ , l'objectif est de déterminer une matrice  $B$  de telle sorte que les matrices  $BM_j B^T$ ,  $j = 1, \dots, J$  soient le plus proche possible de matrices diagonales. Nous avons exploité un algorithme de diagonalisation conjointe approchée avec des matrices de covariance de scalogrammes dans SPL [60].

Nous avons travaillé sur plusieurs points théoriques avec plusieurs collaborateurs, notamment avec El-Mostafa Fadaili (CEA, Gif-sur-Yvette), Reza Sameini (Université Sharif, Teheran), Michel Fliess (Ecole Polytechnique, Paleyseau), Paul Doukan (ENSAE-CREST, Paris), Christian Jutten (GIPSA-lab, Grenoble). Principalement les travaux en cours (pas forcément encore tous publiés) portent sur :

1. une étude théorique des critères de séparation des algorithmes fondés sur le maximum de vraisemblance [204], qui contient des preuves de stabilité et de convergence des estimateurs, dans le cas des mélanges linéaires, lorsque les hypothèses sur les densités de probabilité des sources sont érronnées (cf [203]). Nous avons montré à travers l'étude locale des points stationnaires de l'algorithme que certains points stationnaires ne sont pas des solutions intéressantes (cf. §2.1).
2. une nouvelle preuve de convergence en loi des estimateurs de séparation dans le cas non-bruité, comme celle présenté à la conférence ICA 2004. Nous avons aussi donné une estimation de la matrice de covariance de l'erreur avec tres peu d'hypothèse sur le mélange en utilisant seulement la matrice d'information de Fisher, le hessien de la fonction de contraste et le théorème central limite (cf. §2.3.4).
3. la recherche de contrastes et d'algorithme sans minima locaux en ayant recours par exemple à l'analyse par intervalle (cf. chap.4).
4. l'exploration d'autres modèles non linéaires, qui s'appuient sur des systèmes réels ou réalistes. Les modèles à variables d'état, qui ont été peu étudiés dans ce cadre (voir Cichocki et quelques autres), semblent être des idées intéressantes à approfondir. Le travail de thèse mené avec S. Lagrange, en coopération avec des automaticiens (L. Jaulin, UBO) et les travaux sur l'*estimation rapide*, qui étend les travaux récents de M. Fliess sur les systèmes plats, sont en cours sur ce problème [120, 121].
5. l'identifiabilité d'un problème de séparation de sources, vision très « automatique » du problème (cf. §2.2).
6. l'étude de méthodes efficaces dans le cas de mélanges fortement bruités avec A. Paraschiv-Ionescu [209] (cf. §2.4).

Un autre aspect important de notre travail en séparation de source a été d'établir des ponts vers d'autres disciplines connexes, par exemple l'analyse de données, etc.

## 2.2 Propriété d'identifiabilité

### 2.2.1 Modèles inversibles

Dans un article publié dans JESA [120], nous nous sommes intéressé à l'étude de l'identifiabilité du problème de séparation aveugle de sources et à la notion de *séparabilité*. Cette section étend le travail réalisé sous l'angle

des modèles inverses.

Tout d'abord, dans le cas d'un mélange instantané linéaire de sources indépendantes et identiquement distribuées, il est nécessaire qu'au plus une source ait une densité de probabilité Gaussienne [32].

**Preuve 1** (Mélange de Gaussiennes). *Montrons ce résultat dans le cas d'un mélange de deux sources  $s_1$  et  $s_2$  que nous supposons Gaussiennes, centrées et indépendantes. Les observations  $y_1$  et  $y_2$  sont Gaussiennes :  $y_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$  et  $y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ . On a alors*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$z_1$  et  $z_2$  suivent des lois normales. Or pour des variables gaussiennes, l'indépendance est équivalente à la décorrélation. Il est ainsi possible de vérifier que

$$b_{1,1}b_{2,1}\sigma_1^2 + (b_{1,1}b_{2,2} + b_{1,2}b_{2,1})\sigma_1\sigma_2 + b_{1,2}b_{2,2}\sigma_2^2 = 0 \iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ décorrélées} \quad (2.4)$$

Les estimées  $z_1$  et  $z_2$  sont donc indépendantes sans pour autant qu'elles soient nécessairement égales aux sources  $s_1$  et  $s_2$ .

De plus, la matrice de séparation  $B$  ne peut être déterminée qu'à un facteur de puissance<sup>1</sup>  $D$  et à une matrice de permutation  $P$  près [26]. Ainsi, si  $B^*$  est une solution du problème de séparation de sources, alors  $B^\dagger = D P B^*$  est aussi une solution. En effet, si  $\mathbf{z}^* = B^* \mathbf{y}$  a ses composantes indépendantes alors  $\mathbf{z}^\dagger = B^\dagger \mathbf{y} = D P B^* \mathbf{y}$  a aussi ses composantes indépendantes.

Précisons que l'indétermination sur la puissance des sources peut être fixée sans perdre en généralité :

– soit en ajoutant des conditions sur la source afin de fixer les facteurs d'échelle  $d_j$  si  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  ; dans ce cas les sources sont supposées de puissance unitaires, *i.e.*  $E[s_j] = 1, \forall j$ .

– soit en ajoutant des conditions sur la matrice de mélange  $A$  afin de fixer les coefficients diagonaux de  $A$  à 1.

Une fois choisie la structure du modèle (éventuellement un ensemble de structures entre lesquelles on devra trancher), il est important de pouvoir étudier ses propriétés de façon aussi indépendantes que possible des valeurs prises par les paramètres, pour détecter avant même le recueil de données, les problèmes que l'on risque de rencontrer [214, p. 20]. Considérons le système paramétré en  $\mathbf{p}$  Fig.2.2, avec l'entrée  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}$ .  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{p}$  possibles.

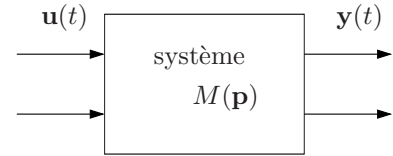


Figure 2.2: Système paramétré.

Un système paramétré est une relation de  $\mathcal{U} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P}$ .

Les systèmes paramétrés tels qu'on peut trouver la sortie *connaissant* l'entrée et les paramètres définissent la classe des systèmes déterministes. Les systèmes paramétrés dont on peut trouver les paramètres connaissant l'entrée et la sortie forment la classe des systèmes *identifiables*.

**Définition 1** (Identifiabilité). *Un système paramétré est identifiable si  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$  et  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$  où  $\mathbf{y}$  est la sortie engendrée par  $\mathbf{u}$ , il existe une fonctionnelle  $H$  déterminant les paramètres définie par :*

$$H : \begin{array}{l} \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{P} \\ \{\mathbf{u}, \mathbf{y}\} \mapsto \mathbf{p} \end{array} \quad (2.5)$$

**Exemple 1** (Système (non)-identifiable). *Considérons le système paramétré suivant  $y(t) = p(u^2(t) + 1)$ . On a  $p = \frac{y(t)}{u^2(t)+1}, \forall u, y$ . Ce système est donc identifiable. A contrario, considérons le système paramétré  $y(t) = p_1 u_1(t) + p_2 u_2(t)$ . Si on choisit comme entrée  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_1(t))^T$ , alors la sortie  $y(t) = (p_1 + p_2)u_1(t)$  et il est impossible d'identifier les paramètres  $p_1$  et  $p_2$ . Donc, ce système n'est pas identifiable.*

Les systèmes paramétrés tels qu'on peut trouver l'entrée connaissant la sortie et les paramètres définissent la classe des systèmes inversibles.

**Définition 2** (Inversibilité). *Un système paramétré est inversible si  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$  et  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$  où  $\mathbf{y}$  est la sortie engendrée par  $\mathbf{u}$ , il existe une fonctionnelle  $G$  permettant de trouver  $\mathbf{u}$  définie par :*

$$G : \begin{array}{l} \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \mapsto \mathcal{U} \\ \{\mathbf{y}, \mathbf{p}\} \mapsto \mathbf{u} \end{array} \quad (2.6)$$

1.  $D$  est une matrice diagonale.

**Exemple 2** (Système (non)-inversible). *Considérons le système paramétré suivant  $y(t) = pu^2(t)$ . On a  $u^2(t) = \frac{y(t)}{p}$ , donc  $u(t) = \pm\sqrt{\frac{y(t)}{p}}$ . On ne peut déterminer si l'entrée est  $\sqrt{\frac{y(t)}{p}}$  ou  $-\sqrt{\frac{y(t)}{p}}$ . Ce système est donc non-inversible. Considérons le système  $y(t) = (p^2 + 1)u(t)$ . On a  $u(t) = \frac{y(t)}{p^2+1}$ . On voit que ce système est inversible.*

Les problèmes inverses auxquels nous nous intéressons répondent aux questions suivantes :

1. peut on déterminer la sortie et les paramètres du système connaissant son entrée, *i.e.*  $\mathbf{u} \rightarrow \{\mathbf{p}, \mathbf{y}\}$  ?
2. peut on déterminer l'entrée et les paramètres du système connaissant sa sortie, *i.e.*  $\mathbf{y} \rightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$  ?
3. peut on déterminer l'entrée et la sortie du système connaissant ses paramètres, *i.e.*  $\mathbf{p} \rightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$  ?

	intérêt	faisabilité	hypothèse
$\mathbf{u} \rightarrow \{\mathbf{p}, \mathbf{y}\}$	oui	oui, si nb. d'équ. > nb. d'inc.	indépendance
$\mathbf{y} \rightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$	oui	oui, si nb. d'équ. > nb. d'inc.	/
$\mathbf{p} \rightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$	non	non	?

La séparabilité d'un système inversible, définie par Lagrange dans sa thèse [119], est une propriété qui caractérise la possibilité de résoudre le problème de séparation de sources pour un modèle de mélange et un modèle d'entrées données, avant même le recueil des données.

Un système inversible de degré  $d$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \phi(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d)}(t)), \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{y}^{(d)}$  est la  $d$ -ième dérivée du vecteur de sorties (observations)  $\mathbf{y}$  et  $\phi$  une fonction analytique linéaire ou non. Tous les systèmes *plats* sont inversibles [67]<sup>2</sup>.

Les mélanges linéaires statiques classiquement rencontrés en séparation de sources sont des systèmes inversibles. Dans (2.7),  $\mathbf{u}(t)$  et  $\phi$  sont inconnus. Le problème de la SAS consiste à estimer la fonction inconnue  $\phi$  à partir de la seule indépendance conjointe des signaux  $\mathbf{u}$ , qui peut aussi s'écrire en annulant la dérivée  $k$ -ième de la matrice d'autocorrélation des sorties, *i.e.* [119]

$$\text{OffDiag}(\Gamma_{\mathbf{uu}}^{(k)}(\tau)) = \text{OffDiag}(\Gamma_{\phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(d)})\phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(d)})}^{(k)}(\tau)) = \mathbf{O}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

où  $\text{OffDiag}(\cdot)$  est une fonction qui renvoie le vecteur constitué des éléments non-diagonaux de la matrice argument. En écrivant  $\phi(\cdot)$  sous la forme d'un développement de Taylor au premier ordre, un système inversible est une fonction linéaire de la forme :

$$\phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(d)}) \approx \sum_{i=0}^d B_i \mathbf{y}^{(i)}, \quad (2.11)$$

où les matrices  $B_i$  inconnues, peuvent être mises sous la forme d'un vecteur de paramètres inconnus  $\mathbf{p}$ . Par exemple, dans le cas de deux sources, on a

$$\phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = B_1 \mathbf{y} + B_2 \dot{\mathbf{y}}, \quad (2.12)$$

avec  $\phi$  est bien une fonction paramétrée en  $\mathbf{p}$  qui peut s'écrire  $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ , si  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(B_1, B_2)$ .

En conclusion, tout problème de séparation de sources se ramène à un problème d'estimation d'un vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$ .

---

## 2. Un système dynamique

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \end{cases}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$  sont resp. les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie est un plat pour Fliess [67] s'il existe des fonctions  $\rho, \varrho, \sigma$  telles que

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) &= \rho(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \dots, \mathbf{u}^{(d)}(t)) \\ \mathbf{x}(t) &= \varrho(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d-1)}(t)) \\ \mathbf{x}(t) &= \sigma(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d)}(t)). \end{cases}, \quad (2.9)$$

### 2.2.2 Le mélange linéaire instantané

Dans le cas des *mélanges linéaires instantanés*, ces systèmes s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{s}(t) = \phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = B\mathbf{y}(t), \quad (2.13)$$

où  $B$  est une matrice régulière paramétrée en  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{u}$  les sorties du modèle, *i.e.* des signaux ergodiques, stationnaires et statistiquement indépendants. Le problème de séparation de sources consiste à estimer une matrice  $\hat{B}$ , choisie diagonale unitaire, et telle que  $\hat{B} = DPB$ . Les équations d'estimation du système (2.13) s'écrivent à partir de (2.10) en utilisant uniquement les dérivées successives, *i.e.* on pose  $\tau = 0$ <sup>3</sup> :

$$\text{OffDiag}(\Gamma_{\mathbf{ss}}^{(k)}(0)) = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

Les dérivées d'ordre impair étant nulles, les équations (2.14) se réduisent à

$$\text{OffDiag}(\Gamma_{\mathbf{ss}}^{(2k)}(0)) = \text{OffDiag}(\Gamma_{\hat{B}\mathbf{y}\hat{B}}^{(2k)}(0)) = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

ce qui revient à écrire

$$\text{OffDiag}(\hat{B}\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2k)}(0)\hat{B}^T) = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

où  $\hat{B}$  est une matrice de diagonale unitaire et de  $n(n-1)$  inconnues.  $k$  est choisi de façon à obtenir suffisamment d'équations indépendantes (au moins autant que d'inconnues).

A titre d'illustration, on considère le mélange linéaire statique de 2 sources  $s_1$  et  $s_2$  décrits par le système  $\mathbf{s}(t) = B\mathbf{y}(t)$  où  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ . L'estimation de la matrice  $B$  définie par  $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix}$  doit être solution du système d'équation suivant.

$$\text{OffDiag}(\hat{B}\Gamma_{\mathbf{yy}}(0)\hat{B}^T) = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

$$\text{OffDiag}(\hat{B}\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2)}(0)\hat{B}^T) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

(2.17-2.18) revient à écrire que la matrice  $\hat{B}$  diagonalise simultanément les matrices  $\Gamma_{\mathbf{yy}}(0)$  et  $\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2)}(0)$ . Pour résoudre le problème, nous avons recours à un algorithme de diagonalisation conjointe qui, dans le cas de deux matrices symétriques, est réalisée de façon exacte (cf. [196]) de sorte que

$$\hat{B}\Gamma_{\mathbf{yy}}(0)\hat{B}^T = I \quad \text{et} \quad \hat{B}\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2)}(0)\hat{B}^T = D_1, \quad (2.19)$$

où  $D_1 = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $d_1, \dots, d_n$ . En particulier, si  $\Gamma_{\mathbf{yy}}(0) = \begin{pmatrix} a & d \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , une solution  $\hat{B}$  est donnée par

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \delta & 2\gamma \\ 2\alpha & \delta \end{pmatrix}, \quad \delta = \beta + \text{sgn}(\beta)\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \quad (2.20)$$

en posant  $\alpha = bf - ce$ ,  $\beta = ae - bd$  et  $\gamma = cd - af$ . D'autres techniques sont précisées dans [44, chap. 5].

La robustesse de l'estimation de  $\hat{B}$  peut être améliorée en ajoutant des équations supplémentaires faisant intervenir les dérivées des matrices d'autocorrélation d'ordres supérieurs (du type (2.15) pour  $k \geq 2$ )<sup>4</sup>.

Après développement, on obtient, à partir de (2.17-2.18), le système de deux équations non-linéaires à deux inconnues  $p_1$  et  $p_2$  suivant [119] :

$$\begin{cases} p_2 E[y_1^2] + (1 + p_1 p_2) E[y_1 y_2] + p_1 E[y_2^2] - (E[y_1] + p_1 E[y_2])(p_2 E[y_1] + E[y_2]) & = 0 \\ p_2 E[\dot{y}_1 y_1] + (1 + p_1 p_2) E[\dot{y}_1 y_2] + p_1 E[\dot{y}_2 y_1] & = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

En utilisant les développements de Tong [196], la résolution du système (2.21) donne les 2 solutions équivalentes :

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p_2} \\ \frac{1}{p_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \frac{2\gamma}{\delta}, \quad p_2 = \frac{2\alpha}{\delta}, \quad (2.22)$$

3. L'utilisation des décallages temporels est à la base de l'algorithme SOBI [15].

4. Dans ce cas, l'estimation de  $\hat{B}$  est obtenue par diagonalisation conjointe des  $k$  matrices  $\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(2k)}(0)$  considérées.

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= E[y_2^2]E[\dot{y}_1 y_2] - E[y_1 y_2]E[\dot{y}_2 y_2] & \beta &= E[y_1^2]E[\dot{y}_2 y_2] - E[y_2^2]E[\dot{y}_1 y_1] \\ \gamma &= E[y_1 y_2]E[\dot{y}_1 y_1] - E[y_1^2]E[\dot{y}_1 y_2] & \delta &= \beta + \operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\end{aligned}$$

### 2.2.3 Généralisation à n'importe quel mélange linéaire

Dans sa thèse, S. Lagrange établit que la notion d'inversibilité peut se généraliser à n'importe quel mélange de signaux linéaire ou non (sous réserve que le modèle soit identifiable) et qu'à partir des seules matrices d'autocorrélations des sorties, les paramètres du système inversible peuvent être retrouvés. Considérons ici un exemple de mélange linéaire inversible de degré 1

$$\mathbf{u}(t) = Q_0 \mathbf{y}(t) + Q_1 \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{u}(t) = (u_1, u_2)^T$  est le vecteur des sources supposées statistiquement indépendantes,  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  et  $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t))^T$  sont les vecteurs d'observations et des dérivées des observations, supposées connues. Le problème consiste à estimer  $Q_0$ , à diagonale unitaire, et  $Q_1$ , *i.e.* un vecteur de paramètres  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_6)^T$ . D'après l'hypothèse d'indépendance des entrées,  $\text{OffDiag}(\Gamma_{\mathbf{uu}}^{(k)}(\tau)) = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau$  revient à :

$$\text{OffDiag}(\Gamma_{Q_0 \mathbf{y} + Q_1 \dot{\mathbf{y}}}^{(k)}(\tau)) = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

soit par définition de la matrice d'autocorrélation ( $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \tau \in \mathbb{R}$ ) :

$$\text{OffDiag} \left( E \left[ Q_0 \mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^T Q_0^T + Q_0 \mathbf{y}^{(k)} \dot{\mathbf{y}}^T Q_1^T + Q_1 \mathbf{y}^{(k+1)} \dot{\mathbf{y}}^T Q_0^T + Q_1 \mathbf{y}^{(k+1)} \dot{\mathbf{y}}^T Q_1^T \right] (\tau) \right) = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Les équations d'estimation sont alors :

$$\text{OffDiag} \left( Q_0 \Gamma_{\mathbf{yy}}^{(k)}(\tau) Q_0^T - Q_0 \Gamma_{\mathbf{yy}}^{(k+1)}(\tau) Q_1^T + Q_1 \Gamma_{\mathbf{yy}}^{(k+1)}(\tau) Q_0^T - Q_1 \Gamma_{\mathbf{yy}}^{(k+2)}(\tau) Q_1^T \right) = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

où  $\Gamma_{\mathbf{yy}}^{(k)}(\tau) = E[\mathbf{y}^{(k)}(t) \mathbf{y}^T(t-\tau)]$  est la dérivée  $k$ -ième de la matrice d'autocorrélation du vecteur des observations (si les  $\mathbf{y}(t)$  sont centrées). Pour simplifier les calculs, on pose  $\tau = 0$ , et n'exploite que les dérivées successives de la matrice d'autocorrélation du vecteur de sortie en zéro. Il est préférable d'exploiter les dérivées avec les décalages temporels lorsque le nombre de paramètres devient grand et croît rapidement avec l'ordre du modèle.

### 2.2.4 Simulations

Dans ce premier exemple, les sources et les observations sont liées par un système statique. On considère 2 sources gaussiennes indépendantes  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  obtenues par un filtrage passe-bas du 2nd ordre et mélangées suivant le modèle :

$$\begin{pmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{pmatrix}.$$

dont la distribution conjointe est donnée Fig. 2.3.a. pour 3 000 échantillons avec une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz. Le tracé indique que les signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont indépendants ; la distribution jointe des observations  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  Fig.2.3.b illustre la dépendance statistique des signaux mélangés.

En utilisant les relations (2.22), la solution analytique obtenue est

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7862 \\ -0.4604 & 1 \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que  $\hat{B} \sim B$  en prenant pour matrice de permutation  $P = I$  et  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Pour cet exemple, on a en effet :

$$PD\hat{B} = \begin{pmatrix} 5.00000 & 3.93100 \\ 0.46040 & -1.00000 \end{pmatrix} \approx B.$$

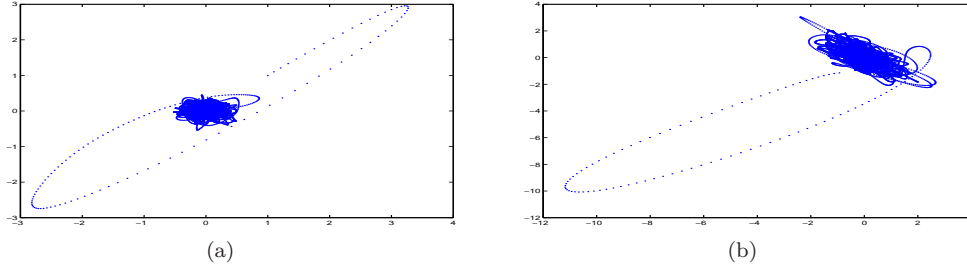


FIGURE 2.3 – (a) Distribution conjointe des sources  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ . (b) Distribution conjointe des observations  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .

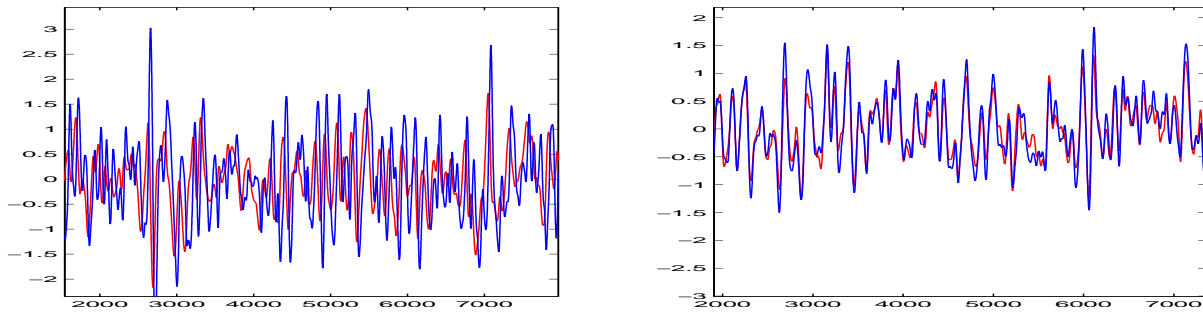


FIGURE 2.4 – Superposition des sources gaussiennes estimés (bleu) et réelles (rouge) : (a)  $\hat{s}_1$  et  $s_1$ , (b)  $\hat{s}_2$  et  $s_2$ .

Les paramètres estimés de la matrice  $\hat{B}$  sont  $\hat{p}_1 = 0.7862$  et  $\hat{p}_2 = -0.4604$  au lieu des paramètres idéaux resp. 0.8 et  $-0.5$ .

On se propose maintenant d'estimer les sources liées par un mélange inversible linéaire de degré 1 de modèle :

$$\mathbf{s}[n] = Q_0 \mathbf{y}[n] + Q_1 \dot{\mathbf{y}}[n] \quad (2.27)$$

en exploitant les décalages temporels de la matrice d'autocorrélation des sorties. On considère 2 sources gaussiennes indépendantes et différentiables de 10000 échantillons échantillonnés à 10 Hz. La distribution jointe des observations est donnée Fig. 2.5. Elle suit le modèle

$$\begin{pmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -0,9 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1[n] \\ \dot{y}_2[n] \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

La résolution du système (2.28) permet d'estimer les matrices  $\hat{Q}_0$  et  $\hat{Q}_1$  solutions, à l'aide d'une méthode de de résolution de type BFGS, dont le tracé donné Fig.2.6 traduit la progression. Les paramètres estimés sont moins bons que dans le cas précédent à première vue, mais les sources sont bien retrouvées à un facteur d'échelle près.

Pour terminer, l'estimation des matrices du mélange inversible est complexe et coûteux, mais surtout elle procède d'une résolution *exacte* quand le système ne comporte pas trop d'équations. Mais, en pratique, il est parfois impossible de trouver une expression analytique, notamment si le système (2.23) est instable.

En conclusion, la méthode de résolution se généralise aisément à tout système inversible  $\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^r Q_i \mathbf{y}^{(i)}(t)$  de degré  $r > 1$ . Nous renvoyons à [119, chap. 5] pour plus de détails.

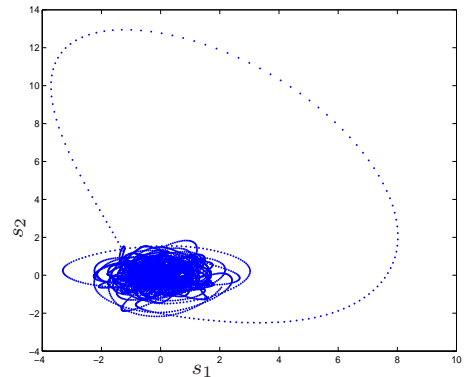


Figure 2.5: Distribution jointe des observations.

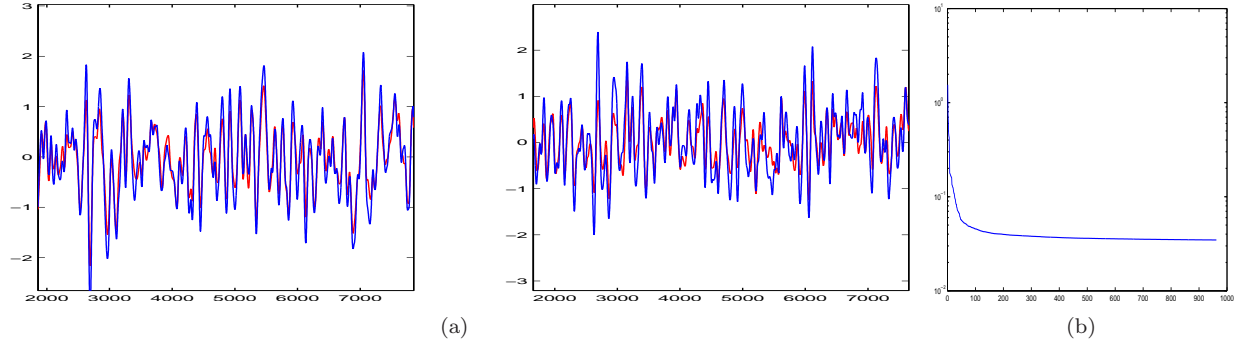


FIGURE 2.6 – (a) Superposition des sources gaussiennes estimées (bleu) et réelles (rouge) dans le cas d'un système inversible de degré 1 : (gauche)  $\hat{s}_1$  et  $s_1$ , (droite)  $\hat{s}_2$  et  $s_2$ . (b) Courbe de l'erreur d'estimation en fonction des itérations de l'algorithme de résolution BFGS.

## 2.3 Etude des solutions SAS par maximum de vraisemblance

Cette section reprend les principaux résultats repris dans l'article [204]. Afin de construire un estimateur de  $A$  à partir de (2.1), des hypothèses supplémentaires sont nécessaires. L'hypothèse utilisée généralement est que les composantes  $s_i(t)$  sont mutuellement indépendantes, c'est à dire qu'on peut écrire la densité de probabilité de  $\mathbf{s}$  :

$$p_S(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n p_{s_i}(s_i) \quad (2.29)$$

Dans certaines méthodes, on raffine l'hypothèse en choisissant a priori un modèle pour les distributions  $p_i$ . D'après [129], les méthodes utilisées dans ce cas sont robustes par rapport au choix de la distribution. Cependant, ces méthodes ont des problèmes pour séparer des sources sous-Gaussiennes lorsque la distribution modèle choisie est sur-Gaussienne et vice-versa.

La classe de méthode de type *Infomax* par exemple, est présentée comme un ensemble de méthodes neuronales [14]. Elle utilise une règle d'apprentissage non-supervisée, dans le sens où on ne fournit pas directement de sortie imposée. Cependant, la sortie du réseau est déterminée par un critère statistique, basé sur l'entropie des sorties :  $H(\mathbf{y}) = H(y_1, \dots, y_n) = H(y_1) + \dots + H(y_n) - I(y_1, \dots, y_n)$ . On utilise un perceptron deux couches, la première couche ayant l'identité comme activation, la seconde une fonction d'activation à déterminer. On peut modéliser le réseau plus simplement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} & \quad \text{données.} \\ \mathbf{u} = B\mathbf{x} & \quad \text{activation de la 2}^{\text{e}} \text{ couche} \\ y_i = g_i(u_i) & \quad \text{sortie} \end{aligned}$$

On cherche une règle d'apprentissage qui va chercher à maximiser l'entropie des sorties. Ceci revient à ce que les sorties soient indépendantes ( $I(y_1, \dots, y_n) = 0$ ) et que la distribution de chaque  $y_i$  soit uniforme. Dans notre modèle, si  $\mathbf{x} = A\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{u} = B\mathbf{A}\mathbf{s}$  doit avoir ses composantes indépendantes, donc  $BA = I$  et si de plus on choisit  $g_i$  comme la fonction de répartition de  $s_i$ , on a bien une distribution uniforme pour  $y_i$ . En dérivant  $H(\mathbf{y})$  par rapport à la matrice  $B$ , on obtient une règle d'adaptation des coefficients de la matrice :

$$\begin{aligned} H(y_i) &= -E[\log p(y_i)] = -E \left[ \log \frac{p(u_i)}{\left| \frac{\partial y_i}{\partial u_i} \right|} \right] \\ \frac{\partial H}{\partial B} &= \frac{\partial}{\partial B} (-I(\mathbf{y})) - \frac{\partial}{\partial B} \sum_i^n E \left[ \log \frac{p(u_i)}{\left| \frac{\partial y_i}{\partial u_i} \right|} \right]. \end{aligned}$$



En simplifiant :

$$\frac{\partial H}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \log |J(\mathbf{x})|$$

$$J(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

avec

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (B\mathbf{x})_k \frac{\partial g_i}{\partial u_k} (B\mathbf{x}) = w_{ij} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} (B\mathbf{x})$$

$$J(\mathbf{x}) = \det B \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_i} (B\mathbf{x}).$$

On obtient le gradient de  $H$  par rapport aux coefficients de la matrice  $B$ . On note  $g'_i$  pour  $\frac{\partial g_i}{\partial u_i}$ ,  $g'(\mathbf{u}) = [g'_1(\mathbf{u}), \dots, g'_n(\mathbf{u})]^T$ , et

$$\frac{g''}{g'} = \left[ \frac{g''_1}{g'_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{g''_n}{g'_n}(\mathbf{u}) \right]^T,$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial B}(\mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial B} \log |\det B| + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial B} E[\log |g'_i(B\mathbf{x})|] \\ &= (B^T)^{-1} + \sum_{i=1}^n E \left[ \frac{g''_i}{g'_i}(B\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \right]. \end{aligned}$$

Le gradient dépend de l'inverse de  $B$  et est lourd à calculer. Un gradient plus simple est obtenu par :

$$\Delta B \propto \frac{\partial H}{\partial B} B^T B = [I - \varphi(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T] B \quad (2.30)$$

appelé aussi *gradient relatif*, avec  $\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{g''}{g'}(\mathbf{u})$ . Cardoso et Laheld [24] et surtout Amari [5] ont montré que ce gradient était plus efficace. Bell et Sejnowski ont présenté une table de correspondance entre plusieurs types de sources surGaussiennes et les fonctions d'activation associées. Lee [129] montre que cette approche est équivalente aux autres (MLE, cumulants) en cela qu'elles conduisent toutes à la même règle de gradient. A partir du maximum de vraisemblance :

$$p(\mathbf{x}) = |\det(B)| p(\mathbf{u}) \quad (2.31)$$

$$L(\mathbf{u}, B) = \log |\det(B)| + \sum_i \log p_i(\mathbf{u}_i) \quad (2.32)$$

Les extensions de l'algorithme Informax (*extended infomax*) sont assez robustes par rapport au choix de la non-linéarité, mais aucune preuve n'avait encore été apportée sur la sensibilité du résultat par rapport à l'écart entre la distribution modèle et la distribution des sources, avant notre article pour *Neurocomputing* [204].

Un problème persiste lorsque les sources comportent à la fois des distribution super- et sous-Gaussiennes. C'est à dire que l'adaptation se fait mal si la distribution supposée est super-Gaussienne et que la distribution réelle est sous-Gaussienne et vice-versa. Cardoso [27] et Lee [129] proposent d'adapter la règle du gradient automatiquement en calculant automatiquement le kurtosis des  $u_i$ . Ceci conduit à la règle suivante :

$$\Delta B \propto [I - K \tanh(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T - \mathbf{u} \mathbf{u}^T] B \quad (2.33)$$

$$K = \text{diag}(k_i) \quad (2.34)$$

$$k_i = \text{sgn} \{ E[\cosh^2(u_i)] E[u_i^2] - E[(\tanh u_i) u_i] \}^5 = \begin{cases} 1 & \text{super-gaussien} \\ -1 & \text{sous-gaussien} \end{cases} \quad (2.35)$$



Sous les hypothèses du début, on voit qu'on peut atteindre le minimum de  $H(\mathbf{y})$  en choisissant  $B = A^{-1}$  et  $g_i = p_{s_i}$ . Car, dans ce cas,  $\mathbf{y} = g(B\mathbf{x}) = F_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})$  a des composantes indépendantes et de densité uniforme. En étudiant :

$$\arg \max_g E[\log |g'(\mathbf{s})|] = \arg \max_g \int \log |g'(\mathbf{s})| p(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.36)$$

On retrouve le fait que  $g$  doit être la fonction de répartition de  $p$ . En effet,  $g$  vérifie les équations d'Euler :

$$f(\mathbf{s}, g, g') = \log |g'(\mathbf{s})| p(\mathbf{s}) \Rightarrow \frac{d}{d\mathbf{s}} \left( \frac{\partial f}{\partial g'} \right) - \frac{\partial f}{\partial g} = 0. \quad (2.37)$$

Soit :

$$\frac{p'(\mathbf{s})}{g'(\mathbf{s})} - \frac{g''(\mathbf{s})}{g'^2(\mathbf{s})} p(\mathbf{s}) = 0 \Rightarrow \frac{p'(\mathbf{s})}{p(\mathbf{s})} = \frac{g''(\mathbf{s})}{g'(\mathbf{s})} \quad (2.38)$$

$$\text{d'où } \log p(\mathbf{s}) = \log(g'(\mathbf{s})) + \text{cste}. \quad (2.39)$$

### 2.3.1 Fonctions de contraste

Une *fonction de contraste* est une fonction réelle d'une distribution de probabilité. On notera  $f(x)$  une fonction de la densité de probabilité de la variable  $x$ . Par exemple, on notera  $m(x) = E[x]$  pour la valeur moyenne de  $x$ . L'avantage de construire un estimateur à partir d'une fonction de contraste est qu'on a automatiquement des résultats sur sa consistance et sa vitesse de convergence par les théorèmes suivants [39] :

**Définition 3** (Contrastes). *On considère le modèle statistique  $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ . On appelle fonction de contraste de ce modèle relative à  $\theta$  une fonction  $\alpha \mapsto K(\theta, \alpha)$  de  $\Theta$  dans  $\mathbb{R}_+$  ayant un minimum strict pour  $\alpha = \theta$ . Si les expériences sont décrites par une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  ( $T = \mathbb{N}$ , ou  $T = \mathbb{R}_+$ ), un contraste (ou processus de contraste) relatif à  $\theta$  et à  $K$  est une fonction  $U$  (indépendante de  $\theta$ ) de  $\Theta \times T \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $(\alpha, t, \omega) \mapsto U_t(\alpha, \omega)$ , satisfaisant aux propriétés suivantes.*

1.  $\forall (\alpha, \omega) \in \Theta \times T$ , la v.a.  $U_t(\alpha) : \omega \mapsto U_t(\alpha, \omega)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable :  $(U_t(\alpha))$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.
2.  $(U_t(\alpha))$  tend vers  $K(\theta, \alpha)$  en  $P_\theta$ -probabilité, pour  $t \rightarrow \infty$ .

Enfin un *estimateur du minimum de contraste* associé à  $U$  est un estimateur  $\mathcal{F}$ -adapté  $(\hat{\theta}_t)_{t \in T}$  tel que :

$$\forall t, \quad U_t(\hat{\theta}_t) = \inf \{U_t(\alpha) ; \alpha \in \Theta\} \quad (2.40)$$

Dans le cadre de ces définitions, on a le théorème :

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses suivantes :*

1.  $\Theta$  est un compact de  $\mathbb{R}^k$  ;  $\alpha \mapsto K(\theta, \alpha)$  et  $\alpha \mapsto U_t(\alpha, \omega)$  sont continues.
2. Notant, pour  $\eta > 0$ ,  $w(t, \eta) = \sup \{|U_t(\alpha) - U_t(\beta)|, |\alpha - \beta| \leq \eta\}$ , il existe deux suites  $(\eta_k)$  et  $(\varepsilon_k)$  réelles et décroissant vers 0, telles que

$$\forall k, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_\theta [w(t, \eta_k) > \varepsilon_k] = 0$$

Alors tout estimateur du minimum de contraste  $(\hat{\theta}_t)$  est consistant en  $\theta$ .

### 2.3.2 Maximum de vraisemblance

On étudie le maximum de vraisemblance selon le modèle  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{B,g})$ , avec pour famille de probabilités  $\mathbb{P}_{B,g}(d\mathbf{x}) = \log(|\det B| g(B\mathbf{x})) d\mathbf{x}$ . Posons  $K(B, A^{-1}) = -H(\mathbf{x}) - E[\log |\det B| g(B\mathbf{x})]$ , où  $g = (g_1, \dots, g_n)^T$  est la distribution de  $\mathbf{s}$  (Et  $g_i$  est la distribution des  $s_i$ . Le cas où  $g_i$  diffère de la distribution de  $s_i$  est étudié dans [204, 205]). Nous recherchons le *minimum* pour le paramètre  $B$  dans le processus :

$$U_t(B) = -\log |\det B| - \sum_{i=1}^t \log g(B\mathbf{x}_i) \quad (2.41)$$

---

5.  $k_i = 1$  pour une distribution *super-Gaussienne* et  $-1$  pour une *sous-Gaussienne*.

La fonction  $B \mapsto K(B, A^{-1})$  doit admettre un minimum strict pour  $B = A^{-1}$ . Or, sur  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\log |\det B|$  n'est pas borné. Si on considère que les valeurs propres de  $A$  sont bornées :

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{\max}. \quad (2.42)$$

On voit que si on n'impose pas de restrictions sur  $B$ , on peut trouver une suite de matrices  $B_t$  telle que la suite de mesures  $\mathbb{P}_{B_n, g}(dx)$  tende vers la mesure de Dirac. La condition sur  $\lambda_{\min}$  est intéressante car elle fait qu'on peut choisir  $B$  dans l'ensemble relativement compact :

$$\left\{ M/M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \|M\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \right\}. \quad (2.43)$$

D'autre part, si  $B^*$  est un minimum de  $K(B, A^{-1})$  alors  $\nabla_B K(B^*, A^{-1}) = 0$  et  $\nabla_B^2 K(B^*, A^{-1})$  est définie positive. On pose

$$\rho = \sup \{ r > 0 / \forall C, \|B^* - C\| < r \implies \nabla_B^2 K(C, A^{-1}) > 0 \} \quad (2.44)$$

C'est-à-dire que  $\mathcal{B}(B^*, \rho)$  est la plus grosse boule contenant  $B^*$  sur laquelle  $K$  est convexe. Dans la suite on considèrera que l'ensemble  $\Theta$  de la définition est la boule fermée  $\mathcal{B}(B^*, \rho)$ . Il est clair que  $\forall t, U_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. On va montrer que pour toute matrice  $B$ , la suite  $U_t(B)$  tend en probabilité vers  $K(B^*, A^{-1})$ . On a :

$$y_i = \sum_{k=1}^n \log g_k(B\mathbf{x}_i) \quad (2.45)$$

$$m = E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{\sigma^2}{N} = E \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - m \right)^2 \right] \quad (2.47)$$

et par l'inégalité de Tchebychev,  $\forall a$

$$P \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - m \right| \geq a \right) \leq \frac{1}{a^2} \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.48)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - m \right| \geq a \right) = 0 \quad (2.49)$$

Ainsi  $U_t$  est un contraste. On montre plus loin que  $B = A^{-1}$  est un minimum, et sur l'ensemble  $\Theta$  qu'on a choisi, c'est un minimum stricte et unique.

Soit  $D_t(B, C) = U_t(B) - U_t(C)$  une fonction continue de  $GL_n \times GL_n \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

$$D_t(B, C) \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mathbf{x}}} -E \left[ \log \frac{|\det B| g(B\mathbf{x})}{|\det C| g(C\mathbf{x})} \right]. \quad (2.50)$$

Si on prend le sup sur un ensemble dénombrable de  $GL_n \times GL_n$  :

$$\sup \{ |D_t(B, C)|, \|B - C\| < \eta \} \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mathbf{x}}} \phi(\eta) \quad (2.51)$$

Ainsi  $U_t$  et  $K$  satisfont aux conditions 1 et 2 du théorème 1, on peut donc conclure que sur  $\Theta$ ,  $\hat{B} = \inf_B U_t(B)$  est un estimateur consistant de  $A^{-1}$ .

### 2.3.3 Stabilité

En développant  $H(B + \varepsilon B)$  au lieu de  $H(B + \varepsilon)$ , si  $\phi$  est une fonction scalaire de  $B \in GL_n(\mathbb{R})$  :

$$\phi(B + \varepsilon) = \phi(B) + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial B}, \varepsilon \right\rangle + o(\varepsilon) \quad \text{avec } \langle M, N \rangle = \text{trace}(M^T N) \quad (2.52)$$

$$\phi(B + \varepsilon B) = \phi(B) + \langle \nabla \phi(B), \varepsilon \rangle + o(\varepsilon) \quad (2.53)$$

On montre que  $\nabla\phi(B) = \frac{\partial\phi}{\partial B}B^T$ . Pour éviter de traîner les signes - tout au long des calculs, on s'intéressera au maximum de  $H$ . Les conditions de stabilité imposent que la matrice Hessienne de  $H$  soit définie négative en un point maximum :

$$H(B) = \log|\det B| + E[\log g(B\mathbf{x})], \quad (2.54)$$

$$H(B + \varepsilon B) = \log|\det B| + \langle I, \varepsilon \rangle + E[\log g((B + \varepsilon B)\mathbf{x})], \quad (2.55)$$

$$\text{Si } f(\mathbf{y} + \delta\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + f'(\mathbf{y})^T \delta\mathbf{y} + \mathcal{O}(\delta\mathbf{y}) \quad \text{et } \mathbf{y} = B\mathbf{x}, \quad (2.56)$$

$$H(B + \varepsilon B) = H(B) + \langle I, \varepsilon \rangle + E\left[\frac{g'}{g}(\mathbf{y})^T \varepsilon\mathbf{y}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.57)$$

$$H(B + \varepsilon B) - H(B) = \langle I, \varepsilon \rangle + E\left[\text{trace}\left(\frac{g'}{g}(\mathbf{y})^T \varepsilon\mathbf{y}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.58)$$

$$= \langle I, \varepsilon \rangle + E\left[\text{trace}\left(\mathbf{y}\frac{g'}{g}(\mathbf{y})^T \varepsilon\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.59)$$

$$= \langle I + E\left[\frac{g'}{g}(\mathbf{y})\mathbf{y}^T\right], \varepsilon \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.60)$$

$$= \langle I + E\left[\frac{g'}{g}(B\mathbf{x})\mathbf{x}^T B^T\right], \varepsilon \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (2.61)$$

On pose  $\phi(\mathbf{y}) = \frac{g'}{g}(\mathbf{y}) = \left[\frac{g'}{g_1}(y_1), \dots, \frac{g'}{g_n}(y_n)\right]^T$ .

Soit  $\lambda_{ij}$  les solutions de :

$$1 + E[\phi_i(\lambda_{ij}s_j)\lambda_{ij}s_j] = 0 \quad (2.62)$$

Soient  $\sigma$  une permutation de l'ensemble d'indices  $\{1, \dots, n\}$ , la matrice  $\Lambda = (\Lambda_{ij})$  définie par  $\Lambda_{ij} = \lambda_{i,\sigma(i)}\delta_{\sigma(i),j}$  et soit  $B = \Lambda A^{-1}$ . On a<sup>6</sup> :

$$I + E[\phi(B\mathbf{x})\mathbf{x}^T B^T] = I + E[\phi(\Lambda\mathbf{s})(\Lambda\mathbf{s})^T] \quad (2.63)$$

$$\delta_{ij} + E[\phi_i(\Lambda\mathbf{s})(\Lambda\mathbf{s})_j] = \delta_{ij} + E[\phi_i(\lambda_{i\sigma(i)}s_{\sigma(i)})\lambda_{j\sigma(j)}s_{\sigma(j)}] \quad (2.64)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 + E[\phi_i(\lambda_{i\sigma(i)}s_{\sigma(i)})\lambda_{i\sigma(i)}s_{\sigma(i)}] & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.65)$$

A ce stade, il reste à démontrer l'existence de telles solutions et leur unicité. La table suivante donne quelques fonctions  $\phi$  et les distributions associées :

$\phi$	$g$	distribution
$x$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	Gaussienne
$x^3$	$\frac{1}{K} \exp\left(-\frac{x^4}{4}\right)$	
$2 \tanh x$	$\frac{2}{\cosh x}$	Hyperbolique Cauchy

### 2.3.4 Hessienne

Soit

$$F_{ij}(B) = \delta_{ij} + E[\phi_i(B\mathbf{x})(B\mathbf{x})_j] \quad (2.66)$$

$$F_{ij}(B + \varepsilon B) = \delta_{ij} + E[\phi_i((B + \varepsilon B)\mathbf{x})((B + \varepsilon B)\mathbf{x})_j] \quad (2.67)$$

$$= \delta_{ij} + E\left[\left(\phi_i(\mathbf{y}) + \phi'_i(\mathbf{y})^T \varepsilon\mathbf{y}\right)\left(y_j + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{jk}y_k\right)\right] \quad (2.68)$$

6. Note : avec plusieurs points stationnaires du même problème on devrait pouvoir identifier les puissances des sources pourvu que les  $\lambda_{ij}$  ne soient pas tous égaux.

On note que  $\phi'_i(\mathbf{y}) = (0, \dots, \phi'_i(y_i), \dots, 0)^T$ .

$$F_{ij}(B + \mathcal{E}B) - F_{ij}(B) = E \left[ \phi_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{jk} y_k \right) \right] + E \left[ \phi'_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{i,k} y_k \right) \left( y_j + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{jk} y_k \right) \right] \quad (2.69)$$

$$= E \left[ \phi_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{jk} y_k \right) \right] + E \left[ \phi'_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{i,k} y_k \right) y_j \right] + \mathcal{O}(\mathcal{E}) \quad (2.70)$$

Sachant  $\text{trace}(M^T \mathcal{E}) = \sum_{k,l} M_{k,l} \mathcal{E}_{k,l}$ , on a :

$$\sum_l \phi_i(y_i) \mathcal{E}_{j,lyl} = \sum_{k,l} \phi_i(y_i) \mathcal{E}_{k,l} y_l \delta_{j,k} \quad (2.71)$$

$$= \phi_i(y_i) \sum_{k,l} y_l \delta_{j,k} \mathcal{E}_{k,l} \quad (2.72)$$

$$E \left[ \phi_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{jk} y_k \right) \right] = \text{trace}(M^{ijT} \mathcal{E}) \quad \text{avec} \quad M_{k,l}^{ij} = E[\phi_i(y_i) y_l \delta_{j,k}] \quad (2.73)$$

et :

$$\phi'_i(y_i) \left( \sum_{l=1}^n \mathcal{E}_{i,lyl} \right) y_j = \sum_{l=1}^n \phi'_i(y_i) \mathcal{E}_{i,l} y_l y_j \quad (2.74)$$

$$= \sum_{k,l} \phi'_i(y_i) \mathcal{E}_{k,l} y_l y_j \delta_{i,k} \quad (2.75)$$

$$E \left[ \phi'_i(y_i) \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{i,k} y_k \right) y_j \right] = \text{trace}(N^{ijT} \mathcal{E}) \quad \text{avec} \quad N_{k,l}^{ij} = E[\phi'_i(y_i) y_j y_l \delta_{i,k}] \quad (2.76)$$

Lorsqu'on regarde la matrice Hessienne  $\mathcal{H}$  en un point stable, on a nécessairement  $y_i = \lambda_i s_i$  (si on ne s'occupe pas des points stables correspondants aux permutations). Et en utilisant l'hypothèse d'indépendance des sources on a pour  $M^{ij}$  et  $N^{ij}$  :

$$M_{k,l}^{ij} = E[\phi_i(y_i) y_l \delta_{j,k}] = \delta_{j,k} \delta_{i,l} E[\phi_i(y_i) y_i] = \delta_{j,k} \delta_{i,l} \alpha_i, \quad (2.77)$$

$$N_{k,l}^{ij} = E[\phi'_i(y_i) y_j y_l \delta_{i,k}] = \delta_{i,k} \delta_{j,l} E[\phi'_i(y_i) y_j^2] = \delta_{i,k} \delta_{j,l} \kappa_{ij}, \quad (2.78)$$

et la matrice Hessienne  $\mathcal{H} = \{h_{ijkl}\}$  s'écrit

$$h_{ij,k,l} = \delta_{j,k} \delta_{i,l} \alpha_i + \delta_{i,k} \delta_{j,l} \kappa_{ij} \quad (2.79)$$

Pour trouver les conditions de stabilité des extrema, il faut que toutes les valeurs propres de  $\mathcal{H}$  soient négatives. Pour trouver ces valeurs propres nous allons réorganiser les lignes et les colonnes de  $\mathcal{H}$  de façon à écrire  $\mathcal{H}$  comme une matrice opérant sur un vecteur. A une matrice  $B$ , on associe le vecteur  $\theta = (\dots, B_{ij}, B_{ji}, \dots, B_{ii}, \dots)$  avec  $i < j$  c'est à dire on commence par prendre les éléments de  $B$  dans l'ordre :  $B_{1,2}, B_{2,1}, B_{1,3}, B_{3,1}, \dots$  puis on ajoute les éléments de la diagonale. Si on représente  $\mathcal{H}$  dans cette base on obtient :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & h_{ijkl} & h_{jikl} & & & & 0 \\ & h_{ijlk} & h_{jilk} & & & & \\ & & & \ddots & & & 0 \\ & 0 & & & h_{iiii} & & \\ & & & 0 & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

La matrice est diagonale par blocs. Les seuls indices pour lesquels  $h_{ijkl}$  n'est pas nuls sont pour  $(ij) = (kl)$  et  $(ij) = (lk)$ . Pour  $i < j$  on pose

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{ij} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ij} & \kappa_{ji} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$H_i = h_{iii} = \alpha_i + \kappa_{ii} \quad (2.82)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_{ii} &= E \left[ \phi'_i(\lambda_i s_i) \right] \\ \kappa_{ij} &= E \left[ \phi'_i(\lambda_i s_i) s_j \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\sigma_i^2 = E \left[ s_i^2 \right] \quad (2.84)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \quad (2.85)$$

Lorsque  $i \neq j$ , on remarque que (en cas d'indépendance) :

$$\kappa_{ij} = E \left[ \phi'_i(y_i) y_j^2 \right] \stackrel{\text{indép.}}{=} E \left[ \phi'_i(y_i) \right] E \left[ y_j^2 \right]. \quad (2.86)$$

Les valeurs propres de  $H_{ij}$  sont les racines de

$$P(x) = (\kappa_{ij} - x)(\kappa_{ji} - x) - \alpha_i^2 = x^2 - (\kappa_{ij} + \kappa_{ji})x + \kappa_{ij}\kappa_{ji} - \alpha_i^2 \quad (2.87)$$

dont le discriminant s'écrit :

$$\Delta = (\kappa_{ij} + \kappa_{ji})^2 - 4(\kappa_{ij}\kappa_{ji} - \alpha_i^2) = (\kappa_{ij} - \kappa_{ji})^2 + 4\alpha_i^2 \quad (2.88)$$

Les racines de  $P(x)$  sont :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left( (\kappa_{ij} + \kappa_{ji}) \pm \sqrt{(\kappa_{ij} - \kappa_{ji})^2 + 4\alpha_i^2} \right). \quad (2.89)$$

Pour que le point  $B = \Lambda A^{-1}$  soit un point stable, il suffit que la forme quadratique  $h_{ijkl}$  soit définie négative, i.e. :  $\forall i, \alpha_i + \kappa_{ii} < 0, \forall ij, x_1^{ij} < 0$  et  $x_2^{ij} < 0$ .

Or, aux points stationnaires, on a  $\alpha_i = -1$  et  $x_1 < 0$ . Ce qui revient d'après (2.89) à :

$$\kappa_{ij}\kappa_{ji} > 1 \quad \text{soit} \quad E \left[ \phi'_i(y_i) \right] E \left[ y_i^2 \right] E \left[ \phi'_j(y_j) \right] E \left[ y_j^2 \right] > 1. \quad (2.90)$$

Si  $x_1 < 0$  alors  $x_2 < 0$  et les conditions sur  $\kappa_{ii}$  sont :

$$-1 + \kappa_{ii} < 0 \quad \text{soit} \quad E \left[ \phi'_i(y_i) y_i^2 \right] - 1 < 0. \quad (2.91)$$

Cette section reformule les travaux publiés dans *Neurocomputing* [204] et inspirés de ceux de Cardoso et Laheld [122]. Les sections suivantes analysent l'information contenue dans la matrice de Fisher, en reprenant partiellement les travaux publiés dans [205], et proposent d'étendre ces travaux. Cette présentation est encore inédite.

### 2.3.5 Vitesse de convergence

Dans cette partie, on va utiliser les notations suivantes :

- On appelle  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(B)$  le vecteur paramètre de notre fonction de contraste, obtenu en réécrivant  $B$  sous la forme d'un vecteur<sup>7</sup> et  $c = \text{card}(\mathbf{p})$ . Ainsi la matrice Hessienne sera diagonale par bloc. On note :

7. Les coordonnées de  $\mathbf{p}$  sont ordonnées de la même manière qu'au paragraphe précédent.

–  $L(\mathbf{p})$  notre pseudo vraisemblance *i.e.* :

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \prod_{k=1}^n f(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k) = \prod_{k=1}^N |\det B| \prod_{i=1}^n g_i(B\mathbf{x}_k) \quad (2.92)$$

avec  $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k)$  la loi approchant celle de notre échantillon au paramètre  $\mathbf{p}$ ,  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  un échantillon de v.a. iid de densité  $p$  et de dimension  $n$ . On pose  $\ell(\mathbf{p}) = \log L(\mathbf{p})$ .

–  $I(\mathbf{p})$  la matrice de Fisher, ou encore la matrice d'autocorrélation du gradient de la log-vraisemblance, et  $I(\mathbf{p}) = \{I_{ij}\}$  avec

$$I_{ij} = E \left[ \partial_i \ell(\mathbf{p}) \partial_j \ell(\mathbf{p})^T \right]. \quad (2.93)$$

Dans la suite le paramètre  $\mathbf{p}_0 = \arg \min_{\mathbf{p}} E[\ell(\mathbf{p})]$ . On définit la variable aléatoire  $Y_n(\mathbf{p})$  par :

$$Y_n^i(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i} \ell(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(BX_i) X_i^T - B^{-T}) = \partial_i \ell(\mathbf{p}) \quad (2.94)$$

$$G_i \triangleq g(BX_i) X_i^T - B^{-T} \quad (2.95)$$

On notera spécialement  $Y_n = Y_n(\mathbf{p}_0)$ . Par définition de  $\mathbf{p}_0$ ,  $E[Y_n] = 0$ , donc  $Y_n = \sum_{i=1}^n G_i$  est une somme de variables iid centrés. D'où par le théorème central limite :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}(P)} \mathcal{N}_k(0, I(\mathbf{p})) \quad (2.96)$$

### 2.3.6 Estimateur du minimum de contraste

Soit  $\hat{\mathbf{p}}_n$  l'estimateur du minimum de contraste obtenu précédemment. On a  $\hat{\mathbf{p}}_n = \arg \inf_{\mathbf{p}} \ell(\mathbf{p})$ . Soit  $V$  un voisinage de  $\mathbf{p}$  sur lequel la famille de fonction  $f(\mathbf{p}, x)$  est  $\mathcal{C}^2, \forall x$ . Alors si  $\hat{\mathbf{p}}_n \in V$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}}(\ell(\hat{\mathbf{p}}_n)) = 0$ . Et on a :

$$0 = \partial_i \ell(\hat{\mathbf{p}}_n) \quad (2.97)$$

$$= \partial_i \ell(\mathbf{p}_0) + \sum_{j=1}^k (\hat{\mathbf{p}}_n^j - \mathbf{p}_0^j) \int_0^1 \partial_i \partial_j \ell(\mathbf{p}_0 + t(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0)) dt \quad (2.98)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n^i + \sum_{j=1}^k (\hat{\mathbf{p}}_n^j - \mathbf{p}_0^j) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^n \int_0^1 \Psi_{ij}(\mathbf{p}_0 + t(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0), X_p) dt \quad (2.99)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n^i + \sum_{j=1}^k \sqrt{n} (\hat{\mathbf{p}}_n^j - \mathbf{p}_0^j) \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \int_0^1 \Psi_{ij}(\mathbf{p}_0 + t(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0), X_p) dt, \quad (2.100)$$

avec  $\Psi_{ij}(\alpha, x) = \partial_i \partial_j \log f(\alpha, x)$  et  $\partial_i \partial_j \ell(\mathbf{p}) = \sum_{p=1}^n \Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_p)$ . De plus, si  $\mathcal{H}$  est la matrice Hessienne calculée au paragraphe 2.3.4 :

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_p) \xrightarrow{P} E[\Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_1)] = H_{ij}. \quad (2.101)$$

On a :

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\mathbf{p}}_n \in V\}} \left[ \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \int_0^1 [\Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_p) - \Psi_{ij}(\mathbf{p}_0 + t(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0), X_p)] dt \right] \xrightarrow{P} 0 \quad (2.102)$$

alors

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\mathbf{p}}_n \in V\}} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n(\mathbf{p}_0) + \sqrt{n} (\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0) \left( \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_p) \right) \right] \xrightarrow{P} 0 \quad (2.103)$$

A partir des résultats :

$$\begin{aligned}
& - (\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0) \xrightarrow{P} 0 \\
& - G_n = \mathbf{1}_{\{\hat{\mathbf{p}}_n \in V\}} H^{-1} \frac{1}{n} \left[ \sum_{p=1}^n \Psi_{ij}(\mathbf{p}, X_p) \right]_{ij} \xrightarrow{P} I, \\
& - D_n = H^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}(P)} \mathcal{N}(0, H^{-1} I(\mathbf{p}) H^{-1}),
\end{aligned}$$

on en conclut que  $H^{-1} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \Psi_{ij}(\mathbf{p}_0, X_p) \xrightarrow{P} I_d$ . Et on obtient :

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0)^T G_n = 0 \quad (2.104)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}(P)} \mathcal{N}(0, H^{-1} \Gamma H^{-1}). \quad (2.105)$$

### 2.3.7 Matrice de Fisher

L'article publié à ICA 2004 [205] donnait une représentation de  $\Gamma$ . Dans un article en préparation que nous reproduisons ici, nous complétons ce travail en précisant la forme générale de  $H^{-1} \Gamma H^{-1}$ .

Nous avons vu que nous pouvions introduire la transformation  $\Theta : V \rightarrow VB_\sigma$ , de façon que  $H(\Theta(V))$  soit bloc-diagonale et que  $\Gamma(\Theta(V))$  ait une forme plus simple.

Les matrices des applications associées sont  $U = \Theta^T H \Theta$  et  $D = \Theta^T \Gamma \Theta$ . D'où

$$\begin{aligned}
H^{-1} \Gamma H^{-1} &= (\Theta^{-T} \Theta^T H \Theta \Theta^{-1})^{-1} (\Theta^{-T} \Theta^T \Gamma \Theta \Theta^{-1}) (\Theta^{-T} \Theta^T H \Theta \Theta^{-1})^{-1} \\
&= \Theta (\Theta^T H \Theta)^{-1} \Theta^T \Theta^{-T} \Theta^T \Gamma \Theta \Theta^{-1} \Theta (\Theta^T H \Theta)^{-1} \Theta^T \\
&= \Theta U^{-1} D U^{-1} \Theta^T
\end{aligned}$$

Notons que  $\Theta_{ij,kl} = \delta_{i,k} B_{lj}$ ,  $\Theta_{ij,kl}^T = \delta_{i,k} B_{j,l}$ .

A partir d'ici, nous considérons l'opérateur de la base qui transforme  $U$  en matrice bloc-diagonale (2.80-2.85). Ainsi l'inverse  $U^{-1}$  est aussi bloc-diagonale, avec pour blocs :

$$\begin{aligned}
U_{ij}^{-1} &= \frac{1}{\kappa_{ij} \kappa_{ji} - \alpha_{ij}^2} \begin{bmatrix} \kappa_{ji} & -\alpha_{ij} \\ -\alpha_{ij} & \kappa_{ij} \end{bmatrix}, \\
U_i^{-1} &= \frac{1}{\alpha_{ii} + \kappa_{ii}}.
\end{aligned}$$

La matrice d'information de Fisher est la matrice de covariance du gradient de la log-vraisemblance. Ses coefficients sont donnés dans [205]. Dans le cas de 3 sources, nous avons une matrice de la forme suivante :

$$I = \begin{bmatrix} \gamma_1 \sigma_2^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma_2 \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \sigma_3^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \sigma_3^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_i = E[g_i^2(Y_i)] = \int \frac{p'^2}{p}(y) dy$$

$$l_i = -1 + E[g_i^2(Y_i) Y_i^2] = -1 + \int y^2 \frac{p'^2}{p}(y) dy$$

qui est bloc-diagonale et aisément inversible, par exemple :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \gamma_1 \sigma_2^2 & 1 \\ 1 & \gamma_2 \sigma_1^2 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \gamma_2 \frac{\sigma_1^2}{\gamma_1 \sigma_2^2 \gamma_2 \sigma_1^2 - 1} & -\frac{1}{\gamma_1 \sigma_2^2 \gamma_2 \sigma_1^2 - 1} \\ -\frac{1}{\gamma_1 \sigma_2^2 \gamma_2 \sigma_1^2 - 1} & \gamma_1 \frac{\sigma_2^2}{\gamma_1 \sigma_2^2 \gamma_2 \sigma_1^2 - 1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_1 \sigma_2^2 \gamma_2 \sigma_1^2 - 1} \begin{bmatrix} \gamma_2 \sigma_1^2 & -1 \\ -1 & \gamma_1 \sigma_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Concentrons-nous sur le cas où  $p$  (la vraie distribution des sources) et  $g$  (la distribution « devinée ») sont symétriques. Dans ce cas, la matrice de covariance a la même forme que la matrice Hessienne avec des éléments diagonaux :

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \begin{bmatrix} a_i \sigma_j^2 & 1 \\ 1 & a_j \sigma_i^2 \end{bmatrix} \\
D_{ii} &= -1 + E [g_i^2(Y_i) Y_i^2] \\
U_{i,j}^{-1} &= \begin{bmatrix} -b_j \frac{\sigma_i^2}{b_i \sigma_j^2 b_j \sigma_i^2 - 1} \lambda_j^2 & -\lambda_i \frac{\lambda_j}{b_i \sigma_j^2 b_j \sigma_i^2 - 1} \\ -\lambda_i \frac{\lambda_j}{b_i \sigma_j^2 b_j \sigma_i^2 - 1} & -b_i \frac{\sigma_j^2}{b_i \sigma_j^2 b_j \sigma_i^2 - 1} \lambda_i^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_j \sigma_i^2 \lambda_j^2 & \lambda_i \lambda_j \\ \lambda_i \lambda_j & b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \end{bmatrix}, \quad \Delta = b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 - 1 \\
a_i &= E [g_i^2(Y_i)] \\
c_i &= E \left[ \frac{g''}{g}(Y_i) \right] \\
\kappa_{ij} &= E [g'_i(\lambda_i s_i) s_j^2] = E [g'_i(\lambda_i s_i)] \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^2} = -\frac{b_i \sigma_j^2}{\lambda_j^2} \\
b_i &= -E [g'_i(\lambda_i s_i)] = E \left[ -\left( \frac{g'}{g} \right)^2 + \frac{g''}{g} \right] = -a_i + E \left[ \frac{g''}{g}(\lambda_i s_i) \right] = c_i - a_i \\
\sigma_i^2 &= E [Y_i^2]
\end{aligned}$$

Ainsi le calcul de  $U^{-1}DU^{-1}$  donne :

$$\begin{aligned}
U_{ij}^{-1} D_{ij} U_{ij}^{-1} &= \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Delta} \begin{bmatrix} b_j^2 \sigma_i^2 a_i \sigma_j^2 \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} - a_j \sigma_i^2 & a_i b_j \sigma_i \sigma_j^2 \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + 1 + b_i \sigma_j b_j \sigma_i + b_i \sigma_j a_j \sigma_i^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \\ -a_i b_j \sigma_i \sigma_j^2 \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + 1 + b_i \sigma_j b_j \sigma_i - b_i \sigma_j a_j \sigma_i^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_j} & b_i^2 \sigma_i^2 a_j \sigma_j^2 \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} - a_i \sigma_j^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Delta} \begin{bmatrix} -a_j \sigma_i^2 & 1 \\ 1 & -a_i \sigma_j^2 \end{bmatrix} + \frac{b_j \lambda_i \lambda_j^3}{\Delta} a_i \sigma_i \sigma_j^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{b_i \lambda_j \lambda_i^3}{\Delta} a_j \sigma_j \sigma_i^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{b_i b_j}{\Delta} \sigma_j \sigma_i \begin{bmatrix} a_i \sigma_j \sigma_i \frac{b_i}{b_j} \lambda_j^2 & 1 \\ 1 & a_j \sigma_j \sigma_i \frac{b_i}{b_j} \lambda_i^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

En calculant

$$\begin{aligned}
D_{i,j} U_{i,j}^{-1} &= -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_i \sigma_j^2 & 1 \\ 1 & a_j \sigma_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j \sigma_i^2 \lambda_j^2 & \lambda_i \lambda_j \\ \lambda_i \lambda_j & b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \lambda_j^2 + \lambda_i \lambda_j & a_i \sigma_j^2 \lambda_i \lambda_j + b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \\ b_j \sigma_i^2 \lambda_j^2 + a_j \sigma_i^2 \lambda_i \lambda_j & a_j \sigma_i^2 b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 + \lambda_i \lambda_j \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (c_i - b_i) b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \lambda_j^2 + \lambda_i \lambda_j & a_i \sigma_j^2 \lambda_i \lambda_j + b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \\ a_j \sigma_i^2 \lambda_i \lambda_j + b_j \sigma_i^2 \lambda_j^2 & (c_j - b_j) b_i \sigma_i^2 \sigma_j^2 \lambda_i^2 + \lambda_i \lambda_j \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \lambda_j^2 - \lambda_i \lambda_j & 0 \\ 0 & b_j b_i \sigma_i^2 \sigma_j^2 \lambda_i^2 - \lambda_i \lambda_j \end{bmatrix} - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} c_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \lambda_j^2 & c_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \\ c_j b_i \sigma_i^2 \lambda_j^2 & c_j b_i \sigma_i^2 \sigma_j^2 \lambda_i^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & a_i \sigma_j^2 \lambda_i (\lambda_j - \lambda_i) \\ a_j \sigma_i^2 \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dans le cas simplifié où  $\lambda_i \approx \lambda_j$  et  $c_i \approx 0$ , on voit que le premier terme est proche de l'identité alors que les deux autres tendent à s'annuler :

$$\begin{aligned}
D_{i,j} U_{i,j}^{-1} &= \lambda_i \lambda_j \begin{bmatrix} \frac{b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - 1}{b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{b_j b_i \sigma_i^2 \sigma_j^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_j} - 1}{b_i b_j \sigma_i^2 \sigma_j^2 - 1} \end{bmatrix} - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} c_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 \lambda_j^2 & c_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \\ c_j b_i \sigma_i^2 \lambda_j^2 & c_j b_i \sigma_i^2 \sigma_j^2 \lambda_i^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & a_i \sigma_j^2 \lambda_i (\lambda_j - \lambda_i) \\ a_j \sigma_i^2 \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$



Examinons  $U_{i,j}^{-1}$  seule :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{-1} &= -\frac{1}{b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 - 1} \begin{bmatrix} b_j \sigma_i^2 \lambda_j^2 & \lambda_i \lambda_j \\ \lambda_i \lambda_j & b_i \sigma_j^2 \lambda_i^2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\lambda_i \lambda_j}{\Delta} \begin{bmatrix} (c_j - a_j) \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i^2} & 1 \\ 1 & (c_i - a_i) \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui doit être aussi proche que possible de la matrice d'information de Fisher :

$$I_{i,j}^{-1} = \frac{1}{\gamma_i \gamma_j \sigma_i^2 \sigma_j^2 - 1} \begin{bmatrix} \gamma_j \sigma_i^2 & -1 \\ -1 & \gamma_i \sigma_j^2 \end{bmatrix}$$

où  $\gamma_i = E[g_i^2(Y_i)]$  et  $\sigma_i^2 = E[Y_i^2]$ . Nous pouvons réécrire  $U_{i,j}^{-1}$  sous la forme :

$$U_{i,j}^{-1} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{b_i b_j \sigma_j^2 \sigma_i^2 - 1} \begin{bmatrix} a_j \sigma_i^2 & -1 \\ -1 & a_i \sigma_j^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Delta} \begin{bmatrix} c_j \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i^2} & 0 \\ 0 & c_i \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^2} \end{bmatrix}$$

Dans *Neurocomputing* [204], nous avons montré que :

$$\left\| \hat{B}_n A - I_d \right\| \leq (\|H^{-1}\| + k_1) \|f - g\|_\infty \quad (2.106)$$

où  $\hat{B}_n A \rightarrow \Lambda$ , de sorte que  $\lambda_i \rightarrow 1$  comme  $\|f - g\|_\infty \rightarrow 0$  ( $f = Id + \frac{p'}{p}(y)y^T$ , et  $g = Id + g(y)y^T$ ). Il s'agit là d'une condition forte. Par exemple, en choisissant  $f, g$  telles que  $\|f(y)y - g(y)y\|_\infty < k$ , on peut écrire que  $\forall y, |f(y) - g(y)| < \frac{k}{|y|}$ . Dans notre cas,  $f$  et  $g$  sont très particulières puisqu'elles s'écrivent  $f = \frac{d}{dx} \log p(x)$ . On observe que si on remplace  $a_i$  et  $b_i$  par leurs valeurs obtenues avec la vraie distribution, on trouve :

$$\begin{aligned} a_i &= \gamma_i \\ b_i &= -a_i \\ U_{i,j}^{-1} D_{i,j} U_{i,j}^{-1} &= \begin{bmatrix} \gamma_j \sigma_i^2 & 1 \\ 1 & \gamma_i \sigma_j^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.3.8 Notes sur la mesure d'information de Fisher

En Statistiques, Fisher a défini l'information par  $I_F = \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 dx$ , tandis que Shannon définit son entropie ou sa mesure d'information par  $I_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, p) \ln f(x, p) dx$ . Dans  $I_S$ , la dépendance de  $I_S$  à  $p$  est secondaire, tandis que dans  $I_F$  elle joue un rôle important. Les statisticiens sont plus intéressés par l'information apportée par les paramètres décrivant la population qu'en théorie de l'information où l'information qui prime est celle qui permet de gommer les incertitudes sur une distribution de probabilités.

Soient  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  et  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$  deux densités, où  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)^T$  est un vecteur de paramètres, alors

$$IM[f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \ln \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})} d\mathbf{x}, \quad (2.107)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \ln \left[ 1 + \sum_{i=1}^m \Delta p_i \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{1}{2!} \frac{1}{f} \sum_{j,i}^m \Delta p_i \Delta p_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} + \dots \right] d\mathbf{x}, \quad (2.108)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \left[ \sum_{i=1}^m \Delta p_i \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{1}{2!} \frac{1}{f} \sum_{j,i}^m \Delta p_i \Delta p_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{1}{2} \left( \sum_i^m \Delta p_i \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)^2 + \dots \right] d\mathbf{x}, \quad (2.109)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,i}^m g_{ij} \Delta p_i \Delta p_j + \dots, \quad (2.110)$$

où  $g_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) d\mathbf{x}$  sont les éléments d'une matrice d'information de Fisher<sup>8</sup>. Pour un paramètre scalaire, plus la mesure d'information de Fisher est grande, plus l'information discriminant  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  et  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$  est grande. Ainsi, tandis que l'information de Fisher nous permet de discriminer deux densité de *même forme* fonctionnelle avec des paramètres variant d'une faible quantité, la mesure de Kullback-Leibler nous permet de discriminer deux densités quelconques. En réalité, au lieu de d'utiliser la mesure de Kullback-Leibler, on peut considérer une mesure plus générale :

$$D[f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \phi \left( \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})}{f(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \right) d\mathbf{x}, \quad (2.111)$$

où  $\phi(\cdot)$  est n'importe quelle fonction deux fois dérivable telle que  $\phi(1) = 0$ , de façon à ce que

$$D[f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \phi \left[ 1 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i}^m \frac{1}{f} \Delta p_i \Delta p_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} + \dots \right] d\mathbf{x}, \quad (2.112)$$

$$= \phi(1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} + \phi'(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i}^m \Delta p_i \Delta p_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} + \dots \right] d\mathbf{x},$$

$$+ \frac{1}{2} \phi''(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i \right)^2 + \dots \right] d\mathbf{x} + \dots \quad (2.113)$$

$$= \frac{1}{2} \phi''(1) \sum_{j,i}^m g_{ij} \Delta p_i \Delta p_j + \dots \quad (2.114)$$

Comme  $\phi(\cdot)$  est convexe et deux fois dérivable,  $\phi''(1) > 0$ , la mesure générale est exprimée en terme des éléments de la matrice d'information de Fisher. Plus  $\phi''(1)$  est grand, plus le pouvoir discriminant de la mesure entre deux fonctions de densité sera grand (cf. Tab.2.1).

$\phi(x)$	$\phi''(1)$
$x \ln x$	1
$x^2 - 1$	2
$\frac{1}{x}$	2
$-\ln x$	1

TABLE 2.1 – Exemple de fonctions  $\phi$ .

## 2.4 Débruitage par ondelettes dans des mélanges fortement bruités

Un grand nombre de méthodes de séparation de sources supposent implicitement que le modèle d'observation (que ce soit un mélange instantané/convolutif, ou linéaire/non-linéaire) est exact et que les données ne sont pas bruitées. En pratique, lors de l'application, ces méthodes se heurtent à des difficultés car souvent la réalité est plus complexe. Il est donc impératif de prendre en compte le bruit. Par bruit, on entend l'ensemble des incertitudes sur les données (modélisation, discrétisation, quantification, . . . , et le bruit de mesure proprement dit). On peut alors modéliser les observations par l'équation

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (2.115)$$

L'ajout du bruit entraîne typiquement deux problèmes :

- L'estimation de la matrice de séparation est généralement biaisée :  $B \neq DPA^{-1}$ ,
- Même si l'estimation est exacte,  $B = A^{-1}$  (pour simplifier, on ne tient pas compte des indéterminations), la restauration des sources est bruitée :  $\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{s}(t) + A^{-1}\mathbf{b}(t)$ .

La présence de bruit est néfaste pour l'estimation des sources. La présence du bruit  $A^{-1}\mathbf{b}(t)$  limite le RSB de l'estimation. Dans la littérature, ce problème, malgré son importance, a été peu abordé. Nous avons exploré plusieurs approches qui, par la suite, ont pu être comparées [166]. Ces approches combinent des opérations de débruitage, *avant et après* la séparation.

Une première méthode pour effectuer un débruitage est d'utiliser des filtres spectraux : ils traitent les coefficients issus de la transformée de Fourier en fonction de leur fréquence, en ajustant la bande effective au signal recherché de façon à réduire la puissance du bruit, d'où une augmentation du rapport signal à bruit (RSB). L'emploi du filtrage de Wiener, par exemple, permet de minimiser l'erreur

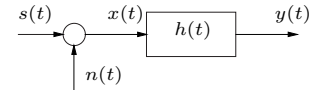


Figure 2.7: Principe du filtre de Wiener.

quadratique moyenne, les coefficients du filtre sont alors donnés par  $H(f) = \frac{S_x(f)}{S_x(f) + S_n(f)}$ , où  $S_x(f)$  est la densité spectrale de puissance du signal,  $S_n(f) = \sigma^2$  la variance du bruit blanc qui perturbe les données et  $H(f)$  la fonction de transfert du filtre  $h(t)$ . Cependant l'emploi d'un tel filtre suppose que l'on possède une connaissance de la statistique au second ordre du signal.

Le débruitage par filtre, qui repose sur l'idée de traiter les échantillons en fonction de leur fréquence, sera d'autant plus performant que le signal et le bruit occupent des bandes de fréquences distinctes. Or, les mélanges dans nos applications occupent une large bande spectrale : ils contiennent par exemple l'ECG de la mère, c'est-à-dire des fréquences de 0 à 20 Hz environ, mais aussi celui du fœtus, qui du fait que le cœur du fœtus bat deux fois plus vite, occupe une bande de fréquences (au moins) deux fois plus large, ce qui rend peu efficace les filtres spectraux.

Mais surtout, les filtres passe-bas linéaires entraînent des distorsions dans le signal filtré, distorsions inacceptables, car elles affectent la forme des signaux, tout particulièrement dans le cas de l'électrocardiogramme.

L'approche proposée, issue d'un travail réalisé avec B. Rivet [166] et qui a donné lieu à une publication à ICA'2004 [167], consiste en trois étapes successives :

1. débruiter le mélange afin d'estimer correctement la matrice de séparation  $B$  ; soit  $\hat{B}$  un tel estimateur
2. calculer les sources bruitées :  $\hat{\mathbf{s}}(t) = \hat{B}A\mathbf{s}(t) + \hat{B}\mathbf{b}(t)$ ,
3. débruiter les sources estimées, à partir des signaux bruités, afin d'obtenir :  $\hat{\mathbf{s}}_{\text{débruitée}}(t) \approx \mathbf{s}(t)$  (à une permutation et un facteur échelle près).

Nous avons évalué cette procédure en utilisant une méthode de débruitage à base d'ondelettes [167]. L'hypothèse principale pour la mise en œuvre de cette méthode est que le bruit occupe un spectre large, alors que les sources sont à spectre étroit. Dans ce cas, en choisissant correctement les échelles d'ondelettes, on peut réaliser simplement les opérations 1 et 3. L'intérêt de la méthode réside dans le découplage des débruitages nécessaires pour la bonne estimation de  $B$  et la restauration des sources : le réglage des échelles d'ondelettes est ainsi beaucoup plus facile.

Il reste à explorer plusieurs points, notamment :

- le choix automatique des échelles d'ondelettes,
- l'influence de l'ondelette mère,
- l'évaluation sur des exemples significatifs et la comparaison avec d'autres méthodes.

### 2.4.1 Débruitage par ondelettes

Deux propriétés de la transformée en ondelettes<sup>9</sup> font que l'on traite les coefficients de la transformée plutôt que les échantillons du signal :

- elle est *clairsemé*, c'est-à-dire que seul un petit nombre de coefficients a une amplitude importante,
- les coefficients sont moins corrélés que les échantillons du signal.

La propriété de décorrélation nous suggère de traiter les coefficients indépendamment les uns des autres et le fait que la transformée en ondelettes soit clairsemé nous incite à traiter les coefficients en fonction de leur amplitude et donc à utiliser des estimateurs à seuils.

Notons  $TO(\cdot)$  et  $TO^{-1}(\cdot)$  les opérateurs direct et inverse de la transformée en ondelettes. Soit  $\mathcal{D}(\cdot, \lambda)$  l'opérateur de débruitage associé au seuil  $\lambda$  et  $\mathbf{y}$  le vecteur des observations, on a en notation vectorielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.116)$$

où  $\mathbf{s}$  représente le signal original, et  $\mathbf{n}$  est un bruit blanc gaussien centré iid de matrice de covariance  $\sigma^2 I$  :  $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ . la procédure de débruitage pour estimer  $\mathbf{s}$  se traduit alors en trois étapes par

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= TO(\mathbf{y}) \\ \mathbf{z} &= \mathcal{D}(\mathbf{w}, \lambda) \\ \hat{\mathbf{s}} &= TO^{-1}(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (2.117)$$

où l'opérateur direct  $TO(\cdot)$  de la transformée en ondelettes discrète se caractérise par une simple matrice de transformation  $F$  orthogonale qui vérifie donc  $FF^T = F^T F = I$ . Ainsi, pour les observations on a

$$\mathbf{w} \triangleq F\mathbf{y} = F\mathbf{s} + F\mathbf{n} \triangleq \boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}. \quad (2.118)$$

Et  $\mathbf{b}$  est un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance  $\sigma^2 I$  :  $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ .

Le problème est alors de choisir l'estimateur à seuil  $\mathcal{D}(\cdot, \lambda)$  ainsi que le seuil  $\lambda$ . le signal  $\mathbf{s}$  est caractérisé par un faible nombre de coefficients  $\theta$  de grande amplitude. L'estimateur *dur* exploite la *sparsity* de la transformée en ondelettes discrète en annulant tous les coefficients  $w_i$  inférieurs au seuil  $\lambda$  :

$$\mathcal{D}_{\text{dur}}(w, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } |w| \leq \lambda, \\ w & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.119)$$

Ceci revient à considérer que les coefficients de faible amplitude (*i.e.* inférieurs à  $\lambda$ ) ne sont pas dus au signal mais uniquement au bruit. Mais cet estimateur engendre des oscillations de Gibbs. Pour palier cet inconvénient, Donoho a proposé le seuillage *doux* [51] défini par :

$$\mathcal{D}(w, \lambda) = \text{sgn}(w)(|w| - \lambda)_+ \quad (2.120)$$

où  $\text{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe et  $(\cdot)_+$  représente la partie positive de l'expression entre parenthèses. Cet estimateur continu annule tous les coefficients dont l'amplitude  $|w|$  n'excède pas  $\lambda$  et diminue les autres de la valeur du seuil, mais il introduit un biais systématique puisqu'il contracte les coefficients quelle que soit leur amplitude (cf. Fig.2.8).

Le seuil  $\lambda$  peut être choisi de deux façons différentes :

9. Pour des rappels généraux sur les ondelettes, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Mallat [134].

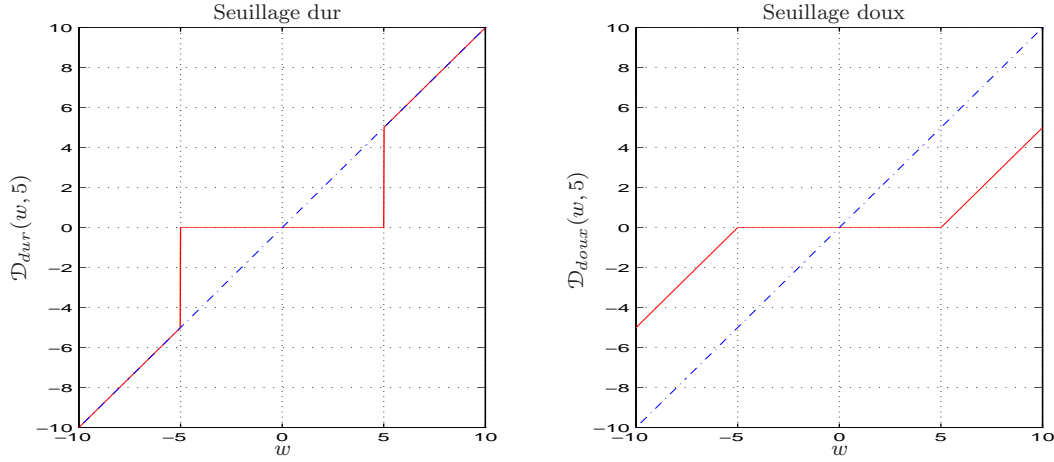


FIGURE 2.8 – Seuillages dur et doux. La figure de gauche représente le seuillage dur (courbe en trait plein) : les coefficients dont l’amplitude est inférieure au seuil  $\lambda$ , choisi ici égal à 5, sont annulés ; les autres restent inchangés. La figure de droite représente quant à elle le seuillage doux (courbe en trait plein) : les coefficients dont l’amplitude est inférieure au seuil  $\lambda$  sont annulés, les autres voient leur amplitude diminuée de la valeur du seuil.

1. adopter un seuil (comme le seuil universel [53]) qui ne dépend que du nombre de données  $N$  et de la variance du bruit<sup>10</sup>  $\sigma^2$ , auquel cas,  $\lambda$  peut être prédéterminé, par exemple  $\lambda^* = \sigma\sqrt{2\ln N}$  : ce seuil minimise l’erreur quadratique moyenne. Associé au seuillage doux, il donne de bons résultats si nous appliquons la procédure en trois étapes décrite précédemment,
2. opter pour un seuil adaptatif

$$\lambda^* = \varpi(\mathbf{w}) \quad (2.121)$$

(comme le seuil sélectionné par l’estimateur non-biaisé du risque suivant la procédure SURE de Stein [51, 52]) qui ne dépend plus uniquement de  $N$  et de la variance du bruit  $\sigma^2$ , mais aussi des coefficients  $\mathbf{w}$ . Dans ce cas, la procédure de débruitage est en quatre étapes

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= TO(\mathbf{y}) \\ \lambda &= \varpi(\mathbf{w}) \\ \mathbf{z} &= \mathcal{D}(\mathbf{w}, \lambda) \\ \hat{\mathbf{s}} &= TO^{-1}(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (2.122)$$

où nous distinguons maintenant l’opérateur  $\varpi(\cdot)$  qui sélectionne le seuil  $\lambda$  de l’opérateur  $\mathcal{D}(\cdot, \cdot)$  qui effectue le seuillage.

Ainsi le seuil sera déterminé par

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{0 \leq \lambda} \sum_{i=0}^{N-1} (2\sigma^2 - w_i^2 + \lambda^2) \mathbf{1}\{|w_i| \geq \lambda\}. \quad (2.123)$$

## 2.4.2 Débruitage par choix d’une base idéale

Le débruitage par ondelettes est une méthode efficace pour séparer le signal du bruit : il permet, par des estimateurs à seuils, de projeter les observations bruitées dans le sous-espace signal<sup>11</sup> afin de réduire le bruit. Cependant, le fait de choisir une décomposition discrète peut provoquer des artefacts : la base choisie n’étant

10. Variance estimée, comme le suggère Mallat [135, p. 447], par  $\hat{\sigma} = \frac{1}{0,6745} \text{Med}(|\mathbf{w}_1|)$  où  $\mathbf{w}_1$  sont les coefficients de la transformée en ondelettes discrète à la première échelle et  $\text{Med}(|\mathbf{x}|)$  la médiane de la valeur absolue des coefficients du vecteur  $\mathbf{x}$ .

11. Il s’agit de décomposer l’espace en deux : le sous-espace bruit ne contenant que du bruit, et le sous-espace signal qui contient tout le signal et éventuellement du bruit.

pas forcément la plus adaptée au signal. Cette recherche des sous-espaces signal et bruit sera améliorée si l'on met en concurrence plusieurs bases possibles  $B_j$ , ce que ne permet pas les ondelettes puisqu'elles ne génèrent qu'une unique base. Pour générer ces différentes bases  $B_j$ , on utilise des *paquets d'ondelettes*.

Les paquets d'ondelettes se déduisent de l'analyse multirésolution [118] où l'on décompose le signal en deux composantes : l'approximation et les détails. Cette opération est itérée sur l'approximation donnant ainsi une suite de signaux de détails qui forme la transformée en ondelettes discrète. Dans la transformée en paquets d'ondelettes, on décompose non seulement l'approximation mais aussi les détails ce qui nous fournit une décomposition arborescente engendrant une bibliothèque  $\mathcal{B}$  de bases  $B_j$ .

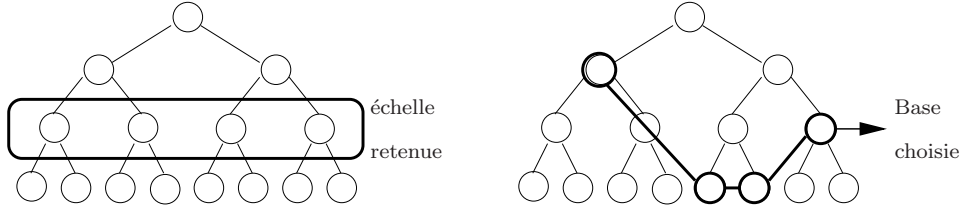


FIGURE 2.9 – Stratégies de recherche de la base optimale. Le schéma de gauche illustre le principe de recherche de la meilleure échelle  $\hat{e}$  tandis que le schéma de droite montre une base  $\hat{B}$  typique obtenue par recherche de la meilleure base.

Comment choisir dans cette bibliothèque  $\mathcal{B}$ , la base  $\hat{B}$  qui représentera le mieux le signal et qui permettra donc le meilleur débruitage? Une stratégie classique de recherche de cette base optimale consiste à chercher la meilleure échelle  $e^*$  (cf. Fig. 2.9). Notons  $B(e)$  la base associée à l'échelle  $e$  et  $B(e)[\mathbf{y}]$  l'expression de  $\mathbf{y}$  dans la base  $B(e)$ . Soit  $\mathcal{M}\{B(e)[\mathbf{y}]\}$  la fonction coût du vecteur  $\mathbf{y}$  exprimé dans  $B(e)$ .  $\mathcal{M}$  pourra être, par exemple, l'entropie définie pour un vecteur  $\mathbf{x}$  par :  $\mathcal{M}\{\mathbf{x}\} = -\sum_i x_i \ln x_i$ .

Dans cette stratégie de recherche, on compare les fonctions coût obtenues aux différentes échelles  $e$ , et l'on retient l'échelle  $\hat{e}$  qui donne la plus petite fonction coût. La meilleure base  $\hat{B}$  vérifie alors

$$\hat{B} = B(\hat{e}) \quad \text{avec} \quad \hat{e} = \arg \min_e \mathcal{M}\{B(e)[\mathbf{y}]\} \quad (2.124)$$

### 2.4.3 Choix de l'échelle de débruitage

Jusqu' à quelle échelle de la décomposition en ondelettes devons nous effectuer le débruitage? En effet, aller jusqu' à une échelle trop petite (*i.e.* ne débruiter que peu d'échelles) risque de ne pas débruiter suffisamment, mais aller trop loin risque de supprimer trop de signal et détériorer ainsi l'estimation de la matrice de séparation  $B$  ce qui se traduit par une diminution de l'indice de performance. Les résultats concernant les RSB peuvent s'analyser simplement en nous intéressant aux coefficients en ondelettes des mélanges non bruités  $\theta_i$  et à ceux des mélanges bruités  $w_i$ . Dans l'exemple de la figure 2.10) sont affichés les coefficients d'ondelettes d'un signal quelconque pour plusieurs échelles. On constate que jusqu' à l'échelle 6, le bruit perturbe beaucoup la densité de probabilité des coefficients non bruités. En revanche à l'échelle 7 l'influence du bruit est moins nette comme le montre la troisième ligne de la figure 2.10. A l'échelle 10 l'influence du bruit redevient importante (le signal est à moyenne nulle) par rapport au niveau de bruit. Tout ceci explique le minimum atteint à l'échelle 6 du débruitage pour l'indice de performance. Pour choisir l'échelle optimale de débruitage, il semble donc intéressant de comparer la densité de probabilité des coefficients bruités à la gaussienne du bruit.

### 2.4.4 Techniques de débruitage par ondelettes pour la séparation de sources

#### 2.4.4.1 Débruitage pré-séparation

Une première étude sur l'influence du débruitage par ondelettes préalablement à la séparation a été menée par Paraschiv-Ionescu *et al.* [160] qui ont proposé le schéma de débruitage suivant (cf. Fig. 2.11).

Ainsi, pour obtenir de bonnes performances dans des environnements fortement bruités, les observations  $\mathbf{y}(k)$  sont débruitées en appliquant un seuillage doux avant d'appliquer l'algorithme de séparation de sources à  $\hat{\mathbf{x}}$  :  $\hat{\mathbf{s}}(k) = B \hat{\mathbf{x}}(k)$ .

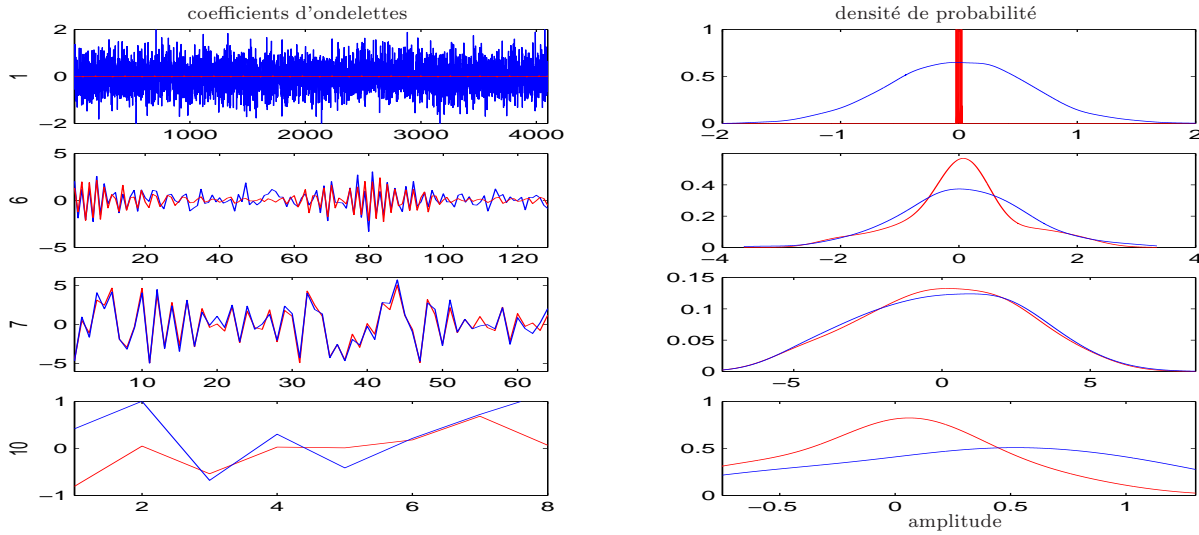


FIGURE 2.10 – Choix de l'échelle de débruitage : la colonne de gauche représente les coefficients en ondelettes pour différentes échelles (1, 6, 7 et 10), la colonne de droite représente leur densité de probabilité respective en amplitude. Les courbes rouges concernent le signal non bruité, les courbes bleues le signal bruité avec un rapport signal sur bruit de -5 dB.

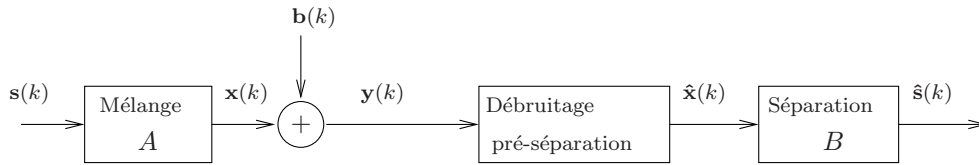


FIGURE 2.11 – Séparation de sources couplée à un débruitage pré-séparation. L'estimation  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  des mélanges  $\mathbf{x}(k)$  est obtenue par débruitage par ondelettes des observations bruitées  $\mathbf{y}(k)$ . Ces mélanges débruités servent ensuite à estimer la matrice de séparation  $B$ , les sources étant alors approximées par  $\hat{\mathbf{s}}(k) = B \hat{\mathbf{x}}(k)$ .

Dans la suite, nous étudierons une amélioration de la méthode de Paraschiv-Ionescu *et al.* Nous présenterons ensuite une nouvelle méthode de débruitage.

#### 2.4.4.2 Ajout d'un débruitage post-séparation

Un amélioration de la méthode existante peut être apportée en ajoutant après la séparation un débruitage post-séparation (voir Fig. 2.12). Les sources sont estimées par  $\mathbf{s}^*(k)$  obtenues par débruitage des signaux issues de la séparation  $\hat{\mathbf{s}}(k)$ . Un débruitage classique obtenu en s'appuyant sur la seule variance du bruit  $\sigma^2$  estimée à partir des coefficients en ondelettes de la première échelle de  $\hat{\mathbf{s}}(k)$  ne peut aboutir. Du fait du pré-débruitage ayant été effectué avant la séparation, le bruit n'est plus blanc.

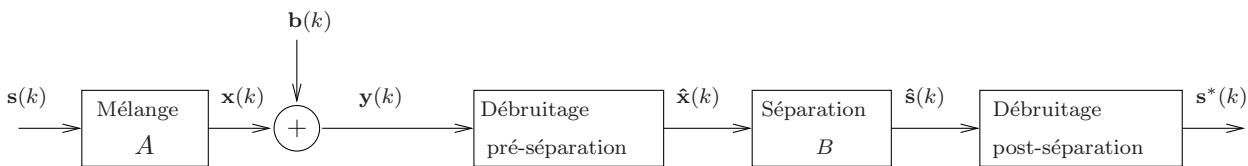


FIGURE 2.12 – Séparation couplée à un débruitage pré-séparation et post-séparation.

Nous avons proposé la méthode décrite Tab. 2.2 :

ALGORITHME DE DÉBRUITAGE POST-SÉPARATION ( $\mathbf{y}$ )	
1	estimer la variance du bruit $\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}^2 = (\hat{\sigma}_{\mathbf{y}_1}^2, \dots, \hat{\sigma}_{\mathbf{y}_q}^2)^T$ présent dans les observations $\mathbf{y}(k)$ ;
2	calculer $\hat{\sigma}_{\mathbf{s}}^2 = \mathbf{B}^2 \hat{\sigma}_{\mathbf{y}}^2$ , qui est une estimation de la variance du bruit <sup>12</sup> présent dans l'estimation des sources $\hat{\mathbf{s}}(k)$ , puisque le bruit $\mathbf{b}(k)$ est supposé blanc gaussien ;
3	appliquer l'algorithme de débruitage à partir de $\hat{\sigma}_{\mathbf{s}}^2$ pour le choix du seuil $\lambda$ ;

TABLE 2.2 – Algorithme de débruitage post-séparation.

Cette amélioration permet de compléter le débruitage pré-séparation dans le cas où on aurait fait le choix de ne pas trop débruiter les observations  $\mathbf{y}(k)$  afin de ne pas perdre trop de signal ce qui serait néfaste pour l'estimation de la matrice de séparation  $B$ . En effet, un débruitage pré-séparation trop énergique risquerait de modifier la structure du mélange  $\mathbf{x}(k) = A\mathbf{s}(k)$  et de nuire à la qualité de l'estimation de la matrice de séparation.

#### 2.4.4.3 Nouvelle méthode de débruitage

Le débruitage pré-séparation risque de supprimer du signal et notamment les détails de celui-ci (*i.e.* les petites différences entre les ondelettes utilisées et le signal). Si cette perte peut ne pas s'avérer gênante pour l'estimation de la matrice de séparation, elle est lourde de conséquence dans l'estimation des sources, car les plus faibles (ce peut être le cas pour l'ECG du fœtus) risquent d'être éliminées dans le débruitage pré-séparation.

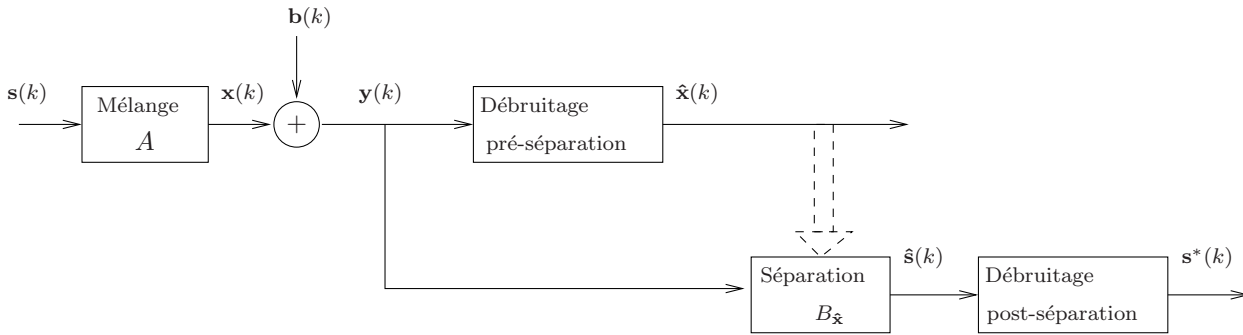


FIGURE 2.13 – Nouveau principe de débruitage couplé à une séparation de sources. Le débruitage pré-séparation ne sert qu'à déterminer la matrice de séparation  $B$ , les sources sont estimées par  $\hat{\mathbf{s}}(k) = B \mathbf{y}(k)$ , sources qui sont alors débruitées par un débruitage post-séparation.

Pour palier cet inconvénient l'algorithme, nous avons proposé dans [167], un nouveau principe de débruitage couplé à une séparation de source (Fig. 2.13) dans laquelle le débruitage ne sert qu'à déterminer la matrice de séparation  $B$ . Les sources sont alors estimées par  $\hat{\mathbf{s}}(k) = B\mathbf{y}(k)$ , puis débruitées par un débruitage post-séparation. L'algorithme donné Tab. 2.13 en résume les 4 principales étapes :

Par cette méthode nous obtenons

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = B_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y}(k) = B_{\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k))$$

ce qui donne alors

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = B_{\hat{\mathbf{x}}} A \mathbf{s}(k) + B_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{b}(k) \quad (2.125)$$

Cette méthode présente l'avantage de pouvoir adapter le débruitage pré-séparation à la séparation de sources, donc à l'estimation de la matrice de séparation  $B$ , indépendamment de la contrainte de garder intact le signal

12.  $\mathbf{B}^2$  signifie que les termes  $\mathbf{B}_{ij}$  sont élevés au carré, puisque le bruit  $\mathbf{b}$  est supposé gaussien et blanc.



ALGORITHME ORIGINAL DE DÉBRUITAGE ( $\mathbf{y}$ )	
1	débruiter les observations bruitées $\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)$ par une technique <i>ad-hoc</i> (par exemple un débruitage dur de la transformée en ondelettes stationnaire), ce qui nous fournit une estimation $\hat{\mathbf{x}}(k)$ des mélanges $\mathbf{x}(k)$ ;
2	à partir des estimations $\hat{\mathbf{x}}(k)$ des mélanges déterminer la matrice de séparation $B_{\hat{\mathbf{x}}}$ ;
3	estimer les sources par $\hat{\mathbf{s}}(k) = B_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y}(k)$ ;
4	réaliser un débruitage post-séparation pour l'estimation finale $\mathbf{s}^*(k)$ des sources ;

TABLE 2.3 – Nouvel algorithme de débruitage.

utile le plus longtemps possible. De plus, il est possible de choisir un débruitage post-séparation adapté à la nature des sources recherchées : on possède évidemment généralement plus d'information sur les sources recherchées que sur la nature des mélanges observés. Par exemple, les sources peuvent occuper des bandes de fréquences différentes : il sera alors possible de choisir une échelle différente pour chacune des sources.

### 2.4.5 Simulations numériques

Dans la suite, nous allons considérer le mélange obtenu à partir de deux sources (cf. 2.14) et d'une matrice choisie égale à  $A = \begin{pmatrix} 0.3214 & 0.1954 \\ -0.1553 & 0.2919 \end{pmatrix}$ . Les deux sources sont :

- la somme d'une sinusoïde et d'un créneau, générée à l'aide des signaux tests (**heavy sine**) de la toolbox wavelet de ©Matlab,
- une sinusoïde modulée sinusoidalement en fréquence, de porteuse (en fréquence réduite)  $f_0 = 1/200$ , de fréquence modulante  $f_m = 1/5000$  et d'indice de modulation  $\Delta = 12,5$  :

$$s_2(t) = \sin(2\pi f_0 t + \Delta \sin(2\pi f_m t))$$

Les sources sont ensuite normalisées pour avoir une puissance unitaire.

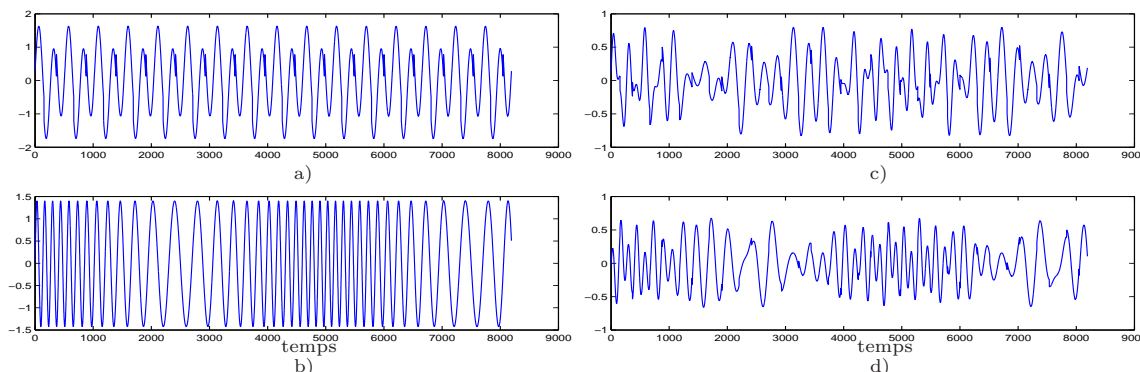


FIGURE 2.14 – Sources et mélanges utilisés lors des simulations. Les courbes a) et b) représentent les deux sources, les courbes c) et d) montrent les mélanges non bruités.

Nous supposons que les mélanges sont corrompus par un bruit additif Gaussien iid et que les débruitages sont opérés individuellement sur chaque signal (mélange ou source estimée). La séparation sera effectuée par deux algorithmes de séparation typiques JADE et EASI [75].

La qualité de l'estimation de la matrice de séparation sera mesurée à l'aide de l'indice de performance  $IP$  défini

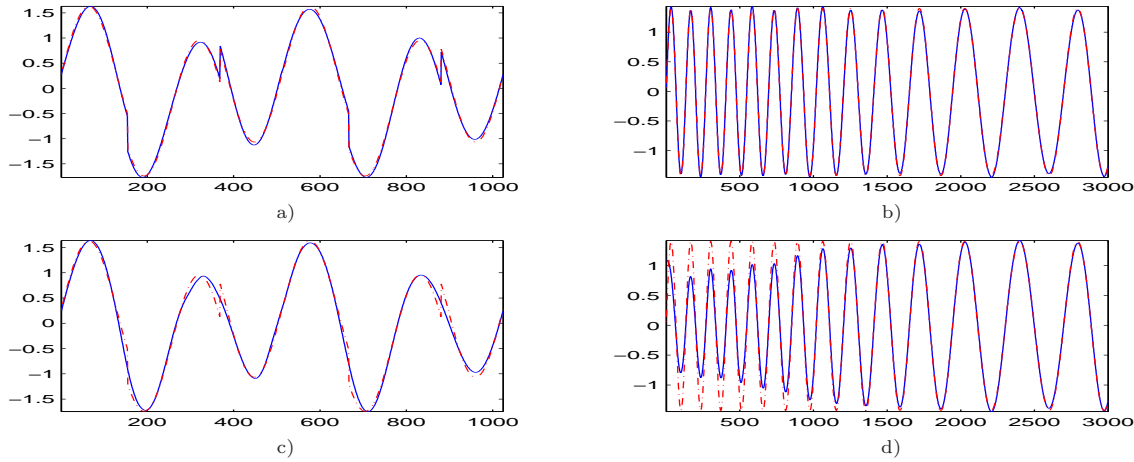


FIGURE 2.15 – Pertes sur les sources. a) et b) Nouvelle méthode proposée. c) et d) Méthode de Paraschiv-Ionescu. Sont représentés en rouge les vraies sources et en bleu le produit du signal restant après débruitage pré-séparation par la matrice de séparation estimée  $B$ .

par

$$IP = \sum_{i=1}^p \left\{ \left( \sum_{j=1}^p \frac{|c_{i,j}|^2}{\max_l |c_{i,l}|^2} - 1 \right) + \left( \sum_{j=1}^p \frac{|c_{j,i}|^2}{\max_l |c_{l,i}|^2} - 1 \right) \right\} \quad (2.126)$$

où  $c_{i,j}$  est le  $(i, j)$ -ième élément de la matrice du système global  $C = BA$ . Lorsque la séparation est effectuée, l'indice de performance atteint son minimum (en pratique de l'ordre de -30 dB). Les résultats suivants sont donnés pour plusieurs RSB, les simulations ont été répétées 50 fois en gardant tous les paramètres constants, seul le bruit est régénéré.

Tab. 2.4 établit une comparaison entre la méthode proposée dans [160], l'amélioration proposée §2.4.4.2 sur celle-ci et la méthode originale §2.4.4.3. La configuration de filtrage (9,6) est celle dans laquelle le débruitage pré-séparation est effectué à l'échelle 9, le débruitage post-séparation à l'échelle 6.

		$RSB_e$	-10	-5	0	5		-10	-5	0	5
Temoin (bruités)	$IP_{JADE}$		0	-5	-22	-24	$RSB$	-9,2	-5,0	-0,3	4,7
	$IP_{EASI}$		1	-2	-15	-24	$RSB$	-9,1	-4,5	0,3	5,3
Paraschiv (6)	$IP_{JADE}$		-18	-22	-24	-24	$RSB$	5,9	9,9	13,8	17,3
	$IP_{EASI}$		-14	-19	-21	-24	$RSB$	5,6	10,1	14,8	19,0
pré-post débruitage (5,6)	$IP_{JADE}$		-17	-21	-23	-24	$RSB$	7,4	11,9	15,6	17,8
	$IP_{EASI}$		-13	-18	-21	-23	$RSB$	7,0	11,6	16,6	21,4
Nouvelle méthode (6,6 ou 5)	$IP_{JADE}$		-17	-23	-27	-29	$RSB$	8,1	12,5	16,1	18,1
	$IP_{EASI}$		-14	-18	-22	-24	$RSB$	7,8	11,3	16,4	21,4

TABLE 2.4 – Comparaison des méthodes.

Pour la nouvelle méthode, on choisit pour débruitage pré-séparation celui qui fournit la meilleure séparation, c'est-à-dire le débruitage dur de la transformée en ondelettes stationnaire. On constate qu'après la séparation de sources, notre méthode permet de garder l'intégralité du signal informatif (pas de différence notable entre les courbes rouges et bleues a) et b)). En revanche que ce soit la méthode de Paraschiv-Ionescu ou l'amélioration proposée §2.4.4.2, ces méthodes ne permettent pas de donner d'aussi bonnes performances (les courbes rouges et bleues possèdent des différences notables c) et d)).

On constate que nos deux méthodes améliorent sensiblement les performances de la méthode de Paraschiv-Ionescu en terme de rapport signal sur bruit des sources estimées. Elles ont un comportement très semblable

si l'on choisit bien les échelles de débruitage pré et post séparation.

Lorsque l'échelle de débruitage pré-séparation est surestimée (*ie* supérieure à 6), on constate (cf. Tab.2.5) que la méthode de Paraschiv-Ionescu est peu sensible à une surestimation de l'échelle de débruitage. L'amélioration voit, quant à elle, ses performances nettement dégradées. En revanche, la nouvelle méthode proposée limite cette dégradation et fournit même des performances honorables. En effet, pour la nouvelle méthode, même si la séparation a été mal estimée, l'intégralité du signal est encore présente. Notre nouvelle méthode est donc plus robuste au choix de l'échelle pré-séparation.

Méthode		$RSB$ (dB)			
		-10 dB	-5 dB	0 dB	5 dB
Témoin (bruitées)	$RSB_{EASI}$	-9,2	-5,0	-0,3	4,7
	$RSB_{JADE}$	-9,1	-4,5	0,3	5,3
	$IP$	0	-5	-22	-24
SURE (Paraschiv)	$RSB_{EASI}$	5,9	9,6	13,6	16,9
	$RSB_{JADE}$	5,8	10,4	14,7	18,9
	$IP$	-17	-22	-23	-23
Amélioration	$RSB_{EASI}$	2,7	9,8	14,8	17,5
	$RSB_{JADE}$	2,3	8,3	15,0	21,1
	$IP$	1	-12	-22	-24
Nouvelle méthode	$RSB_{EASI}$	5,5	11,4	15,7	18,0
	$RSB_{JADE}$	4,3	10,8	16,3	21,5
	$IP$	1	-12	-23	-24

TABLE 2.5 – Comparaison des méthodes dans le cas (9,6) où l'algorithme de séparation est JADE.

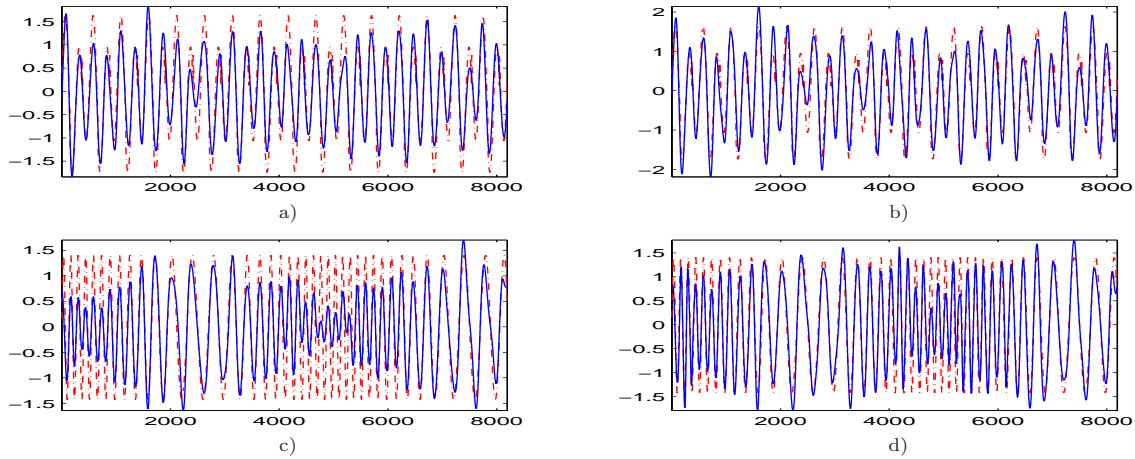


FIGURE 2.16 – Sources estimées dans le cas (9,6) : les figures a) et c) font référence à l'amélioration de la méthode de Paraschiv-Ionescu, les figures b) et d) correspondent à la méthode que nous proposons. Sont représentées en rouge les vraies sources et en bleu les sources estimées.

Les deux méthodes présentées dans [167] améliorent sensiblement les performances de la méthode Paraschiv-Ionescu en terme de RSB. Elles ont un comportement très semblable si l'on choisit bien les échelles de débruitage pré et post-séparation. En cas de sur-estimation de l'échelle de débruitage, la nouvelle méthode proposée permet de limiter la dégradation des résultats et de fournir des performances honorables même si la séparation a été mal estimée. La nouvelle méthode est donc plus robuste au choix de l'échelle pré-séparation.

Cette méthode offre l'avantage de pouvoir adapter le débruitage pré-séparation à la séparation de source, donc à l'estimation de la matrice de séparation  $B$ , indépendamment de la contrainte de garder intact le signal utile le plus longtemps possible. Il est possible, par ailleurs, de choisir un débruitage post-séparation adapté à la nature des sources recherchées : on possède généralement plus d'information sur les sources recherchées que sur la nature des mélanges observés. Par exemple, les sources peuvent occuper des bandes de fréquences différentes. Des solutions efficaces dans des mélanges bruités sont indispensables pour que les méthodes de séparation de sources puissent être appliquées à des problèmes réels. Outre les approches présentées ci-dessus, il semble que les méthodes de séparation de sources qui prennent en compte la coloration des signaux (modèle Markovien des sources) fournissent des sources estimées dans lesquelles le bruit résiduel est lissé. Par ailleurs, dans le cas de mélanges non linéaires ou convolutifs, ce problème n'a jamais été abordé. D'un point de vue théorique, il me reste donc plusieurs points à approfondir. D'un point de vue pratique, des comparaisons sérieuses entre les diverses méthodes s'imposent.

## 2.5 Diagonalisation conjointe de matrices temps-échelle

Dans [60], nous proposons une nouvelle approche pour résoudre le problème de la séparation de sources en mélange instantané. L'idée consiste à exploiter la diversité temps-échelle spatiale des sources [15] afin de construire un ensemble de matrices à partir de la transformée en ondelettes des signaux observés. L'ensemble de ces matrices sont ensuite diagonalisées conjointement sans contrainte d'unitarité afin d'estimer la matrice de séparation. Plusieurs méthodes basées sur ce type de décomposition ont été proposées dans la littérature, mais elles diffèrent cependant par la nature de l'ensemble de matrices considérées. On peut citer par exemple l'algorithme JADE [25] qui opère sur des matrices de cumulants d'ordre 4, SOBI [15] sur des matrices de covariance, etc. Plus récemment, des méthodes basées sur la diagonalisation conjointe de matrices issues de représentations temps-fréquence spatiales quadratiques ont vu le jour [16, 61]. Ce type d'approches a l'avantage de considérer une plus large classe de signaux sources que la classe habituelle de sources aléatoires indépendantes. Il est important de noter que toutes ces méthodes nécessitent une étape de pré-sélection (automatique) de points  $(t - f)$  dans le plan temps-fréquences qui correspondent uniquement à des *auto-termes* [62, 65, 73]. Nous proposons un nouveau type de matrices à symétrie hermitienne à diagonaliser conjointement. L'approche n'est pas basée sur des représentations temps-fréquence, mais sur des transformées en ondelettes (*i.e.* représentation temps-échelle, cf. §2.4.1).

Après l'introduction de la transformée en ondelettes spatiale, nous montrons que la matrice de mélange peut être estimée en exploitant certaines propriétés algébriques des matrices issues de transformées en ondelettes croisées. Nous discutons des critères automatiques de sélection de points dans le plan temps-échelle permettant d'« isoler » des points ne correspondant qu'aux auto-termes. Nous considérons le modèle classique de mélange instantané décrit par  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$ , où  $\mathbf{A}$  est la matrice de mélange,  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$  le vecteur des signaux observés,  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_p(t))^T$  le vecteur des signaux sources inconnus et  $\mathbf{n}(t)$  est un bruit additif.

Dans toute la suite, on suppose que les sources  $\{s_i(t)\}, i = 1, \dots, p$  sont des signaux dont les représentations temps-échelle sont distinctes. Cette dernière hypothèse signifie qu'il existe des points dans le plan temps-échelle ne correspondant qu'à une seule et unique source.

L'objectif est d'estimer une inverse de la matrice de mélange afin de retrouver les contributions des différentes sources.

### 2.5.1 La transformée en ondelettes spatiale des observations

Une famille d'ondelettes est définie par un paramètre d'échelle  $a$  et de temps  $b$  par l'équation suivante :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2.127)$$

où  $\psi(t)$  est une fonction complexe appelée *ondelette mère*. La transformée en ondelettes d'un signal  $s(t)$  est définie par :

$$W_s(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t) s^*(t) dt \quad (2.128)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $*$  désigne l'opérateur de conjugaison.

Pour deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ , pour une même ondelette mère  $\psi(t)$ , la transformée en ondelettes croisée entre  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  est définie par :

$$W_{s_1 s_2}(a, b) = W_{s_1}(a, b) \cdot W_{s_2}^*(a, b). \quad (2.129)$$

A partir de l'expression (2.129), on peut définir la transformée en ondelettes spatiale (TOS)  $W_{\mathbf{s}}$  du vecteur  $\mathbf{s}(t)$  par la matrice :

$$W_{\mathbf{s}} = \{W_{\mathbf{s}_{i,j}}(a, b)\} \quad \text{avec} \quad \{W_{\mathbf{s}_{i,j}}(a, b)\} = W_{s_i s_j}(a, b). \quad (2.130)$$

et, à partir du modèle de mélange  $\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}$  :

$$W_{x_i x_j}(a, b) = W_{x_i}(a, b) \cdot W_{x_j}^*(a, b) \quad (2.131)$$

$$= \sum_{l,m=1}^N a_{il} a_{jm} W_{s_l s_m}(a, b) + W_{n_i n_j}(a, b) + \sum_{l=1}^N a_{il} W_{s_l n_j}(a, b) + \sum_{l=1}^N a_{jl} W_{n_i s_l}(a, b). \quad (2.132)$$

alors,  $W_{\mathbf{x}}(a, b)$  peut s'écrire sous la forme :

$$W_{\mathbf{x}}(a, b) = A W_{\mathbf{s}}(a, b) A^T + W_{\mathbf{n}}(a, b) + A W_{\mathbf{sn}}(a, b) + W_{\mathbf{ns}}(a, b) A^T \quad (2.133)$$

où  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  et  $W_{\mathbf{n}}(a, b)$  sont resp. les TOS des sources et du bruit et où  $W_{\mathbf{sn}}(a, b)$  et  $W_{\mathbf{ns}}(a, b)$  sont les TOS croisées entre sources et bruit. Dans le cas non-bruité, l'équation (2.133) se réduit à :

$$W_{\mathbf{x}}(a, b) = A W_{\mathbf{s}}(a, b) A^T, \quad (2.134)$$

sinon, on fixe un seuil  $\epsilon$  et on considère uniquement les point  $(a, b)$  pour lesquels  $\|W_{\mathbf{x}}(a, b)\| > \epsilon_1$  pour revenir au modèle (2.133). L'ondelette mère  $\psi(t)$  étant complexe, la matrice  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  est donc à symétrie hermitienne. Si pour certains points temps-échelle  $(a, b)$  elle est diagonale, alors la matrice  $A$  peut être estimée par diagonalisation conjointe de l'ensemble  $\mathcal{M} = \{W_{\mathbf{x}}(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ .

## 2.5.2 Diagonalisation conjointe non unitaire

On considère l'ensemble de  $K$  matrices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  qui se décomposent sous la forme :

$$M_i = A D_i A^T, \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}, \quad (2.135)$$

où  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  sont des matrices diagonales. L'objectif est d'estimer  $A$  et l'ensemble des matrices  $D_i$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$ . Quand  $A$  est unitaire, une solution a été proposée dans [16]. Dans le cas non unitaire on propose d'optimiser le critère :

$$\mathcal{C}(B) = \sum_{i=1}^K \|\text{OffDiag}\{B^T M_i B\}\|^2, \quad (2.136)$$

où l'opérateur  $\text{OffDiag}\{\cdot\}$  renvoie une matrice à diagonale nulle construite à partir des éléments hors-diagonal de son argument.

Afin de construire l'ensemble des matrices  $\mathcal{M} = \{W_{\mathbf{x}}(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$  à diagonaliser conjointement, il est nécessaire de sélectionner les points  $(a, b)$  « utiles » dans le plan temps-échelle pour lesquels les matrices  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  sont diagonales. Les différentes structures algébriques de la matrice  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  sont :

1.  $W_{\mathbf{s}}(a, b) = 0$  et le point  $(a, b)$  n'est pas retenu.
2.  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  n'a aucune structure :  $W_{\mathbf{x}}(a, b)$  n'est pas intéressante pour l'ensemble  $\mathcal{M}$ .
3.  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  est diagonale :  $W_{\mathbf{x}}(a, b)$  est retenue dans l'ensemble  $\mathcal{M}$ .

Dans le dernier cas, puisque  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  est à symétrie hermitienne et  $A$  est réelle,  $W_{\mathbf{x}}(a, b)$  est également à valeurs réelles. Cette propriété peut-être exploitée pour sélectionner les points  $(a, b)$  dans le plan temps-échelle pour lesquels  $W_{\mathbf{s}}(a, b)$  est diagonale :

$$\|W_{\mathbf{x}}(a, b)\| > \epsilon_1 \quad (2.137)$$

$$\|\Im(W_{\mathbf{x}}(a, b))\| > \epsilon_2 \quad (2.138)$$

où  $\Im(\cdot)$  et  $\|\cdot\|$  sont resp. la partie imaginaire et la norme Euclidienne,  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des seuils positifs. D'autres approches pour la sélection automatique des points avec blanchiment spatial des observations peuvent être consultées dans [62, 73]. Il est à noter que dans le cas où la matrice  $W_s(a, b)$  est diagonale, alors elle est de rang un. En effet, si on suppose que la matrice  $W_s(a, b)$  de rang au moins égal à deux, alors  $\exists(i, j), i \neq j$  tel que :  $W_{s_i s_i}(a, b) \neq 0$  et  $W_{s_j s_j}(a, b) \neq 0$  d'après (2.129).

Donc la matrice  $W_s(a, b)$  n'est pas diagonale, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Cette propriété sur le rang peut être exploitée en complément au critère (2.138) ou lorsque l'ondelette mère est à valeurs réelles, en cherchant les matrices  $W_x(a, b)$  de rang 1. Le critère suivant traduit donc cette dernière propriété :

$$\left| \frac{\lambda_{\max}(W_x(a, b))}{\text{trace}(W_x(a, b))} - 1 \right| < \epsilon_3. \tag{2.139}$$

### 2.5.3 Simulations informatiques

Considérons  $p = 3$  sources de 2048 échantillons reçues sur  $n = 3$  capteurs. Les deux sources sont, pour  $t \in [0, 1]$  :

- un chirp linéaire  $s_1(t) = \sin(250\pi t^2)$ ,
- un chirp quadratique :  $s_2(t) = \sin(150\pi t^3)$ ,
- et une fréquence pure :  $s_3(t) = \sin(350\pi t)$ .

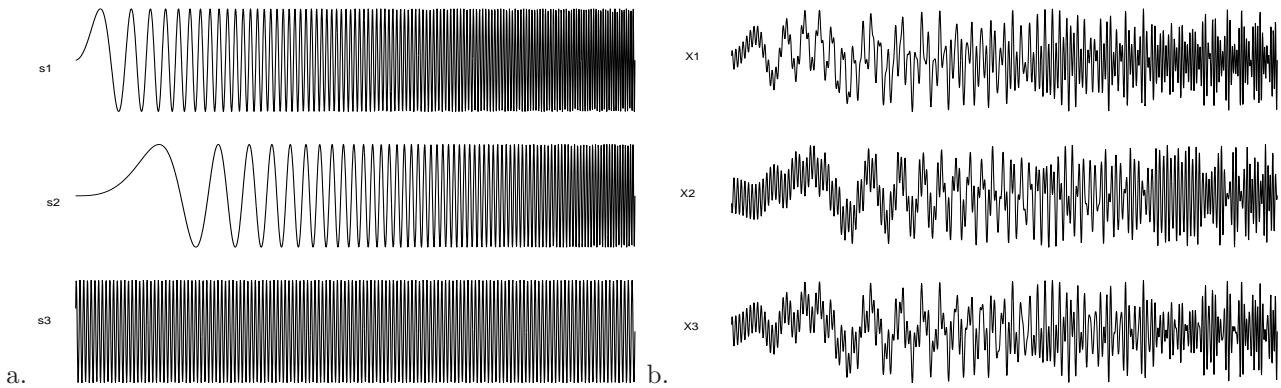


FIGURE 2.17 – Les 3 signaux sources avant mélange (a) après mélange (b).

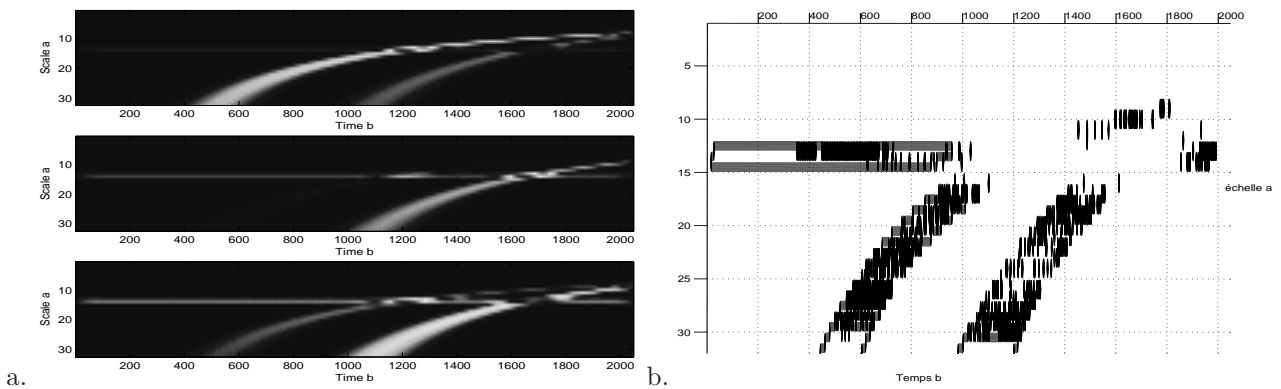


FIGURE 2.18 – Module de la transformée en ondelettes de Morlet des observations (a). Points sélectionnés sur le plan temps-échelle pour la diagonalisation conjointe (b).

L'ondelette mère considérée est l'ondelette de Morlet *complexe* :  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2i\pi f_c t} e^{-\frac{t^2}{f_b}}$ . Le choix est plus ou moins arbitraire, mais la complexité de l'ondelette est un pré-requis au regard du critère (2.138). La section 2.4 page 30 fournit des éléments de réponses pour le choix de l'ondelette la mieux adaptée au traitement.  $a$  et

$b$  sont resp. à valeurs dans  $[1, \dots, 32]$  et  $[1, \dots, 2048]$ . Les performances de la séparation sont quantifiées par l'indice (2.126) page 37.

Au niveau de la figure 2.17, à droite : sont affichées les sources avant et après mélange. La figure 2.18 (à gauche) montre la transformée en ondelettes des observations et (à droite) les points sélectionnés sur le plan temps-échelle pour la diagonalisation conjointe avec les critères (2.137) et (2.138), où  $\epsilon_1 = 5.22$  et  $\epsilon_2 = 10^{-2}$ , le rapport signal à bruit est de  $30dB$ . La figure 2.19.a illustre le résultat de la séparation en affichant les transformées en ondelettes des sources reconstruites. Fig. 2.19.b affiche les indices de performance en dB de la transformation  $t - e$  que nous proposons (WBSS) avec l'approche  $t - f$  basée sur la diagonalisation conjointe de matrices issues de représentations temps-fréquence spatiales (TFBSS) proposée par [65] où le rapport signal à bruit varie de  $10dB$  à  $100dB$ .

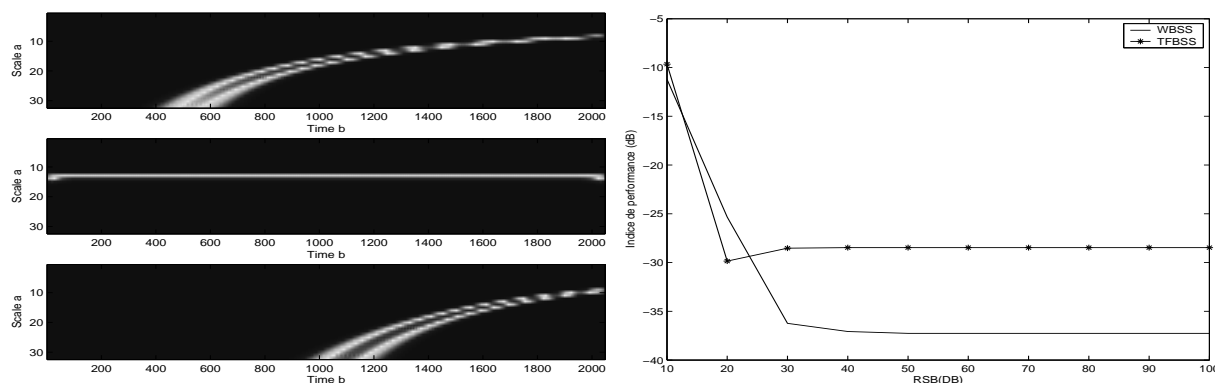


FIGURE 2.19 – Module de la transformée en ondelettes de Morlet des sources estimées (a), comparaison de l'indice de performance  $IP$  de la méthode proposée (WBSS) et de (TFBSS) en fonction du rapport signal à bruit (b).

La méthode proposée généralise aisément à un modèle de mélange convolutif.

## 2.6 conclusion

Un grand nombre de méthode de séparation de sources supposent implicitement que le modèle d'observation (instantané ou convolutif) est exact et que les données ne sont pas bruitées. En pratique, ce n'est jamais le cas. Il est donc indispensable de tenir compte du bruit dans le modèle pour éviter le biais et pour assurer, après, une bonne restauration des sources. Dans la littérature, ce problème malgré son importance a été peu abordé. Nous avons présenté dans ce chapitre des approches qui, soit prennent en compte le bruit directement dans le modèle (§2.5), soit ajoutent des opérations de débruitage (§2.4), *avant* et *après* la séparation.

Des résultats asymptotiques ont été obtenus dans des contextes généraux théoriques (section 2.3) qui étendent les résultats précédents [204]. Ces résultats fournissent des bornes théoriques qui permettent d'évaluer en pratique la qualité des algorithmes. Ils contiennent aussi une nouvelle preuve de séparabilité pour les mélanges linéaires pour lesquels nous avons dû supposer que les densités de probabilité étaient mal choisies. Nous continuons à travailler sur plusieurs points théoriques.

Enfin, nous avons présenté une méthode de résolution élémentaire pour résoudre des systèmes linéaires inversibles basée sur les dérivées successives de la matrice d'autocorrélation des sorties, sur laquelle nous continuons à travailler avec S. Lagrange. Une étude de robustesse reste à réaliser afin de vérifier que l'estimation des matrices  $A_i$  peut être améliorée quand le nombre d'équations considérées est plus important. Il serait intéressant de vérifier si la démarche proposée se généralise bien pour la séparation de mélanges inversibles non-linéaires. Le problème d'identifiabilité d'un problème de SAS a été relativement peu exploré du point de vue théorique mais mérite notre attention, à la lueur des travaux récents menés avec S. Lagrange.



# Mode inverse par piégeage par marche aléatoire

« Les lois ne gouvernent pas le monde, mais celui-ci n'est pas non plus régi par le hasard. »  
(I. Prigogine)

## 3.1 Problèmes inverses et interprétation de la mesure

Les problèmes *inverses* sont définis, comme leur nom l'indique comme l'inverse de problèmes directs. Une telle définition est vide de sens tant qu'on ne définit pas ce qu'on entend par problème « direct ». Un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. Par exemple, en sismologie, la localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème *direct* qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibles de façon à aboutir à une solution unique.

Si un problème est bien posé, il y a de bonnes chances qu'une solution soit trouvée par un algorithme stable, sur un ordinateur. Sinon, il doit être reformulé pour traitement numérique. Typiquement, cela suppose des hypothèses supplémentaires, par exemple la régularité de la solution. Ce processus est connu sous le nom de régularisation.

Supposons que nous disposons d'une structure de modèles  $M(\cdot)$  pour le système auquel nous nous intéressons. A chaque vecteur de paramètres  $\mathbf{p}$ , nous pouvons donc associer un modèle particulier de cette structure. A partir de ce modèle, et connaissant les relations expérimentales appliquées au système qui ont permis de générer le vecteur des données  $\mathbf{y}$ , nous pouvons calculer, sous ces mêmes conditions expérimentales, la sortie du modèle  $\mathbf{y}_M(\mathbf{p})$ . Seule la fonction  $\mathbf{y}_M(\mathbf{p})$  et le vecteur de mesure  $\mathbf{y}$  seront désormais utiles pour l'estimation du vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$ .

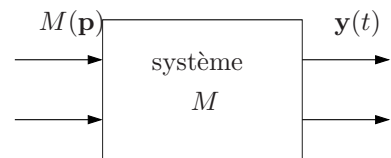


Figure 3.1: Système  $M(\cdot)$ .

En général, la dimension de  $\mathbf{y}_M(\mathbf{p})$  est supérieure à celle de  $\mathbf{p}$ . Dans le cas de l'estimation ponctuelle, le problème posé par l'estimation est de trouver un  $\mathbf{p}$  tel que  $\mathbf{y}_M(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{y}$ . Ce problème est souvent appelé problème inverse car il suffirait de trouver l'image inverse de  $\mathbf{y}$  par  $\mathbf{y}_M$  pour trouver  $\mathbf{p}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{p} = \mathbf{y}_M^{-1}(\mathbf{y})$ . Dans



les approches utilisées pour résoudre les problèmes inverses, nous pouvons distinguer habituellement<sup>1</sup> les méthodes d'estimation projectives et les méthodes probabilistes qui ajoutent des hypothèses sur les statistiques de l'erreur.

Dans l'estimation projective,  $\mathbf{p}$  minimise le norme du vecteur erreur  $\mathbf{e}(\mathbf{p}) \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_M(\mathbf{p})$ , ce qui revient à projeter orthogonalement le vecteur  $\mathbf{y}$  sur la variété image de la fonction  $\mathbf{y}_M$  et à choisir le  $\mathbf{p}$  correspondant à l'antécédent par  $\mathbf{y}_M$  du projeté. Il s'agit de l'estimation au sens des moindres carrés. Mais ce procédé n'est pas valable que si le modèle est linéaire en les paramètres.

Les méthodes probabilistes consistent à choisir une loi de probabilité a priori pour le vecteur  $\mathbf{p}$  à estimer, une loi de probabilité a priori sur l'erreur  $\mathbf{e}(\mathbf{p})$ , et de s'en servir pour estimer la valeur ponctuelle de  $\mathbf{p}$ . Cette démarche est celle de l'estimation bayésienne qui génère une loi à priori sur  $\mathbf{p}$  connaissant une loi a priori sur  $\mathbf{p}$ . C'est aussi celle au sens du maximum de vraisemblance.

Un problème *mal-posé* est une situation dans laquelle la dimension de  $\mathbf{p}$  (qu'on cherche à estimer) est très grande. Il n'y a pas un inverse unique  $\mathbf{p}$  qui satisfait  $\mathbf{y}_M(\mathbf{p})$ . C'est ce qui rend le problème si fascinant. La solution d'un problème mal-posé est déterminé par l'information a priori ou les contraintes qu'on impose sur  $\mathbf{p}$ .

### 3.1.1 Caractérisation de la classe de solution

Supposons qu'on veut caractériser les solutions de  $\mathbf{y} = H\mathbf{p}$ , où  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ , et  $p \geq N$ . A partir de la décomposition en valeurs singulières de  $H$ ,  $H = U\Sigma V^T$ , on peut trouver la *pseudo-inverse* de  $H$  :  $H^\# = V\Sigma^{-1}U^T$  qui satisfait les équations  $HH^\# = I$  et  $H^\#H = VV^T$ . Une solution de  $\mathbf{y} = H\mathbf{p}$  est

$$\mathbf{p}_0 = H^\#\mathbf{y} = V\Sigma^{-1}U^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}. \quad (3.1)$$

(3.1) est une solution de rang  $N$  du vecteur  $p$ -dimensionnel  $\mathbf{p}$ .

Cette solution est la même que la solution de *norme minimale*, obtenue en minimisant  $\mathbf{p}^T \mathbf{p} / 2$  sous la contrainte que  $\mathbf{y} = H\mathbf{p}$ . L'estimateur  $\hat{\mathbf{p}}$  de rang  $N$  de  $\mathbf{p}$  reproduit les mesures  $\mathbf{y}$ . Cependant, la solution peut être très sensible à de légères variations dans les mesures. Remplaçons par exemple  $\mathbf{y}$  par  $\mathbf{y} + \mathbf{n}$ . Alors

$$\Delta \mathbf{p} = V\Sigma^{-1}U^T \mathbf{n} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i^T \mathbf{n}. \quad (3.2)$$

Si  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}$  n'est pas nul et  $\sigma_i$  très petit, alors la  $i$ -ième composante de  $\Delta \mathbf{p}$  notée  $\mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i^T \mathbf{n}$  sera très grande. Les petites valeurs propres sont responsables de cette extrême sensibilité des solutions de  $\mathbf{p}$ . En général, seulement un petit nombre de valeurs propres sont dominantes, et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_N \approx \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ , avec  $k \ll n$ . Dans le calcul du déterminant  $|\Sigma| = \prod_{i=1}^N \lambda_i$ ,  $(N - k)$  valeurs propres  $\lambda_i$  sont très proches de zéro. Si par exemple  $N = 100$ ,  $k = 10$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{10} = 0,9$  pour  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{100} = 1$ ,  $|\Sigma|$  devient

$$\prod_{i=1}^{10} \lambda_i \prod_{i=11}^{100} \lambda_i = \prod_{i=1}^{10} \lambda_i \times \left(\frac{0,1}{90}\right)^{90} \approx \prod_{i=1}^{10} \lambda_i \times 10^{-270}$$

avec l'hypothèse que  $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{100}$ . En réalité,  $|\Sigma|$  est rarement calculé directement mais à partir de  $\ln |\Sigma| = \sum_{i=1}^N \ln \lambda_i$ . Dans l'exemple précédent,  $\ln |\Sigma| = \sum_{i=1}^{10} \ln \lambda_i - 612,22$ . Supposons qu'on remplace l'estimateur  $\hat{\mathbf{p}}$  de rang  $N$  par un estimateur de rang  $r < N$ , noté  $\hat{\mathbf{p}}_r$  :

$$\hat{\mathbf{p}}_r = V\Sigma_r^{-1}U^T \mathbf{y} \quad (3.3)$$

avec  $\Sigma_r^{-1}$  un approximant de rang  $r$  de  $\Sigma^{-1}$  dans lequel  $N - r$  des  $\sigma_i^{-1}$  sont annulés. Les mesures ne sont plus aussi bien reproduites :

$$\mathbf{y}_r = H\hat{\mathbf{p}}_r = U\Sigma V^T V\Sigma_r^{-1}U^T \mathbf{y} = P_r \mathbf{y}, \quad P_r = U I_r U^T \quad (3.4)$$

1. Une autre approche appelée *ensembliste*, plus confidentielle, est présentée au chapitre 4.

où  $I_r$  est une matrice à diagonale unitaire de rang  $r$ . L'erreur commise dans la reconstruction des mesures est  $b_r^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) = \mathbf{y}^T (I - P_r) \mathbf{y}$ . La sensibilité au bruit de mesure est maintenant

$$\Delta \mathbf{p}_r = V \Sigma_r^{-1} U^T \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 V \Sigma_r^{-2} V^T), \quad (3.5)$$

en supposant  $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ . Il vient  $E[\Delta \mathbf{p}_r^T \Delta \mathbf{p}_r] = \sigma^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_{(i)}^2}$ , où les  $\sigma_{(i)}^2$  sont les valeurs propres sélectionnées par  $\Sigma_r^{-1}$ . Un compromis « biais-variance » raisonnable consiste à réduire le rang de manière à minimiser

$$V = \mathbf{y}^T (I - P_r) \mathbf{y} + \sigma^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_{(i)}^2}, \quad (3.6)$$

et on tire  $\hat{\mathbf{p}}_r = \arg \min_r V$ .

### 3.1.2 Classe de solutions dans le cas nonlinéaire

Les traiteurs de signaux s'intéressent de plus en plus aux problèmes nonlinéaires. Dans ce cadre, des observations sont des fonctions nonlinéaires inconnues de paramètres inconnus, c'est-à-dire cette fois  $\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{p})$ . Si on suppose que  $\mathcal{F}(\cdot)$  est inversible, il suffit de chercher une transformation  $\mathcal{G}$  telle que la transformation  $\mathcal{H} = \mathcal{G}[\mathcal{F}](\mathbf{p})$  se ramène à un problème linéaire. Dans le cadre de la SAS, Darmais a montré qu'il n'est pas possible de séparer des mélanges nonlinéaires en utilisant l'indépendance. Il faut ajouter des contraintes pour régulariser la solution. L'addition de contraintes structurelles permet de comprendre le problème. Le cas particulier des mélanges post-nonlinéaires semble intéressant par son réalisme [190]. On trouve également des systèmes séparant dont la transformation est une fonction assez lisse, de type neuronale, pour régulariser la solution. Cela semble marcher pour des mélanges faiblement nonlinéaires.

Une autre approche consiste à exploiter des informations supplémentaires sur les données pour réduire les indéterminations. Hosseini *et al.* ont montré que les hypothèses de coloration temporelle de signaux permettent de réduire les indéterminations [90].

Dans ce contexte, nous présentons une solution simple et originale pour la résolution d'un problème mal-posé.

#### 3.1.2.1 Résolution d'un problème mal-posé pour des données en grande dimension

Considérons un problème comporte  $n$  observations  $\{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1}^n$ , de dimension  $d$ . On suppose que  $d \gg n$ . Dans ce cas, on a intérêt à se placer dans le sous-espace linéaire du signal  $\mathcal{E}$  par  $\mathcal{E} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \sum_i c_i \mathbf{x}_i\}$ , bien que cet espace ne soit pas entièrement consistant et que de nouvelles entrées pourront être hors de cet espace. Une solution au problème considéré consiste à restreindre le vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$  dans l'espace du signal, par exemple en écrivant

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_{\text{sgn}} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{x}_i \quad (3.7)$$

avec des coefficients  $\gamma_i$  convenablement choisis. On se donne une métrique dans l'espace d'entrée  $g_{ij} = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ , qui est régulière pour des entrées linéaires indépendantes. Il est utile de définir des vecteurs conjugués

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_j (g^{-1})_{ij} \mathbf{x}_j, \quad (3.8)$$

qui vérifient  $\mathbf{x}_i \hat{\mathbf{x}}_j = \delta_{ij}$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Les coefficients sont alors donnés par les produits scalaires  $\gamma_i = \mathbf{p} \hat{\mathbf{x}}_i$ . Il est clair que la composante orthogonale à l'espace signal  $\mathbf{p}_\perp$  ne joue aucun rôle, et nous verrons que notre modèle préserve cette propriété au cours de l'apprentissage.

Le modèle utilisé est donné par la relation :

$$y(\mathbf{x}) = f \left( \sum_{j=1}^J q_j h(\mathbf{p}_j \mathbf{x}) \right), \quad (3.9)$$

où  $f, h$  sont des fonctions « lisses » bien choisis de. Le modèle est très sous-paramétrisé, dans le sens où il s'agit d'estimer  $dJ$  paramètres à partir de seulement  $n$  exemples, avec  $n \ll dJ$ . [170] a proposé une règle basée sur le

gradient d'une fonction coût de type moindre carré  $E = \sum_{i=1}^n (y_i - y(\mathbf{x}_i))^2$  pour estimer les paramètres. Cette fonction coût est indépendante des composantes orthogonales pour chaque vecteur  $\mathbf{p}_j$ . On trouve donc que

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_j} = \sum_{i=1}^n c_{j,i} \mathbf{x}_i, \quad (3.10)$$

avec

$$c_{j,i} = 2(y(\mathbf{x}_i) - y_i) f' \left( \sum_{k=1}^J q_k h(\mathbf{p}_k \mathbf{x}_i) \right) q_j h'(\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_i). \quad (3.11)$$

L'estimation des paramètres du modèle au moyen de la règle adaptative  $\Delta \mathbf{p}_j = -\eta \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_j}$  préserve l'espace du signal. Si on initialise les  $\mathbf{p}_j$  dans l'espace du signal, le processus d'adaptation doit les laisser dans cet espace. En développant les paramètres dans l'espace du signal  $\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{j,i} \mathbf{x}_i$ , on note que les paramètres à estimer sont les coefficients  $\gamma_{j,i}$ . ceci réduit explicitement la dimensionnalité du problème d'estimation de  $dJ$  à  $NJ$ . Le gradient par rapport aux coefficients est :

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma_{j,k}} = \sum_{i=1}^n c_{j,i} g_{ik} \quad (3.12)$$

dans lequel les coefficients  $c_{j,i}$  sont des fonctions de  $\gamma_{j,k}$  et  $g_{ik}$  est donné par  $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k$ . Le gradient sur les paramètres  $\Delta \gamma_{j,i} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \gamma_{j,i}}$  peut ainsi être formulé entièrement en terme des coefficients du développement, si on utilise que  $\mathbf{p}_j \mathbf{x}_i = \sum_k \gamma_{j,k} g_{ki}$ .

En résumé, il suffit de calculer la métrique  $g$  de façon à trouver les paramètres optimaux au moyen d'une descente de gradient. La figure 3.2 illustre notre démarche d'estimation du vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$ .

Cette approche peut être comparée à l'approche de Sanger [173] qui construit un réseau de neurones reproduisant la règle de Karhunen-Loève.

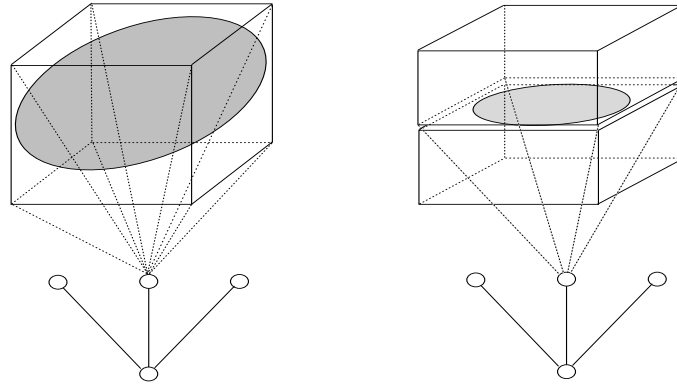


FIGURE 3.2 – En projetant le problème dans l'espace du signal, la complexité est nettement réduite. Les performances du modèle peuvent en outre être optimisées avec une méthode de régularisation.

Cette construction demeure applicable pour un nombre arbitraire de dimension de l'espace d'entrée, car le vecteur poids est contrôlé par un jeu de paramètres  $\gamma_j$  beaucoup plus petit, comme l'indique la figure 3.2. Son usage suppose néanmoins une forme très corrélée des variables, *a priori* qui peut se révéler parfois gênant.

De fait, les problèmes apparus à plusieurs reprises durant nos simulations sont liés à la multi-colinéarité, autrement dit aux dépendances linéaires qui existent entre les variables composant les vecteurs d'apprentissage  $\mathbf{x}_i$ . D'où l'apparition de valeurs propres faibles et de vecteurs propres difficiles à extraire. En particulier, quand  $\frac{n}{d} \ll 1$ , les vecteurs de la base d'apprentissage  $\mathbf{x}_i$  ont une forte probabilité d'être orthogonaux compte tenu du petit nombre de vecteurs  $\mathbf{x}_i$  dans un espace de grande dimension. Le risque est renforcé si certaines variables sont linéairement dépendantes.

Des simulations présentées à AVBPA'03 [207] sur la reconnaissance d'iris ont été reproduit à titre d'illustration Fig.3.3. La base était constitué d'une trentaine d'images d'iris d'environ 10,000 pixels. La figure 3.3.b présente les valeurs du vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$  au terme du processus d'estimation et la figure 3.3.c montre que les

vecteurs poids sont quasi-orthogonaux, puisque les composantes dessinent pratiquement un cercle, distribution spatiale qui correspond à une colinéarité nulle.

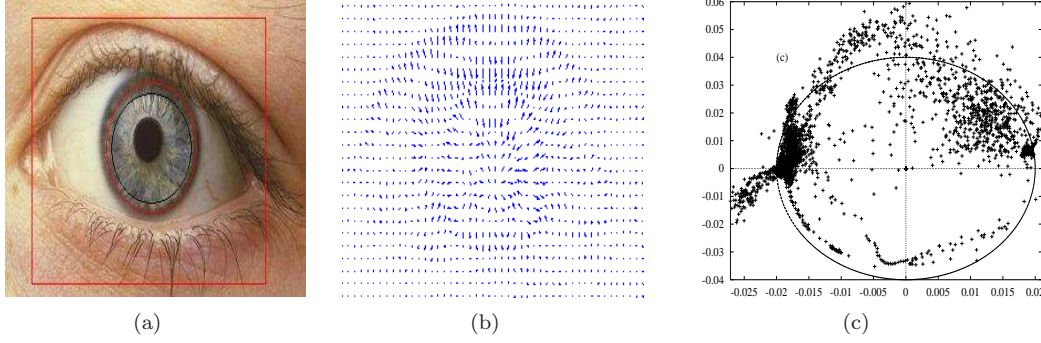


FIGURE 3.3 – [tirée de l'article AVBPA 2003[207]] (a) Détection de l'iris et extraction de son contour. (b) Composantes des vecteurs  $\mathbf{p}$  exprimées sous forme de combinaisons linéaires des observations dans l'espace des images (c) nuage de points formés par les composantes des vecteurs-poids  $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}_{i \neq j}$

### 3.1.2.2 Performance en test

Il reste encore à examiner la réponse du modèle quand on lui présente une nouvelle observation, et en particulier, ce qu'il produira comme représentation interne. Cet exemple sera vraisemblablement hors de l'espace du signal, il s'agit de tester si la nouvelle observation a une composante orthogonale significative à l'extérieur de l'espace du signal. Auquel cas, on doit rejeter cette observation ou au contraire l'inclure dans le jeu d'observations retenues pour constituer la base d'exemples. Si la composante orthogonale n'est pas significative, on peut seulement faire confiance au modèle quant au résultat produit.

La composante orthogonale d'un vecteur  $\mathbf{x}$  arbitraire est donnée par la relation

$$\mathbf{x}_{\perp}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}_{\text{sgn}}^2 \quad (3.13)$$

qui vaut avec les notations précédentes :

$$\mathbf{x}_{\perp}^2 = \mathbf{x}^2 - \sum_{ij} (g^{-1})_{ij} (\mathbf{x}\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}\mathbf{x}_j). \quad (3.14)$$

Un schéma de validation de type *leave-one-out* permet d'obtenir une échelle de la norme de la composante orthogonale. Dans ce but, on forme  $n$  sous-ensembles  $\mathcal{E}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , chacun formé de  $n - 1$  observations obtenues en rejetant une seule observation (pour plus de détails, voir [109]). On trouve facilement à partir de (3.8) la relation

$$\mathbf{x}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{(g^{-1})_{ij}}{(g^{-1})_{ii}} \mathbf{x}_j + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{(g^{-1})_{ii}} \equiv \mathbf{x}_{\text{sgn}} + \mathbf{x}_{\perp} \quad (3.15)$$

qui exprime l'observation  $\mathbf{x}_i$  sous la forme d'une composante dans l'espace du signal, formé par les  $n - 1$  observations, et une composante en-dehors. Le calcul de la composante orthogonale se réduit à :

$$\|\mathbf{x}_i^{\perp}\|^2 = \frac{1}{(g^{-1})_{ii}}. \quad (3.16)$$

La taille de la composante orthogonale de ce vecteur relativement à la dimension de ce vecteur est

$$\frac{\|\mathbf{x}_i^{\perp}\|^2}{\mathbf{x}_i^2} = \sin^2 \phi_i = \frac{1}{g_{ii}(g^{-1})_{ii}}. \quad (3.17)$$

Un test de rejet possible consiste donc à rejeter par exemple tous les vecteurs dont l'angle d'élévation  $\phi_i$  par rapport à l'espace vectoriel serait *significativement* plus grand que le reste de la distribution.

### 3.2 Modèle par marche aléatoire (MIME)

Le terme mathématique de problème bien posé provient d'une définition de Hadamard. Il pensait que les modèles mathématiques de phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

1. Une solution existe
2. La solution est unique
3. La solution dépend de façon continue des données, pour une topologie raisonnable.

Lorsque plusieurs conclusions sont consistantes avec la même donnée, le problème est de choisir la *meilleure*, par exemple celle de variance minimale [145]. Il est fréquent que les problèmes inverses ne soient pas bien posés. De tels problèmes de continuum doivent souvent être résolus de façon discrète (« discrétisés ») si l'on veut obtenir une solution numérique. Bien qu'en termes d'analyse fonctionnelle, ces problèmes soient typiquement continus, il peuvent s'avérer instables lorsqu'ils sont résolus avec une précision finie, ou avec des erreurs dans les données. Dans les problèmes de grandes dimensions (nombre de capteurs très élevé), l'option la plus courante est une réduction de dimensionalité, souvent effectuée en même temps qu'une étape de blanchiment. Une autre approche, en vogue notamment dans la communauté de séparation de source, est de travailler par déflation ; cette piste est souvent suivie pour les problèmes dans lesquels le nombre de capteurs et le nombre de sources sont tous deux élevés [93]. Le problème inhérent aux grandes dimensions est le problème de « l'espace vide » ou de la « course à la dimensionalité » : les observations deviennent vite des très petits échantillons en grandes dimensions et sont également bruités. La réduction est donc capitale, mais les méthodes sont généralement peu robustes au bruit... et applicable dans un cadre linéaire uniquement. On peut se restreindre au cas linéaire sans arrière-pensée, en revanche dans ce cadre de grandes dimensions, on ne peut probablement pas éviter la prise en compte du bruit.

En séparation de sources par exemple, dans les techniques de déflation, on voit une accumulation d'erreurs au fur et à mesure qu'augmente le nombre de sources extraites. Il serait intéressant d'étudier plus en détail les problèmes potentiels liés à la déflation (absence de critère global, aspect aléatoire de la solution trouvée en fonction de la stratégie de déflation, etc.). La problématique est importante pour de nombreuses applications : EEG (électro-encéphalographie), BSPM (body surface potential mapping), MEG (magneto-encéphalographie), NMR (nuclear magnetic resonance), imagerie hyper-spectrale, analyse de données,...

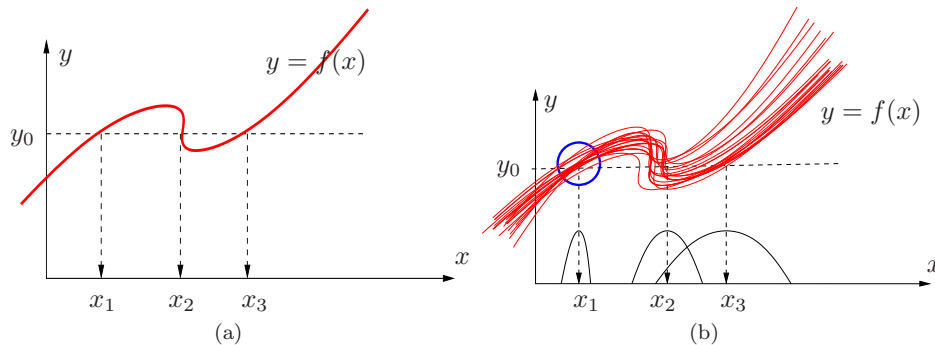


FIGURE 3.4 – (a) Problème mal-posé. (b)  $x_0$  est « vraisemblablement » la solution cherchée car la densité des solutions est plus étroite autour de  $x_0$  qu' autour de  $x_1$  ou  $x_3$ .

Une autre voie consiste au contraire à tirer parti de la dimensionalité des données. L'exemple de la Fig.3.4 illustre cette approche. Prenons l'exemple d'une relation  $x \rightarrow y = f(x)$  non-monotone. A gauche, l'ensemble des solutions à  $y = f(x)$  en  $y_0$  est le triplet  $\{x_1, x_2, x_3\}$  et rien ne permet de les distinguer. Si, par contre, plusieurs réalisations de la relation  $y = f(x)$  sont disponibles (cf. Fig.3.4.b), on peut les combiner de façon à faire émerger une solution, plus « probable » que les autres. Cet exemple met aussi en évidence que la localité supporte l'approche inverse.

Si le problème est convexe, il est très facile de trouver un minimum global en utilisant une méthode locale. D'où l'idée, dans le cas non-convexe de partitionner le domaine de façon à approximer le problème, sur chaque sous-ensemble de la partition, par ensemble de problèmes convexes. La plupart des problèmes non-convexes rencontrés peuvent être approximatés par une partition en problèmes convexes, en relaxant certaines contraintes

ainsi que le critère [63]. Une approche possible pour choisir une stratégie de relaxation peut se décomposer en 4 étapes :

- le choix de la structure : pour un vecteur d'entrée  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  de dimension  $n$  et une sortie  $\mathbf{y}$  de dimension  $m$ , on dispose de  $n$  modèles indépendants  $M_i, i = 1, \dots, n$ , de type « one-to-many », paramétré par un vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{\sigma(i)}$ , où  $\sigma(i)$  est le nombre de paramètres pour le modèle  $M_i$ . On peut avoir  $\sigma(i) = \sigma(j), \forall i \neq j$ , mais pas forcément. On notera  $M(\mathbf{p}) = \{M_1(\mathbf{p}_1), M_2(\mathbf{p}_2), \dots, M_n(\mathbf{p}_n)\}$  la structure de modèle. L'ensemble admissible a priori pour le vecteur de paramètre global  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)^T$  du modèle est  $\mathbb{R}^\sigma$ , où  $\sigma = \sum_i \sigma(i)$ . A chaque vecteur de paramètre  $\mathbf{p}_i$  est donc associé un modèle  $M(\mathbf{p}_i)$  de la structure. La dépendance entre la sortie du modèle  $x_i$  et les entrées  $\mathbf{y}$  est linéaire ou non par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}_i$ .
- Le prélèvement des données : les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  correspondent à  $N$  mesures faites à des temps donnés sur un système multivariables (plusieurs entrées et plusieurs sorties). Chaque modèle  $M_i(\mathbf{y}; \mathbf{p}_i)$  génère en sortie un scalaire  $x_{M_i}(\mathbf{p}_i)$ , homogène à la composante  $x_i$  du vecteur des entrées. L'erreur entre les données  $x_i$  et la sortie du modèle  $x_{M_i}(\mathbf{p}_i)$  est définie par :

$$e(\mathbf{p}_i) \equiv e_i = x_i - x_{M_i}(\mathbf{p}_i). \quad (3.18)$$

On notera dans la suite le vecteur  $\mathbf{e}(\mathbf{p}) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ .

- l'estimation : elle consiste à retenir un modèle  $M(\mathbf{p})$  générant des sorties  $x_{M_1}(\mathbf{p}_1), x_{M_2}(\mathbf{p}_2), \dots, x_{M_n}(\mathbf{p}_n)$  ressemblant suffisamment aux données expérimentales, c'est à dire telles que l'erreur  $\mathbf{e}(\mathbf{p})$  soit suffisamment petite dans un sens à définir.
- l'inférence : elle vise à calculer la réponse du modèle  $\hat{\mathbf{y}}$  à la présentation du vecteur  $\mathbf{x}$  en combinant les réponses (et non l'inverse). Cette fusion des informations est un chose délicate. L'approche multi-modèle, utilisée à bon escient, permet donc d'exploiter des modèles  $M_i(\mathbf{p}_i)$  adapté à la complexité locale des sous-problèmes considérés, et dans lesquels une règle de structure  $\phi(\cdot)$  est utilisée pour obtenir  $\hat{\mathbf{y}}$ . Comment tirer parti des informations fournies par  $\mathbf{e}$  pour estimer  $\hat{\mathbf{y}}$  ?

Supposons que la fonction  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , associée à  $M(\cdot)$ , soit continue localement injective. Notons que la fonction inverse  $\mathbf{f}^{-1}$  est en générale non-définie (même lorsque  $n = m$ ). Par contre, elle n'est jamais partout définie. Il est difficile d'étudier le type de discontinuité pouvant apparaître autour de  $\mathbf{f}^{-1}$ , mais utiliserons le postulat suivant

**Définition 4** (stabilité d'une solution). *Le vecteur  $\mathbf{y}$  est stable si  $\frac{\partial x_i(\mathbf{y}; \mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{y}} \rightarrow 0$ .*

Lorsque le vecteur  $\mathbf{y}$  est instable, il existe probablement un compact contenant  $\mathbf{y}$  sur lequel  $\mathbf{f}^{-1}$  est discontinue.

### 3.2.1 Recherche stochastique de la solution

A partir de la définition précédente, nous avons imaginé une procédure d'estimation qui s'appuie sur une structure de chaîne de Markov, pouvant être exploitée plus systématiquement (qu'un gradient par exemple) pour rechercher la solution au problème d'inférence. Inspirée des méthodes MCMC [168] et ne comprenant plus de paramètres d'attribution, elle privilégie la recherche stochastique pour résoudre la problème d'inférence.

Soient  $\frac{\partial x_{M_i}(\mathbf{y}; \mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{y}}, i = 1, \dots, n$  les grandeurs jacobiniennes retenues, l'algorithme est le suivant :

En posant  $q(\mathbf{x}^{(k)}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left|\hat{x}_{M_i}^{(k)}(\mathbf{y}; \mathbf{p}_i) - x_i^{(k)}\right|^2 / 2\sigma_x^2\right)$ , on peut utiliser l'estimation suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}^{(k+1)} = \frac{\sum_1^t q(\mathbf{x}^{(k)}) y^{(k)}}{\sum_1^t q(\mathbf{x}^{(k)})}. \quad (3.19)$$

Dans (3.19),  $\sum_1^t q(\mathbf{x}^{(k)})$  réalise une normalisation des coefficients  $q(\mathbf{x}^{(k)})$ . La loi normale  $\mathcal{N}\left(\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial \mathbf{y}^{(k)}}, \sigma_y^2\right)$  fournit

la représentation probabiliste du « hasard » dans un hypercube centré en  $J_i = \frac{\partial x_{M_i}(\mathbf{y}; \mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{y}}$  et de côté  $[-\sigma_y^2, \sigma_y^2]$ .

Algorithme MIME
<p>ENTRÉES  données : <math>\mathbf{x}</math> ; modèles : <math>M_i()</math> ; précision : <math>\epsilon</math></p> <p>INITIALIZATION  iteration : <math>k = 0</math>, <math>\mathbf{y} = \mathbf{y}(0)</math> ;</p> <p>ITERATION <math>k</math>  début</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Propager <math>y^{(k)}</math></li> <li>2. Calculer <math>\frac{\partial x_{M_i(\mathbf{y}; \mathbf{P}_i)}}{\partial y}</math>, <math>i = 1, \dots, n</math></li> <li>3. Pour <math>i = 1</math> à <math>n</math></li> </ol> <p>Générer <math>\delta y_i^{(k+1)} = \rho(\dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_d^{(k)}, y^{(k)}) \sim \mathcal{N}(\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial y^{(k)}}(F_{\theta_i}(y^{(k)}) - x_i), \sigma_{y^{(k)}}^2)</math>, et <math>u^{(k)} \sim \mathcal{U}_{[0,1]}</math> ;</p> <p>calculer <math>y^{(k+1)} = \begin{cases} y^{(k)} + \delta y_i^{(k+1)} &amp; \text{si } u^{(k)} &lt; \rho(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_d^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k)} &amp; \text{si } u^{(k)} \geq \rho(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k+1)}, \dots, x_d^{(k)}, y^{(k)}). \end{cases}</math></p> <p>fin</p>

TABLE 3.1 – Implémentation de l’algorithme MIME basé sur un échantillonneur de Gibbs.

L’étape de tirage aléatoire sur  $\delta(y^{(k)})$  s’exprime plus souvent sous la forme identique :

$$y^{(k+1)} = \begin{cases} y^{(k)} + \delta y^{(k+1)} & \text{si } u < \rho(\mathbf{P}^{(k)}, y^{(k)}) \\ y^{(k)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Le tirage des déplacements dans (3.20) n’entraîne aucun biais statistique. Robert [168] a pu montrer que la marche aléatoire libre (constituée de ces déplacements élémentaires sans contrainte énergétique) est *ergodique* donc visite tous les sites du modèle avec la même fréquence. L’algorithme Tab. 3.1 consiste à tester suivant un critère d’admissibilité énergétique une suite de déplacements individuels  $\{\delta y^{(k)}\}_{t>1}$  obtenue en tirant au sort pour chacun d’eux (3.20) tous les experts impliqués, dans la valeur de leurs variables dynamiques  $\frac{\partial x_i}{\partial y}$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Le déplacement conduit ainsi de la configuration  $y^{(k)}$  à la configuration  $y^{(k+1)}$ . On peut alors montrer que la distribution de la configuration aléatoire converge vers la distribution voulue  $q(\mathbf{x}^{(k)})$  si le nombre de simulations  $T \rightarrow \infty$ .

La méthode de Monte-Carlo permet donc de contourner les difficultés liées à la taille finie du modèle tout en conservant les qualités statistiques de la simulation. L’une des difficultés majeures est le biais qu’entraîne inévitablement l’utilisation d’un modèle discret et fini pour reproduire le système réel.

Les propriétés de convergence de la chaîne  $\{y^{(k)}\}$  sont directement reliées au jacobien  $J^{(k)}$  dans le sens où  $\{y^{(k)}\}$  est aperiodique et irréductible. En raison du degré de difficulté de l’étude théorique de la suite aléatoire  $\{y^{(k)}\}$  ainsi obtenue, nous ne pouvons pas prétendre à l’obtention d’un résultat précis concernant son comportement asymptotique, comme c’est généralement le cas pour la plupart des algorithmes existants [168].

MIME se généralise donc à un nombre quelconque de variables. on n’est pas tenu avec MIME de se conformer au postulat de simplicité (*occam razor*). Il reste encore à examiner la stabilité et la consistance de la solution ainsi obtenue...

### 3.2.2 Simulation

Le mode d’inférence inverse de MIME rend possible son application à une grande variété de situations. Nous avons choisi de comparer dans cette section notre algorithme sur des exemples simples. Pour pouvoir nous concentrer sur le problème de combinaisons et non sur les problèmes liés à la reconstruction de la solution  $\hat{y}$ , nous avons choisi de tester MIME sur deux petits problèmes artificiels.

Les tracés qui mettent en regard les écarts  $(d\mathbf{x}, dy)$  indiquent qu’une source d’informations importante se trouve dans les jacobiens  $\frac{\partial x_i}{\partial y}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .



**Exemple 3** (Régression simple). Pour débiter, on veut déterminer le signal  $y(k)$  satisfaisant le système d'équations nonlinéaires :

$$\begin{cases} x_1(k) = f_1(y(k)) + \epsilon_1(k)\sigma_1^2(y) = y, \\ x_2(k) = f_2(y(k)) + \epsilon_2(k), \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sont des bruits blancs centrés de variances resp.  $\sigma_1^2 = y(k)$  et  $\sigma_2^2 = y^2(k)$ . Ici, le problème tel qu'il se présente est toujours mal posé (en petite dimension). On admet que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont connues. On pose  $f_1(y) = y^2$  et  $f_2(y) = ay + b$ , avec  $a = 1,1967$  et  $b = 4,5$ . MIME est testé à partir d'une base de 1200 d'observations  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{1200}$ .

La question qui nous intéresse est avec quelle vitesse l'écart  $\|y_i - \hat{y}\| \rightarrow 0$ ? La mesure des performances s'exprime en terme d'erreur quadratique de l'estimation  $(y - \hat{y})^2$ , où  $\hat{y}$  est estimé par marche aléatoire.

Sur les figures 3.5, nous détaillons les résultats de deux variantes de MIME :

1. MIME normal ( $\times$ )
2. MIME type winner-take-all ( $\diamond$ ), donc allégé en calcul.

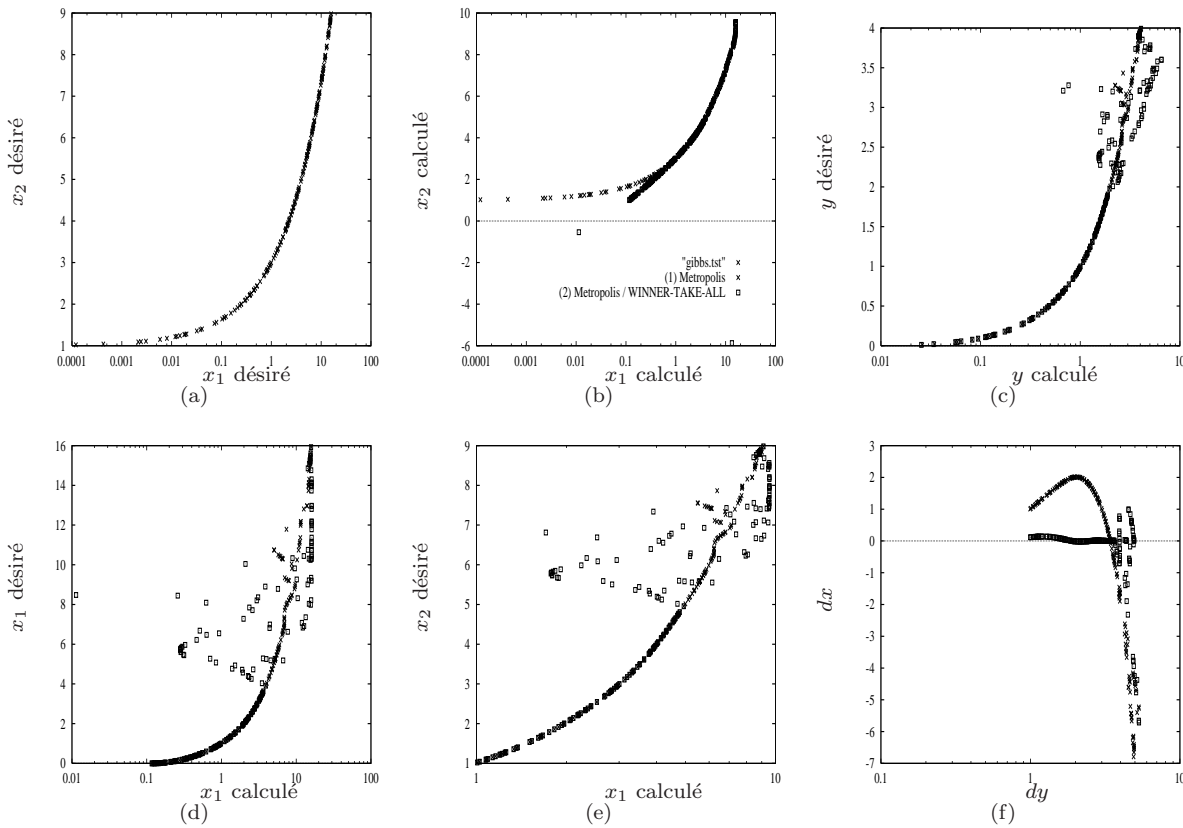


FIGURE 3.5 – Organisation de l'espace des sorties  $(x_1, x_2)$  calculées par rapport à l'espace des sorties désirées. L'échelle est log-linéaire. Les simulations ont été arrêtées au bout de 1000 itérations. (a) caractéristique  $(x_1, x_2)$  (b) comparaison de version ordinaire ( $\times$ ) de MIME avec sa version simplifiée ( $\square$ ) (c) caractéristique  $(y, \hat{y})$  (d) caractéristique  $(x_1, x_{M_1}(\mathbf{p}))$  (e) caractéristique  $(x_2, x_{M_2}(\mathbf{p}))$  (f) caractéristique des écarts  $dy, dx$ .

Les schémas (a) et (b) peuvent être mis directement en correspondance : ils représentent resp. la relation entre les entrées désirées  $(x_1, x_2)$  et les entrées calculées  $(x_{M_1}(\mathbf{p}), x_{M_2}(\mathbf{p}))$ . Les caractéristiques  $dx$  (c,d) suivent en moyenne un profil de fonction linéaire. Cependant, la sortie calculée  $x_{M_2}(\mathbf{p})$  dépend de l'endroit où on a mesuré la valeur de la donnée  $x_1$ . On voit en effet apparaître une certaine dispersion du nuage de points pour les grandes valeurs de  $x_2$  avec la version simplifiée de MIME. La figure (e) représente la reconstruction de la solution  $\hat{y}$  vis-à-vis de la sortie désirée  $y$ . Enfin, la caractéristique  $dx - dy$  est la plus intéressante : elle ajoute une information supplémentaire sur la régularité de la solution obtenue. On voit en particulier que cette



caractéristique ne dépend pas uniquement de l'écart sur entre les sorties  $d\mathbf{x}$ .

En résumé, la version simplifiée de MIME est moins performante sur l'ensemble des exemples, mais elle est encore relativement efficace en particulier pour les petites valeurs.

**Exemple 4** (Problème de données manquantes). *Un autre exemple intéressant de résolution concerne le cas (classique) des mélanges de densité. Supposons que  $y$  s'écrive comme la somme de 4 gaussiennes et que nous ne disposons d'informations que sur 3 d'entre elles. Dans quelle mesure, notre modèle est-il capable de retrouver les justes valeurs de  $y$ ? Pour étudier ce problème, nous générons un mélange de 3 gaussiennes selon la procédure suivante :*

1. Générer  $x \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  ;
2. Générer  $y = \sum_{i=1}^4 p_i \phi_i(x)$ ,  $\phi_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$  ;

L'étape d'estimation des paramètres est supposée achevée, on dispose des valeurs numériques suivantes :

$p_i$	$\mu_i$
0,1	0,1
0,5	0,5
0,3	0,7
0,12	-0,1

Cette fois, nous devons retrouver à partir de la donnée du triplet  $(\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$  la valeur de  $y$ . Les courbes 3.6(a,b,c,d), obtenues après convergence, montrent que MIME arrive à reconstruire une solution.

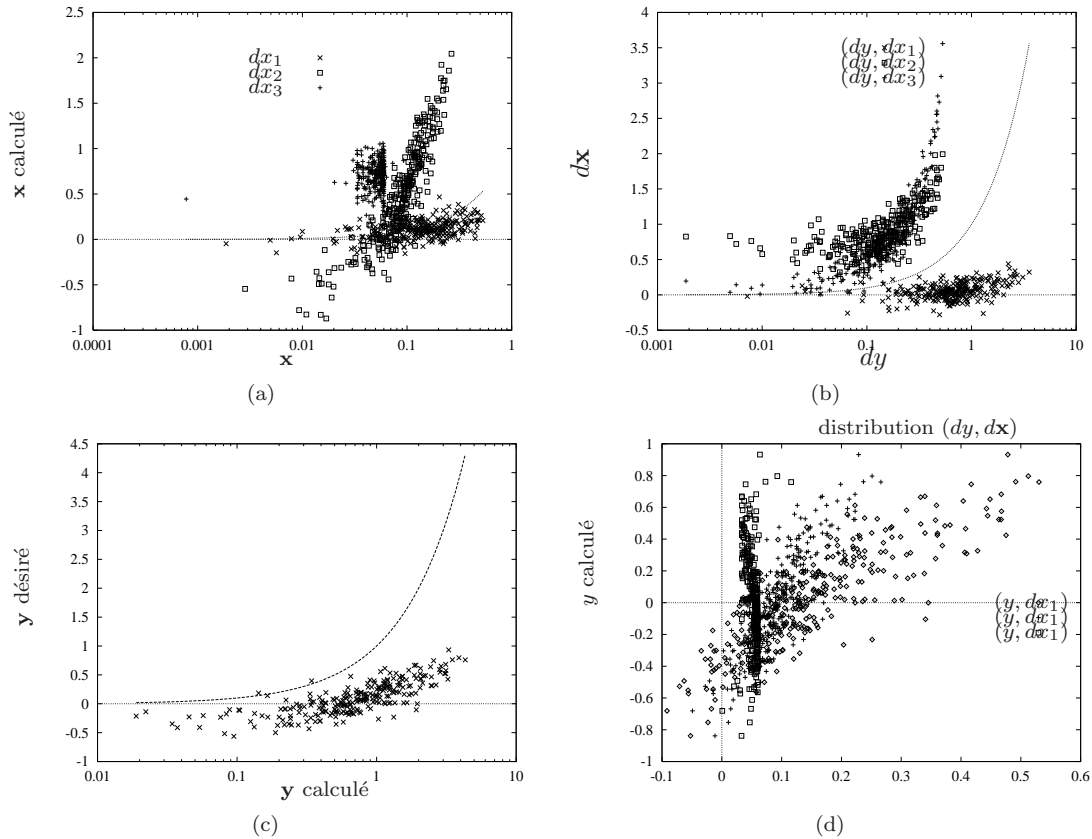


FIGURE 3.6 – Reconstruction d'une solution dans un contexte de données manquantes. (a) caractéristique  $(x_{M_i}(\mathbf{p}_i), x_i)$  (b) caractéristique  $(dy, dx)$  (c) caractéristique  $dy$  (d) caractéristique  $(y, x_{M_i}(\mathbf{p}_i))$ . Ces caractéristiques seraient alignées sur la diagonale sans la perte d'information causée par la variable manquante.

Les figures 3.6(a,b) donnent les écarts en échelle log-linéaire entre respectivement (a) les entrées  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq 3}$  désirées et les entrées calculées  $(\phi_i(y))_{1 \leq i \leq 3}$ , (b) les sorties désirées  $y$  et calculées  $y(\phi_i)$  selon le schéma itératif de MIME. Ces écarts sont à comparer avec la diagonale (en interrompue) qui figure l'ajustement parfait. Les résultats sont assez bons sur la prédiction  $y$ , mais l'écart entre les entrées est anormalement élevé. Cela se comprend assez facilement en fait. Pour compenser la perte d'information due au modèle  $\phi_4$  manquant, MIME reconstruit  $y$  en arrangeant les distributions  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq 3}$ . Cette dernière observation est particulièrement facile à vérifier sur les figures 3.6(d,e). Il ne s'agit pas ici d'un problème mal posé mais d'un problème difficile.

### 3.2.3 Propriétés

Tarantola [191] et Tikhonov [195] ont montré qu'il n'est pas toujours possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Pour trouver  $\hat{\mathbf{y}}$  solution de l'équation  $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ , pour  $\mathbf{x}$  donné, on se donne une fonction de Lyapunov candidate  $V$  :

$$V = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

On notera  $J$  la matrice jacobienne  $m \times n$  définie par  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$  et  $\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2}$ , la matrice hessienne de  $V$  au point  $\mathbf{x}$ . Dans toute la suite de l'exposé, nous allons supposer quelques conditions supplémentaires sur la régularité de  $J$  :

$$V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^p) \tag{3.22}$$

$$V \text{ est convexe, non constante} \tag{3.23}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V = +\infty \tag{3.24}$$

$$\left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \text{ est bornée et } \left\| \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \right\|_{\infty} = M. \tag{3.25}$$

$$K = \sup_{\mathbf{x}} \left| \sum_{i=1}^p \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} \right)_{ii}(\mathbf{y}) \right|. \tag{3.26}$$

On note de plus  $V$  non constante, implique que  $\left\| \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right) (\mathbf{x}) \right\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ . Le gradient de  $V$  au point  $\mathbf{y}$  s'écrit  $\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)$ . La minimisation de  $V$  donne une règle d'adaptation à l'instant  $(n+1)$  qui garantit la convergence vers la solution de  $\hat{\mathbf{x}} - f(\mathbf{y}) = 0$  au sens de Lyapunov et peut s'écrire :

$$\mathbf{y}^{(n+1)} = \mathbf{y}^{(n)} - \rho \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^T (\mathbf{y}^{(n)}), \tag{3.27}$$

où  $\rho$  est le facteur d'adaptation. Nous pouvons analyser de façon précise les propriétés de convergence de (3.27) en définissant deux autres suites :

$$p_n = \exp(-V(\mathbf{y}^{(n)})) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{y}}^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \mathbf{y}^{(k)}}{\sum_{k=1}^n p_k} \tag{3.28}$$

La définition des  $(p_k)$  est intuitive et a pour but d'améliorer notre estimation de  $\mathbf{y}^*$ . On aurait pu prendre  $p_n = \chi_{\mathcal{B}(\mathbf{x}^*, \delta)}(f(\mathbf{y}_k))$ , où  $\mathcal{B}$  désigne la boule ouverte, pour ne conserver dans la suite  $\hat{\mathbf{y}}^{(n)}$ , que les valeurs de  $\mathbf{y}_k$  dont l'image par  $f$  est à une distance  $< \delta$  de  $\mathbf{x}^*$ . Montrons d'abord que :

**Lemme 1.** *La suite  $E[V(\mathbf{y}^{(n)})]$  est décroissante et converge vers 0.*

*Convergence de la fonction de Lyapunov (lemme 1).* Pour cela on utilise l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur la fonction de Lyapunov quand  $\mathbf{y}$  approche la solution optimale. Il existe  $\mathbf{z} \in [\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(n+1)}]$  tel que

$$V(\mathbf{y}^{(n+1)}) - V(\mathbf{y}^{(n)}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{y}^{(n)}) \cdot (\mathbf{y}^{(n+1)} - \mathbf{y}^{(n)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}^{(n+1)} - \mathbf{y}^{(n)})^T \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} (\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y}^{(n+1)} - \mathbf{y}^{(n)}) \tag{3.29}$$

$$= -\rho \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right) + \frac{1}{2} \rho^2 \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} (\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^T, \tag{3.30}$$

En en prenant l'espérance :

$$E[V(\mathbf{y}^{(n+1)}) - V(\mathbf{y}^{(n)})] = -\rho \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2}(\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2} \right)_{ii} \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)_i^T. \quad (3.31)$$

En majorant à l'aide de (3.25) et (3.26) :

$$E[V(\mathbf{y}^{(n+1)}) - V(\mathbf{y}^{(n)})] \leq -\rho \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 M \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} K \sigma^2. \quad (3.32)$$

L'expression (3.32) est négative si et seulement si :

$$\rho \in \left[ \frac{1}{M} - \frac{1}{M} \sqrt{1 - \frac{K\sigma^2}{\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^2}}, \frac{1}{M} + \frac{1}{M} \sqrt{1 - \frac{K\sigma^2}{\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^2}} \right]$$

Dans ces conditions la suite  $E(V(\mathbf{y}^{(n)}))$  est décroissante et minorée, donc converge. On montre par l'absurde que sa limite est bien 0 qui est le seul minimum de cette fonction de Lyapunov  $V$ .  $\square$

Pour la suite nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.** *Soit  $f$  vérifiant les hypothèses imposées à la fonction  $V$ , et  $(\mathbf{x}_n)$  une suite de  $\mathbb{R}^p$ . On prendra de plus  $\mathbf{y}^* = 0$ , pour simplifier les calculs. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = 0.$$

Le sens  $\Leftarrow$  est évident par continuité de  $f$ . Montrons  $\Rightarrow$  par l'absurde. Supposons que  $\mathbf{x}_n$  ne tende pas vers 0. Alors  $\exists \epsilon, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N / \|\mathbf{x}_n\| > \epsilon$ . On peut donc extraire une suite  $(u_n)$  de  $(\mathbf{x}_n)$  telle que,  $\forall n, \|u_n\| > \epsilon$ . Considérons à présent,

$$m = \lim_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathcal{B}(0, \epsilon)} f(\mathbf{y})$$

Cette borne inférieure existe puisque  $f \geq 0$ . De plus  $m > 0$  car (3.24) implique que  $f$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^p \setminus \mathcal{B}(0, \epsilon)$  et 0 est le seul point tel que  $f(0) = 0$ . Il existe donc une suite  $f(u_n)$  extraite de  $(\mathbf{x}_n)$  telle que  $\forall n, f(u_n) > m$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

**Théorème 2.** *La suite  $E[\mathbf{y}^{(n)}]$  converge vers  $\mathbf{y}^*$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

D'après l'inégalité de Jensen, comme la fonction  $V$  est convexe  $\forall n, V(E[\mathbf{y}^{(n)}]) \leq E[V(\mathbf{y}^{(n)})]$ . On a le résultat en appliquant le lemme (2), à la suite  $E(\mathbf{y}^{(n)})$ .

### 3.2.3.1 Convergence de $(\hat{\mathbf{y}}^{(n)})$

Nous aimerions montrer que la suite  $E[\hat{\mathbf{y}}^{(n)}]$  converge vers  $\mathbf{y}^*$  :

$$E(\hat{\mathbf{y}}^{(n)} - \mathbf{y}^*) = \sum_{k=1}^{(n)} E \left[ \frac{p_k(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)}{\sum_{i=1}^{(n)} p_i} \right] + \sum_{k=N+1}^n E \left[ \frac{p_k(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)}{\sum_{i=1}^n p_i} \right] \quad (3.33)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy :

$$\|E[\hat{\mathbf{y}}^{(n)} - \mathbf{y}^*]\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n E \left[ \frac{p_k(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)}{\sum_{i=1}^n p_i} \right] \right\|^2 + \sum_{k=N+1}^n \|E[(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)^2]\| \left\| E \left[ \left( \frac{p_k}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)^2 \right] \right\|. \quad (3.34)$$

Pour démontrer cette convergence, il nous faudrait une condition supplémentaire pour que  $V(\mathbf{y}^{(k)})$  converge vers 0. On pourrait alors majorer  $E[(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)^2]$  par  $\epsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Le deuxième problème est de montrer que  $E \left[ \left( p_k / \sum_{i=1}^n p_i \right)^2 \right]$  tend vers 0 et cette démonstration est possible si  $V$  est radiale.

Le calcul de l'estimateur pondéré  $\hat{\mathbf{y}}^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \mathbf{y}^{(k)}}{\sum_{k=1}^n p_k}$  proposé Tab.3.1 est conceptuellement attirant, mais son

emploi peut conduire à des résultats désastreux si le nombre de simulation est insuffisant (pratiquement  $< 1000$ ). C'est une condition pour une convergence presque sûre :

$$\hat{\mathbf{y}} \stackrel{as}{\sim} E_P[\mathbf{y}].$$

### 3.2.3.2 Amélioration de la variance de l'échantillon $\mathbf{y}^{(n)}$ (dans le cas où $V$ est radiale)

Nous allons comparer les deux séries :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)^2 \quad \text{et} \quad \hat{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{\sum_{i=1}^n p_i} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*)^2. \quad (3.35)$$

Considérons la fonction  $g(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y})}{\sum_{i=1}^n p_i}$  où  $p(\mathbf{y}) = \exp(-V(\mathbf{y}))$  et  $p_i = \exp(-V(\mathbf{y}_i))$ . On note  $q_i = g(\mathbf{y}_i)$ .  $g$  est

définie sur  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $\forall i, p_i \leq 1$ , on a  $\sum_{i=1}^n p_i \leq n$ , donc :

$$g(\mathbf{y}^*) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \geq \frac{1}{n}. \quad (3.36)$$

De plus  $\lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow \infty} g(\mathbf{y}) = 0$  donc  $\{\frac{1}{n}\} \in g(\mathbb{R}^p)$ . Soit  $\mathcal{V} = g^{-}([\frac{1}{n}, +\infty[)$ ,  $\mathcal{V}$  est bornée, et contient  $\mathbf{y}^*$ . De plus, si  $J$  est radiale,  $\mathcal{V}$  est une boule fermée, de centre  $\mathbf{y}^*$ . On note  $\mathcal{S} = \delta\mathcal{V}$ , la frontière de  $\mathcal{V}$ .

Par continuité de  $g$ ,  $\mathcal{S} = g^{-}(\{\frac{1}{n}\})$ . On note  $M$ , le rayon de la boule  $\mathcal{V}$ , et  $\mathbf{I} = \{i \in \mathbb{N} / \mathbf{y}_i \in \mathcal{V}\}$ ,  $\mathbf{N} = \{1, \dots, n\}$ , alors :

$$\hat{S}_n - S_n = \sum_{i \in \mathbf{I}} \underbrace{\left( q_i - \frac{1}{n} \right)}_{\geq 0} \underbrace{\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}^*\|^2}_{\leq M} + \sum_{i \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{I}} \underbrace{\left( q_i - \frac{1}{n} \right)}_{\leq 0} \underbrace{\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}^*\|^2}_{\geq M} \quad (3.37)$$

$$\hat{S}_n - S_n \leq M \sum_{i \in \mathbf{N}} \left( q_i - \frac{1}{n} \right) \leq 0. \quad (3.38)$$

Cette approche ne permet donc pas de garantir que la convergence est atteinte, elle permet simplement de s'ajuster sur un estimateur  $\hat{\mathbf{y}}$  approprié, dont la loi semble, en moyenne, en accord avec la loi exacte inconnue. Remarquons que l'algorithme de Metropolis autorise une dépendance  $\rho(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(t)})$  (Tab.3.1) sous la forme d'une relation  $\phi(\mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{x}^{(t)}) = \phi(\delta^{(t)})$ ,  $\delta^{(t)}$  étant une perturbation aléatoire dont la loi est indépendante de  $\mathbf{x}^{(t)}$ . La chaîne de Markov associée à la loi  $\phi$  est à marche aléatoire dans l'espace des données  $\mathbf{x}$ . S'il n'offre pas de réelles garanties de convergence, d'un point de vue pratique cet algorithme diminue la variabilité de la chaîne et accélère la convergence.

Une approche naturelle consiste à examiner graphiquement le comportement de la chaîne de markov simulée qui présente généralement un aspect bruitée, par exemple 3.7. On peut ainsi tracer la suite des valeurs  $\{\mathbf{y}^{(t)}\}$  en fonction de  $t$ . La stabilisation rapide de l'évolution des estimateurs indique que la convergence est atteinte assez rapidement. La figure (3.7.b) montre surtout une vitesse de convergence rapide dès les premières itérations.

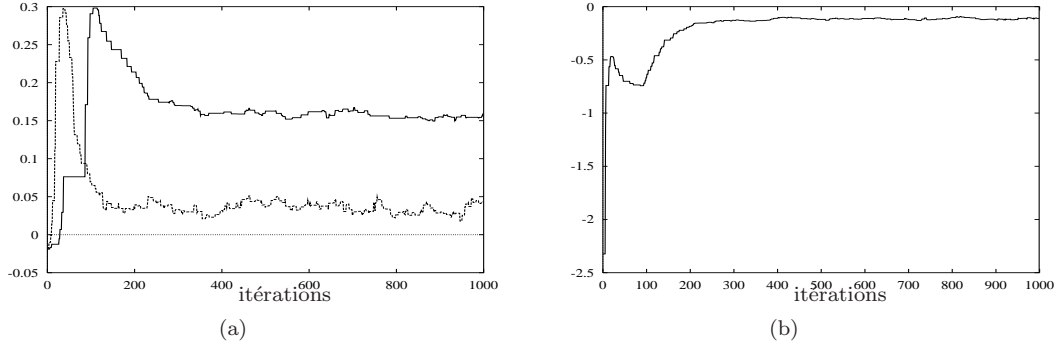


FIGURE 3.7 – (a) Convergence de la chaîne de Markov  $y^{(t)}$ , générée suivant l'équation (3.19) des deux estimateurs de l'exemple 3 page 50. (b) Convergence de l'estimateur  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)}$ .

Lorsque  $m$  est suffisamment grand, on obtient un échantillon quasi-indépendant, sous l'hypothèse d'ergodicité de la chaîne. On fait alors l'hypothèse plausible que :

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{y}_i, \quad \text{et} \quad \text{var}[\bar{y}] \approx \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1} (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (3.39)$$

Toute la validité de l'estimateur dépend de façon cruciale du choix de  $m$ . Par exemple, si  $m$  est trop petit, l'hypothèse d'indépendance des  $\bar{y}_i$  n'est plus correcte.

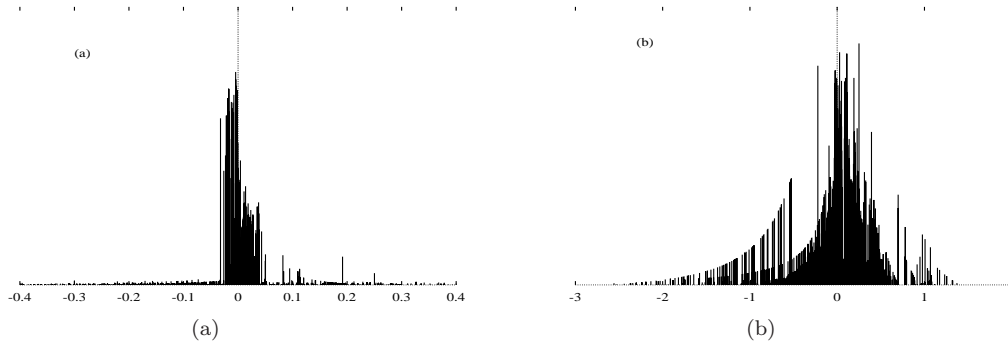


FIGURE 3.8 – Histogrammes des grandeurs jacobiniennes produites par MIME avec une marche aléatoire pour un grand nombre de cycles d'itérations (100.000) dans l'exemple 3 page 50. Répartition des valeurs prises par les jacobiens  $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$  (a) et  $\frac{\partial f_2}{\partial y_2}$  (b). La dissymétrie des histogrammes indique clairement que  $f_1$  ne font pas le même travail que  $f_2$ .

on peut contrôler comment se distribuent les valeurs des jacobiens pendant les itérations (cf . Fig.3.8). qui présente la répartition des valeurs prises par les jacobiens  $\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}$  et  $\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}$ , suggère que les modèles  $f_1$  et  $f_2$  n'ont pas le même poids dans la résolution du problème inverse. Cependant cette information devient relativement difficile à interpréter dès que  $n \gg 1$ .

### 3.3 Conclusion

Nous avons présenté deux approches non-linéaires originales permettant de résoudre des problèmes de type mal posé :

- elles tirent toutes les deux profit de la dimensionalité (plutôt que de la fuir) pour pallier leur manque d'information.
- et elles sont locales, au sens où elles sont effectives dans une zone particulière de l'espace du signal.

La seconde approche est plus sophistiquée, donc plus coûteuse : MIME développe une représentation interne adéquate à la structure des données. En découpant l'espace du signal sur ses composantes, MIME s'affranchit de la contrainte de la dimensionalité, mais doit gérer, en contrepartit une étape d'inférence qui peut être risquée. MIME est un modèle de type parcimonieux, concept très en vogue chez les traiteurs de signaux actuellement (filtrage particulière, etc.). Cette approche est une approche globale, car elle explore par une marche aléatoire un espace de recherche et elle fournit une solution optimale qui minimise une fonctionnelle d'énergie de type Lyapunov.

De nombreux aspects sont encore à explorer, malgré des efforts récents entrepris pour démontrer la convergence de l'algorithme. MIME tire son avantage, à notre sens, du fait qu'il combine des sources hétérogènes, c'est-à-dire que les informations à agréger ne proviennent pas d'une source aléatoire unique ; on ne suppose pas non plus que les sources sont indépendantes. L'information qu'une source fournit peut revêtir des formes très différentes. Dans le cas d'agrégation d'informations, il est important de pouvoir détecter quelles sont les sources fiables et celles qui sont dans l'erreur. Il n'est pas question de faire la moyenne entre les unes et les autres. Une idée plus naturelle consiste à chercher les recoupements entre ces informations afin de mettre en valeur les zones de consensus. Plus ces zones sont étendues, plus les sources sont concordantes. *A contrario*, le fait que les sources proposent des informations conflictuelles suggèrent qu'au moins l'une de ces sources donne une information fautive. Deux sources concordantes ne doivent pas compter pour deux. Si par ailleurs une source est jugée plus fiable qu'une autre, les informations fournies par la première sont prioritaires sur celles de la seconde.



# Estimation ensembliste

« Ce que je vais te dire est inouï et une fois que je t'aurai ouvert les yeux, tu verras un monde nouveau et tu ne pourras plus voir l'ancien. »  
(P. Süskind)

## 4.1 Contribution de l'analyse par intervalle à la résolution d'un problème mal posé

Les travaux présentés dans ce chapitre sont nés en 2001 d'une collaboration avec Luc Jaulin ; elle avait pour objectif de pour but de répondre à la question « peut-on faire du flou avec des intervalles ? ». Elle a conduit à des algorithmes « hybrides » originaux, mais aux performances très encourageantes. Les résultats de ces travaux ont servi de base à plusieurs articles, dont récemment une revue soumise à *Reliable Computing* [208]. Bien qu'encore confidentielle, l'analyse par intervalle a déjà été utilisée avec succès en estimation ou en contrôle-commande [101].

La mise en œuvre de ces algorithmes ensemblistes est l'objet de ce chapitre. Pour une présentation détaillée et pédagogique du calcul ensembliste, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Jaulin *et al.* [101]. Parmi les opérations que nous serons amenés à utiliser, mentionnons le calcul de l'image inverse

$$\mathbb{X} = f^{-1}(\mathbb{Y}), \quad (4.1)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction (non-)linéaire et  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  sont des ensembles resp. de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Ce problème est appelé problème d'inversion ensembliste ; il est assez fréquent dans l'estimation à erreurs bornées [213] ou la caractérisation de domaines de stabilité [102]. Dans la littérature ensembliste, on trouve souvent l'idée que le calcul de l'ensemble  $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X})$  est plus difficile à résoudre que le problème (4.1) et qu'« il est préférable, lorsque  $f$  est *inversible*, de le transformer en un problème d'inversion ensembliste » [99, p. 58].

## 4.2 Rappels sur la représentation des nombres

Si un nombre  $a$  et une borne  $b$  sur  $a$  forment une approximation de la valeur d'un nombre  $x$  quelconque telle que  $|x - a| \leq b$ , alors l'analyse par intervalle établit que  $x$  appartient *certainement* à l'intervalle  $[a - b, a + b]$ . De ce fait, le *type* d'un intervalle est dual : à la fois *nombre* et *ensemble*, avec des implications évidentes sur l'arithmétique par intervalle.

Au contraire d'une variable probabilisée, représentant un phénomène aléatoire, définie par sa densité de probabilité et son *support* (fini ou non), une variable intervalisée  $x$  est représentée par un ensemble noté  $[x]$ . Ce qui revient juste à supposer que  $x$  est dans  $[x]$ , et rien de plus. Ce support contient à *coup sûr* la variable *incertaine*



$x$ . Il est possible néanmoins que ce domaine contienne des zones où  $x$  ne se trouve pas. La représentation ensembliste est donc plus pauvre que la représentation probabiliste mais elle ne réclame aucune information sur  $x$  à part la dimension de son support.

L'analyse par intervalle fournit un cadre formel pour traiter les problèmes ensemblistes de type pavés. Un pavé est un vecteur d'intervalles  $[\mathbf{x}]$  de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire le produit cartésien de  $n$  intervalles, noté  $[\mathbf{x}] = ([x_1], \dots, [x_n])^T$ . la longueur du pavé  $[\mathbf{x}]$  est la longueur du plus grand de ses côtés, *i.e.*  $w([\mathbf{x}]) = \max_{i=1}^n w([x_i])$ , où  $w(\cdot)$  est un opérateur qui renvoie la longueur de l'intervalle en argument. L'inconvénient de cette représentation est d'être peu précise : en effet, si un ensemble  $S$  de forme quelconque peut être encadré par un pavé  $[\mathbf{x}]$ , l'encadrement réalisé contient tous les points de  $S$  mais aussi les points du pavé n'appartenant pas à  $S$ . Ainsi, pour modéliser un processus aléatoire avec un intervalle, il faut être capable de déterminer les bornes du bruit, le risque étant de surestimer ces bornes et d'obtenir un estimateur pessimiste (*wrapping effect* [150]).

L'opération qui consiste à générer deux pavés  $L(\mathbf{x})$  et  $R(\mathbf{x})$  à partir de  $[\mathbf{x}]$  est appelée *bissection* de  $[\mathbf{x}]$  (cf. Fig.4.2). Ce découpage s'effectue selon *le plus grand* intervalle du pavé et laisse les autres intervalles inchangés.

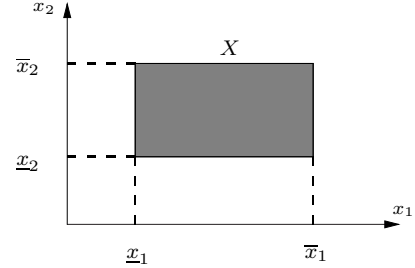


Figure 4.1: Un pavé de  $\mathbb{R}^2$

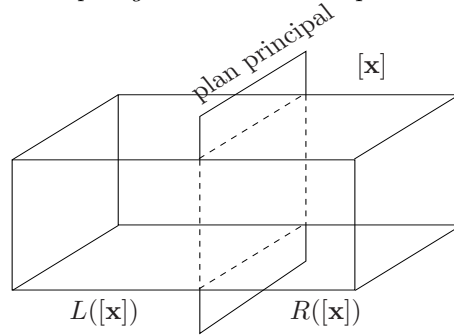


FIGURE 4.2 – Bissection d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  de  $\mathbb{R}^3$  suivant son plan principal.

Le *pavage* d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  est une union sans chevauchement formée de sous-pavés de  $[\mathbf{x}]$  qui couvre tout  $[\mathbf{x}]$ . Un pavage régulier de  $[\mathbf{x}]$  peut être obtenu par bisections successives de  $[\mathbf{x}]$ . Un sous-pavage de  $[\mathbf{x}]$  est simplement une union de sous-pavés de  $[\mathbf{x}]$  et rien de plus. Un (sous-)pavage peut être, d'un point de vue informatique, comme une pile  $\mathcal{P}$  ou une liste d'*objets* empilés, de type (au sens informatique) intervalle `BOX x` (en C++).

Les sous-pavages sont utilisés pour approximer les sous-ensembles. La figure 4.3. donne une illustration de l'encadrement par sous-pavage du *lemniscate* défini par  $S = \{(x, y) | x^4 - a^2(x^2 - y^2) \in [-1, 1]\}$ . Le cadre correspond au pavé  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ . Le sous-pavage  $\underline{S}$  est formé de pavés rouges, inclus dans  $S$ ; le sous-pavage  $\partial S$  constitué de pavés jaunes contient les bords de  $S$  dont le volume dépend de la précision  $\epsilon$  du découpage de l'espace, alors que les pavés bleus sont exclus de  $S$ . Les sous-pavages obtenus forment un encadrement de  $S$  :

$$\underline{S} \subset S \subset \bar{S} \quad \text{avec} \quad \bar{S} \triangleq \underline{S} \cup \partial S. \quad (4.2)$$

### 4.3 Analyse par intervalles

L'analyse par intervalles désigne un ensemble d'outils algorithmiques destinés à résoudre des problèmes d'estimation [151]. Elle permet de trouver les solutions (quand elles existent) d'un ensemble d'équations non-linéaires de manière garantie, là où d'autres méthodes numériques s'avouent vaincues.

Plaçons-nous, à titre d'illustration dans le cadre de la séparation de sources. Les algorithmes de séparation de sources estiment des fonctions scores qui interviennent dans un critère du gradient. Ces algorithmes présentent pas mal d'inconvénients :

1. le choix des valeurs initiales des paramètres est largement empirique,

---

1.  $\mathbb{IR}$  est l'ensemble des tous les intervalles constitués nombres réels.

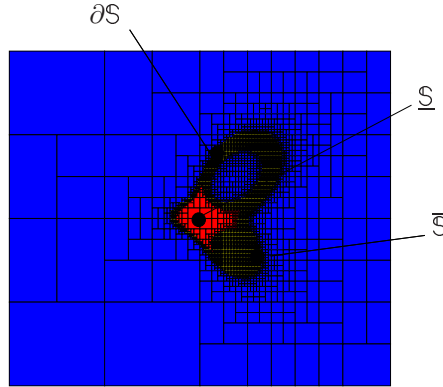


FIGURE 4.3 – Encadrement de l'ensemble  $S = \{(x, y) | x^4 - a^2(x^2 - y^2) \in [-1, 1]\}$  entre deux sous-pavages dans  $\mathbb{R}^2$ .  $\underline{S}$  et  $\overline{S}$  encadrent la portion de  $S$  contenu dans  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ .

2. il n'y a aucune garantie de convergence du critère vers l'optimum global,
3. si plusieurs valeurs des paramètres peuvent conduire à la même valeur du coût, il y a un problème d'identifiabilité de ces paramètres et l'algorithme choisira une combinaison possible de ces paramètres négligeant toutes les autres,
4. l'approche itérative ne permet d'analyser qu'une très petite portion de l'espace de recherche et ne permet de conclure avec certitude que si les solutions du problème ont été trouvées.

certains algorithmes de séparation font des hypothèses sur les distributions des sources difficilement vérifiables *a priori* : Erikson et Koivunen, par exemple, modélisent les distributions des sources en utilisant la famille des distributions de Pearson [59].

Un façon de résoudre les trois premières difficultés est d'avoir recours aux méthodes d'optimisation globale comme celles proposées par Belforte *et al.* [13] ou Norton [155]. L'idée consiste à décrire l'espace de recherche comme un nombre fini d'ensembles simples sur lesquels on sait calculer [80, 101]. Les algorithmes de type *Branch and Bound* comme l'analyse par intervalle, dont nous discutons dans ce chapitre, mettent en œuvre ces principes en permettant une analyse par bloc de l'espace de recherche, autrement dit en analysant chacun de ces ensembles pour trouver la solution.

Alors qu'en calcul stochastique, nous ne pouvons parcourir l'espace de recherche que par un nuage de points (en nombre infini), impossible à balayer en un temps fini, le calcul par intervalles procède en 3 étapes pour analyser l'espace de recherche par blocs :

1. encadrer l'image de  $[x]$  par une fonction  $f$  noté  $\{f(x) | x \in [x]\}$
2. tester l'appartenance de  $[x]$  à un ensemble « solution »  $S$ , c'est-à-dire établir que soit  $[x] \in S$ , soit  $[x] \cap S = \emptyset$ , ce qui suppose l'existence d'un « test d'inclusion »,
3. réduire  $[x]$  par rapport à  $S$ , c'est-à-dire trouver un sous-pavé  $[\tilde{x}]$  de  $[x]$  tel que  $[x] \cap S = [\tilde{x}] \cap S$ . Cette réduction est fondée sur la propagation des contraintes sur les intervalles.

Seules les 2 premières clés sont détaillées dans les sections suivantes.

L'analyse par intervalles est généralement appelée par des algorithmes de type *branch-and-bound* qui découpent l'espace (*branch*) tout en réduisant les domaines solutions de certaines variables (*bound*). L'analyse par intervalles propose des algorithmes permettant de trouver des fonctions d'inclusion, notée  $[f]$ , précises et rapides à évaluer pour une grande classe de fonctions (éventuellement définies par des équations d'état [103] ou solutions d'une équation différentielle, etc. . . ). Dans cette section, nous n'utiliserons que des algorithmes de type *branch* pour la mise en œuvre du calcul ensembliste.

### 4.3.1 Calcul par intervalles

Les opérateurs classiques peuvent aussi être définis pour les intervalles, généralisant les opérations sur les réels. Additionner, par exemple, deux intervalles  $[-1; 3]$  et  $[0; 2]$  revient à chercher l'intervalle est déterminé par la somme des bornes inférieures et celle des bornes supérieures qui donne  $[-1, 5]$ , mais ces opérations ne présentent

pas les mêmes propriétés algébriques que leurs contreparties ponctuelles, e.g.  $[-1, 3] - [-1, 3] = [-4, 4] \neq 0$ . De même, les fonctions élémentaires comme  $\sqrt{\cdot}$ ,  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\sin$ , etc. peuvent être étendues aux intervalles. Si  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction, une fonction ensembliste est une *fonction d'inclusion* (cf. Fig.4.4) de  $\mathbf{f}$  si

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n, \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset \{f([\mathbf{x}])\}. \quad (4.3)$$

Une fonction d'inclusion pour une fonction vectorielle  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sera donnée par  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = [f_1]([\mathbf{x}]) \times [f_2]([\mathbf{x}]) \times \dots \times [f_m]([\mathbf{x}])$ .

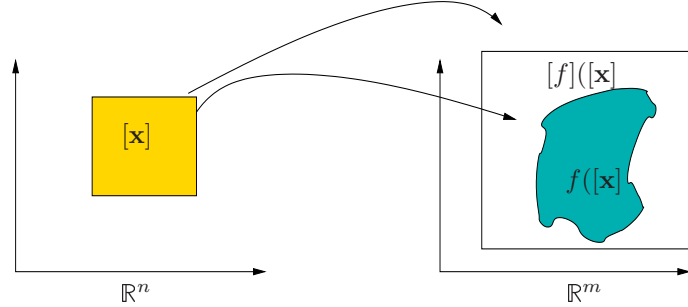


FIGURE 4.4 – fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et fonction d'inclusion  $[f]$  de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$ .

Contrairement à l'image par une fonction  $f$ , l'image d'une fonction d'inclusion  $[f]$  est bien un intervalle. Quelle que soit  $f$ , on sait *toujours* trouver une fonction d'inclusion. La méthode la plus simple consiste à remplacer les occurrences des variables scalaires  $x, y, \dots$  dans l'expression de  $f$  par les variables intervalles correspondantes  $[x], [y], \dots$ . Cependant, cette fonction d'inclusion n'est pas nécessairement *minimale* au sens de l'inclusion. Elle ne l'est que lorsque chaque variable n'apparaît qu'une seule fois dans l'expression de  $f$ . Le problème est donc de trouver une fonction d'inclusion  $[f]$  minimale au sens où l'image de  $[x]$  soit un le plus petit intervalle contenant l'image de  $f$  (figure 4.4).

### 4.3.2 Test d'inclusion

Grâce à la fonction d'inclusion, on peut facilement construire un test d'inclusion. Un test booléen est une fonction à valeur dans  $\{0, 1\}$ , où 0 signifie « faux » et 1 « vrai ». Par extension, un test d'inclusion est une fonction trivaluée à valeur dans  $\{-1, 0, 1\}$ , où, cette fois,  $-1$  signifie « je ne sais pas ». La fonction test permet de distinguer les cas (a-c) représentés sur la figure 4.5. Soit un pavé  $[x]$  et  $[z] = [\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ . Posons  $[t] = [z] \cap [y]$ .

a.  $[t] = \emptyset$  signifie que  $[z]$  n'intersecte pas  $[y]$ . Dans ce cas, la fonction test retourne 0.

b.  $[t] = [z]$ .  $[z]$  est inclu dans  $[y]$ . La fonction test retourne 1.

c.  $[t] \subset [z]$  et  $[t] \neq [z]$ .  $[z]$  intersecte  $[y]$  alors, on ne peut rien dire  $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ . La fonction test retourne  $-1$  si le pavé  $[x]$  est découppable.

Le test d'inclusion  $[t]$  est *minimal* si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n, [t]([\mathbf{x}]) = \{t(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in [x]\}$ .

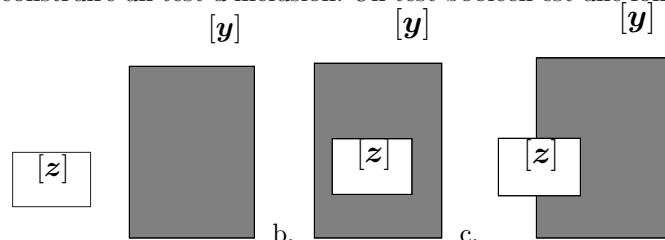


Figure 4.5: Test d'inclusion.

### 4.3.3 Mise en œuvre de l'inversion ensembliste

Une question naturelle est « comment mettre en œuvre de façon approchée mais garantie le calcul ensembliste ? ». Qu'est ce qui va permettre de trouver toutes les solutions là où des algorithmes échouent à en trouver une bonne ? C'est ce que nous allons essayer d'explicitier ici. Rappelons que le calcul ensembliste procède à une analyse par blocs de l'espace de recherche en essayant de satisfaire des équations-contraintes de la forme

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [y] \quad (4.4)$$

où  $[\mathbf{y}]$  est un pavé,  $\mathbf{f}$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  sont les solutions satisfaisant (4.4). Un tel problème peut se formuler sous forme d'un *problème d'inversion ensembliste*

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} | \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]). \quad (4.5)$$

où  $\mathbb{S}$  est un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  à trouver. Les méthodes permettant de résoudre le problème (4.5) sont relativement peu nombreuses et datent des années 90, parmi lesquels on peut citer l'algorithme de Moore [150] et SIVIA<sup>2</sup> proposé par Jaulin [98]. SIVIA met en œuvre de façon récursive le principe d'encadrement par sous-pavage. Un algorithme d'*inversion ensembliste* permet de caractériser l'ensemble  $\mathbb{S}$  par un *sous-pavage*  $\mathbb{S}^+$  qui approxime, avec une bonne précision (par l'intérieur et l'extérieur), l'ensemble  $\mathbb{S} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}])$ . Les sous-pavages sont obtenus par bisection. Il utilise une structure dynamique particulière pour stocker ses résultats intermédiaires.

Le test d'inclusion est alors appliqué sur les pavés générés. Le découpage est effectué à nouveau si la fonction test démontre que le pavé contient des solutions ou s'arrête si le pavé n'en contient pas. Le résultat final donne alors plusieurs pavés de largeur inférieure à une taille voulue  $\epsilon$ , selon la précision choisie par l'utilisateur. Quand le pavé courant est réduit à un vecteur d'intervalles vides, il ne contient aucune solution. Le programme s'arrête grâce au test sur la précision.

Un tel algorithme utilise une pile  $P$  servant à stocker les pavés intermédiaires et une pile auxiliaire  $P^0$  dans laquelle nous stockerons les pavés solutions ou les pavés de largeur inférieure à la résolution désirée. Supposons que l'on connaît un pavé  $[\mathbf{x}_0]$ , initialement rangé dans la pile  $P^0$ , suffisamment large pour contenir l'ensemble solution  $\mathbb{S}$  et que nous disposons d'un test d'inclusion  $t(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}])$ . Lors du parcours de  $P^0$ , nous récupérons à chaque fois le pavé au sommet de la pile dans un pavé temporaire  $[\mathbf{x}]$ . Après cette opération, la pile est vidée de l'élément du sommet. A partir de  $[\mathbf{x}]$ , nous effectuons des tests sur la fonction d'inclusion  $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ .

Trois cas de figure sont possibles :

1.  $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{y}] \Rightarrow [\mathbf{x}] \subset \mathbb{S}$ . Le pavé est par conséquent stocké dans  $P^0$ .
2.  $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset$ . Le pavé  $[\mathbf{x}]$  est en dehors de  $\mathbb{S}$ . Il est de ce fait rejeté.
3.  $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{y}] \neq \emptyset$ . On ne peut rien conclure directement. Il est probable qu'une partie du pavé  $[\mathbf{x}]$  appartienne à  $\mathbb{S}$ . Si la longueur  $w([\mathbf{x}])$  du pavé est supérieure à  $\epsilon$  qui fixe la précision de la caractérisation, alors nous procédons à une bisection de  $[\mathbf{x}]$ . Les deux pavés générés  $x_1^* = L([\mathbf{x}])$  et  $x_2^* = R([\mathbf{x}])$  sont ensuite rangés au sommet de la pile  $P$ . Sinon la pile  $P^0$  est augmentée de  $[\mathbf{x}]$ .

**Exemple 5.** *Résolution d'équation non linéaires* Pour illustrer la recherche de solutions discrètes, cherchons par exemple à résoudre  $x = 2 \sin 2x, x \in \mathbb{R}$ . Cette équation peut se décomposer en deux autres équations  $y = 2 \sin(2x)$  et  $y = x$ . L'ensemble  $\mathbb{S}$  cherché est défini par  $\mathbb{S} = \{[x] \in [-4, 4] | 2 \sin(2x) - x \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ . Par exemple, si  $[x] = [0.2, 0.5]$ ,  $2 \sin(2[x]) = [0.77884, 1.6829] \notin [0.2, 0.5]$  et donc  $[0.2, 0.5] \cap \mathbb{S} = \emptyset$ . Par contre, si  $[x] = [1, 1.5]$ ,  $2 \sin(2[x]) = [0.28224, 1.81186]$  n'a pas d'intersection vide avec  $[1, 1.5]$ , mais ne contient pas non plus que des solutions. il sera donc stocké au sommet de la pile  $P$  pour être bisecté. Sur le domaine de recherche  $[-4, 4] \times [-4, 4]$ , 3 solutions sont présentes (Fig. 4.6). L'algorithme de découpage est donc nécessaire pour les caractériser.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Une solution ensembliste à la séparation de 2 sources indépendantes

Dans cet exemple, nous présentons une application de l'algorithme SIVIA à un problème de séparation de sources. Ceci a fait l'objet d'une publication à ESANN 2003 [206]. Nous nous intéressons ici au cas d'un

2. SIVIA=Set Inverter Algorithm Via Interval Analysis

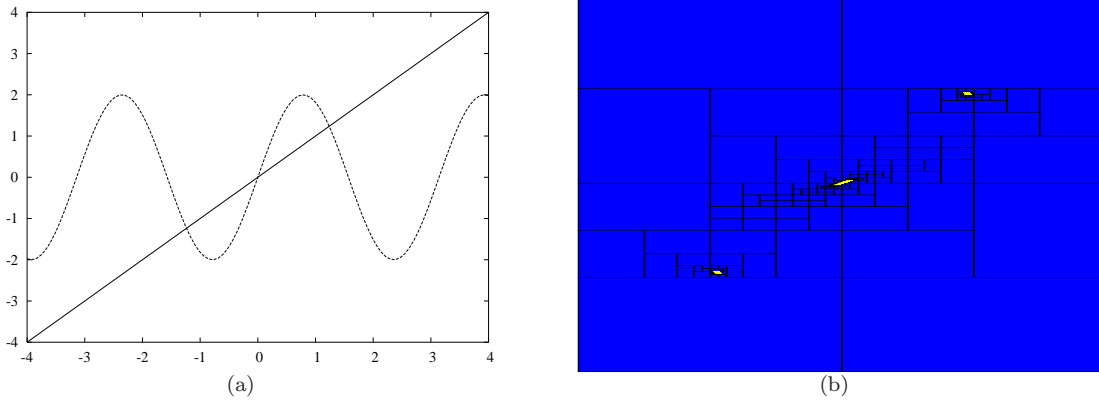


FIGURE 4.6 – (a) Illustration graphique du problème à résoudre  $x = 2 \sin 2x$ . (b) Résultat du découpage du domaine solution pour une précision  $\epsilon = 0.05$  dans le pavé de recherche  $[-4, 4] \times [-4, 4]$ .

mélange instantané à 2 sources, à la fois par simplicité et dans un but pédagogique. Une formulation originale de ce problème a été introduite pour la première fois par Héroult et Jutten en 1986 [87]. L'adaptation à des problèmes plus complexes (en terme de rapport signal à bruit, de nombres de signaux, etc.) ne demande pas beaucoup d'effort.

Considérons le réseau de neurones de Héroult et Jutten présenté Fig. 4.7 où les signaux observés  $x_i(t)$  et  $x_2(t)$  sont des combinaisons linéaires instantanées de 2 processus aléatoires d'entrées (sources primaires)  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ , *i.e.* :

$$\begin{cases} x_1(t) &= a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t), \\ x_2(t) &= a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

qui peut être écrite sous une forme plus compacte  $X = AS$ , où  $X = (x_1(t), x_2(t))^T$  est le vecteur des observations,  $S = (s_1, s_2)^T$  le vecteur des sources supposées stationnaires, indépendantes et de moyennes nulles (*i.e.*  $E[s_1] = E[s_2] = 0$ ), et  $A = \{a_{ij}\}$  est une matrice constante régulière.

Les sorties du système  $y_1$  et  $y_2$ , estimations respectives de  $\hat{s}_1$  et  $\hat{s}_2$ , vérifient (en omettant l'index  $t$ ) :

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - w_{12}y_2, \\ y_2 &= x_2 - w_{21}y_1. \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $w_{12}$  et  $w_{21}$  sont les poids du réseau adaptatif qui doivent être déterminés de façon que les conditions suivantes soient vérifiées

- (i) chaque sortie  $y_i$  est proportionnelle à une seule source  $s_i$  en annulant l'influence des autres sources,
- (ii) les sorties  $y_1$  et  $y_2$  sont statistiquement indépendants (au terme du processus d'adaptation).

En remplaçant  $x_1$  et  $x_2$  par leurs expression dans le système (4.7), on obtient le nouveau système

$$\begin{cases} y_1 &= \frac{1}{1-w_{12}w_{21}} \{(a_{11} - w_{12}a_{21})s_1 + (a_{12} - w_{12}a_{22})s_2\}, \\ y_2 &= \frac{1}{1-w_{12}w_{21}} \{(a_{21} - w_{21}a_{11})s_1 + (a_{22} - w_{21}a_{12})s_2\}. \end{cases} \quad (4.8)$$

L'indépendance des signaux  $s_1$  et  $s_2$  implique qu'ils sont au moins décorrélés, c'est-à-dire  $E[s_1s_2] = 0$  et donc  $E[y_1y_2] = 0$ . Mais la décorrélation n'est pas suffisante pour trouver les  $w_{21}$  et  $w_{12}$ . On peut cependant imposer l'indépendance des sorties  $y_1$  et  $y_2$  en forçant l'annulation des corrélations non linéaires  $E[f(y_1)g(y_2)] = 0, \forall f, g$  fonctions non-linéaires, introduisant ainsi la contribution de moments d'ordre supérieur dans la fonctionnelle à

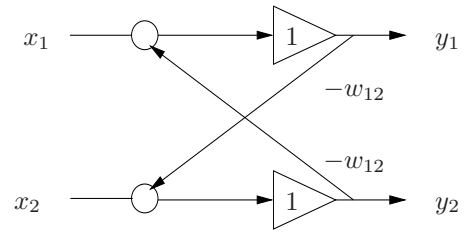


Figure 4.7: Réseau de Héroult-Jutten [87].

annuler. Des exemples typiques sont  $f(x) = x^3, g(x) = x$ . Héroult et Jutten ont proposé une règle d'adaptation des coefficients  $w_{ij}$  fondée sur la minimisation de  $\mathbb{E}[y_1^3 y_2]$  et de  $\mathbb{E}[y_2^3 y_1]$ . Cette règle d'apprentissage s'écrit

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \mu(t) y_i^3 y_j \quad (4.9)$$

où  $\mu(t)$  est un pas d'apprentissage qui satisfait les conditions de convergence de Robins-Monroe pour que l'algorithme converge vers des solutions stables. Mais l'équation (4.9) ne garantit pas que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & w_{12} \\ w_{21} & 1 \end{pmatrix}$  converge vers l'inverse de la matrice de mélange. Comon a montré dans [33] que, au regard de la théorie de la stabilité de Lyapunov, les solutions stables sont celles pour lesquelles

$$E\{y_1^4\}E\{y_2^4\} > 9(E\{y_1^2 y_2^2\})^2 \quad (4.10)$$

$$w_{12} w_{21} - 1 > 0 \quad (4.11)$$

La condition (4.10) force les signaux sources à posséder un *kurtosis* négatif. La relation (4.11) est une condition de stabilité habituelle des réseaux adaptatifs. Sorouchyari [184] parvient simultanément aux mêmes conclusions.

Un couple de points solutions est  $P = \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}, \frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$  et  $P' = \left(\frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)$ .  $P$  et  $P'$  correspondent aux points d'équilibre du problème. L'autre couple de points solutions est  $Q = \left(\frac{a_{11} - \sqrt[4]{\alpha} a_{12}}{a_{21} - \sqrt[4]{\alpha} a_{22}}, \frac{a_{21} + \sqrt[4]{\alpha} a_{22}}{a_{11} + \sqrt[4]{\alpha} a_{12}}\right)$  et  $Q' = \left(\frac{a_{11} + \sqrt[4]{\alpha} a_{12}}{a_{21} + \sqrt[4]{\alpha} a_{22}}, \frac{a_{21} - \sqrt[4]{\alpha} a_{22}}{a_{11} - \sqrt[4]{\alpha} a_{12}}\right)$ , avec  $\alpha = E[x_2^4]/E[x_1^4]$ . Les valeurs de  $P$  et  $P'$  ne dépendent que des coefficients du mélanges (4.10) tandis que celles de  $Q$  et  $Q'$  dépendent aussi de la statistique du signal. Comon *et al.* [33] et Sorouchyari [184] ont ainsi prouvé qu'il y a ici 4 points d'équilibre dans le cas de ce problème à deux sources, dans le sens où, si  $(a, b)$  est un point d'équilibre, alors le point  $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$  est une autre solution. Les 4 points d'équilibre  $P, P', Q$  et  $Q'$  sont représentés Fig. 4.8 dans l'espace des paramètres  $(w_{12}, w_{21})$ . Remarquons que le seul d'équilibre stable est le point  $P$  pour lequel la condition de stabilité du réseau  $w_{12} w_{21} - 1 > 0$  est effectivement vérifiée par simulation numérique.

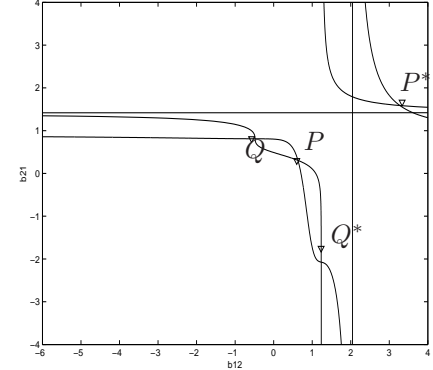


Figure 4.8: Les 4 points d'équilibre  $P, Q, P', Q'$ .

Considérons les observations  $y_1[n]$  et  $y_2[n]$  générées à partir du modèle discret suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

où  $s_1[n] = \sin(7,3T_e n)$  et  $s_2[n] = \sin(4T_e n)$ ,  $T_e = 0,2$  et ajoutons aux observations l'intervalle  $[-0.1, 0.1]$ , modélisant l'incertitude de mesures (cf. Fig.4.9.a). Déterminons les coefficients  $[w_{12}, w_{21}]$  compatibles avec les relations de stabilité.

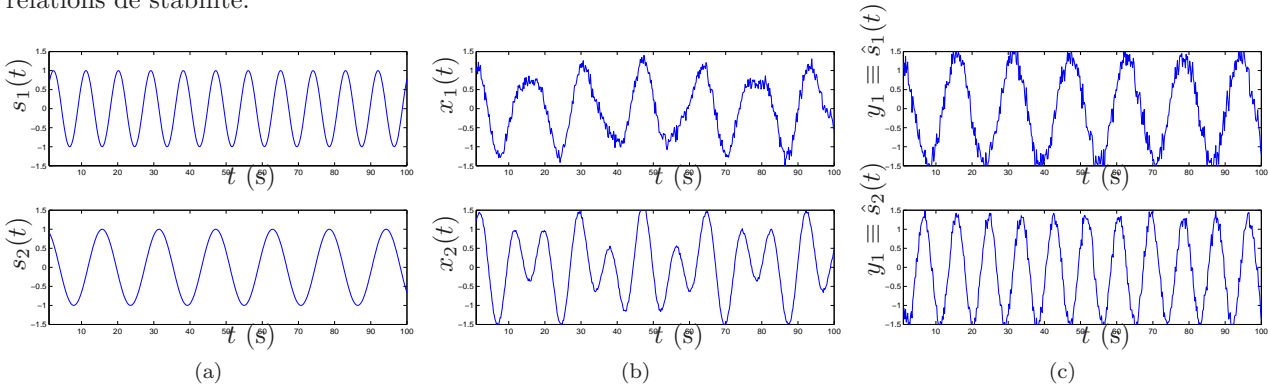


FIGURE 4.9 – Signaux sources (a) observés, (b) mélangés avec  $A$  et bruités, (c) séparés pour un couple de paramètres trouvés par SIVIA.

En remplaçant  $y_1$  et  $y_2$  par leurs expressions respectives (voir (4.8)) dans  $E[y_1^3 y_2] = 0$  et de  $E[y_2^3 y_1] = 0$ , on obtient un système de 2 équations nonlinéaires à 2 inconnues  $w_{12}$  et  $w_{21}$

$$\begin{cases} [f_1]([w_{12}], [w_{12}]) = 0 \\ [f_2]([w_{21}], [w_{21}]) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

pour un pavé de recherche initial  $[w_{12}] \times [w_{21}] = [-5, 5]^2$  et la précision désirée est  $\epsilon = 0.001$ . En moins d'une seconde, les 4 zones correspondant aux points d'équilibre mis en évidence par Comon sont déterminées. La figure 4.10.a illustre le résultat obtenu dans le pavé de recherche  $[-5, 5]^2$ . Afin d'éliminer les 3 solutions inacceptables, nous exploitons les conditions (4.10) et (4.11) d'acceptabilité. Nous posons

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (w_{12}, w_{21}) & \rightarrow & E\{y_1^4\}E\{y_1^4\} - 9(E\{y_1^2 y_2^2\})^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

Il est clair que si  $f_3(w_{12}, w_{21}) > 0$ , alors la condition (4.10) est vérifiée. A présent,  $(w_{12}, w_{21})$  doivent vérifier le système (4.13) ainsi que les 2 conditions de stabilité. Le seul couple de solution acceptable est donc le couple  $(w_{12}, w_{21})$  qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(w_{12}, w_{12}) = 0 \\ f_2(w_{21}, w_{21}) = 0 \\ w_{12} w_{21} > 1 \\ f_3(w_{12}, w_{21}) > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Nous utilisons à nouveau SIVIA pour résoudre la version intervalle de (4.15), soit

$$\begin{cases} [f_1]([w_{12}], [w_{12}]) = 0 \\ [f_2]([w_{21}], [w_{21}]) = 0 \\ [f_3]([w_{12}], [w_{21}]) \in ]0, +\infty[ \\ [w_{12}][w_{21}] \in [1, +\infty[ \end{cases} \quad (4.16)$$

avec  $[w_{12}] \times [w_{21}] = [-5, 5]^2$  et  $[f_1], [f_2], [f_3]$  des fonctions d'inclusions naturelles de  $f_1, f_2, f_3$ .

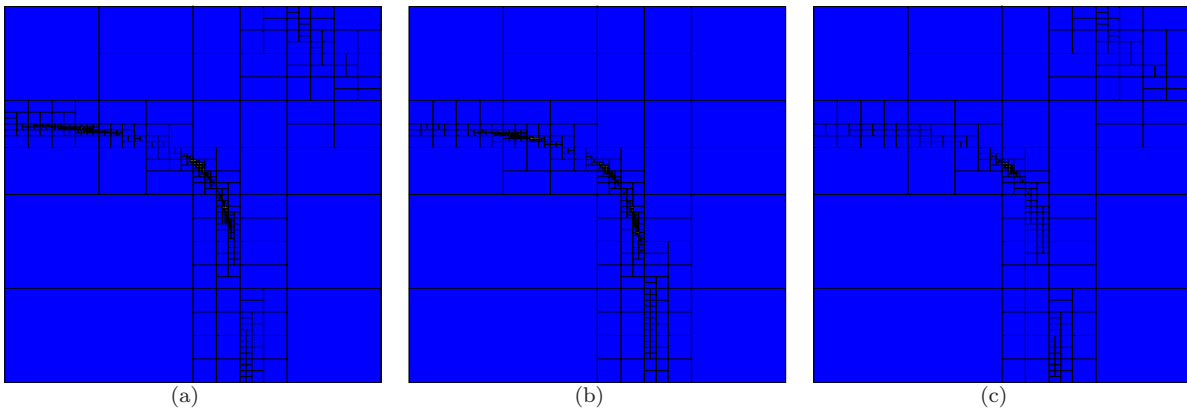


FIGURE 4.10 – zones solutions pour  $([w_{12}], [w_{21}])$  (a) système d'équations 4.13 (b) système d'équations 4.13 augmenté de la condition  $[w_{12}][w_{21}] \in [1, +\infty[$  (c) système d'équations et d'inéquations 4.16.

Après 799 bisections et en 0.06 secondes sur un PENTIUM IV 2.7 GHz, l'algorithme isole 29 pavés solutions (494 rejetés et 276 indéterminés) autour du point  $(0.3, 0.6)$ . On voit Fig.4.10.c qu'il n'y a plus qu'une seule zone correspondant à la séparation du mélange.

3. En théorie, le domaine des solutions  $w_{12}$  et  $w_{21}$  est supposé contenu dans le pavé  $[w](0) = [-10000, 10000] \times [-10000, 10000]$ , ce qui revient à dire qu'aucune information n'est disponible *a priori*



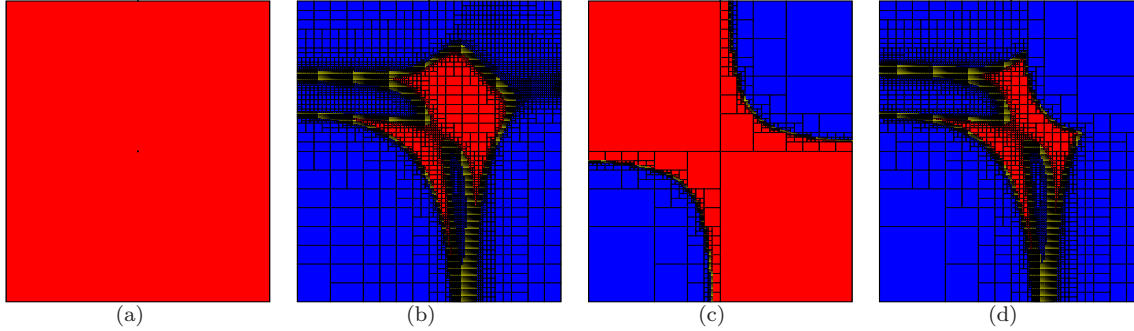


FIGURE 4.11 – Caractérisation du domaine de stabilité pour le problème à 2 sources (a) aucune contrainte (toutes les valeurs pour  $w_{12}, w_{21}$  sont acceptées) (b)  $[f_2]([w_{12}], [w_{21}]) = 0$  (c)  $[w_{12}][w_{21}] \in [1, +\infty[$  et (d)  $[f_1]([w_{12}], [w_{21}]) = 0$ .

Les sous-pavages *réguliers* donnés Tab. 4.11, dans le plan  $([w_{12}], [w_{21}])$  en modifiant le test d'inclusion  $[t]([w_{12}], [w_{21}])$ . Pour simplifier, la série des pavages Fig.4.11 correspond à la satisfaction des contraintes de stabilité, tandis que la série 4.10 correspond à l'indépendance statistique. C'est la *preuve* que l'indépendance est *mathématiquement* plus « forte » que la stabilité. Nous n'avons pas fait de tests plus poussés pour déterminer s'il s'agit d'une règle générale ou d'une particularité liée à ce problème. Notons aussi, d'après 4.11(b,d) que  $[f_1]$  et  $[f_2]$  n'ont pas un rôle symétrique.

La figure 4.12 visualise la convergence de SIVIA en terme de nombre de pavés acceptés (—), rejetés (---) et indéterminés (...), en fonction des itérations. SIVIA nous permet d'obtenir une caractérisation de  $\mathbb{W}$  pour une large classe de problèmes. C'est, à ma connaissance, la première fois que la séparation de source est abordée sous l'angle de la satisfaction de contraintes, et que les conditions de stabilité d'un algorithme itératif sont utilisées explicitement dans le calcul de ses solutions.

Néanmoins, la bisection n'est pas forcément la meilleure solution pour le calcul ensembliste, car une bisection suivant une direction engendre une bisection suivant les autres directions et le temps de calcul explose. Dans nos futurs travaux, nous utiliserons les *méthodes de consistance* (appelées aussi *propagation de contraintes*) qui permettent de réduire efficacement et simplement les domaines des variables sans jamais perdre de solution. La méthode consiste à décomposer l'ensemble des contraintes en un ensemble de contraintes primitives et à contracter tant que cela reste possible chacun des domaines relativement à chacune des contraintes primitives.

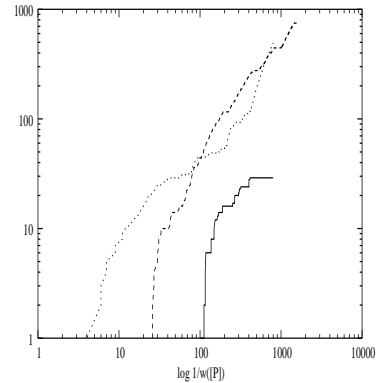


Figure 4.12: Convergence de SIVIA en fonction des itérations.

#### 4.4.2 Approximation floue par intervalles

Les concepts d'ensembles flous et d'intervalle proviennent de la même théorie générale développée par l'école française de Topologie dans les années 1930-40. En théorie, le calcul sur des nombres flous s'appuie sur l'arithmétique des intervalles, lorsque ces intervalles sont des  $\alpha$ -coupes [55, 221]. Une des premières études de l'utilisation de l'arithmétique des intervalles pour le flou vient de [111]. On trouvera dans [18, 64] des études se rapportant à des arithmétiques hybrides qui s'appuient à la fois sur les distributions de probabilités, des fonctions d'appartenance floues et des intervalles. Dans ces articles, les intervalles sont des parties du support fini des distributions de probabilité ou de possibilité; ils permettent de représenter les espaces images d'une application donnée. En pratique, les ingénieurs utilisent des techniques calculatoires plus grossières mais efficaces. Dans un article proposé à *Fuzzy Sets and Systems*, nous avons proposé une autre approche pour l'estimation floue que celle proposée initialement par Takagi et Sugeno [188]: l'estimation des paramètres flous est réalisée cette fois par un calcul ensembliste utilisant les outils de l'analyse par intervalle. Cette estimation fournit l'ensemble des paramètres *consistants* avec les données au sens d'une certaine erreur de modélisation.

Un sous-ensemble flou  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{E}$  est défini par une fonction d'appartenance (appelée aussi fonction caractéristique ou en anglais *membership function*)  $\mu_{\mathcal{A}} : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ .  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  quantifie le degré d'*appartenance* de chaque élément



$x$  à  $\mathcal{A}$ <sup>4</sup>. On note  $\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) | x \in \mathbb{E}\}$ . Par exemple, si  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ , on peut définir l'ensemble des réels proches de 10 par  $\mathcal{A} = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x) | x \in \mathbb{E}\}$  avec  $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}$ .  $\text{supp}(\mathcal{A}) = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x) = 0\}$  est le support de  $\mathcal{A}$  et  $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}$  est le *noyau* de  $\mathcal{A}$ .  $\mathcal{A}^\alpha = \{s \in \mathbb{E} | \mu_{\mathcal{A}}(s) \geq \alpha\}$  est la  $\alpha$ -coupe de  $\mathcal{A}$  ou le sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  de niveau  $\alpha$  c'est-à-dire une troncature de la fonction d'appartenance  $\mu_{\mathcal{A}}$  au niveau de l'ordonnée  $\alpha$  (cf. Fig.4.13.b). Donc  $\mathcal{A}^\alpha$  est un *intervalle*. Par conséquent, on peut représenter tout ensemble flou par ses  $\alpha$ -coupes. Formellement :

$$\mu_{\mathcal{A}}^\alpha = \alpha \mu_{\mathcal{A}}(x), \quad x \in \mathcal{A}. \quad (4.17)$$

et  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\mu_{\mathcal{A}}^\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \forall x \in \mathcal{A}^\alpha \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.18)$$

avec  $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{A}^\alpha$ , tel que  $(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{A}^\alpha)(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \mu_{\mathcal{A}}^\alpha(x), \forall x \in \mathbb{E}$ .

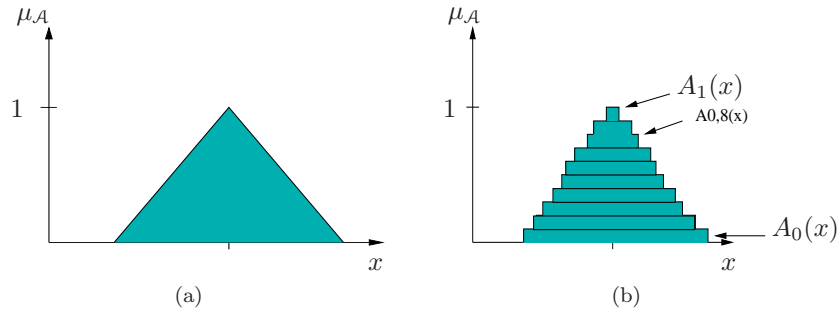


FIGURE 4.13 – (a) Forme triangulaire. (b)  $\alpha$ -coupe de  $\mathcal{A}(x)$  de niveau  $\alpha \in \{0, \dots, 1\}$ .

Dans l'exemple de la figure 4.13.b, un ensemble d'intervalles  $\mathcal{A}^\alpha$ , pris avec  $\alpha = \{1, \dots, 10\}$  approxime une fonction  $\mu_{\mathcal{A}}$ . Les ensembles flous peuvent avoir n'importe quelle forme, mais dans la pratique, les formes trapézoïdale, en *cloche* ou triangulaire (4.13.a) dominent, pour des raisons de facilité calculatoire.

Un système flou capable d'*apprendre* est un *modèle* dont les paramètres, les entrées et les sorties sont des *nombres flous*. Habituellement, une procédure statistique ou neuronale génèrent les règles floues à partir de mesures, quand le système à identifier présente des ambiguïtés, des incertitudes ou qu'il est trop complexe pour qu'on puisse définir des fonctions d'appartenance. Des *algorithmes d'apprentissage neuro-flous* ont été proposés par Ishihashi [95], Nomura [154], Wang et Mendel [215] indépendamment.

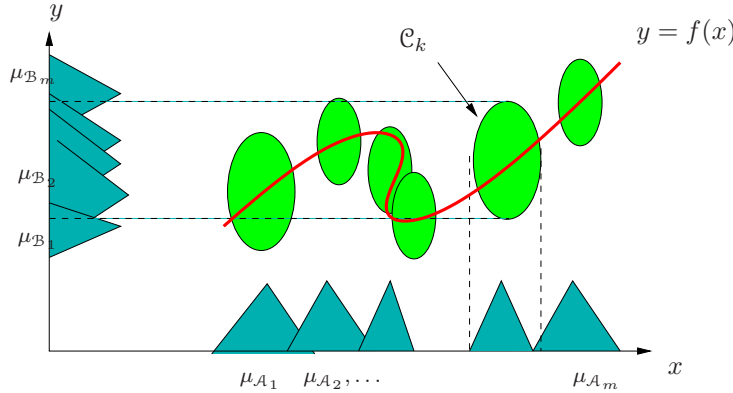
La plupart des méthodes d'extraction des règles floues à partir de données numériques supposent le clustering de l'espace des données [1, 11]. Le raisonnement flou de Takagi et Sugeno (TS) (du nom de leurs auteurs) [188, 186, 218], consiste à transformer toute équation non-linéaire en une collection d'équations linéaires définis au moyen de « patches » jointifs qui couvrent le graphe de la fonction complète (cf. Fig.4.14). La principale difficulté de cette approximation réside dans la partition des données, qui contrôle les fonctions d'appartenance. Dickerson et Kosko [49] approximent les relations floues de type *si-alors* avec des patches de forme ellipsoïdale, de dimension variable, après un clustering des données avec des centres mobiles. Les ellipsoïdes obtenues définissent les classes  $\mathcal{C}_k, k = 1, \dots, K$  obtenues desquelles ils construisent les règles floues, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \text{ est } \mathcal{A}_1 \text{ alors } y \text{ est } \mathcal{B}_1 \\ \text{si } x \text{ est } \mathcal{A}_2 \text{ alors } y \text{ est } \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \text{si } x \text{ est } \mathcal{A}_K \text{ alors } y \text{ est } \mathcal{B}_K \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Kosko affirme dans [116] que toute fonction  $y = f(x)$  peut être approximée par un système flou additif. D'autres règles d'inférence floue que 4.19 existe, on peut citer la règle du Max-min de Mamdani [137].

La méthode présentée par Kosko pose cependant plusieurs questions :

4. Si  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , alors  $\mathcal{A}$  est un ensemble « ordinaire ».

FIGURE 4.14 – Approximation floue avec patch ellipsoïdal de la fonction  $y = f(x)$ .

- De quel contrôle dispose t'on sur les règles avec un apprentissage local? La précision de la règle dépend directement de la taille du patch (Fig. 4.14) (plus le  $\text{supp}(\mathcal{A}_k)$  est large, moins la règle sera précise, et vice-versa)
- Quelle forme choisir pour la fonction d'appartenance?
- Si  $x$  est multidimensionnel, comment choisir les variables endogènes les plus discriminantes?

Sans pour autant répondre directement à ces questions, nous avons proposé d'utiliser le calcul ensembliste pour résoudre un problème d'approximation floue (et mal posé) dont on cherche les paramètres.

Dans cette expérience simple, nous considérons un modèle décrit par l'équation

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(4p_1^2 - p_1^4) \cos^2(p_1 t) + p_1^6 + 4p_1^4 + (1 - p_1^2) \cos^4(p_1 t)}}{p_2 \sqrt[3]{p_1^2 + \cos^2(p_1 t)}}. \quad (4.20)$$

où  $t, \kappa(t), p_1$  et  $p_2$  représentent respectivement le temps, la sortie à l'instant  $t$  et les paramètres du modèle. Supposons que 22 mesures  $\kappa[1], \dots, \kappa[22]$  ont été prélevées sur le système considéré aux temps  $n = 1, 2, \dots, 22$ . Les  $\kappa[n]$  sont supposées inconnues, mais bornées. Leurs domaines sont donnés par le tableau ci-dessous

$n$	$[\tilde{\kappa}][n]$	$n$	$[\tilde{\kappa}][n]$
1	[-9.325648, 14.467512]	12	[2.257905, 5.470008]
2	[-21.655844, 19.555050]	13	[-10.883165, 15.403321]
3	[-3.746677, 8.840622]	14	[16.831858, 18.036624]
4	[-2.123236, 5.028720]	15	[16.831858, 18.036624]
5	[-16.464714, 17.903652]	16	[-6.363959, 12.138799]
6	[6.909155, 12.641900]	17	[-3.860687, 9.031078]
7	[6.891642, 12.626388]	18	[5.667682, 11.426765]
8	[-5.376333, 11.101162]	19	[-4.407185, 9.865271]
9	[-1.727076, 3.448824]	20	[-5.956484, 11.732625]
10	[-3.253609, 7.934280]	21	[-13.323495, 16.626312]
11	[-6.867086, 12.604568]	22	[9.151415, 14.353076]

TABLE 4.1 – Domaines  $[\tilde{\kappa}][n]$  des  $\kappa[n]$ . A la fin,  $\kappa[n] \in [\tilde{\kappa}][n]$ 

Ces domaines ont pu être obtenus à partir de mesures approximatives  $\tilde{\kappa}[n]$  et d'une connaissance de bornes sur les erreurs de mesure commises. Les deux valeurs des paramètres sont  $p_2 = 10, p_1 = 2$ . L'équation 4.20 est celle de la courbure d'une trajectoire  $\mathcal{C}$  que décrit dans l'espace 3d un point  $P$  d'axe  $\mathbf{u}(t) = (p_2 \cos p_1 t \cos t, p_2 \cos p_1 t \sin t, p_2 \sin p_1 t)^T$  (Clelie<sup>5</sup>). Les figures 4.15(a,b) donnent resp. l'allure de la trajectoire des points d'axe  $\mathbf{u}[n], n = 1, 2, \dots$  et le tracé de  $\kappa(t) = f(t)$ .

---

5. Courbe étudiée par Guido Grandi en 1728

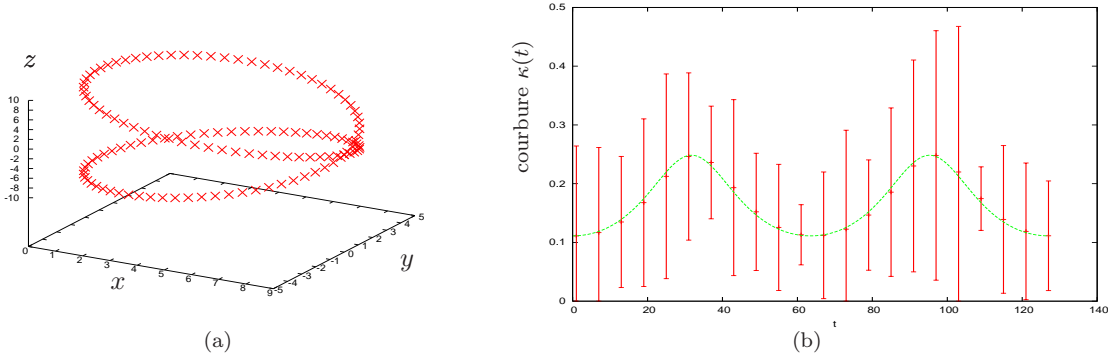


FIGURE 4.15 – (a) allure de la trajectoire 3d des points  $P$  d’affixe  $\mathbf{u}$ , bruité par un bruit blanc  $\mathcal{U}_{[-0.1,0.1]}$ . (b) courbe théorique de la courbure  $\kappa(t) = F(\mathbf{u}(t))$  (vert) avec les données et barres d’erreur sur les mesures  $\kappa[n]$  (trait rouge).

Les contraintes entre les variables sont données par les équations

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \kappa[1] = ((4p_1^2 - p_1^4) \cos^2(p_1) + p_1^6 + 4p_1^4 + (1 - p_1^2) \cos^4(p_1))^{1/2} / (p_2 \sqrt[3]{p_1^2 + \cos^2(p_1)}) \\ \vdots \\ \kappa[22] = ((4p_1^2 - p_1^4) \cos^2(22p_1) + p_1^6 + 4p_1^4 + (1 - p_1^2) \cos^4(22p_1))^{1/2} / (p_2 \sqrt[3]{p_1^2 + \cos^2(22p_1)}) \end{cases} \quad (4.21)$$

qui viennent directement du modèle (4.20). La formulation du problème d’estimation floue peut donc être assimilée à un problème de 22 équations non linéaires comportant 24 inconnues :  $\kappa[n], n = 1, \dots, 22$  et  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ . Pour compliquer les choses, ces inconnues sont fuzzifiées, c’est-à-dire représentées par des domaines flous découpés en fonctions d’appartenance, telles que celles représentées sur la figure 4.16(a,b,c).

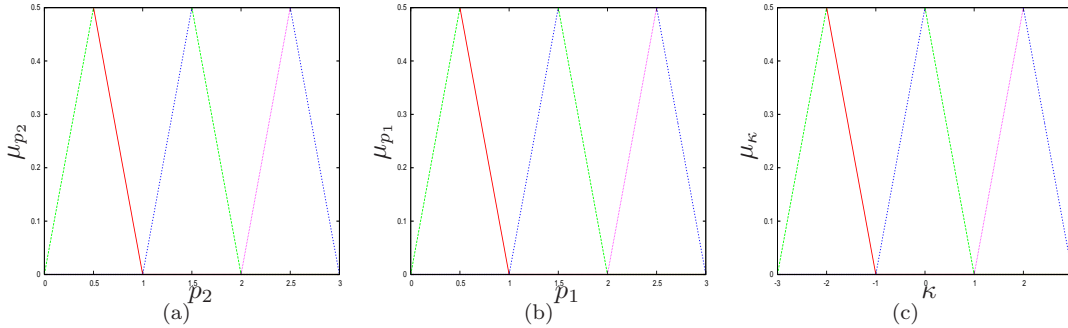
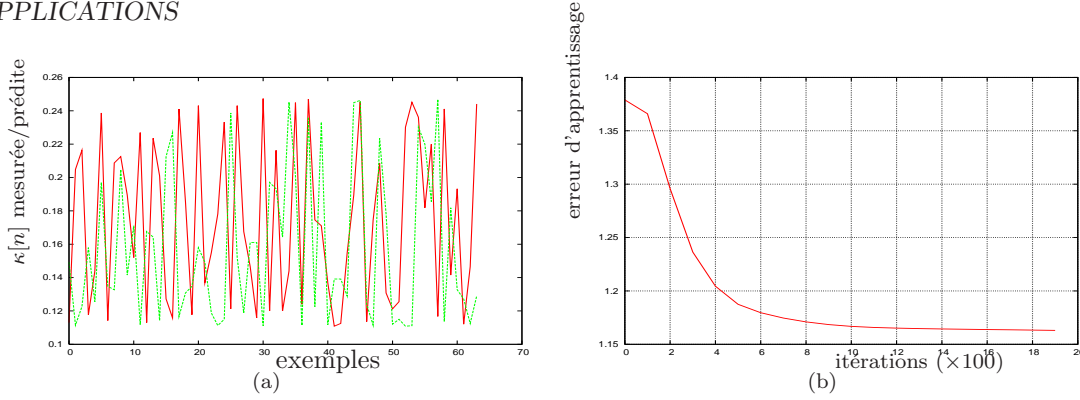


FIGURE 4.16 – Découpage des domaines flous des variables  $p_2, p_1$  et de la courbure à prédire  $\kappa$  en 3 fonctions d’appartenance.

Peut-on construire un système floue capable de prédire  $\kappa(t)$ ? Comment estimer les paramètres flous  $p_2$  et  $p_1$ ? Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé, dans un premier temps, un système d’inférence floue (FIS) de type Sugeno. Ce code, développé en C++ par Nauck [153] avec l’architecture ANFIS, utilise un apprentissage hybride neuro-floue [96, 97]. Il s’agit d’un algorithme adaptatif qui minimise une erreur quadratique avec un algorithme de rétropropagation du gradient pour apprendre les paramètres des fonctions d’appartenance floue. Nous avons testé ce système d’inférence sur ce problème-jouet. L’apprentissage demande plusieurs milliers d’itérations. La figure 4.17(a) compare la sortie du prédicteur floue (rouge) avec la sortie attendue. La courbe donnée Fig.4.17.b présente l’erreur d’apprentissage au cours des itérations. Malgré la convergence de l’algorithme, le résultat n’est pas brillant. Les résultats ne sont pas beaucoup meilleurs si on n’augmente le nombre de fonction d’appartenance car le nombre de données, lui, est le même.

Dans un second temps, nous avons mis en œuvre l’approche ensembliste pour trouver l’ensemble des solutions. Nous avons supposés que les  $\kappa[n]$  et les paramètres  $p_1, p_2$  sont incertains : on ne connaît que leur support  $[\tilde{\kappa}]$

FIGURE 4.17 – (a)  $\kappa[n]$  mesurée (en vert) prédite par le programme d'inférence floue de Sugeno ANFIS

et les support des paramètres  $p_1, p_2$  sont  $[\check{p}_2] = [-10000, 10000]$  et  $[\check{p}_1] = [-10000, 10000]$ , ce qui revient à dire qu'aucune information n'est disponible a priori. Les solutions attendues sont donc les  $p_1$  et  $p_2$  tels que

$$p_2 \in [\check{p}_2], p_1 \in [\check{p}_1], \text{ et } \mathbf{p} \in \mathbb{P} \quad (4.22)$$

tels que le système (4.21) soit résolu.  $\mathbb{P}$  est l'ensemble solution. Résoudre le problème d'inversion ensembliste ici consiste à caractériser l'ensemble  $\mathbb{P}$  image réciproque par  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\mathbb{K}$ , défini par

$$\mathbb{P} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{K}) \triangleq \{\mathbf{p} | \mathbf{f}(\mathbf{p}) \in \mathbb{K}\} \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{f}$  est la fonction vectorielle

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{[(4p_1^2 - p_1^4) \cos^2(p_1) + p_1^6 + 4p_1^4 + (1 - p_1^2) \cos^4(p_1)]^{1/2}}{(p_2 \sqrt[3]{p_1^2 + \cos^2(p_1)})} \\ \vdots \\ \frac{[(4p_1^2 - p_1^4) \cos^2(22p_1) + p_1^6 + 4p_1^4 + (1 - p_1^2) \cos^4(22p_1)]^{1/2}}{(p_2 \sqrt[3]{p_1^2 + \cos^2(22p_1)})} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

La fonction d'inclusion associée à cette expression formelle de  $\mathbf{f}$  est

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{p}]) = \begin{pmatrix} \frac{[(4[p_1]^2 - [p_1]^4) \cos^2([p_1]) + [p_1]^6 + 4[p_1]^4 + (1 - [p_1]^2) \cos^4([p_1])]^{1/2}}{([p_2] \sqrt[3]{[p_1]^2 + \cos^2([p_1])})} \\ \vdots \\ \frac{[(4[p_1]^2 - [p_1]^4) \cos^2(22[p_1]) + [p_1]^6 + 4[p_1]^4 + (1 - [p_1]^2) \cos^4(22[p_1])]^{1/2}}{([p_2] \sqrt[3]{[p_1]^2 + \cos^2(22[p_1])})} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

L'ensemble image  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  est inclu dans  $\mathbb{K}$ , *i.e.*  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) \subset \mathbb{K}$ . Cette fonction d'inclusion est loin d'être minimale du fait de la complexité formelle de  $\mathbf{f}$ .

Nous avons résolu le problème en utilisant l'algorithme SIVIA pour résoudre l'équation 4.23. Pour tenir compte du fait qu'on traite des nombres flous et non plus des intervalles « ordinaire », l'astuce consiste à décomposer les fonctions d'appartenance en  $\alpha$ -coupes qu'on traite séparément, avec SIVIA. L'équation (4.23) devient alors au niveau  $\alpha$

$$\mathbb{P}_\alpha = \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{K}_\alpha) \triangleq \{\mathbf{p}_\alpha | \mathbf{f}(\mathbf{p}_\alpha) \in \mathbb{K}_\alpha, \alpha \in [0, 1]\} \quad (4.26)$$

Les domaines solutions sont données Fig. 4.18(a-f) sous forme de sous-pavages encadrant l'ensemble  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{K}_\alpha)$  en moins de 3 secondes sur un PENTIUM IV. L'ensemble des solutions  $\mathbf{p}$  acceptables a priori est le pavé  $\mathbf{p} = [-20; 20]^2$ . La forme 3d de la fonction d'appartenance qu'on peut extrapoler à partir de ces figures ne ressemble en rien aux des formes des fonctions d'appartenance habituellement observées dans la littérature.

La figure 4.19 présente en vis-à-vis les barres d'erreurs représentant l'incertitude associée à chaque donnée  $\kappa[n] n = 1, \dots, 22$  avant la résolution (a) et après résolution ensembliste (b). On voit clairement qu'en plus d'une paramétrisation garantie de  $\mathbf{p}$ , on a réduit l'incertitude sur les données. Sur ces figures ne sont représentées que les supports des fonctions d'appartenance floues.

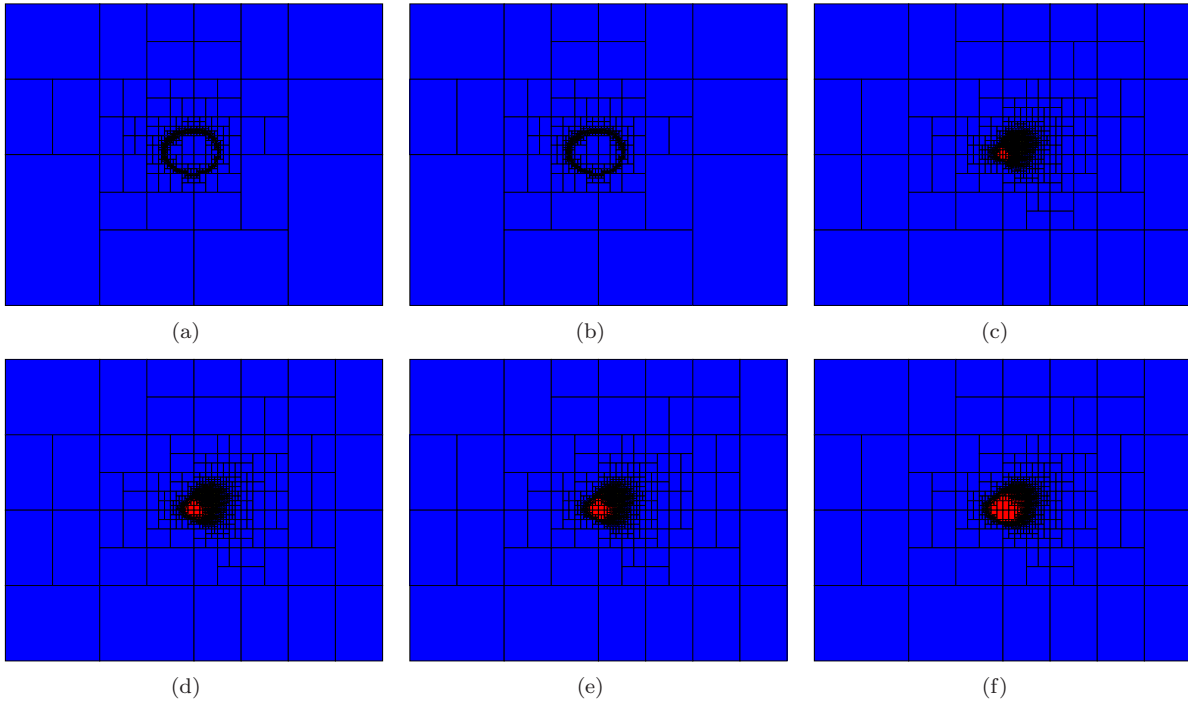


FIGURE 4.18 – Domaines résultats  $[\hat{p}_1]$  et  $[\hat{p}_2]$  des  $\alpha$ -coupes de la fonction d'appartenance floue des paramètres obtenus par SIVIA pour différentes valeurs de  $\alpha$  (vues de dessus). Le cadre est un pavé de  $\mathbb{R}^2$  de  $[-10, 10] \times [-5, 5]$ . (a)  $\alpha = 1$  (b)  $\alpha = 0,8$  (c)  $\alpha = 0,6$  (d)  $\alpha = 0,4$ , (e)  $\alpha = 0,2$  (f)  $\alpha = 0$ .

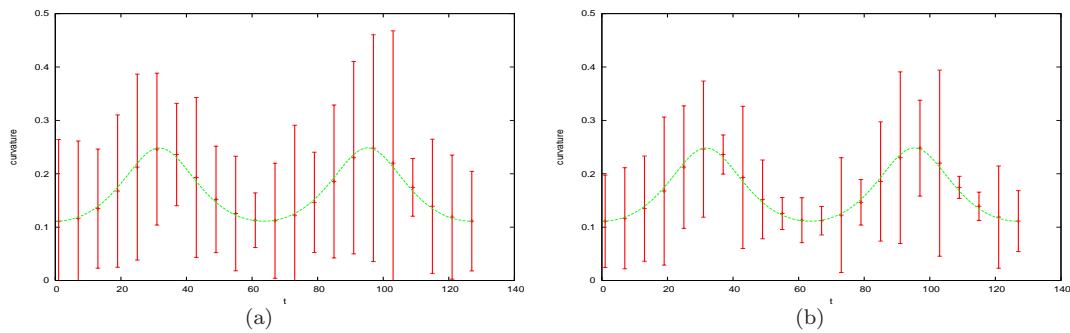


FIGURE 4.19 – (a) Intervalles  $[\tilde{\kappa}][n]$  (avant résolution) superposés sur le graphe de la fonction  $\kappa(t)$  (b) intervalles  $[\hat{\kappa}][n]$  après résolution.

## 4.5 Conclusion

Jusqu'à ce chapitre, nous avons supposé que les variables étaient indépendantes dans le but de manipuler les densités de probabilités. Pourtant, cette indépendance ne correspond pas, le plus souvent, à une situation réelle; d'abord, l'hypothèse de dépendance *faible* n'existe pas en séparation de source, car une telle hypothèse produirait alors des résultats difficiles à interpréter. Ensuite, l'approche probabiliste réclame des connaissances sur les lois jointes qui sont difficiles à obtenir en pratique : impossible, par exemple, d'établir la loi de  $X + Y$  qui relie deux v.a.  $X$  et  $Y$  sans information sur la loi jointe  $p_{X,Y}$ . La représentation ensembliste est plus pauvre que la représentation probabiliste, mais elle permet une manipulation des variables aléatoires beaucoup plus aisée, et elle demande moins de connaissance statistiques sur ces variables et permet de traiter ainsi une plus grande classe de problème. Les techniques ensemblistes sont donc appropriées en traitement du signal.

Pour résoudre les problèmes de séparation de sources, nous avons utilisé des techniques d'analyse par intervalles. A notre connaissance, c'est la première fois que ces techniques ont été utilisées sur des critères statistiques. Le premier avantage des intervalles est la garantie de fournir toutes les solutions. En effet, nous obtenons toujours l'ensemble des solutions compatibles avec un système d'équations fixé et comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, cette information est loin d'être négligeable. Un atout majeur de ces outils ensemblistes est que la séparabilité ou l'identifiabilité d'un système peuvent être vérifiées a posteriori. En plus de la garantie des solutions, les techniques d'analyse par intervalles offrent une estimation convenable des solutions dans la mesure où elles sont peu sensibles à de mauvais conditionnements. Comme nous avons eu l'occasion de le préciser, les techniques ensemblistes perdent en efficacité lorsque le problème considéré augmente en dimension. En général, SIVIA est efficace jusqu'à 4 ou 5 paramètres recherchés et devient obsolète au delà de 6.

Par contre, il existe des techniques par intervalles plus élaborées (Contraction, Méthode de Newton par intervalles, etc.), non présentées dans ce travail, mais qui s'avèreraient plus efficaces pour des problèmes en grande dimension. Les développements actuels laissent d'ailleurs supposer que ces techniques vont encore se perfectionner, ne serait-ce que par l'amélioration des processeurs de plus en plus puissants. Cependant, nous n'avons pas utilisé ces techniques plus élaborées.

On a présenté une technique d'approximation floue garantie qui se révèle simple, peu coûteuse et robuste vis-à-vis de l'imprécision des données pour un problème non-linéaire, considéré comme difficile. Une solution originale est ainsi apportée à certaines limitations dont souffrent les techniques de type TS en vogue dans la communauté floue. Elle est garantie contrairement aux techniques de clustering. Aucune étape de « défuzzification » n'est nécessaire, ni calcul de gradient. L'un des principaux défauts des techniques de bisection utilisant l'analyse par intervalle est leur complexité exponentielle en la dimension des paramètres.



Deuxième partie

Traitement des biosignaux





**Objectifs scientifiques** L'application que j'ai choisie de présenter pour illustrer mes recherches est la détection d'événements dans des signaux biomédicaux non-stationnaires, en particulier l'électrocardiogramme fœtal (ECGf) et l'électromyogramme du diaphragme (EMGd). Les résultats sont le fruit d'un travail collaboratif de plusieurs années qui a impliqué C. Hérail (université d'Evry), C. Jutten (GIPSA-lab), D.T. Pham (GIPSA-lab), M. Verleysen (université catholique de Louvain) et bien sûr plusieurs cliniciens parmi lesquels A. Azancot, O. Sibony (Hôpital Robert Debré) et T. Similowski (Hôpital la Pitié-Salpêtrière).

Le préalable à ces études était la conception matérielle et logicielle d'un système d'acquisition et d'analyse multi-capteurs, dans lequel la sensibilité (indésirable) des réponses des capteurs est éliminée par séparation aveugle de sources, et non par des prouesses technologiques coûteuses. L'enregistrement continu de signaux physiologiques apparaît comme un instrument permettant d'obtenir une information permanente, objective et fiable, de façon simple, mais aussi comme une « boîte noire » nécessaire de nos jours sur des arguments sécuritaires et socio-culturels. Soulignons que le projet est évidemment multidisciplinaire<sup>6</sup> : il allie les compétences d'électroniciens, de traiteurs de signaux et de médecins-cliniciens. Il rentre de plus dans la politique de pluridisciplinarité du CNRS, et dans le programme prioritaire STIC-Santé du département. Le projet s'est concrétisé en juin 2004 avec la mise en place d'un consortium de recherche, soutenue par un financement ELESA de 15 K€ et regroupant plusieurs UFR grenoblois. A l'issue, un dépôt de brevet logiciel avec le CNRS a été déposé.

**Programme de recherche** Le but d'un tel dispositif est de rendre possible la surveillance de l'électrocardiogramme fœtal qui est un élément clé de la surveillance prénatale pour détecter d'éventuelles anomalies pouvant traduire un état de souffrance aiguë, nécessitant une prise en charge rapide afin d'éviter une évolution fatale ou l'évolution vers des séquelles graves et invalidantes. Cette observation est à l'origine d'une inflation du taux de césarienne avec extraction d'enfants bien portants (en France, il y a 25% de césariennes sur 700.000 naissances par an). L'ECGf pourrait être un outil fondamental pour :

- L'*obstétricien*, dans le cadre de la surveillance fœtale durant la grossesse et durant le travail. Les examens actuellement utilisés ne disposent pas d'une spécificité excellente, ce qui peut amener parfois à prendre des décisions telles qu'une extraction fœtale prématurée ou une césarienne durant le travail sans que celles-ci ne soient réellement nécessaires. L'ECG fœtal pourrait devenir l'examen de référence pour le fœtus ainsi qu'il l'est devenu chez l'adulte.
- Le *cardiopédiatre* pour diagnostiquer des arythmies cardiaques fœtales, mais aussi pour évaluer des thérapeutiques pharmacologiques utilisées pour traiter ces fœtus *in utero*.

L'autre application consiste en l'extraction de l'EMGd pour le diagnostic respiratoire ou pour la synchronisation de divers types d'appareil avec la commande ventilatoire reflétée par l'activité électrique du diaphragme, aujourd'hui réalisé en milieu clinique de façon invasive et mono-capteur. Cette dernière perspective d'application concerne essentiellement la ventilation mécanique dite « neuro-assistée ». Il a en effet été démontré [183] qu'il pouvait être utile d'asservir une machine d'assistance ventilatoire non pas à un signal de nature mécanique, mais à un signal de nature électrophysiologique.

Ces deux applications ont en commun les difficultés suivantes liées au nombre limité de capteurs :

- le positionnement des capteurs, conçus de taille réduite pour une meilleure résolution spatiale,
- la vue *partielle* du signal à extraire,
- les nombreux éléments parasites.

Nous avons proposé d'améliorer le confort de l'examen et le diagnostic

- en enregistrant le signal cardiaque du fœtus ou l'EMGd<sup>7</sup> de façon non-invasive,
- en résolvant le problème de la position du capteur,
- en s'affranchissant du déplacement des « organes » (le fœtus pour l'ECGf ou le diaphragme pour l'EMGd).

**Le prototype d'acquisition multi-capteurs** La création d'une base de données de patientes enceintes a été décidée à l'hôpital Robert Debré en 2000 pour répondre aux besoins spécifiques des services d'exploration fonctionnelle et de gynécologie-obstétrique de l'hôpital. Les signaux étaient enregistrés par un Doppler standard ne permettant que l'enregistrement des RCF, examen de référence encore aujourd'hui.

6. Il s'agit d'un projet à finalité *générique* : l'instrumentation et les méthodes peuvent être utilisées pour d'autres types de mesures.

7. l'EMGd est réalisé en plaçant des électrodes sous-cutanées ou par voie œsophagienne.

Néanmoins de nombreuses études référencées dans ce domaine faisait déjà état d'enregistrements à partir de dérivations X,Y et Z de Franck, principe issu de la vectocardiographie et radicalement différent du Doppler. Il était donc important de créer un dispositif d'acquisition multi-voies capable d'enregistrer un nombre de signaux bien plus grand que ceux habituellement utilisé en obstétrique. Le dispositif d'acquisition, dont on peut voir une photo figure 4.20, comprend 8 cartes conçues par C. Hérial munis de 9 amplificateurs, couplés au boîtier analogique au moyen d'optocoupleurs (2 par ampli.). L'ensemble est isolé dans un rack blindé. Les signaux sont enregistrés à partir d'électrodes de surfaces reliées au rack par des connecteurs Sub-D 25 et des câbles blindés de 2m. Les signaux multiplexés parviennent au PC pour le traitement du signal au moyen d'une carte d'acquisition National Instrument NI6070 E. Le dispositif permet d'acquérir simultanément 71 mesures différentielles ( $9 \times 8 - 1$  capteurs) avec une fréquence d'échantillonnage maximale de 1,2 MHz. Cette architecture ne permet pas de collecter toutes les mesures au même instant car les électrodes sont multiplexées aux amplificateurs. Un déphasage peut exister et être source d'erreur pour l'extraction des sources.



Figure 4.20: Rack blindé contenant les ampli.

L'utilisation de plusieurs électrodes, placés en réseaux, conduit à des dispositifs d'acquisition de signal qui ne sont pas réalisables par des moyens analogiques, mais accessibles uniquement par le traitement numérique du signal. Nous pouvons ainsi, par exemple, recombinaison des signaux, extraire ceux qui proviennent d'une direction donnée, refaire les mesures et recommencer périodiquement ou chercher les électrodes les plus favorables au sens du meilleur RSB par commutation électronique. Cet aspect sélection optimale de capteurs a donné lieu à plusieurs publications avec l'équipe DICE à Louvainx [211] : le but est d'exploiter le volume d'information provenant d'un réseau de capteurs (cf. aussi chap.2) et de tirer parti de la diversité spatiale (distribution de capteurs) et temporelle pour faciliter le traitement du signal ultérieur et en particulier la séparation des signaux.

L'utilisation de plusieurs électrodes, placés en réseaux, conduit à des dispositifs d'acquisition de signal qui ne sont pas réalisables par des moyens analogiques, mais accessibles uniquement par le traitement numérique du signal. Nous pouvons ainsi, par exemple, recombinaison des signaux, extraire ceux qui proviennent d'une direction donnée, refaire les mesures et recommencer périodiquement ou chercher les électrodes les plus favorables au sens du meilleur RSB par commutation électronique. Cet aspect sélection optimale de capteurs a donné lieu à plusieurs publications avec l'équipe DICE à Louvainx [211] : le but est d'exploiter le volume d'information provenant d'un réseau de capteurs (cf. aussi chap.2) et de tirer parti de la diversité spatiale (distribution de capteurs) et temporelle pour faciliter le traitement du signal ultérieur et en particulier la séparation des signaux.

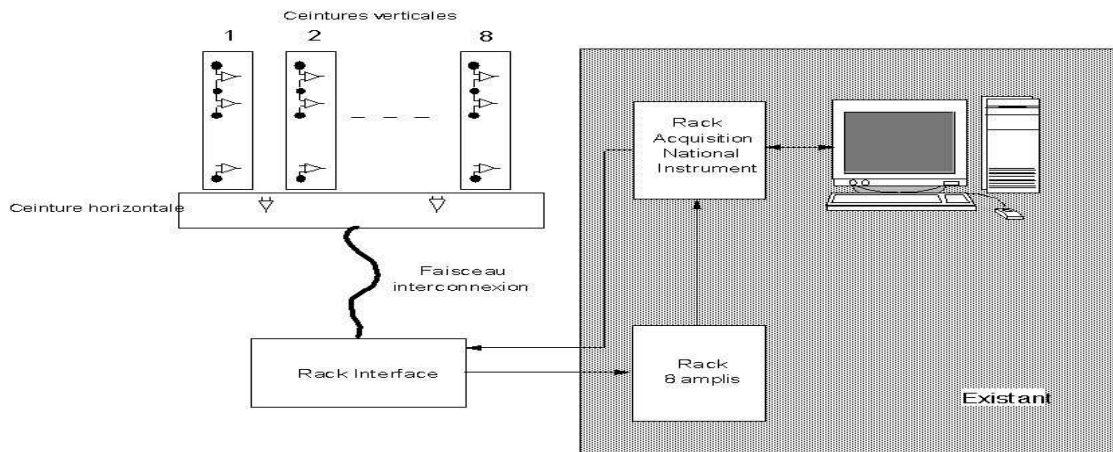


FIGURE 4.21 – Chaîne d'acquisition 71 voies. Une électrode « centrale » sert de repère de positionnement : il suffit de l'appliquer sous la poitrine de la mère. ; une autre de référence de potentiel (*ground*).

La conception d'un dispositif multi-capteurs présente donc une alternative extrêmement efficace, rendue possible grâce aux progrès effectués en micro-électronique, qui a fait ses preuves dans de nombreux domaines [149]. Ce prototype est le premier dispositif de ce type pour l'enregistrement des ECGf.

Dans la suite, nous définissons ce qu'est un événement physiologique, puis nous montrons comment nos algorithmes peuvent résoudre ces problèmes de détection.

# Extraction de l'électrocardiogramme du fœtus

## 5.1 Mesures de l'ECGf dans le domaine temporel

On peut considérer le muscle cardiaque comme un dipôle électrique unique qui peut être représenté par un vecteur à chaque instant de l'excitation. On recueille ces potentiels électriques à l'aide d'électrodes posées sur la peau. Si l'on relie par une courbe les extrémités de tous les vecteurs rapportés à une même origine, on obtient une trajectoire en trois dimensions : le *vectocardiogramme* (cf. Fig. 5.1). Le vectocardiogramme est constitué en général de 3 boucles correspondant à (i) la dépolarisation des oreillettes, (ii) la dépolarisation des ventricules et (iii) la repolarisation des ventricules. Le cœur étant à 3 dimensions, les vecteurs s'orientent dans l'espace. Leur projection se fait donc à la fois dans les plans frontal, sagittal et horizontal.

Dans l'ECG, un potentiel est positif et donc le tracé est dirigé vers le haut par référence lorsque le vecteur va vers l'électrode exploratrice, et réciproquement négatif lorsque le vecteur s'éloigne de l'électrode exploratrice. La projection du vecteur sur l'« axe de dérivation » détermine l'amplitude de l'ECG. La projection des vecteurs sur les axes de dérivation permet d'obtenir les tracés d'ECG.

L'allure typique de l'ECG d'un adulte est représenté sur la figure 5.2. Le signal est décomposé en 5 ondes qu'on nomme *complexe* PQRST. Chaque onde correspond à une contraction ou un relâchement d'une partie du coeur lors des battements. A partir ce type de relevé, les médecins sont capables de décrire le fonctionnement du coeur du patient. Ils s'appuient sur les amplitudes et les durées des différents segments, et sur les temps entre les différentes ondes. En admettant qu'un fœtus est un adulte en miniature, il est généralement que l'ECG du fœtus doit avoir la même allure mais à une fréquence plus élevée<sup>1</sup> (cf. Fig.5.2). Les caractéristiques métriques de l'ECGf ont été déterminées à partir d'électrodes de scalp à 36-42 semaines par Fowler<sup>2</sup>. La vitalité du fœtus

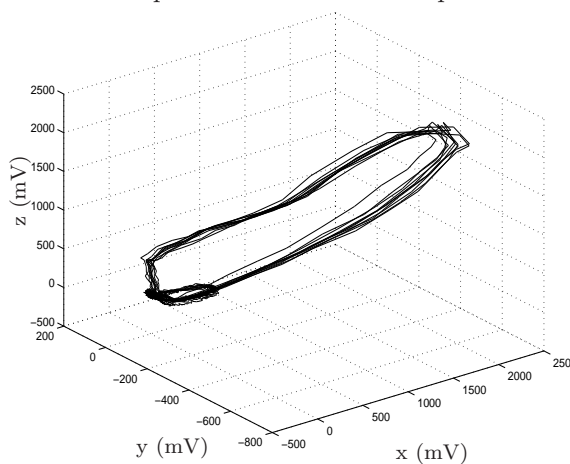


Figure 5.1: Vectocardiogramme adulte.

1. Historiquement, l'auscultation des battements du cœur fœtal a été pendant longtemps la seule preuve de vie du fœtus. Le développement de l'électronique a élargi les possibilités d'exploration de l'activité cardiaque et a donné naissance à l'enregistrement du rythme cardiaque fœtal par sonde Doppler et à l'électrocardiographie fœtale. En situation habituelle, le fœtus est en état de stress au cours de l'accouchement. Il est admis que le rythme cardiaque à lui seul ne fournit pas une information optimale sur l'état du fœtus *in utero* [181], notamment pendant le travail [187]. Par exemple, toute anomalie du RCF entraîne des manœuvres souvent invasives avec un pourcentage d'interventions trop élevé par rapport à l'état métabolique réel du fœtus puisque la distinction entre une réaction liée au stress et celle liée à l'hypoxémie reste très difficile. L'analyse directe de l'ECGf a été mis au point pour palier ce manque de spécificité du RCF. Les premiers enregistrements de l'ECGf remontent à 1906 par Cremer [37] mais la description originale de l'ECG de l'adulte était publiée dès 1908 par Einthoven [58].

2. R.S. Fowler and VC.D. Finlay. The electrocardiogram of the neonate. Bookchapter in *The fetal circulation*, pp. 72-80, 1978.

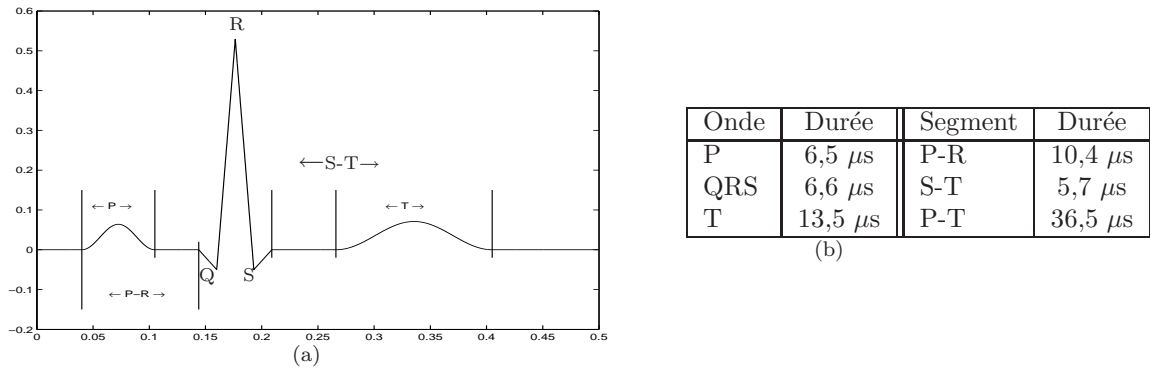


FIGURE 5.2 – (a)Allure typique d'un ECG d'adulte. (b) Durées des segments.

se manifeste dans la *variabilité* de l'activité cardiaque [6, 181]. Il est donc intéressant de pouvoir quantifier cette variabilité au moyen d'indicateurs statistiques sur des paramètres temporels ou spectraux.

A partir de mesures non invasives à l'aide d'électrodes placées sur l'abdomen et le thorax de la mère, l'objectif est de relever l'ECGf le plus précisément possible. Cependant, le modèle utilisé doit rester très général, pour permettre de mettre en évidence les pathologies. Les mélanges typiques relevés ont l'allure suivante :

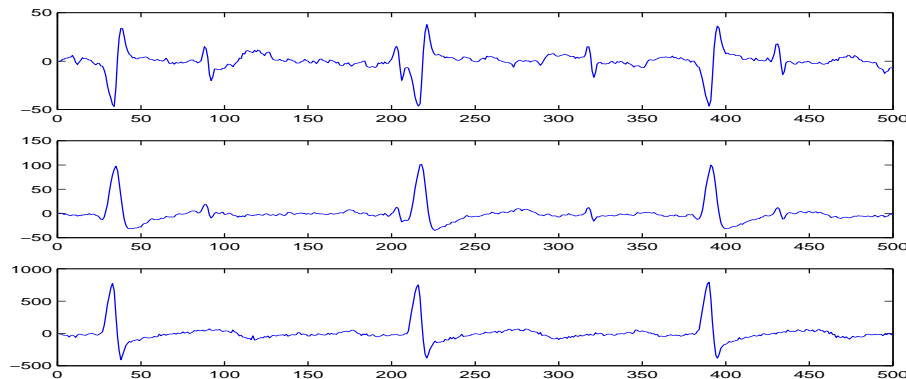


FIGURE 5.3 – Mesures non invasives de l'ECGf.

Ces signaux sont uniquement une faible partie temporelle des relevés disponibles. Les deux premiers signaux sont des enregistrements abdominaux et le troisième est un enregistrement thoracique sur lequel on voit quasi exclusivement l'ECG de la mère (ECGm). En revanche, sur les deux premiers, on retrouve une contribution de la mère comme dans le dernier enregistrement mais avec une amplitude moindre, et à un rythme environ deux fois plus élevé on peut voir l'ECG du fœtus. Nous retrouvons sur ces relevés des allures caractéristiques des ECG de la figure 5.2. Ces signaux sont relativement lisibles car ils ont été prétraités.

Nous nous heurtons à plusieurs problèmes, notamment l'ECGf est d'amplitude assez faible : environ un dixième de celui de la mère en raison des différentes atténuations dues aux tissus musculaires. L'ECGf est parfois de l'ordre de grandeur du bruit. Il existe différentes approches [222, 42] qui s'accordent toutes à modéliser l'ECG par un vecteur champ électrique à trois dimensions. Par conséquent, la représentation d'un ECG se fait à l'aide de trois signaux linéairement indépendants. Mais ces trois signaux sont statistiquement dépendants car ils ont la même origine. Avec des paires d'électrodes nous mesurons des différences de potentiels qui sont des projections de ce champ.

Il est réaliste d'admettre que les signaux de l'ECGf sont statistiquement indépendants des signaux de la mère. Ensuite en utilisant un modèle purement résistif des tissus musculaires, les signaux captés sont des mélanges instantanés des trois signaux de l'ECG de la mère et des trois signaux composant le signal fœtal. Il existe d'autres

sources supposées indépendantes des six précédentes, parmi lesquelles les contractions du diaphragme<sup>3</sup> et de l'utérus. En définitive, les signaux mesurés sont des mélanges instantanés de trois sources de l'ECG de la mère, de trois sources du fœtus, et de sources de bruits. Le modèle final n'est pas parfaitement celui du cadre de la séparation de sources, en effet les signaux d'un même ECG ne sont pas statistiquement indépendants entre eux. Mais, les méthodes de séparation permettent de séparer les sources en trois sous-groupes. Le premier représente l'ECGm avec trois signaux les plus statistiquement indépendants possibles. Le second a la même structure pour le fœtus. Et le dernier correspond aux sources de bruits.

## 5.2 Mesures disponibles de l'ECGF

### 5.2.1 Signaux simulés

Dans le cadre du projet BLISS, un simulateur a été réalisé. Il permet à partir d'un modèle du champ électrique de l'ECG, de choisir la position des électrodes, les amplitudes des différents vecteurs champs électriques du cœur du fœtus, de la mère et des sources de bruit telles que l'utérus et le diaphragme. La Figure 5.4 présente les sorties du simulateur pour 6 dérivations à une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz. On observe une différence de gain, ainsi que la présence de bruits résiduels.

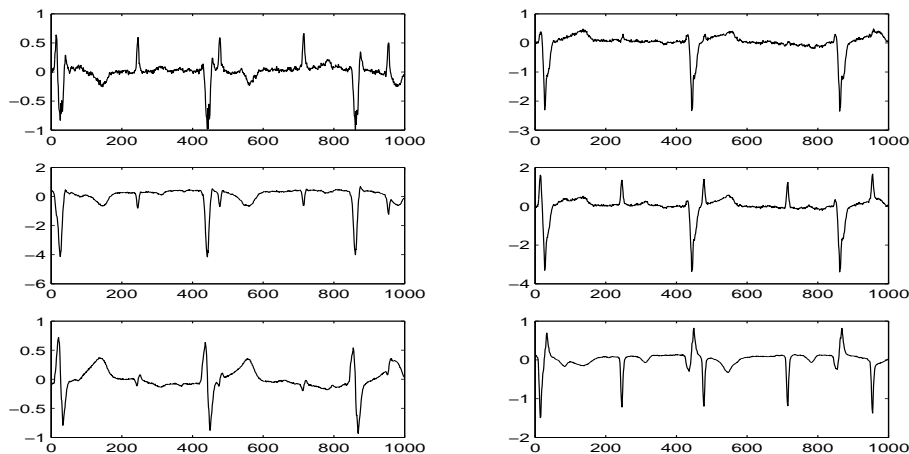


FIGURE 5.4 – Enregistrements simulés de l'ECGF.

La figure 5.5 montre dans les deux premières colonnes les sources estimées à partir des mélanges simulés de la figure 5.4, en vert pour l'algorithme JADE et en rouge avec la minimisation de l'information mutuelle avec un modèle de séparation pour signaux non-stationnaires [161]. Pour la simulation l'amplitude des signaux fœtus est 10 fois plus faible que ceux de la mère.

Nous remarquons que les deux méthodes fournissent trois sources pour le fœtus et la mère. Les sources sont similaires pour le fœtus et la mère mais à des fréquences différentes. L'avantage de la prise en compte du caractère non stationnaire est visible sur la régularité des signaux. Le tracé de droite montre les trois signaux de l'ECG retrouvés avec JADE. On voit que tous les signaux ont une influence sur chaque partie de l'ECG. Compte tenu de l'indétermination d'échelle, la reconstruction pour retrouver l'onde de la figure 5.2 sera délicate. Si nous diminuons l'amplitude des signaux du fœtus dans les signaux simulés, la séparation donne les mêmes résultats mais requiert un nombre d'itérations plus grand.

3. Des variations liées à l'activité respiratoire sont observées dans le rythme cardiaque. Ce phénomène respiratoire est engendré par les mouvements spontanés abdominaux qui agissent directement sur la modulation du rythme cardiaque. Lors d'une inspiration, la fréquence cardiaque est augmentée et cette augmentation est liée au réflexe de Bainbridge. Lors d'une inspiration, on observe un *ralentissement* de la fréquence cardiaque.

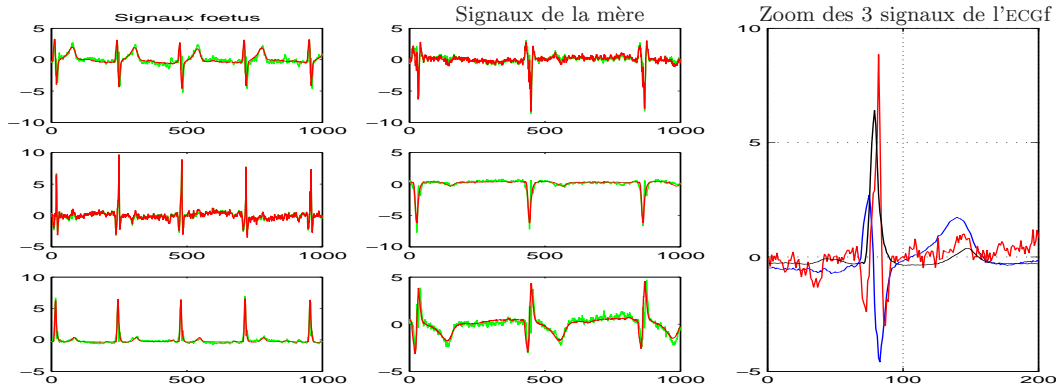


FIGURE 5.5 – Sources estimées dans le cas de mélanges non bruités. Les six courbes de gauche représentent les sources estimées, attribuées à la mère et au fœtus.

## 5.2.2 Signaux réels

Des données ont été relevées par notre système d'acquisition. Nous disposons de mesures thoraciques et mesures abdominales comme le montre la figure 5.6.

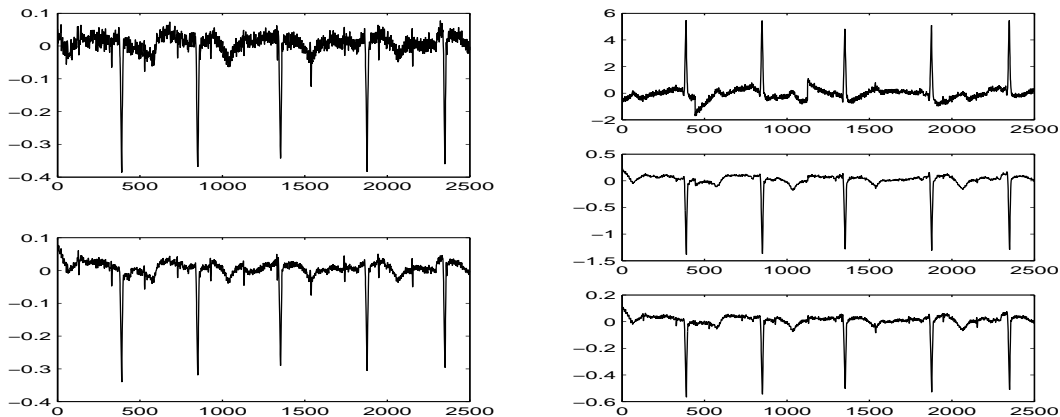


FIGURE 5.6 – Enregistrements réels de l'ECGf.

Les signaux de gauche Fig.5.6 sont des relevés abdominaux qui comportent principalement l'ECGm et une partie de l'ECGf, à un rythme deux fois plus élevé. Les trois signaux de droite sont des relevés thoraciques dans lequel l'ECG de la mère est très prépondérant. Pour ces signaux, nous avons seulement réalisé un débruitage préalable pour supprimer la ligne de base des signaux. On peut voir l'ECGf dans les deux relevés de gauche, mais les mesures sont de qualité très médiocres. Ainsi dans les signaux recueillis, l'essentiel de la puissance provient de l'activité électrique de la mère ce qui rend difficile la séparation de sources et le débruitage, les signaux dus à l'activité foetale ayant une faible contribution.

La figure 5.7 montre le résultat de la séparation des enregistrements de la figure 5.6 avec un modèle non-stationnaire des sources et les solutions de l'algorithme JADE.

En analysant les résultats de la figure 5.7, nous pouvons voir que les deux algorithmes fournissent des solutions très proches. L'ECG du fœtus est principalement localisé dans les signaux 3 et 6, on peut voir l'allure typique d'un complexe ECG se dessiner avec les différentes ondes mais il faut rester prudent car la reconstruction pour parvenir à une allure de la figure 5.2 n'est pas évidente comme on l'a vu avec les signaux simulés. La figure 5.8 met en évidence que la maximisation de la vraisemblance avec un modèle de signaux non-stationnaires permet de diminuer les oscillations parasites dans les signaux. En vert, nous avons le résultat de JADE et en rouge celui



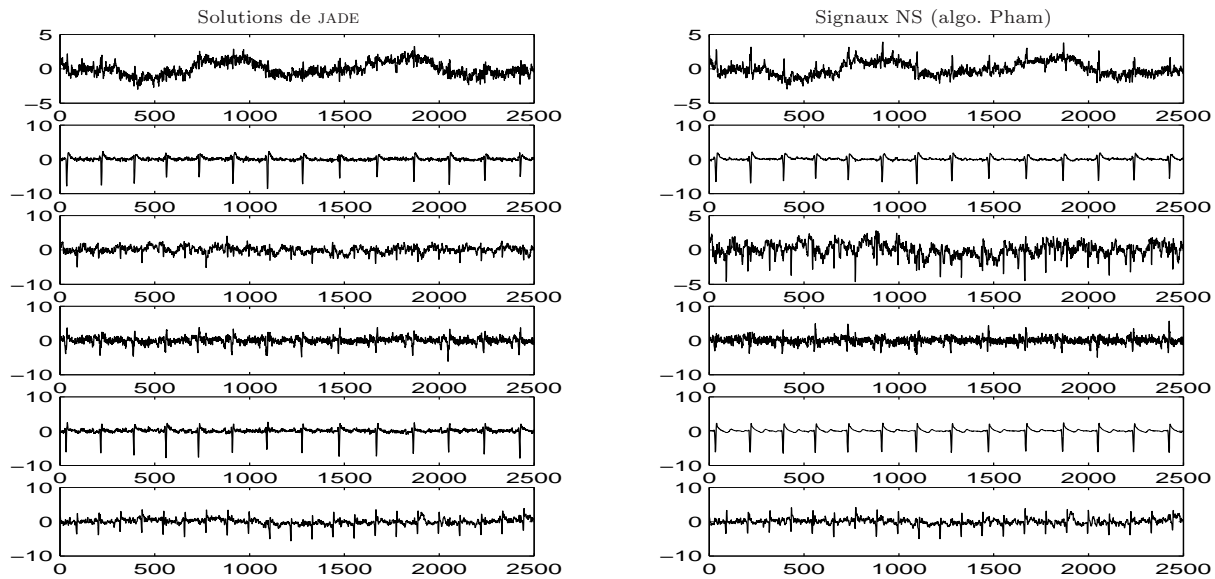


FIGURE 5.7 – Séparation des enregistrements réels.

de l'algorithme de Pham. Le premier signal est un zoom de la 5ème source qui appartient à l'ECG de la mère, le second est une partie du signal 6 qui est attribué au fœtus.

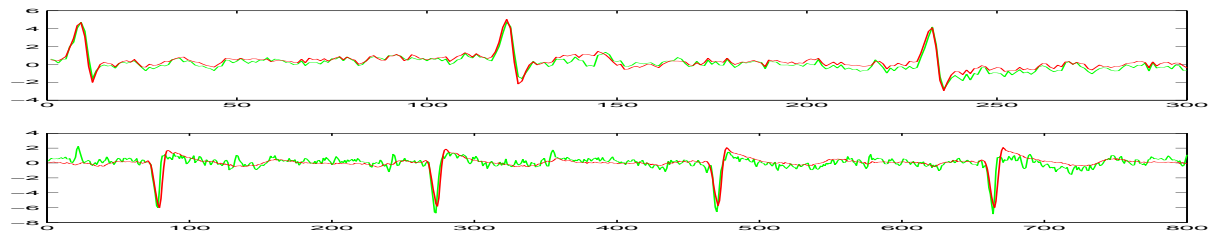


FIGURE 5.8 – Zoom sur les résultats de séparation.

La figure 5.9 montre le résultat de la séparation sur une autre série de signaux réels : les solutions de l'algorithme JADE et les solutions obtenues par le modèle non-stationnaire de Pham.

Pour les résultats de la figure 5.9, nous pouvons uniquement affirmer que nous sommes capables de retrouver le rythme cardiaque du fœtus. L'ECGm (signaux 1 et 3) est mieux reconstitué avec l'algorithme non-stationnaire. Pour l'ECG du fœtus, nous notons une diminution du bruit sur la seconde source.

A la vue de l'ensemble des résultats de l'application de la séparation de sources à l'extraction de l'ECG du fœtus, nous pouvons dire que le modèle non-stationnaire permet d'améliorer la qualité de la séparation. Notamment le point principal est la réduction du bruit. Mais, nous ne parvenons pas à notre objectif de mesurer les paramètres de l'ECG du fœtus. Le bruit gêne considérablement l'algorithme de séparation dans le cas de signaux réels.

## 5.3 Débruitage des signaux

### 5.3.1 Signaux simulés

Nous allons dans un premier temps tester le débruitage par ondelettes pour la séparation de sources sur des signaux artificiels créés à partir d'un simulateur : celui-ci nous permet de régler ainsi le rythme de l'ECG de la mère ainsi que l'amplitude et le rythme de l'ECG du fœtus. Il permet aussi de façon facultative de rajouter



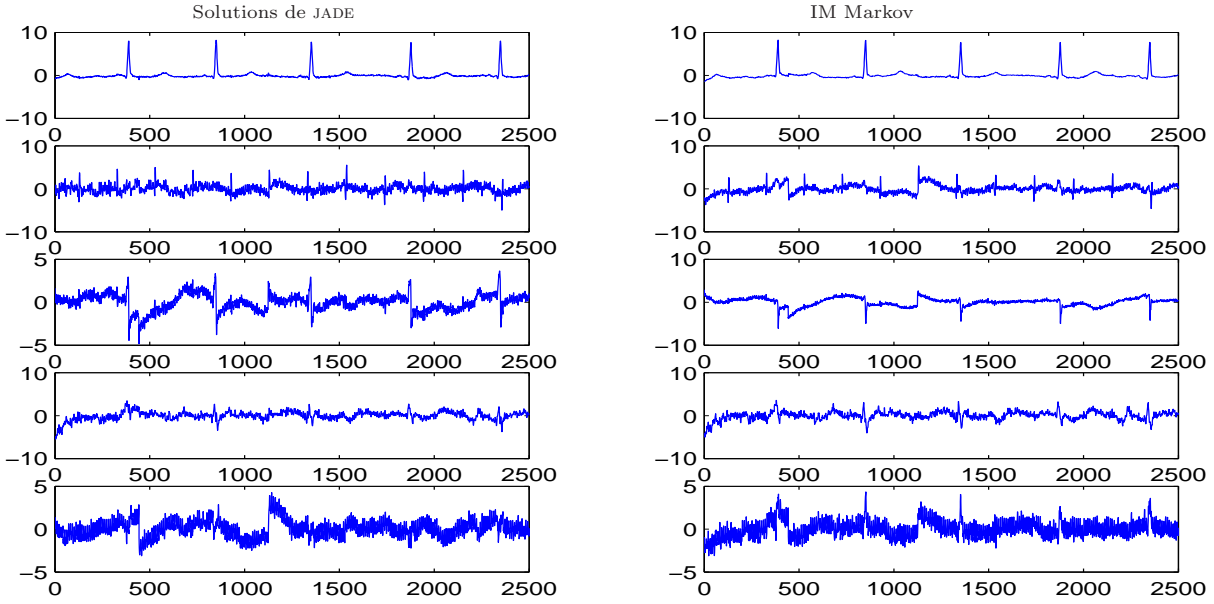


FIGURE 5.9 – Séparation des mesures réelles de l'ECGf.

d'autres sources telles que l'activité électrique de l'utérus et du diaphragme. Dans nos simulations, ne sont présents que les ECG de la mère et du fœtus.

Plaçons-nous dans un cas plus défavorable où un bruit additif blanc gaussien vient perturber les observations (cf. Fig. 5.10). Les observations ont un rapport signal sur bruit de 10 dB. On constate alors, quelle que soit la méthode utilisée, que la séparation n'est pas correctement effectuée : les signaux dus à la mère sont relativement bien séparés, mais ceux dus au fœtus sont noyés dans un bruit très important dans le cas de la nouvelle méthode ou inexistant dans le cas de l'amélioration.

Pour comprendre ce phénomène, nous allons nous intéresser à la matrice de séparation obtenue et plus particulièrement au produit de celle-ci par le bruit :  $B\mathbf{b}$ . On constate que ce produit prend une amplitude considérable en terme de puissance vis-à-vis de la puissance des sources estimées (cf. Fig. 5.11). En effet, la puissance du bruit dans les sources estimées est donnée par  $B^{*2} \hat{\sigma}_{\mathbf{y}}^2$ , donc pour une source on a  $\sigma_i^2 = \sum_j B_{i,j}^2 \sigma_j^2$ . Mais ce phénomène ne semble pas lié de façon simple au conditionnement de la matrice de mélange. Pour le montrer, plaçons-nous dans un cadre académique à deux sources  $s_1$  et  $s_2$  de puissance unitaire. La matrice de mélange est choisie égale à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Les deux valeurs propres valent toutes les deux 1, la matrice est donc bien

conditionnée et son inverse est  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi, pour des observations corrompues par un bruit blanc gaussien de puissance  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ , le rapport signal sur bruit de la source 2 est divisé par deux par rapport à celui des observations. Pour obtenir un bon conditionnement du mélange vis-à-vis du bruit, il semble donc qu'il soit nécessaire d'avoir peu de coefficients dominants les autres sur une ligne de la matrice  $B$  de façon à limiter l'importance du bruit.

De plus dans le cadre de l'extraction de l'ECG du fœtus, l'emplacement des capteurs, donc l'allure des observations, est primordial : il est nécessaire pour obtenir une bonne séparation d'avoir des observations très différentes.

### 5.3.2 Signaux réels

Sur des relevés expérimentaux, la ligne de base peut ne pas être horizontale à cause de mauvais contacts des électrodes, de la respiration, etc. Nous proposons une méthode pour éliminer la ligne de base si celle-ci a une fréquence inférieure à celle du rythme cardiaque (ce qui est souvent le cas en pratique) : on décompose le signal

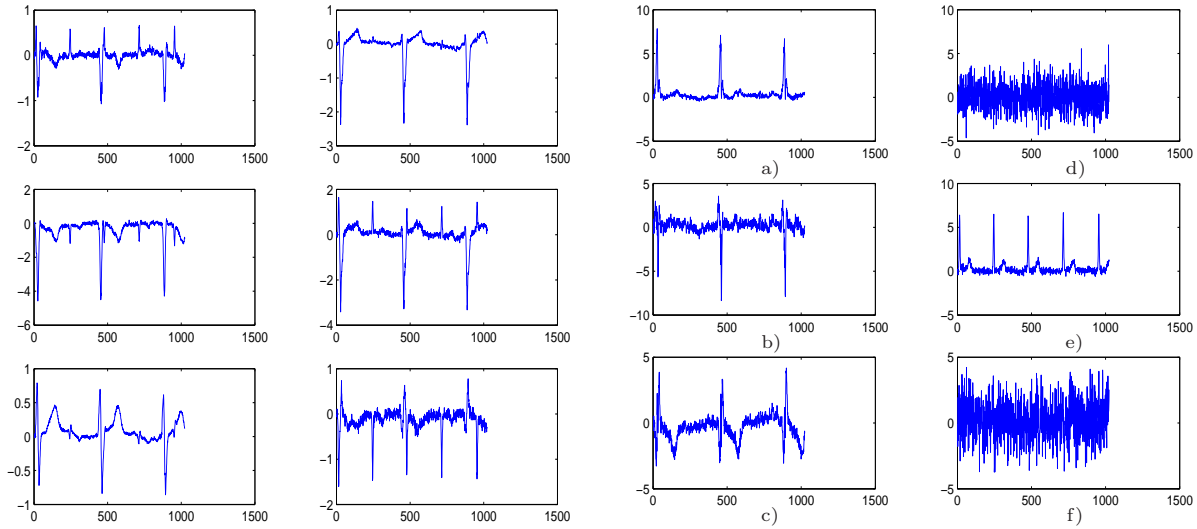


FIGURE 5.10 – Extraction de l'ECG du fœtus à partir d'observations bruitées. Les six courbes de gauche sont les observations bruitées. Les courbes de droite sont le produit de la matrice de séparation  $B$  par les observations bruitées.

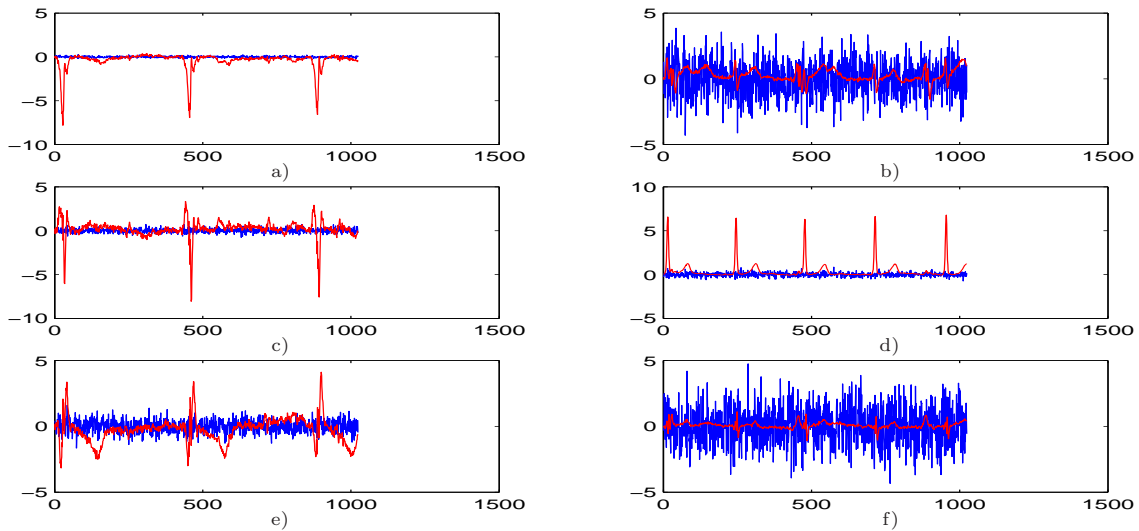


FIGURE 5.11 – Étude du bruit dans la séparation. Sont représentés en rouge le produit de  $B$  par les mélanges non bruités et en bleu le produit de  $B$  par le bruit des observations.

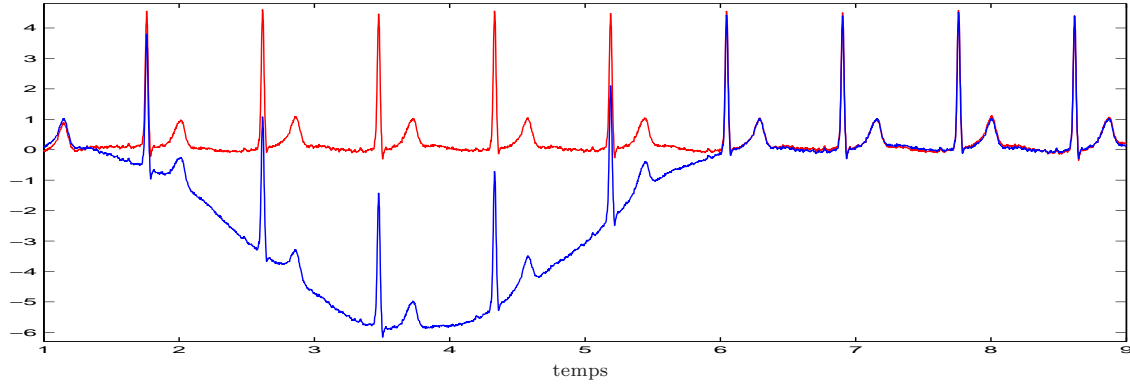


FIGURE 5.12 – Illustration de la présence néfaste de la ligne de base (courbe bleue). La courbe rouge représente l'ECG une fois cette ligne de base supprimée.

jusqu'à l'échelle correspondant au rythme cardiaque et on reconstruit l'ECG en annulant tous les coefficients de l'approximation correspondante (cf figure 5.12).

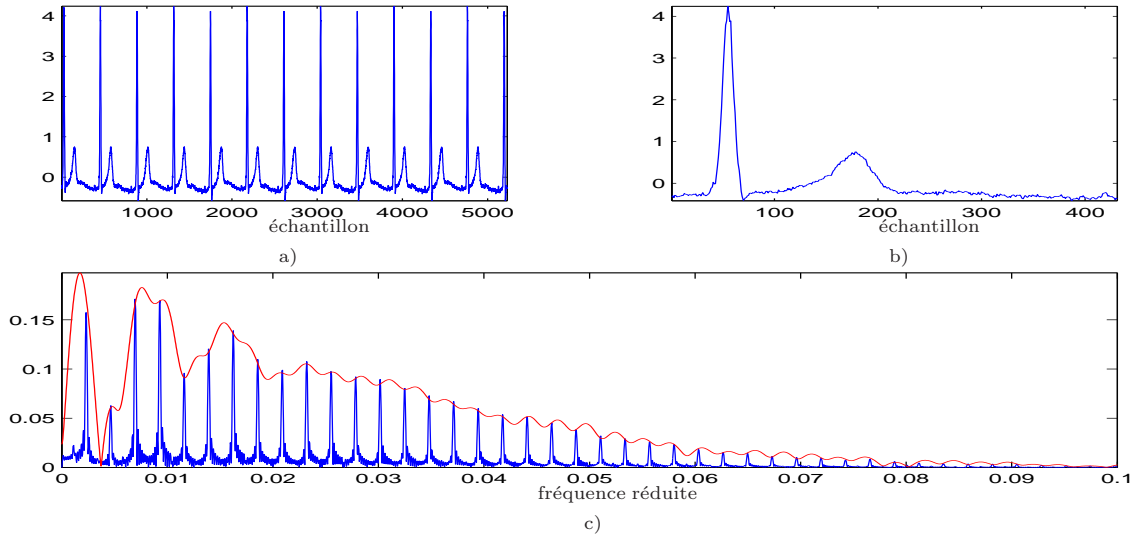


FIGURE 5.13 – Etude fréquentielle de l'ECG : a) une série de battements, b) un battement c) spectre d'une série de battements (courbe bleue) et d'un battement (courbe rouge).

Nous proposons de plus d'adapter la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  au spectre de l'ECG : choisir une fréquence de Shannon ( $F_e/2$ ) de l'ordre de deux fois la fréquence maximale significative présente dans un ECG semble être un bon compromis entre rapport signal sur bruit et bonne estimation de la puissance du bruit qui nécessite l'estimation de  $\sigma$  [134].

Nous espérons aussi, en raison du faible encombrement spectral de l'ECG, pouvoir sur-échantillonner les enregistrements.

Soit  $y[k] = s[k] + b[k]$ ,  $k = 0, \dots, 2N - 1$  le signal bruité ( $N$  est supposé pair). On en extrait deux signaux

$$\begin{cases} y_0[l] = s_0[l] + b_0[l] = s[2l] + b[2l] \\ y_1[l] = s_1[l] + b_1[l] = s[2l + 1] + b[2l + 1] \end{cases} \quad (5.1)$$

pour  $l = 0, \dots, N - 1$ .  $b_0$  et  $b_1$  sont encore des bruits blancs gaussien si  $b$  l'est.

Leurs transformées de Fourier  $Y_0[f]$  et  $Y_1[f]$  vérifient

$$\begin{cases} Y_0[f] = S_0[f] + B_0[f] = S[f/2]/2 + B_0[f] \\ Y_1[f] = S_1[f] + B_1[f] = S[f/2]/2 \times e^{j2\pi f/2} + B_1[f] \end{cases} \quad (5.2)$$

ainsi

$$\hat{S}[f] = \frac{Y_0[f] + Y_1[f] e^{-j2\pi f/2}}{2} = \frac{S[f/2]}{2} + \frac{B_0[f] + B_1[f] e^{-j2\pi f/2}}{2} \quad (5.3)$$

d'où

$$\hat{s}[l] = s[2l] + b_0[l]/2 + b_1^*[l]/2 \quad (5.4)$$

où  $b_1^*[l]$  est un bruit blanc gaussien de mêmes propriétés que  $b_1[l]$ . Ceci nous a permis de multiplier par 2 le rapport signal sur bruit en divisant la puissance du bruit par 2. Ce procédé est généralisable à plus de 2 signaux sous-échantillonnés, et nous présentons une illustration à la figure 5.14 sur des signaux artificiels. Il faut cependant bien faire attention à ne pas trop sous-échantillonner pour ne pas risquer un repliement de spectre.

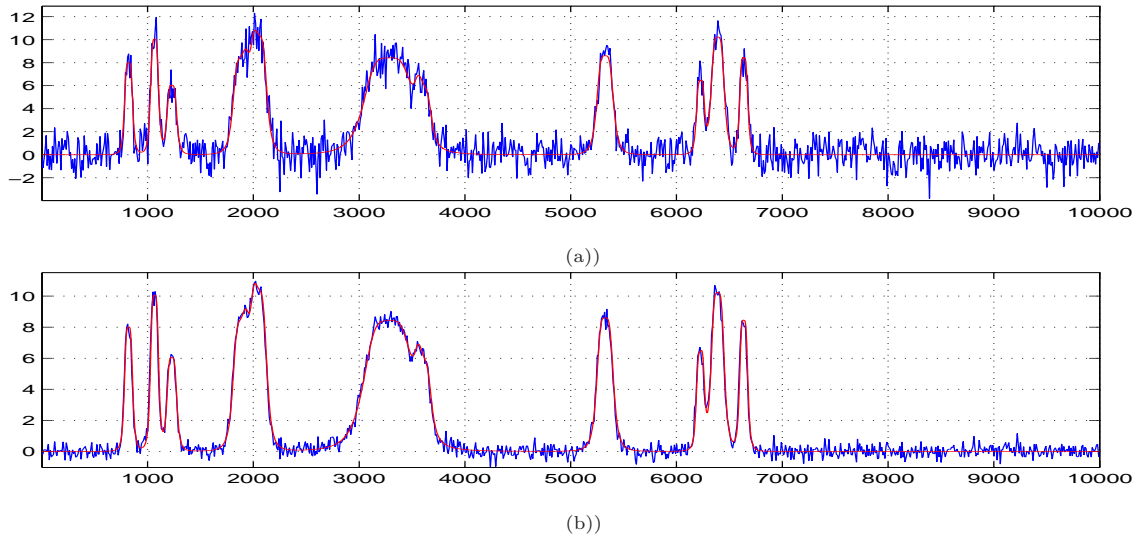


FIGURE 5.14 – Débruitage préalable : a) le signal bruité a un RSB de 10 dB (courbe bleue), le signal non bruité est représenté en rouge, b) le signal débruité voit son RSB augmenter de 10 dB pour 20 signaux sous-échantillonnés (courbe bleue).

Au vue des résultats que fournit l'étude précédente, on choisit pour débruitage pré-séparation celui qui fournit la meilleure séparation, c'est-à-dire le débruitage dur de la transformée en ondelettes stationnaire. Le débruitage pré-séparation est effectué jusqu'à l'échelle 5 pour la méthode de Paraschiv-Ionescu et son amélioration. Quant aux débruitages post-séparation, ils sont effectués respectivement aux échelles 6 et 5 pour les sources. Le résultat de ces traitements, donné sur la figure 5.15.a, montre que le débruitage utilisé est très efficace. La décomposition en ondelettes (bi-orthogonales) permet d'estimer puis de supprimer la ligne de base de l'ECG (Fig.5.15.b). L'extraction du complexe PQRST est obtenu en détectant l'onde R, puis en réhaussant le complexe sur un intervalle d'environ 36,5 ms (durée moyenne d'un ECGf). Un second débruitage de type SURE supprime le bruit résiduel et donne l'ECGf (cf. Fig.5.15.b).

## 5.4 Analyse de l'électrocardiogramme fœtal

### 5.4.1 Détection des complexes QRS

Cette section aborde la détection des complexes QRS en vue de segmenter l'ECG en trames définissant chacune un cycle cardiaque. De nombreuses méthodes existent pour détecter efficacement le QRS et donc caractériser

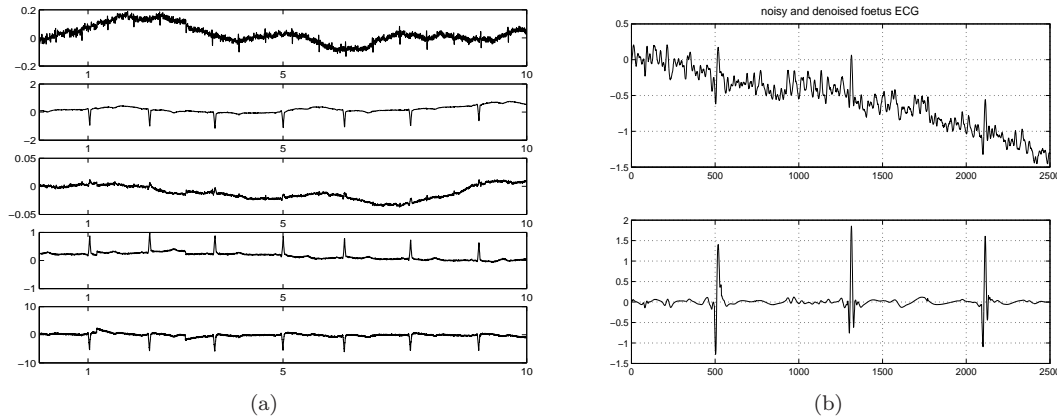


FIGURE 5.15 – (a) Extraction de l'ECGf à partir des sources débruitées estimées avec l'algorithme de séparation NS de Pham, (b) ECG obtenu après suppression de la ligne de base, amplification du PQRST et post-débruitage par ondelettes (publié dans ISSPA'2003 [209]).

la fréquence cardiaque. Chaque méthode possède ses avantages et ses inconvénients en terme de robustesse, de coût de calcul ou de complexité. Nous exposerons plusieurs méthodes tirées de la littérature et insisterons plus particulièrement sur nos propres contributions.

Les traitements effectués ici visent à repérer les positions des QRS : les filtrages apportés au signal dans ce contexte ne seront pas réutilisés par la suite (notamment pour la segmentation à l'intérieur d'une trame). Pour finir ce chapitre, on compare les résultats de la détection des complexes QRS par les différentes méthodes proposées. On veut arriver au final à un maximum de QRS détectés et pour tous les fichiers de notre base garantir que la plupart des QRS seront correctement détectés avec peu de fausses alarmes.

La majorité des méthodes utilise le calcul des dérivées, puis un seuillage, avec des variantes faisant intervenir d'autres caractéristiques (dérivée seconde, amplitude, etc.). Ces multiples méthodes se différencient par leur plus ou moins grande sensibilité au bruit, perturbation de la ligne isoélectrique, etc. D'autres méthodes, plus récentes, ont vu le jour depuis une dizaine d'années et sont basées, par exemple, sur l'utilisation des ondelettes ou des réseaux de neurones [157].

Le 50 Hz et le décalage dans la ligne de base sont les principales sources de bruit pour la détection du QRS. Cependant, même lorsque la qualité du signal est médiocre et que de nombreuses caractéristiques de l'ECG ne peuvent pas être utilisées, le complexe QRS peut encore être mesuré. La seule contrainte est que la forme générale du complexe QRS doit être préservée. Le principal objectif des prétraitements est donc de supprimer le 50 Hz et le bruit BF de manière à ce que la portion QRS de l'ECG soit détectée précisément. Le filtrage doit atténuer l'énergie du signal dans les bandes suivantes :

- 0-5 Hz : DC, décalage dû aux ondes PR et ST,
- 49-51 Hz : bruit de puissance
- 99-101 Hz : harmoniques du bruit de puissance produit par les équipements électriques périphériques.

#### 5.4.1.1 Différentiation

Une technique simple pour supprimer la ligne de base du signal brut  $x[n]$  consiste à estimer la dérivée première du signal par  $\Delta x[n] = \{x[n+1] - x[n-1]\}/2$ . De cette façon, les bords des portions QR et RS du complexe ECG sont révélés. L'information dérivée est ensuite élevée au carré puis lissée par une moyenne glissante pour réhausser les segments QR ou RS. On supprime ainsi la ligne de base presque complètement (cf. Fig.5.16) parce qu'en absence de transitoires, la ligne de base a une très petite dérivée première. Cette technique fonctionne très bien en l'absence de bruit HF ou de rupture brusque dans le signal, car la dérivation accentue l'effet du bruit HF et peut masquer des caractéristiques importantes. Pour s'en assurer, il suffit de prendre une source de bruit sinusoïdale  $n(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ , où  $A$  est l'amplitude,  $\omega$  la fréquence angulaire et  $\theta$  une phase. Alors  $\frac{dn}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \theta)$ . L'amplitude du signal dérivé est proportionnelle à la fréquence.

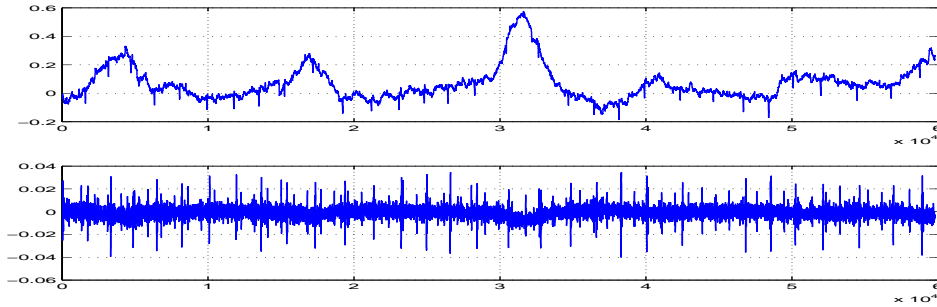


FIGURE 5.16 – Résultat de la suppression de la ligne de base : (a) observations, (b) moyenne glissante.

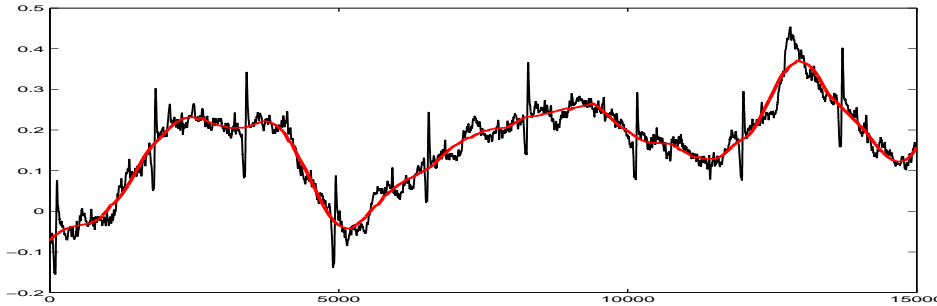
#### 5.4.1.2 Filtre prédictif linéaire par moindres carrés

Cette technique d'approximation de courbe estime les composantes à variation lente du signal ECGf telles que la ligne de base, les segments ST et PR. La différence retient les complexes QRS et le bruit HF. Une courbe polynômiale de degré  $m$

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_m t^m, \quad (5.5)$$

où  $t = \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$  est ajustée sur une fenêtre de  $2\ell + 1$  échantillons du signal ECGf. Des valeurs typiques du degré d'approximation  $m$  ainsi que la taille de la fenêtre  $2\ell + 1$  sont 15 et 3 respectivement. Les coefficients de  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$  dans (5.5) sont calculés directement sans algorithme d'apprentissage. L'équation (5.5) s'écrit aussi en notation matricielle :

$$H\mathbf{c} = \mathbf{y} \quad (5.6)$$

FIGURE 5.17 – Approximation  $f(t)$  du contenu BF d'un signal ECG.

où  $H = \{h_{ij} = t^j\}$  est une matrice rectangulaire  $(2\ell + 1) \times m$  et  $y_t = f[t], t = 0, 1, \dots, 2\ell - 1$  ce qui revient à  $\mathbf{c} = H^+ \mathbf{y}$  dans laquelle  $H^+$  est la pseudo-inverse de  $H$  définie par  $H^+ H = I$ .  $H$  étant mal-conditionnée, la méthode numérique la plus fiable pour calculer  $H^+$  est d'utiliser un algorithme de décomposition en valeur singulière :  $H = U \Sigma V^T$ , où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthonormales et  $\Sigma$  est diagonale [163]. La pseudo-inverse est calculée à partir de

$$H^+ = V \Sigma^{-1} U^T. \quad (5.7)$$

De (5.5), le milieu de la courbe  $f[0]$  est une approximation de la valeur de la ligne isoelectrique, la fenêtre est alors décalée d'un échantillon, et le processus est répété. Sachant que  $f[0] = c_0$  calculé simplement par

$$c_0 = \mathbf{h}_0^+ \mathbf{y}, \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{h}_0^+$  est la première ligne de  $H^+$ . Etant donné que  $\mathbf{y}$  est décalé d'un échantillon, (5.8) est une simple convolution qui peut s'écrire sous la forme d'un filtre RIF non causal

$$f[0] = \sum_{i=0}^{2\ell} h_0^+[i] y_i, \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{h}_0^+$  est le vecteur de coefficients du filtre. Un exemple d'approximation est donné Fig.5.17.

### 5.4.1.3 Filtrage optimal

Après suppression de la ligne de base, le RSB peut être amélioré par filtrage passe-bas. Le but ici est de réaliser un filtre qui maximise le RSB tout en préservant les informations de forme importantes sur le QRS, ceci en optimisant les caractéristiques du filtre, de façon par exemple à ce qu'il s'ajuste le mieux possible au spectre du signal ECG. Une contrainte supplémentaire sur la réalisation du filtre est qu'il soit linéaire sur la bande-passante. Or, le spectre du signal est inconnu et varie avec le temps au fur et à mesure que les ondes PR et ST changent. Une méthode simple consiste à estimer le « vrai » spectre des complexes ECG (cf. courbe en rouge de la figure 5.18.c).

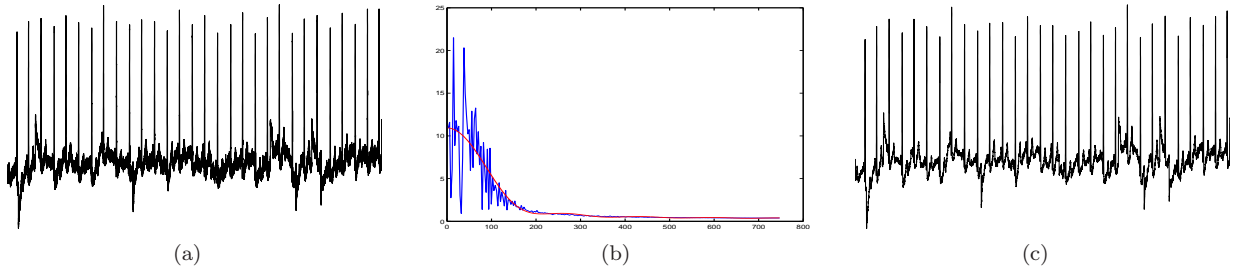


FIGURE 5.18 – Filtrage par lissage optimal de spectre : (a) signal observé bruité (b) approximation lisse  $H(k)$  du spectre moyenné  $X(k)$  (c) signal filtré.

Pour cela, on calcule d'abord le spectre discret  $|X(k)|$  en utilisant la TFD, qui est ensuite approximé en utilisant un polynôme de Chebyshev  $H(k)$ . Les coefficients du filtre linéaire souhaité  $h(n)$ ,  $n = 0, \dots, 2m$  qui présente un spectre lissé  $H(k)$  peuvent être calculés directement en utilisant les expressions suivantes :

$$h(n) = \frac{X_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} |X(k)| \cos\left(\frac{2\pi k(n-m)}{N}\right) \quad (5.10)$$

où  $2m + 1$  est la longueur du filtre. Pour gagner en efficacité, les valeurs de la fonction cos dans (5.10) peuvent être calculées récursivement :

$$\begin{aligned} r(k, n) &= \cos(2\pi k(n-m)/N) \\ s(k, n) &= \sin(2\pi k(n-m)/N) \\ r(k+1, n) &= r(1, n)r(k, n) - s(1, n)s(k, n) \\ s(k+1, n) &= r(1, n)s(k, n) + s(1, n)r(k, n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pour une valeur  $n$  donnée,  $r(1, n)$  et  $s(1, n)$  sont évalués directement à partir de (5.11). Les termes  $r(k+1, n)$  et  $s(k+1, n)$  sont ensuite calculés pour  $k = 1, 2, \dots, N/2 - 2$  en utilisant la relation récursive. Finalement, on forme les produits  $|X(k)|r(k, n)$  et on les additionne dans le second terme de (5.10). Le processus est répété pour tout  $n = 1, \dots, 2m$ . Les filtres  $h(n)$  sont symétriques autour de zéro, ce qui nous assure une réponse linéaire en phase. Le signal filtré Fig.5.18.b a un bruit résiduel minimal, mais la forme du segment ST est altérée. Il y a donc quelques dangers à utiliser cette technique en pratique.

### 5.4.1.4 Filtre en peigne

Une bonne partie du spectre fréquentiel de l'ECG se situe entre 2,5 et 65 Hz. Le domaine fréquentiel du QRS est entre 10-40 Hz. La réponse d'un filtre maximisant le SNR du QRS est un filtre passe-bande, comme spécifié Fig. 5.19.

Son implémentation directe avec un filtre optimal RIF requiert 141 coefficients, il est donc surtout dédié à des fréquences d'échantillonnage faibles comme il est montré Fig.5.20.a, pour une fréquence d'échantillonnage à 50 Hz. Un algorithme de Remez [164] est utilisé pour réaliser le filtre avec  $L = 24$  coefficients  $h_i$ ,  $i = 0, \dots, 23$ . Ces coefficients sont intercalés avec des zéros pour restaurer une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz.

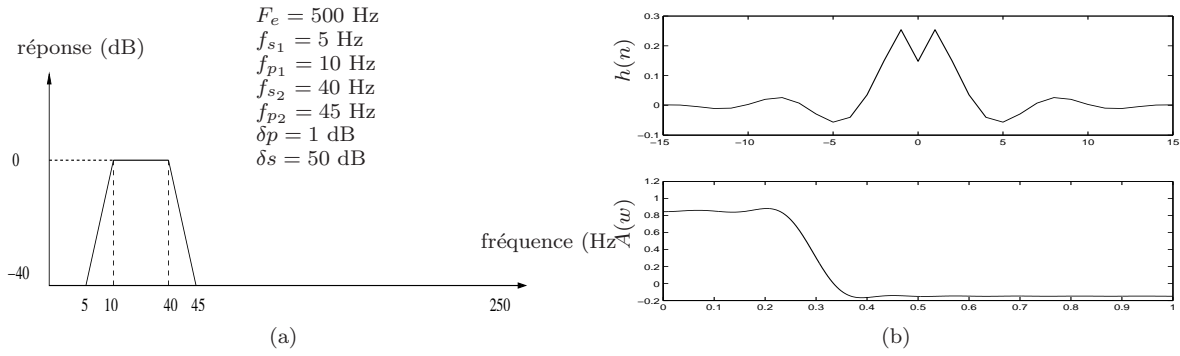


FIGURE 5.19 – (a) Filtre-prototype pour la détection du QRS (b) coefficients  $h(n)$  (haut) et phase du filtre (bas).

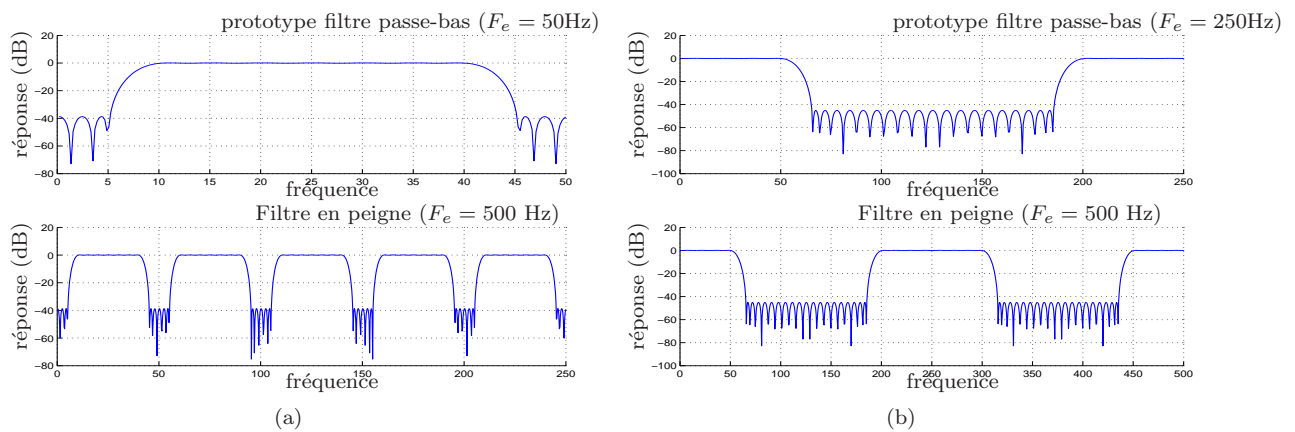


FIGURE 5.20 – Banc de filtres pour la suppression de la ligne de base et des harmoniques de puissance : (a) prototype filtre passe-bas ( $F_e = 50\text{Hz}$ ), (b) Filtre en peigne ( $F_e = 500\text{Hz}$ ).



Ce qui donne en sortie une fréquence de réplication (cf Fig.5.20.b). L'équation de filtrage RIF est :

$$y_1[n] = \sum_{i=0}^{23} h[i]x[n - 10i], \quad (5.12)$$

dans laquelle  $x[n]$  est le signal brut, et  $y_1[n]$  est le signal de sortie filtré. Le délai du filtre est de  $24 \times 10/2 = 120$  échantillons. Un second filtre est réalisé pour sélectionner une seconde bande de fréquence à  $F_e = 250$  Hz (cf. Fig.5.20.a) avec des coefficients  $h'_i, i = 0, \dots, M$ , où  $M = 23$ . Les coefficients sont à nouveau intercalés avec des zéros pour retrouver un taux d'échantillonnage à 500 Hz. Le délai de ce filtre est de 24 échantillons et l'équation de filtrage est cette fois :

$$y_2[n] = \sum_{i=0}^{23} h'_i[i]y_1[n - 2i], \quad (5.13)$$

où  $y_2[n]$  est la sortie du second filtre. On augmente la sélectivité en cascadeant ces deux filtres pour produire un filtre passe-bande linéaire dont les spécifications sont appropriées pour l'extraction du QRS. Le retard du filtre est de 144 échantillons, soit 288 ms.

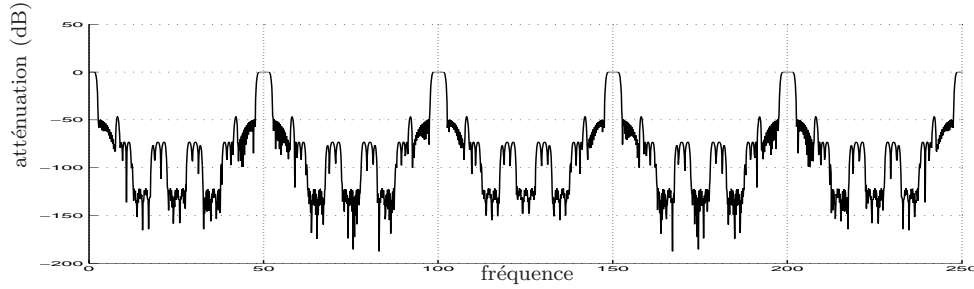


FIGURE 5.21 – Cascade de filtres pour le réhaussement du QRS.

Un exemple de résultat est montré Fig.5.22 dans lequel le déplacement de la ligne de base est très prononcé et additionné d'un fort bruit de puissance. La technique est assez efficace et facile à implémenter ; les sources Matlab des codes sont fournis en annexe. Le retard dans le système de 0,3s est plutôt faible vis-à-vis des changements physiologiques qui sont de plusieurs minutes.

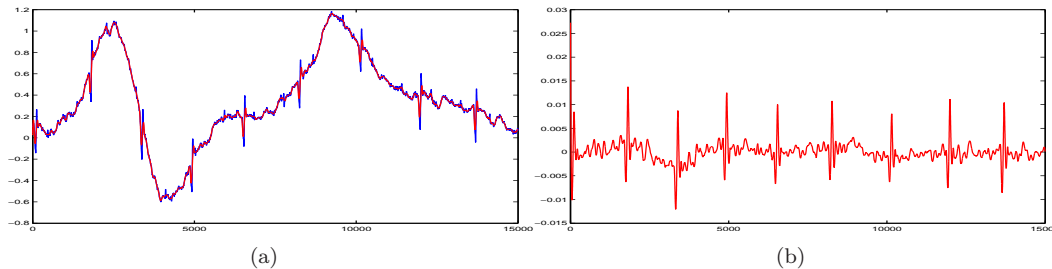


FIGURE 5.22 – (a) Signal ECG avec fort décalage de la ligne de base et bruit de puissance (b) ECG avec ligne de base minimale.

Cependant, ces outils ne sont donc pas forcément bien appropriés aux caractéristiques des signaux analysés car les séquences extraites des enregistrements ECG sont par nature non-stationnaires et de mesure complexe : en effet tout comportement transitoire sera noyé par une mesure globale. Nous leur préférons les ondelettes dont l'efficacité est illustré Fig.5.23 et qui a été discuté plus longuement §5.3.

#### 5.4.1.5 Méthode de Pan et Tompkins pour la détection des QRS

La méthode développées par Pan et Tompkins [159] améliorée par Fokapu et Girard, repose sur l'utilisation des dérivées première et seconde du signal électrocardiographique, qu'on désigne, dans ce qui suit, par  $f[n]$ . Les différentes étapes qui la constituent sont :

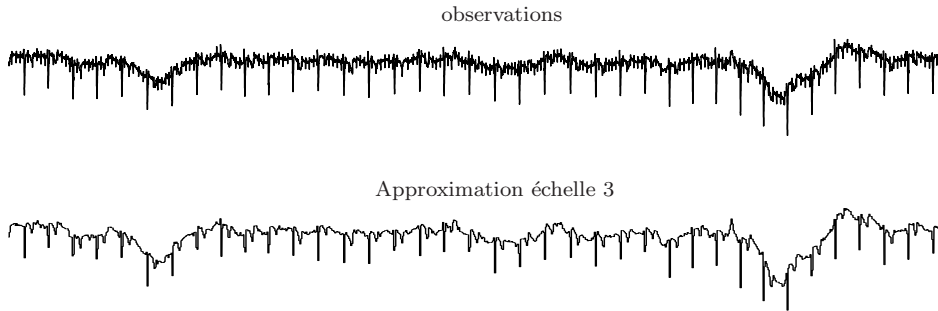


FIGURE 5.23 – . Approximation de niveau 3 du signal observé (haut) au moyen d'ondelettes de Daubechies.

- calcul des dérivées première et seconde  $y_0$  et  $y_1$  :

$$y_0[n] = f[n + 1] - f[n - 1] \quad (5.14)$$

$$y_1[n] = f[n + 2] - 2f[n] + f[n - 2] \quad (5.15)$$

- lissage, mise au carré, normalisation : le lissage de la dérivée première  $\tilde{y}_1$  (resp. de la dérivée seconde  $\tilde{y}_2$ ) s'obtient par un moyennage sur 3 échantillons consécutifs avec

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{4}\{y[n - 1] + 2y[n] + y[n + 1]\}. \quad (5.16)$$

- sommation :

$$y_3[n] = a_1\tilde{y}_1^2[n] + a_2\tilde{y}_2^2[n] \quad (5.17)$$

avec les coefficients de normalisation  $a_1$  et  $a_2$  resp. égaux à  $1/\max\{\tilde{y}_1\}$  et  $1/\max\{\tilde{y}_2\}$ .

- calcul des positions des QRS grâce à un seuil : originellement fixé à 35% de la valeur maximale de  $y_3$  (pour tenir compte d'éventuels artefacts, on utilise la moyenne des 4 plus fortes valeurs maximales).

**Exemple 6** (Détection du QRS à partir de méthodes de type dérivation). *A partir d'un signal filtré par un filtre passe-bas de Butterworth à 8 points de fréq. de coupure  $f_c = 90\text{Hz}$ , sous-échantillonné par 5, et la fréq. d'échantillonnage  $F_e = 1\text{kHz}$ .*

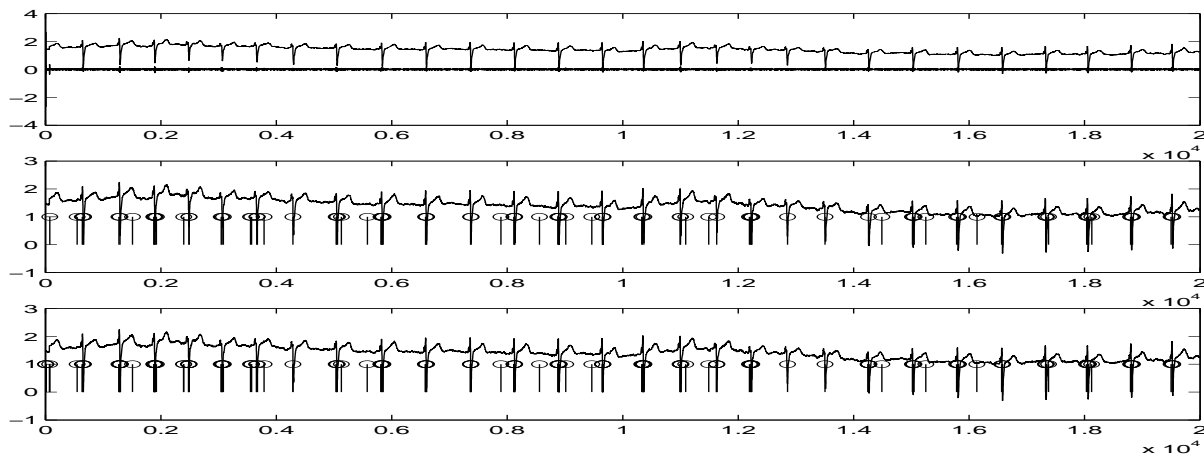


FIGURE 5.24 – Détection du QRS avec la méthode de Pan et Tompkins.

Les cas difficiles les plus fréquemment rencontrés sont les fichiers pour lesquels un bruit important vient se superposer au signal ECG, et dégrader fortement les possibilités de détection des QRS. La présence de bruit entraînent en effet des valeurs importantes au niveau des dérivées premières et seconde.

Un autre cas de mauvaise détection est encore celui pour lequel le QRS présente une morphologie anormale, lié par exemple à un trouble de conduction intra-ventriculaire : absence d'onde Q, onde R étroite et de faible amplitude, onde S très large par rapport à l'onde P. Dans ce cas précis, les ondes P seront individuellement détectées comme étant des QRS. Le phénomène est plus facilement visible sur la partie la moins bruitée du signal. La précision sur la localisation des QRS n'est donc pas toujours assurée avec la méthode de Pan et Tompkins : parfois on repère le début du QRS, d'autres fois la fin. Il ne semble pas y avoir de règle fixe et précise.

Par exemple, on constate sur la figure 5.24 que tous les QRS sont détectés, mais leur position varie d'un QRS à l'autre. D'autre part, on a pu constater que le bruit influençait grandement les valeurs des dérivées, donc cela est susceptible d'influer en plus sur les positions des QRS détectés. Ces fluctuations sont dans une certaine mesure gênantes puisqu'on doit d'abord se positionner sur la ligne de base par rapport au QRS avant de lancer la procédure de détection de l'onde P.

### 5.4.2 Extraction de paramètres médicaux

L'analyse spectrale ne permet pas d'identifier bien sûr les modes fondamentaux du rythme cardiaque. Une première série d'analyses effectuées à partir de signaux réels montre ainsi la présence d'une énergie spectrale entre 0,01 et 2,2 Hz. L'énergie spectrale des bandes de fréquence plus rapides est moins élevée. Il y est cependant possible d'identifier des composantes correspondant à l'ECG au dessus de 10 Hz. Mais, dans le cas de tracés pathologiques, la puissance du spectre peut être diminuée, rendant ainsi l'extraction des paramètres vitaux délicate.

L'émergence des méthodes de traitement dans le cas non-stationnaire et des techniques de séparation aveugles de sources ont permis d'élargir le spectre des méthodes d'analyse pour ces signaux [222]. Néanmoins, les hypothèses sont celles de la stationarité des signaux, ou d'un mélange instantané des signaux. De nombreuses équipes sont très avancées dans ces études. Karin *et al.* à l'Université de Tel-Aviv ont été parmi les premiers à proposer un dispositif de surveillance à l'ECG fœtal, implémenté par MEDCCO LTD [110], mais le système ne fournissait en sortie qu'un signal moyenné, donc déformé. Récemment, Taylor *et al.* [192] ont démontré, dans une étude portant sur 300 grossesses, qu'on pouvait extraire les signaux du fœtus même dans le cas de grossesses multiples. L'étude révèle cependant que la méthode est sensible à la position des électrodes. Dans [223], Zhou décrit parfaitement la difficulté de positionner les électrodes pour un examen périnatal et propose un modèle éléments finis pour calculer la distribution des potentiels sur l'abdomen. Ces études semblent très prometteuses séparément. Cependant, elles n'exploitent pas les potentialités des techniques de traitement du signal récentes.

### 5.4.3 Estimation du rythme cardiaque fœtal

Pour estimer le fréquence fondamentale du signal ECGf noté  $s[n]$  avec  $n = 1, \dots, N$  et supposé périodique de période  $P$ , on construit deux vecteurs de longueur  $L$ ,  $\mathbf{v}_0 = (s[0], \dots, s[L-1])^T$  et  $\mathbf{v}_k = (s[k], \dots, s[L+k-1])^T$ . Si  $k$  est un multiple de la période  $P$ , nous aurons :

$$\frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} = r(k) \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|} + \epsilon \quad (5.18)$$

où  $r(k)$ , en théorie égal à  $+1$ , a pour but de prendre en compte dans la suite une légère variabilité de l'amplitude du signal. Si on pose  $\mathbf{w}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}$  et  $\mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}$ , l'équation précédente modélisant la périodicité du signal  $s[n]$  peut s'écrire  $\mathbf{w}_k = r(k)\mathbf{w}_0 + \epsilon$ , avec  $\|\mathbf{w}_0\| = \|\mathbf{w}_k\| = 1$ .

Un estimateur de  $r(k)$  qui minimise la norme de l'erreur  $\epsilon$  s'écrit :

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_0} \mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_0\| \|\mathbf{v}_k\|} = \frac{\sum_{n=1}^L s[n]s[n+k]}{\sqrt{\sum_{n=1}^L s^2[n]} \sqrt{\sum_{n=1}^L s^2[n+k]}}. \quad (5.19)$$

Le choix de  $L$  est liée à la durée  $N$  pendant laquelle il est raisonnable de supposer que le signal est périodique de façon *stable*<sup>4</sup>. Une fois  $N$  choisi, l'erreur quadratique d'estimation est d'autant plus faible que  $N$  est grand. Par

4. Il est évident que si l'on veut détecter des fluctuations éventuelles du rythme, il faudra prendre des fenêtres plus courtes.

conséquent, si  $P_{\max}$  désigne la valeur maximale d'exploration de la période, on pourra prendre  $L = N - P_{\max}$ . En pratique, la recherche de la période  $P$  s'effectue sur une plage de valeurs comprises a priori entre  $P_{\min}$  et  $P_{\max}$ .

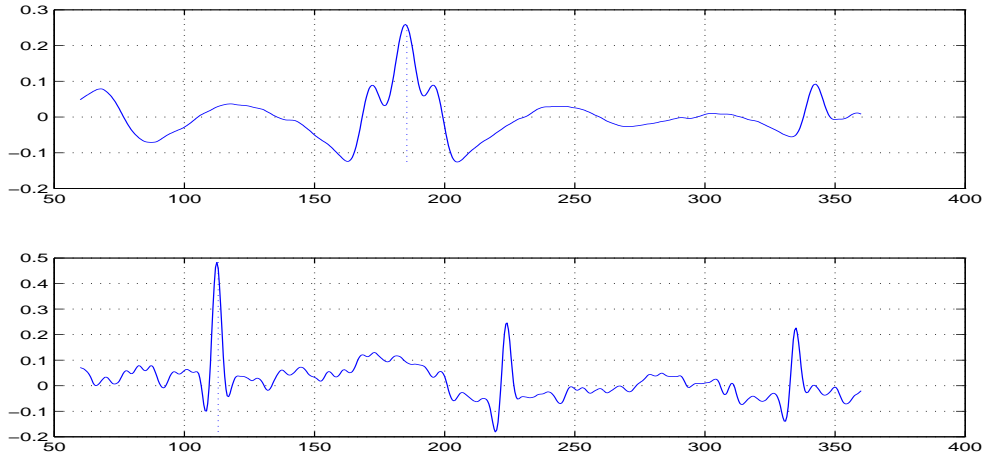


FIGURE 5.25 – Niveaux des fonctions de corrélation pour l'ECG de la mère (haut) et l'ECG du fœtus (bas).

En utilisant l'inégalité de Schwarz, on montre que  $r(k)$  est de module inférieur à 1. Quand  $r(k) \lesssim +1$ ,  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_k$ . On peut alors considérer que le signal est périodique et que la période est un sous-multiple de  $k$ <sup>5</sup>.

La fonction de corrélation présente des maxima aux multiples valeurs de la période cherchée. A cause des incertitudes de mesures, il s'ensuit que le plus grand de ces maxima peut ne pas être celui correspondant à la période, il faut donc partir à la recherche de maxima éventuels à des temps sous-multiples de celui correspondant au plus grand maximum. Nous avons représenté Fig. 5.25 les niveaux des fonctions de corrélation dans leurs plages de recherche respectives, pour l'ECGm (courbe du haut) et l'ECGf (courbe du bas).

Une autre façon de s'affranchir de l'erreur due à la présence éventuelle d'autres maxima consiste à calculer la densité spectrale de puissance définie par :

$$S(f) = \prod_{k=1}^K |X(e^{2j\pi kf})|^2 \quad \text{où } f \leq 1/2K \quad (5.20)$$

où  $X(f)$  est le TFD d'un bloc de signal. Si celui-ci est périodique de fréquence fondamentale  $f_0 = F_0/F_e$ , son spectre va présenter des pics de grande amplitude à des fréquences multiples de  $f_0$ . Par conséquent, la densité  $S(f_0/2)$  des valeurs du spectre calculées aux multiples de  $f_0/2$ , va prendre une valeur faible. Celle-ci provient des valeurs quasi-nulles associées aux fréquences multiples impaires de  $f_0/2$ . Ce n'est pas le cas de la densité  $S(f_0)$  calculée en  $f_0$ . Celle-ci va accumuler les amplitudes du spectre en  $f_0, 2f_0$ , etc. La fonction  $S(f)$  permet donc de supprimer l'ambiguïté de la fréquence moitié : si la fréquence estimée  $\hat{f}$  est proche de  $f_0/2$ ,  $S(\hat{f})$  va être petite devant  $S(2\hat{f})$ . La comparaison de ces 2 valeurs permet alors de retenir comme fréquence fondamentale  $2\hat{f}$ . Toutefois, la méthode pour bien fonctionner requiert un spectre avec des pics bien prononcés.

Lorsque  $f_0$  est estimée au moyen d'une fenêtre glissante sur toute la durée du signal, on obtient un tracé RCF (cf. Fig.5.26, à mettre en perspective avec celui de la figure 5.27 obtenu par une sonde Doppler), qui permet de retrouver efficacement la fréquence cardiaque du fœtus et la variabilité du tracé [181], mais ne permet pas de reconnaître des composantes de l'ECGf comme la mesure de leur durée, leur amplitude, etc. Par ailleurs, le manque de spécificité dans l'interprétation du RCF est à l'origine d'une inflation du taux de césarienne ces 10 dernières années avec extraction d'enfants bien portant<sup>6</sup>. En cas d'apparition de décélérations

5. Les valeurs que l'on peut obtenir pour la période, exprimée en secondes, est un multiple de la cadence d'échantillonnage  $1/F_e$ . La précision dans la détermination du maximum de la fonction d'autocorrélation dépend donc de la cadence d'échantillonnage choisie. On peut le suréchantillonner d'un taux  $\rho$ , et augmenter ainsi la précision dans l'évaluation du maximum.

6. En France, 25% de césariennes sur 700.000 naissances.

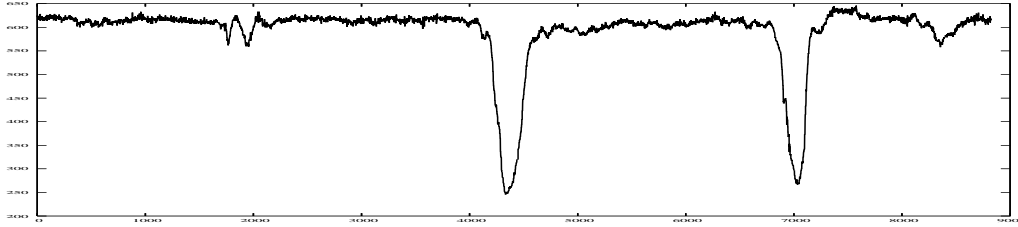


FIGURE 5.26 – Exemple de tracé de rythme cardiaque fœtal obtenu à partir de l’algorithme d’estimation de la fréquence fondamentale  $f_0$  du signal ECG supposé périodique.

profondes et répétées sur les tracés du RCF, la césarienne doit avoir lieu en urgence. Cependant, on ne possède aucun renseignement sur la *physio-pathologie* de ces décélérations. Il existe des situations dans lesquelles, son interprétation peut être prise en défaut parce qu’elle est étroitement liée à l’expérience et à l’interprétation médicale.

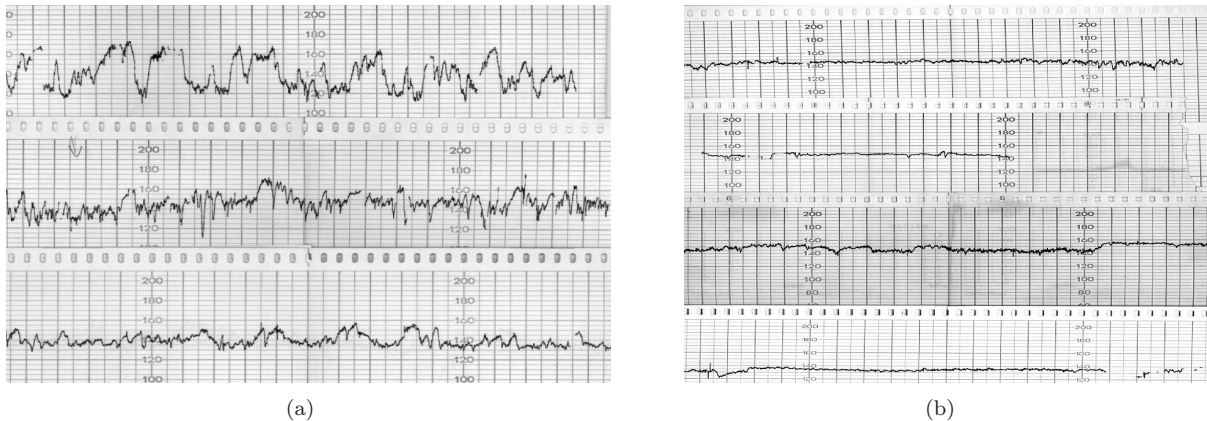


FIGURE 5.27 – Exemples de tracé de RCF obtenu par sonde Doppler. On note sur les 3 premiers tracés une variabilité de RCF qui contraste avec la monotonie des 4 tracés de droite. Cependant, c’est une appréciation qualitative sur le principe du tout-ou-rien, entre un fœtus en bonne santé et celui qui nécessite une césarienne. Entre ces deux extrêmes manque une échelle d’appréciation qualitative.

#### 5.4.4 Détecteur adaptatif de QRS

Notre modèle d’ECG comporte 15 paramètres selon la figure 5.2.a page 80 :

- 2 paramètres pour la phase  $\phi_0$  qui peut être estimée préalablement par une détection des pics QRS et la fréquence  $\omega_0$  du signal.
- 8 paramètres pour les durées de chacun des intervalles P, PR, QRS, ST, T.
- 5 paramètres pour les amplitudes des ondes P et T, et du complexe QRS.

Le listing 5.1 page 105 encode cette paramétrisation. Dans cette section, on va présenter une méthode pour essayer de retrouver les paramètres correspondant à l’ECG du fœtus. On se place dans le cas (scalaire) d’une suite d’observations  $y[n]$ , dont on a une expression théorique paramétrée  $s(n, \mathbf{p})$ , où  $\mathbf{p}$  est le vecteur des paramètres à estimer. Ces valeurs sont perturbées par un bruit et on observe

$$y[n] = s(n, \mathbf{p}) + \epsilon[n], \quad (5.21)$$

où  $\epsilon[n]$  représente soit le bruit de mesure soit le bruit de modèle. Partant de  $N$  observations, on peut estimer  $\mathbf{p}$  en minimisant  $\sum_{n=1}^N (y[n] - s(n, \mathbf{p}))^2$ . Le calcul de  $\mathbf{p}$  par un estimateur des moindres carrés est impossible par un calcul direct. L’algorithme récursif suivant fournit une solution à ce problème : Le modèle (5.21) est

linéarisé par un développement de Taylor au premier ordre

$$y[n] \approx s(n, \mathbf{p}_0) + \sum_{j=1}^{15} \frac{\partial s}{\partial p_j} \Delta p_j + \epsilon[n], \quad (5.22)$$

soit en notation matricielle

$$\begin{pmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{(0)}[1] \\ \vdots \\ s^{(0)}[N] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial p_1}[1] & \dots & \frac{\partial s}{\partial p_{15}}[1] \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s}{\partial p_1}[N] & \dots & \frac{\partial s}{\partial p_{15}}[N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_{15} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

que l'on écrit avec des notations évidentes :

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}^{(0)} + J\Delta\mathbf{y} + \mathbf{w}, \quad (5.24)$$

où  $J$  est la matrice jacobienne de dimension  $N \times 15$  et  $\mathbf{s}^{(0)}$  sont les valeurs initiales de la fonction à estimer. Pour résoudre le problème (5.24), on considère l'équation récurrente :

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k-1)} + (J^T J)^{-1} J^T (\mathbf{y} - \mathbf{s}(\mathbf{p}^{(k-1)})), \quad (5.25)$$

où  $\mathbf{p}^{(k)}$  désigne le vecteur obtenu au pas d'itération  $k$ . Pour tester le programme, nous avons pris un signal ECGf donné Fig. 5.28 (en vert). Le modèle théorique est en bleu et la courbe rouge indique l'erreur d'ajustement.

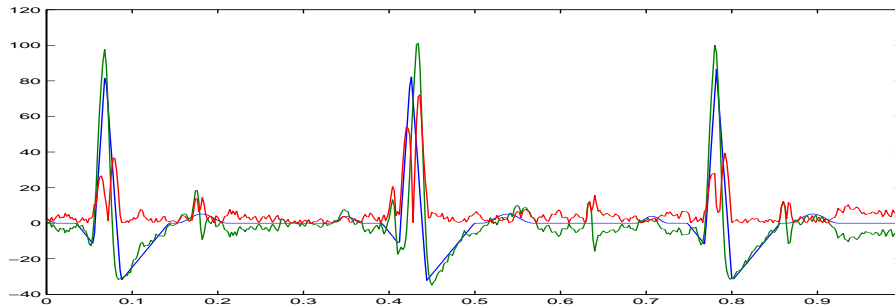


FIGURE 5.28 – Résultat de la détection du QRS. Signal paramétrique estimé  $s(n, \hat{\mathbf{p}})$  (bleu), signal ECGf réel (vert), corrélation  $\rho$  par *matched filter* (rouge).

Notons ici que le nombre élevé des paramètres rend la convergence de l'algorithme très sensible aux conditions initiales. Un autre point sensible est le choix du système de paramètres et les contraintes de positivité sur les durées. En effet, un modèle ECG comporte 15 paramètres fois le nombre de capteurs, soit pour 8 capteurs :  $8 + 15 = 23$  paramètres. On peut réduire ce nombre en remarquant que l'amplitude du signal est pris en compte deux fois : dans les coefficients de mélange et dans  $\mathbf{p}$ , mais cela complique d'autant plus la forme du gradient.

Formellement, la détection du QRS correspond au problème bien connu de la détection d'un signal (de forme connue)  $d(t)$  noyé dans un bruit  $b(t)$ . Détecter le signal  $d(t)$  signifie qu'il nous faut choisir une règle de décision pour pouvoir dire si le signal  $d(t)$  est présent ou non dans le signal observé  $y(t)$ . On a donc 2 hypothèses qui peuvent se résumer ainsi : en absence de signal, on observe  $y(t) = b(t)$  et en présence de signal  $y(t) = d(t) + b(t)$ . Nous supposons que  $b(t)$  est un bruit blanc, de variance  $\sigma^2$ . Pour effectuer le traitement, on peut imposer que le détecteur soit constitué d'un filtre linéaire suivi d'un comparateur à seuil et optimiser le filtre et la valeur du seuil. En notant  $z_d[n]$  et  $z_b[n]$  les signaux en sortie du filtre cherché  $g[n]$ , qui reçoit en entrée le signal déterministe  $d[n]$  et le bruit  $b[n]$ , on montre que le RSB défini par  $\rho = E[|z_d[n]|^2] / E[|z_b[n]|^2]$  a pour expression :

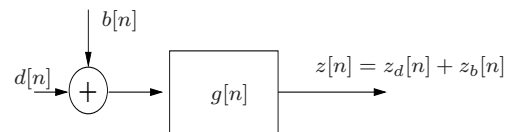


Figure 5.29: Filtre adapté.

$$\rho = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\left| \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g[u]d[n-u] \right|^2}{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^2[u]} \quad (5.26)$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz au numérateur, il vient  $\left| \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g[u]d[n-u] \right|^2 \leq \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^2[u] \sum_{u=-\infty}^{+\infty} d^2[u]$  et donc  $\rho \leq \sum_{u=-\infty}^{+\infty} d^2[u] / \sigma^2$ . La borne supérieure obtenue est indépendante de  $g[u]$  et est atteinte en prenant  $g[u] = d[n-u]$ . Le filtre optimal est donc la copie « retournée » du signal  $d[n]$  (en anglais *matched filter*).

Notons  $a_i, i = 0, \dots, L$  les coefficients du filtre linéaire RIF, obtenus à partir du modèle  $s(n, \mathbf{p})$  décrit plus haut. La détection du QRS peut se résumer aux opérations suivantes :

1. estimation des  $K + 1$  paramètres  $(a_1, \dots, a_K)$  et  $\sigma^2$  du modèle d'ordre  $K$  à partir de la fenêtre  $\mathbf{x}[n]$  de longueur  $N$
2. filtrage de  $\mathbf{x}[n]$  par le filtre de réponse impulsionnelle  $\{a_1, \dots, a_K\}$
3. filtrage du signal précédent par le filtre adapté de réponse impulsionnelle  $\{a_K, a_{K-1}, \dots, a_1, 1\}$ . On note  $z[n]$  le signal en sortie
4. comparaison de  $|z(n)|$  au seuil  $s = \lambda \sqrt{\sigma^2(1 + a_1^2 + \dots + a_K^2)}$  où  $\lambda$  est réglé en fonction de la valeur critique du test.

Une valeur typique pour  $\lambda$  est 3. La courbe rouge de la figure 5.28 reproduit l'estimation de la valeur du coefficient de corrélation  $\rho$  (toujours positif) à partir de (5.26).

En l'absence de QRS, le signal  $z(n)$  en sortie du filtre est un bruit gaussien, centré de variance  $\sigma^2(1 + a_1 + \dots + a_K^2)$ . La probabilité de décider de la présence d'un QRS est donnée par  $P(|z[n]| > s | H_0) = 2\Phi(s/\sigma\sqrt{1 + a_1^2 + \dots + a_K^2})$ , où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction intégrale de la loi normale, centrée et de variance 1 [144]. En se fixant une erreur de type I<sup>7</sup> à 1%, on choisit  $Q(\eta_0) = 0,005$ , soit  $\eta_0 \approx 3$  et par conséquent  $s = 3\sqrt{\sigma^2(1 + a_1 + \dots + a_K^2)}$  (cf. [176, p. 138] pour plus de détails).

La figure 5.30 évalue la valeur du seuil (abscisse) à partir de laquelle le détecteur est capable de trouver le rythme cardiaque du patient. On constate que la rapidité de la détection varie selon les signaux (et leur RSB).

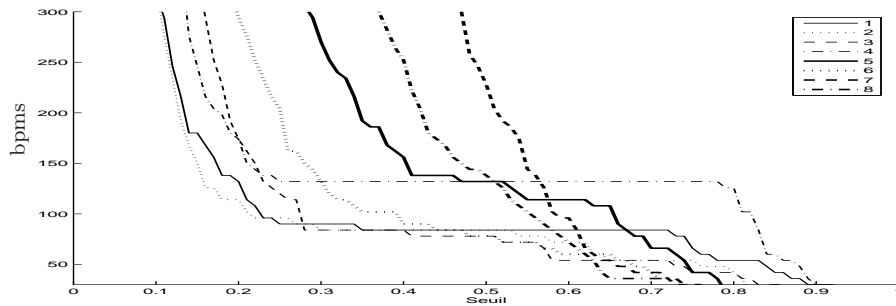


FIGURE 5.30 – Recherche du QRS sur plusieurs signaux ECGf avec le détecteur adaptatif.

## 5.5 Application au traitement du signal distribué

### 5.5.1 Proposition d'un modèle pour l'étude du mélange générateur du signal ECGf

Nous avons proposé un modèle de transmission du signal ECGf avec M. Schmidt [177], grâce auquel on peut calculer le potentiel électrique résultant de la superposition des activités électriques diaphragmatique, utérine,

7. Erreur de Type I=probabilité de fausse alarme (FA).



myocardiques de la mère et du fœtus (Fig. 5.31) à chaque instant et en tout point de l'abdomen : lorsque le champ électrique est mesuré « suffisamment » loin de sa source, l'organe peut être assimilé naïvement à un dipôle unique. Les signaux sont recueillis par une matrice d'électrodes reproduisant la ceinture abdominale du dispositif exposé au début de ce chapitre. Quelques caractéristiques du modèle proposé :

- matrice d'électrodes située dans le plan de la peau (positionnement paramétrable)
- mesure du type monopolaire ou différentielle
- les liquides du corps forment un volume conducteur
- les couches de tissu (constitué pourtant de graisse, de muscle, de liquide amyotique, etc.) forment un ensemble homogène, isotrope qui ne contient pas d'objet en mouvement
- la respiration va provoquer des rotations sur les trois axes<sup>8</sup>
- le muscle diaphragmatique est modélisé aussi par plusieurs dipôles

– modèle de type électrocinétique pour l'utérus prenant en compte le déplacement du front de dépolarisation des fibres musculaires à l'origine du potentiel mesuré sur les électrodes (cf. Gray [77] et par Lammers [123]) et consistant en la propagation d'une dépolarisation (plus ou moins circulaire) spontanée à partir de quelques points d'activité à la surface de l'utérus.

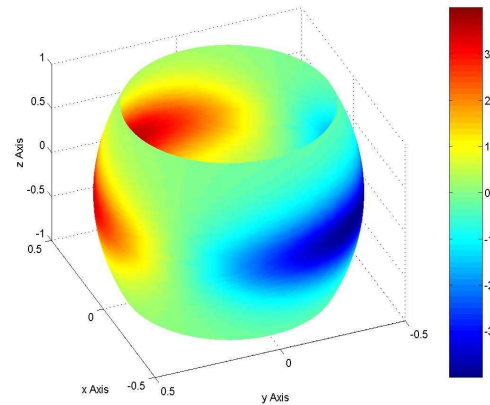


Figure 5.31: Champ de potentiel sur l'abdomen maternel visualisé par le simulateur.

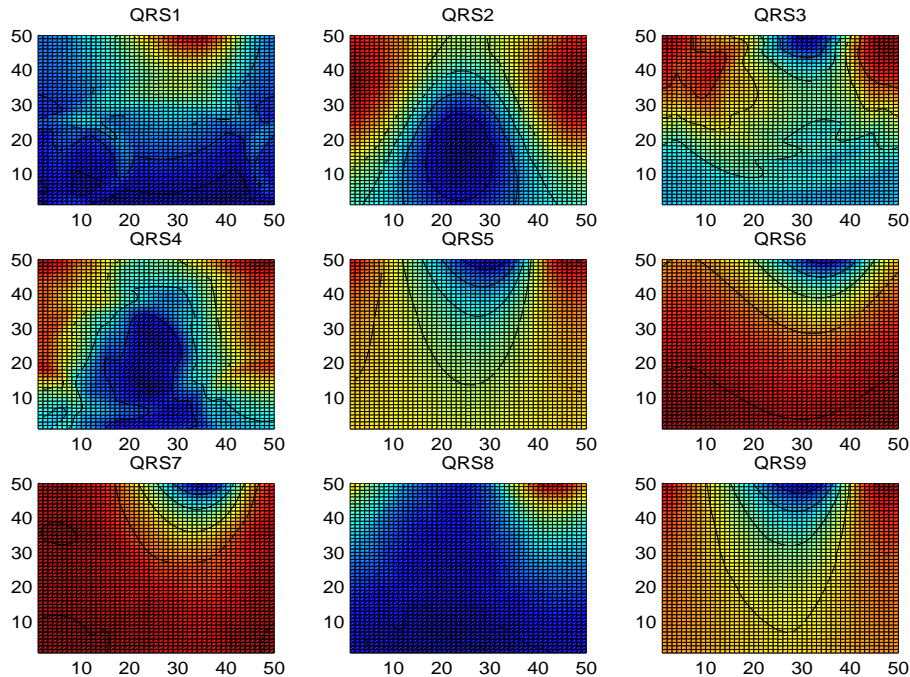


FIGURE 5.32 – Cartographie des potentiels électriques pendant un complexe QRS. La fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz. Le rythme cardiaque de la mère est de 70 bpm, le RCF est de 35 bpm.

Ces travaux ont été présentés pendant la conférence IEEE CIMED'2004 [201, 202]. Les électrodes sont réparties en lignes et en colonnes afin de se prêter à une représentation matricielle, elles mesurent les variations de potentiels formées par la somme algébrique des potentiels d'action myogramiques.

8. L'inspiration provoque une rotation anti-horaire sur l'axe transversal faisant pointer le cœur en arrière et diminuer l'amplitude du pic R détecté pour des électrodes abdominales, entraînant une tendance à la verticalisation de l'axe QRS. L'expiration provoque un mouvement inverse, amenant la pointe du cœur en avant ce qui augmente l'amplitude du pic R.



La figure 5.32 représente, par séquences espacées de 10 ms les cartes isopotentielles obtenues avec le simulateur pendant la durée de réalisation d'un complexe QRS obtenues pour une matrice de  $50 \times 50$  électrodes. Géométriquement parlant, la ligne d'électrodes la plus haute est au creux suprasternal, la lignes d'électrodes la plus basse au niveau de l'ombilic. Les colonnes extrêmes droite et gauche de part et d'autre de la colonne vertébrale. Les polarités positives sont indiquées en rouge, les positives en bleu, et les équipotentielles en sur-impulsion délimitent les écarts de 0,15 mV. Au milieu du signal (QRS5), le maximum d'amplitude positive se situe juste en dessous du sein gauche.

### 5.5.2 Réduction de dimension optimale et traitement de matrice de capteurs

Les méthodes numériques pour traiter les problèmes en grandes dimensions sont fondées sur le principe de projection dans le sous-espace du signal, elles ne nécessitent que le produit d'une matrice  $X$  par un vecteur. Elles sont destinées à produire des groupements de lignes ou de colonnes de la matrice  $X$  dans un espace de faible dimension ( $\leq 3$ ) pour une appréhension concrète des données, leur visualisation ou leur simplification [85, 128]. Il s'agit le plus souvent d'individus décrits par un certain nombre de variables (ou de caractères). Les premiers manuels publiés furent ceux de Benzecri [17], Hurewicz et Wallman [91] auxquels nous renvoyons le lecteur pour des préalables fondamentaux. Les problèmes, qui vont nous intéresser, dépendent de la topologie de la matrice  $X$  :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{12} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^T. \quad (5.27)$$

Les circonstances d'utilisation en grandes dimensions sont sensiblement les mêmes que celles des méthodes d'analyse factorielle descriptive [128] : l'utilisateur se trouve face à un tableau rectangulaire  $n \times m$ ,  $m < n$  de valeurs numériques. Ce tableau peut être un tableau de valeurs numériques continues (valeur de la variable  $j$  pour l'individu  $i$ , à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  du tableau), un tableau de contingence (croisant deux partitions d'une même population), ou encore un tableau de présence-absence (valeurs 0 ou 1 selon que tel individu ou objet possède tel caractère ou attribut). Dans certaines applications, l'utilisateur peut disposer d'un tableau carré symétrique ( $m = n$ ) de *similarités* ou de distances.

Le recours aux techniques de projection ou de réduction de dimensions est sous-tendu par quelques idées générales concernant le champ d'observation. On suppose que certains regroupements doivent exister, ou, au contraire, on exige que certains regroupements soient effectués. Autrement dit, on ne se satisfait pas d'une visualisation plane et continue des associations statistiques et l'on manifeste explicitement un intérêt pour la mise en évidence de classes de variables. Les représentations synthétiques se manifestent soit sous la forme de *partitions* des colonnes du tableau analysé, soit sous la forme de *hiérarchie de partition* [152].

A une même famille de résultats correspond parfois des démarches et des interprétations différentes. Il peut s'agir de découvrir une partition ayant une existence réelle (cette existence étant conjecturée avant l'analyse statistique ou révélée à l'issue des calculs) ou l'on veut au contraire utiliser les partitions produites comme des outils ou des intermédiaires de calculs permettant une exploration des données.

Pour l'essentiel, les techniques de réduction de dimensions, font appel à des calculs formalisés usuels. Par exemple les valeurs des composantes des axes factoriels sont la solution d'une équation pouvant s'écrire sous une forme très condensée [30], même si sa résolution est complexe<sup>9</sup>. Cependant, plusieurs techniques font appel à une démarche algorithmique : une série d'opérations est définie de façon récursive et répétitive pour trouver un espace de faible dimension (1,2 ou 3) dans lequel la structure inhérente aux données est *approximativement* préservée. Citons le MDS (multidimensional scaling) [180, 36] ou le non-linear mapping [20, 45]. Cette structure distributionnelle est à découvrir.

De nombreux travaux théoriques ont été menés pour tenter de dimensionner la structure de ces sous-espaces. Les exposés les plus anciens et les plus systématiques sont peut être ceux de Takens [189] et de Whitney [216], bien que de nouveaux travaux (Sauer *et al.* [175], dans son article intitulé *Embedology*, puis Kennel [112] et Hjaltason et Samet [88]) aient été menés indépendamment pour introduire de nouvelles techniques de réduction,

9. D'autres exemples de telle méthodes sont la Transformée de Fourier Discrète ou la Transformée en Ondelettes (cf. §2.4).

généralement en association avec des analyses factorielles ou issues de la théorie du *chaos* : toutes sont basées sur l'étude, en fonction de l'échelle, d'une propriété mesurable du nuage de points.

En raison du phénomène d'espace vide, le nombre de points nécessaires pour estimer avec suffisamment de certitude que la dimension intrinsèque d'une variété peut être exorbitant si l'espace de départ est grand lui-même. Le calcul de Grassberger-Procaccia utilise comme fonction de comptage  $C(r) = \sum_i \sum_j^i \mathbf{1}_{\|y_i - y_j\|_\infty \leq r}$ , où  $\mathbf{1}_{\|\cdot\|}$  désigne la fonction indicatrice et  $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ .

**Exemple 7** (Estimation de la dimension intrinsèque de l'ECGF). *On peut reconstruire la dimension du signal à partir de  $m = 1$  jusqu'à 5 signaux. la structure temporelle est négligée : les signaux temporels se réduisent à des données spatiales multi-dimensionnelles (Fig.5.34). L'analyse de dimensionalité cherche à détecter les dépendances entre les composantes des sources estimées  $\hat{s}(t)$  et à évaluer le nombre minimum de variables nécessaires pour décrire les données. Le point intéressant est qu'on obtient des valeurs proches de 3 au fur et à mesure que la courbe se complexifie et occupe davantage l'espace dans laquelle elle est tracée.*

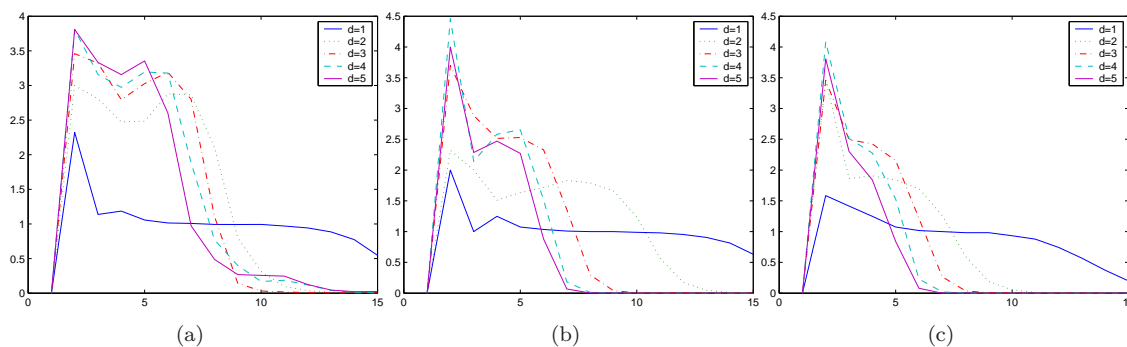


FIGURE 5.33 – Estimation de la dimension intrinsèque d'un signal source ECGF d'un  $n$ -échantillon avec  $n = 10^6$  (a),  $n = 10^5$  (b) et  $n = 10^4$  (c) pour  $m = 1, \dots, 5$ . On retrouve bien une dimension entre 2 et 4

Les simulations précédentes montrent que :

- le nombre de points suffisant pour une estimation « assez » précise devient très vite considérable (cf. Fig. 5.33 pour  $1 \leq m \leq 5$ ), et grève le temps de calcul (en  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ ).

- les tracées donnent une dimension brute non-entière  $1 \leq m \leq 5$ . Il s'agit là d'un problème irréductible, au même titre que l'estimation *a priori* de l'échelle d'observation.

L'observable obtenu par cette reconstruction est une caractérisation du système dynamique.

On pourrait prendre comme dimension intrinsèque le rang  $r$  de la matrice  $X$  des échantillons, c'est-à-dire l'ordre de la plus grande matrice régulière extraite de  $X$ . Mais cette définition purement linéaire ne nous satisfait pas. En effet, si  $\text{rg}(X) = r < m$ , il existe une matrice orthonormale  $Q$  et une matrice de permutation  $P$  (factorisation de Schmidt) telle que

$$XP = QR \quad (5.28)$$

où  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $R_{11}$  est triangulaire supérieure d'ordre  $r$ . En pratique, il peut arriver que les vecteurs de  $X$ , bien qu'indépendants mathématiquement, soient presque dépendants numériquement compte tenu du bruit : le conditionnement  $\text{cond}(R)$  de  $R$  est alors grand. En pratique, il suffit qu'un point s'écarte légèrement de la forme linéaire qui sous-tend tous les autres pour augmenter le rang de 1.

Dans la suite, nous lui avons préféré le *rang numérique* calculé comme suit : étant donné  $\epsilon > 0$  et  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$  les valeurs singulières de  $X$ ,  $X$  est de rang  $r$  si et seulement si  $X$  admet exactement  $r$  valeurs singulières qui satisfont  $\frac{\sigma_i}{\sigma_1} \geq \epsilon$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Les  $m$  vecteurs colonnes de  $X$  sont dépendants à  $\epsilon$  près s'il existe une matrice

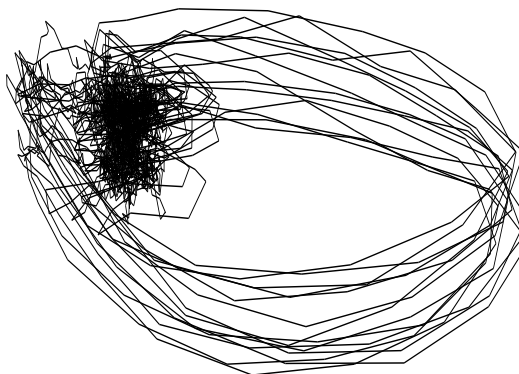


Figure 5.34: Trajectoire de l'ECGF reconstruite à partir de 3 signaux.

régulière  $B$  d'ordre  $m$  telle que  $XB$  soit de  $\epsilon$ -rang inférieur à  $m$  (voir [124]).

Les exposants de Lyapunov donnent le taux moyen de contraction ou d'expansion de la trajectoire d'un signal dans l'espace des phases (cf. Chan et Tong [29]). En pratique, on ne dispose pas du système dynamique sous-jacent  $f$  mais d'un ensemble de mesures discrètes. Sans connaissance analytique de  $f$ , cette approche est tout de même possible : on calcule par une méthode des moindres carrés une matrice  $M_t \approx Df(x(t))$  décrivant l'application transformant les vecteurs  $(x(t) - x(t-1))$  en les vecteurs  $(x(t+1) - x(t))$ . En supposant que  $\{x_t\}$  est un processus stationnaire et ergodique, alors quand  $N \rightarrow \infty$ , les valeurs propres de  $Df(x(0))^T \dots Df(x(N-1))^T Df(x(N))^T Df(x(N-1)) Df(x(N-2)) \dots Df(x(0))$  sont presque sûrement égales à  $\exp(2N\lambda_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , où  $\lambda_k, k = 1, \dots, N$  sont les exposants de Lyapunov.

**Exemple 8** (Exposants de Lyapunov d'un signal EMGd). *A partir du fichier de points expérimentaux, on calcule les valeurs du premier exposant de Lyapunov en utilisant l'algorithme décrit ci-dessus. Le résultat est donné par la courbe 5.35.b, qui indique que ces valeurs sont supérieures à zéro. Autrement dit, le signal possède donc un point d'équilibre asymptotiquement stable dans son espace des phases. Les pics vers zéros observés de façon intermittente traduisent une bifurcation de l'état du système, d'un état stable vers un état instable.*

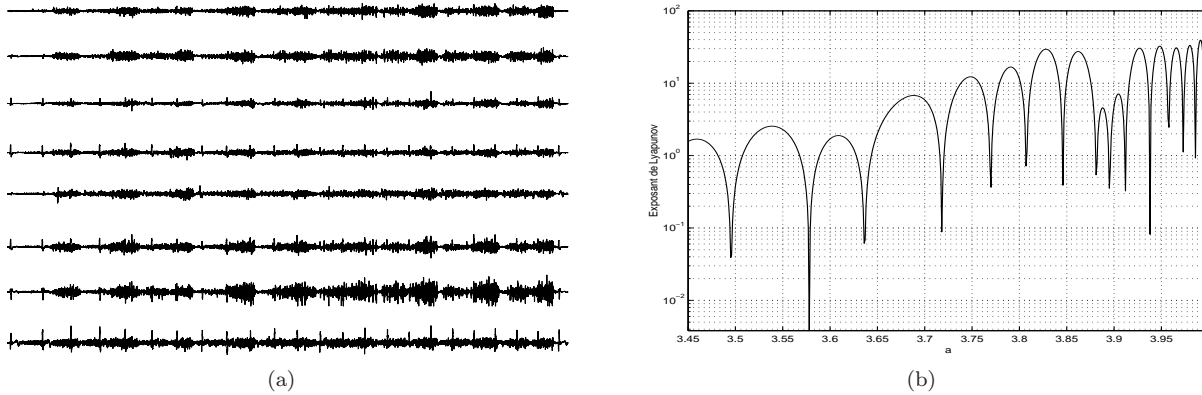
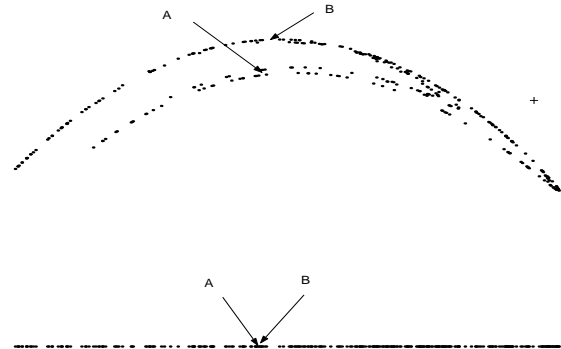


FIGURE 5.35 – (a) 8 signaux électro-diaphragmatiques mesurés en position anatomique, ITL et ERB, couché, polynée<sup>11</sup>, (b) valeurs du premier exposant de Lyapunov calculé en fonction du temps.

### 5.5.3 Calcul de la dimension du signal sous hypothèse de connectivité

Les calculs présentés s'appuient sur l'idée simple suivante : le passage de la dimension  $d$  à la dimension  $d+1$ , permet de distinguer des points de la trajectoire  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_d(t))^T$  qui sont voisins et des points de  $\mathbf{y}(t)$  qui sont distants (cf. [38]). Un faux voisin est un point de l'espace, vu comme appartenant à la trajectoire uniquement parce que cette trajectoire est observée à travers un espace déformé (cf. Fig. 5.36). Quand la dimension de l'espace des phases est choisie suffisamment grande, tous les points de la trajectoire sont de vrais voisins. Sur la Fig. 5.36,  $A$  et  $B$  sont des faux-voisins. Désignons par  $\mathbf{y}^{(r)}(t)$  le  $r$ -ième plus proche voisin (ppv) de  $\mathbf{y}(t)$ . Le carré de la distance Euclidienne entre  $\mathbf{y}(t)$  et ce voisin vaut  $\ell_d^2(t, r) = \sum_{k=0}^{d-1} [y_k(t) - y_k^{(r)}(t)]^2$ . Pour passer de la dimension  $d$  à la dimension  $d+1$ , il suffit d'ajouter une nouvelle composante  $y_{d+1}(t)$  aux vecteurs  $\mathbf{y}(t)$ . La distance entre les points  $\mathbf{y}^{(r)}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$ , augmentés d'une coordonnée, s'accroît :



**Figure 5.36:** Section de Poincaré, dépliée et projetée sur l'axe  $x$ . Les points  $A$  et  $B$  sont des faux-voisins.

$$\ell_{d+1}^2(t, r) = \ell_d^2(t, r) + [y_{d+1}(t) - y_{d+1}^{(r)}(t)]^2. \quad (5.29)$$

11. Pour plus de détails, voir chapitre 6 page 107.

Un critère général pour trouver le nombre de dimension consiste à minimiser la proportion de faux voisins, c'est-à-dire le nombre de points de la trajectoire pour lesquels les  $r$  plus-proches-voisins vérifient

$$\sqrt{\left(\frac{\ell_{d+1}^2(t, r) - \ell_d^2(t, r)}{\ell_d^2(t, r)}\right)} > \eta_{\text{tol}}, \quad (5.30)$$

Tant que la trajectoire n'est pas complètement dépliée, on observe un accroissement important des distances entre  $\mathbf{y}^{(r)}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$ , en passant de  $d$  à  $(d + 1)$  dimensions. Dans la suite nous omettons l'index temporel  $t$  pour simplifier l'écriture. Un critère général pour trouver le nombre de dimensions consiste à minimiser l'écart  $\ell_{d+1}^2(t, r) - \ell_d^2(t, r)$ . La proportion se stabilise lorsque  $d$  augmente.

Pourtant, cette méthode ne tient pas compte de la distribution spatiale des points et nous avons proposé de corriger ce défaut en tirant parti de la connexité spatiale du nuage de points<sup>12</sup> :

on choisira, pour distance entre deux points dans un ensemble  $E$  le plus petit des plus grands sauts effectués lorsqu'on lie  $\mathbf{y}_i$  à  $\mathbf{y}_j$  en suivant un chemin de points de  $E$  :  $d_c^E(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \min_{\text{chem}^E(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j)} (\max_k \|\mathbf{y}_{i_k} - \mathbf{y}_{j_k}\|)$  avec :

$\text{chem}^E(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \{\mathbf{y}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{y}_{\pi(N)} / \pi(1) = i, \pi(N) = j, \mathbf{y}_{\pi(i)} \in E\}$ .

Pour tenir compte de la notion de connexité, la distance entre deux points doit faire intervenir tous les autres points de l'ensemble. L'exemple suivant Fig.5.37 illustre ce propos : les points A et B sont à la même distance (euclidienne) mais, du point de vue de la connexité, les situations sont très différentes. On montre que, dans le cas d'ensemble finis,  $d_c$  définit bien une distance.

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour résoudre le problème de recherche du plus court chemin entre deux points dans un graphe. Nous avons utilisé celui proposé par Dijkstra [50], bien qu'il ait été initialement développé pour des graphes orientés pondérés.

Dans l'exemple 9, on peut voir le résultat obtenu sur des signaux ECGf.

**Exemple 9** (Dimension de signaux ECGf par la méthode des faux-voisins connexes). *La figure 5.38 met en évidence l'étirement des trajectoires alors que le confinement de l'espace des phases entraînaient un repliement de ces dernières. En première analyse, les valeurs du pourcentage de faux voisins des signaux observés sont assez voisines, pour chaque dimension (cf. Fig. 5.38).*

*L'algorithme ne nous fournit pas le nombre de coordonnées dynamiques, mais le nombre de dimensions que remplit l'attracteur. Ces deux nombres sont d'ailleurs indépendants, le nombre de coordonnées pouvant être bien plus grand que la dimension de l'attracteur. Le fait de trouver un petit nombre de degrés de liberté pertinents (entre 3 et 4) n'est pas trop surprenant car la dynamique est relativement simple, dans un système où les propriétés spatiales étaient fixées.*

*La sensibilité au bruit de l'algorithme des faux-voisins connexes est illustré par le calcul de la variance du rapport (5.30) Fig. 5.38.b.*

## 5.6 Conclusions et perspectives pour la cardiologie prénatale

Les progrès de la médecine prénatale permettent de considérer le fœtus comme un « patient » présentant des problèmes cardiaques. Il est possible de diagnostiquer pendant la grossesse des malformations cardiaques (anatomiques), des perturbations transitoires du fonctionnement du coeur et de prévoir la prise en charge à la naissance. Il est également possible de diagnostiquer et de traiter chez le fœtus des anomalies du RCF qui sont graves par la rapidité de la fréquence cardiaque ( $\geq 200$  battements/mn) et ou par l'asynchronisme de contraction entre les oreillettes et les ventricules. (cf. Fig.5.39). A défaut de traitement du fœtus, la défaillance cardiaque va entraîner la mort *in utero*. Mais du fait du manque de spécificité du RCF, les ultra-sons ne fournissent que

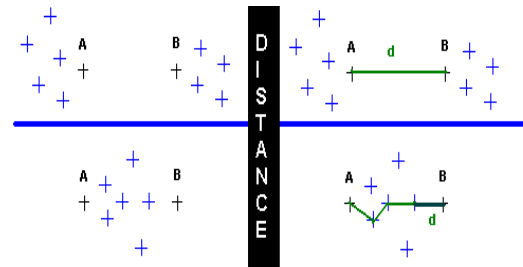


Figure 5.37: Distance et connexité.

12. L'hypothèse de connexité est une des hypothèses les plus générales qu'on puisse faire sur la forme des espaces discrets : elle transpose, du point de vue des distances, la notion de transitivité d'appartenance à une classe. De plus elle ne présuppose aucune hypothèse sur la distribution des points dans cet espace.

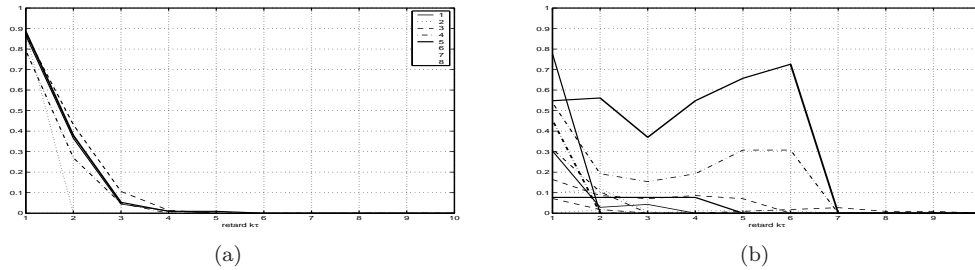


FIGURE 5.38 – (a) Pourcentage de faux-voisins pour les signaux ECGf (b) rapport de variance du taux de faux-voisins.

de données incomplètes. Un protocole européen<sup>13</sup> a été établi démontrant l'intérêt de la détection *in utero* pour ces pathologies qui, passées la phase aiguë, guérissent le plus souvent sans séquelle.

Ainsi, que ce soit dans le domaine de la surveillance de la grossesse ou dans le domaine particulier de la pathologie cardiaque du fœtus, l'ECG est indispensable. De plus, l'impact auprès des accoucheurs de ce type de procédé devrait alors s'avérer important du fait des besoins en clinique quotidienne et de la critique actuelle des moyens existants.

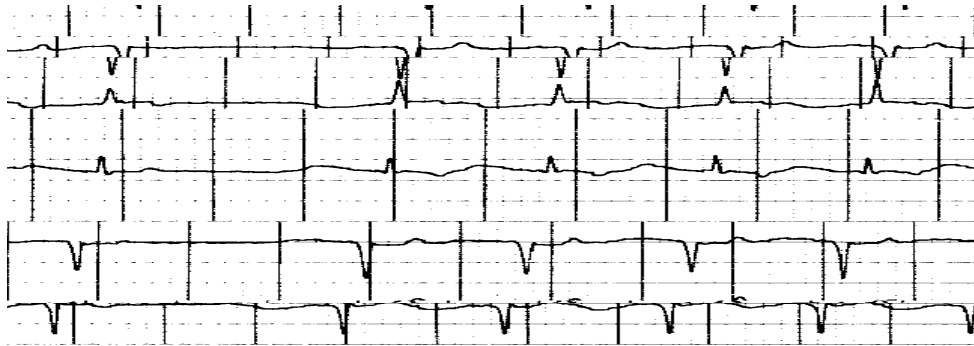


FIGURE 5.39 – Exemple de tachycardie diagnostiquée pendant la vie fœtale à 200 battements/minute. Le diagnostic du mécanisme n'a pu être fait chez ce fœtus faute d'un signal électrocardiographique. A la naissance, l'enfant présentait un trouble du rythme permanent à 220 battements/minute, dont le diagnostic a été fait sur le tracé à la naissance par la séquence rétrograde des ondes P qui suivent et non pas précèdent le QRS et qui ont une déflexion négative dans la plupart des dérivations.

La mise au point d'un procédé réalisant un électrocardiogramme fœtal devrait permettre de disposer assez rapidement d'une sémiologie applicable au fœtus comparable à celle acquise pour l'adulte, basée sur des critères rigoureux quantitatifs codifiés avec des supports physiologiques et physio-pathologiques connus.

13. *European study on maternal and fetal management of fetal supraventricular tachyarrhythmia*; Azancot, A. and Areias, J.C. and Oberhänsli, I. and Schmidt, K.G. and Tulzer, G. and Viart, P., 1998, *Journal of Maternal-Fetal Clinical Investigation*.

Listing 5.1 – modèle paramétrique de l'ECG.

```

1 function y = ecg_beat(ti ,t0 ,period ,P_l ,P_h ,PR_l ,Q_x ,Q_h ,R_x ,R_h ,S_x ,S_h ,J_x ,ST_l ,T_l ,T_h)
2 % Create a model of an ECG heartbeat
3 % Parameters :
4 % t0 : origin
5 % P_l : length of the P complex
6 % P_h : Height of the P complex (>0)
7 % PR_l : length of the PR segment
8 % Q_x : relative (with respect to the end of the PR segment) absciss of the Q peak
9 % Q_h : height of the Q peak (<0)
10 % R_x : idem for the R peak
11 % R_h : height of the R peak (>0)
12 % S_x : idem for the S peak
13 % S_h : height of the S peak (<0)
14 % J_x : absciss of the end of the QRS complex
15 % ST_l : length of the ST segment
16 % T_l : length of the T segment
17 % T_h : Height of the T complex
18 max = 100000;
19 if (P_l <= 0) | (PR_l<=0) | (Q_x<=0) | (R_x<=0) | (S_x<=0) | (J_x<=0) | (T_l<=0)
20     y = max;
21     return ;
22 end
23 %if (Q_x >= R_x) | (R_x>=S_x) | (S_x<=J_x)
24 %     y = max;
25 %     return ;
26 %end
27 ti = ti-t0;
28 ti = ti - period*floor(ti/period);
29 y = zeros(size(ti));
30 for i = 1:size(ti,2)
31     t = ti(i);
32     if t<=P_l
33         y(i)=P_h*(1-cos(2*pi*t/P_l))/2;
34     else
35         t = t - P_l;
36         if t<=PR_l
37             y(i) = 0;
38         else
39             t = t - PR_l;
40             if t<=Q_x
41                 y(i)=Q_h*t/Q_x;
42             else
43                 if t<=R_x
44                     y(i)=(R_h-Q_h)*(t-Q_x)/(R_x-Q_x)+Q_h;
45                 else
46                     if t<=S_x
47                         y(i)=(S_h-R_h)*(t-R_x)/(S_x-R_x)+R_h;
48                     else
49                         if t<=J_x
50                             y(i)=-S_h*(t-S_x)/(J_x-S_x)+S_h;
51                         else
52                             t = t - J_x;

```

```
53         if t<=ST_l
54             y(i) = 0;
55         else
56             t = t -ST_l;
57             if (t<=T_l)
58                 y(i)=T_h*(1-cos(2*pi*t/T_l))/2;
59             end
60         end
61     end
62 end
63 end
64 end
65 end
66 end
67 end
```



# Détection de transitions dans le signal EMG diaphragmatique

## 6.1 Mesures de l'EMG du diaphragme dans le domaine temporel

Dans ce chapitre, qui reprend l'essentiel d'un article de revue écrit pour *Physiological Measurements* [199], on s'intéresse plus spécifiquement à la détection de transitions dans les signaux électromyographiques délivrés par les muscles mis en jeu lors de la respiration.

Le diaphragme, innervé exclusivement par le nerf phrénique, est le principal muscle de l'inspiration normale chez l'homme, actif 24h/24, la vie durant. Il est également un acteur majeur de la compensation respiratoire des charges ventilatoires, imposées par l'exercice, des pathologies respiratoires, cardiaques ou neuromusculaires. Son rôle est déterminant dans le contrôle des débits utilisés pour la phonation.

Parmi les moyens disponibles pour étudier la fonction du diaphragme, l'électromyographie figure au premier plan, permettant théoriquement l'étude de la réponse diaphragmatique à la commande centrale et du degré d'activation musculaire, la détection d'anomalies et l'identification de leurs composantes myogènes ou neurogènes, le diagnostic de fatigue, etc.

Contrairement à de nombreux autres muscles, le diaphragme n'est pas d'accès anatomique facile. L'enregistrement de son activité à l'aiguille n'est pas sans risques. L'enregistrement de surface se heurte au problème de la distance muscle-électrodes, des variations d'orientation des fibres avec la contraction, de la contamination par des activités musculaires extra-diaphragmatiques. L'enregistrement œsophagien est techniquement délicat et échantillonne essentiellement la partie crurale du muscle, surtout posturale, et pas la partie costale, surtout inspiratoire. Toutes les techniques d'enregistrement comportent la limite d'une contamination massive par l'électrocardiogramme. La solution la plus couramment adoptée pour contourner ces difficultés est l'enregistrement, plutôt que de l'activité diaphragmatique spontanées (désynchronisée) de la réponse diaphragmatique à diverses techniques de stimulation phrénique (activité quasi-synchronisée) qui lèvent en particulier l'hypothèse de la contamination. Les 2 approches ne fournissent cependant pas les mêmes informations : disposer d'un signal électromyographique diaphragmatique « propre » recueilli par voie de surface est donc un enjeu majeur en physiopathologie respiratoire.

Pour répondre aux contraintes d'acquisition imposées par les applications cliniques ciblées,

- les signaux sont recueillis de façon non-invasive et contiennent de nombreux éléments parasites que le processus de détection doit éliminer tout en identifiant les transitions réelles.
- les acquisitions suivent un protocole expérimental incluant un jeu de stimulations phréniques évoquées plus haut

L'objectif final est d'obtenir un signal dont on puisse considérer qu'il est un reflet pur de l'activité diaphragmatique. Les méthodes basées sur la transformation en ondelettes associée à la séparation de sources sont particulièrement bien adaptées à la détection des transitions tout en préservant la précision d'estimation d'occurrence des événements.



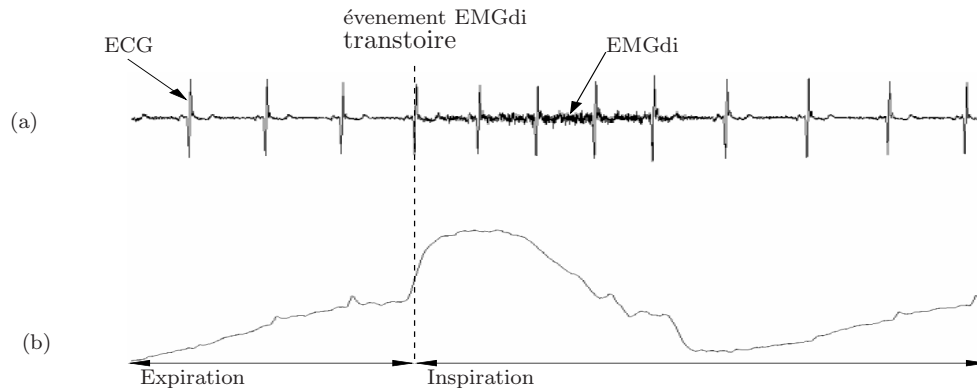


FIGURE 6.1 – (a) Signal EMGdi (b) signal de débit correspondant sur un cycle respiratoire.

Le tracé Fig.6.6 présente un exemple de recueil de signal électromyographique. Le premier est obtenu à partir d'une électrode de surface disposé sur le thorax ; le second signal correspond au débit ventilatoire, il est mesuré par un pneumotachographe au masque. Les acquisitions utilisent pour indicateurs de validation :

- le repérage des phases inspiratoire et expiratoire du cycle ventilatoire (débit mesuré par un pneumotachographe au masque), le diaphragme étant supposé « silencieux » en expiration (en particulier tardive).
- la comparaison du signal extrait avec le signal source enregistré à l'aiguille, chaque fois que cela était possible.

## 6.2 Matériel et méthodes

Le signal électromyographique de surface résulte de la sommation spatiale et temporelle des potentiels d'actions des fibres musculaires (PA) appartenant à la même unité motrice (UM). L'EMG global de surface, fournit une mesure indirecte de l'activité des muscles striés sous-jacents. La contraction musculaire dépend

- de la fréquence de l'influx nerveux, dont l'accélération est fonction de la force musculaire (sommation temporelle ou *rate coding*),
- du nombre d'UMs en activité.

Au fur et à mesure de l'augmentation de la force développée, le nombre d'UMs en activité augmente progressivement (sommation spatiale ou *recruitment*) [21, 182]. Inversement, le relâchement musculaire est caractérisé par une réduction des décharges électriques des UM. Ces phénomènes électriques sont mesurés en microvolts mais sont d'abord traités par un amplificateur pour pouvoir être visualisés.

Les tracés ont une certaine fréquence intrinsèque : la figure 6.2 illustre le séquençement du recrutement de 5 unités motrices. On peut noter sur cet exemple l'augmentation croissante de l'amplitude des potentiels d'action générés par les unités motrices progressivement recrutées. Les flèches indiquent le début du recrutement des unités motrices. La forme d'onde d'une UM est celle d'une DOG<sup>1</sup>. Electroniquement, on ne garde qu'une plage de fréquence qui élimine les fréquences basses, responsables des fluctuations lentes nuisant à la stabilité de l'enregistrement, et les fréquences hautes qui sont inutiles en EMG de surface. Les essais ont été réalisés sur un électromyographe Nihon Kohden avec une bande passante située entre 5 et 600 Hz, une fréquence d'échantillonnage fixée à 2 kHz.

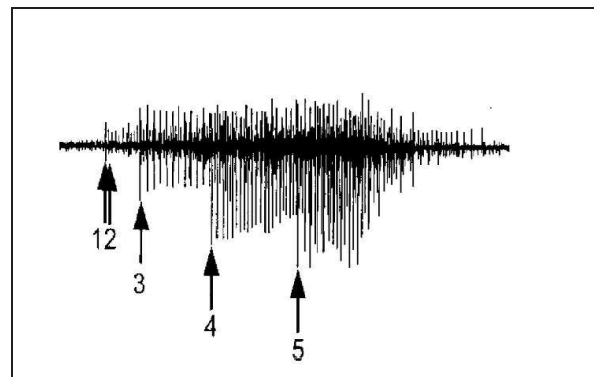


Figure 6.2: Séquençement du recrutement des UMs.

A l'heure actuelle, le fonctionnement du diaphragme est évalué par la pression qu'il génère, reflétée par la mesure de la pression trans-diaphragmatique, l'enregistrement électromyographique de son activité musculaire, le volume d'air déplacé par la contraction diaphragmatique. Ce muscle reste pourtant difficile d'accès et la connaissance de sa cinétique exacte pose un problème. Plusieurs équipes se sont investies dans la modélisation du mélange générateur de signal EMGdi, parmi lesquelles le TIMC-PRETA à Grenoble [79], qui propose un

modèle de reconstruction 3d d'un diaphragme humain *in vivo* à partir de reconstitutions tomodensitométriques. Ce modèle, de type électrocinétique, prend en compte le déplacement du front de dépolarisation de chaque fibre musculaire à l'origine du potentiel mesuré, un volume conducteur semi-infini et anisotropique, des UMs recrutées selon un seuil en volume inspiré ainsi que les muscles intercostaux. Les signaux sont recueillis par une matrice d'électrode virtuelle reproduisant une ceinture thoracique, située dans le plan de la peau.

On le voit : la fonction diaphragmatique est un processus complexe, mobilisant un grand nombre d'agents, dont on ne peut rendre compte qu'à travers un modèle simplifié, sans pour autant remplacer la mesure *directe*.

Outre l'enregistrement par électrodes de surface, plusieurs techniques sont disponibles pour cette mesure : il est possible par exemple d'enregistrer l'activité diaphragmatique au moyen d'électrodes intramusculaire, mais leur insertion est délicate, nécessite une bonne expérience de l'opérateur et n'est pas dénué de risque. Elles donnent en principe un enregistrement purement diaphragmatique. L'enregistrement de l'activité électrique du diaphragme peut également être réalisé par voie œsophagienne [78], mais le positionnement de l'électrode est difficile, car les mouvements du diaphragme lors de la ventilation tendent à faire varier les rapports entre le muscle et l'électrode. Du point de vue des pneumologues, ces techniques ne donnent pas un indice spécifique satisfaisant de la fonction diaphragmatique [148].

Le renouveau d'intérêt vis-à-vis à l'électromyographie de surface tient essentiellement aux récents progrès de l'électronique et du traitement du signal.

L'électromyographie de surface est le recueil de l'activité électrique musculaire à l'aide d'électrodes (différentielles) posées sur la peau (Fig. 6.4). Le recueil est habituellement réalisé au moyen de trois électrodes : deux électrodes actives et une électrode de référence (*ground*) (cf. Fig.6.3). Diverses techniques ont été décrites pour le placement des électrodes. La méthode « de référence » consiste à placer l'électrode active et l'électrode de référence dans le 6<sup>e</sup> ou 7<sup>e</sup> espace intercostal, de part et d'autre de la ligne axillaire antérieure, avec une distance inter-électrode de 5 à 6 cms [47]. Certaines variantes consistent à placer l'électrode de référence à distance sur l'appendice xiphoïde ou sur un axe thoracique [141]. Ce site de mise en place et la distance de 5cm entre les électrodes impliquent une importante contamination du signal diaphragmatique. Une technique alternative proposée par Demoule *et al.* [47] pour diminuer ce risque consiste à placer la paire d'électrode le plus bas possible sur la cage thoracique (dernier espace intercostal accessible) et le plus à l'extrémité possible de la ligne médiane, en minimisant la distance entre les électrodes (électrode active dans l'espace intercostale, électrode en référence sur la côte sous-jacente, à moins de 2 cms). L'avantage de cette technique est de réduire le risque de contamination, mais elle réduit également la quantité de muscle échantillonné.

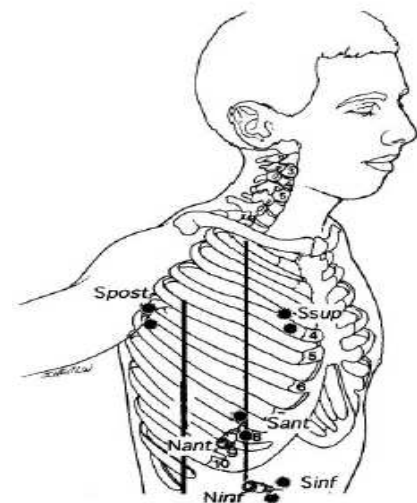


Figure 6.3: Positionnement des électrodes pour la mesure EMGdi.

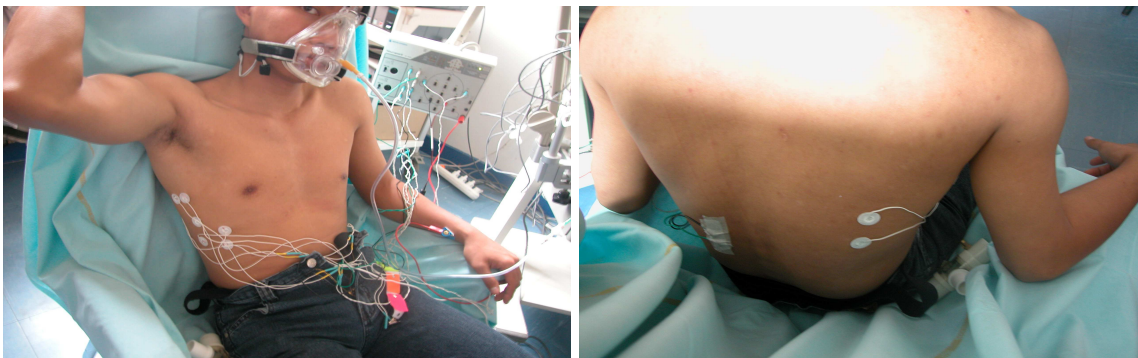


FIGURE 6.4 – Dispositif d'acquisition multi-électrodes utilisé au laboratoire de pneumologie de la Pitié-Salpêtrière.

1. DOG=Derivative of Gaussian.

Les acquisitions ont été réalisées par le Pr. Thomas Similowski<sup>2</sup> dans des situations susceptibles de faire varier les sources de contamination du signal diaphragmatique :

1. ventilation calme,
2. inspiration augmentée volontairement, avec et sans protusion abdominale,
3. ventilation augmentée involontairement, en réponse à des charges mécaniques à seuil (inspiratoire et/ou expiratoire).

N°	posture
P1	Respiration spontanée calme, assis
P2	Push abdominaux, assis
P3	Sniffs maximaux sans contrôle des groupes musculaires, assis
P4	ITL et ERL, assis, polypnée
P5	Sniffs maximaux sans contrôle des groupes musculaires, couché
P5bis	Respiration spontanée calme, couché

TABLE 6.1 – Situations d'acquisition variant la posture, la charge et la simulation pathologique.

Ces situations (résumées Tab.6.1) sont par ailleurs combinées avec deux configurations particulières des électrodes, décrites Fig. 6.5 : la première dite « anatomique » qui correspond à la disposition de référence utilisée en examen de routine par les pneumologues, et la seconde dite « aléatoire ». Les enregistrements concernent une demi-douzaines de volontaires ; ils ont été réalisés en mode œsophagien, qui sert de référence, et par électrodes de surface. Dans ce dernier cas, le positionnement des électrodes est détaillé Fig. 6.5.c. La durée d'acquisition moyenne est d'environ 2 minutes, soit une vingtaine de cycles par enregistrement. Les électrodes de surface recueillent systématiquement l'activité électrocardiographique (ECG).

En ventilation spontanée, les sources de contamination extra-diaphragmatiques du signal recueilli par des électrodes placées comme indiquées Fig. 6.5 sont principalement (cf. Fig.6.6) :

- le cœur,
- les muscles intercostaux, interposés entre le diaphragme et les électrodes<sup>3</sup>,
- les muscles abdominaux, en particulier obliques. Ces derniers s'insèrent à la face interne des côtes inférieures, comme le diaphragme et sont parfois impossibles à séparer de celui-ci (y compris à l'enregistrement à l'aiguille). Les muscles abdominaux, « contaminants » majeurs dès lors que l'activité ventilatoire croît, constituent en général la première ligne de réponse ventilatoire face à une demande augmentée,
- le bruit de puissance et un bruit d'environnement supposé blanc.

Avec une position postérieure des électrodes, d'autres muscles thoraciques peuvent intervenir (grand dentelé, etc.).

Les progrès récents dans les technologies de traitement des signaux et les modèles mathématiques (transformées en ondelettes, approche temps-fréquence, etc.) ont rendu disponible des algorithmes et des méthodes appropriées pour l'analyse des signaux EMGdi. Leur mise en œuvre est l'objet de la section suivante.

## 6.3 Analyse des EMGdi : détection, traitement et classification

### 6.3.1 Débruitage par ondelettes des EMGdi et séparation de sources

Les signaux EMGdi sont des signaux dits stationnaires *faibles*, générés par des signaux musculaires qui se superposent dans les domaines temporel et fréquentiel. Les techniques classiques ne peuvent plus garantir une séparation efficace, pourtant, la réduction de ces interférences est nécessaire pour calculer les paramètres directement reliés à l'activité du muscle respiratoire. De nombreuses techniques pour supprimer l'ECG dans l'EMGdi ont vu le jour parmi lesquelles les méthodes de *gating*<sup>4</sup> qui opèrent à partir d'un gabarit de l'ECG (cf. *e.g.* [10, 131, 48]).

2. Laboratoire de pneumologie de la Pitié-Salpêtrière.

3. Dont la masse est faible mais dont l'activité est complexe et constante, à la fois tonique et phasique.

4. ou de soustraction

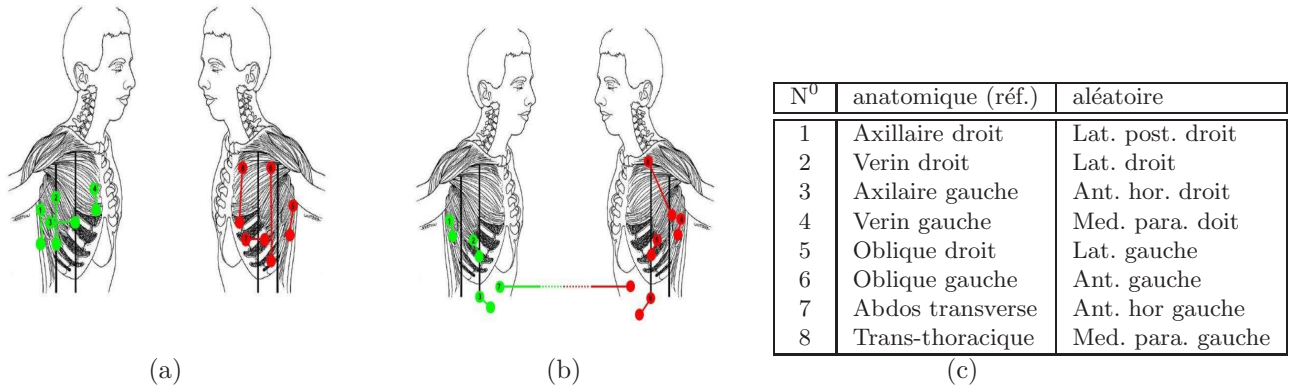


FIGURE 6.5 – Positionnement des électrodes de type (a) anatomique (b) aléatoire. (c) Identification des canaux d'acquisition pour les mesures EMGdi.

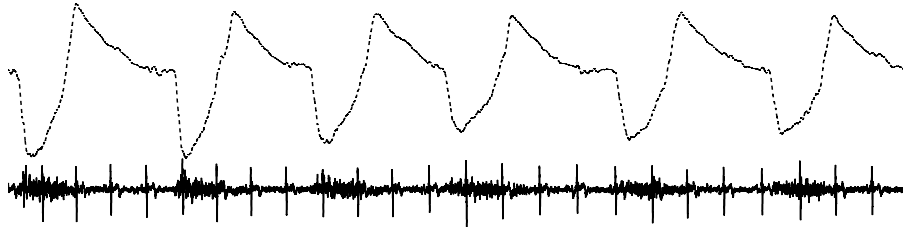


FIGURE 6.6 – Mesure pneumotachographique (volume respiratoire) et signal électromyographique diaphragmatique par électrode de surface, contaminé par l'ECG.

La décomposition des signaux EMG en ondelettes peut être utilisée pour supprimer le bruit du signal [23] (cf. §2.4.4), par exemple en exploitant le principe de débruitage donné Fig. 6.7.

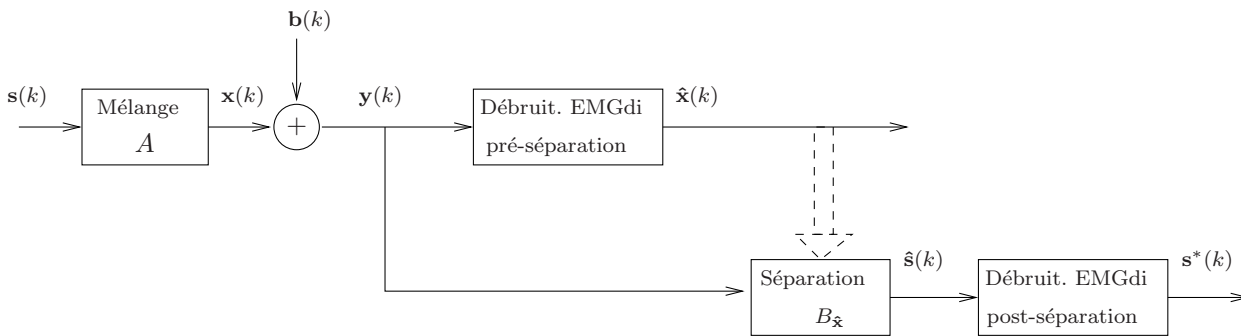


FIGURE 6.7 – Principe de débruitage des signaux EMGdi couplé à une séparation de sources. Les sources sont estimées par  $\hat{s}(k) = B y(k)$ , puis débruitées par un débruitage post-séparation.

Leao *et al.* [127] ont montré que si l'ondelette est choisie de manière à correspondre à la forme du PA, le résultat de l'analyse donnée la meilleure localisation possible dans le plan temps-échelle. Guméry, dans la même idée, propose d'utiliser la transformée de Beckner plutôt que la transformée en ondelette discrète [79]. L'influence du choix de l'ondelette est illustrée Fig. 6.8 pour 3 ondelettes mères : *Chapeau Mexicain*, *Gaussienne*, *Daubechies* (DB8).

Pour un même signal à des échelles différentes, les 3 images montrent des détails différents. Les deux premières présentent un pic (indésirable) correspondant à l'ECG tandis que la dernière affiche plus d'énergie de la composante EMG que de l'ECG. Nous avons donc choisi cette dernière pour extraire l'EMGdi. [133][54][79]Flanders

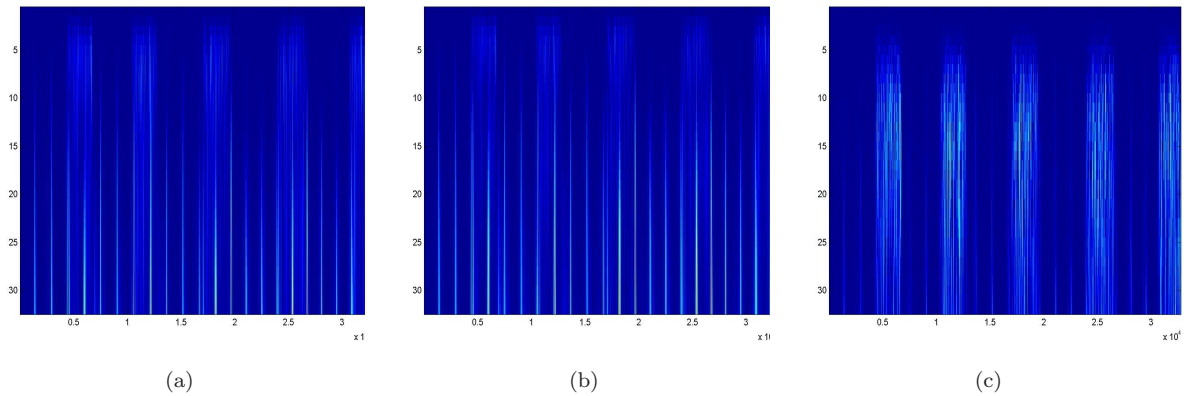


FIGURE 6.8 – Valeur absolue de la transformée en ondelettes continues d’un signal EMGdi pour 3 ondelettes mères : (a) Gaussienne (b) Chapeau Mexicain (c) Daubechies.

[66] a mis en évidence la ressemblance entre la famille d’ondelettes de Daubechies et la forme du potentiel d’action des unités motrices. D’autres ondelettes peuvent être utilisées telles que : symlets, coiflets, etc. qui font partie de la famille des ondelettes orthogonales à support compact. La figure 6.9.a représente un signal débruité par seuillage *doux* en utilisant des ondelettes de Daubechies et Figure 6.9.b sa transformée en ondelettes continue.

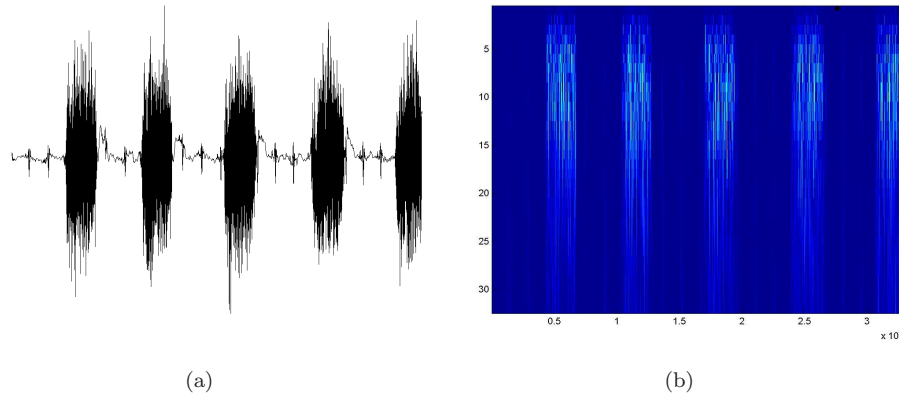


FIGURE 6.9 – (a) Signal EMGdi débruité utilisant des ondelettes de Daubechies (b) transformée en ondelettes continues du signal filtré correspondant.

Mallat [135] a montré que la décomposition en ondelettes est une alternative à d’autres représentations temps-fréquence avec l’avantage d’être linéaire et qui donne naissance à une représentation multirésolution et qui n’est pas affecté par des termes croisés.

### 6.3.2 Suppression de l’ECG

La transformée en ondelettes est bien adaptée au traitement des signaux non-stationnaires et des transitoires. Mais elle manque de spécificité quand il s’agit de supprimer la contamination des signaux EMGdi par l’ECG. Dans des travaux récents [172, 171], Sameni *et al.* ont utilisé un modèle dynamique de l’ECG pour développer un filtre de Kalman étendu pour le filtrage des ECG bruités. Le modèle dynamique proposé permet de couvrir une large gamme d’ECG, normaux ou anormaux. Les équations utilisées pour le modèle état du filtre sont



tirées de l'article de Mc Sharry *et al.* [142] :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \rho x - wy \\ \dot{y} &= \rho y - wx \\ \dot{z} &= -\sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i e^{-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}} - (z - z_0) \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $x, y, z$  sont les variables d'état,  $\rho = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod (2\pi)$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , et  $w$  la vitesse angulaire sur la trajectoire le long de l'attracteur dans le plan  $x - y$ . Les paramètres  $a_i, b_i$  et  $\theta_i$  correspondent à l'amplitude, la largeur et le centre de la fonction gaussienne dans cette équation. Définissons par  $\mathbf{s} = (x, y, z)^T$  le vecteur d'état. Dans le modèle (6.1), chacun des éléments P,Q,R,S,T est représenté par une fonction gaussienne, localisée à une position angulaire  $\theta_i$  particulière. Après linéarisation des équations du modèle dynamique non-linéaire, on dispose d'un outil qui fournit, à chaque instant  $n$ , l'estimation du vecteur d'état  $\hat{\mathbf{s}}$ , fonction linéaire des observation  $y[1], y[2], \dots, y[n]$  qui minimise  $E[\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|^2]$ . On sait même que, dans le cas Gaussien, cete estimation linéaire est optimale parmi toutes les fonctions de  $y[1], y[2], \dots, y[n]$ . En outre, le filtre de Kalman permet de s'affranchir de l'hypothèse de stationnarité.

La représentation tri-dimensionnelle de la trajectoire synthétique générée par (6.1) est la même que celle visualisée Fig.5.1 page 79.

Nous avons appliqué la technique à des signaux EMGdi dans lesquels les pics ECG dominant nettement (cf. 6.10.a). Les résultats sont meilleurs que ceux obtenus par une réduction de dimension par ACP par exemple.

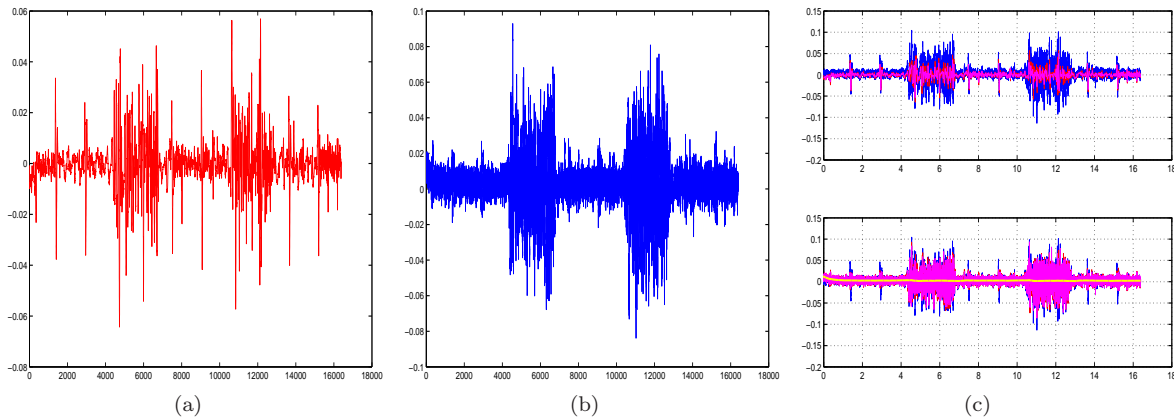


FIGURE 6.10 – Suppression de l'ECG dans des signaux EMGdi de surface. (a) EMGdi brut dans lequel les ECG prédominent en amplitude (b) EMGdi débruités (c) superposition des contributions EMGdi (en bleu) et ECG (en mauve).

### 6.3.3 Détection des transitions et extraction des bouffées diaphragmatiques

La détection des début et fin de bouffées inspiratoire et expiratoire constitue le point essentiel ce chapitre ; elle s'apparente à la théorie de la détection de rupture.

La transformée en ondelettes est un outil également largement utilisé dans les applications de détection de transitoires ou de transitions dans les signaux (rupture de modèle). Une des raisons de ce choix est la capacité de cette transformation à localiser dans le temps ces évènements. Les détecteurs fondés sur cette représentation multidimensionnelle utilisent alors les variations d'énergie et (ou) de fréquence liées aux évènements (analyse en échelle). On trouve, dans le domaine des signaux biomédicaux, des études qui traitent des ECG [132], des EEG [178], des potentiels évoqués [193] et des EMG [114, 113, 146]. Hormis le seul champ des applications biomédicales, des travaux antérieurs ont analysé la possibilité de détecter des signaux transitoires de formes incertaines dans un bruit blanc gaussien [71, 69, 70] à partir d'un seuillage statistique fondée sur les coefficients de la transformée en ondelettes [71, 69, 70]. Ces études montrent une meilleure localisation des évènements que les approches fondées sur une analyse directe du signal dans le domaine temporel. Certains détecteurs utilisent

l'analyse des variations des caractéristiques des lignes de maxima engendrées par les événements à détecter [136, 2]. En ce qui concerne la détection et la localisation du début d'une contraction musculaire, Merlo [146] a récemment mis en évidence l'intérêt d'une analyse locale du signal effectuée à partir de la décomposition continue en ondelettes. Il a notamment démontré l'adéquation de l'ondelette DOG<sup>5</sup> pour une détection dans des conditions de RSB dégradés. Cette ondelette approche la forme des potentiels d'action qui correspondent aux signaux transitoires élémentaires qui composent le signal électromyographique. Soulignons que, concernant les problèmes de détection dans les signaux EMG, Arikidis a démontré que ce type d'ondelette permet de détecter les singularités (changements de gradient) générées par ces mêmes potentiels d'action [7].

La méthode proposée par Lavielle dans [126] et utilisée ici est une approche globale : ce qui signifie que toutes les ruptures sont détectées simultanément. Ces ruptures sont estimées en minimisant une fonction de contraste pénalisée  $J(\mathbf{t}, \mathbf{y}) + \lambda\Omega(\mathbf{t})$ . Ici  $J(\mathbf{t}, \mathbf{y})$  mesure l'ajustement du modèle dont la séquence des ruptures est  $\mathbf{t} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_K\}$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K = N$  avec les séries observées  $\mathbf{y}$ . Son rôle est de localiser les ruptures avec autant de précision que possible.

Pour détecter des ruptures dans la moyenne et/ou la matrice de covariance de séries multivariées, la fonction  $J(\mathbf{t}, \mathbf{y})$  est définie à partir du logarithme de la fonction de vraisemblance Gaussienne, même si les observations ne sont pas Gaussiennes. Le terme de pénalité  $\Omega(\mathbf{t})$  dépend seulement de la dimension  $K(\mathbf{t})$  du modèle  $\mathbf{t}$  et augmente avec  $K(\mathbf{t})$ . Le paramètre de pénalité  $\lambda$  ajuste le compromis entre la minimisation de  $J(\mathbf{t}, \mathbf{y})$  (obtenue avec une grande dimension de  $\mathbf{t}$ ) et la minimisation de  $\Omega(\mathbf{t})$  (obtenue avec une petite dimension de  $\mathbf{t}$ ).

Des résultats asymptotiques ont été obtenus dans des contextes généraux théoriques par Lavielle [125]. Une méthode adaptative est proposée pour estimer le nombre de ruptures. Notons que le nombre  $K$  est faible en comparaison de la taille de la série  $N$ .

Plus précisément, considérons le cas de ruptures dans la matrice de covariance  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_K$ , ( $\Sigma_k \neq \Sigma_{k+1}$  pour  $1 \leq k \leq K-1$ ) de la suite de v.a.  $\{Y(t)\}$ . Dans ce cas simple de ruptures dans la matrice de covariance, et sans rupture dans la moyenne  $\mu = E[Y]$ , on peut utiliser la fonction de contraste suivante basée sur la log-vraisemblance Gaussienne :

$$J(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k \log |\Sigma_{\tau_k}|, \quad (6.2)$$

où  $n_k = \tau_k - \tau_{k-1}$  est la longueur du segment  $k$ , et  $\Sigma_{\tau_k}$  la matrice de covariance empirique calculée sur le segment  $k$ . Lavielle propose d'utiliser pour fonction de pénalité

$$\Omega(\mathbf{t}) = K(\mathbf{t}) \left( 1 + c \log \frac{n}{K(\mathbf{t})} \right), \quad \lambda = \frac{2\sigma^2}{n}. \quad (6.3)$$

Sur la base de simulations numériques, son auteur suggère d'utiliser  $c = 2,5$ . Cette fonction de pénalité est presque linéaire en  $K$ . Par définition, le meilleur modèle  $\mathbf{t}$  de dimension  $K$  minimise la fonction de contraste  $J$ , *i.e.*  $\mathbf{t}_K = \arg \min_{\mathbf{t}} J(\mathbf{t}, Y)$ . La suite  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_K$  peut être facilement calculée, en cherchant par un algorithme de programmation dynamique le chemin  $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K = N$  qui minimise le coût total  $J(\mathbf{t}, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K U_{\tau_{k-1}, \tau_k}$ , où  $U_{\tau_{k-1}, \tau_k}$  est la fonction de contraste calculée sur le segment  $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ .

Nous évaluons la performance de la procédure de détection de rupture avec fonction de pénalité en considérant le cas du signal EMGdi de la Fig. 6.11.a. Le résultat de la détection de rupture est donné Fig.6.11.b, dans laquelle les débuts et les fins de bouffées inspiratoires sont clairement identifiés.

Les 3 signaux EMGdi débruités Fig. 6.12.b sont obtenus avec une décomposition en ondelettes de Daubechies et séparation de sources (selon le modèle Fig.6.7 page 111) en conservant les 15 premières échelles. Les bouffées inspiratoires sont clairement extraites.

La comparaison des points détectés (en vert) avec le débit ventilatoire (courbe bleue) Fig.6.13 prouve les bonnes performances de la technique proposée : la détection est légèrement en avance, ce qui est un bon résultat puisque l'on est capable de détecter le recrutement des unités motrices diaphragmatiques avant l'effort inspiratoire. L'existence d'une activité post-inspiratoire explique que le marqueur de fin de bouffée soit après le volume.

Le tableau 6.2 présente les performances de la séparation en terme de RSB, mais calculée cette fois par (6.8). On voit immédiatement que certaines postures sont plus intéressantes que d'autres en terme de qualité de signal. Dans la Fig.6.15, on a représenté les densités spectrales de puissance du patient 1 dans la posture P4 pour 3

5. DOG= Derivative of Gaussian distribution.

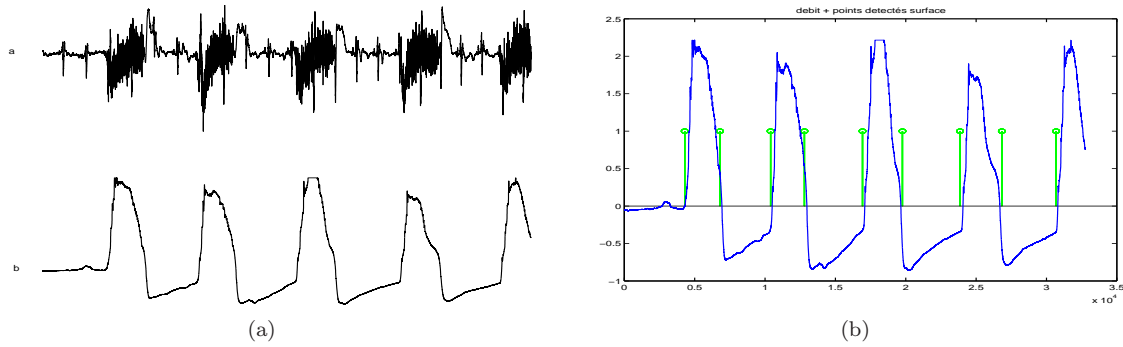


FIGURE 6.11 – (a) Signal EMGdi œsophagien, débruité avec des ondelettes de Daubechies (b) détection des points de changement dans le signal électromyographique de surface superposé au volume respiratoire mesuré.

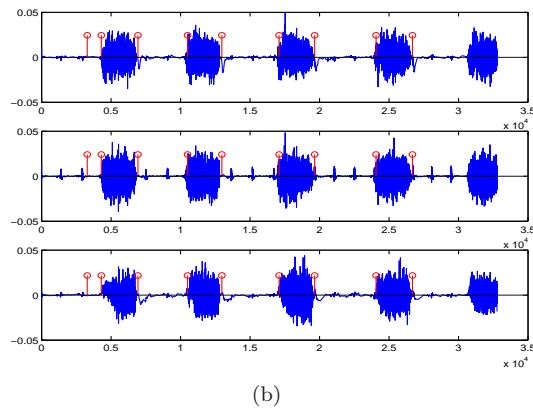
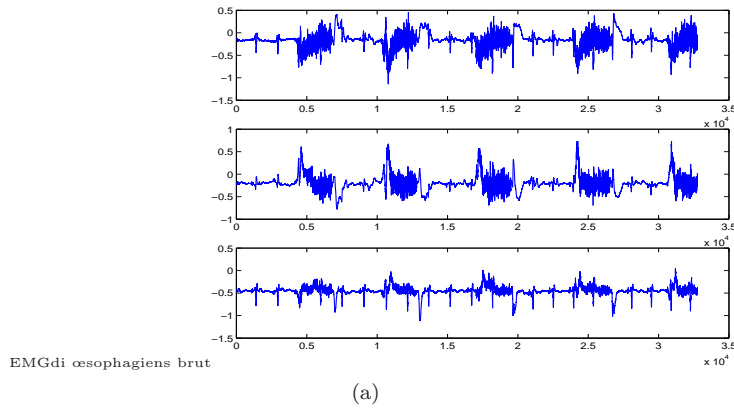


FIGURE 6.12 – (a) Signaux EMGdi œsophagiens brut en posture P4 (b) Signaux œsophagiens après filtrage par ondelettes de Daubechies.



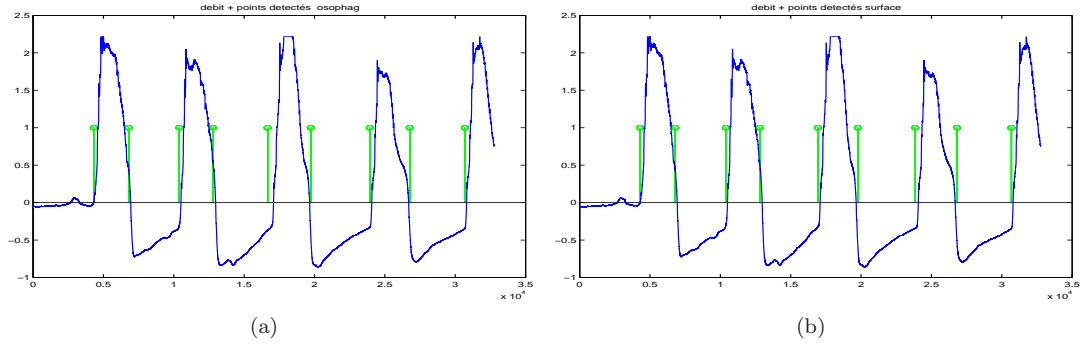


FIGURE 6.13 – Comparaison de la détection des débuts et de fin de bouffée inspiratoire (vert) pour 2 canaux : (a) œsophagien (b) surface. EN bleu figure le débit ventilatoire.

canaux différents avant et après post-débruitage. La différence entre les 2 signaux réside dans la suppression des HF et dans l'atténuation de la composante ECG.

Les figures 6.14.a,b,c analyse de façon plus fine le résultat du débruitage de signaux EMGdi de surface pour trois postures P1,P3 et P5. Remarquons d'abord que l'ECG est supprimé dans les tracés obtenues. Les figures 6.14.d,e,f montrent la détection de points de début et de fin de bouffées inspiratoires, superposés avec le tracé du débit ventilatoire. Le recrutement des abdominaux présents dans les 2 dernières postures (qui simulent une détresse respiratoire) complique sensiblement la détection, sans toutefois le compromettre.

Il n'existe aucune circonstance où l'activité ventilatoire spontanée est associée à une mise en jeu exclusive du diaphragme, que ce soit en ventilation normale (repos), pour laquelle la commande ventilatoire automatique provient du tronc cérébral ou en hyperventilation (réponse à l'acidose, à l'hypoxie, à l'hypercapnie, etc.), même si certaines manœuvres comme le reniflement forcé avec expansion abdominale privilégient le diaphragme [4]. Il en ressort que l'enregistrement de surface ne peut *pas* être le pur reflet de l'activité diaphragmatique. il existe une contamination qui peut varier selon les stimulations et les conditions dans lesquelles elles sont appliquées. Nous avons démontré que les outils de traitements du signal comme les ondelettes et la séparation de source peuvent atténuer considérablement cette pollution.

On peut s'en assurer en examinant le contenu fréquentiel *moyen* des bouffées diaphragmatiques avant et après débruitage (suppression de la ligne de base, de l'ECG et débruitage par ondelettes) Fig.6.15. Le spectre moyen obtenu ressemble beaucoup à ceux présentés comme référence dans la littérature [12, P. 1442].

### 6.3.4 Classification des signaux

Nous allons voir dans la suite une démarche analytique pour l'analyse et la classification des signaux EMGdi. Elle n'est pas la plus performante, mais elle est originale et permet de décrire de manière naturelle le signal EMGdi. Les paramètres utilisés sont :

- l'énergie moyenne du signal  $E(t) = \sum_{m=t-\ell+1}^t x^2(m)w(t-m)$ , où  $w(t) = 0,54 - 0,46 \cos(\frac{2t}{\ell-1})$ ,  $0 \leq t \leq \ell-1$ ,
- le *zero crossing*  $Z(t) = \sum_{m=t-\ell+1}^t |\text{sgn}(x(m)) - \text{sgn}(x(m-1))|w(t-m)$ ,
- l'énergie absolue  $R(t) = \sum_{m=t-\ell+1}^t |x(m)|w(t-m)$

Les valeurs  $E(t)$ ,  $Z(t)$  et  $R(t)$  dessinent des courbes Fig.6.16 (dessiné resp. en rouge, bleu clair et vert) qui reproduisent les deux phases du cycle respiratoire, en coïncidence avec le débit ventilatoire dessinée en bleu foncé. Elles présentent cependant par rapport au début de la bouffée inspiratoire un léger retard, proportionnel à la longueur de la fenêtre  $\ell$ .

- on se sert de  $E(t)$ ,  $Z(t)$  et  $R(t)$  pour décomposer le signal EMGdi en segments successifs dont les frontières correspondent aux minima de ces courbes (segmentation du signal).
- au cours de la seconde étape, les segments obtenus sont réexaminés un à un en calculant un certain nombre de paramètres relatifs à l'énergie (différence d'énergie entre le maximum d'énergie et les minima voisins, énergie moyenne de chaque échantillon, énergie totale, énergie maximum, coefficient de symétrie de la bouffée, etc.),

6. Typiquement,  $\ell = 126$ .

Patient	Canal / Posture	P1	P2	P3	P4	P5	P5bis
1	C1	5.6582	0.7906	7.8078	10.4805	9.8252	3.6464
	C2	12.0161	0.6638	8.2400	16.3099	11.0720	7.0237
	C3	2.8049	3.8645	4.1126	6.9503	7.5136	3.9190
2	C1	2.8398	12.9992	15.6433	12.0922	12.4847	7.2287
	C2	2.7975	10.6754	7.5327	6.6752	11.2684	2.4461
	C3	2.0099	6.0811	6.9258	9.5021	6.6600	0.7310
3	C1	1.1829	3.5709	4.0622	4.5978	-	1.9479
	C2	0.7215	2.1583	2.0734	1.0936	-	-0.4262
	C3	1.3388	2.5390	2.8566	0.2349	-	1.7105
4	C1	4.5223	2.8561	12.0354	10.3418	7.6313	2.5349
	C2	2.3932	-0.1585	7.9342	0.7201	6.1571	-0.1470
	C3	3.5819	-1.7862	8.2500	-2.4182	3.1050	1.0966
5	C1	-6.9004	1.2306	0.5496	-2.1225	2.3561	1.3020
	C2	-5.7245	3.6963	1.7321	-1.4237	3.3337	0.9663
	C3	-5.6218	11.1899	2.9796	10.3322	16.5555	1.3575
6	C1	-0.2308	0.9467	2.1021	5.3028	7.1963	-
	C2	0.6070	-0.6205	2.1758	4.5684	6.8204	-
	C3	0.0863	0.3034	3.5695	1.4065	7.9153	-

TABLE 6.2 – RSB (dB) pour 6 volontaires, 6 postures et 3 canaux.

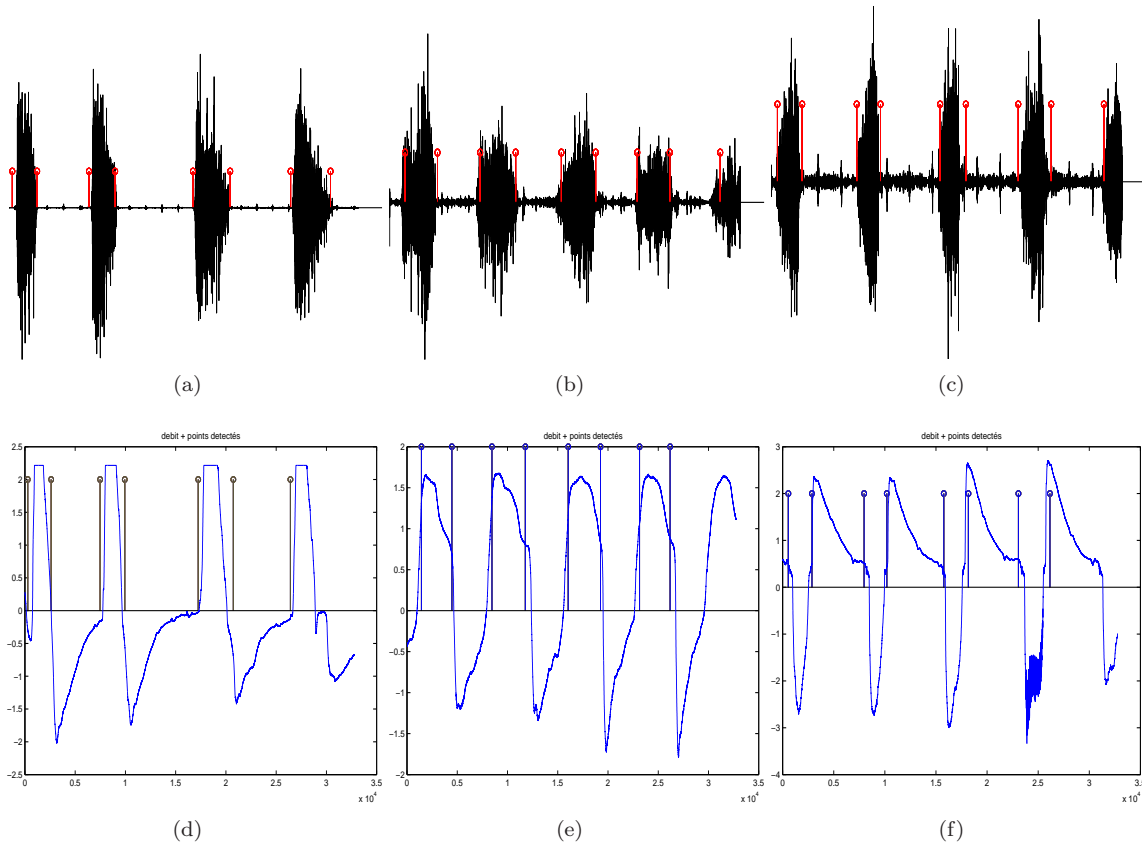


FIGURE 6.14 – Extraction EMGdi de surface, détection des fins et débuts de bouffées EMG pour le patient 6 (a) posture P1 (b) posture P3 (c) posture P5.

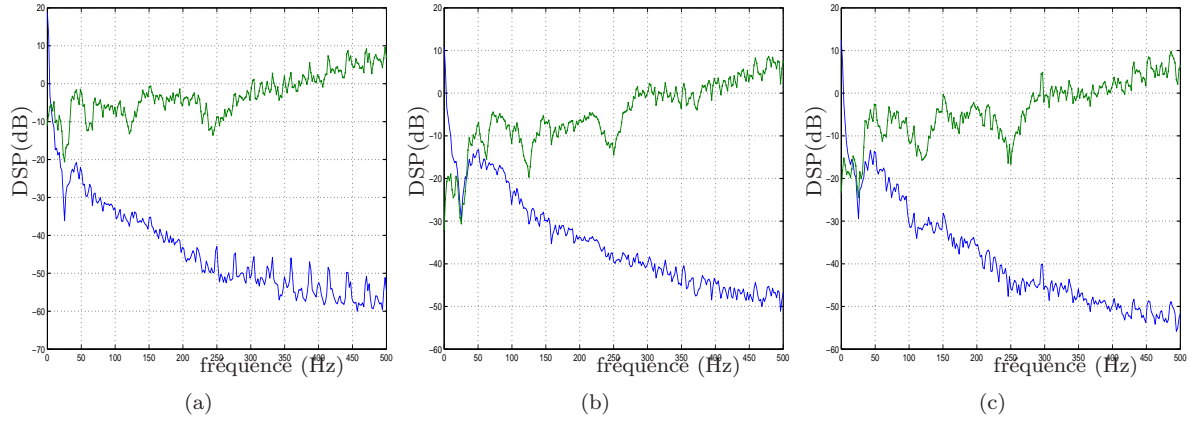


FIGURE 6.15 – Comparaison des densités spectrales de puissance (dB) de bouffées diaphragmatique pour 3 canaux et moyennées sur 4 bouffées inspiratoires différentes : avant débruitage (en vert) après débruitage (en bleu).

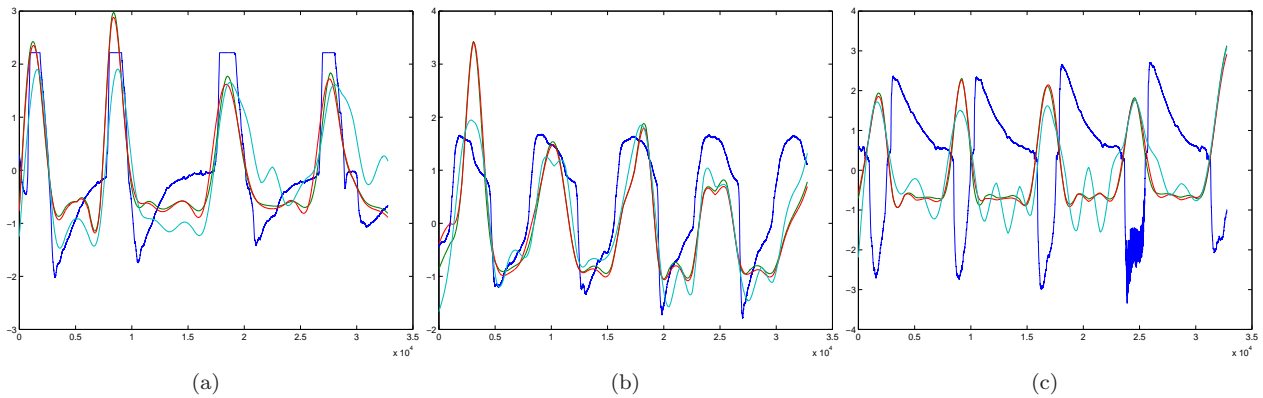


FIGURE 6.16 – Comparaison des enveloppes d'énergie du signal  $E(t)$  (rouge),  $Z(t)$  (bleu clair),  $R(t)$  (vert) pour le patient 6 (a) posture P1 (b) posture P3 (c) posture P5. La débit ventilatoire est en bleu sombre.

au nombre d'échantillons, à la longueur de la bouffée.

Les variabilités de ces tracés sont porteuses d'information ou au contraire être nuisible à l'extraction d'information médicale pertinente. Les critères les plus utilisés par les cliniciens sont la durée d'un événement (ou celle qui sépare deux événements) pour caractériser une variation temporelle ou l'amplitude d'un point caractéristique (maximum ou minimum) pour mesurer la variation d'amplitude. Si ces mesures ont l'avantage d'être facile à interpréter physiologiquement, elles ne prennent pas en compte du fait de la nature ponctuelle de la mesure, toute l'information présente dans le signal. A l'inverse, d'autres mesures tenant compte de toute l'information du signal présente une grande sensibilité à certaines variabilité, par exemple la mesure de corrélations. Des méthodes comme l'analyse fonctionnelle de données (AFD) par exemple extraient une information fonctionnelle à partir de l'observation de tout le signal.

La description du signal EMGdi peut être réalisée par l'analyse de l'objet « bouffée diaphragmatique » en termes de ses composants (analyse structurale). En première approximation, l'enveloppe de cet objet peut être représenté par un hexagone, pas forcément symétrique (cf. Fig.6.17). Le rôle de la segmentation est de transformer l'enveloppe du signal en une suite de segments. Chaque segment est défini par son ouverture, son allongement et son orientation de manière à représenter le plus fidèlement possible la forme géométrique du tracé. La segmentation est réalisée en 2 étapes : une étape d'extraction de primitives et une étape de recherche d'attributs. La taille des bouffées peut varier d'un signal à un autre et même au sein d'un même enregistrement, ce qui peut causer une instabilité des paramètres. Une technique naturelle de prétraitement consiste à ramener les caractères à la même taille.

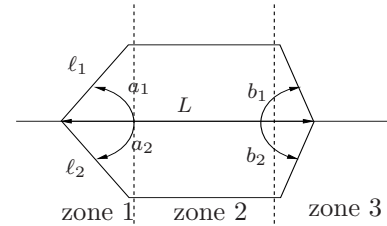


Figure 6.17: Principe de la segmentation de la bouffée.

La principale difficulté réside ensuite dans l'approximation de la courbe à une suite de segments de droite. La segmentation est réalisée en découpant le tracé en trois zones contiguës, sur chacune duquel est réalisée une approximation linéaire par rapport au tracé. On peut cependant se demander à partir de quelles limites (de longueur et d'angle), une courbe ne fait plus partie de la représentation polygonale en segments de droite. Un score de segmentation défini par la quantité  $\tau = \sum_{i=1}^6 \tau_i / 6$  est calculé, où  $\tau_i$  est la moyenne des écarts entre le segment et la courbe, faites dans la zone.  $\tau$  mesure l'erreur d'approximation structurale commise pour chaque bouffée. Les traits caractéristiques de cette forme sont ensuite quantifiés par un vecteur de 7 paramètres de distance et d'angle  $\mathbf{v} = (L, \ell_1, \alpha_1, \beta_1, \ell_2, \alpha_2, \beta_2)^T$ , calculé à partir du polygone. Les angles  $\alpha_1, \alpha_2$  sont mesurés par rapport à la ligne de base du signal. Cette représentation structurale correspond à un découpage en primitives simples.

L'apprentissage des caractères est ensuite réalisé à l'aide d'une carte de Kohonen, algorithme neuronal bien connu [115], analogue à la méthode des centres mobiles [128], mais pour laquelle on définit une notion de voisinage entre les classes.

On a alors la propriété très utile suivante : des individus voisins se retrouvent classés dans la même classe (comme avec toute méthode de classification) ou dans des classes voisines. On obtient donc une quantification de l'espace des données avec respect de la topologie. Cette propriété permet des représentations graphiques très parlantes où l'on distingue les proximités des individus de manière globale. Sur la figure 6.18, on peut voir le résultat obtenu pour deux distributions de points uniforme et en anneau. Dans cette représentation, les nœuds de la grille représentent la position des vecteurs-poids du réseau. Le voisinage dans la grille définit une région connexe dans l'espace *topologique* des neurones (la grille), pas forcément dans l'espace des poids de ces neurones. En effet, la proximité des neurones dans l'espace des poids peut être assez différente de celle de la grille mais les deux finissent par correspondre si l'apprentissage s'est bien déroulé [210]. La carte obtenue peut se lire comme une projection non-linéaire des observations. L'étude des représentants (ou vecteurs-codes) de chaque classe permet d'interpréter aisément la classification [34]. On commence par une classification fine (à 25 classes par exemple ici) et on peut ensuite les regrouper au moyen d'une classification hiérarchique en un petit nombre de super-classes, qui contiennent principalement des classes voisines, et qu'on peut alors décrire pour définir une typologie des individus.

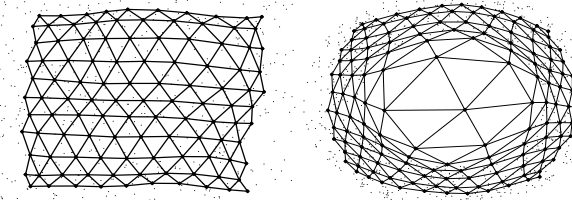


Figure 6.18: Quantification par un réseau de Kohonen de 2 distributions uniforme et en anneau. La représentation du réseau est faite dans l'espace des données.

La carte obtenue peut se lire comme une projection non-linéaire des observations. L'étude des représentants (ou vecteurs-codes) de chaque classe permet d'interpréter aisément la classification [34]. On commence par une classification fine (à 25 classes par exemple ici) et on peut ensuite les regrouper au moyen d'une classification hiérarchique en un petit nombre de super-classes, qui contiennent principalement des classes voisines, et qu'on peut alors décrire pour définir une typologie des individus.

On voit immédiatement que les classes 2 et 3 sont très différentes : sur la Fig. 6.19.b qui montre les vecteurs codes des 25 classes et leur regroupement en 3 super-classes (indiquées par la couleur de fond), on observe comment se déforment progressivement les profils de chacune des classes. Ce graphe met en évidence comment chaque classe ressemble à ses voisines. Les effectifs des 3 classes sont assez différents, ce qui s'expliquera quand nous étudierons la typologie. Classe 1 : 16, Classe 2 : 11, Classe 3 : 9.

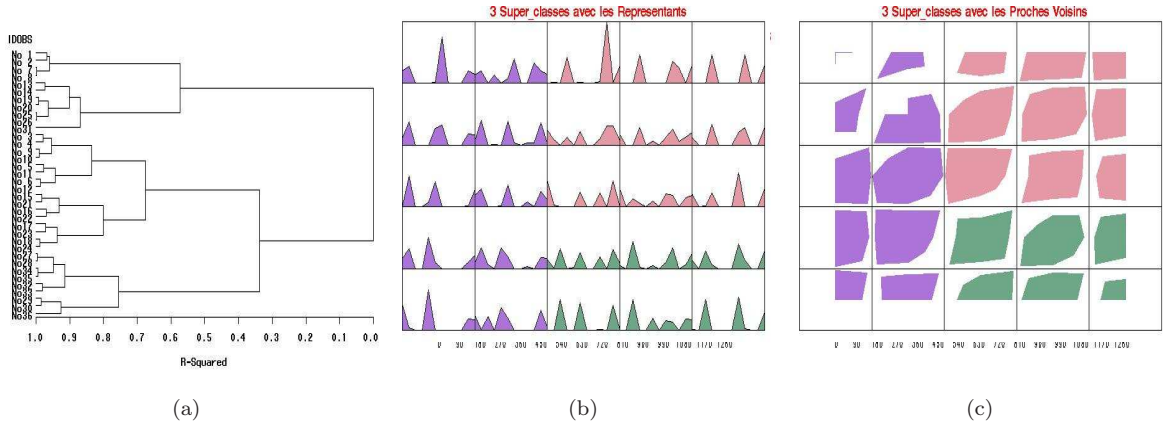


FIGURE 6.19 – Classification de Kohonen des bouffées EMGdi en 25 classes et 3 super-classes (**1** : violet, **2** : rose, **3** : vert). (a) dendrogramme des individus (b) Profils des classes de bouffées EMGdi (c) visualisation des distances entre les classes.

La figure 6.19.c met en évidence les distances entre les classes. Cette représentation est évidemment plus riche que celle du dendrogramme des individus donnée Fig. 6.19.a. Pour caractériser les super-classes obtenues, nous étudions les valeurs moyennes des variables quantitatives par classes dans la table 6.3.

	Classe 1	Classe 2	Classe 3
effectifs	16	11	9
$\alpha_1$ deg	50.04	49.09	52.83
$\alpha_2$ deg	55.27	59.51	54.46
$\beta_1$	61.59	73.22	59.00
$\beta_2$	61.65	65.27	77.32
$\ell_1^a$	860.17	595.17	652.27
$\ell_2^a$	243.84	422.38	358.36
$L^a$	1374,6	3302,39	2295,73

a. en nombre d'échantillons.

TABLE 6.3 – Variables quantitatives selon les 3 classes (après renormalisation).

La classe 1 est composée de bouffées étroites avec des fronts montants prononcés. Sa caractéristique essentielle est que ces bouffées ont une forte activité fréquentielle. La classe 2 regroupe des bouffées plutôt irrégulière avec une durée nettement supérieure à la moyenne. La classe 3 est caractéristique des bouffées de forme régulière, de durée moyenne mais néanmoins supérieure à la moyenne, mais très inférieure à celle de la catégorie 2. IL semble qu'il n'y ait pas de relation claire entre la durée de la bouffée  $L$  et l'activité fréquentielle. Il existe bien néanmoins une typologie des bouffées EMGdi.

Se pose donc ici le problème du choix des traits caractéristiques auxquels on impose de distinguer des formes proches mais différentes, de tolérer des variations normales de la bouffée EMGdi et d'être peu sensible à la variation de l'échelle. D'où un premier paradoxe dans la définition des traits caractéristiques. D'autre part, ils sont obtenus par des mesures métriques et des considérations topologiques. Or, les mesures métriques sont très sensibles au bruit, ce qui constitue un deuxième paradoxe.

### 6.3.5 Estimation rapide du RSB dans les signaux EMGdi

Etant donné un ensemble de vecteurs  $\mathbf{x}_i, i = 1 \dots, N$  de longueur  $L$ , obtenus à partir de l'enveloppe des bouffées EMGdi de la forme  $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{s}$  est la composante vectorielle stationnaire du signal supposé inconnue et  $\mathbf{n}$  un vecteur de bruit tel que  $\mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_j = 0, \forall i \neq j$ . Les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  sont centrés et normalisés à 1 ; *i.e.*  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1$ . On range les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  dans une matrice  $L \times N, N < L$  ;  $\mathbf{x}_i$  est la  $i$ -ième colonne de cette matrice, notée  $X$ . Donc  $\mathbf{x}$  appartient à un sous-espace de dimension  $\leq N$ , et chaque colonne de  $X$  peut être représentée comme un vecteur dans une base orthogonale composée d'au plus  $N$  vecteurs orthonormés  $\mathbf{u}$ , soit en notation matricielle :  $\mathbf{x} = U\mathbf{c}$ , avec  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$ , et  $U = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N]$ .

L'ensemble des vecteurs  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  se trouve dans un hyperplan de dimensions  $N$  plongé lui-même dans un espace à  $L$  dimensions. Dans le cas le plus simple, il n'y a pas de bruit dans nos mesures EMGdi, toutes les colonnes de  $X$  sont égales à  $\mathbf{s}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{u}_1$  est égal à  $\mathbf{s}$  et les vecteurs  $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$  forment le sous-espace nulle.  $\forall \mathbf{x}, c_1 = 1$  et tous les autres  $c_i = 0, i = 2, \dots, N$ .

Dans ce cas, le RSB est infini car il n'y a pas de bruit de puissance. En général, les signaux sont contaminés par du bruit. Si  $\mathbf{s}$  était connu, alors

$$\mathbf{x}_i = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N = c_1 \mathbf{s} + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N, \quad (6.4)$$

où  $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$  décrit le sous-espace du bruit. A partir de (6.4), on trouve :

$$\mathbf{s}^T \mathbf{x}_i = c_1 \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \dots + c_N \mathbf{s}^T \mathbf{u}_N = c_1 \sigma_s^2 + c_2 0 + \dots + c_N 0 = c_1 \sigma_s^2, \quad (6.5)$$

où  $\sigma_s^2$  est la puissance du signal. Pour obtenir une estimée de  $\mathbf{s}$ , on considère  $X$  tout entier. L'objectif est de trouver l'axe principal  $\mathbf{u}_1$ . On peut utiliser différents critères, l'approche la plus simple consiste à prendre pour  $\mathbf{s}$  la moyenne des vecteurs colonnes. Ce n'est pas le meilleur estimateur mais c'est le plus efficace. Une autre approche propose de maximiser la puissance du signal  $\sigma_s^2(i)$  pour chaque colonne  $i$  de  $X$ , ce qui s'écrit

$$X^T \mathbf{s} = \mathbf{p}, \quad (6.6)$$

avec  $\mathbf{p} = \{\sigma_s^2(i)\}$ . En élevant au carré les deux côtés de l'équation (6.6)

$$(X^T \mathbf{s})^T (X^T \mathbf{s}) = \mathbf{s}^T X^T X \mathbf{s} = \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \epsilon \quad (6.7)$$

En maximisant  $\epsilon$  sous la contrainte que  $\mathbf{s}^T \mathbf{s} = 1$  et en réécrivant l'ensemble dans un Lagrangien, on se ramène à une équation aux valeurs propres  $X^T X \mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}$ .  $\mathbf{s}$  est le plus grand vecteur propre de  $X^T X$  qui correspond à la plus grande valeur propre  $\lambda_{\max}$ . L'espace du bruit est composé par tous les autres vecteurs propres  $\mathbf{u}_k, k = 2, \dots, N$ .  $\lambda_{\max}$  est la puissance du signal, et  $\sum_{k=2}^N \lambda_k$  la puissance du bruit. Le RSB vaut donc

$$\text{RSB} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\sum_{k=2}^N \lambda_k}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{N - \lambda_{\max}}}. \quad (6.8)$$

En supposant que le spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  forme un échantillon de la v.a.  $\lambda$ , alors  $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^m = \frac{1}{N} \text{trace} X^m$ . Or,

$$\lambda_1^m + \dots + \lambda_N^m \approx \lambda_1^m, \quad \text{si } m \gg 1. \quad (6.9)$$

En choisissant par exemple  $m = 16, X \rightarrow X^2 \rightarrow X^4 \rightarrow X^{16}$  ; on prend la trace de  $X^{16}$  pour estimer la plus grande valeur propre qu'on réinjecte dans (6.8).

Dans [199], nous avons montré que le RSB peut s'exprimer à partir de la corrélation croisée des vecteurs de forme  $\mathbf{x}_i$  :

$$\text{RSB} = \frac{r}{(1 - r/\beta)} \quad \text{où } r = \left( \frac{L}{L+1} \sum_{i,j} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j - L/2 \right), \quad \beta = \sum_{i=1}^L i. \quad (6.10)$$

## 6.4 Perspective pour la suppléance fonctionnelle ventilatoire

Explorer la fonction diaphragmatique est importante pour la physiologie et la pathologie respiratoires. L'EMGdi est un élément majeur de cette exploration. Cependant son utilité est faible en pratique, soit du fait du caractère traumatique des méthodes en cause, soit du fait des limitations techniques inhérentes au recueil de surface. La très importante contamination du signal diaphragmatique par d'autres activités électriques interdisait en pratique (jusqu'à présent) d'interpréter le signal recueilli lors de la ventilation spontanée, calme ou non, comme un index purement diaphragmatique. En fait, le signal de surface n'est vraiment fiable que pour mesurer la latence du potentiel d'action, plutôt que son amplitude.

Les techniques d'enregistrement en surface multicapteurs décrites dans ce chapitre ne permettent pas seulement d'affiner les interprétations du signal recueilli en ventilation spontanée, elle permet d'obtenir un signal *spécifiquement diaphragmatique*, ceci avec le « minimum » de manipulation du signal (en terme de filtrage). On peut ainsi imaginer des applications aussi diverses que le diagnostic de fatigue musculaire sans épreuve de charge pour les patients, et, partant, l'évaluation d'interventions thérapeutiques, ou bien l'utilisation du signal pour régler les interactions patient-ventilateur lors de la ventilation assistée.

Les progrès en anesthésie et en réanimation ont pour objectifs la réduction de la durée de surveillance et l'amélioration de la qualité de la récupération. Dans un contexte de pénurie de moyens des services d'urgence d'anesthésie et de réanimation, d'alourdissement des contraintes médico-légales en anesthésie et en réanimation, les cliniciens de ces spécialités attendent de la recherche technologique qu'elle leur fournisse des outils d'amélioration de leurs performances en termes de soins. Pour le cas particulier de l'assistance respiratoire, la capacité de surveiller et d'optimiser l'adaptation entre le patient et sa machine d'assistance est déterminante pour la qualité et la conduite des soins. La recherche d'indicateurs non-invasifs de la demande ventilatoire d'un patient fait actuellement l'objet de nombreuses études aussi bien fondamentales qu'appliquées. Les modes de ventilation actuellement proposés sont les modes NAVA (*Neurally adjusted ventilatory assistance*) [183] et le mode PAV (*Proportional assist ventilation*) [220]. Le premier n'offre qu'une solution invasive basée sur la mesure œsophagienne de l'activité du diaphragme et le second ne donne pas encore de résultats satisfaisants. L'approche non-invasive que nous proposons a donc toute sa place. Elle correspond par définition, à une estimation indirecte de la demande ventilatoire. Dans ce contexte elle ne pourra afficher un caractère de robustesse que si elle est fondée sur une fusion de données issues d'indicateurs multiples de cette demande. Plus précisément, l'estimation sera menée par une analyse conjointe de données prélevées sur un ensemble de mesures électromyographiques. Les candidats potentiels sont l'EMG du muscle génioglosse, l'EMG des muscles de l'aile du nez et l'EMG diaphragmatique par voie de surface intercostale. L'EMG diaphragmatique reste bien-entendu l'indicateur le plus pertinent mais également le plus délicat à traiter.

Du point de vue clinique, on vise l'optimisation des stratégies d'assistance de la fonction respiratoire par le développement d'un système non-invasif capable de détecter les commandes respiratoires centrales du patient pour la meilleure adéquation possible entre l'action de ventilation et les besoins réels. Obtenir un indicateur de l'activité inspiratoire diaphragmatique reste donc un enjeu clinique majeur. La caractérisation de l'EMG permet aussi de détecter des anomalies de l'excitabilité ou de la transmission neuromusculaire, de différencier un myopathie d'une atteinte neuromusculaire, etc.



# Conclusions et perspectives

## 7.1 Synthèse

Dans ce manuscrit, j'ai tenté de montrer, à travers une synthèse de mes travaux de recherche depuis 9 ans, ma contribution à la recherche internationale. Nous avons vu que de nombreux problèmes de traitement du signal peuvent se formuler comme des problèmes inverses ou mal posés, lorsque les signaux sont en très grandes dimensions ou aussi pour des raisons algorithmiques (SAS), ou encore pour des raisons d'identifiabilité du système. Nous avons présenté des solutions originales pour chacun de ces cas.

Peu d'ouvrages sont consacrés aux problèmes inverses, mais encore plus rares sont ceux qui proposent des indicateurs de solutions. Ces solutions sont peu nombreuses pourtant : citons la localité, la dépendance statistique (ou sa contrepartie, selon la nature du modèle) et les approches globales.

Un autre dénominateur commun relie ces travaux ; il s'agit de la mise en évidence des relations statistiques et topologiques qui existent entre les données. ces relations existent bel et bien. Par exemple, en SAS, l'objectif est de séparer des signaux sur la base de leur *indépendance* supposée ; le calcul ensembliste manipule des *intersections* entre des ensembles, sorte de corrélation « bas niveau », pour explorer un espace de recherche ; enfin, le modèle inverse MIME utilise un algorithme de Gibbs-Metropolis basé sur des *corrélations* de grandeurs jacobiniennes. Nous défendons la thèse que la structure des données n'est pas à découvrir, elle est à construire. Rappelons ici comment se structure ce document. Les travaux se scindent en deux volets :

### 1. Recherches académiques sur la résolution de problèmes inverses : séparation de sources, calcul ensembliste et modèle inverse

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous avons montré l'intérêt d'explorer les relations de dépendance statistiques qui existent dans un réseau de signaux et présenté les outils de caractérisation de ces structures, sous forme de complexes simpliciaux. Quelques caractéristiques élémentaires de la connectivité des graphes ont été introduites, telles que le degré d'un graphe ou le spectre de sa matrice d'adjacence, bien que de nombreux autres invariants existent. Ce chapitre se limite à la caractérisation d'un réseau de relations de dépendance, d'un point de vue probabiliste. Ceci ne constitue toutefois qu'une première étape destinée à maîtriser des outils utiles pour supporter un raisonnement explicatif, au sujet du problème de la constitution de l'espace du signal. Nous avons proposé un cadre d'analyse fin grâce d'une part aux outils de caractérisation des graphes supporté par des résultats analytiques pour certains cas particuliers ; d'autre part, grâce à la formalisation des dépendances d'ordre supérieur et à leur analyse homologique.

Au chapitre 3, notre démarche en séparation de source repose, sur la construction d'équations d'estimation originales exploitant (i) soit les dérivées des signaux aléatoires qui permettent d'estimer les paramètres inconnus (ii) soit les conditions de stabilités des équations d'estimation. Nous avons illustré cette démarche sur plusieurs mélanges de signaux et toujours dans un cadre linéaire instantané simple, pour interpréter les résultats. Une nouvelle méthode, basée également sur des statistiques d'ordre deux et croisant les coefficients d'une décomposition en ondelettes a été donnée. Cette nouvelle approche exploite la « diversité temps-échelle » spatiale des sources afin de construire un ensemble de matrices à partir de la transformée en ondelettes des signaux observés. Nous avons montré qu'une condition nécessaire au succès



est qu'il existe au moins des matrices diagonales dans le plan  $t - f$  dont la norme euclidienne possède des propriétés particulières. Dans un cadre plus formel, il nous a semblé important d'établir des vitesses de convergence et des conditions d'unicité des solutions dans les modèles de séparation de sources, ou, inversement, de rechercher dans quels cas les équations d'estimation considérées ne seront pas suffisantes. Ces travaux théoriques permettent mieux comprendre les solutions produites par ces algorithmes. Un travail sur le filtrage a été également réalisé, en particulier sur le traitement par ondelettes, mais plusieurs points restent à explorer : le choix automatique des échelles d'ondelettes, l'influence de l'ondelette mère, etc.

Le chapitre 4 a présenté 2 algorithmes originaux permettant de solutionner un problème inverse en tirant parti de la forte dimensionalité de l'espace du signal. Le modèle MIME présente pas mal de similitudes avec l'approche ensembliste : exploration de l'espace de recherche selon une direction, exploration globale, etc. Par exemple, à aucun moment pour estimer  $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ , il n'est nécessaire d'inverser  $\mathbf{f}^{-1}$ . MIME s'appuie au contraire sur un calcul de dérivée ; Les preuves de convergence sont données, mais pas celles sur la consistance des solutions. Cette approche inverse permet d'annuler à coup sûr les effets de la dimensionnalité et de concentration de la mesure qui lui est associé.

Enfin, dans le prolongement de ces travaux, nous avons utilisé au chapitre 5, les algorithmes mis en œuvre en calcul par intervalle pour marrier de façon originale le flou et les intervalles. Nous avons comparé les résultats obtenus avec un algorithme d'estimation flou de type FIS. Rappelons qu'en arithmétique des intervalles de même qu'en l'analyse par intervalle, aucune mesure de possibilité ni de probabilité n'est attachée à un intervalle ou à une partie de cet intervalle. L'écriture d'une expression ensembliste fait oublier les relations de dépendance qui existent entre les variables. La résolution par intervalle nous tient particulièrement à cœur car les avantages des techniques par intervalles, et en particulier SIVIA, sont multiples : nous n'avons pas besoin de choisir de valeurs initiales pour les paramètres de la séparatrice dans le cas de l'estimation d'un système inversible, la convergence de la méthode est assurée, nous obtenons l'ensemble de toutes les solutions possibles pour les paramètres, et enfin l'incertitude d'estimation des coefficients est connue. Ce qui est particulièrement notable dans cette expérience, c'est que les critères de stabilité utilisés pour parvenir à la séparation des sources, ne correspondent à rien (d'un point de vue statistique !) : les traiteurs de signaux fondent en effet la séparation généralement sur les ordres supérieurs, l'IM ou le maximum de vraisemblance. Cela signifie que d'autres voies (au moins) aussi fécondes que les statistiques sont à explorer : de ce fait, je pense que cette voie est prometteuse, et la SAS constitue donc un domaine de recherche d'avenir.

2. **Recherches applicatives ou applications industrielles : analyse de données, traitement du signal biomédical** Les chapitres 6 et 7 sont consacrés au traitement, à la détection et à la classification de biosignaux, plus particulièrement les ECGf et EMGdi. Ces deux applications ont en commun les difficultés suivantes : actuellement, on est capable de mesurer le rythme cardiaque fœtal (RCF) mais pas l'ECGf complet ; de plus, l'EMGdi est réalisé de façon invasive en plaçant des électrodes sous-cutanées ou par voie œsophagienne. Dans les deux cas, le positionnement des capteurs est délicat. Le travail était axé autour d'un dispositif d'acquisition multicapteurs « maison », opérationnel et installé sur le site de l'hôpital Robert Debré, capable d'enregistrer un nombre de signaux bien plus grand que ceux habituellement utilisés en obstétrique ou en pneumologie (environ 70). Les applications ont néanmoins des finalités différentes :

- Le but d'un tel dispositif est de rendre possible la surveillance de l'électrocardiogramme fœtal (ECGf) qui est un élément clé de la surveillance prénatale et pendant l'accouchement : l'objectif est de détecter d'éventuelles anomalies pouvant traduire un état de souffrance fœtale aiguë et nécessitant une prise en charge rapide afin d'éviter une évolution fatale ou l'évolution vers des séquelles graves et invalidantes. Le manque de spécificité des mesures est à l'origine d'une inflation du taux de césarienne avec extraction d'enfants bien portant (en France, il y a 25% de césariennes sur 700.000 naissances par an).
- L'autre application sera la synchronisation de divers types d'appareil avec la commande ventilatoire reflétée par l'activité électromyographique du diaphragme (EMGdi), aujourd'hui mesurée en milieu clinique de façon invasive et monocapteur. Cette perspective d'application concerne essentiellement la ventilation mécanique dite « neuro-assistée ». Il a en effet été démontré qu'il pouvait être utile d'asservir une machine d'assistance ventilatoire non pas à un signal de nature mécanique, mais à un signal de nature électrophysiologique.

Si nous sommes aujourd'hui en mesure de proposer un prototype complet de la chaîne d'acquisition jusqu'au traitement de ces signaux (débruitage, séparation de sources, détection d'événement physiologiques)

jusqu'à leur classification, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de protocole européen permettant de valider et de valoriser cette découverte. Un des résultats les plus spectaculaires obtenu par ce dispositif fut l'observation d'un signal ECG entièrement dégagé de l'ECG de sa mère par le seul hasard de l'orthogonalité vectorielle.

Ce travail de recherche a donné lieu au co-encadrement de 4 doctorants (A. Hazan, R. Kallel, S. Lagrange, R. Mokhneche) qui ont soutenu leur thèse ou sur le point de la soutenir.

Rappelons les verrous et directions à privilégier :

1. s'intéresser à *la dimensionalité des données* est un autre façon d'étudier les grands réseaux de capteurs, particulièrement en vogue dans le médical aujourd'hui (BCI, EEG, etc.) Les méthodes de séparation de type sous-espace peuvent uniquement être appliquées quand le nombre de capteurs est largement supérieur à celui des sources. L'espace généré par les sources est alors noyé dans celui généré par les observations. Ces méthodes ont été développées en automatique et elles ont été aussi appliquées sur des problèmes d'identification et d'égalisation. Malheureusement, la mise en œuvre de ces méthodes nécessite la manipulation de matrices de très grandes dimensions qui réduisent les performances pour la séparation.
2. Notre approche basée sur des statistiques d'ordre deux, croisant les coefficients d'une *décomposition en ondelettes*, exploite la « diversité temps-échelle » spatiale des sources afin de construire un ensemble de matrices à partir de la transformée en ondelettes des signaux observés. mais l'approche est conditionnée à l'existence de matrices diagonales dans le plan  $t - f$  dont la norme euclidienne possède des propriétés particulières.
3. La *méthode de séparation* proposée par Lagrange qui consiste à annuler les dérivées successives des matrices d'autocorrélation des sources a donné des résultats encourageants, bien qu'il se soit placé dans un contexte volontairement difficile en exploitant un nombre d'équation égale à celui du nombre de paramètres. Une condition nécessaire de succès est qu'il existe au moins un ordre de dérivation  $k$  tel que la dérivée  $k$ -ième de la matrice d'autocorrélation en zéro ait des valeurs propres distinctes. Cependant, cette condition concernant les sources inconnues est difficilement exploitable. En théorie, la méthode ne possède aucun inconvénient relatif à l'échantillonnage des signaux. Mais, en pratique, une implémentation numérique impose, bien entendu, un échantillonnage.
4. *séparation en contexte bruité* : des solutions efficaces dans les mélanges bruités sont indispensables pour que les méthodes de séparation de sources puissent être appliquées à des problèmes réels. Il semble que les méthodes de séparation de sources qui prennent en compte la coloration des signaux (modèle Markovien) fournissent des sources estimées dans lesquelles le bruit est lissé, Mais dans le cas de mélange non-linéaires ou convolutifs, le problème n'a jamais été abordé. Il reste donc plusieurs points à approfondir, et d'un point de vue pratique, des comparaisons sérieuses entre les diverses méthodes s'imposent.
5. l'utilisation des *techniques ensemblistes* nous a permis, dans la mesure où l'on obtient une unique solution, de prouver la séparabilité d'un système de mélange. Inversement, si un ensemble de solutions est obtenu, on ne peut absolument pas conclure quant à la non-séparabilité du système considéré : il est possible en effet, que bien qu'un système soit séparable, les équations d'estimation choisies conduisent à une infinité de solutions (par exemple si les équations sont dépendentes). En outre, des techniques plus élaborées comme la propagation de contraintes pourraient s'avérer plus efficaces en grande dimension et lever le verrou calculatoire.
6. Nous avons insisté sur le caractère *ad-hoc* de l'apprentissage de MIME qui emprunte à la fois aux méthodes fréquentistes et à la modélisation Bayésienne. Sa forme de régulation aux problèmes mal-posé réside dans sa structure parcimonieuse. L'originalité de MIME réside dans son schéma d'inférence basée sur une marche aléatoire de type Gibbs-Metropolis, qui est coûteux. Le prix à payer pour la marche aléatoire garantissant la convergence est cher. La mise en œuvre de cet algorithme est loin d'être triviale. Vers plus de souplesse ?

## 7.2 Projet de recherche à 4 ans

Après avoir présenté les différentes études que j'ai pu réaliser, je voudrais maintenant évoquer les perspectives que j'envisage pour la suite de mes travaux de recherche. Le présent chapitre constitue une présentation de mes activités de recherche à court et à moyen terme. Il s'articule autour de 2 grandes parties. La première partie

fait l'objet de la présentation des études académiques développées dans le contexte de la séparation de sources et du traitement du signal en général, la deuxième partie traite de nos perspectives de recherche appliquée dans le domaine biomédical.

### 7.2.1 Contexte scientifique et objectifs

Ces travaux ont apporté un certain nombre de réponses mais ont suscité des interrogations ouvrant la porte à de nouveaux axes de recherche.

Au départ, comme pour beaucoup, mes travaux ont été orientés vers la recherche d'opérateurs généraux traitant les signaux biomédicaux : lissage de spectre, filtres passe-bande, réhausseur de signal, séparation de sources non-stationnaires, etc. Nous nous sommes aperçus qu'il était possible d'optimiser les résultats attendus en prenant en compte les particularités des signaux ainsi qu'en travaillant sur les conditions d'acquisition de ces signaux quand ceci était possible. Aujourd'hui, beaucoup des traitements que nous utilisons sont efficaces pour un type d'entrée bien spécifié, mais ne savent pas prendre en compte la variabilité de cette entrée. Sans viser la généralité, il serait appréciable de pouvoir conférer aux traitements développés une capacité d'adaptabilité (c'est le sens des travaux menés sur le calcul automatique d'échelle pour le débruitage par ondelettes).

Remarquons également que les signaux traités sont de plus en plus complexes. cela s'explique naturellement par le nombre croissant de capteurs ou encore du fait de la prise en compte de sources assez diverses, comme c'est le cas, par exemple, dans la recherche sur les BCI. Les quantités d'informations sont sans cesse plus importantes au dépend de l'interprétation. La manipulation de grandes quantités de connaissances posent des difficultés pratiques et amène le chercheur à considérer que l'explosion combinatoire qu'il affronte est une manifestation de la complexité asymptotique d'un problème dont il traite les instances. Ce constat ouvre néanmoins le champ à de nouvelles méthodes de caractérisation des signaux, comme celles présentées au chapitre 2.

Enfin, La tendance générale n'est plus de poser le problème dans les terms « existe t-il un modèle susceptibles de résoudre tel ou tel problème ? » mais plutôt « étant donné un dispositif aux capacités calculatoires bornées et aux propriétés spécifiées, quel type de problème est-il capable d'appréhender, de mémoriser et comment peut-il les acquérir ? » Parti d'une finalité asymptotique, on arrive à une finalité *minimaliste*. La séparation de source est attaquée par exemple par les automaticiens sur son caractère idéalisé à travers

- l'irruption des probabilités : on peut rétorquer que l'environnement naturel n'est pas aléatoire, que d'autres théories mathématiques seraient plus indiquées. La théorie stipule que le séparateur de sources doit être capable d'affronter n'importe quelle distribution de probabilité.
- se pose aussi la question de savoir si les entrées sont déjà des sources ou bien des perceptions brutes.

Certains auteurs ont remarqué que c'était souvent l'algorithme qui définissait le problème et non pas l'inverse. Cette attitude va à l'encontre de la pratique recommandée en informatique, où la spécification du problème précède normalement sa solution. L'espace des données est défini par une distribution des probabilités, qui permettent à leur tour de définir une notion d'*approximation*, et de déclarer qu'estimer des sources, c'est proposer une approximation de bonne qualité de la matrice de séparation. Le produit de l'apprentissage ne doit plus être identique à la fonction cible mais simplement pas trop éloigné au sens probabiliste.

Notre objectif est de montrer qu'on peut mettre en œuvre des techniques préservant au mieux l'information disponible dans les données. Ce principe, qui constitue souvent un objectif pour un grand nombre de méthodes n'est pas toujours respecté pour des raisons diverses. En particulier, la complexité d'un grand système de traitement de l'information est souvent incompatible avec les exigences de temps réel imposées dans la plupart des systèmes industriels.

### 7.2.2 Méthodologie et mise en œuvre

Avec ces objectifs, nous souhaitons orienter nos travaux, d'un point de vue théorique, dans 3 directions principales :

- la prise en compte des propriétés particulières des signaux pour la **séparation de sources**,
- le **traitement d'antennes**, qui semble un atout majeur pour prendre en compte la topologie d'un réseau de capteurs vis-à-vis d'une séparation optimale des sources ou pour améliorer les caractéristiques topologiques qu'on peut extraire du réseau, mises en évidence au chapitre 2.
- les techniques d'**estimation rapide**, utilisées par les automaticiens, pour résoudre les problèmes plats.

Il faut souligner ici que nos prochaines contributions dans le domaine de la SAS s'orientent naturellement vers le traitement des signaux médicaux obtenus par acquisition multicapteurs. Dans ce contexte, un scénario réaliste est celui d'un grand nombre de capteurs qui peut être inférieur ou supérieur au nombre de sources. La séparation de sources n'est pas un avatar des modes qui secoue le traitement du signal depuis 20 ans, c'est la réponse naturelle des expérimentateurs à la complexité croissante des problèmes produits par les systèmes adaptatifs actuels. Comme tout domaine en expansion, la séparation de source souffrent de limites incertaines ou de définition floues et l'une de nos préoccupations sera donc d'apporter quelques éclairages sur les étapes qui jalonnent sa mise en œuvre.

### 7.2.2.1 Séparation de sources

1. Il est non seulement discutable d'imposer l'hypothèse de stationnarité des sources dans les problèmes de mélanges linéaires, au regard des conditions expérimentales, mais aussi certainement superflu sur le plan théorique. Il est même vraisemblable que la **non-stationnarité** des sources permettent d'atteindre, lorsque le milieu est constant, de meilleures performances. Nos prochaines contributions viseront donc à exploiter complètement les informations générales comme la coloration temporelle, la non-stationnarité. En effet, l'analyse en composantes indépendantes n'exploite pas de propriétés (temporelles notamment) des sources, mais suppose que ces dernières sont iid. Si les sources sont colorées (le premier « i » de iid est faux), ou si elles sont non-stationnaires (le deuxième « i » de iid est faux), ou si les sources sont parcimonieuses (à valeurs discrètes par exemple ou fortement sous-Gaussiennes), on peut proposer des méthodes plus simples, reposant sur des décorrélations (ordre 2). Ces méthodes ont l'avantage de pouvoir séparer des signaux Gaussiens.
2. L'importance du modèle **non-linéaire**, extension de travaux récents proposés pour des mélanges linéaires, est évidente dans le contexte des applications médicales et suscite un très vif intérêt de notre part. Le fait que les réponses des capteurs, à l'origine des non-linéarités observées, aient une forme très particulière doit pouvoir être pris en compte. Le calcul des performances de certaines chaînes de traitement complexes (très non-linéaires) est difficile à mener à bien dans des conditions réalistes, c'est-à-dire sur des signaux réels, en particulier lorsque les données sont peu nombreuses. Auquel cas, les techniques de rééchantillonnage (type *bootstrap*) pourraient apporter une solution simple, quoique coûteuse.
3. L'**évaluation de bornes** permettant d'accéder aux performances ultimes atteignables en estimation de paramètres est également difficile à mettre en œuvre lorsque le modèle Gaussien est irréaliste, mais accessible au moyen d'une approche ensembliste. L'avantage des intervalles est la garantie de fournir toutes les solutions, puisqu'on obtient toujours l'ensemble des solutions compatibles avec un système d'équations fixé. Un atout majeur de ces outils ensemblistes est que la séparabilité peut être vérifiée *a posteriori*. Mais les techniques ensemblistes perdent en efficacité lorsque le problème considéré augmente en dimension, en particulier SIVIA qui est efficace jusqu'à 4 ou 5 paramètres et bloque au-delà. Des recherches futures viseraient à étendre les travaux d'application du calcul ensembliste aux autres classes de modèles de séparation de source (mélanges non linéaires, convolutifs, etc.) et de dégager des propriétés en ayant recours, cette fois-ci, à des techniques de type *branch and bound*.
4. La non-stationnarité des signaux permet en fait de développer des algorithmes de séparation plus simples et plus robustes. Néanmoins, dans le contexte d'un mélange de signaux obtenus par une ceinture d'électrodes, les performances sont limitées. L'approche temporelle ne donne pas de bons résultats. Ceci peut être dû à des réponses impulsionnelles longues par exemple. La séparation dans le domaine fréquentiel est alors nécessaire, d'autant plus que la longueur de ce type de filtre inverse est encore plus grande que celle des filtres de propagation. L'idée est d'utiliser l'approche fréquentielle et de diagonaliser de manière conjointe des matrices spectrales calculées à la même fréquence sur des signaux localement stationnaires. L'inconvénient de l'approche **convolutive** est que les sources sont séparées dans chaque canal de fréquence à une permutation près. Il est donc nécessaire de détecter les permutations éventuelles avant de reconstruire les sources temporelles. Les méthodes de reconstruction se sont fondées sur des caractéristiques propres aux signaux et aux filtres. Les indéterminations d'ordre des signaux reconstitués deviennent donc très gênantes dans la phase de reconstruction des signaux. Pour ces raisons, nous souhaitons examiner l'existence d'une fonction objectif capable d'éliminer ou de réduire l'effet indésirable de ces indéterminations.

Plus généralement, le mélange convolutif est une représentation réaliste d'un canal de transmission réel, et les traitements de ce type de mélange connaît un certain succès dans le domaine médical.

Les méthodes de type sous-espaces n'ont d'intérêt que si le nombre de capteurs est largement supérieur à celui des sources. L'espace généré par les sources est alors noyé dans celui généré par les observations. Pourtant, un des principes les plus solidement établis en statistique est celui qui consiste à mettre en œuvre des techniques préservant au mieux l'information disponible dans les données. Ce principe, qui constitue souvent un objectif pour un grand nombre de méthodes n'est pas toujours respecté pour des raisons diverses. En particulier, la complexité du système de traitement d'information est souvent incompatible avec les exigences de temps réel imposé dans la plupart des systèmes industriels. Voilà pourquoi les méthodes déflationnistes ont de notre point de vue un attrait particulier : elles prennent en compte l'espace des observations global pour en extraire, un à un, les axes des sources. Cependant, cette approche donne lieu à controverse car l'intervention d'un facteur d'importance minimale peut dans certains cas altérer un processus initialement bien déterminé et, par conséquent, l'intervention d'un grand nombre de variables apparemment négligeables peut jouer un rôle décisif dans la résolution d'un problème. L'adoption de ce point de vue dans l'analyse des conditions d'utilisation des méthodes de sous-espaces vis-à-vis de nos signaux devra certainement être abordée.

5. A contrario, lorsque le nombre de sources est supérieur au nombre de capteurs, bien peu de méthodes sont applicables. C'est le cas dans de nombreuses applications en télécommunication, mais aussi dans le médical si l'on considère le nombre de *motor units* qui génèrent les EMGdi. Les conditions sous lesquelles l'identification d'un mélange (convolutif quelconque) de  $P$  sources avec  $K$  capteurs est possible ne sont pas aujourd'hui clairement établies. Dans le cas de mélanges instantanés, on avance notamment la condition suffisante  $P < (3K - 2)/2$ . Nous n'avons pas eu l'obligation ni la nécessité de l'utilisation de ce modèle dans mon parcours, mais le sujet ne manque pas d'intérêt et sera considéré dans un prochain avenir parmi nos priorités de recherche. Un problème intéressant, mais difficile à poser correctement, est celui d'un seul capteur et d'une seule source.

Sur certains espaces de grande dimension, certaines fonctions sont presque constantes. « Presque » signifie que, sur une partie de mesure très grande de l'espace concerné et doté d'une mesure canonique, la fonction considérée est très proche d'une certaine valeur. Ce phénomène, qui s'apparente à une « *concentration de la mesure* » intervient lorsqu'un espace inconnu est observé au moyen de fonctions définies sur cet espace : on parle de **concentration** parce que vu au travers de ces fonctions, l'espace a apparemment une taille beaucoup plus faible que ce qu'il n'est réellement. Cette notion permet en particulier de donner un sens à l'affirmation intuitive « *si une fonction dépend de  $n$  variables indépendantes, chacune intervenant pour au plus  $\frac{1}{n}$  dans le résultat, alors la fonction est constante à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  près* ». Il pourrait donc être intéressant d'étudier comment les problèmes de séparation de sources sont reliés aux problèmes de concentration de la mesure.

### 7.2.2.2 Traitement d'antennes

1. Le traitement d'antenne consiste en la localisation de sources rayonnantes à partir d'une estimation précise de leurs angles d'arrivée à partir des signaux reçus sur une antenne. Le traitement d'antenne a pour objectif, à partir des temps de transmission et des angles d'arrivée, de localiser une source dans un réseau multicapteurs. Nous envisageons d'utiliser le traitement d'antenne à des fins de **filtrage spatial**, de **réjection d'interférences** et de localisation de sources. Plusieurs méthodes de localisation utilisant les temps de transmission et les angles d'arrivée ont été développées dans la littérature. Dans le cas d'une ceinture d'électrodes, une méthode de localisation de sources rayonnantes basée sur la méthode des sous-espaces pourrait être développée dans un premier temps. Son principal avantage réside dans le fait qu'elle ne requiert pas de décomposition spectrale de la matrice de covariance des signaux reçus. On se restreindra aux techniques qui font intervenir les statistiques d'ordre 2 (corrélations dans le domaine temporel et spectre dans le domaine fréquentiel) ; celles utilisant les statistiques d'ordre supérieur à deux seront abordées si les résultats ne sont pas probants. Un sujet de thèse a été proposé pour traiter ce problème des interférences dans les antennes de capteurs.
2. La **localisation de source** peut être abordée comme un sous-produit des techniques de formation de voies qui consistent à former le diagramme de rayonnement de l'antenne en fonction de critères particuliers. Cependant, la structure imposée par la formation de voies ne représente pas forcément la



meilleure approche. Nous montrerons dans nos futurs travaux que la prise en compte de l'information *a priori* disponible (forme du réseau de capteurs, nature de la propagation, nature physique du bruit, etc.) permet la mise en œuvre de techniques plus sophistiquées et plus performantes. La contre partie de cette sophistication étant bien entendu une robustesse moindre des estimateurs obtenus vis à vis des éventuelles inadéquations entre les modèles mis en œuvre et la réalité du phénomène étudié.

3. Pour réaliser la formation de voies statistique, on doit prendre en compte les variations des propriétés du signal au cours du temps (dues par exemple à des sources mobiles, comme le fœtus *in utero*) dans le cas de signaux non stationnaires. Dans le but de traiter ce dernier cas tout particulièrement, nous privilégierons l'emploi de **techniques adaptatives** aux traitements par blocs pour estimer les statistiques du signal, première étape vers le traitement temps réel des signaux auquel sont attentifs les cliniciens par exemple. La conception d'algorithmes adaptatifs pour la séparation non supervisée de mélanges linéaires de sources statistiquement indépendantes rencontre le problème où des signaux à bande étroite sont superposés sur les capteurs d'une antenne avec des retards très faibles.

Deux aspects de cette problématique ont été initiés à partir de cette réflexion : le premier aspect concerne le développement d'outils efficaces pour la conception innovante d'une chaîne de traitements exploitant de façon adéquate la diversité spatiale. Le second aspect concerne le développement d'une application de nos résultats en traitements d'antenne aux problèmes de séparation de sources. Des collaborations avec des collègues d'autres laboratoires grenoblois sont envisagées pour réaliser cette synchronisation.

4. La formation de voies est une mesure d'inhomogénéité du champ basé sur le moments d'ordre 2. Rien n'empêche de construire un outil mesurant les inhomogénéités en se basant sur les variations de la fonction de répartition avec la direction. On devrait pouvoir gagner en pouvoir de détection si les sources sont non Gaussiennes
5. Dans un second temps, nous voudrions adapter le critère aux cas de **sources discrètes** dans le but d'améliorer les performances d'extraction. Cette étape de notre travail porterait sur le problème de la séparation simultanée de toutes les sources lorsque leur nombre est inconnu et inférieur ou égal au nombre de capteurs. La matrice de mélange serait adapté selon des algorithmes dans le but de minimiser un critère conçu pour assurer l'extraction de toutes les sources. Ainsi la performance de séparation devrait se trouver sensiblement améliorée grâce à l'application des résultats obtenus en traitement d'antenne. A la fin, grâce à une paramétrisation adéquate de la séparation adaptée au modèle de mélange reçu sur une antenne linéaire uniforme, il deviendrait possible en même temps de séparer les sources et d'estimer leurs angles d'arrivée. En appliquant le critère de séparation de sources proposé dans le cas des signaux médicaux, nous obtiendrions un algorithme adaptatif pilotant les estimateurs des angles d'arrivée des sources. Des critères plus simples pourront être proposés par la suite.

En résumé, l'emploi d'antennes adaptatives constitue une approche prometteuse pour améliorer la qualité et la capacité des systèmes de séparation. Mais il apparaît que le facteur principal qui limite les performances et la capacité d'un tel système est l'interférence entre les sources qui utilisent la même bande de fréquences. En effet, les signaux sources ne sont pas en général parfaitement orthogonaux du fait du choix de l'environnement partagé par les différentes sources (c'est le cas en biomédical) et des retards de propagation entre les signaux des différentes sources. Dans ce contexte, l'utilisation de techniques de traitement d'antennes adaptatives (rebaptisées « antennes intelligentes » pour la circonstance) vise à introduire un traitement complémentaire des signaux, dans le domaine spatial, en associant à chaque source, ou groupe de sources.

### 7.2.2.3 Problèmes plats

1. Parmi les projets à court terme se trouve celui d'explorer la séparation de mélanges non-linéaires à modèle d'état, qui s'appuient sur des systèmes réels ou réalistes. Les modèles à variables d'état, qui ont été peu étudiés dans ce cadre, semblent être des idées très intéressantes à approfondir. L'approche consiste à utiliser les outils de l'algèbre différentielle, et plus particulièrement ceux liés au concept de « platitude différentielle ». Un système plat est un système linéarisable par bouclage endogène. Ce type de bouclage est appelé ainsi car il est « engendré » par les variables du système et leurs dérivées (aucune variable exogène au système est employée). Une solution naturelle consiste à exploiter les propriétés de la sortie plate. Dans un premier temps, nous nous sommes attaqués au problème qui consiste à trouver le système équivalent du modèle séparateur par bouclage endogène. Nous nous sommes donc concentrés sur une

nouvelle étude de la dynamique de la sortie plate, en utilisant des techniques d'**estimation rapide**. Ceci nous a permis de trouver des nouvelles relations, complémentaires à celles rapportées § 3.2. Il s'agit d'un travail théorique innovant particulièrement important ici, dans le contexte biomédical, car l'objectif final est de proposer un modèle d'état (il peut s'agir de celui du cœur ou des unités motrices du diaphragme) exploitable directement par le clinicien comme outil de diagnostic.

2. Les **particularités techniques** de ces méthodes d'estimation méritent d'être soulignées : cadre déterministe de la résolution, exploitation de la nature continue des signaux, pas de distinction entre les signaux stationnaires et non-stationnaires, estimation rapide, implémentation simple et robuste vis-à-vis d'une large gamme de perturbations, une mathématisation élaborée afin d'abandonner une modélisation aussi globale que possible. Est-il besoin de rappeler la difficulté redoutable d'obtenir un modèle mathématique stable dans bien des situations quelque peu complexes? La démarche proposée ici se distingue par sa méthodologie et sa philosophie des identifications de type « boîte noire », telles qu'on les trouve dans la littérature. Nous substituons aux modèles mathématiques décrivant les signaux sources dans une plage de fonctionnement aussi large que possible des équations différentielles « phénoménologiques », valides sur un court laps de temps, et actualisées pas-à-pas. Il conviendrait d'en explorer les implications épistémologiques, ne serait-ce que pour les liens entre physique, complexité et résolution temporelle.
3. La **platitude** est une reformulation de la linéarisation du modèle de mélange. Tout le comportement dynamique du système peut être résumé par le comportement dynamique de ses sorties plates. Toutefois, trouver une condition nécessaire et suffisante de platitude reste un problème ouvert : il n'existe pas de méthode systématique pour construire une sortie plate. En conséquence, la notion de platitude est uniquement envisageable si le système est carré, *i.e.* si la dimension de la sortie plate est égale au nombre de sources du système. Que se passe-t'il si on est confronté à un problème dans lequel le nombre de source est plus grand que le nombre de capteurs? Dans le cas d'un mélange faiblement non-linéaire, que gagne-t'on à choisir une telle approche? sont autant de questions d'intérêt pour nos travaux.

### 7.2.3 Extraction non-invasive de signaux biomédicaux

Le projet de traitement multi-capteurs de signaux biomédicaux étend un travail commencé sur l'extraction non-invasive de l'électrocardiogramme du fœtus, en coopération avec les services d'obstétrique et d'exploration fonctionnelle de l'hôpital Robert Debré (Paris 19e) et avec le service de pneumologie de l'hôpital de la Pitié-Salpêtrière (Paris 13e). Ce projet pluridisciplinaire, soutenu par le ministère, le génopole et la fédération ELESA, comprend 5 partenaires en plus d'IBISC, dont 2 grenoblois (le Gipsa-lab pour le traitement du signal et le LEPMI pour les capteurs électro-chimiques), 2 hôpitaux parisiens, un partenaire étranger (UC de Louvain-la-neuve, Belgique).

L'objectif est la conception de dispositif temps-réel performant d'acquisition et de traitement multi-capteurs pour le domaine hospitalier. Les principales innovations concernent :

- les capteurs, conçus par des électrochimistes, réutilisables contrairement aux électrodes actuelles, et ne nécessitant pas de gel conducteur,
- l'utilisation d'un réseau de 71 capteurs ( $9 \times 8 - 1$ ), comportant un dispositif de sélection automatique des meilleures paires d'électrodes,
- l'utilisation des méthodes de séparation de sources, prenant en compte la coloration, les non-stationnarités et la parcimonie des sources à extraire,
- l'application à l'extraction non-invasive de l'ECGf (complexe PQRST complet) avec des retombées potentielles importantes en cardiopédiatrie *in utero* et en obstétrique,
- l'application à l'extraction non-invasive multicapteurs de l'EMGdi avec des retombées potentielles importantes en assistance ventilatoire, en réanimation et pour le diagnostic respiratoire.

Les travaux à venir dans les prochains mois sont essentiellement des développements logiciels et des travaux de validation sur signaux réels avec le réseau de 72 électrodes : il est nécessaire de développer une nouvelle interface logicielle incluant un pilote d'acquisition des signaux pour interfacer la carte National Instrument avec le PC. L'interface, à l'usage des cliniciens avant tout, devra permettre la visualisation, la gestion et le stockage des 72 voies en temps réel. cette étape inclut une campagne de mesures chez nos partenaires sur les sites de la Pitié-Salpêtrière et de Robert Debré. La campagne de mesures se conformera au protocole expérimental fixé par les équipes des Prs. Sibony, Azancot et Similowski. Il prendra en compte le recrutement de sujets sains ou

malades, selon des critères médicaux à définir (comme le nombre de semaine du fœtus, la position céphalique, l'âge de la patiente, le profil biophysique, l'atteinte respiratoire, etc.). Une comparaison a déjà été effectuée comparant les signaux EMGdi extraits en non-invasif avec un signal EMGdi obtenu avec une électrode aiguille. Concernant le travail d'extraction de paramètres déjà entamé, nous nous focaliserons, dans les mois à venir, tout particulièrement sur l'obtention d'informations relatives à la vitesse et aux déformations spatio-temporelles des signaux observés. Nous privilégierons une approche statistique, en particulier markovienne-bayésienne, que ce soit sur les questions d'analyse bas-niveau (extraction, détection de rupture, etc.) ou haut-niveau (interprétation, décision, fusion). Ces programmes d'extraction de paramètres statistiques seront développés et intégrés à l'interface logicielle.

A moyen terme, l'objectif est d'aborder des problèmes réels concernant l'interprétation d'autres signaux physiologiques, notamment les EEG, en particulier pour la conception des interfaces cerveaux-machines.

## 7.2.4 le projet BIHAVE

### 7.2.4.1 Le déroulement prévu

L'objectif du projet BIHAVE (qui a fait l'objet d'une demande de subventions ANR l'an passé) est de redonner une forme d'autonomie à des personnes handicapées ou malades par le développement d'une interface cerveau-machine mettant en œuvre des méthodes d'analyse multi-capteurs. L'application phare visée est la commande d'une prothèse de bras articulée, destinée au grand public, c'est-à-dire mise en œuvre à partir d'une électronique bon marché. L'accent est mis sur l'innovation : de nouvelles électrodes de surface réutilisables, un réseau d'électrodes associé à une électronique performante, des techniques de séparation de sources, une interface réalité virtuelle (RV) avec retour haptique pour mettre au point le retour d'information vers l'utilisateur concernant son activité cérébrale, de nouvelles techniques d'identification des signaux basées sur la localisation temps-réelle de l'activité cérébrale par formation de voies, un protocole d'autoformation simple pour le patient de façon à ce que l'ordinateur s'adapte à la manière de réfléchir du patient. L'avantage est que le degré d'action désiré par la personne équipée est restitué afin d'aider la personne dans son mouvement avec la modération désirée. L'intérêt de la simulation RV réside dans la possibilité d'extraire du modèle des informations permettant de reproduire les phénomènes observés en situation réelle. L'enjeu des recherches, dans le cadre de la modélisation d'humains virtuels, est de parvenir à représenter les caractéristiques essentielles de l'être humain avec le plus de réalisme possible. Il rentre dans la politique de pluridisciplinarité du CNRS, et dans le programme prioritaire STIC-Santé du Département et il bénéficie de la diversité des infrastructures du laboratoire IBISC : plateforme RV, laboratoire de micro-électronique, équipement prothésique, etc.

Les prothèses les plus avancées techniquement aujourd'hui sont les prothèses myoélectriques, chères et peu souples, et difficilement contrôlables au moyen des signaux EMG. Pourtant un contrôle bioélectrique est possible grâce à la mesure du potentiel électrique de l'influx nerveux envoyé aux muscles lorsque l'on désire faire un mouvement. La mesure est effectuée par un capteur collé à la surface de la peau. L'avantage est que le degré d'action désiré par la personne équipée est restitué afin d'aider la personne dans son mouvement avec la modération désirée. Ce mode de contrôle est cependant limité aux personnes dont on peut mesurer les influx nerveux. Une interface réalité virtuelle remplace la prothèse pendant la période d'apprentissage ; un dispositif de retour haptique supplée au patient la sensation de retour d'effort dans tous ses mouvements.

Les technologies BCI offrent d'immenses perspectives pour la suppléance fonctionnelle (1,8 millions de para/tétraplégiques en France) : en particulier transformer les prestations de services de santé, et améliorer les résultats dans ce domaine. En effet, à travers la compensation du handicap, le projet vise à favoriser le maintien à domicile des personnes handicapées en les rendant plus autonomes, à favoriser la ré-insertion en particulier dans le monde du travail. Techniquement, cela consiste à mieux adapter la prothèse à la personne, c'est-à-dire à intégrer la prothèse dans l'environnement physique et humain de la personne, à découpler la variété des tâches réalisables en améliorant les performances globales de la prothèse, notamment sur le plan de la précision spatiale de la commande et la sensibilité mécanique du dispositif.

### 7.2.4.2 Le déroulement prévu

Le projet s'étend sur 3 ans et se découpe en 3 grandes étapes : une étape de mise en place du protocole expérimental (installation de la BCI, interface informatique, préparation des amers pour l'interface RV), une étape de calibrage du dispositif (traitement du signal, analyse de données, sélection de capteurs) et une partie



de validation sur des patients « convenablement » choisis. Cette dernière partie analysera la nécessité d'une adaptation de la prothèse, d'un apprentissage grâce à la rééducation, et l'impact de l'utilisation de la prothèse sur la plasticité cérébrale.

### 7.2.5 Perspectives à court terme

L'objectif principal des techniques multi-capteurs est donc l'amélioration de la capacité des systèmes de séparation de sources. Ces techniques peuvent aussi apporter d'autres améliorations, outre le fait de gagner par la diversité, telles que la réduction de la puissance des interférences. Dans le cas de notre système de détection en particulier, on peut appliquer conjointement le traitement multi-capteurs et la détection multi-sources dans le but d'obtenir une optimisation globale du système. La formation des voies sera réalisée grâce à l'emploi d'un réseau d'antennes pilotées par des algorithmes de formation de voies. A ce jour, nos recherches ont surtout porté sur la recherche d'un sous-espace du signal. La sélection de voies ouvrent donc de nouvelles perspectives. Le développement d'outils spécifiques pour la séparation de sources nécessite la maîtrise de techniques dans des domaines variés. Nos travaux poursuivent un double développement (a) sur le plan théorique, dans la formalisation et la prise en compte de toute sorte de mélanges de signaux et (b) sur le plan pratique dans la réalisation de démonstrateurs, d'outils et de maquettes.

La participation à des projets de traitement d'images par exemple (avec le Pr. S. Lelandais) démontre cette volonté de diffusion de nos outils vers les autres communautés.

# Bibliographie

- [1] S. Abe, R. Shigeo, and M.-S. Lan. Fuzzy rules extraction directly from numerical data for function approximation. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyb.*, 25(1) :119–129, 1995.
- [2] P. Abry and P. Flandrin. Multiresolution transient detection. In *Proceeding IEEE-SP Int. Symp. Time-Freq. Time-scale Analysis*, pages 225–228, Philadelphia, 1994.
- [3] A. Agresti. The effect of category choice on some ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 71(353) :49–55, 1976.
- [4] T.K. Aldrich, C. Sinderby, D.K. Mc Kenzie, M. Estenne, and S.C. Gandevia. Electrophysiologic techniques for the assessment of respiratory muscle function. *Am. J. Respir. Crit. Care Med.*, 166 :518–624, 2002.
- [5] S. Amari, Chen T.-P., and Cichocki. Stability analysis of adaptive blind source separation. *Neural Networks*, 8(10) :1345–1351, 1997.
- [6] I. Amer-Wahlin, H. Hellsten, H. Noren, H. Hagberg, A. Herbst, I. Kjellmer, H. Lija, C. Lindoff, M. Månsson, L. Mårtensson, P. Olofsson, A-K. Sundström, and K. Marsal. Cardiotocography only versus cardiotocography plus st analysis of fetal electrocardiogram for intrapartum fetal monitoring : a swedish randomised controlled trial. *The Lancet*, 358 :534–538, August 2001.
- [7] N.S. Arikidis, E.W. Abel, and A. Foster. Interscale wavelet maximum-a fine to coarse algorithm for wavelet analysis of the emg interference pattern. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 49(337-344), 2002.
- [8] A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. The architecture of complex weighted networks. *PNAS*, 101(11) :3747–3752, 2004.
- [9] M.S. Bartlett. *An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications*. Cambridge University Press, second edition, 1966.
- [10] A. Bartolo. Analysis of diaphragm emg signals : comparison of gating vs. subtraction for removal. *J Appl Physiol.*, pages 1898–1902, 1996.
- [11] E. Bauman, A. Dorofeyuk, and D. Filev. Fuzzy identification of nonlinear dynamical systems. In *Proceedings of the International Conference on Fuzzy Logic and Neural Nets*, pages 895–898, 1990.
- [12] J. Beck, C. Sinderby, and A. Lindström, L.a nd Grassino. Influence of bipolar esophageal electrode positioning on measurements of human crural diaphragm electromyogram. *Am. Physio. Society*, pages 1434–1449, 1996. Special communication.
- [13] G. Belforte, B. Bona, and V. Cerone. Parameter estimation algorithms for a set -membership description of uncertainty. *Automatica*, 26(5) :887–898, 1990.
- [14] A.J. Bell and T.J. Sejnowski. Edges are the 'independant components' of natural scenes. In M. Mozer, M. Jordan, and T. Petsche, editors, *Neural Information Processing Systems*, volume 9, Cambridge, 1997. MIT Press.
- [15] A. Belouchrani, K. Abaid-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines. A blind sources separation using second order statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45 :434–444, February 1997.
- [16] A. Belouchrani and M.G. Amin. Blind source separation based on time-frequency signal representations. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(11) :2888–2897, November 1998.
- [17] J.P. Benzecri. *L'Analyse des Correspondances*, volume 2. Dunod, Paris, 1973.
- [18] D. Berleant. automatically verified reasoning with both intervals and probability distributions and intervals. *Interval. comput.*, 2 :48–70, 1993.

- [19] B. Bollobás. Degree sequences of random graphs. *Discrete Math*, 33(1), 1981.
- [20] I. Borg and P. Groenen. *Modern Multidimensional Scaling : Theory and applications*. Springer Series in Statistics, 1997.
- [21] J.E. Butler, D.K. McKenzie, and S.C. Gandevia. Discharge properties and recruitment of human diaphragmatic motor units during voluntary inspiratory tasks. *J. Physiol.*, 518(3) :907–920, 1999.
- [22] A. J. Butte and I. S. Kohane. Mutual information relevance networks : functional genomic clustering using pairwise entropy measurements. *Pac Symp Biocomput*, pages 418–29, 2000. Using Smart Source Parsing.
- [23] Sinderbyn C., J. Spahija, and J. Beck. Changes in respiratory effort sensation over time are linked to the frequency content of diaphragm electrical activity. *Am. J. Respir. Crit. Care Med.*, 163 :905–910, 2001.
- [24] J.-F. Cardoso and B. Laheld. Equivariant adaptive source separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(12), December 1996.
- [25] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac. Blind beamforming for non-gaussian signals. *IEEE Proceedings-F*, 40 :362–370, 1993.
- [26] Jean-François Cardoso. Localisation et identification par la quadricovariance. *Traitement du Signal*, 7(5) :397–406, 1990.
- [27] J.F. Cardoso. Super-symmetric decomposition of the fourth-order cumulant tensor. Blind identification of more sources than sensors. In *Proc. ICASSP*, pages 3109–3112, 1991.
- [28] C.J. Cellucci, A. M. Albano, and P. E. Rapp. Statistical validation of mutual information calculations : Comparison of alternative numerical algorithms. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 71(6) :066208, 2005.
- [29] K.S. Chan and H. Tong. *Chaos : a Statistical Perspective*. Springer, springer series in statistics edition, 2001.
- [30] F. Chatelin. *Spectral approximation of linear operators*. Academic Press, New-York, 1983.
- [31] W. Cochran. Some methods for strengthening the common chi-2 tests. *Biometrics*, 10(4) :417–451, 1954.
- [32] P. Comon. Independent component analysis, a new concept ? *Signal Processing*, 36(3) :287–314, 1994.
- [33] P. Comon, C. Jutten, and Herault J. blind separation of sources, part 2 : Problems statement. *Signal Processing*, 24 :11–20, 1991.
- [34] M. Cottrell and J.C. Fort. Etude d’un algorithme d’auto-organisation. *Annales de l’institut Henri Poincaré*, 23(1) :1–20, 1987.
- [35] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley, 1991.
- [36] T.F. Cox and M.A.A. Cox. Multidimensional scaling on the sphere. *Communications in statistics*, pages 2943–2953, 1995.
- [37] M. Cremer. Über die direkte ableitung der aktionstromme des menschlichen herzens vom oesophagus und über das elektrocardiogramm des feten. *München Med. Wochenschr.*, 53 :811–813, 1906.
- [38] C.D. Cutler and D.A. Dawson. Nearest neighbor analysis of a family of fractal distributions. *The Annals of Proba.*, 16 :256–271, 1990.
- [39] D. Dacunha and D. Dufo. *Probabilités et statistiques*, volume 2. MASSON, 1993.
- [40] F. d’Alché Buc and V. Schächter. Modeling of biological networks. In *proceedings of XI International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (AMSDA)*, pages 167–180, Brest, May 2005. Groupe des écoles de télécommunications de France.
- [41] G. Darmois. Analyse générale des liaisons stochastiques. *Rev. Inst. Intern. Stat.*, 21 :2–8, 1953. (in french).
- [42] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vanderwalle. A singular value decomposition for higher-order tensors. In *Proc. ATHOS Workshop on System Identification and High-Order Statistics*, pages 20–21, Nice (France), 1993.
- [43] V. De Silva and G. Carlsson. Topological estimation using witness complexes. In *Proc. Sympos. Point-Based Graphics*, 2004.
- [44] S. Degerine. De la sÃ©paration de sources Ã l’analyse en composantes indépendantes. Méthodes, algorithmes et applications. Ecole de Printemps, Villard-de-Lans, France, Mai 2001.
- [45] P. Demartines. *Analyse de données par réseaux de neurones auto-organisés*. Thèse de doctorat, INPG-TIRF, Grenoble (France), 1994.
- [46] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structures and problems. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(12) :2024–2036, 1989.

- [47] A. Demoule, E. Verin, C. Locher, J.P. Derenne, and T. Similowski. Validation of surface recordings of the diaphragm response to transcranial magnetic stimulation in humans. *Jour. of Appli. Physiol.*, 94 :453–461, 2003.
- [48] Y. Deng, W. Wolf, R. Schnell, and U. Appel. New aspects of event synchronous cancellation of ecg interference : An application of the method in diaphragmatic emg signals. *IEEE Trans. on Biomed. Engin.*, 47(9), September 2000.
- [49] J.A. Dickerson and B. Kosko. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyb.*, 26(4) :542–560, 1996.
- [50] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Math*, 1 :269–271, 1959.
- [51] D.L. Donoho and I. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432) :1200–1224, 1995.
- [52] D.L. Donoho and I.M Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. In *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, pages 1317–1322, Paris, 1994.
- [53] D.L. Donoho and I.M Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81, 1994.
- [54] Y.-C. Du, L.-Y. Shyu, and W. Hu. The effect of combining stationary wavelet transform and independent component analysis in the multichannel semgs hand motion identification system. *Journal of Medical and Biological Engineering*, 26(1) :9–14, 2006.
- [55] D. Dubois and H. Prade. Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 42(1) :87–101, 1991.
- [56] R.O. Duda, P.E. Hart, and D.G. Stork. *Pattern Classification (2nd ed.)*. Wiley Interscience, 2001.
- [57] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete Comput. Geom.*, 28, 2002.
- [58] W. Einthoven. Weiteres über da elektrokardiogram. *Pflüger Arch. ges. Physiol.*, 122 :5217–148, 1908.
- [59] J. Eriksson and V. Koivunen. Blind identifiability of class of nonlinear instantaneous ica models. *Signal Processing*, 83 :2195–2208, 2003.
- [60] E.-M. Fadaili, V. Vigneron, and C. Jutten. Joint diagonalization of complex spatial-wavelet matrices for blind sources separation of non stationary sources. *Signal Processing Letters*, 2007. soumis.
- [61] M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau. Combined non-orthogonal joint zero-diagonalization and joint diagonalization for sources separation. In *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, Bordeaux, France, July 2005.
- [62] M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau. Non orthogonal joint diagonalization /zero diagonalization for sources separation based on time-frequency distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4), 2007.
- [63] J.E. Falk. Global solutions for signomial programs. Technical Report 6-274, George Washington Univ., Washington DC, USA, 1973.
- [64] S. Ferson. Hybrid arithmetic. In *Proceedings of ISUMA-NAFIPS'95*, pages 619–623, 1995.
- [65] C. Févotte and C. Doncarli. Two contributions to blind source separation using time-frequency distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(3) :386–389, 2004.
- [66] M. Flanders. Choosing a wavelet for single-trial emg. *Journal of Neuroscience Methods*, 116 :165–177, 2002.
- [67] M. Fliess. Fast estimation and identification methods in control and signal. International summer school on Automatic Control, LAG, Grenoble, September 2006.
- [68] A.M. Fraser and H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Pattern Recognition and Analys*, 33 :1134–1140, February 1986.
- [69] B. Friandler and B. Borat. Adaptative detection of transients signals. *IEEE Trans. ASPP.*, 34 :1410–1418, 1986.
- [70] B. Friandler and B. Borat. Performance analysis of transient detectors based on a class of linear data transform. *IEEE Trans. Information Theory*, 38 :665–673, 1992.
- [71] M. Frisch and H. Messer. The use of wavelet transform in the detection of an unknown transient signal. *IEEE Trans. on Information Theory*, 38 :892–897, 1992.
- [72] Z. Füredi and J. Komlós. The eigenvalues of random symmetric matrices. *Combinatorica*, 1(3) :233–241, 1981.
- [73] L. Giulieri, N. Thirion-Moreau, and P.-Y. Arquèès. Blind sources separation based on quadratic time-frequency representations : a method without pre-whitening. In *Proc. ICASSP'2003*, pages 289–292, April 2003.
- [74] I.N. Goodman. *Analysing statistical dependencies in neural populations*. Master's Thesis, Rice University, Houston, Texas, 2005.

- [75] Alexei Gorokhov and Jean-François Cardoso. Equivariant blind deconvolution of MIMO-FIR channels. In *Proc. of SPAWC'97, IEEE workshop on Sig. Proc. Adv. in Wireless Comm.*, Paris, April 1997.
- [76] A.G. Gray and A.W. Moore. Nonparametric density estimation : Toward computational tractability. In *SIAM International Conference on DataMining*, 2003.
- [77] H. Gray. Anatomy of the human body. bartleby.com, 2000. Philadelphia.
- [78] M. Green, J. Road, G. Sieck, and T. Similowski. Ats/ers statement on respiratory muscle testing. tests of respiratory muscle strength. *Am. Jour. Resp. Crit. Care Med.*, 166 :528–547, 2002.
- [79] P.Y. Guméry, H. Roux-Buisson, S. Meignen, F.L. Comyn, M. Dematteis, Wuyam B., J.L. Pépin, and P. Lévy. An adaptive detector of genioglossus EMG reflex using Beckner transform for time latency measurement in OSA pathophysiological studies. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 52, 8 2005.
- [80] E.R. Hansen. A generalized interval arithmetic. In *Interval arithmetics*, pages 7–18, Berlin, 1975. K. Nickel (Ed.).
- [81] I. Harvey, P. Husbands, D. Cliff, A. Thompson, and N. Jakobi. Evolutionary robotics : the sussex approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 20 :205–224, June 1997.
- [82] A. Hazan. *Réseau de Dépendance Statistique pour la Description et la Classification des Actions Réalisables par un Robot Mobile*. Thèse, Université d'Evry, Décembre 2007.
- [83] A. Hazan, F. Davesne, V. Vigneron, and H. Maaref. *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2006)*, chapter Topological characterization of mobile robot behavior, pages 4157–4162. IEEE/RSJ, Beijing, China, October 2006.
- [84] A. Hazan, V. Vigneron, J.L. Giavitto, O. Michel, and H. Maaref. A relationist and descriptive approach to stationary time series. In *Proceedings of the European Conference on Complex Systems (ECCS07)*, Dresden, Germany, October 2007.
- [85] J. Herault, A. Guérin-Dugué, and P. Villemain. Searching for the embedded manifold in high-dimensional data, problems and unsolved questions. In *Proceedings ESANN'02*, pages 173–184, Bruges (Belgique), 2002.
- [86] J. Herault and C. Jutten. Space ot time adaptative sinal processing by neural network models. In *Neural networks for computing*. Snowbird, 1986.
- [87] J. Herault and C. Jutten. Space ot time adaptative sinal processing by neural network models. In *Neural networks for computing*. Snowbird, 1986.
- [88] G. Hjalatson and H. Samet. Properties of embedding methods for similarity searching in metric spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(5), May 2003.
- [89] K. Hlavackova-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Physics Reports*, 441(1) :1–46, March 2007.
- [90] W. Hosseini, R. Lonski, and R. Gooch. A real time implementation of the multistage cma adaptive beamformer. In *27th IEEE Assilomar Conference Signals*, pages 643–646, 1993.
- [91] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension theory*. Princeton University Press, London, 1948.
- [92] A. Hyvärinen, K. Karhunen, and E. Oja. *Independent Component Analysis*. Wiley, 2001.
- [93] A. Hyvärinen and E. Oja. Independent component analysis : algorithms and applications. *Neural Networks*, 13(4-5) :411–430, 2000.
- [94] A. Ihler. Kernel density estimation toolbox for matlab, 2003.
- [95] H. Ishihashi. Iterative fuzzy modeling and a hierarchical network. In *Proc. 4th IFSA Congress*, pages 49–52, Brussels, 1991.
- [96] J.-S. Jang. Fuzzy modeling using generalized neural networks and kalman filter algorithms. In *Proc. of the Ninth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-91)*, pages 762–767, 1991.
- [97] J.-S. Jang. Anfis : Adaptive-network-based fuzzy inference systems. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, May 1993.
- [98] L. Jaulin. *Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes. Application à l'estimation non-linéaire et à la commande robuste*. PhD thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 1994.
- [99] L. Jaulin. *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2000.
- [100] L. Jaulin, I. Braems, M. Kieffer, and E. Walter. *Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods, Proceedings of SCAN 2000*, chapter Nonlinear State Estimation Using Forward-Backward Propagation of Intervals, pages 191–204. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [101] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied interval analysis*. Springer, Paris, 2001.

- [102] L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed nonlinear parameter estimation from bound-error data via interval analysis. *Mathematics and Computers in Simulation*, 35(2) :123–137, 1993.
- [103] L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed bounded-error parameter estimation for nonlinear models with uncertain experimental factors. *Automation*, 35 :849–856, 1999.
- [104] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106 :620–630, 1957.
- [105] H. Joe. Relative entropy measures of multivariate dependence. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405) :157–164, March 1989.
- [106] J. Johnson. Hypernetworks for reconstructing the dynamics of multilevel systems. In *ECCS'06*, Oxford, 2006.
- [107] C. Jutten and A. Taleb. Source separation : from dusk till dawn. In *Proceedings of the second International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Source Separation*, pages 15–26, Helsinki (Finland), 2000.
- [108] A.M. Kagan, J.V. Linnik, and C.R. Rao. *Characterisation Problems in Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1973.
- [109] R. Kallel, M. Cottrell, and V. Vigneron. Bootstrap for neural model selection. *Neurocomputing*, 48 :175–183, 2002.
- [110] J. Karin, M. Hirsch, and S. Askelrod. Non invasive fetal eeg monitoring. In *IEEE conf. Computers in Cardiology*, pages 365–368, 1994.
- [111] A. Kaufmann and M.M. Gupta. *Introduction to fuzzy arithmetic - Theory and applications*. Van Nostrand Reinhold, new York, 1985.
- [112] M.B. Kennel, R. Brown, and H.D.L. Abarbanel. Determining embedding dimension for space-phase reconstruction using a geometrical construction. *Physical review A*, 45(6) :3403–3411, March 1992.
- [113] M. Khalil and J. Duchene. Detection and classification of multiple events in piecewise stationnary signals : Comparison between autoregressive and multiscale approaches. *Signal processing*, 75 :239–251, 1999.
- [114] M. Khalil, J. Duchène, C. Marque, and H. Leman. Detection and classification in uterine electromyography by multiscale representation. In *Proceeding of the 19th IEEE/EMBS conference*, pages 1606–1608, Chicago, November 1997.
- [115] T. Kohonen. *Self-organisation and Associative Memory*. Springer, 1989.
- [116] B. Kosko. Fuzzy fonction approximation. In *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, volume 1, pages 1209–1213, Baltimore, 1992.
- [117] A. Kraskov, H. Stogbauer, and P. Grassberger. Estimating mutual information. *Physical Review E*, 69(6), 2004.
- [118] J.L. Lacoume, P.O. Amblard, and P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Sciences de l'Ingénieur. Masson, Paris, 1997.
- [119] S. Lagrange. *Contributions aux méthodes d'estimation en aveugle*. PhD thesis, INP Grenoble, Décembre 2005.
- [120] S. Lagrange, L. Jaulin, V. Vigneron, and C. Jutten. Identification en aveugle des paramètres de systèmes non linéaires. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 8 :847–865, 2006.
- [121] S. Lagrange, L. Jaulin, V. Vigneron, and C. Jutten. Nonlinear blind parameter estimation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2007. 8 pages, accepté.
- [122] B. Laheld and J.F. Cardoso. Adaptive source separation with uniform performance. In *Proc. EUSIPCO*, pages 183–186, Edinburgh, September 1994.
- [123] J.E.P. Lammers. Circulating excitations and re-entry in the pregnant uterus. *Eur. J. Physiol.*, 433 :287–293, 1997.
- [124] C. Lanczos. *Applied analysis*. Dover, New York, 2nde edition, 1988.
- [125] M. Lavielle. Using penalized contrasts for the change-point problem. *Signal Processing*, 85(8) :1501–1510, 2005.
- [126] M. Lavielle and G. Teyssière. Detection of multiple change-points in multiple time-series. *Lithuanian Mathematical Journal*, 46(3), 2006.
- [127] R. Leao and J.A. Brune. Continuous wavelet transform in the evaluation of stretch reflex responses from surface emg. *Journal of Neuroscience Methods*, 133 :115–125, 2004.
- [128] L. Lebart, A. Morineau, and M. Piron. *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. Dunod, 3 edition, 2000.
- [129] T.W. Lee. *Independent Component Analysis and applications*. Kluwer, 1998.
- [130] A. Lesne. Complex networks : from graph theory to biology. To appear in *Letters in Mathematical Physics*, 2007.
- [131] A. Levine. Description and validation of an eeg removal procedure for emgdi power spectrum. *J Appl Physiol.*, 60 :1073–1081, 1986.



- [132] C. Li, C. Zheng, and C. Tai. Detection of ecg characteristic points using wavelet transforms. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 42 :21–28, Jan 1995.
- [133] H.L. Liang, H. Wang, and Z.Y. Lin. Reduction of electrocardiogram interference from diaphragmatic electromyogram by nonlinear filtering. Technical Report, 2007.
- [134] S. Mallat. *A wavelet tour to signal processing*. Academic Press, second edition, 1999.
- [135] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l’Ecole Polytechnique, Novembre 2000.
- [136] S. Mallat and W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. Information Theory*, 38 :617–643, 1992.
- [137] E.H. Mamdani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 1182–1191, 1977.
- [138] A. Mansour and C. Jutten. Fourth order criteria for blind separation of sources. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(8) :2022–2025, Août 1995.
- [139] A. Mansour and C. Jutten. What should we say about the kurtosis? *IEEE Signal Processing letters*, 6(12) :321–322, December 1999.
- [140] A. Margolin, I. Nemenman, K. Basso, C. Wiggins, G. Stolovitzky, R. Favera, and A. Califano. Aracne : An algorithm for the reconstruction of gene regulatory networks in a mammalian cellular context. *BMC Bioinformatics*, 7(1) :7–11, 2006.
- [141] O.N. Markand, J.C. Kincaid, R.A. Pourmand, S.S. Moorthy, R.D. King, Y. Mohamed, and J.W. Brown. Electrophysiological evaluation of diaphragm by transcutaneous phrenic nerve simulation. *Neurology*, 34 :604–14, 1984.
- [142] P.E. McSharry, G.D. Clifford, L. Tarassenko, and L.A. Smith. A dynamic model for generating synthetic electrocardiogram signals. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 50 :289–294, March 2003.
- [143] M.L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, 1991, New York, San Diego.
- [144] J.L. Melsa and D.L. Cohn. *Decision and estimation theory*. McGraw-Hill, New York, 1978.
- [145] J.M. Mendel. *Maximum-Likelihood deconvolution. A journey into model based signal processing*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [146] A. Merlo, D. Farina, and R. Merletti. A fast and reliable technique for muscle activity detection from surface emg signals. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 50 :316–323, 2003.
- [147] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21 :1087–1092, 1953.
- [148] J. Milic-Emili. Measurements of pressures in respiratory physiology. In A.B. Otis (Ed.), editor, *Techniques in Respiratory Physiology - Part II. Techniques in the Life Sciences*, volume P412, pages 1–22, New-York, 1984. Elsevier.
- [149] R. Molina, M. Vega, J. Abad, and A.K. Katsaggelos. Parameter estimation in bayesian high-resolution image reconstruction with multisensors. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(12), December 2003.
- [150] R.E. Moore. *Interval analysis*. Prentice Hall, New York, 1966.
- [151] R.E. Moore. Methods and applications of interval analysis. *SIAM Stud. Appl. Math*, 1979.
- [152] J.I. Nagata. *Modern dimension theory*. North-Holland Publishing Company, 1965.
- [153] D. Nauck and R. Kruse. Function approximation with NEFPROX. In *Proc. 4th GI-Workshop on Fuzzy-Neuro Systems*, pages 316–323, 1997.
- [154] H. Nomura, I. Hayashi, and N. Wakami. A self-tuning method of fuzzy control by descent method, a hierarchical network. In *Proc. 4th IFSA Congr.*, pages 155–158, Brussels, 1991.
- [155] J.P. Norton. Special issue on bounded-error estimation : Issue 1. In *International Symposium Control and Signal Processing*, pages 1–118, 1990.
- [156] L.A. Olsson, C.L. Nehaniv, and D. Polani. From unknown sensors and actuators to actions grounded in sensorimotor or perceptions. *Connection Science*, 18(2) :121–144, 2006.
- [157] Nicholas John Outram. *Intelligent Pattern Analysis of the fetal Electrocardiogram*. PhD thesis, Plymouth University, October 1997.
- [158] M. Paluš, V. Albrecht, and I. Dvořák. Information theoretic test for nonlinearity in time series. *Physics Letters A*, 175 :203–209, April 1993.
- [159] J. Pan and W.J. Tompkins. A real time qrs detection algorithm. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 32 :230–236, 1985.

- [160] A. Paraschiv-Ionescu, C. Jutten, K. Aminian, B. Najafi, and Ph. Robert. Source separation in strong noisy mixtures : a study of wavelet de-noising pre-processing. In *ICASSP'2002*, Orlando, May 2002.
- [161] D.T. Pham. Blind separation of instantaneous mixtures of sources based on order statistics. *IEEE Signal Processing*, pages 1712–1725, 2000.
- [162] D.T. Pham and J.-F. Cardoso. Blind separation of instantaneous mixtures of nonstationary sources. *IEEE Trans. Signal Processing*, 9 :1837–1848, 2001.
- [163] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical recipes in C. The art of computing*. Cambridge University Press, 1988.
- [164] J.G. Proakis and D.G. Manolakis. *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications*. Prentice-Hall, New Jersey, third edition, 1996.
- [165] A. Rényi. On measures of dependence. *Acta Mathematica Hungarica*, 10(3) :441–451, 1959.
- [166] B. Rivet. Débruitage par ondelettes pour la séparation de sources dans des mélanges fortement bruités. validation sur des ECG de fœtus. Rapport de DEA, Université Paris Sud XI, Gif-sur-Yvette, Juin 2003.
- [167] B. Rivet, V. Vigneron, A. Paraschiv-Ionescu, and C. Jutten. *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, volume LNCS 3195 of *Lectures Notes in Computer Science*, chapter Wavelet de-noising for Blind Source Separation in Noisy Mixtures, pages 263–271. Springer, Grenada, Spain, 2004.
- [168] C.P. Robert. *Méthodes de simulation en statistiques. Introduction aux méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov*. Economica, Paris, 1996.
- [169] M.S. Roulston. Significance testing of information theoretic functionals. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 110(1-2) :62–66, 1997.
- [170] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In J.L. McClelland D.E. Rumelhart, editor, *Parallel distributed Processing*, volume 1, Cambridge, 1981. MIT Press.
- [171] R. Sameni, M. Shamsollahi, and C. Jutten. Multi-channel electrocardiogram denoising using a bayesian filtering framework. In *Proc. of the 33rd Annual International Conference on Computers in Cardiology*, pages 185–188, Valencia, Spain, September, 17-20 2006.
- [172] R. Sameni, M. Shamsollahi, C. Jutten, and M. Babaie-Zadeh. Filtering noisy ecg signals using the extended kalman filter based on a modified dynamic ecg model. In *Proc. of the 32nd Annual International Conference on Cardiology*, pages 1017–1020, Lyon, France, September, 25-28 2005.
- [173] T.D. Sanger. Optimal unsupervised learning in a single-layer linear feedforward neural network. *Neural Networks*, 2 :459–473, 1989.
- [174] G. Saporta. *Probabilités, Analyse de Données et Statistiques*. Technip, 2nde edition, 2006.
- [175] T. Sauer, J.A. Yorke, and M. Casdagli. Embedology. *Journal of Statistical Physics*, 65(3/4) :678–616, 1991.
- [176] L.L. Scharf. *Statistical Signal Processing, Detection, Estimation and Time Series Analysis*. Addison-Wesley, 1991.
- [177] M. Schmidt. *Sensor array for Fetal ECG signals simulation, sensor selection and source separation*. Master thesis, INPG-LIS, Grenoble (France), 2003.
- [178] L. Senhadji, J.J. Bellanger, and G. Carraut. Détection temps-échelle d'évènements paroxytiques intercritiques en électroencéphalogramme. *Traitement du signal*, 12 :357–371, 1995.
- [179] C.E. Shannon. A mathematical theory of information. *Bell System Technical Journal*, 27, 1948.
- [180] R.N. Shepard. The analysis of proximities : multidimensional scaling with an unknown distance function. *Psychometrika*, 27 :125–139, 1962.
- [181] O. Sibony, P. Fouillot, M. Benaoudia, A. Benhalla, J-F. Oury, and P. Blot. Quantification of the fetal heart rate variability by spectral analysis of fetal well-being and fetal distress. *European Journal of Obstetrics and Gynecology and Reproductive Biology*, 54 :103–108, 1994.
- [182] T. Similowski, J. Gonzalez, A. Duguet, and C. Straus. *Physiologie de l'inspiration chez l'homme : déterminants neuromusculaires et mécaniques de l'acte inspiratoire*, chapter Actualités en kinésithérapie de réanimation. Elsevier, 2003.
- [183] L. Sinderby, P. Navalesi, J. Beck, Y. Skrobik, N. Comtois, S. Friberg, S.B. Gottfried, and L. Lindstrom. Neural control of mechanical ventilation in respiratory failure. *Nat. Med.*, 5 :1433–1436, 1999.
- [184] E. Sorouchyari. Blind source separation, part 3 : Stability analysis. *Signal Processing*, 24 :21–29, 1991.
- [185] A. Stuart, K. Ord, and S. Arnold. *Kendall's advanced theory of statistics*, volume 2A. Oxford University Press, London, 6 edition, 1994.
- [186] M. Sugeno. Structure identification of fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 28 :15–33, 1988.



- [187] C. Sureau, J. Chavinié, M.L. Meziou, and R. LeHouezec. Le rythme cardiaque foetal. essai d'appréciation quantitative au cours du travail. *J. Gyn. Obst. Rep. Biol.*, 1 :249–254, 1972.
- [188] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132, 1985.
- [189] F. Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*. Number 898 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1981.
- [190] A. Taleb and C. Jutten. Source separation in post-nonlinear mixtures. *IEEE transactions on Signal Processing*, 47(10) :2807–2820, 1999.
- [191] A. Tarantola. *Inverse problem theory. Models for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [192] M.J.O. Taylor, Smith; M.J., M. Thomas, A.R. Green, Cheng F., L.Y. Oseku-Afful, S. ad Wee, N.M. Fisk, and H.M. Gardiner. Non invasive fetal electrocardiography in singleton and multiple pregnancies. *Int. Jour. of Obst. and Gynecology*, 110 :668–67, July 2003.
- [193] N.V. Thakoz, G. Xin-Rong, and D.F. Hanley. Multiresolution wavelet analysis of evoked potentials. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 40 :1085–1094, 1993.
- [194] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. Doyne Farmer. Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 58 :77–94, September 1992.
- [195] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems*. V.H. Vinsten, Washington, DC, 1977.
- [196] L. Tong, V.C. Soon, Y.-F. Huang, and R. Liu. AMUSE : a new blind identification algorithm. In *IEEE ISCAS*, pages 1784–1787, New Orleans, LA, May 1990.
- [197] H. Ventsel. *Théorie des Probabilités*. Mir, Moscou, 1973.
- [198] V. Vigneron and C. Barret. Approximation techniques for neuromimetic calculus. *International Journal of Neural Systems*, 9(3) :227–234, 1999.
- [199] V. Vigneron, E.M. Fadaili, C. Jutten, C. Straus, and T. Similowski. Extraction of diaphragmatic EMG using discrete wavelet transform. *Journal on Physiological Measurements*, 2007. 13 pages, soumis.
- [200] V. Vigneron, C. Herail, A. Azancot, and C. Sibony, O. Jutten. Dispositif d'acquisition et d'analyse de l'électrocardiogramme foetal. Brevet logiciel, mai 2007. CNRS.
- [201] V. Vigneron, C. Herail, M. Schmidt, A. Azancot, C. Jutten, and O Sibony. Sensor array for fetal ECG. part 1 : Simulations. In *2nd IEEE International Conference on Computational Intelligence in Medical and Healthcare*, pages 90–98, Costa da Caparica, Lisbon, Portugal, June 29th - July 1st 2005.
- [202] V. Vigneron, C. Herail, M. Schmidt, A. Azancot, C. Jutten, and O Sibony. Sensor array for fetal ECG. part 2 : Sensor selections. In *2nd IEEE International Conference on Computational Intelligence in Medical and Healthcare*, pages 434–442, Costa da Caparica, Lisbon, Portugal, June 29th - July 1st 2005.
- [203] V. Vigneron and C. Jutten. Bounded approximation for score fonction selection. In *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, Fourth International Conference, ICA 2003*, pages 119–124, Nara, Japan, April 2003.
- [204] V. Vigneron and C. Jutten. General conditions of stability in blind source separation models and score function selection. *Neurocomputing*, 62 :65–78, 2004.
- [205] V. Vigneron and C. Jutten. *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, volume LNCS 3195 of *Lectures Notes in Computer Science*, chapter Fisher Information in Source Separation Problems, pages 168–176. Springer, 2004.
- [206] V. Vigneron, S. Lagrange, and C. Jutten. Acceptability conditions for blind source separation problems. In *XIth European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN 2003)*, pages 301–306, Bruges, Belgique, April 23-25, 2003.
- [207] V. Vigneron, H. Maaref, S. Lelandais, and A.P. Leitao. "poor man" vote with m-ary non-parametric classifiers based on mutual information. application to iris recognition. In *Fourth International Conference on Audio-Video Based Biometric Person Authentication (AVBPA'03)*, pages 647–657, London, UK, june 2003.
- [208] V. Vigneron and M. Olteanu. Identification of fuzzy function via interval analysis. *Reliable Computing*, 2007. 22 pages, accepté.
- [209] V. Vigneron, A. Paraschiv-Ionescu, A. Azancot, C. Jutten, and O. Sibony. Fetal electrocardiogram extraction based on non-stationary ica and wavelet denoising. In *7th IEEE International Symposium on Signal Processing and its applications*, Paris, France, July 1-4, 2003.

- [210] V. Vigneron and S. Petit. Evaluating the impact of technology transfers from public research laboratories to private firms. *IPTS Report*, 40 :39–44, December 1999. Special Issue : Evaluation and research activities.
- [211] F. Vrins, J.L. Lee, M. Verleysen, V. Vigneron, and C. Jutten. Improving independent component analysis performances by variable selection. In *IEEE International Workshop on Neural Networks for Signal Processing (NNSP 2003)*, pages 359–368, Toulouse, France, 2003. Springer.
- [212] V. Vrins, F. and Vigneron, M. Verleysen, and C. Jutten. Abdominal electrodes analysis by statistical processing for fetal electrocardiogram extraction. In *2nd IASTED Int. Conf. on Biomedical Engineering (BioMed 2004)*, pages 244–249, Innsbruck, Austria, February 16–18, 2004.
- [213] E. Walter, editor. *Mathematics and Computers in Simulation*, volume 32, chapter Special issue on parameter identification with error bounds, pages 447–607. Springer, 1990.
- [214] E. Walter and L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, Paris, 1994.
- [215] L.X. Wang and J.M. Mendel. Back-propagation fuzzy system as nonlinear dynamic system identifiers. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy System*, pages 1409–1416, San Diego, 1992.
- [216] H. Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. Math.*, 37 :645–680, 1936.
- [217] E.P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *The Annals of Mathematics*, 62(3) :548–564, November 1955.
- [218] R.R. Yager and D.P. Filev. Unified structure and parameter identification. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyb.*, 23(4) :1198–1205, 1993.
- [219] S.H. Yook, H. Jeong, A.-L. Barabási, and Y. Tu. Weighted evolving networks. *Physical Review Letters*, 86 :5835–5838, 2001.
- [220] M. Younes. Proportional assist ventilation, a new approach to ventilatory support. *American Revue of Respiratory Disease*, 145 :114–120, 1992.
- [221] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1 :3–28, 1978.
- [222] V. Zarzoso and A.K. Nandi. Non invasive fetal electrocardiogram extraction : blind separation versus adaptive noise cancellation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 48 :12–18, 2001.
- [223] L.G. Zhou and L. Ping. The study on conduction of fetal eeg by mathematical multi-layer model. In *Proc of IEEE/EMBS International Conference*, 1994.
- [224] A.J. Zomorodian. *Topology for Computing*. Cambridge University Press, 2005.



# Scripts Matlab pour le réhaussement de signal

## A.1 Filtre pour la détection du QRS

Listing A.1 – Filtre en peigne.

```

1 %multi-notch filter used to remove baseline and power-line noise
2 %This filter is unsuitable for ST waveform analysis
3 clear all; close all;
4 h1 = remez(20,[0 0.2 0.4 1.0],[0 0 1 1], [1 1]);
5 h2=zeros(1,10*size(h1,2));
6 for i=1:size(h1,2)
7     h2(i*10) = h1(i);
8 end
9 %This is the lowpass filter for removing HF noise
10 hlp = remez(36, [0 50/125 65/125 1], [1 1 0 0],[1 2]);
11 hlp2=zeros(1,size(hlp,2)*2);
12 for i=1:size(hlp,2)
13     hlp2(i*2)=hlp(i);
14 end
15 c1=figure;
16 c2=figure;
17 c3=figure;
18 figure(c1);
19 subplot(2,1,1), evalfilt(h1,50,'prototype_filtre_passe-bas_(fs=50Hz)',0,50); grid on;
20 subplot(2,1,2), c1=evalfilt(h2,500,'Comb_filter_(fs=500Hz)',0,250); grid on;
21 figure(c2);
22 subplot(2,1,1); evalfilt(hlp,250,'filtre_passe-bas',0,250);
23 grid on;
24 subplot(2,1,2); evalfilt(hlp2,500,'(b)_Low-pass_filter_(fs=500Hz)',0,500); grid on;
25 strm = fopen('poor.raw','rt');
26 strm2=fopen('ecg111.flr','wt');
27 ecg=fscanf(strm,'%f');
28 last = size(ecg,1);
29 %Add artificial noise
30 n1=700; n2=500; n3=250;
31 for i=1:last
32     ecg(i)=ecg(i)+n1*sin(50*i*2*3.1415926/500)+n2*sin(100*i*2*3.1415926/500)+n3*rand-n3/2;
33 end
34 last = 3000;
35 y=zeros(last,1);
36 y1=zeros(last,1);
37 figure(c3);

```

```

38 subplot(2,1,1), plot(ecg(201:last)); grid on;
39 %Multi-notch filter
40 for i=201:last
41     y(i)=0.0;
42     for j=1:20
43         y(i)=y(i)+h1(j)*ecg(i-10*j);
44     end
45 end
46 %Second filter (low-pass)
47 for i=1+2*size(hlp,2):last
48     y1(i)=0.0;
49     for j=1:size(hlp,2)
50         y1(i)=y1(i)+hlp(j)*y(i-2*j);
51     end
52 end
53 subplot(2,1,2), plot(y1(201:last)); grid on;
54 fprintf(strm2, '%3.8f\n',y);
55 fclose(strm2);

```

Listing A.2 – Prétraitement pour la détection du QRS.

```

1 f0=figure;
2 f1=figure;
3 f2=figure;
4 f3=figure;
5 f4=figure;
6 f5=figure;
7 f6=figure;
8 f7=figure;
9 f8=figure;
10 %This designs the first prototype filter
11 %Skip every 50 samples
12 h1=remez(26,[0 0.3 0.5 1],[1 1 0 0],[1 1]);
13 %This writes the coefficients to disk
14 %You will need to read these numbers into your code
15 op=fopen('filter1.fir','wt');
16 fprintf(op,'%3.10f\n',h1);
17 fclose(op);
18 %This is the second stage
19 %Skip every 10 samples
20 h2=remez(26,[0 0.04 0.35 1],[1 1 0 0],[1 1]);
21 %This writes the filter to disk
22 %Again, you will need these
23 op=fopen('filter2.fir','wt');
24 fprintf(op,'%3.10f\n',h2);
25 fclose(op);
26 %This is the low-pass filter for removing all noise above 62.5Hz
27 %Skip every other sample
28 h3=remez(40,[0 0.4 0.5 1.0],[1 1 0 0],[1 1]);
29 %This writes the filter to disk
30 %Once again, you will need these
31 op=fopen('filter3.fir','wt');
32 fprintf(op,'%3.10f\n',h3);
33 fclose(op);
34 %Test
35 %Place RAW ECG in a file called test.raw in the current directory to see it happen!!!!
36 %Note - I mean RAW text (not binary) i.e. text files you could import into Excel and plot
37 %Open the file
38 strm = fopen('poor.raw','rt');

```

```

39 ecg=fscanf(strm, '%f ');
40 fclose(strm);
41 N=size(ecg,1);
42 figure(f1);
43 plot(ecg);
44 y1=zeros(size(ecg));
45 y2=zeros(size(ecg));
46 y3=zeros(size(ecg));
47 y4=zeros(size(ecg));
48 filter_length=(26*50+26*10);
49 for t=1301:N
50     %I've added some 50Hz and some 90Hz to demonstrate
51     ecg(t)=ecg(t)+2.0*cos(2*3.141592654*50*t/500)+100.0*cos(2*3.141592654*90*t/500);
52     y1(t)=0.0;
53     y2(t)=0.0;
54     for i=1:26
55         y1(t)=y1(t)+ecg(t-i*50)*h1(i);
56     end
57     for i=1:26
58         y2(t)=y2(t)+y1(t-i*10)*h2(i);
59     end
60     y3(t)=ecg(t-filter_length/2)-y2(t);
61     y4(t)=0.0;
62     for i=1:40
63         y4(t)=y4(t)+y3(t-2*i)*h3(i);
64     end
65 end
66 figure(f2);
67 plot(y4);
68 %Display filter characteristics
69 for i=1:size(h1,2)
70     h11(i*50) = h1(i);
71 end
72 for i=1:size(h1,2)
73     h12(i*10) = h2(i);
74 end
75 for i=1:size(h3,2)
76     h13(i*2) = h3(i);
77 end
78 c1=evfilt(h11,500,'Filter_1',0,250);
79 c2=evfilt(h12,500,'Filter_2',0,250);
80 figure(f3);
81 plotmag(c1+c2,500,'',0,250);
82 print -deps Amplitude_reponse_du_filtre.eps
83 figure(f4);
84 evalfilt(h13,500,'',0,250);

```

## A.2 Programmes auxiliaires

Listing A.3 – EVILT.M

```

1  function HH=evfilt (coeffs , Fsamp, tit , from , to)
2  %evfilt <coeff file> <Sampling Freq> <Title> <From> <To>
3  s=size (coeffs ,2);
4  s=ceil (log (s)/log (2));
5  s=(2^s);
6  s=4096;
7  hh = zeros (1 ,s);
8  ff = zeros (1 ,s);
9  for f=1:s
10 ff (f)=f*Fsamp/s;
11 end
12 hh( 1:size (coeffs ,2) )=coeffs ;
13 HH=fft (hh);
14 HH=abs (HH);
15 HH=20*log10 (HH);
16 hold on
17 XLABEL( 'Frequence' );
18 YLABEL( 'Attenuation_(dB)' );
19 TITLE(tit);
20 a=1+from*s/Fsamp;
21 b=to*s/Fsamp;
22 plot ( ff (a:b) ,HH(a:b));
23 hold off
24 grid on

```

Listing A.4 – EVALFILT.M

```

1  function H=evalfilt (coeffs , Fsamp, tit , from , to)
2  %evalmyfilter <coeff file> <Sampling Freq> <Title> <From><To>
3  s=size (coeffs ,2);
4  s=ceil (log (s)/log (2));
5  s=(2^s);
6  s=s*8;
7  hh = zeros (1 ,s);
8  ff = zeros (1 ,s);
9  for f=1:s
10 ff (f)=f*Fsamp/s;
11 end
12 hh( 1:size (coeffs ,2) )=coeffs ;
13 H=fft (hh);
14 H=abs (H);
15 H=20*log10 (H);
16 hold on
17 XLABEL( 'Frequency' );
18 YLABEL( 'Magnitude_Response_(dB)' );
19 TITLE(tit);
20 a=1+from*s/Fsamp;
21 b=to*s/Fsamp;
22 plot ( ff (a:b) ,H(a:b));
23 hold off
24 grid on

```

Listing A.6 – PLOTMAG.M

```

1  function plotmag (magresp , Fsamp, tit , from , to)

```



Listing A.5 – EFILT.M

```

1  function H=efilt(coeffs, Fsamp, tit, from, to)
2  %efilt <coeff file> <Sampling Freq> <Title> <From> <To>
3  s=size(coeffs,2);
4  s=ceil(log(s)/log(2));
5  s=(2^s);
6  s=s*8;
7  hh = zeros(1,s);
8  ff = zeros(1,s);
9  for f=1:s
10 ff(f)=f*Fsamp/s;
11 end
12 hh( 1:size(coeffs,2) )=coeffs;
13 H=fft(hh);
14 H=abs(H);
15 H=20*log10(H);
16 hold on
17 XLABEL('Frequence');
18 YLABEL('Attenuation_(dB)');
19 TITLE(tit);
20 a=1+from*s/Fsamp;
21 b=to*s/Fsamp;
22 plot( ff(a:b),H(a:b));
23 hold off
24 grid on

2  %plot mag <mag resp> <fsamp> <title> <from> <to>
3  %This plots a magnitude response
4  s=size(magresp,2);
5  ff = zeros(1,s);
6  for f=1:s
7      ff(f)=f*Fsamp/s;
8  end
9  hold on
10 XLABEL('Frequence');
11 YLABEL('Attenuation_(dB)');
12 TITLE(tit);
13 a=1+from*s/Fsamp;
14 b=to*s/Fsamp;
15 plot( ff(a:b),magresp(a:b));
16 hold off
17 grid on

```



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Corrélation et indépendance</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Introduction générale et organisation du document</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Problèmes sous contraintes et séparation de sources</b>	<b>11</b>
2.1	Le problème de la séparation de sources . . . . .	11
2.2	Propriété d'identifiabilité . . . . .	12
2.2.1	Modèles inversibles . . . . .	12
2.2.2	Le mélange linéaire instantané . . . . .	15
2.2.3	Généralisation à n'importe quel mélange linéaire . . . . .	16
2.2.4	Simulations . . . . .	16
2.3	Etude des solutions SAS par maximum de vraisemblance . . . . .	18
2.3.1	Fonctions de contraste . . . . .	20
2.3.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	20
2.3.3	Stabilité . . . . .	21
2.3.4	Hessienne . . . . .	22
2.3.5	Vitesse de convergence . . . . .	24
2.3.6	Estimateur du minimum de contraste . . . . .	25
2.3.7	Matrice de Fisher . . . . .	26
2.3.8	Notes sur la mesure d'information de Fisher . . . . .	28
2.4	Débruitage par ondelettes dans des mélanges fortement bruités . . . . .	30
2.4.1	Débruitage par ondelettes . . . . .	31
2.4.2	Débruitage par choix d'une base idéale . . . . .	32
2.4.3	Choix de l'échelle de débruitage . . . . .	33
2.4.4	Techniques de débruitage par ondelettes pour la séparation de sources . . . . .	33
2.4.5	Simulations numériques . . . . .	36
2.5	Diagonalisation conjointe de matrices temps-échelle . . . . .	39
2.5.1	La transformée en ondelettes spatiale des observations . . . . .	39
2.5.2	Diagonalisation conjointe non unitaire . . . . .	40
2.5.3	Simulations informatiques . . . . .	41
2.6	conclusion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Mode inverse par piégeage par marche aléatoire</b>	<b>43</b>
3.1	Problèmes inverses et interprétation de la mesure . . . . .	43
3.1.1	Caractérisation de la classe de solution . . . . .	44
3.1.2	Classe de solutions dans le cas nonlinéaire . . . . .	45
3.2	Modèle par marche aléatoire (MIME) . . . . .	48
3.2.1	Recherche stochastique de la solution . . . . .	49
3.2.2	Simulation . . . . .	50
3.2.3	Propriétés . . . . .	53

3.3	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Estimation ensembliste</b>	<b>59</b>
4.1	Contribution de l'analyse par intervalle à la résolution d'un problème mal posé . . . . .	59
4.2	Rappels sur la représentation des nombres . . . . .	59
4.3	Analyse par intervalles . . . . .	60
4.3.1	Calcul par intervalles . . . . .	61
4.3.2	Test d'inclusion . . . . .	62
4.3.3	Mise en œuvre de l'inversion ensembliste . . . . .	62
4.4	Applications . . . . .	63
4.4.1	Une solution ensembliste à la séparation de 2 sources indépendantes . . . . .	63
4.4.2	Approximation floue par intervalles . . . . .	67
4.5	Conclusion . . . . .	73
<b>II</b>	<b>Traitement des biosignaux</b>	<b>75</b>
<b>5</b>	<b>Extraction de l'électrocardiogramme du fœtus</b>	<b>79</b>
5.1	Mesures de l'ECGf dans le domaine temporel . . . . .	79
5.2	Mesures disponibles de l'ECGf . . . . .	81
5.2.1	Signaux simulés . . . . .	81
5.2.2	Signaux réels . . . . .	82
5.3	Débruitage des signaux . . . . .	83
5.3.1	Signaux simulés . . . . .	83
5.3.2	Signaux réels . . . . .	84
5.4	Analyse de l'électrocardiogramme fœtal . . . . .	87
5.4.1	Détection des complexes QRS . . . . .	87
5.4.2	Extraction de paramètres médicaux . . . . .	94
5.4.3	Estimation du rythme cardiaque fœtal . . . . .	94
5.4.4	Détecteur adaptatif de QRS . . . . .	96
5.5	Application au traitement du signal distribué . . . . .	98
5.5.1	Proposition d'un modèle pour l'étude du mélange générateur du signal ECGf . . . . .	98
5.5.2	Réduction de dimension optimale et traitement de matrice de capteurs . . . . .	100
5.5.3	Calcul de la dimension du signal sous hypothèse de connexité . . . . .	102
5.6	Conclusions et perspectives pour la cardiologie prénatale . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Détection de transitions dans le signal EMG diaphragmatique</b>	<b>107</b>
6.1	Mesures de l'EMG du diaphragme dans le domaine temporel . . . . .	107
6.2	Matériel et méthodes . . . . .	108
6.3	Analyse des EMGdi : détection, traitement et classification . . . . .	110
6.3.1	Débruitage par ondelettes des EMGdi et séparation de sources . . . . .	110
6.3.2	Suppression de l'ECG . . . . .	112
6.3.3	Détection des transitions et extraction des bouffées diaphragmatiques . . . . .	113
6.3.4	Classification des signaux . . . . .	116
6.3.5	Estimation rapide du RSB dans les signaux EMGdi . . . . .	121
6.4	Perspective pour la suppléance fonctionnelle ventilatoire . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>123</b>
7.1	Synthèse . . . . .	123
7.2	Projet de recherche à 4 ans . . . . .	125
7.2.1	Contexte scientifique et objectifs . . . . .	126
7.2.2	Méthodologie et mise en œuvre . . . . .	126
7.2.3	Extraction non-invasive de signaux biomédicaux . . . . .	130
7.2.4	le projet BIHAVE . . . . .	131

*TABLE DES MATIÈRES* 151

7.2.5 Perspectives à court terme . . . . . 132

**A Scripts Matlab pour le réhaussement de signal 143**

A.1 Filtre pour la détection du QRS . . . . . 143

A.2 Programmes auxiliaires . . . . . 146