



HAL
open science

La fonction d'appareil en spectrométrie par transformation de Fourier: de la modélisation à l'algorithmique

Raphaël Desbiens

► **To cite this version:**

Raphaël Desbiens. La fonction d'appareil en spectrométrie par transformation de Fourier: de la modélisation à l'algorithmique. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Laval, 2004. Français. NNT: . tel-00201169

HAL Id: tel-00201169

<https://theses.hal.science/tel-00201169>

Submitted on 26 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAPHAËL DESBIENS

**LA FONCTION D'APPAREIL EN SPECTROMÉTRIE
PAR TRANSFORMATION DE FOURIER: DE LA
MODÉLISATION À L'ALGORITHMIQUE**

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en génie électrique
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

SEPTEMBRE 2004

*À mon épouse Noriko,
à ma famille.*

Résumé

Les contraintes imposées par les environnements extrêmes dans lesquels nous désirons aujourd'hui employer les spectromètres par transformation de Fourier, notamment pour la télédétection et l'exploration spatiale, motivent la mise au point d'algorithmes de traitement des données qui permettent de tirer profit au mieux des technologies en constante évolution. Cette thèse vise donc à faire progresser davantage la modélisation et l'algorithmique en spectrométrie par transformation de Fourier. Plus spécifiquement, nous nous sommes intéressé aux effets physiques et aux algorithmes ayant une incidence sur le profil d'une raie spectrale tel qu'il est restitué par l'instrument. Nous avons commencé notre étude en nous penchant sur le principal effet de convolution intervenant dans le traitement algorithmique des données : les fenêtres d'apodisation. Nous exposons une nouvelle méthode de contrôle flexible du profil spectral des fonctions d'apodisation. Nous introduisons ensuite les concepts propres à la déconvolution à l'aide de la correction de phase et de l'étalonnage complexe. Un modèle radiométrique rigoureux de la fonction d'appareil (ILS) de la source jusqu'au détecteur est présenté, tenant compte des pupilles du système optique. Il permet de déduire les conditions pour lesquelles la fonction d'appareil obéira à l'effet d'échelle, c'est-à-dire un élargissement de l'ILS au fur et à mesure que le nombre d'onde augmente. Nous établissons la forme discrète des équations liant la fonction d'appareil et les mesures sous une forme matricielle en tenant compte de la fonction de résolution sinus cardinal. Les propriétés propres à cette forme discrète mèneront à la construction efficace et précise d'une matrice d'ILS et à l'établissement des conditions d'inversion de la fonction d'appareil. Nous avons développé également un algorithme rapide qui permet d'intégrer numériquement la fonction d'appareil à une densité spectrale théorique pour reproduire la mesure d'un spectromètre. Finalement, nous poursuivons la modélisation de la fonction d'appareil par une étude de cas : le spectromètre par transformation de Fourier non compensé. Cette configuration de spectromètre nous permet d'introduire la phase due à la dispersion comme nouvelle caractéristique de la fonction d'appareil.

Avant-propos

Mener à terme des études de doctorat n'est certes pas une chose facile, et la recherche scientifique n'en constitue pas la plus grande difficulté. Aussi, j'aimerais en premier lieu remercier mon directeur et ami Pierre Tremblay pour l'environnement stimulant et les occasions enrichissantes, tant sur le plan personnel que scientifique, qu'il sait créer pour ses étudiants. Son écoute et son dévouement sont d'une qualité exceptionnelle, que l'on rencontre rarement dans une vie. Il sait transmettre par son exemple beaucoup plus que des connaissances. Mes remerciements aussi à Jérôme Genest : nous avons eu de nombreuses et longues discussions qui m'ont grandement orienté dans mes recherches et incité à entreprendre ce doctorat. Nous avons partagé ensemble des moments très amusants, dans cette université et ailleurs dans le monde...

J'aimerais également saluer mes collègues François Bouffard, Jean-Pierre Bouchard et Dana Smith, qui ont contribué par leur appui et leurs conseils à la réalisation de cette thèse. Tous ceux que j'ai côtoyés au COPL ces dernières années ne seront pas oubliés, vous m'avez apporté beaucoup par votre soutien et votre camaraderie. Merci à Mathieu Gibeault et Louis Belhumeur pour la révision de mes travaux, ainsi qu'à Frédéric Desbiens, qui à l'instant même doit être en train de corriger les fautes dans ce document. Remerciement spécial au Dr Huu Tue Huynh pour ses commentaires éclairés et ses encouragements.

Je suis aussi très reconnaissant envers les examinateurs de cette thèse, messieurs Claude Camy-Peyret, Martin Chamberland et André Zaccarin, sans oublier Pierre Tremblay et Jérôme Genest, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour la qualité de leurs commentaires et de leurs questions.

Finalement, j'aimerais souligner d'une façon toute particulière ma reconnaissance à Pierre et Jérôme pour la conférence de Kyoto à laquelle ils m'ont permis d'assister au début de mes études graduées.

Ces travaux ont obtenu un soutien apprécié du Fonds de recherche sur la nature et les technologies, du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, ainsi que de l'Agence spatiale canadienne.

Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des figures	vii
Liste des tableaux	xiii
Introduction générale	1
1 Effet de convolution : l'apodisation — Nouvelle approche pour la conception de fenêtres d'apodisation paramétriques optimales avec profil arbitraire de lobes secondaires	6
1.1 Introduction à l'apodisation	7
1.2 Généralisation des fenêtres Kaiser-Bessel et van der Maas	10
1.2.1 La fonction de van der Maas	10
1.2.2 La relation Kaiser-Bessel – van der Maas	12
1.3 Une transformation spectrale	12
1.3.1 Propriétés	13
1.3.2 Paramétrage d'une fenêtre	15
1.3.3 Discrétisation des fenêtres	17
1.4 L'élaboration de fenêtres	19
1.4.1 Fenêtres de N lobes secondaires égaux	21
1.5 Contrôle de la décroissance asymptotique	23
1.6 Liens avec diverses fenêtres	29
1.7 Bases généralisées	31
1.8 Conclusion	33
2 Effets de déconvolution : la correction de phase et l'étalonnage complexe — Étude de la distorsion induite par les procédés de déconvolution	34
2.1 Les erreurs de phase	35
2.2 Revue des méthodes de correction de phase	36
2.3 Correction de phase, déconvolution et filtrage	40

2.3.1	Zones de transition	40
2.3.2	Largeur de bande	42
2.3.3	Cas d'un spectre à large bande	43
2.4	L'étalonnage complexe	51
2.5	Conclusion	52
3	Effet d'échelle : la fonction d'appareil — Modèle radiométrique de la fonction d'appareil	53
3.1	Introduction	53
3.2	De l'intensité énergétique à l'ILS	54
3.3	De l'ILS au spectre	60
3.3.1	Spectres vrai et mesuré	60
3.3.2	Limitation due à la variation finie d'OPD	61
3.4	Solution radiométrique formelle	62
3.5	Ouverture circulaire centrée et source lambertienne uniforme	65
3.6	Évaluation de l'effet d'une ouverture circulaire centrée	67
3.7	Conclusion	71
4	Intégration et inversion matricielles de la fonction d'appareil — Algorithme	73
4.1	Introduction	73
4.1.1	Définition du problème	74
4.1.2	ILS et résolution : physique du problème	75
4.2	Intégration de l'ILS	76
4.2.1	Relations matricielles	76
4.2.2	Du domaine spectral au domaine de l'interférogramme	78
4.2.3	Matrice d'ILS	80
4.2.4	Interprétation	81
4.2.5	Discrétisation des équations	83
4.3	Algorithmique	87
4.3.1	Intégration numérique	87
4.3.2	Erreur d'interpolation	93
4.4	Inversion d'ILS	96
4.4.1	Stabilité	98
4.4.2	Étude du bruit	107
4.5	Implémentation des algorithmes	113
4.5.1	Algorithme de calcul de la matrice d'ILS	113
4.5.2	Algorithme d'intégration d'ILS rapide	115
4.6	Validation expérimentale	120
4.6.1	Spectre d'émission laser	120
4.6.2	Spectre d'absorption du HBr	120
4.7	Approximation locale de l'effet d'échelle par convolution	122
4.8	Conclusion	130

5	Phase et fonction d'appareil — Cas d'un interféromètre à lame séparatrice non compensée	132
5.1	Introduction	132
5.2	Modélisation de la différence de chemin optique	133
5.2.1	Interféromètre à lame séparatrice non compensée et interféromètre à champ compensé	136
5.3	Phase et fonction d'appareil	140
5.3.1	Cas d'une lame non compensée perpendiculaire à l'axe optique	141
5.3.2	Cas d'une lame séparatrice non compensée et d'un détecteur circulaire centré	142
5.4	Intégration matricielle de l'ILS complexe	146
5.5	Conclusion	148
	Conclusion générale	150
	Bibliographie	153
	Annexes	
A	Module du spectre et bruit gaussien — La distribution de Rice	162
A.1	Calcul de la densité de probabilité $f_Z(z)$	162
A.2	Calcul des moments de Z	165
B	Code Matlab pour l'intégration et l'inversion d'ILS	168
B.1	IncludeILS.m	169
B.2	ILSmatrix_fast.m	172
B.3	ILSmatrix_trunc.m	175
B.4	Romberg.m	178
B.5	ILSfunction.m	179
B.6	CorrectionFilter.m	182
B.7	NextFastFFT.m	184
C	Grandeurs radiométriques	185
D	Liste des sigles et abréviations	186

Table des figures

1.1	Comparaison des fenêtres classiques selon la largeur à mi-hauteur et l'amplitude maximale des lobes secondaires. Les différents symboles indiquent le taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires.	9
1.2	Illustration d'une fenêtre avec des lobes secondaires limités à ϵ , tracée en fonction de ω . Le paramètre de bande Ω correspond à $ \xi = 1$	11
1.3	Exemple d'une fenêtre sinc paramétrique $W'(\omega)$ pour $\Omega = 0, 2$ et $2i$. Nous pouvons voir le déplacement important des premiers zéros et la variation d'amplitude de $W'(0)$	16
1.4	La fenêtre Blackman paramétrique pour les valeurs $c = 0$ (courbe noire), $c = 5.5i$ et $c = 8i$ (courbes grises).	17
1.5	La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 8$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.	18
1.6	La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 128$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.	18
1.7	La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 128$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.	19
1.8	Construction de $G(u)$ dans le domaine des lobes secondaires (avec $c = 1$) pour $N = 3$ lobes secondaires égaux (courbes noires) et $N = 6$ lobes secondaires égaux (courbes grises). Les fenêtres correspondantes $w'(t)$ sont présentées à droite pour le produit temps-fréquence $c = 3$. Dans le domaine spectral, les fenêtres $W'(\omega)$ sont présentées pour $c = 2, 3, 4$ et $T = 1$	22
1.9	Comparaison de fenêtres paramétriques avec $N = 3$ lobes secondaires égaux construites à partir des bases proposées pour $c = 6 : -6$ dB/oct., -12 dB/oct., -18 dB/oct., -24 dB/oct.	27

1.10	Comparaison des fenêtres communes avec les fenêtres paramétriques de N lobes secondaires égaux construites à partir des bases proposées à l'équation (1.34), pour différents taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires. Nous pouvons voir que pour N croissant, les fenêtres se rapprochent de la fonction de van der Maas, pour tous les taux de décroissance asymptotique. Les fenêtres non paramétriques ayant le même taux de décroissance des lobes secondaires sont aussi illustrées. La fonction de van der Maas et la fenêtre rectangulaire sont incluses dans chaque cas aux fins de comparaison.	28
2.1	Illustration schématique des zones de transition apparaissant lors de la convolution d'une fonction tronquée.	41
2.2	Spectre théorique original (sans phase) utilisé pour illustrer les méthodes de correction.	44
2.3	Partie centrale (ZPD) des interférogrammes, sans phase (bleu) et avec phase (rouge), utilisés pour l'exemple de correction de phase.	45
2.4	Phase estimée à faible résolution après apodisation avec la fenêtre Blackman paramétrique ($c = 30$).	46
2.5	Transformée de Fourier inverse de la phase : fonction de correction pour la déconvolution de la phase. Les limites sont calculées à partir de la dérivée de la phase.	46
2.6	Parties réelle et imaginaire du spectre après correction de phase.	47
2.7	Parties réelle et imaginaire du spectre après correction de phase et troncation des zones de transition.	48
2.8	Différence entre la partie réelle du spectre corrigé et le spectre original sans phase, avant et après troncation des zones de transition.	48
2.9	Différence entre l'interférogramme original (sans dispersion) et l'interférogramme obtenu après correction de phase. La vue agrandie de l'extrémité de l'interférogramme permet la comparaison de l'erreur commise par rapport à la valeur de l'interférogramme original dans la zone de transition.	49
2.10	Partie réelle et imaginaire du spectre après correction de phase et troncation simultanée des zones de transition dans le spectre et dans l'interférogramme.	50
2.11	Différence entre la partie réelle du spectre corrigé et le spectre original sans phase, après troncation des zones de transition et troncation simultanée du spectre et de l'interférogramme.	51
3.1	Relation entre l'élément d'angle solide $d\Omega$ et les angles du faisceau (θ, φ) sur la sphère de rayon unitaire. Le domaine d'intégration Ω_D peut être exprimé en un domaine d'intégration en φ (φ_D) et un domaine en θ (θ_D).	55

3.2	a) Spectre vrai $S_o(\sigma_o)$ d'une source uniforme lambertienne contenant 11 raies d'émission de 990 à 1000 cm^{-1} ; b) fonction d'appareil $\text{ILS}(\sigma, \sigma_o)$ correspondant aux raies de la source pour un détecteur carré hors-axe de $300 \times 300 \mu\text{m}^2$ centré dans le champ de vue à $x = 500 \mu\text{m}$ et $y = 400 \mu\text{m}$ ainsi qu'une ouverture circulaire centrée de paramètre $\rho = 0.4$ et une longueur focale de 20 mm; c) Spectre $S_m(\sigma)$ tel que mesuré par le spectromètre; d) Spectre estimé $\hat{S}_m(\sigma)$ obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme pour un interférogramme de longueur finie ($\Delta X_{\text{max}} = \pm 4 \text{ cm}$).	57
3.3	Relation entre l'angle de propagation θ et la position dans le champ de vue (r, φ) pour un collimateur de focale f	63
3.4	Coordonnées du champ de vue (r, φ) et de l'ouverture (r_A, φ_A) pour le calcul de l'intensité énergétique I à partir de la luminance énergétique L de la source après focalisation du champ de vue.	64
3.5	Facteur d'ouverture $F_A(\bar{\sigma})$ pour une ouverture circulaire centrée. La normalisation est faite par rapport à $F_A(1)$. Les paramètres d'ouverture utilisés sont $\rho = 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2$ et 5. Ce graphique représente la fonction qui multiplie l'ILS dû au champ de vue seul. Le facteur $F_A(\bar{\sigma})$ est décrit avec beaucoup de précision par une équation polynomiale du premier ordre avec une très faible pente.	68
3.6	Correction [ppm] ajoutée par une ouverture circulaire centrée au moment du premier ordre de l'ILS d'un champ de vue circulaire centré et d'une source uniforme et lambertienne centrée. Les paramètres d'ouverture normalisés sont ici $\rho = 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2$ et 5, et la correction est représentée en fonction du nombre d'onde normalisé minimal détecté $\bar{\sigma}_{\text{min}}$. La divergence du faisceau est donnée par $\theta_{\text{max}} = \arccos \bar{\sigma}_{\text{min}}$. Nous pouvons voir que la différence entre le moment de premier ordre de l'ILS dû au champ de vue seul et celui de l'ILS tenant compte de l'ouverture augmente pour un ILS plus large.	70
4.1	Puisque la puissance est rejetée vers des OPD plus élevées dans le domaine de l'interférogramme, une troncation de l'interférogramme conserve toute l'information nécessaire pour inclure l'ILS à la même résolution. Cependant, pour le processus inverse, on pourra suspecter des erreurs importantes aux extrémités de l'interférogramme.	82
4.2	Exemple de spectre vrai (bleu), après troncation, et de spectre mesuré (rouge) après intégration de l'ILS, suivant l'algorithme proposé	88
4.3	Exemple de matrice de transfert dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité	89
4.4	L'intégration de la fonction d'appareil par morceaux permet l'emploi de méthodes d'intégration d'ordres élevés.	91

4.5	L'erreur due à l'interpolation et à la troncation se reflète aux hautes fréquences et grandes différences de marche optique. Elle entraîne une erreur oscillatoire dans l'autre domaine. Ce schéma illustre la dualité de l'erreur dans le domaine spectral et le domaine de l'interférogramme.	94
4.6	Exemple d'erreur d'interpolation dans l'interférogramme et de l'erreur résultante dans le spectre	95
4.7	Exemple d'erreur d'interpolation dans l'interférogramme et de l'erreur résultante dans le spectre après application de la correction. Ici, un total de 16 points ont été mis à zéro dans le spectre et dans l'interférogramme	97
4.8	Exemple d'enveloppes d'apodisation dans le domaine de l'interférogramme	99
4.9	Enveloppes de restauration correspondantes (ILS inverse) pour différentes fréquences dans le domaine de l'interférogramme	101
4.10	Exemple de matrice de transfert inverse dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité	102
4.11	Exemple d'enveloppes d'apodisation dans le domaine de l'interférogramme	104
4.12	Enveloppes de restauration correspondantes (ILS inverse) pour différentes fréquences dans le domaine de l'interférogramme	105
4.13	Exemple de matrice de transfert inverse dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité	106
4.14	Diagonale de la matrice de covariance de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion ($R/f = 0.08$)	109
4.15	Diagonale de la matrice de covariance de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion ($R/f = 0.2$)	110
4.16	Exemple de matrice de covariance d'un bruit après inversion, dans le domaine de l'interférogramme	111
4.17	Exemple de matrice de covariance de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion	112
4.18	Correspondance entre le nombre de points d'un vecteur et le nombre composé d'une faible quantité de petits nombres premiers afin d'utiliser un algorithme rapide de FFT.	119
4.19	ILS haute résolution mesurés à l'aide d'une source laser [BOUCHARD, 2004] pour un champ de vue circulaire à différentes positions. Le modèle, obtenu par l'algorithme d'intégration rapide, est indiqué par la courbe magenta, et l'erreur (différence) entre le modèle et la partie réelle de la mesure est indiquée en rouge sous l'ILS.	121
4.20	Spectres d'absorption de HBr corrigés pour différents champs de vue. . .	123
4.21	Différence entre la position d'une raie en fonction du champ de vue et la valeur moyenne de la position de la raie pour tous les champs de vue, et ce pour chacune des raies. Les valeurs correspondant aux spectres corrigés sont situées autour de zéro.	124

4.22	Différence entre la position d'une raie non corrigée et la valeur moyenne de la position de la raie corrigée pour tous les champs de vue, en fonction des différentes raies et ce pour chacun des champs de vue.	125
4.23	Différence entre la position d'une raie corrigée et la valeur moyenne de la position de la raie corrigée pour tous les champs de vue, en fonction des différentes raies et ce pour chacun des champs de vue.	125
4.24	Comparaison de la convolution par ligne ($j_o = 400$) et par colonne ($k_o = 400$) avec l'approche matricielle pour un spectre monochromatique (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).	127
4.25	Erreur relative pour un spectre monochromatique de la convolution par ligne ($j_o = 400$) et de la convolution par colonne ($k_o = 400$) par rapport à la matrice d'ILS (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).	127
4.26	Comparaison de la convolution par ligne ($j_o = 275$) et par colonne ($k_o = 275$) avec l'approche matricielle pour un spectre large bande (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).	128
4.27	Erreur relative pour un spectre large bande de la convolution par ligne ($j_o = 275$) et de la convolution par colonne ($k_o = 275$) par rapport à la matrice d'ILS (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).	128
5.1	Schéma pour le calcul de la différence de phase due à une lame séparatrice non compensée.	134
5.2	Surface du ZPD dans le champ de vue, pour une lame de KBr non compensée d'épaisseur $d = 1$ cm, d'angle $\alpha = 45^\circ$, et pour $\sigma_o = \sigma_r = 1\,000$ cm^{-1}	137
5.3	Région de frange infinie ($\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$) et franges à ZPD (en haut à gauche), pour une lame de KBr non compensée d'épaisseur $d = 1$ cm, d'angle $\alpha = 45^\circ$, et pour $\sigma_o = 1\,000$ cm^{-1} . Les distances entre les plans de frange infinie et le plan de ZPD sont respectivement de 2.50, 2.22 et 1.96 cm. On remarque aussi le changement d'orientation de l'ellipticité autour de la région de frange infinie (1.7 et 2.7 cm).	139
5.4	Schéma de l'ILS d'un détecteur circulaire centré avec une phase due à une lame non compensée placée perpendiculairement à l'axe optique.	143
5.5	Facteur fonction de Bessel a) et phase b) de l'ILS pour une source lambertienne uniforme et un détecteur circulaire centré avec une lame séparatrice (KBr) non compensée inclinée à $\alpha = 45^\circ$, pour un nombre d'onde $\sigma_o = 1\,000$ cm^{-1} ($\sigma_r = \sigma_o$) et une épaisseur de la lame d variant de 0 à 1 cm ($n(\sigma_o) = 1.524$). Le rayon du détecteur n'est pas spécifié.	145

5.6	Intégration de l'ILS complexe d'un détecteur circulaire de $0.025f$ de rayon, où f est la focale de la lentille de collimation, avec une lame de KBr non compensée perpendiculaire à l'axe optique, d'épaisseur 1 cm. L'interférogramme a) et le spectre b) sont présentés d'abord pour un interféromètre compensé (en bleu), puis avec la lame pour un détecteur centré à 0, $0.01f$, $0.02f$, $0.03f$ et $0.04f$ respectivement. Le plan de frange infinie est localisé à un OPD d'environ 1.7 cm	149
A.1	Module Z en fonction de r , X et Y	163
A.2	Distribution de Z pour $r = 0, 1, 2, 5$ et $\sigma = 1$	164
A.3	Moyenne de Z en fonction de r (asymptote $E[Z] = r$).	166
A.4	Variance de Z en fonction de r (asymptote $\text{Var}(Z) = \sigma^2$).	167

Liste des tableaux

1.1	Les bases $\{g_n^J(x)\}$, de taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires de $6(J + 1)$ dB/oct., pour les six premières valeurs de J , avec b_0 choisi pour que $g_n^J(0) = 1$. K est le nombre de termes en cosinus nécessaires pour construire ces bases.	26
1.2	Coefficients des fenêtres avec $N = 3, 4, 8$ lobes secondaires égaux, pour différents taux de décroissance des lobes secondaires. Les coefficients b'_n sont utilisés de façon telle que $ g(0) = 1$	29
1.3	Coefficients non nuls des fenêtres décrites par une somme de puissances de $\sqrt{1 - x^2}$	32
4.1	Coefficients de Romberg pour 8 intervalles et différents ordres d'intégration.	91
4.2	Facteurs utilisés pour obtenir un nombre factorisable en un faible nombre de petits nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11), afin d'optimiser la rapidité de la FFT.	119
4.3	Paramètres des ILS mesurés (focale de 550 mm) [BOUCHARD, 2004]. . .	120

Introduction générale

*Ce qui embellit le désert
c'est qu'il cache un puits quelque part...*

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY
Le petit prince, 1943

L'étude du spectromètre par transformation de Fourier ouvre inévitablement la voie vers l'exploration d'une multitude de champs de connaissance de la physique et de l'ingénierie. L'optique géométrique et ondulatoire, la radiométrie et le traitement de signal n'en sont que les principaux représentants qui nous accompagneront au long de cette thèse. Si l'étude du FTS (*Fourier Transform Spectrometer*) se révèle une expérience complexe, la vaste étendue des domaines scientifiques où il prouve son utilité justifie que l'on approfondisse toujours davantage cette idée maintenant plus que centenaire que lança MICHELSON [1891, 1892]. Les contraintes imposées par les environnements extrêmes dans lesquels plusieurs équipes souhaitent aujourd'hui employer cet instrument, notamment pour la télédétection et l'exploration spatiale [GIROUX, 2004], motivent la mise au point d'algorithmes de traitement des données qui permettent de repousser les limites des technologies existantes. C'est cette visée que nous nous sommes donnée : faire progresser davantage la modélisation et l'algorithmique en spectrométrie par transformation de Fourier.

Plus spécifiquement, nous nous intéresserons aux effets physiques et aux algorithmes ayant une incidence sur le profil d'une raie spectrale telle qu'enregistrée par un instrument. Nous dénommerons ce profil la « fonction d'appareil » suivant la tradition française [CONNES, 1958] ou encore l'« ILS » selon l'acronyme anglais pour « *Instrument Line Shape* », mais il est aussi connu sous les noms de « réponse instrumentale » ou de « forme de raie instrumentale ». Le spectromètre par transformation de Fourier possède la qualité de permettre la mesure de sources optiques présentant à la fois des caractéristiques spectrales très larges et très étroites. En outre, la forme des raies spectrales observées

sera souvent dominée par la fonction d'appareil plus que par les caractéristiques propres de la source, d'où l'importance de bien connaître cette fonction. D'ailleurs, les travaux présentés lors de récentes conférences spécialisées en spectrométrie par transformation de Fourier, telles que *Fourier Transform Spectroscopy* [HAUSAMANN et MCKELLAR, 2003] et *Atmospheric Science from Space using Fourier Transform Spectrometry* [FISHER, 2003], ne font que confirmer la place que doit prendre l'ILS dans la conception, l'évaluation des performances et le traitement des données des FTS.

L'analyse des données spectrales acquises par FTS nécessite généralement un traitement algorithmique, ne serait-ce que pour étalonner les données. La fonction d'appareil peut parfois être modifiée volontairement, par l'apodisation des données par exemple, pour faciliter le recouvrement de l'information recherchée. D'autres procédures font appel à la comparaison des mesures avec des données générées à l'aide de modèles, auxquelles il est nécessaire d'ajouter l'effet de l'ILS pour refléter la distorsion apportée par le spectromètre. Les progrès de l'imagerie hyperspectrale imposent également des exigences sur la connaissance de l'ILS de chacun des détecteurs, afin de permettre la comparaison adéquate des spectres provenant de différents pixels de l'image. La possibilité d'éliminer complètement des mesures l'effet de la fonction d'appareil par un traitement algorithmique approprié est même de plus en plus évoquée, sans s'être véritablement concrétisée jusqu'à maintenant.

Les questions sont nombreuses, les débats aussi. Nous avons débuté notre étude en nous penchant sur le principal effet de convolution intervenant dans le traitement algorithmique des interférogrammes : les fenêtres d'apodisation. L'apodisation, c'est l'art de modéliser la fonction d'appareil pour contrôler la résolution et les inévitables lobes secondaires. Notre premier chapitre est donc dédié à la recherche d'une méthode de contrôle flexible et efficace du profil spectral des fonctions d'apodisation. Nous avons constaté que ce domaine très connu du traitement de signal était en fait constitué d'un ensemble d'outils hétéroclites, souvent empiriques, et que malgré sa mise en équation rigoureuse, il manquait une souplesse et une unité au tableau. L'apodisation est utilisée depuis longtemps en spectrométrie par transformation de Fourier, mais elle demeure un sujet encore débattu aujourd'hui dans la communauté. Sans tenter de mettre fin aux questions entourant la pertinence des fenêtres dans le traitement des données spectrales, nous y ajoutons plutôt une contribution qui pourra sûrement trouver des applications, dans ce domaine comme dans d'autres, en fournissant une compréhension plus profonde de cette classe de fonctions.

De la convolution, nous passerons ensuite à la déconvolution. Le chapitre deuxième aborde l'étalonnage en spectrométrie par transformation de Fourier. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la correction de phase pour souligner que cette procédure, tout comme l'étalonnage complexe, est en fait une opération de déconvolution et doit donc être traitée avec les mêmes égards. Sans être fondamentalement nouvelles, les notions rassemblées dans ce chapitre permettent d'introduire les concepts propres à la déconvolution à l'aide d'un sujet déjà bien connu, de mettre en évidence certains obstacles qui seront rencontrés dans les chapitres suivants, en particulier au chapitre de l'intégration et l'inversion de la fonction d'appareil.

Au troisième chapitre, nous traitons de l'effet d'échelle, cette propriété qui est habituellement la première à être associée à la fonction d'appareil. Nous présentons un modèle radiométrique rigoureux de la fonction d'appareil de la source jusqu'au détecteur, tenant compte des pupilles du système optique. Cette réflexion nous permet de déduire les conditions pour lesquelles la fonction d'appareil obéira à l'effet d'échelle, c'est-à-dire un élargissement de l'ILS au fur et à mesure que le nombre d'onde augmente, qui préserve sa géométrie et son aire. Ce modèle radiométrique permet d'explicitier de façon claire toutes les étapes reliant la source et la fonction d'appareil, ce qui n'avait été publié qu'en partie jusqu'à maintenant.

La modélisation de la fonction d'appareil nous a conduit naturellement vers la recherche d'algorithmes pour tenir compte de l'effet d'échelle dans le traitement des données de spectrométrie par transformation de Fourier. La fonction d'appareil est généralement approchée par une convolution différente pour chaque bande spectrale traitée. Une méthode plus précise devait être mise au point afin de pouvoir éventuellement inverser cette opération, qui rigoureusement correspond à une intégrale de Fredholm du premier type et non pas à une convolution. De plus, la limite de résolution représentée par la fonction sinus cardinal, qui est associée à la troncature de la mesure de l'interférogramme, ajoute un important degré de difficulté à ce problème. L'effet d'échelle est combiné par convolution avec cette fonction de résolution, ce qui rend fastidieuse, voire utopique, une approche numérique brute. Au chapitre quatrième, nous établissons la forme discrète des équations liant la fonction d'appareil et les mesures sous une forme matricielle. Plusieurs propriétés surprenantes ouvriront la porte à la construction efficace et précise de la matrice d'ILS et à l'établissement des conditions d'inversion. Empruntant à la théorie de la transformation de Fourier fractionnaire, nous avons développé un algorithme rapide qui permet d'intégrer numériquement la fonction d'appareil à une densité spectrale théorique pour reproduire la mesure d'un spectromètre. Nous expérimenterons

ces nouveaux algorithmes sur des mesures réelles de la fonction d'appareil pour valider nos résultats. Nous proposons également, à la lumière de cette nouvelle approche, une dérivation et un raffinement de la méthode d'intégration par convolution couramment utilisée.

Finalement, le cinquième chapitre poursuit la modélisation de la fonction d'appareil par une étude de cas : le spectromètre par transformation de Fourier non compensé. Si une telle configuration de spectromètre semble marginale à première vue, elle nous permet d'inclure une nouvelle caractéristique de l'ILS : la phase due à la dispersion. Ce cas particulier nous apporte de nouveaux outils pour analyser les problèmes de compensation pouvant subsister dans les configurations standard de FTS. Il nous met aussi en lien, étonnamment, avec la compensation de champ. La phase de la fonction d'appareil soulèvera de nouvelles questions sur l'étalonnage des données et sur la conception de spectromètres.

Nous apportons donc par cette thèse plusieurs contributions originales au domaine de la spectrométrie par transformation de Fourier. La plupart de ces nouveaux éléments ont d'ailleurs été présentés en conférence ou publiés. Tout d'abord nous proposons une méthode pour la conception de nouvelles fonctions d'apodisation paramétriques, ou le paramétrage des fenêtres existantes, dérivée à partir des fenêtres Kaiser-Bessel et van der Maas [DESBIENS et TREMBLAY, 2001, 2004]. Les fenêtres paramétriques maintiennent leur profil de lobes secondaires tout en permettant un compromis entre la largeur du lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. Nous présentons aussi des bases de fonctions pour la construction de familles de fenêtres ayant un taux donné de décroissance asymptotique des lobes secondaires. Ces bases ont une forme simple dans le domaine spectral et forment des bases complètes en ce qui a trait à l'atténuation des lobes secondaires. Les travaux du premier chapitre constituent une synthèse du domaine du fenêtrage et établissement de liens entre de nombreuses fenêtres connues et couramment utilisées. Nous présentons ensuite un modèle radiométrique complet de la fonction d'appareil basé sur l'intensité énergétique et la luminance énergétique. Ce modèle est une synthèse des modèles géométriques de fonction d'appareil due au champ de vue et permet l'établissement de la relation intégrale entre le spectre vrai et le spectre apparent [DESBIENS et al., 2000, 2002]. Il nous conduit également à l'établissement de la relation intégrale entre l'interférogramme vrai et l'interférogramme apparent et à l'interprétation de la fonction d'appareil dans le domaine de l'interférogramme. Une des contributions majeures de cette thèse est la proposition des équations matricielles d'intégration de la fonction d'appareil en tenant compte rigoureusement de la limite de résolution dans les domaines spectral et interférentiel [DESBIENS et al., 2003b]. Nous proposons également,

à partir de ces équations matricielles, un algorithme rapide d'intégration de la fonction d'appareil basé sur la transformation de Fourier fractionnaire. Ces mêmes équations nous ont aussi permis d'apporter un raffinement à l'algorithme simplifié d'intégration de la fonction d'appareil par convolution. Enfin, par l'approfondissement du paradigme de fonction d'appareil complexe et l'interprétation des impacts différents sur les caractéristiques larges et étroites du spectre, nous avons établi des liens entre la fonction d'appareil complexe d'un interféromètre non compensé et la compensation de champ [DESBIENS et al., 2003a].

On peut constater dans la littérature que beaucoup d'efforts ont porté ces dernières années sur l'étude de la fonction d'appareil. Les travaux de cette thèse s'inscrivent ainsi dans un contexte très actuel en spectrométrie par transformation de Fourier, et sont réalisés à la suite des travaux de Jérôme GENEST [2001] et de François BOUFFARD [2002], en simultanéité avec ceux de Jean-Pierre BOUCHARD [2004].

Chapitre 1

Effet de convolution : l'apodisation

— Nouvelle approche pour la conception de fenêtres d'apodisation paramétriques optimales avec profil arbitraire de lobes secondaires.

La fonction sinus cardinal¹ (sinc) est la forme de raie instrumentale ou fonction d'appareil fondamentale de la spectrométrie par transformation de Fourier [CONNES, 1958]. Cette fonction reflète, pour ce domaine d'étude, la limitation de la mesure, soit la troncature de l'interférogramme. Il est généralement admis que la densité spectrale de puissance mesurée est limitée en nombre d'onde, que c'est une fonction à bande limitée. Il en découle que l'interférogramme de la source lumineuse, c'est-à-dire la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance, est une fonction à support infini (Paley-Wiener). La fonction sinc convolue alors l'estimation de la densité spectrale de puissance faite à partir de l'interférogramme. C'est en quelque sorte la fonction qui limite la résolution spectrale possible à partir d'une mesure de l'interférogramme pour un domaine fini de valeurs de différence de chemin optique. Elle est la conséquence, dans le domaine spectral, de notre connaissance incomplète de l'interférogramme.

Ce premier effet de convolution intrinsèque à la spectrométrie par transformation de Fourier ne peut pas être supprimé, ou déconvolué, de façon algorithmique sans connaissance a priori (ou par hypothèse) des caractéristiques spectrales de la source mesurée. De telles hypothèses pourraient être utilisées pour faire l'extrapolation de l'interférogramme hors de la portion mesurée et ainsi améliorer la résolution spectrale de la mesure

¹ La fonction sinus cardinal est définie comme suit :

$$\text{sinc}(x) \equiv \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

[[PAPOULIS, 1977](#)]. L'appel aux méthodes paramétriques permet de discerner certaines caractéristiques spectrales de la source qui autrement seraient confondues dû à la résolution limitée de la mesure. Cependant, nous ne nous intéresserons qu'aux algorithmes et méthodes qui ne supposent rien de la largeur de bande ou des caractéristiques spectrales de la source.

L'apodisation, ou fenêtrage, est certainement la plus répandue des méthodes générales d'estimation spectrale utilisées en spectrométrie par transformation de Fourier. C'est de loin le principal effet de convolution (dans le domaine spectral) qui peut être introduit lors du traitement algorithmique des données provenant d'un FTS. Nous proposons ici une nouvelle approche pour la conception de fenêtres d'apodisation paramétriques optimales dont le profil de lobes secondaires est arbitraire.

1.1 Introduction à l'apodisation

Les fenêtres, aussi connues sous le nom de fonctions d'apodisation, sont largement utilisées en analyse spectrale pour améliorer et optimiser l'identification des raies spectrales. Elles constituent un outil efficace pour distinguer les raies spectrales des lobes secondaires de leurs voisines, de même que pour atténuer l'impact de la troncation de l'interférogramme et des raies avoisinantes sur la précision de la fréquence centrale d'une raie. Les fenêtres sont également employées dans la conception de filtres à réponse impulsionnelle finie avec phase nulle (*FIR filters*) pour approcher les filtres à bande limitée idéaux. L'idée de l'apodisation est une idée relativement ancienne en traitement des signaux, et a fait l'objet de nombreux travaux visant à trouver la fenêtre ou l'algorithme *optimal* pour une application donnée [[TEMES et al., 1973](#); [NORTON et BEER, 1976](#); [HARRIS, 1978](#); [GEÇKINLI et YAVUZ, 1978](#); [NUTTAL, 1981](#); [ADAMS, 1991](#)]. Quoique le fenêtrage soit un sujet plutôt classique, on peut remarquer au cours de la dernière décennie un effort marqué pour paramétrer les fenêtres déjà connues ou pour proposer de nouvelles fenêtres paramétriques [[YANG et KE, 1992](#); [SZYPER, 1995](#); [GAUTAM et al., 1996](#); [SAEID et GAUTAM, 1997](#)]. Malgré tout, il n'existe jusqu'à maintenant que peu de fenêtres paramétriques qui soient suffisamment flexibles pour l'optimisation de l'analyse spectrale ou la réalisation de filtres, les plus connues étant les fenêtres Kaiser-Bessel et Dolph-Chebyshev. Plusieurs critères furent proposés pour comparer entre elles les fenêtres, mais le point fondamental dans le choix ou la conception d'une fonction d'apodisation demeure le compromis entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires.

L'apodisation peut être vue comme une fonction de pondération appliquée aux échantillons d'un signal, lors du calcul de la transformée de Fourier, dans le but de contrôler les caractéristiques de la densité spectrale de puissance. Les lobes secondaires visibles près des structures abruptes du spectre (*ringing*) sont dus à la limitation en temps de la mesure d'un signal à bande limitée (condition de Paley-Wiener). L'observation partielle d'un phénomène ne peut fournir toute l'information sur celui-ci sans faire appel à quelque hypothèse. Dans une certaine mesure, les lobes secondaires peuvent être contrôlés pour révéler les structures de faible amplitude à l'aide de l'apodisation. Les lobes secondaires peuvent être atténués, avec une décroissance asymptotique particulière, au prix d'un accroissement de la largeur du lobe principal diminuant notre capacité à distinguer deux raies contiguës. Les trois critères les plus simples pour évaluer les performances d'une fenêtre, lors du traitement de signaux déterministes, sont la largeur du lobe principal à mi-hauteur (FWHM), l'amplitude maximale des lobes secondaires par rapport au lobe principal et le taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires². La figure 1.1 permet la comparaison des fenêtres les plus connues selon ces critères, mettant en évidence le choix limité et l'apparent manque d'unité du fenêtrage. De nombreux autres critères sont exposés dans l'excellente revue faite par HARRIS [1978].

La nouvelle méthode proposée ici consiste en une simple transformation de variable effectuée dans le domaine spectral en vue de paramétrer toute fenêtre de la même manière que les fenêtres Kaiser-Bessel et Dolph-Chebyshev, rendant possible un compromis très flexible entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires [DESBIENS et TREMBLAY, 2001]. La dérivation de cette méthode est une généralisation de la fenêtre Kaiser-Bessel et de la fonction de van der Maas, cette dernière étant liée à la fenêtre Dolph-Chebyshev.

La section 1.2 démontrera de quelle manière la fenêtre Kaiser-Bessel et la fonction de van der Maas sont liées. La section 1.3 détaille la transformation spectrale exposée à la section 1.2, présente ses propriétés et montre de quelle façon elle peut être utilisée pour paramétrer toute fenêtre. Aux sections 1.4 et 1.5, de nouvelles bases de fonctions sont élaborées pour la construction de nouvelles fenêtres paramétriques. Ces bases sont choisies en vue de faciliter la conception de familles de fenêtres ayant une décroissance asymptotique spécifique des lobes secondaires. Finalement, des liens sont établis aux

²L'amplitude du lobe principal sera exprimée en décibels (dB), c'est-à-dire 10 fois le logarithme en base 10 de sa valeur absolue (nous considérons que la fenêtre s'applique directement à une densité spectrale de puissance). Le taux de décroissance des lobes secondaires sera quant à lui exprimé en dB par octave (dB/oct.) ce qui correspond à la variation d'amplitude en dB de l'enveloppe des lobes secondaires pour une augmentation de la fréquence par un facteur 2 .

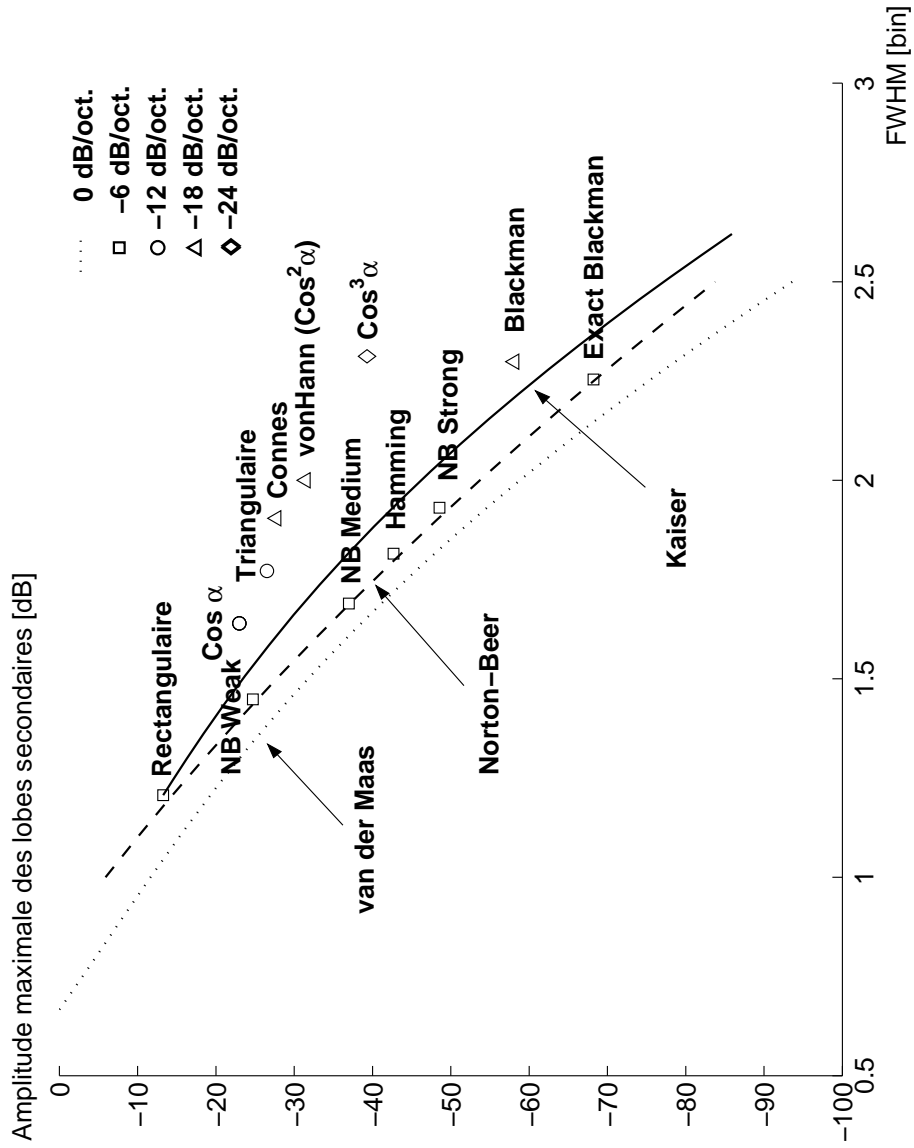


Figure 1.1 – Comparaison des fenêtres classiques selon la largeur à mi-hauteur et l’amplitude maximale des lobes secondaires. Les différents symboles indiquent le taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires.

sections 1.6 et 1.7 entre le présent travail et plusieurs fenêtres rencontrées dans la littérature.

Dans ce chapitre, le développement mathématique des fonctions d'apodisation est fait pour les domaines temporel et spectral continus. Les fenêtres discrètes sont obtenues en échantillonnant les fenêtres continues dans le domaine spectral, comme présenté à la section 1.3, sauf pour la fonction van der Maas dont la forme discrète est la fenêtre Dolph-Chebyshev. En pratique, les propriétés des fenêtres discrétisées seront les mêmes que celles des fenêtres continues pour un nombre modéré d'échantillons.

1.2 Généralisation des fenêtres Kaiser-Bessel et van der Maas

En premier lieu, nous allons revoir la dérivation de la fonction de van der Maas pour bien montrer comment elle peut être reliée, de façon très simple, à la fenêtre de Kaiser. À la section suivante, cette relation sera étendue à toutes les fenêtres afin de les paramétrer.

La fenêtre optimale limitée en temps ayant les lobes secondaires les plus restreints, selon le critère de Chebyshev (minimax), est la fonction de van der Maas [BARCILON et TEMES, 1972]. Parmi les fonctions limitées en temps, c'est celle dont l'amplitude des lobes secondaires est la plus faible possible pour une largeur de lobe principal donnée, résultant en des lobes secondaires d'égales amplitudes. Cette fonction, qui n'est pas de carré intégrable, est la solution du problème d'une antenne conçue comme la limite d'une infinité de sources radiatives discrètes alimentées selon la distribution de courant optimale obtenue par DOLPH [1946].

1.2.1 La fonction de van der Maas

Définissons tout d'abord le temps normalisé, $x = t/T$, les fréquences (ou pulsations) normalisées, $\xi = \omega/\Omega$, et le paramètre sans dimension $c = \Omega T$, connu sous le nom « *time-band product* ». La fonction sera définie en temps sur l'intervalle $[-T, T]$, et $|\omega| \leq \Omega$ sera la bande de fréquence dans laquelle se trouve la majeure partie du lobe principal. Le problème posé par VAN DER MAAS [1954] consiste à trouver une fonction réelle $H(\xi)$ qui soit la transformée (définie par l'équation (1.2)) de la fonction limitée en temps $h(x)$ telle que $H(0)$ soit maximal, avec une amplitude des lobes secondaires contrainte à $|H(\xi)| \leq \epsilon$ pour $|\xi| \geq 1$ (voir figure 1.2). Puisque cette inégalité est difficile à manipuler mathématiquement, nous travaillerons plutôt dans le domaine $u = \pm\sqrt{\xi^2 - 1}$ tel que

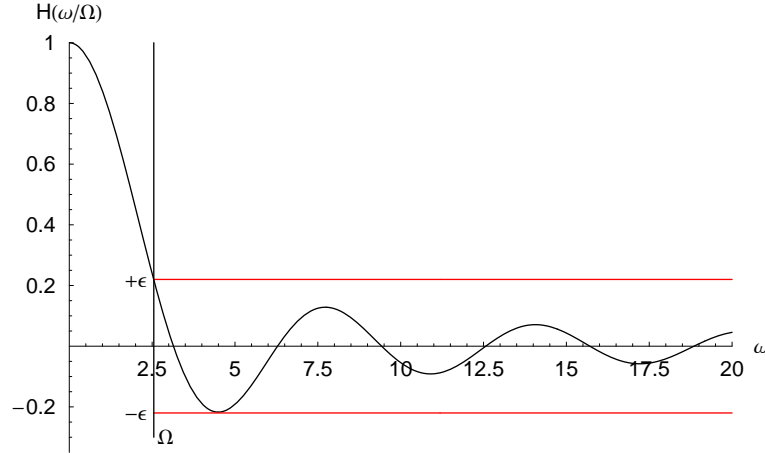


Figure 1.2 – Illustration d’une fenêtre avec des lobes secondaires limités à ϵ , tracée en fonction de ω . Le paramètre de bande Ω correspond à $|\xi| = 1$.

$\text{sgn}(u) = \text{sgn}(\xi)$, où les fréquences $\xi \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ont une correspondance sur tout l’axe réel u . Ainsi, le domaine u sera appelé le domaine des lobes secondaires puisqu’il représente la partie de l’axe ξ où ces lobes sont contraints. Pour résoudre le problème posé, nous utiliserons le théorème suivant [BARCILON et TEMES, 1972] :

Théorème (1). *Si les deux fonctions $H(\xi)$ et $G(u)$:*

$$G(u) = \frac{c}{\pi} \int_0^1 \cos(cxu)g(x) dx, \quad (1.1)$$

$$H(\xi) = \frac{c}{\pi} \int_0^1 \cos(cx\xi)h(x) dx, \quad (1.2)$$

sont reliées fonctionnellement par $H(\xi) = G(u)$, où $u = \sqrt{\xi^2 - 1}$, alors

$$h(x) = g(x) + c \int_{|x|}^1 s \frac{I_1\left(c\sqrt{s^2 - x^2}\right)}{\sqrt{s^2 - x^2}} g(s) ds, \quad (1.3)$$

où $I_1(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée du premier ordre.

À partir du théorème (1), le problème d’optimisation peut être exprimé comme suit. Quelle est la fonction réelle $G(u)$ telle que $G(i)$ soit maximal³, avec la contrainte que $G(u)$ soit de la forme présentée à l’équation (1.1) et que $|G(u)| \leq \epsilon$ pour $-\infty < u < \infty$? La solution connue à ce problème est $G(u) = \epsilon \cos(cu + b)$ [BARCILON et TEMES, 1972], où b est une constante réelle que nous posons nulle pour nous assurer que $g(x)$ soit une

³ i est le nombre imaginaire.

fonction réelle. La forme analytique de la fonction de van der Maas est ensuite calculée avec l'équation (1.3) :

$$H(\xi) = \epsilon \cos \left(c\sqrt{\xi^2 - 1} \right), \quad (1.4)$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon\pi}{c} [\delta(x-1) + \delta(x+1)] + \epsilon\pi \frac{I_1 \left(c\sqrt{1-x^2} \right)}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Lorsque le lobe principal est normalisé à $H(0) = 1$, nous obtenons $\epsilon = 1/\cosh c$ comme limite des lobes secondaires.

1.2.2 La relation Kaiser-Bessel – van der Maas

Si nous considérons maintenant ϵ comme une fonction $\epsilon \equiv \epsilon(u)$ qui contraint les lobes secondaires, nous pouvons généraliser la méthode utilisée précédemment lors de la dérivation de la fonction de van der Maas⁴. Prenons pour exemple la limite $\epsilon(u) = 1/u$. La solution précédente devient $G(u) = \epsilon(u) \cos(cu + b) = \sin(cu)/u$, où $b = -\pi/2$ est posé pour assurer que la fenêtre soit réelle. Nous obtenons alors la fenêtre suivante :

$$H(\xi) = \frac{\sin \left(c\sqrt{\xi^2 - 1} \right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (1.6)$$

$$h(x) = \begin{cases} \pi I_0 \left(c\sqrt{1-x^2} \right), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

qui est la fenêtre bien connue Kaiser-Bessel [KUO et KAISER, 1966]. Il est donc extrêmement intéressant de voir qu'il existe une relation très étroite entre la fonction de van der Maas et la fenêtre Kaiser-Bessel. Elles sont toutes deux solutions au même problème posé avec des conditions aux limites différentes.

1.3 Une transformation spectrale

Les fenêtres van der Maas et Kaiser-Bessel sont construites sur les fonctions $\cos(cu)$ et $\sin(cu)/u$ respectivement, auxquelles est appliquée la transformation suivante :

$$u = \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad (1.8)$$

⁴Cette méthode généralisée doit être employée avec précaution pour que la solution $G(u)$ ne contienne pas de pôles qui ne seraient pas compensés par les zéros du cosinus. En effet, toute fonction limitée en temps doit pouvoir s'exprimer par un produit infini de zéros dans le domaine spectral (voir section 1.3.1).

qui fut introduite par le théorème (1). Aussi, nous étudierons plus en détail les propriétés de cette transformation spectrale lorsqu'elle est appliquée aux fonctions limitées en temps. Nous verrons que le comportement paramétrique des fenêtres précédentes découle directement de cette transformation, et que celle-ci peut être appliquée aux autres fonctions d'apodisation, incluant les fenêtres couramment utilisées, avec des résultats similaires.

Cette transformation spectrale va nous permettre de transformer une fenêtre à partir de l'axe des fréquences normalisées u vers l'axe des fréquences normalisées ξ , et de paramétrer cette nouvelle fonction d'apodisation en retournant vers les fréquences non normalisées ω . Le lecteur doit noter que cette opération n'est pas un processus d'optimisation en soi. Cependant, l'utilisateur pourra accomplir une certaine optimisation en choisissant la fenêtre ayant le meilleur profil de lobes secondaires, dépendamment de l'application, en utilisant la transformation spectrale et en ajustant le paramètre de la fenêtre en fonction de ses besoins.

Mais tout d'abord, présentons les propriétés de cette transformation spectrale appliquée aux fonctions à bande limitée. Nous pourrions de cette façon établir clairement les raisons pour lesquelles cette transformation nous permettra de paramétrer toute fonction d'apodisation. Nous expliquerons ensuite comment appliquer cette transformation pour paramétrer une fenêtre quelconque et, enfin, nous exposerons la forme discrète des fenêtres paramétriques.

1.3.1 Propriétés

Les propriétés des fonctions d'apodisation sont bien décrites par leurs racines (leurs zéros) dans le domaine spectral. La transformation spectrale (1.8) affectera d'une manière générale la position de ces racines et l'amplitude du lobe principal. Pour démontrer ces propriétés, posons d'abord une fenêtre $w(t)$ typique.

Le théorème de factorisation d'Hadamard nous permet d'affirmer que la transformée de Fourier $W(\omega)$ de toute fonction $w(t)$ limitée en temps possède un nombre infini de zéros [TEMES et al., 1973]. Pour une fonction $w(t)$ réelle et paire telle qu'une fonction d'apodisation, le théorème d'Hadamard prend la forme suivante :

$$W(\omega) = \alpha \omega^{2q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{z_n^2} \right), \quad (1.9)$$

où $\{z_n\}$ sont les zéros de la fonction autres que $z_n = 0$, α est une constante réelle et q est un nombre entier que l'on pose nul pour des fenêtres, et ce pour des raisons évidentes.

Lorsque nous normalisons cette fenêtre et posons $g(x) = w(xT)$ dans l'équation (1.1), $G(u)$ peut s'exprimer comme :

$$G(u) = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2 u^2}{z_n^2}\right), \quad (1.10)$$

où $\{u_n = z_n/c\}$ sont les zéros autres que $u_n = 0$ et q est posé à zéro. En utilisant la transformation spectrale (1.8) avec l'équation (1.10), nous obtenons $H(\xi)$ [rappelons que $G(u)$ et $H(\xi)$ sont liés, dans le théorème (1), par l'équation (1.8)] :

$$H(\xi) = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n^2} (u_n^2 + 1 - \xi^2), \quad (1.11)$$

$$H(\xi) = \alpha' \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_n^2}\right), \quad (1.12)$$

où $\{\xi_n = \sqrt{u_n^2 + 1}\}$ sont les nouveaux zéros et α' est une autre constante choisie pour conserver l'égalité. Nous pouvons voir que la transformation spectrale effectuée seulement un déplacement des racines de $G(u)$ et que ce déplacement est plus important pour les u_n les plus petits. Nous devons souligner que le maximum $H(0)$ est amplifié par un facteur :

$$\frac{H(0)}{G(0)} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c^2}{z_n^2}\right), \quad (1.13)$$

tandis que les autres extremums de $H(\xi)$ sont simplement déplacés par rapport à ceux de $G(u)$, sans aucun changement d'amplitude. Ceci est une caractéristique importante qui illustre bien que la plage dynamique entre le lobe principal [$H(0)$] et les lobes secondaires est une fonction du paramètre c , comme pour la fenêtre Kaiser-Bessel. De plus, l'amplitude relative des différents lobes secondaires (profil) demeure constante à mesure que c varie. Cette observation est facile à comprendre puisque la transformation de $G(u)$ vers $H(\xi)$ est simplement une mise en correspondance (*mapping*) de l'axe u et de l'axe ξ pour $\xi \geq 1$. Ainsi, le profil de lobes secondaires n'est pas affecté par la transformation.

Finalement, puisque $\xi_n \rightarrow u_n$ pour $u_n \gg 1$, nous pouvons montrer que la densité de zéros D^+ demeure la même après la transformation :

$$D^+ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r} \leq \frac{c}{\pi}, \quad (1.14)$$

où $m(r)$ est le nombre de zéros sur $0 \leq u \leq r$.

Ces propriétés sont très révélatrices de l'intérêt que possède cette transformation spectrale [équation (1.8)]. Premièrement, cette transformation conserve la symétrie de la

fenêtre puisque seulement des puissances paires de u et ξ sont impliquées. Deuxièmement, l'ordre des zéros⁵ n'est pas modifié par la transformation puisque seules les puissances 0 et 2 de u et ξ sont impliquées. Finalement, la limitation en temps sur l'intervalle $[-T, T]$ demeure inchangée par la transformation puisque la densité de zéros n'est pas modifiée (théorème de Levinson-Cartwright, voir TEMES et al. [1973]).

1.3.2 Paramétrage d'une fenêtre

Pourquoi cette transformation serait-elle utile pour le fenêtrage ? Afin d'illustrer de quelle façon une fenêtre est paramétrée par cette transformation, nous nous pencherons sur le domaine des fréquences non normalisées ω . Pour une limitation temporelle de paramètre T , une fenêtre $w(t)$ possède la fonction $W(\omega)$ comme transformée de Fourier, laquelle est reliée à l'équation (1.1) par :

$$W(\omega) = \frac{1}{\Omega} G\left(\frac{\omega}{\Omega}\right), \quad (1.15)$$

où, comme nous l'avons mentionné précédemment, $c = \Omega T$. Par l'application de la transformation spectrale, $W(\omega)$ devient $W'(\omega)$, cette dernière pouvant être reliée à l'équation (1.2) comme suit :

$$W'(\omega) = \frac{1}{\Omega} H\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = \frac{1}{\Omega} G\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1}\right). \quad (1.16)$$

Nous pouvons voir par comparaison des équations (1.15) et (1.16) que, dans le domaine non normalisé, nous avons maintenant paramétré la fenêtre $W(\omega)$ en une fenêtre $W'(\omega)$ qui dépend du paramètre Ω :

$$\boxed{W'(\omega) = W\left(\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\right)}. \quad (1.17)$$

Nous devons insister sur le fait que l'équation (1.17) est l'expression qui doit être utilisée directement lors de l'application de la transformation spectrale.

La nouvelle fenêtre $W'(\omega)$ possède les propriétés décrites à la section 1.3.1, les plus intéressantes étant ici que la hauteur relative du lobe principal $W'(0)$ par rapport aux lobes secondaires augmente avec c [voir l'équation (1.13)], que la largeur du lobe principal augmente avec c dû au déplacement du premier zéro vers les fréquences plus élevées (voir figure 1.3), et que le profil des lobes secondaires est conservé. Ces propriétés décrivent exactement le comportement bien connu des fenêtres Kaiser-Bessel et van der

⁵On fait référence ici au nombre de fois (multiplicité) où une racine donnée annule la fonction.

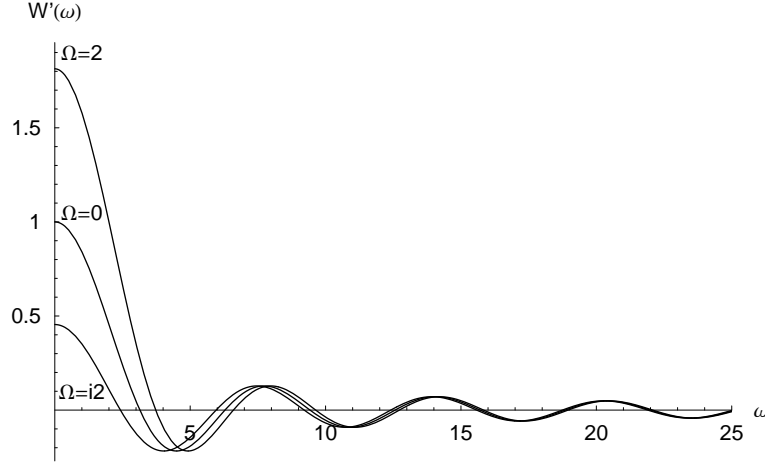


Figure 1.3 – Exemple d’une fenêtre sinc paramétrique $W'(\omega)$ pour $\Omega = 0, 2$ et $2i$. Nous pouvons voir le déplacement important des premiers zéros et la variation d’amplitude de $W'(0)$.

Maas, c’est-à-dire le compromis entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires.

Notons que Ω peut être un nombre imaginaire pur au lieu d’un nombre réel. Ceci est équivalent à considérer que $c = i\Omega T$ et $u = i\sqrt{\xi^2 + 1}$ (rappelons que les fréquences normalisées sont définies par $\xi = \omega/\Omega$). Toutes les propriétés décrites précédemment demeurent valides, excepté que l’augmentation du paramètre $|c|$ déplacera les zéros vers les fréquences inférieures et que la hauteur relative du lobe principal décroîtra par rapport aux lobes secondaires (voir figure 1.3). Il sera utile de considérer un tel choix lorsque la fenêtre à paramétrer possédera des lobes secondaires de très faible amplitude mais un lobe principal plus large.

En résumé, l’idée consiste simplement à prendre une fenêtre $W(\omega)$ et à appliquer la transformation (1.17) pour obtenir une fenêtre paramétrique $W'(\omega)$. Pour $T = 1$, nous aurons $\Omega = c$. Par exemple, prenons la fenêtre Blackman exacte ($T = 1$) :

$$W(\omega) = a_0 \frac{\sin \omega}{\omega} - a_1 \frac{\omega \sin \omega}{\omega^2 - \pi^2} + a_2 \frac{\omega \sin \omega}{\omega^2 - 4\pi^2}, \quad (1.18)$$

où $a_0 = 7938/18608$, $a_1 = 9240/18608$ et $a_2 = 1430/18608$. Après paramétrage, nous obtenons :

$$W'(\omega) = a_0 \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - c^2}}{\sqrt{\omega^2 - c^2}} - a_1 \frac{\sqrt{\omega^2 - c^2} \sin \sqrt{\omega^2 - c^2}}{\omega^2 - c^2 - \pi^2} + a_2 \frac{\sqrt{\omega^2 - c^2} \sin \sqrt{\omega^2 - c^2}}{\omega^2 - c^2 - 4\pi^2}. \quad (1.19)$$

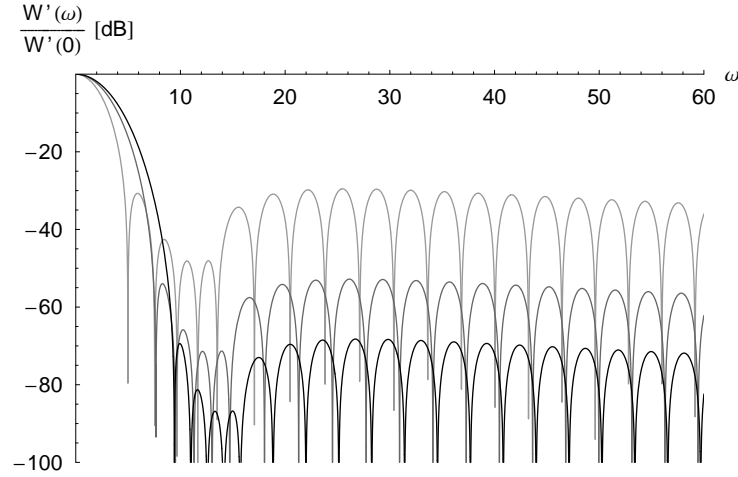


Figure 1.4 – La fenêtre Blackman paramétrique pour les valeurs $c = 0$ (courbe noire), $c = 5.5i$ et $c = 8i$ (courbes grises).

La figure 1.4 montre la fenêtre Blackman paramétrique pour différentes valeurs de c .

1.3.3 Discrétisation des fenêtres

L'avantage relié à la conception de fenêtres analytiques plutôt que discrètes réside dans la profonde compréhension que l'on tire du comportement général de ces fonctions. La méthode de paramétrage présentée ici est aussi un argument de taille pour préférer les fenêtres analytiques. Quoi qu'il en soit, nous avons généralement à travailler, pour des applications pratiques, avec la forme discrète des fenêtres. La plupart des fenêtres largement connues furent d'abord élaborées dans le domaine temporel continu. Ces fenêtres furent ensuite échantillonnées uniformément dans le domaine du temps pour obtenir leur représentation discrète. Cependant, puisque que c'est la forme spectrale des fenêtres qui est importante, et non leur représentation temporelle, nous suggérons ici d'échantillonner la forme spectrale des fenêtres :

$$W[n] \equiv W'(n\pi), \quad n = -\mathcal{N}, \dots, 0, \dots, \mathcal{N} - 1. \quad (1.20)$$

Avec une discrétisation dans le domaine spectral, nous réduisons le recouvrement dû à l'échantillonnage en comparaison avec la discrétisation dans le domaine temporel. La figure 1.5 illustre la fenêtre Kaiser échantillonnée dans le domaine temporel (forme classique) et dans le domaine spectral pour un très petit nombre d'échantillons afin de mettre en évidence les différences. Nous avons repris les mêmes fenêtres aux figures 1.6 et 1.7 avec un nombre modéré d'échantillons. Nous avons préféré illustrer le processus de

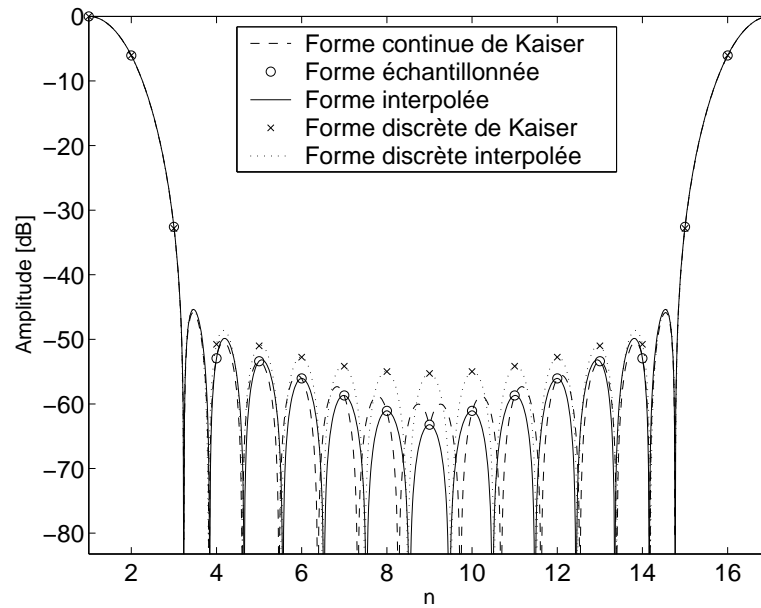


Figure 1.5 – La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 8$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.

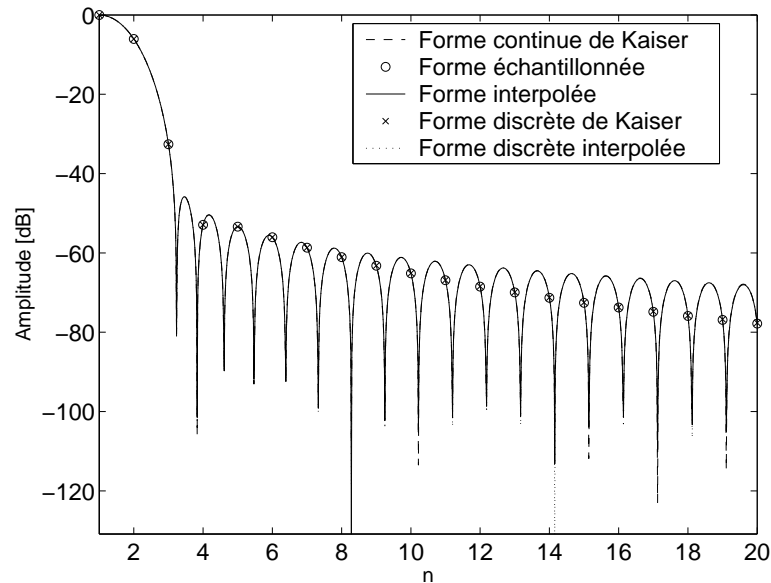


Figure 1.6 – La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 128$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.

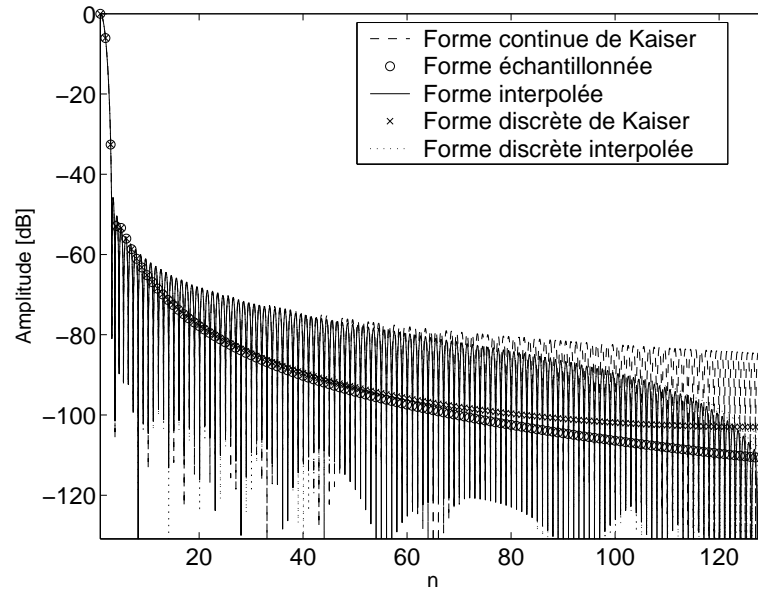


Figure 1.7 – La forme continue de la fenêtre Kaiser est présentée avec la transformée de Fourier de sa forme temporelle discrète (\times) et sa forme discrétisée dans le domaine spectral (cercles) pour $\mathcal{N} = 128$. Les formes discrètes sont interpolées avec la fonction sinc pour illustrer les caractéristiques des fenêtres.

discrétisation avec la fenêtre Kaiser puisqu'il nous était possible de comparer le résultat de la discrétisation spectrale avec la discrétisation temporelle courante.

Il n'y a pas de méthode rigoureuse pour déterminer le nombre minimal d'échantillons ($2\mathcal{N}$) qui assure un bon échantillonnage, mais on peut trouver quelques règles empiriques dans certains ouvrages de traitement des signaux numériques [AMBARDAR, 1995]. De façon pratique, pour une application qui nécessite un nombre modéré d'échantillons, les versions analytiques et échantillonnées des fenêtres sont pour ainsi dire identiques.

1.4 L'élaboration de fenêtres

Maintenant que nous sommes en mesure de contrôler la hauteur relative du lobe principal face aux lobes secondaires pour toute fenêtre, nous allons considérer de nouvelles méthodes pour construire le profil de ces fenêtres paramétriques. Nous allons travailler dans le domaine spectral plutôt que dans le domaine temporel pour concevoir un profil de lobes secondaires spécifique, ce qui est une meilleure façon d'aborder la conception de fenêtres [ADAMS, 1991].

Les éléments de base pour la construction de nos fenêtres seront les éléments de

l'ensemble des cosinus de fréquence $n\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, puisqu'ils constituent la base complète de la transformation de Fourier en cosinus pour les signaux limités en temps [PAPOULIS, 1977] et qu'ils peuvent donc représenter toute fenêtre :

$$g_n(x) = \begin{cases} \cos n\pi x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.21)$$

$$G_n(u) = \frac{c}{2} \left[\frac{\sin(cu + n\pi)}{cu + n\pi} + \frac{\sin(cu - n\pi)}{cu - n\pi} \right] = (-1)^n \frac{u \sin cu}{u^2 - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}. \quad (1.22)$$

L'élément $G_n(u)$ est simplement l'expression compacte d'une somme de deux fonctions sinc déplacées à $\pm n\pi/c$. Avec cette base de solutions, nous déterminerons le profil de lobes secondaires d'une fenêtre dans le domaine des lobes secondaires (u). Nous utiliserons la transformation spectrale pour obtenir une fonction paramétrée $H(\xi)$ ou $W'(\omega)$. La fenêtre sera construite directement dans le domaine spectral, sans égard à la plage dynamique entre le lobe principal et les lobes secondaires :

$$G(u) = \sum_n a_n G_n(u). \quad (1.23)$$

Premièrement, nous devons déterminer les coefficients a_n de $G(u)$ et leur nombre, en nous concentrant sur la hauteur relative des lobes secondaires entre eux. Ensuite, nous paramétrons la fenêtre avec l'équation (1.16). Nous verrons prochainement comment appliquer cette procédure à la famille des fenêtres ayant un certain nombre de lobes secondaires égaux.

Notons cependant qu'il ne nous a pas été possible de calculer analytiquement la transformée inverse de la base de solutions de ξ vers x sous une forme close. Aussi, il sera nécessaire de considérer une série de la forme suivante :

$$h_n(x) = H_n(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H_n(k\pi/c) \cos(k\pi x), \quad (1.24)$$

où $H_n(\xi) = G_n\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right)$. Cette forme est intéressante parce que

$$H_n(k\pi/c) \approx 0, \quad \text{pour } k \gg n, \quad (1.25)$$

puisque les coefficients sont évalués très près des zéros de $G_n(u)$. Il suffira donc de calculer un nombre relativement faible de termes dans l'équation (1.24) pour implémenter la fenêtre. De façon pratique, une transformation de Fourier numérique sera employée.

1.4.1 Fenêtres de N lobes secondaires égaux

Comme exemple d'application de la base de solutions proposée, nous allons construire une famille de fenêtres intermédiaires entre la fonction van der Maas et la fenêtre de Kaiser, en considérant le compromis entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires. L'approche utilisée est simplement l'approximation de la fonction van der Maas dans le domaine des lobes secondaires u en égalisant les N premiers lobes secondaires à l'aide de $N + 1$ termes. Donc, nous cherchons une fonction de la forme

$$G(u) = a_0 G_0(u) + \sum_{n=1}^N a_n G_n(u), \quad (1.26)$$

où les N premiers lobes secondaires sont d'amplitudes égales, pour une valeur donnée du paramètre c . Les coefficients a_n sont déterminés par optimisation numérique⁶. La figure 1.8 présente la construction de $G(u)$ dans le domaine des lobes secondaires pour $N = 3$ et $N = 6$ lobes secondaires égaux⁷. Les fenêtres correspondantes $w'(t)$ sont présentées pour le produit temps-fréquence $c = 3$. Dans le domaine spectral, les fenêtres $W'(\omega)$ sont présentées pour $c = 2, 3, 4$ et $T = 1$. Les fenêtres conservent leur profil de lobes secondaires alors que le produit temps-fréquence est modifié.

Lorsque le paramètre c tend vers zéro, les premiers lobes secondaires sont aussi élevés que le lobe principal, comme c'est le cas pour la fonction de van der Maas. Si nous comparons la largeur à mi-hauteur du lobe principal de ces fenêtres intermédiaires avec l'amplitude maximale des lobes secondaires, tel que montré plus loin à la figure 1.10 pour $N = 3$, nous pouvons voir que les performances des familles de fenêtres décrites ici sont situées entre celles de la fenêtre Kaiser et de la fenêtre Dolph-Chebyshev. Mentionnons que les familles de fenêtres proposées peuvent produire des fenêtres paramétriques situées sous la limite empirique de NORTON et BEER [1976]; elles ont donc une largeur de lobe principal plus petite pour un même niveau de lobes secondaires. Certains algorithmes résultant en des fenêtres similaires furent déjà proposés précédemment, mais celles-ci ne conduisent pas à des solutions paramétriques [TEMES et al., 1973; ADAMS, 1991].

⁶Plusieurs techniques peuvent être employées pour calculer ces coefficients [TEMES et al., 1973; ADAMS, 1991]. La principale difficulté consiste à déterminer la position des lobes secondaires, qui se déplacent au cours de l'optimisation dû à l'interférence des fonctions $G_n(u)$.

⁷Les coefficients pour la fenêtre $N = 3$ sont disponibles au tableau 1.2 avec une normalisation que nous aborderons plus loin.

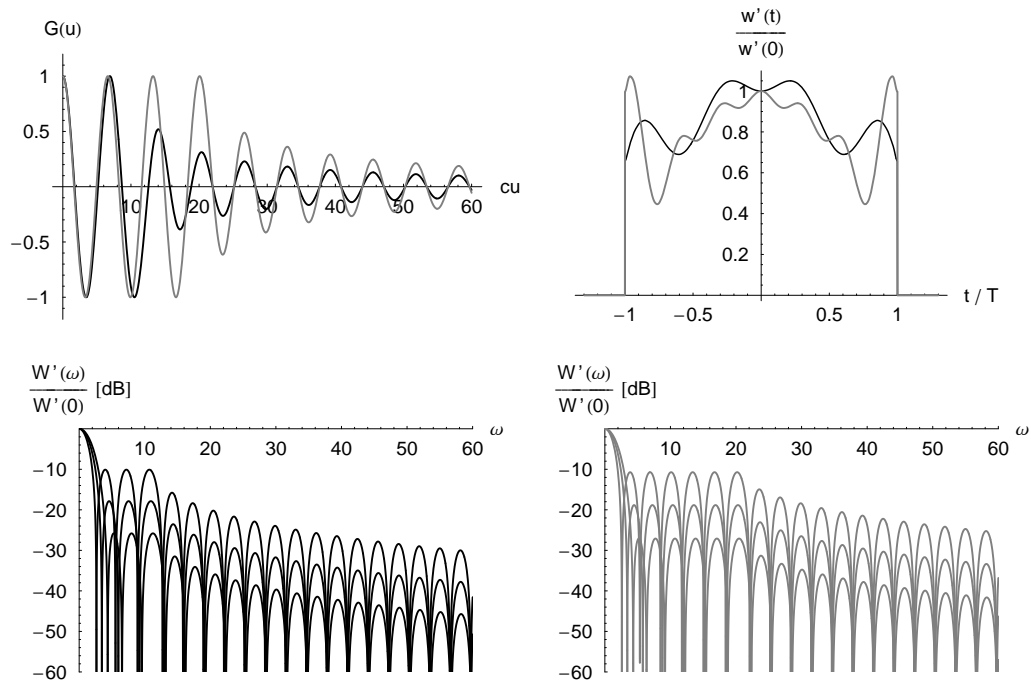


Figure 1.8 – Construction de $G(u)$ dans le domaine des lobes secondaires (avec $c = 1$) pour $N = 3$ lobes secondaires égaux (courbes noires) et $N = 6$ lobes secondaires égaux (courbes grises). Les fenêtres correspondantes $w'(t)$ sont présentées à droite pour le produit temps-fréquence $c = 3$. Dans le domaine spectral, les fenêtres $W'(\omega)$ sont présentées pour $c = 2, 3, 4$ et $T = 1$.

1.5 Contrôle de la décroissance asymptotique

Le taux auquel l'amplitude des lobes secondaires décroît avec la distance par rapport au lobe principal doit être considéré comme un critère important pour la classification des fenêtres⁸. Un taux de décroissance des lobes secondaires plus élevé augmente la contrainte sur le compromis entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires, élargissant le lobe principal pour une hauteur des lobes secondaires similaire. Ce taux est directement lié à l'ordre de la discontinuité de la fonction d'apodisation $h(x)$ aux points $x = \pm 1$, pourvu qu'il n'y ait pas d'autre discontinuité d'ordre inférieur ailleurs dans la fenêtre. Par exemple, les fenêtres Kaiser et rectangulaire ont une discontinuité en échelon (ordre 0) et une décroissance des lobes secondaires de -6 dB/oct., la fenêtre Bartlett (ou triangle) a une discontinuité de premier ordre (première dérivée) résultant en une décroissance de -12 dB/oct. et la fenêtre van der Maas a une discontinuité d'ordre -1 (delta de Dirac), donc 0 dB/oct. d'atténuation des lobes secondaires.

Nous proposons une base de fonctions $\{g_n^J(x)\}$ pour représenter toute fonction d'apodisation d'ordre $J \geq 1$, dont le taux de décroissance des lobes secondaires est de $6(J+1)$ dB/oct. [$G(u) \sim \mathcal{O}(1/u^{J+1})$]. Pour construire les éléments de ces bases de fonction, nous prendrons comme critère le nombre minimal de termes K de cosinus de fréquences successives [tels qu'à l'équation (1.21)] requis pour avoir une discontinuité d'ordre J . Puisque chaque élément de l'ensemble des cosinus $\{\cos(n\pi x)\}$ a implicitement une discontinuité d'ordre pair à $x = \pm 1$, nous utiliserons l'ensemble des cosinus de fréquences demi-entières $\{\cos[(n+1/2)\pi x]\}$ pour les discontinuités d'ordre impair :

$$g_n^J(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{K-1} b_k \cos[(n+k)\pi x], & J \text{ pair,} \\ \sum_{k=0}^{K-1} b_k \cos[(n+k+1/2)\pi x], & J \text{ impair,} \end{cases} \quad (1.27)$$

où $K = \lfloor J/2 + 1 \rfloor$ est la partie entière de $J/2 + 1$. Les coefficients relatifs

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1/b_0 & b_2/b_0 & \dots & b_{K-1}/b_0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

⁸Il existe plusieurs critères pertinents pouvant être utilisés pour choisir une fenêtre. Par exemple, l'énergie contenue dans les lobes secondaires peut être déterminante pour les applications de filtrage. Le choix du taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires comme critère pour la classification des fenêtres permet une comparaison directe de celles-ci pour des applications telles que l'estimation spectrale qui requièrent une bonne connaissance de ce critère. La contrainte introduite par ce dernier critère est telle que la comparaison de fenêtres ayant des taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires différents n'ait pas vraiment de signification (voir figure 1.1).

qui satisfont la condition de discontinuité d'ordre J à $x = \pm 1$ sont calculés à partir d'un ensemble de $K - 1$ équations. Cet ensemble d'équations est obtenu en posant les dérivées suivantes à zéro pour $k = 0, 1, 2, \dots, K - 2$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^{2k} (g_n^J(x))}{dx^{2k}} \right|_{x=\pm 1} &= 0, \quad J \text{ pair}, \\ \left. \frac{d^{2k+1} (g_n^J(x))}{dx^{2k+1}} \right|_{x=\pm 1} &= 0, \quad J \text{ impair}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Toutes les dérivées non posées dans l'équation (1.29), jusqu'à la dérivée d'ordre $K - 2$ plus un, seront également nulles à $x = \pm 1$ dû à la forme de $g_n^J(x)$. L'ensemble d'équations peut être exprimé par une matrice M de dimensions $(K - 1) \times (K - 1)$ telle que

$$M \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (1.30)$$

où $M = M_e$ pour J pair :

$$M_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{(K-2)} \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} & -\frac{(n+2)^2}{n^2} & \dots & (-1)^{(K-2)} \frac{(n+K-1)^2}{n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(n+1)^{2(K-2)}}{n^{2(K-2)}} & -\frac{(n+2)^{2(K-2)}}{n^{2(K-2)}} & \dots & (-1)^{(K-2)} \frac{(n+K-1)^{2(K-2)}}{n^{2(K-2)}} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

et $M = M_o$ pour J impair :

$$M_o = \begin{bmatrix} \frac{(n+\frac{3}{2})}{(n+\frac{1}{2})} & -\frac{(n+\frac{5}{2})}{(n+\frac{1}{2})} & \dots & (-1)^{(K-2)} \frac{(n+K-\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})} \\ \frac{(n+\frac{3}{2})^3}{(n+\frac{1}{2})^3} & -\frac{(n+\frac{5}{2})^3}{(n+\frac{1}{2})^3} & \dots & (-1)^{(K-2)} \frac{(n+K-\frac{1}{2})^3}{(n+\frac{1}{2})^3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(n+\frac{3}{2})^{2K-3}}{(n+\frac{1}{2})^{2K-3}} & -\frac{(n+\frac{5}{2})^{2K-3}}{(n+\frac{1}{2})^{2K-3}} & \dots & (-1)^{(K-2)} \frac{(n+K-\frac{1}{2})^{2K-3}}{(n+\frac{1}{2})^{2K-3}} \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Sous forme compacte, les éléments de ligne i et de colonne j des matrices sont donnés

par :

$$\begin{aligned} M_{e_{ij}} &= (-1)^{j-1} \left(\frac{n+j}{n} \right)^{2i-2}, \\ M_{o_{ij}} &= (-1)^{j-1} \left(\frac{n+j+1/2}{n+1/2} \right)^{2i-1}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $i, j = 1, 2, 3, \dots, K-1$. Le vecteur de $K-1$ valeurs unitaires provient des termes reliés à $k = 0$ dans l'équation (1.27). Les coefficients \mathbf{B} sont ensuite calculés par inversion du système d'équations : $\mathbf{B}^\top = \mathbf{M}^{-1} \cdot \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right]^\top$. Le tableau 1.1 contient $g_n^J(x)$ pour les six premières valeurs de J , avec b_0 choisi pour que $g_n^J(0) = 1$.

Nous pouvons déterminer à partir du tableau 1.1 que pour $n = 0$, $g_0^J(x)$ correspond à la fenêtre cosinus : $g_0^J(x) = [\cos(\pi x/2)]^J$ pour $|x| \leq 1$, et donc que $g_0^2(x)$ est la fenêtre de Hanning (von Hann) [HARRIS, 1978].

Après transformation de Fourier, les bases peuvent être exprimées en une forme compacte et très intéressante, un sinus ou un cosinus duquel $2K$ zéros sont compensés par des pôles :

$$G_n^J(u) = \begin{cases} \frac{b'_n u \sin cu}{\prod_{k=0}^{K-1} \left[u^2 - (n+k)^2 \frac{\pi^2}{c^2} \right]}, & J \text{ pair,} \\ \frac{b'_n \cos cu}{\prod_{k=0}^{K-1} \left[u^2 - (n+k+1/2)^2 \frac{\pi^2}{c^2} \right]}, & J \text{ impair.} \end{cases} \quad (1.34)$$

Cette formulation est directement reliée à l'équation (1.10) : un cosinus ou un sinus peut être décrit comme un produit infini de zéros, et le retrait de K paires de zéros successifs contrôle le taux de décroissance des lobes secondaires et crée un lobe principal centré approximativement sur la valeur moyenne des K paires de zéros successifs. Notons que chaque zéro est apparié avec celui à $\pm u_n$. Des fonctions d'apodisation paramétriques avec un taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires de $6(J+1)$ dB/oct. peuvent être construites à partir de ces bases par une somme pondérée de $G_n^J(u)$ ou $g_n^J(x)$. Les coefficients b'_n dépendent de la normalisation de $g_n^J(x)$. Avec b_0 choisi tel que $g_n^J(0) = 1$, la normalisation est donnée par :

$$b'_n = \begin{cases} (-1)^{n+K-1} (K-1)! \left(\frac{\pi}{c} \right)^J \left(n + \frac{1}{2} \right)_{K-1}, & J \text{ pair,} \\ (-1)^{n+K} (K-1)! \left(\frac{\pi}{c} \right)^J \left(n + \frac{1}{2} \right)_K, & J \text{ impair,} \end{cases} \quad (1.35)$$

Tableau 1.1 – Les bases $\{g_n^j(x)\}$, de taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires de $6(J+1)$ dB/oct., pour les six premières valeurs de J , avec b_0 choisi pour que $g_n^j(0) = 1$. K est le nombre de termes en cosinus nécessaires pour construire ces bases.

J	K	$g_n^j(x)$
0	1	$\cos(n\pi x)$
2	2	$\frac{1}{2} \cos(n\pi x) + \frac{1}{2} \cos[(n+1)\pi x]$
4	3	$\frac{2n+3}{8(n+1)} \cos(n\pi x) + \frac{1}{2} \cos[(n+1)\pi x] + \frac{2n+1}{8(n+1)} \cos[(n+2)\pi x]$
1	1	$\cos[(n + \frac{1}{2})\pi x]$
3	2	$\frac{2n+3}{4(n+1)} \cos[(n + \frac{1}{2})\pi x] + \frac{2n+1}{4(n+1)} \cos[(n + \frac{3}{2})\pi x]$
5	3	$\frac{2n+5}{8(n+1)} \cos[(n + \frac{1}{2})\pi x] + \frac{(2n+5)(2n+1)}{8(n+1)(n+2)} \cos[(n + \frac{3}{2})\pi x] + \frac{2n+1}{8(n+1)} \cos[(n + \frac{5}{2})\pi x]$

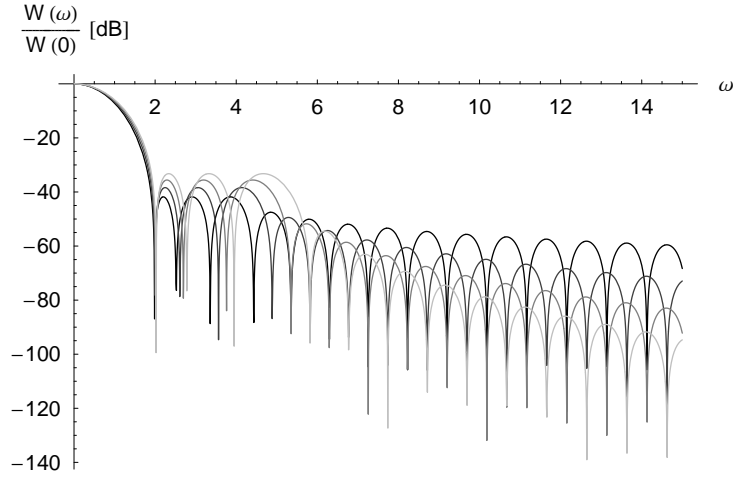


Figure 1.9 – Comparaison de fenêtres paramétriques avec $N = 3$ lobes secondaires égaux construites à partir des bases proposées pour $c = 6$: -6 dB/oct., -12 dB/oct., -18 dB/oct., -24 dB/oct.

où $(a)_b = \Gamma(a + b)/\Gamma(a)$ est la notation de Pochhammer.

Une fois encore, la construction de nouvelles fonctions d'apodisation est plus aisée dans le domaine spectral que dans le domaine temporel. Pour des raisons pratiques, la constante b'_n peut être posée à 1. Par exemple, la figure 1.9 montre des fenêtres avec $N = 3$ lobes secondaires égaux pour différents taux de décroissance asymptotique. Des bases permettant de contrôler la décroissance des lobes secondaires furent déjà proposées précédemment [SEKEY, 1970], mais aucune n'avait une forme aussi simple dans le domaine spectral que celles proposées ici, et étaient donc construites avec plus de K termes en cosinus. Notons que ni les bases proposées ici, $\{g_n^J(x)\}$, ni celles apparaissant dans les références ne sont orthogonales, sauf pour $J = 0, 1$. Cependant, ces bases sont complètes. Elles peuvent donc exprimer toute fenêtre de carré intégrable ayant un ordre de discontinuité J .

La figure 1.10 présente un graphe de l'amplitude maximale des lobes secondaires, par rapport au lobe principal, versus la largeur à mi-hauteur (FWHM) du lobe principal pour diverses fenêtres. À ces deux critères nous en ajoutons un troisième pour permettre la comparaison des fenêtres : le taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires, qui est mis en évidence dans chaque graphique. Certaines fenêtres construites à partir des bases proposées sont comparées aux fenêtres couramment utilisées. Ces fenêtres consistent en l'approximation de la fonction van der Maas par l'égalisation des N premiers lobes secondaires, pour différents comportements asymptotiques [$6(J + 1)$ dB/oct.] comme pour les fenêtres de la figure 1.9. De telles fenêtres peuvent être facilement construites en utilisant des méthodes numériques pour déterminer les coefficients

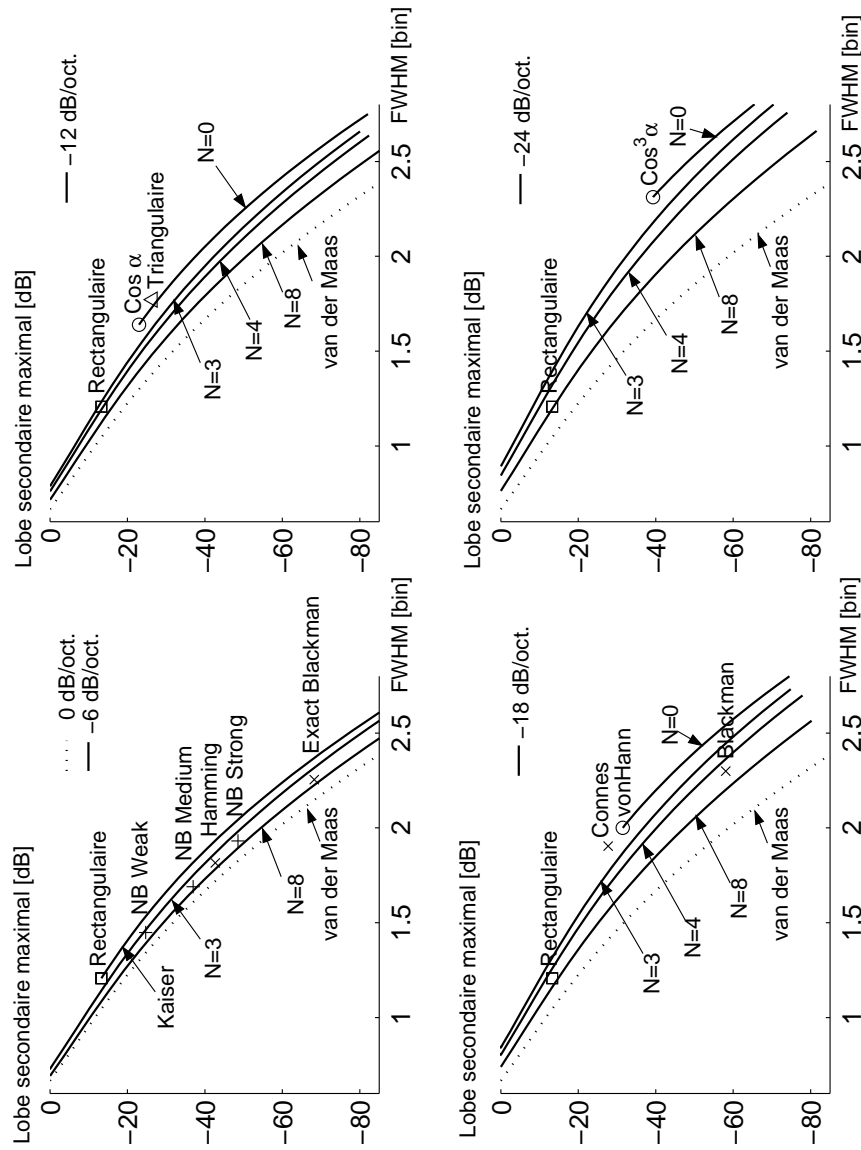


Figure 1.10 – Comparaison des fenêtres communes avec les fenêtres paramétriques de N lobes secondaires égaux construites à partir des bases proposées à l'équation (1.34), pour différents taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires. Nous pouvons voir que pour N croissant, les fenêtres se rapprochent de la fonction de van der Maas, pour tous les taux de décroissance asymptotique. Les fenêtres non paramétriques ayant le même taux de décroissance des lobes secondaires sont aussi illustrées. La fonction de van der Maas et la fenêtre rectangulaire sont incluses dans chaque cas aux fins de comparaison.

Tableau 1.2 – Coefficients des fenêtres avec $N = 3, 4, 8$ lobes secondaires égaux, pour différents taux de décroissance des lobes secondaires. Les coefficients b'_n sont utilisés de façon telle que $|g(0)| = 1$.

a_n	$J = 0$	$J = 1$	$J = 2$	$J = 3$
$N = 3$				
a_0	2.269 487	0.596 567	1.824 639	0.762 525
a_1	-4.372 433	-1.681 087	-4.717 156	-2.516 398
a_2	3.832 175	2.402 031	5.536 666	3.843 836
a_3	-2.729 230	-2.317 511	-3.644 150	-3.089 962
$N = 4$				
a_0	2.545 107	0.532 589	1.996 304	0.693 797
a_1	-4.974 946	-1.536 061	-5.428 801	-2.438 236
a_2	4.612 445	2.341 390	7.275 648	4.298 485
a_3	-3.938 231	-2.759 187	-6.820 487	-4.994 561
a_4	2.755 625	2.421 268	3.977 336	3.440 515
$N = 8$				
a_0	3.424 887	0.393 307	2.549 393	0.527 490
a_1	-6.804 673	-1.165 811	-7.403 283	-2.017 397
a_2	6.667 553	1.895 124	11.535 906	4.199 051
a_3	-6.432 585	-2.549 321	-14.512 219	-6.645 433
a_4	6.088 571	3.090 806	15.969 969	8.812 020
a_5	-5.615 792	-3.471 363	-15.658 513	-10.097 763
a_6	4.978 482	3.621 725	13.492 140	9.938 664
a_7	-4.103 633	-3.424 132	-9.634 360	-7.958 095
a_8	2.797 190	2.609 665	4.660 967	4.241 462

a_n des fonctions $G_n^J(u)$. Le tableau 1.2 présente ces coefficients pour $N = 3, 4, 8$ et $J = 0, 1, 2, 3$, où les coefficients b'_n sont utilisés de façon telle que $|g(0)| = 1$.

1.6 Liens avec diverses fenêtres

Plusieurs fenêtres sont reliées à la transformation spectrale de l'équation (1.8) et aux bases de l'équation (1.34) présentées dans ce travail. Les fenêtres Kaiser-Bessel et Dolph-Chebyshev furent le point de départ qui nous conduisit à considérer une transformation spectrale ayant des propriétés fort intéressantes applicable à toute fonction d'apodisation. Nous avons ensuite proposé des bases qui permettent de contrôler le taux de décroissance des lobes secondaires, dans le but de construire facilement dans le domaine spectral des fenêtres ayant le profil de lobes secondaires désiré, avant l'application de la transformation spectrale pour le paramétrage. Ces bases sont reliées à la famille

de fenêtres cosinus, la fenêtre de von Hann étant l'une de celles-ci. Elles sont construites avec la même idée sous-jacente aux fonctions utilisées par Hamming et Blackman pour construire leurs fenêtres, c'est-à-dire la somme de cosinus dans le domaine temporel ou de noyaux de Dirichlet [HARRIS, 1978].

Un autre ensemble de fonctions (temporelles) largement utilisé dans la littérature est l'ensemble des fonctions polynomiales $(1 - x^2)^n$ (lesquelles peuvent être reliés aux fenêtres polynomiales proposées par KULKARNI [2003]). Nous allons présenter ici un ensemble plus général de fonctions où ces polynômes sont inclus pour n pair :

$$w(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left[\sqrt{1-x^2} \right]^n, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (1.36)$$

Nous avons introduit la racine carrée dans l'expression de $w(x)$ puisqu'il est possible d'établir un lien très spécifique entre ces fonctions et les fenêtres Bickmore⁹ [AMBARDAR, 1995]. Ces dernières, méconnues de la communauté, ont la forme suivante :

$$w_\nu^b(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_\nu(c)} \left[\sqrt{1-x^2} \right]^\nu I_\nu(c\sqrt{1-x^2}), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.37)$$

$$W_\nu^b(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}c^\nu J_{\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\omega^2-c^2})}{I_\nu(c) [\sqrt{\omega^2-c^2}]^{\nu+1/2}}, \quad (1.38)$$

où le paramètre réel $\nu > -1$ contrôle la descente des lobes secondaires [décroissance de $6(\nu + 1)$ dB/oct.]. Nous pouvons remarquer à partir de l'équation (1.38) que la transformation spectrale présentée dans ce travail est implicite aux fenêtres Bickmore. Ainsi, les fenêtres Bickmore peuvent être utilisées comme expression analytique (à la fois dans le domaine spectral et temporel) des fenêtres de forme telle qu'à l'équation (1.36), après paramétrage¹⁰ [voir l'équation (1.17)] :

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_{n/2}^b(x), \quad (1.39)$$

$$W'(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n W_{n/2}^b(\omega), \quad (1.40)$$

⁹La transformée de Fourier des fenêtres Bickmore se trouve dans la table d'intégrales de GRADSHTEYN et RYZHIK [1994, 6.726.2].

¹⁰La limite de la fenêtre de Bickmore lorsque le paramètre c tend vers 0 est

$$\lim_{c \rightarrow 0} w_\nu^b(x) = (1 - x^2)^\nu.$$

Essentiellement, le paramétrage des fenêtres décrites par une somme de puissances de $\sqrt{1-x^2}$ est effectuée en utilisant les fenêtres Bickmore. Le tableau 1.3 montre les coefficients non nuls de telles fenêtres que l'on rencontre dans la littérature [HARRIS, 1978; NORTON et BEER, 1976; MAILLARD, 2000].

Finalement, nous devons mentionner les fenêtres Blackman-Harris [HARRIS, 1978], lesquelles sont des fenêtres paramétriques similaires à la fenêtre Kaiser-Bessel. En fait, leurs coefficients sont des échantillons de la fenêtre Kaiser-Bessel pour les trois ou quatre premiers termes en cosinus. Aussi ces fenêtres forment-elles une autre famille de fenêtres montrant un comportement similaire aux fenêtres présentées dans ce travail.

1.7 Bases généralisées

Nous avons remarqué que les fenêtres de Bickmore possèdent une propriété exceptionnelle. Elles permettent le contrôle de la décroissance asymptotique des lobes secondaires de façon continue¹¹ avec le paramètre réel $\nu > -1$. On peut généraliser les fenêtres cosinus d'une façon semblable pour obtenir une famille de fenêtres $W_\nu^c(\omega)$ avec un taux de décroissance continu de $6(\nu + 1)$ dB/oct. [GRADSHTEYN et RYZHIK, 1994, 3.892.2] :

$$w_\nu^c(x) = \begin{cases} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]^\nu, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.41)$$

$$W_\nu^c(\omega) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1 + \frac{\omega}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1 - \frac{\omega}{\pi}\right)}. \quad (1.42)$$

Il est intéressant de noter ici que la forme spectrale que nous obtenons est similaire à la forme temporelle des fenêtres binomiales présentées par DEMPSTER et MURPHY [1999, 2000].

Les bases $G_n^J(u)$ [équation (1.34)] permettant de construire des fenêtres ayant un certain taux de décroissance des lobes secondaires peuvent également être généralisées à partir de cette nouvelle famille de fenêtres cosinus généralisées. En factorisant certains pôles au dénominateur de l'équation (1.42), et en ajoutant un paramètre n déplaçant ces pôles pour les différents éléments de la base tout comme dans l'équation (1.34), on

¹¹Nous avons vu précédemment que le taux de décroissance asymptotique était associé à l'ordre de dérivation nécessaire pour obtenir une discontinuité dans la fonction d'apodisation. La possibilité de contrôler de façon continue le taux de décroissance asymptotique se trouve donc associée au calcul différentiel et intégral fractionnaire, c'est-à-dire qu'une discontinuité apparaît à la dérivée d'ordre fractionnaire ν .

Tableau 1.3 – Coefficients non nuls des fenêtres décrites par une somme de puissances de $\sqrt{1-x^2}$.

Fenêtres	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
Rectangulaire	1								
Riesz			1						
Connes 1					1				
*Connes 2						1			
*Connes 3	0, 239 780		0, 458 080		0, 224 990		0, 077 208		
*Connes 4	0, 062 680		0, 332 130		0, 218 390		0, 038 680		
Norton-Beer Weak	0, 548 000		-0, 083 300		0, 535 300				
Norton-Beer Medium	0, 260 000		-0, 154 838		0, 894 838				
Norton-Beer Strong	0, 090 000				0, 587 500				0, 322 500

*[MAILLARD, 2000]

obtient les bases généralisées suivantes :

$$G_n^\nu(u) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu' + \frac{cu}{\pi}) \Gamma(\nu' - \frac{cu}{\pi})} \times \prod_{k=0}^{K-1} \left[\left(\frac{cu}{\pi} \right)^2 - (n+k+\nu')^2 \right]^{-1}, \quad (1.43)$$

où $K = \lfloor \nu/2 + 1 \rfloor$ et $\nu' \in [0, 1[$ est le résidu tel que $\nu/2 + 1 = K + \nu'$. Le taux de décroissance asymptotique peut donc être contrôlé de la même façon que pour les fenêtres Bickmore et cosinus généralisées, et les bases développées précédemment deviennent un cas particulier de ces bases généralisées pour $\nu = J$.

1.8 Conclusion

Une méthode nouvelle et élégante a été présentée pour la conception de fonctions d'apodisation paramétriques qui maintiennent inchangé leur profil de lobes secondaires lorsque leur paramètre est varié. La transformation spectrale est dérivée à partir des fenêtres Kaiser et van der Maas, lesquelles sont des fenêtres intimement liées. Les principales propriétés de cette transformation spectrale sont la conservation de la limitation en temps et de l'ordre (multiplicité) des zéros dans le domaine spectral, de même que le paramétrage de toute fenêtre de la même manière que la fenêtre Kaiser-Bessel ou van der Maas, en ce qui concerne le compromis entre la largeur du lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. Ainsi, les caractéristiques de plusieurs fenêtres non paramétriques peuvent être utilisées pour la conception de fenêtres paramétriques plus générales à l'aide de la transformation spectrale présentée à l'équation (1.17). Les utilisateurs seront donc en mesure de choisir la fenêtre ayant le profil de lobes secondaires le plus approprié pour leurs applications, et de paramétrer cette fenêtre dans le but de balancer la hauteur relative des lobes secondaires avec la largeur du lobe principal.

De nouvelles bases furent aussi proposées pour la construction de familles de fenêtres ayant un taux donné de décroissance asymptotique des lobes secondaires. Ces bases ont une forme simple dans le domaine spectral et forment des bases complètes en regard de l'atténuation des lobes secondaires. Elles constituent de nouveaux outils pour la réalisation de profils de lobes secondaires dans le domaine spectral.

La transformation spectrale généralisée étudiée ici décrit également une autre sous-classe de fenêtres : les fenêtres Bickmore. Ce point illustre plus fortement encore pourquoi cette transformation spectrale est d'intérêt pour le fenêtrage puisque, dans un effort pour découvrir de nouvelles façons d'apodiser, des cas spécifiques ont déjà apparu dans la littérature.

Chapitre 2

Effets de déconvolution : la correction de phase et l'étalonnage complexe

— Étude de la distorsion induite par les procédés de déconvolution.

Le traitement des données en spectrométrie par transformation de Fourier implique très fréquemment une étape de déconvolution, que ce soit par la correction de phase ou encore par l'étalonnage complexe. À l'aide de la correction de phase, les délais et les effets de dispersion peuvent être déconvolués de l'interférogramme. De façon plus globale, l'étalonnage complexe permet de déconvoluer à la fois la dispersion et le rayonnement de corps noir. Alors que les effets de convolution introduits par le traitement algorithmique des données font référence au domaine spectral (apodisation), les algorithmes de déconvolution surviendront plutôt dans le domaine de l'interférogramme. Nous nous proposons d'étudier les algorithmes classiques de correction de phase et d'étalonnage complexe du point de vue de la déconvolution pour mettre en évidence les concepts de base du processus de déconvolution en spectrométrie par transformation de Fourier, principalement en ce qui a trait à la distorsion spectrale. La troncation de l'interférogramme sera la principale difficulté que nous devons contourner pour bien maîtriser les techniques de déconvolution.

Ce chapitre est inclus ici par souci pédagogique afin d'introduire par le biais d'une matière déjà connue certains concepts qui réapparaîtront dans les chapitres subséquents. Bien que les notions exposées ne soient pas résolument nouvelles, nous tenterons de les présenter sous un éclairage original pour faire ressortir les subtilités de l'étalonnage en phase et en amplitude, en tant qu'algorithmes de déconvolution.

2.1 Les erreurs de phase

En principe, un spectromètre par transformation de Fourier mesure l'autocorrélation du champ électrique d'un faisceau lumineux, soit l'interférogramme¹ $I(x)$, auquel on applique ensuite une transformation de Fourier pour estimer sa densité spectrale de puissance $S(\sigma)$, tel que précisé par le théorème de Wiener-Khintchine-Einstein [VINIOTIS, 1998]. Toute fonction d'autocorrélation possède des caractéristiques fondamentales telles que d'appartenir à l'ensemble des fonctions paires et réelles, ayant par le fait même une transformée de Fourier paire et réelle. De plus, cette densité spectrale de puissance est théoriquement définie positive.

En réalité, les spectromètres par transformation de Fourier s'éloignent de cette mesure idéale en fournissant des interférogrammes asymétriques, et ce principalement en raison des trois facteurs suivants :

- a) le bruit ;
- b) le déplacement de la grille d'échantillonnage ;
- c) les dispersions optique et électrique.

Le bruit, phénomène inévitable, est le premier obstacle à la mesure d'un interférogramme pair. Il peut être séparé en une partie paire et une partie impaire, la partie paire ayant une transformée de Fourier réelle et paire, et la partie impaire une transformée de Fourier imaginaire et impaire. Pour se débarrasser de la partie impaire du bruit, il suffit de mettre de côté la partie imaginaire de la densité spectrale de puissance. Comme un bruit blanc (non corrélé et stationnaire au sens large) est distribué avec une même variance dans la partie réelle et la partie imaginaire de sa densité spectrale de puissance, la puissance du bruit devrait diminuer d'un facteur $\sqrt{2}$ en éliminant la partie imaginaire de la densité spectrale de puissance, augmentant d'un même facteur le rapport signal sur bruit (SNR pour « *Signal-to-Noise Ratio* »). Cette dernière assertion n'est cependant valide que pour un signal optique avec un faible SNR. Dans les régions du spectre où la source optique est intense par rapport au bruit, il n'y a pas de gain appréciable du SNR réalisé en écartant la partie imaginaire : la variance du bruit demeure inchangée par rapport à celle de la valeur absolue du spectre. L'annexe A expose en détail le calcul de la distribution du bruit obtenue sur la valeur absolue de la densité spectrale de puissance.

Cependant, d'autres erreurs de phase plus importantes viennent compliquer le traitement des données spectrométriques. Puisque l'interférogramme est échantillonné avec

¹Une description plus détaillée de l'interférogramme sera présentée au chapitre 3.

une référence optique ou électrique, on ne peut être assuré qu'il sera échantillonné de façon symétrique. Le centre de l'interférogramme n'est généralement pas représenté par un échantillon : la grille d'échantillonnage est alors décalée par rapport à l'origine de l'interférogramme. De plus, un plus grand nombre d'échantillons peut être enregistré d'un côté de l'interférogramme que de l'autre². Ces deux types d'erreur d'échantillonnage résultent en un délai δ dans la mesure de l'interférogramme, $I(x - \delta)$, lequel est relié à une phase linéaire dans le domaine spectral : $S(\sigma) e^{-i2\pi\sigma\delta}$.

Finalement, les dispersions optique et électrique sont toujours susceptibles de survenir dans une configuration de spectromètre par transformation de Fourier, déplaçant l'origine de la fonction d'autocorrélation différemment pour chaque nombre d'onde et résultant en un spectre complexe $S(\sigma) e^{i\phi(\sigma)}$, où $\phi(\sigma)$ est la phase reliée à la dispersion. La fonction de phase $\phi(\sigma)$ est habituellement supposée lisse et à variation lente dû au comportement de l'indice de réfraction avec les nombres d'onde. Ces hypothèses seront utiles pour simplifier les méthodes de correction de phase. Une lame compensatrice est introduite dans la plupart des spectromètres pour réduire la dispersion optique.

2.2 Revue des méthodes de correction de phase

Plusieurs algorithmes de correction de phase ont été développés pour corriger la phase résultant d'un déplacement de la grille d'échantillonnage et de la dispersion, dans le but de reconstituer le spectre réel et pair. Certaines méthodes sont basées sur l'estimation de la phase à partir de l'interférogramme à corriger, d'autres requièrent une mesure externe de la phase, mais aucune ne parvient à corriger parfaitement les interférogrammes non pairs. La difficulté provient directement de la troncation de la mesure. La fonction d'autocorrélation d'une fonction limitée en bande spectrale a, comme nous l'avons vu, une étendue infinie alors que la mesure de l'interférogramme est nécessairement tronquée. La résolution est donc limitée ainsi que notre connaissance du spectre. Aussi, comme nous le verrons bientôt, la phase ne peut être totalement supprimée sans laisser d'artéfact. Le problème ne consiste pas seulement à évaluer la phase, car même si la phase est connue exactement, des précautions particulières doivent parfois être prises pour réduire les artéfacts de la correction de phase à un degré acceptable.

²On fait référence ici à une légère asymétrie de l'interférogramme. On peut dans certains cas vouloir enregistrer un interférogramme de façon très asymétrique (interférogramme quasi unilatéral) pour maximiser la résolution avec un certains parcours optique par exemple. Le traitement de l'interférogramme sera alors différent.

Les débuts

Plusieurs articles ont été publiés sur le sujet des erreurs causées par la phase et des méthodes algorithmiques pour les corriger. Une des premières considérations fut la légère incertitude sur la position exacte du point de différence de chemin optique nulle (ZPD pour « *Zero Path Difference* ») dans l'interférogramme [CONNES, 1961; LOEWENSTEIN, 1963]. Un petit déplacement δ de la grille d'échantillonnage cause en effet une distorsion de la partie réelle des raies spectrales. Aussi la première correction de phase suggérée fut de prendre le module du spectre complexe. Cette méthode peut cependant laisser d'importants et indésirables artéfacts, le premier étant la transformation du bruit des zones à faible signal en un bruit à moyenne non nulle (voir l'annexe A), qui ne tend donc pas vers zéro lorsqu'on effectue une moyenne des mesures. Le second artéfact est le redressement des parties négatives du spectre provenant de la convolution avec la fonction sinc, ce processus non linéaire empêchant par la suite de recouvrer l'interférogramme corrigé par transformation de Fourier inverse.

Une autre méthode simple fut proposée : déplacer la référence de la transformation de Fourier par l'introduction d'une phase δ [LOEWENSTEIN, 1963]. Il faut noter que la transformation de Fourier en cosinus étant utilisée dans cet article, cette méthode n'équivaut pas à simplement multiplier le spectre par une phase linéaire $e^{i2\pi\delta\sigma}$:

$$S_c(\sigma) = \int_0^L I(x - \delta) \cos[2\pi\sigma(x - \delta)] dx. \quad (2.1)$$

L'avantage de cette méthode réside dans la réduction de la distorsion des structures étroites du spectre à un ordre inférieur, pour des valeurs faibles de δ en comparaison avec le pas des échantillons.

La méthode de Forman

Pour résoudre les difficultés liées à la dispersion et au déplacement de la grille d'échantillonnage avec un algorithme plus raffiné que ce qui avait été proposé jusqu'alors, FORMAN [FORMAN et al., 1966] élaborera pour sa thèse une méthode élégante de correction de phase basée sur l'estimation de la phase à basse résolution. Cette méthode ne requiert au minimum qu'un interférogramme quasi unilatéral. La phase est estimée à partir d'un interférogramme bilatéral de faible résolution spectrale composé des quelques points entourant le maximum de l'interférogramme mesuré. Le spectre à basse résolution $S_{B.R.}(\sigma)$ est alors :

$$S_{B.R.}(\sigma) = \int_{-L_1}^{L_1} I(x) e^{-i2\pi\sigma x} dx, \quad (2.2)$$

où L_1 est petit par rapport à la longueur totale L de l'interférogramme. La phase est estimée à partir de ce spectre de faible résolution³ :

$$\phi_{B.R.}(\sigma) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\text{Im}\{S_{B.R.}(\sigma)\}}{\text{Re}\{S_{B.R.}(\sigma)\}}\right) + \pi, & \text{Re}\{S_{B.R.}(\sigma)\} < 0, \\ \arctan\left(\frac{\text{Im}\{S_{B.R.}(\sigma)\}}{\text{Re}\{S_{B.R.}(\sigma)\}}\right), & \text{Re}\{S_{B.R.}(\sigma)\} > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

et la fonction de correction Φ est trouvée en utilisant le complexe conjugué de la phase estimée avec un module unitaire :

$$\Phi(\sigma) = e^{-i\phi_{B.R.}(\sigma)} = \frac{S_{B.R.}^*(\sigma)}{|S_{B.R.}(\sigma)|}. \quad (2.4)$$

La transformation de Fourier inverse de la fonction de correction est ensuite convoluée avec l'interférogramme complet pour obtenir l'interférogramme corrigé $I_c(x)$:

$$I_c(x) = I(x) * \mathcal{F}^{-1}\{\Phi(\sigma)\}. \quad (2.5)$$

L'interférogramme conserve ainsi un bon rapport signal sur bruit puisque la phase est estimée sur une portion de l'interférogramme ayant un SNR élevé.

La méthode de **FORMAN** peut être appliquée successivement deux ou trois fois sur un même interférogramme pour améliorer la correction et obtenir un interférogramme plus symétrique pour les points appariés autour de ZPD. Les auteurs suggérèrent également d'estimer la phase à partir d'un interférogramme d'étalonnage, mais leurs résultats n'étaient pas aussi satisfaisants que ceux obtenus par la méthode d'estimation de phase à basse résolution.

La dernière partie de cet algorithme consiste à réduire l'interférogramme corrigé en appliquant une pondération décroissante des points autour de ZPD. Puisque l'interférogramme est quasi unilatéral, il y a une grande quantité d'échantillons d'un côté du ZPD de l'interférogramme et seulement quelques-uns de l'autre côté. Aussi, ces derniers seront pris en compte deux fois lors de la transformation de Fourier puisqu'ils ont une contre-partie de l'autre côté du ZPD de l'interférogramme. C'est pourquoi une apodisation linéaire est utilisée pour balancer l'interférogramme. Cette dernière étape peut être omise lorsque la méthode est appliquée à un interférogramme bilatéral.

³Lorsque $\text{Re}\{S_{B.R.}(\sigma)\} = 0$, nous pouvons définir la phase $\phi_{B.R.}(\sigma)$ comme étant $-\pi/2$ pour $\text{Im}\{S_{B.R.}(\sigma)\} < 0$, $\pi/2$ pour $\text{Im}\{S_{B.R.}(\sigma)\} > 0$ et indéterminée pour $\text{Im}\{S_{B.R.}(\sigma)\} = 0$.

La méthode multiplicative de Mertz

La méthode de correction de phase multiplicative de [MERTZ](#) est très similaire à celle de [FORMAN](#), s'appliquant plutôt dans le domaine spectral que dans celui de l'interférogramme [[MERTZ, 1965, 1967, 1971](#)]. Premièrement, un interférogramme à basse résolution est extrait de l'interférogramme quasi unilatéral à corriger et est transformé dans le domaine de Fourier pour obtenir une estimation de phase à basse résolution [voir équations (2.2) et (2.4)]. Ensuite, l'interférogramme quasi unilatéral est pondéré linéairement et transformé dans le domaine de Fourier [$S'(\sigma)$]. Finalement, le conjugué complexe $\Phi(\sigma)$ de cette estimation de phase à basse résolution est multiplié avec le spectre à corriger :

$$S_c(\sigma) = S'(\sigma)\Phi(\sigma). \quad (2.6)$$

Notons que $S'(\sigma)$ est utilisé pour souligner que le spectre corrigé provient d'un interférogramme pondéré linéairement.

Comparaison des méthodes de Mertz et Forman

Un article de [SAKAI et al. \[1968\]](#) contient une bonne analyse de la méthode de [FORMAN](#) et compare brièvement les deux méthodes de correction de phase proposées précédemment. La principale différence entre ces deux méthodes réside dans l'ordre des opérations. En fait, la méthode de [FORMAN](#) effectue la pondération linéaire d'un interférogramme dont la phase est corrigée, alors que [MERTZ](#) applique la correction de phase à un spectre provenant d'un interférogramme apodisé. La méthode proposée par [FORMAN](#) fut trouvée plus précise que la seconde [[CHASE, 1982](#)], puisque l'apodisation ne peut être appliquée symétriquement autour du point de ZPD dans celle de [MERTZ](#). En fait, le point de différence de chemin optique nulle n'est tout simplement pas bien défini dans un interférogramme non corrigé [[SANDERSON et BELL, 1973](#)]. [RAHMELOW et HÜBNER \[1997\]](#) étudièrent l'impact de l'apodisation sur les raies spectrales dans la méthode de [MERTZ](#) et proposèrent un algorithme pour améliorer cette méthode de correction de phase dans le cas d'un léger déplacement du ZPD par rapport à la grille d'échantillonnage, sans dispersion.

Un autre article de [ROMANOV et SHAROV \[1988\]](#) décrit un algorithme itératif pour améliorer la méthode de [MERTZ](#). La méthode est basée sur la minimisation de l'erreur de phase estimée.

2.3 Correction de phase, déconvolution et filtrage

Dans le langage du traitement des signaux, la correction de phase correspond directement à une opération de déconvolution, ou plus simplement encore à un filtrage. La fonction de phase doit être déconvoluée, elle doit être filtrée de l'interférogramme. Les disciplines de la déconvolution et du filtrage sont des mondes en eux-mêmes, une quantité impressionnante de travaux ayant été publiés à leur sujet. L'article de [HANSEN \[2002\]](#) constitue une bonne introduction à la déconvolution ainsi qu'à l'inversion des intégrales de Fredholm du premier type que nous aborderons aux chapitres 3 et 4. Il semble cependant que certaines caractéristiques puissent être étudiées de plus près lors du développement des algorithmes de déconvolution en spectrométrie par transformation de Fourier. À proprement parler, nous étudierons les zones de transition survenant lors du filtrage d'un signal tronqué. Nous aborderons également certains aspects du domaine de la communication de signaux modulés en fréquence (modulation FM), qui seront utiles pour le calcul des zones de transition introduites par la correction de phase.

2.3.1 Zones de transition

Le processus de déconvolution, du point de vue de l'analyse de Fourier, consiste à convoluer un signal avec la transformée de l'inverse de la fonction à déconvoluer dans le domaine de Fourier, puisque la convolution correspond à une opération de multiplication dans ce domaine [[HANSEN, 2002](#)]. Par exemple, soit $a(x)$ le résultat de la convolution de deux fonctions $b(x)$ et $c(x)$:

$$a(x) = b(x) * c(x). \quad (2.7a)$$

Dans le domaine de Fourier, on peut isoler la transformée de $b(x)$ pour déconvoluer la fonction $c(x)$ de $a(x)$:

$$\mathcal{F}\{a(x)\} = \mathcal{F}\{b(x)\} \times \mathcal{F}\{c(x)\}, \quad (2.7b)$$

$$\mathcal{F}\{b(x)\} = \frac{\mathcal{F}\{a(x)\}}{\mathcal{F}\{c(x)\}}. \quad (2.7c)$$

En effectuant la transformation de Fourier inverse, on obtient le résultat suivant :

$$b(x) = a(x) * \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathcal{F}\{c(x)\}}\right\}, \quad (2.7d)$$

où $\mathcal{F}^{-1}\{1/\mathcal{F}\{c(x)\}\}$ est la fonction qui, lorsque convoluée avec $a(x)$, permet de déconvoluer la fonction $c(x)$ et de recouvrer $b(x)$.

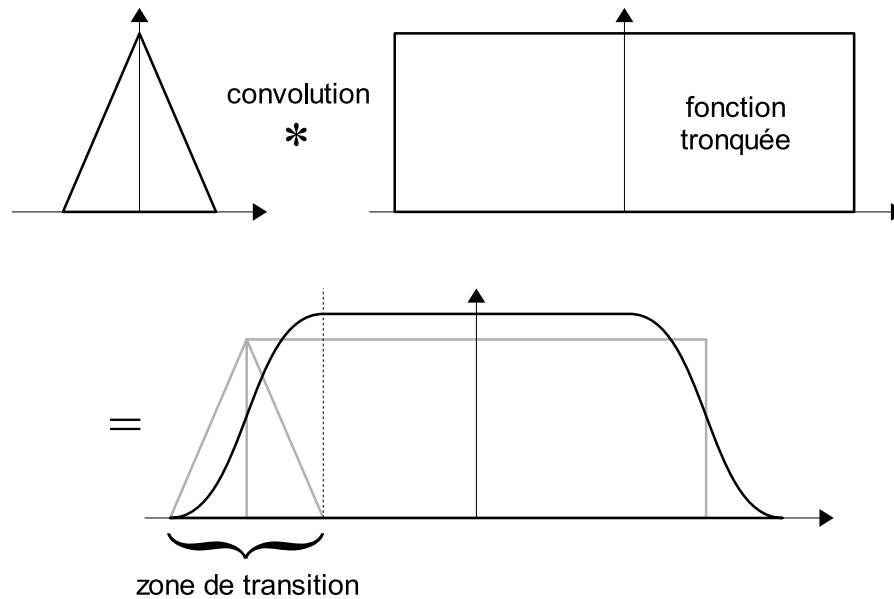


Figure 2.1 – Illustration schématique des zones de transition apparaissant lors de la convolution d’une fonction tronquée.

La densité spectrale de puissance que nous désirons mesurer se trouve multipliée par une certaine phase due au spectromètre. Autrement dit, l’interférogramme est convolué sur toute son étendue par une fonction de phase avant que le processus d’échantillonnage n’ait eu lieu. Ce signal est ensuite échantillonné sur une certaine plage de différence de chemin optique. Cependant, un obstacle se présente à nous dans l’application de la correction de phase. Nous ne disposons que d’une représentation tronquée de l’interférogramme dispersé. Lors de la déconvolution, c’est-à-dire de la convolution avec la fonction de correction, des zones de transition apparaîtront à chaque extrémité de l’interférogramme corrigé (voir figure 2.1). Ces zones de transition proviennent de notre connaissance partielle du signal, les points hors de la partie mesurée étant remplacés par des zéros ou encore par une représentation cyclique de l’interférogramme.

Il apparaît évident qu’un certain nombre d’échantillons situés à chaque extrémité de l’interférogramme corrigé devront être rejetés puisqu’ils ne représentent d’aucune manière l’interférogramme non dispersé. Par le rejet des zones de transition, après correction de la phase, nous devons accepter que la résolution de la densité spectrale de puissance diminue légèrement. Autrement une erreur faite d’oscillations rapides dans le domaine spectral diminuerait la qualité de notre estimation de la densité spectrale de puissance.

Il faut cependant garder en tête que la perte de résolution, ou l'augmentation de la largeur de la fonction sinc, se fait dans un rapport correspondant à la fraction du nombre d'échantillons restants par rapport au nombre d'échantillons initial.

2.3.2 Largeur de bande

La question du nombre d'échantillons à rejeter de l'interférogramme corrigé émerge naturellement à ce point-ci du développement. Nous trouverons notre réponse en regardant du côté des communications modulées en fréquence (modulation FM). En effet, considérons l'exponentielle complexe $e^{i\phi(\sigma)}$ qui multiplie la densité spectrale de puissance, où $\phi(\sigma)$ est la phase reliée à la dispersion. La fonction inverse correspondante qui servira à corriger l'interférogramme dispersé est simplement $e^{-i\phi(\sigma)}$ [voir l'équation (2.4)]. On peut faire directement un parallèle entre cette fonction et un signal modulé en fréquence. Comme on le retrouve dans les manuels de communication [GIBSON, 1993], un signal modulé en fréquence est modélisé par l'équation :

$$s_{\text{FM}}(t) = A \cos \left(\omega_c t + c_f \int_{-\infty}^t m(t') dt' \right), \quad (2.8)$$

où ω_c est la fréquence de la porteuse, $m(t)$, le message transmis et c_f , une constante. Comme la fréquence de la porteuse est normalement beaucoup plus élevée que la largeur de bande du signal, on ne considérera que les fréquences positives de la transformée de Fourier du signal FM, ce qui substitue la fonction cosinus de l'équation (2.8) par une exponentielle complexe. Il y a déjà très longtemps que l'on s'intéresse à calculer la largeur de bande des signaux transmis par modulation FM étant donné les réglementations concernant la transmission aérienne par ondes électromagnétiques [CARSON, 1922]. Les mêmes outils pourront être utilisés pour calculer la largeur de la transformée de Fourier de notre fonction inverse pour la correction de phase.

La transformée de Fourier d'un signal modulé en fréquence possède la propriété très intéressante d'avoir un contenu significatif concentré dans une bande de fréquence avec très peu de contenu en fréquence hors de cette bande. La densité spectrale d'un signal FM peut donc être décrite par une densité à bande limitée avec très peu d'erreur si le message transmis est également à bande limitée. Toutefois, on ne peut généralement pas calculer la densité spectrale analytiquement. Il existe une règle simple pour estimer cette largeur de bande nommée en l'honneur de CARSON, lequel démontra que la largeur de bande d'un signal FM ne peut pas être plus étroite que celle du signal transmis. Sous sa forme générale, la règle de CARSON stipule que la largeur de bande d'un signal modulé

en fréquence est la somme de la largeur de bande du message transmis ainsi que l'étendue des fréquences instantanées du signal modulé en fréquence. La fréquence instantanée est définie comme la dérivée de la phase du signal à un instant donné :

$$\begin{aligned}\omega_i(t) &= \frac{d}{dt} \left(\omega_c t + c_f \int_{-\infty}^t m(t') dt' \right), \\ &= \omega_c + c_f m(t).\end{aligned}\quad (2.9)$$

La largeur de bande $B_{s_{\text{FM}}}$ du signal FM s_{FM} est donc donnée par :

$$B_{s_{\text{FM}}} \approx B_{m(t)} + c_f [\max\{m(t)\} - \min\{m(t)\}], \quad (2.10)$$

où $B_{m(t)}$ est la largeur de bande du message transmis. La largeur de bande du signal FM dépend donc de l'amplitude du message transmis et de son contenu en fréquence.

Appliquons cette règle au calcul de la largeur de la fonction de correction de phase $\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\phi(\sigma)}\}$. Dans notre cas, l'équivalent du message transmis est tout simplement la dérivée de la phase : $d\phi(\sigma)/d\sigma$. La largeur $B_{C.P.}$ du signal de correction de phase sera donc

$$B_{C.P.} \approx B_{d\phi(\sigma)/d\sigma} + \left[\max\left\{ \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} \right\} - \min\left\{ \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} \right\} \right]. \quad (2.11)$$

Le terme $B_{d\phi(\sigma)/d\sigma}$, qui de plus est égal à $B_{\phi(\sigma)}$, peut généralement être négligé lorsque la dérivée de la phase varie lentement mais sur une grande plage de valeurs, ce qui est souvent représentatif de la dispersion dans un interféromètre. Notons que les fréquences instantanées maximale et minimale doivent être calculées dans les régions de la densité spectrale de puissance où le rapport signal sur bruit est suffisant. Autrement, la largeur calculée risque d'être très imprécise.

2.3.3 Cas d'un spectre à large bande

Nous allons maintenant illustrer les éléments exposés précédemment en étudiant le cas d'un spectre à bande large. Nous effectuerons la correction de phase de notre signal dans le domaine spectral (méthode de Mertz) à l'aide d'une estimation de la phase à basse résolution, sans apodisation linéaire finale puisque nous utiliserons un interférogramme bilatéral. Nous comparerons ensuite les résultats avec le spectre corrigé dont les zones de transition dues à la correction de phase ont été rejetées. Notons qu'aucun bruit ne sera ajouté ici, nous en discuterons par la suite.

Pour construire notre interférogramme de départ, nous avons ajouté une certaine phase à un spectre de très haute résolution et ensuite tronqué l'interférogramme résultant

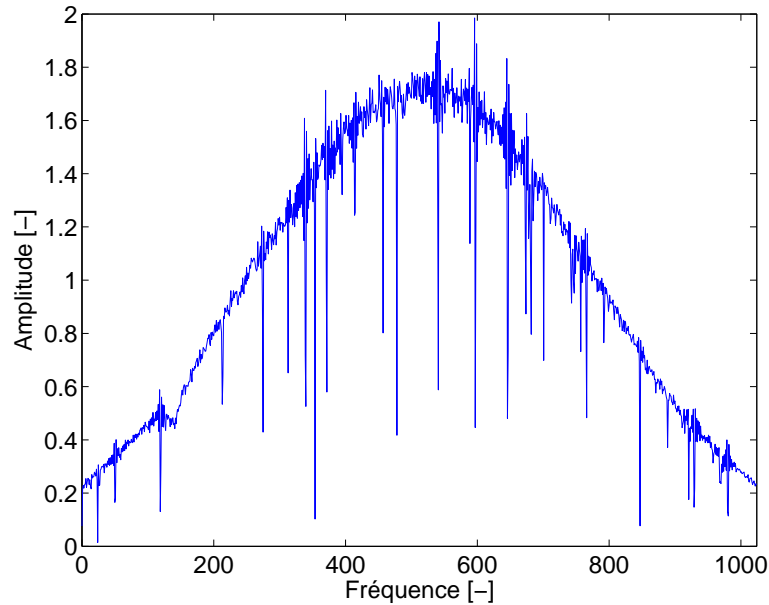


Figure 2.2 – Spectre théorique original (sans phase) utilisé pour illustrer les méthodes de correction.

pour conserver 2049 points. De cette façon, les zones de transition de cette intégration de phase sont complètement rejetées et nous pourrions étudier l'impact des zones de transition provenant de la correction de phase. Les figures 2.2 et 2.3 illustrent le spectre et les interférogrammes originaux.

Apodisation paramétrique

Pour évaluer la phase que nous désirons corriger, nous tirerons avantage des fenêtres d'apodisation paramétriques que nous avons étudiées au chapitre premier. Plutôt que de réduire le nombre de points de l'interférogramme original pour estimer la phase, nous allons utiliser une fenêtre paramétrique de paramètre élevé afin que le lobe principal soit large et les lobes secondaires très faibles. La largeur du lobe principal servira de filtre pour diminuer le bruit dans l'évaluation de la phase et les lobes secondaires très faibles permettront pratiquement d'éliminer les fuites spectrales (*spectral leakage*). La technique courante, qui consiste à diminuer le nombre de points et ensuite à apodiser le nouvel interférogramme, produit une fonction d'apodisation dont les lobes secondaires sont nécessairement plus élevés que ceux qu'il est possible d'obtenir avec une fenêtre paramétrique sur un interférogramme à pleine résolution. Les fenêtres paramétriques permettent même de réduire les lobes secondaires jusqu'à des valeurs comparables à la précision numérique du calculateur.

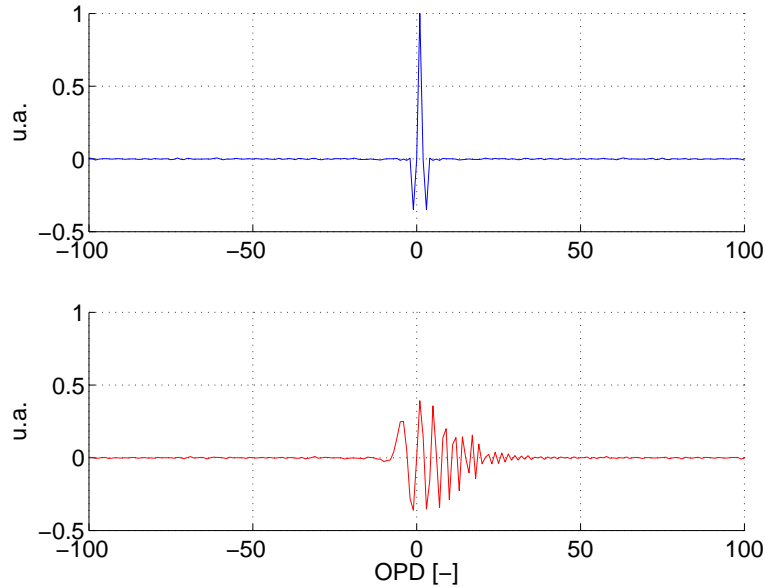


Figure 2.3 – Partie centrale (ZPD) des interférogrammes, sans phase (bleu) et avec phase (rouge), utilisés pour l'exemple de correction de phase.

La figure 2.4 illustre pour notre exemple la phase estimée à partir d'un spectre à faible résolution à l'aide d'une fenêtre d'apodisation Blackman paramétrée de paramètre très élevé pour sélectionner la zone centrale de l'interférogramme⁴. La figure 2.5 nous montre la transformée de Fourier inverse de la phase estimée, c'est-à-dire la fonction de phase à déconvoluer. La largeur de la fonction de phase indiquée sur la figure par les limites est calculée ici à partir de la dérivée de la phase, tel que présenté à l'équation (2.11). On voit que ces limites encadrent bien la partie dominante de la fonction de correction.

Troncation des zones de transition

Les figures 2.6 et 2.7 nous montrent les parties réelle et imaginaire du spectre corrigé en phase avant et après troncation des zones de transition. La différence entre la partie réelle du spectre corrigé et le spectre original sans phase est illustrée à la figure 2.8. On remarque que l'erreur est considérablement diminuée par l'élimination des zones de transition. Quoiqu'il subsiste des artefacts autour des raies spectrales dans la partie

⁴Lorsque les lobes secondaires sont très faibles, comme dans le cas présent, le profil des lobes secondaires importe peu. Le choix de la fenêtre paramétrique est ici moins important, pourvu que le paramètre soit élevé.

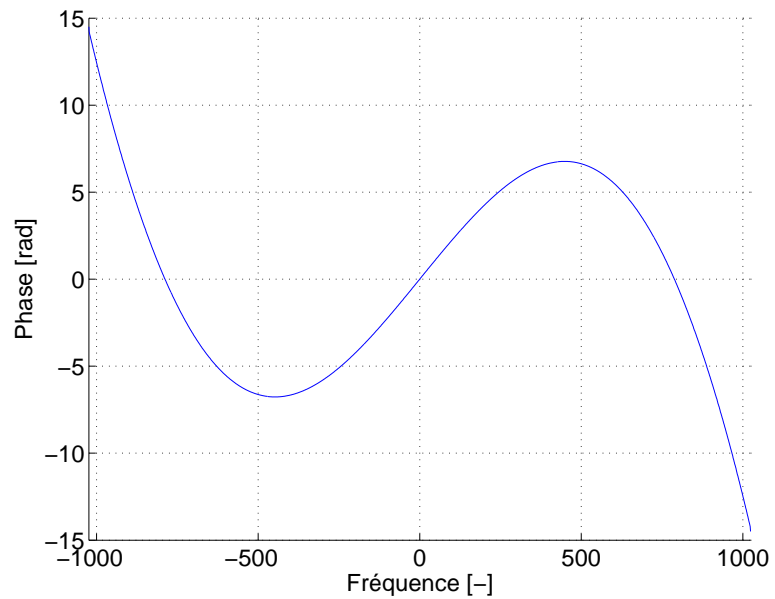


Figure 2.4 – Phase estimée à faible résolution après apodisation avec la fenêtre Blackman paramétrique ($c = 30$).

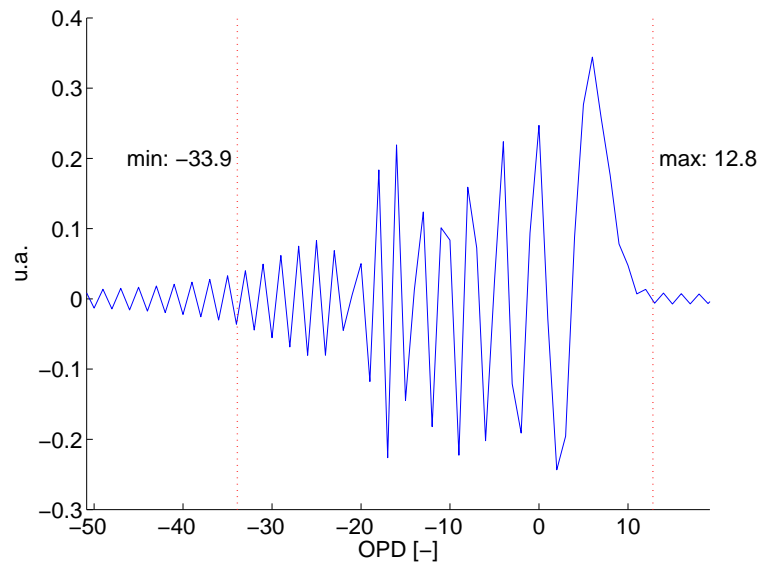


Figure 2.5 – Transformée de Fourier inverse de la phase : fonction de correction pour la déconvolution de la phase. Les limites sont calculées à partir de la dérivée de la phase.

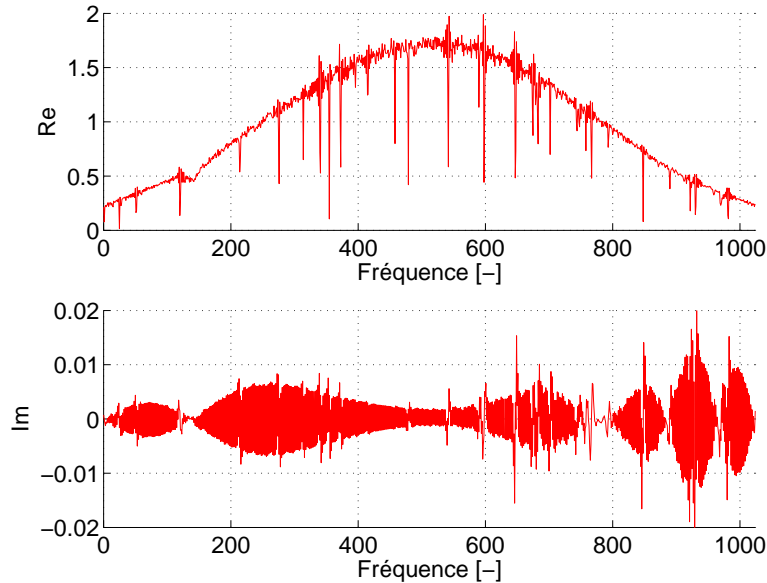


Figure 2.6 – Parties réelle et imaginaire du spectre après correction de phase.

imaginaire du spectre corrigé (figure 2.7), la partie réelle, elle, ne semble pas à première vue contenir ces artéfacts (figure 2.8).

Regardons maintenant l’erreur commise avant troncation dans le domaine de l’interférogramme. La figure 2.9 nous montre la différence entre l’interférogramme original sans phase et l’interférogramme après correction de phase (incluant les zones de transition). Une vue agrandie de l’extrémité de l’interférogramme est donnée pour permettre la comparaison de l’erreur commise par rapport à la valeur de l’interférogramme original. On voit bien ainsi la zone de transition apparaître aux extrémités de l’interférogramme.

Correction de phase et hautes fréquences

Tel que mis en évidence par LANOUE [2004] dans son mémoire de maîtrise, la phase aux hautes fréquences du spectre, après échantillonnage, peut subir d’importantes contraintes dû à la périodicité du spectre discret obtenu par transformation de Fourier discrète. Des contraintes de symétrie imposent que la phase soit nulle aux extrémités du spectre, et peuvent selon le cas amener des variations très rapides de la phase dans cette région du spectre pour satisfaire à cette exigence. Il devient alors plus difficile d’évaluer la phase aux hautes fréquences, donc de la corriger.

L’erreur commise aux hautes fréquences dans notre exemple est visible à la figure 2.8. On peut cependant remarquer que cette erreur semble décroître lentement vers les

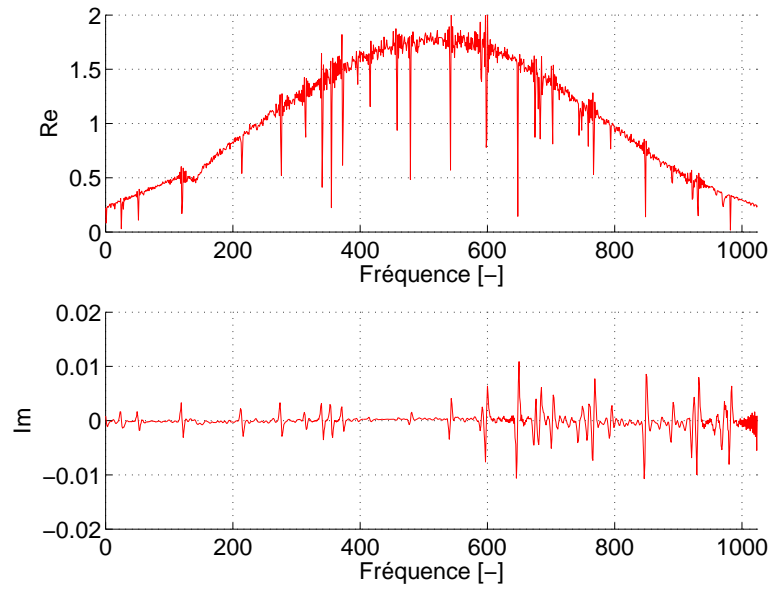


Figure 2.7 – Parties réelle et imaginaire du spectre après correction de phase et troncation des zones de transition.

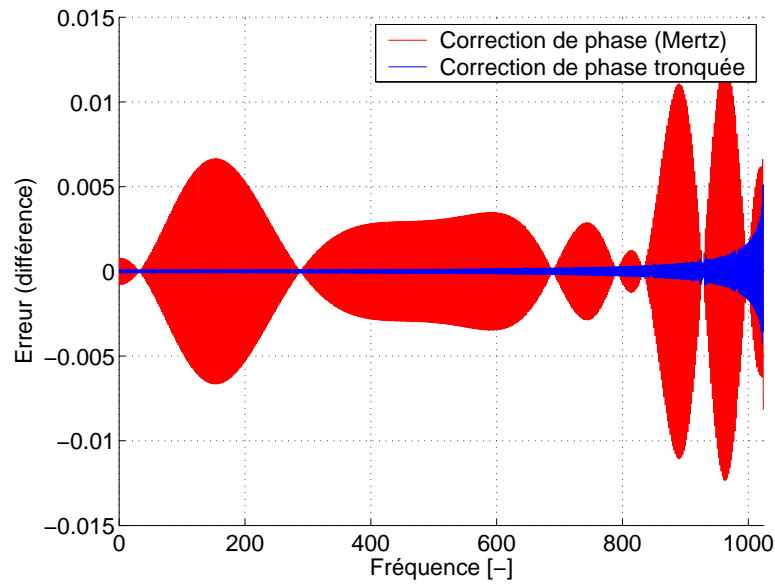


Figure 2.8 – Différence entre la partie réelle du spectre corrigé et le spectre original sans phase, avant et après troncation des zones de transition.

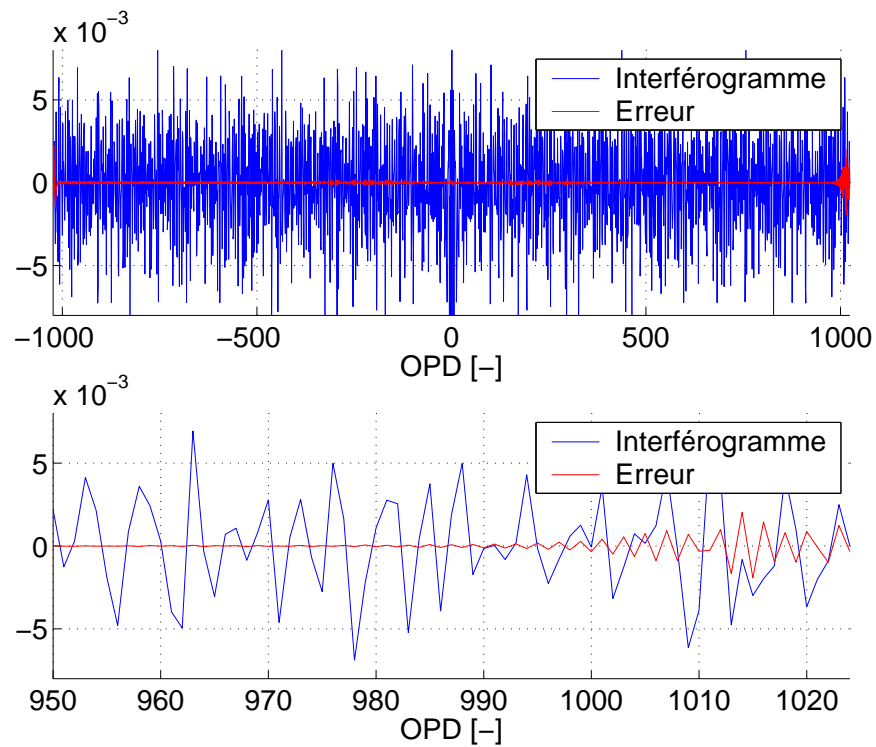


Figure 2.9 – Différence entre l'interférogramme original (sans dispersion) et l'interférogramme obtenu après correction de phase. La vue agrandie de l'extrémité de l'interférogramme permet la comparaison de l'erreur commise par rapport à la valeur de l'interférogramme original dans la zone de transition.

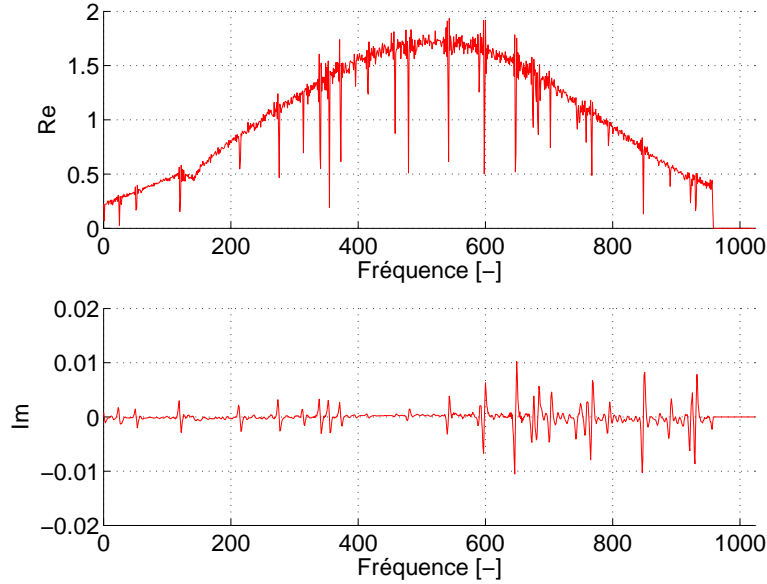


Figure 2.10 – Partie réelle et imaginaire du spectre après correction de phase et troncation simultanée des zones de transition dans le spectre et dans l’interférogramme.

fréquences inférieures. Cette décroissance lente est le résultat de la troncation des zones de transition. En effet, en diminuant la résolution spectrale, l’erreur aux extrémités du spectre se trouve convoluée avec une fonction sinc légèrement plus large dû à la perte de résolution, ce qui entraîne une fuite spectrale de l’erreur vers les fréquences inférieures. Si l’erreur était d’abord tronquée dans le spectre avant la troncation des zones de transition, alors la même fuite de l’erreur surviendrait aux extrémités de l’interférogramme.

Pour contourner cette difficulté et éliminer les zones erronées aux extrémités de l’interférogramme et du spectre simultanément tout en évitant les fuites, nous avons mis au point un filtre non linéaire qui met à zéro les valeurs des points erronés dans les deux domaines en même temps. Ce filtre, qui sera présenté ultérieurement à la section 4.3.2, a été appliqué à notre spectre corrigé (voir figure 2.10). L’erreur résiduelle présentée à la figure 2.11 nous convainc aisément qu’en plus des zones de transition présentes dans l’interférogramme, il existe une erreur localisée aux hautes fréquences du spectre.

Les formes d’erreur énoncées dans cette section peuvent être dans bien des cas négligeables par rapport au niveau de bruit, lequel était absent de notre exemple pour mieux cerner les concepts présentés ici. Ces erreurs n’en demeurent pas moins présentes et illustrent bien les problèmes d’extrémités reliés à la déconvolution en spectrométrie par transformation de Fourier.

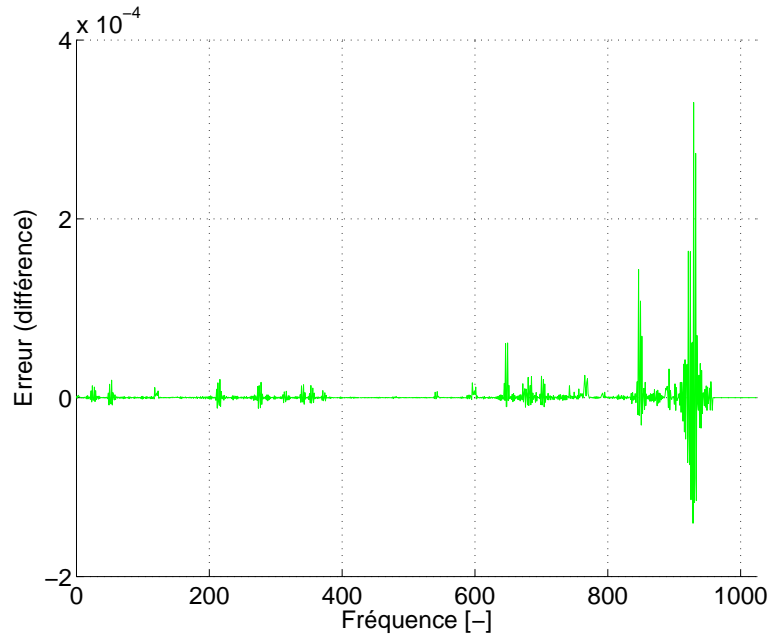


Figure 2.11 – Différence entre la partie réelle du spectre corrigé et le spectre original sans phase, après troncation des zones de transition et troncation simultanée du spectre et de l'interférogramme.

2.4 L'étalonnage complexe

Les concepts d'étalonnage sont nombreux. La méthode actuellement la plus connue en spectrométrie par transformation de Fourier est l'étalonnage complexe [REVERCOMB et al., 1988], qui nécessite deux sources d'étalonnage pour corriger le gain et le biais dus au spectromètre. Cette technique permet de corriger à la fois l'amplitude et la phase des mesures. D'autres procédures encore permettent de déduire la transmittance d'une matière à partir de plusieurs mesures [CHAMBERLAND et al., 2003]. C'est non seulement le gain complexe et le biais de l'instrument qui sont déconvolués, mais aussi le rayonnement de la source avant absorption.

Sans entrer dans les détails de l'étalonnage complexe (le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage de GENEST et TREMBLAY [2003]) nous soulignerons que, dans chaque procédure d'étalonnage, la densité spectrale de l'interférogramme mesuré est divisée par le gain spectral, le spectre d'un corps noir ou bien la mesure d'une autre source. En retournant à l'équation (2.7c), on perçoit tout de suite qu'une division de deux vecteurs dans le domaine du spectre correspond à une déconvolution dans le domaine de l'interférogramme. Il en découle donc que l'étalonnage des mesures de spectrométrie par

transformation de Fourier implique nécessairement des zones de transition dans l'interférogramme, lesquelles devraient être retranchées comme dans le cas de la correction de phase pour assurer la qualité des données étalonnées.

L'importance des zones de transition dépend entre autres de la méthode d'étalonnage choisie. Le calcul d'une transmittance n'impliquera pas la même fonction de correction que l'étalonnage d'un rayonnement de corps noir. Cependant, de façon générale, la densité spectrale que nous désirons déconvoluer de nos données est caractérisée par des variations lentes d'amplitude. Aussi, la fonction de correction correspondant à l'étalonnage d'amplitude seulement sera donc relativement étroite. Lorsqu'on tient compte également de la phase, on peut s'attendre à ce que la largeur de la fonction de correction soit équivalente à la somme de la largeur de la fonction de correction pour la phase seule et de la fonction de correction pour l'amplitude seule.

2.5 Conclusion

Les processus de correction de phase et d'étalonnage des données correspondent donc à une déconvolution dans sa forme la plus simple, c'est-à-dire une division spectrale. Cependant, ce point de vue nous permet de mieux comprendre et décrire les erreurs pouvant survenir aux hautes fréquences et aux grands OPD de nos mesures étalonnées. Cette étude nous a donné l'occasion, entre autres, d'appliquer les fenêtres d'apodisation paramétriques aux algorithmes de correction de phase et de faire des liens avec la théorie des communications FM pour le calcul de la largeur des zones de transition. Nous avons également introduit un filtre non linéaire qui opère à la fois dans le domaine du spectre et dans le domaine de l'interférogramme. Ces notions reviendront bientôt lorsque nous nous intéresserons à la correction de la fonction d'appareil. Mais tout d'abord, cédon le pas à la modélisation de l'ILS.

Chapitre 3

Effet d'échelle : la fonction d'appareil

— Modèle radiométrique de la fonction d'appareil.

Un article tiré de ce présent chapitre fut publié dans *Applied Optics* [DESBIENS, GENEST et TREMBLAY, 2002]. Vous trouverez à l'annexe C la définition des grandeurs radiométriques utilisées dans ce chapitre.

3.1 Introduction

Les besoins actuels en matière de spectrométrie de haute qualité nécessitent une meilleure compréhension de l'effet de l'instrument sur les mesures. Les projets de spectrométrie, particulièrement pour les missions spatiales, requièrent souvent une grande résolution spectrale, un étalonnage radiométrique précis et un haut degré de précision afin de pouvoir analyser les raies spectrales [OGAWA, 2000]. Le nombre croissant d'applications en imagerie hyperspectrale est aussi une motivation importante pour l'étude de la fonction d'appareil [BENNET et al., 1995; PERSKY, 1995]. De plus, pour de tels instruments, le niveau requis de connaissance des contributions de l'instrument sur les mesures est beaucoup plus important. Pour atteindre ces objectifs, une méthode analytique fut proposée pour calculer l'effet de la géométrie du champ de vue d'un spectromètre à transformation de Fourier sur l'ILS [GENEST et TREMBLAY, 1999]. Certains instruments de haute résolution, tel que le spectromètre DA-1 d'ABB Bomem, peuvent avoir une résolution limitée par la géométrie du champ de vue dans l'infrarouge lointain. Un modèle d'ILS permet de prédire l'impact d'une configuration de FTS sur les mesures, de même qu'il constitue un outil important pour les phases de développement d'un nouvel instrument. Une meilleure connaissance de l'ILS ouvre donc la voie à la

conception de spectromètres ayant de plus grands champs de vue ou une configuration plus compacte [BOUCHARD, 2004], et éventuellement au développement d'algorithmes pour corriger l'élargissement de l'ILS résultant de ces nouvelles configurations.

Nous présentons ici le premier modèle formel d'ILS tenant compte des calculs radiométriques complets. L'intensité énergétique est le point de départ de nombreux auteurs pour décrire l'ILS [NIPLE et al., 1982; BRAULT, 1985; PERSKY, 1995; GENEST et TREMBLAY, 1999; BOWMAN et al., 2000]. Tout le détail des étapes liant l'interférogramme à la fonction d'appareil est exposé ici en tant que cœur du modèle (section 3.2). Les relations entre l'ILS, le spectre vrai tel qu'émis par la source et le spectre mesuré par l'instrument sont ensuite dérivées (section 3.3). La seconde partie du modèle est consacrée au calcul de l'ILS à partir de la luminance énergétique de la source, à laquelle on doit référer lorsqu'un FTS est utilisé comme radiomètre (section 3.4). La responsivité du détecteur n'est pas tenue en compte dans ce modèle, mais ses caractéristiques spectrales et spatiales peuvent être considérées de la même manière que la source pour certaines configurations de FTS [GENEST et TREMBLAY, 1999]. Aux sections 3.5 et 3.6, le cas particulier, et fréquent, d'une ouverture circulaire centrée et d'une luminance énergétique uniforme lambertienne dans le champ de vue est exposé afin d'illustrer le modèle et son utilité dans la conception d'un FTS, de même que pour décrire les conditions nécessaires assurant que l'ILS soit le même pour tous les nombres d'onde, à un facteur d'échelle près. La dépendance de l'ILS avec la scène est aussi discutée, et l'impact sur la fonction d'appareil de la prise en considération de l'ouverture du système optique est estimé.

3.2 De l'intensité énergétique à l'ILS

Comme point de départ pour la modélisation de la fonction d'appareil, nous allons d'abord présenter une dérivation formelle de l'ILS basée sur l'intensité énergétique. Cette première dérivation rassemble plusieurs idées que l'on retrouve dans la littérature. À partir de la distribution angulaire du flux lumineux dans l'interféromètre, appelée « intensité énergétique », la puissance modulée transmise par un instrument est facilement modélisée.

La puissance mesurée par un FTS en fonction de la différence de chemin optique ΔX , aussi nommée « OPD » pour « *optical path difference* », constitue l'interférogramme. Cet interférogramme peut être décrit comme la somme des franges d'interférence produites

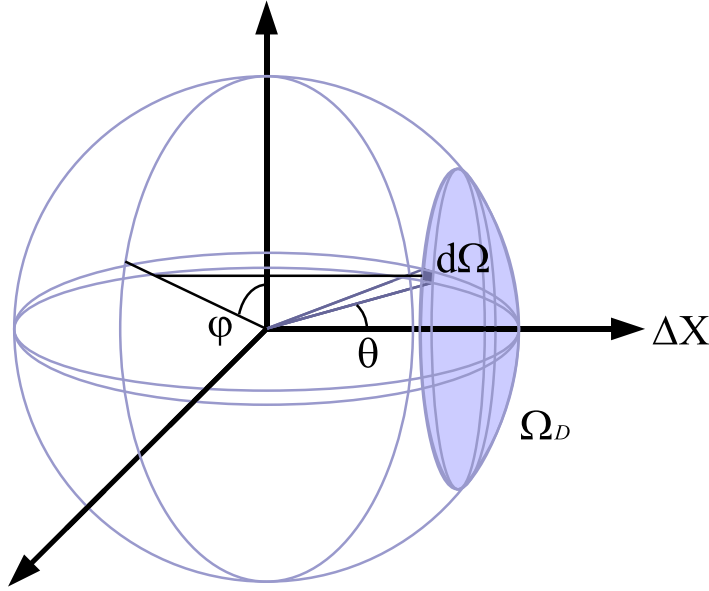


Figure 3.1 – Relation entre l'élément d'angle solide $d\Omega$ et les angles du faisceau (θ, φ) sur la sphère de rayon unitaire. Le domaine d'intégration Ω_D peut être exprimé en un domaine d'intégration en φ (φ_D) et un domaine en θ (θ_D).

par différents faisceaux lumineux monochromatiques :

$$P(\Delta X) = \int_0^\infty P_o(\Delta X, \sigma_o) d\sigma_o, \quad (3.1)$$

où $P_o(\Delta X, \sigma_o) d\sigma_o$ est l'interférogramme d'un faisceau monochromatique de nombre d'onde positif σ_o . Les nombres d'onde peuvent être considérés séparément dû à la propriété de linéarité des interféromètres dans le domaine optique en l'absence de corrélation entre les contributions provenant de différents nombres d'onde [MANDEL et WOLF, 1995]. L'interférogramme d'un faisceau monochromatique correspond, pour un nombre d'onde donné, à la contribution élémentaire de la puissance propagée dans l'ensemble Ω_D des angles acceptés par l'interféromètre. En fonction de la différence de chemin optique $OPD(\Delta X)$, celui-ci est décrit par :

$$P_o(\Delta X, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \left[1 + \cos(2\pi\sigma_o OPD(\Delta X)) \right] d\Omega, \quad (3.2)$$

où $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Les angles θ et φ sont respectivement l'angle hors axe (polaire) et l'angle azimutal de l'interféromètre (voir figure 3.1).

Dans le cas de rayons se propageant à différents angles dans l'interféromètre dû à la divergence du faisceau, la différence de chemin optique est dépendante de l'angle de

propagation par rapport à l'axe optique :

$$\text{OPD}(\Delta X) = \Delta X \cos \theta. \quad (3.3)$$

Ainsi, nous obtenons l'équation de l'interférogramme couramment rencontrée dans la littérature [NIPLE et al., 1982] :

$$P_o(\Delta X, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) [1 + \cos(2\pi\sigma_o\Delta X \cos \theta)] d\Omega. \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) est intégrée complètement sur θ et φ par la plupart des auteurs pour calculer l'interférogramme communément appelé « interférogramme auto-apodisé » [NIPLE et al., 1982; YAP et al., 1982]. L'intensité énergétique $I(\theta, \varphi; \sigma_o)$ représente la puissance transmise dans la direction (θ, φ) à l'intérieur d'un angle solide $d\Omega$ pour chaque nombre d'onde *vrai* σ_o . La différence de chemin optique ΔX considérée ici est l'OPD vu par les rayons se propageant parallèlement à l'axe optique de l'instrument. Par nombre d'onde « vrai » σ_o , nous référons au spectre vrai $S_o(\sigma_o)$ de la lumière émise par la scène (voir figure 3.2a), lequel correspond à la quantité physique que nous désirons estimer par la mesure de l'interférogramme $P(\Delta X)$. Cette précision est faite ici pour mettre en évidence que les nombres d'onde *apparents* σ et le spectre mesuré $S_m(\sigma)$ obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme (figures 3.2c,d) ne sont pas équivalents aux nombres d'onde vrais et au spectre vrai, dû entre autres à la divergence du faisceau dans l'interféromètre. En d'autres mots, le spectre vrai repose sur l'axe des nombres d'onde vrais et représente la quantité qu'un instrument devrait mesurer idéalement. Le spectre mesuré sur l'axe des nombres d'onde apparents est la quantité qui est en fait mesurée par le FTS, en tenant compte des effets instrumentaux. Pour une source monochromatique, la problématique associée à la distribution angulaire du faisceau est souvent décrite sous le nom d'auto-apodisation dans le domaine de l'interférogramme, quoi que ce ne soit pas réellement un effet d'apodisation, et est identifiée à la fonction d'appareil dans le domaine du spectre [CONNES, 1958; GRIFFITHS et DE HASETH, 1986; KAUPPINEN et SAARINEN, 1992].

Nous dériverons, dans le présent modèle, l'expression analytique de la fonction d'appareil. Nous définissons l'ILS comme étant *le spectre apparent d'une source monochromatique tel que mesuré par un FTS, normalisé par la puissance infinitésimale modulée à ce nombre d'onde vrai*. Nous appliquerons en premier lieu la transformation de Fourier sur la partie modulée de l'équation (3.4), soit l'interférogramme d'une source monochromatique, pour obtenir le spectre apparent $S(\sigma, \sigma_o)$ de la lumière modulée à un nombre d'onde vrai σ_o donné. La partie constante de l'équation (3.4) par rapport à la différence

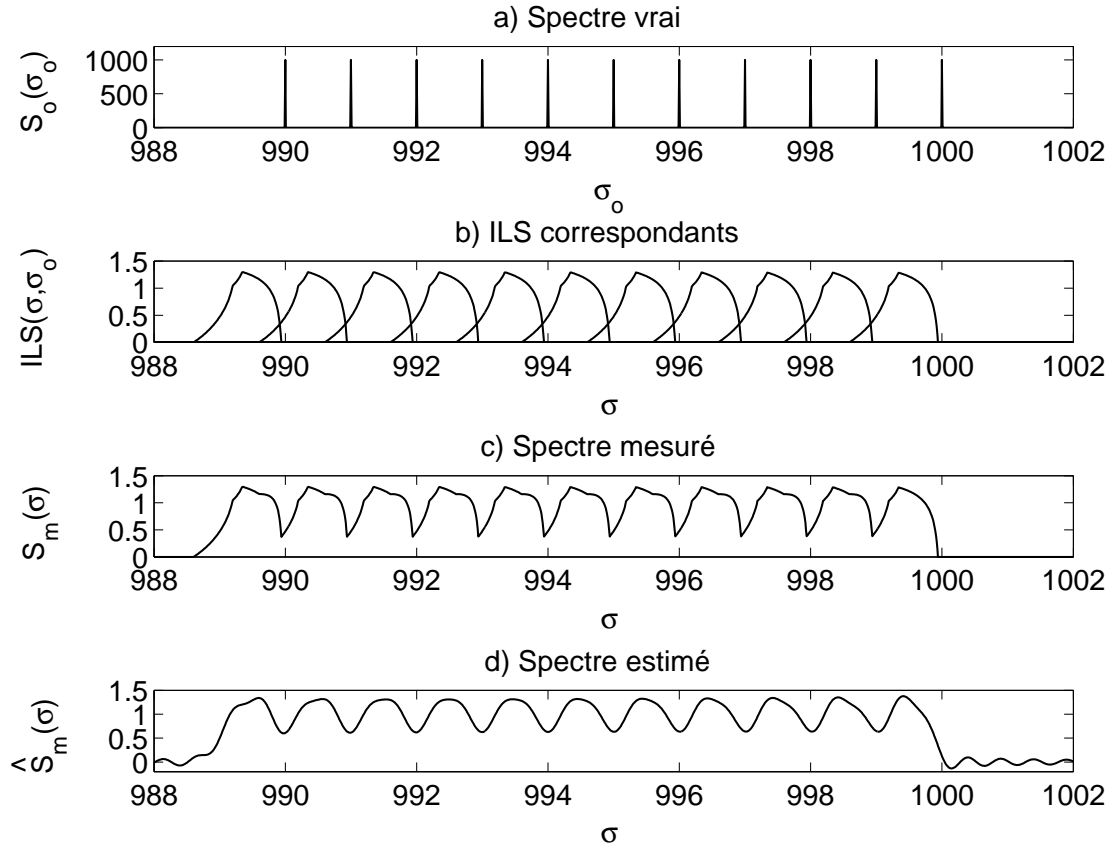


Figure 3.2 – a) Spectre vrai $S_o(\sigma_o)$ d'une source uniforme lambertienne contenant 11 raies d'émission de 990 à 1000 cm^{-1} ; b) fonction d'appareil $ILS(\sigma, \sigma_o)$ correspondant aux raies de la source pour un détecteur carré hors-axe de $300 \times 300 \mu\text{m}^2$ centré dans le champ de vue à $x = 500 \mu\text{m}$ et $y = 400 \mu\text{m}$ ainsi qu'une ouverture circulaire centrée de paramètre $\rho = 0.4$ et une longueur focale de 20 mm; c) Spectre $S_m(\sigma)$ tel que mesuré par le spectromètre; d) Spectre estimé $\hat{S}_m(\sigma)$ obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme pour un interférogramme de longueur finie ($\Delta X_{\text{max}} = \pm 4 \text{ cm}$).

de chemin optique n'est pas retenue ici puisqu'elle représente la partie non modulée de la lumière détectée.

Puisque la transformation de Fourier admet les fréquences négatives, nous définirons le spectre apparent $S(\sigma, \sigma_o)$ par rapport à l'interférogramme complexe¹ afin de séparer les fréquences négatives et positives. L'interférogramme correspondant à la partie modulée de la lumière, $P_{o,m}(\Delta X, \sigma_o)$, peut être réécrit sous la forme suivante en décomposant la fonction cosinus :

$$P_{o,m}(\Delta X, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} \left(e^{i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} + e^{-i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} \right) d\Omega. \quad (3.5)$$

Comme l'intensité énergétique n'est définie que pour les nombres d'onde positifs, nous introduisons ici une extension à la définition de l'intensité énergétique qui nous permettra de traiter séparément les nombres d'onde positifs et négatifs :

$$I(\theta, \varphi; -\sigma_o) \equiv I(\theta, \varphi; \sigma_o). \quad (3.6)$$

Cette définition de l'intensité énergétique implique un spectre bilatéral à partie réelle symétrique et sans partie imaginaire. Nous pouvons insérer cette nouvelle définition dans l'équation (3.5) pour obtenir une écriture de l'interférogramme où les termes peuvent être associés l'un à un nombre d'onde positif, l'autre au nombre d'onde négatif :

$$\begin{aligned} P_{o,m}(\Delta X, \sigma_o) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} e^{i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; -\sigma_o)}{2} e^{-i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous définirons donc le spectre apparent d'un interférogramme monochromatique de la façon suivante² :

$$S(\sigma, \sigma_o) \equiv \mathcal{F}_{[\Delta X, \sigma]} \left\{ \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} e^{i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} d\Omega \right\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \mathcal{F}_{[\Delta X, \sigma]} \left\{ e^{i2\pi\sigma_o\Delta X \cos\theta} \right\} d\Omega, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \delta(\sigma - \sigma_o \cos\theta) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹L'interférogramme complexe peut être relié au signal analytique associé à l'interférogramme d'une source monochromatique.

²Un facteur 2 est appliqué pour tenir compte du fait que seulement la moitié de l'intensité énergétique moyenne est généralement détectée, l'autre moitié étant dirigée vers l'autre port de sortie de l'interféromètre. La normalisation de la fonction d'appareil rend de toute façon l'ILS indépendant de ce facteur.

où $\delta(x)$ est la fonction généralisée delta de Dirac et où les nombres d'onde peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. Nous devons souligner ici que lors du passage de l'équation (3.8) à l'équation (3.9), nous avons supposé que le domaine d'intégration des angles solides Ω_D ainsi que l'intensité énergétique étaient indépendants de l'OPD ΔX . Cette hypothèse implique que les diaphragmes du système optique demeurent les mêmes lorsque l'OPD varie et que le FTS ne souffre pas de vignelage.

Nous sommes maintenant en présence d'une fonction delta de Dirac dans l'équation (3.9), tel qu'obtenu par NIPLE et al. [1982]. Afin de poursuivre notre développement analytique de l'ILS, nous allons profiter des propriétés de cette fonction. Exprimons le domaine d'intégration des angles solides Ω_D en terme des angles (θ, φ) (voir figure 3.1), le domaine φ_D étant une fonction de l'angle θ pour prendre en compte les diverses géométries possibles du champ de vue [GENEST et TREMBLAY, 1999] et le domaine d'intégration de la variable θ étant $\theta_D \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$. Nous obtenons à partir de l'équation (3.9) :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int_{\varphi_D(\theta)} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \delta(\sigma - \sigma_o \cos \theta) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta. \quad (3.10)$$

Pour effectuer l'intégration sur θ , nous devons d'abord appliquer la transformation de variable $\xi = \sigma_o \cos \theta$:

$$S(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{2\sigma_o} \int_{\sigma_o \cos \theta_{\max}}^{\sigma_o \cos \theta_{\min}} \int_{\varphi_D(\arccos(\xi/\sigma_o))} I(\arccos(\xi/\sigma_o), \varphi; \sigma_o) \delta(\sigma - \xi) \, d\varphi \, d\xi. \quad (3.11)$$

Après intégration sur ξ et réorganisation des termes, nous avons :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \begin{cases} \frac{1}{2|\sigma_o|} \int_{\varphi_D(\theta)} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \, d\varphi \Big|_{\theta=\arccos(\sigma/\sigma_o)}, & \cos \theta_{\max} \leq \frac{\sigma}{\sigma_o} \leq \cos \theta_{\min}, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.12)$$

où la relation très significative $\theta = \arccos(\sigma/\sigma_o)$ est établie par l'intégration de la fonction delta de Dirac. L'intensité énergétique $I(\theta, \varphi; \sigma_o)$ au nombre d'onde vrai σ_o est donc transposée en une densité spectrale de puissance apparente par une correspondance entre les angles et les nombres d'onde apparents. Nous relierons par la suite le spectre vrai à l'intensité énergétique [équation (3.13)]. Le lecteur peut trouver l'expression analytique de l'intégration du domaine φ_D pour le cas des détecteurs circulaires et rectangulaires hors-axe dans certaines conditions spécifiques en consultant l'article de GENEST et TREMBLAY [1999].

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la densité spectrale de puissance normalisée représente l'expression directe de l'ILS pour un signal monochromatique de nombre d'onde σ_o . La densité spectrale de la puissance mesurable au nombre d'onde vrai σ_o est obtenue en intégrant l'intensité énergétique sur le domaine des angles solides³ :

$$S_o(\sigma_o) = \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} d\Omega. \quad (3.13)$$

Ainsi, nous pouvons normaliser le spectre apparent $S(\sigma, \sigma_o)$ pour obtenir la fonction d'appareil au nombre d'onde vrai σ_o (figure 3.2b) :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{S(\sigma, \sigma_o)}{S_o(\sigma_o)}, \quad \forall \sigma_o \mid S_o(\sigma_o) > 0. \quad (3.14)$$

De cette normalisation résulte un ILS d'aire unitaire dans le domaine des nombres d'onde apparents⁴. D'après l'équation (3.12), nous pouvons constater que l'ILS est intrinsèquement dépendant de l'intensité énergétique, c'est-à-dire de la source observée. L'ILS n'est donc pas strictement une caractéristique de l'instrument : il peut varier d'une scène à l'autre pour un même instrument. Puisque l'intensité énergétique est fonction du nombre d'onde σ_o , l'ILS variera en général avec σ_o , et pas seulement par le facteur d'échelle bien connu qui élargit les raies d'autant que le nombre d'onde est élevé. Cette dernière condition établit clairement que la définition de l'ILS dans un contexte radiométrique n'a pas de sens si la source n'est pas spécifiée, et met donc en évidence que l'ILS est dépendant de la scène observée. De même, l'équation (3.14) se doit d'être restreinte à $S_o(\sigma_o) > 0$ pour éviter la division par zéro ; l'ILS ne peut donc pas être défini sans la source.

3.3 De l'ILS au spectre

3.3.1 Spectres vrai et mesuré

Il fut établi à l'équation (3.13) que la densité spectrale de puissance vraie est, pour chaque nombre d'onde vrai, l'intégrale de la densité de puissance répartie sur tous les angles. Le spectre apparent, ou mesuré, obtenu par la transformation de Fourier de

³La densité spectrale de la puissance mesurable au nombre d'onde vrai σ_o peut également être obtenue en intégrant l'équation (3.12) sur tous les nombres d'onde apparents :

$$S_o(\sigma_o) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma, \sigma_o) d\sigma.$$

Cependant, cette relation n'est pas satisfaite de façon générale comme nous le verrons à la section 5.3.

⁴Certains défauts de l'interféromètre peuvent produire un ILS dont le module n'est pas d'aire unitaire. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre 5.

l'interférogramme correspond à la somme pondérée des ILS reliés à chaque nombre d'onde vrai détecté par l'interféromètre :

$$S_m(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o. \quad (3.15)$$

Chaque ILS contribuant au nombre d'onde apparent σ est intégré. Par l'équation (3.14), le spectre apparent est donc relié à l'ILS et au spectre vrai (figure 3.1c) :

$$S_m(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o. \quad (3.16)$$

L'ILS étant dépendant des nombres d'onde vrais, il est évident par l'équation (3.16) que le spectre apparent n'est pas la convolution du spectre vrai avec l'ILS. Si l'on connaît l'ILS pour chaque nombre d'onde σ_o , on peut penser implémenter une méthode pour inverser cette équation de Fredholm du premier type [équation (3.16)] dans le but de retrouver le spectre vrai à partir du spectre apparent (ou de l'interférogramme) [BOWMAN et al., 2000; BOUFFARD et al., 2001]. Cependant, nous devons tout d'abord tenir compte de la limitation apportée par la variation finie d'OPD.

3.3.2 Limitation due à la variation finie d'OPD

Puisque la mesure donnée par un FTS est toujours limitée par un OPD maximum, le spectre mesuré sera convolué avec la transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire : la fonction sinc. Aussi, la convolution doit être appliquée des deux côtés de l'équation (3.16), nous donnant ainsi un spectre apparent estimé $\hat{S}_m(\sigma)$ (figure 3.2d) :

$$\hat{S}_m(\sigma) = 2\Delta X_{\max} \text{sinc}(2\sigma\Delta X_{\max}) * \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o, \quad (3.17)$$

où l'opération de convolution est effectuée par rapport à σ . Ceci est équivalent à considérer que l'interférogramme de chaque nombre d'onde vrai est tronqué, ou que l'ILS de chaque nombre d'onde vrai est convolué avec la fonction sinc :

$$\hat{S}_m(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) [2\Delta X_{\max} \text{sinc}(2\sigma\Delta X_{\max}) * \text{ILS}(\sigma, \sigma_o)] d\sigma_o, \quad (3.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \widehat{\text{ILS}}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o. \quad (3.19)$$

En incluant la fonction sinc dans l'ILS, l'application du noyau $\widehat{\text{ILS}}$ devient une opération de filtrage ou de lissage qui implique une perte d'information. Ceci résulte en une équation possiblement mal conditionnée qui rend difficile la résolution du problème inverse [BOUFFARD et al., 2001; BOUFFARD, 2002].

3.4 Solution radiométrique formelle

Pour calculer l'ILS, nous devons d'abord connaître l'intensité énergétique dans l'interféromètre. Puisque l'intensité énergétique est généralement une quantité intermédiaire dans la plupart des calculs radiométriques, nous devons plutôt prendre comme point de départ de notre analyse la source lumineuse elle-même. Afin de tenir compte de la puissance optique admise dans l'instrument, la luminance énergétique de la source doit être intégrée sur les diaphragmes du système optique, lesquels permettent de définir l'étendue du système.

La luminance énergétique spectrale (L) est la densité spectrale de puissance par unité d'angle solide et par élément de surface de la source [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \text{cm}^{-1})$] à un nombre d'onde vrai σ_o donné. La luminance énergétique peut varier avec la position de l'élément de surface et l'angle d'émission [BORN et WOLF, 1999]. La puissance transmise d'un élément de surface de la source à un autre élément de surface quelconque est inversement proportionnelle au carré de la distance entre ces surfaces et proportionnelle aux surfaces effectives (surfaces perpendiculaires à la droite joignant ces deux éléments de surface). Cette loi radiométrique du carré inverse doit être intégrée sur la fenêtre (FOV) et sur la pupille de l'instrument optique afin de calculer la puissance reçue.

La configuration d'interféromètre que l'on considérera pour les calculs est la suivante. Le détecteur est situé dans le plan focal d'une lentille mince idéale et joue le rôle de fenêtre de sortie du système optique. La pupille de l'interféromètre est définie par la lentille de collimation à l'entrée de l'interféromètre. Nous avons choisi un interféromètre imageant le champ de vue pour illustrer l'application de la méthode proposée, puisqu'une telle configuration est couramment rencontrée. Notre problème est maintenant réduit à un simple problème de conception optique plutôt qu'à un problème d'interférométrie. La manipulation des concepts de radiométrie nous aidera à comprendre l'implication de la configuration d'un FTS sur l'ILS.

Soit une lentille de collimation idéale⁵ ayant une distance focale f . Tout rayon provenant d'un point donné du champ de vue est collimaté à un angle donné par la relation $r = f \tan \theta$, où r est la coordonnée radiale dans le champ de vue, l'origine étant fixé sur l'axe optique de l'instrument⁶ (voir figure 3.3). La quantité physique que nous appelons « éclairage énergétique » (E) est la puissance émise par un élément de surface du

⁵Cette approximation est valide lorsque le diamètre d'une lentille est plus petit que sa distance focale (grand *f-number*).

⁶L'axe optique d'un FTS est défini par la droite perpendiculaire aux miroirs des bras de l'interféromètre et passant par le point focal image de la lentille mince (au détecteur).

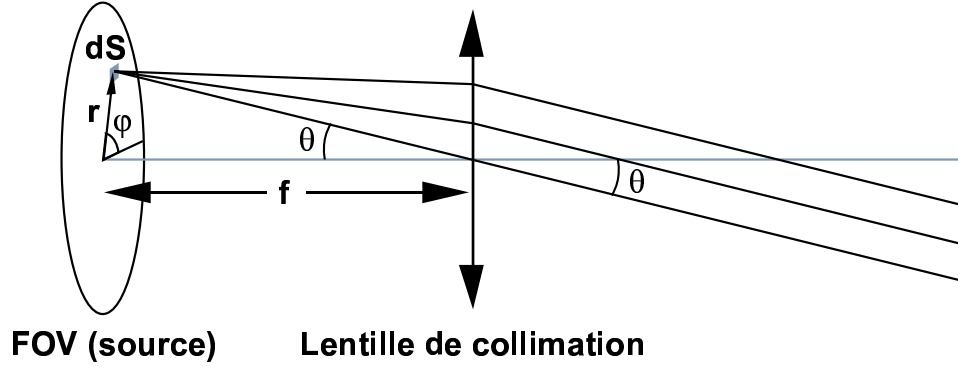


Figure 3.3 – Relation entre l'angle de propagation θ et la position dans le champ de vue (r, φ) pour un collimateur de focale f .

champ de vue situé à la position (r, φ) et reçue par la surface de la pupille A , pour chaque nombre d'onde σ_o [O'SHEA, 1985] :

$$E(r, \varphi; \sigma_o) = \int_A L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \frac{\cos^2 \alpha \, dA}{R^2}, \quad (3.20)$$

où

$$\cos \alpha = \frac{f}{\sqrt{f^2 + r^2 + r_A^2 - 2rr_A \cos(\varphi - \varphi_A)}}. \quad (3.21)$$

Ici, (r, φ) sont les coordonnées polaires dans le plan de la source, (r_A, φ_A) sont les coordonnées polaires dans le plan de la pupille et α est l'angle entre l'axe optique et la droite de longueur R joignant deux points de chacun de ces plans, tel qu'illustré à la figure 3.4. Le terme $\cos^2 \alpha$ dans l'équation (3.20) est le facteur de vue pour deux surfaces élémentaires. Puisque $f = R \cos \alpha$, nous pouvons écrire que

$$E(r, \varphi; \sigma_o) = \frac{1}{f^2} \int_A L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \cos^4 \alpha \, dA. \quad (3.22)$$

Pour exprimer l'intensité énergétique dans l'interféromètre comme une fonction de la luminance énergétique de la source, nous tirerons avantage de l'étape intermédiaire suivante. L'éclairement énergétique E reçu sur un côté de la lentille de collimation peut être relié à l'intensité énergétique I dans l'interféromètre en utilisant la conservation de puissance entre chaque côté de la lentille :

$$dP = E \, dS = I \, d\Omega. \quad (3.23)$$

Avec la transformation entre les éléments de surface et la relation entre les coordonnées du champ de vue et les angles de propagation des faisceaux dans l'interféromètre ($r =$

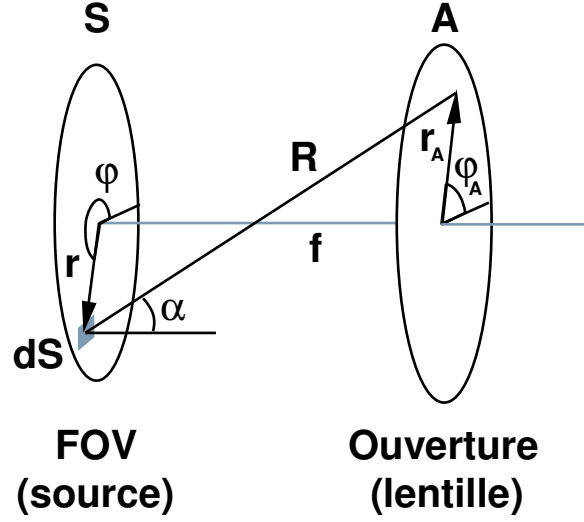


Figure 3.4 – Coordonnées du champ de vue (r, φ) et de l'ouverture (r_A, φ_A) pour le calcul de l'intensité énergétique I à partir de la luminance énergétique L de la source après focalisation du champ de vue.

$f \tan \theta$), il est possible de relier un élément de surface de la source dS à un élément d'angle solide $d\Omega$ dans l'instrument :

$$dS = r dr d\varphi = f^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{f^2}{\cos^3 \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{f^2}{\cos^3 \theta} d\Omega. \quad (3.24)$$

Substituant l'équation (3.24) dans l'équation (3.23), la puissance émise par élément de surface de la source peut être exprimée comme étant la puissance transmise dans un élément d'angle solide avec la relation

$$I = \frac{f^2}{\cos^3 \theta} E. \quad (3.25)$$

L'intensité énergétique peut maintenant être calculée à partir de la luminance énergétique de la source par substitution de l'éclairement énergétique, équation (3.22), dans la relation donnée par l'équation (3.25) :

$$I(\theta, \varphi; \sigma_o) = \frac{1}{\cos^3 \theta} \int_A L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \cos^4 \alpha dA \Big|_{r=f \tan \theta}. \quad (3.26)$$

Aussi, si l'on rappelle l'équation du spectre apparent d'une source monochromatique [équation (3.12)], nous obtenons une fonction d'appareil [équation (3.14)], décrite en

terme de la luminance énergétique de la scène :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \begin{cases} \frac{1}{2|\sigma_o|} \int_{\varphi_D(\theta)} \int_A L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^3 \theta} dA d\varphi & \left. \begin{array}{l} r=f \tan \theta \\ \theta=\arccos(\sigma/\sigma_o) \\ \cos \theta_{\max} \leq \sigma/\sigma_o \leq \cos \theta_{\min}, \end{array} \right| \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.27)$$

3.5 Cas d'une ouverture circulaire centrée et d'une source lambertienne uniforme

Soit une ouverture circulaire centrée sur l'axe optique et une source placée dans le plan de la fenêtre d'entrée (champ de vue). La source est posée uniforme et lambertienne. Cette dernière hypothèse implique que la luminance énergétique L d'une surface élémentaire de la source ou de la scène est constante en fonction de la direction (angle α). Autrement dit, la puissance émise par la source est reliée à la direction par un facteur $\cos \alpha$, étant maximale à la normale de la surface d'émission et nulle pour les angles rasant. La luminance énergétique est considérée uniforme de façon à ce qu'elle ne dépende pas de la position de l'élément de surface de la source dans le champ de vue.

Nous introduisons donc l'hypothèse de source lambertienne uniforme,

$$L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \equiv L(\sigma_o), \quad (3.28)$$

dans l'équation (3.26) pour calculer l'intensité énergétique dans l'interféromètre :

$$I(\theta, \varphi; \sigma_o) = \frac{L(\sigma_o)}{\cos^3 \theta} \int_A \cos^4 \alpha dA \Big|_{r=f \tan \theta}. \quad (3.29)$$

L'intégrale de l'équation (3.29) est facilement évaluée en substituant $\cos \alpha$ par l'équation (3.21) et en considérant une ouverture circulaire centrée A de rayon R_A :

$$\int_A \cos^4 \alpha dA \Big|_{r=f \tan \theta} = \frac{\pi f^2}{2} \left[1 + \frac{\frac{R_A^2}{f^2} - \sec^2 \theta}{\sqrt{(\frac{R_A^2}{f^2} - \sec^2 \theta)^2 + 4 \frac{R_A^2}{f^2}}} \right]. \quad (3.30)$$

Cette dernière équation montre que l'intensité énergétique n'est plus fonction de l'angle azimutal du champ de vue φ dû à la symétrie circulaire de l'ouverture et à l'uniformité de la source :

$$I(\theta, \varphi; \sigma_o) \equiv I(\theta; \sigma_o). \quad (3.31)$$

Les hypothèses prises en compte dans cette section permettent donc de réécrire l'ILS sous une forme simplifiée. Puisque l'intensité énergétique n'est plus fonction de φ , le spectre apparent d'un faisceau monochromatique [équation (3.12)] devient

$$S(\sigma, \sigma_o) = \begin{cases} \frac{I(\theta; \sigma_o)}{2|\sigma_o|} \int_{\varphi_D(\theta)} d\varphi \Big|_{\theta=\arccos(\sigma/\sigma_o)}, & \cos \theta_{\max} \leq \frac{\sigma}{\sigma_o} \leq \cos \theta_{\min}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Il est avantageux d'introduire ici les nombres d'onde normalisés $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_o$. Cette normalisation, appliquée à l'intensité énergétique [équation (3.29)], au spectre apparent [équation (3.32)] et au spectre vrai $S_o(\sigma_o)$, permet de définir trois facteurs contribuant à la fonction d'appareil : le facteur d'ouverture⁷ $F_A(\bar{\sigma})$, le facteur de champ de vue $F_\varphi(\bar{\sigma})$ et le facteur de normalisation F_N :

$$F_A(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\cos^3 \theta} \int_A \cos^4 \alpha dA \Big|_{\substack{r=f \tan \theta \\ \theta=\arccos \bar{\sigma}}}, \quad (3.33)$$

$$F_\varphi(\bar{\sigma}) = \begin{cases} \int_{\varphi_D(\theta)} d\varphi \Big|_{\theta=\arccos \bar{\sigma}}, & \cos \theta_{\max} \leq \bar{\sigma} \leq \cos \theta_{\min}, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$F_N = \int_0^1 F_A(\bar{\sigma}) F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}. \quad (3.35)$$

Ces facteurs peuvent être utilisés pour exprimer $S(\sigma, \sigma_o)$ et $S_o(\sigma_o)$ afin de simplifier l'écriture de l'ILS :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{2|\sigma_o|} L(\sigma_o) F_A(\bar{\sigma}) F_\varphi(\bar{\sigma}), \quad (3.36)$$

$$S_o(\sigma_o) = \frac{1}{2} L(\sigma_o) F_N. \quad (3.37)$$

L'ILS peut maintenant être décomposé en facteurs, chacun étant calculé analytiquement. La luminance énergétique est extraite de l'intégration sur φ , de même que du facteur d'ouverture. Ainsi, l'ILS se réécrit comme suit :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{|\sigma_o|} \frac{F_A(\bar{\sigma}) F_\varphi(\bar{\sigma})}{F_N}, \quad (3.38a)$$

$$= \frac{1}{|\sigma_o|} \times \text{facteur d'ouverture} \times \text{facteur de FOV} \div \text{facteur de normalisation}. \quad (3.38b)$$

L'ILS factorisé, équation (3.38a), montre que la forme de l'ILS est dépendante uniquement du nombre d'onde normalisé $\bar{\sigma}$, mais que son amplitude varie en fonction du nombre

⁷C'est la propriété lambertienne de la source qui rend le facteur d'ouverture indépendant de la luminance énergétique.

d'onde vrai σ_o pour maintenir une aire constante dans le domaine des nombres d'onde apparents σ .

Le cas présenté ici, une source uniforme lambertienne, est le *seul* cas où le profil de l'ILS est totalement indépendant de la source ou de la scène observée. L'ILS, comme fonction des nombres d'onde normalisés $\bar{\sigma}$, est le même pour chaque nombre d'onde vrai σ_o à un facteur $1/|\sigma_o|$ près. Nous pourrions imaginer une forme générale de luminance énergétique pour laquelle l'ILS serait invariant, en fonction des nombres d'onde normalisés $\bar{\sigma}$, pour chaque nombre d'onde vrai σ_o :

$$L(r, \varphi; \alpha; \sigma_o) \equiv g(r, \varphi; \alpha)h(\sigma_o). \quad (3.39)$$

Avec une telle luminance énergétique, la forme du spectre serait la même pour chaque point de la source mais la source ne serait pas nécessairement lambertienne ou uniforme. Dans ce cas, la forme de l'ILS serait dépendante de la source, plus spécifiquement des caractéristiques spatiales de la source $g(r, \varphi; \alpha)$. Une luminance énergétique de ce type est très restrictive puisque les processus d'émission, de réflexion et d'absorption responsables de la non-uniformité spatiale de la source sont généralement dépendants du nombre d'onde.

3.6 Évaluation de l'effet d'une ouverture circulaire centrée sur l'ILS pour une source lambertienne uniforme

L'effet d'une ouverture circulaire centrée sur l'ILS pour le cas d'une source lambertienne uniforme est relativement faible. Il peut être décrit comme une correction sur le déplacement spectral de l'ILS, c'est-à-dire un déplacement de la position moyenne de l'ILS dépendant du nombre d'onde, et comme une faible distorsion de la forme de raie. Le nombre d'onde moyen de l'ILS est caractérisé par le moment de premier ordre de la fonction d'appareil :

$$M = \frac{\int_0^1 \bar{\sigma} \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\bar{\sigma}}{\int_0^1 \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\bar{\sigma}}. \quad (3.40)$$

où les nombres d'onde normalisés $\bar{\sigma}$ sont fonction des nombres d'onde apparents σ et $d\bar{\sigma} = d\sigma/\sigma_o$. Le facteur d'ouverture peut être exprimé comme une fonction du paramètre d'ouverture normalisé $\rho = R_A/f$. Ce facteur est le résultat de l'intégration de l'intensité énergétique sur l'ouverture [équation (3.26)] avec la luminance énergétique extraite de

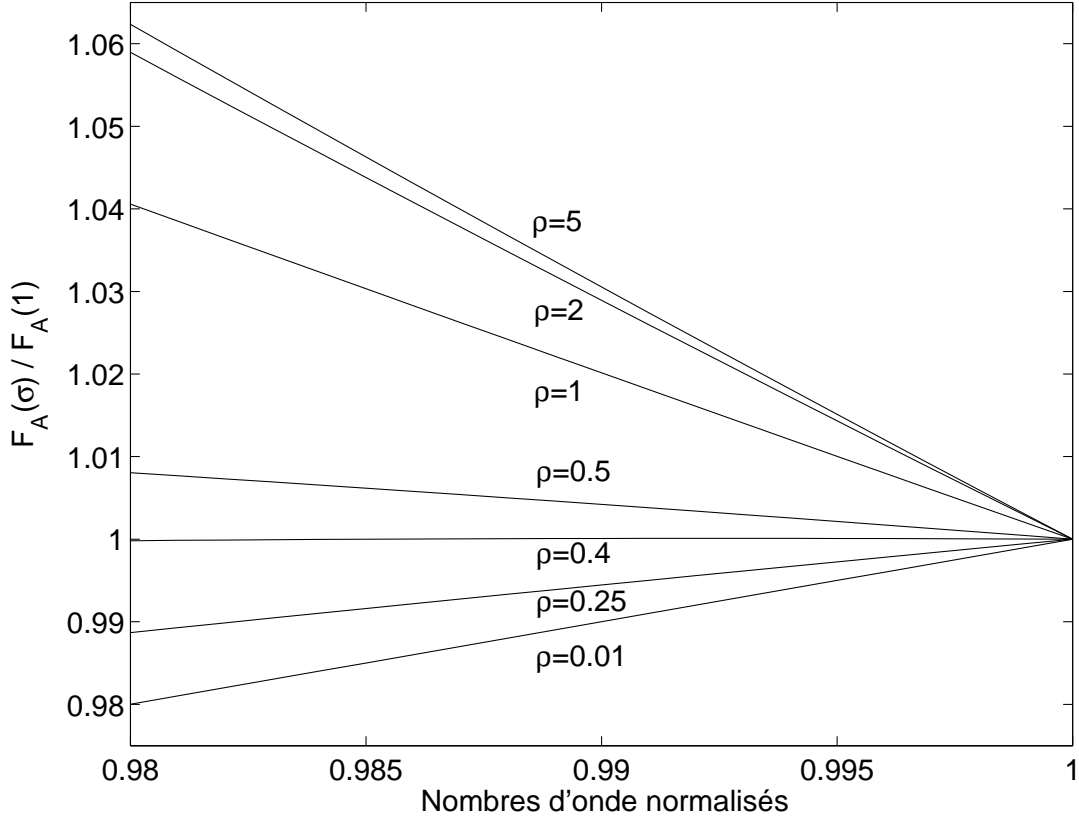


Figure 3.5 – Facteur d'ouverture $F_A(\bar{\sigma})$ pour une ouverture circulaire centrée. La normalisation est faite par rapport à $F_A(1)$. Les paramètres d'ouverture utilisés sont $\rho = 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2$ et 5 . Ce graphique représente la fonction qui multiplie l'ILS dû au champ de vue seul. Le facteur $F_A(\bar{\sigma})$ est décrit avec beaucoup de précision par une équation polynomiale du premier ordre avec une très faible pente.

l'intégrale [GENEST, 2001] :

$$F_A(\bar{\sigma}) = \frac{\pi f^2}{2\bar{\sigma}^3} \left[1 + \frac{\rho^2 - 1/\bar{\sigma}^2}{\sqrt{(\rho^2 - 1/\bar{\sigma}^2)^2 + 4\rho^2}} \right]. \quad (3.41)$$

Comme la plage de nombres d'onde normalisés $\bar{\sigma}$ pour laquelle l'ILS est non nul fait partie de l'intervalle $[\cos \theta_{\max}, \cos \theta_{\min}]$ [voir équation (3.34)], et que la divergence dans un FTS est beaucoup plus faible que 10° , alors l'ILS normalisé sera contenu dans l'intervalle $[0.98, 1.0]$. Notons cependant que l'approximation de lentille mince devient inadéquate pour $\rho > 0.5$. Il faut donc interpréter ce résultat avec prudence.

Le facteur d'ouverture $F_A(\bar{\sigma})$ peut être très bien approché par une équation linéaire (figure 3.5) :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{|\sigma_o|} \frac{F_A(\bar{\sigma})F_\varphi(\bar{\sigma})}{F_N} \approx \frac{1}{|\sigma_o|} (c_1 + c_2\bar{\sigma}) \frac{F_\varphi(\bar{\sigma})}{F_N}, \quad (3.42)$$

où

$$c_1 = F_A(\bar{\sigma})|_{\bar{\sigma}=\cos\theta_{\min}} - c_2 \cos\theta_{\min}, \quad (3.43a)$$

$$c_2 = \frac{F_A(\bar{\sigma})|_{\bar{\sigma}=\cos\theta_{\min}} - F_A(\bar{\sigma})|_{\bar{\sigma}=\cos\theta_{\max}}}{\cos\theta_{\min} - \cos\theta_{\max}}. \quad (3.43b)$$

Maintenant, en calculant le premier moment [équation (3.40)] de l'ILS à partir de l'approximation donnée à l'équation (3.42), nous pouvons écrire que

$$M \approx \frac{c_1}{F_N} \int_0^1 \bar{\sigma} F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma} + \frac{c_2}{F_N} \int_0^1 \bar{\sigma}^2 F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}, \quad (3.44)$$

$$F_N \approx c_1 \int_0^1 F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma} + c_2 \int_0^1 \bar{\sigma} F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}. \quad (3.45)$$

À partir de ces équations, nous pouvons voir que le premier moment de l'ILS peut être décrit avec la moyenne M' et le moment centré de deuxième ordre V' du facteur de champ de vue $F_\varphi(\bar{\sigma})$, lequel est le principal effet inclus dans l'ILS :

$$M' = \frac{\int_0^1 \bar{\sigma} F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}}{\int_0^1 F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}}, \quad (3.46)$$

$$V' = \frac{\int_0^1 \bar{\sigma}^2 F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}}{\int_0^1 F_\varphi(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}} - (M')^2. \quad (3.47)$$

Lorsque nous tenons compte de la radiométrie, le premier moment M' du facteur de champ de vue augmente d'une quantité ΔM quand le facteur d'ouverture est ajouté :

$$\Delta M = M - M' = \frac{c_2 V'}{c_1 + c_2 M'}. \quad (3.48)$$

La figure 3.6 illustre la correction apportée par une ouverture circulaire au premier moment de l'ILS, pour un champ de vue circulaire centré et uniformément illuminé (ILS « *boxcar* »). La correction est tracée par rapport au nombre d'onde normalisé minimum de l'ILS ($\bar{\sigma}_{\min} = \cos\theta_{\max}$) pour différentes valeurs du paramètre d'ouverture normalisée ρ . Nous pouvons voir que l'ouverture n'a qu'un très faible effet sur l'ILS puisque la puissance lumineuse captée par l'ouverture varie lentement en fonction de l'angle de propagation.

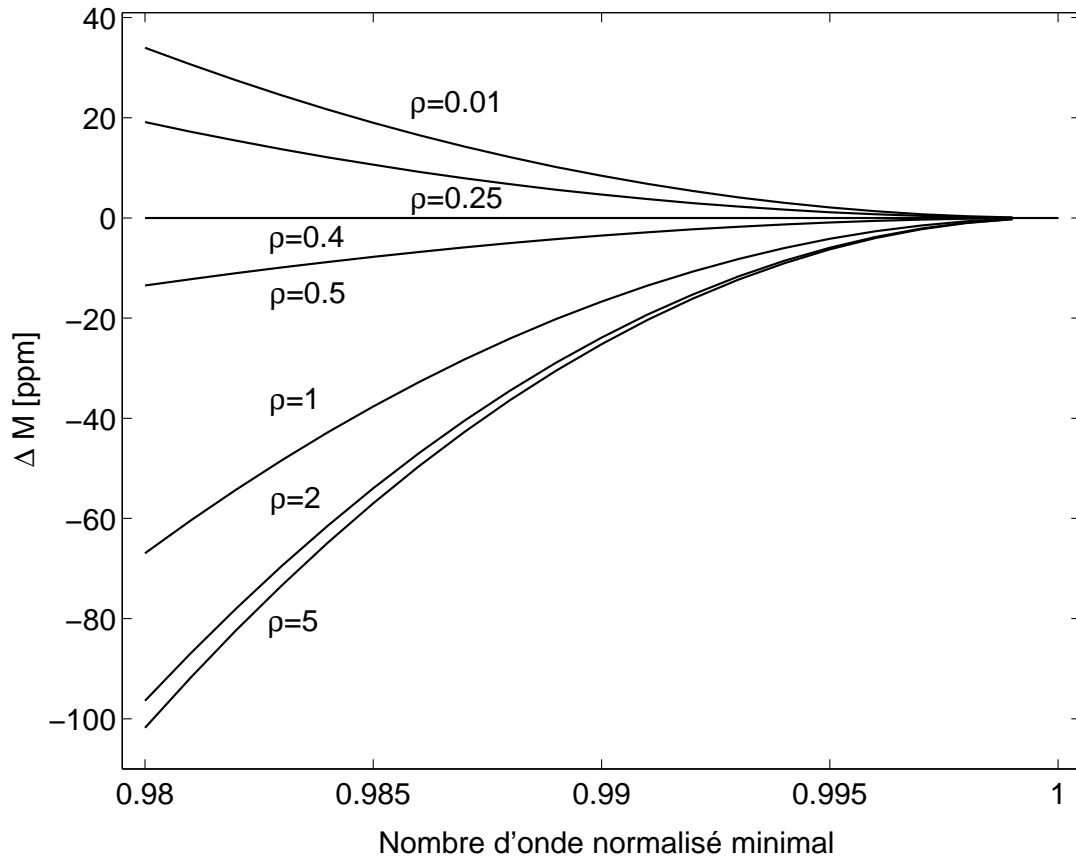


Figure 3.6 – Correction [ppm] ajoutée par une ouverture circulaire centrée au moment du premier ordre de l'ILS d'un champ de vue circulaire centré et d'une source uniforme et lambertienne centrée. Les paramètres d'ouverture normalisés sont ici $\rho = 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2$ et 5 , et la correction est représentée en fonction du nombre d'onde normalisé minimal détecté $\bar{\sigma}_{\min}$. La divergence du faisceau est donnée par $\theta_{\max} = \arccos \bar{\sigma}_{\min}$. Nous pouvons voir que la différence entre le moment de premier ordre de l'ILS dû au champ de vue seul et celui de l'ILS tenant compte de l'ouverture augmente pour un ILS plus large.

3.7 Conclusion

Nous avons présenté un modèle analytique d'ILS basé sur les concepts de radiométrie : la luminance énergétique de la source et l'intensité énergétique dans l'interféromètre. La configuration de spectromètre considérée était un spectromètre imageant le champ de vue, lequel a la particularité de séparer spatialement les nombres d'onde apparents d'un faisceau monochromatique dans la fenêtre de sortie. Avec la connaissance de l'intensité énergétique dans l'interféromètre, calculée à partir de la luminance énergétique de la scène, nous utilisons les équations reliant les angles de propagation dans l'interféromètre et les nombres d'onde apparents, relation résultant de la dépendance du signal modulé face à l'angle de propagation. L'ILS normalisé impose généralement une aire unitaire pour refléter le fait que toute la puissance reçue à un nombre d'onde vrai est dispersée sur une plage de nombres d'onde apparents lorsque que nous appliquons la transformation de Fourier à l'interférogramme, tout en conservant la puissance totale. Nous aurions obtenu des résultats identiques avec un détecteur surdimensionné placé dans la pupille de sortie pour un même champ de vue et une même ouverture.

Le modèle mène aussi à une formulation élégante du spectre mesuré obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme auto-apodisé, en termes d'ILS et de spectre vrai. Cette formulation sera le point de départ pour le développement d'un algorithme de correction d'ILS. La fonction d'appareil n'était généralement considérée que comme un effet de champ de vue. Ce modèle nous montre que lorsqu'on considère la radiométrie dans un modèle d'ILS, l'ouverture du système optique contribue à l'expression de l'ILS. Dans le cas d'une source uniforme lambertienne et d'une ouverture circulaire centrée, nous avons démontré la possibilité d'exprimer l'ILS en un produit de facteurs, chacun pouvant être calculé analytiquement dans le cas d'un détecteur circulaire ou carré hors-axe placé dans le champ de vue. Un algorithme de correction d'ILS devrait bénéficier de la possibilité d'avoir une expression analytique de l'ILS lorsque que l'inversion est appliquée en vue d'estimer le spectre vrai.

Ce travail démontre aussi la dépendance de l'ILS avec la scène, laquelle avait été soulignée dans des publications récentes [GENEST et TREMBLAY, 1999; BOWMAN et al., 2000; GENEST, 2001]. Nous avons montré que la non-uniformité de la luminance énergétique peut affecter l'ILS associé à chaque nombre d'onde vrai et que l'ILS change généralement d'un nombre d'onde à l'autre. Ce modèle a donc un impact sur les concepts d'étalonnage puisque généralement les sources d'étalonnage n'ont pas les caractéristiques spatiales de la scène observée. Les méthodes courantes d'étalonnage devront donc être révisées pour

tenir compte de l'ILS, cet étalement dans le spectre mesuré de l'énergie associée à un nombre d'onde vrai.

Chapitre 4

Intégration et inversion matricielles de la fonction d'appareil

— Algorithmique.

4.1 Introduction

Plusieurs efforts ont été déployés pour tirer bénéfice des modèles analytiques de fonction d'appareil et inclure ceux-ci dans les algorithmes servant à produire des spectres synthétiques ou encore dans les algorithmes de correction d'ILS [BOWMAN et al., 2000; BOUFFARD, 2002]. L'idée de corriger les mesures pour retirer la distorsion introduite par la fonction d'appareil est encore relativement récente. Aussi, la préoccupation grandissante avec laquelle les scientifiques et les ingénieurs cherchent à caractériser l'ILS de leur spectromètre par transformation de Fourier nous incite à poursuivre la mise au point d'algorithmes de correction d'ILS. L'approche que nous nous proposons de reprendre ici est l'approche matricielle préconisée par BOUFFARD lors de travaux antérieurs. Cette fois encore, la difficulté fondamentale demeure la manipulation de la fonction de résolution sinc, tout comme dans la problématique de l'apodisation (chapitre 1) et dans la problématique de l'étalonnage ou de la correction de phase (chapitre 2). Un degré de difficulté supplémentaire est introduit par l'effet d'échelle, qui était réduit à une convolution locale pour corriger l'ILS dans les premiers travaux abordant ce sujet [RASPOLLINI et al., 1998; AHRO et al., 2000].

Nous poserons tout d'abord le cadre dans lequel nous évoluerons en vue d'élaborer un algorithme précis et rigoureux résolvant le problème de l'intégration et de l'inversion de la fonction d'appareil. À partir de l'analyse des propriétés de l'ILS et des relations

matricielles entre le domaine spectral et le domaine de l'interférogramme, nous exposons une méthode pour discrétiser l'équation intégrale reliant les spectres vrai et mesuré (section 4.2). Nous verrons ensuite de quelle façon utiliser cette forme discrète pour intégrer (section 4.3) puis inverser l'ILS (section 4.4). La stabilité de l'inversion et l'étude du bruit seront abordées à ce point. À la section 4.5, nous décrivons l'implémentation d'un algorithme rapide d'intégration d'ILS qui nous permettra de dépasser les limites imposées par une méthode matricielle. Nous présenterons ensuite quelques validations que nous avons faites à partir de mesures expérimentales de la fonction d'appareil (section 4.6). Finalement, nous dériverons de nouveau à la section 4.7 l'approximation à l'aide d'une convolution de l'intégration de la fonction d'appareil à partir des résultats obtenus dans nos travaux.

4.1.1 Définition du problème

Le modèle d'ILS développé au chapitre précédent nous permet de relier le spectre mesuré $S_m(\sigma)$ au spectre vrai $S_o(\sigma_o)$ par le noyau ILS(σ, σ_o) :

$$S_m(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o. \quad (3.16)$$

Nous prendrons cette dernière équation comme point de départ pour notre problème. Nous chercherons une méthode matricielle pour intégrer l'ILS à un spectre vrai échantillonné afin de simuler un spectre mesuré, méthode qui nous permettra possiblement d'inverser cette opération, c'est-à-dire recouvrer le spectre vrai à partir d'un spectre mesuré [DESBIENS et al., 2003b]. Déjà nous pouvons regarder l'équation (3.16) comme une équation matricielle impliquant des vecteurs et des matrices continus et infinis¹ :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} \sigma \\ \downarrow \\ \sigma \end{array} \right]}_{S_m} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \sigma & \xrightarrow{\sigma_o} \\ \downarrow & \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) \\ \sigma & \downarrow \\ \sigma & \sigma_o \end{array} \right]}_{\text{ILS}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \sigma_o \\ \downarrow \\ \sigma_o \end{array} \right]}_{S_o}. \quad (4.1)$$

Cette représentation nous donne une indication sur la voie à suivre pour parvenir à une discrétisation de cette intégrale de Fredholm du premier type.

¹Le formalisme des matrices continues et infinies est présenté entre autres par COHEN-TANNOUJJI et al. [1996].

À partir des modèles théoriques d'ILS développés dans ce travail et dans d'autres publications [NIPLE et al., 1982; KAUPPINEN et SAARINEN, 1992; GENEST et TREMBLAY, 1999], nous avons décidé de considérer une fonction d'ILS de la forme

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{|\sigma_o|} H\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right), \quad (4.2)$$

limitée en fréquence et non nulle seulement pour $0 \leq \sigma/\sigma_o \leq 1$. Selon notre modèle d'ILS, ceci correspond à une matrice d'ILS dont les coefficients non nuls sont regroupés dans une zone limitée près de la diagonale :

$$\text{ILS} = \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right]. \quad (4.3)$$

La forme analytique imposée implique que la géométrie de l'ILS demeure la même pour chaque fréquence. Comme nous l'avons vu, cette condition requiert une luminance énergétique spatialement identique pour chaque fréquence². Cette forme analytique s'applique dans les modèles considérant la géométrie du détecteur, l'ouverture [DESBIENS et al., 2002] et les aberrations [GENEST et TREMBLAY, 2002].

La dernière contrainte que nous imposons dans l'étude de l'inversion d'ILS est que le spectre de la source soit limité en fréquence. La fréquence maximale du spectre devra être inférieure à deux fois la fréquence d'échantillonnage de l'interférogramme pour éviter le repliement spectral (théorème d'échantillonnage de Nyquist [NYQUIST, 1928; SHANNON, 1949]). Cette fréquence maximale doit être suffisamment inférieure à la fréquence de Nyquist pour que le recouvrement spectral dû à la troncation et à l'échantillonnage de l'interférogramme ne résulte pas en une distorsion significative du spectre, hormis la perte de résolution.

4.1.2 ILS et résolution : physique du problème

La forme analytique d'ILS considérée ici [équation (4.2)] semble justifiable physiquement dans le cadre de la mesure du spectre du champ électromagnétique. Cette

²Le modèle radiométrique d'ILS montre bien que tous les effets géométriques peuvent être reliés aux nombres d'onde normalisés, s'ils sont indépendants de la longueur d'onde (voir section 3.4).

forme nous indique que la résolution maximale d'un instrument est dépendante de la fréquence. La résolvançe s'exprime donc comme $\mathcal{R} \propto \sigma_o/\Delta\sigma_o$ ou $\lambda/\Delta\lambda$. On retrouve également une limite similaire pour la plupart des types de spectromètres (dispersifs, Fabry-Perot) [JACQUINOT, 1954]; cependant, cette dépendance ne semble pas s'appliquer à certains types de spectromètres par transformation de Fourier à champ compensé (*field widening*) [CONNES, 1956]. En fait, il est théoriquement possible d'obtenir une résolution infinie à l'aide d'un spectromètre à champ compensé, mais une analyse plus poussée des composants optiques, notamment des aberrations, conduirait probablement à une résolvançe de la même forme [BOUCHAREINE et CONNES, 1963].

4.2 Intégration de l'ILS

Afin de pouvoir procéder à l'intégration de l'ILS, nous allons tout d'abord étudier les liens qui existent entre le domaine spectral et le domaine de l'interférogramme d'un point de vue matriciel. Nous exposerons les propriétés de la matrice de Fourier, valides autant sous sa forme continue que discrète, et son utilisation pour l'expression des spectres et interférogrammes vrais et mesurés. Nous établirons ensuite sous forme matricielle et intégrale l'équivalent de l'équation intégrale (3.16) dans le domaine de l'interférogramme. Nous verrons alors quels liens étroits unissent la matrice d'ILS et sa contrepartie dans le domaine de l'interférogramme lorsque la forme analytique considérée est décrite par un effet d'échelle. Cette dernière relation sera la clé de notre développement, nous permettant de discrétiser les matrices et vecteurs continus de façon élégante et rigoureuse.

4.2.1 Relations matricielles

Nous avons vu que l'équation (4.2) pouvait s'écrire sous une forme matricielle où, pour l'instant, les vecteurs et matrices sont continus et infinis :

$$\mathbf{s}_m = \text{ILS } \mathbf{s}_o. \quad (4.4)$$

Pour effectuer le passage entre le domaine spectral et le domaine de l'interférogramme, nous introduisons ici la matrice de Fourier \mathbf{F} , c'est-à-dire la matrice qui permet de faire la transformation de Fourier d'un vecteur. Les coefficients de cette matrice sont tout simplement les exponentielles complexes que l'on retrouve dans la transformation de

Fourier, avec les indices du coefficient en argument :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} \sigma \\ \downarrow \\ \sigma \end{array} \right]}_s = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \sigma \\ \downarrow \\ \sigma \end{array} \right]}_F \xrightarrow{x} \underbrace{\left[\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x \end{array} \right]}_i. \quad (4.5)$$

L'interférogramme vrai i_o et l'interférogramme mesuré i_m sont donc reliés aux spectres vrai s_o et mesuré s_m par cette matrice :

$$s_o = F i_o, \quad i_o = F^{-1} s_o, \quad (4.6a)$$

$$s_m = F i_m, \quad i_m = F^{-1} s_m. \quad (4.6b)$$

Propriétés de la matrice de Fourier F

Avant de poursuivre notre développement, exposons brièvement les propriétés de la matrice de Fourier. Tout d'abord, cette matrice est symétrique :

$$F^T = F, \quad (4.7)$$

et unitaire³ :

$$F^{-1} = F^\dagger, \quad (4.8)$$

où A^T est la matrice A transposée, A^{-1} est la matrice A inverse, et où $A^\dagger \equiv (A^*)^T$ est la matrice A adjointe. De ces deux propriétés, on déduit que $F^{-1} = F^*$. Ainsi, puisque F est une matrice unitaire, on a simplement que

$$FF^\dagger = F^\dagger F = \mathbf{I}, \quad (4.9)$$

³Attention, sous la forme discrète de la matrice F, un facteur $1/N$ rend la matrice non unitaire et $F^{-1} = \frac{1}{N}F^\dagger$. Il est possible de retrouver la propriété d'unitarité en utilisant un facteur $1/\sqrt{N}$ dans la définition de la matrice F. Cette définition est connue sous le nom de DFT normalisée :

$$F \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \dots & \beta^{(N-1)} \\ 1 & \beta^2 & \beta^4 & \dots & \beta^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \beta^{(N-1)} & \beta^{2(N-1)} & \dots & \beta^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

où $\beta = e^{-i2\pi/N}$.

où \mathbf{I} est la matrice identité. Notons qu'une transformation unitaire a comme propriété de conserver le produit scalaire :

$$\mathbf{i}_m^\dagger \mathbf{i}_o = \mathbf{s}_m^\dagger \mathbf{s}_o. \quad (4.10)$$

Transformation de Fourier 2D

La transformation de Fourier 2D est une transformation séparable, c'est-à-dire que les deux dimensions (colonnes et rangées) peuvent être traitées indépendamment. Ainsi, la transformation de Fourier 2D de \mathbf{A} et la transformation de Fourier 2D inverse de sa transformée \mathbf{B} s'expriment simplement par les relations suivantes :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{F}^* \mathbf{B} \mathbf{F}^*. \quad (4.11b)$$

4.2.2 Du domaine spectral au domaine de l'interférogramme

Nous exprimerons maintenant la transformation du spectre vrai au spectre mesuré par la matrice d'ILS dans le domaine de l'interférogramme. Le passage de l'équation (4.4) du domaine spectral au domaine de l'interférogramme se fait très facilement à l'aide de la notation matricielle, en incluant la relation de fermeture ($\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$) :

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}_m, \quad (4.12a)$$

$$= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{ILS} \mathbf{s}_o,$$

$$= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{ILS} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}_o,$$

$$= \widetilde{\mathbf{ILS}} \mathbf{i}_o, \quad (4.12b)$$

où $\widetilde{\mathbf{ILS}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{ILS} \mathbf{F} = \mathbf{F}^* \mathbf{ILS} \mathbf{F}$ est la matrice de transfert entre l'interférogramme vrai et l'interférogramme mesuré. Cette matrice est la contrepartie de la matrice d'ILS dans le domaine de l'interférogramme. La relation inverse est alors $\mathbf{ILS} = \mathbf{F} \widetilde{\mathbf{ILS}} \mathbf{F}^*$. On voit que la matrice $\widetilde{\mathbf{ILS}}$ n'est pas la transformée de Fourier 2D de la matrice d'ILS. L'opération effectuée correspond plutôt à un changement de base du noyau.

Sous la forme intégrale, on peut réécrire la transformation entre les interférogrammes vrai et mesuré de la façon suivante :

$$I_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_o(x_o) \widetilde{\mathbf{ILS}}(x, x_o) dx_o, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) e^{i2\pi\sigma x} d\sigma_o d\sigma, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o \right] e^{i2\pi\sigma x} d\sigma, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\sigma) e^{i2\pi\sigma x} d\sigma.
\end{aligned}$$

Les définitions présentées sont donc cohérentes, ce qui confirme la définition de $\widetilde{\text{ILS}}(x, x_o)$. \square

4.2.3 Matrice d'ILS

Lors de la description de la problématique étudiée ici, nous avons spécifié que la fonction d'ILS doit pouvoir s'exprimer sous la forme :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{1}{|\sigma_o|} H\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right). \quad (4.16)$$

Autrement dit, la fonction d'appareil doit suivre un effet d'échelle. Cette forme possède une propriété qui nous sera très utile. En effet, lorsqu'on effectue la transformation vers $\widetilde{\text{ILS}}(x, x_o)$, c'est-à-dire une transformation de Fourier inverse de σ vers x et une transformation de Fourier de σ_o vers x_o , la forme analytique se trouve conservée :

$$\frac{1}{|\sigma_o|} H\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right) \xrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\sigma \rightarrow x} f(x\sigma_o) \xrightarrow[\mathcal{F}]{\sigma_o \rightarrow x_o} \frac{1}{|x|} H\left(\frac{x_o}{x}\right). \quad (4.17)$$

Notons que la propriété d'échelle de la transformation de Fourier utilisée ici n'est pas étrangère à ce résultat :

$$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\sigma}{a}\right). \quad (4.18)$$

Dans le domaine de l'interférogramme, nous avons donc :

$$\widetilde{\text{ILS}}(x, x_o) = \frac{1}{|x|} H\left(\frac{x_o}{x}\right) = \text{ILS}(x_o, x), \quad (4.19)$$

et l'équation de l'intégration de l'ILS avec effet d'échelle devient :

$$\boxed{I_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_o(x_o) \text{ILS}(x_o, x) dx_o.} \quad (4.20)$$

Cette dernière équation est très semblable à l'équation de l'intégration de l'ILS dans le domaine spectral (3.16), excepté pour l'ordre des variables vraies et apparentes dans la fonction d'ILS. Ainsi, la forme de la matrice d'ILS est similaire dans les deux domaines

et est représentée par la même forme fonctionnelle. Les coefficients de la matrice $\widetilde{\text{ILS}}$ seront donc regroupés eux aussi près de la diagonale :

$$\widetilde{\text{ILS}} = \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right]. \quad (4.21)$$

Notons que, *dans le cas des matrices continues et infinies*, cette similarité de forme entre les deux domaines s'exprime par $\widetilde{\text{ILS}} = \text{ILS}^T$.

4.2.4 Interprétation

Effet local

Dans le cas d'une fonction d'ILS bornée où tous les coefficients non nuls de la matrice sont contenus entre les deux droites de l'équation (4.3), comme par exemple pour les modèles de champ de vue, nous constatons que la fonction de transfert de l'ILS est aussi un effet local dans l'interférogramme. Par définition, nous savons que l'ILS borné a un effet local dans le spectre. Il est plus surprenant de voir que la fonction d'ILS effectue une moyenne de l'information située dans un voisinage limité autour d'un point de l'interférogramme (voir figure 4.1). Cette observation contraste avec la description courante de l'impact de l'ILS sur l'interférogramme. L'auto-apodisation suppose en effet un impact global de l'ILS sur l'interférogramme.

On peut visualiser cette propriété en réalisant que l'interférogramme mesuré correspond à la somme de plusieurs interférogrammes ayant tous une échelle d'OPD étirée en fonction de l'angle d'incidence du rayon correspondant dans l'instrument. Aussi, comme le domaine des angles acceptés dans un spectromètre est limité, un même point de l'interférogramme vrai sera réparti sur une plage limitée de différences de chemin optique. De plus, comme la moyenne de l'information s'effectue sur une plage plus grande pour les OPD élevés, l'amplitude de l'interférogramme apparent se trouve diminuée pour de grands OPD, lui donnant un aspect apodisé.

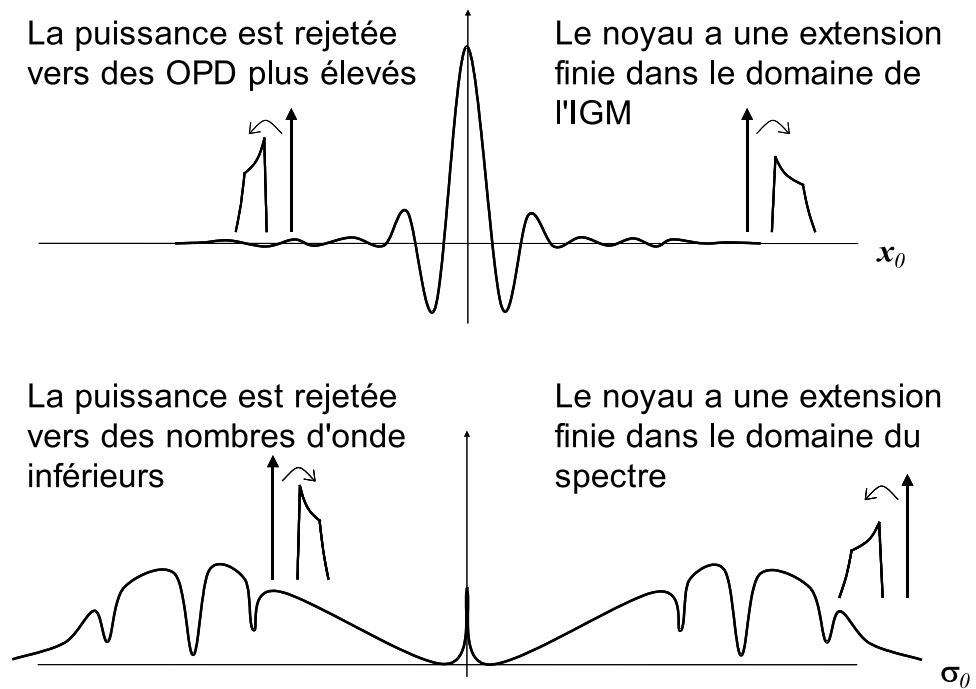


Figure 4.1 – Puisque la puissance est rejetée vers des OPD plus élevées dans le domaine de l'interférogramme, une troncation de l'interférogramme conserve toute l'information nécessaire pour inclure l'ILS à la même résolution. Cependant, pour le processus inverse, on pourra suspecter des erreurs importantes aux extrémités de l'interférogramme.

Troncation de l'interférogramme

Une autre observation des plus intéressantes est que le calcul d'une valeur de l'interférogramme mesuré ne demande qu'une partie limitée de l'interférogramme vrai, puisque la matrice de transfert est limitée dans une faible bande. De plus, cette relation ne fait jamais intervenir de points de l'interférogramme à des différences de marche optique plus élevées que celle pour laquelle l'interférogramme mesuré est calculé (figure 4.1). Si l'on considère une partie tronquée de l'interférogramme vrai, alors la partie tronquée équivalente de l'interférogramme mesuré peut être calculée exactement. Nous contournons ainsi tous les problèmes liés à la résolution spectrale. Dans le cas d'un interférogramme tronqué, notons que la matrice de transfert ($\widetilde{\text{ILS}}$) est une matrice carrée. Cette propriété sera fort utile pour l'inversion de l'ILS et diminuera considérablement les problèmes d'extrémités lors de la discrétisation.

Interpolation

Observons finalement que lorsqu'on étudie un signal dont la bande spectrale est limitée, tel que supposé dans la présente problématique, alors l'interférogramme peut être discrétisé et interpolé avec une fonction $\text{sinc}(x_o/\Delta x_o)$, où Δx_o est le pas d'échantillonnage. Cette interpolation permet une reconstruction exacte si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence de Nyquist. Cette propriété, jointe aux observations précédentes, ouvre la voie à la discrétisation de nos équations matricielles.

4.2.5 Discrétisation des équations

Procédons maintenant à la discrétisation et à la troncation de la matrice d'ILS. Comme nous l'avons spécifié précédemment, l'interférogramme vrai peut être interpolé exactement parce que limité en bande spectrale et échantillonné à une fréquence suffisamment élevée. L'interférogramme vrai s'exprime donc de la façon suivante :

$$I_o(x_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \delta(x_o - n\Delta x_o) * \text{sinc}\left(\frac{x_o}{\Delta x_o}\right), \quad (4.22a)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \text{sinc}\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right). \quad (4.22b)$$

En introduisant ensuite cette forme discrète ainsi que la forme fonctionnelle de l'ILS [équation (4.19)] dans l'équation (4.13), on pourra renverser l'ordre de la sommation et

de l'intégration :

$$I_m(x) = \frac{1}{|x|} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{x_o}{x}\right) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \operatorname{sinc}\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right) \right] dx_o, \quad (4.23a)$$

$$= \frac{1}{|x|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{x_o}{x}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right) dx_o \right]. \quad (4.23b)$$

Pour simplifier l'intégration sur x_o , nous établissons ici la relation clé :

$$\frac{x_o}{x} = \alpha. \quad (4.24)$$

En tenant compte du fait [équation (3.12)] que la fonction H représentant l'ILS est non nulle seulement pour $x_o/x \geq 0$ (premier et troisième quadrants), c'est-à-dire $\alpha \geq 0$, nous pouvons écrire que

$$I_m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \left[\int_{\alpha} H(\alpha) \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha x - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right) d\alpha \right]. \quad (4.25)$$

Ici, le paramètre α représente la pente de la droite (dans le plan x_o-x) où la fonction H est constante. C'est en quelque sorte une intégration angulaire⁴.

Finalement, on quantifie l'interférogramme mesuré avec le même pas d'échantillonnage Δx_o :

$$I_m(m\Delta x_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_o(n\Delta x_o) \left[\int_{\alpha} H(\alpha) \operatorname{sinc}(\alpha m - n) d\alpha \right]. \quad (4.26)$$

Nous obtenons alors l'équation matricielle discrétisée (et infinie) suivante⁵ :

$$i_m[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_o[n] \widetilde{\text{ILS}}_q[m, n], \quad (4.27)$$

où

$$\widetilde{\text{ILS}}_q[m, n] = \int_{\alpha} H(\alpha) \operatorname{sinc}(\alpha m - n) d\alpha. \quad (4.28)$$

⁴Nous verrons plus loin les propriétés de la matrice d'ILS qui permettront d'établir que

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_o} = \cos \theta.$$

⁵Dans notre description des vecteurs et des matrices, nous considérons, tout au long de ce texte, que l'origine est située au centre de ceux-ci.

Troncation et périodisation de l'interférogramme

Notre problématique nous impose de considérer le cas où l'interférogramme vrai n'est pas connu sur toute son étendue. La troncation de l'interférogramme est en effet inévitable lors de la mesure. Néanmoins, lorsque le critère de Nyquist est respecté, et ceci d'autant plus que la fréquence d'échantillonnage est élevée par rapport à la fréquence maximale du signal, l'interpolation avec la fonction sinc demeure une bonne approximation :

$$I_o(x_o) \approx \sum_{n=-N}^N I_o(n\Delta x_o) \operatorname{sinc}\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right). \quad (4.29)$$

Cependant, puisque nous désirons également obtenir un spectre discrétisé, nous utiliserons plutôt le noyau (*kernel*) de Dirichlet (fonction sinc périodisée) comme fonction de reconstruction. Cette fonction est utilisée pour la reconstruction d'un signal périodique à partir d'un nombre limité d'harmoniques et est liée à la transformation de Fourier discrète (DFT). Elle correspond donc à la périodisation des échantillons $I_o(n\Delta x_o)$:

$$I_o(x_o) \approx \sum_{n=-N}^N I_o(n\Delta x_o) \frac{\sin\left(\frac{\pi(x_o - n\Delta x_o)}{\Delta x_o}\right)}{(2N+1) \sin\left(\frac{\pi}{2N+1} \frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right)}, \quad (4.30a)$$

$$\approx \sum_{n=-N}^N I_o(n\Delta x_o) \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2N+1} \frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right)}, \quad (4.30b)$$

$$\approx \sum_{n=-N}^N I_o(n\Delta x_o) D_N\left(\frac{x_o - n\Delta x_o}{\Delta x_o}\right), \quad (4.30c)$$

où le noyau de Dirichlet est défini comme suit :

$$D_N(\xi) \equiv \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^{i2\pi n\xi/(2N+1)} = \frac{\operatorname{sinc} \xi}{\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)}. \quad (4.31)$$

Le noyau de Dirichlet représente la transformée de Fourier d'une boîte échantillonnée.

Nous pouvons ainsi évaluer la matrice de transfert discrète à l'aide du nouveau noyau qui tient compte de la troncation du signal :

$$\boxed{\widetilde{\text{ILS}}_q[m, n] \approx \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha m - n) d\alpha.} \quad (4.32)$$

L'erreur commise en discrétisant et en tronquant l'interférogramme provient en fait du recouvrement spectral lorsque le spectre est convolué avec un sinc et ensuite périodisé.

Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée par rapport à la fréquence maximale du signal, moins le recouvrement spectral est important et plus l'interpolation avec un nombre limité de points est exacte. L'équation discrétisée et tronquée de l'intégration de la fonction d'appareil est donc :

$$i_m[m] \approx \sum_{n=-N}^N i_o[n] \widetilde{\text{ILS}}_q[m, n]. \quad (4.33)$$

Cette approximation est exactement de même origine que celle inhérente à toute transformation de Fourier discrète (DFT) d'un signal tronqué non périodique.

Transformée de la matrice d'ILS

Nous terminons la discrétisation des équations d'intégration d'ILS avec une propriété fort intéressante du noyau de Dirichlet tel qu'utilisé dans notre calcul de la matrice d'ILS. Effectuons la transformation discrète de la matrice de transfert, $\text{ILS}_q = \text{F} \widetilde{\text{ILS}}_q \text{F}^{-1}$, pour obtenir la matrice de transfert dans le domaine spectral. Il nous suffit pour cela de calculer la transformée du noyau de Dirichlet en substituant directement la définition de celui-ci [équation (4.31)] :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N e^{-i2\pi mj/(2N+1)} e^{i2\pi nk/(2N+1)} \text{D}_N(\alpha m - n) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N e^{-i2\pi mj/(2N+1)} e^{i2\pi nk/(2N+1)} \left(\sum_{l=-N}^N e^{i2\pi l(\alpha m - n)/(2N+1)} \right), \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m=-N}^N \sum_{l=-N}^N e^{-i2\pi mj/(2N+1)} e^{i2\pi \alpha ml/(2N+1)} \left(\sum_{n=-N}^N e^{i2\pi n(k-l)/(2N+1)} \right), \quad (4.34b)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N e^{-i2\pi mj/(2N+1)} e^{i2\pi \alpha mk/(2N+1)}, \quad (4.34c)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N e^{i2\pi m(\alpha k - j)/(2N+1)}, \quad (4.34d)$$

$$= \text{D}_N(\alpha k - j), \quad (4.34e)$$

où $j, k \in [-N, N]$. De là on déduit que

$$\boxed{\text{ILS}_q[j, k] \approx \int_{\alpha} H(\alpha) \text{D}_N(\alpha k - j) d\alpha,} \quad (4.35)$$

et que

$$s_m[j] \approx \sum_{k=-N}^N s_o[k] \text{ILS}_q[j, k]. \quad (4.36)$$

Les deux matrices discrètes sont donc, tout comme les matrices d'ILS continues, les transposées l'une de l'autre : $\widetilde{\text{ILS}}_q = \text{ILS}_q^\top$.

4.3 Algorithmique

Maintenant que nous avons obtenu une équation matricielle discrète pour décrire la transformation entre l'interférogramme vrai et l'interférogramme mesuré, il ne reste qu'à calculer les coefficients de la matrice d'ILS discrète. Pour y arriver, nous utiliserons simplement les méthodes d'intégration numérique standard, qui se prouvent très efficaces dans ce cas-ci. Nous évaluerons ensuite l'erreur commise lors de la discrétisation, de la troncation et de l'interpolation des données, et proposerons une technique de filtrage originale pour améliorer la précision de l'intégration matricielle de l'ILS.

4.3.1 Intégration numérique

La méthode d'intégration la plus simple consiste à discrétiser $H(\alpha)$ de façon uniforme, avec un pas $\Delta\alpha$, pour tous les coefficients de la matrice $\widetilde{\text{ILS}}_q$. Introduisons tout d'abord les coefficients d'intégration c_i propres à l'ordre de la méthode d'intégration utilisée :

$$\widetilde{\text{ILS}}_q[m, n] \approx \sum_i c_i \Delta\alpha H(\alpha_i) D_N(\alpha_i m - n). \quad (4.37)$$

L'équation suivante permet de visualiser l'intégration et donne une idée de la simplicité de son implémentation :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ i_m[m] \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_i \left(c_i \Delta\alpha H(\alpha_i) \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & D_N(\alpha_i m - n) & \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vdots \\ i_o[n] \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Il s'agit d'une somme de matrices de Dirichlet (pour différentes valeurs de α_i) pondérées par un échantillon de l'ILS et un coefficient d'intégration. Cette forme a l'avantage, entre autres, de ne requérir qu'un faible nombre d'évaluations de la fonction d'appareil. En effet, la fonction d'appareil n'est évaluée qu'une seule fois pour l'ensemble des points de la matrice d'ILS. Les figures 4.2 et 4.3 donnent un aperçu du résultat de l'intégration spectrale de l'ILS ainsi que d'une matrice d'ILS.

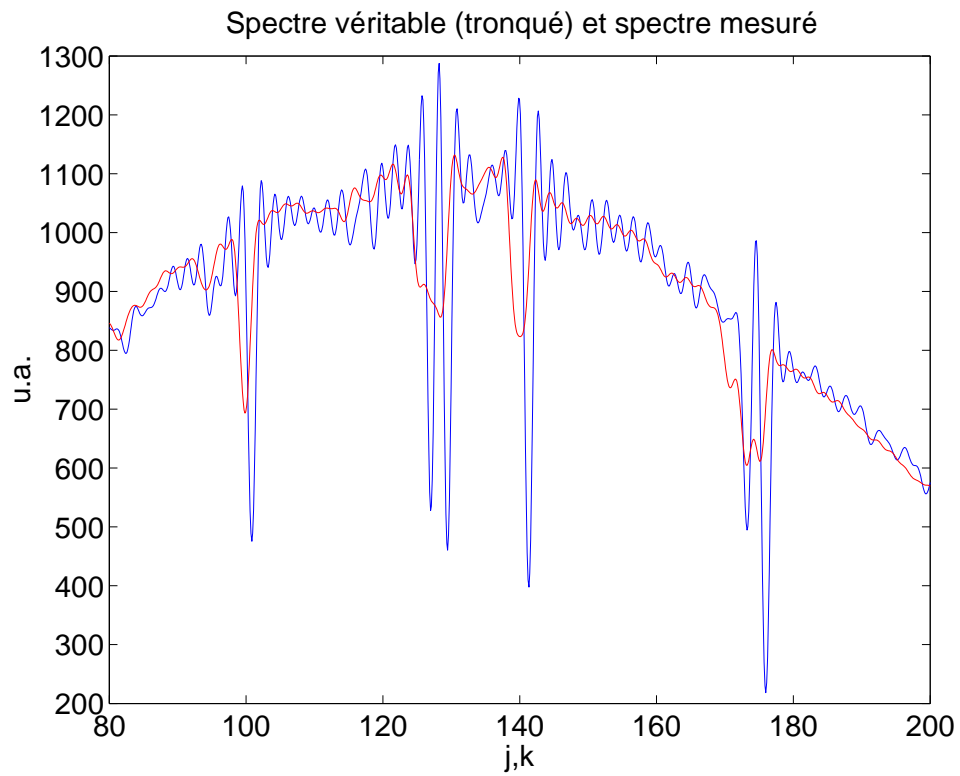


Figure 4.2 – Exemple de spectre vrai (bleu), après troncation, et de spectre mesuré (rouge) après intégration de l’ILS, suivant l’algorithme proposé (ILS d’un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l’ILS).



Figure 4.3 – Exemple de matrice de transfert dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.3$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l'ILS).

Coefficients d'intégration

Il existe une grande variété de méthodes d'intégration numérique, certaines à pas constant, d'autres à pas variable. Les méthodes d'intégration numérique les plus simples et les plus connues sont les méthodes trapézoïdale, de Simpson et de Bode. Ces méthodes sont exactes pour des polynômes de degré 1, 3 et 5 respectivement. L'erreur commise est alors de $\mathcal{O}(1/\mathcal{N}^2)$, $\mathcal{O}(1/\mathcal{N}^4)$ et $\mathcal{O}(1/\mathcal{N}^6)$ où \mathcal{N} est le nombre de points d'intégration et 2, 4, et 6 indiquent l'ordre d'intégration. Nous avons choisi d'utiliser des méthodes d'intégration à pas constant puisqu'en fait chaque élément de la matrice d'ILS correspond à une intégration numérique différente. Il serait donc difficile d'optimiser le pas d'intégration pour l'ensemble des intégrales simultanément.

Pour améliorer la précision d'une intégration numérique, il faut inévitablement augmenter le nombre de points d'intégration. Dans le cas des fonctions ayant un comportement semblable aux fonctions polynomiales, l'augmentation de l'ordre d'intégration accélère la convergence de l'intégration numérique par rapport au nombre de points d'intégration nécessaire.

Dans notre implémentation de l'algorithme, nous avons étudié la méthode d'intégration numérique de Romberg [*Numerical Recipes in C*, PRESS et al., 1992]. Cette méthode est une généralisation des méthodes d'intégration mentionnées précédemment. La méthode de Romberg impose l'intégration sur un nombre d'intervalles correspondant à une puissance de 2. Dépendamment du nombre d'intervalles utilisés pour l'intégration, l'erreur commise par cette méthode peut être aussi faible que $\mathcal{O}(1/\mathcal{N}^{2k})$, quand le nombre d'intervalles de l'intégration est égal à 2^{k-1} . Chaque fois que l'on double le nombre d'intervalles, on augmente de deux l'ordre d'intégration possible. Le tableau 4.1 donne un exemple des coefficients de Romberg pour 8 intervalles et pour les différents ordres possibles.

Cette méthode d'intégration répond particulièrement bien à nos besoins, puisque le noyau de Dirichlet a un comportement très lisse de même que les fonctions d'ILS analytiques étudiées ici. Les coefficients de Newton-Cotes permettraient théoriquement d'utiliser un nombre plus faible de points pour une erreur du même ordre, mais ces coefficients deviennent vite très difficiles à calculer précisément avec l'augmentation du nombre de points d'intégration. Les coefficients peuvent atteindre des valeurs très grandes et sont représentés par le rapport de deux nombres entiers très grands, ce qui peut poser des problèmes de précision machine lors de l'intégration. Cependant, si la précision machine disponible est suffisante, KREMINSKI [2002] a proposé récemment une technique efficace

Tableau 4.1 – Coefficients de Romberg pour 8 intervalles et différents ordres d'intégration.

ordre	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
2	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{28}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$
8	$\frac{868}{2835}$	$\frac{4096}{2835}$	$\frac{1408}{2835}$	$\frac{4096}{2835}$	$\frac{1744}{2835}$	$\frac{4096}{2835}$	$\frac{1408}{2835}$	$\frac{4096}{2835}$	$\frac{868}{2835}$

et rapide de calcul des coefficients de Newton-Cotes pour des ordres élevés d'intégration (très efficace pour les ordres supérieurs à 15).

Discontinuités

Plusieurs types d'ILS contiennent une ou plusieurs discontinuités dans la première dérivée, par exemple pensons à l'ILS associé à un détecteur carré hors-axe. Pour pouvoir utiliser les ordres d'intégration élevés, nous effectuons tout simplement une intégration par morceaux de l'ILS (voir figure 4.4). L'intégration numérique sera effectuée pour chaque section de l'ILS entre deux discontinuités et tous les résultats seront additionnés.

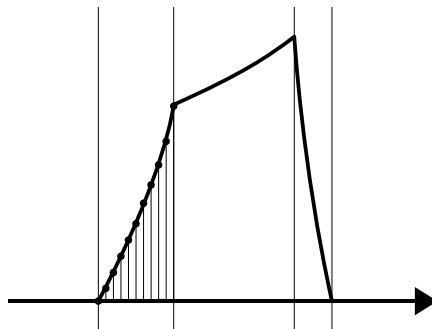


Figure 4.4 – L'intégration de la fonction d'appareil par morceaux permet l'emploi de méthodes d'intégration d'ordres élevés.

Précision numérique

Voici deux approches pour vérifier la précision de l'intégration numérique. La première consiste tout simplement à calculer $\Delta\alpha^{2k}$ pour avoir une estimation de l'ordre de grandeur de l'erreur maximale commise lors de l'intégration numérique. Les calculs d'erreur utilisés habituellement en intégration numérique font normalement intervenir une dérivée d'ordre élevé, mais cette dérivée serait différente pour chaque coefficient de la matrice d'ILS.

Une autre approche permet d'utiliser les connaissances que nous avons sur chacune des parties de l'intégrand de l'équation (4.28). Tout d'abord, nous savons par définition que l'aire de la fonction $H(\alpha)$ est normalisée et unitaire :

$$\int_{\alpha} H(\alpha) d\alpha = 1. \quad (4.39)$$

Nous pouvons donc évaluer la qualité de l'échantillonnage de la fonction d'ILS avec la valeur calculée de $\widetilde{\text{ILS}}_q[0, 0]$. L'erreur sera l'écart entre la valeur de $\widetilde{\text{ILS}}_q[0, 0]$ et la valeur théorique (=1). Ce point correspond au ZPD de l'interférogramme.

La seconde valeur que nous pouvons calculer pour estimer la qualité de notre intégration numérique est la différence entre l'intégration numérique de la fonction sinc sur la plage de l'ILS et sa valeur théorique qui peut être calculée par

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sinc}(\alpha m - n) d\alpha = \frac{1}{m\pi} \left[\text{Si}((n - \alpha_1 m)\pi) - \text{Si}((n - \alpha_2 m)\pi) \right], \quad (4.40)$$

où $\text{Si}(\xi)$ est la fonction sinus intégral :

$$\text{Si}(\xi) \equiv \int_0^{\xi} \frac{\sin \xi'}{\xi'} d\xi'. \quad (4.41)$$

La différence entre la valeur théorique et la valeur calculée sera maximale pour les points de la matrice situés aux plus grandes valeurs de $|m|$ et $|n|$. C'est à ces points que la fonction sinc varie le plus rapidement par rapport à l'échantillonnage. Notons qu'ici c'est le noyau sinc qui est utilisé plutôt que le noyau de Dirichlet, et ce pour nous permettre d'obtenir une forme analytique. La différence entre ces deux noyaux est en pratique négligeable pour de faibles valeurs de leur argument ($n \approx \alpha m$); nous devrions donc avoir une erreur d'intégration comparable. Cette valeur nous donne une estimation de la qualité de l'intégration numérique de la fonction d'interpolation, sans tenir compte de la fonction d'ILS.

L'erreur totale peut ensuite être estimée par une addition RMS des différentes erreurs [équations (4.39) et (4.41)]. Dans le cas d'une intégration par morceaux, l'erreur sur la fonction sinc sera calculée séparément pour chaque segment. Cette technique d'évaluation donne une très bonne idée de l'ordre de grandeur de l'erreur maximale commise dans le calcul de la matrice d'ILS.

4.3.2 Erreur d'interpolation

Pour estimer l'erreur due à l'interpolation d'un interférogramme tronqué, échantillonné et interpolé à l'aide du noyau de Dirichlet, nous utilisons une méthode des plus simples. Il suffit de comparer deux interférogrammes, dont l'un est calculé pour des différences de marche au moins deux fois plus grandes. De cette façon, les points de l'interférogramme le plus long correspondant aux points de l'autre interférogramme ne sont pas significativement affectés par les problèmes d'interpolation aux extrémités de l'interférogramme.

Il est assez facile de comprendre l'erreur causée par l'interpolation. Comme la fonction d'interpolation a un effet principalement local, la première source d'erreur qui nous vient à l'esprit est l'erreur commise aux extrémités de l'interférogramme. L'interpolation est en effet déficiente à ces endroits puisque les échantillons tronqués au-delà de la différence de marche maximale disponible sont estimés, aux fins d'interpolation, par périodisation de l'interférogramme. On peut donc prévoir que les extrémités de l'interférogramme seront mal estimées. La seconde source d'erreur est plus subtile. Nous avons démontré que les matrices de transfert dans le domaine de l'interférogramme et dans le domaine du spectre sont les transposées l'une de l'autre. Comme nous avons des problèmes d'interpolation pour les grandes différences de marche optique, nous aurons également des problèmes à l'extrémité du spectre pour les grands nombres d'onde. Dans le domaine de l'interférogramme, cette erreur se traduira par la présence d'une oscillation très rapide sur toute la plage de l'interférogramme.

Il est donc facile de comprendre que la forme et l'importance relative de l'erreur sur le spectre sera similaire à celle présente dans l'interférogramme après l'intégration de l'ILS, c'est-à-dire une erreur plus importante aux fréquences ou différences de marche élevées et une erreur plus faible oscillant rapidement ailleurs (voir schéma 4.5). La figure 4.6 nous montre un exemple typique de l'erreur due à l'interpolation et à la troncation dans le domaine de l'interférogramme et dans le domaine spectral. L'importance relative de cette erreur dépend de la valeur de l'interférogramme vrai aux différences de chemin optique

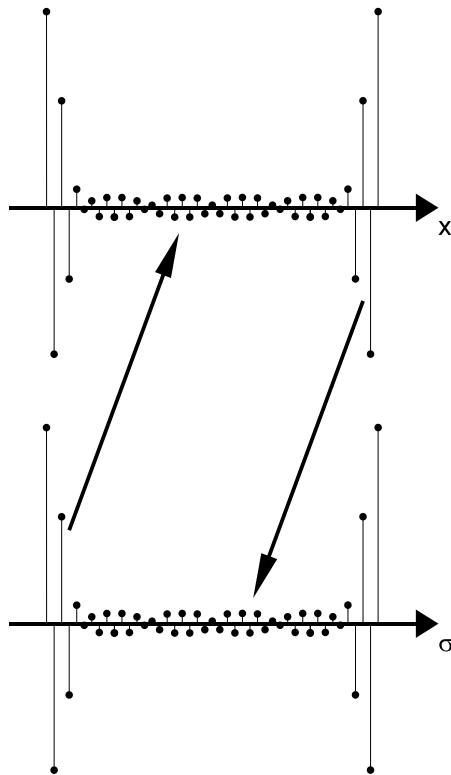


Figure 4.5 – L'erreur due à l'interpolation et à la troncation se reflète aux hautes fréquences et grandes différences de marche optique. Elle entraîne une erreur oscillatoire dans l'autre domaine. Ce schéma illustre la dualité de l'erreur dans le domaine spectral et le domaine de l'interférogramme.

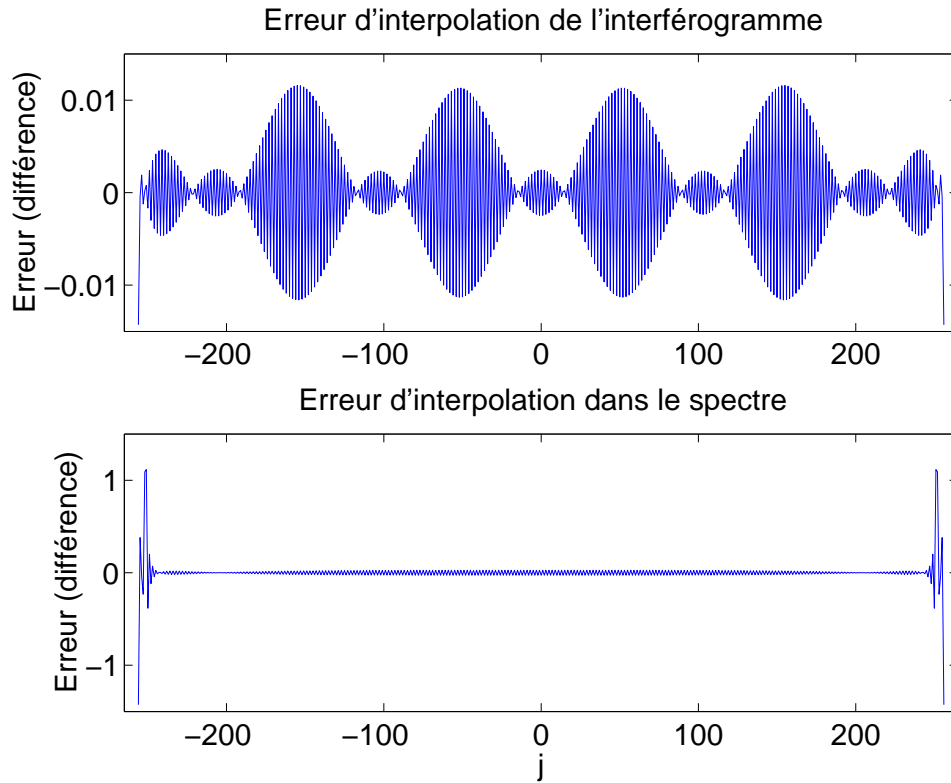


Figure 4.6 – Exemple d’erreur d’interpolation dans l’interférogramme et de l’erreur résultante dans le spectre (ILS d’un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points).

élevées de même que son contenu à haute fréquence. Plus la fréquence d’échantillonnage est grande par rapport à la fréquence maximale du spectre, plus l’erreur oscillante dans l’interférogramme sera faible. Notons que l’erreur globale est généralement inférieure à 0.1% selon nos observations.

Correction de l’erreur d’interpolation

Puisque les points aux extrémités de l’interférogramme, après l’intégration de l’ILS, souffrent d’une erreur plus importante, ils doivent être écartés ou remplacés par des zéros. Cette correction implique donc une légère diminution de la résolution spectrale du signal. De plus, comme les valeurs du spectre aux plus hautes fréquences sont également erronées de la même façon, elles doivent être écartées ou filtrées. Ces deux corrections assureront une plus grande fiabilité des données.

Cependant, pour que les données soient filtrées simultanément dans le domaine de l’interférogramme et dans le domaine du spectre, nous ne pouvons pas utiliser un filtre

linéaire standard. Nous devons considérer que les points à mettre à zéro sont la somme de certains coefficients locaux plus la contribution des points à corriger dans l'autre domaine qui ont un effet global. Avec un filtre « *boxcar* » standard appliqué dans un domaine, l'erreur contenue dans l'autre domaine serait répartie ailleurs à cause de l'apodisation (*spectral leakage*).

Les points de l'interférogramme à la position n sont la somme de certains coefficients locaux $a[n]$ et de la contribution d'exponentielles provenant des coefficients locaux $b[k]$ aux extrémités du spectre. Il en est de même dans le spectre :

$$i_m[n] = a[n] + \frac{1}{2N+1} \sum_k b[k] e^{i2\pi nk/(2N+1)}, \quad (4.42a)$$

$$s_m[k] = b[k] + \sum_n a[n] e^{-i2\pi nk/(2N+1)}. \quad (4.42b)$$

On résout le système d'équations pour un même nombre de points aux extrémités de l'interférogramme et du spectre. Le résultat est un interférogramme $i'_m[n]$ et un spectre $s'_m[k]$ diminués en résolution simultanément, comme si les points aux extrémités du spectre et de l'interférogramme n'avaient jamais fait partie des données :

$$i'_m[n] = i_m[n] - a[n] - \frac{1}{2N+1} \sum_k b[k] e^{i2\pi nk/(2N+1)}, \quad (4.43a)$$

$$s'_m[k] = s_m[k] - b[k] - \sum_n a[n] e^{-i2\pi nk/(2N+1)}. \quad (4.43b)$$

Notons que les $a[n]$ et $b[k]$ sont considérés nuls pour les indices non utilisés dans la résolution du système d'équations. Une implémentation MATLAB de ce filtre de correction est disponible en annexe (section B.6).

La figure 4.7 montre en exemple l'erreur après correction dans les deux domaines pour le cas illustré à la figure 4.6. La mise à zéro d'un faible nombre de points entraîne une amélioration importante de l'intégration d'ILS. La perte de résolution sera vraiment négligeable par rapport au gain de précision dans la majorité des cas.

4.4 Inversion d'ILS

Un des objectifs de notre étude est l'inversion de l'ILS, c'est-à-dire la restauration des données affectées par la fonction d'appareil d'un spectromètre à transformation de Fourier. Comme nous avons dérivé les équations matricielles pour ajouter l'ILS aux

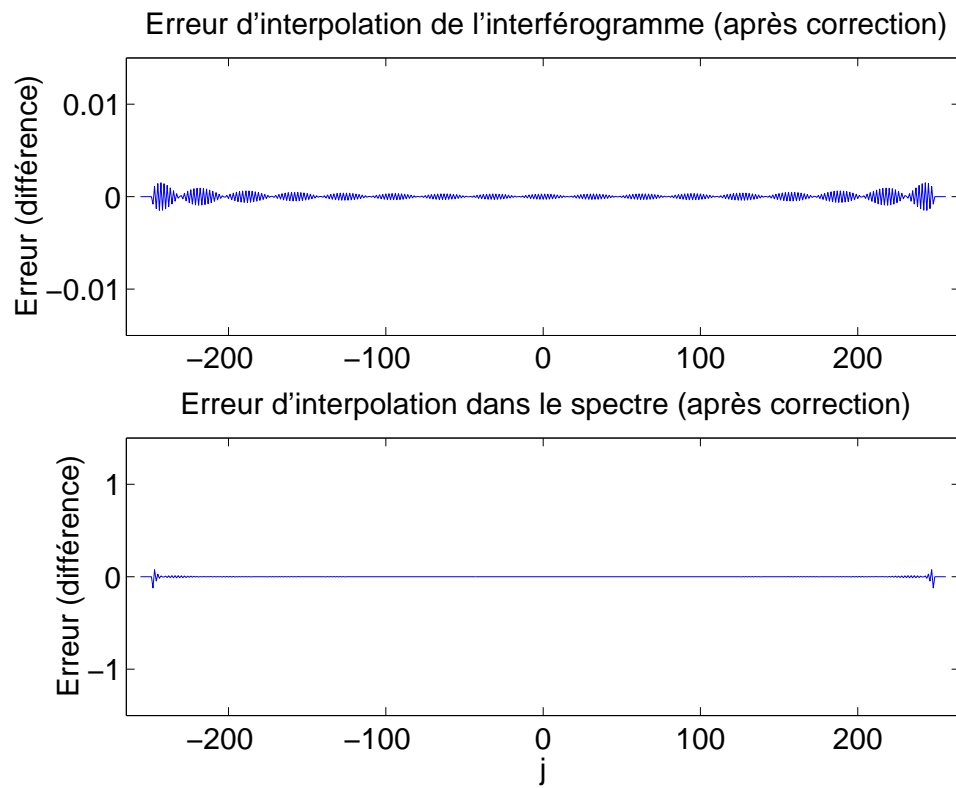


Figure 4.7 – Exemple d'erreur d'interpolation dans l'interférogramme et de l'erreur résultante dans le spectre après application de la correction. Ici, un total de 16 points ont été mis à zéro dans le spectre et dans l'interférogramme (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points).

données, il suffira donc au premier abord de multiplier les données mesurées par la matrice de transfert inverse :

$$\mathbf{s}_o = \mathbf{ILS}_q^{-1} \mathbf{s}_m, \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{i}_o = \widetilde{\mathbf{ILS}}_q^{-1} \mathbf{i}_m. \quad (4.44b)$$

Et puisque les matrices de transfert sont les transposées l'une de l'autre, on déduit que

$$\widetilde{\mathbf{ILS}}_q^{-1} = (\mathbf{ILS}_q^{-1})^\top. \quad (4.45)$$

Cependant, nous sommes à même de nous demander si l'inversion numérique de la matrice de transfert sera possible dans tous les cas, si le processus sera stable en présence de bruit additif, et dans quelles limites l'inversion de l'ILS est une avenue d'intérêt pour la correction des données.

4.4.1 Stabilité

La matrice d'ILS est essentiellement une matrice où les coefficients aux valeurs importantes sont tous regroupés autour de la diagonale. Ce type de matrice est généralement bien conditionné, il y a donc de bonnes chances de pouvoir les inverser. Par contre, deux situations possibles s'opposeront à cette stabilité :

- a) lorsque les coefficients s'étendront sur une plus grande distance autour de la diagonale, c'est-à-dire que la largeur de l'ILS deviendra importante par rapport à la résolution théorique ;
- b) lorsque les coefficients s'éloigneront de la diagonale, dans le cas d'un détecteur hors-axe par exemple ; les coefficients sur la diagonale même seront alors faibles.

Nous étudierons ici ces deux cas : l'inversion d'un ILS large et l'inversion d'un ILS hors-axe.

Inversion d'un ILS large

Pour bien comprendre ce qui se passe lorsqu'on applique la matrice d'ILS ou la matrice d'ILS inverse, écrivons l'équation reliant l'interférogramme mesuré au spectre vrai en remplaçant l'interférogramme vrai par sa transformée de Fourier inverse :

$$\mathbf{i}_m = \widetilde{\mathbf{ILS}}_q \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}_o. \quad (4.46)$$

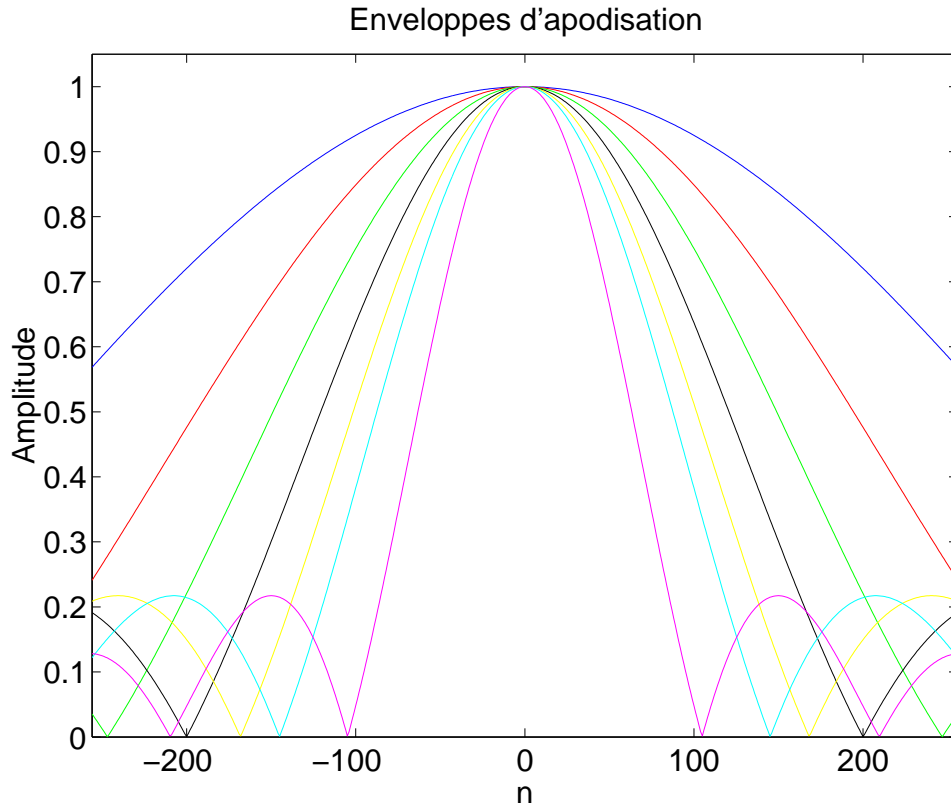


Figure 4.8 – Exemple d’enveloppes d’apodisation pour différentes fréquences dans le domaine de l’interférogramme (ILS d’un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l’ILS).

Lorsqu’on applique la matrice de Fourier à la matrice de transfert plutôt qu’au spectre, on effectue la transformation de Fourier inverse des rangées de la matrice d’ILS. L’interférogramme mesuré peut alors être interprété comme une somme d’interférogrammes propres à chaque nombre d’onde et pondérés par le spectre vrai. Comme l’ILS est inclus dans la mesure, chaque interférogramme que l’on additionne subit une sorte d’apodisation (si on ne tient pas compte du déplacement en fréquence), et cette apodisation est différente pour chaque nombre d’onde. Dans le cas d’une véritable apodisation, la fonction appliquée serait la même pour chaque nombre d’onde.

Pour illustrer ceci, nous voyons à la figure 4.8 diverses enveloppes des interférogrammes propres à différents nombres d’onde. Plus le nombre d’onde est élevé, plus l’enveloppe d’apodisation est étroite. Cette façon de percevoir l’effet de l’ILS est bien connue sous le nom d’auto-apodisation (*self-apodization*).

L’inversion d’une apodisation standard consiste à multiplier l’interférogramme par

la fonction d'apodisation inverse (c.-à-d. diviser par la fonction d'apodisation). Lorsque nous inversons la matrice de transfert, nous devrions donc obtenir une matrice qui inverse l'apodisation selon chaque nombre d'onde. La figure 4.9 montre les fonctions inverses correspondant aux enveloppes d'apodisation de la figure 4.8.

Plusieurs faits très importants sont à noter de cette figure. Premièrement, la fonction inverse n'est pas exactement l'inverse de l'enveloppe d'apodisation. Il y a une interdépendance qui est prise en compte lors de l'inversion. Si la fonction inverse était vraiment l'inverse au sens de quotient, alors il y aurait des pôles aux points correspondant aux zéros de l'enveloppe d'apodisation, ce qui n'est pas observé dans la figure. Cette interdépendance facilite donc l'inversion puisque qu'aucun point de la matrice inverse n'a de valeur infinie.

Deuxièmement, on remarque que lorsque l'enveloppe d'apodisation atteint de faibles valeurs, la fonction inverse prend alors des valeurs très importantes qui seront une source d'erreur majeure en présence de bruit.

Troisièmement, à partir des zéros de l'enveloppe d'apodisation, on observe des oscillations importantes dans la fonction inverse. Ces oscillations sont plus fortes encore lorsque que deux zéros sont présents dans l'enveloppe d'apodisation. On peut donc penser que ces régions seront extrêmement sensibles aux erreurs et au bruit.

La figure 4.10 nous montre un exemple de matrice inverse dans le domaine de l'interférogramme. On remarque que la matrice inverse est presque diagonale dans la région où aucun zéro n'est présent. Cependant, pour des nombres d'onde plus élevés où des zéros sont présents dans l'enveloppe d'apodisation, on remarque des oscillations importantes qui forment une région triangulaire. Comme la largeur de l'enveloppe d'apodisation varie à l'inverse de la largeur de l'ILS, on peut donc prévoir qu'il sera plus difficile d'inverser des ILS significativement plus larges que la fonction sinc, c'est-à-dire dont l'enveloppe d'apodisation présente des zéros.

Inversion d'un ILS hors-axe

Un autre problème à considérer lors de l'inversion de la fonction de transfert est l'inversion d'un ILS très hors-axe. En effet, lorsque l'axe optique n'est plus inclus dans la région du détecteur, il s'ensuit une perte d'information plus importante aux extrémités de l'interférogramme mesuré. La matrice d'ILS, dans le domaine de l'interférogramme, possède dans ces cas une ou plusieurs colonnes ne contenant que des valeurs négligeables au début et à la fin de la matrice. En fait, pour une même différence de marche optique

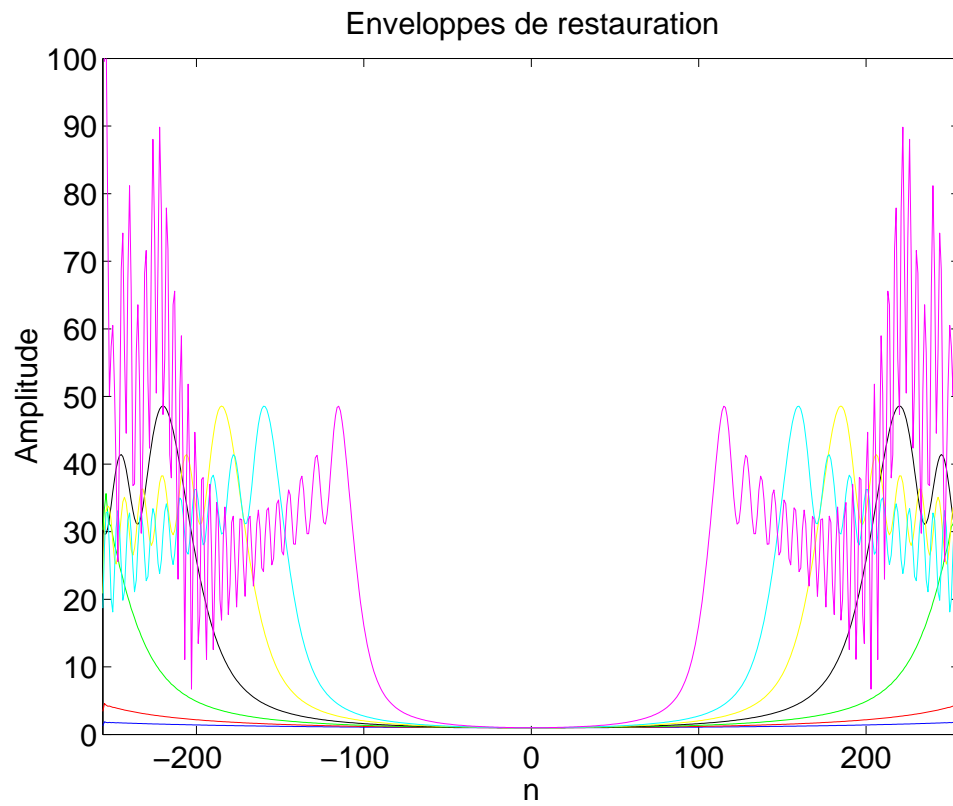


Figure 4.9 – Envelopes de restauration correspondantes (ILS inverse) pour différentes fréquences dans le domaine de l'interférogramme (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l'ILS).



Figure 4.10 – Exemple de matrice de transfert inverse dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l'ILS).

maximale, les derniers points de l'interférogramme vrai ne sont pratiquement pas pris en compte dans l'interférogramme mesuré, à cause du décalage de l'ILS par rapport à la diagonale. L'inversion d'une telle matrice est donc instable puisque les derniers points ne peuvent pas être facilement restaurés. Les figures 4.11 et 4.12 nous montrent les enveloppes d'apodisation et de restauration pour un ILS hors-axe. On voit nettement sur les enveloppes de restauration que les derniers points ont des valeurs très élevées. Ceci peut causer un problème important lors de l'inversion matricielle puisqu'on peut se retrouver avec une matrice mal conditionnée.

Pour contourner cette difficulté, il suffit de laisser tomber quelques points aux extrémités de l'interférogramme inversé pour éviter les résultats aberrants. Mentionnons que la suppression de ces points ne doit être faite que dans l'interférogramme et non dans le spectre. La figure 4.13 montre la matrice d'ILS inverse dans le domaine de l'interférogramme. On peut deviner deux rangées intenses tout au haut et tout au bas de la matrice. Sans ces rangées, la matrice inverse est presque diagonale.

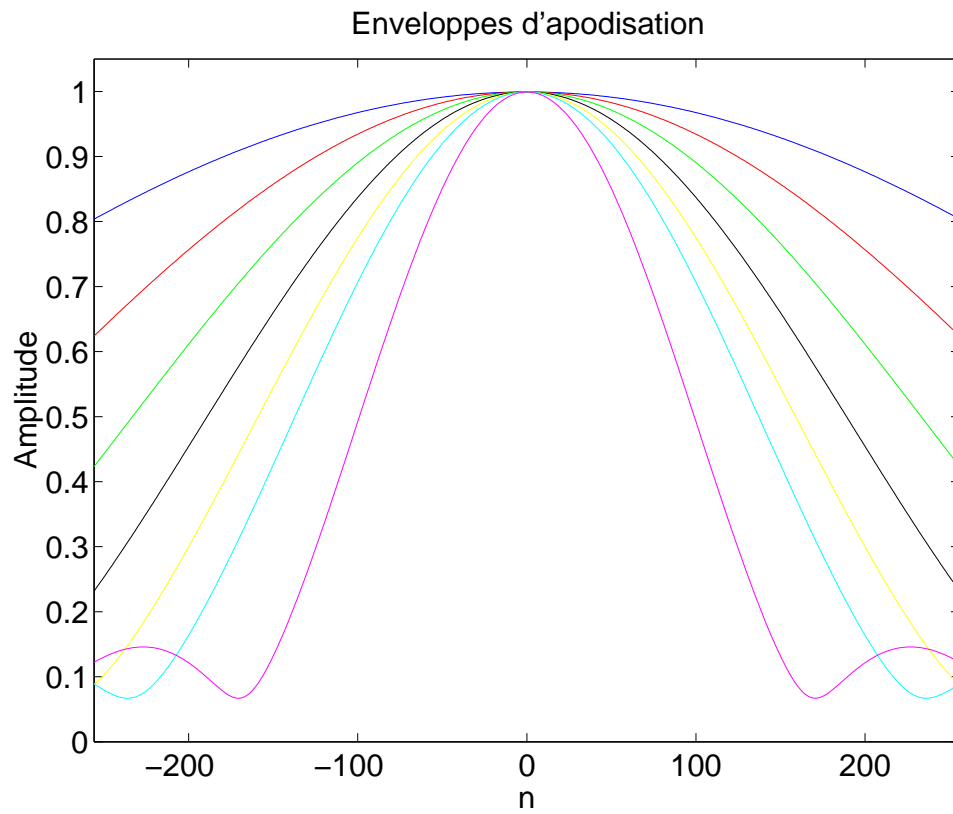


Figure 4.11 – Exemple d’enveloppes d’apodisation pour différentes fréquences dans le domaine de l’interférogramme (ILS d’un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.15$ et $R/f = 0.05$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l’ILS).

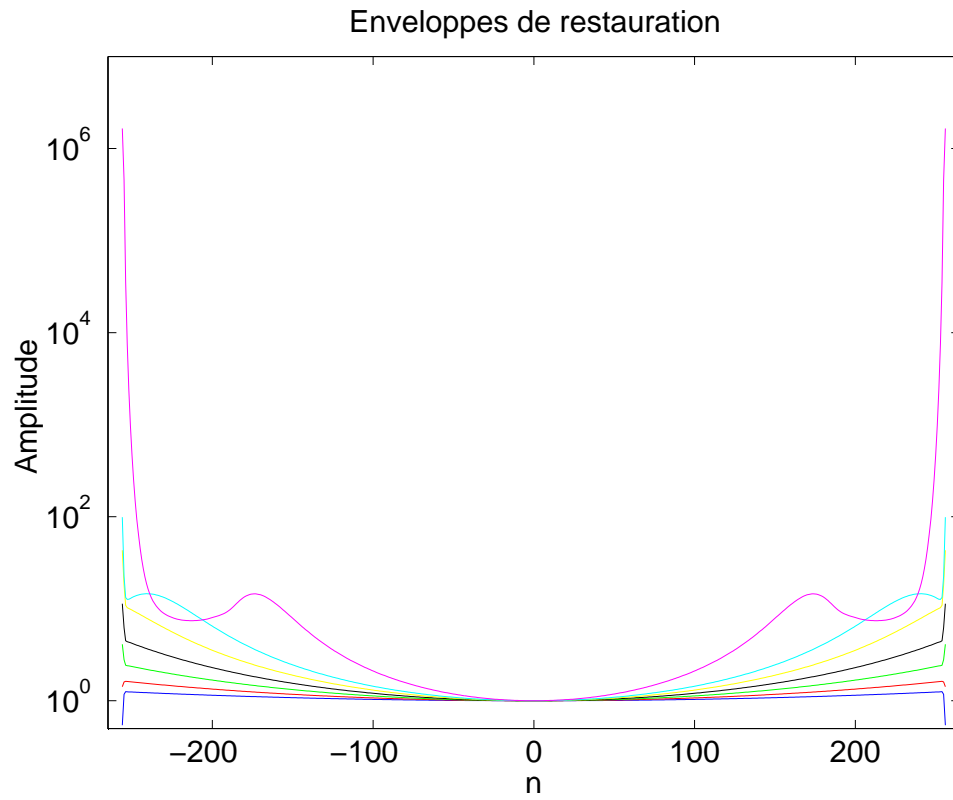


Figure 4.12 – Enveloppes de restauration correspondantes (ILS inverse) pour différentes fréquences dans le domaine de l'interférogramme (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.15$ et $R/f = 0.05$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l'ILS).

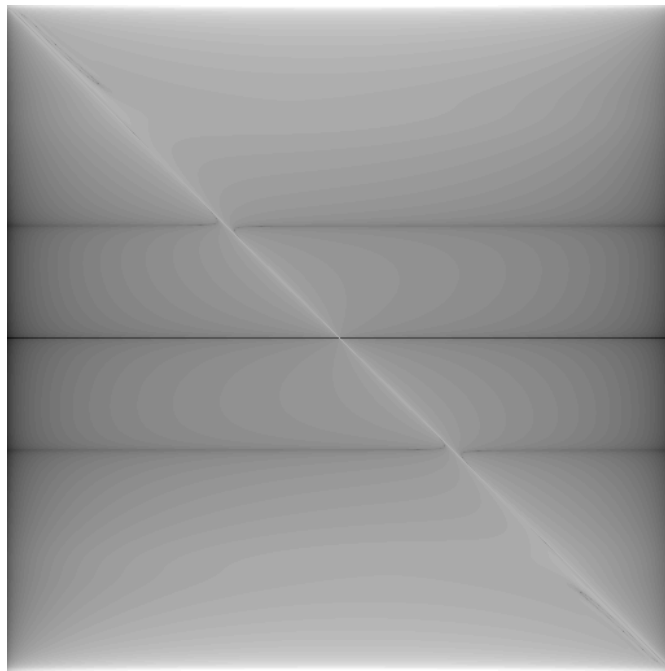


Figure 4.13 – Exemple de matrice de transfert inverse dans le domaine de l'interférogramme. L'amplitude des coefficients est représentée sur une échelle logarithmique d'intensité (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.15$ et $R/f = 0.05$, 513 points, intégration sur 64 échantillons de l'ILS).

4.4.2 Étude du bruit

Lorsqu'on est en présence de bruit blanc gaussien de variance σ_b^2 et de moyenne nulle dans le domaine de l'interférogramme mesuré, et que l'on applique la matrice de transfert inverse, on introduit de la corrélation entre les points du vecteur de bruit. Le bruit n'est alors plus blanc.

Puisque nous effectuons la transformation linéaire d'un vecteur de variables aléatoires gaussiennes, nous utiliserons le théorème suivant [VINIOTIS, 1998, Th. 4.17] :

Théorème (Transformation linéaire de variables aléatoires gaussiennes). *Soit \mathbf{X} un vecteur de p variables aléatoires conjointement gaussiennes de moyenne \mathbf{m}_X et de matrice de covariance \mathbf{C}_X , et soit $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Alors \mathbf{Z} est aussi conjointement gaussien, de moyenne $\mathbf{m}_Z = \mathbf{A}\mathbf{m}_X$ et de matrice de covariance $\mathbf{C}_Z = \mathbf{A}\mathbf{C}_X\mathbf{A}^T$.*

Le bruit inversé est alors caractérisé par une moyenne nulle, et par la matrice de covariance \mathbf{C}_i dans le domaine de l'interférogramme :

$$\mathbf{C}_i = \sigma_b^2 \widetilde{\text{ILS}}_q^{-1} \left(\widetilde{\text{ILS}}_q^{-1} \right)^T. \quad (4.47)$$

Pour caractériser le bruit dans le domaine spectral, nous allons décomposer le bruit dans l'interférogramme en parties paire et impaire (par rapport au ZPD), et calculer les caractéristiques correspondantes pour la partie réelle et la partie imaginaire du bruit spectral complexe. Nous introduisons donc une matrice de transformation paire \mathbf{P} et une matrice de transformation impaire $\bar{\mathbf{P}}$. Ces matrices peuvent être représentées par la somme ou la différence de la matrice identité et de la matrice d'échange⁶. Par exemple :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Pour des matrices de dimensions paires, il faut considérer le premier ou dernier point séparément. Voici quelques propriétés de ces matrices :

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{P}}^T = \bar{\mathbf{P}}, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^* = \mathbf{P}, \quad \mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{F}^* = \bar{\mathbf{P}}. \quad (4.50)$$

⁶Matrice identité antidiagonale.

Puisque la partie réelle du bruit est calculée avec la transformation $\text{ILS}_q^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P}$, les caractéristiques de la partie réelle du bruit spectral seront donc données par :

$$\mathbf{C}_s^{Re} = \sigma_b^2 \text{ILS}_q^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{F}^\dagger (\text{ILS}_q^{-1})^T \quad (4.51)$$

$$= \sigma_b^2 \text{ILS}_q^{-1} \mathbf{P} (\text{ILS}_q^{-1})^T. \quad (4.52)$$

Il faut préciser que l'on doit utiliser le transposé conjugué pour la matrice de Fourier \mathbf{F} , étant donné que la matrice est complexe.

De même, les caractéristiques de la partie imaginaire du bruit spectral sont données par :

$$\mathbf{C}_s^{Im} = \sigma_b^2 \text{ILS}_q^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{F}^\dagger (\text{ILS}_q^{-1})^T \quad (4.53)$$

$$= \sigma_b^2 \text{ILS}_q^{-1} \bar{\mathbf{P}} (\text{ILS}_q^{-1})^T. \quad (4.54)$$

On remarque que les caractéristiques de la partie réelle et de la partie imaginaire du bruit spectral seront légèrement différentes.

Lorsque l'ILS est assez étroit (quand les enveloppes d'apodisation ne contiennent pas de zéro ou de faibles valeurs) et que la matrice inverse est stable, on remarque que la variance du bruit augmente avec les fréquences (voir figure 4.14). De plus, la variance du bruit après inversion est toujours plus grande dans la partie réelle que dans la partie imaginaire du spectre.

Lorsque l'ILS est plus large et que l'inversion devient instable, on remarque que la variance du bruit explose dans les hautes fréquences (figure 4.15). De plus, la corrélation entre les points du bruit après inversion devient très importante (voir figures 4.16 et 4.17). L'inversion de l'ILS a donc pour effet d'exacerber le bruit dans les hautes fréquences, rendant inutiles les données dans ce cas.

Notons que cette étude ne tient pas compte des méthodes d'étalonnage ou de correction pouvant survenir avant l'inversion de l'ILS. Ces algorithmes pourraient modifier de façon importante les caractéristiques du bruit additif présent dans l'interférogramme. Par contre, elle nous donne une bonne idée de l'amplification du bruit causée par l'inversion de la fonction d'appareil.

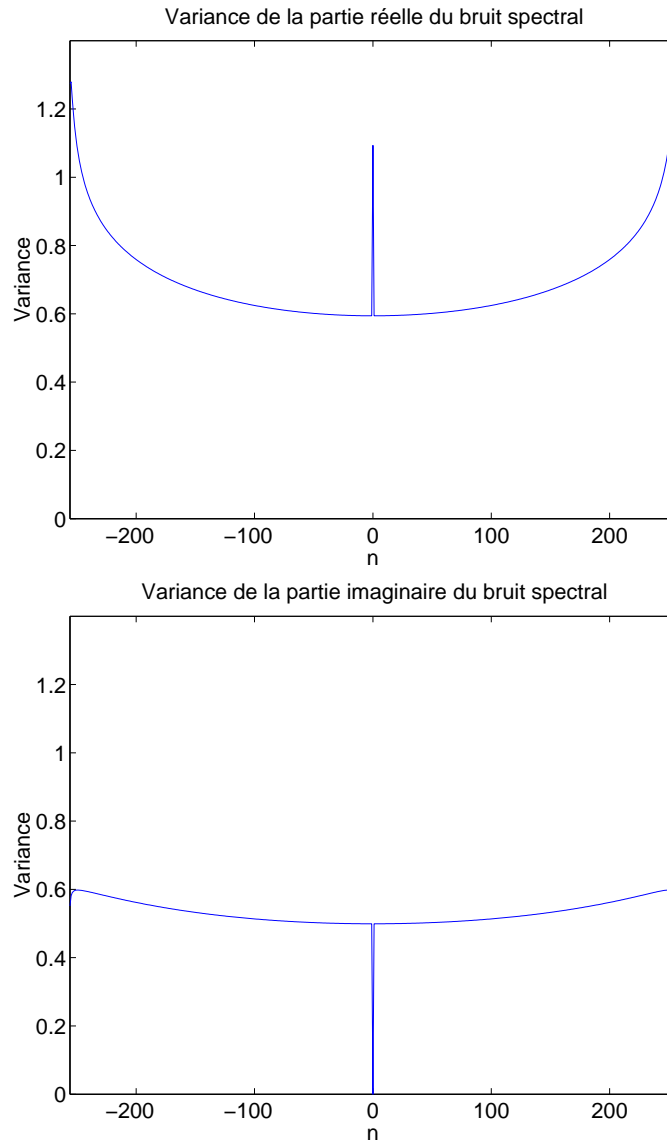


Figure 4.14 – Diagonale de la matrice de covariance ($\sigma_b^2 = 1$) de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.08$, 513 points).

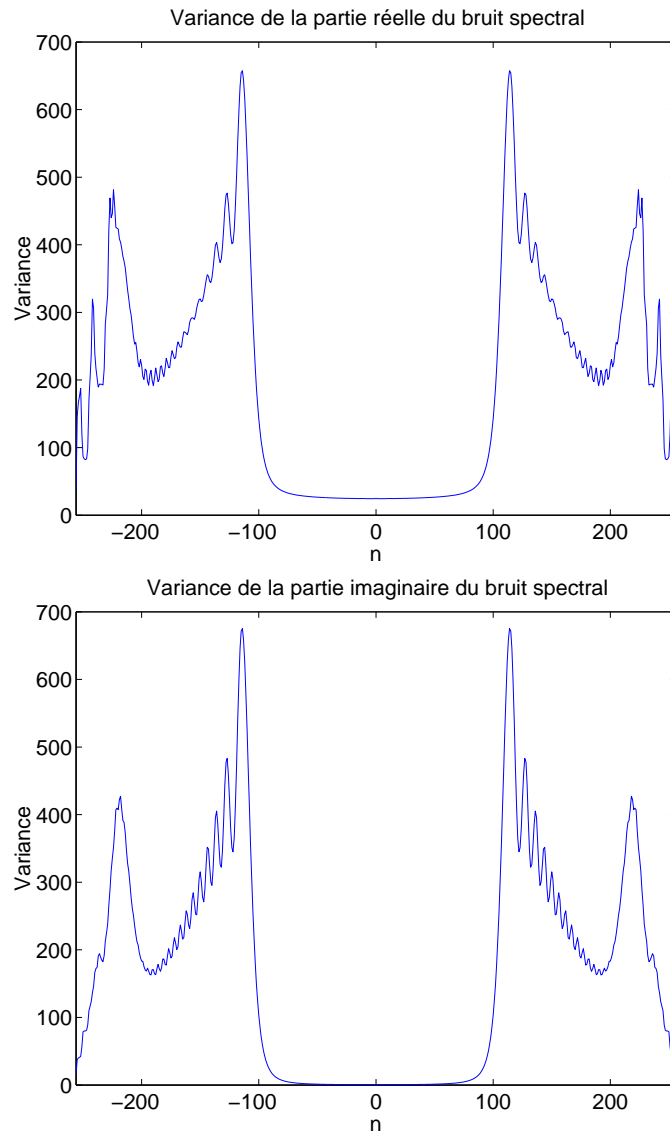


Figure 4.15 – Diagonale de la matrice de covariance ($\sigma_b^2 = 1$) de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points).

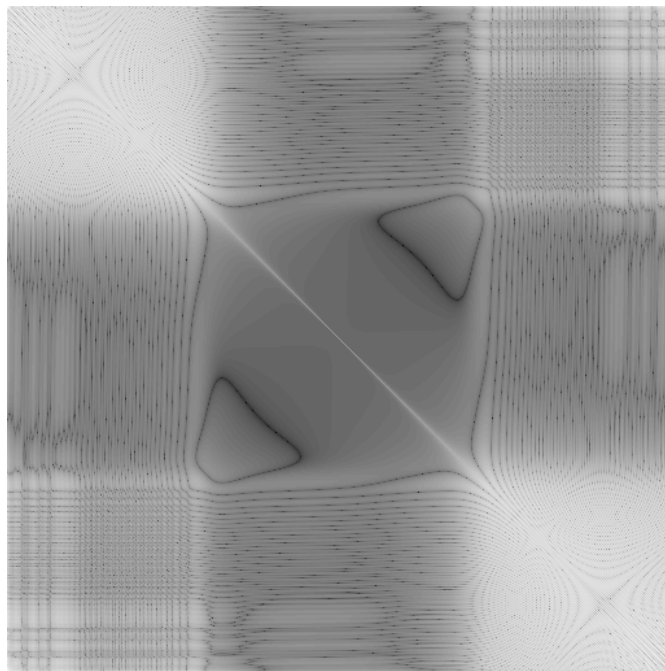


Figure 4.16 – Exemple de matrice de covariance d'un bruit après inversion, dans le domaine de l'interférogramme (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points).

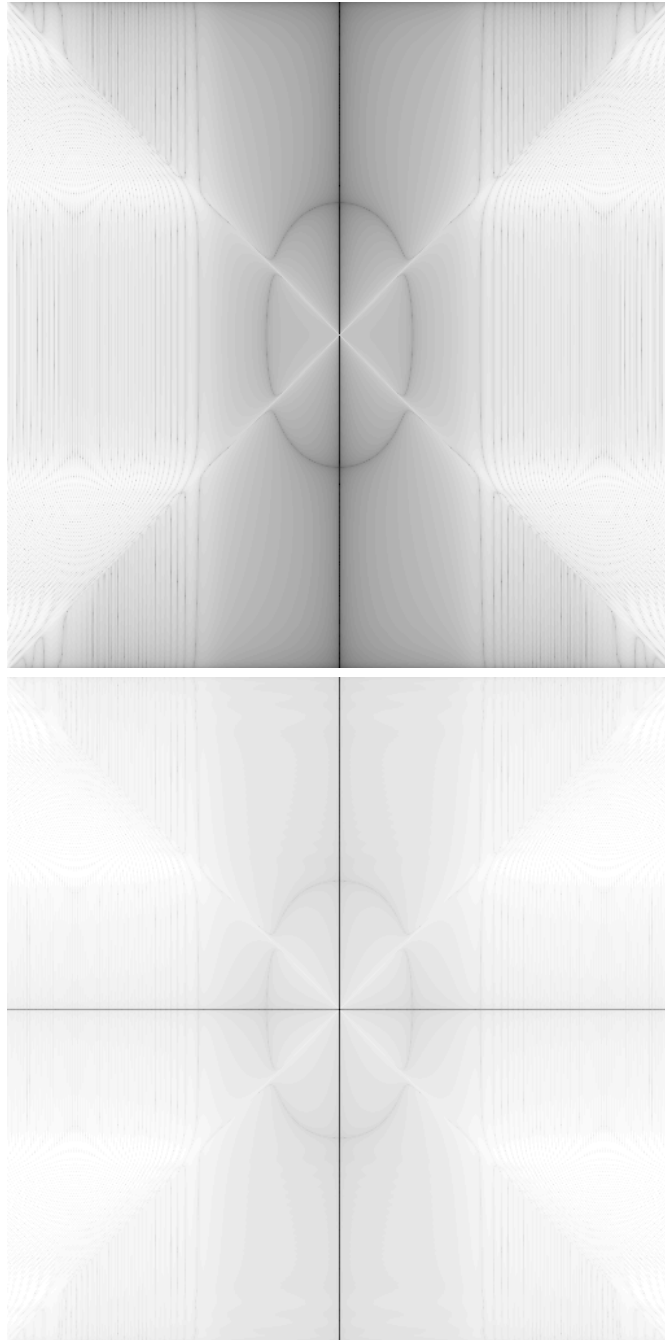


Figure 4.17 – Exemple de matrice de covariance de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un bruit spectral après inversion (ILS d'un détecteur circulaire centré, $R/f = 0.2$, 513 points).

4.5 Implémentation des algorithmes

Nous décrirons tout d'abord dans cette section les principales étapes pour l'implémentation de l'algorithme d'intégration (et d'inversion) matricielle de l'ILS dans le domaine de l'interférogramme. Nous décrirons également quelles transformations peuvent être utilisées pour optimiser la vitesse de calcul de la matrice d'ILS. La deuxième partie de cette section présentera un algorithme rapide d'intégration de l'ILS bénéficiant de la rapidité algorithmique de la FFT. Cet algorithme permettra donc l'intégration rapide de l'ILS pour des vecteurs de données très grands, et ce en utilisant un minimum de ressources. On retrouvera à l'annexe B un exemple des algorithmes implémentés dans le langage de programmation MATLAB [The MathWorks, Inc.].

4.5.1 Algorithme de calcul de la matrice d'ILS

Voici tout d'abord les principales étapes du calcul de la matrice d'ILS dans le domaine de l'interférogramme. On considère que l'intégrale présente dans le calcul des coefficients de la matrice d'ILS est discrétisée et représentée par les indices i .

- a) Calcul du vecteur des coefficients de l'ILS $H(\alpha_i)$;
- b) Calcul du vecteur des coefficients d'intégration c_i ;
- c) Calcul des matrices de Dirichlet $D_N(\alpha_i m - n)$ pour chaque coefficient α_i ;
- d) Sommation des matrices de Dirichlet :

$$\widetilde{\text{ILS}}_q[m, n] = \Delta\alpha \sum_i c_i H(\alpha_i) D_N(\alpha_i m - n).$$

Optimisation

L'étape du calcul des matrices de Dirichlet est très coûteuse en temps de calcul. En fait, c'est le calcul numérique de la fonction sinus pour une matrice 2D qui exige le plus de temps de calcul. Pour optimiser l'algorithme, nous proposons une transformation trigonométrique qui permet de séparer les indices m et n dans le calcul de la matrice de Dirichlet. La fonction sinus ne sera donc calculée que sur des vecteurs et non sur des matrices.

Tout d'abord, les coefficients de la matrice de Dirichlet sont définis par :

$$D_N(\alpha_i m - n) = \frac{\text{sinc}(\alpha_i m - n)}{\text{sinc}\left(\frac{\alpha_i m - n}{2N+1}\right)} = \frac{\sin(\pi\alpha_i m - \pi n)}{(2N+1) \sin\left(\frac{\pi\alpha_i m - \pi n}{2N+1}\right)}. \quad (4.55)$$

On remarque que les fonctions sinus doivent être appliquées sur tous les coefficients de la matrice. Si on applique la relation trigonométrique suivante,

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (4.56)$$

on obtient une expression où les fonctions sinus et cosinus sont appliquées sur les indices m et n séparément :

$$D_N(\alpha_i m - n) = \frac{1}{(2N+1)} \frac{\sin(\pi\alpha_i m) \cos(\pi n) - \cos(\pi\alpha_i m) \sin(\pi n)}{\left[\sin\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) \right]} \quad (4.57)$$

$$= \frac{1}{(2N+1)} \frac{\sin(\pi\alpha_i m) (-1)^n}{\left[\sin\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) \right]} \quad (4.58)$$

Lorsqu'on exprime cette équation sous forme matricielle afin de mieux illustrer les opérations, on obtient :

$$D_N(\alpha_i m - n) = \frac{\frac{1}{(2N+1)} \begin{bmatrix} \vdots \\ \sin(\pi\alpha_i m) \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & (-1)^n & \cdots \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) & \cos\left(\frac{\pi\alpha_i m}{2N+1}\right) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & \cos\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) & \cdots \\ \cdots & -\sin\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right) & \cdots \end{bmatrix}}, \quad (4.59)$$

où la division est une division d'Hadamard⁷ des matrices résultant du produit matriciel au numérateur et au dénominateur. De cette façon, les fonctions trigonométriques ne sont calculées que pour quelques vecteurs et non plus pour des matrices entières. De plus, les vecteurs correspondant aux indices n ne doivent être calculés qu'une seule fois puisqu'ils sont indépendants de l'indice i .

Notons que pour lever l'indétermination lorsque le numérateur et le dénominateur sont nuls simultanément, nous savons que :

$$D_N(\alpha_i m - n) = 1, \quad \forall [m, n] \mid \alpha_i m = n. \quad (4.60)$$

Il peut survenir des problèmes de précision numérique lorsque le dénominateur est une valeur très petite provenant de la différence de deux termes de valeurs semblables. Pour ces valeurs, qui sont en petit nombre dans la matrice de Dirichlet (lorsque $\alpha_i m \approx n$), nous devrions plutôt employer directement la définition donnée dans l'équation (4.55).

⁷Le produit d'Hadamard (ou de Schur) de deux matrices, symbolisé par \odot , est défini par la multiplication élément par élément des matrices, alors que la division d'Hadamard, généralement notée \oslash , correspond à la division élément par élément.

4.5.2 Algorithme d'intégration d'ILS rapide

Le calcul de la matrice d'ILS requiert d'importantes ressources matérielles en terme de puissance de calcul et de stockage de données. Le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul d'une matrice d'ILS de taille $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ est évidemment d'ordre $\mathcal{O}(\mathcal{N}^2)$, ce qui rend difficile l'usage de la méthode matricielle pour l'intégration et l'inversion de la fonction d'appareil. Dans un contexte pratique où la dimension \mathcal{N} des ensembles de données peut prendre une valeur appréciable allant couramment de 10 000 à 1 000 000 points, nous devons impérativement chercher à optimiser l'algorithme d'intégration d'ILS.

Nous avons mis au point un algorithme rapide d'intégration de la fonction d'appareil d'ordre $\mathcal{O}(\mathcal{N} \log_2 \mathcal{N})$ en nous basant sur les travaux de [BAILEY et SWARZTRAUBER \[1991, 1992, 1994\]](#) concernant la transformation de Fourier fractionnaire discrète. Il existe plusieurs définitions plus ou moins reliées de la transformation de Fourier fractionnaire (FRFT). Le lecteur trouvera dans l'ouvrage d'[OZAKTAS et al. \[2001\]](#) une étude plus approfondie du sujet. À l'aide des techniques de calcul de la transformation de Fourier fractionnaire, nous bénéficierons de la rapidité algorithmique de la transformation de Fourier rapide (FFT) redécouverte et mise en valeur au milieu du siècle dernier par [COOLEY et TUKEY \[1965\]](#).

Principes

Nous devons en premier lieu exprimer l'intégration matricielle de l'ILS de manière à faire ressortir le concept de transformation fractionnaire. Reprenons l'équation matricielle d'intégration de l'ILS dans le domaine spectral :

$$\mathbf{s}_m[j] = \sum_{k=-N}^N \mathbf{s}_o[k] \mathbf{ILS}_q[j, k], \quad (4.61)$$

$$= \sum_{k=-N}^N \mathbf{s}_o[k] \left(\Delta\alpha \sum_i c_i H(\alpha_i) D_N(\alpha_i k - j) \right). \quad (4.62)$$

En effectuant la transformation de Fourier discrète inverse (de j vers m) de l'équation et en inversant l'ordre des sommations, nous obtenons la forme suivante :

$$\mathbf{i}_m[m] = \sum_{k=-N}^N \mathbf{s}_o[k] \left(\frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i2\pi km\beta_i} \right), \quad (4.63)$$

$$= \frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) \left(\sum_{k=-N}^N \mathbf{s}_o[k] e^{i2\pi km\beta_i} \right), \quad (4.64)$$

où $\beta_i = \alpha_i / (2N + 1)$. Le facteur mis en évidence dans l'équation (4.64) :

$$\sum_{k=-N}^N s_o[k] e^{i2\pi km\beta_i}, \quad (4.65)$$

correspond à une transformation de Fourier fractionnaire telle que définie par BAILEY et SWARZTRAUBER [1991].

À la suite de BAILEY et SWARZTRAUBER, nous appliquerons maintenant la substitution suivante :

$$2km = m^2 + k^2 - (m - k)^2, \quad (4.66)$$

tirée d'une technique algorithmique proposée à l'origine par BLUESTEIN [1970] (connue sous le nom de « *Bluestein's FFT algorithm* » ou encore de « *chirp-z algorithm* »), qui nous permettra de modifier la transformation de Fourier fractionnaire pour bénéficier de la rapidité algorithmique de la FFT :

$$i_m[m] = \frac{\Delta\alpha}{2N + 1} \sum_i c_i H(\alpha_i) \left(\sum_{k=-N}^N s_o[k] e^{i\pi[m^2+k^2-(m-k)^2]\beta_i} \right), \quad (4.67)$$

$$= \frac{\Delta\alpha}{2N + 1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i\pi m^2 \beta_i} \left(\sum_{k=-N}^N s_o[k] e^{i\pi k^2 \beta_i} e^{-i\pi (m-k)^2 \beta_i} \right). \quad (4.68)$$

L'équation (4.68) est maintenant écrite sous la forme d'une convolution (non circulaire) des termes $s_o[m] e^{i\pi m^2 \beta_i}$ et $e^{-i\pi m^2 \beta_i}$. Cette convolution peut être effectuée par FFT en doublant le nombre de points, ce qui rend l'algorithme d'intégration d'ILS d'ordre $\mathcal{O}(2N \log_2 2N)$.

Implémentation

Pour optimiser davantage l'implémentation de l'algorithme d'intégration d'ILS rapide et doubler la vitesse d'exécution, nous allons poser que l'interférogramme vrai $i_o[n]$, défini pour $-N \leq n \leq N$, est toujours symétrique par rapport à $n = 0$ (ZPD). Cette hypothèse est acceptable du fait que $i_o[n]$ représente l'autocorrélation du signal lumineux sans distorsion provenant du spectromètre, et que l'ILS est généralement intégré à un spectre théorique. De cette hypothèse, on déduit tout de suite que le spectre s_o sera lui aussi réel et pair, de même que l'interférogramme résultant i_m .

Nous séparerons dans un premier temps la sommation sur les k positifs et négatifs :

$$\begin{aligned} i_m[m] &= \frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i\pi m^2 \beta_i} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^N s_o[k] e^{i\pi k^2 \beta_i} e^{-i\pi(m-k)^2 \beta_i} + \sum_{k=-N}^0 s_o[k] e^{i\pi k^2 \beta_i} e^{-i\pi(m-k)^2 \beta_i} - s_o[0] e^{-i\pi m^2 \beta_i} \right), \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i\pi m^2 \beta_i} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^N s_o[k] e^{i\pi k^2 \beta_i} e^{-i\pi(m-k)^2 \beta_i} + \sum_{k=0}^N s_o[-k] e^{i\pi k^2 \beta_i} e^{-i\pi(m+k)^2 \beta_i} - s_o[0] e^{-i\pi m^2 \beta_i} \right); \end{aligned} \quad (4.70)$$

et avec l'hypothèse de symétrie, $s_o[-k] = s_o[k]$,

$$\begin{aligned} &= \frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i\pi m^2 \beta_i} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^N s_o[k] e^{i\pi k^2 \beta_i} \left[e^{-i\pi(m-k)^2 \beta_i} + e^{-i\pi(m+k)^2 \beta_i} \right] - s_o[0] e^{-i\pi m^2 \beta_i} \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Nous pouvons donc définir les vecteurs suivants :

$$y_i[m] = \begin{cases} s_o[0], & m = 0, \\ 2s_o[m] e^{i\pi m^2 \beta_i}, & 0 < m \leq N, \\ 0, & N < m \leq 2N, \end{cases} \quad (4.72)$$

$$z_i[m] = \begin{cases} e^{-i\pi m^2 \beta_i}, & 0 \leq m \leq N, \\ e^{-i\pi(m-2N-1)^2 \beta_i}, & N < m \leq 2N, \end{cases} \quad (4.73)$$

pour transformer la convolution en convolution circulaire, laquelle nous dénoterons à l'aide du symbole \otimes . Avec la symétrie du vecteur \mathbf{z}_i et le regroupement de la constante $s_o[0]$ et du vecteur \mathbf{y}_i , l'équation (4.71) devient équivalente à l'expression

$$\boxed{i_m[m] = \begin{cases} \frac{\Delta\alpha}{2N+1} \sum_i c_i H(\alpha_i) e^{i\pi m^2 \beta_i} (y_i[m] \otimes z_i[m]), & 0 \leq m \leq N, \\ i_m[-m], & -N \leq m < 0. \end{cases}} \quad (4.74)$$

La convolution circulaire des vecteurs \mathbf{y}_i et \mathbf{z}_i peut être ensuite effectuée par transfor-

mation de Fourier rapide :

$$y_i[m] \otimes z_i[m] = F^{-1} \left((F y_i) \odot (F z_i) \right), \quad (4.75)$$

pour donner un algorithme d'ordre $\mathcal{O}(\mathcal{N} \log_2 \mathcal{N})$.

Notons que pour le cas où la dimension \mathcal{N} de nos vecteurs est un nombre pair, nous pouvons utiliser la symétrie du problème pour définir le point $i_o[N] \equiv i_o[-N]$. Il suffira de retrancher ce dernier point du vecteur résultant i_m pour ramener le nombre de points final à un nombre pair.

Transformation de Fourier rapide

Nous ajouterons enfin une dernière remarque à propos de l'optimisation de l'algorithme d'intégration d'ILS rapide. L'algorithme de transformation de Fourier rapide le plus connu est particulièrement efficace pour traiter des vecteurs dont la longueur est une puissance de deux. De nombreux algorithmes ont aussi été développés pour étendre l'utilisation de la FFT à des vecteurs de longueur quelconque. Parmi les algorithmes les plus rapides disponibles maintenant, citons l'algorithme adaptatif FFTW (*Fastest Fourier Transform of the West*) de FRIGO et JOHNSON [1998], lequel est implémenté entre autres dans la version 6 de MATLAB. Il demeure que la rapidité d'exécution de la FFT peut être très différente pour deux nombres de points très proches. Aussi, nous suggérons d'exploiter le fait que les algorithmes actuels de FFT sont très efficaces lorsque le nombre de points peut être factorisé en un grand nombre de facteurs 2 et un faible nombre de petits nombres premiers (par exemple $384 = 2^7 \times 3$).

Nous suggérons donc d'augmenter le nombre de points en ajoutant quelques zéros aux vecteurs lors du calcul de la convolution par FFT, de façon à utiliser un algorithme de FFT optimum. L'ajout d'un faible nombre de points sera largement compensé par l'augmentation de la rapidité d'exécution. Nous avons implémenté une fonction (annexe B.7) qui permet de diviser les nombres situés entre deux puissances de deux consécutives en une vingtaine de catégories, de façon à utiliser un faible nombre de petits nombres premiers. Le tableau 4.2 donne une liste de facteurs croissants, leur dénominateur ayant 64 comme plus petit commun multiple, que nous utilisons pour multiplier une puissance de deux afin d'obtenir un nombre factorisable avec un faible nombre de petits nombres premiers (nous avons choisi ici 2, 3, 5, 7 et 11). Il suffit de trouver le nombre supérieur le plus proche de la dimension des vecteurs utilisés dans l'intégration de la fonction d'appareil pour assurer l'utilisation des algorithmes de FFT les plus efficaces (voir figure 4.18).

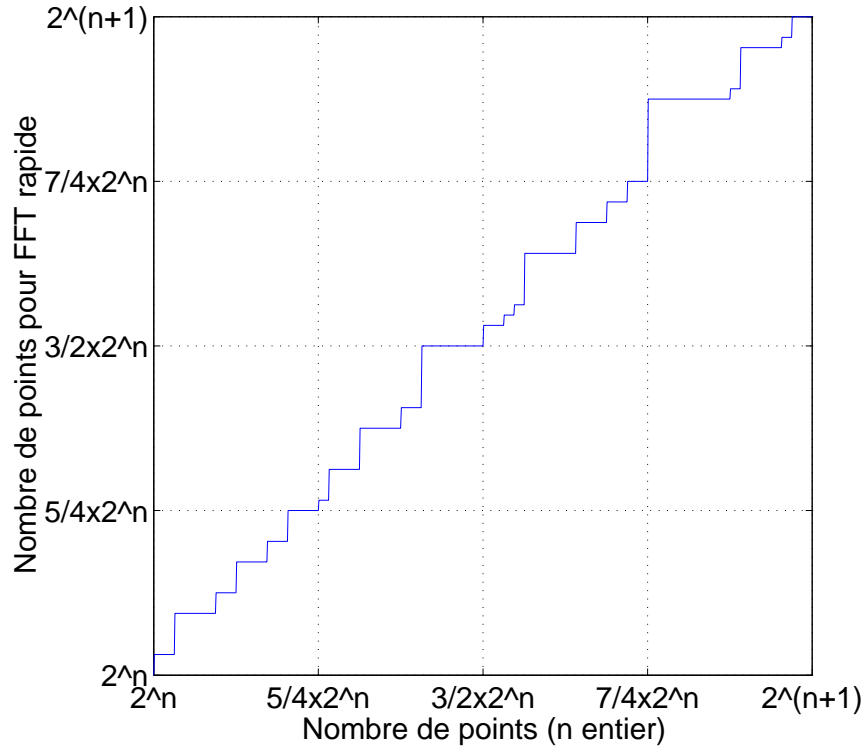


Figure 4.18 – Correspondance entre le nombre de points d’un vecteur et le nombre composé d’une faible quantité de petits nombres premiers afin d’utiliser un algorithme rapide de FFT.

Tableau 4.2 – Facteurs utilisés pour obtenir un nombre factorisable en un faible nombre de petits nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11), afin d’optimiser la rapidité de la FFT.

1/1	3 × 11/32	5 × 7/32	3 × 3/8	3 × 5 × 5/64	7 × 11/64
5/4	3 × 3 × 3 × 3/64	3 × 7/16	11/8	3 × 3 × 5/32	3/2
7 × 7/32	3 × 3 × 11/64	5 × 5/16	3 × 5 × 7/64	3 × 3 × 3/16	5 × 11/32
7/4	3 × 5/8	11 × 11/64	5 × 5 × 5/64	3 × 3 × 7/32	2/1

4.6 Validation expérimentale

Grâce aux travaux de [BOUCHARD \[2004\]](#) sur la mesure de la fonction d'appareil, nous pourrions appliquer et valider nos algorithmes d'intégration et d'inversion de l'ILS sur des mesures expérimentales. Le montage utilisé permet la mesure d'un faisceau divergent à haute résolution et le déplacement automatisé d'un champ de vue circulaire. Des mesures ont donc été prises avec les mêmes champs de vue pour une source d'émission laser et pour une cellule de HBr gazeux éclairée par un corps noir à haute température. À partir des paramètres de fonction d'appareil déterminés par [BOUCHARD](#), nous allons intégrer l'ILS aux spectres théoriques d'émission laser à haute résolution pour comparer les mesures et le modèle théorique. Nous inverserons ensuite ces fonctions d'appareil à plus faible résolution pour comparer les spectres d'absorption du HBr corrigés pour les différents champs de vue.

4.6.1 Spectre d'émission laser

La mesure du spectre d'une source laser à la sortie d'une sphère intégrante, dans des conditions de grande divergence et de haute résolution, permet de caractériser de façon exceptionnelle la fonction d'appareil [[BOUCHARD et al., 2003](#)]. Aussi avons-nous pu comparer le modèle de la fonction d'appareil d'un détecteur circulaire hors axe à différentes positions, selon les paramètres déterminés par [BOUCHARD](#), avec des mesures à très haute résolution (0.03 cm^{-1} , 524 289 points) en utilisant l'algorithme d'intégration rapide de l'ILS. Le tableau 4.3 donne les paramètres des différents champs de vue et la

Tableau 4.3 – Paramètres des ILS mesurés (focale de 550 mm) [[BOUCHARD, 2004](#)].

FOV		1	2	3	4	5	6
Position	[mm]	-5.013	-4.000	-3.093	-1.991	-0.944	0.101
Rayon	[mm]	4.065	4.000	4.044	4.203	4.221	4.180

figure 4.19 montre une comparaison des mesures et du modèle, après intégration de la fonction d'appareil. On remarque tout de suite une excellente adéquation entre mesures et modèle.

4.6.2 Spectre d'absorption du HBr

Les mêmes champs de vue furent ensuite utilisés pour mesurer le spectre d'absorption du HBr. Nous avons construit les matrices d'ILS correspondantes à faible résolution

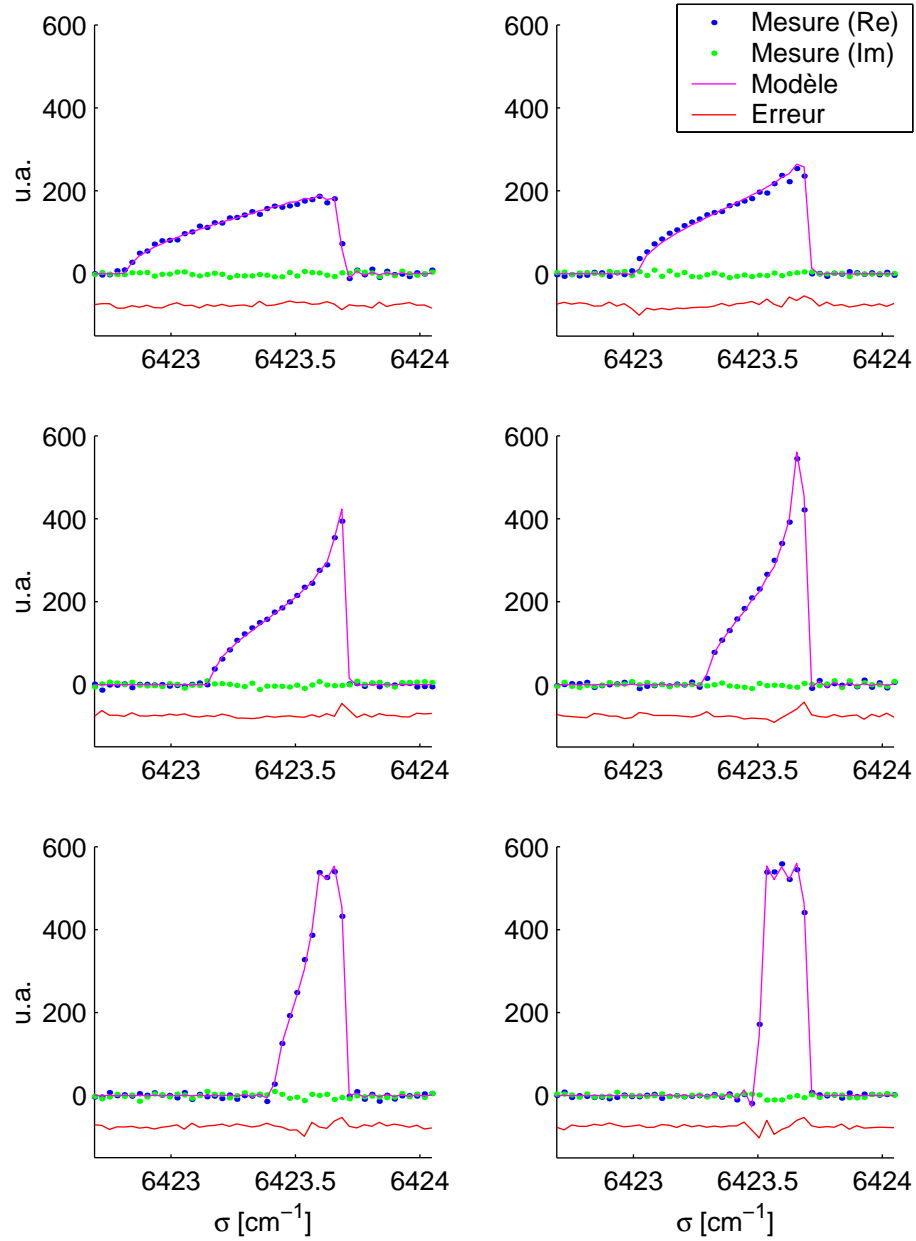


Figure 4.19 – ILS haute résolution mesurés à l’aide d’une source laser [BOUCHARD, 2004] pour un champ de vue circulaire à différentes positions. Le modèle, obtenu par l’algorithme d’intégration rapide, est indiqué par la courbe magenta, et l’erreur (différence) entre le modèle et la partie réelle de la mesure est indiquée en rouge sous l’ILS.

(10001×10001 coefficients⁸) pour ensuite calculer la matrice d'ILS inverse propre à chaque champ de vue. Les spectres de HBr à basse résolution furent donc corrigés en retirant l'ILS, ce qui nous a permis de les comparer entre eux. La figure 4.20 montre les spectres de HBr corrigés, c'est-à-dire sans effet d'ILS.

Afin de comparer les spectres corrigés et les spectres non corrigés, nous avons calculé la position de 18 des raies d'absorption du HBr pour les différents spectres. La figure 4.21 montre la différence entre la position d'une raie et la valeur moyenne de la position de la raie corrigée pour tous les champs de vue, en fonction du champ de vue et ce pour chacune des raies. La figure 4.22 illustre cette différence en fonction des raies pour les spectres non corrigés et la figure 4.23 pour les spectres corrigés. On voit également la légère augmentation du déplacement des raies avec σ_o (figure 4.22) disparaître après correction.

Après correction de la fonction d'appareil, les raies d'absorption se retrouvent donc toutes alignées, ce qui permet une comparaison précise de spectres provenant de différents champs de vue. Dans le cas présenté ici, la largeur de l'ILS vers 2550 cm^{-1} est d'environ 0.074 à 0.342 cm^{-1} selon les champs de vue, alors que l'espacement des échantillons (résolution) est d'environ 1.58 cm^{-1} (ce qui correspond à $\pm 0.317 \text{ cm}$ d'OPD maximal).

4.7 Approximation locale de l'effet d'échelle par convolution

La convolution fut l'une des premières approches utilisées pour traiter localement la fonction d'appareil dans le domaine spectral [RASPOLLINI et al., 1998; AHRO et al., 2000]. C'est une technique souvent employée, entre autres en combinaison avec le logiciel LINEFIT développé par HASE et al. [1999], et elle apparaît aussi d'une certaine façon dans la technique de BOWMAN et al. [2000]. Une simple déconvolution peut alors être effectuée pour corriger localement le spectre. Nous aborderons donc ce sujet pour vérifier de quelle façon, à partir de nos travaux, la matrice d'ILS peut être le mieux décrite par une convolution.

Mentionnons tout d'abord que, d'un point de vue matriciel, la convolution circulaire peut être représentée par une matrice dont chaque ligne correspond à la ligne précédente dont les éléments ont été décalés circulairement d'une position vers la droite. Ou encore

⁸Ce sont les matrices les plus grandes qu'il nous fut techniquement possible d'inverser avec la version 6 de MATLAB pour des raisons de mémoire et d'architecture.

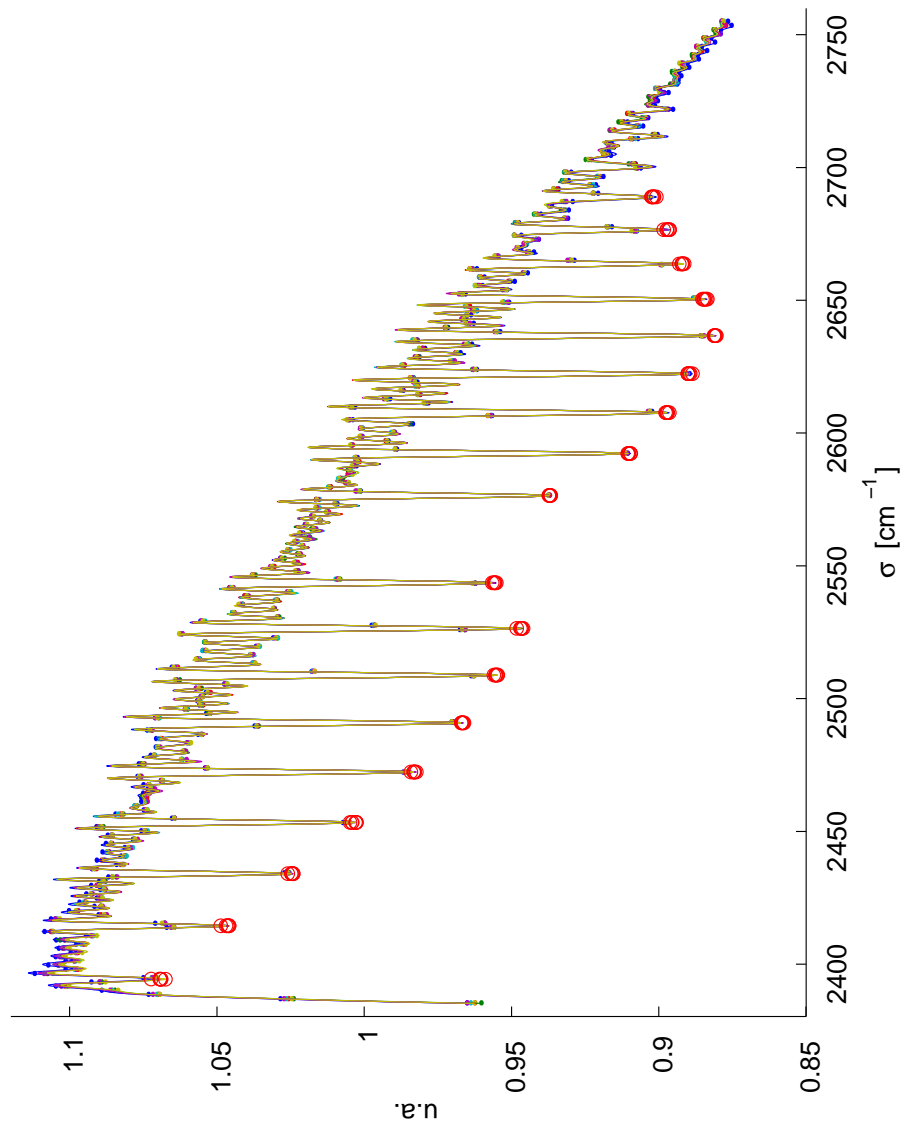


Figure 4.20 – Spectres d'absorption de HBr corrigés pour différents champs de vue.

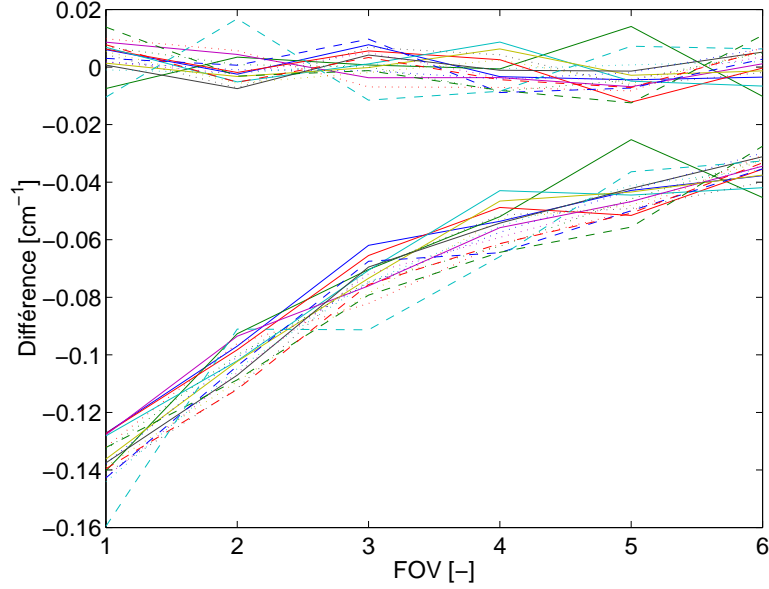


Figure 4.21 – Différence entre la position d’une raie en fonction du champ de vue et la valeur moyenne de la position de la raie pour tous les champs de vue, et ce pour chacune des raies. Les valeurs correspondant aux spectres corrigés sont situées autour de zéro.

d’un autre point de vue, chaque colonne est équivalente à la colonne précédente décalée circulairement vers le bas. Nous allons donc étudier le comportement local de la matrice d’ILS pour voir s’il est préférable d’utiliser une ligne ou une colonne de la matrice d’ILS pour effectuer la convolution. Pour y arriver, nous allons examiner deux cas particuliers : un spectre monochromatique (émission laser) et un spectre large avec absorption, puisque que l’erreur commise en faisant l’approximation de l’intégrale de Fredholm par une convolution dépend nécessairement du spectre vrai.

Premièrement, considérons un spectre monochromatique. Nous pouvons constater que le résultat de la multiplication matricielle consiste en la sélection de deux colonnes de la matrice (fréquence positive et fréquence négative). Rien de surprenant, puisque chaque colonne de la matrice d’ILS dans le domaine spectral correspond à la fonction d’appareil à un nombre d’onde réel donné convoluée avec le noyau de Dirichlet. La meilleure approximation dans le cas d’un spectre monochromatique semble donc de toute évidence être la convolution avec la colonne de la matrice d’ILS au nombre d’onde le plus proche. Donc à partir de la définition de la matrice d’ILS dans le domaine spectral :

$$\text{ILS}_q[j, k] = \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha k - j) d\alpha, \quad (4.35)$$

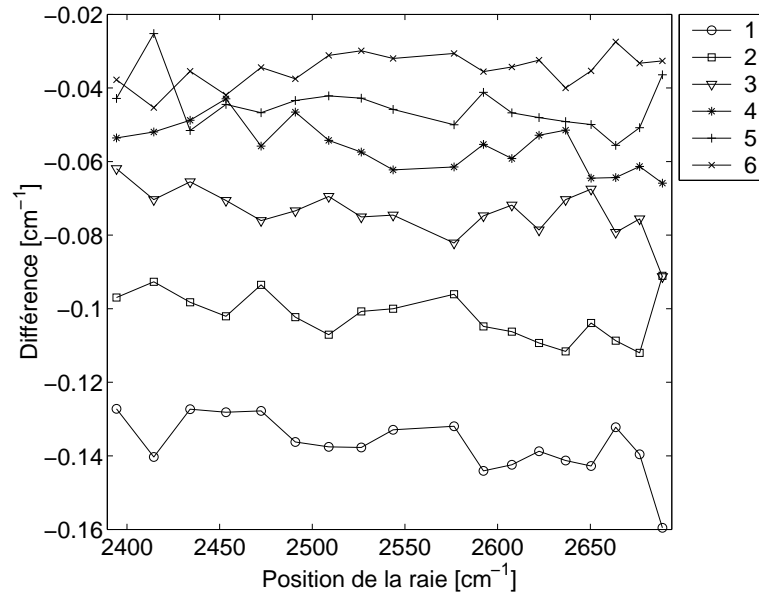


Figure 4.22 – Différence entre la position d'une raie non corrigée et la valeur moyenne de la position de la raie corrigée pour tous les champs de vue, en fonction des différentes raies et ce pour chacun des champs de vue.

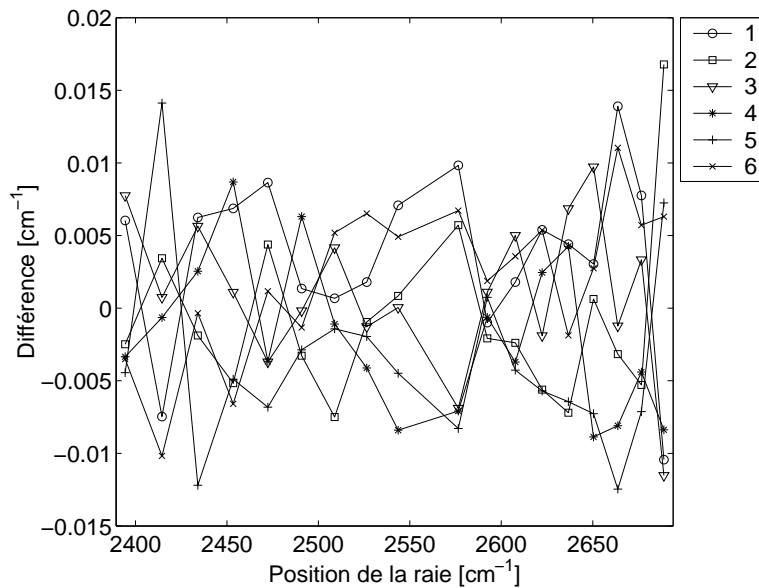


Figure 4.23 – Différence entre la position d'une raie corrigée et la valeur moyenne de la position de la raie corrigée pour tous les champs de vue, en fonction des différentes raies et ce pour chacun des champs de vue.

nous pouvons sélectionner une colonne k_o et définir le vecteur :

$$\text{ils}_{k_o}^c[j] \equiv \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha k_o - (j + k_o)) d\alpha. \quad (4.76)$$

L'approximation autour de $j = k_o$ de l'intégration de l'ILS pour un spectre monochromatique est alors donnée par :

$$\mathbf{s}_m[j] \approx \text{ils}_{k_o}^c[j] \otimes \mathbf{s}_o[j], \quad j \approx k_o. \quad (4.77)$$

Considérons maintenant le cas plus général où le spectre n'est pas monochromatique dans la région étudiée. Par définition, l'intégration de la fonction d'appareil à l'élément j du spectre mesuré est donnée exactement par la multiplication de la ligne j de la matrice d'ILS avec le spectre vrai. Chaque ligne de la matrice d'ILS représente le processus d'intégration de la fonction d'appareil à un point donné, après discrétisation des équations. Lorsque le spectre n'est pas monochromatique, nous désirons donc approcher l'intégration de la fonction d'appareil au spectre par une convolution, ce qui nous amène à considérer la convolution avec une ligne de la matrice d'ILS plutôt qu'avec une colonne. Nous pouvons donc définir le vecteur suivant à partir de la ligne j_o :

$$\text{ils}_{j_o}^l[j] \equiv \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha(j + j_o) - j_o) d\alpha. \quad (4.78)$$

Puisque la multiplication matricielle s'effectue en sommant la multiplication d'une ligne par le vecteur du spectre vrai, on perçoit que cette opération correspond en fait à une corrélation (circulaire). L'approximation de l'intégration de l'ILS pour un spectre large autour de l'élément $j = j_o$ est donc représentée par la convolution (circulaire) suivante :

$$\mathbf{s}_m[j] \approx \text{ils}_{j_o}^l[-j] \otimes \mathbf{s}_o[j], \quad j \approx j_o, \quad (4.79)$$

où le vecteur $\text{ils}_{j_o}^l[j]$ est inversé pour représenter la corrélation.

Les figures 4.24 et 4.25 nous donnent un exemple de la convolution par ligne et par colonne pour le cas d'un spectre monochromatique. Nous observons bien la supériorité de l'approche par colonne dans ce cas. Les figures 4.26 et 4.27 nous donnent un exemple de la convolution par ligne et par colonne pour le cas d'un spectre large bande. La convolution par ligne nous donne alors une meilleure approximation de la matrice d'ILS, l'intégration étant plus précise.

Il faut souligner ici que la valeur moyenne de l'erreur dans le cas de la convolution par colonne n'est pas zéro autour de la région considérée comme pour le cas de l'erreur après convolution par ligne, dans le contexte d'un spectre large bande (figure 4.27).

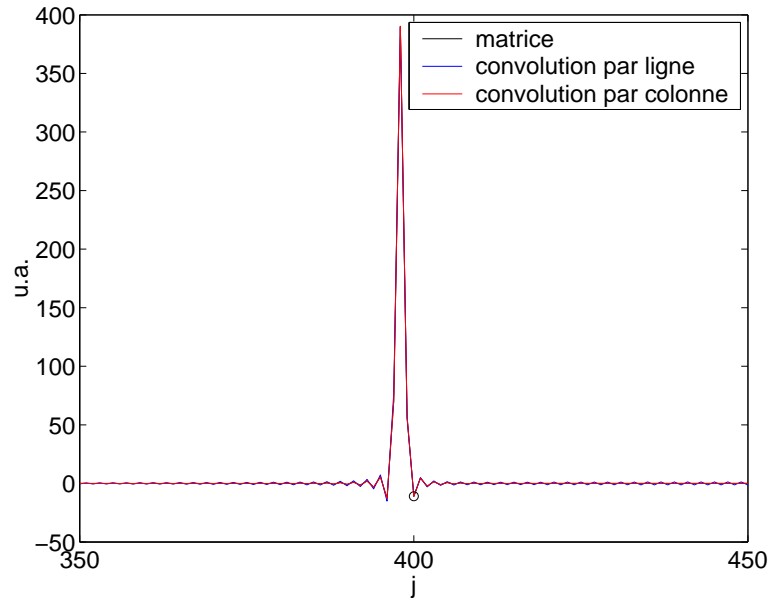


Figure 4.24 – Comparaison de la convolution par ligne ($j_o = 400$) et par colonne ($k_o = 400$) avec l'approche matricielle pour un spectre monochromatique (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).

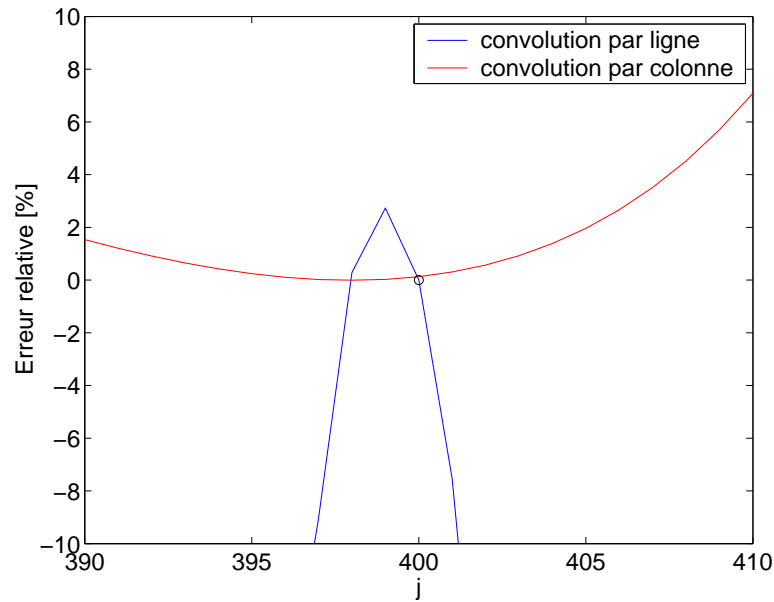


Figure 4.25 – Erreur relative pour un spectre monochromatique de la convolution par ligne ($j_o = 400$) et de la convolution par colonne ($k_o = 400$) par rapport à la matrice d'ILS (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).

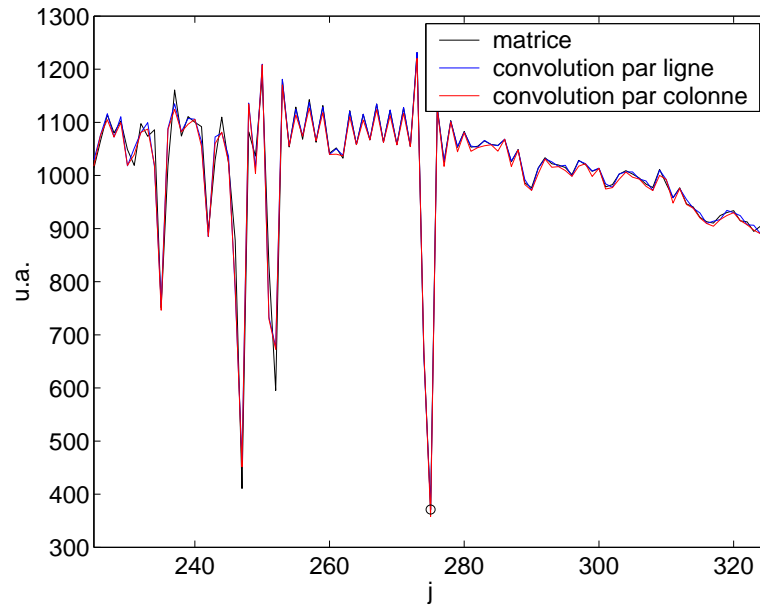


Figure 4.26 – Comparaison de la convolution par ligne ($j_o = 275$) et par colonne ($k_o = 275$) avec l'approche matricielle pour un spectre large bande (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).

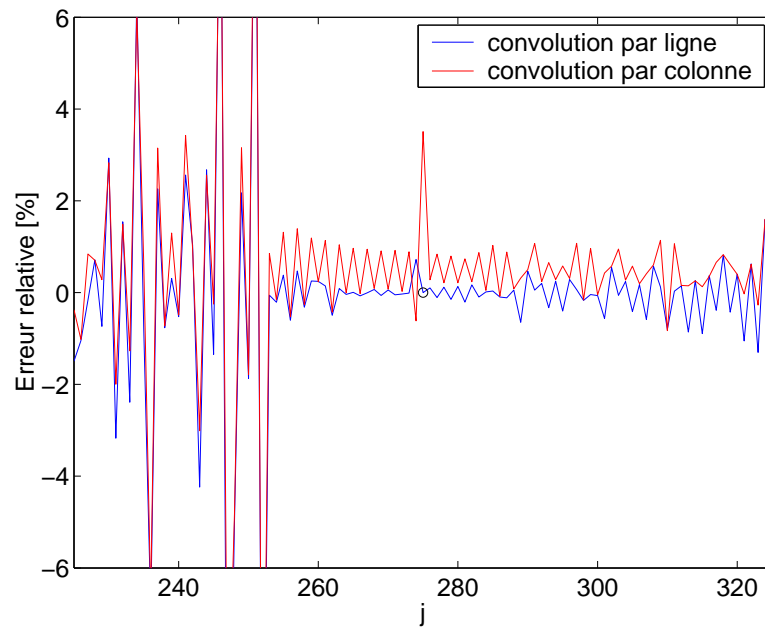


Figure 4.27 – Erreur relative pour un spectre large bande de la convolution par ligne ($j_o = 275$) et de la convolution par colonne ($k_o = 275$) par rapport à la matrice d'ILS (ILS d'un détecteur circulaire hors-axe, $x/f = 0.1$, $R/f = 0.02$, 1 001 points).

On peut expliquer cette différence par le fait que la valeur moyenne de la somme des éléments d'une ligne de la matrice d'ILS n'est pas 1, comme c'est le cas pour la somme des éléments d'une colonne. Il y a donc une différence de gain qui est prise en compte lors de la convolution par ligne. Si l'on somme les éléments d'une colonne de la matrice d'ILS, on obtient :

$$\sum_{j=-N}^N \text{ILS}_q[j, k] = \sum_{j=-N}^N \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha k - j) d\alpha = 1, \quad (4.80)$$

puisque la fonction d'appareil est définie avec une aire unitaire. Si l'on somme les éléments d'une ligne de la matrice d'ILS, on obtient :

$$\sum_{k=-N}^N \text{ILS}_q[j, k] = \sum_{k=-N}^N \int_{\alpha} H(\alpha) D_N(\alpha k - j) d\alpha, \quad (4.81)$$

$$\approx \int_{\alpha} H(\alpha) \frac{1}{\alpha} d\alpha. \quad (4.82)$$

Ce gain correspond en fait au transfert d'énergie provenant des nombres d'onde supérieurs vers les nombres d'onde inférieurs, lequel est toujours plus important de la part des nombres d'onde plus élevés que de la part du nombre d'onde étudié vers les nombres d'onde inférieurs. Ce phénomène est décrit par [BOUFFARD \[2002\]](#) dans son mémoire et correspond à l'intégrale de la fonction d'appareil sur les nombres d'onde vrais.

De plus, on peut voir que la valeur du minimum de la raie d'absorption (encerclée sur les figures [4.26](#) et [4.27](#)) n'est pas exacte dans le cas de la convolution par colonne, alors que le résultat est exact lors de la convolution avec une ligne de la matrice puisque l'intégration est effectuée correctement pour $j = j_o$.

Nous pouvons faire une autre observation à partir des oscillations rapides de l'erreur lors de la convolution par colonne avec un spectre large bande. En fait, si l'on regarde de plus près les définitions de $\text{ils}_{k_o}^c$ et de $\text{ils}_{j_o}^l$, on observe que, dans la seconde, l'indice j est multiplié par la variable α , alors qu'il ne l'est pas dans la définition de $\text{ils}_{k_o}^c$. Ce facteur α modifie la résolution (la largeur du noyau de Dirichlet) lors de la convolution par ligne. En première approximation, on peut dire que l'amplitude est multipliée par un certain facteur et que la résolution est diminuée par ce même facteur lors de la convolution par ligne. La convolution par colonne ne tient pas compte de ce changement de résolution, ce qui explique une erreur oscillant rapidement et correspondant à la différence de résolution.

Nous pouvons donc conclure que l'approximation par convolution donne de meilleurs résultats en général lorsque nous choisissons une ligne de la matrice d'ILS, sauf dans

le cas d'un spectre monochromatique. Cette conclusion va un peu à l'encontre de notre intuition puisqu'au premier abord on utilise directement la convolution avec l'ILS, ce qui correspond à une colonne de la matrice. Les lignes d'une matrice d'ILS correspondent en fait à la transposée de la fonction d'appareil, et tiennent compte des phénomènes dus à l'intégration, tel le recouvrement adéquat des fonctions d'appareil pour des nombres d'onde voisins, qui ne sont pas présents lorsqu'on choisit une colonne.

4.8 Conclusion

L'algorithme matriciel d'intégration et d'inversion d'ILS que nous avons mis au point pour cette thèse permet de résoudre de façon rigoureuse et élégante une problématique considérée jusqu'ici relativement complexe. Les propriétés de localisation de la fonction d'appareil dans le domaine de l'interférogramme et la propriété de transposition des matrices d'ILS mises en évidence dans ce chapitre nous ont apporté une compréhension plus précise de l'impact de la fonction d'appareil sur les mesures. Les approximations sont peu nombreuses et leur portée facilement évaluable. Les limites de l'inversion d'ILS peuvent aussi être aisément établies en fonction des paramètres du spectromètre.

Certains soulèveront que l'approche d'inversion abordée dans nos travaux est quelque peu naïve, qu'il existe une multitude de techniques d'inversion plus évoluées dans la littérature du traitement des signaux. Nous soutenons néanmoins qu'une telle approche est tout à fait pertinente pour le domaine de la spectrométrie par transformation de Fourier, où l'étude de raies spectrales de largeur équivalente ou inférieure à la limite de résolution de l'instrument est pratique courante. L'inversion doit permettre de retrouver la fonction sinc après correction de la fonction d'appareil, sans ajouter d'autres distorsions aux raies.

De cette approche, nous observons donc qu'il est inutile d'inverser un ILS qui serait, à un nombre d'onde donné, sensiblement plus large que la fonction de résolution. L'amplification du bruit devient trop importante à ces nombres d'onde. Nous observons également qu'il est avantageux de réduire légèrement la résolution après l'intégration ou l'inversion afin d'amoinrir les erreurs causées par la troncation et l'interpolation.

Il convient de mentionner l'approche de [SARKISSIAN et BOWMAN \[2003\]](#) développée parallèlement à nos travaux, qui est en quelque sorte un cas particulier de la technique d'inversion présentée ici. [SARKISSIAN et BOWMAN](#) s'attaquent au problème de l'inversion de l'effet d'échelle dans le domaine spectral, mais pour un ILS de largeur négligeable,

soit un delta de Dirac décalé. La matrice inversée par cette technique est donc directement reliée à une matrice de Dirichlet par une transformation de Fourier dans une des dimensions de la matrice, comme pour l'algorithme rapide d'intégration de l'ILS proposé ici. Leur approche peut être bonifiée par l'utilisation de la transformation de Fourier fractionnaire et par l'analyse de l'erreur d'interpolation et d'inversion telles que présentées dans ce chapitre.

Nous croyons d'ailleurs que l'algorithme rapide d'intégration de la fonction d'appareil se révélera utile pour les projets impliquant les spectromètres à transformation de Fourier. Si l'inversion de l'ILS peut être limitée par les ressources matérielles disponibles, l'algorithme d'intégration peut lui être implémenté efficacement et simplement avec un minimum de ressources. Il peut entre autres s'insérer facilement dans les algorithmes d'analyse des données atmosphériques ou astrophysiques par exemple (*retrieval*). Notre nouvel algorithme pourrait également influencer les configurations d'instrument pour tirer par exemple avantage d'une plus grande étendue ou réaliser des spectromètres plus compacts.

Chapitre 5

Phase et fonction d'appareil

— Cas d'un interféromètre à lame séparatrice non compensée.

5.1 Introduction

Au chapitre 2, nous nous sommes attardé au phénomène de dispersion introduit par une lame séparatrice imparfaitement compensée. À cette dispersion était associée une fonction de dispersion convoluée à l'interférogramme. Les algorithmes de déconvolution présentés permettaient alors de corriger cette dispersion. Aux chapitres 3 et 4, nous avons modélisé la fonction d'appareil comme un phénomène d'échelle, dépendant du nombre d'onde vrai. Les algorithmes d'intégration et d'inversion tiraient profit des propriétés particulières de l'effet d'échelle.

Il convient ici de poursuivre l'étude entreprise par [BOUFFARD \[2002\]](#) sur les effets combinés de dispersion et de fonction d'appareil présentés séparément jusqu'à maintenant. De quelle façon les rayons se propageant à différents angles dans l'interféromètre seront-ils affectés par une lame séparatrice non compensée? Comment et dans quelle mesure pourrions-nous intégrer ou corriger cet effet?

À la section 5.2, nous établirons tout d'abord la différence de chemin optique vue par un rayon traversant une lame séparatrice non compensée. Nous verrons ensuite comment cette configuration est similaire à celle de certains interféromètres à champ compensé [[DESBIENS et al., 2003a](#)]. Suivra l'analyse de l'impact de la phase ajoutée par la lame non compensée sur la fonction d'appareil (section 5.3). Nous présenterons deux cas particuliers, la lame non compensée introduite perpendiculairement à l'axe optique et le cas du détecteur circulaire centré avec une lame non compensée inclinée. Nous

essaierons enfin, à la section 5.4, de voir comment il serait possible de combiner les algorithmes matriciels d'intégration de la fonction d'appareil avec un ILS complexe.

5.2 Modélisation de la différence de chemin optique

La différence de phase entre deux rayons provenant de chacun des bras de l'interféromètre et interférant à la sortie de l'instrument est directement proportionnelle à la différence de chemin optique de ces rayons. Nous allons calculer cette différence de chemin optique dans le cas d'une lame d'indice de réfraction $n(\sigma_o)$ et d'épaisseur d , inclinée d'un angle α par rapport à l'axe optique¹, en fonction des angles de propagation du rayon θ et φ (figure 5.1). Cette différence de chemin optique peut se résumer à la différence de longueur optique entre le parcours du rayon réfracté dans le substrat et sa projection sur le parcours équivalent du rayon ne traversant pas le substrat.

Considérons l'OPD équivalent à une seule traversée du rayon dans le substrat. Nous devons calculer la différence de longueur optique entre le rayon réfracté par le substrat et le rayon non réfracté correspondant. Cette différence est donnée par :

$$\text{OPD} = d \left[\frac{n(\sigma_o)}{\cos \theta_r} - \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos \theta_r} \right], \quad (5.1)$$

où θ_i est l'angle d'incidence du rayon sur le substrat et θ_r est l'angle de réfraction. En utilisant la relation trigonométrique suivante :

$$\cos(\theta_i - \theta_r) = \cos \theta_i \cos \theta_r + \sin \theta_i \sin \theta_r, \quad (5.2)$$

et la loi de la réfraction

$$\sin \theta_i = n(\sigma_o) \sin \theta_r, \quad (5.3)$$

on obtient

$$\text{OPD} = d \left[\frac{n(\sigma_o)}{\cos \theta_r} - \frac{\sin \theta_i \sin \theta_r}{\cos \theta_r} - \cos \theta_i \right], \quad (5.4a)$$

$$= d \left[\frac{n(\sigma_o)}{\cos \theta_r} - n(\sigma_o) \frac{\sin^2 \theta_r}{\cos \theta_r} - \cos \theta_i \right], \quad (5.4b)$$

et avec la relation trigonométrique $\sin^2 \theta_r + \cos^2 \theta_r = 1$,

$$= d \left[\frac{n(\sigma_o)}{\cos \theta_r} - \frac{n(\sigma_o)}{\cos \theta_r} + n(\sigma_o) \cos \theta_r - \cos \theta_i \right], \quad (5.4c)$$

¹Nous considérons ici par souci de simplicité une rotation de la lame autour de l'axe z . L'angle α est l'angle entre l'axe x et la normale de la lame. Le système d'axe du spectromètre pourra toujours être redéfini pour retrouver la configuration présentée ici.

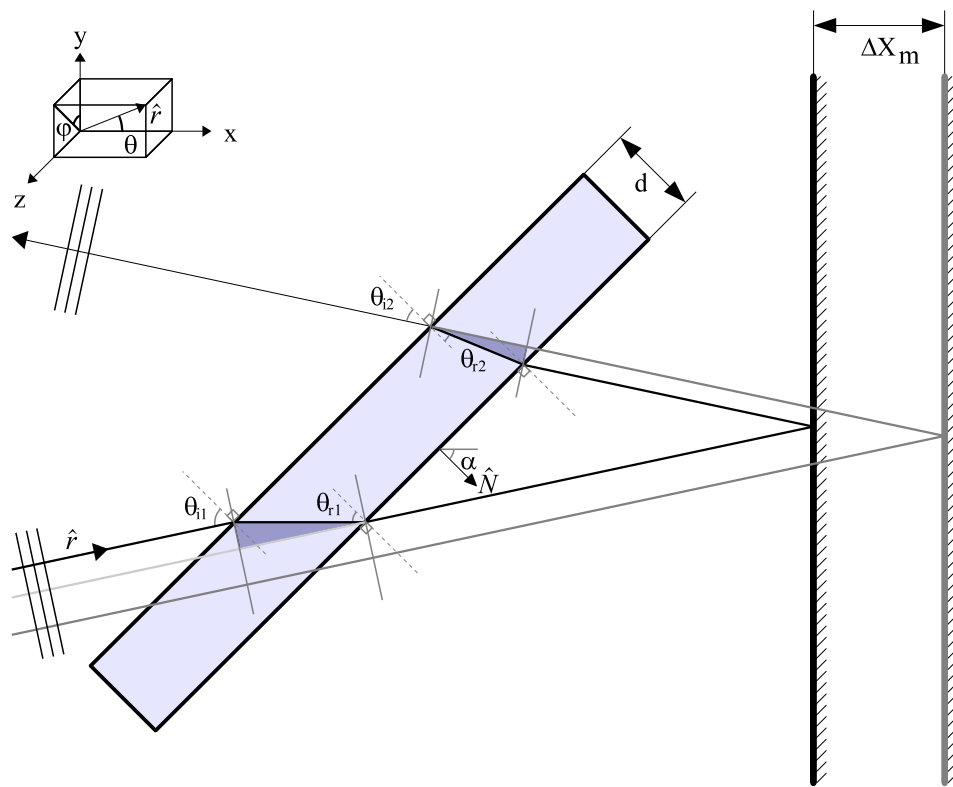


Figure 5.1 – Schéma pour le calcul de la différence de phase due à une lame séparatrice non compensée.

$$= dn(\sigma_o) \cos \theta_r - d \cos \theta_i. \quad (5.4d)$$

Le résultat simple obtenu à l'équation (5.4d) correspond à une différence d'« épaisseur optique » de la lame et aurait pu être déduit directement à l'aide du développement de BORN et WOLF [1999] pour les ondes planes.

En appliquant de nouveau la loi de la réfraction, nous pouvons exprimer l'OPD uniquement en fonction de l'angle incident :

$$\text{OPD} = dn(\sigma_o) \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} - d \cos \theta_i, \quad (5.5a)$$

$$= dn(\sigma_o) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2(\sigma_o)}} - d \cos \theta_i, \quad (5.5b)$$

$$= d \sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + \cos^2 \theta_i} - d \cos \theta_i. \quad (5.5c)$$

Il ne reste donc qu'à déterminer le cosinus de l'angle incident, ce qui se révèle être une tâche fort simple. Définissons un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$ dans la direction du rayon :

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.6)$$

et un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{N}}$ normal à la surface du substrat :

$$\hat{\mathbf{N}} = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}. \quad (5.7)$$

Par définition, le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs, qui correspond à l'angle d'incidence, est donné directement par le produit scalaire de ceux-ci :

$$\cos \theta_i = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi. \quad (5.8)$$

La dernière étape pour obtenir la différence de chemin optique totale consiste à additionner le résultat des deux passages dans le substrat (avant et après réflexion), ainsi que la différence de chemin optique due au déplacement optique ΔX_o du miroir ($\Delta X_o = 2\Delta X_m$). Il suffit de considérer le passage dans un substrat incliné d'un angle α suivi d'un passage dans un substrat incliné d'un angle $-\alpha$ pour tenir compte de la réflexion (image du substrat par le miroir). La différence de chemin optique totale est donc :

$$\begin{aligned} \text{OPD}_{\text{total}} &= d \sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi)^2} \\ &\quad + d \sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi)^2} \\ &\quad - 2d \cos \theta \cos \alpha + \Delta X_o \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2.1 Interféromètre à lame séparatrice non compensée et interféromètre à champ compensé

La configuration d'un interféromètre avec lame séparatrice non compensée correspond à un cas particulier des interféromètres à champ compensé (*field-widened interferometers*). La compensation de champ permet de réduire ou de supprimer les variations de l'ordre d'interférence avec l'angle d'incidence pour une certaine différence de marche (ou plage de différences de marche) et donc d'augmenter la luminosité à cette position des miroirs [CONNES, 1956]. Concept proposé d'abord par HANSEN [1941, 1955], la compensation de champ est produite dans diverses configurations par l'ajout d'une lame à surfaces parallèles aux miroirs dans un des bras de l'interféromètre [HILLIARD et SHEPHERD, 1966; ZWICK et SHEPHERD, 1971; GAULT et al., 1985; SHEPHERD et al., 1985]. Tout comme certaines de ces configurations, l'interféromètre à lame non compensée déplace la position du plan de frange infinie et produit alors des franges dans le plan correspondant à une différence de chemin optique nulle (ZPD) sur l'axe optique. Analysons de plus près ces deux caractéristiques de l'interféromètre non compensé.

Surface de différence de chemin optique nulle

Tout d'abord, il nous faut définir notre référence de différence de chemin optique. Quelle sera la différence de marche entre les miroirs pour que la différence de chemin optique d'un rayon soit nulle ? De l'équation (5.9), nous déduisons que la position d'OPD nul pour un rayon parallèle à l'axe optique et pour un nombre d'onde de référence σ_r donné est

$$\Delta X_{\text{ZPD}} = 2d \cos \alpha - 2d \sqrt{n^2(\sigma_r) - \sin^2 \alpha}. \quad (5.10)$$

ΔX_{ZPD} sera donc la définition du ZPD de l'instrument pour un nombre d'onde donné. La dépendance du ZPD avec le nombre d'onde correspond à la dispersion telle que vue précédemment au chapitre 2.

Si l'on introduit un décalage de la position du miroir par rapport au ZPD d'un rayon parallèle à l'axe optique :

$$\Delta X \equiv \Delta X_o - \Delta X_{\text{ZPD}}, \quad (5.11)$$

l'OPD total devient :

$$\begin{aligned} \text{OPD}_{\text{total}} &= d \sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi)^2} \\ &+ d \sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi)^2} \\ &+ \left(\Delta X - 2d \sqrt{n^2(\sigma_r) - \sin^2 \alpha} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

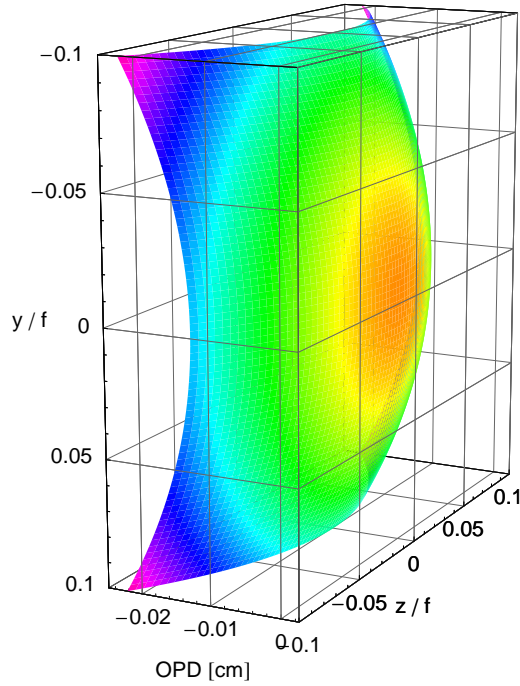


Figure 5.2 – Surface du ZPD dans le champ de vue, pour une lame de KBr non compensée d'épaisseur $d = 1$ cm, d'angle $\alpha = 45^\circ$, et pour $\sigma_o = \sigma_r = 1\,000\text{ cm}^{-1}$.

Cependant, de l'équation (5.12) on voit aisément que la différence de chemin optique nulle est de façon générale une fonction des angles d'un rayon (ou de la position dans le champ de vue). La position du ZPD en fonction des angles n'est donc pas constante, ce qui explique l'apparition de franges à ΔX_{ZPD} ($\Delta X = 0$) puisque cette position des miroirs est définie uniquement par rapport à un rayon parallèle à l'axe optique. La figure 5.2 illustre un exemple de la surface décrite par le ZPD en fonction de la position dans le champ de vue. La position du ZPD de chaque rayon pour un interféromètre à lame non compensée est donc dépendante de l'angle d'élévation θ du rayon par rapport à l'axe optique et de l'angle azimutal φ , en plus d'être dépendante du nombre d'onde (aberration chromatique).

Plan de frange infinie et astigmatisme

Regardons maintenant ce qui se passe au plan de frange infinie. On peut définir celui-ci comme le plan où la courbure κ de l'OPD, par rapport à l'angle hors axe θ , est

nulle sur l'axe. Autrement dit, $\kappa = 0$ pour $\theta = 0$, où la courbure est par définition :

$$\kappa = \frac{\frac{d^2\text{OPD}}{d\theta^2}}{\left(1 + \left[\frac{d\text{OPD}}{d\theta}\right]^2\right)^{3/2}}. \quad (5.13)$$

Notons que dans le cas de la lame inclinée, la dérivée première de l'OPD est nulle. Il suffit donc de trouver la différence de marche ΔX pour laquelle la dérivée seconde de l'OPD est nulle sur l'axe. Fait intéressant, nous observons que cette position du plan de frange infinie ΔX_∞ , par rapport à ΔX_{ZPD} , est dépendante de l'angle azimutal φ :

$$\Delta X_\infty = \frac{2d [n^2(\sigma_o) - 1] [n^2(\sigma_o) - \sin^2\alpha \sin^2\varphi]}{[n^2(\sigma_o) - \sin^2\alpha]^{3/2}}. \quad (5.14)$$

Cette dépendance reflète en fait l'astigmatisme présent dans les franges d'un interféromètre non compensé dû à l'inclinaison de la lame. Ces franges seront quasi infinies dans une dimension seulement pour un angle φ donné (voir figure 5.3), et définissent ainsi une région de frange infinie :

$$\frac{2d [n^2(\sigma_o) - 1]}{[n^2(\sigma_o) - \sin^2\alpha]^{1/2}} \leq \Delta X_\infty \leq \frac{2d [n^2(\sigma_o) - 1] n^2(\sigma_o)}{[n^2(\sigma_o) - \sin^2\alpha]^{3/2}}. \quad (5.15)$$

Quant aux franges situées à des positions éloignées de la région de frange infinie, elles seront ellipsoïdales.

Ajoutons qu'en pratique, les configurations d'interféromètre à champ compensé s'appuyant sur des lames pour corriger la dépendance de l'ordre d'interférence avec l'angle d'incidence ne produisent pas de frange strictement infinie. La variation de l'ordre d'interférence n'est corrigée qu'au deuxième ordre (θ^2). Demeure un premier terme non nul de quatrième ordre (θ^4) correspondant à un terme d'aberration sphérique [BOUCHAREINE et CONNES, 1963].

Lors de l'intégration des franges d'un interféromètre à lame non compensée par un détecteur, nous pouvons observer deux phénomènes caractéristiques. Premièrement, l'interférogramme a un bon contraste dans la région de frange infinie, ce qui est la caractéristique recherchée par les configurations d'interféromètre à champ compensé. Deuxièmement, il y a une perte de modulation qui augmente à mesure que l'on s'éloigne de la région de frange infinie, résultant de l'intégration spatiale de plusieurs franges sur le détecteur. Cette perte de modulation n'est pas centrée par rapport au ZPD mais bien par rapport à la région de frange infinie. L'interférogramme sera donc asymétrique et une perte de modulation plus ou moins importante peut affecter la région du ZPD.

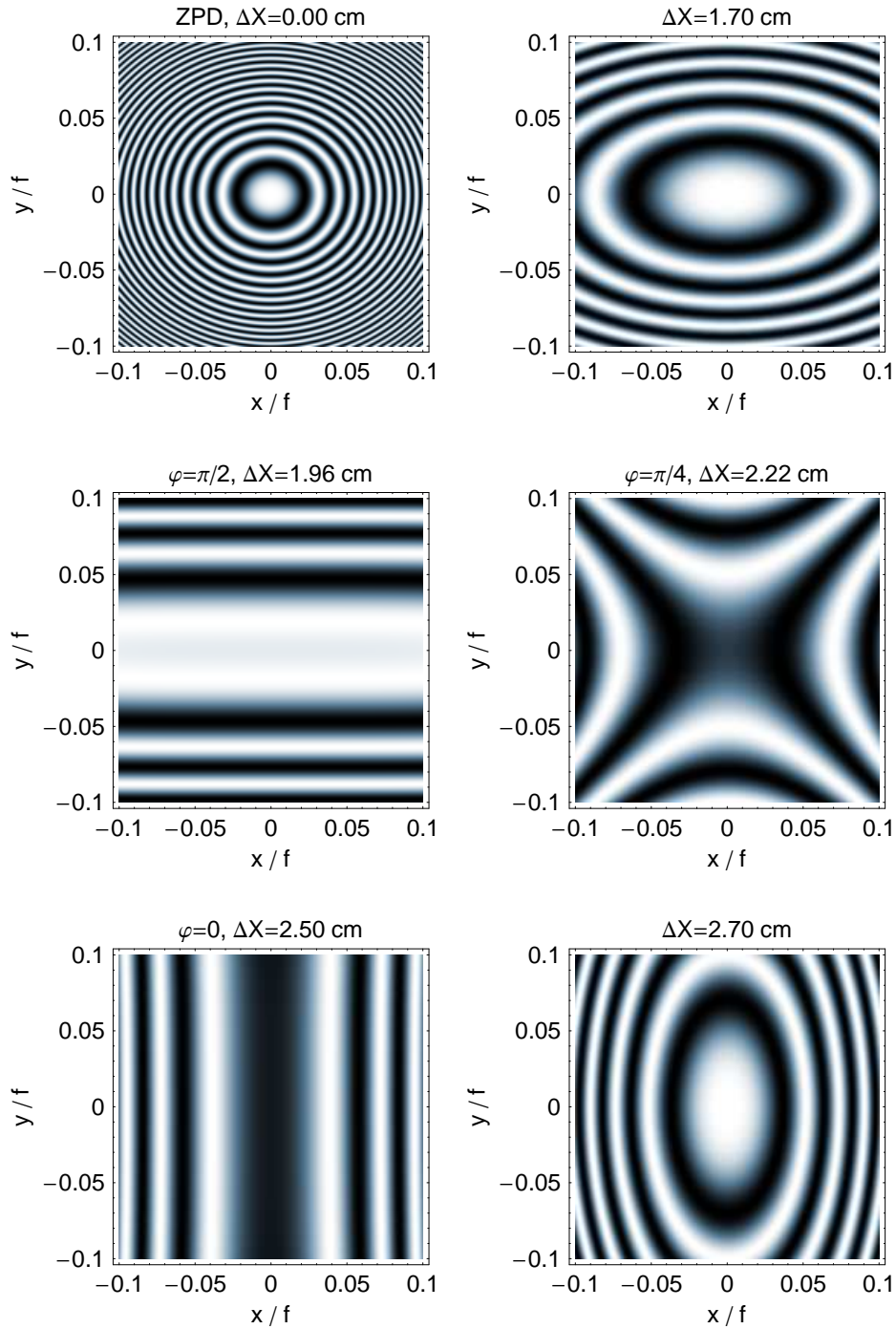


Figure 5.3 – Région de frange infinie ($\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$) et franges à ZPD (en haut à gauche), pour une lame de KBr non compensée d'épaisseur $d = 1$ cm, d'angle $\alpha = 45^\circ$, et pour $\sigma_o = 1000$ cm $^{-1}$. Les distances entre les plans de frange infinie et le plan de ZPD sont respectivement de 2.50, 2.22 et 1.96 cm. On remarque aussi le changement d'orientation de l'ellipticité autour de la région de frange infinie (1.7 et 2.7 cm).

5.3 Phase et fonction d'appareil

Nous avons pu constater que la différence de chemin optique dans un interféromètre à lame non compensée est fonction des angles θ et φ . Comme l'effet premier pris en compte par la fonction d'appareil est la dépendance de la différence de marche avec l'angle θ du rayon incident (facteur $\cos \theta$), nous devons évaluer quel sera l'impact de la phase provenant d'une lame non compensée sur la fonction d'appareil.

Pour cela, reprenons d'abord le développement du modèle de fonction d'appareil tel que présenté au chapitre 3. Le point de départ du modèle, l'équation (3.2),

$$P_o(\Delta X, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) [1 + \cos(2\pi\sigma_o \text{OPD}(\Delta X))] d\Omega, \quad (3.2)$$

doit maintenant inclure le nouvel OPD tel que défini à l'équation (5.12). L'interférogramme d'un faisceau monochromatique produit par un interféromètre à lame non compensée devient :

$$P_o(\Delta X, \sigma_o) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) [1 + \cos(2\pi\sigma_o \text{OPD}_{\text{total}})] d\Omega, \quad (5.16)$$

où la différence de chemin optique,

$$\text{OPD}_{\text{total}} \equiv \Delta X \cos \theta + \Psi(\theta, \varphi; \sigma_o), \quad (5.17)$$

est composée d'un terme dépendant de la différence de chemin optique entre les miroirs, $\Delta X \cos \theta$, et d'un terme d'OPD $\Psi(\theta, \varphi; \sigma_o)$ dépendant de l'angle d'incidence mais ne variant pas avec ΔX . Cette forme est très intéressante, car elle nous permet de poursuivre le développement de la fonction d'appareil fait à la section 3.2. En reprenant l'équation (3.8), la transformation de Fourier de ΔX vers σ nous donne :

$$S(\sigma, \sigma_o) \equiv \mathcal{F}_{[\Delta X, \sigma]} \left\{ \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} e^{i2\pi\sigma_o \text{OPD}_{\text{total}}} d\Omega \right\}, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) \mathcal{F}_{[\Delta X, \sigma]} \left\{ e^{i2\pi\sigma_o [\Delta X \cos \theta + \Psi(\theta, \varphi; \sigma_o)]} \right\} d\Omega, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} I(\theta, \varphi; \sigma_o) e^{i2\pi\sigma_o \Psi(\theta, \varphi; \sigma_o)} \delta(\sigma - \sigma_o \cos \theta) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Et après intégration sur l'angle θ , on obtient :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \begin{cases} \frac{1}{2|\sigma_o|} \int_{\varphi_D(\theta)} I(\theta, \varphi; \sigma_o) e^{i2\pi\sigma_o \Psi(\theta, \varphi; \sigma_o)} d\varphi \Big|_{\theta=\arccos(\sigma/\sigma_o)}, & \cos \theta_{\max} \leq \sigma/\sigma_o \leq \cos \theta_{\min}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Rappelant les équations (3.13) et (3.14), la puissance au nombre d'onde σ_o est toujours donnée par :

$$S_o(\sigma_o) = \int_{\Omega_D} \frac{I(\theta, \varphi; \sigma_o)}{2} d\Omega, \quad (3.13)$$

et l'ILS normalisé d'un interféromètre à lame non compensée est défini comme précédemment :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = \frac{S(\sigma, \sigma_o)}{S_o(\sigma_o)}, \quad \forall \sigma_o \mid S_o(\sigma_o) > 0. \quad (3.14)$$

De l'équation (5.20), on peut déjà tirer deux conclusions capitales pour la compréhension des FTS. D'abord, la fonction d'appareil d'un interféromètre à lame non compensée est généralement complexe, et la phase de cet ILS est fonction des nombres d'onde. Cette première observation a d'importantes implications. On peut déjà penser qu'en plus de représenter le phénomène de dispersion, cette phase peut produire de l'interférence destructive entre deux ILS de nombres d'onde voisins au lieu de l'interférence constructive observée pour un ILS réel, réduisant la densité de puissance estimée à ces nombres d'onde. La seconde conclusion, peut-être moins évidente, concerne l'amplitude de l'ILS. La dépendance de la phase par rapport à l'angle φ peut introduire une perte d'intensité sur l'ILS. Il suffit d'imaginer des franges elliptiques pour comprendre que lors de l'intégration sur l'angle φ , équation (5.20), l'arc de cercle décrit par le domaine d'intégration peut traverser plusieurs ordres d'interférence au lieu de parcourir un seul ordre d'interférence comme pour le cas courant des franges circulaires.

Nous étudierons ici deux cas pour bien illustrer les phénomènes reliés à une fonction d'appareil complexe. Tout d'abord, nous analyserons le cas d'un interféromètre ayant une lame non compensée perpendiculaire à l'axe optique, pour ensuite aborder le cas de la lame séparatrice non compensée et du détecteur circulaire centré.

5.3.1 Cas d'une lame non compensée perpendiculaire à l'axe optique

Prenons le cas d'une lame non compensée introduite perpendiculairement à l'axe optique dans l'un des bras de l'interféromètre ($\alpha = 0$). La différence de chemin optique, avec le ZPD défini par rapport au rayon parallèle à l'axe optique pour un nombre d'onde de référence σ_r , est alors réduite à l'expression suivante :

$$\text{OPD}_{\text{total}} = 2d\sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + \cos^2\theta} + [\Delta X - 2dn(\sigma_r)] \cos\theta. \quad (5.21)$$

Puisque l'OPD n'est plus dépendant de l'angle azimutal φ , le spectre monochromatique $S(\sigma, \sigma_o)$ devient donc simplement :

$$S(\sigma, \sigma_o) = \begin{cases} \frac{1}{2|\sigma_o|} e^{i2\pi\sigma_o\Psi(\theta;\sigma_o)} \int_{\varphi_D(\theta)} I(\theta, \varphi; \sigma_o) d\varphi & \left. \begin{array}{l} \theta = \arccos(\sigma/\sigma_o) \\ \cos \theta_{\max} \leq \sigma/\sigma_o \leq \cos \theta_{\min}, \end{array} \right\} \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (5.22)$$

où

$$\Psi(\theta; \sigma_o) = 2d\sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + \cos^2\theta} - 2dn(\sigma_r)\cos\theta. \quad (5.23)$$

Le module de la fonction d'appareil, dans le cas d'une lame non compensée perpendiculaire à l'axe optique, est exactement le même que celui d'un interféromètre compensé. L'ILS complexe s'exprime donc directement à partir des ILS calculés précédemment :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = e^{i2\pi\sigma_o\Psi(\arccos(\frac{\sigma}{\sigma_o});\sigma_o)} \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o), \quad (5.24)$$

$$= e^{i4\pi d\sigma_o \left[\sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + (\frac{\sigma}{\sigma_o})^2} - n(\sigma_r)\frac{\sigma}{\sigma_o} \right]} \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o). \quad (5.25)$$

L'aire du module de l'ILS est encore unitaire dans ce cas, ce qui signifie que la densité spectrale à un nombre d'onde σ_o est répartie sur une plage de nombres d'onde σ sans perte, comme pour les interféromètres compensés, mais avec l'ajout d'une phase. Par contre, la fonction d'appareil d'un interféromètre à lame non compensée ne suit plus un effet d'échelle, en ce qui concerne la phase à tout le moins.

La figure 5.4 illustre l'exemple d'un ILS « *boxcar* » avec une phase due à une lame non compensée. On voit que la phase présente une variation à peu près linéaire sur la plage de nombres d'onde soutenant l'ILS, et que la phase, pour chaque ILS, à $\sigma = \sigma_o$ (fréquence maximale de l'ILS), est liée à la dispersion de l'indice de réfraction $[n(\sigma_o)]$.

5.3.2 Cas d'une lame séparatrice non compensée et d'un détecteur circulaire centré

Le second cas particulier que nous présentons est le calcul de l'ILS pour une source lambertienne uniforme et un détecteur circulaire centré avec une lame séparatrice non compensée inclinée d'un angle α . Pour pouvoir résoudre analytiquement l'intégrale sur l'angle φ , nous devons faire une approximation de l'OPD pour isoler la contribution dépendante de l'angle φ dans l'équation (5.12). Une très bonne approximation est obtenue

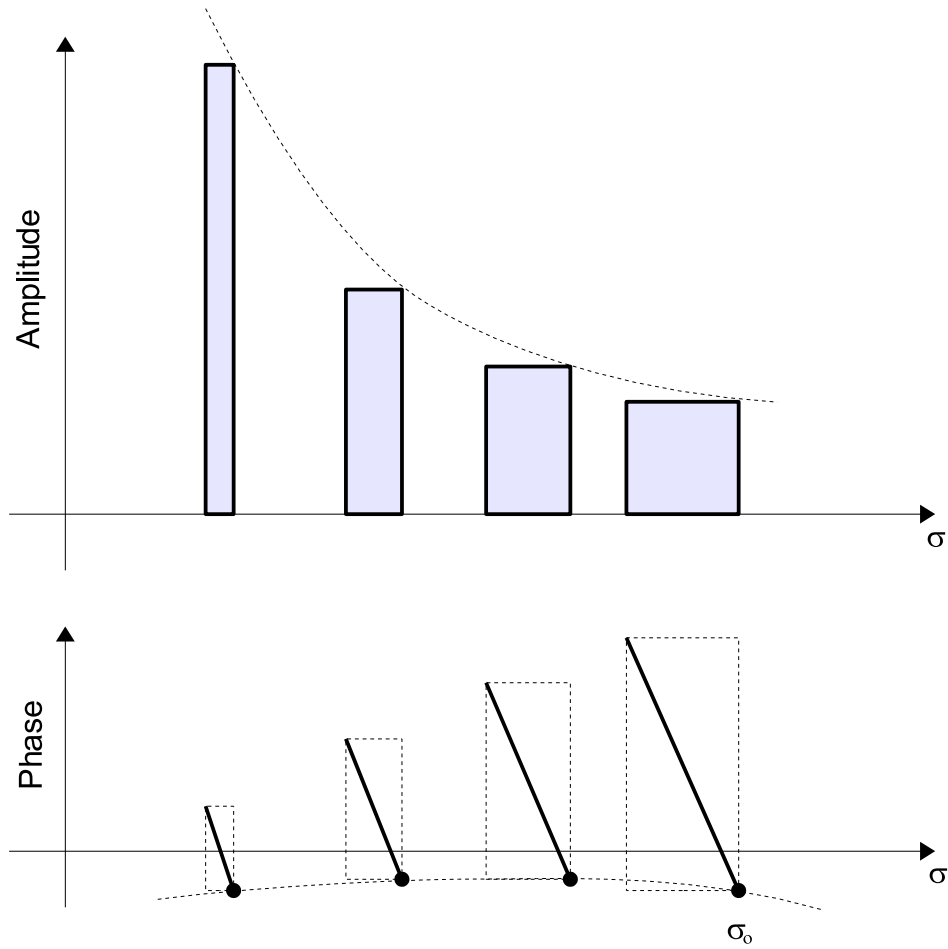


Figure 5.4 – Schéma d'un ILS « *boxcar* » (détecteur circulaire centré) avec une phase due à une lame non compensée placée perpendiculairement à l'axe optique.

à l'aide de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \text{OPD}_{\text{total}} \approx & 2d\sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + \cos^2\theta \cos^2\alpha} + \left(\Delta X - 2d\sqrt{n^2(\sigma_r) - \sin^2\alpha} \right) \cos\theta \\ & + \frac{d [n^2(\sigma_o) - 1] \cos^2\varphi \sin^2\alpha \sin^2\theta}{[n^2(\sigma_o) - 1 + \cos^2\theta \cos^2\alpha]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

valide pour $\sin\theta \ll 1$. En pratique, pour un angle $\theta = 100$ mrad et $n(\sigma_o) = 1.54$, l'erreur relative est de l'ordre de 5×10^{-3} %, alors que l'OPD peut varier de 20 % en fonction de l'angle φ .

En résolvant l'intégrale (5.20) avec cette approximation, nous obtenons, pour un détecteur circulaire centré et une source lambertienne, l'ILS suivant :

$$\begin{aligned} \text{ILS}(\sigma, \sigma_o) = & \exp \left(i4\pi d \sigma_o \left[\sqrt{n^2(\sigma_o) - 1 + \frac{\sigma^2 \cos^2\alpha}{\sigma_o^2}} - \frac{\sigma}{\sigma_o} \sqrt{n^2(\sigma_r) - \sin^2\alpha} \right] \right) \\ & \times \exp \left(i\pi d \sigma_o \frac{\sin^2\alpha [n^2(\sigma_o) - 1] \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^2 \right]}{\left[n^2(\sigma_o) - 1 + \frac{\sigma^2 \cos^2\alpha}{\sigma_o^2} \right]^{3/2}} \right) \\ & \times J_0 \left(\pi d \sigma_o \frac{\sin^2\alpha [n^2(\sigma_o) - 1] \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^2 \right]}{\left[n^2(\sigma_o) - 1 + \frac{\sigma^2 \cos^2\alpha}{\sigma_o^2} \right]^{3/2}} \right) \text{ILS}_{\text{boxcar}}(\sigma, \sigma_o), \end{aligned} \quad (5.27)$$

où $\text{ILS}_{\text{boxcar}}$ est la fonction d'appareil « *boxcar* » d'un détecteur circulaire centré pour un interféromètre sans dispersion. La figure 5.5 illustre le comportement de l'ILS pour différentes épaisseurs de la lame non compensée.

Nous pouvons remarquer la fonction de Bessel d'ordre 0 qui n'est pas sans rappeler l'effet résultant du cisaillement latéral (*shear*) des faisceaux dans un interféromètre [GENEST, 2001]. Ce cisaillement est dû à l'astigmatisme créé par la lame. Cependant, c'est un effet de cisaillement de deuxième ordre puisque le terme dépendant de φ dans l'équation (5.26) varie en fonction de $\sin^2\theta$, et non en fonction de $\sin\theta$ comme on le retrouve généralement dans les effets de cisaillement. Il demeure que ce facteur non négligeable peut imposer une restriction importante sur la divergence du faisceau. Comme l'illustre la figure 5.5, dépendamment de l'épaisseur de la lame non compensée, la modulation des rayons se propageant aux angles θ les plus élevés pourra être fortement atténuée après intégration sur le détecteur. C'est également ce facteur qui rend le module de l'ILS à

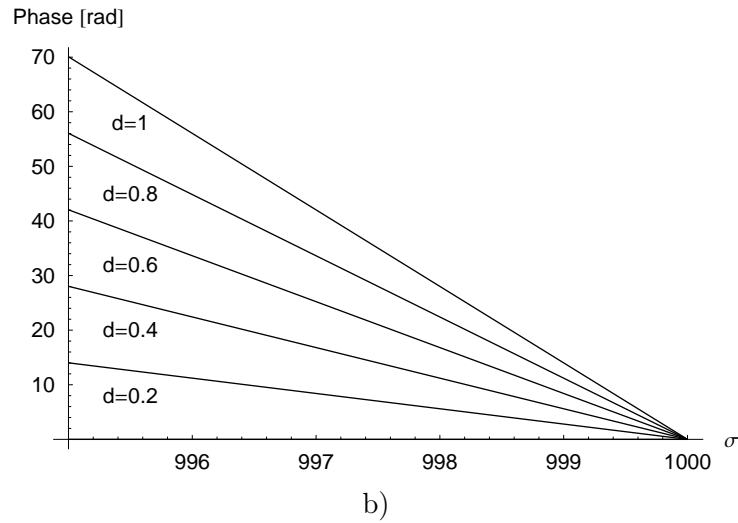
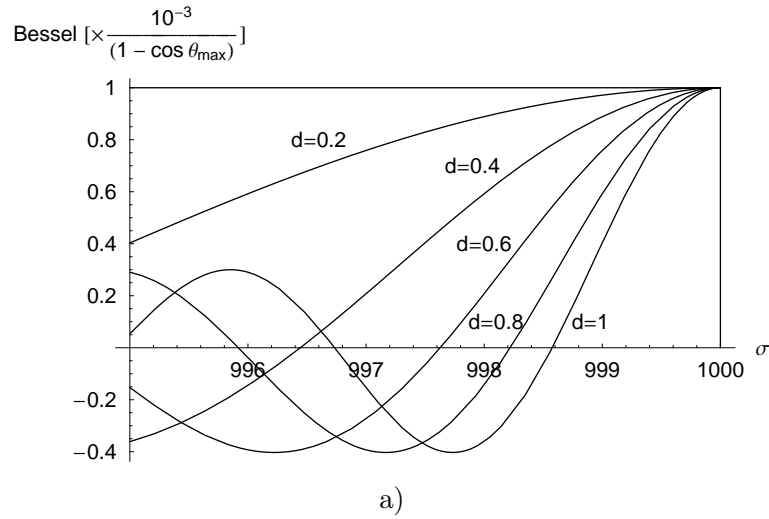


Figure 5.5 – Facteur fonction de Bessel a) et phase b) de l'ILS pour une source lambertienne uniforme et un détecteur circulaire centré avec une lame séparatrice (KBr) non compensée inclinée à $\alpha = 45^\circ$, pour un nombre d'onde $\sigma_o = 1000 \text{ cm}^{-1}$ ($\sigma_r = \sigma_o$) et une épaisseur de la lame d variant de 0 à 1 cm ($n(\sigma_o) = 1.524$). Le rayon du détecteur n'est pas spécifié.

aire non unitaire, à cause de la perte de modulation détectée produite par la dépendance par rapport à l'angle φ . La puissance modulée intégrée par le détecteur n'est donc pas simplement répartie sur une certaine plage de nombres d'onde apparents, mais une partie de cette modulation est atténuée lors de l'intégration dû à l'astigmatisme.

On observe également dans l'équation de l'ILS un terme de phase dû à l'astigmatisme avec le même argument que celui de la fonction de Bessel, mais il demeure cependant d'importance moindre que le premier terme de phase similaire à celui de l'équation (5.25) pour une lame perpendiculaire à l'axe optique.

5.4 Intégration matricielle de l'ILS complexe

L'intégration matricielle de la phase de l'ILS est un problème difficile à résoudre puisque la phase de l'ILS n'est pas un effet d'échelle. La dépendance de l'indice de réfraction avec les nombres d'onde vrais nous empêche également de décrire la phase sous une forme simple. Il ne nous a donc pas été possible d'introduire de façon exacte le modèle d'ILS complexe dans nos algorithmes d'intégration de la fonction d'appareil. Nous allons cependant présenter ici une approximation de premier ordre de la phase de l'ILS qui nous permettra d'évaluer les conséquences de l'ILS complexe sur les mesures pour le cas particulier d'une lame non compensée placée perpendiculairement à l'axe optique (section 5.3.1).

Puisque la phase de l'ILS associée à une lame non compensée est quasi linéaire sur la plage des nombres d'onde où l'ILS est non nul, nous nous proposons d'effectuer un développement en série au premier ordre de la phase de l'ILS présentée à l'équation (5.25). Pour $\sigma \approx \sigma_o$, nous obtenons alors la phase suivante :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) \approx e^{i4\pi d \left(\sigma_o \left[n(\sigma_o) - \frac{1}{n(\sigma_o)} \right] - \sigma \left[n(\sigma_r) - \frac{1}{n(\sigma_o)} \right] \right)} \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o). \quad (5.28)$$

Si nous négligeons maintenant la dispersion, en faisant l'hypothèse que l'indice de réfraction varie peu dans la région d'intérêt [$n(\sigma_o) \approx n(\sigma_r)$], la fonction d'appareil devient :

$$\text{ILS}(\sigma, \sigma_o) \approx e^{i2\pi(\sigma_o - \sigma)\delta} \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o), \quad (5.29)$$

où $\delta = 2d [n(\sigma_r) - n^{-1}(\sigma_r)]$. Regardons maintenant de plus près ce facteur δ . À partir de l'équation (5.14), nous constatons que pour notre configuration d'interféromètre ($\alpha = 0$), $\delta = \Delta X_\infty$ pour le nombre d'onde σ_r . Ce facteur correspond donc à la position du plan de frange infinie.

Nous allons maintenant introduire cette fonction d'appareil complexe dans l'équation d'intégration de l'ILS au spectre mesuré. En combinant les équations (3.16) et (5.29) nous obtenons donc :

$$S_m(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\sigma_o) e^{i2\pi(\sigma_o - \sigma)\Delta X_\infty} \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o, \quad (5.30)$$

$$= e^{-i2\pi\sigma\Delta X_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\sigma_o\Delta X_\infty} S_o(\sigma_o) \text{ILS}_{\text{comp}}(\sigma, \sigma_o) d\sigma_o. \quad (5.31)$$

De l'équation (5.31), nous pouvons conclure que pour introduire la phase quasi linéaire de l'ILS, il suffit de multiplier le spectre vrai par une certaine phase linéaire, d'inclure l'ILS sans phase à l'aide des algorithmes développés au chapitre précédent², et ensuite d'appliquer la phase linéaire inverse au résultat.

Si nous effectuons la transformation de l'équation (5.31) dans le domaine de l'interférogramme, comme pour l'équation (4.13), en déplaçant le facteur dépendant de σ du côté du spectre mesuré, on obtient aisément :

$$I_m(x + \Delta X_\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} I_o(x_o + \Delta X_\infty) \text{ILS}_{\text{comp}}(x_o, x) dx_o. \quad (5.32)$$

On voit donc que la fonction d'appareil est appliquée sur un interférogramme décalé au plan de frange infinie, ce qui est relié au fait que le meilleur contraste est à cette position dans l'interférogramme.

La figure 5.6 donne un exemple de l'intégration de l'ILS complexe pour une lame non compensée placée perpendiculairement à l'axe optique. Nous pouvons constater plusieurs détails sur cette figure. D'abord, on remarque que l'amplitude du ZPD décroît avec la distance entre le centre du champ de vue et l'axe optique. Le corollaire de cette observation est la diminution de l'amplitude du spectre avec l'éloignement du détecteur de l'axe optique. On observe également une asymétrie de l'interférogramme, le contraste demeurant constant pour un OPD d'environ 1.7 cm correspondant au plan de frange infinie [équation (5.14)]. L'auto-apodisation est donc centrée sur la position de la frange infinie, ce qui correspond à l'observation et aux modèles de compensation de champ. Si l'on observe attentivement la raie d'absorption, on constate qu'elle s'atténue plus lentement que le spectre large l'entourant en fonction de la position du champ de vue. On peut attribuer ce comportement au fait que le plan de frange infinie donne toujours un certain contraste à l'interférogramme de la raie d'absorption loin de ZPD, alors que le

²Attention, il ne faut pas utiliser les algorithmes simplifiés pour un interférogramme symétrique ou un spectre réel comme à la section 4.5.2. Les algorithmes rapides doivent être modifiés pour tenir compte du fait que l'ILS doit être appliqué sur un interférogramme décalé.

spectre large, dont l'information est concentrée dans l'interférogramme autour de ZPD, subit une importante atténuation.

5.5 Conclusion

L'étude de cas présentée dans ce chapitre nous a permis de faire le lien entre plusieurs aspects de la spectrométrie par transformation de Fourier : la dispersion, la fonction d'appareil, la compensation de champ et le cisaillement. Quoique le point de départ était un cas très particulier de configuration d'interféromètre, l'interféromètre à lame séparatrice non compensée, nous pouvons appliquer les résultats et conclusions de façon générale pour les lames imparfaitement compensées ou pour les lames introduites dans un des bras de l'interféromètre pour la compensation de champ par exemple.

L'introduction de la fonction d'appareil complexe apporte de nouveaux défis pour l'intégration et l'inversion de l'ILS : tenir compte de phénomènes qui ne sont ni un effet de convolution, ni un effet d'échelle. Nous pouvons déjà prédire que l'inversion d'ILS complexe ayant une phase importante due à une mauvaise compensation sera difficile, voire impossible, puisque la partie linéaire de la phase sera confondue avec tout décalage de la grille d'échantillonnage et que la phase de l'ILS sera moyennée lors de l'intégration au spectre vrai, donc plus difficile à évaluer. Les algorithmes de correction de phase et d'étalonnage complexe devront être amalgamés aux algorithmes de correction de la fonction d'appareil pour ces cas particuliers. L'interférence destructive entre ILS voisins résultant de la phase fournit une explication de la perte de modulation visible sur l'interférogramme et l'atténuation du spectre, de même que le bon contraste obtenu autour de la position de la frange infinie dans l'interférogramme, là où l'effet de l'ILS est négligeable.

Il est intéressant de mentionner enfin les travaux de [MURTY \[1960\]](#), lequel a calculé la phase ajoutée par le déplacement latéral d'un coin de cube, et de [SALOMAA \[1999\]](#), qui a inclus cette contribution dans le calcul de la fonction d'appareil. La définition de l'OPD peut donc être modifiée pour traiter ce problème d'une façon similaire à ce qui a été présenté dans ce chapitre, introduisant aussi une phase sur l'ILS. D'autres configurations ou défauts d'alignement ajoutant une phase à la fonction d'appareil demeurent probablement à identifier.

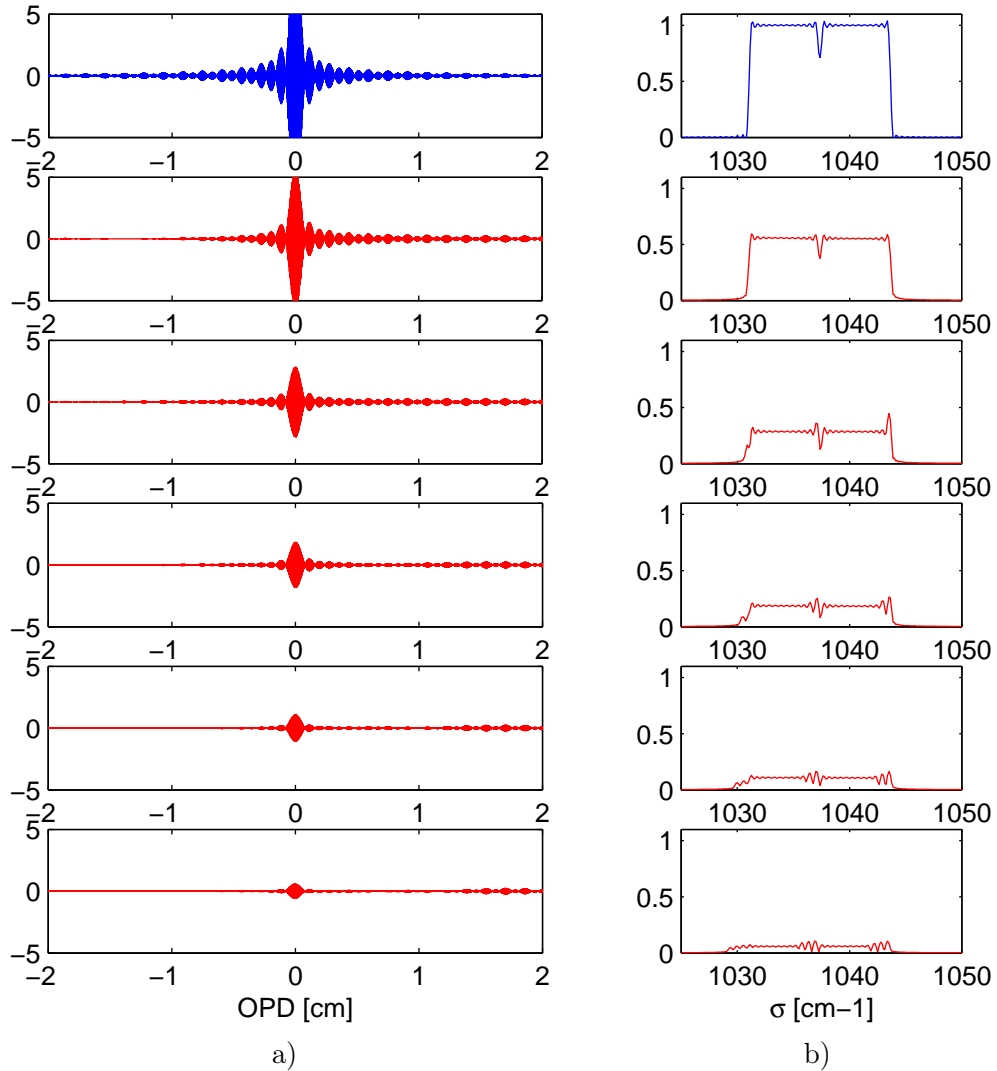


Figure 5.6 – Intégration de l’ILS complexe d’un détecteur circulaire de $0.025f$ de rayon, où f est la focale de la lentille de collimation, avec une lame de KBr non compensée perpendiculaire à l’axe optique, d’épaisseur 1 cm. L’interférogramme a) et le spectre b) sont présentés d’abord pour un interféromètre compensé (en bleu), puis avec la lame pour un détecteur centré à 0, $0.01f$, $0.02f$, $0.03f$ et $0.04f$ respectivement. Le plan de frange infinie est localisé à un OPD d’environ 1.7 cm

Conclusion générale

Nous avons parcouru plusieurs chemins et regardé dans de multiples directions lors de notre exploration de la fonction d'appareil. Les diverses questions que nous avons abordées possèdent cependant un dénominateur commun : la fonction sinus cardinal. C'est cette fonction que nous cherchons à modeler par le développement de fenêtres paramétriques ; c'est encore cette fonction que l'on doit contourner pour corriger la phase ou étalonner les spectres. Ce fut également la principale difficulté que nous avons dû surmonter pour élaborer une méthode précise d'intégration et d'inversion de la fonction d'appareil. D'une façon ou d'une autre, l'utilisation courante du spectromètre par transformation de Fourier pour l'observation de sources ayant des caractéristiques spectrales non résolues nous conduit inévitablement à porter le plus grand soin à la fonction qui les domine, soit la fonction d'appareil, *incluant* la fonction sinc. Cette précaution est nécessaire pour extraire l'information la plus juste possible des mesures disponibles dans les limites imposées par le bruit. Tous les artefacts situés aux extrémités, dans l'interférogramme comme dans le spectre, sont aussi liés à la fonction sinc, à la troncation des mesures, à l'inévitable difficulté d'évaluation des données près des zones de recouvrement.

Les méthodes que nous avons employées pour traiter l'influence du spectromètre et des algorithmes de correction sur les mesures peuvent paraître relativement simples au premier abord. Nous avons utilisé, pour ainsi dire, les formes les plus élémentaires de déconvolution et d'inversion. Nous justifions cependant ce choix par notre souci de toujours connaître exactement la forme de la fonction d'appareil, et de retrouver si possible la fonction de résolution spectrale sinc après correction des données. Puisque les sources mesurées en spectrométrie par transformation de Fourier sont souvent très larges et parsemées de dizaines, voire de milliers de raies d'absorption très étroites, nous avons préféré trouver des solutions générales pour manipuler la fonction d'appareil, lesquelles pourront éventuellement servir de point de départ pour la mise au point d'algorithmes répondant à des problèmes plus spécialisés.

Nous croyons néanmoins avoir présenté des solutions concises et originales qui pourraient d'ailleurs trouver une utilité dans d'autres secteurs de l'ingénierie. Le paramétrage des fonctions d'apodisation contrôlant la hauteur du lobe principal tout en maintenant le profil des lobes secondaires amène une généralisation et une synthèse au domaine du fenêtrage. L'apodisation est un sujet très connu et plutôt mature du traitement de signal, nous espérons que cette transformation spectrale puisse être reprise pour l'avancée des technologies y faisant appel.

La discrétisation du problème de l'intégration de la fonction d'appareil en tenant compte de la fonction de résolution sinc et la mise au point d'un algorithme rapide d'intégration de l'ILS constitue la contribution première de cette thèse à la spectrométrie par transformation de Fourier. Nous avons réduit le problème consistant à intégrer un effet d'échelle au spectre vrai par produit matriciel, une fonction sinc selon les nombres d'onde vrais et une fonction sinc selon les nombres d'onde apparents, calculés pour chaque élément de la matrice, en un algorithme d'ordre $\mathcal{O}(\mathcal{N} \log_2 \mathcal{N})$ d'implémentation aisée. La symétrie de l'intégration dans les domaines spectral et interférentiel nous a permis de déduire que l'ILS a un comportement local sur l'interférogramme et qu'un interférogramme tronqué contient donc toute l'information nécessaire pour inclure numériquement la fonction d'appareil. Avec l'étude des enveloppes d'auto-apodisation et du bruit, nous avons pu expliquer dans quelles limites il est possible d'inverser la fonction d'appareil pour retrouver la fonction de résolution sinc. Nous croyons donc que cette inversion n'est réalisable que pour un ILS dont la largeur est au plus comparable à la résolution théorique du spectromètre considéré.

Le développement d'un algorithme rapide d'inversion de la fonction d'appareil constitue d'après nous un défi de taille. L'inversion analytique d'une somme pondérée de matrices de Dirichlet n'est peut-être pas même une voie envisageable. De toute façon, la possibilité d'intégrer exactement l'ILS à des données théoriques pour comparer les spectres expérimentaux trouvera certainement application pour la caractérisation des spectromètres et pour l'analyse des données. Une fois la fonction d'appareil bien caractérisée, il est même possible de calculer la matrice d'ILS inverse, si la taille de la matrice demeure raisonnable, et de l'appliquer sur l'ensemble des mesures comme nous l'avons présenté.

Nous avons considéré jusqu'à maintenant dans nos travaux que notre détecteur était éclairé de façon uniforme lors de nos calculs d'ILS, ou à tout le moins que l'ILS obéissait à un effet d'échelle. Si cette hypothèse peut être appliquée au cas d'un spectromètre par transformation de Fourier, elle devient discutable lorsqu'il s'agit d'un spectromètre

imageur par transformation de Fourier pour lequel la largeur de l'ILS ne serait pas négligeable. En effet, un IFTS a comme but, par définition, de mesurer le spectre d'une image. On peut donc vouloir tenir compte dans certains cas des variations spatiales de l'intensité lumineuse sur les détecteurs pour bien modéliser la réponse de l'instrument. Une voie de recherche intéressante serait donc le développement d'un algorithme d'intégration de la fonction d'appareil pour un spectromètre imageur tenant compte des variations spatiales de l'intensité lumineuse sur le détecteur. Si l'image est suffisamment échantillonnée sans repliement spectral, l'information sur le contenu en fréquences spatiales de l'image est bien représentée et peut donc être utilisée dans l'intégration de la fonction d'appareil. Généralement, la fonction d'appareil est relativement étroite par rapport à la résolution dans le cas d'un imageur hyperspectral, ce qui peut faciliter les calculs. Cependant, la quantité de données générées par une mesure posera un obstacle important à la réalisation pratique de cet algorithme.

Une autre direction de recherche se dégage de nos travaux : celle de la phase de la fonction d'appareil. Premièrement, nous avons vu que dans le cas d'un interféromètre non parfaitement compensé pour la dispersion, la phase de l'ILS ne suit pas un effet d'échelle. La prise en compte adéquate de la phase et de nos algorithmes d'intégration de l'ILS présente donc un nouveau problème. La phase soulève cependant des questions plus profondes. En effet, l'interférence entre deux ILS à des fréquences voisines effectue une sorte de moyenne. La phase de l'ILS peut donc difficilement être évaluée à partir de la mesure de spectres non monochromatiques. L'impossibilité de distinguer la portion linéaire de la phase résultant de l'intégration de l'ILS et la phase linéaire provenant du décalage de la grille d'échantillonnage pose une autre difficulté majeure.

De plus en plus, nous voyons apparaître des projets et des missions utilisant des spectromètres par transformation de Fourier embarqués où le traitement algorithmique des mesures est effectué en vol. Puisque les données transmises ne permettent pas de recouper les mesures brutes, il est primordial de poursuivre le développement d'algorithmes précis et utilisant des ressources modérées pour traiter les données spectrométriques. Notre algorithme d'intégration rapide de l'ILS permet maintenant de traiter la fonction d'appareil en répondant à ces exigences.

Bibliographie

- ADAMS, John W., « A new optimal window, » *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39(8), 1753–1769, août 1991
- AHRO, Mikko, Jyrki KAUPPINEN et Ilkka SALOMAA, « Detection and correction of instrumental line-shape distortions in Fourier spectroscopy, » *Applied Optics*, vol. 39(33), 6230–6237, novembre 2000
- AMBARDAR, Ashok, *Analog and Digital Signal Processing*, PWS Publishing, 1ère édition, 1995
- BAILEY, David H. et Paul N. SWARZTRAUBER, « The fractional Fourier transform and applications, » *SIAM Review*, vol. 33(3), 389–404, septembre 1991
- BAILEY, David H. et Paul N. SWARZTRAUBER, « Errata for : The fractional Fourier transform and applications, » octobre 1992
- BAILEY, David H. et Paul N. SWARZTRAUBER, « A fast method for the numerical evaluation of continuous Fourier transforms, » *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 15(5), 1105–1110, septembre 1994
- BARCILON, Victor et Gabor C. TEMES, « Optimum impulse response and the van der Maas function, » *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 19(4), 336–442, juillet 1972
- BENNET, Charles L., Michael R. CARTER et David J. FIELDS, « Hyperspectral imaging in the infrared using LIFTIRS, » dans : « Infrared Technology XXI, » pp. 274–283, Proceedings of SPIE 2552, septembre 1995
- BLUESTEIN, Leo I., « A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transform, » *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 18(4), 451–455, décembre 1970
- BORN, Max et Emil WOLF, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 7e édition, 1999
- BOUCHARD, Jean-Pierre, *Étude expérimentale de la forme de raie des spectromètres à transformation de Fourier*, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 2004

- BOUCHARD, Jean-Pierre, Pierre TREMBLAY, Raphaël DESBIENS et François BOUFFARD, « Detailed Line-Shape Measurements Using a High Resolution, High Divergence Fourier Transform Spectrometer, » dans : « Fourier Transform Spectroscopy, » pp. 25–27, Optical Society of America, Québec, Canada, février 2003
- BOUCHAREINE, Patrick et Pierre CONNES, « Interféromètre à champ compensé pour spectroscopie par transformation de Fourier, » *Le Journal de Physique et le Radium*, vol. 24(2), 134–138, février 1963
- BOUFFARD, François, *Une approche matricielle pour la modélisation et la correction des effets instrumentaux en spectrométrie par transformation de Fourier*, Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, août 2002
- BOUFFARD, François, Pierre TREMBLAY, Raphaël DESBIENS et Jean-Pierre BOUCHARD, « Synthetic spectra of Fourier transform spectrometers using analytically modeled instrument line shape inclusion, » dans : « Proceedings of the International Symposium on Spectral Sensing Research (ISSSR), » pp. 326–335, Science and Technology Corp., Québec, juin 2001
- BOWMAN, Kevin W., Helen M. WORDEN et Reinhard BEER, « Instrument line-shape modeling and correction for off-axis detectors in Fourier-transform spectrometry, » *Applied Optics*, vol. 39(21), 3765–3773, juillet 2000
- BRAULT, James W., « Fourier Transform Spectrometry, » dans : A. O. Benz, M. C. E. Huber et M. Mayor, éditeurs, « High Resolution in Astronomy, » pp. 1–61, Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, Saas-Fee, 1985
- CARSON, John R., « Notes on the theory of modulation, » *Proceedings of the IRE*, vol. 10, 57–64, février 1922
- CHAMBERLAND, Martin, Vincent FARLEY, Louis BELHUMEUR, Fred WILLIAMS, Joseph LAWRENCE, Pierre TREMBLAY et Raphaël DESBIENS, « The Instrument LineShape, an imperative parameter for the absolute spectral calibration of an FTS, » dans : « Fourier Transform Spectroscopy, » pp. 160–166, Optical Society of America, Québec, Canada, février 2003
- CHASE, D. B., « Phase Correction in FT-IR, » *Applied Spectroscopy*, vol. 36(3), 240–244, mars 1982
- COHEN-TANNOUJJI, Claude, Franck LALOE et Bernard DIU, *Mécanique quantique*, vol. 1, Hermann, 1996
- CONNES, Janine, « Domaine d'utilisation de la méthode par transformée de Fourier, » *Le Journal de Physique et le Radium*, vol. 19(3), 197–208, mars 1958
- CONNES, Janine, « Recherches sur la spectroscopie par la transformation de Fourier, » *Revue d'Optique Théorique et Expérimentale*, vol. 40(2,3,4,5), 41–79, 116–140, 171–190, 231–265, février, mars, avril, mai 1961

- CONNES, Pierre, « Augmentation du produit luminosité x résolution des interféromètres par l'emploi d'une différence de marche indépendante de l'incidence, » *Revue d'Optique*, vol. 35(1), 37–43, 1956
- COOLEY, James W. et John W. TUKEY, « An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, » *Mathematics Computation*, vol. 19(90), 297–301, avril 1965
- DEMPSTER, A. G. et N. P. MURPHY, « Lagrange interpolator filters and binomial windows, » *Signal Processing*, vol. 76(1), 81–91, juillet 1999
- DEMPSTER, A. G. et N. P. MURPHY, « The binomial window : Heuristics and metrics, » *Signal Processing*, vol. 80(12), 2641–2645, décembre 2000
- DESBIENS, Raphaël, Jérôme GENEST et Pierre TREMBLAY, « General analytic solution for the ILS using radiometry, » dans : « the 9th International Workshop on Atmospheric Science from Space Using Fourier Transform Spectrometry, » pp. 61–64, Earth Observation Research Center, National Space Development Agency of Japan, Kyoto, Japon, mai 2000
- DESBIENS, Raphaël, Jérôme GENEST et Pierre TREMBLAY, « Radiometry in line-shape modeling of Fourier-transform spectrometers, » *Applied Optics*, vol. 41(7), 1424–1432, mars 2002
- DESBIENS, Raphaël et Pierre TREMBLAY, « Families of optimal parametric windows having arbitrary secondary lobe profile, » dans : « Fourier Transform Spectroscopy, » pp. 41–43, Optical Society of America, Coeur d'Alene, Idaho, février 2001
- DESBIENS, Raphaël et Pierre TREMBLAY, « A new efficient approach to design optimal parametric windows with arbitrary sidelobe profiles, » 2004, à paraître
- DESBIENS, Raphaël, Pierre TREMBLAY, Vincent FARLEY, Jean-François LEGAULT et Martin CHAMBERLAND, « Field widening effects on modulation efficiency and ILS resulting from the use of uncompensated beam splitter, » dans : « the 11th International Workshop on Atmospheric Science from Space Using Fourier Transform Spectrometry, » Bad Wildbad, Allemagne, octobre 2003a
- DESBIENS, Raphaël, Pierre TREMBLAY et Jérôme GENEST, « Matrix Algorithm for Integration and Inversion of Instrument Line Shape, » dans : « Fourier Transform Spectroscopy, » pp. 42–44, Optical Society of America, Québec, Canada, février 2003b
- DOLPH, C. L., « A current distribution for broadside arrays which optimises the relationship between beamwidth and side lobe level, » *Proceedings of the IRE and Waves and Electrons*, pp. 335–348, juin 1946
- FISHER, Herbert, éditeur, *Proceedings of the 11th International Workshop on Atmospheric Science from Space Using Fourier Transform Spectrometry*, Bad Wilbad, Allemagne, octobre 2003

- FORMAN, Michael L., W. Howard STEEL et George A. VANASSE, « Correction of Asymmetric Interferograms Obtained in Fourier Spectroscopy, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 56(1), 59–63, janvier 1966
- FRIGO, Matteo et Steven G. JOHNSON, « FFTW : An adaptive software architecture for the FFT, » dans : « Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, » pp. 1381–1384, 1998
- GAULT, William A., Sean F. JOHNSTON et David J. W. KENDALL, « Optimization of a field-widened Michelson interferometer, » *Applied Optics*, vol. 24(11), 1604–1608, juin 1985
- GAUTAM, Jai Krishna, Arun KUMAR et Rajiv SAXENA, « On the modified Bartlett-Hanning window (family), » *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44(8), 2098–2102, août 1996
- GEÇKINLI, Nezh C. et Davras YAVUZ, « Some novel windows and a concise tutorial comparison of window families, » *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 26(6), 501–507, décembre 1978
- GENEST, Jérôme, *Théorie de la cohérence optique et modélisation de la forme de raie des spectromètres par transformation de Fourier*, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, janvier 2001
- GENEST, Jérôme et Pierre TREMBLAY, « Instrument Line Shape of Fourier Transform Spectrometers : Analytic Solutions for Nonuniformly Illuminated Off-Axis Detectors, » *Applied Optics*, vol. 38(25), 5438–5446, septembre 1999
- GENEST, Jérôme et Pierre TREMBLAY, « Impact of the optical aberrations on the line shape of Fourier-transform spectrometers, » *Vibrational Spectroscopy*, vol. 29(1–2), 3–13, juillet 2002
- GENEST, Jérôme et Pierre TREMBLAY, *Understanding Fourier-Transform Spectrometers*, Notes de cours, Université Laval, Québec, Canada, 2e édition, septembre 2003
- GIBSON, Jerry D., *Principles of Digital and Analog Communications*, Prentice Hall, 2e édition, 1993
- GIROUX, Jacques, éditeur, *Seventh Workshop on Infrared Emission Measurements by FTIR*, ABB, Québec, Québec, Canada, février 2004
- GRADSHTEYN, Izrail S. et Iosif M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, San Diego, 5e édition, 1994
- GRIFFITHS, Peter R. et James A. DE HASETH, *Fourier Transform Infrared Spectrometry*, John Wiley and Sons, 1986
- HANSEN, Christian, « Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices, » *Numerical Algorithms*, vol. 29(4), 323–378, avril 2002

- HANSEN, G., *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, vol. 61, 411–413, 1941
- HANSEN, G., « Die Sichtbarkeit der Interferenzen beim Twyman-Interferometer, » *Optik*, vol. 12(1), 5–16, janvier 1955
- HARRIS, Frederic J., « On the Use of Windows for Harmonic Analysis with Discrete Fourier Transform, » *Proceedings of the IEEE*, vol. 66(1), 51–83, janvier 1978
- HASE, Frank, Thomas BLUMENSTOCK et Clare PATON-WALSH, « Analysis of the instrumental line shape of high-resolution Fourier transform IR spectrometers with gas cell measurements and new retrieval software, » *Applied Optics*, vol. 38(15), 3417–3422, mai 1999
- HAUSAMANN, Dieter et Robert MCKELLAR, éditeurs, *Fourier Transform Spectroscopy*, Optical Society of America, Québec, Québec, Canada, février 2003
- HILLIARD, R. L. et Gordon G. SHEPHERD, « Wide-angle Michelson interferometer for measuring Doppler line widths, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 56(3), 362–369, mars 1966
- JACQUINOT, Pierre, « The luminosity of spectrometers with prisms, gratings or Fabry-Perot etalons, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 44(10), 761–765, octobre 1954
- KAUPPINEN, Jyrki et Pekka SAARINEN, « Line-shape distortions in misaligned cube corners interferometers, » *Applied Optics*, vol. 31(1), 69–74, janvier 1992
- KREMINSKI, Rick, « Newton-Cotes integration for approximating Stieltjes (generalized Euler) constants, » *Mathematics of Computation*, vol. 72(243), 1379–1397, décembre 2002
- KULKARNI, Raghavendra G., « Polynomial windows with fast decaying sidelobes for narrow-band signals, » *Signal Processing*, vol. 83(6), 1145–1149, juin 2003
- KUO, Franklin F. et James F. KAISER, éditeurs, *System Analysis by Digital Computer*, Wiley, New York, 1966
- LANOUE, Eric, *Modèle de bruit et correction de phase pour un spectromètre par transformation de Fourier pour le domaine des télécommunications optiques*, Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, janvier 2004
- LOEWENSTEIN, Ernest V., « On the Correction of Phase Errors in Interferograms, » *Applied Optics*, vol. 2(5), 491–494, mai 1963
- MAILLARD, Jean-Pierre, Communication privée, novembre 2000
- MANDEL, Leonard et Emil WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995

- MERTZ, Lawrence, *Transformations in Optics*, John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1965
- MERTZ, Lawrence, « Auxiliary Computation for Fourier Spectrometer, » *Infrared Physics*, vol. 7, 17–23, 1967
- MERTZ, Lawrence, « Fourier spectroscopy, past, present, and future, » *Applied Optics*, vol. 10(2), 386–389, février 1971
- MICHELSON, Albert A., « On the Application of Interference Methods to Spectroscopic Measurements I, » *The Philosophical Magazine*, vol. 31(191), 338–346, avril 1891
- MICHELSON, Albert A., « On the application of interference methods to spectroscopic measurements II, » *The Philosophical Magazine*, vol. 34(208), 280–299, septembre 1892
- MURTY, M. V. R. K., « Some aspects of the Michelson interferometer with cube corners, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 50(1), 7–10, janvier 1960
- NIPLE, E., A. PIRES et K. POULTNEY, « Exact modeling of lineshape and wavenumber variations for off-axis detectors in Fourier transform spectrometers (FTS) sensor systems, » dans : R. J. Huppi, éditeur, « Technologies of Cryogenically Cooled Sensors and Fourier Transform Spectrometers II, » pp. 11–20, Proceedings of SPIE 0364, janvier 1982
- NORTON, Robert H. et Reinhard BEER, « New Apodizing Functions for Fourier Spectrometry, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 66(3), 259–264, mars 1976
- NUTTAL, Albert H., « Some Windows with Very Good Sidelobe Behaviour, » *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 29(1), 84–91, février 1981
- NYQUIST, Harry, « Certain topics in telegraph transmission theory, » *AIEE Transactions*, pp. 617–644, 1928
- OGAWA, Toshihiro, éditeur, *Proceedings of the 9th International Workshop on Atmospheric Science from Space Using Fourier Transform Spectrometry*, Kyoto, Japon, mai 2000
- O'SHEA, Donald C., *Elements of Modern Optical Design*, John Wiley and Sons, New-York, 1985
- OZAKTAS, Haldun M., Zeev ZALEVSKY et M. Alper KUTAY, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, John Wiley and Sons, Chichester, Angleterre, 2001
- PAPOULIS, Athanasios, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977
- PERSKY, M. J., « A review of spaceborne infrared Fourier transform spectrometers, » *Review of Scientific Instruments*, vol. 66(10), 4763–4797, octobre 1995

- PRESS, William H., Saul A. TEUKOLSKY, William T. VETTERLING et Brian P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, États-Unis, 2e édition, 1992
- RAHMELOW, Kim et Wigand HÜBNER, « Phase Correction in Fourier Transform Spectroscopy : Subsequent Displacement Correction and Error Limit, » *Applied Optics*, vol. 36(26), 6678–6686, septembre 1997
- RASPOLLINI, Piera, Peter ADE, Bruno CARLI et Marco RIDOLFI, « Correction of instrument line-shape distortions in Fourier transform spectroscopy, » *Applied Optics*, vol. 37(17), 3697–3704, juin 1998
- REVERCOMB, Hank E., Henry BUIJS, Hugh B. HOWELL, Dan D. LAPORTE, William L. SMITH et L. A. SROMOVSKY, « Radiometric calibration of IR Fourier transform spectrometers : Solution to a problem with the high-resolution interferometer sounder, » *Applied Optics*, vol. 27(15), 3210–3218, août 1988
- RICE, Stephen O., « Mathematical analysis of random noise, » *Bell System Technical Journal*, vol. 23(3), 282–332, juillet 1944
- ROMANOV, A. M. et E. M. SHAROV, « Method of minimizing phase correction error in a Fourier spectrometer, » *Optics and Spectroscopy*, vol. 64(4), 546–549, avril 1988
- SAEID, Sabah Hawar et Jai Krishna GAUTAM, « New hyperbolic function window family, » *Electronics Letters*, vol. 33(8), 1531–1532, août 1997
- SAKAI, Hajime, George A. VANASSE et Michael L. FORMAN, « Spectral recovery in Fourier spectroscopy, » *Journal of the Optical Society of America*, vol. 58(1), 84–90, janvier 1968
- SALOMAA, Ilkka K., « Line shape distortion in a cube corner interferometer due to lateral shift of a cube corner, » *Applied Spectroscopy*, vol. 53(8), 902–908, août 1999
- SANDERSON, R. B. et E. E. BELL, « Multiplicative correction of phase errors in Fourier spectroscopy, » *Applied Optics*, vol. 12(2), 266–270, février 1973
- SARKISSIAN, Edwin et Kevin W. BOWMAN, « Application of a nonuniform spectral resampling transform in Fourier-transform spectrometry, » *Applied Optics*, vol. 42(6), 1122–1131, février 2003
- SEKEY, A., « Oscillatory decay of band-limited impulse responses, » *IEEE Transactions on Education*, vol. 13, 57–58, 1970
- SHANNON, Claude E., « Communication in the presence of noise, » *Proceedings of the IRE*, vol. 37(1), 10–21, janvier 1949
- SHEPHERD, Gordon G., William A. GAULT, D. W. MILLER, Z. PASTURCZYK, Sean F. JOHNSTON, P. R. KOSTENIUK, J. W. HASLETT, David J. W. KENDALL et J. R.

- WIMPERIS, « WAMDII : Wide-angle Michelson imaging interferometer for Spacelab, » *Applied Optics*, vol. 24(11), 1571–1584, juin 1985
- SZYPER, Michał, « New time domain window, » *Electronics Letters*, vol. 31(9), 707–708, avril 1995
- TEMES, Gabor C., Victor BARCILON et Fred C. III MARSHALL, « The optimization of bandlimited systems, » *Proceedings of the IEEE*, vol. 61(2), 196–234, février 1973
- VAN DER MAAS, G. J., « A simplified calculation for Dolph-Tchebycheff arrays, » *Journal of Applied Physics*, vol. 25(1), 121–124, janvier 1954
- VINIOTIS, Yannis, *Probability and Random Processes for Electrical Engineers*, WCB / McGraw-Hill, 1998
- YANG, Shulin et Youan KE, « On the three-coefficient window family, » *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40(12), 3085–3088, décembre 1992
- YAP, B. K., W. A. M. BLUMBERG et R. E. MURPHY, « Off-axis effect in a mosaic Michelson interferometer, » *Applied Optics*, vol. 21(22), 4176–4182, novembre 1982
- ZWICK, Harold H. et Gordon G. SHEPHERD, « Defocusing a wide-angle Michelson interferometer, » *Applied Optics*, vol. 10(11), 2569–2571, novembre 1971

Annexes

Annexe A

Module du spectre et bruit gaussien

— La distribution de Rice.

Nous calculons ici la distribution et les moments du module Z d'un bruit gaussien complexe $X + iY$ de variance σ^2 (X et Y indépendants) ajouté à un vecteur, dans le plan complexe, de module r .

Si on pose, pour la simplicité du calcul, que le vecteur r est réel, on a que

$$Z = \sqrt{Y^2 + (X + r)^2}. \quad (\text{A.1})$$

La fonction de distribution de probabilité du bruit gaussien complexe est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2}. \quad (\text{A.3})$$

A.1 Calcul de la densité de probabilité $f_Z(z)$

Pour calculer la densité de probabilité de Z , nous allons utiliser les probabilités conditionnelles afin de profiter de la symétrie du problème selon l'axe x et de la relation (A.1) :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z|x) f_X(x) dx. \quad (\text{A.4})$$

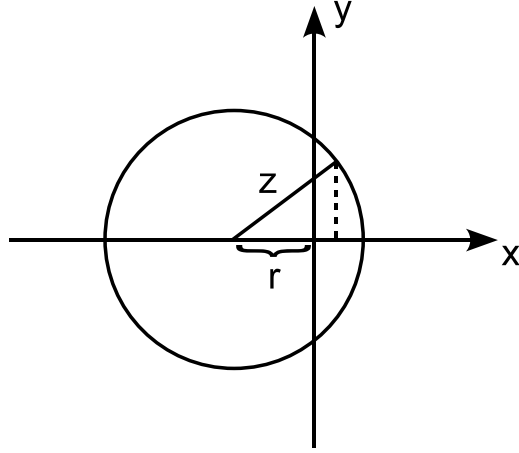


Figure A.1 – Module Z en fonction de r , X et Y .

La densité de probabilité conditionnelle $f_Z(z|x)$ peut ensuite être calculée à partir de la transformation de variable de Y vers Z :

$$f_Z(z|x) = \begin{cases} \frac{f_Y(y|x)}{|dz/dy|} \Big|_{y=+\sqrt{z^2-(x+r)^2}} + \frac{f_Y(y|x)}{|dz/dy|} \Big|_{y=-\sqrt{z^2-(x+r)^2}}, & z \geq |x+r|, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - (x+r)^2}}. \quad (\text{A.6})$$

Puisque f_Y est une fonction paire, on obtient donc

$$f_Z(z|x) = \begin{cases} \frac{2z f_Y(\sqrt{z^2 - (x+r)^2} |x)}{\sqrt{z^2 - (x+r)^2}}, & -z-r < x < z-r, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où le facteur 2 tient compte de la racine positive et de la racine négative. Comme X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a donc que $f_Y(y|x) = f_Y(y)$. Il suffit alors de faire l'intégrale complète pour le calcul de $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \int_{-z-r}^{z-r} \frac{2z}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-[z^2-(x+r)^2]/2\sigma^2}}{\sqrt{z^2 - (x+r)^2}} \cdot \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx, \quad (\text{A.8a})$$

$$= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-(z^2-r^2)/2\sigma^2} \int_{-z-r}^{z-r} \frac{e^{xr/\sigma^2}}{\sqrt{z^2 - (x+r)^2}} dx, \quad (\text{A.8b})$$

$$= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-(z^2-r^2)/2\sigma^2} \int_{-z}^z \frac{e^{wr/\sigma^2} e^{-r^2/\sigma^2}}{\sqrt{z^2 - w^2}} dw, \quad \text{où } w = x+r. \quad (\text{A.8c})$$

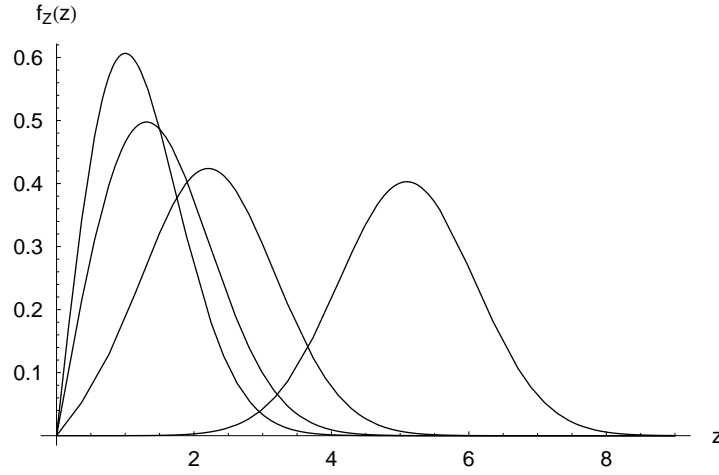


Figure A.2 – Distribution de Z pour $r = 0, 1, 2, 5$ et $\sigma = 1$.

Après intégration, on obtient tout simplement :

$$f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-(z^2+r^2)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{zr}{\sigma^2}\right), \quad (z \geq 0) \quad (\text{A.9})$$

où $I_\nu(x)$ est la fonction de Bessel modifiée. Cette densité de probabilité correspond à la distribution de Rice (*Rician distribution*) [RICE, 1944; VINIOTIS, 1998].

Comportement asymptotique

Lorsqu'on fait tendre le module du vecteur r vers zéro, on trouve la densité de probabilité suivante :

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} \quad (\text{A.10})$$

qui correspond à une densité de probabilité de Rayleigh, tel qu'attendu.

Lorsque que la variance du bruit σ est faible devant le module r , alors on sait que $z \approx r$, et sachant que

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{pour } x \text{ grand}, \quad (\text{A.11})$$

on trouve le comportement asymptotique suivant :

$$f_Z(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-r)^2/2\sigma^2}, \quad r \gg \sigma, \quad (\text{A.12})$$

ce qui correspond à une densité de probabilité gaussienne. La densité de probabilité $f_Z(z)$ varie donc entre une densité de probabilité de Rayleigh et une densité de probabilité gaussienne en fonction du module r , pour une densité de bruit donnée.

A.2 Calcul des moments de Z

Nous allons maintenant calculer les moments de Z à l'aide de la relation suivante [GRADSHTEYN et RYZHIK, 1994, 6.631.1] :

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu \Gamma(\frac{1}{2}(\nu + \mu + 1))}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} \Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}(\nu + \mu + 1); \nu + 1; \frac{-\beta^2}{4\alpha}\right). \quad (\text{A.13})$$

Pour $\mu = n + 1$, $\nu = 0$, $\alpha = 1/2\sigma^2$ et $\beta = ir/\sigma^2$, on obtient le résultat suivant pour le calcul des moments de Z :

$$E[Z^n] = (2\sigma^2)^{n/2} e^{-r^2/2\sigma^2} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}; 1; \frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{A.14})$$

La moyenne de Z est donc donnée par

$$E[Z] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma e^{-r^2/4\sigma^2} \left[\left(1 + \frac{r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{r^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{r^2}{4\sigma^2}\right) \right], \quad (\text{A.15})$$

puisque la fonction hypergéométrique se simplifie par la relation [MATHEMATICA 4.0, Wolfram Research, Inc.]

$${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) = e^{x/2} \left[(1+x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.16})$$

La variation de la moyenne en fonction de r est illustrée à la figure A.3.

Le moment de deuxième ordre de Z s'exprime encore plus simplement par :

$$E[Z^2] = 2\sigma^2 + r^2 \quad (\text{A.17})$$

puisque

$${}_1F_1(2; 1; x) = e^x (1+x). \quad (\text{A.18})$$

Pour $r = 0$, on a :

$$E[Z] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \quad (\text{A.19a})$$

$$E[Z^2] = 2\sigma^2, \quad (\text{A.19b})$$

$$\text{Var}(Z) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2, \quad (\text{A.19c})$$

qui sont exactement les caractéristiques de la distribution de Rayleigh [équation (A.10)].

La figure A.4 illustre la variation de la variance en fonction de r .

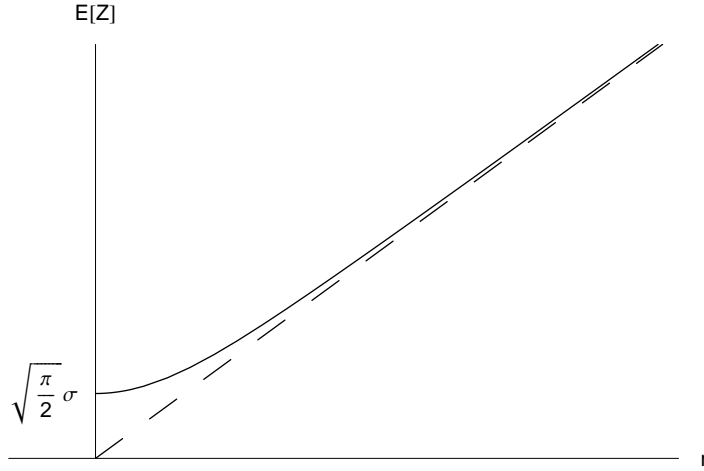


Figure A.3 – Moyenne de Z en fonction de r (asymptote $E[Z] = r$).

Pour $r \gg \sigma$, on utilise le comportement asymptotique des fonctions de Bessel modifiées [GRADSHTEYN et RYZHIK, 1994, 8.451.5], et avec les deux premiers termes de la série, on a que :

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1}{8x} + \dots \right), \quad (\text{A.20a})$$

$$I_1(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{3}{8x} + \dots \right). \quad (\text{A.20b})$$

Nous obtenons, pour $r \gg \sigma$,

$$E[Z] \sim r \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r^2} \right), \quad (\text{A.21a})$$

$$\sim r, \quad (\text{A.21b})$$

$$\text{Var}(Z) \sim 2\sigma^2 + r^2 - r^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r^2} \right)^2, \quad (\text{A.21c})$$

$$\sim \sigma^2. \quad (\text{A.21d})$$

Ces caractéristiques ($E[Z] \sim r$, $\text{Var}(Z) \sim \sigma^2$) correspondent donc à celles de la distribution gaussienne [équation (A.12)].

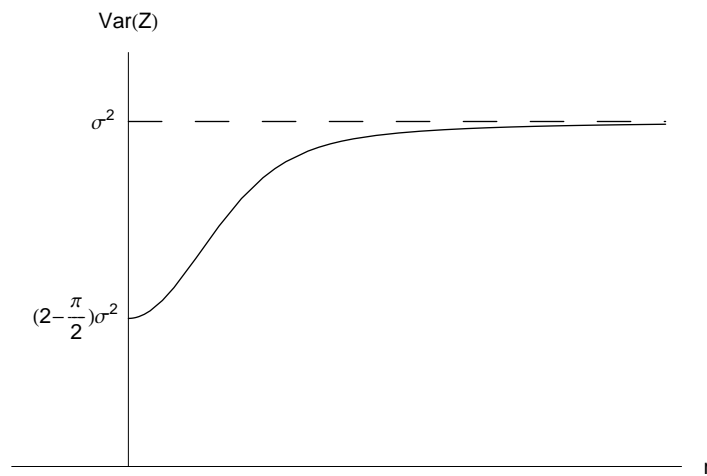


Figure A.4 – Variance de Z en fonction de r (asymptote $\text{Var}(Z) = \sigma^2$).

Annexe B

Code MATLAB pour l'intégration et l'inversion d'ILS

Voici la liste des fonctions développées pour cette thèse :

IncludeILS.m permet d'inclure l'ILS sur un interférogramme symétrique en utilisant un algorithme rapide (proportionnel à $\mathcal{N} \log_2 \mathcal{N}$).

ILSmatrix_fast.m construit la matrice d'ILS complète dans le domaine de l'interférogramme. Matrice de transformation de l'interférogramme vrai vers l'interférogramme mesuré.

ILSmatrix_trunc.m construit la matrice d'ILS dans le domaine du spectre. Matrice de transformation tronquée du spectre vrai vers le spectre mesuré.

Romberg.m calcule les coefficients d'intégration numérique de Romberg.

ILSfunction.m retourne l'échantillonnage de chaque région de l'ILS normalisé délimitée par les discontinuités de la dérivée première. Chaque région contient le même nombre d'échantillons espacés également.

CorrectionFilter.m met à zéro les n premiers et les n derniers points de l'interférogramme et du spectre simultanément.

NextFastFFT.m calcule le prochain nombre de points composé d'un faible nombre de petits nombres premiers pour l'utilisation des algorithmes rapides de FFT dans MATLAB.

B.1 IncludeILS.m

function igmout = IncludeILS(igmin, ilstype, cof, dof, n, intorder)

*% INCLUDEILS permet d'inclure l'ILS sur un interférogramme symétrique
% en utilisant un algorithme rapide (proportionnel à $N \cdot \log_2(N)$).*

*%
% igmout = includeILS(igmin, ilstype, cof, dof, n, intorder)
%*

% ENTRÉES

*%
% igmin : interférogramme (ZPD au centre du vecteur)
% type : type de détecteur
% – 'square' = ILS carré (rectangulaire)
% – 'circle' = ILS circulaire
% cof : position normalisée du centre du détecteur (x/f, y/f)
% – de la forme [xof, yof]
% dof : dimension normalisée du détecteur
% – rayon/f pour un détecteur circulaire
% – [dx/f, dy/f] pour un détecteur rectangulaire
% n : nombre d'intervalles pour l'intégration de l'ILS
% (pour la méthode de Romberg, n doit être une puissance de 2)
% intorder : ordre d'intégration (optionnel)
% – 2 intégration trapezoidale
% – 3 intégration de Simpson
% – 4,6,8,... intégration de Romberg
% – par défaut intégration de Romberg (ordre maximal)
%*

% SORTIE

% igmout : interférogramme avec ILS

*% (c) Raphaël Desbiens, décembre 2003
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada*

error(nargchk(5,6,nargin));

% coefficients d'intégration

if nargin == 5 | isempty(intorder) *% méthode Romberg $O(1/n^{2k})$ (ordre ...
maximal)*
c = romberg(n);
elseif intorder == 2 *% méthode trapézoïdale $O(1/n^2)$*
c = [1/2, ones(1,n-3), 1/2];
elseif intorder == 3 *% méthode Simpson $O(1/n^3)$*
c = [5/12, 13/12, ones(1,n-5), 13/12, 5/12];
elseif mod(intorder,2) == 0 *% méthode Romberg $O(1/n^{intorder})$*
c = romberg(n,intorder);


```

    else
        error('INCLUDEILS:_Ordre_d''intégration_non_valide.');
```

end

% évaluation de l'ILS
 [alpha, ilscoeff] = ilsfunction (ilstype , cof, dof, n+1);

% pas d'intégration angulaire
 delta = alpha(:,3)-alpha(:,2);
 nd = **size**(delta,1); % nombre de sections d'ILS
if delta***length**(igmin)/4 > ones(nd,1)
 error('INCLUDEILS:_Le_pas_d''intégration_est_supérieur_à_1,_les_résultats_ne_...
 sont_pas_significatifs.');

end

% initialisation
 inputsize = **size**(igmin);
 N0 = **length**(igmin);
if ~mod(N0,2) % interférogramme symétrique avec nombre de points impair
 igmin(**end**+1)=igmin(1);
 N = N0+1;
else
 N = N0;
end
 halfN = **fix**(N/2)+1;
 fastN = NextFastFFT(2*halfN);
 overN = fastN-2*halfN;
 igmin = igmin(:);
 igmout= **zeros**(halfN,1);
 spcin = **real**(**fft** (ifftshift (igmin)));
 spcin = spcin(1:halfN);
 I = **sqrt**(-1);
 ky2 = (I*pi*[0:halfN-1].^2).';
 kz2 = (-I*pi*[0:halfN-1,**zeros**(1,overN),-halfN:-1].^2).';

% intégration
for j = 1:nd
for i = 1:n+1
 alpha_N = alpha(j,i)/N;
 coeff = delta(j)*c(i)*ilscoeff (j,i)/N;
 y = **exp**(ky2*alpha_N);
 z = **exp**(kz2*alpha_N);

```
    tmp = 2*ifft( fft (spcin.*y,fastN) .* fft (z) );

    igmout = igmout + coeff*(real(tmp(1:halfN).*y)-spcin(1));
  end
end

igmout = [flipud(igmout(2:end));igmout];

if ~mod(N0,2)
    igmout(end)=[];
end

if size (igmout) ~= inputsize
    igmout = reshape(igmout,inputsize);
end
```

B.2 ILSmatrix_fast.m

function ilsmat = ilsmatrix_fast(ilstype, cof, dof, N, n, intorder, verbose)

```
% ILSMATRIX_FAST Construction de la matrice d'ILS dans le domaine de
% l'interférogramme. Matrice de transformation de l'interférogramme réel
% vers l'interférogramme mesuré.
%
% ilsmat = ILSMATRIX_FAST(ilstype, cof, dof, N, n, intorder, verbose)
%
% – Cet algorithme décompose le kernel de Dirichlet pour optimiser la vitesse
%
% ENTRÉES
%
% type : type de détecteur
%       – 'square' = ILS carré (rectangulaire )
%       – 'circle ' = ILS circulaire
% cof   : position normalisée du centre du détecteur (x/f, y/f)
%       – de la forme [xof, yof]
% dof   : dimension normalisée du détecteur
%       – rayon/f pour un détecteur circulaire
%       – [dx/f, dy/f] pour un détecteur rectangulaire
% N     : dimension de la matrice (N x N)
% n     : nombre d'intervalles pour l'intégration de l'ILS
%       (pour la méthode de Romberg, n doit être une puissance de 2)
% intorder : ordre d'intégration (optionnel)
%       – 2      intégration trapezoidale
%       – 3      intégration de Simpson
%       – 4,6,8,... intégration de Romberg
%       – par défaut intégration de Romberg (ordre maximal)
% verbose : 1 pour affichage de la progression, 0 sans affichage
%          (1 par défaut)
%
% SORTIE
%
% ilsmat : matrice d'ILS dans le domaine de l'interférogramme
%
% (c) Raphaël Desbiens, mai 2002
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada
```

error(nargchk(5,7,nargin));

```
% coefficients d'intégration
if nargin == 5 | isempty(intorder) % méthode Romberg  $O(1/n^{2k})$  (ordre maximal)
    c = romberg(n);
elseif intorder == 2 % méthode trapézoidale  $O(1/n^2)$ 
    c = [1/2, ones(1,n-3), 1/2];
```

```

elseif intorder == 3      % méthode Simpson    O(1/n^3)
    c = [5/12, 13/12, ones(1,n-5), 13/12, 5/12];
elseif mod(intorder,2) == 0 % méthode Romberg    O(1/n^intorder)
    c = romberg(n,intorder);
else
    error('ILSMATRIX_FAST:_Ordre_d''intégration_invalide.');
```

end

```

if nargin < 7
    verbose = 1;
end
```

% évaluation de l'ILS

```

[alpha, ilscoeff ] = ilsfunction (ilstype , cof, dof, n+1);
```

% pas d'intégration angulaire

```

delta = alpha(:,3)-alpha(:,2);
nd = size(delta,1); % nombre de sections d'ILS
if delta*N/2 > ones(nd,1)
    error('ILSMATRIX_FAST:_Le_pas_d''intégration_est_supérieur_à_1,_les_résultats...
        _ne_sont_pas_significatifs.');
```

end

% indices

```

halfN = fix(N/2);
fullN = 2*halfN+1;
```

```

mr = pi*[-halfN:0]'; %lignes
mc = pi*[-halfN:halfN]; %colonnes
```

```

mc_vec = cos(mc);
mc_vec_N = [mc_vec.*cos(mc/fullN);-mc_vec.*sin(mc/fullN)]*fullN;
one_vect = ones(size(mc));
```

% calcul de la matrice d'ILS

```

ilsmat = zeros(halfN+1,fullN);
diric_matrix = zeros(halfN+1,fullN);
```

warning off *% pas de warning si division par zéro*

```

if verbose, h1 = waitbar(0,'Construction_de_la_matrice_d''ILS...'); end;
for j = 1:nd
    for i = 1:n+1
        alpha_mr = alpha(j,i)*mr;
        alpha_mr_N = alpha_mr/fullN;
        coeff      = delta(j)*c(i)*ilscoeff (j,i);

        num_coeff = (coeff*sin(alpha_mr));
```

```

diric_matrix = num_coeff(:,one_vect) ./ ...
               ([sin(alpha_mr_N),cos(alpha_mr_N)]*mc_vec_N);

% erreurs numériques
% trouver les petites valeurs au dénominateur
a = round(alpha_mr/pi);
ia = a+halfN+1;
diric_update = coeff/fullN*sin(alpha_mr-mc(ia).') ./ ...
               sin((alpha_mr-mc(ia).')/fullN);

% trouver les valeurs nulles au dénominateur
ib = find(alpha_mr == mc(ia).'); % inchangé par l'arrondissement
diric_update(ib) = coeff;

for k=1:length(a)
    diric_matrix(k,ia(k)) = diric_update(k);
end

% ajout à la matrice d'ILS
ilsmat = ilsmat + diric_matrix;
if verbose, waitbar(i*j/n/nd,h1); end;
end
end
if verbose, close(h1); end;
warning on

% symétrie
ilsmat = [ilsmat ; rot90(ilsmat(1:end-1,:),2)];

% N pair
if mod(N,2)==0
    ilsmat(:,1) = ilsmat(:,1) + ilsmat(:,N+1); %addition des points de bout
    ilsmat(:, N+1)=[]; %réduction colonnes
    ilsmat(N+1,:)=[]; %réduction lignes
end
end

```

B.3 ILSmatrix_trunc.m

```

function ilsmat = ilsmatrix_trunc(ilstype, cof, dof, N, n, intorder, verbose)

% ILSMATRIX_TRUNC Construction de la matrice d'ILS dans le domaine du
% spectre. Matrice de transformation tronquée du spectre réel vers
% le spectre mesuré.
%
% ilsmat = ILSMATRIX_TRUNC(ilstype, cof, dof, N, n, intorder, verbose)
%
% – Cet algorithme décompose le noyau (kernel) de Dirichlet pour optimiser la vitesse
%
% ATTENTION matrice dans le domaine du spectre!
%
% ENTRÉES
%
% type      : type de détecteur
%             – 'square' = ILS carré (rectangulaire )
%             – 'circle' = ILS circulaire
% cof       : position normalisée du centre du détecteur (x/f, y/f)
%             – de la forme [xof, yof]
% dof       : dimension normalisée du détecteur
%             – rayon/f pour un détecteur circulaire
%             – [dx/f, dy/f] pour un détecteur rectangulaire
% N = [N, Nmin, Nmax]
%             – N : dimension de la matrice (N x N)
%             – Nmin: rangée minimale calculée
%             – Nmax: rangée maximale calculée
% n         : nombre d'intervalles pour l'intégration de l'ILS
%             (pour la méthode de Romberg, n doit être une puissance de 2)
% intorder  : ordre d'intégration (optionnel)
%             – 2      intégration trapezoidale
%             – 3      intégration de Simpson
%             – 4,6,8,... intégration de Romberg
%             – par défaut intégration de Romberg (ordre maximal)
% verbose   : 1 pour affichage de la progression, 0 sans affichage
%             (1 par défaut)
%
% SORTIE
%
% ilsmat    : matrice d'ILS dans le domaine du spectre
%
% (c) Raphaël Desbiens, mai 2002
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada

```

```

error(nargchk(5,7,nargin));

nmin = N(2);
nmax = N(3);
N = N(1);

% coefficients d'intégration
if nargin == 5 | isempty(intorder) % Romberg O(1/n^2k) (ordre maximal)
    c = romberg(n);
elseif intorder == 2 % trapézoïdale O(1/n^2)
    c = [1/2, ones(1,n-3), 1/2];
elseif intorder == 3 % Simpson O(1/n^3)
    c = [5/12, 13/12, ones(1,n-5), 13/12, 5/12];
elseif mod(intorder,2) == 0 % Romberg O(1/n^intorder)
    c = romberg(n,intorder);
else
    error('ILSMATRIX_TRUNC:_Ordre_d''intégration_invalide.');
```

end

```

if nargin < 7
    verbose = 1;
end

% évaluation de l'ILS
[alpha, ilscoeff ] = ilsfunction (ilstype , cof, dof, n+1);

% pas d'intégration angulaire
delta = alpha(:,3)-alpha(:,2);
nd = size(delta,1); % nombre de sections d'ILS
if delta*N/2 > ones(nd,1)
    error('ILSMATRIX_TRUNC:_Le_pas_d''intégration_est_supérieur_à_1,_les_...
résultats_ne_sont_pas_significatifs.');
```

end

```

% indices
halfN = fix(N/2);
fullN = 2*halfN+1;

if nmin<0, nmin=0;end

mr = pi*[-halfN:halfN]'; % lignes
mc = pi*[nmin:nmax]; % colonnes

mc_vec = cos(mc);
mc_vec_N = [mc_vec.*cos(mc/fullN);-mc_vec.*sin(mc/fullN)]*fullN;
one_vect = ones(size(mc));

% calcul de la matrice d'ILS
ilsmat = zeros(fullN, nmax-nmin+1);
```

```

diric_matrix = zeros(fullN,nmax-nmin+1);

warning off % pas de warning si division par zéro

if verbose, h1 = waitbar(0,'Construction_de_la_matrice_d''ILS...'); end;
for j = 1:nd
    for i = 1:n+1
        alpha_mr = alpha(j,i)*mr;
        alpha_mr_N = alpha_mr/fullN;
        coeff      = delta(j)*c(i)*ilscoeff (j,i);

        num_coeff = (coeff*sin(alpha_mr));

        diric_matrix = num_coeff(:,one_vect) ./ ...
            ([sin(alpha_mr_N),cos(alpha_mr_N)]*mc_vec_N);

        % erreurs numériques
        % trouver les petites valeurs au dénominateur
        alpha_mr_no_pi = alpha(j,i)*[-halfN:halfN]';
        a = round(alpha_mr_no_pi);
        pos = find( a>=nmin & a<=nmax );
        ia=a(pos).'-nmin+1;

        diric_update = coeff/fullN*sin(alpha_mr(pos)-mc(ia).') ./ ...
            sin((alpha_mr(pos)-mc(ia).')/fullN);

        % trouver les valeurs nulles au dénominateur
        ib = find(a == alpha_mr_no_pi)-halfN-1; % inchangé par l'...
        arrondissement
        ib = ib( ib>=nmin & ib<=nmax )-nmin+1;
        diric_update(ib) = coeff;

        for k=1:length(ia)
            diric_matrix(pos(k),ia(k)) = diric_update(k);
        end

        % ajout à la matrice d'ILS
        ilsmat = ilsmat + diric_matrix;
        if verbose, waitbar(i*j/n/nd,h1); end;
    end
end
ilsmat = ilsmat.';

if verbose, close (h1); end;
warning on

```


B.4 Romberg.m

```

function r = romberg(n,order)

% ROMBERG calcule les coefficients d'intégration numérique de Romberg
%
% r = ROMBERG(n,order)
%
% ENTRÉES
%
% n      : nombre d'intervalles (puissance de 2)
% order  : ordre d'intégration . L'erreur est  $O(1/n^{\text{order}})$ 
%
% SORTIE
%
% r      : coefficients de Romberg
%
% (c) Raphaël Desbiens, mai 2002
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada

error(nargchk(1,2,nargin));

if nargin < 2
    k = log2(n)+1; % valeur par défaut (ordre maximal)
    order = 2*k;
else
    k = order/2;
end

% vérification des paramètres
if k ~= fix(k)
    error('ROMBERG:_L''ordre_d''intégration_doit_être_un_nombre_pair');
elseif 2^nextpow2(n) > n
    error('ROMBERG:_Le_nombre_d''intervalles_doit_être_une_puissance_de_2');
elseif n < 2^(k-1)
    error('ROMBERG:_Ordre_trop_élevé_pour_le_nombre_de_points');
end

% calcul des coefficients
if k == 1
    r = [1/2, ones(1,n-1), 1/2];
else
    nr = romberg(n,order-2);
    nr2 = zeros(1,n+1);
    nr2(1:2:n+1) = 2*romberg(n/2,order-2);
    r = nr + (nr - nr2)/(4^(k-1)-1);
end

```

B.5 ILSfunction.m

```

function [sigman, ils ] = ilsfunction (type, cof, dof, n)

% ILSFUNCTION retourne n points par région de l'ILS normalisé (normalisé
% à un), les points aux nombres d'onde normalisés 'sigman' sont également espacés
% pour une région donnée de l'ILS
%
% [sigman, ils ] = ILSFUNCTION(type, cof, dof, n)
%
% ENTRÉES
%
% type      : type de détecteur
%             - 'square' = ILS carré (rectangulaire )
%             - 'circle ' = ILS circulaire
% cof       : position normalisée du centre du détecteur (x/f, y/f)
%             - de la forme [xof, yof]
% dof       : dimension normalisée du détecteur
%             - rayon/f pour un détecteur circulaire
%             - [dx/f, dy/f] pour un détecteur rectangulaire
% n         : nombre de points sur l'ILS (par région)
%
% SORTIES
%
% sigman    : fréquences normalisées
% ils       : valeurs de l'ILS
%
% (c) Raphaël Desbiens, mai 2002
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada

epsilon = 10^-15; % précision des valeurs sigman

error(nargchk(4,4,nargin));

if type ~= 'circle' & type ~= 'square'
    error('ILSFUNCTION:_Type_d''ILS_invalide.');
```

end

```

xof = abs(cof(1,1));
yof = abs(cof(1,2));

if type == 'square'
    % si rectangulaire
    if size (dof,2) == 2
        dxof = dof(1,1)/2;
        dyof = dof(1,2)/2;
    else
```

```

        dxof = dof/2;
        dyof = dof/2;
    end
    % si l'axe est sur le détecteur
    if xof < dxof | yof < dyof
        error('ILSFUNCTION:_L''axe_optique_est_incluse_sur_le_détecteur_carré:_cette_...
            situation_n''est_pas_encore_programmée.');
```

end

end

if type == 'circle'

```

    rc = sqrt( xof^2 + yof^2 );
    rmin = rc - dof;
    rmax = rc + dof;

    if cof == [0,0]
        % ILS boite
        sigman(1,:) = linspace(1/sqrt(1+rmin^2),1,n);
        ils (1,:) = ones(size(sigman))/(1-1/sqrt(1+rmin^2));

    else
        % ILS circulaire hors-axe
        % constante de normalisation pour une aire unitaire (intégration numérique)
        s = linspace(1/sqrt(1+rmax^2)+epsilon,1/sqrt(1+rmin^2)-epsilon,2048+1);
        area = sum(1/pi*acos((rc^2+(1./s.^2-1)-dof^2)./(2*rc*sqrt(1./s.^2-1))).*...
            romberg(2048,24))*(s(3)-s(2));

        % valeurs des nombres d'onde normalisés
        sigman = linspace(1/sqrt(1+rmax^2)+epsilon,1/sqrt(1+rmin^2)-epsilon,n);
        if rmin < 0 % if axis in the detector
            sigman(2,:) = linspace(1/sqrt(1+rmin^2)+epsilon,1-epsilon,n);
        end

        % valeurs de l'ils
        ils (1,:) = 1/pi*acos((rc^2+(1./sigman(1,:).^2-1)-dof^2)./(2*rc*sqrt(1./sigman...
            (1,:).^2-1)));
        if rmin < 0
            ils (2,:) = 1;
            area = area + (1-1/sqrt(1+rmin^2));
        end

        % normalisation
        ils =ils/area;

    end
else % carré
    rmin = sqrt( (xof-dxof)^2 + (yof-dyof)^2 );
    rc1 = min(sqrt( (xof-dxof)^2 + (yof+dyof)^2 ), sqrt( (xof+dxof)^2 + (yof-dyof)^2...
        ));
```

```

rc2 = max(sqrt( (xof-dxof)^2 + (yof+dyof)^2 ), sqrt( (xof+dxof)^2 + (yof-dyof)...
^2 ));
rmax = sqrt( (xof+dxof)^2 + (yof+dyof)^2 );

if xof < yof
    xyof = xof; yxof = yof;
    dxyof = dxof; dyxof = dyof;
else
    xyof = yof; yxof = xof;
    dxyof = dyof; dyxof = dxof;
end

% constante de normalisation pour une aire unitaire (analytique)
area = -atan( (1+rmax^2+( dxyof+xyof)*sqrt(1+rmax^2))/( dxyof+xyof)/( dyxof+...
yxof)/( dxyof+xyof+sqrt(1+rmax^2)) )...
+ -atan( (1+rmin^2+(-dxyof+xyof)*sqrt(1+rmin^2))/(-dxyof+xyof)/(-dyxof...
+ yxof)/(-dxyof+xyof+sqrt(1+rmin^2)) )...
+ atan( (1+rc2^2 +(-dxyof+xyof)*sqrt(1+rc2^2 ))/(-dxyof+xyof)/( dyxof+...
yxof)/(-dxyof+xyof+sqrt(1+rc2^2)) )...
+ atan( (1+rc1^2 +( dxyof+xyof)*sqrt(1+rc1^2 ))/( dxyof+xyof)/(-dyxof+...
yxof)/( dxyof+xyof+sqrt(1+rc1^2)) );

% valeurs des nombres d'onde normalisés
sigman = linspace(1/sqrt(1+rc1^2)+epsilon,1/sqrt(1+rmin^2)-epsilon,n);
sigman(2,:) = linspace(1/sqrt(1+rmax^2)+epsilon,1/sqrt(1+rc2^2)-epsilon,n);
if rc1 ~ = rc2 % if three regions
    sigman(3,:) = linspace(1/sqrt(1+rc2^2)+epsilon,1/sqrt(1+rc1^2)-epsilon,n);
end

% valeurs de l' ils
ils (1,:) = pi/2-asin((yof-dyof)./sqrt(1./sigman(1,:).^2-1))-asin((xof-dxof)./sqrt...
(1./sigman(1,:).^2-1));
ils (2,:) = pi/2-acos((yof+dyof)./sqrt(1./sigman(2,:).^2-1))-acos((xof+dxof)./sqrt...
(1./sigman(2,:).^2-1));
if rc1 ~ = rc2
    ils (3,:) = pi/2-asin((xyof-dxyof)./sqrt(1./sigman(3,:).^2-1))-acos((xyof+...
dxyof)./sqrt(1./sigman(3,:).^2-1));
end

% normalisation
ils =ils/area;

end

```

B.6 CorrectionFilter.m

```

function vecout = CorrectionFilter(vec, n)

% CORRECTIONFILTER met les n premiers et les n derniers points d'un vecteur
% à zéro dans le domaine de l'interférogramme et dans le domaine
% spectral simultanément.
%
% vecout = CorrectionFilter(vec, n)
%
% ENTRÉES
%
%   vec      : vecteur initial
%   n        : nombre de points à mettre à zéro de chaque côté
%
% SORTIE
%
%   vecout   : vecteur corrigé
%
% (c) Raphaël Desbiens, juin 2002
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada

N = length(vec);

fftvec = fftshift (fft (ifftshift (vec)));

a = zeros(1,2*n);
b = zeros(1,2*n);

ind = [1:n,N-n+1:N];
ijk = ind - ceil((N-1)/2) - 1;

igm = vec(ind);
spc = fftvec(ind);

for m = 1:2*n
    for k = 1:2*n
        tmp(k) = spc(k)*exp(2*pi*i*ijk(m)*ijk(k)/N);
    end
    mat(m) = sum(tmp);
end
left = igm-mat/N;

mat = zeros(2*n);
for m = 1:2*n
    for j = 1:2*n
        for k = 1:2*n

```

```

        tmp(k) = exp(2*pi*i*(ijk(m)-ijk(j))*ijk(k)/N);
    end
    mat(m,j) = sum(tmp)/N;
end
end
size (mat);
mat = eye(2*n)-mat;

a = (inv(mat)*left.').';

for m = 1:2*n
    for k = 1:2*n
        mat(m,k) = exp(-2*pi*i*ijk(m)*ijk(k)/N);
    end
end
b = spc - (mat*a.').';

fftvec (ind) = fftvec(ind) - b;

vecout = real(fftshift (ifft (ifftshift (fftvec ))));
vecout(ind) = vecout(ind) - real(a);

```

B.7 NextFastFFT.m

```

function n = NextFastFFT(x)

% NEXTFASTFFT calcule le prochain nombre de points composé d'un
% faible nombre de petits facteurs premiers et de facteurs 2 pour utiliser
% les algorithmes de FFT les plus efficaces de Matlab.
%
% n = NEXTFASTFFT(x)
%
% ex.: y = fft(x, NEXTFASTFFT(length(x)));
%
% ENTRÉE
% x : nombre de points du vecteur
%
% SORTIE
% n : nombre de points (avec zero-padding) permettant l'utilisation
% d'un algorithme de FFT plus rapide
%

% (c) Raphaël Desbiens, decembre 2003
% Centre d'optique, photonique et laser (COPL)
% Université Laval
% Québec, Canada

% facteurs premiers: 3,5,7,11 versus 2^6
factor = [1, 3*11/32, 5*7/32, 3*3/8, 3*5*5/64, 7*11/64, ...
          5/4, 3*3*3*3/64, 3*7/16, 11/8, 3*3*5/32, ...
          3/2, 7*7/32, 3*3*11/64, 5*5/16, 3*5*7/64, ...
          3*3*3/16, 5*11/32, 7/4, 3*5/8, 11*11/64, ...
          5*5*5/64, 3*3*7/32, ...
          2];

for i = 1:length(x)
    p2 = pow2(nextpow2(x(i))-1);

    f = x(i)./p2;

    pos = find(f<=factor);
    n(i) = p2*factor(pos(1));
end

```

Annexe C

Grandeurs radiométriques

Cette annexe présente les grandeurs radiométriques comme elles sont définies dans le Système international d'unités (unités SI). Ces définitions sont tirées de la 7^e édition (1998–2000) de la brochure publiée par le Bureau international des poids et mesures (BIPM).

Grandeur	<i>Quantity</i>	Symbole	Unités SI
angle solide	<i>solide angle</i>	–	sr
puissance	<i>power</i>	P	W
luminance énergétique	<i>radiance</i>	L	W / (m ² · sr)
éclairement énergétique	<i>irradiance</i>	E	W / m ²
intensité énergétique	<i>radiant intensity</i>	I	W / sr

Annexe D

Liste des sigles et abréviations

DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> Transformation de Fourier discrète
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> Transformation de Fourier rapide
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> Réponse impulsionnelle finie
FM	<i>Frequency Modulation</i> Modulation en fréquence
FOV	<i>Field of View</i> Champ de vue
FRFT	<i>FRactional Fourier Transform</i> Transformation de Fourier fractionnaire
FTS	<i>Fourier Transform Spectrometer</i> Spectromètre par transformation de Fourier
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i> Pleine largeur à mi-hauteur
IFTS	<i>Imaging Fourier Transform Spectrometer</i> Spectromètre imageur par transformation de Fourier
IGM	<i>Interferogram</i> Interférogramme
ILS	<i>Instrument Line Shape</i> Fonction d'appareil
OPD	<i>Optical Path Difference</i> Différence de chemin optique
RMS	<i>Root Mean Square</i> Moyenne quadratique

SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i> Rapport signal sur bruit
ZPD	<i>Zero Path Difference</i> Différence de chemin optique nulle