



HAL
open science

Déformation et convection d'une ou plusieurs capsules en écoulement dans un tube cylindrique.

Y. Lefebvre

► **To cite this version:**

Y. Lefebvre. Déformation et convection d'une ou plusieurs capsules en écoulement dans un tube cylindrique.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2007. Français. NNT: . tel-00200326

HAL Id: tel-00200326

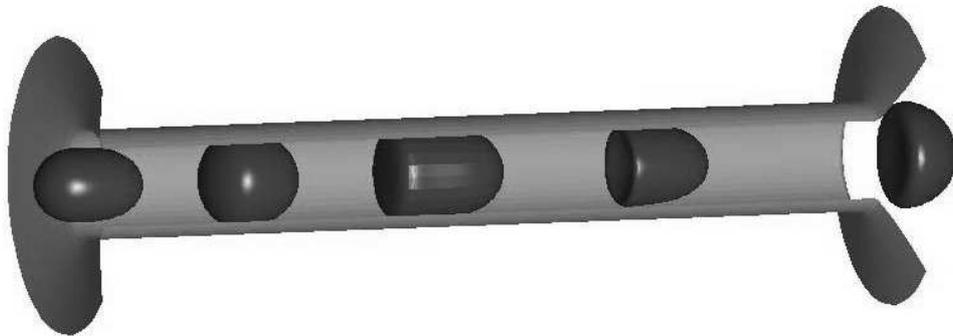
<https://theses.hal.science/tel-00200326>

Submitted on 20 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Déformation et convection d'une ou plusieurs capsules en écoulement dans un tube cylindrique



Yannick Lefebvre

Discipline : Biomécanique

Thèse présentée pour l'obtention du grade de Docteur de l'UTC

Soutenue le 29 mai 2007

Jury :

Frédéric Risso (Rapporteur)
Patrick Tabeling (Rapporteur)
Mohamed Ali Hamdi (Président du jury)
Dominique Barthès-Biesel (Directeur de thèse)
Florence Edwards-Lévy
Eric Leclerc

REMERCIEMENTS	4
I. INTRODUCTION GÉNÉRALE	5
I.1 Contexte scientifique	5
I.2 Microencapsulation	6
I.3 Capsules en cisaillement simple : études expérimentales	8
I.4 Modélisation.....	9
I.5 Capsules dans un écoulement confiné.....	9
I.6 Objet de la thèse.....	12
II. ECOULEMENT D'UNE OU PLUSIEURS CAPSULES DANS UN PORE CYLINDRIQUE	14
II.1 Description du problème	14
II.2 Mécanique de la membrane	16
II.2.1 Lois de comportement	16
II.2.2 Equations d'équilibre.....	17
II.2.3 Pré-gonflement	18
II.3 Formulation intégrale	18
II.4 Formulation numérique du problème	21
II.5 Quantités sans dimension	26
III. CAPSULE EN ÉCOULEMENT DANS UN PORE CYLINDRIQUE : INFLUENCE DU PRÉ-GONFLEMENT	27
III.1 Introduction	27
III.2 Article	27
III.3 Résultats complémentaires	70
III.3.1 Longueur d'établissement d'un régime stationnaire.....	70
III.3.2 Existence d'un état stationnaire.....	71
III.3.3 Analyse de profils expérimentaux pour $a/R = 0.88$	72
III.3.4 Etude d'une autre loi de comportement : loi de Yeoh	74
III.3.4.a Réponses de la loi de Yeoh sous des modes de déformation standards	75
III.3.4.b Ecoulement dans un pore cylindrique.....	80
III.3.4.c Application de la loi de Yeoh aux résultats expérimentaux.....	82
III.4 Conclusion.....	83
IV. ECOULEMENT TRANSITOIRE D'UNE CAPSULE DANS UN CONVERGENT OU UN DIVERGENT	85
IV.1 Introduction	85

IV.2 Procédure numérique	86
IV.3 Validation du modèle	86
IV.4 Résultats	87
IV.4.a Capsules de taille initiale $a/R = 0.83$ et à membrane Sk avec $C = 1$	87
IV.4.b Influence du rapport des viscosités λ	92
IV.4.c Comparaison avec des données expérimentales	98
IV.5 Conclusion	104
V. INTERACTION DE DEUX CAPSULES EN ÉCOULEMENT DANS UN PORE CYLINDRIQUE	105
V.1 Introduction	105
V.2 Problématique	106
V.3 Procédure numérique	107
V.4 Validation du modèle	108
V.5 Résultats	109
V.5.a Capsules de même taille	109
V.5.b Capsules de taille différente	117
V.6 Conclusion	121
CONCLUSION GÉNÉRALE	123
PERSPECTIVES	125
BIBLIOGRAPHIE	126
ANNEXE	130
LISTE DES COMMUNICATIONS ET DES PUBLICATIONS	132

Remerciements

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe scientifique qui m'a accueilli et soutenu au cours de ces années de thèse. Merci à mon directeur de thèse, le Professeur Dominique Barthès-Biesel, pour ses conseils avisés, son immense expérience et son soutien permanent. Le mot « merci » est très limité, tellement ma gratitude et ma reconnaissance sont grandes, mais le mot réel n'a pas encore été inventé. Merci à ma famille, qui m'a permis d'en être là où je suis aujourd'hui, au prix de moments difficiles, à mes amis et à mes collègues de travail pour leur soutien, leur bonne humeur et leur efficacité dans leur domaine respectif de prédilection. Ces personnes m'ont souvent retiré une épine du pied.

Je tiens également à remercier le Dr Frédéric Risso pour m'avoir fourni les données expérimentales nécessaires à l'accomplissement de cette thèse, ainsi que l'équipe responsable de la machine PILCAD (Plateforme Inter-Laboratoires de CAIcul Distribués) financée par les laboratoires ANVAR, HEUDYASIC et ROBERVAL (Université de Technologie de Compiègne).

I. Introduction générale

I.1 Contexte scientifique

Une capsule est constituée d'une fine membrane déformable entourant un milieu interne. Cette définition couvre un grand nombre de particules allant des capsules naturelles, telles que les globules rouges, aux capsules artificielles. Ces dernières, qui peuvent contenir des produits très variés, sont présentes dans de nombreuses applications industrielles. Elles sont utilisées par exemple dans la fabrication de produits de consommation courante comme les pesticides, les films photographiques, les encres d'imprimerie ou les produits cosmétiques (vernis, shampooings, crèmes de beauté). Dans le domaine agroalimentaire, on a recours à l'encapsulation pour des additifs alimentaires (le bêta-carotène ajouté dans les céréales comme apport en vitamine A) dont on veut préserver les principes actifs, ou pour des substances médicamenteuses, telles que les antibiotiques, dont on veut contrôler le goût (Lim *et al.* 1984). L'encapsulation présente l'intérêt majeur de permettre aux principes actifs, contenus dans la capsule, d'atteindre les points cibles où leur efficacité sera maximale et de maîtriser la libération de ces produits.

Les capsules peuvent aussi intervenir dans d'autres domaines tels que le génie biomédical (thérapie par convoyage de drogues encapsulées), et notamment servir au traitement de maladies comme le diabète (Soon-Shiong 1999). Les capsules de synthèse sont utilisées dans de nombreuses applications industrielles ou cliniques. Kühnreiter *et al.* (1998) effectuent une revue et donnent notamment les exemples suivants :

- le relargage contrôlé de substances médicamenteuses, d'hormones, de peptides ou de protéines par administration orale ou dermale de capsules à membrane biodégradable,
- l'élimination de substances toxiques chez l'être humain par hémoperfusion. Le système de perfusion, qui contient 70 mg d'agents de sorption (ou absorbants) encapsulés, est utilisé en clinique depuis plusieurs années. On a alors recours à l'encapsulation car les agents de sorption comme le charbon actif, les résines ou les immunoabsorbants peuvent provoquer une embolie et des destructions de globules rouges lors de leur utilisation directe en perfusion sanguine,
- l'utilisation d'absorbants encapsulés en parallèle avec un système de dialyse dans les cas d'insuffisance rénale. Ces microsystèmes sont très efficaces dans l'élimination des métabolites car elles offrent une surface d'échange très grande. Ils permettent ainsi de réduire le temps de dialyse.

L'encapsulation de micro-organismes ou de cellules, communément appelée bioencapsulation, fait aussi l'objet de nombreux travaux de recherche. Ces capsules sont souvent appelées cellules artificielles. L'encapsulation permet, dans les cas de transplantation, de diminuer les risques d'incompatibilité (Zimmerman *et al.* 1999). La membrane de ces capsules (généralement à base

d'alginate) possède une perméabilité sélective. Elle protège d'une part les cellules du système immunitaire du receveur, ce qui lui évite un traitement immunosuppresseur, et permet d'autre part aux cellules de réagir aux besoins physiologiques de l'organisme et d'assurer leurs fonctions. Dans le cas de cellules d'îlots pancréatiques encapsulées par exemple, on peut ainsi obtenir une régulation de la quantité d'insuline qui est plus fine que celle obtenue par injection directe. De même, les hépatocytes encapsulés sont considérés dans la mise au point d'un foie artificiel qui permettrait de suppléer, de façon transitoire, les fonctions du foie dans l'attente d'une greffe (David *et al.* 2004).

Les quelques exemples cités ci-dessus montrent l'utilité et le fort potentiel de l'encapsulation. Cependant, la mise au point de capsules pose de nombreux problèmes de nature biologique (biocompatibilité, perméabilité de la membrane à certains types de molécules), chimique (stabilité) et mécanique (compromis entre résistance et déformabilité). La membrane d'une capsule joue un rôle important car elle sert de barrière entre le milieu interne et le milieu suspendant. Le produit actif, localisé dans le milieu interne, doit être protégé efficacement de toute agression externe (radiation lumineuse ou thermique, agression chimique ...). Le produit est relargué par rupture de la membrane soit par effet thermique ou mécanique, ou bien par dissolution de la membrane (voie chimique) ou par diffusion à travers celle-ci. L'étude des capsules est complexe si bien que les modèles numériques existant considèrent séparément ces phénomènes. Ceux de nature chimique, biologique ou thermique sont autant importants que les phénomènes mécaniques, mais il existe des situations où ces derniers prévalent sur les premiers cités. Par exemple, la membrane de médicaments encapsulés est avant tout détériorée par les contraintes exercées sur la surface plutôt que par les effets gastriques, pour des raisons d'échelles de temps (Abrahamsson *et al.* 1999). Dans cette étude, on s'intéresse aux modèles adoptant un point de vue strictement mécanique.

En général, les capsules sont suspendues dans un fluide en mouvement. En réponse aux efforts hydrodynamiques exercés par ce dernier, elles sont amenées à se déformer, voire à éclater. Il est alors très important de pouvoir contrôler leur éclatement, en vue de savoir si elles sont aptes à servir de support à l'application à laquelle elles sont destinées (protéger le milieu interne ou au contraire faciliter la rupture membranaire). Un des aspects essentiels du développement des capsules artificielles est donc leur caractérisation mécanique. La prédiction et l'évaluation de la rupture membranaire sont importantes car ce sont des données utiles pour le design des capsules, réalisé au cours de la microencapsulation.

1.2 Microencapsulation

La microencapsulation consiste en la création de microparticules constituées d'un matériau enrobant et renfermant un principe actif. Le matériau enrobant peut être un polymère d'origine naturelle ou synthétique, ou bien un lipide. Deux types de particules sont à distinguer : les microsphères et les microcapsules. Les microsphères consistent en un réseau macromoléculaire ou lipidique continu et formant une matrice contenant des fractions de principe actif dispersées aléatoirement. Dans cette

étude, on ne s'intéresse pas aux microsphères. Dans le cas des microcapsules, le principe actif est contenu dans le milieu interne délimité par une membrane, constituée par le matériau enrobant. A cause de son rôle de barrière, la membrane est une partie très importante d'une capsule. La maîtrise de son processus de fabrication est donc une étape essentielle. Les choix du procédé et du matériau enrobant déterminent complètement les caractéristiques finales des microparticules (morphologie, structure, taille, teneur en matière active, stabilité, profil de libération, ...) (Richard & Benoît 2000).

Il existe trois catégories de procédés de microencapsulation: les procédés physico-chimiques, mécaniques et chimiques. Les premiers sont basés sur la maîtrise de la variation de la solubilité et des conditions de formation (température, pH, changement d'état) des matériaux enrobants. Les procédés mécaniques mettent en œuvre des techniques de pulvérisation, de formation de gouttes et d'extrusion. Enfin les procédés chimiques sont basés sur la formation *in situ* du matériau enrobant par polycondensation, polymérisation radicalaire ou polymérisation anionique d'unités monomères.

Les critères de choix du procédé d'encapsulation et du matériau constituant la future membrane sont la taille moyenne des capsules, la teneur en principe actif, la forme finale, les contraintes de stabilité au cours du stockage et de la mise en œuvre, les conditions de libération et la cinétique de libération du principe actif, les contraintes réglementaires liées au domaine d'application et au mode d'administration au patient (Richard & Benoît 2000). La diversité des matériaux et des procédés de fabrication des capsules conduit à une grande diversité des propriétés mécaniques des membranes. Par exemple, Edwards-Lévy & Lévy (1999) ont créé des capsules à membrane d'alginate de taille millimétrique, les ont comprimées et ont étudié leur comportement et leur stabilité mécaniques. Elles ont en particulier déterminé l'influence des temps de congélation, de réaction chimique, et de concentration en soude. L'épaisseur de la membrane, la déformabilité et la contrainte de rupture augmentent avec la concentration. Il existe donc un lien direct entre la nature chimique des membranes et leurs propriétés mécaniques.

Sur le plan physico-chimique, un certain nombre de facteurs permettent de caractériser la membrane d'une capsule tels que l'épaisseur, la charge électrique, la mouillabilité, la porosité, la tortuosité des pores, le degré de gonflement. Le procédé de fabrication choisi joue un rôle important sur les propriétés physiques, la taille et la forme des capsules. Par exemple, dans le cas de l'encapsulation d'une particule solide de forme quelconque, une membrane peut épouser les contours de la particule. De plus, la production de capsules s'accompagne fréquemment d'une polydispersité en taille (distribution gaussienne, apparition de deux ou plusieurs populations). Seules les techniques basées sur la formation de gouttelettes ou sur la polymérisation en milieu dispersé permettent l'obtention de capsules de taille très proche. La taille est un paramètre important à contrôler car elle a une influence sur la libération du principe actif dans le milieu environnant. Le contenu des capsules ne doit pas toujours être libéré mais lorsque c'est le cas, on distingue deux types de libérations. La libération déclenchée a lieu lors de l'éclatement brutal de la membrane sous l'effet de la température ou d'une

pression. La libération prolongée a lieu, quant à elle, essentiellement par dégradation de la membrane ou par diffusion à travers celle-ci.

A l'heure actuelle, il existe très peu d'études qui tentent de relier les propriétés chimiques aux propriétés mécaniques (loi de comportement, modules élastiques) des membranes. Cependant, la caractérisation mécanique des capsules reste un problème très important, et est le plus souvent effectuée par analyse inverse.

1.3 Capsules en cisaillement simple : études expérimentales

D'un point de vue expérimental, de nombreuses situations ont été étudiées, comme la déformation de capsules artificielles à membrane de gélatine ou de polylysine dans un écoulement plan généré dans une cellule à quatre rouleaux (Akchiche 1987, Barthès-Biesel 1991). Chang & Olbricht (1993a) ont réalisé une étude similaire avec des capsules à membrane de nylon. Le dispositif employé fut initialement conçu pour l'étude de la déformation d'une goutte suspendue dans un liquide (e.g. Taylor, 1934 ; Bentley & Leal, 1986a,b). Dans ce cas, il a été démontré que le taux de cisaillement de l'écoulement, le volume de la goutte, la tension de surface et le rapport des viscosités dynamiques des deux liquides étaient des paramètres importants du problème. Pour une capsule, la situation est différente. A l'équilibre, lorsqu'il existe, la membrane et le liquide interne sont au repos, et le rapport des viscosités n'a plus d'influence sur l'état stationnaire de la particule. Barthès-Biesel (1991) rapporte que les capsules à membrane de gélatine et celles à membrane de polylysine peuvent éclater pour un taux de cisaillement suffisamment élevé. Avant la rupture, la capsule prend une forme de citron puis développe des pointes à ses extrémités. En revanche, les capsules à membrane de nylon, initialement sphériques, gardent une forme ellipsoïdale à l'équilibre, et ne peuvent être déformées jusqu'à rupture de la membrane dans la gamme des taux de cisaillement appliqués. Le cas d'une capsule en écoulement de cisaillement simple a été étudié expérimentalement par Chang & Olbricht (1993b) pour une membrane de nylon, et par Walter *et al.* (2000, 2001) pour une membrane de polysiloxane dans un dispositif de Couette cylindrique. Après une courte période de transition où la capsule s'allonge et s'incline par rapport à la direction de l'écoulement, la capsule atteint un régime stationnaire. La vitesse normale des points matériels de la membrane s'annule, mais ces points présentent un mouvement de rotation le long de la surface, la laissant globalement inchangée. Ce phénomène, d'abord observé pour la membrane de globules rouges par Schmid-Schönbein & Wells (1960), est appelé mouvement de « tank-treading ». En conséquence, le liquide interne est en mouvement durant la phase stationnaire, et le rapport des viscosités affecte la réponse de la capsule (Pfafferott *et al.* 1985). Lorsque ce rapport est très petit devant 1, Chang & Olbricht (1993b) établissent que la capsule éclate au-delà d'une valeur particulière du taux de cisaillement. La rupture s'amorce au milieu de la capsule déformée. De leur côté, Walter *et al.* (2000, 2001) n'obtiennent pas de taux de cisaillement assez élevés pour atteindre la rupture de la membrane.

1.4 Modélisation

Du fait des faibles dimensions des capsules, dont la taille peut varier du micromètre au millimètre (on parle alors de « microcapsules »), la détermination de leurs propriétés mécaniques se fait par des méthodes indirectes. La conception de modèles théoriques prédisant la réponse hydrodynamique d'une capsule à une sollicitation donnée apparaît donc importante. De nombreux modèles ont apporté de nouvelles connaissances sur le comportement mécanique des globules rouges (Skalak *et al.* 1973, Chien *et al.* 1978, Skalak *et al.* 1981, Tözere *et al.* 1982, Tözere *et al.* 1984, Hochmuth 2000), ou ont contribué à une meilleure compréhension de la microcirculation (Secomb *et al.* 1986, Hsu & Secomb 1989, Secomb & Hsu 1996). L'intérêt pour les capsules artificielles est plus récent. Les premiers travaux ont considéré le cas de capsules initialement sphériques subissant de petites déformations. Des solutions analytiques sont obtenues (Barthès-Biesel & Rallison 1981, Brunn 1983, Barthès-Biesel & Sgaier 1985). La formulation aux intégrales de frontières, développée par Ladyzhenskaya (1969) et proposée pour la première fois par Youngren & Acrivos (1976) pour la modélisation de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une particule solide de forme quelconque, a été généralisée aux capsules en grandes déformations. Par exemple, Li *et al.* (1988) ont étudié, dans le cas d'une membrane de Mooney-Rivlin (MR), l'état stationnaire et l'éclatement d'une capsule suspendue dans un écoulement élongationnel axisymétrique. L'augmentation de la puissance de calcul a permis l'apparition de modèles tridimensionnels dans lesquels la capsule est placée dans un écoulement de cisaillement simple. Ainsi, les déformations de capsules à membrane hyperélastique (Pozrikidis 1995, Zhou & Pozrikidis 1995, Navot 1998, Lac *et al.* 2004) ont pu être simulées. Lac *et al.* (2004) ont aussi effectué une étude similaire pour des capsules à membrane de type Skalak *et al.* (1973) (Sk) dans un écoulement de cisaillement simple et dans un écoulement élongationnel plan. Ils ont montré l'existence d'une première valeur limite du taux de cisaillement. En dessous de celle-ci, la capsule atteint un état d'équilibre qui est instable à cause de la compression de la membrane. Ils ont également mis en évidence l'existence d'une seconde valeur particulière du taux de cisaillement, au-delà de laquelle la capsule subit une élongation continue jusqu'à la rupture. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, des pointes apparaissent aux extrémités de la capsule et la rupture membranaire a probablement lieu. Enfin, pour un taux de cisaillement compris entre ces deux valeurs, la capsule atteint un état d'équilibre stable. Les deux valeurs particulières du nombre capillaire dépendent du type d'écoulement appliqué à la capsule. En conséquence, un des points importants de toute la présente étude sera de s'assurer de la stabilité mécanique des capsules au cours de leur écoulement.

1.5 Capsules dans un écoulement confiné

Au cours de leur existence, les capsules s'écoulent souvent dans un espace confiné. Un cas particulièrement intéressant est celui où les capsules passent dans un tube capillaire de petite taille, sous l'effet d'un gradient de pression. Cette situation se rencontre lors de la filtration d'une suspension de capsules. A ce titre, plusieurs études ont été menées sur les globules rouges. Notamment, la

caractérisation de la déformabilité des globules rouges est importante sur le plan médical car elle peut fournir une aide dans le suivi de certaines pathologies altérant leur déformabilité (Fung 1993, Drochon 2005).

L'écoulement en espace confiné se rencontre aussi lors de la microcirculation, ou dans le domaine de la microfluidique qui est en plein essor depuis quelques années. Un des avantages de la microfluidique est la manipulation de petites quantités de volumes. Par exemple, une goutte de sang suffit à la détermination du taux d'hématies. Cette technique permet de réduire les coûts et le temps de diagnostic de pathologies.

Sur le plan expérimental, Risso *et al.* (2006) ont mené une étude sur l'écoulement en conduite cylindrique de capsules artificielles à membrane d'alginate. Le profil des capsules déformées est observé par une caméra pour différentes valeurs de vitesse débitante et de taille de capsule. Risso *et al.* (2006) ont discuté de la possibilité d'effets osmotiques sur les capsules. La différence de pression osmotique entre la capsule et l'extérieur est difficile à mesurer même si on contrôle avec soin l'osmolarité du milieu de suspension. En effet, il arrive souvent qu'une faible dissolution partielle de la membrane de la capsule libère dans le milieu interne une quantité inconnue et difficilement maîtrisable de poly-électrolytes de grosse taille (Sherwood *et al.* 2003). La présence de ces derniers conduit à une augmentation de la pression osmotique interne et donc à un gonflement qui se traduit par des précontraintes dans la membrane.

Collé-Paillet (2002) a étudié l'écoulement des mêmes capsules dans un divergent et a mesuré leurs déformations pour différentes valeurs de vitesse débitante et de taille. A la sortie du pore, les capsules sont comprimées axialement et étirées transversalement.

Sur le plan théorique, Barthès-Biesel et ses collaborateurs ont modélisé le passage de capsules dans des pores à géométrie hyperbolique. Leyrat-Maurin & Barthès-Biesel (1994) ont étudié le passage d'une capsule à membrane Mooney-Rivlin (MR) à travers une constriction hyperbolique, en configuration axisymétrique. La capsule, dont la taille est plus grande que le rayon du col, se déforme en prévision du passage au travers de la constriction. Lorsque le centre de gravité de la capsule est proche du col, la particule subit une importante élongation axiale. A ce stade, la capsule n'atteint pas d'état stationnaire car le processus de sortie a déjà commencé. Celui-ci se traduit par l'apparition d'une forme en « parachute » pour la capsule. Par ailleurs, pour des capsules dont la taille excède le rayon du col, l'écoulement s'arrête aux petites valeurs du nombre capillaire. Lors de son passage dans le col, la capsule se rapproche de plus en plus de la paroi et le débit tend vers zéro. L'écoulement est alors significativement perturbé.

Par la suite, Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) ont étudié l'état stationnaire des capsules dans un tube, mais aussi les phases transitoires en entrée et sortie de tube. Ceci a été rendu possible parce que la constriction était composée d'un tube suffisamment long pour calculer les profils stationnaires des capsules. Par ailleurs, ils ont étudié l'influence de la loi de comportement membranaire. Ils ont

considéré des capsules initialement sphériques et à membrane de type MR, mais aussi des capsules initialement ellipsoïdales et à membrane Sk. Pour les deux types de capsules, un pic de perte de charge additionnelle, créée par la capsule, apparaît lors de la phase transitoire en sortie. Cependant, les effets de la taille et de la loi de comportement n'ont pas été étudiés séparément. Il est difficile de savoir si le pic de perte de charge additionnelle est dû à la forme et la taille initiale de la capsule ou plutôt aux propriétés intrinsèques de la loi de comportement. Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) ont aussi montré l'influence de la géométrie initiale de capsules à membrane NH sur les déformations de cette dernière. Lorsque la taille de la capsule avoisine ou excède le rayon du pore, les déformations membranaires sont importantes et l'épaisseur du film de lubrification en sortie de pore est petite. Un pic de perte de charge additionnelle apparaît lors de la phase transitoire en sortie.

Cependant, leur modèle numérique était limité en précision et comportait des étapes de lissages de profils et de corrections de volume. Ces étapes pouvaient engendrer des erreurs numériques, en particulier en grandes déformations. De plus, l'interpolation de l'interface n'était pas suffisamment précise pour déterminer avec précision des courbures élevées.

C'est pourquoi Diaz & Barthès-Biesel (2002) ont repris et amélioré le modèle de Quéguiner & Barthès-Biesel (1997). Elles ont utilisé une interpolation par B-splines cubiques afin de décrire la membrane. Cela a permis une amélioration de l'évaluation des propriétés métriques de la capsule ainsi que la suppression des phases de lissage et de correction de volume. Elles ont effectué une modélisation numérique de l'écoulement de capsules sphériques ou ellipsoïdales entrant dans un pore cylindrique. L'effet de la taille relative de la capsule a été étudié ainsi que celui de différentes lois de comportement de la membrane. Elles ont aussi déterminé le rôle du rapport des viscosités entre les fluides interne et externe, pour des capsules à membrane Néo-Hookéenne (NH) ou Sk, au cours du processus d'entrée. La perte de charge est plus grande dans le cas d'une membrane NH que dans le cas d'une membrane Sk, car les déformations membranaires sont plus importantes. Pour des capsules à membrane Sk, l'effet du rapport des viscosités a été étudié, et dépend de la taille de la capsule. Lorsque cette dernière ne dépasse pas le rayon du tube, la perte de charge additionnelle à l'état transitoire diminue légèrement à mesure que le rapport des viscosités augmente. Par contre, lorsque la taille de la capsule excède celle du pore, la perte de charge transitoire augmente avec le rapport des viscosités.

Diaz & Barthès-Biesel (2002) ont élaboré un modèle ne prenant pas en compte l'effet d'une contrainte initiale induite par un pré-gonflement. Ces auteurs ont comparé les profils numériques et expérimentaux (Risso *et al.* 2006) pour différentes tailles de capsules et de vitesses débitantes. Malheureusement, les profils expérimentaux sont notablement différents de ceux issus du modèle numérique dans les mêmes conditions d'écoulement. Ceci indique donc qu'il y a dans le modèle un ou des paramètres physiques qui n'ont pas été pris en compte. Par ailleurs, leur modèle numérique a été utilisé pour étudier l'état transitoire en entrée ainsi que l'écoulement stationnaire, mais pas l'écoulement en sortie de tube. Or Collé-Paillet (2002) a expérimenté l'écoulement de capsules à

membrane d'alginate dans un divergent de révolution et connecté à un pore cylindrique. Elle a montré que lors du processus de sortie, les capsules sont comprimées axialement, et étirées transversalement. L'amélioration des connaissances actuelles sur le comportement mécanique des capsules passe donc par la modélisation du phénomène de pré-gonflement ainsi que de l'écoulement en sortie de pore.

1.6 Objet de la thèse

Ce mémoire est destiné à compléter les travaux initiés dans le domaine de la modélisation mécanique des capsules. On s'intéresse plus particulièrement aux capsules artificielles biocompatibles constituées d'une goutte liquide entourée d'une membrane mince semi-perméable et que l'on met en suspension dans un autre liquide, et en écoulement dans un pore cylindrique. Cette configuration correspond à un problème d'interaction fluide-structure dans lequel on cherche à optimiser le couplage entre la capsule et son environnement. Les forces hydrodynamiques des fluides interne et externe à la membrane vont provoquer la déformation de cette dernière.

Dans chacune des situations étudiées, on reprend et adapte le modèle développé par Diaz & Barthès-Biesel (2002). Une attention particulière est prêtée aux paramètres physiques ayant une influence sur l'écoulement, ainsi qu'aux déformations des capsules et aux niveaux de tension dans la membrane. Lorsque des données expérimentales sont disponibles, on effectue une analyse inverse pour caractériser les capsules et déterminer le niveau de précontrainte, la loi de comportement de la membrane ainsi que les modules d'élasticité. Les points essentiels du modèle numérique développé par Diaz & Barthès-Biesel (2002) et les modifications apportées sont décrites au chapitre II.

Les études abordées dans ce mémoire sont les suivantes :

- le pré-gonflement des capsules,
- les lois de comportement membranaire,
- la caractérisation mécanique de capsules à membrane d'alginate,
- l'écoulement transitoire en sortie de tube,
- l'interaction hydrodynamique de deux capsules en écoulement dans un pore cylindrique.

Le chapitre III se présente sur la forme d'un article soumis au « Journal of Fluid Mechanics ». Dans un premier temps, il traite de l'influence du pré-gonflement d'une capsule sur son écoulement dans un pore étroit. Dans un deuxième temps, on cherche à caractériser la mécanique de la membrane de capsules d'alginate en effectuant une analyse inverse. Cette dernière repose sur les profils expérimentaux des capsules fournis par F. Risso et son équipe. On compare les profils numériques et expérimentaux. On considère plusieurs lois de comportement et on détermine la meilleure loi à laquelle les capsules à membrane d'alginate obéissent. On identifie la valeur du pré-gonflement ainsi que le rapport entre les modules d'élasticité.

Dans le chapitre IV, on se focalise spécifiquement sur l'écoulement en sortie du pore cylindrique dans un divergent de révolution. L'axe du divergent est confondu avec celui du tube. La capsule, à l'état stationnaire dans le pore, modifie sa forme à l'approche de la sortie. Elle passe alors par un régime transitoire. Le chapitre IV a pour objectifs principaux de déterminer les paramètres physiques jouant un rôle lors du régime transitoire en sortie d'une part, mais aussi de vérifier que le modèle choisi comme étant représentatif de l'écoulement stationnaire de capsules à membrane d'alginate est aussi valable lors de la phase transitoire.

Dans le chapitre V, on fait interagir hydrodynamiquement deux capsules, de taille identique ou non, en écoulement dans un pore cylindrique. On détermine dans quelles conditions les capsules atteignent un état stationnaire. On montre l'importance de la distance les séparant et on détermine les conditions pour lesquelles les deux capsules interagissent.

II. Ecoulement d'une ou plusieurs capsules dans un pore cylindrique

II.1 Description du problème

Pour chacune des situations étudiées dans ce mémoire, on considère une configuration axisymétrique où la constriction et la (ou les) capsule(s) ont le même axe de révolution Ox (figure II.1).

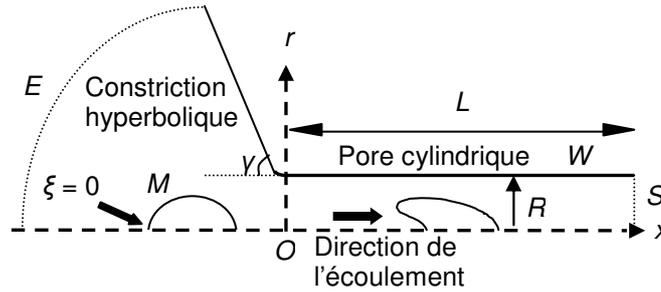


Figure II.1 - Schéma du problème d'une capsule en écoulement dans un pore cylindrique.

La paroi solide W est composée d'une constriction hyperbolique à l'entrée et connectée à un pore cylindrique de rayon R , et d'axe Ox , où O est situé à l'entrée du pore. L'angle d'ouverture γ n'a aucune influence sur le mouvement stationnaire de la capsule dans le tube mais joue un rôle sur l'écoulement transitoire. Le canal est rempli d'un liquide Newtonien incompressible de viscosité μ et s'écoulant avec un débit Q . Le nombre de Reynolds de l'écoulement est supposé très petit et le champ de vitesse axisymétrique en l'absence de la particule est noté \mathbf{v}^∞ . La capsule est initialement sphérique de rayon a . Elle est remplie d'un liquide Newtonien incompressible $\lambda\mu$. Elle est entourée par une fine membrane hyperélastique caractérisée par un module de cisaillement surfacique G_s et un module de dilatation de surface K_s . Le centre de gravité de la capsule est situé sur l'axe Ox . On le note $\mathbf{x}^{(M)} = x^{(M)}\mathbf{e}_x$, où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe du tube. Les forces de flottabilité sont négligées. En conséquence, la capsule se déforme de manière axisymétrique.

Le mouvement des liquides interne et externe vérifie les équations de Stokes :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(b)} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(b)} = -p^{(b)}\mathbf{I} + \mu^{(b)}(\nabla \mathbf{v}^{(b)} + (\nabla \mathbf{v}^{(b)})^T) \quad (\text{II.2})$$

où $\mathbf{v}^{(b)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(b)}$ et $p^{(b)}$ désignent respectivement les champs de vitesse, de contrainte et de pression dans les fluides suspendant ($b = 1$) et interne ($b = 2$).

Les conditions aux limites associées sont :

- la non perturbation de l'écoulement loin de la capsule :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)}| \gg R, \quad (\text{II.3})$$

- la condition de non glissement à la paroi W :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in W, \quad (\text{II.4})$$

- la continuité des vitesses sur la membrane M :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in M, \quad (\text{II.5})$$

où \mathbf{X} désigne la position initiale d'un point matériel de la membrane situé à la position \mathbf{x} au temps t .

- la charge $\Delta \mathbf{f}$ sur la membrane est due au saut de contrainte visqueux :

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in M, \quad (\text{II.6})$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de M .

Il reste à relier la charge $\Delta \mathbf{f}$ à la déformation de la capsule. On suppose que la membrane est faite d'une couche infiniment petite d'un matériau hyperélastique avec isotropie plane. Pour des conditions de charge axisymétrique, les tenseurs des déformations et des tensions élastiques sont axisymétriques avec comme directions principales les méridiens (indice 1) et les parallèles (indice 2). On utilise des coordonnées cylindriques (x, r) et on définit la position déformée d'un point matériel par (s, r) (respectivement (ξ, ρ) à l'état initial). s (respectivement ξ) désigne l'abscisse curviligne mesurée le long d'un méridien, avec $s = 0$ (respectivement $\xi = 0$) à l'intersection en amont du méridien avec l'axe Ox . Les rapports principaux d'extension sont donnés par :

$$\lambda_1 = ds/d\xi, \quad \lambda_2 = r/\rho \quad (\text{II.7})$$

et les courbures principales C_1 et C_2 par :

$$C_1 = -(d\mathbf{r}/ds) \cdot \mathbf{n}, \quad C_2 = n_r/r \quad (\text{II.8})$$

où \mathbf{r} désigne le vecteur unitaire tangent au méridien orienté vers les abscisses curvilignes croissantes et n_r est la composante radiale de \mathbf{n} .

II.2 Mécanique de la membrane

II.2.1 Loïs de comportement

La loi de membrane relie les tensions aux déformations. Il existe plusieurs lois de comportement proposées pour modéliser les membranes fines, mais on considère seulement les plus simples pour lesquelles les modules d'élasticité sont constants. Une loi possible est la loi de Mooney-Rivlin (MR) qui modélise une couche infiniment petite d'un matériau tridimensionnel isotrope et incompressible en volume :

$$T_1^{\text{MR}} = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[\psi + \lambda_2^2 (1 - \psi) \right], \quad (\text{II.9})$$

où le paramètre ψ varie entre 0 et 1. La valeur $\psi = 1$ correspond à un matériau néo-Hookéen (NH), et $\psi = 0$ à un matériau de type « Mooney-Rivlin extrême ». L'hypothèse d'incompressibilité impose à K_s d'être égal à $3G_s$, et l'amincissement de la membrane est associé à la dilatation de surface (Barthès-Biesel *et al.* 2002).

Une autre approche consiste à considérer la membrane comme un milieu continu bidimensionnel avec une isotropie de plan. A partir de principes généraux de l'élasticité et de la thermodynamique, Skalak *et al.* (1973) ont proposé la loi Sk :

$$T_1^{\text{Sk}} = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - 1) + C (\lambda_1 \lambda_2)^2 [(\lambda_1 \lambda_2)^2 - 1] \right], \quad (\text{II.10})$$

où la relation entre le module de cisaillement surfacique G_s et le module de dilatation K_s dépend du paramètre sans dimension C par la biais de la relation :

$$K_s = G_s (1 + 2C). \quad (\text{II.11})$$

Cette loi fut plus tard simplifiée par Evans & Skalak (1980) (ES) qui ont proposé d'additionner linéairement et indépendamment les contributions du cisaillement et de la dilatation de surface :

$$T_1^{\text{ES}} = G_s \left[\frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + A (\lambda_1 \lambda_2 - 1) \right], \quad (\text{II.12})$$

$$\text{avec } K_s = A G_s. \quad (\text{II.13})$$

Les lois Sk et ES ont été à l'origine utilisées pour modéliser les membranes biologiques incompressibles en surface comme celles des globules rouges, qui correspondent à $C \gg 1$ ou $A \gg 1$. Cependant, ces lois sont très générales et peuvent servir de modèles à d'autres types de membranes pour lesquelles K_s et G_s sont du même ordre de grandeur, comme c'est le cas pour les membranes d'alginate (Carin *et al.* 2003). Pour toutes les lois, l'expression de T_2 est déterminée en permutant les indices 1 et 2.

Pour $C = 1$ et $A = 3$, les lois MR, Sk et ES prédisent le même comportement mécanique, dans la zone des petites déformations. Cependant, en grandes déformations, elles conduisent à différentes relations non linéaires entre les tensions et les déformations. Les lois MR, ES et Sk ont servi de support à l'analyse d'expériences de compression réalisées sur des capsules à membrane d'alginate (Carin *et al.* 2003). Les expériences ont lieu dans le domaine des grandes déformations réversibles, et les propriétés élastiques de la membrane sont déterminées par une méthode d'analyse inverse. Pour des capsules mesurées peu après leur fabrication, et dont la membrane a une épaisseur plus petite que 5% du rayon, les lois MR avec $\psi = 0$ ou les lois Sk et ES avec $K_s = G_s$ offrent une bonne corrélation avec les données expérimentales, ce qui n'est pas le cas pour la loi NH. Par contre, pour des capsules qui ont été conservées plus de six mois en solution saline, Risso & Carin (2004) trouvent que la loi ES est plus représentative du comportement des membranes d'alginate que les lois Sk ou MR.

Il est clair qu'une seule expérience, telle que la compression entre deux plaques, n'est pas suffisante pour déterminer sans ambiguïté la loi de comportement membranaire. Il est donc intéressant d'utiliser une méthode d'analyse inverse pour analyser l'écoulement de capsules dans un tube et d'en déduire la loi de membrane la plus représentative du comportement mécanique des capsules.

II.2.2 Equations d'équilibre

Diaz & Barthès-Biesel (2002) ont observé une tendance au flambement de la partie arrière des capsules, pour certaines conditions d'écoulement, notamment lors de la phase d'entrée dans le tube. Pour pallier à ce problème, elles ont supposé que la membrane avait une petite rigidité de flexion. On reprend ici la même hypothèse. Les moments principaux de flexion m_1 et m_2 dépendent linéairement du changement de courbure local (Pozrikidis 2003b) :

$$m_1 = \frac{B_s}{\lambda_2} [\lambda_1 C_1 - C_1^0 + v_s (\lambda_2 C_2 - C_2^0)] \quad (\text{II.14})$$

où B_s est le module de résistance à la flexion, C_1^0 et C_2^0 les courbures principales initiales, et où v_s dépend de la loi de comportement attribuée à la membrane et vaut $1/2$, $C/(C + 1)$ ou $(A - 1)/(A + 1)$

pour les lois MR, Sk et ES respectivement. L'expression de m_2 est obtenue en permutant les indices 1 et 2. Les équations d'équilibre de la membrane en configuration axisymétrique sont :

$$\Delta \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{dT_1}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} (T_1 - T_2) - C_1 \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} m_2 - \frac{1}{r} \frac{d}{ds} (r m_1) \right] \quad (\text{II.15})$$

$$\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = -C_1 T_1 - C_2 T_2 - \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left[\frac{dr}{ds} m_2 - \frac{d}{ds} (r m_1) \right] \quad (\text{II.16})$$

II.2.3 Pré-gonflement

En se basant sur les résultats de Lac & Barthès-Biesel (2005), on suppose de plus que la capsule est soumise à une différence de pression osmotique positive entre les milieux interne et externe. En conséquence, puisque la capsule est sphérique à l'état de référence, la membrane est précontrainte par une tension élastique isotrope $T^{(0)}$ donnée par la loi de Laplace :

$$T_1 = T_2 = T^{(0)} = a p^{(0)} / 2 \quad (\text{II.17})$$

où a est le rayon de la capsule pré-gonflée. La membrane est alors étirée avec une élongation initiale :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^{(0)} = \frac{a}{a_0} = 1 + \alpha \quad (\text{II.18})$$

où a_0 est le rayon de la capsule dans la configuration non précontrainte. La relation entre $T^{(0)}$ et α dépend de la loi de comportement, et en l'occurrence de ψ , C ou A . Par contre, elle ne dépend pas de la résistance à la flexion puisque les moments de flexion sont identiquement nuls pour un pré-gonflement isotrope.

II.3 Formulation intégrale

On utilise la formulation par intégrales de frontières des équations de Stokes. Le domaine fluide extérieur est délimité par la membrane M , la paroi W , une surface sphérique en entrée E centrée en O et de rayon R_E ($R_E \gg R$), une section de sortie S plane normale à Ox et située loin à l'intérieur du tube en $x = L$ ($L \gg R$). Le domaine interne est délimité par M . Au temps $t = 0$, la capsule sphérique, pré-gonflée ou non, est centrée en $x^{(M)}(0) = -d$ ($0 < d \ll R_E$) et s'écoule avec un débit constant Q . On suit la capsule dans son mouvement et on s'assure qu'à tout instant $x^{(M)} \ll L$. On prend la pression de référence à l'entrée ($p = 0$ sur E). Dans la formulation intégrale, il n'y a alors pas de contribution de la

surface E où la vitesse est de l'ordre de $O(Q/R_E^2)$. A la surface de sortie S , les conditions de l'écoulement de Poiseuille prévalent :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) = 2 \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - (r/R)^2 \right] \mathbf{e}_x, \quad p = p^\infty(L) + \Delta p \quad (\text{II.19})$$

où Δp est la perte de charge additionnelle créée par la capsule et $p^\infty(L)$ la pression qui règnerait en son absence.

L'effet du rapport des viscosités λ entre les milieux interne et externe sur la phase transitoire en entrée a été étudié par Diaz & Barthès-Biesel (2002). On utilise une formulation intégrale pour calculer la vitesse sur chacune des frontières délimitant le fluide externe :

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{8\pi\mu} \int_M \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{f}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) + (\lambda - 1) \int_M \mathbf{v}(\mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \\ & + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{W \cup S} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}_b(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{v}^\infty(\mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec

$$\beta = 1 \text{ si } \mathbf{x} \in M$$

$$\beta = 0 \text{ si } \mathbf{x} \in W \quad (\text{II.20})$$

$$\beta = \frac{1}{2} \text{ si } \mathbf{x} \in S$$

Le terme $\mathbf{f}_b(\mathbf{y})$ représente la force exercée par les frontières W et S sur le fluide suspendant. Les noyaux de simple et double couche \mathbf{J} et \mathbf{K} sont définis par :

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad \mathbf{K}_{ijk} = \frac{-3(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^5} \quad (\text{II.21})$$

L'intégrale est simplifiée en calculant analytiquement l'intégration dans la direction azimutale. Les intégrales surfaciques se réduisent alors à des intégrales linéiques prises le long des intersections des surfaces M , W , S avec un plan méridien.

Différentes études sont menées dans ce mémoire. Lorsque l'on s'intéresse à l'état stationnaire de la capsule dans le tube (figure II.1), le liquide interne est au repos et sa viscosité n'a pas d'influence sur le mouvement et la déformation de la capsule. En conséquence, on choisit $\lambda = 1$ et on utilise la

formulation intégrale simplifiée où le terme de double couche lié à la surface de la capsule n'apparaît pas.

Lors de l'écoulement transitoire en sortie de tube (figure II.2), le fluide interne à la capsule n'est pas au repos et les effets visqueux doivent être pris en compte. On se place dans le cas où $\lambda \neq 1$ et on conserve donc le terme de double couche dans l'équation intégrale.

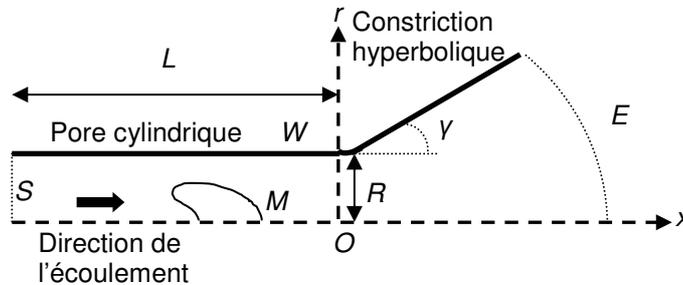


Figure II.2 - Capsule en écoulement à la sortie d'un tube cylindrique.

Lorsque l'on étudie l'interaction hydrodynamique de deux capsules dans un tube cylindrique (figure II.3), le domaine M dans la relation (II.20) est constitué de deux capsules tel que $M = M_1 \cup M_2$. A l'équilibre, les fluides internes aux capsules sont au repos. On choisit $\lambda = 1$ pour les deux capsules, ce qui élimine le terme de double couche. La distance e les séparant est un paramètre important du problème.

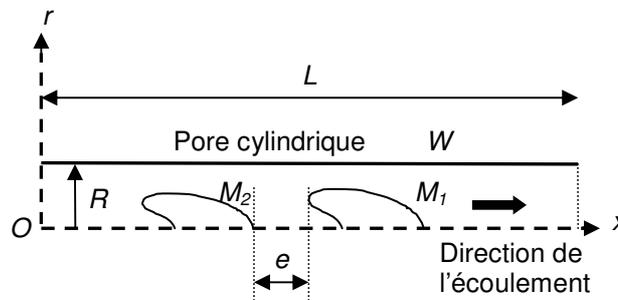


Figure II.3 - Ecoulement de deux capsules dans une conduite cylindrique. M_1 est la capsule en tête d'écoulement tandis que M_2 est la capsule suiveuse.

Une analyse dimensionnelle du problème révèle que les paramètres importants sont :

- le nombre capillaire, qui mesure le rapport entre les forces visqueuses et les forces élastiques : $\varepsilon = \mu Q / \pi R^2 G_s$,
- le rapport d'aspect entre la capsule et le tube a/R ,
- la précontrainte mesurée par le pré-gonflement α ,
- le rapport entre les modules de dilatation de surface et de cisaillement K_s/G_s ,

- le rapport entre les modules de flexion et de cisaillement $B = B_s/G_s R^2$.

II.4 Formulation numérique du problème

La formulation mathématique développée par Diaz & Barthès-Biesel (2002) est reprise et adaptée aux différentes situations étudiées. Seules les grandes lignes et les modifications apportées à la formulation sont exposées ici. La mise en équation du problème présenté au paragraphe précédent offre la possibilité d'effectuer un suivi d'interface simple et efficace. La démarche adoptée est Lagrangienne. Elle consiste à se donner la forme de l'interface à l'état de référence et à suivre son évolution à l'aide de l'équation intégrale (II.20) et de la condition cinématique (II.5). On utilise une méthode d'éléments de frontière pour la discrétisation des équations intégrales. Les différentes étapes de la démarche sont la représentation de la géométrie par éléments de frontière, le choix et la construction des fonctions de forme et d'interpolation, et le calcul numérique des intégrales régulières et singulières du problème.

Les premiers modèles numériques de la littérature prédisant les déformations axisymétriques d'une capsule suspendue dans un fluide en écoulement utilisent en majorité une méthode aux différences finies pour la discrétisation des équations intégrales (Li *et al.* 1988, Leyrat-Maurin & Barthès-Biesel 1994, Quéguiner & Barthès-Biesel 1997). Une des difficultés rencontrées est alors le calcul précis de la géométrie de l'interface et notamment de sa courbure locale. Une bonne précision est obtenue au prix d'une discrétisation très fine si bien que, dans les configurations demandant un nombre élevé d'itérations, on préfère réduire la précision de la discrétisation et utiliser des procédures de lissage et de correction de volume pour contrôler les erreurs numériques (Leyrat-Maurin & Barthès-Biesel 1994, Quéguiner & Barthès-Biesel 1997). Un modèle numérique utilisant une méthode d'éléments de frontière a également été proposé pour la simulation des déformations d'un globule rouge suspendu dans un écoulement élongationnel (Pozrikidis 1990b). Les méthodes d'éléments de frontière, qui reposent sur une formulation aux intégrales de frontière, sont applicables lorsqu'un opérateur linéaire peut être associé aux équations locales vérifiées par les grandeurs.

La représentation de la géométrie par éléments de frontière est la suivante. Le point de départ de la discrétisation de l'équation intégrale (II.20) est la partition des domaines M , W et S en respectivement

N_M , N_W , N_S éléments de frontières E_e disjoints : $M = \bigcup_{e=1}^{N_M} E_e$, $W = \bigcup_{e=1}^{N_W} E_e$ et $S = \bigcup_{e=1}^{N_S} E_e$. Chaque

élément E_e est une portion de courbe. La forme discrétisée de l'équation (II.20) est :

$$\beta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{e=1}^{N_M} \int_M \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{f}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) + (\lambda - 1) \sum_{e=1}^{N_M} \int_M \mathbf{v}(\mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{e=1}^{N_S} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}_b(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) - \sum_{e=1}^{N_S} \int_S \mathbf{v}^\infty(\mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \\
 & + \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{e=1}^{N_W} \int_W \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}_b(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

Selon que l'on étudie la situation de la figure II.1, II.2 ou II.3, seuls le nombre de domaines et la finesse de la discrétisation changent éventuellement. Le calcul exact des intégrales élémentaires de la relation (II.22) repose sur une description analytique de chaque élément de frontière : $\zeta \in E_e^{\text{ref}}, \mathbf{y}(\zeta) \in E_e$. Chaque élément E_e de l'espace physique est rapporté à un élément de référence E_e^{ref} qui est dans le cas axisymétrique un élément de courbe. Une représentation exacte des frontières étant en général très complexe, on construit donc des frontières approchées pour lesquelles les éléments sont décrits à l'aide de nœuds géométriques \mathbf{y}_i supposés connus et de fonctions de formes F_i . Chaque élément de frontière est décrit par un paramétrage de la forme :

$$\zeta \in E_e^{\text{ref}}, \mathbf{y}(\zeta) = \begin{pmatrix} y_x(\zeta) \\ y_r(\zeta) \end{pmatrix} = \sum_i \Psi_{xi} F_i(\zeta) \tag{II.23}$$

Le type de fonctions de forme utilisé dépend du nombre de nœuds choisis pour décrire un élément. Les fonctions de formes sont classiquement choisies de manière à ce que les coefficients d'interpolation Ψ_{xi} (respectivement Ψ_{ri}) soient égaux aux abscisses des nœuds y_{xi} (respectivement aux ordonnées y_{ri}). Dans notre cas, on considère des éléments à deux nœuds et des B-splines cubiques comme fonctions de forme. Les splines cubiques sont des polynômes de degré trois par morceau garantissant une continuité aux nœuds de l'interpolé de \mathbf{y} ainsi que de ses dérivées premières et secondes. La position du point courant \mathbf{y} est donnée par :

$$\zeta \in E_e^{\text{ref}}, \mathbf{y}(\zeta) = \begin{pmatrix} y_x(\zeta) \\ y_r(\zeta) \end{pmatrix} = \sum_j \Psi_{xj} \text{BS}_j(\zeta) \tag{II.24}$$

où Ψ_{xj} et Ψ_{rj} sont les coefficients d'interpolation spline ($j = 0, \dots, N_M+2$). La valeur maximale que la fonction BS_j peut atteindre est 1. De manière générale, les fonctions B-splines de degré k et de numéro j sont construites de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 B_{j,k}(\zeta) &= \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_{j+k-1} - \zeta_j} B_{j,k-1}(\zeta) + \frac{\zeta_{j+k} - \zeta}{\zeta_{j+k} - \zeta_{j+1}} B_{j+1,k-1}(\zeta) \\
 \text{et } B_{j,1}(\zeta) &= 1, \zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j+1}, \quad B_{j,1}(\zeta) = 0 \text{ sinon.}
 \end{aligned} \tag{II.25}$$

Ici on a $B_{j,3} \equiv BS_j$. Le paramètre ζ est tel que $\mathbf{y}^e = \mathbf{y}(\zeta^e)$ et $\mathbf{y}^{e+1} = \mathbf{y}(\zeta^{e+1})$. Le calcul des coefficients spline Ψ_{x_j} (respectivement Ψ_{r_j}) à partir des abscisses des nœuds y_{xi} (respectivement des ordonnées y_{ri}) nécessite la résolution d'un système de N_M+3 équations à N_M+3 inconnues. Les N_M+1 -èmes équations sont données par :

$$y_x(\zeta^e) = \sum_{j=0}^{N_M+2} \Psi_{x_j} BS_j(\zeta^e), e = 1, \dots, N_M + 1 \quad (II.26)$$

Les deux équations supplémentaires sont obtenues en écrivant les conditions de symétrie aux extrémités de la frontière M . L'hypothèse d'une surface fermée, régulière et axisymétrique, conduit à :

$$\frac{\partial y_x}{\partial \zeta} = 0 \text{ pour } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = \zeta_{\max} \quad (II.27)$$

Pour y_r , on écrit une relation similaire à (II.26) et les conditions de symétrie sont :

$$\frac{\partial^2 y_r}{\partial \zeta^2} = 0 \text{ pour } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = \zeta_{\max} \quad (II.28)$$

Le vecteur tangent unitaire et les propriétés métriques du second ordre liées à la surface M sont calculés en dérivant la relation (II.24). L'interpolation par B-splines cubiques permet un calcul précis du vecteur tangent et des courbures principales, ce qui est important dans les problèmes de mécanique membranaire.

Malgré la simplicité de la géométrie de la constriction W , on utilise la même technique d'interpolation. A chaque extrémité de W , la valeur de $\partial y / \partial \zeta_b$ est évaluée numériquement en construisant un interpolant lagrangien cubique de y sur les quatre premiers (ou derniers) nœuds. On impose l'égalité entre $\partial y / \partial \zeta_b$ et la valeur interpolée. Comme la géométrie de W est connue, les coefficients d'interpolation spline le sont aussi. On utilise également les B-splines cubiques pour interpoler les inconnues \mathbf{v}^M , désignant la vitesse des points de la membrane, et \mathbf{f}_b :

$$\mathbf{v}^M(\zeta) = \begin{pmatrix} v_x^M(\zeta) \\ v_r^M(\zeta) \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{x_j} \\ \bar{\omega}_{r_j} \end{pmatrix} BS_j(\zeta) \quad (II.29)$$

et

$$\mathbf{f}_b(\zeta_b) = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_{bx}(\zeta_b) \\ \mathbf{f}_{br}(\zeta_b) \end{vmatrix} = \sum_j \phi_{xj} \phi_{rj} \mathbf{BS}_j(\zeta) \quad (\text{II.30})$$

Les conditions de symétrie pour la vitesse de la membrane sont :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_x^M}{\partial \zeta} = 0 \text{ pour } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = \zeta_{\max} \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_r^M}{\partial \zeta^2} = 0 \text{ pour } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = \zeta_{\max} \quad (\text{II.32})$$

A l'extrémité de W correspondant à l'entrée du pore ($\zeta_b = 0$), les composantes axiale et radiale de \mathbf{f}_b sont quasiment nulles et varient peu avec ζ_b . Les conditions appropriées sont donc :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{bx}}{\partial \zeta_b} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{f}_{br}}{\partial \zeta_b^2} = 0 \text{ pour } \zeta_b = 0 \quad (\text{II.33})$$

A l'autre extrémité, la surface W rencontre la surface S où l'écoulement de Poiseuille prévaut. Les conditions sur \mathbf{f}_b sont donc :

$$\mathbf{f}_{bx}(\zeta_b) = -4 \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{f}_{br}}{\partial \zeta_b^2} = 0 \text{ pour } \zeta_b = \zeta_{b\max} \quad (\text{II.34})$$

Les intégrales sur M , W et S sont décomposées en une somme d'intégrales élémentaires prises sur chaque élément de frontière. Les intégrales de l'équation (II.22) sont soit régulières ou singulières. Les intégrales régulières sont calculées par quadrature de Gauss régulière à 5 points. Pour les intégrales singulières, la singularité est logarithmique et l'intégration est réalisée par quadrature logarithmique à 12 points. Un jeu de $2(N_M + N_W + 3)$ inconnues est créé à partir des interpolations spline (II.29) et (II.30) et des conditions (II.31) à (II.34). On obtient une équation matricielle en écrivant l'intégrale (II.22) successivement sur M , W et S :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{23} \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{r0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{xN_M+2} \\ \omega_{rN_M+2} \\ \phi_{x0} \\ \phi_{r0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{xN_B+2} \\ \phi_{rN_B+2} \\ p^\infty(L) + \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} \quad (II.35)$$

L'intégrale sur S est écrite uniquement en $x = L$. La matrice \mathbf{L} est divisée en neuf blocs. Les lignes 1, 2 et 3 correspondent aux cas où le point de collocation considéré est sur M , W ou S respectivement. Les colonnes 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux contributions du potentiel de double couche pour la vitesse \mathbf{v}^M , le potentiel de simple couche pour la force \mathbf{f}_b , et le potentiel de simple couche pour la pression $p^\infty(L) + \Delta p$. Pour les situations présentées en figures II.1 et II.3, le potentiel de double couche n'intervient pas et le bloc \mathbf{L}_{11} est une matrice diagonale. De plus, dans le cas où deux capsules M_1 et M_2 sont prises en compte, on a $2(N_{M1}+N_{M2}+N_W+3)$ inconnues et la matrice \mathbf{L} est composée de seize blocs.

Le second membre \mathbf{H} contient les contributions du potentiel de simple couche pour la charge $\Delta \mathbf{f}$ et la force sur S ainsi que la contribution du potentiel de double couche pour la vitesse de Poiseuille de la relation (II.19). Dans le cas où deux capsules sont en écoulement, le second membre est \mathbf{H} est composé de quatre blocs et contient en plus le potentiel de simple couche pour la charge $\Delta \mathbf{f}$ de la deuxième capsule.

A chaque pas de temps, la position des points de la membrane est connue et les coefficients de la matrice \mathbf{L} , qui sont fonctions de la géométrie des frontières, sont calculés. Une méthode standard de décomposition LU est utilisée pour résoudre l'équation (II.35). La forme de la capsule est alors actualisée par intégration temporelle de la relation (II.5), en utilisant un schéma d'Euler explicite du premier ordre.

Sauf mention du contraire, la discrétisation des différents domaines est la suivante :

- la membrane M de la capsule (ou M_1 et M_2 dans le cas de deux capsules) est discrétisé en 60 ou 120 éléments espacés régulièrement. L'erreur numérique est évaluée en calculant la variation relative du volume de la capsule au cours de l'écoulement. Cela permet de vérifier la qualité de la procédure d'intégration. La variation relative de volume est inférieure à 1% pour tous les résultats présentés dans ce mémoire.
- la constriction W est discrétisée en 201 éléments lorsque l'angle d'ouverture vaut $\gamma = 26^\circ$ et en 255 éléments pour $\gamma = 78,5^\circ$. Sur la partie hyperbolique, la densité de points augmente à l'approche de l'entrée du pore. Dans le chapitre III, on a $\gamma = 78,5^\circ$.
- La surface fluide S est discrétisée en 34 éléments espacés régulièrement.

La frontière E est située en $R_E = 30R$ et la surface fluide S en $L = 15R$.

II.5 Quantités sans dimension

Le tableau suivant récapitule les grandeurs caractéristiques utilisées dans ce mémoire et servant de référence pour rendre sans dimension les grandeurs associées.

Grandeur considérée	Grandeur caractéristique
Longueur	R
Temps	$\pi R^3/Q$
Vitesse	$Q/\pi R^2$
Pression et contraintes fluides	$\mu Q/\pi R^3$
Tension membranaire	G_s

On note t' le temps et t le temps adimensionnel. Dans tout le rapport, on utilise $t = t'Q/\pi R^3$. De même, la vitesse du centre de gravité de la capsule V_g est une quantité sans dimension. La perte de charge est notée $\Delta p'$ et la quantité sans dimension équivalente vaut $\Delta p = \Delta p' \pi R^3 / \mu Q$. Cependant, dans l'article soumis au « Journal of Fluid Mechanics » présenté dans ce mémoire, Δp représente la perte de charge dimensionnelle.

III. Capsule en écoulement dans un pore cylindrique : influence du pré-gonflement

III.1 Introduction

Le phénomène de pré-gonflement peut affecter sensiblement le mouvement et la déformation de la capsule. Lac & Barthès-Biesel (2005) ont étudié la déformation d'une capsule sphérique plongée dans un écoulement de cisaillement simple et ont montré que le comportement de la capsule est influencé de façon significative par la présence de précontraintes dans la membrane. En particulier, la déformation de la capsule est diminuée et le niveau de tension dans la membrane est augmenté, ce qui peut conduire à la rupture anticipée de la capsule pour des cisaillements relativement faibles.

Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article soumis au « Journal of Fluid Mechanics ». Il a pour objectif de déterminer le rôle que joue la présence d'une précontrainte de la membrane, induit par un pré-gonflement du milieu interne de la capsule, sur l'écoulement de celle-ci dans un tube cylindrique. On se focalise dans un premier temps sur l'identification de l'état stationnaire (s'il existe) de la capsule dans le tube, en fonction du débit, de la taille de la capsule et du pré-gonflement.

Dans un deuxième temps, on cherche à caractériser la mécanique de la membrane de capsules d'alginate. Diverses expériences ont été réalisées sur le sujet par plusieurs auteurs. Des expériences de compression ont été mises en œuvre sur de telles capsules par Carin *et al.* (2003). Le principe est de les comprimer entre deux plaques parallèles. La connaissance de la force appliquée et du déplacement permet d'établir des courbes de compression. Cependant, Carin *et al.* (2003) n'ont pas pu déterminer une loi unique du comportement mécanique de ces capsules. Par la suite, Rachik *et al.* (2006) ont élaboré un modèle numérique tridimensionnel de type éléments finis et un modèle bidimensionnel se basant sur l'approximation en coque mince. Ils trouvent que la loi de Yeoh (1993) (Y), proposée initialement pour des matériaux de type caoutchouc, est également un bon modèle pour caractériser les capsules à membrane d'alginate en compression. Dans ce chapitre, on détermine les propriétés mécaniques de ces capsules, à savoir leur pré-gonflement, le rapport entre les modules d'élasticité et la loi de membrane, en effectuant une analyse inverse basée sur la comparaison entre les profils numériques et expérimentaux.

La première partie de l'article, qui décrit le sujet, a été reprise dans le chapitre II. On laisse donc au lecteur le choix de la lire ou non.

III.2 Article

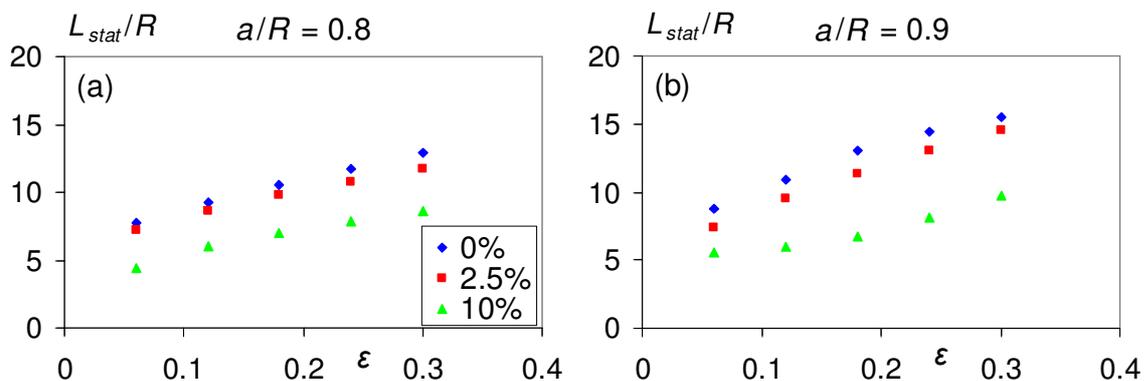
III.3 Résultats complémentaires

III.3.1 Longueur d'établissement d'un régime stationnaire

On présente dans ce paragraphe quelques résultats complémentaires pour la loi Sk avec $C = 1$. On s'intéresse en particulier à la longueur L_{stat} , longueur au bout de laquelle la capsule atteint un état stationnaire dans le tube. L_{stat} est comptée à partir de l'entrée du pore et est déterminée lorsque les deux critères $|\partial\Delta p/\partial t| < 10^{-2}G_s Q/\pi R^4$ et $|\partial T_{1max}/\partial t| < 10^{-2}G_s Q/\pi R^3$ sont réalisés.

Les figures III.1.a, III.1.b et III.1.c présentent l'évolution de L_{stat} en fonction de ε , pour trois valeurs du pré-gonflement α et du rapport d'aspect a/R . L_{stat} augmente avec ε , quelles que soient les valeurs de α et de a/R . La capsule atteint un état stationnaire plus loin dans le tube à mesure que le débit d'écoulement augmente. Par ailleurs, pour chaque rapport d'aspect, les déformations membranaires baissent avec le pré-gonflement et la longueur L_{stat} diminue avec α . Pour toutes les situations étudiées sur la figure III.1, L_{stat} ne dépasse pas vingt-cinq fois le rayon du pore (figure III.1.c, $\alpha = 0\%$). A nombre capillaire et pré-gonflement fixés, L_{stat} augmente avec a/R .

Collé-Paillet (2002) a réalisé des expériences d'écoulement de capsules à membrane d'alginate dans un tube de rayon 2,03mm et de longueur 220mm. Elle a considéré différentes valeurs du nombre capillaire (ε compris entre 0.009 et 0.375) et du rapport d'aspect (a/R compris entre 0.77 et 0.95). Dans toutes les valeurs de a/R étudiées, le nombre capillaire n'excédait pas 0.24, sauf pour le jeu de paramètres $a/R = 0.83$ et $\varepsilon = 0.375$. Pour ce jeu de paramètres, on a vérifié que $L_{stat}/R < 20$. Dans les autres cas, on s'appuie sur l'analyse de la figure III.1. La valeur de L_{stat} déterminée pour $a/R = 1$, $\varepsilon = 0.24$ et $\alpha = 0\%$ majore donc les valeurs expérimentales de L_{stat} correspondant aux situations de Collé-Paillet (2002), dont les capsules sont de surcroît soumises à un pré-gonflement de 3%. Cela indique qu'il faut au pire 40mm de longueur de tube pour pouvoir visualiser les profils stationnaires des capsules à membrane d'alginate. Collé-Paillet (2002), qui utilise une longueur de 220mm, observe donc bien des profils stationnaires.



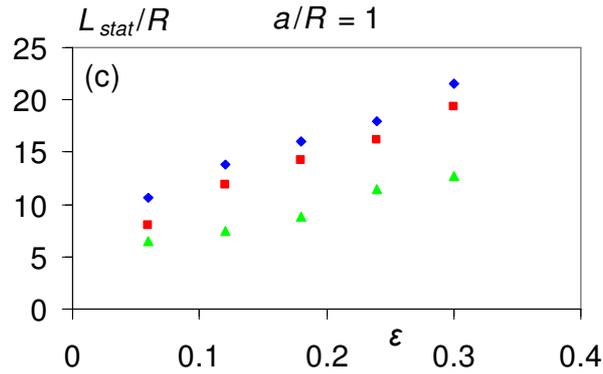


Figure III.1 - Longueur L_{stat} au bout de laquelle l'état stationnaire apparaît dans le tube, pour trois valeurs du pré-gonflement et du rapport d'aspect. (a) : $a/R = 0.8$. (b) : $a/R = 0.9$. (c) : $a/R = 1$.

III.3.2 Existence d'un état stationnaire

On détermine s'il existe un nombre capillaire critique ϵ_0 , au-delà duquel les capsules n'atteignent pas un état stationnaire. Cette démarche est analogue à celle suivie par Lac *et al.* (2004) pour des capsules dans un écoulement de cisaillement simple. On étudie un cas d'écoulement « standard » où $a/R = 0.8$. On considère $\epsilon = 0.15$ et $\alpha = 0\%$. On étudie les lois NH et Sk avec $C = 1$.

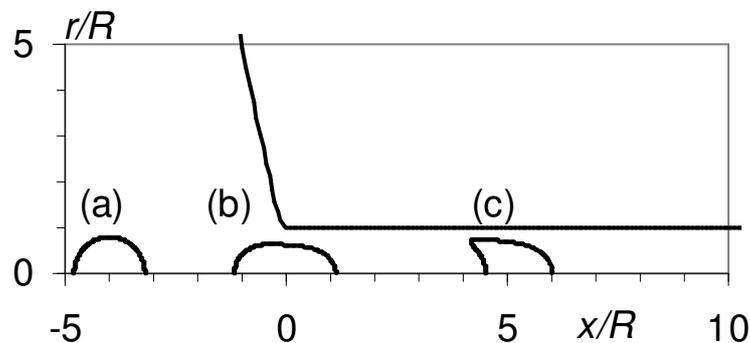


Figure III.2 - Ecoulement d'une capsule à membrane NH à différents instants. $a/R = 0.8$; $\epsilon = 0.15$; $\alpha = 0\%$. (a) : loin de la constriction. (b) : à l'entrée du pore. (c) : dans le pore.

La figure III.2 représente les profils de la capsule à membrane NH, à différents instants de l'écoulement, où elle se trouve à différentes positions dans le pore. A l'état de référence, la capsule est initialement sphérique (figure III.2.a) et elle n'est pas déformée. Les tensions, et en particulier la tension T_{2max} (figure III.3.a), sont nulles. A l'entrée du pore cylindrique (figure III.2.b), la capsule se déforme. Elle s'allonge dans la direction de l'écoulement et la tension T_{2max} augmente. Plus loin, la capsule prend une forme de parachute à l'intérieur du tube (figure III.2.c). Cette forme n'est pas stationnaire car la tension T_{2max} augmente continuellement en fonction du temps. On en conclut qu'une membrane de type NH n'arrive pas à équilibrer les forces hydrodynamiques de l'écoulement.

Une telle capsule éclate probablement pour $\varepsilon = 0.15$. Lorsque le nombre capillaire est plus petit ($\varepsilon = 0.12$), Diaz & Barthès-Biesel (2002) rapporte que l'état stationnaire existe pour une telle membrane. Ce résultat a été vérifié. En conséquence, la valeur particulière ε_0 du nombre capillaire pour une telle membrane se situe entre 0.12 et 0.15. On ne cherche pas à déterminer précisément la valeur de ε_0 car ce n'est pas le but principal de ce chapitre.

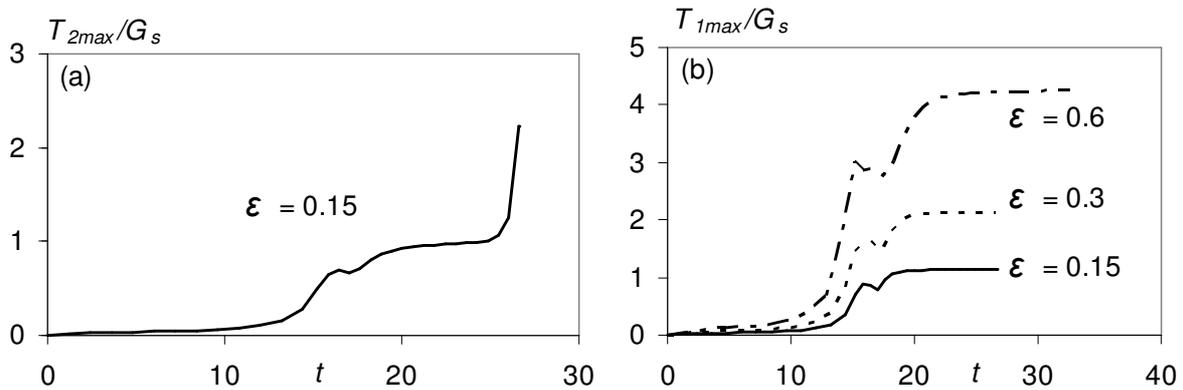


Figure III.3 - Evolution temporelle de contraintes membranaires pour $a/R = 0.8$, $\alpha = 0\%$, à différentes valeurs du nombre capillaire et pour deux types de membrane. (a) : membrane NH. (b) : membrane Sk avec $C = 1$.

Pour une capsule dont la membrane suit la loi Sk avec $C = 1$, la tension membranaire T_{1max} se stabilise au cours du temps, pour $\varepsilon = 0.15$, 0.3 et 0.6. Une telle capsule atteint donc un état stationnaire dans le tube pour $\varepsilon \leq 0.6$. Cela est également vrai pour $\alpha = 2.5\%$ et 10% .

III.3.3 Analyse de profils expérimentaux pour $a/R = 0.88$

Sur la figure III.4, on compare des profils numériques, pré-gonflés ou non, et expérimentaux, à différentes valeurs du nombre capillaire, et pour un rapport de taille recalculé à $a/R = 0.88$. Aux faibles nombres capillaires, les profils non pré-gonflés ont une partie arrière concave alors que les profils numériques déterminés avec $\alpha = 3\%$ ont une partie arrière convexe, comme les profils expérimentaux. Aux grands nombres capillaires, on a une bonne corrélation entre les profils expérimentaux et numériques avec $\alpha = 3\%$, même s'il existe une différence sur la forme des profils. Cette différence peut être imputée à une incertitude sur la valeur du rapport des modules K_s/G_s , comme on l'a vu au paragraphe 5.3 de l'article. Cette différence peut être également imputée au calcul du rayon moyen (ici $a = 0.88R$) à partir des volumes des capsules. Il est par ailleurs possible que pour ce rapport de taille, les capsules ne soient pas initialement sphériques.

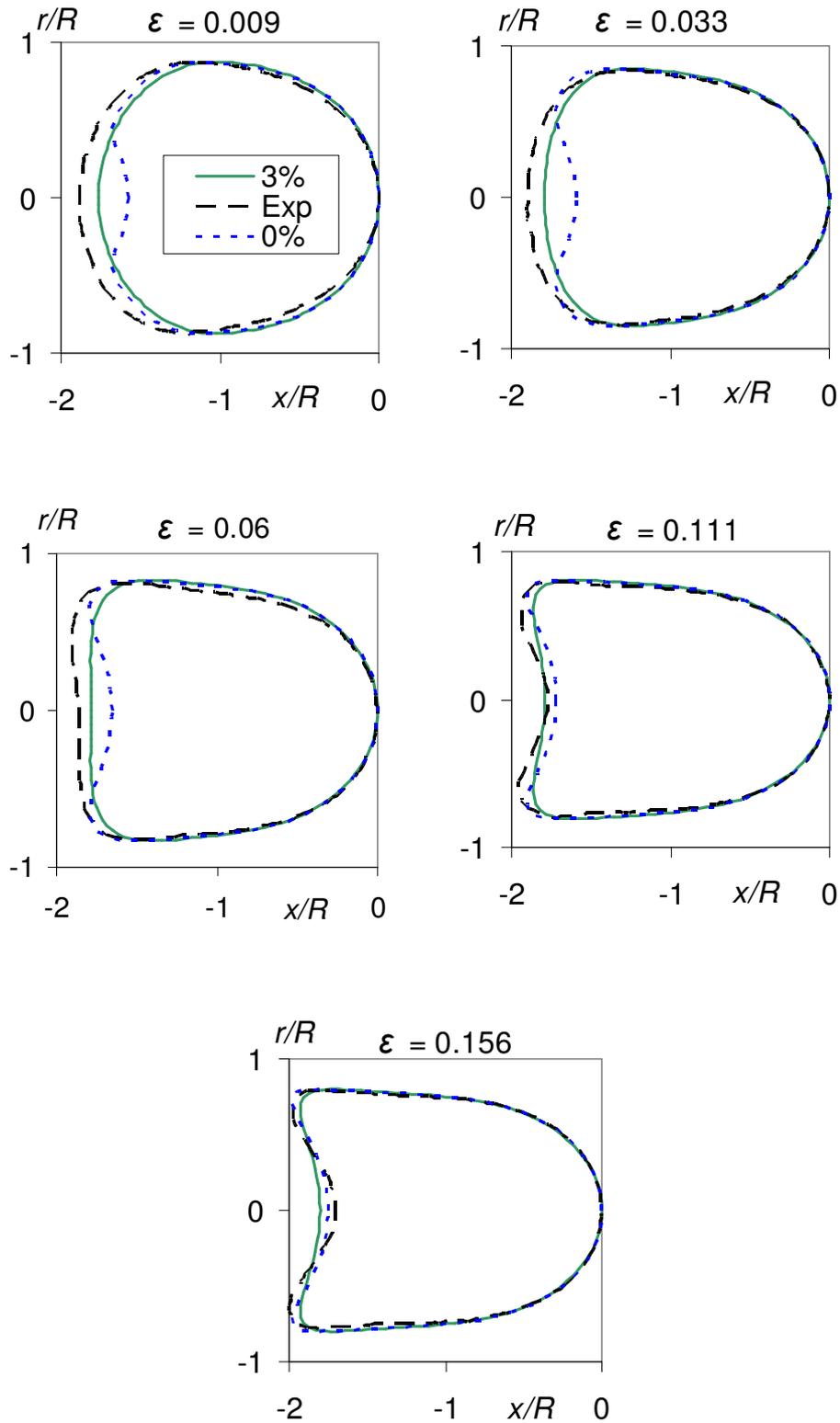


Figure III.4 - Comparaison entre profils expérimentaux et numériques, pour des capsules pré-gonflées (3%) ou non, pour un rapport de taille recalculé $a/R = 0.88$ et pour différentes valeurs du nombre capillaire.

III.3.4 Etude d'une autre loi de comportement : loi de Yeoh

La principale nouveauté de ce paragraphe est de considérer la loi de comportement de Yeoh (1993) (Y), initialement proposée pour des matériaux de type caoutchouc. Les motivations nous poussant à étudier cette loi reposent sur les conclusions établies par Rachik *et al.* (2006). Ces auteurs ont effectué une analyse inverse sur des capsules à membrane d'alginate soumises à une compression entre deux plaques (Carin *et al.* 2003), afin de déterminer la loi de comportement. Ils concluent que les capsules à membrane épaisse, pour lesquelles le rapport entre l'épaisseur initiale h_0 de la membrane et le rayon a de la capsule est supérieur à 5%, sont mal représentées par les lois Sk ou ES. Par contre, pour ces membranes épaisses, une loi de type Y est aussi valable qu'une loi MR « extrême » et meilleure qu'une loi NH.

Rachik *et al.* (2006) rapportent également que lorsque l'épaisseur de la membrane augmente, les propriétés mécaniques des capsules évoluent. Cela est dû à leur mode de fabrication, et en particulier à l'augmentation du temps de polymérisation avec l'épaisseur de la membrane. La densité de ponts covalents entre les molécules de séralbumine et d'alginate est plus grande pour des membranes épaisses que pour des membranes minces. Cela entraîne une augmentation de rigidité de la membrane. En conséquence, le module d'Young volumique de la membrane augmente. Les capsules à membrane épaisse sont donc plus rigides et moins déformables que celles à membrane mince.

La loi Y permet d'étudier cet effet de rigidité. Elle est donnée par l'expression de la densité d'énergie de déformation par unité de volume initial W_d :

$$W_d = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (\text{III.1})$$

où l'invariant de déformation tridimensionnel I_1 vaut $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ et où C_{10} et C_{20} sont des constantes élastiques. λ_1 , λ_2 et λ_3 désignent les rapports principaux d'extension dans les directions 1, 2 et 3 respectivement. La particularité de la loi Y est qu'elle ne dépend que du premier invariant de déformation. Le caractère non linéaire de la loi se traduit par le terme en facteur de C_{20} , dans la relation (III.1). Dans notre modèle bidimensionnel, seules deux directions principales (λ_1 , λ_2) sont nécessaires pour décrire la géométrie membranaire. La condition d'incompressibilité impose $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Ainsi, une déformation positive dans les directions 1 ou 2 entraîne une diminution de la déformation dans la direction 3, qui est celle de l'épaisseur. Rachik *et al.* (2006) ont déterminé les valeurs des constantes élastiques à partir des courbes de compression. Les coefficients élastiques C_{10} et C_{20} et le rapport $A_y = C_{20}/C_{10}$ augmentent non linéairement avec l'épaisseur membranaire h_0 . L'effet de rigidification de la membrane est alors pris en compte. Il augmente avec A_y . L'effet d'épaisseur de la membrane est également pris en compte. En effet, il est indirectement lié à la rigidité de la capsule, même si le modèle de membrane utilisé dans la présente étude est bidimensionnel.

La relation entre l'énergie de déformation W_d et les tensions principales agissant dans la membrane est :

$$T_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial W_d}{\partial \lambda_i} \quad (\text{III.2})$$

A partir des relations (III.1) et (III.2), on aboutit à la relation :

$$T_1^Y = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[1 + 2A_y \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right) \right] \quad (\text{III.3})$$

où le module de cisaillement surfacique vaut $G_s = 2C_{10}h_0$. Le module d'Young surfacique vaut $E_s = 3G_s = 6C_{10}h_0$. La tension dans la direction 2 est obtenue par permutation des indices 1 et 2. On retrouve la loi NH pour $A_y = 0$. On étudie la loi Y en vue de déterminer l'influence du paramètre A_y sur le caractère adoucissant ou durcissant de la loi.

Par la suite, on détermine pour les lois Y, ES et Sk l'existence d'un nombre capillaire critique ϵ_0 , au-delà duquel les capsules n'atteignent pas un état stationnaire. On procède ensuite à une analyse inverse, en comparant les profils numériques et expérimentaux fournis par Risso *et al.* (2006). On détermine si le comportement mécanique des capsules à membrane d'alginate obéit à la loi Y, notamment en grandes déformations, c'est-à-dire pour de grandes valeurs du nombre capillaire.

III.3.4.a Réponses de la loi de Yeoh sous des modes de déformation standards

En petites déformations, les lois NH, Y, ES avec $A = 3$ et Sk avec $C = 1$ sont équivalentes. Barthès-Biesel *et al.* (2002) ont étudié les lois MR (et en particulier la loi NH) et Sk en grandes déformations, lorsque la membrane était successivement soumise à une extension uniaxiale puis à une tension isotrope. On se propose de compléter leurs résultats en incluant les lois Y et ES. On considère les cas où $A_y = 0.25, 0.33$ et 1 . Ces valeurs couvrent la gamme des valeurs déterminées par Rachik *et al.* (2006). Le cas $A_y = 0.25$ correspond à une membrane « mince », pour laquelle le rapport h_0/a entre l'épaisseur de la membrane et le rayon de la capsule à l'instant initial n'excède pas 5%. Les cas $A_y = 0.33$ et $A_y = 1$ correspondent à des membranes plus rigides et plus « épaisses » à la fois.

- Tension isotrope

On considère un échantillon de membrane qui est étiré de façon isotrope ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$) dans les directions principales 1 et 2. Les tensions principales sont égales : $T_1 = T_2 = T$. La tension T vaut :

$$\frac{T}{G_s} = \left(1 - \frac{1}{\lambda_0^6}\right) \left(1 + 2A_y \left(2\lambda_0^2 + \frac{1}{\lambda_0^4} - 3\right)\right) \quad (\text{III.4})$$

La figure III.5 représente l'évolution de la tension T en fonction de la variation relative de surface $\Delta A / A_0 = \lambda_0^2 - 1$. Toutes les lois sont équivalentes en petites déformations, c'est-à-dire pour une variation relative de surface inférieure à 10% ($\Delta A / A_0 < 0.1$). La tension T est alors une fonction linéaire de la variation relative de surface et toutes les lois prédisent la même valeur de T , à $\Delta A / A_0$ fixée. La pente de la droite correspond à celle de la courbe de la loi ES.

Sur tout l'intervalle de $\Delta A / A_0$, les pentes des courbes pour les lois Sk et NH sont respectivement croissante et décroissante, ce qui traduit leur caractère durcissant et adoucissant respectivement. La loi Y est quant à elle adoucissante pour $A_y = 0.25$ et $A_y = 0.33$. Par contre, pour $A_y = 1$, les niveaux de tension sont proches de ceux de la loi ES, quoique au pire inférieurs à 16% près sur l'intervalle $0.3 < \Delta A / A_0 < 0.7$. La loi Y suit approximativement la même tendance que la loi ES, mais n'a pas un comportement linéaire pour le mode de déformation étudié.

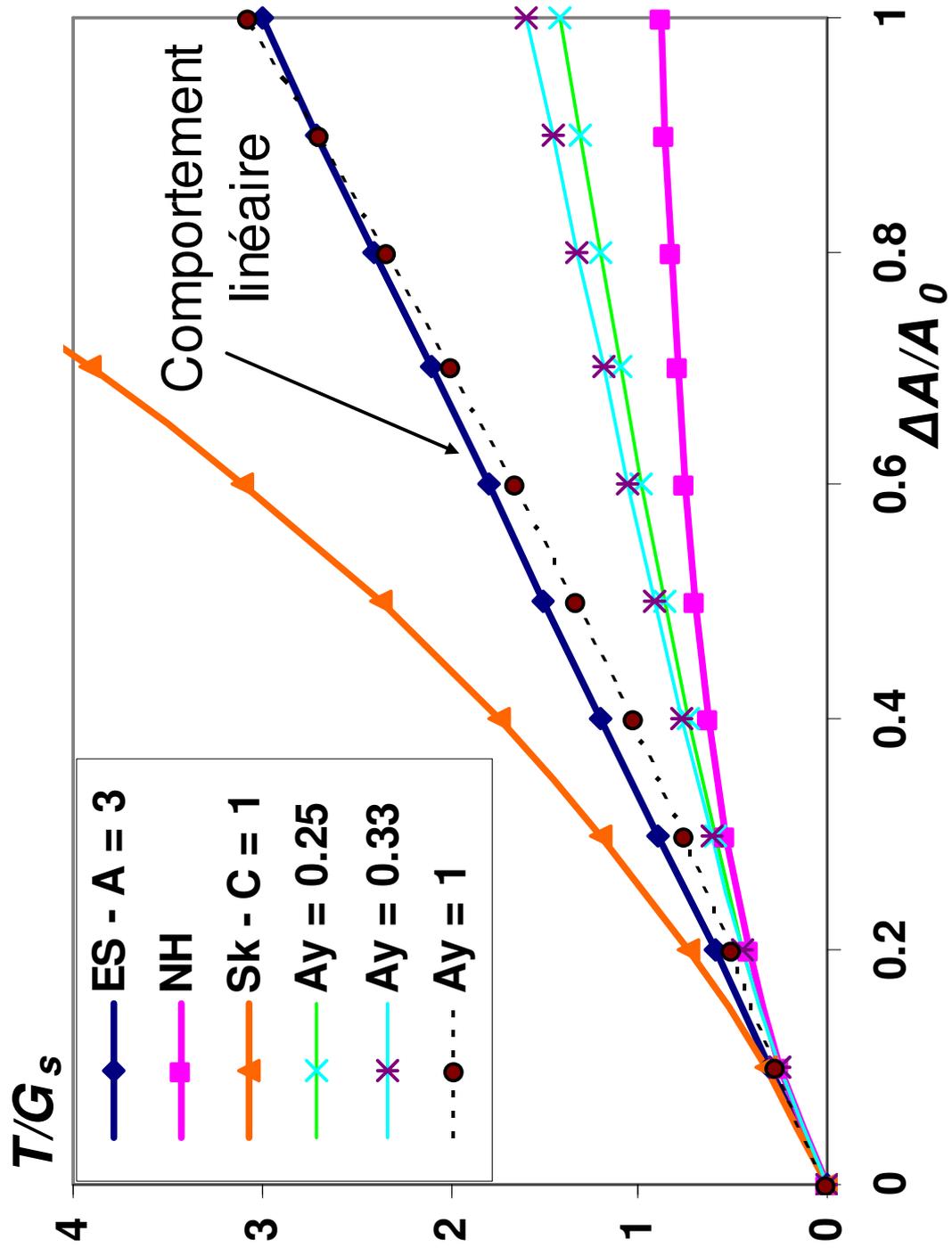


Figure III.5 - Tension membranaire en fonction de la variation relative de surface de l'échantillon, pour différentes lois de comportement équivalentes en petites déformations. La loi NH correspond à $A_y = 0$.

- Extension uniaxiale

On considère un échantillon de membrane qui est étiré uniquement dans la direction 1 : $T_1 \neq 0$ et $T_2 = 0$. Cette dernière condition permet d'exprimer λ_2 en fonction de λ_1 :

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad (\text{III.5})$$

et la tension T_1 vaut alors :

$$\frac{T_1}{G_s} = \frac{1}{\lambda_1^{3/2}} (\lambda_1^3 - 1) \left(1 + 2A_y \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right) \right) \quad (\text{III.6})$$

La figure III.6 représente l'évolution de la tension T_1 en fonction de la composante principale de déformation $e_1 = 0.5 \times (\lambda_1^2 - 1)$. Dans ce mode de déformation, les lois NH et ES sont adoucissantes tandis que la loi Sk est durcissante. Le comportement de la loi de Yeoh dépend de la valeur attribuée au paramètre A_y . Pour $A_y = 0.25$ et $A_y = 0.33$, les niveaux de tension T_1 sont proches de ceux du comportement linéaire. Cependant, pour $A_y = 0.33$, T_1 dépasse les niveaux de tension correspondant au comportement linéaire pour $e_1 > 0.8$. Pour $A_y = 1$, la loi Y suit globalement le même comportement que la loi Sk. Elle est durcissante sur l'intervalle des valeurs de e_1 considérées.

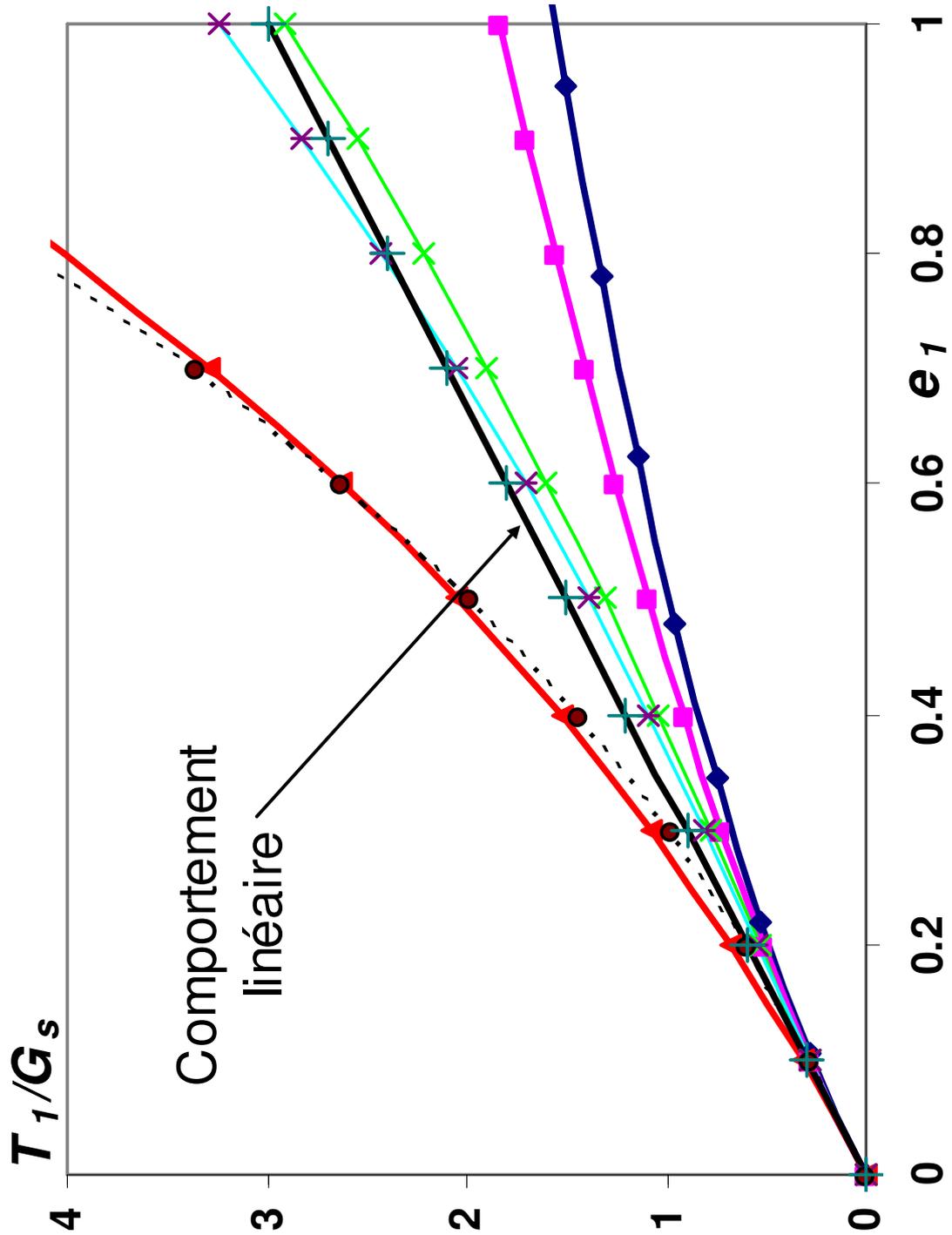


Figure III.6 - Tension principale en fonction de la composante principale de déformation, pour différentes lois de comportement équivalentes en petites déformations. La loi NH correspond à $A_y = 0$. Même légende que la figure III.5.

On note donc que le terme en facteur de A_y dans la relation (III.3) permet d'altérer sensiblement la mécanique membranaire. Lorsque ce terme n'est pas pris en compte (cas de la loi NH), la membrane a un comportement adoucissant pour les deux modes de déformation. Par contre, le comportement membranaire dépend de la valeur attribuée à A_y lorsque ce dernier est non nul. Pour $A_y = 0.25$, la loi Y est globalement adoucissante pour les deux modes de déformations. Pour $A_y = 0.33$, le caractère durcissant de la loi apparaît en grandes déformations lorsque la membrane est soumise à une extension uniaxiale. Dans le cas d'une extension isotrope et $A_y = 0.33$, la loi Y est adoucissante. Enfin pour $A_y = 1$, la loi Y est proche du comportement linéaire dans le cas d'une extension isotrope, et durcissante comme la loi Sk dans le second mode de déformation.

La loi de Yeoh présente globalement un comportement mécanique différent des lois NH, ES et Sk. On peut donc supposer que la réponse hydrodynamique de capsules en écoulement dans des tubes va être différente selon la loi de comportement utilisée. Cela nous conduit à utiliser la loi de Yeoh pour l'étude de tels écoulements. Désormais, on ne considère plus le cas $A_y = 1$ car il correspond à une membrane épaisse (Rachik *et al.* 2006) alors que les capsules de Risso *et al.* (2006) ont une membrane mince.

III.3.4.b Ecoulement dans un pore cylindrique

On étudie le cas où $\varepsilon = 0.15$ et $\alpha = 0\%$, pour les lois de comportement Sk, ES et Y. La capsule atteint un état stationnaire dans le tube (figure III.7). La capsule à membrane Sk est la moins déformée. Celle à membrane ES est la plus déformée, du fait du caractère particulièrement adoucissant de la loi ES. En ce qui concerne les capsules à membrane Y, les profils stationnaires sont quasiment confondus pour les deux valeurs de A_y considérées. De plus, les profils de type Yeoh présentent un comportement « hybride » entre les profils Sk et ES. La concavité des capsules de Yeoh est confondue avec celle des capsules Sk, mais pas avec celle des capsules ES. D'autre part, la pointe du parachute correspond à celle de la capsule ES, et non à celle de la capsule Sk.

En conclusion, le terme en facteur de A_y dans la relation (III.3) joue un rôle crucial quant à la détermination des états stationnaires. Pour $A_y = 0$ (loi NH), l'état stationnaire n'existe pas lorsque $\varepsilon = 0.15$. Lorsqu'il est pris en compte, il permet d'ajouter un caractère rigidifiant à la capsule, attribué à l'épaisseur de sa membrane, ce qui permet à la capsule d'atteindre un état stationnaire.

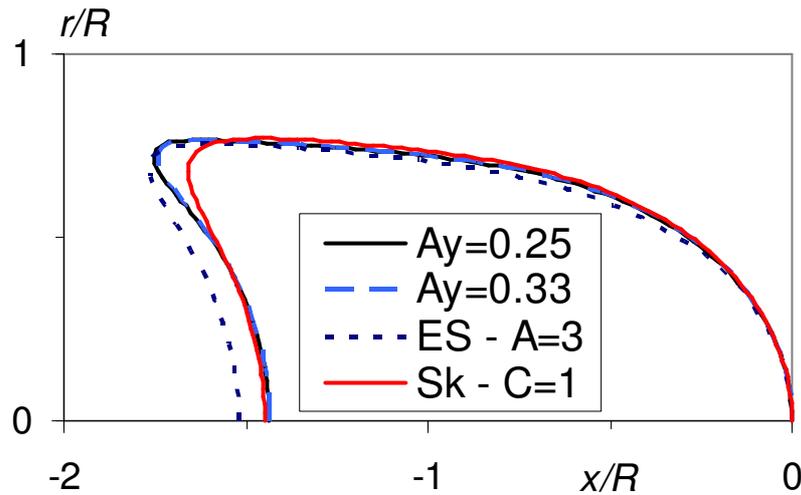


Figure III.7 - Demi profils stationnaires pour des capsules à diverses lois de membrane. $a/R = 0.8$; $\varepsilon = 0.15$; $\alpha = 0\%$.

Dans le cas où $\varepsilon = 0.3$ et $\alpha = 0\%$, les déformations sont importantes et les effets de lois sont d'autant mieux mis en évidence (figure III.8). On ne s'attarde pas sur les profils ES et Sk, qui ont fait l'objet de commentaires dans le chapitre III, pour des conditions d'écoulement sensiblement identiques. Les profils des capsules à membrane Y sont légèrement différents. Une petite augmentation du paramètre A_y (et donc de l'effet d'épaisseur) provoque une petite diminution de la concavité de l'arrière de la capsule.

Pour un nombre capillaire très grand ($\varepsilon = 0.6$), et pour une membrane Y, la tension maximale dans la direction méridionale T_{1max} augmente continuellement avec le temps (figure III.9). L'état stationnaire n'existe pas pour une telle membrane, pour les deux valeurs de A_y considérées. La rupture membranaire a lieu. Le rapport T_{1max}/G_s vaut 25 au temps $t = 35$ pour $A_y = 0.25$, et en $t = 50$ pour $A_y = 0.33$. L'augmentation de la valeur de A_y entraîne donc un retard de la rupture membranaire. Pour la loi de Yeoh, et pour $A_y = 0.25$ ou $A_y = 0.33$, on peut aussi estimer ε_0 entre 0.3 et 0.6.

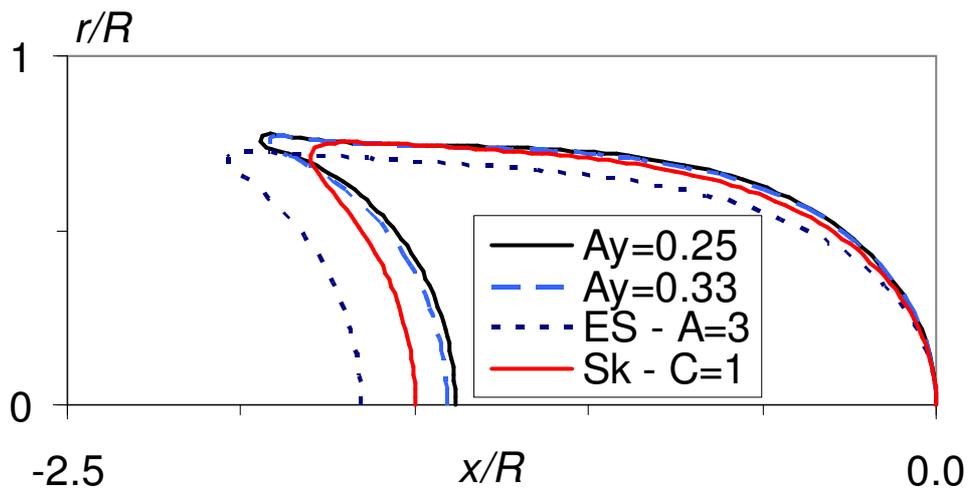


Figure III.8 - Demi profils stationnaires pour des capsules à diverses lois de membrane. $a/R = 0.8$; $\epsilon = 0.3$; $\alpha = 0\%$.

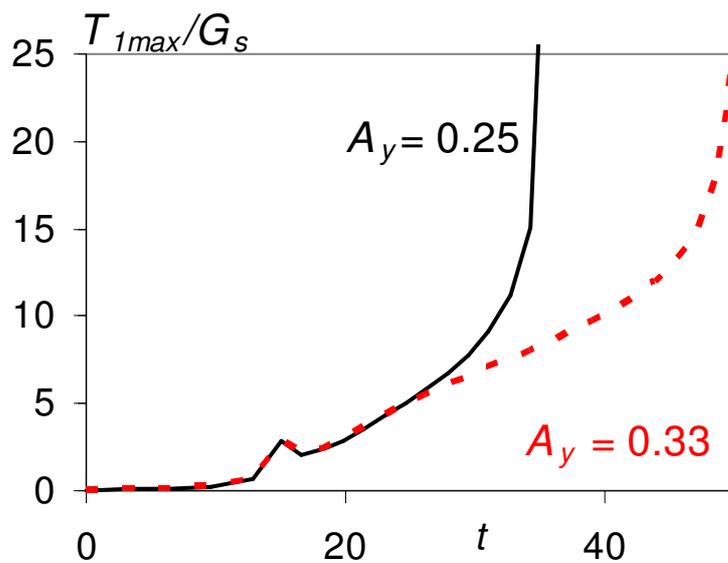


Figure III.9 - Evolution temporelle de la tension maximale dans une membrane de type Yeoh pour deux valeurs de A_y . $a/R = 0.8$; $\epsilon = 0.6$; $\alpha = 0\%$.

III.3.4.c Application de la loi de Yeoh aux résultats expérimentaux

A présent, on étudie la loi de Yeoh en vue d'interpréter l'écoulement de capsules à membrane d'alginate dans un petit tube cylindrique. L'effet de la loi de comportement est mis en évidence en grandes déformations. Il est donc évident d'effectuer une comparaison avec les données expérimentales (Collé-Paillet 2002, Risso *et al.* 2006) pour une grande valeur de ϵ . Ces auteurs ont travaillé avec des capsules de différentes tailles. Cependant, c'est pour un rapport de taille recalculé

$a/R = 0.83$ qu'ils ont obtenu les plus grandes déformations membranaires. Ils ont étudié l'écoulement pour un nombre capillaire valant 0.125, ce qui correspond dans notre cas à $\varepsilon = 0.375$.

On a calculé l'écoulement de capsules à membrane Y, pour $a/R = 0.83$ et $\varepsilon = 0.375$, et pour $A_y = 0.25$ et 0.33. Dans les deux cas, la tension maximale T_{1max} augmente continuellement au cours du temps. La capsule n'atteint pas d'état stationnaire, alors que celle de Collé-Paillet (2002) et Risso *et al.* (2006) en atteint un. Même lorsque la capsule est pré-gonflée à 3%, elle n'atteint pas d'état stationnaire. Cela met en évidence que la loi de Yeoh, modèle valable pour la compression de capsules à membrane d'alginate, n'est pas représentative de l'écoulement des mêmes capsules dans un tube.

III.4 Conclusion

La présence d'un pré-gonflement affecte le comportement mécanique de microcapsules en écoulement dans un pore cylindrique. Notamment les tensions membranaires augmentent et les déformations diminuent avec le pré-gonflement α . En dessous d'une valeur particulière du nombre capillaire ε_c , la partie arrière des profils stationnaires des capsules est convexe, et au-dessus de cette valeur, elle se creuse. ε_c dépend beaucoup de la valeur du gonflement initial, et peu du rapport de taille.

Une étude comparative est menée sur des capsules à membrane d'alginate à différentes valeurs du rapport d'aspect et du nombre capillaire. A partir des résultats présentés dans la section 5 de l'article, la valeur du pré-gonflement α de ces capsules est estimée à 3% et est supposée unique, puisque chacune d'entre elles a subi des conditions identiques de fabrication et de stockage. A ce stade, un soin particulier est apporté à l'identification de la (ou des) loi(s) de comportement permettant de bien modéliser le processus stationnaire des capsules. Comme les lois NH, MR, Sk avec $C = 1$ et ES avec $A = 3$ sont équivalentes dans la zone des petites déformations, la sélection ne peut s'effectuer qu'en grandes déformations, c'est-à-dire aux grandes valeurs de ε . Il en résulte que la loi Sk est celle qui apporte les meilleurs résultats. Ce résultat est très important car lorsque les mêmes capsules subissent une expérience de compression entre deux plaques (Carin *et al.* 2003), les lois Sk et ES caractérisent aussi bien l'une que l'autre le comportement mécanique des capsules. Le fait de soumettre les capsules à deux types de déformation différents permet de déterminer sans ambiguïté la loi à laquelle les membranes obéissent.

Cependant, l'étude comparative menée ne permet pas de lever l'ambiguïté sur la valeur du rapport K_s/G_s . Alors que Carin *et al.* (2003) évaluent ce rapport à 1, on trouve que cette valeur se situe probablement entre 2 et 3 (C compris entre 0.5 et 1). En conclusion, la loi Sk avec $K_s/G_s = 3$ et $\alpha = 3\%$ est bien représentative de la réponse hydrodynamique des capsules à membrane d'alginate, à l'état stationnaire. Dès lors, on peut se demander s'il en est de même à l'état transitoire, notamment lorsque les capsules s'écoulent dans un divergent. Cette question est traitée dans le chapitre IV.

Afin de reproduire correctement la partie arrière des capsules expérimentales, une possibilité est de changer la valeur du module adimensionnel de résistance à la flexion B . Cette possibilité est abandonnée car d'une part, une diminution de la valeur de B ne changerait que très peu la forme des profils stationnaires et d'autre part, une augmentation de B ne permettrait pas de reproduire correctement la courbure de l'arrière des capsules expérimentales (figure 16 de l'article).

On a également repris la loi de Yeoh, et considéré le jeu de paramètres suivant $\epsilon = 0.375$, $a/R = 0.83$ et $\alpha = 3\%$. Il s'avère pour $A_y = 0.25$ ou 0.33 , l'état stationnaire de la capsule n'existe pas. L'introduction d'un faible pré-gonflement ne permet pas de stabiliser la membrane. La loi de Yeoh n'est définitivement pas représentative de l'écoulement de capsules à membrane d'alginate dans un pore cylindrique.

IV. Ecoulement transitoire d'une capsule dans un convergent ou un divergent

IV.1 Introduction

Dans le chapitre III, on a étudié l'influence d'un pré-gonflement sur le profil stationnaire de capsules, à différentes valeurs du nombre capillaire et du rapport d'aspect, et pour diverses lois de comportement membranaire. Mais avant d'atteindre l'état stationnaire, la capsule s'écoule à l'entrée du conduit (écoulement dans un convergent). A ce stade, elle passe par un état transitoire où elle s'allonge axialement. Cette phase de l'écoulement a été étudiée par plusieurs auteurs (Quéguiner & Barthès-Biesel 1997, Diaz & Barthès-Biesel 2002). Par contre, le régime transitoire en sortie du pore a été très peu étudié. Une étude expérimentale a été menée par Collé-Paillet (2002) sur l'écoulement de microcapsules à membrane d'alginate dans un divergent. Collé-Paillet (2002) a utilisé les mêmes capsules que lors de l'étude des états stationnaires, pour deux rapports d'aspect différents et plusieurs valeurs du nombre capillaire. De là découle le premier objectif du chapitre IV. Il consiste à déterminer si le modèle numérique valable pour la phase stationnaire, à savoir la loi Sk avec $C = 1$ et $\alpha = 3\%$, permet également de modéliser le processus de sortie.

Le deuxième objectif du chapitre IV est de déterminer le rôle de certains paramètres physiques tels que le rapport d'aspect, le pré-gonflement et le rapport des viscosités. On calcule en particulier le temps de relaxation de la capsule. Les états stationnaires ont été déterminés dans le chapitre III pour un rapport de viscosités $\lambda = 1$, alors que la valeur expérimentale est $\lambda = 0.001$. Néanmoins, cela n'affecte en rien les résultats à l'état stationnaire car le fluide interne est alors immobile. Par contre, λ a une influence lors de la phase transitoire (Diaz & Barthès-Biesel 2002). La valeur $\lambda = 0$ est une valeur propre du système à résoudre (Pozrikidis 1992) si bien que toute valeur proche de celle-ci, y compris $\lambda = 0.001$, engendre d'importantes erreurs numériques. Pour pallier à ce problème, on étudie $\lambda = 0.1$, valeur correspondant à un rapport de viscosités cent fois plus important que dans le cas expérimental. Pour cette valeur de λ , l'erreur numérique est faible. On considère également les cas où $\lambda = 4$ et 10 , valeurs pour lesquelles la viscosité du fluide interne est respectivement quatre et dix fois plus grande que celle du fluide externe.

L'effet du pré-gonflement n'a pas été étudié au cours du processus transitoire jusqu'à présent. On sait depuis le chapitre III qu'une augmentation du pré-gonflement entraîne une diminution des déformations et de la perte de charge. On détermine s'il en est de même lors du processus transitoire. On s'intéresse notamment à l'épaisseur du film de lubrification entre la capsule et la paroi, dans lequel l'essentiel de la perte de charge a lieu. De plus, si l'épaisseur du film est petite, il y a un risque d'adhésion de la capsule à la paroi. Cela provoquerait une occlusion du pore, phénomène que le modèle numérique utilisé ne peut pas simuler car il est basé sur l'existence d'un film liquide entre la

paroi et la capsule. Quand cette dernière n'adhère pas à la paroi, on détermine le temps qu'elle met pour recouvrer sa forme initiale. Dans chacune des situations, on prête une attention particulière aux déformations et aux tensions membranaires.

IV.2 Procédure numérique

On reprend le modèle numérique élaboré dans le chapitre II. La longueur du tube, la discrétisation de la frontière S ainsi que celle de la particule sont les mêmes qu'auparavant. Cependant, l'angle d'ouverture du divergent vaut désormais $\gamma = 26^\circ$ (Collé-Paillet 2002) et la frontière W est discrétisée avec 67 points sur l'entrée hyperbolique à densité croissante à mesure qu'on se rapproche du col, et 135 points pour le tube.

La première étape consiste à sélectionner des profils stationnaires déjà déterminés dans le chapitre III, pour un jeu de paramètres physiques et géométriques donné (a/R , ϵ , α). Le changement de signe du champ de vitesse dans la relation (II.19) implique qu'il faut changer également l'orientation du profil stationnaire. Cette deuxième phase est effectuée dans une routine calculant le profil symétrique de celui d'origine, l'axe de symétrie étant vertical et passant par le nez de la capsule. Dans ce chapitre, le nez correspond à l'origine de l'abscisse curviligne. La troisième étape consiste à positionner le nouveau profil dans le tube. On note respectivement x_{max} et x_{min} les abscisses maximale et minimale de la capsule. Dans toutes les situations étudiées, le profil est placé loin de la sortie du tube ($x_{max} < -4R$, figure II.2) et de la surface S ($x_{min} > -11R$, figure II.2). Ce choix se base sur le résultat de Quéguiner & Barthès-Biesel (1997). Ils ont montré que l'écoulement de Poiseuille se retrouve à un rayon de pore R à 1% près en amont et en aval des extrémités de la capsule.

Le calcul commence dès que la capsule est placée dans le tube. Il est effectué dans le référentiel fixe lié au tube. Le pas de temps vaut $\Delta t = 3.2 \times 10^{-4}$.

IV.3 Validation du modèle

On vérifie que la capsule s'écoule vers le divergent. Loin de la sortie du pore, la capsule est encore à l'état stationnaire et on vérifie que ce dernier est le même que celui déterminé au cours du chapitre III, pour plusieurs jeux de paramètres donnés. Pour cela, on s'assure que les tensions et les déformations sont les mêmes, ce qui est le cas. La précision du modèle numérique est contrôlée en calculant le volume de la capsule. On a une erreur sur le volume inférieure à 1% même après 240 000 itérations.

IV.4 Résultats

On étudie les rapports d'aspect $a/R = 0.83$ et 0.95 (valeurs recalculées dans le chapitre III et pour lesquelles Collé-Paillet présente des résultats). Dans un premier temps, on considère $\alpha = 3\%$, valeur correspondant au pré-gonflement expérimental déterminé au chapitre III. Pour le cas où $a/R = 0.83$, on s'intéresse à l'influence de λ en considérant les cas où $\lambda = 0.1, 4$ et 10 .

Dans un deuxième temps, on compare les données numériques et expérimentales, pour les deux rapports d'aspect et différentes valeurs du nombre capillaire. On détermine l'importance du pré-gonflement sur les déformations des capsules à l'état transitoire, en considérant $\alpha = 0\%$ et 3% .

Avant d'étudier l'écoulement en sortie, on détermine l'état stationnaire des capsules pour un jeu de paramètres $a/R, \alpha, \varepsilon$, en suivant la méthodologie décrite dans le chapitre III. L'état stationnaire est indépendant du rapport de viscosité (Diaz & Barthès-Biesel 2002) mais afin de pouvoir éventuellement comparer les processus transitoires d'entrée et de sortie, ils sont déterminés pour $\lambda = 0.1$. Pour la sortie, la valeur de λ est changée si nécessaire.

IV.4.a Capsules de taille initiale $a/R = 0.83$ et à membrane Sk avec $C = 1$

La première étape de l'étude consiste à comparer les processus de déformation en entrée et en sortie de tube. Pour cela, on s'intéresse à l'évolution de la forme de la capsule successivement lors de l'état transitoire en entrée, de l'état stationnaire puis de l'état transitoire en sortie. La figure IV.1 représente une capsule en écoulement au cours de ces phases, pour $\varepsilon = 0.06, \alpha = 3\%$ et $\lambda = 0.1$. Les résultats sont concaténés tels que la longueur du tube soit $L = 10R$, mais les résultats numériques sont en réalité déterminés pour $L = 15R$. Pour $\varepsilon = 0.06$, l'état stationnaire est atteint bien avant dix rayons de tube, mais de manière à ce qu'il n'interfère pas avec le processus de sortie, on choisit $L = 10R$.

On constate que la capsule prend différentes formes au cours de l'écoulement. Afin de quantifier la déformation de la capsule, on évalue les longueurs caractéristiques L_x et L_y en fonction de la position du centre de gravité X_g dans la constriction (figures IV.2.a et IV.2.b). Plusieurs phases sont mises en évidence. Tout d'abord, la phase transitoire en entrée de pore est caractérisée par une élongation axiale (augmentation de L_x) et une compression transversale (diminution de L_y). Puis, peu avant l'entrée dans le tube ($x = 0$), la capsule est comprimée dans la direction de l'écoulement (L_x diminue). Simultanément, L_y augmente. La capsule atteint alors un état stationnaire dans le tube. Elle subit une translation de corps rigide jusqu'au commencement du processus transitoire en sortie. Celui-ci se traduit par une compression axiale (diminution de L_x) provoquée par l'augmentation de la pression. Il se caractérise aussi par une augmentation de la dimension transversale L_y . Ces résultats corroborent ceux présentés par Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) établis pour une capsule à membrane NH, sans pré-gonflement et avec $\lambda = 1$. Les déformations lors des phases transitoires en entrée et en

sortie de tube sont donc complètement différentes. Finalement, lorsque la capsule s'éloigne du tube, L_x et L_y tendent vers leur valeur à l'état de référence. La capsule retrouve progressivement sa forme sphérique initiale.

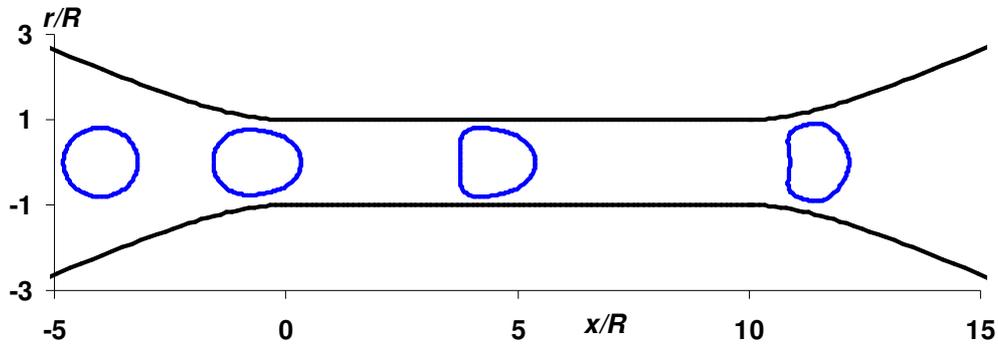


Figure IV.1 - Evolution du profil d'une capsule initialement sphérique ($a/R = 0.83$) au cours de son écoulement en entrée, dans, et à la sortie d'un pore cylindrique. $\varepsilon = 0.06$, $\alpha = 3\%$ et $\lambda = 0.1$.

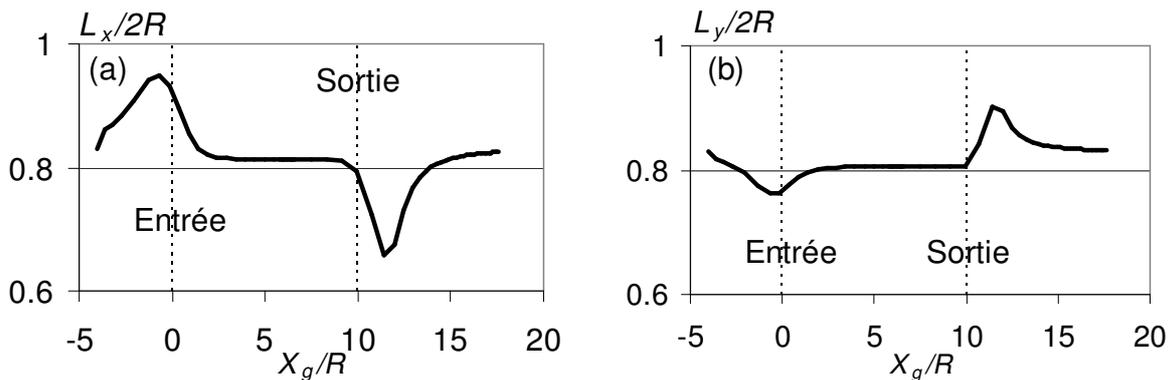


Figure IV.2 - Longueurs caractéristiques L_x et L_y en fonction de la position du centre de gravité de la capsule. $a/R = 0.83$, $\varepsilon = 0.06$, $\alpha = 3\%$ et $\lambda = 0.1$.

Lors de l'état transitoire, les tensions membranaires et les courbures évoluent. La connaissance de la tension maximale T_{max} est importante car elle sert à la prédiction de la rupture membranaire. Dans le chapitre III, on a montré que la tension est maximale dans la région avoisinant le nez de la capsule. En conséquence l'évaluation de la tension T_{1f} à l'avant de la capsule est un bon indicateur de la tension maximale même si elle lui est inférieure de 8% au pire des cas. La figure IV.3 représente les tensions et les courbures à l'avant et à l'arrière de la capsule pour $\varepsilon = 0.06$.

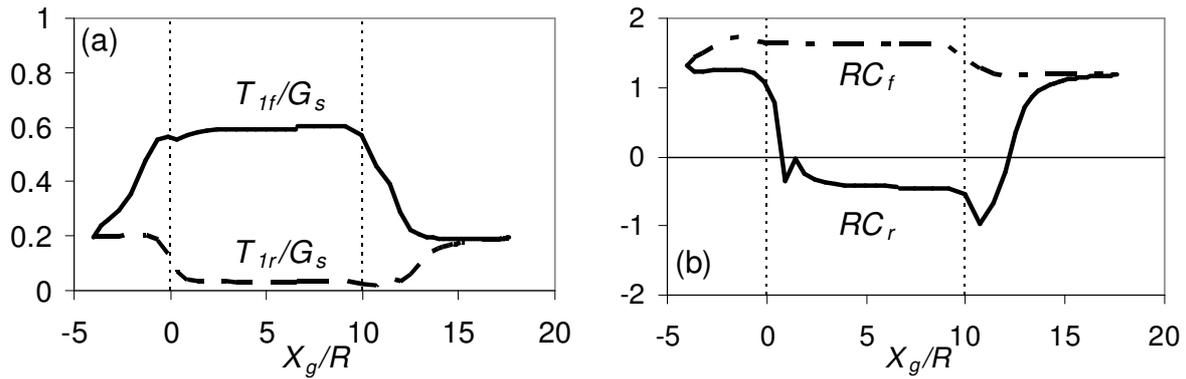


Figure IV.3 - Evolution de différentes quantités à l'avant et à l'arrière d'une capsule à membrane Sk. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\lambda = 0.1$, $\varepsilon = 0.06$. (a) : tensions. (b) : courbures.

Initialement (en $X_g/R = -4$), les tensions T_{1f} et T_{1r} sont égales à la précontrainte $T^{(0)}$ déterminée par les relations (II.10) et (II.18). Au cours du processus d'entrée (c'est-à-dire pour $X_g/R < 0$), l'écoulement modifie peu la tension T_{1r} et la courbure C_r à l'arrière de la capsule. A l'avant, la tension T_{1f} est presque triplée entre la position initiale et l'entrée du pore ($X_g/R = 0$) et la courbure C_f augmente. Lors de l'entrée dans le tube, la tension et la courbure à l'avant évoluent peu. A l'arrière, la tension diminue et la courbure C_r devient négative. L'arrière de la capsule est donc légèrement concave. Les tensions et les courbures restent ensuite constantes jusqu'au début de la deuxième phase transitoire, le processus de sortie. Lors de cette phase, T_{1f} diminue puis se stabilise à la valeur $T^{(0)}$ pour $X_g/R > 15$ (figure IV.3.a). Parallèlement, C_f diminue et tend vers sa valeur de référence (figure IV.3.b).

D'autre part, l'évolution de T_{1r} et C_r traduit un comportement mécanique compliqué de l'arrière de la capsule. Alors que cette dernière est comprimée axialement en sortie (figure IV.1), C_r diminue dans un premier temps (figure IV.3.b), l'arrière se creusant encore plus. Puis l'effet du pré-gonflement apparaît à mesure que la capsule s'approche de son état relâché, car T_{1r} tend vers $T^{(0)}$ et les courbures vers leur valeur à l'état de référence ($RC \approx 1.2$).

Pour une valeur élevée du nombre capillaire ($\varepsilon = 0.309$), la tension T_{1f} est environ multipliée par dix entre l'état initial et l'état stationnaire (figure IV.4.a). Lorsque la capsule sort du pore, T_{1f} diminue et tend vers sa valeur à l'état de référence. La tension T_{1r} augmente lors de la phase de sortie et passe par un maximum qui est environ 43% supérieur à la valeur stationnaire. Néanmoins, la valeur de ce maximum reste petite. Globalement, au cours de la traversée du tube, le niveau de contrainte dans la membrane est le plus important à l'avant de la capsule. La courbure avant C_f n'évolue pas beaucoup (figure IV.4.b). La courbure arrière C_r , quant à elle, augmente avant l'entrée de la capsule dans le pore. La forme de la capsule est bombée du fait de l'intensité de l'écoulement appliqué. Ce phénomène n'existe pas pour une force d'écoulement plus petite ($\varepsilon = 0.06$) car C_r reste alors constante (figure IV.3.b). Lorsque la capsule entre dans le tube, C_r diminue (figure IV.4.b) et la

capsule prend une forme de parachute. Au cours du processus de sortie, C_r augmente et atteint sa valeur à l'état de référence.

De manière générale, les tensions (figure IV.3.a et IV.4.a) n'augmentent pas beaucoup au cours du phénomène transitoire. Pour une capsule à membrane Sk avec $C = 1$, les risques de rupture membranaire au cours de cette phase sont petits, quelle que soit la valeur du nombre capillaire. Dans tous les cas, la capsule retrouve sa forme à l'état de référence lorsque le processus de relaxation est terminé.

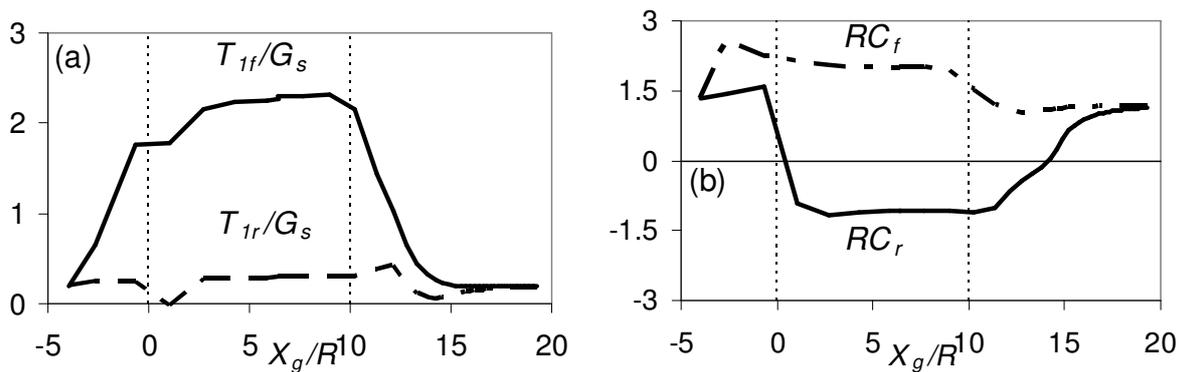


Figure IV.4 - Evolution de différentes quantités à l'avant et à l'arrière d'une capsule à membrane Sk. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\lambda = 0.1$, $\varepsilon = 0.309$. (a) : tensions. (b) : courbures.

L'écoulement transitoire conduit la capsule vers un état relâché. Selon les conditions de l'écoulement, notamment de débit, il est intéressant de savoir à quelle distance de la sortie du tube cet état est atteint. A mesure que la capsule s'en approche, les valeurs de L_x et L_y tendent vers a (figure IV.2). L'évolution de la courbure arrière est un indicateur important de la façon dont la capsule se relâche. En effet, on peut calculer à quelle distance δ_1 en aval de la sortie du pore a lieu le changement de signe de la courbure de l'arrière. Du point de vue de l'expérimentateur, l'intérêt de la détermination de δ_1 est double. D'une part, pour un jeu de conditions expérimentales données, cette valeur est unique. D'autre part, cela ne nécessite pas la connaissance de l'état relâché. La distance δ_2 où apparaît l'état relâché est difficile à déterminer avec précision car il est atteint de façon exponentielle dans le temps.

Le changement de signe de la courbure arrière C_r a lieu en $X_g/R = 12$, pour $\varepsilon = 0.06$ (figure IV.3.b). La distance δ_1 vaut donc deux fois le rayon du pore. Pour $\varepsilon = 0.309$ (figure IV.4.b), C_r change de signe au cours du processus de relaxation en $X_g/R = 14$. On en déduit que δ_1 vaut quatre fois le rayon du pore. La relaxation de la capsule s'effectue donc sur un trajet plus long à mesure que le nombre capillaire augmente. Par ailleurs, les figures IV.3.b et IV.4.b montrent que la distance δ_2 augmente avec ε . En effet, les courbures retrouvent leur valeur initiale en $X_g/R = 16$ pour $\varepsilon = 0.06$ ($\delta_2 = 6R$), alors que cela se produit en $X_g/R = 19$ pour $\varepsilon = 0.309$ ($\delta_2 = 9R$). Il est par ailleurs intéressant de constater que la courbure avant est très peu affectée par une augmentation du nombre capillaire. De plus, à ε fixé, les

variations de RC_f sont plus petites que celles de RC_r . Cela met en évidence que l'arrière d'une capsule est plus sensible à l'écoulement transitoire en sortie que l'avant.

On s'intéresse à présent à l'épaisseur e_L du film de lubrification entre la capsule et la paroi (figure IV.5). Pour $X_g/R < 0$, l'épaisseur du film vaut $e_L/R = 1 - L_y/2R$. Pour $X_g/R > 0$, on détermine le point P_0 à partir duquel on calcule L_y , puis on calcule la distance entre P_0 et tous les points de collocation de la paroi. e_L correspond à la plus petite valeur de cette distance (figure IV.5). Ce calcul est un bon indicateur de l'épaisseur du film car la densité des points de collocation sur la constriction hyperbolique augmente à mesure que l'on s'approche de la sortie du tube.

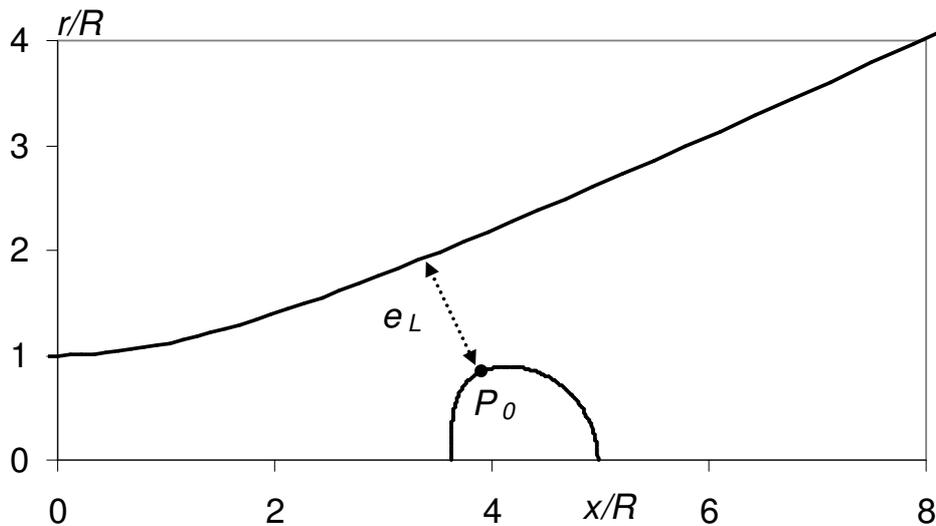


Figure IV.5 - Détermination de l'épaisseur e_L du film de lubrification entre la capsule et la paroi.

L'épaisseur e_L varie en fonction de la position de la capsule (figure IV.6). Pour $\varepsilon = 0.06$, e_L est constante quand la capsule est dans le tube ($X_g < 0$). Elle augmente de manière monotone lorsque la capsule sort du pore et suit la forme de la constriction. Pour $\varepsilon = 0.309$, l'épaisseur e_L dans le tube est plus grande que pour $\varepsilon = 0.06$ car à l'état stationnaire, L_y diminue avec ε (figure 4.b de l'article). En sortie, e_L augmente à mesure que la capsule s'éloigne du tube. Pour $X_g/R = 1.4$, e_L est égale pour les deux valeurs de considérées. Au-delà de cette valeur, e_L est plus petite pour $\varepsilon = 0.309$ que pour $\varepsilon = 0.06$ car L_y augmente avec ε au cours de la phase transitoire.

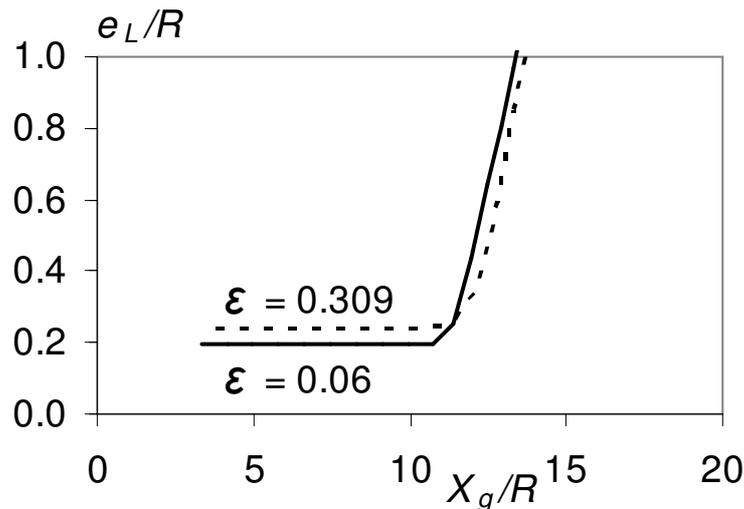


Figure IV.6 - Evolution de l'épaisseur du film de lubrification en fonction de la position du centre de gravité de la capsule, pour deux valeurs du nombre capillaire. $a/R = 0.83$; $\alpha = 3\%$; $\lambda = 0.1$.

En conclusion, les déformations de la capsule au cours des processus d'entrée et de sortie sont différentes. Les déformations membranaires augmentent avec le nombre capillaire lors de l'écoulement transitoire en sortie. Cela a pour conséquence de modifier les tensions membranaires mais aussi l'épaisseur du film de lubrification. Néanmoins, dans tous les cas considérés, l'épaisseur du film ne devient pas suffisamment petite pour que la capsule ait tendance à adhérer à la paroi. Ceci est dû au fait que la longueur L_y de la capsule est nettement plus petite dans le pore.

IV.4.b Influence du rapport des viscosités λ

L'origine $x = 0$ est désormais placée à la sortie du pore et on ne s'intéresse qu'au processus de relaxation. On se propose à présent d'étudier l'influence du rapport des viscosités λ sur l'écoulement transitoire en sortie. On sélectionne un profil stationnaire déterminé lors de l'écoulement en entrée, pour un jeu de paramètres donné. On étudie les valeurs du rapport des viscosités $\lambda = 0.1$; 4 et 10 (relation II.20). Diaz & Barthès-Biesel (2002) ont étudié l'effet d'une augmentation de la viscosité interne sur le processus d'entrée, pour une membrane de type Sk avec $C = 0$, pour $\epsilon = 0.04$ et pour des capsules initialement sphériques ($a/R = 0.9$) ou ellipsoïdales de rapport d'aspect équivalent à 0.9. Elles ont étudié, pour la phase d'entrée dans le tube, le rôle de λ sur la perte de charge additionnelle. Lorsque la capsule s'approche de l'entrée du tube, Δp augmente de la même façon quelle que soit la valeur de λ . Par contre, quand la capsule est dans le pore, la longueur pour obtenir un régime stationnaire augmente avec λ . Dans tous les cas, l'état stationnaire ne dépend pas de λ . Ici, plusieurs paramètres diffèrent de ceux de Diaz & Barthès-Biesel (2002). On a $a/R = 0.83$ au lieu de 0.9 et on considère une membrane Sk avec $C = 1$ au lieu de $C = 0$, avec un pré-gonflement de 3%. On s'intéresse ici principalement à l'influence de λ sur la phase de sortie.

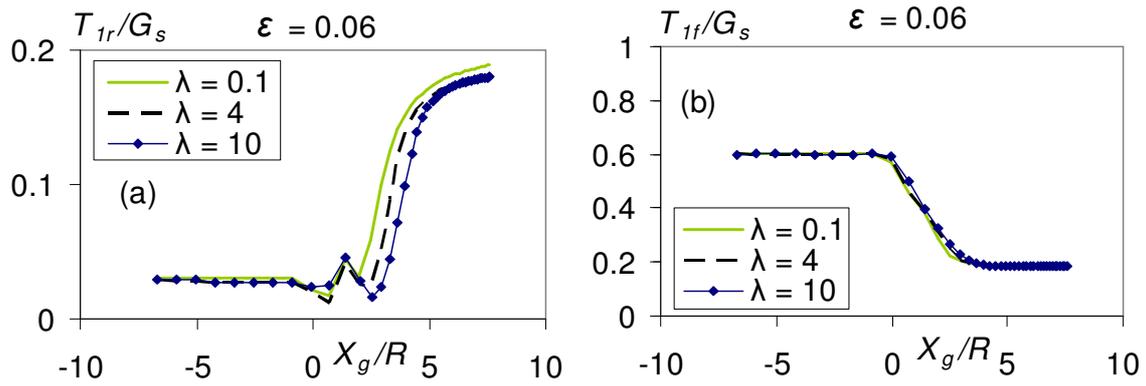


Figure IV.7 - Evolution des tensions à l'arrière (T_{tr}) et à l'avant (T_{tf}) de la capsule au cours du processus de sortie, pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\epsilon = 0.06$.

La figure IV.7 montre l'évolution des tensions T_{tr} et T_{tf} pour $\epsilon = 0.06$. A ce petit nombre capillaire, l'avant de la capsule est très peu sensible au changement de viscosité (figure IV.7.b), quelle que soit la position de la capsule. Cela corrobore le fait que la courbure à l'avant est peu modifiée par ce changement (figure IV.8.a). A l'arrière, l'augmentation de λ engendre une diminution de T_{tr} , ce qui traduit un décalage spatial de l'apparition de l'état relâché. Néanmoins, ce décalage n'est pas important à ce nombre capillaire, les courbures retrouvant leur valeur de référence en $X_g/R \approx 7$ pour toutes les valeurs de λ étudiées. On en conclut que, aux petits nombres capillaires, le rapport des viscosités n'a pas beaucoup d'influence sur le processus de sortie. Cela est sans doute dû au fait que l'écoulement est suffisamment lent pour qu'on ait une succession d'états d'équilibre entre la capsule et le fluide externe.

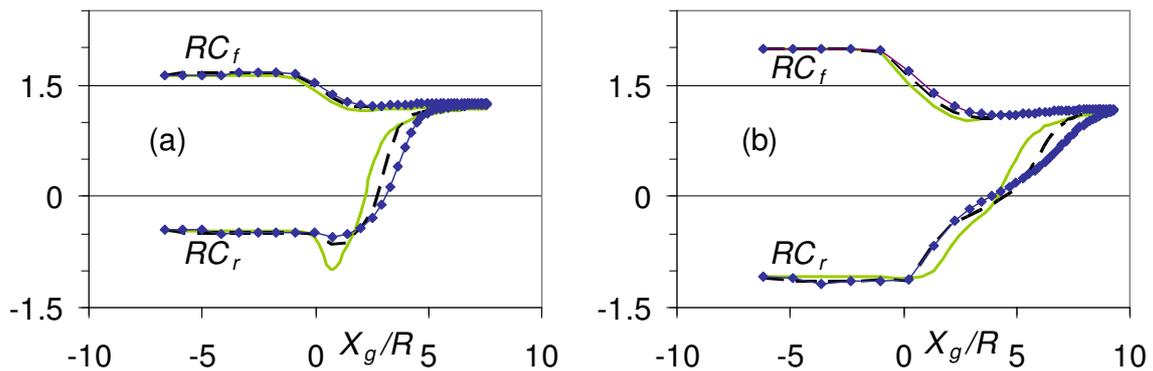


Figure IV.8 - Evolution des courbures à l'arrière (RC_r) et à l'avant (RC_f) de la capsule au cours du processus de sortie, pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$. (a) : $\epsilon = 0.06$. (b) : $\epsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

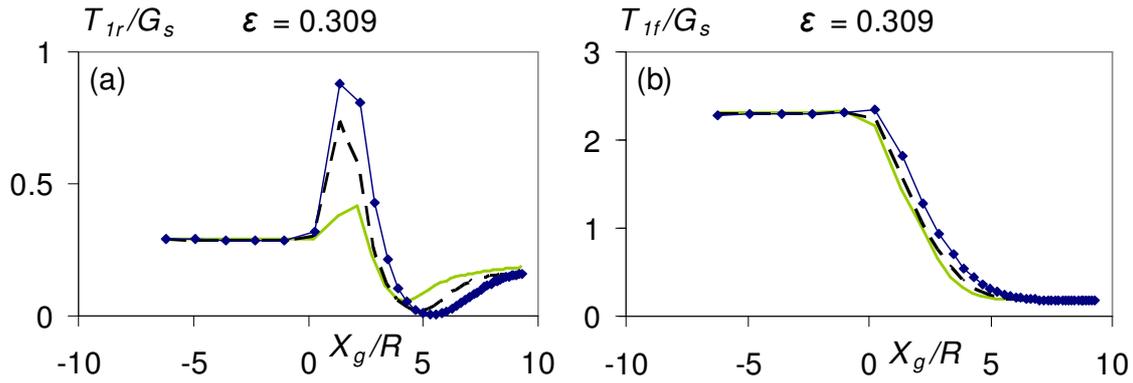


Figure IV.9 - Evolution des tensions à l'arrière (T_{ir}) et à l'avant (T_{if}) de la capsule au cours du processus de sortie, pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\varepsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

Lorsque $\varepsilon = 0.309$, la valeur de λ n'a pas d'influence sur la tension et la courbure à l'avant de la capsule (figures IV.8.b et IV.9.b). La partie avant est donc insensible à une élévation de viscosité du fluide interne. A l'arrière, lorsque l'on augmente λ de 0.1 à 10, le pic de tension est doublé mais reste faible (figure IV.9.a). Le mouvement du fluide interne lors de la phase transitoire engendre des forces visqueuses qui agissent sur l'arrière de la capsule. Ces forces s'opposent à celles créées par le fluide externe et sont plus importantes pour $\lambda = 10$ que pour $\lambda = 0.1$. C'est pourquoi la tension (respectivement la courbure) à l'arrière de la capsule est légèrement plus grande (respectivement plus petite) pour $\lambda = 10$ que pour $\lambda = 0.1$ (figure IV.9.a, respectivement figure IV.8.b, $0 < X_g/R < 4$). Pour $X_g/R > 4$, les tensions et les courbures tendent vers leurs valeurs respectives à l'état de référence. Par ailleurs, la distance δ_r à laquelle la courbure arrière s'annule ne dépend pas de λ (figure IV.8.b). A ce nombre capillaire, tout comme pour $\varepsilon = 0.06$ (figure IV.8.a), le retour à l'état relâché ne dépend pratiquement pas de λ . Le rapport des viscosités λ n'influence que très modérément le retour à la forme d'équilibre de la capsule (figure IV.10). En effet, les longueurs L_x et L_y retrouvent leur valeur de référence à 2% près au temps $t = 35$ pour $\lambda = 0.1$, 4 et 10. Par contre, la façon dont les capsules se relâchent diffère. A mesure que λ augmente, les pics de déformation sont plus petits et apparaissent plus tard (figure IV.10). En compensation, l'augmentation de L_x et la diminution de L_y après le pic sont moins rapides lorsque λ croît. Cela est dû à l'augmentation du niveau de tension dans la membrane (figure IV.9.a). Pour $\lambda = 4$ et 10, l'énergie emmagasinée par la membrane met plus de temps à se dissiper que pour $\lambda = 0.1$, ce qui engendre des variations de déformation moins rapides.

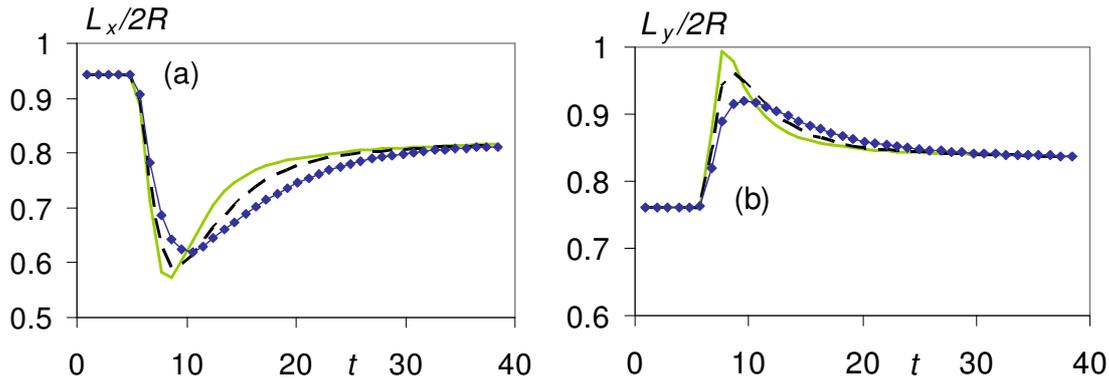


Figure IV.10 - Evolution temporelle des longueurs caractéristiques L_x et L_y , pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\varepsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

Diaz *et al.* (2000) ont calculé le temps de relaxation de capsules à membrane MR dans un fluide au repos. Pour de telles capsules, le temps de relaxation dépend de λ et est environ quatre fois plus grand pour $\lambda = 5$ que pour $\lambda = 0.2$. Ici, les capsules ont une membrane Sk. On a cherché à approcher les courbes de L_x et L_y par des fonctions exponentielles, en partant des pics de déformation. Le temps de relaxation est environ 1,1 fois plus grand pour $\lambda = 4$ que pour $\lambda = 0.1$. Plusieurs raisons peuvent expliquer la différence avec les résultats de Diaz *et al.* (2000). D'une part, la capsule est convectée par un écoulement d'intensité décroissante à mesure qu'elle avance (figure IV.11). La vitesse du centre de gravité V_g de la capsule ne dépend pas de λ . Pour $X_g > 0$ (figure 11.IV.b), V_g diminue, tout comme le nombre capillaire local. La capsule passe par une série d'états d'équilibre pour lesquels la viscosité interne joue peu.

D'autre part, la capsule ne se relâche pas dans un fluide au repos. Afin de vérifier ce point, on annule l'écoulement de la relation (II.19). On place un profil stationnaire, déterminé pour $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$ et $\varepsilon = 0.309$, loin du col de la constriction. La capsule se relâche alors dans un fluide au repos, dans un milieu considéré comme infini. On considère les deux cas extrêmes où $\lambda = 0.1$ et 10. Au cours de la phase de relaxation, les grandeurs géométriques de la capsule, telles que la longueur axiale L_x , évoluent. L_x retrouve sa valeur de référence à 2% près au temps $t = 5$ pour $\lambda = 0.1$, et en $t = 18$ pour $\lambda = 10$ (figure IV.12). Le rapport des viscosités λ joue clairement un rôle sur la détente d'une capsule dans un fluide au repos. Ce point est en accord avec les résultats de Diaz *et al.* (2000). Dans le cas d'une capsule placée dans un milieu confiné et dans un fluide en mouvement, λ ne joue aucun rôle sur le temps de relaxation, mais a une petite influence sur les tensions les courbures à l'arrière de la capsule lorsque cette dernière est proche du col.

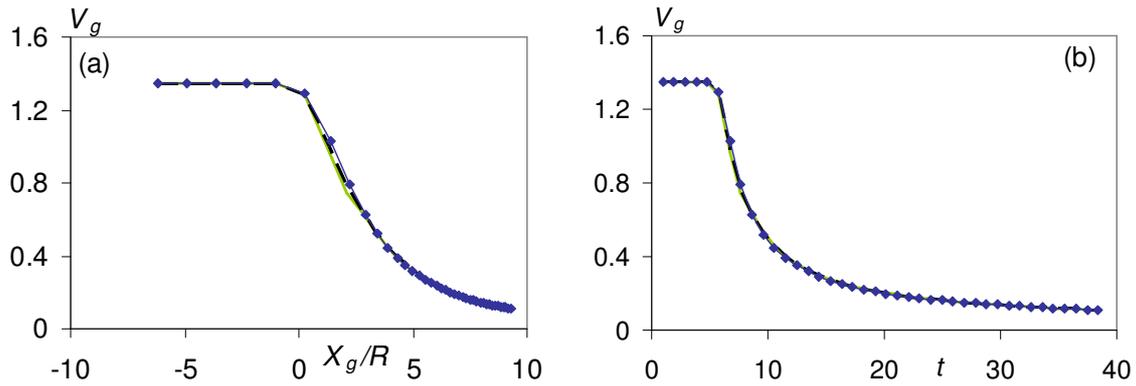


Figure IV.11 - Evolutions (a) : spatiale, (b) : temporelle de la vitesse du centre de gravité de la capsule au cours du processus de sortie, pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\varepsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

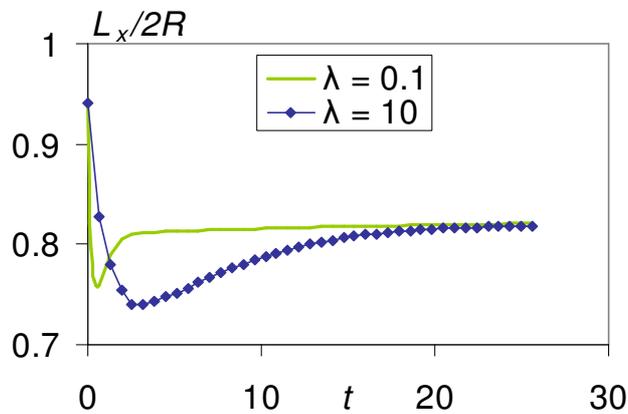


Figure IV.12 - Evolution temporelle de la longueur L_x , pour deux valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\varepsilon = 0.309$. La capsule se relâche dans un fluide au repos, et dans un milieu considéré comme non confiné.

On reprend à présent le champ de vitesse de la relation (II.19). La perte de charge additionnelle en fonction de la position de la capsule dans le tube diminue à mesure que le nombre capillaire augmente (figure IV.13). De plus, elle est insensible au changement de viscosité, quelle que soit la valeur du nombre capillaire. Cela s'explique par le fait que l'augmentation de L_y a lieu bien après la sortie du tube (figure IV.14.b), endroit où la présence de la capsule ne se fait plus tellement sentir dans le tube.

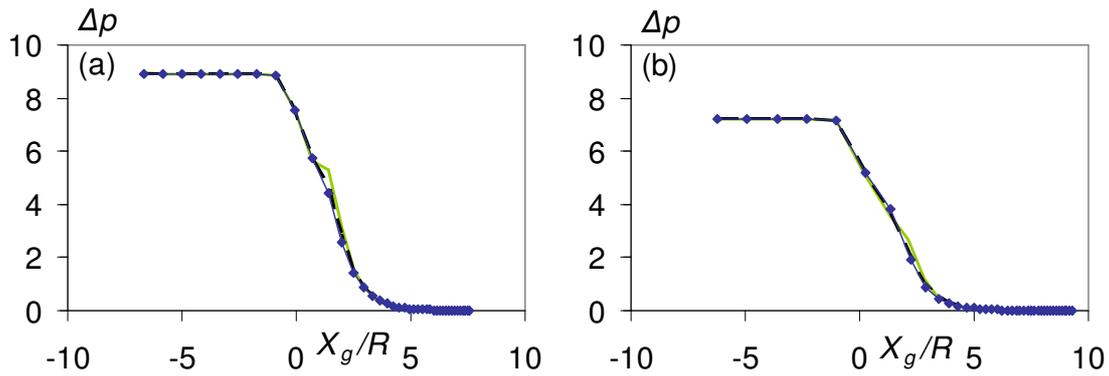


Figure IV.13 - Evolution de la perte de charge additionnelle au cours du processus de sortie. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$. (a) : $\varepsilon = 0.06$. (b) : $\varepsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

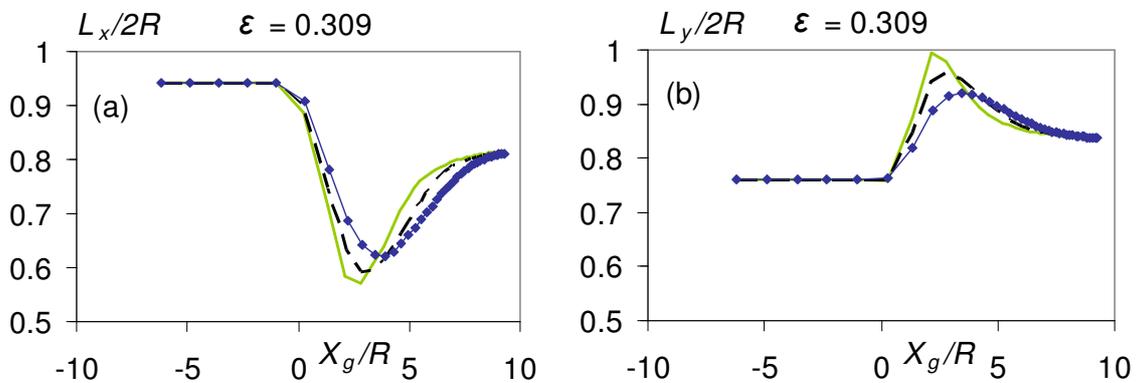


Figure IV.14 - Longueurs caractéristiques L_x et L_y en fonction de la position du centre de gravité de la capsule, pour trois valeurs du rapport des viscosités. $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$, $\varepsilon = 0.309$. Même légende que figure IV.7.

Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) rapportent la présence d'un petit pic de perte de charge en sortie de tube, dans le cas où la membrane obéit à la loi NH, pour $a/R = 0.8$, $\lambda = 1$ et $\varepsilon = 0.12$. Dans le cas où $a/R = 0.83$, $\lambda = 0.1$, $\varepsilon = 0.06$ et pour la loi Sk avec $C = 1$, on n'observe pas de pic, même si la perte de charge présente une courte stabilisation à la sortie pour $\lambda = 0.1$ (figure IV.13.a). La différence avec les résultats de Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) peut s'expliquer de plusieurs façons. Le caractère adoucissant de la loi NH utilisée par ces auteurs est à même de provoquer de grandes déformations membranaires, donc de petits films de lubrification lors de la sortie de la capsule. De plus, ces auteurs n'ont pas inclus de précontrainte membranaire qui engendre une diminution de la déformation de la capsule. Il est également possible que le pas de sauvegarde utilisé soit trop grand et que l'on n'ait pas capté la présence d'un éventuel pic situé en $X_g/R \approx 1$.

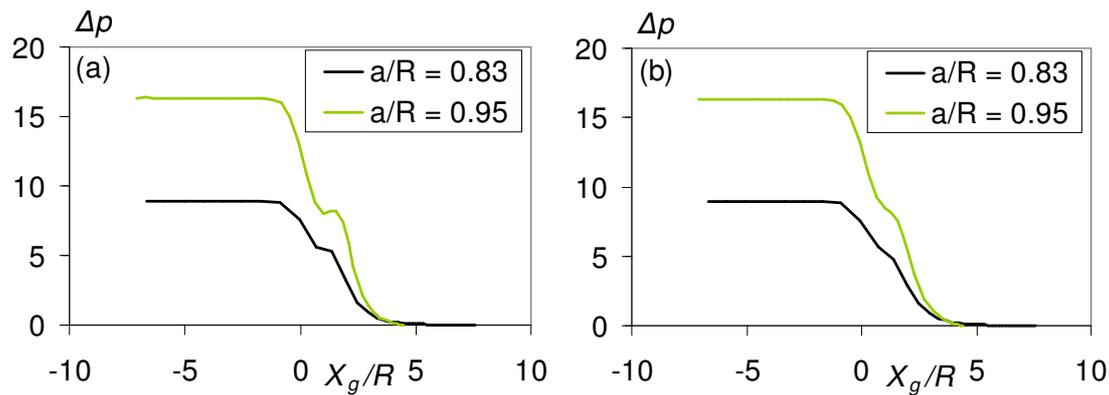


Figure IV.15 - Evolution de la perte de charge additionnelle lors de la phase de sortie pour deux valeurs du rapport d'aspect. $\alpha = 3\%$. $\varepsilon = 0.06$. (a) : $\lambda = 0.1$. (b) : $\lambda = 4$.

Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) observent également un pic sur Δp lorsque le rapport d'aspect augmente. Dans notre cas, une hausse de a/R de 0.83 à 0.95 entraîne l'apparition d'un petit pic pour $\lambda = 0.1$ (figure IV.15.a). Ce pic n'existe pas lorsque $\lambda = 4$ (figure IV.15.b) car les déformations sont moins importantes pour cette valeur de λ (figure IV.14). L'effet du rapport d'aspect est donc mis en évidence. Lorsque λ est petit, une hausse du rapport d'aspect peut engendrer de petites épaisseurs du film de lubrification, et donc augmente le risque d'adhésion de la capsule à la paroi.

En conclusion, les effets visqueux apparaissent aux grands nombres capillaires et sont très peu présents aux petits nombres capillaires. Par ailleurs, une augmentation de λ de 0.1 à 4 provoque un léger décalage spatial des extrema de L_x et L_y , mais aussi un amoindrissement de ces extrema.

IV.4.c Comparaison avec des données expérimentales

On dispose des résultats de thèse de Collé-Paillot (2002) sur l'écoulement de capsules à membrane d'alginate dans un divergent. Les longueurs L_x et L_y sont calculées, de même que le périmètre déformé L_d . Collé-Paillot (2002) a utilisé les mêmes capsules pour étudier l'écoulement dans un convergent et dans un divergent et présente des résultats pour $a/R = 0.83$ et 0.95. Dans ce paragraphe, la valeur de λ est fixée à 0.1. On rappelle que l'objectif est de confirmer que le modèle choisi pour décrire l'écoulement stationnaire est également représentatif du régime transitoire. Pour cela, on considère les cas où le pré-gonflement α vaut successivement 0% et 3%, et on compare les résultats numériques aux données expérimentales.

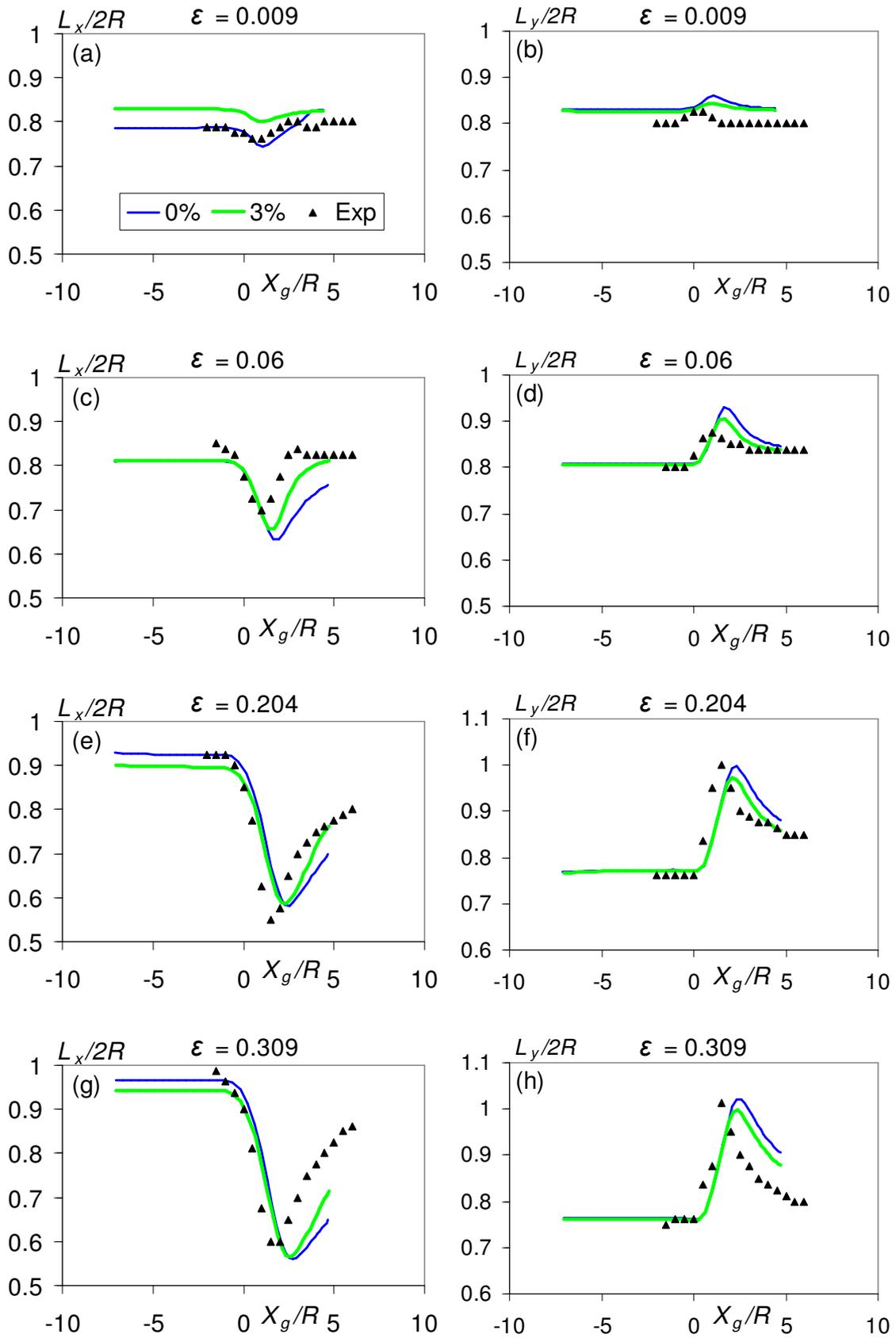


Figure IV.16 - Evolution des longueurs caractéristiques L_x et L_y au cours du processus de sortie, pour différentes valeurs du nombre capillaire, pour un pré-gonflement nul ou faible (3%). $a/R = 0.83$. Comparaison avec des données expérimentales fournies par Collé-Paillet (2002).

La figure IV.16 présente l'évolution de L_x et de L_y en fonction de la position du centre de gravité de la capsule, et pour quatre valeurs du nombre capillaire. Au petit nombre capillaire ($\varepsilon = 0.009$), l'analyse des données suggère que la capsule expérimentale pourrait ne pas être soumise à un pré-gonflement (figure IV.16.a,b). Les valeurs expérimentales, à ce nombre capillaire, sont peut-être sous-évaluées, car Collé-Paillet (2002) annonce un rapport de taille valant 0.81 alors que les valeurs de L_x et L_y à l'état relâché sont plus petites.

Pour chaque valeur du nombre capillaire, L_x (L_y respectivement) atteint une valeur minimale (maximale respectivement). Cependant, à ε fixé, les extrema sont atteints d'abord par la capsule expérimentale alors que les extrema numériques apparaissent plus loin dans le divergent et sont moins prononcés. Ce décalage s'accroît à mesure que ε augmente. Dans les expériences, λ est 100 fois plus petit que dans les simulations numériques. En conséquence, les extrema expérimentaux lors du processus de sortie devraient être plus grands que les extrema numériques, ce qui est clairement le cas pour $\varepsilon = 0.204$. Ce n'est pas le cas pour $\varepsilon = 0.009$ et $\varepsilon = 0.06$ car à ces nombres capillaires, les effets du pré-gonflement prédominent sur les effets visqueux. Les déformations expérimentales se rapprochent des déformations numériques déterminées avec $\alpha = 3\%$. Pour $\varepsilon = 0.309$, sur les figures IV.16.g et h, les extrema expérimentaux ne dépassent pas non plus les extrema numériques mais le minimum de L_x et le maximum de L_y n'ont peut-être pas été mesurés. On constate également que pour $\varepsilon = 0.204$ et $\varepsilon = 0.309$, les valeurs expérimentales de L_x ne sont pas totalement stabilisées après la sortie du tube (figures IV.16.e et g). Collé-Paillet (2002) n'a pas mesuré l'état relâché des capsules.

En tenant compte de l'effet de viscosité, on constate de manière générale une bonne corrélation entre données expérimentales et numériques avec $\alpha = 3\%$. En effet, si on avait pu considérer d'un point de vue numérique une valeur de λ plus proche de la valeur expérimentale, les extrema de L_x et L_y auraient été plus prononcés et les pentes des courbes montrant l'évolution de ces paramètres auraient été plus accentuées au cours de la relaxation.

Par ailleurs, cette étude confirme les résultats déterminés dans le chapitre III sur l'importance d'un pré-gonflement. Ce dernier a un effet aux petits nombres capillaires (figures IV.16.a à d). Aux grandes valeurs de ε , les valeurs numériques de L_x et L_y sont très peu différentes avec ou sans pré-gonflement (figures IV.16.e à h). Cependant, lors de la relaxation, les pentes des courbes correspondant aux cas expérimentaux et numérique avec $\alpha = 3\%$ sont très proches (figures IV.16.e et g).

On calcule à présent le rapport L_d/L_i entre le périmètre déformé et la circonférence de la capsule à l'état initial (figure IV.17). Entre les cas $\alpha = 0\%$ et $\alpha = 3\%$, on a au maximum un écart relatif d'environ 5% sur la valeur de ce rapport à l'état stationnaire, état où l'écart est le plus grand (figures IV.17b à d). Cet écart est donc petit. Il est cependant intéressant de constater que lors de la relaxation de la particule, le rapport $L_d/2\pi a$ devient plus petit que 1, ce qui signifie que la capsule s'est légèrement

rétrécie dans la direction méridionale. Ce phénomène, d'autant plus prononcé que le pré-gonflement augmente, est également observé expérimentalement, pour chaque valeur de ε . Cette diminution lors de la phase de relaxation est compensée par un étirement de la capsule dans la direction azimutale. Sur la figure IV.17, on constate une bonne corrélation entre l'expérience et le cas où $\alpha = 3\%$. Le modèle établi pour décrire l'état stationnaire est donc également valable en régime transitoire, pour la valeur du rapport d'aspect $a/R = 0.83$.

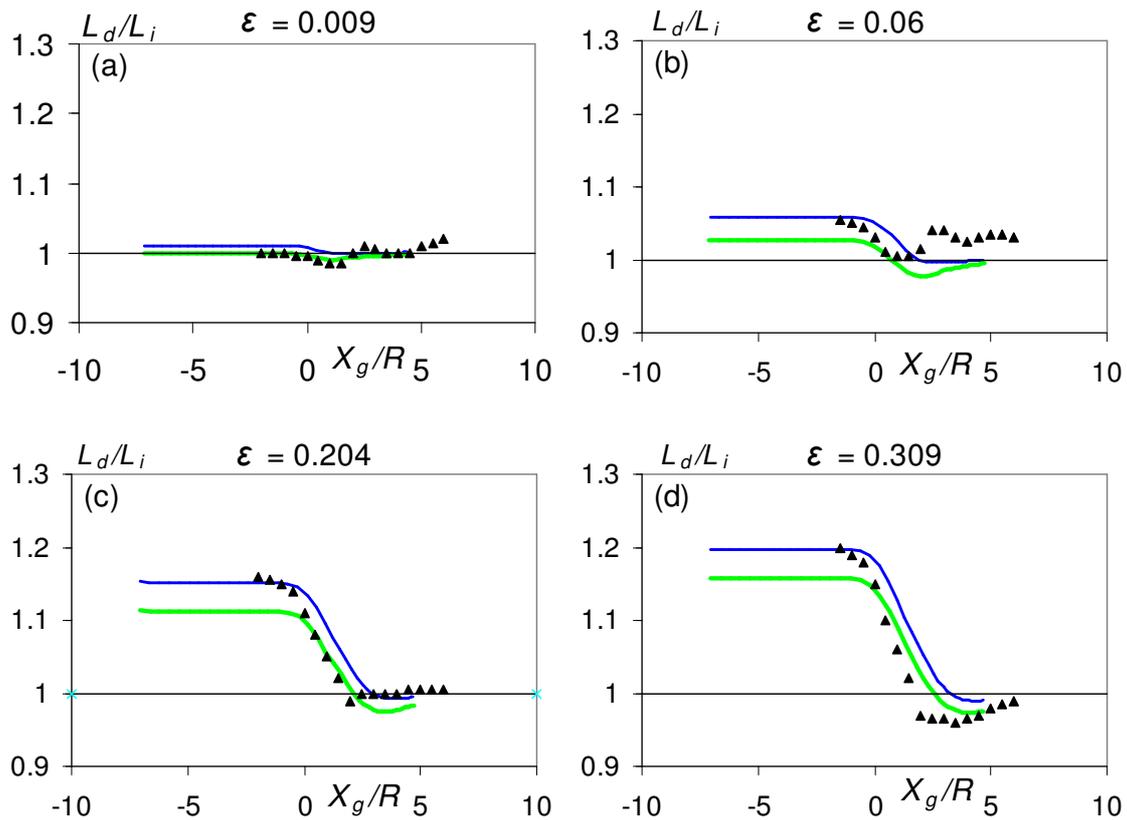
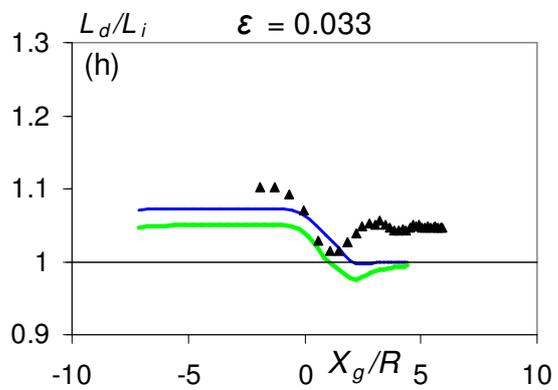
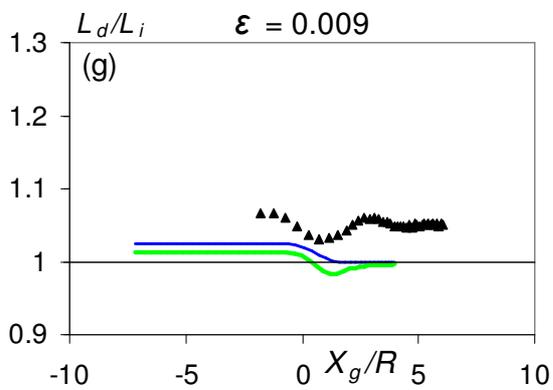
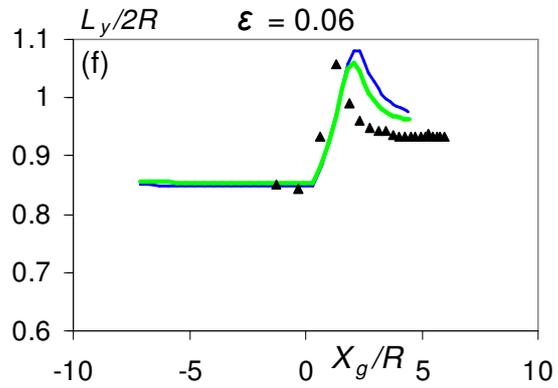
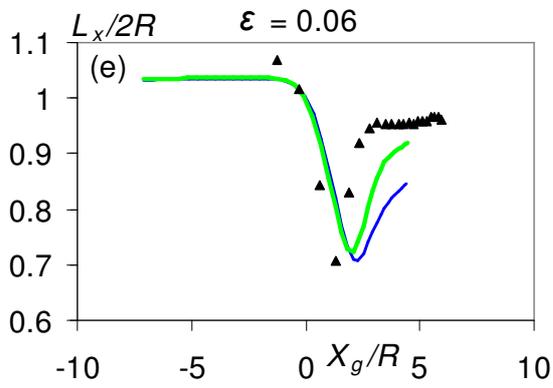
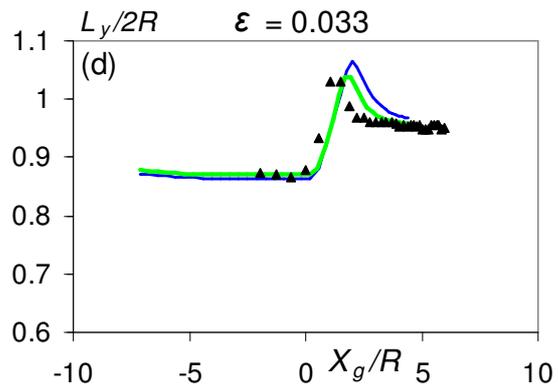
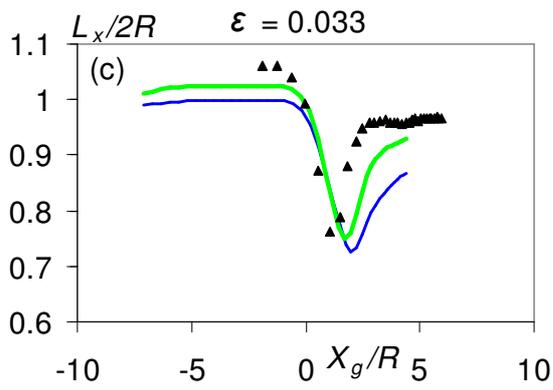
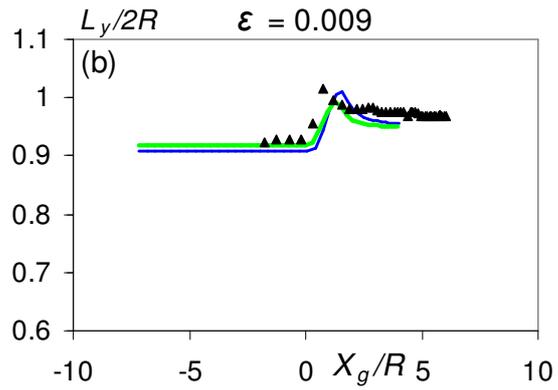
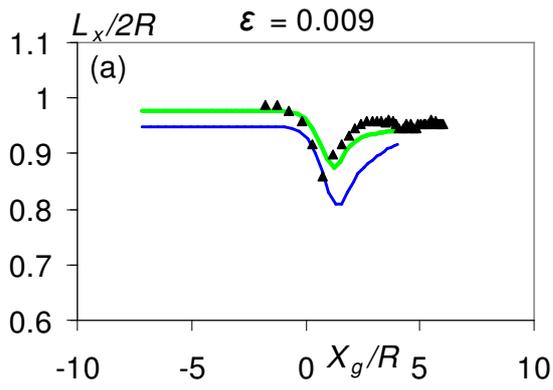


Figure IV.17 - Evolution du périmètre déformé, pour différentes valeurs du nombre capillaire et pour un pré-gonflement nul ou faible (3%). $a/R = 0.83$. Comparaison avec des données expérimentales. Même légende que figure IV.16.

De manière générale, les mêmes conclusions peuvent être établies pour le rapport d'aspect $a/R = 0.95$ (figure IV.18). Pour chacun des nombres capillaires étudiés, les valeurs de L_x et L_y tendent vers 0.95 en sortie de tube. L'effet de viscosité dû à la différence entre les valeurs numérique et expérimentale de λ est également présent. Pour $a/R = 0.95$, la loi Sk avec $C = 1$ et un pré-gonflement de 3% permettent également de décrire correctement le comportement hydrodynamique des capsules expérimentales s'écoulant en sortie de tube.



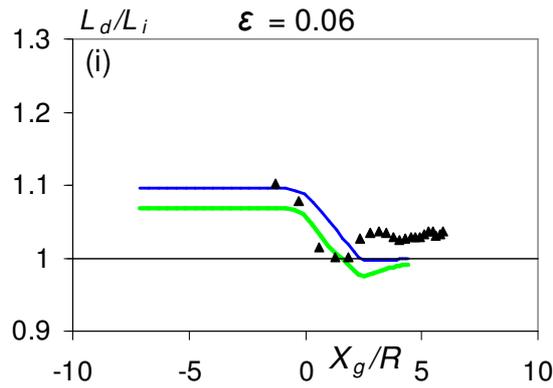


Figure IV.18 - Evolution de L_x , L_y et L_d , pour différentes valeurs du nombre capillaire et pour un pré-gonflement nul ou faible (3%). $a/R = 0.95$. Comparaison avec des données expérimentales. Même légende que figure IV.16.

Sur la figure IV.19, on compare les profils de capsules expérimentaux observés par Collé-Paillot (2002) à des profils numériques déterminés avec $\alpha = 3\%$. Pour chaque rapport d'aspect, on considère les deux valeurs extrêmes du nombre capillaire pour lesquelles les profils ont été mesurés. Pour $\epsilon = 0.009$, les profils numériques sont très peu déformés, quelle que soit la valeur de a/R . D'un point de vue expérimentale, Collé-Paillot (2002) constate le même comportement. Pour $a/R = 0.83$ et $\epsilon = 0.309$, le modèle numérique permet de bien reproduire la concavité de la capsule dans le tube, mais aussi l'élongation transversale lors de la sortie. Pour $a/R = 0.95$ et $\epsilon = 0.06$, la partie arrière de la capsule est quasiment plate à la sortie, ce qui est également prédit numériquement.

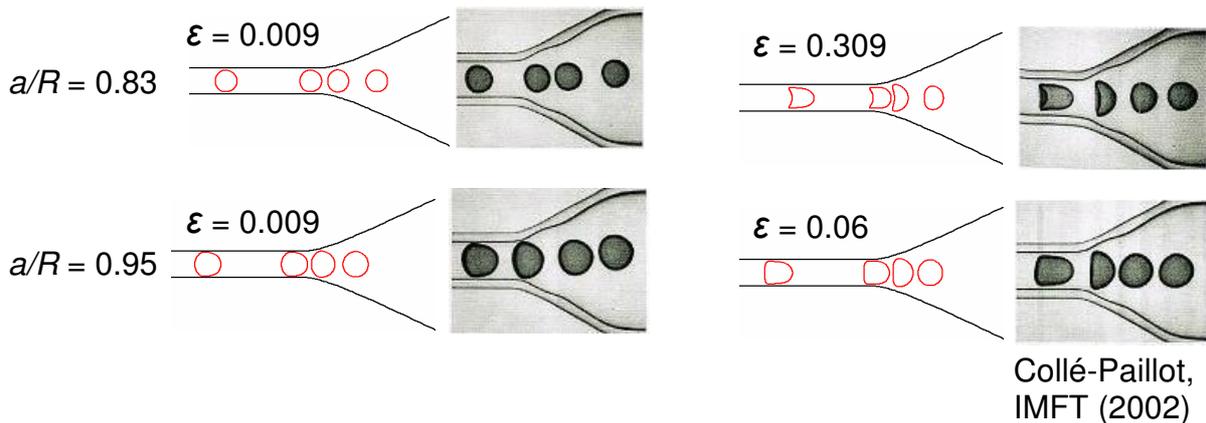


Figure IV.19 - Comparaison entre les profils numériques et expérimentaux au cours du régime transitoire, pour différentes valeurs du nombre capillaire et du rapport d'aspect. $\alpha = 3\%$. Le rapport des viscosités λ vaut 0.1 dans le cas numérique et 0.001 dans le cas expérimental.

IV.5 Conclusion

L'écoulement de capsules à la sortie d'un tube cylindrique est différent de celui à l'entrée, ce qui traduit le caractère viscoélastique global de l'écoulement et détruit la réversibilité. Les capsules sont d'abord comprimées axialement, et étirées transversalement. Ensuite elles tendent vers leur forme relâchée. Au cours de cette phase, l'arrière des capsules est beaucoup plus sensible à l'écoulement et au changement de section que l'avant.

L'étude permet de mettre en évidence l'importance des paramètres physiques mis en jeu. Par exemple, aux petits nombres capillaires, les effets osmotiques sont importants, et s'atténuent à mesure que ε augmente. D'un autre côté, les effets visqueux sont peu présents à faible ε , mais sont plus importants à grand ε . La valeur attribuée au rapport des viscosités λ est également importante. A mesure que λ augmente, les extrema de déformation de la capsule s'amenuisent un peu et apparaissent plus loin dans le tube. La valeur de λ n'a que très peu d'influence sur le temps de relaxation des capsules en sortie de tube, car la phase de détente ne s'effectue pas dans un fluide au repos. De plus, au cours de l'écoulement, la capsule passe probablement par des états d'équilibre successifs, tout comme le fluide interne à la capsule. La viscosité interne, et en conséquence la valeur de λ , jouent peu. Cependant, lorsque la capsule sort mais est proche du col de la constriction, λ a une légère influence. La tension à l'arrière augmente avec λ .

Dans toutes les situations étudiées, on n'observe pas de risque d'adhésion de la capsule à la paroi. L'épaisseur du film de lubrification entre la paroi et la capsule ne devient pas suffisamment petite pour perturber l'écoulement. De plus, le risque de rupture de la capsule au cours de l'état transitoire est également petit car les niveaux de tension membranaires n'augmentent pas de manière significative.

Cette liste de résultats n'est pas exhaustive mais se veut être un bref résumé des principales conclusions présentées au cours de ce chapitre.

Enfin, cette étude permet d'affirmer que le modèle numérique (loi Sk avec $K_s = 3G_s$ et $\alpha = 3\%$) établi pour l'étude de l'état stationnaire de capsules à membrane d'alginate est également valable pour le régime transitoire.

V. Interaction de deux capsules en écoulement dans un pore cylindrique

V.1 Introduction

Dans les chapitres III et IV, on a étudié l'écoulement d'une seule capsule à l'intérieur et à la sortie d'un pore cylindrique. Cet écoulement est désormais bien connu, puisque les paramètres le gouvernant sont la taille de la capsule, le nombre capillaire, le pré-gonflement ainsi que la loi de comportement attribuée à la membrane. A l'heure actuelle, la plupart des études numériques traitant des microcapsules ne considère que l'écoulement d'une seule capsule. L'interaction de plusieurs capsules a été très peu étudiée, notamment en espace confiné. Cela est à la fois dû à la complexité des interactions, et aussi pendant longtemps à un manque de ressources informatiques. Pourtant, il existe de nombreuses situations dans lesquelles plusieurs capsules sont en écoulement dans le même pore. C'est par exemple le cas dans le système microcirculatoire de l'homme, où les globules rouges circulent dans des vaisseaux, sont convectés par le sang et servent à l'oxygénation de l'organisme. C'est aussi le cas pour les suspensions de particules, où là encore le nombre d'entités mises en jeu est important.

Il existe plusieurs études sur l'écoulement de particules en espace non confiné. On doit un des premiers modèles à Breyiannis & Pozrikidis (2001), qui ont traité le cas d'une suspension bidimensionnelle de capsules en écoulement de cisaillement simple. Ils obtiennent une loi de comportement pour la suspension, pour deux fractions de surface. Cependant, de par la nature de leur modèle, ils ne peuvent prendre en compte des effets tridimensionnels qui jouent un rôle prépondérant sur les tensions et les déformations des capsules (Lac *et al.* 2004). D'autres auteurs ont étudié l'interaction de particules, et notamment l'interaction de deux gouttes liquides en écoulement de cisaillement simple en deux dimensions (Charles & Pozrikidis 1998) et trois dimensions (Loewenberg & Hinch 1997). Il s'avère qu'après le croisement des gouttes, il existe une déviation irréversible de leur trajectoire respective dépendant à la fois de la force de l'écoulement et du rapport des viscosités. Une étude expérimentale sur la collision des gouttes (Guido & Simeone 1998) confirme les résultats numériques. La déviation est également observée pour deux capsules en écoulement de cisaillement simple. Lac *et al.* (2007) ont calculé cet écoulement pour des capsules de même taille. Ils trouvent que la déviation dépend très peu du pré-gonflement des capsules mais augmente à mesure que le nombre capillaire diminue. En effet, chaque capsule représente un obstacle d'autant plus grand à franchir pour l'autre quand ε est petit. De plus, Lac *et al.* (2007) trouvent que lorsque les capsules sont éloignées l'une de l'autre, elles n'interagissent pas. Ce n'est pas le cas quand elles commencent à se rapprocher. Il existe donc un espacement minimal en dessous duquel chaque capsule est soumise à l'influence de l'autre.

Le modèle numérique élaboré par Lac *et al.* (2007), qui ne considère que des capsules de même taille, ne prend pas en compte un effet de parois. Les formes prises par les capsules soumises à un champ de cisaillement simple sont totalement différentes des formes en « parachute » lorsque les capsules s'écoulent dans des tubes. Les interactions hydrodynamiques n'ont donc pas lieu de la même façon. A l'heure actuelle, il existe très peu d'études traitant de l'écoulement de plusieurs capsules en espace confiné. Récemment, Pozrikidis (2005) a étudié le mouvement axisymétrique d'un train périodique de globules rouges de même taille en écoulement dans des capillaires. Il montre le rôle crucial du rayon du capillaire, donc de la taille des globules rouges, et de l'espacement entre les globules sur la forme que ces derniers sont susceptibles de prendre.

Ces conclusions incitent à étudier l'écoulement de plusieurs capsules dans un pore cylindrique. Les résultats présents dans la littérature mettent en évidence le rôle important du nombre capillaire, de la distance séparant les capsules traduisant leur degré d'interaction et de la taille des capsules. Lac *et al.* (2007) et Pozrikidis (2005) n'ont pas traité le cas de particules de taille différente. Ici, on considère le cas de capsules de taille identique ou différente, en se focalisant sur l'interaction de deux capsules, ce qui correspond au cas d'une suspension diluée. On se focalise uniquement sur l'écoulement de deux capsules. On évite ainsi la discrétisation d'un grand nombre de domaines, ce qui serait coûteux en terme de ressources informatiques. D'autre part, on peut généraliser dans certains cas à plusieurs capsules le raisonnement effectué pour deux. On étudie l'état transitoire des capsules jusqu'à ce qu'elles atteignent un état d'équilibre, s'il existe. Dans le cas de capsules de même taille, on recherche la distance minimale qui doit les séparer pour qu'il n'y ait pas d'interaction hydrodynamique. Pour des capsules de taille différente qui ont tendance à former un train, on recherche la perte de charge additionnelle créée par le train.

V.2 Problématique

On rappelle le schéma du problème en figure V.1. M_1 est la capsule de tête et M_2 la capsule suiveuse. Les capsules sont sphériques à l'état de référence et on note a_1 et a_2 leur rayon respectif à cet état. On note x_{max1} et x_{max2} les abscisses maximales de M_1 et M_2 respectivement. De même, on note x_{min1} et x_{min2} leur abscisse minimale. Le paramètre $e = x_{min1} - x_{max2}$ désigne l'espace entre les deux capsules.

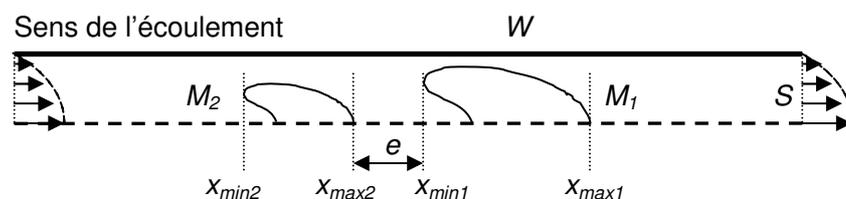


Figure V.1 - Interactions hydrodynamiques de deux capsules en écoulement dans un tube cylindrique.

La principale difficulté vient de la prise en compte d'une deuxième capsule. Celle-ci altère l'écoulement fluide, modifie les forces pariétales et interagit avec la première capsule. On reprend la formulation intégrale de la relation (II.20), avec $M = M_1 \cup M_2$. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles du chapitre III. Pour toutes les situations étudiées, on choisit un rapport de viscosités $\lambda = 1$, ce qui permet de ne pas faire intervenir dans le calcul des intégrales de double couche très coûteuses en terme de ressources informatiques.

L'ensemble M est désormais composé de deux domaines distincts M_1 et M_2 . La méthode de calcul de l'intégrale sur M_2 est similaire à celle de l'intégrale évaluée sur M_1 . Pour $\mathbf{x} \in M_2$, l'intégrale calculée sur M_2 est singulière. Dans les autres cas, elle est régulière. Le modèle élaboré offre la possibilité d'étudier tout un panel de lois de comportement membranaire pour les deux capsules. Néanmoins, on se focalise sur la loi Sk avec $K_s/G_s = 3$, comme dans les chapitres III et IV. On ne considère pas ici l'effet du pré-gonflement des capsules et tous les résultats présentés dans ce chapitre concernent des capsules non précontraintes.

V.3 Procédure numérique

On suit le mouvement des deux capsules en écoulement dans le pore. Pour cela, on choisit deux profils stationnaires déterminés au chapitre III pour des capsules isolées. On positionne ensuite les deux profils dans le tube de façon à ce que les capsules soient suffisamment éloignées de l'entrée du pore et de la section fluide S . Pour cela, on impose $x_{max1} < 10R$ et $x_{min2} > 2R$. Ces conditions sont également respectées au cours du calcul. Au temps $t = 0$, on impose l'écart e_0 entre les deux capsules. Ensuite le calcul démarre et les capsules interagissent sous certaines conditions présentées plus loin. Le modèle numérique ne permet pas de gérer le contact des capsules. Dès lors, on utilise un critère de proximité. On note d_{min} la plus petite des distances entre un point de collocation de M_1 et un point de collocation de M_2 (figure V.2). Le critère de proximité est $d_{min} < 0.01R$. Lorsqu'il est réalisé, le calcul s'arrête. Il est possible d'améliorer le critère de proximité en procédant à un affinement du maillage de chaque capsule, mais cela aurait pour conséquence d'augmenter le temps de calcul.

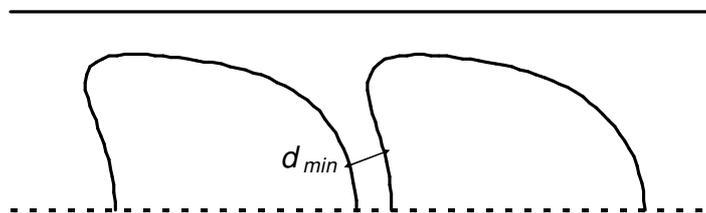


Figure V.2 - Distance minimale séparant les deux capsules dans le pore.

L'objectif est d'atteindre les états stationnaires des capsules, s'ils existent. La phase transitoire peut nécessiter de grands temps de calcul ou de grandes longueurs de tubes. Afin de limiter la longueur du pore, on se place dans un référentiel lié à la capsule de tête et se déplaçant avec elle. Le calcul s'arrête lorsque les capsules sont à l'état stationnaire ou bien lorsque le critère de proximité est atteint.

La discrétisation des frontières ainsi que la longueur du tube sont les mêmes que dans le chapitre III, et les inconnues de la relation (II.20) sont déterminées en prenant x sur M_1 , M_2 , W et S . Le pas de temps vaut $\Delta t = 3.2 \times 10^{-4}$.

V.4 Validation du modèle

On se place dans le cas où $a_1/R = a_2/R = 0.8$ et $\varepsilon = 0.09$. On valide le modèle en deux étapes. La première phase consiste à vérifier que la présence des deux capsules est physiquement ressentie par l'écoulement. Pour cela, on calcule la distribution de contrainte fluide f_x à la paroi, qui est une grandeur locale. En l'absence de capsule, on a $f_x = 4$ et f_x est égale à la contrainte de Poiseuille. La présence des capsules perturbe donc le profil de contrainte à la paroi. L'intégrale de f_x le long de la constriction fournit la perte de charge mais est une quantité globale, donc elle ne permet pas de localiser les perturbations créées par les deux capsules. On verra plus loin comment la perte de charge est modifiée par la présence d'une seconde capsule.

Dans un premier temps, on calcule la composante axiale f_x de la contrainte pariétale dans le cas d'une seule capsule M_1 à l'état stationnaire (figure V.3.a). Les extrémités de la capsule sont localisées en $x_{min1}/R = 5.93$ et $x_{max1}/R = 7.5$. La présence de la capsule provoque deux pics de contrainte pariétale d'intensité différente. Les pics principal et secondaire sont respectivement le n°2 et le n°1 et correspondent approximativement à l'avant et à l'arrière de la capsule. La contrainte pariétale pour deux capsules est représentée figure V.3.b, pour $e/R = 2.19$. La présence d'une deuxième capsule se traduit par l'apparition de deux pics supplémentaires qui ont la même intensité et la même largeur que dans le cas d'une seule capsule. Les centres de gravité des capsules M_1 et M_2 sont aux positions $X_{g1}/R = 4.08$ et $X_{g2}/R = 7.68$. Pour la capsule M_1 , on a $x_{min1}/R = 7.02$ et $x_{max1}/R = 8.6$. Le pic principal est le n°4 (figure V.3.b). Il s'atténue à environ un rayon de pore en aval. Le pic secondaire est le n°3 (figure V.3.b) et s'atténue à un rayon de pore en amont. Ces résultats sont en accord avec ceux de Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) pour lesquels le profil de Poiseuille est retrouvé à 1% près de part et d'autre de la capsule à un rayon de pore. Un raisonnement analogue s'applique pour la capsule suiveuse, où $x_{min2}/R = 3.42$ et $x_{max2}/R = 5$. Loin des capsules mais également entre celles-ci, la contrainte fluide f_x vaut 4. Elle est alors égale à la contrainte de Poiseuille et il n'y a pas d'interaction.

La seconde étape consiste à vérifier que les variations relatives du volume des capsules sont petites au cours du calcul. Ce point est important car il est garant de la précision du schéma d'intégration utilisé dans le modèle numérique. Après calcul, on a une erreur sur les volumes inférieure à 1% même après 240 000 itérations. C'est le cas de tous les résultats présentés dans ce chapitre.

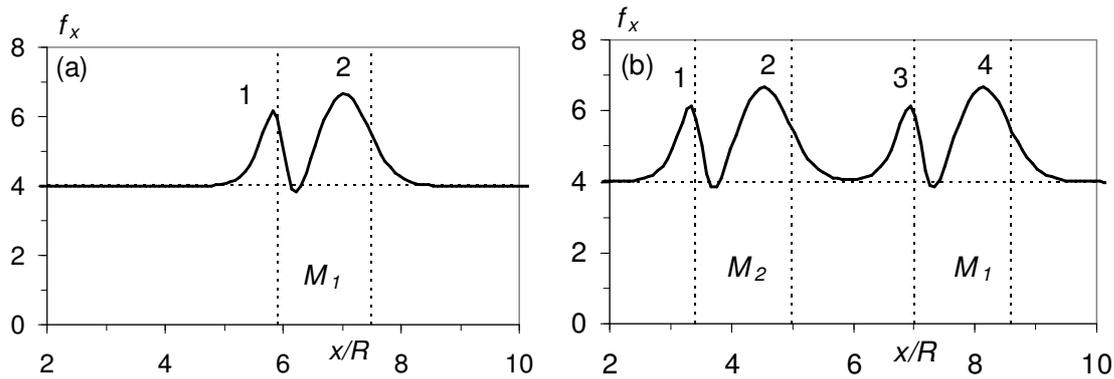


Figure V.3 - Evolution de la contrainte pariétale le long du tube. $\varepsilon = 0.09$. (a) : une seule capsule à l'état stationnaire. (b) : deux capsules pour $e/R = 2.19$.

V.5 Résultats

Le modèle numérique élaboré offre la possibilité, pour chaque capsule, de faire varier plusieurs paramètres. Cependant on ne se focalise que sur la taille des capsules, le nombre capillaire ainsi que la distance initiale séparant les capsules. On considère dans un premier temps deux capsules de taille identique $a_1/R = a_2/R = 0.8$ puis 0.9 et 1. On s'intéresse ensuite au cas où les deux capsules ont des tailles différentes. On étudie les valeurs du nombre capillaire $\varepsilon = 0.09$ et $\varepsilon = 0.27$ qui correspondent à une force d'écoulement et à des déformations membranaires respectivement faibles et modérées, si bien qu'il n'est pas nécessaire de procéder à un affinement du maillage pour les deux capsules. On détermine en particulier l'importance de l'écart initial e_0 sur l'évolution de l'écoulement et les déformations des capsules.

V.5.a Capsules de même taille

On considère deux capsules de même taille $a_1/R = a_2/R = 0.8$ et $\varepsilon = 0.09$. A $t = 0$, on sépare les capsules de trois écarts e_0 différents ($e_0/R = 0.06$; 0.16 et 2) et on étudie l'évolution de e au cours du temps.

Pour $e_0/R = 2$ (figure V.4), l'écart séparant les capsules reste constant au cours de l'écoulement. Les capsules n'ont aucune interaction hydrodynamique et se comportent comme si elles étaient seules dans le pore. Pour $e_0/R = 0.06$ et 0.16, l'écart entre les capsules augmente avec le temps et les capsules s'éloignent donc l'une de l'autre. Pour $e_0/R = 0.06$, l'écart e tend à rejoindre celui correspondant au cas $e_0/R = 0.16$ et le calcul est arrêté quand les courbes d'évolution se superposent. Pour $e_0/R = 0.16$, la pente de la courbe diminue à mesure que t augmente donc l'écart entre les capsules tend à se stabiliser à une valeur stationnaire e_{stat} . Afin de déterminer e_{stat} , on calcule l'exponentielle approchant au mieux la courbe correspondant au cas $e_0/R = 0.16$. L'exponentielle est caractérisée à la fois par un temps caractéristique t_c et une asymptote horizontale dont l'équation

fournit la valeur de e_{stat} . Il s'avère que le logarithme népérien du rapport de différences d'écart est une fonction affine de la différence de temps $t - t_0$ (figure V.5), t_0 étant la valeur initiale du temps ($t_0 = 0$ ici). La pente de la droite vaut $1/t_c$. Le coefficient de corrélation R^2 est le meilleur ($R^2 = 0.9978$) pour le couple $t_c = 44.64$ et $e_{stat}/R = 0.91$. Afin de vérifier ce résultat et de déterminer une marge d'erreur sur la valeur de e_{stat} , on sépare initialement deux capsules avec $e_0/R = 0.91$ et on suit l'évolution temporelle de l'écart. Une analyse par exponentielle montre que la valeur e_{stat} optimale, pour lequel le coefficient de corrélation est le meilleur, est en réalité comprise entre 0.95 et 1 fois le rayon du pore.

La valeur de e_{stat} correspond à l'écart minimal qui doit séparer deux capsules pour qu'elles n'interagissent pas. On en conclut qu'il existe deux situations possibles. Si l'écart entre les capsules est inférieur à e_{stat} , ces dernières ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre. L'écart se stabilise par la suite et les deux capsules atteignent un état stationnaire. Par contre, lorsque les capsules sont séparées par un écart plus grand, elles sont déjà stabilisées et l'écart n'évolue pas au cours du temps. Pour deux capsules initialement sphériques et de rapport d'aspect 0.8 et pour $\varepsilon = 0.09$, e_{stat} est approximativement compris entre 90% et 100% de la valeur du rayon du pore. A petit nombre de Reynolds, les perturbations créées par une capsule s'évanouissent rapidement, et l'écoulement de Poiseuille est retrouvé à une distance de la capsule environ égale à un rayon de pore. Ce résultat avait été établi par Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) pour des capsules à membrane neo-hookéenne à partir d'une modélisation moins précise que celle utilisée ici.

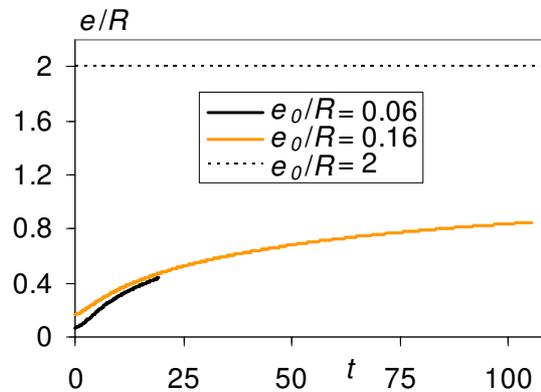


Figure V.4 - Evolution temporelle de l'écart e entre deux capsules de taille identique $a_1/R = a_2/R = 0.8$, pour $\varepsilon = 0.09$ et trois valeurs de l'écart initial $e_0/R = 0.06$; 0.16 et 2.

L'évolution temporelle des déformations des capsules dépend fortement de la forme de celles-ci à l'instant initial. En effet, les longueurs caractérisant la déformation des deux capsules, à savoir L_{x1} , L_{y1} , L_{x2} , L_{y2} évoluent différemment selon que les capsules sont initialement sphériques ou en forme de parachute. Ici, on considère initialement des profils en parachute. Les déformations n'évoluent pas pour $e_0/R = 2$ (figure V.6) et la valeur des diverses longueurs correspond à celle d'une capsule isolée à l'état stationnaire. Par contre, l'évolution temporelle des déformations est différente lorsque les capsules sont initialement proches l'une de l'autre. Pour $e_0/R = 0.06$ et 0.16, L_{x1} augmente et L_{y1}

diminue dans les premiers temps de l'écoulement (figure V.6). La capsule M_1 subit donc une élongation axiale. A l'opposé, L_{x2} diminue et L_{y2} augmente. La capsule M_2 est comprimée. Aux temps suivants, à mesure que l'écart entre les capsules se stabilise, les différentes longueurs tendent vers leur valeur stationnaire, représentée en pointillés sur la figure V.6. Les capsules n'interagissent plus lorsqu'elles sont suffisamment éloignées et recouvrent l'état stationnaire d'une capsule isolée.

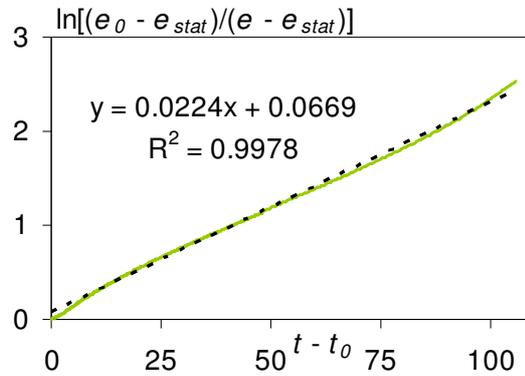


Figure V.5 - Approximation de la courbe correspondant à $e_0/R = 0.16$ sur la figure V.4 par une exponentielle. La droite en pointillés a pour équation $y = 0.0224x + 0.0669$. Le coefficient de corrélation vaut 0.9978 donc l'écart suit un comportement exponentiel.

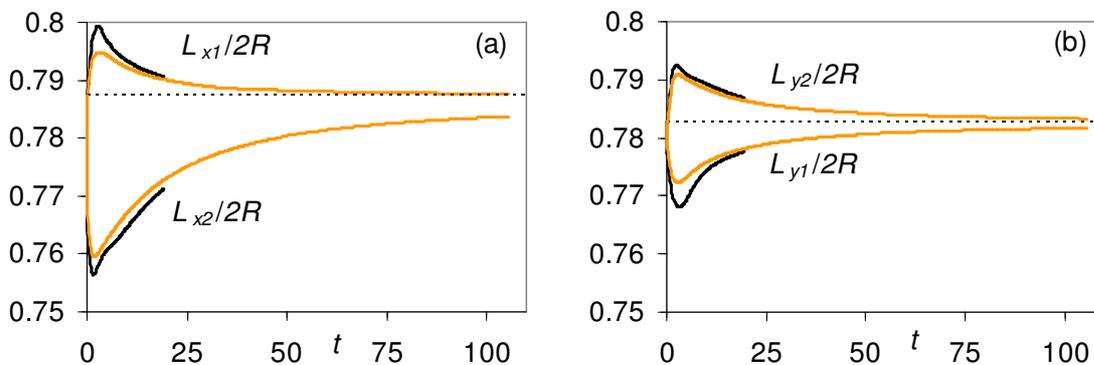


Figure V.6 - Evolution temporelle des longueurs caractérisant la déformation des capsules séparées différemment à l'instant initial. $a_1/R = a_2/R = 0.8$. $\epsilon = 0.09$. Même légende que figure V.4.

Au cours du processus transitoire, la compression de la capsule M_2 est plus importante que l'élongation de la capsule M_1 , si bien que le retour à l'équilibre pour les deux capsules ne s'effectue pas de la même manière. Sur l'intervalle de temps étudié, les longueurs L_{x1} et L_{x2} varient plus que L_{y1} et L_{y2} (figure V.6.a et b) donc conditionnent le retour à l'équilibre. Ce dernier se caractérise par un temps. Afin de le déterminer, on approche les courbes de L_{x1} et L_{x2} par des exponentielles. Contrairement au cas de l'écart e (figure V.5), les valeurs stationnaires $L_{x1,stat}$ et $L_{x2,stat}$ des longueurs

L_{x1} et L_{x2} sont connues. L'approche par exponentielle commence au temps où L_{x1} et L_{x2} sont respectivement maximale et minimale, c'est-à-dire pour les temps initiaux $t_{10} = 2.7$ et $t_{20} = 1.6$. Les temps caractéristiques t_{c1} et t_{c2} propres à chaque capsule sont $t_{c1} = 50,76$ et $t_{c2} = 69,44$. La capsule M_2 met donc plus de temps à atteindre un état stationnaire que M_1 . Ceci est dû au fait que l'écoulement subi par les deux capsules n'est pas le même.

Les variations des longueurs transversales L_{y1} et L_{y2} (figure V.6.b) affectent l'épaisseur du film de lubrification au voisinage des capsules. Cela a une incidence sur la perte de charge additionnelle Δp créée par les deux capsules. Afin d'étudier l'effet de l'écart initial e_0 sur la perte de charge, on calcule la différence entre la perte de charge créée par deux capsules à l'état stationnaire Δp_{stat} , donc quand elles n'interagissent pas, et celle créée par chacune des capsules en interaction Δp_1 et Δp_2 (figure V.7). Pour $e_0/R = 2$, la différence est nulle car les deux capsules sont à l'état stationnaire et la perte de charge additionnelle est la somme des pertes de charge créées par chacune des capsules isolées. Pour $e_0/R = 0.06$, la différence est d'abord plus grande que pour $e_0/R = 0.16$ et la variation relative de perte de charge atteint quasiment 11% (figure V.7.b). Cela est lié à la compression transversale de la capsule M_1 . En effet, L_{y1} est plus petit pour $e_0/R = 0.06$ que pour $e_0/R = 0.16$, donc l'épaisseur du film de lubrification augmente à mesure que e_0/R diminue. Simultanément, les valeurs de L_{y2} sont proches pour $e_0/R = 0.06$ et $e_0/R = 0.16$ (figure V.6.b) donc la capsule M_2 a peu d'influence sur la perte de charge totale. A partir de $t = 15$, la perte de charge est la même pour $e_0/R = 0.06$ et $e_0/R = 0.16$ car les valeurs de L_{y1} sont identiques. Pour $t > 15$ et $e_0/R = 0.16$, la somme de Δp_1 et Δp_2 tend vers la valeur stationnaire de la perte de charge créée par deux capsule isolées.

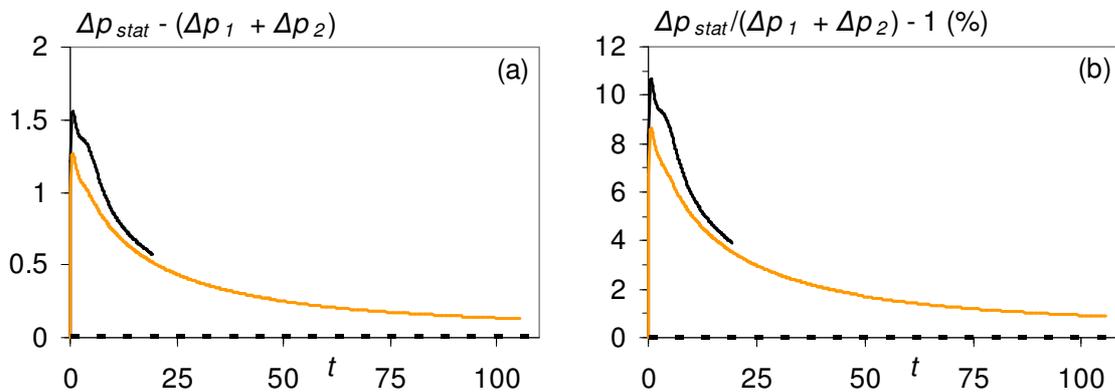


Figure V.7 – (a) : Différence entre la perte de charge créée par deux capsules à l'état stationnaire et celle créée par chacune des capsules en interaction. $a_1/R = a_2/R = 0.8$. $\epsilon = 0.09$. (b) : Variation relative de la perte de charge. Même légende que figure V.4.

On se focalise maintenant sur la distribution de la contrainte pariétale f_x dans le tube (figure V.8), pour deux capsules initialement espacées de $e_0/R = 0.16$. Puisque les capsules sont présentes dans le tube, elles perturbent le champ de contrainte du fluide extérieur. Au temps $t = 0.32$, les centres de

gravité des capsules M_1 et M_2 sont respectivement $X_{g1}/R = 5.78$ et $X_{g2}/R = 4.07$ (figure V.8.c). La valeur de e est proche de sa valeur initiale (figure V.4). La contrainte pariétale est maximale en $x/R = 4.5$. Cette valeur correspond à l'avant de M_2 . La contrainte pariétale ne présente que trois pics (figure V.8.a). En réalité, deux pics se chevauchent en $x/R = 4.5$ car les capsules sont proches à cet instant et ont un effet cumulatif sur la contrainte pariétale. Au cours de l'écoulement, les capsules s'éloignent et le quatrième pic commence à se former (figure V.8.b). Le calcul étant effectué dans un référentiel lié à la capsule M_1 , le centre de gravité de cette dernière n'a pas changé. L'écart entre les capsules augmente au cours de l'écoulement (figure V.4) et au temps $t = 100$, on a $X_{g2}/R = 3.37$. Le creux entre le deuxième et le troisième pic de la figure V.8.b se forme progressivement car dans le référentiel lié à M_1 , M_2 recule. De plus, sur la même figure, les pics de contrainte n°2 et 3 sont légèrement plus petits que le pic n°2 présent aux premiers instants (figure V.8.a) car l'effet cumulatif dû aux deux capsules s'estompe.

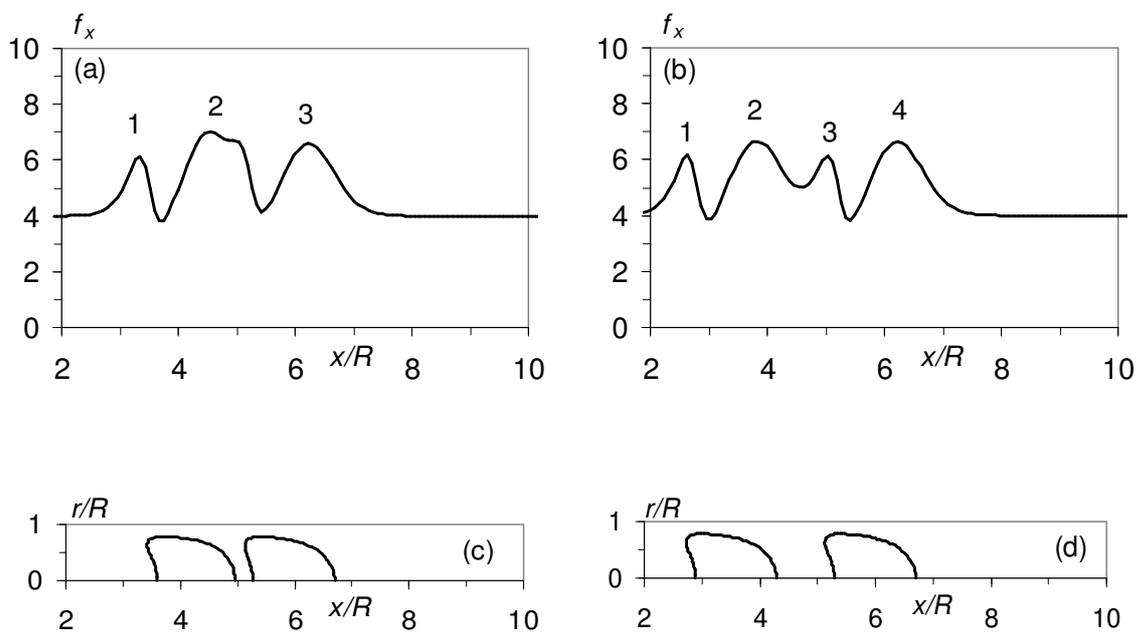


Figure V.8 - Distribution de la contrainte pariétale le long du tube pour $\varepsilon = 0.09$ et $e_0/R = 0.16$. (a) : $t = 0.32$. (b) : $t = 100$. (c) et (d) : Profils correspondant respectivement aux figures (a) et (b).

On s'intéresse à présent à l'effet du nombre capillaire en choisissant $\varepsilon = 0.27$. On a vu que la valeur attribuée à e_0 n'a aucune incidence sur l'état stationnaire des capsules. Par contre, pour $e_0 < e_{stat}$ et à mesure que e_0 diminue, le niveau d'interaction augmente car les déformations sont de plus en plus importantes au début de l'état transitoire (figure V.6). Afin de détecter de plus grandes interactions, on considère de nouvelles valeurs de l'écart initial $e_0/R = -0.11$, -0.02 pour lesquelles le nez de M_2 dépasse l'arrière de M_1 . On étudie aussi le cas $e_0/R = 1.8$ (figure V.9.a).

Pour $e_0/R = 1.8$, l'écart entre les capsules reste constant tout au long du calcul. Ce n'est pas le cas lorsque les capsules sont initialement proches (figure V.9.a). Pour $e_0/R = -0.11$, l'écart tend à rejoindre celui correspondant au cas $e_0/R = -0.02$ et le calcul est arrêté au temps $t = 19$. La valeur stationnaire de l'écart sera la même dans les deux cas. Celle-ci est déterminée en approchant par une exponentielle la courbe du cas $e_0/R = -0.02$ (figure V.9.b). On obtient la meilleure valeur du coefficient de corrélation pour $e_{stat}/R = 0.93$, et le temps caractéristique correspondant est $t_c = 41.15$. Ces valeurs sont sensiblement les mêmes que pour $\varepsilon = 0.09$. Pour les deux valeurs du nombre capillaire considérées jusqu'à présent, la différence sur les valeurs de e_{stat} et t_c peut provenir des différences obtenues sur les valeurs du coefficient de corrélation. Cependant, la valeur de e_{stat} est probablement indépendante du nombre capillaire.

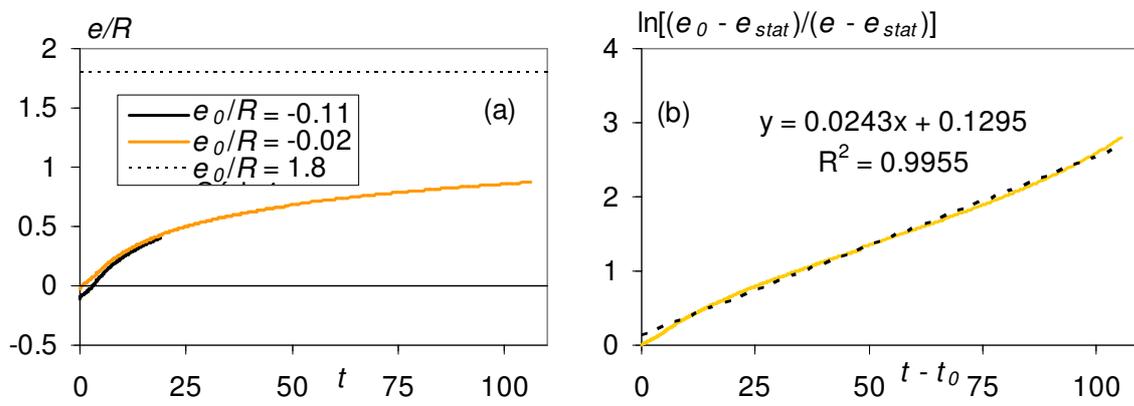


Figure V.9 - (a) : Evolution temporelle de l'écart e entre deux capsules de taille identique $a_1/R = a_2/R = 0.8$, pour $\varepsilon = 0.27$ et trois valeurs de l'écart initial $e_0/R = -0.11$; -0.02 et 1.8 . (b) : Approche par exponentielle.

La contrainte pariétale est très peu affectée par une augmentation du nombre capillaire. En effet, lorsque les capsules sont éloignées, les hauteurs des pics sont les mêmes pour $\varepsilon = 0.09$ et $\varepsilon = 0.27$ (figures V.8.b et V.10.b). Par contre, tout comme pour $\varepsilon = 0.09$, l'écart entre les capsules affecte la distribution de contrainte pour $\varepsilon = 0.27$ (figure V.10.a). Les capsules sont tellement proches l'une de l'autre pour $t = 0.32$ que l'amplitude du pic n°2 dépasse celle des deux autres pics. Le pic n°2 (figure V.10.a) est en réalité une combinaison des pics n°2 et 3 (figure V.10.b).

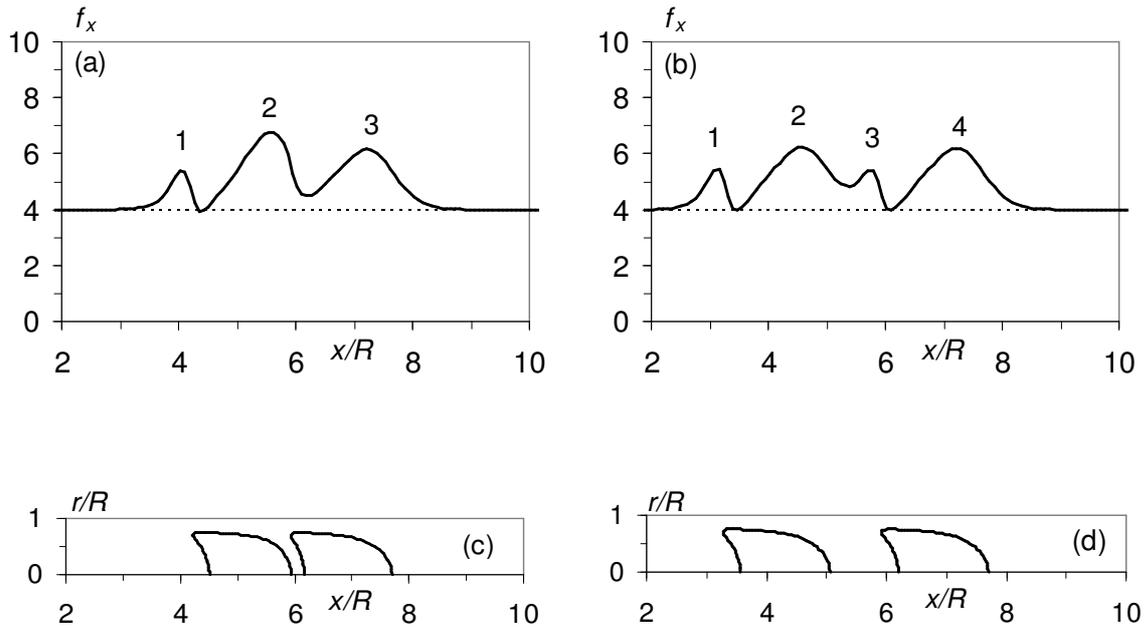


Figure V.10 - Distribution de la contrainte pariétale le long du tube pour $\varepsilon = 0.27$ et $e_0/R = -0.02$. (a) : $t = 0.32$. (b) : $t = 100$. (c) et (d) : Profils correspondant respectivement aux figures (a) et (b).

On considère à présent une augmentation de la taille des capsules. Pour deux capsules de rapport d'aspect 0.8, on a déterminé que la valeur de l'écart à l'état stationnaire ne dépendait pas du nombre capillaire et valait approximativement $e_{stat}/R = 0.9 - 1$. A présent, on considère deux capsules de taille identique $a_1/R = a_2/R = 0.9$ et 1, pour $\varepsilon = 0.09$. On sépare les capsules à l'instant initial de la distance de $e_0/R = 0.16$ mais aussi de $e_0/R = 0.7$, afin d'éviter un temps de calcul trop long et d'atteindre plus rapidement un état stationnaire. On constate que pour les deux valeurs considérées du rapport d'aspect, l'écart augmente et les capsules s'éloignent l'une de l'autre (figure V.11). A écart initial fixé, l'éloignement s'effectue plus rapidement à mesure que la taille des capsules diminue. Cela vient du fait que pour un nombre capillaire donné, la vitesse d'une capsule diminue quand la taille de celle-ci augmente. On constate également qu'à rapport d'aspect fixé, les capsules s'écartent plus rapidement quand e_0 diminue.

Une analyse par exponentielle permet d'identifier les valeurs de e_{stat} et de t_c dans chacun des cas. Pour $e_0/R = 0.7$, on obtient un coefficient de corrélation valant 1 sur un intervalle de valeurs pour chaque rapport d'aspect. Pour deux capsules de taille $a_1/R = a_2/R = 0.9$, e_{stat}/R est compris entre 0.98 et 1.01, et t_c entre 100 et 116. Pour $a_1/R = a_2/R = 1$, e_{stat}/R est compris entre 0.96 et 1, et t_c entre 122 et 147. Afin d'identifier les valeurs optimales de e_{stat} et t_c , on effectue une analyse par exponentielle pour $e_0/R = 0.16$. Il s'avère que pour un rapport d'aspect de 0.9, on trouve $e_{stat}/R = 0.98$ et $t_c = 65.35$. Pour $a_1/R = a_2/R = 1$, on a $e_{stat}/R = 0.96$ et $t_c = 77.52$. Les valeurs de e_{stat} sont très proches quel que soit le rapport d'aspect. Il est d'ailleurs probable que e_{stat} soit indépendant du rapport d'aspect. On constate également que le temps de retour à l'équilibre t_c augmente avec la taille des capsules.

Comme e_{stat} ne dépend pas de la taille, cela vient du fait qu'à nombre capillaire fixé, la vitesse des capsules diminue à mesure que le rapport d'aspect augmente.

La table V.1 récapitule les valeurs de e_{stat} pour différentes valeurs de taille de capsules et de nombre capillaire. Il s'avère que e_{stat} est à la fois indépendant du rapport d'aspect et du nombre capillaire. Dans tous les cas, e_{stat} est compris entre 0.9 et 1 fois le rayon du pore.

	$\epsilon = 0.09$	$\epsilon = 0.27$
$a_1/R = a_2/R = 0.8$	[0.91 ; 1]	0.93
$a_1/R = a_2/R = 0.9$	0.98	Non calculé
$a_1/R = a_2/R = 1$	0.96	[0.9 ; 1]

Table V.1 – Valeur de e_{stat}/R pour différentes valeurs de taille de capsules et de nombre capillaire.

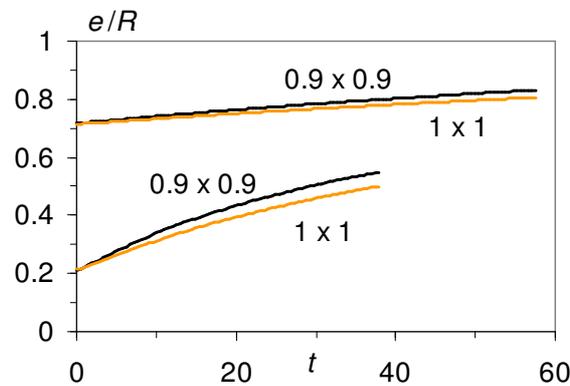


Figure V.11 - Evolution temporelle de l'écart entre deux capsules de taille identique, pour $\epsilon = 0.09$, deux valeurs du rapport d'aspect (0.9 et 1) et deux valeurs de l'écart initial (0.16 et 0.7).

Deux capsules de même taille et en écoulement dans un tube atteignent toujours un état stationnaire, quel que soit la distance e_0 qui les séparent à l'instant initial. Si cette distance est suffisamment grande, les capsules sont déjà stabilisées et s'écoulent de manière indépendante les unes des autres. Dans le cas contraire, elles interagissent mais s'éloignent progressivement. La valeur de l'écart séparant deux capsules à l'état stationnaire est à la fois indépendante du nombre capillaire et de la taille des capsules, et est comprise entre 0.9 et 1 fois la valeur du rayon du pore. Un train de N capsules séparées par environ un rayon de tube est additif et crée une perte de charge additionnelle égale à N fois la perte de charge individuelle de chaque capsule, telle qu'elle a été calculée dans différentes configurations par Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) et Diaz & Barthès-Biesel (2002).

V.5.b Capsules de taille différente

Au cours du processus de fabrication de capsules à membrane d'alginate (Lévy & Edwards-Lévy 1996), il arrive souvent que les capsules n'aient pas toutes la même taille. On a vu dans le chapitre III l'importance du paramètre taille sur l'évolution des déformations, des tensions membranaires et de la perte de charge. C'est pourquoi on considère le cas de capsules de taille différente. Afin de mettre en évidence le rôle de la taille, on étudie deux capsules dont l'une a un rayon 20% plus petit que la seconde, à l'état de référence. On étudie les rapports d'aspect 0.8 et 1. Deux possibilités se présentent pour étudier leur écoulement et les éventuelles interactions hydrodynamiques. Si la grosse capsule suit la petite, les deux capsules n'interagissent pas lorsqu'elles sont suffisamment éloignées. En effet à nombre capillaire fixé, la vitesse de la grande est plus faible que celle de la seconde capsule et les deux capsules s'éloignent indéfiniment. C'est pourquoi on place la grosse capsule en tête d'écoulement. La petite ($a_2/R = 0.8$) est donc la suiveuse. Du fait de la différence de vitesse, les deux capsules se rapprochent au cours de l'écoulement. La méthode numérique utilisée ne pouvant gérer le contact, le calcul s'arrête quand le critère de proximité est réalisé. On ne considère que le cas où $\varepsilon = 0.09$. Pour $\varepsilon = 0.27$, les conclusions établies dans cette partie restent les mêmes que pour $\varepsilon = 0.09$.

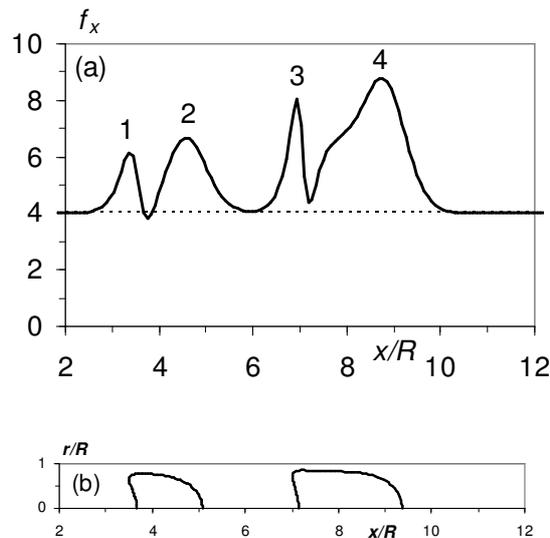


Figure V.12 - (a) : Distribution de la contrainte pariétale le long du tube. $\varepsilon = 0.09$. $a_1/R = 1$ et $a_2/R = 0.8$. $t = 0.64$. (b) : Profils des capsules dans le tube au même instant.

On suit deux capsules espacées initialement par $e_0/R = 2$. A l'instant initial, les capsules ne sont pas encore en interaction. On considère la distribution de la contrainte pariétale f_x le long du tube au temps $t = 0.64$ (figure V.12.a). Les pics n°1 et 2 correspondent à la capsule suiveuse M_2 , et les pics n°3 et 4 à la capsule de tête M_1 . La taille de la capsule a une influence sur la distribution de f_x le long du pore car les pics n°3 et 4 sont plus grands que les deux autres. La contrainte f_x est maximale en $x/R = 9$, ce qui correspond à l'avant de la plus grande capsule (figure V.12.b). Par ailleurs, le troisième pic

apparaît pour $x = x_{min1}$, c'est-à-dire à l'arrière de M_1 . Le creux compris entre les troisième et quatrième pics apparaît en $x/R = 7.2$, valeur pour laquelle M_1 atteint sa dimension radiale la plus grande. La perturbation de contrainte due à la capsule M_1 décroît rapidement dans le tube puisqu'en $x/R = 6$, f_x retrouve sa valeur à l'état non perturbé. Un raisonnement similaire s'applique pour la capsule M_2 .

On se focalise maintenant sur la phase d'approche des deux capsules. Au cours de cette phase, il apparaît que la plus grande capsule, M_1 , se déforme peu car les longueurs L_{x1} et L_{y1} n'évoluent quasiment pas (figure V.13). M_1 n'est donc pas perturbée par la présence de M_2 . Par contre, en s'approchant de M_1 , la capsule M_2 subit une compression axiale car L_{x2} subit une diminution significative de 20% (figures V.13.a et V.14.b) et L_{y2} augmente corrélativement (figure V.13.b). Les capsules interagissent dès que la compression de M_2 commence, c'est-à-dire pour $t \geq 12$. A cet instant, l'écart entre les capsules vaut $e/R = 0.87$ (figure V.15). Cette valeur est proche de celle trouvée précédemment pour des capsules de taille identique.

Au cours de l'écoulement, l'écart diminue car les deux capsules se rapprochent (figures V.14 et 15). Pour $t \geq 18$, l'écart diminue moins rapidement que pour $t \leq 18$ car la diminution de L_{x2} s'accroît et la compression de la capsule M_2 devient de plus en plus importante. Lorsque e/R devient négatif, l'avant de la capsule M_2 est entré dans la partie arrière de la capsule M_1 . Dès que les capsules sont trop proches, le critère de proximité s'applique et le calcul s'arrête. Les deux capsules entrent en contact par la suite. Ce phénomène a été observé par Walter (2006) pour des capsules en écoulement dans des canaux microfluidiques à section circulaire (figure V.16), dans des conditions légèrement différentes. En effet, Walter (2006) a mesuré l'écoulement de capsules dont la plus grande a un rapport d'aspect valant 1.22, pour un nombre capillaire valant environ 0.08.

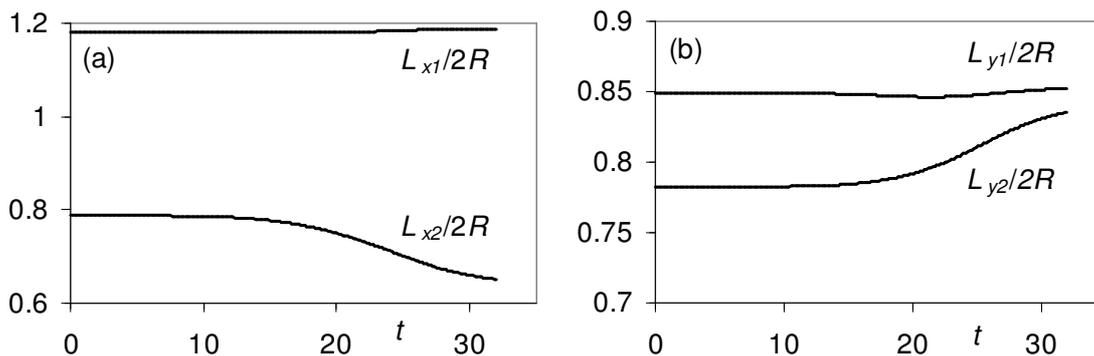


Figure V.13 - Evolution temporelle des longueurs caractérisant la déformation des deux capsules. $\epsilon = 0.09$. $a_1/R = 1$ et $a_2/R = 0.8$.

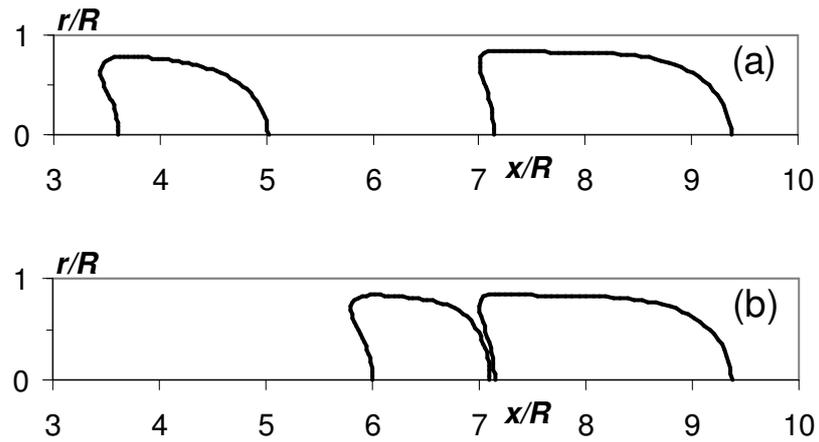


Figure V.14 - Profils des capsules. (a) : à l'instant initial. (b) : à l'instant final.

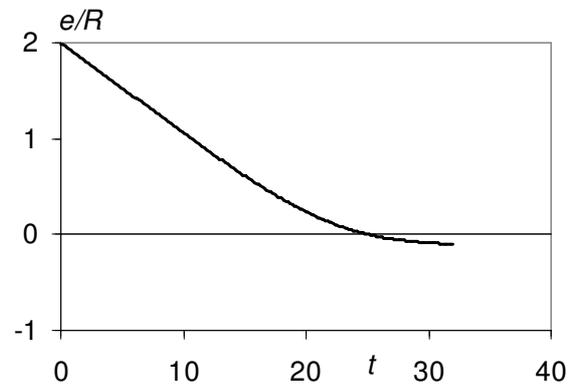
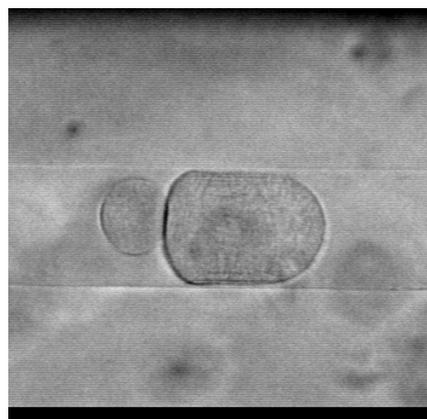


Figure V.15 - Evolution temporelle de l'écart e entre deux capsules de taille différente. $\varepsilon = 0.09$. $a_1/R = 1$ et $a_2/R = 0.8$. $e_0/R = 2$.



Walter (2006)

Figure V.16 - Ecoulement de microcapsules en contact dans un canal cylindrique de diamètre $75 \mu\text{m}$. $a_1/R = 1.22$. $\varepsilon \approx 0.08$.

On s'intéresse à présent aux tensions dans la membrane des capsules (figure V.17). Lorsque les capsules sont éloignées l'une de l'autre, c'est-à-dire pour $t < 12$, les tensions sont à leur valeur à l'état stationnaire. Les tensions à l'avant de M_1 , T_{1f1} , et à l'arrière de M_2 , T_{1r2} , sont peu modifiées au cours de l'écoulement. En réalité, les deux tensions les plus pertinentes sont T_{1r1} et T_{1f2} car elles correspondent respectivement à l'arrière de M_1 et à l'avant de M_2 , parties des capsules où les interactions sont les plus importantes. Pour $t > 12$, la compression de la capsule M_2 commence et s'accompagne d'une diminution de T_{1f2} car l'avant de M_2 devient de moins en moins courbé. Simultanément, la tension T_{1r1} à l'arrière de M_1 diminue légèrement. A partir de $t = 20$, l'écart entre les capsules devient petit (figure V.15) et T_{1r1} augmente car l'avant de M_2 pousse le fluide externe vers l'arrière de M_1 qui se creuse. A l'arrière de la capsule M_1 , les variations de tension sont les plus importantes. En effet, T_{1r1} est multipliée par quatre entre $t = 20$ et $t = 32$. Mais globalement, on constate que les niveaux de tension dans chaque membrane restent à des valeurs modérées, à chaque instant. Il n'y a donc pas de risque accru de rupture des membranes, pour $\varepsilon = 0.09$.

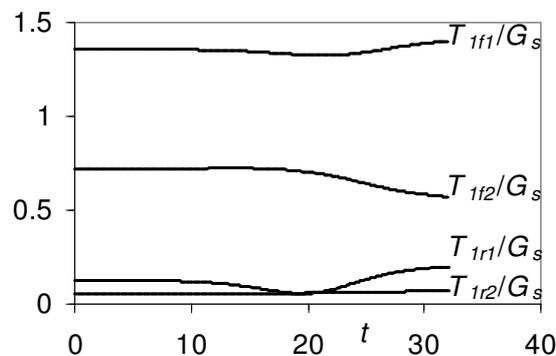


Figure V.17 - Evolution temporelle des tensions à l'avant et à l'arrière de chaque capsule. $\varepsilon = 0.09$.

$$a_1/R = 1 \text{ et } a_2/R = 0.8.$$

La déformation des capsules s'accompagne d'une modification de la perte de charge additionnelle totale Δp (figure V.18.a). On compare sur la figure V.18.b Δp aux pertes de charge Δp_1 et Δp_2 créées par chacune des capsules isolées. Pour $t \leq 10$, les capsules sont trop éloignées pour interagir et Δp est alors égale à la somme de Δp_1 et Δp_2 . Pour $t > 10$, la compression de M_2 commence. La longueur axiale L_{x2} décroît, ce qui provoque une diminution de Δp . En $t = 23$, la longueur radiale de la capsule M_2 augmente, ce qui modifie l'épaisseur du film de lubrification et provoque une augmentation de Δp . A l'instant final, au moment où les deux capsules sont quasiment en contact, Δp est environ supérieure de 2% à la somme de Δp_1 et Δp_2 . On en conclut que lorsqu'un train de deux capsules se forme, la perte de charge dans la conduite n'est que légèrement supérieure à celle créée par chacune des capsules isolément.

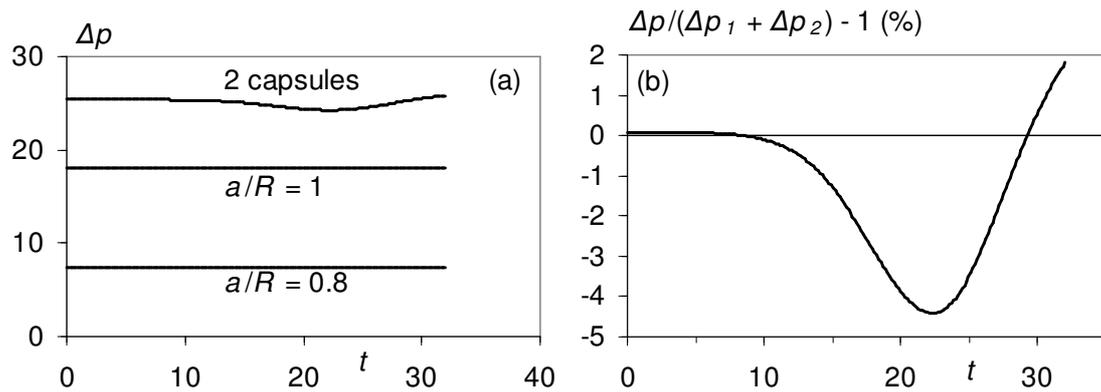


Figure V.18 - (a) : Evolution temporelle de la perte de charge créée par deux capsules dans la constriction. Les cas $a/R = 0.8$ et 1 correspondent à la valeur stationnaire de la perte de charge créée par une seule capsule, dans des conditions d'écoulement identiques. (b) : Variation relative de la perte de charge créée par deux capsules en interaction par rapport à celles créées par chacune des capsules isolées. $a_1/R = 1$ et $a_2/R = 0.8$. $\epsilon = 0.09$.

L'écoulement dans un tube de deux capsules de taille différente est fondamentalement différent de celui de deux capsules de taille identique. Dans le premier cas, les deux capsules sont animées d'une vitesse différente. A conditions d'écoulement identiques, la plus petite est plus rapide que la plus grande. Les deux capsules entrent en contact si la grande se situe devant la petite. La capsule de tête subit alors très peu l'influence de celle qui la suit, tandis que cette dernière se comprime à l'approche de celle qui la précède. La compression s'accompagne d'une augmentation de la dimension transversale de la capsule suiveuse, donc d'une diminution de l'épaisseur du film de lubrification, ce qui affecte la perte de charge. L'état stationnaire des capsules n'est pas directement observé car le modèle numérique ne permet pas d'étudier le contact des capsules. Cependant, il est probable que chacune des capsules se stabilise lors du contact et que les déformations stationnaires soient proches de celles où le critère de proximité est vérifié. Les contraintes pariétales augmentent avec la taille de la capsule, tandis que les contraintes membranaires ne subissent pas d'importantes variations au point d'amorcer la rupture des capsules. Les variations de perte de charge dues à la formation d'un train de deux capsules sont très faibles. Néanmoins, si le nombre de capsules composant le train est important, le surplus de perte de charge peut être non négligeable.

V.6 Conclusion

Les déformations de capsules en écoulement dans des tubes sont différentes de celles de capsules placées dans un écoulement de cisaillement simple. Dans le premier cas, les capsules prennent des formes de 'parachutes' ou de 'slugs'. L'espace fluide présent entre les capsules détermine si elles interagissent ou non. Lorsque les capsules ont une taille identique, elles n'interagissent pas lorsqu'elles sont au minimum séparées par environ 0.9 à 1 fois la valeur du rayon du pore. Dans le

cas contraire, l'écoulement n'est pas stable mais tend vers un équilibre hydrodynamique correspondant au cas de capsules isolées. Lorsque les capsules ont des tailles différentes et pour $\varepsilon = 0.09$, la petite capsule subit une compression alors que la plus grande ne se déforme pas. Là aussi, il existe une valeur particulière de l'écart, d'environ 87% du rayon du pore, au-dessus de laquelle les capsules n'interagissent pas.

Le principe d'additivité des pertes de charges créées par les capsules isolées et de même taille ou non s'applique lorsque le rapport e/R excède la valeur particulière e_{stat}/R . Dans cette situation le raisonnement peut se généraliser à plus de deux capsules. Par exemple la perte de charge créée par trois capsules toutes de taille différente est facilement connue (cf. chapitre III) en sommant chacune des pertes de charge lorsque les capsules sont seules. Par contre, lorsque les capsules interagissent, l'écoulement est plus compliqué et le principe d'additivité ne peut s'appliquer. Le modèle numérique actuel permet d'étudier une large gamme de paramètres pour chacune des capsules tels que la taille, le pré-gonflement, le nombre capillaire ou encore la loi de comportement membranaire. Mais son principal inconvénient est qu'il ne peut pas gérer le contact des capsules. Dès lors que l'on étudie l'écoulement en conduite de deux capsules de taille différente, puisque le contact a lieu à un moment, les capsules vont former un train.

A ce stade, il serait donc intéressant d'étudier l'écoulement d'un train de plus de deux capsules et de déterminer l'évolution de chacune d'entre elles. Il serait utile d'identifier les conditions physiques pour lesquelles le train de capsules est conservé ou au contraire il se disloque. Cette étude serait intéressante à réaliser dans un écoulement non axisymétrique et où les capsules ne seraient pas forcément centrées sur l'axe du pore. Si on décentre les capsules, ces dernières ont tendance à se recentrer dans le pore car elles sont déformées par l'écoulement (Helmy & Barthès-Biesel 1982). Malheureusement, cette étude ne peut être effectuée pour le moment car le modèle numérique actuel est valable pour une configuration axisymétrique et les centres de gravité de chaque capsule sont situés à chaque instant sur l'axe du tube.

Il serait également utile de calculer les écoulements en gardant la perte de charge constante, afin de déterminer quel débit il faut fournir pour retrouver les déformations des capsules dans une configuration connue.

Conclusion générale

L'objectif du travail de thèse exposé dans ce mémoire était d'apporter de nouvelles connaissances sur le comportement mécanique de capsules en écoulement dans un pore cylindrique. Plusieurs configurations ont été étudiées : l'état stationnaire de capsules soumises à un pré-gonflement, la phase transitoire en sortie de tube, et l'écoulement de deux capsules dans le pore. Les contributions de ce travail se situent à plusieurs niveaux dont ceux de la modélisation numérique et de l'interprétation des phénomènes physiques gouvernant chacun des écoulements étudiés.

Dans le cadre de la modélisation numérique, on a repris et adapté le code de Diaz & Barthès-Biesel (2002). Le modèle numérique repose sur une technique d'interpolation par fonctions B-splines couplée à une formulation par intégrales de frontières. Cette formulation est une méthode qui n'a plus à faire ses preuves, car elle permet d'étudier de nombreux écoulements, qu'ils soient infinis ou délimités par des frontières. Dans le cas de ces derniers, la frontière solide peut être un pore cylindrique connecté à ses extrémités à une constriction hyperbolique. Avec une telle formulation, seules les frontières nécessitent une discrétisation. L'étape de maillage des volumes interne et externe à la capsule n'existe pas, ce qui présente un gain numérique vis-à-vis des logiciels d'éléments finis tridimensionnels. La qualité de l'interpolation pour la membrane se mesure en contrôlant la variation du volume de la capsule, qui doit rester proche de zéro. Si ce n'est pas le cas, on augmente la finesse de discrétisation de la membrane.

La présence d'une capsule déformable altère à la fois l'écoulement intérieur et extérieur à celle-ci. Cependant, à l'état stationnaire, le fluide interne est au repos. La capsule prend une forme de 'parachute' ou de 'slug', selon les valeurs de la taille de la capsule, de son pré-gonflement et de la vitesse débitante. Lorsque le pré-gonflement des capsules augmente, le niveau de tension dans la membrane croît et les déformations diminuent. La longueur d'établissement de l'état stationnaire diminue et le changement de concavité de l'arrière de la capsule s'effectue à un nombre capillaire plus grand. Les données expérimentales sur la compression entre deux plaques de capsules à membrane d'alginate ne suffisent pas à déterminer sans ambiguïté les valeurs des modules d'élasticité et la loi de comportement de la membrane. La disponibilité de résultats expérimentaux sur l'écoulement de telles capsules dans un tube cylindrique permet d'effectuer une analyse inverse. Par comparaison des profils numériques et expérimentaux, on identifie la loi de comportement de la membrane, le rapport des modules d'élasticité, ainsi que le pré-gonflement des capsules.

Ces résultats sont également valables lors de l'écoulement des capsules en sortie de tube. Cela permet de valider définitivement le modèle représentant le comportement mécanique de capsules à membranes d'alginate. Par ailleurs, l'étude de la phase transitoire permet de mettre en évidence plusieurs phénomènes physiques. Par exemple, le processus de relaxation est fondamentalement différent du processus d'entrée, car dans un premier temps la capsule se comprime axialement et

Conclusion générale

s'étire transversalement. De plus, la phase de relaxation ne dépend pas du rapport entre les viscosités des fluides interne et externe, car le fluide convectant la capsule est en mouvement. Les effets viscoélastiques présents lors de cette phase brisent la réversibilité de l'écoulement. Par contre, quand la capsule se relâche dans un fluide au repos, l'effet du rapport des viscosités se fait sentir. Une capsule enfermant un milieu interne plus visqueux que le milieu externe met plus de temps à se relâcher qu'une capsule dont le milieu interne est faiblement visqueux.

Lorsque deux capsules sont en interaction hydrodynamique, le comportement de l'une vis-à-vis de l'autre dépend essentiellement de leur taille respective. Deux cas sont alors à distinguer. Pour deux capsules de taille initialement identique, il existe une séparation minimale, de l'ordre de 0.9 à 1 fois le rayon du pore, au-delà de laquelle elles n'interagissent pas. Lorsque les capsules sont initialement proches, elles interagissent et la capsule suiveuse a tendance à s'éloigner de celle qui la précède jusqu'à ce que chaque capsule tende vers un état stationnaire correspondant à celui d'une capsule isolée. Dans ce cas, la perte de charge additionnelle totale dans le tube est la somme des deux pertes de charge créées individuellement par chaque capsule. Le principe d'additivité des pertes de charge est alors valable. Pour deux capsules de tailles différentes, on peut distinguer deux cas. Si la plus grosse est la capsule suiveuse, elle ne rencontre jamais la capsule de tête car elle est animée d'une vitesse plus petite. Par contre, si la plus grosse est en tête, la plus petite rattrape la grande et se comprime axialement à mesure que les deux capsules se rapprochent. La grande capsule, quant à elle, ne se déforme pas et ne ressent pas l'influence de la petite. Malheureusement, le modèle numérique ne permet pas de gérer le contact des capsules, sous peine d'erreurs numériques importantes, si bien qu'un critère d'arrêt doit être imposé au cours du calcul. Néanmoins, on peut prédire que les capsules entrent en contact et atteignent probablement un état stationnaire. Dès lors, un train de capsules se forme dans le tube et la perte de charge créée par le train est voisine de celle créée par deux capsules isolées. Cependant, si le nombre de capsules composant le train devient important, il est possible qu'un effet cumulatif apparaisse et que la perte de charge du train excède celle créée par chaque capsule isolément.

Perspectives

Ce travail de thèse m'a permis d'acquérir une certaine expérience dans la modélisation numérique. Au fil de la réflexion, de nouvelles idées pour de futures études sont apparues. Il serait intéressant :

- de déterminer la valeur maximale du nombre capillaire au-dessus de laquelle un état stationnaire n'existe pas dans le tube, en fonction du pré-gonflement et de la loi de comportement membranaire,
- de modéliser des déformations plastiques pour la membrane,
- de prendre en compte un pré-gonflement pour des capsules initialement non sphériques,
- d'étudier le phénomène de diffusion à travers la membrane de la capsule,
- d'étudier l'effet d'un changement de géométrie à l'intérieur du pore, dans le but de modéliser l'écoulement dans une sténose,
- de calculer l'écoulement transitoire de deux capsules en sortie, notamment pour des tailles du même ordre de grandeur que celle du tube. Il faudrait prendre en compte les intégrales de double couche pour chacune des capsules. Il serait alors intéressant de déterminer dans quelles situations le risque d'adhésion des capsules à la paroi est favorisé.
- de calculer l'écoulement d'un train périodique de capsules dans un pore. On pourrait ainsi étudier le comportement d'une capsule comprise entre deux autres, ce que le modèle numérique présenté dans ce mémoire n'a pas pris en compte. On pourrait alors déterminer si les capsules se repoussent les unes les autres au cours de l'écoulement ou si au contraire elles ont tendance à former un agglomérat obstruant le pore.
- de décentrer les capsules par rapport à l'axe du pore. Cela briserait l'hypothèse d'axisymétrie du problème présenté dans ce mémoire. Dans ce cas, il faudrait établir un nouveau modèle d'écoulement tridimensionnel délimité par des parois.

La thématique de recherche traitant de l'encapsulation est très importante en terme d'enjeux scientifiques et industriels. Par exemple, le domaine de la microfluidique a connu un essor sans précédent ces dernières années et il apparaît indispensable d'améliorer les modèles numériques à disposition. En effet, la miniaturisation des capsules pose des problèmes de nature mécanique et chimique. Il serait donc très utile de compléter les études sur les capsules par une approche pluridisciplinaire, donc d'adopter des points de vue chimiste voire biologiste.

Bibliographie

- ABRAHAMSSON, B., ROOS, K. & SJOGREN, J. 1999 Investigation of prandial effects on hydrophilic matrix tablets. *Drug Dev. Ind. Pharm.* **25** (6), 765-771.
- AKCHICHE, M. 1987 Etude expérimentale du mouvement et de la déformation d'une capsule sous l'effet de l'écoulement d'un fluide visqueux. Application au globule rouge. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- BARTHÈS-BIESEL, D. & RALLISON, J. M. 1981 The time independent deformation of a capsule freely suspended in a linear flow. *J. Fluid Mech.* **113**, 251.
- BARTHÈS-BIESEL, D. & SGAIER, H. 1985 Role of membrane viscosity in the orientation and deformation of a spherical capsule suspended in shear flow. *J. Fluid Mech.* **160**, 119.
- BARTHÈS-BIESEL, D. 1991 Role of interfacial properties on the motion and deformation of capsules in shear flow. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics* **172**, 103-124.
- BARTHÈS-BIESEL, D. 2003 *Modelling and Simulation of Capsules and Biological Cells*, chap. Flow-induced capsule deformation, pp. 1–31. Chapman & Hall/CRC.
- BARTHÈS-BIESEL, D., DIAZ, A. & DHENIN, E. 2002 Effect of constitutive laws for two dimensional membranes on flow-induced capsule deformation. *J. Fluid Mech.* **460**, 211–222.
- BENTLEY, B. J. & LEAL, L. G. 1986a A computer-controlled four-roll mill for investigations of particle and drop dynamics in two-dimensional linear shear flows. *J. Fluid Mech.* **167**, 219-240.
- BENTLEY, B. J. & LEAL, L. G. 1986b An experimental investigation of drop deformation and breakup in steady, two-dimensional linear flows. *J. Fluid Mech.* **167**, 241-283.
- BREYIANNIS, G. & POZRIKIDIS, C. 2001 Simple shear flow of suspensions of elastic capsules. *Theor. and Comp. Fluid Dyn.* **13**, 327-347.
- BRUNN, P. 1983 The deformation of a viscous particle surrounded by an elastic shell in a general time-dependent linear flow-field. *J. Fluid Mech.* **126**, 533-544.
- CARIN, M., BARTHÈS-BIESEL, D., EDWARDS-LÉVY, F., POSTEL, C. & ANDREI, C. D. 2003 Compression of biocompatible liquid filled hsa-alginate capsules: determination of the membrane mechanical properties. *Biotech. Bioeng.* **82**, 207.
- CHANG, K. S. & OLBRICHT, W. L. 1993a Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in extensional flow. *J. Fluid Mech.* **250**, 587-608.
- CHANG, K. S. & OLBRICHT, W. L. 1993b Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in steady and unsteady simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **250**, 609-633.
- CHARLES, R. & POZRIKIDIS, C. 1998 Significance of the dispersed-phase viscosity on the simple shear flow of suspensions of two-dimensional liquid drops. *J. Fluid Mech.* **365**, 205-233.
- CHIEN S. L., SKALAK, R., USAMI, S. & TÖZEREN A. 1978 Theoretical and experimental studies of viscoelastic properties of erythrocyte membrane. *Biophys. J.* **24**, 463.
- COLLÉ-PAILOT, F. 2002 Mouvement et déformation d'une capsule bioartificielle au sein d'un écoulement en petit tube. Thèse de doctorat, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.
- DAVID, B., DORE, E., JAFFRIN, M.Y. & LEGALLAIS, C. 2004 Mass transfers in a fluidized bed bioartificial liver using alginate beads. *Int J Artif Organs.* **27**, 284–293.

Bibliographie

- DIAZ, A. 2000 Comportement transitoire d'une capsule axisymétrique en suspension. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- DIAZ, A., PELEKASIS, N. A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2000 Transient response of a capsule subjected to varying flow conditions: effect of internal fluid viscosity and membrane elasticity. *Phys. Fluids* **12**, 948–957.
- DIAZ, A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2002 Entrance of a bioartificial capsule in a pore. *CMES* **3** (3), 321–337.
- DROCHON, A. 2005 Use of cell transit analyser pulse height to study the deformation of erythrocytes in microchannels. *Med. Eng. Phys.* **27**, 157-165.
- EGGLETON, C. D. & POPEL, A. S. 1998 Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow. *Phys. Fluids* **10**, 1834–1845.
- EVANS, E. A. & SKALAK, R. 1980 *Mechanics and thermodynamics of biomembranes*. CRC Press.
- FUNG, Y.C. 1993 *Biomechanics, Mechanical properties of living tissues*. Second Edition, Springer Verlag (NY).
- GUIDO, S. & SIMEONE, M. 1998 Binary collision of drops in shear flow by computer-assisted video optical microscopy. *J. Fluid Mech.* **357**, 1-20.
- HELMY, A., BARTHÈS-BIESEL, D. 1982 Migration of a spherical capsule freely suspended in an unbounded parabolic flow. *J. Theo & App. Mech.* **1**, 5, 859-880.
- HOCHMUTH, R. 2000 Micropipette aspiration of living cells. *J. Biomech.* **33**, 15-22.
- HSU, R., SECOMB, T. 1989 Motion of non-axisymmetric red blood cells in cylindrical capillaries.
- KRAUS, M., WINTZ, W., SEIFERT, U. & LIPOWSKY, R. 1996 Fluid vesicle in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3685–3688.
- KÜHTREIBER, W. M., LANZA, R. P. & CHICK, W. L. 1998 *Cell encapsulation technology and therapeutics*. Birkhäuser.
- KWAK, S. & POZRIKIDIS, C. 1998 Adaptive triangulation of evolving, closed or open surfaces by the advancing-front method. *J. Comp. Phys.* **145**, 61-88.
- LAC, E. 2003 Déformation et convection d'une capsule dans un écoulement de Stokes tridimensionnel infini. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- LAC, E., BARTHÈS-BIESEL, D., PELEKASIS, N. A. & TSAMOPOULOS, J. 2004 Spherical capsules in three-dimensional unbounded stokes flow: effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.* **516**, 303–334.
- LAC, E. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2005 Deformation of a capsule in simple shear flow: effect of membrane prestress. *Phys. Fluids* **17**, 0721051-0721058.
- LAC, E., MOREL, A., BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Hydrodynamic interaction between two identical capsules in shear flow. *J. Fluid Mech.* **573**, 149-169.
- LADYZHENSKAYA, O. A. 1969 *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach.
- LÉVY, M.C., EDWARDS-LÉVY, F. 1996 Coating alginate beads with cross-linked biopolymers: a novel method based on a transacylation reaction. *J. Microencapsulation.* **13**:169-83.

Bibliographie

- LEYRAT-MAURIN, A. & BARTHÈS-BIESEL D. 1994 Motion of a deformable capsule through an hyperbolic constriction. *J. Fluid Mech.* **279**, 135-163.
- LI, X. Z., BARTHÈS-BIESEL, D. & HELMY, A. 1988 Large deformations and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow. *J. Fluid Mech.* **187**, 179–196.
- LIM, FRANKLIN 1984 Biomedical applications of microencapsulation. CRC Press, Boca Raton.
- LOEWENBERG, M. & HINCH, E.J. 1997 Collision of two deformable drops in shear flow. *J. Fluid Mech.* **338**, 299–315.
- NAVOT, Y. 1998 Elastic membranes in viscous shear flow. *Phys. Fluids*, **10** (8),1819-1833.
- PFAFFEROTT, C., WENBY, R. & MEISELMAN, H. J. 1985 Red blood cell deformation in shear flow. Effects of internal and external phase viscosity and of in vivo aging. *Biophys. J.* **47**, 695-704.
- POZRIKIDIS, C. 1992 *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press.
- POZRIKIDIS, C. 1995 Finite deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **297**, 123.
- POZRIKIDIS, C. 2003a Deformed shapes of axisymmetric capsules enclosed by elastic membranes. *J. Eng. Math.* **45**, 169–182.
- POZRIKIDIS, C. 2003b *Modeling and simulation of capsules and biological cells*, chap. Shell theory for capsules and cells, pp. 35–102. Chapman & Hall/CRC.
- POZRIKIDIS, C. 2005 Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Phys. Fluids* **17** (3), 031503.
- QUÉGUINER, C. & BARTHÈS-BIESEL, D. 1997 Axisymmetric motion of capsules through cylindrical channels. *J. Fluid Mech.* **348**, 349–376.
- RACHIK, M., BARTHÈS-BIESEL, D., CARIN, M. & EDWARDS-LÉVY, F. 2006 Identification of the elastic properties of an artificial capsule membrane with the compression test: effect of thickness. *J. Coll. Int. Sc.* **301**, 217-226.
- RAMANUJAN, S. & POZRIKIDIS, C. 1998 Deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow: Large deformations and the effect of capsule viscosity. *J. Fluid Mech.* **361**, 117–143.
- RICHARD, J., BENOÎT, J.P. 2000 Microencapsulation. Techniques de l'Ingénieur. Génie des Procédés **ISSN** 1762-8725, volume **J2**, n°J2210, pp. J2210.1-J2210-20.
- RISSO, F. & CARIN, M. 2004 Compression of a capsule: Mechanical laws of membranes with negligible bending stiffness. *Phys. Rev. E* **69**, 061601–061608.
- RISSO, F., COLLÉ-PAILLOT, F. & ZAGZOULE, M. 2006 Experimental investigation of a bioartificial capsule flowing in a narrow tube. *J. Fluid Mech.* **547**, 149–173.
- SCHMID-SCHÖNBEIN, H. & WELLS, R. E. 1960 Fluid drop like transition of erythrocytes under shear. *Science* **165**, 288-291.
- SECOMB, T., SKALAK, R., OZKAYA, N. & GROSS, J. 1986 Flow of axisymmetric red blood cell in narrow capillaries. *J. Fluid Mech.* **163**, 405-423.
- SECOMB, T. 1995 Mechanics of blood flow in the microcirculation. *Symp Soc Exp Biol.* **49**, 305–321.

Bibliographie

- SECOMB, T. W. & HSU, R. 1996a Analysis of red blood cell motion through cylindrical micropore: effect of cell properties. *Biophys. J.* **71**, 1095.
- SECOMB, T. W. & HSU, R. 1996b Motion of red blood cells in capillaries with variable cross-sections. *J. of Biomech. Eng.* **118**, 539.
- SHERWOOD, J. D., RISSO, F., COLLÉ-PAILOT, F., EDWARDS-LÉVY, F. & LÉVY, M. C. 2003 Transport rates through a capsule membrane to attain Donnan equilibrium. *J. Colloid Interface Sci.* **263**, 202–212.
- SKALAK, R., TOZEREN, A., ZARDA, R. P. & CHIEN, S. 1973 Strain energy function of red blood cell membranes. *Biophys. J.* **13**, 245–264.
- SKALAK, R., KELLER, S., SECOMB, T. 1981 Mechanics of blood flow. *J. Biomech.* **103** (2), 102-115.
- SOON-SHIONG P. 1999 *Cell encapsulation technology and therapeutics* , chap. Microencapsulated Islets in type I diabetics : clinical experience. Birkhäuser.
- TAYLOR, G. I. 1934 The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* **146**, 501-523.
- TÖZEREN, A., SKALAK, R., SUNG, K. L., CHIEN, S. L. 1982 Viscoelastic behavior of erythrocyte membrane. *Biophys. J.* **39**, 263.
- TÖZEREN, A., SKALAK, R., FEDORCIW, B., SUNG, K. L., CHIEN, S. L. 1984 Constitutive equation of erythrocyte membrane incorporating evolving preferred configuration. *Biophys. J.* **45**, 541.
- WALTER, A., REHAGE, H. & LEONHARD, H. 2000 Shear-induced deformation of polyamid microcapsules. *Colloid Polymer Sci.* **278**, 169-175.
- WALTER, A., REHAGE, H. & LEONHARD, H. 2001 Shear-induced deformation of microcapsules: shape oscillations and membrane folding. *Colloids and Surfaces A: Physicochem Eng. Aspects* **183-185**, 123-132.
- WALTER, J. 2006 Ecoulement de capsules artificielles en systèmes microfluidiques: étude exploratoire. Rapport de MASTER. Université de Technologie de Compiègne, France.
- YEOH, O. H. 1993 Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chem. Technol.* **66**, 754-771.
- YOUNGREN, G. K. & ACRIVOS, A. 1976 Stokes flow past a particle of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.* **76**, 433-442.
- YOUNGREN, G. K. & ACRIVOS, A. 1976 On the shape of a gas bubble in a viscous extensional flow. *J. Fluid Mech.* **76**, 433-442.
- ZHOU, H. & POZRIKIDIS, C. 1995 Deformation of liquid capsules with incompressible interfaces in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **283**, 175.
- ZIMMERMAN U., HASSE C., ROTHMUND M., KÜHTREIBER W. 1999 *Cell encapsulation technology and therapeutics*, chap. Biocompatible encapsulation materials : fundamentals and application. Birkhäuser Boston.

Annexe

Nomenclature

Les pages de la nomenclature présentent les principaux symboles et notations utilisés dans ce mémoire et leur signification.

Lettres latines

a_0	Rayon de la particule à l'état non précontraint
a	Rayon de la particule à l'état précontraint
a_1, a_2	Rayons des particules de tête et suiveuse, respectivement
A	Paramètre de la loi ES
A_y	Paramètre de la loi de Yeoh
B_s	Module de résistance à la flexion
C_1^0, C_2^0	Courbures à l'état de référence, dans les directions méridionale et azimutale respectivement
C_1, C_2	Courbures à l'état déformé, dans les directions méridionale et azimutale respectivement
C_f, C_r	Courbures à l'avant et à l'arrière de la capsule, respectivement
C	Paramètre de la loi Sk
d_{min}	Plus petite distance entre un point de collocation de la capsule de tête et un point de collocation de la capsule suiveuse
e	Ecart entre les deux capsules
e_0	Ecart initial entre les deux capsules
e_L	Epaisseur du film de lubrification
e_{stat}	Valeur stationnaire de l'écart entre les deux capsules
E	Surface fluide
\mathbf{f}_b	Force exercée par les frontières W et S sur le fluide externe
f_x	Composante axiale de la contrainte pariétale
G_s	Module de cisaillement surfacique de la membrane
h_0	Epaisseur de la membrane à l'état initial
\mathbf{J}	Fonction de Green associée au potentiel de simple couche
\mathbf{K}	Fonction de Green associée au potentiel de double couche
K_s	Module surfacique de dilatation de surface de la membrane
L	Longueur du tube
L_d	Périmètre déformé de la capsule
L_x	Longueur de la capsule dans la direction de l'écoulement
L_y	Longueur de la capsule dans la direction transversale
L_{fr}	Longueur axiale de la capsule

L_{stat}	Longueur de tube au bout de laquelle la capsule atteint un état stationnaire
M	Frontière délimitant la membrane
M_1, M_2	Frontières délimitant la membrane des capsules de tête et suiveuse, respectivement
Q	Débit de l'écoulement
R	Rayon du pore
S	Surface fluide
$T^{(0)}$	Tension membranaire à l'état de référence
T_1, T_2	Tensions dans les directions méridionale et azimutale, respectivement
T_{1max}, T_{2max}	Tensions maximales dans les directions méridionale et azimutale, respectivement
T_{1f}, T_{1r}	Tensions à l'avant et à l'arrière de la capsule, respectivement
\mathbf{v}	Champ des vitesses
\mathbf{v}^∞	Champ des vitesses non perturbées
V_g	Vitesse du centre de gravité de la capsule
W	Surface solide délimitant la constriction
W_d	Energie de déformation
\mathbf{x}	Position d'un point de collocation de la capsule à un instant t
\mathbf{X}	Position initiale d'un point de collocation de la capsule
X_g	Position du centre de gravité de la capsule
X_{g1}, X_{g2}	Positions du centre de gravité des capsules de tête et suiveuse, respectivement
x_{max}	Abscisse maximale de la capsule
x_{min}	Abscisse minimale de la capsule

Lettres grecques

α	Valeur du pré-gonflement
γ	Angle d'ouverture du convergent ou du divergent
δ_1	Distance en aval du pore au bout de laquelle la courbure arrière de la capsule change de signe
δ_2	Distance en aval du pore au bout de laquelle l'état relâché est atteint
Δf	Charge membranaire
Δp	Perte de charge additionnelle dans le pore due à la présence de la ou des capsules
Δt	Pas de temps
ε	Nombre capillaire
ε_c	Valeur du nombre capillaire pour laquelle la courbure arrière de la capsule change de signe
ε_0	Valeur du nombre capillaire au-dessus de laquelle l'état stationnaire n'existe pas
λ	Rapport entre les viscosités du fluide interne à la capsule et le fluide porteur
λ_1, λ_2	Rapports d'extension dans les directions méridionale et azimutale respectivement
ψ	Paramètre de la loi MR
σ	Champ des contraintes

Liste des communications et des publications

BARTHÈS-BIESEL, D., LAC, E., LEFEBVRE, Y. 2005 Effect of positive osmotic pressure on flow of bioartificial capsules. 12th International Congress of Biorheology (ICB), Chongqing, Chine. In *Biorheology*, 42. 27. 2005.

BARTHÈS-BIESEL, D., LECLERC, E., LEFEBVRE Y., WALTER, J. 2006 Flow of bioartificial capsules in microchannels. 5th World Congress of Biomechanics, Munich. **Keynote lecture**. In *Journal of Biomechanics*, volume 39, supplement 1, S332, 2006.

LECLERC, E., LEFEBVRE, Y., WALTER, J., EDWARDS-LÉVY, F., BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Flow of artificial capsules in microchannels: a method for measuring membrane elastic properties. 11th International Conference on Miniaturized Systems for Chemistry and Life Sciences, MicroTAS 2007 Conference, Paris.

LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2005 Effect of osmotic pressure on the flow of a bioartificial capsule into a cylindrical pore. 30ème Congrès de la Société de Biomécanique, Bruxelles. In *Computer Methods in Biochemanics and Biomedical Engineering*, 8, 179-180. 2005.

LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2005 Effet de la pression osmotique sur l'écoulement de capsules bioartificielles dans un tube. 17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes.

LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2006 Bioartificial capsule flowing out of a cylindrical pore. 5th World Congress of Biomechanics, Munich. In *Journal of Biomechanics*, volume 39, supplement 1, S625, 2006.

LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Motion of a capsule in a cylindrical tube: effect of membrane pre-stress. *J. Fluid Mech.* Sous presse.

LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Interaction hydrodynamique de deux capsules en écoulement dans un pore cylindrique. 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble.

Motion of a capsule in a cylindrical tube: effect of membrane pre-stress

By **Yannick Lefebvre & Dominique Barthès-Biesel**

UMR CNRS 6600, Biomécanique et Génie Biomédical,
Université de Technologie de Compiègne, France.

(Received 19 March 2007)

We present a numerical model of the axisymmetric flow of an initially spherical capsule in a co-axial cylindrical tube. The capsule consists of a liquid droplet enclosed by a thin hyper-elastic membrane that is assumed to obey different membrane constitutive equations such as Mooney-Rivlin, Skalak et al. (Skalak *et al.* 1973) or Evans & Skalak (Evans & Skalak 1980) laws. It is further assumed that the capsule may be subjected to some isotropic pre-stress due to initial swelling. We compute the steady flow of the capsule inside the tube as a function of the size ratio between the capsule and tube radii, the amount of pre-swelling and the membrane constitutive law. We thus determine the deformed profile geometry and specifically the onset of the curvature inversion at the back of the particle. We show that for a given size ratio, the critical flow rate at which the back curvature changes is strongly dependent on pre-inflation. The elastic tension level in the membrane as well as the additional pressure drop created by the presence of the particle are also computed. The numerical results are then compared to experimental observations of capsules with alginate membranes as they flow in small tubes (Risso *et al.* 2006). It is found that the experimental capsules were probably pre-inflated by about 3% and that their membrane is best modelled by the Skalak et al. law.

1. Introduction

A simple capsule consists of a liquid droplet surrounded by a thin membrane that controls exchanges between the environment and the capsule internal contents and has thus a protection role. Such particles may be considered as models of simple cells like red blood cells, but they are also found in many industrial applications where a substance has to be protected until ready to be used. For example, there are capsules in a number of common products such as pesticides, inks, cosmetics. They are also used for bioengineering applications like drug targeting or cell encapsulation (Kühtreiber *et al.* 1998). In most situations, capsules are suspended into another liquid and are thus subjected to hydrodynamic forces when the suspension is flowing. The motion of the suspending and internal liquids creates a viscous deformation and may lead to break-up. The control of this process is essential for the design of artificial capsules and a number of studies have been published over the years on this topic.

Most models consider the simple prototypical case of a capsule consisting of a Newtonian incompressible liquid droplet surrounded by an infinitely thin membrane that can be treated as a two-dimensional elastic surface with known mechanical properties. Thus, the deformation of an initially spherical capsule freely suspended in a shear flow has been computed as a function of shear rate when the membrane obeys a neo-Hookean type of law (e.g. Li *et al.* 1988; Ramanujan & Pozrikidis 1998; Eggleton & Popel 1998; Diaz *et al.* 2000; Lac *et al.* 2004). Area incompressible membranes have been considered to model the behaviour of red blood cells or lipid vesicles (e.g. Kraus *et al.* 1996; Ramanujan & Pozrikidis 1998; Eggleton & Popel 1998). The bending rigidity of the membrane has also been taken into account (Kraus *et al.* 1996; Kwak & Pozrikidis 1998). Recently, Lac *et al.* (2004) compared different membrane laws where the shear and area dilation modulus were of the same order of magnitude. They find that the elastic constitutive law

of the membrane significantly affects the overall deformation of a capsule subjected to an unbounded shear flow. In particular, they show that at shear rates lower than some critical value, the capsule reaches an equilibrium deformed state that is unstable owing to the presence of negative principal tensions that cause membrane buckling. They also find that for shear rates larger than another critical value, no equilibrium can be obtained and break-up would be assumed to occur. All the above studies assume that the initial capsule shape is unstressed.

Another situation of interest that has not been studied much is the one where the external flow is bounded. This occurs when the capsule is forced to flow into a small pore with cross dimensions of the same order as its own. This configuration is found in blood microcirculation, in filtration or in transport of a capsule suspension in microchannels. For example, the flow of red blood cells in microvessels has been modelled for centred or off-centred cells (Secomb 1995). Then the ‘capsule’ is not initially spherical (discocyte shape) and its deformation is strongly dependent on the membrane being area incompressible. The case of initially spherical capsules enclosed by a neo-Hookean membrane flowing through cylindrical pores has been considered by Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) who showed that the capsule takes a steady parachute shape when its radius is smaller than or equal to the pore radius. When its radius is larger than the pore’s, the capsule takes a slug shape. These results have been completed by Diaz & Barthès-Biesel (2002) who considered different constitutive laws for the membrane and different initial capsule geometries, as measured by a sphericity index. They thus showed that, at high flow strength, the membrane constitutive law and the surface to volume ratio have a measurable influence on the geometry of the final deformed parachute shape and on the additional pressure drop created by the capsule. They also studied the influence of the viscosity ratio between the internal and external liquids on the transient entrance phase

and showed that increasing the capsule internal viscosity led to larger pressure peaks during entrance. The case of an axisymmetric file of red blood cells has also been considered by Pozrikidis (2005), who studied the influence of the cell to vessel radius and of cell spacing on the dynamics of the suspension.

Recently, Risso *et al.* (2006) reported a thorough experimental study of the flow in a cylindrical pore of initially spherical capsules with a membrane made of alginate covalently linked to human serum albumin (HSA). The capsule membrane elastic properties were measured by means of compression experiments (Carin *et al.* 2003; Risso & Carin 2004) and the steady capsule profile in the tube was recorded with a video camera as a function of flow strength and size ratio between the capsule and the tube. A comparison of the experimental profiles and those predicted by Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) showed that the agreement between the experimental results and the model was not very good, and that the numerical deformation was larger than the measured one.

However, a previous experimental study of the same capsules (Sherwood *et al.* 2003) has shown that they were prone to osmotic effects owing to the presence of large poly-electrolytes in the internal liquid due to partial dissolution of the membrane material. Thus one is led to suspect that in Risso *et al.* (2006) experiments, the capsules may have been subjected to internal pre-stress due to uncontrolled osmotic phenomena. Such pre-stress can have a significant effect on the deformation of capsules subjected to flow as was recently reported by Lac & Barthès-Biesel (2005) in the case of an unbounded simple shear flow. In particular, they showed that pre-stress could remove the membrane buckling instability observed for low flow strength (Lac *et al.* 2004) and that it lowered the capsule deformation for a given shear rate.

Since membrane pre-stress is important in determining the motion of capsules in unbounded shear flow, it should be equally important for pore flow. This paper thus presents

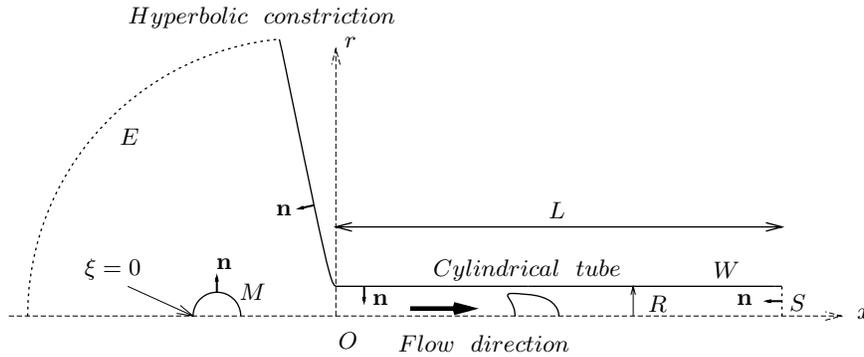


FIGURE 1. Capsule flowing into a channel consisting of an hyperbolic entrance followed by a cylindrical tube.

a study of the effect of pre-stress on the motion of an initially spherical capsule in a cylindrical pore. We first consider the case where the capsule membrane satisfies the Skalak *et al.* (1973) constitutive law with comparable values of the shear and area dilation modulus, and study the influence of flow strength, membrane pre-stress and size ratio between the capsule and the tube on the steady deformed state of the capsule. We then compare the numerical shapes to those measured by Risso *et al.* (2006) and show the existence of a probable pre-swelling of the experimental capsules. Other membrane constitutive laws are then considered and we show that the best fit with experiments is obtained with the Skalak *et al.* (1973) law when large deformations are achieved.

2. Problem statement

2.1. Flow problem

The flow situation is identical to the one studied by Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) and by Diaz & Barthès-Biesel (2002) and will be only summarised in the following. We consider an axisymmetric situation where the channel and the capsule have the same axis of revolution Ox . The channel consists of an axisymmetric hyperbolic entrance extended

at the hyperboloid apex by a cylindrical part (denoted ‘tube’) of radius R and axis Ox , where O is located at the beginning of the cylinder (figure 1). The opening of the entrance (defined by the angle between Ox and the hyperbola asymptote) has no influence on the steady capsule motion in the cylindrical part and only determines the transient flow of the particle into the tube. The channel is filled with an incompressible Newtonian liquid of viscosity $\mu^{(1)}$ flowing with flow rate Q . The flow Reynolds number is assumed to be very small and the axisymmetric velocity field in absence of particle is denoted \mathbf{v}^∞ . The capsule is initially spherical with radius a . It is filled with a Newtonian incompressible liquid with viscosity $\mu^{(2)}$ and enclosed by an infinitely thin hyperelastic membrane with surface shear elastic modulus G_s and area dilation modulus K_s . Buoyancy forces are neglected and consequently, when the capsule is centred on Ox , it takes an axisymmetric deformed shape and remains centred. The position of the capsule centre of mass on Ox is denoted $\mathbf{x}^{(M)} = x^{(M)}\mathbf{e}_x$ where \mathbf{e}_x is the axis unit vector. The unit normal vector \mathbf{n} to all the boundaries points inwards the suspending liquid.

The internal and external liquid motion satisfies the Stokes equations:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{(\beta)} = 0, \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} = -p^{(\beta)}\mathbf{I} + \mu^{(\beta)} \left(\nabla \mathbf{v}^{(\beta)} + (\nabla \mathbf{v}^{(\beta)})^T \right), \quad (2.2)$$

where $\mathbf{v}^{(\beta)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(\beta)}$ and $p^{(\beta)}$ denote the velocity, stress and pressure fields in the suspending ($\beta = 1$) and internal ($\beta = 2$) liquids.

The associated boundary conditions are:

- no flow disturbance far from the capsule

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)}| \gg R, \quad (2.3)$$

- no slip on the channel wall (W)

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in W, \quad (2.4)$$

- no slip on the capsule deformed surface (M)

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in M, \quad (2.5)$$

where \mathbf{X} denotes the initial position of a membrane material point located at position \mathbf{x} at time t .

- the load $\Delta \mathbf{f}$ on the membrane is due to the viscous traction jump

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in M, \quad (2.6)$$

where \mathbf{n} is the outer unit normal vector to M .

2.2. Capsule membrane mechanics

There remains to relate the load $\Delta \mathbf{f}$ to the capsule deformation. A detailed discussion of membrane mechanics is given by Pozrikidis (2003a), Pozrikidis (2003b) or by Barthès-Biesel *et al.* (2002), Barthès-Biesel (2003). We assume that the membrane is made of an infinitely thin sheet of a hyperelastic material with in-plane isotropy.

2.2.1. Membrane deformation

Then, under axisymmetric load conditions, the deformation and elastic tension tensors are both axisymmetric with common principal directions along the meridian (index 1) and parallel (index 2) curves. We use cylindrical coordinates (x, r) and define the deformed position of a membrane material point by (s, r) (respectively (ξ, ρ) in the initial state), where s (respectively ξ) is the arc length measured along a meridian curve with $s = 0$ (respectively $\xi = 0$) at the downstream intersection of the meridian with Ox (figure 1).

The principal elongation ratios λ_1 and λ_2 are given by

$$\lambda_1 = \frac{ds}{d\xi}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{\rho}, \quad (2.7)$$

and the principal curvatures C_1 and C_2 by

$$C_1 = -\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \mathbf{n}, \quad C_2 = \frac{n_r}{r}, \quad (2.8)$$

where $\boldsymbol{\tau}$ is the unit tangent vector to the meridian oriented along increasing s and n_r is the radial component of \mathbf{n} .

2.2.2. Membrane constitutive law

The membrane constitutive law relates the tensions to the deformations. A number of laws have been proposed to model thin membranes, but we consider only the simplest ones with constant material coefficients. One candidate is the Mooney-Rivlin law (MR) that models an infinitely thin sheet of a three-dimensional isotropic volume-incompressible material

$$T_1 = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\lambda_1^2 - \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^2} \right] [\Psi + \lambda_2^2(1 - \Psi)], \quad (2.9)$$

where the parameter Ψ varies between 0 and 1. The value $\Psi = 1$ corresponds to a neo-Hookean material, while $\Psi = 0$ corresponds to the so-called extreme Mooney-Rivlin material. The area dilation modulus K_s is then equal to $3G_s$ (Barthès-Biesel *et al.* 2002).

Another approach consists in treating the membrane as a *two-dimensional* continuum with in-plane isotropy. Correspondingly, starting from general principles of elasticity and thermodynamics, Skalak *et al.* (1973) derived the following law (Sk)

$$T_1 = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} [\lambda_1^2(\lambda_1^2 - 1) + C(\lambda_1 \lambda_2)^2[(\lambda_1 \lambda_2)^2 - 1]], \quad (2.10)$$

where the relation between the surface shear elastic modulus G_s and the area dilation modulus K_s depends on the dimensionless parameter C

$$K_s = G_s(1 + 2C). \quad (2.11)$$

This law was later simplified by Evans & Skalak (1980) (ES) who proposed to add linearly and independently the contributions of shear and area dilation

$$T_1 = G_s \left[\frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + A(\lambda_1 \lambda_2 - 1) \right], \quad (2.12)$$

where the area dilation modulus is simply proportional to the shear modulus:

$$K_s = AG_s. \quad (2.13)$$

In all three laws, the expression for T_2 is obtained by interchanging the roles of indices 1 and 2.

The Sk and ES laws were initially designed to model the area incompressible membrane of biological cells such as red blood cells, corresponding to $C \gg 1$ or $A \gg 1$. However, those laws are very general and can also be used to model other types of membranes for which K_s and G_s are of the same order of magnitude, as is the case for alginate membranes (Carin *et al.* 2003).

When $C = 1$ and $A = 3$, MR, Sk and ES laws predict the same small deformation of the membrane with $K_s = 3G_s$. However, they lead to different nonlinear tension-strain relations under large deformations. In particular, it is easily checked that MR and ES laws are strain-softening under uniaxial stretching ($T_1 \neq 0$, $T_2 = 0$), whereas SK law is strain-hardening (Barthès-Biesel *et al.* 2002). These three laws (2.9), (2.10), (2.12) have been used to analyse compression experiments performed on capsules with alginate membranes (Carin *et al.* 2003). The technique consists in placing a capsule between two parallel plates and in measuring simultaneously the distance between the plates and the applied force. Large reversible elastic deformations are achieved, and the membrane elastic parameters are obtained by means of an inverse analysis of the compression experiment. It is found that for freshly prepared capsules with thin membranes (with thickness less than 5% of the radius), MR law with $\Psi = 0$ or Sk and ES laws with $K_s = G_s$ could all be used to fit the experimental compression data with good precision, whereas the commonly used neo-Hookean law (i.e. MR with $\Psi = 1$) could not (Carin *et al.* 2003; Risso & Carin 2004; Rachik *et al.* 2006). However, for capsules that had been stored for over six months in

saline solution, Risso & Carin (2004) find that the ES law gives better fit with the data than Sk or MR laws.

It is clear that a single experiment, such as compression between plates, is not sufficient to determine unambiguously the constitutive law for the membrane. It will thus be of interest to apply a similar inverse analysis to the flow of a capsule in a tube, and try to deduce a membrane constitutive law from the analysis of the capsule motion and deformation as a function of flow strength.

2.2.3. Membrane equilibrium equations

Diaz & Barthès-Biesel (2002) observed a tendency towards buckling of the downstream part of the membrane under certain flow conditions, particularly during the entrance phase into the tube. To solve this problem, they assumed that the membrane had a small bending rigidity and that the principal bending moments m_1 and m_2 depended linearly on the local curvature change (Pozrikidis 2003*b*)

$$m_1 = \frac{B_s}{\lambda_2} [\lambda_1 C_1 - C_1^0 + \nu_s (\lambda_2 C_2 - C_2^0)], \quad (2.14)$$

where B_s is the bending modulus, C_1^0 and C_2^0 are the principal initial curvatures and where ν_s depends on the membrane constitutive law and is equal to $1/2$, $C/(C+1)$ or $(A-1)/(A+1)$ for MR, Sk or ES laws, respectively. The expression for m_2 is also obtained by interchanging the roles of indices 1 and 2. The axisymmetric membrane equilibrium equations are then given by

$$\Delta \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{dT_1}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} (T_1 - T_2) - C_1 \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} m_2 - \frac{1}{r} \frac{d}{ds} (r m_1) \right], \quad (2.15)$$

$$\Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = -C_1 T_1 - C_2 T_2 - \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left[\frac{dr}{ds} m_2 - \frac{d}{ds} (r m_1) \right], \quad (2.16)$$

where $\Delta \mathbf{f}$ is the viscous traction jump defined in (2.6).

2.2.4. Pre-stress

Following Lac & Barthès-Biesel (2005), we further assume that the capsule is subjected to a positive osmotic pressure difference $p^{(0)}$ between the internal and external phases. Consequently, since the capsule is spherical, the membrane is pre-stressed by an isotropic elastic tension $T^{(0)}$ given by the Laplace law

$$T_1 = T_2 = T^{(0)} = \frac{ap^{(0)}}{2}, \quad (2.17)$$

where a is the radius of the inflated capsule. The membrane is thus stretched with an initial elongation $\lambda^{(0)}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^{(0)} = \frac{a}{a_0} = 1 + \alpha, \quad (2.18)$$

where a_0 is the capsule radius in the unstressed configuration. As shown by Lac & Barthès-Biesel (2005), the relation between $T^{(0)}$ and α depends on the membrane constitutive law (and thus on C , A or Ψ). However it is independent of bending resistance since bending moments are identically zero for isotropic swelling.

2.3. Boundary integral formulation

The boundary integral form of the Stokes equations is used. As shown in figure 1, the external flow domain is bounded by the capsule membrane M , the channel wall W , a spherical entrance surface E centred on O with radius R_E ($R_E \gg R$), a planar exit section S normal to Ox and located far inside the pore at $x = L$ ($L \gg R$). The internal flow domain is bounded by M . At time $t = 0$, the initially spherical, pre-inflated or not, capsule is centred at $x^{(M)}(0) = -d$ ($0 < d \ll R_E$) and flow is started with constant flow rate Q . We then follow the motion of the capsule inside the pore, making sure that at all times $x^{(M)} \ll L$. We take the entrance pressure as reference ($p = 0$ on E). Then, there is no contribution to the boundary integral from terms evaluated on E where the velocity

is $O(Q/R_E^2)$. On the exit surface S , Poiseuille flow conditions prevail

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) = 2\frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \mathbf{e}_x, \quad p = p^\infty(L) + \Delta p, \quad (2.19)$$

where Δp is the additional pressure drop created by the capsule and $p^\infty(L)$ is the pressure that would exist in absence of particle.

The effect of the viscosity ratio $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ between the internal and external liquids on the transient entrance has been studied by Diaz & Barthès-Biesel (2002). Here we concentrate on the *steady* motion of the capsule inside the tube. When such a steady state is reached, the internal liquid is at rest and its viscosity $\mu^{(2)}$ has no influence on capsule motion and deformation. Consequently, we choose $\mu^{(2)} = \mu^{(1)} = \mu$ and thus obtain the simplified boundary integral where the double layer term on the capsule surface has disappeared (Pozrikidis 1992)

$$\begin{aligned} b\mathbf{v}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{8\pi\mu} \int_M \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{W \cup S} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}_b(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \\ & - \int_S \mathbf{v}^\infty(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

where $\mathbf{f}_b(\mathbf{y})$ represents the force exerted by the boundaries W and S on the suspending liquid and where parameter b takes values 1, 0, 1/2 when \mathbf{x} is located on M, W, S , respectively. The single and double layer kernels \mathbf{J} and \mathbf{K} are defined by

$$J_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad K_{ijk} = -\frac{3}{4\pi} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^5}. \quad (2.21)$$

Integral (2.20) is further simplified by performing analytically the integration in the hoop direction. The surface integrals are then reduced to line integrals taken along the intersection curves of surfaces M, W, S with a meridian plane.

2.4. Main problem parameters

A dimensional analysis of the problem shows that the main parameters for the flow and capsule properties are

- an equivalent capillary number that measures the ratio of viscous to elastic forces

$$\varepsilon = \mu Q / \pi R^2 G_s;$$

- the size ratio between the capsule and the tube a/R (note that the *pre-inflated* capsule radius is used);
- the pre-stress measured by the pre-inflation ratio α ;
- the ratio of area dilation to shear moduli K_s/G_s ;
- the ratio of bending to shear moduli $B = B_s/G_s R^2$.

In the following, we consider values of $a/R \in [0.8, 1.0]$, corresponding to medium to large capsules. The maximum capillary number is taken to be 0.6, a fairly large value that is not easy to obtain experimentally. The pre-inflation ratio is at most 10%, corresponding to quite high pre-swelling. Finally as will be explained later, the ratio B is taken as small as possible to prevent buckling without altering significantly the deformed profile of the capsule.

3. Numerical procedure

We use the numerical procedure initially proposed by Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) and later improved by Diaz & Barthès-Biesel (2002) through the use of efficient interpolation techniques to describe the geometry of the deforming boundaries. It consists of following the motion of the capsule as it enters the pore and in tracking the Lagrangian position of the membrane material points. The fluid domain boundaries are tessellated into elements with collocation points and interpolated by means of cubic B-spline functions. At a given time t , the position of the membrane collocation points is thus known. By comparing the deformed and initial positions, the principal extension ratios, curvatures, bending moments and elastic tensions are computed from (2.7), (2.8), (2.14) and one of the constitutive laws (2.9), (2.10) or (2.12). The load on the membrane surface

follows from (2.15) and (2.16). The force distribution \mathbf{f}_b on W and the additional pressure drop Δp on S are obtained from boundary conditions (2.4) and (2.19) associated to the boundary integral (2.20) with \mathbf{x} located alternately on W and on S , respectively. The capsule membrane velocity is obtained from (2.20) with \mathbf{x} located on M . The position of the membrane material points is then updated by means of (2.5).

Our objective is to obtain a steady deformation of the capsule inside the tube. However, to be achieved, this steady state may sometimes require fairly long times or equivalently fairly long tube lengths. In order to limit the dimensions of the flow domain, we switch to a reference system linked to the capsule and moving with it when the particle is well inside the tube with a minimum axial co-ordinate larger than $4R$. This is possible because the flow disturbance created by the particle is $O(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(M)}|^{-2})$. More specifically, Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) have shown that Poiseuille flow profiles were recovered within 1% at distances from the front and rear of the capsule of order R . We consider that steady state is reached when $|\partial T_{1max}/\partial t| < 10^{-2}G_s Q/\pi R^3$ and $|\partial \Delta p/\partial t| < 10^{-2}G_s Q/\pi R^4$ where T_{1max} is the maximum elastic tension in the membrane meridian. The entrance section E is located at $R_E = 30R$ and the exit section S at $L = 15R$. The hyperbolic part is tessellated into 66 elements unequally spaced with increasing density as the hyperbola apex is approached. The tube part and exit section S are tessellated into 189 and 34 equally spaced elements, respectively. The membrane meridian is tessellated into 60 or 120 equally spaced elements on the initial inflated sphere, depending on the flow strength and resulting deformation. At time $t = 0$, the undeformed and pre-inflated capsule is centred at $x^{(M)} = -4R$ and the flow is started. However, it is also possible to start with a deformed capsule inside the tube and use the reference frame linked to the capsule centre. In this case, the deformed shape is not necessarily in equilibrium with the imposed flow conditions, and we run the programme until the capsule has attained a new

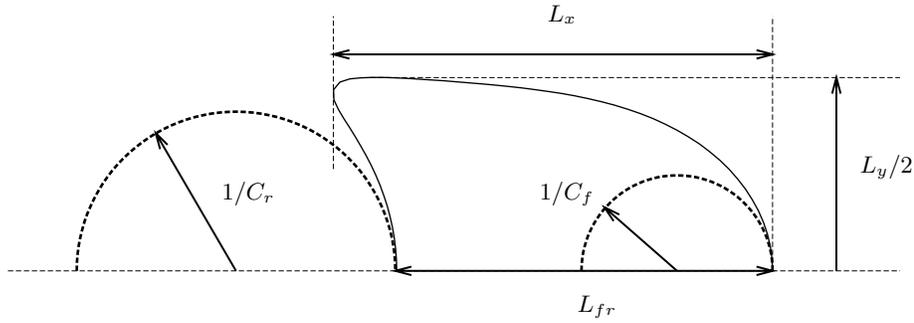


FIGURE 2. Definition of parameters quantifying capsule deformation.

equilibrium, if any. The numerical scheme uses an explicit time integration procedure and is thus numerically unstable unless the time step Δt is very small. We found that using $\Delta t = 3.2 \times 10^{-4} \pi R^3 / Q$ ensures numerical stability but leads to fairly long computational times since the entrance process is quite slow. With those numerical parameters Diaz & Barthès-Biesel (2002) show that steady values of pressure drop and capsule velocity can be obtained with a precision of about 0.1%. A further check on the precision of the numerical model can be done by monitoring the capsule volume. We have in general a volume change well under 1% even after 240 000 time steps and that is an indication of the numerical precision of the membrane partition used.

All the results presented here satisfy the steady state criteria. At steady state, there is a significant viscous pressure drop in the sheared liquid film between the capsule and the wall. Since the internal liquid is motionless, the pressure inside the capsule is uniform. Consequently, from equation (2.16), we can expect the meridian rear curvature C_r (at $r = 0$) to be always smaller than the meridian front curvature C_f (at $r = 0$). This phenomenon leads to parachute shapes ($C_r < 0$) or to slug shapes ($C_r > 0$) with the back blunter than the front.

4. Motion of a capsule with a Sk membrane

As an example, we consider a capsule with a membrane that obeys constitutive law (2.10) with $K_s = 3G_s$ (i.e. $C = 1$). We study the effect of pre-swelling α , flow strength as measured by ε and size ratio a/R on the capsule steady motion. The effect of C and of different membrane laws will be studied later. Like in Lac & Barthès-Biesel (2005), three inflation ratios $\alpha = 0\%$; 2.5% and 10% are considered. The value 2.5% corresponds to a moderate pre-inflation whereas 10% is a large pre-inflation that leads to high pre-stress and significant apparent hardening of the membrane.

The deformed profiles have a complex shape that is not easy to quantify. Risso *et al.* (2006) have introduced different parameters that can be measured on experimental profiles: the maximum L_x and minimum L_{fr} axial lengths, the transversal length L_y , the deformed meridian perimeter L_m , the front C_f and rear C_r curvatures on the revolution axis (figure 2). We thus compute these geometrical parameters as functions of the problem parameters $\varepsilon, a/R, \alpha$. These results are useful for the analysis of experimental data, as will be illustrated later.

4.1. Effect of bending resistance

When the capsule is not pre-stressed, the membrane is subjected to negative elastic tensions along a meridian, especially when the curvature at the back changes sign. This occurs during the transient stage when the capsule enters the pore. In order to prevent buckling, Diaz & Barthès-Biesel (2002) found it necessary to introduce a small bending resistance of the membrane. The non-dimensional bending modulus B was chosen large enough to prevent buckling and allow the capsule to reach a steady shape. However, it was also taken as small as possible to prevent any significant modification of the final capsule shape or of the additional pressure drop. Diaz & Barthès-Biesel (2002) found

that the value $B = 1 \times 10^{-5}$ served the above purposes for the *neo-Hookean* membrane they studied.

Due to its strain-hardening property, a Sk membrane does not buckle for $\alpha = 0$ and flow strengths as large as $\varepsilon = 0.6$, so that a steady shape can be obtained. We find that the profiles computed with $B = 0$ and $B = 1 \times 10^{-5}$ are superimposed within graphical precision, whereas a much larger value $B = 1 \times 10^{-3}$, corresponding to much larger membrane bending resistance, leads to a significantly different capsule shape. When the capsule is pre-inflated, the elastic pre-stress may prevent the apparition of negative tensions in the membrane and thus remove the tendency towards buckling (Lac & Barthès-Biesel 2005). For moderate pre-inflation ($\alpha = 2.5\%$), we find again that the profiles obtained for $B = 0$ and $B = 1 \times 10^{-5}$ superimpose. For large pre-inflation ($\alpha = 10\%$), the effect of B is felt only at very high flow rates but for $\varepsilon = 0.09$, the profiles obtained with $B = 0$, $B = 1 \times 10^{-5}$ and $B = 1 \times 10^{-3}$ superimpose, because the large pre-stress prevents any significant deformation.

It was not our purpose to study the effect of bending rigidity of the membrane, but in order to have a meaningful comparison of $\alpha = 0$ and $\alpha > 0$ results for different membrane constitutive laws, it was decided to use the same small value of ratio of bending to shear moduli $B = 1 \times 10^{-5}$ even for pre-stressed capsules. Occasionally when steady state was reached, the value of B was changed to $B = 0$ and we verified that the new steady deformed profile was not significantly modified.

4.2. Effect of α and ε ($a/R = 0.8$)

We now study in detail the combined effects of pre-stress and flow strength for medium-sized capsules such that $a/R = 0.8$. Steady deformed half profiles are shown in figure 3 as a function of α for three typical values of ε . For small flow strength (e.g. $\varepsilon = 0.012$), the capsule with no pre-stress has a parachute shape with negative rear curvatures, whereas

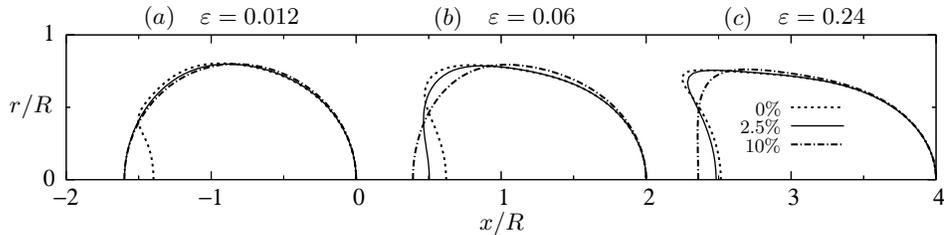


FIGURE 3. Effect of pre-inflation and flow rate on capsule deformed half profiles ($a/R = 0.8$).

Dashed line: $\alpha = 0\%$; continuous line: $\alpha = 2.5\%$; mixed line: $\alpha = 10\%$.

a small amount of pre-stress (e.g. $\alpha \geq 2.5\%$) is enough to prevent the curvature inversion. As ε increases to 0.06, the 2.5% pre-inflated capsule exhibits the beginning of a curvature inversion at the rear (figure 3b), whereas for $\alpha = 10\%$, the internal pressure is still large enough to prevent the apparition of the parachute. For high flow strength ($\varepsilon = 0.24$), the difference between pre-stressed ($\alpha = 2.5\%$) and unstressed ($\alpha = 0$) capsules has almost disappeared (figure 3c). The 10% pre-inflated capsule also begins to undergo the curvature inversion at the rear.

In figure 4, we show the variations with ε of $L_x, L_y, L_{fr}, C_f, C_r$ and L_m for the three values of inflation ratio α . We note immediately that the transversal length L_y and the front curvature C_f do not vary much with either ε or pre-stress (figure 4b,e). It follows that these parameters are not appropriate to evaluate capsule mechanical properties. For moderate or no pre-inflation, the axial length L_x first decreases with ε , while the radial length L_y increases slightly. This corresponds to a small axial compression of the capsule due to the adverse pressure gradient. Then L_x increases continuously with ε , while L_y decreases slightly. When pre-inflation is large ($\alpha = 10\%$), the high internal pressure prevents the initial axial compression of the capsule. Thus L_x is a monotonically increasing function of ε as is apparent in figure 4a. Note though that L_x is measured at different locations as the shape evolves: on the tube axis for slug shapes or on the rim for parachute shapes. As a consequence, for a given value of ε , when α (or equivalently

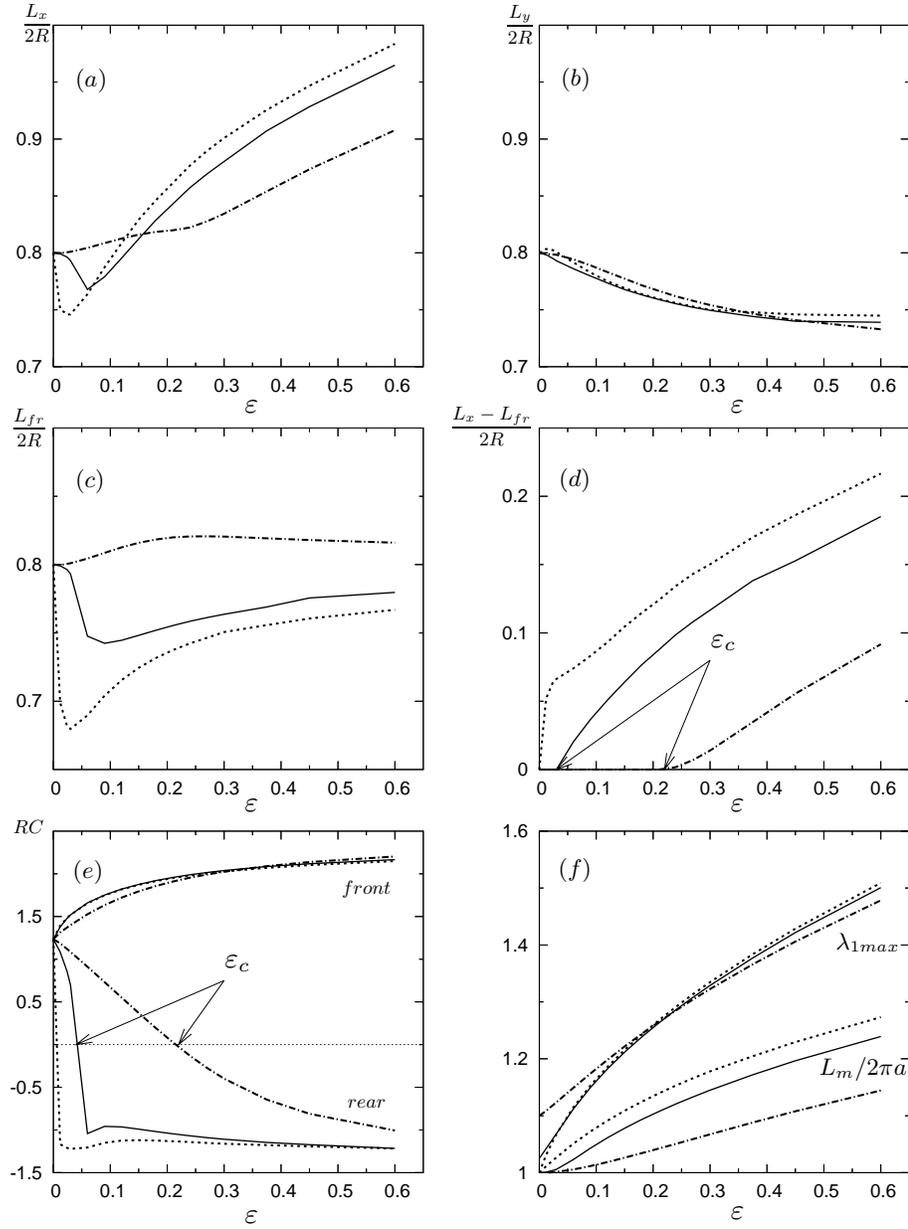


FIGURE 4. Effect of α and ϵ on the different parameters measuring steady capsule deformation (defined in figure 2), $a/R = 0.8$. Same legend for α as in figure 3.

membrane apparent rigidity) increases, L_x either increases ($\epsilon < 0.06$), decreases and then increases ($0.06 < \epsilon < 0.15$), or decreases ($\epsilon > 0.15$). It follows that the sole measure of L_x is not enough to characterise capsule mechanics.

The interesting parameters to study the shape evolution from slug to parachute are

TABLE 1. Critical values ε_c for which the rear curvature changes sign. The case $\alpha = 5\%$ is added to facilitate interpolation of data.

a/R	$\alpha = 0\%$	$\alpha = 2.5\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
0.8	≈ 0	0.043	0.1	0.21
0.9	0.009	0.048	0.096	0.19
1.0	0.02	0.061	0.105	0.19

L_{fr} , the difference $L_x - L_{fr}$ or the rear curvature C_r . As shown in figure 4c, L_{fr} follows the same trend as L_x when ε increases, but becomes smaller than L_x when the parachute is formed. The change in curvature sign at the rear occurs when $L_x - L_{fr}$ becomes positive for a critical value ε_c of capillary number that is fairly sensitive to pre-inflation (figure 4d,e). Consequently a measure of the evolution of $L_x - L_{fr}$ or of C_r with ε may yield the value of ε_c from which pre-inflation can be estimated as shown in table 1. As ε increases, deformation and thus the capsule meridian perimeter L_m increases (figure 4f). However, L_m is not very sensitive to pre-inflation. Indeed for a given ε , varying α from 0 to 10% leads to a global decrease of L_m of order 10%. The value of $L_m/2\pi a$ is equal to the average of extension ratio λ_1 along a meridian curve. However, the maximum extension ratio in the meridian λ_{1max} is significantly larger than $L_m/2\pi a$ and fairly insensitive to α (figure 4f). This is due to the fact that the maximum extension occurs near the nose of the capsule where the local deformed shape is also insensitive to α as can be noted from the profiles in figure 3 and also from the value of the front curvature in figure 4e. In conclusion, capsule dynamics are defined by the variation with ε and α of two sets of parameters: L_x or L_m that measures the overall membrane extension, and by $L_x - L_{fr}$ or C_r that measure the parachute depth and lead to an estimate of pre-inflation through ε_c .

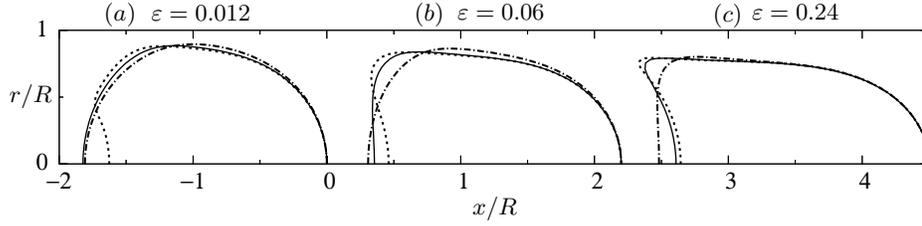


FIGURE 5. Effect of pre-inflation and flow rate on capsule deformation ($a/R = 0.9$). Same legend for α as in figure 3.

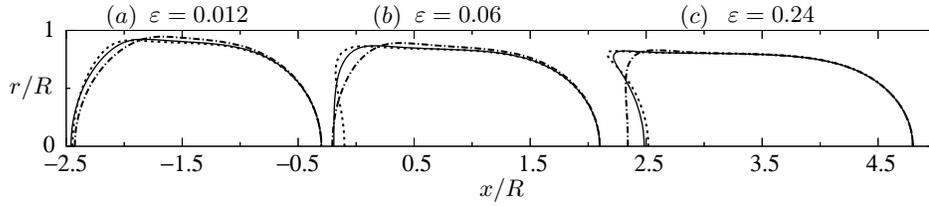


FIGURE 6. Effect of pre-inflation and flow rate on capsule deformation ($a/R = 1.0$). Same legend for α as in figure 3.

4.3. Effect of capsule size

It is now of interest to study the combined effects of capsule size and pre-inflation as both phenomena influence the deformed shape of the particle. We thus consider two other size ratios $a/R = 0.9$ and $a/R = 1.0$. Larger values of a/R are usually difficult to achieve experimentally without plugging. The deformed profiles are shown as a function of pre-inflation and flow strength in figures 5 and 6. In the case $a/R = 1.0$ and weak flow ($\varepsilon = 0.012$), all capsules are convex even in absence of pre-stress (figure 6a). For medium flow ($\varepsilon = 0.06$) and $a/R \geq 0.9$, only the capsule with no pre-stress exhibits a concave back (figure 5b and 6b). As we increase ε to 0.24, the 2.5% pre-inflated capsule also takes a parachute shape and its deformed profile becomes very similar to that of the unstressed capsule (figure 5c and 6c). For $\varepsilon = 0.24$, the 10% pre-inflated capsules

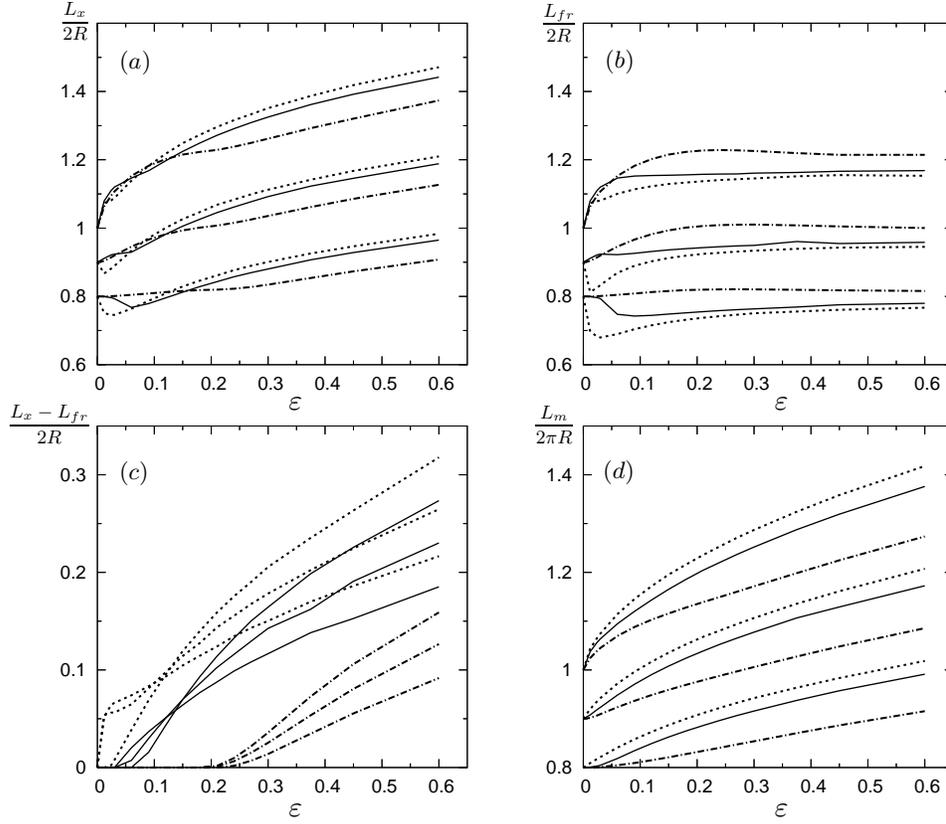


FIGURE 7. Effect of α , ε on the different parameters measuring steady capsule deformation for three size ratios $a/R = 0.8; 0.9; 1.0$. Same legend for α as in figure 3. For $\varepsilon > 0.3$ and a given value of α , the different lengths increase with a/R .

both have a slightly negative curvature at the back ($C_r \approx -0.2/R$) although it is barely detectable on figures 5c and 6c.

The combined effects of size ratio, pre-inflation and flow strength are summarised in figure 7. For low flow strength, capsules that are smaller than the tube without or with small pre-stress, undergo a slight initial axial compression as evidenced by the initial decrease of $L_x/2R$ and of L_{fr} (figure 7a,b). This initial compression does not occur for large capsules that are constrained by geometry to take a slug shape. As ε increases, L_x seems to increase continuously, while the radial length L_y (not shown) stabilises to a plateau value that is not very sensitive to either size or pre-inflation. The radial length L_{fr}

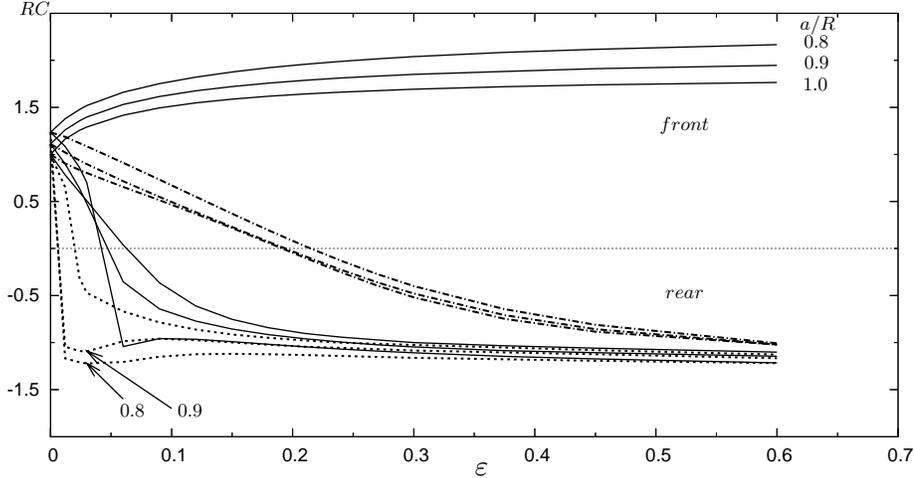


FIGURE 8. Effect of α , ε on the non-dimensional front RC_f and rear RC_r curvatures for three size ratios $a/R = 0.8; 0.9; 1.0$. RC_f is shown only for $\alpha = 2.5\%$. Otherwise, same legend for α as in figure 3.

becomes smaller than L_x when the capsule back becomes concave and then also reaches a plateau value for high flow strength. This phenomenon, coupled with the continuous increase of L_x , shows that the parachute deepens when ε increases as evidenced by the evolution of $L_x - L_{fr}$ with ε (figure 7c). The deformed perimeter (scaled now with tube radius to show size effects) $L_m/2\pi R$ increases with size and flow strength but decreases with pre-inflation, as expected (figure 7d). In all cases, pre-stress decreases deformation, but its relative effect fades out as ε increases.

The analysis of the effect of size and pre-inflation on the front and rear curvature of the deformed profiles is also quite interesting. In figure 8, the front curvature C_f is shown only for $\alpha = 2.5\%$ because pre-inflation does not influence C_f by much. We find that C_f varies slowly with ε , as pointed out earlier. The front curvature is probably the easiest one to measure, but unfortunately, it is not very sensitive to the main flow parameters. The rear curvature C_r however, is sensitive to size ratio and pre-inflation at low capillary numbers except for large pre-inflation ($\alpha = 10\%$) where C_r does not depend much on

size for any value of ε (figure 8). For low pre-inflation ($\alpha \leq 2.5\%$), the back parachute curvature becomes independent of size for high flow strength ($\varepsilon \geq 0.2$).

The critical value ε_c of capillary number for which the shape evolves from slug to parachute is determined by the change of sign of C_r or by the first non zero value of $L_x - L_{fr}$. The value of ε_c is shown in table 1 as a function of size ratio and inflation. It appears that for a given size ratio, ε_c is quite sensitive to pre-inflation. This is an important result for experiment analysis. Indeed, the data in table 1 can be interpolated and allow the evaluation of the pre-inflation of a capsule of known size from the value of flow rate at which the back curvature changes sign. However, the value of ε_c is fairly independent of capsule size for a given pre-inflation ratio. This results from a complicated non-linear interplay of pressure drop in the lubrication film and additional internal pressure due to deformation. In figure 9 we compare the deformed profiles at $\varepsilon = 0.06$ and $\alpha = 2.5\%$ of the three capsules $a/R = 0.8; 0.9; 1.0$ and note that the length of the lubrication film around the capsule increases as a/R increases while the thickness does not change much. The viscous pressure drop between the back and the front of the capsule thus increases with a/R and this promotes the apparition of a negative curvature at the back. However, the deformation of the capsule increases with a/R (as indicated by the values of L_m shown in figure 7d). Consequently the elastic tensions and thus the internal pressure also increase and this opposes the formation of the parachute. Since the capsule undergoes large deformations the interplay of the two phenomena is non-linear and difficult to predict.

4.4. Membrane tensions and additional pressure drop

One of the model's advantage is the evaluation of not measurable quantities such as the elastic tensions in the membrane. The tension T_1 along the meridian is larger than the hoop tension except on the tube axis where the two principal tensions are equal. It is of

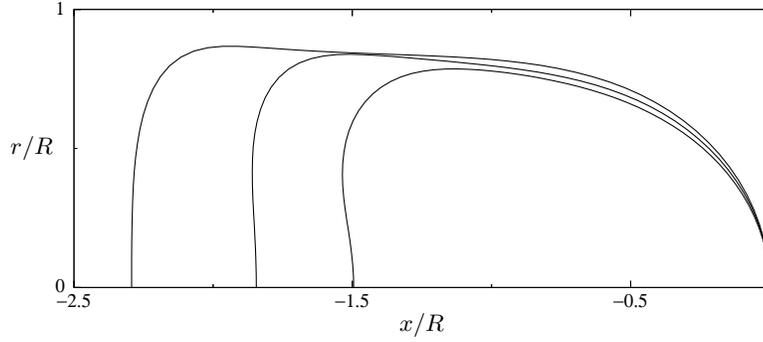


FIGURE 9. Comparison of the deformed profiles at $\varepsilon = 0.06$ and $\alpha = 2.5\%$ for $a/R = 0.8; 0.9; 1.0$. The back curvature is almost the same for the three profiles although their size and deformation differ significantly.

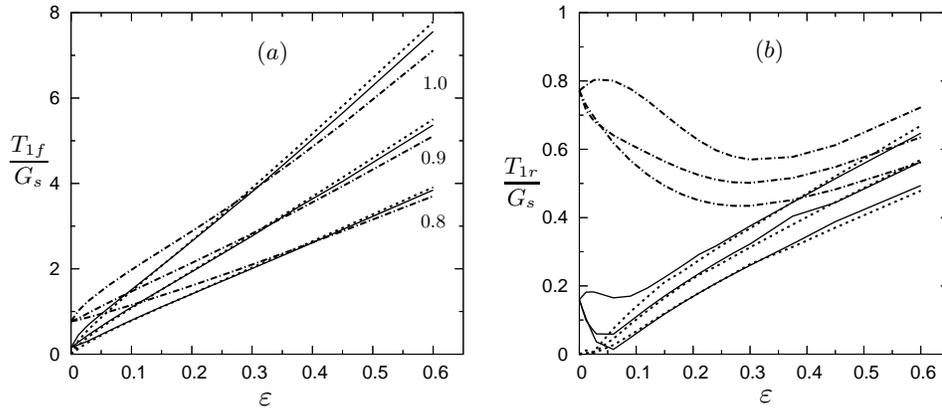


FIGURE 10. Effect of pre-inflation, flow rate and size ratio ($a/R = 0.8; 0.9; 1.0$) on the axial values of tension at the front (a) and at the back (b). The positive initial value is due to prestress. For a given α , the tensions increase with size ratio. Same legend for α as in figure 3.

particular interest to determine the maximum of tension as this information is relevant for break-up. The analysis of tension distribution along a meridian curve shows that T_1 reaches a maximum value slightly before the front tip of the capsule in the upstream part of the lubrication film between the membrane and the wall. The value of the front elastic tension T_{1f} on the axis is a good measure of the overall tension level in the membrane even if it is somewhat smaller (by at most 8%) than the maximum tension in the membrane. The tension T_{1r} on the axis is about 10 times smaller than T_{1f} . It first

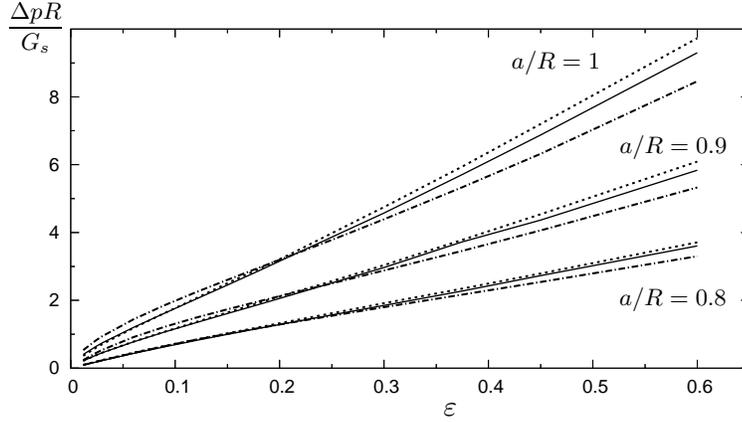


FIGURE 11. Steady additional pressure drop as a function of size ratio, ε and α . Same legend for α as in figure 3.

decreases with ε , because the membrane is first compressed before the curvature change occurs. This compression was the main reason why it was found necessary for $\alpha = 0$ to add a bending resistance to the membrane. For $\alpha = 2.5\%$, T_{1r} decreases, but remains positive owing to pre-stress. The rear tension is minimum when the rear curvature C_r is zero. It then increases again as C_r becomes negative, because the parachute is formed and the rear of the capsule is again subjected to stretching forces. We find of course that the minimum of T_{1r} occurs near $\varepsilon = \varepsilon_c$.

The front and rear axial values of the elastic tensions are shown in figure 10 for different values of pre-inflation and all three size ratios. We find that the front tension T_{1f} starts from the initial prestress value but no longer depends on this initial pre-stress value for large ε . The front tension increases significantly with size ratio. Indeed, for $\varepsilon \geq 0.3$, T_{1f} is roughly doubled when a/R increases from 0.8 to 1.0. The value of tension at the back is fairly insensitive to pre-stress or size ratio once the parachute is formed ($\varepsilon > 0.4$).

The presence of a capsule in the tube creates an additional pressure drop Δp , that increases with size ratio and flow strength for a given capsule (figure 11). The influence of α is mild at any flow strengths, but the influence of size is quite strong since as a/R

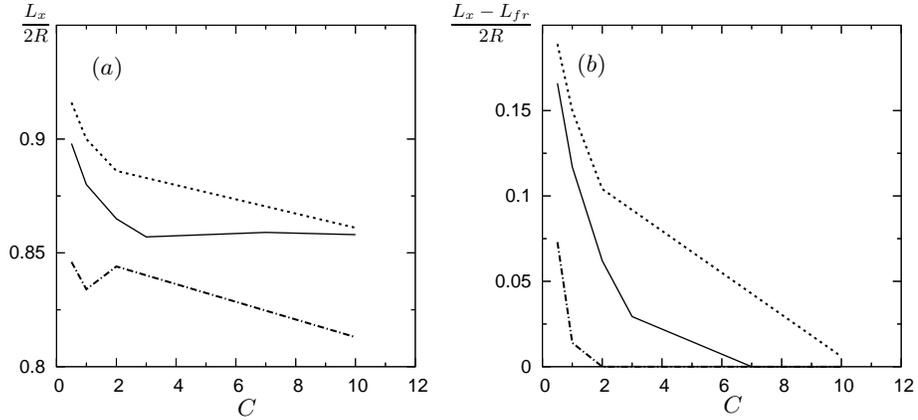


FIGURE 12. Effect of the capsule resistance to area dilation as measured by C for $\varepsilon = 0.3$, $a/R = 0.8$. Same legend for α as in figure 3.

increases by 25% from 0.8 to 1.0, the additional pressure drop is roughly doubled for any ε . The pressure drop occurs mainly in the viscous film that surrounds the capsule. The length L_x of this film increases with ε , while the width L_y remains almost constant. Thus the evolution of Δp with ε follows that of L_x .

4.5. Effect of the ratio K_s/G_s of area dilation to shear in membrane law

We now study the effect of the value of parameter C in membrane law (2.10). The ratio of area dilation to shear modulus K_s/G_s is directly related to C as shown in equation (2.11). When C increases, for a fixed value of ε (equivalently of G_s) the membrane resistance to compression increases and its deformability decreases. As an illustration, we present results for $a/R = 0.8$ and for $\varepsilon = 0.3$, because the influence of C is mainly felt for large membrane deformation. The effect of C and α on the capsule length L_x and on the depth of the parachute $L_x - L_{fr}$ is shown in figure 12. The global effect of increasing C or K_s/G_s is to decrease the capsule extension and the depth of the parachute. The local increase of L_x that occurs for $\alpha = 2, 5\%$ and 10% is due to the change of shape from slug to parachute, as was already noted in §4.2. We observe also that this shape transition occurs for larger values of C as α decreases (figure 12b). We may thus deduce

that $\varepsilon_c = 0.3$ for the three sets of parameter values ($\alpha = 0\%$; $C \approx 10$), ($\alpha = 2.5\%$; $C \approx 7$) or ($\alpha = 10\%$; $C \approx 2$).

This short study proves that the area dilation to shear modulus ratio is also an important parameter that influences capsule deformation. The numerical model gives the elastic tension distribution in the membrane. We find that the principal deformation mode is indeed area dilation in the front and rear parts of the capsule, but that shear and area dilation deformations are of the same order of magnitude in the membrane part located in the film region near the wall.

5. Comparison with experimental results

Risso *et al.* (2006) studied experimentally the motion and deformation of capsules flowing in a cylindrical tube. The flow rate Q was imposed by infusion syringe pumps. The capsules were nearly spherical and their radius was measured by means of a video camera. For some reference capsules, the membrane area dilation modulus K_s was determined by means of compression experiments, assuming area dilation was the principal deformation mode. When such a direct value of K_s was not available, an estimate was obtained by comparing the deformed profile to that of a reference capsule with the same size and assuming that the same deformation was obtained for the same value of capillary number. For a given flow rate, Risso *et al.* (2006) could thus compute a capillary number $Ca = \varepsilon G_s / K_s$, defined by an expression similar to that of ε where G_s was replaced by K_s . They also found that the ratio K_s / G_s lay between 1 and 3, but that the exact value of K_s / G_s had no influence on the results. When the back of the capsule was concave, owing to the formation of the parachute shape, the projection of the parachute edge was deleted manually from the picture, so that the resulting digitalised profiles approach the shape of a meridian curve of the deformed capsule. Thus, for representative capsules, they recorded the deformed profile and measured the lengths L_x , L_y , L_{fr} , L_m and the

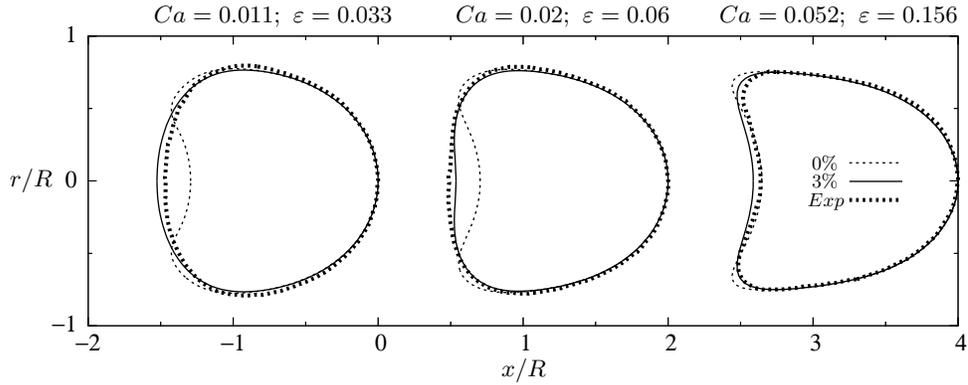


FIGURE 13. Comparison between experimental and numerical deformed profiles for $a/R = 0.77$. Thin dashed line: $\alpha = 0$, continuous line: $\alpha = 3\%$, thick dashed line: experimental profile of Risso *et al.* (2006).

curvatures C_f and C_r as functions of capillary number. The digitalised experimental profiles of the figure 7 in Risso *et al.* (2006) were kindly provided to us by F. Risso. From each deformed profile of a given experimental capsule, we calculate the volume and use the mean of the calculated volumes to determine the radius a of the initial spherical capsule. With this procedure, we find slightly larger values of a than the ones given by Risso *et al.* (2006).

In principle, the deformed shape of the capsule depends on many parameters: membrane constitutive law and K_s/G_s , size ratio a/R , pre-inflation α and flow strength measured by either Ca or ε . It is then difficult to determine a unique set of values for these parameters that will characterise the capsule. We thus first try to match the experimental data with numerical profiles computed for a capsule enclosed by a Sk membrane with $C = 1$, and then explore other values of C and other membrane constitutive laws.

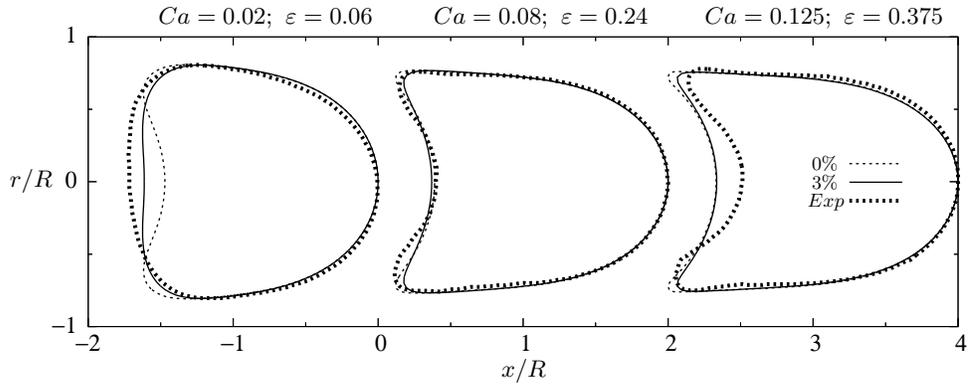


FIGURE 14. Comparison between experimental and numerical deformed profiles for $a/R = 0.83$. Same legend as in figure 13.

5.1. Comparison with a capsule enclosed by a Sk membrane ($C = 1, K_s/G_s = 3$)

The experimental results are now compared to the numerical results presented in section 4 for a capsule with a membrane obeying Sk constitutive law (2.10) with $C = 1$, thus $K_s/G_s = 3$ and $Ca = \varepsilon/3$.

In figures 13 and 14, we show experimental deformed profiles for size ratios $a/R = 0.77$ and 0.83 ($a/R = 0.75$ and 0.81 , respectively in Risso *et al.* (2006)), corresponding to capsules that are quite smaller than the tube and can thus easily flow and deform. Three values of capillary number are considered in each case, for small, medium and high experimental flow strengths. We note that the curvature inversion at the rear of the experimental capsules occurs for values of capillary number larger than $\varepsilon = 0.06$, but probably not much larger since the curvature is already very small for $\varepsilon = 0.06$. We then interpolate the results given in table 1 for $a/R = 0.8$ and find $\alpha \approx 3\%$.

Numerical profiles were then computed for the same values of a/R and ε , with $\alpha = 0\%$ (no pre-stress) and $\alpha = 3\%$. We note that for small capillary numbers, the numerical profile with no pre-stress has a concave back whereas the experimental profile is convex (figures 13 and 14). However, when a pre-stress corresponding to $\alpha = 3\%$ is included in

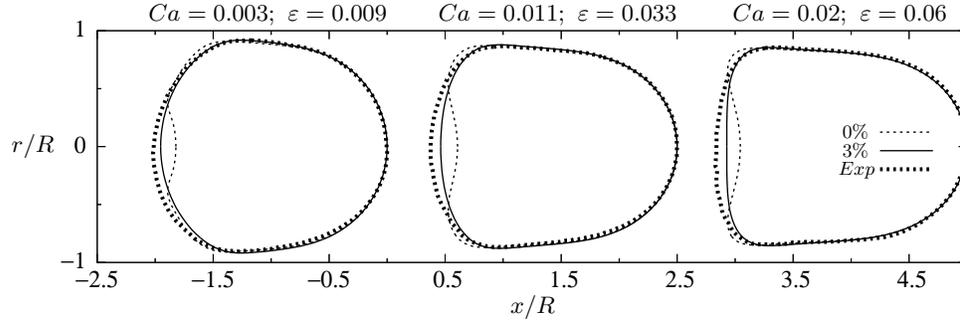


FIGURE 15. Comparison between experimental and numerical deformed profiles for $a/R = 0.95$. Same legend as in figure 13.

the numerical model, the fit between the experimental and numerical profiles is much better, as can be seen in figures 13 and 14. For $a/R = 0.83$ at very large flow strength ($\varepsilon = 0.375$), the back curvature of the experimental profile is larger than the one predicted numerically. The deformed profiles of a large capsule ($a/R = 0.95$, corresponding to $a/R = 0.94$ in Risso *et al.* (2006)) are shown in figure 15. The capillary number is not high enough to create a parachute profile but an initially unstressed capsule exhibits a curvature inversion at the back even at these low values of ε . We select the same value $\alpha = 3\%$ as for the smaller capsules and find that there is a very good fit between the numerical pre-inflated profiles and the experimental ones (figure 15).

In view of this profile comparison, we may deduce that the experimental capsules were most probably subjected to an initial pre-stress due to osmotic effects caused by partial dissolution of the membrane material during storage. This possibility was also considered by Risso *et al.* (2006), who estimated that the initial pre-inflation was of order 4.5%. Risso *et al.* (2006) also conducted some experiments on capsules that had been specifically pre-inflated by immersion in suspensions with different salt concentrations. Estimating the initial pre-inflation ratio to be 2.5%; 4.5%; 7.5%, they subjected capsules with size $a/R = 0.75$ to increasing flow strengths up to $\varepsilon = 0.09$. They did not find any significant

influence of α on either the front or back curvature of the capsules. However, this is not surprising because for such low flow strength, the front curvature does not depend on α as can be surmised from figure 4e. Furthermore, for $\varepsilon \leq 0.09$, the back of the capsule has either a positive or slightly negative curvature (see figure 3). Since it is in fact the projection of the capsule that is observed experimentally, a slightly hollow back will be hidden by the edge of the parachute and will be difficult to detect. It is only when the parachute is well formed with $C_r = -(0.25 \sim 0.5)/R$ that the parachute can be detected without ambiguity. Here, we find that for Sk law and $C = 1$, a pre-inflation of order $\alpha = 3\%$ is enough to correlate the experimental profiles for different capillary numbers and size ratios. If we were to use a larger value of α , the absolute value of the back curvature would decrease accordingly (figure 8), and thus the fit with the experimental profile would worsen.

For $a/R = 0.83$ and high flow strength ($\varepsilon = 0.375$) there is a discrepancy between experimental and numerical profiles that cannot be attributed to experimental uncertainty but might be due to plastic deformation or to other non linear elastic phenomena not accounted for in the simple numerical model we use. It should be noted that the corresponding experimental capsule had the lowest value of K_s and had been stored in saline solution for over 10 months. Such long storage results in an alteration of the molecular structure of the membrane and a significant decrease of the membrane area dilation modulus as compared to capsules freshly prepared (Risso & Carin 2004).

5.2. *Effect of membrane constitutive law ($K_s/G_s = 3$)*

So far, we have compared the experimental results to those computed for a capsule with a membrane obeying Sk law with $C = 1$. The question that arises now is whether

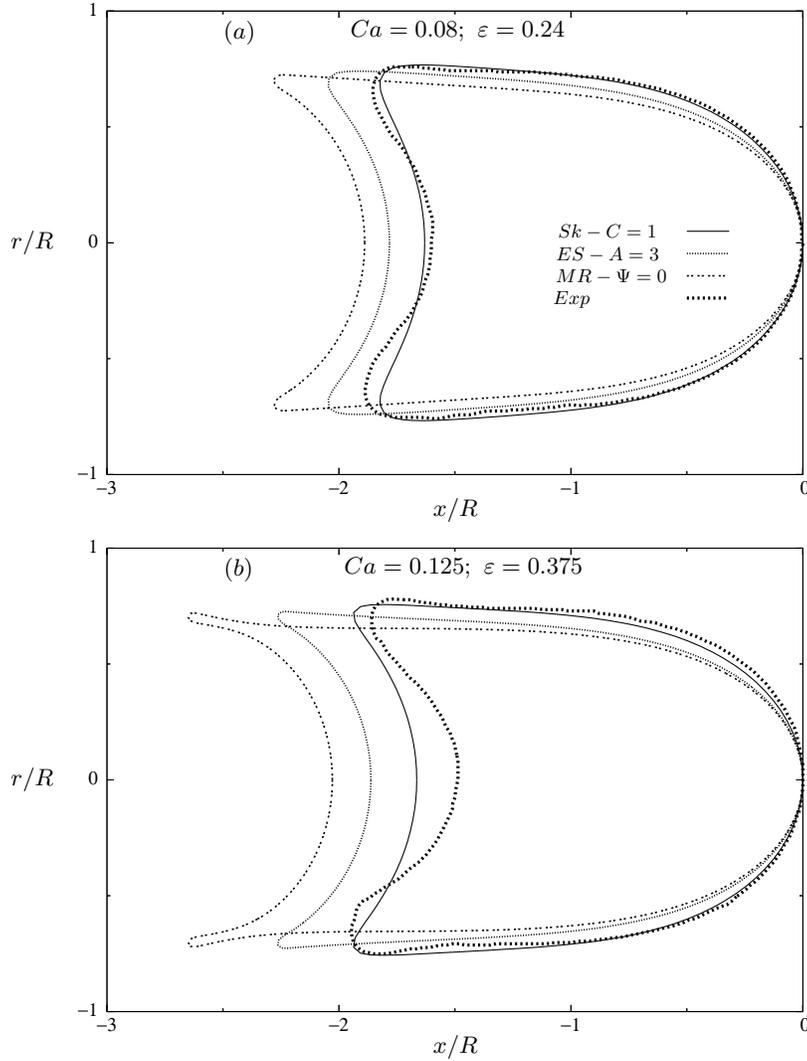


FIGURE 16. Effect of membrane constitutive law on capsule deformed profile for $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$ and $K_s/G_s = 3$. (a) $Ca = 0.08$, $\varepsilon = 0.24$. (b) $Ca = 0.125$, $\varepsilon = 0.375$.

other membrane constitutive laws (such as (2.9) or (2.12)) would fit the experimental results equally well, or better.

As an example, we consider the case $a/R = 0.83$ (the only one for which highly deformed shapes were obtained), assume a pre-inflation $\alpha = 3\%$, and compare the profiles of capsules enclosed by membranes obeying either one of the laws MR ($\Psi = 1$ or 0), Sk ($C = 1$) and ES ($A = 3$), that all correspond to the same small deformation behaviour

with $K_s = 3G_s$ ($Ca = \varepsilon/3$). As was noted by Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) and by Diaz & Barthès-Biesel (2002), a capsule with a neo-Hookean membrane (i.e. MR with $\Psi = 1$) undergoes continuous elongation and does not reach a steady state when the capillary number exceeds a critical value. Here, even with a 3% pre-inflation, we observe the same phenomenon for a capsule with a neo-Hookean membrane and for flow strengths $\varepsilon \geq 0.24$. We can thus conclude immediately that a neo-Hookean constitutive law is not appropriate to model the behaviour of the alginate membrane and thus confirm the conclusions of the compression experiments (Carin *et al.* 2003; Risso & Carin 2004; Rachik *et al.* 2006). However, steady deformed shapes could be obtained with the extreme Mooney-Rivlin law corresponding to $\Psi = 0$.

The steady numerical deformed profiles are compared with the experimental ones in figure 16*a,b* for two values of capillary number ($Ca = 0.08, \varepsilon = 0.24$) and ($Ca = 0.125, \varepsilon = 0.375$). It appears clearly that Sk law gives a much better fit of the numerical profile than MR ($\Psi = 0$) or ES laws. These last two laws predict a larger deformation than is actually observed: the overall extension L_x or the axial length L_{fr} are both over-estimated. This is probably due to the strain-softening properties of MR and ES laws as compared to the strain-hardening feature of Sk law. The discrepancy between MR or ES profiles and the experimental ones increases with capillary number. Unless we were to use unrealistically large values of α , increasing pre-inflation would not change significantly these conclusions because we are in the large deformation range where the pre-stress influence has faded out.

5.3. Effect of membrane law parameters

We now study the effect of the value of the material coefficients in the constitutive laws. Changing C or A modifies the value of the ratio of area dilation to shear modulus K_s/G_s . We consider again the case $a/R = 0.83$ and keep the same value $\alpha = 3\%$. We take the

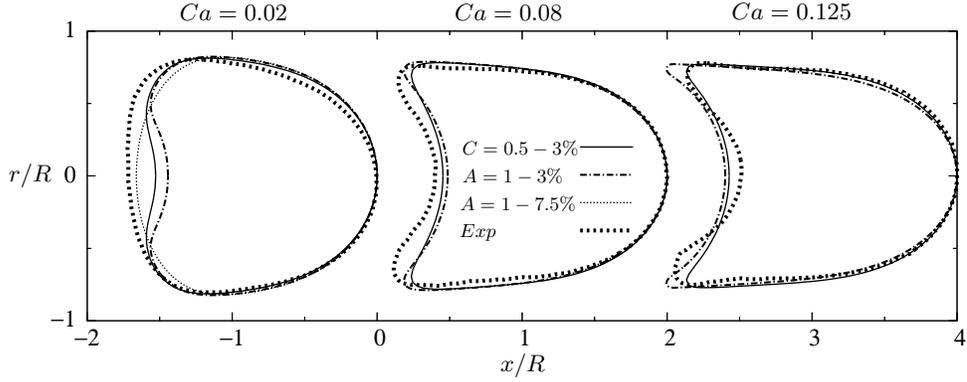


FIGURE 17. Effect of the parameters of Sk or ES membrane constitutive law on capsule deformed profile for $a/R = 0.83$, $\alpha = 3\%$ or 7.5% .

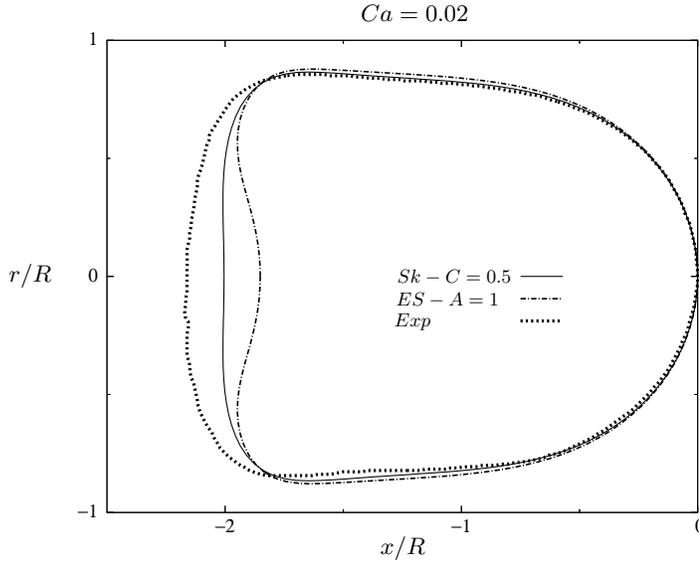


FIGURE 18. Effect of the parameters of Sk or ES membrane constitutive law on capsule deformed profile for $a/R = 0.95$, $\alpha = 3\%$ and $Ca = 0.02$.

experimental value of Ca as given and compute the corresponding value of ε , using the definition of K_s/G_s given in (2.11) and (2.13). Recall that Risso *et al.* (2006) estimated the ratio K_s/G_s between 1 and 3, corresponding to $C \in [0, 1]$ and $A \in [1, 3]$.

When we decrease C from 1, we decrease the strain-hardening feature of the Sk law

but also the shear capillary number ε . It follows that the profiles obtained for $C = 0$ (not shown) are not deformed enough, while those obtained for $C = 0.5$ slightly underestimate the experimental deformation for $Ca = 0.08$ but give a fair fit for $Ca = 0.125$, as shown in figure 17. In the case of an ES membrane law with $A = 1$, the deformation is also slightly underestimated for $Ca = 0.08$ with values of L_x and L_{fr} smaller than the experimental ones. The profile obtained for $Ca = 0.125$, overestimates L_x and exhibits high curvature on the parachute rim that is not very realistic compared to the experimental profiles (figure 17). Furthermore, for small flow strength $Ca = 0.02$, the experimental profile has a convex back, whereas the numerical profiles both have concave backs with a deeper parachute for ES ($A = 1$) than for Sk ($C = 0.5$). It seems then that these two laws do not fit well the experimental data at low Ca , unless of course, we increase pre-inflation. For example for $Ca = 0.02$, a value $\alpha = 7.5\%$ leads to a convex back for the capsule with an ES ($A = 1$) membrane. But as shown in figure 17, the computed deformed shape does not fit well the experimental one for $Ca = 0.02$. Besides, such a high value of α may not be very realistic as the capsules were stored in supposedly isotonic medium and that any pre-inflation, being due to partial membrane dissolution, should remain moderate.

Finally, we may wonder if increasing K_s/G_s would improve the fit between numerical and experimental results. It turns out that this is not the case. Indeed, for a Sk membrane with $C = 2$ (thus $\varepsilon = 5Ca$), we find that for a set value of Ca , L_x , L_{fr} and C_r all increase with C , corresponding to more elongated profiles with less back concavity.

By looking at the profile comparison in figure 17, one may conclude that if the pre-inflation is kept at the 3% level, then only Sk ($C = 0.5$) law gives a reasonable fit with the experimental results over the whole range of flow strength. In order to confirm this conclusion, we must validate it for another size ratio. When we consider the case $a/R = 0.95$ for the largest available value of Ca , and compare the experimental profile

with those computed for these two laws in figure 18, we note again that ES law leads to parachute shapes that are not realistic.

From the comparison between the numerical and experimental profiles of flowing capsules, we can draw a few conclusions:

- the capsule membrane is not well represented by a Mooney-Rivlin law for any value of the parameter Ψ ;
- a ES constitutive law with $A = 3 \sim 1$ does not reproduce well the experimental data for all flow strengths and for two size ratios, when we keep the pre-inflation at the 3% level;
- a Sk constitutive law with C somewhere between 1 and 0.5 and a 3% pre-inflation gives a good fit with the data for all three capsule sizes and all flow strengths.

This result is interesting, because it confirms that one single measurement (e.g. compression between two plates) is not enough to determine the constitutive behaviour of the elastic membrane. Indeed, MR or ES laws that could be used to analyse the compression data, cannot fit well the tube flow data because the deformation and stress fields are different in the two cases. The membrane of the experimental capsules was made of alginate covalently linked to a network of human serum albumin. It is quite possible that under high strain, the albumin network resists deformation and confers strain-hardening properties to the membrane. The fact that the Sk law fits the experimental profiles is probably due to its capacity to reproduce this strain-hardening feature.

6. Conclusion

The flow of a capsule in a cylindrical pore results from a complicated fluid-structure coupling. The geometrical restrictions imposed by the tube wall lead to large deformations that are controlled by the membrane constitutive law. Correspondingly, strain-hardening

or strain-softening laws eventually produce very different capsule shapes for a given flow strength. If the membrane elasticity can be evaluated by means of an independent technique (e.g., compression), the value of K_s or G_s is known and the capillary number can be measured. The model then allows in principle to determine from profile analysis, possible constitutive laws for the membrane as well as an associated inflation ratio α . Note though, that the analysis of the other independent technique is also constitutive law dependent if it involves large deformation. Here, for the capsules with a thin alginate membrane studied by Risso *et al.* (2006), we find that a Sk law with $K_s/G_s = 3-2$ can approximately represent the experimental data, provided a pre-swelling of 3% is accounted for.

In many situations, it is only possible to get one measurement of capsule deformability. Such is the case for very small capsules with micron size diameters for which compression experiments are very difficult to perform. However, it is feasible to flow a micro-capsule suspension in a capillary tube, where the particle relative size, deformation and velocity can be measured. The easiest way to analyse the data is then first to assume a membrane constitutive law with a given value of K_s/G_s (the choice of a law can be guided by the membrane physio-chemical properties). The geometry of the deformed capsule (e.g. L_x, L_{fr}) leads to a value of capillary number from which G_s can be inferred. Then, eventual pre-inflation may be determined by monitoring the rear curvature change of a flowing capsule and measuring the value of capillary number ε_c for which it occurs. For a given size ratio a/R and membrane law, ε_c depends on pre-inflation as indicated in table 1. The validity of the choice of the constitutive law can be tested with different size capsules and different flow strengths. The constitutive law may not be unique, but can usefully allow the determination of some capsule mechanical properties for comparison

purposes. Other effects can also be studied with this model, such as the role of the bending resistance or of other types of laws.

The authors would like to thank Dr Frédéric Risso for having provided the experimental profiles of the capsules and for many fruitful discussions. They gratefully acknowledge access to computer resources PILCAD (Plateforme Inter-Laboratoires de Calcul Distribués) financed in parts by ANVAR, HEUDYASIC and ROBERVAL laboratories (Université de Technologie de Compiègne).

REFERENCES

- BARTHÈS-BIESEL, D. 2003 *Modelling and Simulation of Capsules and Biological Cells*, chap. Flow-induced capsule deformation, pp. 1–31. Chapman & Hall/CRC.
- BARTHÈS-BIESEL, D., DIAZ, A. & DHENIN, E. 2002 Effect of constitutive laws for two dimensional membranes on flow-induced capsule deformation. *J. Fluid Mech.* **460**, 211–222.
- CARIN, M., BARTHÈS-BIESEL, D., EDWARDS-LEVY, F., POSTEL, C. & ANDREI, C. D. 2003 Compression of biocompatible liquid filled hsa-alginate capsules: determination of the membrane mechanical properties. *Biotech. Bioeng.* **82**, 207.
- DIAZ, A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2002 Entrance of a bioartificial capsule in a pore. *CMES* **3** (3), 321–337.
- DIAZ, A., PELEKASIS, N. A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2000 Transient response of a capsule subjected to varying flow conditions: effect of internal fluid viscosity and membrane elasticity. *Phys. Fluids* **12**, 948–957.
- EGGLETON, C. D. & POPEL, A. S. 1998 Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow. *Phys. Fluids* **10**, 1834–1845.
- EVANS, E. A. & SKALAK, R. 1980 *Mechanics and thermodynamics of biomembranes*. CRC Press.
- KRAUS, M., WINTZ, W., SEIFERT, U. & LIPOWSKY, R. 1996 Fluid vesicle in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3685–3688.

- KÜHTREIBER, W. M., LANZA, R. P. & CHICK, W. L. 1998 *Cell encapsulation technology and therapeutics*. Birkhäuser.
- KWAK, S. & POZRIKIDIS, C. 1998 Adaptive triangulation of evolving, closed or open surfaces by the advancing-front method. *J. Comp. Phys.* **145**, 61–88.
- LAC, E. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2005 Deformation of a capsule in simple shear flow: effect of membrane prestress. *Phys. Fluids* **17**, 0721051–0721058.
- LAC, E., BARTHÈS-BIESEL, D., PELEKASIS, N. A. & TSAMOPOULOS, J. 2004 Spherical capsules in three-dimensional unbounded stokes flow: effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.* **516**, 303–334.
- LI, X. Z., BARTHÈS-BIESEL, D. & HELMY, A. 1988 Large deformations and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow. *J. Fluid Mech.* **187**, 179–196.
- POZRIKIDIS, C. 1992 *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press.
- POZRIKIDIS, C. 2003a Deformed shapes of axisymmetric capsules enclosed by elastic membranes. *J. Eng. Math.* **45**, 169–182.
- POZRIKIDIS, C. 2003b *Modeling and simulation of capsules and biological cells*, chap. Shell theory for capsules and cells, pp. 35–102. Chapman & Hall/CRC.
- POZRIKIDIS, C. 2005 Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Phys. Fluids* **17** (3), 031503/1–031503/14.
- QUÉGUINER, C. & BARTHÈS-BIESEL, D. 1997 Axisymmetric motion of capsules through cylindrical channels. *J. Fluid Mech.* **348**, 349–376.
- RACHIK, M., BARTHÈS-BIESEL, D., CARIN, M. & EDWARDS-LEVY, F. 2006 Identification of a bioartificial microcapsule wall material parameter with an inverse method and the compression test. *J. Coll. Int. Sc.* **301**, 217–226.
- RAMANUJAN, S. & POZRIKIDIS, C. 1998 Deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow: Large deformations and the effect of capsule viscosity. *J. Fluid Mech.* **361**, 117–143.
- RISSE, F. & CARIN, M. 2004 Compression of a capsule: Mechanical laws of membranes with negligible bending stiffness. *Phys. Rev. E* **69**, 061601–061608.

- RISSO, F., COLLÉ-PAILOT, F. & ZAGZOULE, M. 2006 Experimental investigation of a bioartificial capsule flowing in a narrow tube. *J. Fluid Mech.* **547**, 149–173.
- SECOMB, T. 1995 Mechanics of blood flow in the microcirculation. *Symp Soc Exp Biol.* **49**, 305–321.
- SHERWOOD, J. D., RISSO, F., COLLÉ-PAILOT, F., EDWARDS-LÉVY, F. & LÉVY, M. C. 2003 Transport rates through a capsule membrane to attain Donnan equilibrium. *J. Colloid Interface Sci.* **263**, 202–212.
- SKALAK, R., TOZEREN, A., ZARDA, R. P. & CHIEN, S. 1973 Strain energy function of red blood cell membranes. *Biophys. J.* **13**, 245–264.