



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires et des espaces de Hardy

Frederic Bernicot

► **To cite this version:**

Frederic Bernicot. Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires et des espaces de Hardy. domain\_other. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00199735

**HAL Id: tel-00199735**

**<https://theses.hal.science/tel-00199735>**

Submitted on 19 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

**THÈSE**

*présentée pour obtenir le grade de*  
DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

*par*

Frédéric BERNICOT

*Sujet :*

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES OPÉRATEURS  
MULTILINÉAIRES ET DES ESPACES DE HARDY.**

*Soutenue le 12 Décembre 2007 après avis des rapporteurs :*

M. Yves MEYER    Rapporteur  
M. Terence TAO    Rapporteur

*devant la Commission d'examen composée de :*

M. Pascal AUSCHER            Directeur de Thèse  
Mme. Aline BONAMI            Présidente du Jury  
M. Guy DAVID  
Mme. Isabelle GALLAGHER  
M. Patrick GÉRARD  
M. Yves MEYER                 Rapporteur



## Remerciements

Je tiens premièrement à remercier mon Directeur de Thèse, Pascal AUSCHER. Il m'a tout d'abord fait confiance en décidant de m'encadrer pour ma thèse. Son cours de DEA et sa passion pour les problèmes d'Analyse Harmonique réelle m'ont conforté dans mes goûts mathématiques. De plus il a su me proposer des sujets de recherche qui correspondaient exactement à mes souhaits. J'ai énormément appris à ses côtés durant ces trois années tant sur le plan mathématique que sur le milieu de la recherche. Il a su me motiver (et me remotiver quand j'en avais besoin), me former à la recherche et partager avec moi toute son expérience, tout en me laissant libre de m'exprimer au travers de mes idées.

Je suis profondément reconnaissant envers les professeurs Yves MEYER et Terence TAO d'avoir porté de l'intérêt à mes travaux et d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je remercie les différents membres du jury, les professeurs Aline BONAMI, Guy DAVID (dont j'ai eu le plaisir de suivre le cours d'intégration en Licence, ce qui fut pour moi une initiation à l'analyse harmonique réelle), Isabelle GALLAGHER et Patrick GÉRARD (qui m'a enseigné l'art de manipuler les distributions lors de son cours en Maîtrise et m'a ensuite encadré pour un stage sur le calcul pseudo-différentiel).

Je n'oublierai jamais toutes ces années passées sur le campus de l'université Paris-Sud, j'ai apprécié les compétences de tous les professeurs que j'ai eu et je les remercie de m'avoir fait partager leur passion des Mathématiques. Mes goûts m'ont "naturellement" porté à avoir plus de rapports avec les membres des équipes d'Analyse Harmonique et d'Analyse Numérique-Equations aux Dérivées Partielles, qui ont toujours fait l'effort de me suivre. J'ai beaucoup apprécié l'accueil chaleureux et les rapports que j'ai eus avec toutes les personnes du département de mathématiques, que ce soit lors d'une (des innombrables) pause café ou lors de rencontres imprévues dans les couloirs ... Ils ont su me conforter dans cette voie que j'ai choisie en démontrant que le milieu de la recherche mathématique est avant tout un environnement de rencontres et de discussions passionnées.

Je pense aussi très fort à ma famille, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Leur aide et leur soutien dépasse très largement le cadre de cette thèse et je les remercie de m'avoir donné la possibilité de faire ces longues études qui ont demandé un certain sacrifice pour tout le monde. Vous m'avez toujours fait confiance et soutenu dans mes choix. Je n'ai pas les mots ici pour exprimer tout ce que je vous dois.

Je voudrais finir par remercier l'ensemble des doctorants que j'ai pu croiser durant ces années et la promotion que j'ai côtoyée avec un très grand plaisir depuis la Licence.

Je souhaite particulièrement remercier Juliette, Maxime, Benoit, Aline, Christine et Laurent, qui m'ont accepté tel que je suis, pour leur joie de vivre, leur gentillesse et leur générosité. Vous m'avez soutenu et encouragé durant toutes ces années, que vous avez rendues inoubliables. Je vous suis très reconnaissant d'avoir toujours été là quand j'avais besoin de vous. De plus vous avez toujours accepté de prendre de votre temps pour des discussions passionnées autour de problèmes variés ou tout simplement pour passer de très bons moments ensemble en de nombreuses et diverses occasions.

Tout ceci n'est que peu de mots pour vous dire ma reconnaissance à tous. Sincèrement un très grand merci, à tous ceux qui ont contribué à cette thèse d'une façon ou d'une autre.



## Résumé :

Cette thèse est composée de deux parties indépendantes. La première partie concerne l'étude des opérateurs bilinéaires. On consacre les deux premiers chapitres à détailler les arguments d'une décomposition "temps-fréquence" afin d'obtenir des estimations localisées sur ces opérateurs. En utilisant ces estimations hors-diagonales, nous obtenons principalement les continuités de ces opérateurs bilinéaires sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Nous finissons ce deuxième chapitre par l'étude d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire. Le troisième chapitre porte sur une étude géométrique de ces opérateurs bilinéaires. Afin de compléter ce travail, nous étudions dans le quatrième chapitre différents résultats divers tels qu'une généralisation des résultats pour des variables multi-dimensionnelles. La deuxième partie porte sur la notion d'espace de Hardy. On y définit une construction abstraite de nouveaux espaces de Hardy. Puis en comparant avec les espaces de Hardy déjà connus et utilisés, nous essayons de dégager les conditions minimales pour conserver les propriétés essentielles de ces espaces. Nous obtenons donc un critère pour obtenir la continuité  $H^1 - L^1$  de certains opérateurs. Nous nous intéressons ensuite à l'étude des espaces intermédiaires par interpolation entre ces espaces  $H^1$  obtenus et les espaces de Lebesgue. Nous finissons ensuite par appliquer ces résultats abstraits pour répondre au problème de régularité maximale  $L^p$  sur les équations d'évolution.

**Mots-clés :** Opérateurs bilinéaires, analyse temps-fréquence, calcul pseudo-différentiel, espaces de Hardy.

## Abstract :

This thesis contains two independent parts. In the first one, we are interested in the study of bilinear operators. We dedicate the two first chapters, to describe "time-frequency" arguments aiming to get local estimates about these operators. Using these "off-diagonal" estimates, we mainly get the continuities of these bilinear operators on Lebesgue spaces and Sobolev spaces. At the end of the second chapter, we study a bilinear pseudo-differential calculus. The third chapter is about a geometrical study of these bilinear operators. To complete this work, in the fourth chapter, we study some various results, for example, we try to generalize our results to multi-dimensional variables. The second part is about the concept of "Hardy spaces". We define an abstract construction of new Hardy spaces. Then, comparing with the already known and studied Hardy spaces, we try to clear up the minimal conditions to keep the main properties of these spaces. So we also get a criterion in order to prove the  $H^1 - L^1$  continuity of some operators. Then we take an interest in the study of intermediate spaces, got by interpolation between these new  $H^1$  spaces and Lebesgue spaces. Finally, we use our abstract theory to solve the problem of maximal  $L^p$  regularity on evolution differential equations.

**Key words :** Bilinear operators, time-frequency analysis, pseudo-differential calculus, Hardy spaces.



Nous nous proposons dans cette thèse d'étudier deux problèmes d'analyse harmonique, faisant intervenir des outils de nature différente. Cette thèse comporte donc deux parties indépendantes :

- I-) Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires.
- II-) Espaces de Hardy abstraits.

## Partie I :

L'objet de cette première partie consiste à étudier les continuités pour des opérateurs multilinéaires sur les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , les espaces de Sobolev  $W^{n,p}(\mathbb{R}^d)$  et les espaces de Hardy  $H^p(\mathbb{R}^d)$ . Le cas des opérateurs linéaires repose essentiellement sur deux outils développés dans les années 50 : la théorie de Littlewood-Paley (développée dans le cadre de l'analyse réelle par Stein [32]) et la décomposition de Calderón-Zygmund ([8]). Il est alors naturel d'essayer d'utiliser ces deux outils pour étudier le cas des opérateurs multilinéaires. Mais le cadre multilinéaire fait apparaître un nouveau phénomène qui ne peut être traité uniquement par ces méthodes. Ce problème intervient déjà dans l'étude des opérateurs  $T$  multilinéaires commutant avec les translations simultanées, c'est à dire que pour tout vecteur  $h \in \mathbb{R}^d$  :

$$\forall f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d), \quad T(\tau_h f_1, \dots, \tau_h f_{n-1}) = \tau_h T(f_1, \dots, f_{n-1}),$$

où on a noté  $\tau_h$  la translation de vecteur  $h$ . Dans ce cas si  $T$  est un opérateur  $(n-1)$ -linéaire continu de  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)^{\otimes(n-1)}$  dans  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$  qui commute avec les translations simultanées, on sait qu'il existe un noyau  $K \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^{d(n-1)})$  tel que

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} K(x - y_1, \dots, x - y_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y_i) dy.$$

Il faut comprendre cette formulation au sens des distributions <sup>1</sup>, en utilisant la transformée de Fourier on obtient l'existence d'une distribution  $m$  supportée sur  $\Gamma = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = 0\}$  telle que :

$$\forall f_i \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad \Lambda(f_1, \dots, f_n) := \langle T(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n \rangle =_{\mathbf{S}'(\mathbb{R}^{d(n-1)})} \left\langle m, \otimes_i^n \widehat{f}_i \right\rangle_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^{d(n-1)})}$$

où on a noté  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier de la fonction  $f$ . Le problème réside dans le choix de conditions minimales sur le symbole  $m$  afin que l'opérateur  $T$  soit continu de  $\otimes_{i=1}^{n-1} L^{p_i}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^{p'_n}(\mathbb{R}^d)$  pour des exposants vérifiant la condition d'homogénéité

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p'_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'_n} + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Si le symbole  $m$  est la fonction constante égale à 1, par la formule d'inversion de Fourier, l'opérateur  $T$  associé correspond au produit simple des  $n-1$  fonctions. La continuité de cet opérateur provient alors simplement de l'inégalité de Hölder.

<sup>1</sup>L'écriture des opérateurs multilinéaires sous forme d'intégrale singulière est à prendre au sens des valeurs principales. On décide d'oublier la notation *v.p.* pour alléger.



Une première généralisation des hypothèses linéaires de Calderón-Zygmund est celle-ci sur le noyau  $K$  :

$$|K(x_1, \dots, x_{n-1})| \lesssim \frac{1}{(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^{d(n-1)}} \quad (1)$$

$$|\nabla K(x_1, \dots, x_{n-1})| \lesssim \frac{1}{(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^{d(n-1)+1}}. \quad (2)$$

Ce cas a été étudié par R. Coifman et Y. Meyer ([10, 11]), C. Kenig et E.M. Stein ([20]) et plus récemment par L.Grafakos et R.Torres ([19]), en adaptant les outils "linéaires". De telles conditions sont invariantes par rotation et impliquent (moralement) une certaine décroissance des dérivées du symbole en fonction de la distance dans l'espace fréquentiel  $\Gamma$  entre l'origine et  $\xi$ , et ce dans toutes les directions de  $\Gamma$ . Si on allège ces hypothèses en "rendant libres" certaines directions, on obtient des opérateurs plus singuliers dont les prototypes sont la transformée de Hilbert bilinéaire définie pour des fonctions test sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} H(f, g)(x) &:= v.p. \int f(x-t)g(x+t) \frac{dt}{t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t| \geq \epsilon} f(x-t)g(x+t) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{i\pi} \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \text{sign}(\alpha - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

et l'opérateur maximal bilinéaire correspondant :

$$T(f, g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |f(x-t)g(x+t)| dt.$$

Dans l'écriture fréquentielle de la transformée de Hilbert bilinéaire, le symbole est singulier selon la direction  $\alpha = \beta$ , et la dérivée du symbole est nulle (donc décroissante) selon la direction  $\alpha = -\beta$ . Ces opérateurs ont été introduits initialement par A.Calderón (motivé par l'étude des intégrales de Cauchy sur des courbes Lipschitziennes). La continuité de la transformée de Hilbert bilinéaire sur les espaces de Lebesgue conjecturée par A.Calderón dans les années 70 (pour l'étude des commutateurs de Calderón) a été démontrée par M.Lacey et C.Thiele dans [23], [22], [24] et [25]. La preuve est basée sur une décomposition dans l'espace temps-fréquence en utilisant simultanément l'orthogonalité en espace et en fréquence, tout en respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg. Cette technique est inspirée des travaux de C.Fefferman pour la preuve du théorème de Carleson sur la convergence presque partout des séries de Fourier ([15]). Que les mêmes outils s'appliquent à ces deux questions repose sur le fait que l'opérateur maximal de Carleson, tout comme les transformées de Hilbert bilinéaires, admettent des invariances par modulation car on remarque que l'opérateur  $H$  vérifie formellement :

$$H(e^{i\xi \cdot} f, e^{i\xi \cdot} g)(x) = e^{2ix\xi} H(f, g)(x).$$

Cette invariance par modulation ne fait jouer aucun rôle spécifique au point 0 dans le plan fréquentiel, et par conséquent interdit des estimations telles que (1) et (2) sur le noyau multilinéaire de l'opérateur. De ce fait, les techniques d'analyse fréquentielle "linéaire" ne peuvent pas suffire à étudier ces opérateurs bilinéaires et c'est pourquoi l'étude de ces opérateurs bilinéaires est plus délicate. L'opérateur maximal bilinéaire,

qui est un opérateur positif, devrait pouvoir être étudié par des méthodes purement géométriques ne faisant pas appel à des outils fréquentiels. Pour l'instant de tels outils sont inconnus, et M.Lacey ([21]) puis C. Demeter, T. Tao et C. Thiele ([14]) ont obtenu des résultats de continuité pour les opérateurs maximaux multilinéaires, en combinant des arguments de maximalité de J. Bourgain et ces "nouveaux" outils d'analyse temps-fréquence.

Depuis quelques années, cette méthode a été éprouvée et améliorée afin d'élargir le cadre d'application. On considère un symbole  $m$  défini sur le sous espace  $\Gamma = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = 0\}$ , qui possède une singularité le long d'un sous-espace  $V$  de dimension  $k$  non dégénéré : l'espace  $V$  peut être paramétré par tous les  $k$ -uplets de variables  $d$ -dimensionnelles canoniques. Ici la dimension  $k$  est prise en tant que " $\mathbb{R}^d$  sous-espace" de  $\Gamma \simeq \mathbb{R}^{d(n-1)} = (\mathbb{R}^d)^{n-1}$  donc  $k \leq n-2$ . On suppose que cette singularité est contrôlée par la condition suivante portant sur la distance au sous espace  $V$  :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{dn} \quad |\partial^\alpha m(\xi)| \leq d(\xi, V)^{-|\alpha|}. \quad (3)$$

Par dualité, étudier les continuités de l'opérateur  $T$  est équivalent à étudier les continuités de la forme  $n$ -linéaire suivante :

$$\Lambda(f_1, \dots, f_n) = \int_{\Gamma} m(\xi) \prod_i \widehat{f}_i(\xi_i) d\xi \quad (4)$$

définie a priori sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ . Dans cette écriture, l'intégrale porte uniquement sur l'hyperplan  $\Gamma$  et la mesure surfacique est abusivement notée  $d\xi$ .

Le meilleur résultat à ce jour est le suivant :

**Théorème 0.0.1.** ([28]) *Soit  $d = 1$ ,  $n \geq 3$ , et  $m$  un symbole qui vérifie l'estimation (3). Dans le cas où  $2k < n$ , la forme  $\Lambda$  est continue sur l'espace  $\otimes_i L^{p_i}(\mathbb{R})$  avec la condition d'homogénéité*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1, \quad (5)$$

*l'hypothèse*

$$\forall 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \quad \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{i_r}} < \frac{n - 2k + r}{2}. \quad (6)$$

*et la restriction  $1 < p_1, \dots, p_{n-1} \leq \infty$ .*

L'hypothèse (6) permet d'avoir des exposants  $p_n < 1$ , mais on suppose que tous les autres exposants sont plus grands que 1. Ce résultat, fondé sur une étude "temps-fréquence" très fine, laisse des questions ouvertes sur le sujet. Tout d'abord la condition (6) sur les exposants est optimale pour cette méthode : pour l'instant on ne sait pas si d'autres exposants pourraient être accessibles par une méthode différente. De plus la méthode utilisée s'applique uniquement pour des variables réelles ( $d = 1$ ). Et il y a la condition  $2k < n$  portant sur le sous espace de singularité : là aussi on ne sait toujours pas si cette condition est optimale. Peut on aller jusque  $k = n - 2$ ? Ces deux dernières limitations semblent provenir des techniques utilisées. Tous ces problèmes ouverts semblent inaccessibles par les outils fréquentiels d'aujourd'hui.

Un autre problème consiste à avoir une estimation uniforme, selon la dégénérescence du sous espace  $V$ . Le résultat suivant a été démontré lorsque  $V = \mathbb{R}v$  est une droite. On introduit une nouvelle distance qui tient compte de cette dégénérescence :

$$d_v(x, V) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i - tv_i}{v_i} \right|, \quad \text{où } v = (v_1, \dots, v_n) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

On suppose que le symbole  $m$  vérifie la condition "renormalisée" :

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq \prod_{i=1}^n (v_i d_v(\xi, V))^{-\alpha_i}. \quad (7)$$

**Théorème 0.0.2.** ([30]) Soit  $d = 1$ ,  $n \geq 3$ ,  $k = 1$ , et  $m$  un symbole qui vérifie l'estimation (7). Dans ce cas, la forme  $\Lambda$  est continue sur l'espace  $\otimes_i L^{p_i}(\mathbb{R})$  avec la condition d'homogénéité (5). De plus, pour les exposants vérifiant  $2 < p_i < \infty$ , l'estimation est uniforme en fonction du symbole et de sa singularité que l'on a normalisée par (7).

La démonstration de ce résultat est très semblable, par les outils employés, à celle du théorème précédent. Cependant le souhait d'avoir des estimations uniformes rend la démonstration beaucoup plus technique.

Après ce panorama, venons-en à notre contribution.

Nous allons dans le premier chapitre étudier des opérateurs multilinéaires généralisant les paraproducts. La notion de paraproduct correspond au cadre des opérateurs multilinéaires, que l'on peut étudier par les outils "linéaires". L'analyse temps-fréquence multilinéaire fait appel à l'étude de ces paraproducts, il est donc nécessaire (mais pas suffisant) de savoir les estimer. Pour obtenir le théorème 0.0.2, il est important de savoir étudier ces paraproducts de manière uniforme selon certains paramètres. Nous étudierons donc ces opérateurs par deux méthodes afin d'obtenir toutes les continuités sur les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^d)$  et les espaces de Hardy  $H^p(\mathbb{R}^d)$  (pour des exposants  $p$  inférieurs à 1). Nous montrerons alors le résultat suivant (voir le théorème 1.0.14 pour la version  $(n-1)$ -linéaire) :

**Théorème 0.0.3.** Sur  $\mathbb{R}^d$ , soit  $\Psi$  une fonction à spectre dans une couronne autour de 0,  $\Phi^i$  des fonctions à spectre dans une boule centrée en 0. Pour des réels  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et  $\rho_1, \rho_2 \in ]0, 1]$  fixés, on considère l'opérateur bilinéaire suivant :

$$T(f, g) : x \rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) [\Phi_{at}^1 * f](x - \rho_1 ay) [\Phi_{bt}^2 * g](x - \rho_2 by) dy \frac{dt}{t}.$$

Soit  $0 < p, q, r \leq \infty$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Alors l'opérateur  $T$  est continu de  $E_p \times F_q$  dans  $G_r$  avec

$si :$	$E_p$	$F_q$	$G_r$
$p, q, r < \infty$	$H^p(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^r(\mathbb{R}^d)$
$q = r < p = \infty$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^r(\mathbb{R}^d) = L^q(\mathbb{R}^d)$
$p = q = r = \infty$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$BMO(\mathbb{R}^d)$
$p = 1 \neq q < \infty$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)$
$p = 1, q = \infty$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$
$p = q = 1$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^{1/2,\infty}(\mathbb{R}^d)$

Par symétrie sur les deux exposants  $p$  et  $q$ , on obtient tous les cas. De plus les bornes de continuité sont indépendantes de  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , et  $\rho_1, \rho_2 \in ]0, 1]$  si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1-)  $0 < p, q, r < \infty$
- 2-)  $|a| \gtrsim |b|$  et  $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}$
- 3-)  $|b| \gtrsim |a|$  et  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$
- 4-)  $|a| \simeq |b|$  et  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$ .

Lorsque l'un des paramètres  $\rho_i$  tend vers 0, on retrouve les paraproduits multilinéaires classiques, ce résultat généralise donc les estimations de [29] sur les paraproduits. Après avoir étudié ces opérateurs nous décomposerons les opérateurs multilinéaires selon ces opérateurs "élémentaires". Cette étude sera suffisante pour obtenir les mêmes résultats de continuité pour des opérateurs multilinéaires lorsque le symbole ne possède qu'un point de singularité :  $V = \{0\}$ . Dans le cas d'un espace  $V$  de dimension plus élevée, cette décomposition fréquentielle ne permet pas d'en déduire des résultats de continuité sur les opérateurs. Cependant elle fera apparaître les quantités importantes à contrôler pour espérer obtenir des estimations de continuité uniformes selon la dégénérescence du sous espace  $V$  et ainsi pouvoir obtenir un résultat similaire au théorème 0.0.2 pour des opérateurs plus singuliers :  $d > 1$ . De plus nous verrons apparaître une propriété géométrique importante, qui est encore vérifiée pour les transformées de Hilbert bilinéaires et l'opérateur maximal bilinéaire. C'est une propriété de localisation spatiale, qui nous pousse à avoir un point de vue plus géométrique sur ces opérateurs. Ce sera l'objectif du troisième chapitre : étudier l'action de ces opérateurs sur les fonctions indicatrices d'ensembles.

Après avoir étudié la décomposition fréquentielle, nous étudierons dans le deuxième chapitre l'analyse temps-fréquence utilisée pour montrer le théorème 0.0.1. Nous rappellerons les outils de cette analyse et nous obtiendrons un résultat localisé un peu plus fort que le théorème 0.0.1, que l'on décrira uniquement dans le cadre bilinéaire :

**Théorème 0.0.4.** *Soit  $m$  un symbole singulier selon la droite d'équation  $\beta - \alpha = 0$ , c'est à dire une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que :*

$$\forall n, l \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^l m(\alpha, \beta) \right| \lesssim |\beta - \alpha|^{-l-n}.$$

Soit  $T$  l'opérateur bilinéaire défini sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}(\mathbb{R})$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Pour des exposants  $1 < p, q < \infty$  tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < r < \infty,$$

et un exposant  $\delta \geq 1$  (aussi grand que l'on souhaite), il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , si de plus le symbole  $m$  est supporté dans  $\{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \geq |I|^{-1}\}$ , alors :

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left[ \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \left( \int_{2^k I} |f|^p \right)^{1/p} \right] \left[ \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \left( \int_{2^k I} |g|^q \right)^{1/q} \right]. \quad (8)$$

Et donc en particulier, on a :

$$\left( |I|^{-1} \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \inf_I M_{HL} (|f|^p)^{1/p} \inf_I M_{HL} (|g|^q)^{1/q}.$$

Ici  $M_{HL}$  représente l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood. L'estimation (8) permet d'avoir une description de la décroissance "hors-diagonale" du noyau bilinéaire de l'opérateur, qui n'est pas accessible de manière directe comme pour le cas linéaire. On montrera comment ce résultat implique la version bilinéaire du théorème 0.0.1. Ensuite, il nous permettra de généraliser les théorèmes de continuité à des opérateurs bilinéaires qui ne commutent plus avec les translations simultanées. Nous montrerons alors le théorème suivant :

**Théorème 0.0.5.** *Soit  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[ - \{0, -\pi/4\}$ ,  $\theta$  mesurant la dégénérescence de la droite de singularité du symbole. Si  $\sigma \in BS^{0,0}$  est un symbole bilinéaire d'ordre  $(0, 0)$  (nous définirons exactement les classes de symboles considérées), alors on construit l'opérateur  $T_{\sigma, \theta}$  sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}(\mathbb{R})$  par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{\sigma, \theta}(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \tan(\theta)\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Pour tout exposants  $p, q, r$  vérifiant  $1 < p, q < \infty$  et

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2},$$

et pour tout  $s \geq 0$ ,  $T_{\sigma, \theta}$  est continu de  $W^{s,p}(\mathbb{R}) \times W^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $W^{s,r}(\mathbb{R})$ .

On définira alors des classes de symboles bilinéaires permettant d'obtenir un calcul pseudo-différentiel bilinéaire. On étudiera l'action de ces opérateurs sur les espaces de Sobolev. En faisant varier le déphasage  $\theta$  nous obtiendrons ainsi des résultats de calcul symbolique sur la composition et la dualité, prolongeant ainsi la définition d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire, commencée par A. Benyi, A. Nahmod et R. Torres dans

[3]. Le calcul pseudo-différentiel linéaire a trouvé toute sa place dans de très nombreuses applications pour l'étude des Équations aux Dérivées Partielles et la construction d'un calcul pseudo-différentiel multilinéaire est motivée par l'utilisation d'estimations multilinéaires dans le cadre des E.D.P. pour traiter les termes non linéaires (estimations de Strichartz multilinéaires [7], "I-method" [12] ...).

Dans le troisième chapitre, nous aborderons l'étude des opérateurs bilinéaires avec un point de vue géométrique. L'opérateur maximal bilinéaire est un opérateur positif ne faisant pas appel aux oscillations des fonctions. De ce fait, il semble intuitif de pouvoir l'étudier de manière purement géométrique sans faire appel à une analyse fréquentielle fine. C'est pourquoi ici, nous désirons exposer quelques arguments géométriques simples, pour obtenir des résultats (très partiels) sur ces opérateurs en espérant pouvoir les compléter dans le futur. Nous nous concentrerons sur la propriété géométrique rencontrée dans le premier chapitre. Nous commencerons par estimer de manière précise l'action sur les fonctions indicatrices d'intervalles. Sous certaines hypothèses géométriques, nous arriverons à obtenir une estimation de continuité de la transformée de Hilbert bilinéaire  $H$ . Nous montrerons en particulier le résultat suivant :

**Théorème 0.0.6.** *Soient  $E, F$  deux boréliens de  $\mathbb{R}$  séparés c'est à dire :*

$$\sup_{e \in E} e \leq \inf_{f \in F} f \text{ ou } \sup_{f \in F} f \leq \inf_{e \in E} e,$$

*alors on a l'estimation de continuité suivante :*

$$\|H(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q}.$$

*Et ce pour des exposants  $(p, q, r)$  vérifiant la relation d'homogénéité et les restrictions :  $1 < p, q < \infty$  et  $1/2 < r < \infty$ .*

Il est intéressant de voir que dans le cas où  $E$  et  $F$  sont séparés, on peut "descendre" l'exposant d'arrivée jusque  $1/2$ . C'est un cas "simple" puisque la séparation des deux ensembles annule tous les problèmes fréquentiels de la transformée de Hilbert bilinéaire. Nous définirons ensuite la notion de concentration, qui permettra d'obtenir des estimations de continuité dans des cas plus généraux pour le couple  $(E, F)$ . Nous n'avons malheureusement pas encore d'arguments permettant de traiter tous les cas géométriques possibles, mais nous décrirons quelques outils permettant peut-être de palier aux limites de l'analyse temps-fréquence. Cette partie a pour but de décrire quelques arguments géométriques de manière à motiver une étude combinant ces arguments et l'analyse temps-fréquence pour répondre aux nombreuses questions encore ouvertes autour des opérateurs multilinéaires.

Le quatrième chapitre porte sur divers résultats. Nous commencerons par étudier les théorèmes de continuité de la transformée de Hilbert bilinéaire pour des variables multidimensionnelles. Nous montrerons alors qu'un résultat aussi général que celui présenté pour des variables réelles (théorème 0.0.1) est faux. Notamment le résultat suivant sera montré :

**Théorème 0.0.7.** Soit  $0 < p, q, r \leq \infty$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

alors la transformée de Hilbert bilinéaire définie sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^2) \times \mathbf{S}(\mathbb{R}^2)$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad H(f, g)(x, y) := v.p. \int f(x - t, y)g(x, y - t) \frac{dt}{t}$$

ne peut être continue de  $L^p(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$  sur  $L^r(\mathbb{R}^2)$  que sous l'hypothèse :  $1 < p, q, r < \infty$ .

En particulier dans le cadre de variables bidimensionnelles, l'exposant d'arrivée ne peut être inférieur à 1 contrairement au cas unidimensionnel. Nous conjecturons que cette continuité est vraie sous cette hypothèse.

Nous terminerons ce chapitre par une étude plus précise des opérateurs bilinéarisés (ainsi que de leurs adjoints) issus de l'opérateur maximal bilinéaire et une étude de l'action de certains opérateurs bilinéaires sur  $L^1 \times L^\infty$  (espace limite qui ne peut être étudié par l'analyse temps-fréquence utilisée dans le théorème 0.0.1). Ces divers résultats finissent cette première partie sur l'étude des opérateurs multi-linéaires.

## Partie II :

Dans cette deuxième partie, nous allons présenter un travail effectué en collaboration avec J. Zhao, c'est un article (en anglais). L'espace de Hardy atomique de Coifman-Weiss a été introduit dans les années 70 et joue un rôle important : il permet de palier aux défauts de l'espace  $L^1(X)$  et est bien adapté à l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund. Récemment de nombreux travaux introduisent de nouvelles classes d'espaces de Hardy. Depuis quelques années, P.Auscher, X.T. Duong, J. Dziubański, S. Hofmann, A. McIntosh, S.Mayboroda, E.Russ, L. Yan et J. Zienkiewicz ... ont étudié ces espaces ([40, 42, 45, 57, 58, 70, 74, 60, 62]), en remplaçant les opérateurs de moyenne dans l'espace de Coifman-Weiss par des opérateurs issus d'un semi-groupe. L'introduction de ces nouveaux espaces permet d'étudier des opérateurs singuliers tels que les transformées de Riesz sur des variétés riemanniennes, l'espace de Coifman-Weiss étant inadapté dans certains cas. L'étude de ces espaces se concentre sur diverses caractérisations (par décompositions moléculaires, fonctionnelles d'aire et fonctions maximales), sur l'interpolation de ces espaces avec les espaces de Lebesgue et sur le problème d'identification de l'espace dual par un espace de type BMO. Ainsi nous nous proposons de construire des espaces de Hardy abstraits sur un espace quelconque de type homogène par décomposition moléculaire et de trouver les conditions minimales permettant de développer une théorie raisonnable.

Commençons par décrire la construction de nos espaces. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de type homogène. Pour chaque boule  $Q$  de l'espace  $X$ , on choisit un opérateur  $B_Q$  borné (uniformément par rapport à  $Q$ ) sur  $L^2(X)$ . Nous définissons les concepts d'atomes et de molécules de la manière suivante :

**Définition 0.0.8.** Soit  $\epsilon > 0$  un paramètre fixé. Une fonction  $m \in L^1_{loc}(X)$  est appelée une  $\epsilon$ -molécule associée à une boule  $Q$  s'il existe une fonction  $f_Q$  telle que

$$m = B_Q(f_Q)$$

et

$$\left( \int_Q |f_Q|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \mu(Q)^{-1/2}, \quad \forall i \geq 0 \quad \left( \int_{2^{i+1}Q \setminus 2^i Q} |f_Q|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq (\mu(2^i Q))^{-1/2} 2^{-\epsilon i}.$$

Nous appelons  $m = B_Q(f_Q)$  un atome si de plus on a  $\text{supp}(f_Q) \subset Q$ .

On définit alors les espaces  $H^1_{ato}$  et  $H^1_{\epsilon, mol}$  par existence de décomposition atomique ou moléculaire. L'injection  $H^1_{ato} \hookrightarrow H^1_{\epsilon, mol}$  est alors évidente. Trouver un critère sur les opérateurs  $(B_Q)_Q$  pour garantir l'injection réciproque semble difficile et ce problème ne sera pas étudié. Cependant il est intéressant de remarquer qu'en choisissant

$$B_Q(f)(x) := \mathbf{1}_Q(x)f(x) - \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right) \mathbf{1}_Q(x),$$

alors tous les espaces  $H^1_{\epsilon, mol}$  coïncident avec l'espace  $H^1_{ato}$  qui correspond à l'espace atomique de Coifman-Weiss.

Pour  $L$  un opérateur elliptique du second ordre vérifiant certaines propriétés, en choisissant (pour  $M$  un entier assez grand)

$$B_Q(f) := (r_Q L)^M e^{-r_Q^2 L}(f) \text{ ou } B_Q(f) := (Id - (Id + r_Q^2 L)^{-1})^M(f),$$

on retrouve ainsi (de manière presque équivalente) les espaces de Hardy étudiés dans [70].

Toutefois cette construction par décomposition moléculaire ne permet pas de retrouver les espaces de Hardy étudiés par X.T. Duong et L. Yan dans [57, 58]. Ceux-ci sont définis par une fonctionnelle d'aire et admettent une décomposition moléculaire sensiblement plus complexe que la notre (Proposition 4.2 de [57]). En choisissant

$$B_Q(f)(x) := f(x) - A_{r_Q}(f)(x),$$

où  $r_Q$  désigne le rayon de la boule  $Q$  et  $A_{r_Q}$  est un opérateur vérifiant la propriété de semi-groupe définie dans leurs articles, nos espaces de Hardy sont à priori inclus dans les leurs, mais l'inverse n'est pas clair.

Notre but est de poser des conditions les plus faibles sur ces opérateurs  $B_Q$  afin d'obtenir des résultats positifs sur les questions de continuité de certains opérateurs et d'interpolation avec les espaces de Lebesgue.

Après avoir défini ces espaces, nous démontrerons un critère (basé sur des estimations "hors-diagonales"), qui nous assure la continuité d'un opérateur  $T$  de ces espaces de Hardy dans l'espace  $L^1(X)$  :



**Théorème 0.0.9.** *Soit  $T$  un opérateur sous linéaire borné sur  $L^2(X)$  vérifiant les estimations "hors diagonales" suivantes : pour toute boule  $Q$ , pour tout  $j \geq 2$  il existe des coefficients  $\alpha_j(Q)$  tels que pour toutes fonctions  $f$  supportées dans  $Q$  :*

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{2^{j+1}Q \setminus 2^jQ} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Si les coefficients  $\alpha_j$  vérifient :

$$\Lambda := \sup_{Q \text{ boule}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty$$

alors l'opérateur  $T$  est continu de  $H_{ato}^1$  dans  $L^1(X)$ .

Remarquons que pour que ce critère s'applique à  $T = Id$ , alors (9) et " $\Lambda < \infty$ " sont nécessaires sur les  $B_Q$  : ce sont les informations hors-diagonales étudiées et utilisées dans de nombreux travaux ([47, 44, 42] ...). Nous démontrerons aussi un critère semblable pour les espaces moléculaire  $H_{\epsilon, mol}^1$ . Ensuite nous montrerons le résultat d'interpolation suivant :

**Théorème 0.0.10.** *Pour  $\sigma \in ]2, \infty]$ , supposons que l'opérateur maximal*

$$M_\sigma(f)(x) := \sup_{\substack{Q \text{ boule} \\ x \in Q}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y) - B_Q^*(f)(y)|^\sigma d\mu \right)^{1/\sigma}$$

soit borné par l'opérateur maximal de Hardy Littlewood  $M_{HL,2}(f) := [M_{HL}(|f|^2)]^{1/2}$ . Soit  $T$  un opérateur linéaire (et plus généralement linéarisable), borné sur  $L^2$  et continu de  $H_{ato}^1$  dans  $L^1$ . Alors pour tout  $p \in ]\sigma', 2]$ ,  $T$  est borné sur  $L^p$ .

La condition demandée par ce théorème est satisfaisante dans le sens où pour les exemples connus l'hypothèse est vérifiée. Ainsi ce résultat permet de montrer que nos espaces de Hardy jouent bien le rôle de substitution à l'espace  $L^1(X)$  et sont suffisamment riches en information pour être interpolés avec les espaces de Lebesgue.

Par la suite, nous appliquerons ces résultats abstraits pour retrouver les résultats connus de régularité maximale sur  $L^p$  pour les équations d'évolution avec  $1 < p < \infty$ . Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs bornés sur  $L^p(Y)$  (où  $Y$  est un espace de type homogène), tel que le noyau de l'opérateur  $e^{tA}$  admette des estimations gaussiennes. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t), & t > 0 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où  $f : ]0, \infty[ \rightarrow Y$  est donnée. Alors la solution  $u$  est donnée formellement par

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Le problème de régularité maximale sur  $L^p$  consiste à savoir si pour  $f \in L^q(L^p(Y))$  donnée,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  (ou  $Au$ ) appartient à l'espace  $L^q(L^p(Y))$ . Ce problème a été étudié dans de

nombreux travaux [49], [54], [53], [56], [69], [72]. Il est complètement résolu dans le cas des espaces UMD. Dans le cas  $L^p(Y)$ , il est connu que ce problème est équivalent à la continuité sur  $L^p(]0, \infty[ \times Y)$  de l'opérateur  $T$  donné par :

$$Tf(t, x) := \int_0^t [Ae^{(t-s)A}f(s, \cdot)](x)ds.$$

Cet opérateur est déjà borné sur  $L^2(]0, \infty[ \times Y)$  comme conséquence de l'analyticité du semi-groupe. Nous définirons alors des opérateurs  $B_Q$  et un espace de Hardy  $H_T^1$  associé à cet opérateur. En appliquant le théorème 0.0.9, nous montrerons que  $T$  et  $T^*$  sont continus de  $H_T^1$  dans  $L^1$ , et ainsi par le résultat d'interpolation du théorème 0.0.10 que  $T$  est continu sur  $L^p(]0, \infty[ \times Y)$  pour tout  $p \in ]1, \infty[$ .

Nous finirons l'étude de ces espaces de Hardy abstraits par une discussion sur les espaces duaux  $(H_{ato}^1)^*$  et  $(H_{\epsilon, mol}^1)^*$ . Tout comme dans le cas classique (et les résultats de [57, 58, 70]), nous aimerions caractériser ces espaces par des espaces de type  $BMO$ . Malheureusement ce problème semble assez compliqué à aborder dans notre cadre général et devra demander quelques efforts supplémentaires. Nous donnerons malgré tout quelques résultats positifs sur ce sujet.

Le dernier chapitre correspond à un article en collaboration avec P. Auscher et J. Zhao. Cet article ne fait pas partie du projet de thèse et ne présente pas de liens directs avec l'étude précédente des espaces de Hardy abstraits. Nous le mettons en annexe afin de compléter l'étude faite sur le problème de régularité maximale. Nous y étudions principalement les continuités de l'opérateur  $T$  (précédemment définis) sur différents espaces de Hardy.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires.</b>	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>Estimations uniformes sur des opérateurs multilinéaires généralisant les paraproducts.</b>	<b>25</b>
1.1	L'analyse par les fonctionnelles quadratiques de Littlewood Paley de $T_{\rho,\mu,L}$ .	29
1.2	L'analyse par une mesure de Carleson de $T_{\rho,\mu,L}$ .	39
1.3	Décomposition d'opérateurs multilinéaires singuliers.	52
1.3.1	Le cas où $m$ est singulier en un point.	52
1.3.2	Le cas où $m$ est singulier sur tout un sous-espace.	56
<b>2</b>	<b>Estimations locales pour des opérateurs bilinéaires et Applications au calcul pseudo-différentiel bilinéaire réel.</b>	<b>65</b>
2.1	Une estimation locale à "haute" fréquence.	68
2.1.1	Discrétisation.	75
2.1.2	Etude des opérateurs $T_{S,0}$ et $T_{S,1}$ .	77
2.1.3	Démonstration du théorème 2.1.11.	86
2.1.4	Un cas particulier.	88
2.1.5	Généralisation des symboles.	91
2.2	Calcul pseudo-différentiel bilinéaire.	99
2.2.1	Définition des classes de symbole.	99
2.2.2	Action des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires sur les espaces de Sobolev.	100
2.2.3	Calcul fonctionnel sur les opérateurs bilinéaires.	109
2.3	Continuité des opérateurs bilinéaires sur les espaces à poids.	116
<b>3</b>	<b>Un point de vue plus géométrique.</b>	<b>121</b>
3.1	Des estimations géométriques particulières.	122
3.2	Des considérations générales.	130
3.3	Le cas de la concentration minimale.	136
<b>4</b>	<b>Résultats divers.</b>	<b>145</b>
4.1	Vers des variables multi-dimensionnelles ...	145
4.1.1	Le cas $(u, v)$ colinéaires.	146
4.1.2	Le cas $(u, v)$ non colinéaires.	150
4.2	Remarques sur les fonctions maximales bilinéaires.	157
4.3	Action sur $L^1 \times L^\infty$ .	161

<b>II</b>	<b>Espaces de Hardy abstraits.</b>	<b>167</b>
<b>5</b>	<b>Espaces de Hardy abstraits.</b>	<b>169</b>
5.1	Definitions . . . . .	172
5.2	Comparison with other Hardy spaces. . . . .	173
5.2.1	The space of Coifman-Weiss. . . . .	173
5.2.2	Hardy spaces for Schrödinger operators with potentials. . . . .	174
5.2.3	Hardy spaces associated to divergence form elliptic operators. . . . .	175
5.2.4	Hardy spaces associated to a general semi-group. . . . .	176
5.3	Continuity theorem on the Hardy space. . . . .	177
5.4	Interpolation theorem between $L^2(X)$ and $H_{ato}^1$ . . . . .	181
5.5	Continuity results in weighted spaces. . . . .	189
5.6	Embedding of $H_{\epsilon, mol}^1$ into $L^1$ . . . . .	192
5.7	An application for the $L^p$ maximal regularity. . . . .	195
5.8	Study of the duality in Hardy spaces. . . . .	210
<b>6</b>	<b>Annexe : "Maximal regularity and Hardy spaces".</b>	<b>217</b>
6.1	Introduction . . . . .	218
6.2	Main result on manifolds . . . . .	219
6.3	Parabolic $H_r^1(X)$ and $H_z^1(X)$ . . . . .	221
6.4	Boundedness of $T$ . . . . .	228
6.5	Boundedness of $T^*$ . . . . .	234
6.6	Maximal $L^q$ regularity on $L^p$ . . . . .	237
6.7	Sublaplacians of connected Lie groups of polynomial growth . . . . .	238
6.8	Second order operators . . . . .	239
	<b>Bibliographie</b>	<b>243</b>

## Notations

Commençons par quelques notations classiques :

Dans toute la première partie de la thèse, nous travaillerons sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . On considère  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance euclidienne, que l'on notera  $|\cdot|$  pour ne pas confondre avec les normes fonctionnelles. On note  $B(x, r)$  la boule de centre  $x \in \mathbb{R}^d$  et de rayon  $r > 0$ . On appelle  $C(x, r_0)$  une couronne centrée en  $x$  et de rayon équivalent à  $r_0$  c'est-à-dire :

$$C(x, r_0) := \{y \in \mathbb{R}^d, |x - y| \simeq r_0\}.$$

Si  $A$  est un borélien de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $|A|$  la mesure de Lebesgue de  $A$ . On note  $x \lesssim y$  pour signifier qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $x \leq cy$  et dans ce cas la constante  $c$  est une constante universelle numérique qui ne dépend pas des différents paramètres importants de l'inégalité. On note  $\sqcup$  pour préciser que l'union est disjointe. Nous noterons  $\boxtimes$  le produit tensoriel entre espaces de Banach.

Dans la seconde partie, nous travaillerons avec des espaces de type homogène. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de type homogène : c'est à dire que  $d$  est une distance définissant une topologie sur  $X$  et  $\mu$  est une mesure borélienne vérifiant la propriété de doublement :

$$\exists A > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in X, \forall r > 0, \forall t \geq 1, \quad \frac{\mu(B(x, tr))}{\mu(B(x, r))} \leq At^\delta.$$

Dans ce cas on appellera "dimension homogène" l'exposant  $\delta$ .

\* Notations des différents espaces fonctionnels :

Nous notons  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$  l'espace de Schwartz sur  $\mathbb{R}^d$  : l'ensemble des fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées. L'espace dual  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$  correspond à l'espace des distributions tempérées. Soit  $(X, d\mu)$  un espace mesuré. Pour  $p \in ]0, \infty]$ , on note  $L^p(X, d\mu)$  l'ensemble de Lebesgue des fonctions mesurables sur  $X$ ,  $p$ -intégrables pour la mesure  $\mu$ . On associe la norme :

$$\|f\|_{p, d\mu, X} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dans la suite, l'ensemble  $X$  est toujours un borélien de  $\mathbb{R}^d$  (muni de la tribu restreinte) et la mesure  $d\mu$  sera essentiellement toujours la mesure de Lebesgue restreinte à  $X$ . S'il n'y a pas de confusions, on utilisera la notation  $\|f\|_{p, X}$ ,  $\|f\|_{p, d\mu}$  ou  $\|f\|_p$ . Rappelons la définition des espaces  $L^{p, \infty}(X, d\mu)$ . Pour  $f \in L^1_{loc}(X, d\mu)$

$$f \in L^{p, \infty}(X, d\mu) \iff \|f\|_{p, \infty} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{|f| > \lambda\})^{1/p} < \infty.$$

Nous utiliserons aussi les espaces de Hardy sur  $\mathbb{R}^d$ , notés  $H^p(\mathbb{R}^d)$ , ainsi que les espaces de Sobolev notés  $W^{s, p}(\mathbb{R}^d)$ . Sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ , nous dirons qu'une fonction  $\phi$  est adaptée à un pavé  $I$  si  $\phi \in C^\infty$  et :

$$\forall \alpha \in \{1, \dots, d\}^{\mathbb{N}} \quad |\phi^\alpha(x)| \leq |I|^{-|\alpha|} \mathbf{1}_I.$$

Pour utiliser des décompositions fonctionnelles, nous aurons besoin de définir des normes de contrôle :

$$c_N(\phi) \simeq \sup_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, d\}^{\mathbb{N}} \\ |\alpha| \leq N}} (1 + |x|)^N |D^\alpha \phi(x)|.$$

\* Notations des différents opérateurs :

On définit la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}^d$  par :

$$\forall f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d), \quad \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Par dualité, on étend la transformée de Fourier sur  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$ . On a alors la formule d'inversion de Fourier :

$$\forall f \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^d), \quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Ainsi, on montre que la transformée de Fourier réalise un isomorphisme sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$ . Par dualité, elle réalise aussi un isomorphisme sur  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

On note  $M_{HL}$  la fonction maximale de Hardy-Littlewood défini par :

$$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \quad M_{HL}(f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(z)| dz.$$

Soit  $z \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\tau_z$  l'opération de translation du vecteur  $z$  :

$$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d), \quad \tau_z(f)(x) := f(x - z).$$

## Première partie

### Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires.





# Chapitre 1

## Estimations uniformes sur des opérateurs multilinéaires généralisant les paraproducts.

### Sommaire

---

1.1	L'analyse par les fonctionnelles quadratiques de Littlewood Paley de $T_{\rho,\mu,L}$ .	29
1.2	L'analyse par une mesure de Carleson de $T_{\rho,\mu,L}$ .	39
1.3	Décomposition d'opérateurs multilinéaires singuliers.	52
1.3.1	Le cas où $m$ est singulier en un point.	52
1.3.2	Le cas où $m$ est singulier sur tout un sous-espace.	56

---

Dans ce chapitre nous allons démontrer des estimations uniformes sur des opérateurs multilinéaires, "généralisant" le cas des paraproducts classiques de Bony et Coifman-Meyer. Le premier résultat démontré historiquement est le suivant :

**Théorème 1.0.11.** *Soit  $(M_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  des entiers et  $(\zeta_{j,i})_{j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n-1}$  des fonctions régulières telles que  $\widehat{\zeta_{j,i}}$  soit adaptée au pavé  $[-2^{j+M_i}, 2^{j+M_i}]^d$ . On suppose qu'il existe un entier  $N$  assez grand tel que pour tout  $j$ , il existe au moins un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  avec*

$$\forall \eta \in [-2^{j+M_i-N}, 2^{j+M_i-N}]^d, \quad \widehat{\zeta_{j,i}}(\eta) = 0. \quad (1.1)$$

Alors pour tout exposants  $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$  tels que :

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1,$$

il existe  $C = C(N, p_i)$  une constante indépendante des entiers  $(M_i)_i$  telle que :

$$\forall f_i \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad \left\| \sum_j \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_{j,i} * f_i \right\|_{p'_n} \leq C \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Le fait que la borne soit indépendante des paramètres  $M_i$  est important et c'est ce qui limite la plage d'exposants. Sur ce sujet, il existe deux questions distinctes : quelle est la plage maximale d'exposants afin d'obtenir des estimations uniformes ? Peut-on affaiblir l'hypothèse (1.1) ?

La deuxième question a été résolue dans [29]. Dans cet article, C.Muscalu T.Tao et C.Thiele ont montré le résultat suivant :

**Théorème 1.0.12.** *Soit  $(M_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  des entiers et  $\zeta_{j,i}$  des fonctions régulières telles que  $\widehat{\zeta_{j,i}}$  soit adaptée au pavé  $[-2^{j+M_i}, 2^{j+M_i}]^d$ . On suppose que pour tout  $j$ , il existe au moins un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  avec*

$$\widehat{\zeta_{j,i}}(0) = 0. \tag{1.2}$$

Alors pour tout exposants  $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$  tels que :

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1,$$

il existe  $C$  une constante indépendante des entiers  $M_i$  telle que :

$$\forall f_i \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad \left\| \sum_j \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_{j,i} * f_i \right\|_{p'_n} \leq C \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Il est même montré une version plus générale que celle décrite ici. L'hypothèse (1.2) faite ici est "beaucoup" plus faible que la première hypothèse (1.1). La démonstration utilise le résultat précédent et des arguments issus de la théorie des graphes.

Ici nous allons nous intéresser à la première question : pour quels autres exposants a-t-on toujours des estimations uniformes en les paramètres  $M_i$  ? Notamment, on essaiera de conserver des bornes uniformes avec des exposants infinis et des exposants inférieurs à 1. Nous étudierons ces estimations sur des opérateurs un peu plus généraux que les paraproducts "classiques".<sup>1</sup>

Commençons par rappeler la définition des espaces de Hardy ([17]) :

**Définition 1.0.13.** *Soit  $\Psi$  une fonction régulière à spectre dans une couronne autour de 0 non identiquement nulle. Pour  $0 < p < \infty$ , on définit l'espace de Hardy  $H^p(\mathbb{R}^d)$  comme un espace de distributions bornées (voir [34]) par :<sup>2</sup>*

$$f \in H^p \iff \|f\|_{H^p} = \|S_\Psi(f)\|_{p,dx} < \infty.$$

On a noté  $S_\Psi(f)$  la fonctionnelle de Littlewood-Paley associée à  $\Psi$  définie par :

$$S_\Psi(f) := \left( \int |\Psi_t * f|^2 \frac{dt}{t^d} \right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad S_\Psi(f) := \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Psi_{2^n} * f|^2 \right)^{1/2}.$$

Ici on a le choix de prendre une fonctionnelle continue ou discrète, les normes dans l'espace  $L^p$  étant toutes les deux équivalentes à la norme de l'espace  $H^p$ . De plus, les normes ne dépendent pas du choix de la fonction  $\Psi$ .

<sup>1</sup>A la fin du paragraphe 1.3.1, nous montrerons que ces opérateurs se décomposent à l'aide des paraproducts classiques et nous expliquerons pourquoi nous avons tenu à étudier directement ces opérateurs et non les paraproducts.

<sup>2</sup>On sait que pour  $1 < p < \infty$ ,  $H^p = L^p$ .

Nous allons montrer dans les prochains paragraphes le résultat suivant, qui est la version  $(n - 1)$ -linéaire du théorème 0.0.3 de l'introduction :

**Théorème 1.0.14.** *Soit  $\Psi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}^d$  à spectre dans une couronne autour de 0 et  $\Phi^i$  des fonctions régulières à spectre dans une boule centrée en 0. Pour  $L$  une fonction bornée sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in (\mathbb{R}^*)^{n-1}$  et  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \in ]0, 1]^{n-1}$  on définit l'opérateur :*

$$T_{\rho, \mu, L}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L(k) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{2^k}(y) \prod_{i=1}^{n-1} [\Phi_{\mu_i 2^k}^i * f_i](x - \rho_i \mu_i y) dy.$$

De même si  $L$  est une fonction bornée mesurable sur  $\mathbb{R}^+$ , on définit la version continue :

$$U_{\rho, \mu, L}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_0^\infty L(t) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \prod_{i=1}^{n-1} [\Phi_{\mu_i t}^i * f_i](x - \rho_i \mu_i y) dy \frac{dt}{t}.$$

Soient  $0 < p_i, p \leq \infty$  des exposants tels que

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i}.$$

Supposons qu'il existe trois ensembles (éventuellement vides) disjoints  $S_1, S_2, S_3$  tels que

$$\{1, \dots, n-1\} = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$$

avec

$$\forall i \in S_1, p_i = 1, \quad \forall i \in S_2, p_i = \infty, \quad \forall i \in S_3, p_i \in \{1, \infty\}^c.$$

Alors les deux opérateurs  $T_{\rho, \mu, L}$  et  $U_{\rho, \mu, L}$  sont continus de  $\otimes_{i=1}^{n-1} F_i$  dans  $G$  dans les différents cas suivants :

\* si  $0 < p < \infty$  avec  $G = L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $F_i = H^{p_i}(\mathbb{R}^d)$  pour  $i \in S_1 \cup S_3$  et  $F_i = L^\infty$  pour  $i \in S_2$

\* si  $0 < p < \infty$  avec  $G = L^{p, \infty}(\mathbb{R}^d)$ ,  $F_i = L^1(\mathbb{R}^d)$  pour  $i \in S_1$ ,  $F_i = H^{p_i}(\mathbb{R}^d)$  pour  $i \in S_3$  et  $F_i = L^\infty$  pour  $i \in S_2$

\* si  $p = \infty$  (et alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $p_i = \infty$ ) avec  $G = BMO(\mathbb{R}^d)$  et  $F_i = L^\infty(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Sous l'une des deux hypothèses suivantes, toutes ces continuités vérifient des estimations uniformes en  $\mu$  et  $\rho$  :

$$\begin{aligned} 1-) \quad & \forall 1 \leq i \leq n-1, \quad p_i < \infty \\ 2-) \quad & \gamma := \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n-1\} \\ |\mu_j| \geq \max\{|\mu_l|, 1 \leq l \leq n-1\}}} \frac{1}{p_j} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, la borne de continuité dépend du rapport :

$$\frac{\max\{|\mu_k|, 1 \leq k \leq n-1\}}{\min\{|\mu_k|, 1 \leq k \leq n-1\}}.$$

Les bornes dépendent des fonctions  $\Psi$  et  $\Phi^i$  par les normes  $c_K$  pour un entier  $K$  assez grand avec par définition :

$$c_K(\zeta) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^K \sup_{\alpha, |\alpha| \leq K} |\partial_x^\alpha \zeta(x)|.$$

Nous allons expliciter toutes ces continuités dans le cas bilinéaire ( $n = 3$ ). Soit  $p, q, r$  des exposants de  $]0, \infty]$  vérifiant la condition

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Les opérateurs  $T_{\rho, \mu, L}$  et  $U_{\rho, \mu, L}$  sont continus de  $E_p \times F_q$  dans  $G_r$  avec

$si :$	$E_p$	$F_q$	$G_r$
$p, q, r < \infty$	$H^p(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^r(\mathbb{R}^d)$
$q = r < p = \infty$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^r(\mathbb{R}^d) = L^q(\mathbb{R}^d)$
$p = q = r = \infty$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$BMO(\mathbb{R}^d)$
$p = 1 \neq q < \infty$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$H^q(\mathbb{R}^d)$	$L^{r, \infty}(\mathbb{R}^d)$
$p = 1, q = \infty$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^\infty(\mathbb{R}^d)$	$L^{1, \infty}(\mathbb{R}^d)$
$p = q = 1$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^1(\mathbb{R}^d)$	$L^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^d)$

Par symétrie sur les deux exposants  $p$  et  $q$ , on obtient tous les cas. Le graphique suivant permet de résumer les différents cas où les bornes de continuité sont uniformes en  $\rho$  et  $\mu$ .

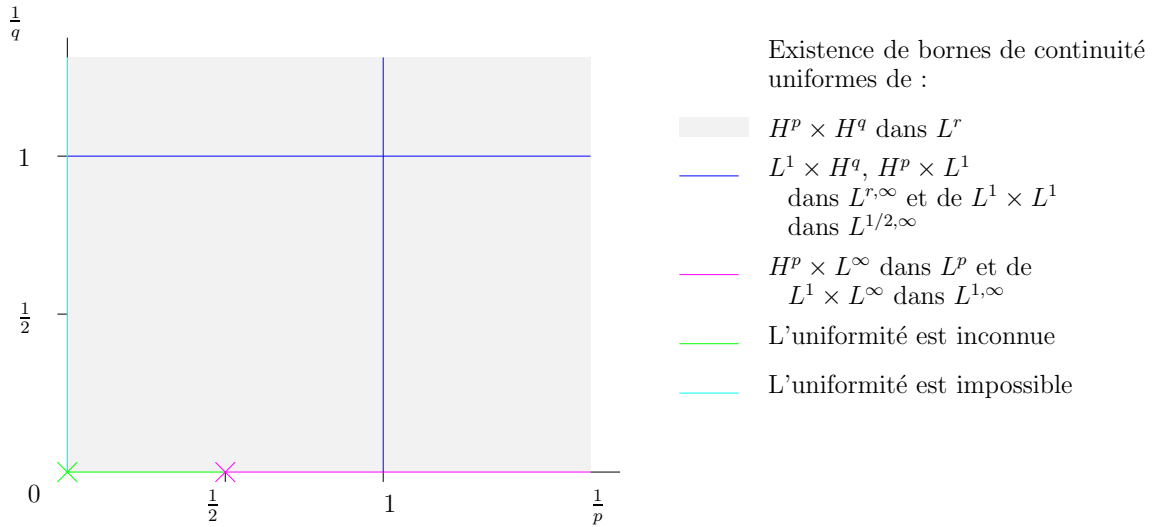


FIG. 1.1 – Diagramme des exposants pour l'obtention de bornes de continuité uniformes dans le cas bilinéaire avec  $|\mu_1| \leq |\mu_2|$ .

Les paramètres  $\rho_i$  permettent de faire le lien avec les paraproducts "classiques" :

$$\forall f_1, \dots, f_n \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad U_{\rho, \mu, L}(f_1, \dots, f_n)(x) \xrightarrow[\rho_i \rightarrow 0]{\rho_1 = 1/2} \int_0^\infty L(t) [\Psi * \Phi^1]_{\mu_1 t} * f_1(x) \prod_{i=2}^n [\Phi_{\mu_i t}^i * f_i](x) \frac{dt}{t}. \tag{1.3}$$

Ainsi, dans le cas où les estimations du théorème sur  $U_{\rho, \mu, L}$  sont uniformes en  $\rho$  et  $\mu$ , on obtient par le lemme de Fatou des estimations uniformes en  $\mu$  pour les paraproducts. Les paramètres  $\mu_i$  jouent le même rôle de "déphasage" que les paramètres  $M_i$  du premier

théorème. Ce théorème permet donc de généraliser le premier résultat avec une plage d'exposants plus large répondant ainsi à la première question. Nous ne savons pas si l'une des deux hypothèses 1-) ou 2-) est nécessaire pour l'obtention de bornes uniformes, mais nous montrerons par un contre-exemple que si  $p < \infty$  et  $\gamma = 0$  alors la borne ne peut être uniforme.

En adaptant la preuve de [29], on devrait pouvoir affaiblir un peu les hypothèses en demandant à la fonction  $\Psi$  de vérifier seulement l'hypothèse (1.2) c'est à dire que  $\widehat{\Psi}(0) = 0$ .

Nous allons dans la première section étudier le cas des exposants finis par une analyse fréquentielle, en utilisant les fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley. Dans la deuxième section, à l'aide de la notion de mesure de Carleson, nous finirons l'étude des continuités avec des exposants infinis. Dans la troisième et dernière section, nous montrerons comment ces opérateurs interviennent dans l'étude d'opérateurs plus singuliers tels que les transformées de Hilbert multilinéaires.

## 1.1 L'analyse par les fonctionnelles quadratiques de Littlewood Paley de $T_{\rho,\mu,L}$ .

Par souci de simplicité, nous n'allons traiter que le cas bilinéaire ( $n = 3$ ) :

$$T_{\rho,\mu,L}(f, g)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L(k) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{2^k}(y) [\Phi_{\mu_1 2^k}^1 * f](x - \rho_1 \mu_1 y) [\Phi_{\mu_2 2^k}^2 * g](x - \rho_2 \mu_2 y) dy.$$

Nous rappelons que les fonctions  $\Phi^i$  sont des fonctions régulières à spectre dans une boule autour de 0 et  $\Psi$  est une fonction à spectre dans une couronne autour de 0. On utilise les notations suivantes : soit  $\zeta$  une fonction sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout réel  $t \neq 0$  et vecteur  $q \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\zeta_t$  et  $\zeta_{t,q}$  les fonctions normalisées dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  définies par

$$\zeta_t(x) := \frac{1}{|t|^d} \zeta(t^{-1}x) \quad \zeta_{t,q}(x) := \frac{1}{|t|^d} \zeta(t^{-1}(x - q)).$$

On définit les bornes de contrôle pour  $\zeta$  une fonction régulière et  $M$  un entier par :

$$c_M(\zeta) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\gamma| \leq M}} (1 + |x|)^M |D^\gamma \zeta(x)|.$$

On utilise la décomposition classique en ondelettes :

**Lemme 1.1.1.** *Soit  $\Psi$  une fonction régulière telle que*

$$c(\Psi) := \int_0^\infty \left| \widehat{\Psi}(t\xi) \right|^2 \frac{dt}{t}$$

*soit une constante strictement positive indépendante de  $\xi$  (par exemple on peut supposer  $\Psi$  radiale et impaire). Alors on a la décomposition suivante :*

$$f = c(\Psi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \langle f, \Psi_{t,q} \rangle \Psi_{t,q} \frac{dt dq}{t}. \quad (1.4)$$

*La constante  $c(\Psi)$  permet de renormaliser. De plus, l'intégrale converge absolument dans le cas où la fonction  $f$  est dans l'espace de Schwartz.*

**Démonstration :** Le résultat est un résultat bien connu dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  : il est montré dans [17] au chapitre 5.6. Si  $f$  est dans  $L^2$ , on sait alors que :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\langle f, \Psi_{t,q} \rangle|^2 dq \frac{dt}{t} = \|f\|_2^2.$$

Dans le cas où  $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$ , l'intégrale ainsi définie est absolument convergente, c'est à dire :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\langle f, \Psi_{t,q} \rangle \Psi_{t,q}| \frac{dqdt}{t} \lesssim \|f\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour cela, en effectuant des intégrations par parties (on dérive  $f$  ou  $\Psi$  selon  $t \leq 1$  ou  $t \geq 1$ ), on trouve une estimation de la forme suivante :

$$|\langle f, \Psi_{t,q} \rangle| \lesssim \|f\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)} \inf\{t^N, t^{-N}\}$$

où  $N$  est un exposant assez grand et  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)}$  représente une certaine semi-norme de l'espace de Schwarz. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\langle f, \Psi_{t,q} \rangle \Psi_{t,q}| \frac{dqdt}{t} &\leq \|f\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \inf\{t, t^{-1}\} \frac{1}{t^d} \left(1 + \frac{|x-q|}{t}\right)^{-M} \frac{dqdt}{t} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)} \int_0^\infty \inf\{t, t^{-1}\} \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

□

On cherche à estimer l'opérateur suivant :

$$T_{\rho,\mu,L}(f,g)(x) := \sum_k L(k) \int \Psi_{2^k}(y) [\Phi_{\mu_1 2^k}^1 * f](x - \rho_1 \mu_1 y) [\Phi_{\mu_2 2^k}^2 * g](x - \rho_2 \mu_2 y) dy.$$

On décompose  $f$  et  $g$  avec le lemme précédent, il nous faut donc étudier le terme générique :

$$F(k, u, v, q, s, x) := L(k) \int \Psi_{2^k}(y) [\Phi_{\mu_1 2^k}^1 * \Psi_{u,q}](x - \rho_1 \mu_1 y) [\Phi_{\mu_2 2^k}^2 * \Psi_{v,s}](x - \rho_2 \mu_2 y) dy.$$

Alors en utilisant l'égalité de Plancherel, on trouve :

$$\begin{aligned} F(k, u, v, q, s, x) &= L(k) \int \widehat{\Psi}_{2^k}(\xi) \widehat{\Phi}_{\mu_1 2^k}^1((\xi - \alpha) \rho_1^{-1} \mu_1^{-1}) \widehat{\Psi}_{u,q}((\xi - \alpha) \rho_1^{-1} \mu_1^{-1}) e^{i(\xi - \alpha) x \rho_1^{-1} \mu_1^{-1}} \widehat{\Phi}_{\mu_2 2^k}^2(\mu_2^{-1} \rho_2^{-1} \alpha) \\ &\quad \widehat{\Psi}_{v,s}(\rho_2^{-1} \mu_2^{-1} \alpha) e^{i\alpha x (\rho_2 \mu_2)^{-1}} (\rho_1 \rho_2 |\mu_1 \mu_2|)^{-d} d\alpha d\xi. \end{aligned}$$

De ce fait, les termes fréquentiels se diagonalisent de manière exacte et on a la condition suivante :

$$F(k, u, v, q, s, x) \neq 0 \implies \max\{|\rho_1 \mu_1| u^{-1}, |\rho_2 \mu_2| v^{-1}\} \simeq 2^{-k} \text{ ou } |\rho_1 \mu_1|^{-1} u \simeq \rho |\rho_2 \mu_2|^{-1} v \leq 2^k.$$

Cette diagonalisation ne tient pas compte de la présence des fonctions  $\Phi^i$ . De plus par propriété spectrale des fonctions  $\Phi^i$  et  $\Psi$ , le produit  $\widehat{\Phi}_{\mu_1 2^k}^1 \widehat{\Psi}_{u,q}$  est non nul seulement

sous la condition  $|\mu_1|u^{-1} \lesssim 2^{-k}$  et de même pour  $v$ . Les coefficients  $\rho_i$  sont bornés par 1, par conséquent on se place toujours dans le premier cas :

$$\max\{|\rho_1\mu_1|u^{-1}, |\rho_2\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k}.$$

On a même montré que l'on a la condition plus forte :

$$\max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k}$$

et ce de manière uniforme selon les coefficients  $\rho_i \in ]0, 1]$ . La méthode que nous allons décrire ne permet d'étudier que ce premier cas de la diagonalisation (qui géométriquement correspond au cas d'un cône dans l'espace fréquentiel (voir figure 1.2)) :

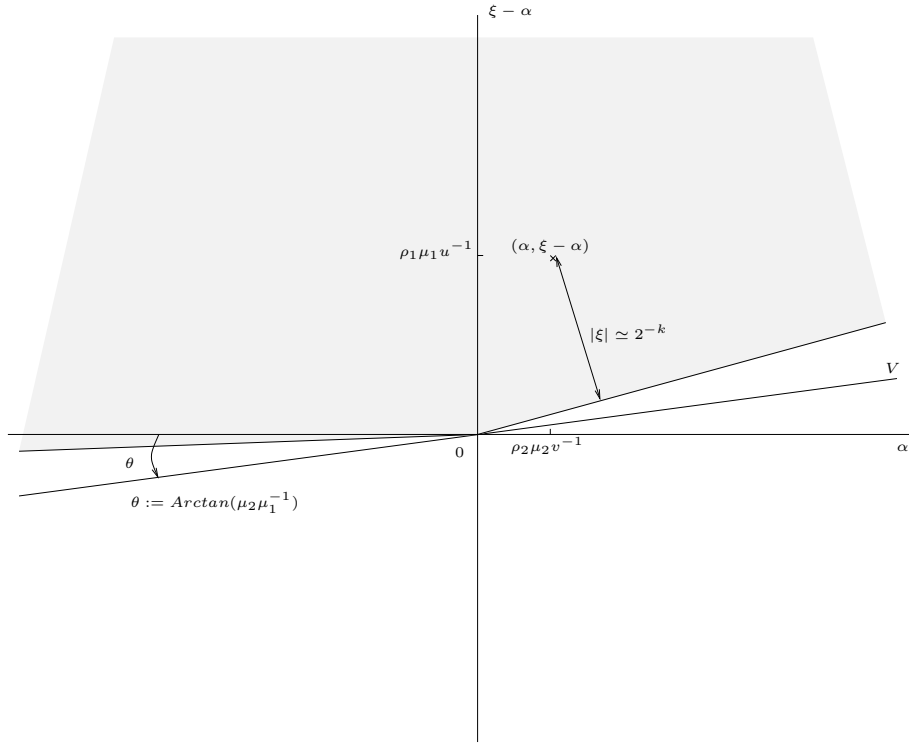


FIG. 1.2 – Région prise en compte pour le symbole de  $T_{\rho,\mu,L}$ .

On finit l'étude des fonctions  $F(k, u, v, q, s, x)$  par l'estimation suivante :

**Proposition 1.1.2.** *Soit  $\Phi$  et  $\Psi$  des fonctions comme précédemment :*

$$F_{k,v,s}(x) := |\Phi_{\mu_2 2^k} * \Psi_{v,s}(x)| \lesssim \frac{\inf\{2^k |\mu_2|, v\}^d}{v^{2d}} \left( 1 + \frac{|x - s|}{\max\{|\mu_2| 2^k, v\}} \right)^{-M},$$

pour  $M$  un exposant assez grand. La majoration est uniforme en  $k$  et en  $\mu_2$ .

**Démonstration :** Soit  $\tilde{\Psi}$  une autre fonction régulière à spectre dans une couronne centrée en 0 et telle que  $\widehat{\tilde{\Psi}} = 1$  sur le spectre de  $\Psi$ . On note la fonction intermédiaire  $\zeta = \Phi_{\mu_2 2^k} * \tilde{\Psi}_{v,s}$ . Alors, on obtient par transformée de Fourier :

$$\widehat{\zeta}(\xi) = \widehat{\Phi}(2^k \mu_2 \xi) \widehat{\tilde{\Psi}}_{v,s}(\xi).$$



Par conséquent, étant donné que  $\Phi$  est à spectre dans une boule, on a les estimations suivantes :

$$\forall \alpha, \quad \left| D^\alpha \widehat{\zeta}(\xi) \right| \lesssim \max\{2^k |\mu_2|, v\}^{|\alpha|} \mathbf{1}_{|\xi| \simeq v^{-1}}.$$

C'est à dire :

$$|\zeta(x)| \lesssim \frac{1}{v^d} \left( 1 + \frac{|x|}{\max\{2^k |\mu_2|, v\}} \right)^{-M},$$

et ce pour un exposant  $M$  aussi grand que l'on veut. D'après les propriétés spectrales de  $\Psi$  et  $\tilde{\Psi}$ , on a :

$$F_{k,v,s}(x) = |\zeta * \Psi_{v,s}(x)|.$$

On estime alors la convolution de manière directe :

$$F_{k,v,s}(x) \lesssim \int \left( 1 + \frac{|x-z|}{\max\{2^k |\mu_2|, v\}} \right)^{-M} \left( 1 + \frac{|z-s|}{v} \right)^{-M} \frac{dz}{v^{2d}}$$

et on trouve l'estimation voulue. □

Nous allons maintenant pouvoir étudier notre opérateur que l'on a décomposé :

$$T_{\rho,\mu,L}(f,g)(x) = \sum_k \iiint \langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle F(k,u,v,q,s,x) \mathbf{1}_{\max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k}} dq \frac{dv}{v} \frac{du}{u} ds.$$

Tout comme lors de la décomposition en paraproduit (paragraphe 8.4 de [17])  $fg = \Pi_f(g) + \Pi_g(f) + D(f,g)$  où les deux paraproducts et le terme diagonal s'étudient de manières différentes, nous allons devoir découper selon deux cas :  $T_{\rho,\mu,L} = T_{\rho,\mu,L}^1 + T_{\rho,\mu,L}^2$  avec

$$T_{\rho,\mu,L}^1(f,g)(x) := \sum_k \iiint \langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle F(k,u,v,q,s,x) \mathbf{1}_{A_k}(u,v) dq \frac{dv du}{vu} ds.$$

$$T_{\rho,\mu,L}^2(f,g)(x) := \sum_k \iiint \langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle F(k,u,v,q,s,x) \mathbf{1}_{B_k}(u,v) dq \frac{dv du}{vu} ds.$$

Nous avons noté  $A_k$  et  $B_k$  les deux ensembles suivants (avec  $C$  une constante numérique) :

$$A_k := \{(u,v), \max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k} \text{ et } \min\{u,v\} \leq C^{-1} \max\{u,v\}\}$$

$$B_k := \{(u,v), \max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k} \text{ et } u \simeq v\}.$$

L'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}^1$  ressemble "fortement" à l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}$ . On a simplement réduit le cône de la figure 1.2 à un cône semblable à celui de la figure 1.3.

Ce cône ne contient pas l'un des deux axes (ici l'axe des "α"). Par conséquent nous allons pouvoir utiliser la séparation spectrale avec les fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley à l'échelle  $2^{-k}$  pour  $f$  et à l'échelle  $v^{-1}$  pour  $g$ .

**Théorème 1.1.3.** *Pour  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu_i \in \mathbb{R}^*$ , l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}^1$  admet une extension continue sur les espaces  $H^{r_1}(\mathbb{R}^d) \times H^{r_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $H^{r_3}(\mathbb{R}^d)$ , si les exposants  $0 < r_1, r_2, r_3 < \infty$  vérifient la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}.$$

*De plus la borne de continuité de  $T$  est bornée par les quantités  $c_N(\Psi)$  et  $c_N(\Phi)$ , pour  $N$  assez grand, de manière proportionnelle à  $\|L\|_\infty$ . Les estimations sont uniformes en  $\mu$  et  $\rho$ .*

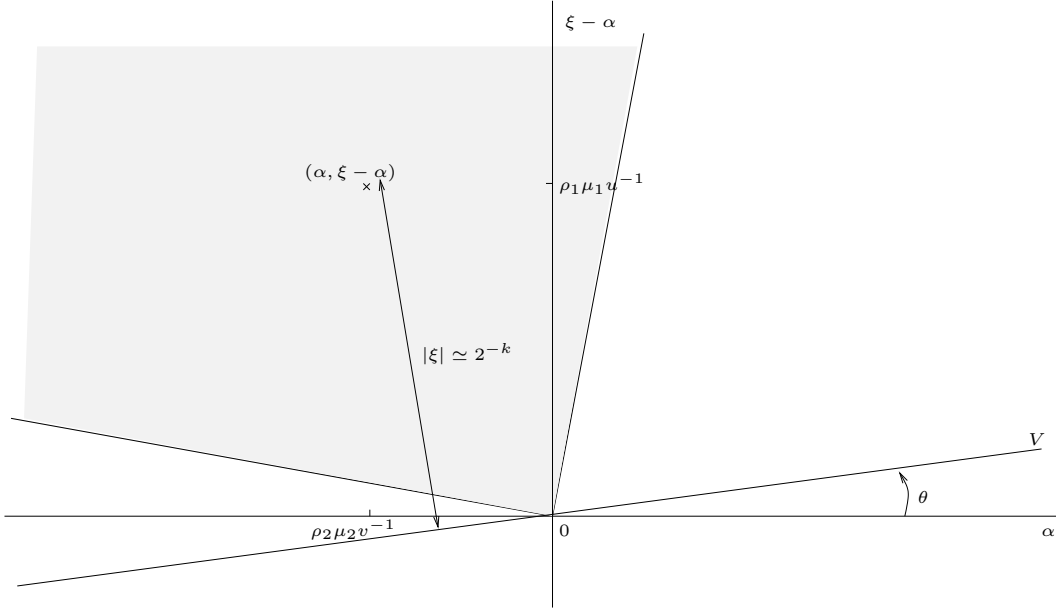


FIG. 1.3 – Région prise en compte pour le symbole de  $T_{\rho,\mu,L}^1$  avec  $u \ll v$ .

**Démonstration :** Pour estimer  $T_{\rho,\mu,L}^1$  dans l'espace de Hardy  $H^{r_3}$ , il nous faut estimer sa fonctionnelle de Littlewood-Paley :  $S_{\Psi}(T_{\rho,\mu,L}^1(f, g))$ . Dans ce cas, en calculant la transformée de Fourier de  $F(k, u, v, q, s, \cdot)$ , on obtient :

$$F(k, \widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{q}, \widehat{s}, \cdot)(\xi) = L(k) \int \widehat{\Psi}_{2^k}(\xi \rho_1 \mu_1 - (\rho_2 \mu_2 - \rho_1 \mu_1) \alpha) \widehat{\Psi}_{u,q}(\xi - \alpha) \widehat{\Phi}_{\mu_1 2^k}^1(\xi - \alpha) \widehat{\Phi}_{\mu_2 2^k}^2(\alpha) \widehat{\Psi}_{v,s}(\alpha) d\alpha. \quad (1.5)$$

Par conséquent, le spectre est localisé

$$\text{spectre}(F(k, u, v, q, s, \cdot)) \subset \frac{1}{u} \text{spectre}(\Psi) + \frac{1}{v} \text{spectre}(\psi) \subset \{\xi, |\xi| \simeq \max\{u^{-1}, v^{-1}\}\}, \quad (1.6)$$

car par définition de l'ensemble  $A_k$ , les paramètres  $u$  et  $v$  vérifient :

$$\min\{u, v\} \leq C^{-1} \max\{u, v\}.$$

Ainsi pour un choix de  $C$  suffisamment grand (ne dépendant que des couronnes), l'inclusion ensembliste sur les spectres est vérifiée. Par symétrie supposons donc que  $u \leq v$ , alors à un facteur près dépendant de  $C$  (en choisissant une fonctionnelle  $S_{\Psi}$  continue), on a :

$$S_{\Psi}(T_{\rho,\mu,L}^1(f, g))(x) \lesssim$$

$$\left( \int_u \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iiint |\langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle| |\Psi_u * F(k, u, v, q, s, x)| \mathbf{1}_{A'_k}(u, v) dq \frac{dv}{v} ds \right]^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2},$$

où on a noté  $A'_k = \{(u, v) \in A_k, u \ll v\}$ . On a donc à estimer la quantité suivante :

$$Q := \left\| \left( \int \left| \sum_k \iiint |\langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle| |\Psi_u * F(k, u, v, q, s, \cdot)(x)| \mathbf{1}_{A'_k}(u, v) dq \frac{dv}{v} ds \right|^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2} \right\|_{r_3, dx}.$$

La proposition 1.1.2, nous donne une majoration des coefficients

$$|F(k, u, v, q, s, x)| \leq |L(k)| \int |\Psi_{2^k}(y)| F_{k,u,q}(x - \mu_1 \rho_1 y) F_{k,v,s}(x - \rho_2 \mu_2 y) dy.$$

Comme  $\rho_i \leq 1$  et  $(u, v) \in A'_k$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{|y|}{2^k}\right)^{-2} \left(1 + \frac{|x - \rho_1 \mu_1 y - q|}{u}\right)^{-1} \left(1 + \frac{|x - \rho_2 \mu_2 y - s|}{v}\right)^{-1} \\ & \leq \left(1 + \frac{|x - q|}{u}\right)^{-1} \left(1 + \frac{|x - s|}{v}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Avec la décroissance de  $\Psi$ , on obtient donc l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |F(k, u, v, q, s, x)| & \lesssim \|L\|_\infty \int 2^{-dk} \left(1 + \frac{|y|}{2^k}\right)^{-M} |\mu_1|^{d2^k} u^{-2d} \left(1 + \frac{|x - \rho_1 \mu_1 y - q|}{u}\right)^{-M} \\ & \quad \frac{|\mu_2|^{d2^k}}{v^{2d}} \left(1 + \frac{|x - \rho_2 \mu_2 y - s|}{v}\right)^{-M} dy \\ & \lesssim \|L\|_\infty \left(1 + \frac{|x - s|}{v}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x - q|}{u}\right)^{-M} \left(\frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{u^2 v^2}\right)^d, \quad (1.7) \end{aligned}$$

(avec des exposants  $M$  différents). Finalement, on peut estimer la convolution par :

$$\begin{aligned} |\Psi_u * F(k, u, v, q, s, \cdot)(x)| & \leq \frac{1}{u^d} \int \left[ \left(1 + \frac{|x - z|}{u}\right)^{-M} \|L\|_\infty \left(1 + \frac{|z - s|}{v}\right)^{-M} \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{|z - q|}{u}\right)^{-M} \left(\frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{u^2 v^2}\right)^d \right] dz \lesssim \|L\|_\infty \left(1 + \frac{|x - s|}{v}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x - q|}{u}\right)^{-M} \left(\frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{u^2 v^2}\right)^d. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé que  $u \ll v$  étant donné l'ensemble  $A'_k$ . En substituant dans  $Q$ , on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} Q & \lesssim \|L\|_\infty \left\| \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iiint |\langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle| \left(1 + \frac{|x - s|}{v}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x - q|}{u}\right)^{-M} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mathbf{1}_{A'_k}(u, v) \left(\frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{u^2 v^2}\right)^d dsdq \frac{dv}{v} \right\|_{2, du/u} \right\|_{r_3, dx}. \end{aligned}$$

On effectue les changements de variables suivants :

$$\frac{x - q}{u} \rightarrow a \text{ et } \frac{x - s}{v} \rightarrow b.$$

Le jacobien total est  $(uv)^d$ , on trouve donc :

$$\begin{aligned} Q & \lesssim \left\| \left\| \sum_k \iiint |\langle f, \Psi_{u, x-ua} \rangle \langle g, \Psi_{v, x-vb} \rangle| (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} \mathbf{1}_{A'_k}(u, v) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{uv}\right)^d dadb \frac{dv}{v} \right\|_{2, du/u} \right\|_{r_3, dx}. \end{aligned}$$

Notons  $\tilde{\Psi}^z$  la translatée symétrisée de  $\Psi$  par  $z$ , c'est à dire  $\tilde{\Psi}^z(y) := \Psi(z - y)$  et  $\tilde{\Psi}_t^z := (\tilde{\Psi}^z)_t$ . On peut alors réécrire :

$$Q \lesssim \left\| \left\| \sum_k \iint \left| \tilde{\Psi}_u^a * f(x) \right| \left| \tilde{\Psi}_v^b * g(x) \right| (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} \mathbf{1}_{A'_k}(u, v) \left( \frac{|\mu_1| |\mu_2| 2^{2k}}{uv} \right)^d dadb \frac{dv}{v} \right\|_{2,du/u} \right\|_{r_3,dx}.$$

Pour le paramètre  $k$ , l'ensemble  $A'_k$  impose

$$2^{-k} \simeq \max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\}.$$

Par conséquent l'indice  $k$  est fixé par les paramètres  $u$  et  $v$  :

$$Q \lesssim \left\| \left\| \iint \left| \tilde{\Psi}_u^a * f(x) \right| \left| \tilde{\Psi}_v^b * g(x) \right| (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} \mathbf{1}_{u \leq C^{-1}v} \left( \frac{|\mu_1| |\mu_2| \inf\{|\mu_1|^{-1}u, |\mu_2|^{-1}v\}^2}{uv} \right)^d dadb \frac{dv}{v} \right\|_{2,du/u} \right\|_{r_3,dx}.$$

La constante  $C$  est définie par l'ensemble  $A'_k$ . On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la mesure  $dv/v$ , et l'estimation :

$$\begin{aligned} \int_{C_u}^{\infty} \left( \frac{|\mu_1| |\mu_2| \inf\{|\mu_1|^{-1}u, |\mu_2|^{-1}v\}^2}{uv} \right)^{2d} \frac{dv}{v} &\lesssim \int_{C_u}^{\infty} \left( \frac{\inf\{|\mu_1|^{-1}u, |\mu_2|^{-1}v\}}{\max\{|\mu_1|^{-1}u, |\mu_2|^{-1}v\}} \right)^{2d} \frac{dv}{v} \\ &\lesssim \int_{|\mu_2 \mu_1^{-1}|u}^{\infty} \left( \frac{|\mu_1|^{-1}u}{|\mu_2|^{-1}v} \right)^{2d} \frac{dv}{v} + \\ &\quad \int_{C_u}^{\max\{C, |\mu_2 \mu_1^{-1}|\}u} \left( \frac{|\mu_2|^{-1}v}{|\mu_1|^{-1}u} \right)^{2d} \frac{dv}{v} \\ &\lesssim 1 + \left( \frac{|\mu_2|^{-1}}{|\mu_1|^{-1}} \right)^{2d} [\max\{C, |\mu_2 \mu_1^{-1}|\}^{2d} - C^{2d}] \\ &\lesssim 1 + \left( \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{2d} [|\mu_2 \mu_1^{-1}|^{2d} - \min\{C, |\mu_2 \mu_1^{-1}|\}^{2d}] \\ &\lesssim 1 + [1 - \min\{C|\mu_2^{-1}\mu_1|, 1\}^{2d}] \lesssim 1, \end{aligned}$$

et on aboutit à l'estimation

$$Q \lesssim \left\| \left\| \iint \tilde{\Psi}_u^a * f(x) S_{\tilde{\Psi}^b}(g)(x) (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} dadb \right\|_{2,du/u} \right\|_{r_3,dx},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$Q \lesssim \left\| \left\| \iint S_{\tilde{\Psi}^a}(f)(x) S_{\tilde{\Psi}^b}(g)(x) (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} dadb \right\|_{r_3,dx} \right\|.$$

On utilise alors le lemme suivant pour contrôler les fonctionnelles quadratiques (il nous faut un contrôle ponctuel étant donné qu'un contrôle en norme ne suffit pas pour des exposants  $r_3 < 1$ ) :

**Lemme 1.1.4.** Notons  $S_\Psi$  la fonctionnelle quadratique de Littlewood-Paley associée à une fonction régulière  $\Psi$  vérifiant

$$\forall \xi \neq 0, \quad \int \left| \widehat{\Psi}(t\xi) \right|^2 \frac{dt}{t} = 1. \quad (1.8)$$

Pour  $\zeta$  une autre fonction vérifiant aussi (1.8), on a la majoration suivante : pour tout  $r > 0$ , il existe une constante  $C_r$  et un entier  $N$  tels que

$$\forall f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad S_\zeta(f) \leq C_r c_N(\zeta) c_N(\Psi) \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Ici  $M_{HL}$  est l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood,  $M_{HL}^2 := M_{HL} \circ M_{HL}$  et

$$M_r^2(g) = (M_{HL}^2(|g|^r))^{1/r}.$$

Les bornes de contrôle  $c_N(\zeta)$  sont définies par :

$$c_N(\zeta) = \sup_x (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \zeta(x)|$$

Admettons ce lemme pour l'instant. En appliquant ce lemme avec  $\zeta = \tilde{\Psi}^a$  et  $\zeta = \tilde{\Psi}^b$ , il vient l'estimation suivante :

$$Q \lesssim \left\| \iint (1 + |a|)^N (1 + |b|)^N \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} (1 + |b|)^{-M} (1 + |a|)^{-M} da db \right\|_{r_3, dx}.$$

Par conséquent, en choisissant  $M$  assez grand devant  $N$ , on obtient une estimation de la forme suivante :

$$Q \lesssim \left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_3, dx}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve finalement :

$$Q \lesssim \left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_1, dx} \left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_2, dx}. \quad (1.9)$$

Il nous suffit donc de contrôler les "normes"  $L^{r_1}$  et  $L^{r_2}$ . On étudie alors le premier terme avec  $r_1$ , l'autre venant par symétrie :

$$\left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_1} = \left\| \left( \int [M_{HL}^2(|\Psi_t * f|^r)]^{2/r} \frac{dt}{t} \right)^{r/2} \right\|_{r_1/r}^{1/r}.$$

Pour  $r$  assez petit tel que  $\min\{r_1/r, 2/r\} > 1$ , l'inégalité de Fefferman-Stein ([17] Th 4.6.6) dans  $L^{2/r}$  appliquée à l'opérateur  $M_{HL}^2$  :

$$\left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_1} \lesssim \left\| \left( \int [|\Psi_t * f|^{2/r}]^{r/2} \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \right\|_{r_1/r}.$$

C'est à dire exactement :

$$\left\| \left( \int [M_r^2(\Psi_t * f)]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{r_1} \lesssim \|S_\Psi(f)\|_{r_1}.$$

En substituant dans (1.9), on trouve bien :

$$Q \lesssim \|f\|_{H^{r_1}} \|g\|_{H^{r_2}}$$

et ce uniformément en les paramètres  $\mu_i \neq 0$  et  $0 < \rho_i \leq 1$ . □

Il nous faut donc maintenant démontrer le lemme 1.1.4 :

**Démonstration :** Il est essentiellement démontré dans sa version discrète dans [17], dont on va d'ailleurs reprendre les notations. On définit l'opérateur maximal suivant :

$$M_{b,t}(f, \Psi) = \sup_y \frac{|\Psi_t * f(x - y)|}{(1 + t^{-1}|y|)^b}.$$

Alors il est clair que :

$$|\zeta_t * f| \leq M_{b,t}(f, \zeta). \tag{1.10}$$

Dans la démonstration du théorème 6.5.6. de [17], on choisit une fonction  $\Theta$  qui vérifie (1.8) et telle que  $\hat{\Theta} \geq 0$  et il est montré qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$M_{b,t}(f, \zeta) \leq C \int c(\zeta)c(\Theta) \inf\{|t - s|, |t - s|^{-1}\} M_{b,s}(f, \Theta) \frac{ds}{s}.$$

Par conséquent avec (1.10), on a :

$$S_\zeta(f) \leq Cc(\zeta)c(\Psi) \left( \int [M_{b,s}(f, \Theta)]^2 \frac{ds}{s} \right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Or en appliquant le lemme 6.5.3. de [17] avec  $b = n/r$ , il vient :

$$M_{b,t}(f, \Theta) \lesssim M_r(\Theta_t * f).$$

Pour passer de la fonction  $\Theta$  à la fonction  $\Psi$ , on utilise la condition spectrale et le fait que

$$\Theta_t * f = \int_{1/2}^2 \Theta_t * \Psi_{tu} * f \frac{du}{u}.$$

Alors avec la majoration 6.5.8. de [17] :

$$|\Theta_t * \Psi_{tu} * f(x)| \lesssim c(\Theta) M_r(\Psi_t * f)(x),$$

on obtient :

$$M_{b,t}(f, \Theta) \lesssim M_r(\Theta_t * f) \lesssim c(\Theta)c(\Psi)M_r M_r(\Psi_t * f) \lesssim c(\Psi)M_r^2(\Psi_t * f).$$

En substituant dans (1.11), on obtient le lemme. □

Pour finir d'étudier les opérateurs  $T_{\rho,\mu,L}$ , il nous faut maintenant contrôler l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}^2$  :

**Théorème 1.1.5.** *Toujours dans le cas où  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu_i \neq 0$ , l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}^2$  est continu de  $H^{r_1}(\mathbb{R}^d) \times H^{r_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^{r_3}(\mathbb{R}^d)$ , si les exposants  $0 < r_1, r_2, r_3 < \infty$  vérifient la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}.$$

*De plus la borne de continuité est bornée uniformément en  $\mu_i$  et  $\rho_i$  par les quantités  $c_M(\Psi)$  et  $c_M(\Phi)$  pour  $M$  assez grand, de manière proportionnelle à  $\|L\|_\infty$ .*

**Démonstration :** L'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}^2$  est défini par :

$$T_{\rho,\mu,L}^2(f, g) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iiint \langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle F(k, u, v, q, s, x) \mathbf{1}_{B_k}(u, v) dq \frac{dvdu}{vu} ds,$$

avec

$$B_k := \{(u, v), \max\{|\mu_1|u^{-1}, |\mu_2|v^{-1}\} \simeq 2^{-k} \text{ et } u \simeq v\}.$$

En réutilisant les estimations précédentes (qui sont encore valables) sur les coefficients, on doit contrôler :

$$Q := \|T_{\rho,\mu,L}^2(f, g)\|_{r_3} \lesssim \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iiint |\langle f, \Psi_{u,q} \rangle \langle g, \Psi_{v,s} \rangle| \left(1 + \frac{|x-s|}{v}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x-q|}{u}\right)^{-M} \mathbf{1}_{B_k}(u, v) \left(\frac{|\mu_1||\mu_2|2^{2k}}{u^2v^2}\right)^d dsdq \frac{dvdu}{uv} \right\|_{r_3, dx}.$$

Dans ce cas la somme algébrique (1.6) n'est plus vérifiée. Mais les deux paramètres  $u$  et  $v$  étant équivalents, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de réobtenir directement les deux fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley associées à  $f$  et à  $g$ . On effectue donc les mêmes changements de variables que précédemment, et de manière analogue on trouve :

$$Q \lesssim \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iiint |\Psi_u^a * f(x)| |\Psi_v^b * g(x)| (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} \mathbf{1}_{B_k}(u, v) \frac{dadbdudv}{uv} \right\|_{r_3, dx}.$$

Le paramètre  $k$  étant déterminé par les coefficients  $u$  et  $v$  :

$$Q \lesssim \left\| \iiint |\Psi_u^a * f(x)| |\Psi_v^b * g(x)| (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} \mathbf{1}_{u \simeq v} \frac{dadbdudv}{uv} \right\|_{r_3, dx}.$$

Puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz en  $u$  et en  $v$ , pour obtenir :

$$Q \lesssim \left\| \iint S_{\Psi^a}(f)(x) S_{\Psi^b}(g)(x) (1 + |a|)^{-M} (1 + |b|)^{-M} dadb \right\|_{r_3, dx}.$$

On finit alors par les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème précédent.  $\square$

Finalement, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 1.1.6.** *Dans le cas où  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu_i \neq 0$ , l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}$  est continu sur les espaces  $H^{r_1}(\mathbb{R}^d) \times H^{r_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^{r_3}(\mathbb{R}^d)$ , si les exposants  $0 < r_1, r_2, r_3 < \infty$  vérifient la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}.$$

*De plus la borne de continuité de  $T$  est bornée uniformément en  $\mu$  et  $\rho$  par les quantités  $c_M(\Psi)$  et  $c_M(\Phi)$  pour  $M$  assez grand, et de manière proportionnelle à  $\|L\|_\infty$ .*

**Démonstration :** On a décomposé  $T_{\rho,\mu,L}$  par :

$$T_{\rho,\mu,L} = T_{\rho,\mu,L}^1 + T_{\rho,\mu,L}^2.$$

Les deux théorèmes précédents permettent de contrôler ces deux opérateurs. L'injection  $H^{r_3} \hookrightarrow L^{r_3}$  (voir théorème 2.5 dans [37]) nous permet donc d'obtenir le résultat sur l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}$ .  $\square$

**Conclusion :** Par conséquent nous avons montré que l'opérateur  $T_{\rho,\mu,L}$  est continu sur les espaces  $H^{r_1}(\mathbb{R}^d) \times H^{r_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^{r_3}(\mathbb{R}^d)$ , si les exposants  $0 < r_1, r_2, r_3 < \infty$  vérifient la condition d'homogénéité

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}.$$

De plus la borne de continuité  $T_{\rho,L}^\flat$  est bornée uniformément en  $\mu_i$  et  $\rho$  par les quantités  $c_M(\Psi)$  et  $c_M(\Phi)$ , pour  $M$  assez grand et de manière proportionnelle à  $\|L\|_\infty$  sous la contrainte  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu_i \neq 0$ . Nous avons donc démontré le théorème 1.0.14 pour des exposants finis dans le cas  $n = 3$ . Pour  $n$  quelconque, la démonstration de ce résultat est identique, la seule difficulté étant celle de l'écriture.

Lorsque les paramètres  $\rho_i \rightarrow 0$  pour  $i \geq 2$ , l'opérateur tend vers les paraproducts multilinéaires classiques :

$$T_{\rho,\mu,L}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) \xrightarrow[\rho_i \rightarrow 0]{\rho_1=1} \sum_k [\Psi_{2^k} * f](x) \prod_{i=2}^{n-1} [\Phi_{\mu_i 2^k}^i * g](x).$$

On retrouve alors les résultats de [29] sur les bornes uniformes des paraproducts.

Dans la prochaine section, à l'aide de la notion de mesure de Carleson nous allons étudier le cas des exposants infinis.

## 1.2 L'analyse par une mesure de Carleson de $T_{\rho,\mu,L}$ .

Nous allons étendre le résultat précédent par des techniques adaptées de celles de [9]. Grâce à la notion de mesure de Carleson et de décomposition de Calderón-Zygmund, nous allons pouvoir obtenir des continuités dans les cas limites : avec des exposants



infinis et des normes dans l'espace  $L^1$  tout en conservant l'uniformité des bornes par rapport aux paramètres  $\mu_i$ .

Nous allons travailler sur le modèle continu :

$$U_{\rho,\mu,m}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) := \int_0^\infty m(t) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \prod_{i=1}^{n-1} [\Phi_{\mu_i t}^i * f_i](x - \rho_i \mu_i y) dy \frac{dt}{t},$$

où  $m$  est une fonction mesurable bornée. On rappelle que les fonctions  $\Phi^i$  sont régulières et à spectre dans une boule autour de 0. La fonction  $\Psi$  est à spectre dans une couronne autour de 0. Les paramètres  $\rho_i \in [0, 1]$  ne posent aucun problème pour les estimations, par contre pour obtenir des estimations uniformes selon les paramètres  $\mu_i \neq 0$ , nous devons être un peu plus précis. Par symétrie, nous allons supposer que  $\mu_{n-1}$  vérifie :

$$|\mu_{n-1}| = \max\{|\mu_i|, 1 \leq i \leq n-1\}. \tag{1.12}$$

Dans ce cas, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $\Psi$  une fonction à décroissance rapide réelle et à spectre dans la couronne de rayons 1 et 2. Soit  $\Phi^i$  des fonctions réelles dont le spectre est inclus dans  $B(0, 4)$  et  $m(t) \in L^\infty$ . Alors l'opérateur  $U_{\rho,\mu,m}$  est continu de l'espace  $(L^\infty)^{\otimes n-2} \times L^2$  dans  $L^2$ . De plus la borne de continuité est bornée par  $\|m\|_\infty$  et par les bornes  $c_M(\Psi)$ ,  $c_M(\Phi^i)$  (pour  $M$  assez grand) de manière indépendante vis à vis des  $\rho_i \in ]0, 1]$  et de  $\mu$  sous la condition (1.12). Les rayons que l'on a pris pour les différents spectres ne jouent aucuns rôles tant qu'ils sont bornés de manière numérique par des constantes universelles.*

**Démonstration :** On va beaucoup s'inspirer d'une preuve de [9]. Par symétrie sur les  $n - 2$  premières composantes, on suppose que

$$|\mu_1| := \min\{|\mu_j|, 1 \leq j \leq n-2\}. \tag{1.13}$$

Dans [9] (Chap. VI prop 3), il est montré le résultat (\*) que l'opérateur  $V$  est continu de  $(L^\infty)^{\otimes n-2} \times L^2$  dans  $L^2$ , où  $V$  est défini par :

$$\begin{aligned} V(f_1, \dots, f_{n-1})(x) &:= U_{(\rho_1, 0, \dots, 0), \mu, m}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) \\ &= \int_0^\infty [\Psi_{\rho_1 \mu_1 t} * \Phi_{\mu_1 t}^1 * f_1](x) \prod_{j=2}^{n-1} \Phi_{\mu_j t}^j * f_j(x) \frac{m(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

L'estimation de  $V$  est uniforme en  $\mu$  et  $\rho_1$  car on a les hypothèses (1.12) et (1.13). L'idée consiste donc à effectuer un développement d'ordre 1 en  $(\rho_j)_{2 \leq j \leq n-1}$  et à étudier les différents termes. On écrit donc (à présent on oublie les dépendances des opérateurs en les différents paramètres  $\rho, \mu, m$ ) :

$$U_{\rho,\mu,m}(f_1, \dots, f_{n-1}) = V(f_1, \dots, f_{n-1}) + \sum_{\substack{J \subset \{2, \dots, n-1\} \\ J \neq \emptyset}} \int_{\substack{0 \leq s_j \leq \rho_j \\ j \in J}} W_{s,J}(f_1, \dots, f_{n-1}) ds,$$

où

$$W_{s,J}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) :=$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \Phi_{\mu_1 t}^1 * f_1(x + \rho_1 \mu_1 y) \prod_{\substack{j=2 \\ j \in J}}^{n-1} \frac{\mu_j y}{\mu_j t} \cdot (\nabla \Phi^j)_{\mu_j t} * f_j(x + s_j \mu_j y) \Pi_J(x, y, t) \frac{m(t)}{t} dy dt$$

avec

$$\Pi_J(x, y, t) := \prod_{\substack{j=2 \\ j \in J^c}}^{n-1} (\Phi^j)_{\mu_j t} * f_j(x + \mu_j y).$$

Il nous reste donc à estimer individuellement les opérateurs  $W_{s,J}$  ( $V$  étant estimé par le résultat (\*),  $\rho_i \leq 1$  et l'ensemble des  $J$  étant fini). On décompose le gradient selon les  $d$  coordonnées :

$$W_{s,J}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{l \in \{1, \dots, d\}^{|J|}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \Phi_{\mu_1 t}^1 * f_1(x + \rho_1 \mu_1 y) \prod_{\substack{j=2 \\ j \in J}}^{n-1} \frac{y_{l_j}}{t} \left[ (\partial_{x_{l_j}} \Phi^j)_{\mu_j t} * f_j \right] (x + s_j \mu_j y) \Pi_J(x, y, t) \frac{m(t)}{t} dy dt.$$

On fixe les paramètres  $s$ ,  $J$  et  $l \in \{1, \dots, d\}^{|J|}$ . Ces paramètres varient dans un ensemble de mesure finie. Il nous faut donc contrôler chaque terme. On pose alors :

$$\Theta^l(x) = \left[ \prod_{j \in J} x_{l_j} \right] \Psi(x).$$

Ainsi  $\Theta^l$  reste une fonction à décroissance rapide et son spectre est toujours dans la même couronne. On a donc :

$$W_{s,J}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_l \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_t^l(y) [\zeta_{\mu_1 t}^1 * f_1] (x + \rho_1 \mu_1 y) \prod_{j \in J} \left[ (\partial_{x_{l_j}} \Phi^j)_{\mu_j t} * f_j \right] (x + \mu_j s_j y) \Pi_J(x, y, t) \frac{m(t)}{t} dy dt.$$

L'intérêt de cette relation réside dans le fait que  $J$  est supposé non vide par conséquent il existe au moins un indice  $j$  pour lequel :  $\widehat{\partial_{x_{l_j}} \Phi^j}(0) = 0$  (ce qui n'était pas vrai pour  $\Phi^j$ ).<sup>(3)</sup> Le résultat (\*), pour l'opérateur  $V$ , repose sur le fait que l'on a l'estimation suivante (due à la notion de mesure de Carleson) :

$$\| [\Psi_{\rho_1 \mu_1 t} * f] (x) [\zeta_{\mu_2 t}^2 * g] (x) \|_{2, \frac{dx dt}{t}} \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$$

de manière uniforme en  $\mu$  et  $\rho$  pour  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $0 < |\mu_1| \leq |\mu_2|$ . On va reproduire la même démonstration pour les opérateurs  $W_{s,J}$ . Il faut donc montrer l'estimation quadratique suivante pour un indice  $l \in \{1, \dots, d\}^{|J|}$  :

<sup>3</sup> Dans ce cas, on sait voir [9] que  $\|(\partial_{x_{l_j}} \Phi^j)_t * f\|_{2, \frac{dx dt}{t}} \leq \|f\|_2$

$$\begin{aligned}
(\spadesuit)_l &:= \left\| \int \Theta_t^l(y) \Phi_{\mu_1 t}^1 * f_1(x - \rho_1 \mu_1 y) \prod_{j \in J} (\partial_{x_{l_j}} \Phi^j)_{\mu_j t} * f_j(x + \mu_j s_j y) \prod_{j \in J^c} \Phi_{\mu_j t} * f_j(x + \mu_j y) dy \right\|_{2, \frac{dxdt}{t}} \\
&\leq \|m\|_\infty \|f_{n-1}\|_2 \prod_{i=1}^{n-2} \|f_i\|_\infty. \tag{1.14}
\end{aligned}$$

\* Si  $n - 1 \in J$  alors les convolutions sont des opérateurs bornés dans  $L^\infty$ , donc on obtient :

$$(\spadesuit)_l \leq \prod_{j \neq n-1} \|f_j\|_\infty \left\| \int |\Theta_t^l(y)| \left| (\partial_{x_{l_{n-1}}} \Phi^{n-1})_{\mu_{n-1} t} * f_{n-1}(x - \mu_{n-1} s_{n-1} y) \right| dy \right\|_{2, \frac{dxdt}{t}}.$$

On fait d'abord "rentrer" la norme 2 en  $x$  sous l'intégrale en  $y$  par l'inégalité de Minkowski et alors l'intégrale en  $y$  disparaît et par le rappel (3), on obtient (1.14).

\* Si  $n - 1 \in J^c$ , on utilise une estimation de Carleson en conservant une fonction  $f_k$  avec  $k \in J$  (car  $J \neq \emptyset$ ).

$$(\spadesuit)_l \leq \prod_{i \neq \{n-1, k\}} \|f_j\|_\infty \left\| \int |\Theta_t^l(y)| \left| \Phi_{\mu_{n-1} t}^{n-1} * f_{n-1}(x - \mu_{n-1} y) \right| \left| (\partial_{x_{l_k}} \Phi^k)_{\mu_k t} * f_k(x - \mu_k s_k y) \right| dy \right\|_{2, \frac{dxdt}{t}}.$$

On trouve alors après changement de variable en  $y$  :

$$(\spadesuit)_l \leq \prod_{i \neq \{n-1, k\}} \|f_j\|_\infty \left\| \int |\Theta^l(y)| \left| \Phi_{\mu_{n-1} t}^{n-1} * f_{n-1}(x - \mu_{n-1} t y) \right| \left| (\partial_{x_{l_k}} \Phi^k)_{\mu_k t} * f_k(x - \mu_k t s_k y) \right| dy \right\|_{2, \frac{dxdt}{t}}.$$

On note  $\Phi^{k,a}$  la translatée  $\Phi^k(\cdot - a)$ , on a alors l'écriture suivante :

$$(\spadesuit)_l \leq \prod_{i \neq \{n-1, k\}} \|f_j\|_\infty \left\| \int |\Theta^l(y)| \left| \Phi_{\mu_{n-1} t}^{n-1, y} * f_{n-1}(x) \right| \left| (\partial_{x_{l_k}} \Phi^{k, s_k y})_{\mu_k t} * f_k(x) \right| dy \right\|_{2, \frac{dxdt}{t}}.$$

On utilise l'inégalité de Minkowski sur la mesure  $dxdt/t$ , puis l'estimation sur la mesure de Carleson, pour trouver :

$$(\spadesuit)_l \leq \prod_{i \neq n-1} \|f_j\|_\infty \|f_{n-1}\|_2 \int |\Theta^l(y)| (1 + |s_k y|)^{2d+2} dy.$$

$\Theta^l$  est à décroissance rapide et  $0 \leq s_k \leq 1$ , par conséquent, on a bien l'estimation voulue  $(\spadesuit)_l$ . L'estimation est uniforme en  $\mu$  étant donné que  $|\mu_k| \leq |\mu_{n-1}|$ .

Ainsi (1.14) est démontrée dans les deux cas. Ensuite il suffit de refaire exactement la démonstration du résultat (\*) de [9] en remplaçant l'estimation de Carleson par l'estimation quadratique précédente.  $\square$

Nous avons montré des continuités sur les espaces de Lebesgue pour certains exposants. Avec la notion d'opérateurs de Calderón-Zygmund, nous allons obtenir d'autres exposants. Ici les opérateurs que nous allons considérer sont des opérateurs multilinéaires

de Calderón-Zygmund (au sens défini dans [19]), mais les bornes ne sont pas uniformes selon les paramètres  $\mu_i$ . Par conséquent en utilisant le résultat principal de [19], nous obtenons les continuités voulues de l'opérateur  $U_{\rho,\mu,L}$  avec des constantes dépendant du paramètre  $\mu$ . Le reste de cette section consiste à redéfinir des notions d'opérateurs linéaires de Calderón-Zygmund plus adaptées à notre problème, afin d'obtenir des bornes de continuité uniforme en  $\mu$ .

**Définition 1.2.2.** Une fonction  $K$  définie sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x), x \in \mathbb{R}^d\}$  est appelé "noyau standard d'ordre  $N$ " si

$$\forall x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, d\}, |\alpha|, |\beta| \leq N \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y) \right| \leq A_{\alpha, \beta} \frac{1}{|x - y|^{d+|\beta|+|\alpha|}}.$$

Un opérateur  $T$  continu de  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$ , qui vérifie la représentation intégrale

$$\forall f \in C_0^\infty, \forall x \notin \text{supp}(f) \quad T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy,$$

est dit être "associé" au noyau  $K$ . Un opérateur  $T$  continu de  $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$  est appelé un "opérateur de Calderón-Zygmund d'ordre  $N$ " s'il est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et associé à un "noyau standard d'ordre  $N$ ".

On a alors la proposition classique suivante :

**Proposition 1.2.3.** Soit  $T$  un opérateur de Calderón-Zygmund d'ordre  $N$ . Alors  $T$  admet une extension continue de  $L^p$  dans  $L^p$  pour  $1 < p \leq 2$ , de  $L^1$  dans  $L^{1,\infty}$  et de  $H^p$  dans  $L^p$  pour  $d/(N+d) < p \leq 1$ . De plus les bornes de continuité de l'extension ne dépendent que des bornes  $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$  et  $(A_{\alpha,\beta})_\beta$ .

**Remarque 1.2.4.** Les constantes  $A_{\alpha,\beta}$  avec  $\alpha \neq 0$  sont utiles pour étudier l'opérateur dual  $T^*$  et ainsi obtenir des continuités de  $T$  sur  $L^q$  pour  $q > 2$ .

Avec cette définition, on a alors la proposition suivante :

**Proposition 1.2.5.** Soit  $\Psi$  une fonction à décroissance rapide réelle et à spectre dans la couronne de rayons 1 et 2. Soit  $\Phi^i$  des fonctions réelles dont le spectre est inclus dans  $B(0, 4)$  et  $m(t) \in L^\infty$ . On rappelle que

$$U_{\rho,\mu,m}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \prod_{j=1}^{n-1} \Phi_{\mu_j t}^j * f_j(x - \rho_j \mu_j y) \frac{m(t)}{t} dy dt.$$

On fixe les fonctions  $f_1, \dots, f_{n-2}$  dans  $L^\infty$ . Alors l'opérateur :

$$V := f_{n-1} \rightarrow U_{\rho,\mu,m}(f_1, \dots, f_{n-1})$$

est un opérateur de Calderón-Zygmund pour des coefficients  $\mu_i$  non nuls. De plus les bornes  $A(0, \beta)$  sont bornées de manière uniforme en  $\mu$  et  $\rho$  pour  $0 < \rho_i \leq 1$ .

**Démonstration :** La continuité sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de  $V$  nous est donnée par le théorème 1.2.1. Il nous faut estimer le noyau de l'opérateur  $V$ . Le noyau  $K$  vérifie alors :

$$K(x, z) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \prod_{j=1}^{n-2} \Phi_{\mu_j t}^j * f_j(x - \rho_j \mu_j y) \Phi_{\mu_{n-1} t}^{n-1}(x - \rho_{n-1} \mu_{n-1} y - z) \frac{m(t)}{t} dy dt.$$

On estime directement les dérivées de  $K$  par :

$$|\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-2} \|f_j\|_\infty \|m\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\min |\mu_i| t)^\alpha} \left| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x - \rho_{n-1} \mu_{n-1} y - z|}{\mu_{n-1} t}\right)^{-M} |\mu_{n-1} t|^{-d-|\beta|} \right| \frac{dy dt}{t^{d+1}}.$$

En utilisant  $\rho_{n-1} \leq 1$ , on a l'estimation suivante :

$$|\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \left(\frac{|\mu_{n-1}|}{\min\{|\mu_i|\}}\right)^{|\alpha|} \int_0^\infty \left(\frac{1}{|\mu_{n-1}| t}\right)^{|\beta|+|\alpha|} \left(1 + \frac{|x - z|}{\mu_{n-1} t}\right)^{-M} |\mu_{n-1} t|^{-d} \|m\|_\infty \frac{dt}{t}.$$

En calculant l'intégrale en  $t$  avec  $M$  assez grand,

$$\forall a > 0 \quad \int_0^\infty \left(\frac{a}{t}\right)^{d+|\alpha|+|\beta|} \left(1 + \frac{a}{t}\right)^{-M} \frac{dt}{t} \lesssim 1$$

et on obtient alors :

$$|\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \left(\frac{|\mu_{n-1}|}{\min\{|\mu_i|\}}\right)^{|\alpha|} |x - z|^{-d-|\alpha|-|\beta|} \|m\|_\infty.$$

On obtient donc bien les décroissances du noyau voulues et pour  $\alpha = 0$  les estimations ne dépendent pas des coefficients  $\mu_i$ . □

En composant les deux dernières propositions, on obtient le résultat suivant :

**Corollaire 1.2.6.** *L'opérateur  $U_{\rho, \mu, m}$  est continu de l'espace  $(L^\infty)^{\otimes(n-2)} \times H^p$  dans  $L^p$  pour tout exposant  $0 < p \leq 2$  et de l'espace  $(L^\infty)^{\otimes(n-2)} \times L^1$  dans  $L^{1, \infty}$ . De plus les bornes de continuité sont uniformes pour  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu$  vérifiant la condition (1.12).*

Nous ne savons pas comment obtenir le cas des exposants  $p > 2$  en conservant l'uniformité par rapport à  $\mu$  dans le cas général. Le contre exemple que nous donnerons à la fin de ce paragraphe ne permet pas de répondre à ce problème.

Nous voulons maintenant faire "varier" les exposants infinis. Pour cela, nous allons appliquer un résultat semblable sur les premières composantes. Nous allons avoir besoin du résultat suivant :

**Théorème 1.2.7.** *Soit  $T$  un opérateur linéaire continu de  $L^{p_1}$  dans  $L^p$  pour  $1 < p_1 \leq \infty$  et  $p \leq p_1$ . On note l'exposant  $r > 0$  tel que :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}.$$

On suppose que  $T$  est "associé" à un noyau  $K$  (voir définition 1.2.2), qui vérifie

$$\forall \alpha, |\alpha| \leq 1 \quad |\partial_z^\alpha K(x, z)| \leq \frac{1}{|x - z|^{d+|\alpha|}} h(x)$$

avec  $h$  une fonction de  $L^{r,\infty}$ . Alors  $T$  admet une extension continue de  $L^{q_1}$  dans  $L^{q,\infty}$  pour tout couple d'exposants  $(q_1, q)$  tel que :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad 1 \leq q_1 \leq p_1.$$

Les bornes de continuité dépendent de manière proportionnelle à  $\|h\|_{r,\infty}$ .

**Démonstration :** On reprend la démonstration "classique" où  $r = \infty$  et  $h = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}$ . Soit  $f$  une fonction de  $L^q$ , normalisée :  $\|f\|_q = 1$ . On veut montrer :

$$|\{x, |T(f)| > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-q}. \quad (1.15)$$

On utilise une décomposition de Calderón-Zygmund de la fonction  $f$  à l'échelle  $\alpha^{q/q_1}$ . La fonction  $f$  se décompose par

$$f = g + b,$$

avec  $g$  une "bonne" fonction et  $b$  la "mauvaise" partie de  $f$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \|g\|_{q_1} &\lesssim \|f\|_{q_1} = 1, & \|g\|_\infty &\lesssim \alpha^{q/q_1}, \\ b &= \sum_k b_k, & \text{supp}(b_k) &\subset Q_k, \\ \|b_k\|_{q_1} &\lesssim \alpha^{q/q_1} |Q_k|^{1/q_1}, \\ \int b_k &= 0, \\ \sum_k |Q_k| &\lesssim \alpha^{-q} \|f\|_{q_1}^{q_1} \lesssim \alpha^{-q} \text{ et} \\ \sum_k \mathbf{1}_{10Q_k} &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Alors on décompose :

$$|T(f)| \leq |T(g)| + |T(b)|,$$

ainsi

$$|\{x, |T(f)| > \alpha\}| \leq |\{x, |T(g)| > \alpha/2\}| + |\{x, |T(b)| > \alpha/2\}|.$$

1-) Le cas de la fonction  $g$ .

C'est le cas le plus facile. On utilise alors la continuité de  $T$  avec les exposants  $p_1$  et  $p$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} |\{x, |T(g)| > \alpha/2\}| &\lesssim \alpha^{-p} \|T(g)\|_p^p \\ &\lesssim \alpha^{-p} \|g\|_{p_1}^p. \end{aligned}$$

Or par hypothèse sur la fonction  $g$  et  $q_1 \leq p_1$  :

$$\|g\|_{p_1} \lesssim \|g\|_{q_1}^{q_1/p_1} \|g\|_\infty^{1-q_1/p_1} \lesssim \alpha^{q(1-q_1/p_1)/q_1}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} |\{x, |T(g)| > \alpha/2\}| &\lesssim \alpha^{-p} \alpha^{pq(1-q_1/p_1)/q_1} \\ &\lesssim \alpha^{-p} \alpha^{pq(1/q_1-1/p_1)} \lesssim \alpha^{-p} \alpha^{pq(1/q-1/p)} \\ &\lesssim \alpha^{-q}. \end{aligned}$$

La relation (1.15) est bien démontrée dans ce cas.

2-) Le cas de la fonction  $b$ .

Tout d'abord, on a

$$\left| \bigcup_k 5Q_k \right| \lesssim \alpha^{-q}.$$

Par conséquent pour montrer (1.15), on peut supposer  $x \in \cap_k (5Q_k)^c$  et estimer :

$$|\{x \in \cap_k (5Q_k)^c, |T(b)| > \alpha/2\}|.$$

Soit  $x$  fixé. On doit donc estimer :

$$|T(b)(x)| \leq \sum_{k \geq 0} |T(b_k)(x)|.$$

Pour tout  $x$  et  $k$  fixés, nous allons utiliser l'hypothèse de régularité du noyau. Etant donné que  $b_k$  est d'intégrale nulle, on peut estimer :

$$T(b_k)(x) = \int K(x, z) b_k(z) dz = \int [K(x, z) - K(x, c_k)] b_k(z) dz.$$

On note  $c_k$  le centre du cube  $Q_k$ . Ici la représentation intégrale de l'opérateur a bien un sens puisque  $x$  n'est pas contenu dans le support de  $b_k$ . En utilisant l'hypothèse sur le noyau, on trouve :

$$\begin{aligned} |K(x, z) - K(x, c_k)| &\lesssim |z - c_k| \int_0^1 |\nabla K(x, z + t(c_k - z))| dt \lesssim |z - c_k| \int_0^1 \frac{1}{|x - c_k|^{d+1}} h(x) dt \\ &\lesssim \frac{|z - c_k|}{|x - c_k|^{d+1}} h(x). \end{aligned}$$

Ici on a utilisé que  $x \in (5Q_k)^c$ . De ce fait,

$$|T(b_k)(x)| \lesssim h(x) \int |Q_k|^{1/d} \frac{1}{|x - c_k|^{d+1}} b_k(z) dz$$

Or :

$$\|b_k\|_1 \leq |Q_k|^{1-1/q_1} \|b_k\|_{q_1} \lesssim |Q_k| \alpha^{q/q_1}.$$

On obtient donc :

$$|T(b_k)(x)| \lesssim h(x) |Q_k|^{1+1/d} \alpha^{q/q_1} \frac{1}{|x - c_k|^{d+1}}.$$

En sommant sur l'indice  $k$  :

$$|T(b)(x)| \lesssim h(x) \alpha^{q/q_1} \sum_k \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c_k|}{|Q_k|^{1/d}}\right)^{d+1}}.$$

On retrouve ici la fonction de Marcinkiewicz pour l'ensemble des cubes  $(Q_k)$ , on la note  $M_{(Q_k)_k}$ , on réécrit l'inégalité obtenue :

$$|T(b)(x)| \lesssim h(x)\alpha^{q/q_1} M_{(Q_k)_k}(x).$$

Par l'inégalité de Hölder sur les espaces  $L^{p,\infty}$ , on trouve finalement :

$$\|T(b)\|_{q,\infty} \lesssim \|h\|_{r,\infty} \alpha^{q/q_1} \|M_{(Q_k)_k}(x)\|_{q_1,\infty}.$$

Or étant donné que les cubes  $(10Q_k)_k$  forme un recouvrement borné, on sait que pour tout exposant  $1 \leq q_1 < \infty$  (voir [33]) :

$$\|M_{(Q_k)_k}(x)\|_{q_1} \lesssim |\cup Q_k|^{1/q_1} \lesssim \alpha^{-q/q_1}.$$

On obtient donc bien l'estimation souhaitée :

$$\|T(b)\|_{q,\infty} \lesssim \|h\|_{r,\infty}.$$

□

Nous allons maintenant obtenir le résultat similaire sur les espaces de Hardy :

**Théorème 1.2.8.** *Soit  $T$  un opérateur linéaire continu de  $L^{p_1}$  dans  $L^p$  pour  $1 < p_1 \leq \infty$  et  $p \leq p_1$ . On note l'exposant  $r > 0$  tel que :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}.$$

*On suppose que  $T$  est "associé" (voir définition 1.2.2) à un noyau  $K$ , qui vérifie :*

$$\forall \alpha, |\alpha| \leq N \quad |\partial_z^\alpha K(x, z)| \leq \frac{1}{|x - z|^{d+|\alpha|}} h(x)$$

*avec  $h$  une fonction de  $L^{r,\infty}$ . Alors  $T$  admet une extension continue de  $H^{q_1}$  dans  $L^{q,\infty}$  pour tout couple d'exposant  $(q_1, q)$  tel que :*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{d}{N+1+d} < q_1 \leq 1.$$

*Les bornes de continuité dépendent de manière proportionnelle à  $\|h\|_{r,\infty}$ .*

**Démonstration :** On utilise la décomposition atomique de  $H^{q_1}$  (voir théorème 6.6.10 de [17]). Soit  $a$  un atome de  $H^{q_1}$ , c'est à dire qu'il existe un cube  $Q$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{supp}(a) &\subset Q, & \|a\|_2 &\leq |Q|^{1/2-1/q_1} \\ \forall \alpha, |\alpha| &\leq \left[\frac{d}{q_1} - d\right], & \int x^\alpha a(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons estimer  $T(a)$ . Supposons que  $x \in (5Q)^c$ . Par hypothèse  $q_1 > d(N+d)^{-1}$  donc  $N_{q_1} := E(\frac{d}{q_1} - d) \leq N - 1$ . On utilise donc un développement exact avec reste intégral du noyau :

$$\begin{aligned} T(a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) a(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ K(x, y) - \sum_{|\alpha| \leq N_{q_1}} \frac{(y - c(Q))^\alpha}{\alpha!} \partial_y^\alpha K(x, c(Q)) \right] a(y) dy. \end{aligned}$$



On a noté  $c(Q)$  le centre de  $Q$ . Par hypothèse sur le noyau :

$$\begin{aligned} \left| K(x, y) - \sum_{|\alpha| \leq N_{q_1}} \frac{(y - c(Q))^\alpha}{\alpha!} \partial_y^\alpha K(x, c(Q)) \right| &\lesssim \sum_{|\alpha| = N_{q_1} + 1} \left\| \frac{(y - c(Q))^\alpha}{\alpha!} \partial_y^\alpha K(x, y) \right\|_{\infty, y \in Q} \\ &\lesssim |Q|^{(N_{q_1} + 1)/d} \frac{h(x)}{|x - c(Q)|^{d + N_{q_1} + 1}}. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé que  $x \in (5Q)^c$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} |T(a)(x)| &\lesssim \int |Q|^{(N_{q_1} + 1)/d} \frac{h(x)}{|x - c(Q)|^{d + N_{q_1} + 1}} |a(y)| dy \\ &\lesssim |Q|^{(N_{q_1} + 1)/d} \frac{h(x)}{|x - c(Q)|^{d + N_{q_1} + 1}} |Q|^{1 - 1/q_1}. \end{aligned}$$

Ainsi par l'inégalité de Hölder (sur les espaces  $L^{p, \infty}$ ), en intégrant sur  $x \in (5q)^c$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|T(a)\|_{q, \infty, (5Q)^c} &\lesssim |Q|^{(N_{q_1} + 1)/d} \|h\|_{r, \infty} \frac{1}{|Q|^{1 - 1/q_1 + (N_{q_1} + 1)/d}} |Q|^{1 - 1/q_1} \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

L'étude se finit en estimant la partie sur  $5Q$  avec l'inégalité de Hölder et la continuité dans  $L^p$  de  $T$  :

$$\begin{aligned} \|T(a)\|_{q, \infty, (5Q)} &\lesssim |Q|^{1/q - 1/p} \|T(a)\|_p \\ &\lesssim |Q|^{1/q - 1/p} \|a\|_{p_1} \lesssim |Q|^{1/q - 1/p + 1/p_1 - 1/2 + 1/2 - 1/q_1} \lesssim 1. \end{aligned}$$

Ici pour l'inégalité de Hölder, on a supposé que  $p_1 \leq 2$ . Si ce n'est pas le cas, il faut considérer des  $L^s$ -atomes de  $H^{q_1}$  avec  $s \geq p_1$  ou sinon utiliser d'abord le théorème précédent afin d'avoir des continuités sur  $T$  pour  $p_1 = 1$ . Par conséquent, nous avons montré que  $T$  est borné sur les atomes de  $H^q$ . Le théorème est alors une conséquence directe de la décomposition atomique et du résultat topologique suivant :

**Lemme 1.2.9.** *Soit  $p \leq 1$ . La décomposition atomique de  $H^p$  nous décrit la norme :*

$$\|f\|_{H^p}^p := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|^p, f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i, a_i \text{ atomes} \right\}.$$

*L'ensemble  $S$  de  $H^p$  des fonctions  $f$  telle qu'il existe une décomposition finie en somme d'atomes vérifiant :*

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \quad \|f\|_{H^p} \geq 10^{-1} \left( \sum_i |\lambda_i|^p \right)^{1/p}$$

*est dense dans  $H^p$ .*

Ainsi l'opérateur  $T$  étant borné sur les atomes, il est défini sur cet ensemble  $S$  et vérifie :

$$\forall f \in S \quad \|T(f)\|_{q,\infty} \lesssim \|f\|_{H^{q_1}}.$$

Il se prolonge donc de manière continue sur  $H^p$ . Les bornes de continuité dépendent de manière proportionnelle à  $\|h\|_{r,\infty}$ .  $\square$

Il nous reste à démontrer le lemme 1.2.9 :

**Démonstration :** Soit  $f \in H^p$  non nulle. Par définition il existe une décomposition infinie en somme d'atomes telle que :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i \quad \sum_i |\lambda_i|^p \leq (1 + 10^{-1}) \|f\|_{H^p}^p.$$

Soit  $f_N$  les sommes partielles définies par :

$$f_N := \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i.$$

Supposons que  $f_N$  n'appartiennent pas à  $S$  alors :

$$\|f_N\|_{H^p} \leq 10^{-1} \sum_{i=1}^N |\lambda_i|^p \leq \frac{1}{2} \|f\|_{H^p}^p.$$

Or  $f_N$  converge vers  $f$  dans  $H^p$ , donc pour  $N$  assez grand l'inégalité obtenue est impossible. De ce fait, pour  $N$  assez grand,  $f_N$  est un élément de  $S$ . Par conséquent  $S$  est bien dense dans  $H^p$ .  $\square$

On applique les deux théorèmes précédents à notre cas :

**Proposition 1.2.10.** *Reprenons les hypothèses de la proposition 1.2.5. On fixe les fonctions  $f_1, \dots, f_{n-3}$  dans  $L^\infty$  et  $f_{n-1}$  dans  $H^q$  pour  $q \leq 2$  (ou  $L^1$ ). Alors l'opérateur :*

$$V := f_{n-2} \rightarrow U_{\rho,\mu,m}(f_1, \dots, f_{n-1})$$

est un opérateur qui vérifie les conditions des théorèmes 1.2.7 et 1.2.8 pour  $p_1 = \infty$ ,  $p = q = r$  et  $h \lesssim M_{d/q+1}^{**}(f_{n-1}, \Phi^{n-1})$  à tout ordre  $N$ . De plus les bornes de continuité sont uniformes en  $\rho$  et  $\mu$  sous la condition (1.12). Ici on note  $M_b^{**}$  l'opérateur maximal suivant :

$$M_b^{**}(f, \Phi)(x) := \sup_{t>0} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (1 + t^{-1}|y|)^{-b} |\Phi_t * f(x - y)|.$$

**Démonstration :** L'hypothèse de continuité est donnée par le corollaire 1.2.6. Il nous reste à vérifier la condition sur le noyau. Le noyau  $K(x, z)$  est donné par :

$$K(x, z) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \prod_{j=1}^{n-3} \Phi_{\mu_j t}^j * f_j(x - \rho_j \mu_j y) \Phi_{\mu_{n-2} t}^{n-2}(x - \rho_{n-2} \mu_{n-2} y - z) \Phi_{\mu_{n-1} t}^{n-1} * f_{n-1}(x - \rho_{n-1} \mu_{n-1} y) \frac{m(t)}{t} dy dt.$$

On estime directement les dérivées de  $K$  par :

$$|\partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-3} \|f_j\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-2M} \left(1 + \frac{|x - \rho_{n-2}\mu_{n-2}y - z|}{\mu_{n-2}t}\right)^{-M} |\mu_{n-2}t|^{-d-|\beta|} (1 + t^{-1}|y|)^{-d/q+1} M_{d/q+1}^{**}(f_{n-1}, \Phi^{n-1})(x) \frac{\|m\|_\infty dy dt}{t^{d+1}}.$$

D'où en utilisant  $\rho_{n-2} \leq 1$ , pour  $M$  assez grand on a l'estimation suivante :

$$|\partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-3} \|f_j\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-M} \left(1 + \frac{|x - z|}{\mu_{n-2}t}\right)^{-M} |\mu_{n-2}t|^{-d-|\beta|} \|m\|_\infty M_{d/q+1}^{**}(f_{n-1}, \Phi^{n-1})(x) \frac{dy dt}{t^{d+1}}.$$

C'est à dire :

$$|\partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim \prod_{j=1}^{n-3} \|f_j\|_\infty \|m\|_\infty M_{d/q+1}^{**}(f_{n-1}, \Phi^{n-1})(x) \int_0^\infty \left(1 + \frac{|x - z|}{\mu_{n-2}t}\right)^{-M} |\mu_{n-2}t|^{-d-|\beta|} \frac{dt}{t}.$$

On poursuit en calculant l'intégrale en  $t$  de la même manière que pour la proposition 1.2.5 et on obtient :

$$|\partial_z^\beta K(x, z)| \lesssim M_{d/q+1}^{**}(f_{n-1}, \Phi^{n-1})(x) |x - z|^{-d-|\beta|}.$$

On obtient donc bien les décroissances du noyau voulues et les estimations ne dépendent pas des coefficients  $\mu_i$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.11.** *L'opérateur  $U_{\rho, \mu, m}$  est continu de l'espace  $(L^\infty)^{\otimes(n-3)} \times H^p \times H^q$  dans  $L^s$  pour tout exposant  $0 < q \leq 2$  et  $0 < p \leq \infty$  tels que :*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

*Si  $p = 1$  ou  $q = 1$ , on peut autoriser de substituer les espaces  $H^1$  par  $L^1$  en remplaçant  $L^s$  par  $L^{s, \infty}$ . De plus les bornes de continuité sont uniformes pour  $0 < \rho_i \leq 1$  et  $\mu$  vérifiant la condition (1.12).*

**Démonstration :** C'est une application directe par interpolation des résultats obtenus avec le corollaire 1.2.6, de la proposition et des deux théorèmes précédents. On utilise le fait que l'opérateur maximal  $M_{d/q+1}^{**}$  est continu de  $H^q$  dans  $L^q$  pour tout exposant  $0 < q < \infty$  et de  $L^1$  dans  $L^{1, \infty}$  si  $q = 1$ . La preuve de ces continuités est faite dans le théorème 6.4.4 de [17].  $\square$

En réitérant le procédé sur toutes les composantes et par interpolation, on obtient ainsi le résultat final sur ces opérateurs élémentaires.

**Remarque 1.2.12.** *On a exactement le même résultat pour  $T_{\rho, \mu, L}$  qui n'est que la version discrète de  $U_{\rho, \mu, L}$ .*

On peut maintenant finir la démonstration du théorème 1.0.14.

**Démonstration :** Le premier point avec  $S_2 = \emptyset$  a été démontré dans la section précédente précédent pour la version discrète. Le cas où  $S_2 \neq \emptyset$  est une conséquence des théorèmes 1.2.1, 1.2.8 et de la proposition 1.2.5. Le deuxième point est une conséquence directe des théorèmes 1.2.1, 1.2.7 et de la proposition 1.2.5. La proposition suivante démontre la dernière assertion du théorème dans le cas bilinéaire ( $n = 3$ ).  $\square$

Nous avons donc démontré le théorème 1.0.14 annoncé plus tôt. Nous allons vérifier que ces conditions données pour l'uniformité sont presque optimales :

**Proposition 1.2.13.** *Dans le cas bilinéaire, soit  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $|\mu_1| \leq |\mu_2|$ . Alors l'opérateur  $U_{\rho,\mu,m}$  ne peut être continu de  $L^p \times L^\infty$  dans  $L^p$  pour  $1 < p < \infty$  de manière uniforme en  $\mu$ .*

**Démonstration :** Choisissons des fonctions  $\Phi^i = \zeta$  des fonctions positives d'intégrale égale à 1. L'opérateur est défini par :

$$U_{\epsilon,\mu_1}(f, g)(x) := \int_{\epsilon}^{\epsilon^{-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \zeta_{\mu_1 t} * f(x - \mu_1 y) \zeta_t * g(x - y) \frac{dy dt}{t}.$$

Pour  $f$  et  $g$  des fonctions de la classe de Schwartz, faisons tendre  $\mu_1$  vers 0, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \zeta_{\mu_1 t} * f(x - \mu_1 y) = f(x).$$

C'est un résultat connu sur les approximations de l'unité. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} U_{\epsilon,\mu_1}(f, g)(x) = f(x) \int_{\epsilon}^{\epsilon^{-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \zeta_{\mu_2 t} * g(x - \mu_2 y) \frac{dy dt}{t}.$$

L'interversion de la limite et de l'intégrale est bien vérifiée : l'intégrale en  $t$  converge absolument étant donné que  $\epsilon$  est fixé. Maintenant on peut faire tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le spectre de  $\Psi$  est localisé dans une couronne, l'étude des noyaux standards montre alors que pour  $x$  fixé :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon^{-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \zeta_{\mu_2 t} * g(x - \mu_2 y) \frac{dy dt}{t} = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_t(y) \zeta_{\mu_2 t} * g(x - \mu_2 y) \frac{dy dt}{t}.$$

Ainsi en choisissant  $\Psi$  et  $\zeta$  correctement, on peut reconstituer par exemple la transformée linéaire de Hilbert  $H$ , trouvant

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} U_{\epsilon,\mu_1}(f, g)(x) = f(x) H(g)(x).$$

Supposons donc que l'on ait des estimations uniformes de continuité sur  $U_{\epsilon,\mu_1}$  de  $L^p \times L^\infty$  dans  $L^p$ . En utilisant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\|f H(g)\|_p \lesssim \|f\|_p \|g\|_\infty.$$

Une telle estimation impliquerait la continuité de  $H$  de  $L^\infty$  dans  $L^\infty$ , qui est impossible. Par conséquent, une telle uniformité dans les estimations est impossible.  $\square$

Ainsi l'étude est presque complète sur les opérateurs "élémentaires"  $U_{\rho,\mu,m}$  et donc  $T_{\rho,\mu,L}$ . Nous allons dans la section suivante montrer comment ces opérateurs interviennent dans la décomposition d'opérateurs multilinéaires singuliers tels que les transformées de Hilbert multilinéaires.

### 1.3 Décomposition d'opérateurs multilinéaires singuliers.

Dans cette section, nous allons décomposer des opérateurs multilinéaires à l'aide des opérateurs étudiés précédemment. Soit  $T$  un opérateur multilinéaire commutant avec les translations simultanées, c'est à dire que pour tout vecteur  $h \in \mathbb{R}^d$  :

$$\forall f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d), \quad T(\tau_h f_1, \dots, \tau_h f_{n-1}) = \tau_h T(f_1, \dots, f_{n-1}).$$

Dans ce cas, on sait qu'il existe un noyau  $K \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^{d(n-1)})$  tel que

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} K(x - y_1, \dots, x - y_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y_i) dy.$$

Il faut comprendre cette formulation en tant que distribution, en utilisant la transformée de Fourier on obtient l'existence d'une distribution  $m$  supportée sur  $\Gamma = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = 0\}$  telle que :

$$\forall f_i \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad \Lambda(f_1, \dots, f_n) := \langle T(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n \rangle = \int_{\Gamma} m(\xi) \prod_i^n \widehat{f}_i(\xi_i) d\xi. \quad (1.16)$$

La mesure surfacique de  $\Gamma$  est implicite dans cette écriture. Nous allons donc identifier  $\Gamma$  à  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$  par la correspondance suivante :

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d(n-1)} \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\xi_1 - \dots - \xi_{n-1}) \in \Gamma.$$

Ainsi l'intégration sur  $\Gamma$  est identifiée à une intégration sur  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ . On note de nouveau  $m$  le nouveau symbole (défini sur  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ ) obtenu à partir de  $m$  par ce changement de variable.

Dans la première sous-section, on s'intéressera à un symbole  $m$  singulier uniquement en un point. On généralisera la méthode dans la sous-section suivante au cas où le symbole  $m$  est singulier sur tout un sous espace de  $\Gamma$ .

#### 1.3.1 Le cas où $m$ est singulier en un point.

Nous supposons ici que  $m$  est singulier uniquement au point 0. Nous allons faire les hypothèses suivantes sur le contrôle de la singularité : il existe des paramètres  $\lambda_l \neq 0$  tels que

$$\forall m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}^d \quad \left| \partial_{\xi_1}^{m_1} \dots \partial_{\xi_{n-1}}^{m_{n-1}} m(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \right| \lesssim \left( \frac{\prod_{l=1}^{n-1} |\lambda_l|^{m_l}}{(\sum_{l=1}^{n-1} |\lambda_l \xi_l|)^{|m_1| + \dots + |m_{n-1}|}} \right). \quad (1.17)$$

On découpe l'espace par des cônes de sommet 0. Pour  $l \in \{1, \dots, n-1\}$ , soit  $\zeta_l$  une fonction homogène régulière sur  $(\mathbb{R}^d)^{n-1}$  à support dans un cône :

$$\left\{ \xi \in (\mathbb{R}^d)^{n-1}, |\lambda_l \xi_l| \simeq \max_j |\lambda_j \xi_j| \right\}.$$

On les choisit de sorte que

$$\forall \xi \in (\mathbb{R}^d)^{n-1} \quad \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_l(\xi) = 1.$$

Nous allons nous inspirer de la décomposition faite dans [9]. Soit  $\Psi$  une fonction réelle de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ , à spectre dans la couronne de rayons 1 et 4, telle que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left| \widehat{\Psi}(2^k \eta) \right|^2 = 1. \quad (1.18)$$

Soit  $\phi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}^d$  dont le spectre est borné et telle que :

$$\forall l \in \{1, \dots, n-1\}, \forall \xi \in \text{supp}(\zeta_l) \quad \widehat{\Psi}(2^k \lambda_l \xi_l) \neq 0 \implies \forall j \neq l, \widehat{\Phi}(2^k \lambda_j \xi_j) = 1.$$

Ainsi on a la décomposition suivante :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \widehat{\Psi}^2(2^k \lambda_l \xi_l) \widehat{f}_l(\xi_l) \prod_{j \neq l} \widehat{\Phi}^2(2^k \lambda_j \xi_j) \widehat{f}_j(\xi_j) m(\xi) d\xi.$$

Notons les nouveaux symboles :

$$\sigma_{l,k}(\xi) := m\left(\frac{\xi_1}{\lambda_1 2^k}, \dots, \frac{\xi_{n-1}}{\lambda_{n-1} 2^k}\right) \widehat{\Psi}(\xi_l) \prod_{j \neq l} \widehat{\Phi}(\xi_j).$$

Ainsi,  $T$  s'écrit sous la forme

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \widehat{\Psi}(2^k \lambda_l \xi_l) \widehat{f}_l(\xi_l) \prod_{j \neq l} \widehat{\Phi}(2^k \lambda_j \xi_j) \widehat{f}_j(\xi_j) \sigma_{l,k}(2^k \lambda_1 \xi_1, \dots, 2^k \lambda_{n-1} \xi_{n-1}) d\xi.$$

Or de par les conditions de singularité (1.17), on obtient

$$\sigma_{l,k} \in L^1 \quad \text{et} \quad \Delta^N \sigma_{l,k} \in L^1$$

de manière uniforme en  $k$  et  $l$  pour un entier  $N$  aussi grand que l'on veut. Par conséquent les symboles  $\sigma_{l,k}$  s'écrivent

$$\sigma_{l,k}(\xi) = \int e^{i\xi \cdot u} \frac{L(l, k, u)}{(1 + |u|^2)^N} du$$

avec une fonction  $L(l, k, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^{d(n-1)})$  uniformément en  $l$  et  $k$ . L'écriture de l'opérateur  $T$  devient alors :

$$\begin{aligned} T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{n-1} \iint_{\mathbb{R}^{2d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \\ &\quad \widehat{\Psi}(2^k \lambda_l \xi_l) \widehat{f}_l(\xi_l) \prod_{j \neq l} \widehat{\Phi}(2^k \lambda_j \xi_j) \widehat{f}_j(\xi_j) e^{i2^{-k}(\lambda_1^{-1} \xi_1, \dots, \lambda_{n-1}^{-1} \xi_{n-1}) \cdot u} \frac{L(l, k, u)}{(1 + |u|^2)^N} d\xi du \\ &= \int \sum_k \sum_{l=1}^{n-1} \frac{L(l, k, u)}{(1 + |u|^2)^N} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \widehat{\tau_{u_l}} \widehat{\Psi}(2^k \lambda_l \xi_l) \widehat{f}_l(\xi_l) \prod_{j \neq l} \widehat{\tau_{u_j}} \widehat{\Phi}(2^k \lambda_j \xi_j) \widehat{f}_j(\xi_j) d\xi du. \end{aligned}$$

On note  $\tau_y$  la translation de vecteur  $y \in \mathbb{R}^d$ . Ainsi en reprenant les notations de la première section, on obtient :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{L(l, k, u)}{(1 + |u|^2)^N} (\tau_{u_l} \Psi)_{\lambda_l 2^k} * f_l \prod_{j \neq l} (\tau_{u_j} \Phi)_{2^k \lambda_j} * f_j du. \quad (1.19)$$

Pour  $l$  et  $u$  fixés, on retrouve des paraproducts multilinéaires "classiques". Etant donné que l'on peut choisir  $N$  aussi grand que l'on veut, les continuités sur les paraproducts vont faire intervenir des poids polynomiaux selon  $u$ , qui seront compensés par la décroissance de  $(1 + |u|^2)^N$ . De ce fait les résultats précédents de continuité sur les opérateurs "élémentaires" nous donne exactement les mêmes propriétés pour ces opérateurs multilinéaires. On peut donc généraliser le théorème 1.0.14 :

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $m$  un symbole singulier à l'origine et vérifiant*

$$\forall m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}^d \quad \left| \partial_{\xi_1}^{m_1} \dots \partial_{\xi_{n-1}}^{m_{n-1}} m(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \right| \lesssim \left( \frac{\prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_i^{m_i}|}{(\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i \xi_i|)^{|m_1| + \dots + |m_{n-1}|}} \right).$$

Alors l'opérateur multilinéaire  $T$  défini par (1.16), vérifie les mêmes continuités que les opérateurs  $T_{\rho, \mu, L}$  et  $U_{\rho, \mu, L}$  du théorème 1.0.14. L'uniformité des bornes de continuité en  $\rho$  et  $\mu$  se traduit par l'uniformité des bornes de continuité pour l'opérateur  $T$  en fonction des paramètres  $\lambda_i$ .

**Démonstration :** Nous avons obtenu la décomposition précédente :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int \sum_k \sum_{l=1}^{n-1} \frac{L(l, k, u)}{(1 + |u|^2)^N} (\tau_{u_l} \Psi)_{\lambda_l 2^k} * f_l \prod_{j \neq l} (\tau_{u_j} \Phi)_{2^k \lambda_j} * f_j du,$$

où  $L(l, k, u)$  est une fonction bornée et définie à l'aide du symbole  $m$ . Nous avons déjà vu que les paraproducts classiques qui apparaissent, constituent un cas particulier d'opérateurs étudiés dans les sections précédentes (voir (1.3)). Pour  $f_j \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$  des fonctions régulières fixées et pour  $u$  fixé, on a la limite pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\lim_{\substack{\forall j \neq l, \rho_j=1 \\ \rho_l \rightarrow 0}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} L(l, k, u) \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{u_l} \Psi)_{2^k}(y) \prod_{j \neq l} [(\tau_{u_j} \Phi)_{\lambda_j 2^k} * f_j](x - \rho_j \lambda_j y) dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L(l, k, u) (\tau_{u_l} \Psi)_{\lambda_l 2^k} * f_l(x) \prod_{j \neq l} (\tau_{u_j} \Phi)_{2^k \lambda_j} * f_j(x).$$

Ainsi étant donné que les estimations obtenues dans le théorème 1.0.14 sont uniformes en  $\rho$ , on obtient les mêmes estimations pour les paraproducts classiques avec un poids polynomial en  $(1 + |u|)^K$  pour  $K$  un entier assez grand. De ce fait si  $p \geq 1$  par inégalité triangulaire et pour  $N \gg K$ , l'estimation de continuité du théorème 1.0.14 se "transmet" à l'opérateur  $T$ . Dans le cas  $p < 1$ , on ne peut pas utiliser l'inégalité triangulaire. Il nous faut alors reproduire la preuve faite précédemment :

\* Si tous les exposants sont finis (première partie avec les fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley) : la preuve est exactement la même. L'étude spectrale est identique puisque les décompositions selon les paramètres  $u$  et  $i$  ne jouent aucuns rôles. On utilise

alors le lemme 1.1.4 pour contrôler ponctuellement les fonctionnelles quadratiques et on peut reproduire tous les arguments de manière analogue.

\* Dans le cadre d'éventuels exposants infinis. La preuve est fondée sur la continuité de  $(L^\infty)^{n-1} \times L^2$  dans  $L^2$  (qui est vérifiée par inégalité triangulaire) et sur des estimations du noyau de l'opérateur multilinéaire (qui sont encore vérifiées pour l'opérateur  $T$  par linéarité de la correspondance entre le noyau et l'opérateur multilinéaire). Par conséquent la preuve est identique et permet d'obtenir les continuités désirées sur l'opérateur  $T$ .  $\square$

**Remarque 1.3.2.** *La décomposition précédente (obtenue en (1.19)) nous montre que les opérateurs du théorème 1.3.1 se décomposent en paraproducts classiques. Nous allons expliquer pourquoi nous avons préféré développer la preuve du théorème 1.0.14 comme nous l'avons fait, alors que nous aurions pu utiliser cette décomposition pour n'étudier que les paraproducts classiques. Etudions les deux cas suivants :*

\* *Pour le cas des exposants finis (première partie avec les fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley) : l'analyse spectrale des paraproducts classiques est exactement identique à celle que nous avons développée. Comme le montre la démonstration précédente on a toujours besoin d'un contrôle ponctuel des fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley (lemme 1.1.4) pour les exposants plus petits que 1.*

\* *Pour le cas d'éventuels exposants infinis (deuxième partie avec les mesures de Carleson) : la preuve repose sur deux résultats importants, qui sont la continuité de  $L^\infty \times L^2$  dans  $L^2$  et l'utilisation de la décomposition de Calderón-Zygmund pour pouvoir abaisser les exposants. Par conséquent en utilisant les paraproducts classiques, il nous faut savoir étudier dans  $L^2$  les deux paraproducts suivants (pour  $f \in L^\infty$  et  $g \in L^2$ ) :*

$$\int_0^\infty [\Psi_{\lambda t} * f] [\Phi_{\mu t} * g] \frac{m(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty [\Phi_{\lambda t} * f] [\Psi_{\mu t} * g] \frac{m(t)}{t} dt$$

*et de ce manière uniforme en  $(\lambda, \mu)$  avec  $|\mu| > |\lambda|$ . Le premier paraproduit correspond à celui qui s'étudie directement avec une mesure de Carleson. Le second ne peut pas être étudié de la même manière. Il faut à nouveau décomposer la fonction  $\Phi_{\lambda t}$  par des fonctions  $\Psi_{\lambda u}$  (avec  $t \leq u < \infty$ ), et après quelques manipulations, on fait apparaître :*

$$\int_0^\infty [\Phi_{\lambda t} * f] [\Psi_{\mu t} * g] \frac{m(t)}{t} dt = \int_0^\infty [\tilde{\Psi}_{\lambda u} * f] [\tilde{\Phi}_{\mu u} * g] \frac{\widetilde{m(u)}}{u} du + fL(g)$$

*où  $L$  est un opérateur continu sur  $L^2$  et  $\tilde{m}$  une modification bornée de  $m$ . Ainsi on retrouve un paraproduit classique du "premier type" et un terme qui est borné dans  $L^2$ . Par conséquent, l'étude des paraproducts classiques nécessite de distinguer ces deux cas différents. L'analogie dans notre démonstration correspond au théorème 1.2.1. On y développe une démonstration unique qui permet ainsi d'étudier simultanément tous les différents types de paraproducts. Après avoir montré cette estimation  $L^2$ , les différents arguments utilisés pour pouvoir abaisser les exposants de Lebesgue sont exactement les mêmes dans notre étude que ceux qui sont nécessaires pour étudier les paraproducts classiques.*

*Ainsi notre méthode proposée et l'utilisation de la décomposition en paraproducts classiques nécessitent exactement les mêmes arguments. L'intérêt d'utiliser nos opérateurs "élémentaires" est d'obtenir une preuve unifiée qui ne fait pas de distinctions entre les deux types de paraproducts. De plus elle permet de développer tous les arguments*



*nécessaires sans avoir à les étudier simultanément avec les termes "parasites" apparaissant dans la décomposition (1.19).*

L'étude des opérateurs dont le symbole  $m$  est singulier en un point est "classique". Ici on a obtenu des estimations uniformes selon les différents paramètres. Dans le paragraphe suivant, nous allons reproduire la même analyse dans le cas où le symbole  $m$  est singulier sur tout un sous espace de  $\Gamma$ . Nous allons montrer comment les décomposer avec nos opérateurs élémentaires, mais nous n'avons pas su comment implémenter les méthodes temps-fréquence à cette décomposition.

### 1.3.2 Le cas où $m$ est singulier sur tout un sous-espace.

On s'intéresse maintenant à un symbole  $m$  défini sur le sous espace  $\Gamma = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = 0\}$ , qui possède une singularité le long d'un sous-espace  $V$  de dimension  $k$  non dégénéré : l'espace  $V$  peut être paramétré par tous les  $k$ -uplets de variables canoniques. Ici la dimension  $k$  est prise en tant que " $\mathbb{R}^d$  sous-espace" de  $\Gamma \simeq \mathbb{R}^{d(n-1)} = (\mathbb{R}^d)^{n-1}$  donc  $k \leq n - 2$ . On suppose que cette singularité est contrôlée par la condition suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{dn} \quad |\partial^\alpha m(\xi)| \leq d(\xi, V)^{-|\alpha|}. \tag{1.20}$$

Nous allons travailler directement sur l'opérateur  $T$  :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix(\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \sigma(\xi) \widehat{f_1}(\xi_1) \dots \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) d\xi, \tag{1.21}$$

où le nouveau symbole  $\sigma$  est donné par

$$\sigma(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = m(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\xi_1 - \dots - \xi_{n-1}).$$

Par conséquent  $\sigma$  vérifie les conditions de singularités suivantes :

$$|\partial^\alpha \sigma(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})| \leq \prod_{i=1}^{n-1} d(\xi, V)^{-\alpha_i}. \tag{1.22}$$

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $V$  un  $\mathbb{R}^d$ -hyperplan de  $\mathbb{R}^{dp}$  défini comme le noyau d'une " $\mathbb{R}^d$ -forme linéaire"  $\lambda : V = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^{dp}, \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \xi_i = 0\}$ . Ici les paramètres  $\lambda_i$  sont réels. Alors, on a :*

$$\frac{|\lambda(\xi)|}{|||\lambda|||} = d(\xi, V). \tag{1.23}$$

*Ici on choisit de noter  $|||\lambda|||$  la norme de  $\lambda$  en tant qu'application linéaire de  $\mathbb{R}^{dp}$  dans  $\mathbb{R}^d$ , munis de leurs normes euclidiennes. On vérifie alors que :*

$$|||\lambda|||^2 = \sum_{k=1}^p |\lambda_k|^2. \tag{1.24}$$

*Pour ne pas confondre les différentes normes, on continue de noter  $||$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$ . On note  $d$  la distance associée à la norme euclidienne  $||$  dans  $\mathbb{R}^{dp}$ .*

**Démonstration :** Ici il faut faire attention au fait que l'on manipule des  $\mathbb{R}^d$  sous espaces.

Soit  $v \in V$  tel que  $d(\xi, V) = \inf_{v' \in V} d(\xi, v') = d(\xi, v)$ . On a donc :

$$|\lambda(x)| = |\lambda(x) - \lambda(v)| \leq \|\lambda\| d(x, v) \leq \|\lambda\| d(\xi, V).$$

Pour l'autre inégalité, on regarde l'application  $\gamma : v \in V \rightarrow d(\xi, v)^2$ . L'espace  $V$  considéré comme " $\mathbb{R}^d$ -sous-espace" de dimension  $p - 1$  est identifié à  $\mathbb{R}^{d(p-1)}$  par :

$$V \simeq \{ \xi \in \mathbb{R}^{dp}, \forall j \in \{1, \dots, d\}, \gamma^j(\xi) = 0. \},$$

où on a noté  $\gamma^j$  les  $\mathbb{R}$ -formes linéaires sur  $\mathbb{R}^{dp}$  définies par :

$$\gamma^j(\xi) := \sum_{i=1}^p \lambda_i \xi_i^j$$

avec par convention  $\xi_i^j$  la  $j$ -ième coordonnée de  $\xi_i \in \mathbb{R}^d$ . On peut alors appliquer le théorème des extrémis liés :  $\gamma$  est une fonction strictement convexe et donc atteint son minimum en un point  $u \in V$  tel que  $\nabla \gamma(u) = 2(\xi - u)$  appartient à l'espace vectoriel réel engendré par  $(\nabla \gamma^j)_{1 \leq j \leq d}$ . Par conséquent, il existe des réels  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq d}$  tels que :

$$2(\xi - u) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \nabla \gamma^j.$$

Or en notant  $e_k^j$  le vecteur canonique de  $\mathbb{R}^{dp}$  correspondant à la  $j$ -ième coordonnée dans  $\mathbb{R}^d$  de la  $i$ -ème composante dans  $(\mathbb{R}^d)^p$ , le vecteur gradient est donné par :

$$\nabla \gamma^j = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^j.$$

De ce fait en composant par  $\gamma^l$ , étant donné que  $u \in V \subset \ker(\gamma^l)$ , on trouve :

$$2\gamma^l(\xi) = 2\gamma^l(\xi - u) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \sum_{k=1}^p \lambda_k \gamma^l(e_k^j).$$

Or  $\gamma^l(e_k^j) = \lambda_k$  si  $j = l$  et  $\gamma^l(e_k^j) = 0$  si  $j \neq l$ . D'où avec (1.24), on obtient :

$$2\gamma^l(\xi) = \alpha_l \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \alpha_l \|\lambda\|^2.$$

C'est à dire :

$$\alpha_l = \frac{2\gamma^l(\xi)}{\|\lambda\|^2}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} d(\xi, V)^2 &\leq d(\xi, u)^2 = \|\xi - u\|^2 = \frac{1}{4} \left\| \sum_{j=1}^d \alpha_j \nabla \gamma^j \right\|^2 \\ &= \|\lambda\|^{-4} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^p \gamma^j(\xi)^2 \lambda_k^2 = \|\lambda\|^{-2} \sum_{j=1}^d \gamma^j(\xi)^2 = \|\lambda\|^{-2} |\lambda(\xi)|^2. \end{aligned}$$

On a donc bien montré les deux inégalités. □

La forme  $\lambda$  est non dégénérée par conséquent  $\lambda(\xi) = \sum \lambda_i \xi_i$  avec pour tout  $i = 1, \dots, p$   $\lambda_i \neq 0$ . On commence par discrétiser l'espace selon la quantité  $|\lambda(\xi)|$  qui est équivalente d'après le lemme précédent à la distance  $d(\xi, V)$ . Soit  $\Psi$  une fonction réelle paire de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ , à spectre dans la couronne de rayons 1 et 4, telle que :<sup>(4)</sup>

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d = \{0\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^k \eta) \right|^2 = 1.$$

Alors

$$\forall \xi \in V^c \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^k \lambda(\xi)) \right|^2 = 1. \quad (1.25)$$

Soient les points  $a_k^j$ , définis de la manière suivante :

$$a_k^j = \left( \frac{j_l}{\lambda_k 2^k} \right)_{1 \leq l \leq n-1} \in \mathbb{R}^{d(n-1)},$$

avec  $J = \{j \in \mathbb{Z}^{d(n-1)} \mid \sum j_k = 0\}$ . C'est à dire que pour  $k$  fixé  $(a_k^j)_{j \in J}$  décrit un réseau de pas  $2^{-k}$  au-dessus de  $V = \ker(\lambda) \subset \Gamma$ .

On va ensuite discrétiser les couches  $\{\xi, |2^k \lambda(\xi)| \simeq 1\}$  sur un réseau. On veut estimer la fonction suivante :

$$\sum_k \sum_{j \in J} \widehat{\Psi}^2(2^k \lambda(\xi)) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}^2(2^k \lambda_l(\xi - a_k^j)_l),$$

où les coefficients  $\lambda_l$  sont donnés par la forme  $\lambda$ . Ici en accord avec les notations du lemme précédent, pour  $\xi \in \mathbb{R}^{d(n-1)}$  et  $l = 1, \dots, n-1$  on note  $\xi_l \in \mathbb{R}^d$  la  $l$ -ième coordonnée de  $\xi$ . On construit une fonction numérique  $\varphi$  telle que  $\widehat{\varphi}$  soit positive, à support dans  $[-6, 6]$  et est égale à 1 sur  $[-4, 4]$ . On considère la fonction  $\phi$  définie par :

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi - i)^2)^{1/2}}.$$

Étant donné les conditions sur  $\varphi$ , la fonction  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi - i)^2$  est de classe  $C^\infty$  et est bornée inférieurement. Par conséquent la fonction  $\phi$  ainsi définie est dans l'espace  $\mathbf{S}(\mathbb{R})$  et son spectre est inclus dans  $[-6, 6]$ . De plus on a la relation :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}^2(\xi - j) = 1.$$

On choisit alors  $\Phi(\eta) = \prod_{i=1}^d \phi(\eta_i)$  pour  $\eta \in \mathbb{R}^d$ , de sorte que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi}(\eta - j)|^2 = 1. \quad (1.26)$$

---

<sup>4</sup> Dans ce cas, on sait par [9] que  $\int \sum_k |\Psi_{2^k} * f(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2$ .

Alors en utilisant (1.25) et (1.26), on obtient la partition suivante :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \widehat{\Psi}^2(\lambda(\xi)2^k) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}^2(2^k \lambda_l(\xi - a_k^j)_l) = 1.$$

Ici on a utilisé que la sommation sur les  $j \in J$  est équivalente à une sommation sur les  $(n-2)$  premières coordonnées, parcourant chacune de manière indépendante  $\mathbb{Z}^d$ . On a alors la décomposition exacte suivante de l'opérateur  $T$  :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \sigma(\xi) \widehat{\Psi}^2(\lambda(\xi)2^k) \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}^2(2^k \lambda_l(\xi - a_k^j)_l) \widehat{f_l}(\xi_l) d\xi.$$

Chaque terme de la somme définit une "restriction" de l'opérateur  $T$  : on a tronqué (de manière aussi régulière que le permettait (1.22)) le symbole  $\sigma$  sur la partie d'un cône de sommet le point  $a_k^j$  et à distance du sous-espace  $V$  équivalente à  $2^{-k}$ . Ainsi la fonction  $\Psi$  permet de décomposer le symbole  $\sigma$  selon des "tranches" qui sont déterminées par leur distance au sous-espace  $V = \ker(\lambda)$ . On peut donc réécrire  $T$  par :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \sigma_{k,j}(2^k(\xi - a_k^j)) \widehat{\Psi}(\lambda(\xi)2^k) \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}(2^k \lambda_l(\xi - a_k^j)_l) \widehat{f_l}(\xi_l) d\xi,$$

où les nouveaux symboles  $\sigma_{k,j}$  sont définis par

$$\sigma_{k,j}(\xi) = \widehat{\Psi}(\lambda(\xi)) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}(\lambda_l \xi^l) \sigma(2^{-k} \xi + a_k^j).$$

De par les relations (1.22), on sait que les dérivées de  $\sigma_{k,j}$  sont uniformément bornées et les conditions sur les fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$  nous montrent que  $\sigma_{p,j}$  est à support dans

$$\{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d(n-1)}, \forall i \in \{1, \dots, n-2\}, |\lambda_i \xi_i| \leq 6, 1 \leq |\lambda(\xi)| \leq 4\}$$

qui est compact et de mesure proportionnelle à  $\prod_{1 \leq i \leq n-1} |\lambda_i|^{-d}$ . On a donc une estimation du type suivant :

$$\widehat{\sigma_{p,j}}(u) = \frac{L(p, j, u)}{\prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^d} \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|u_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{-N} \quad (1.27)$$

avec  $L$  une fonction qui est notamment dans  $L^\infty(\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{d(n-1)})$  :

$$\|L\|_\infty \lesssim \|\sigma\|_\infty + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d(n-1)} \\ |\alpha|=N}} \|d(\cdot, V)^N D^\alpha \sigma\|_\infty. \quad (1.28)$$

La borne ainsi obtenue dépend du symbole  $\sigma$  et des paramètres  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ . On a donc la décomposition suivante :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} \frac{L(k, j, u)}{\prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N} \quad (1.29)$$

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} e^{-i2^k u \cdot (\xi - a_k^j)} \widehat{\Psi}(\lambda(\xi)2^k) \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}(2^k \lambda_l (\xi - a_k^j)_l) \widehat{f_l}(\xi_l) d\xi \right] du,$$

où on note  $u/\lambda$  le  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ -vecteur de coordonnées  $u_l/\lambda_l \in \mathbb{R}^d$  pour  $1 \leq l \leq n-1$ . On rappelle que l'on note  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\|\cdot\|$  celle de  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ . En distribuant l'exponentielle complexe selon la décomposition <sup>5</sup>

$$u \cdot \xi = \frac{u_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \cdot \lambda(\xi) + \sum_{l=1}^{n-2} \lambda_l \left( \frac{u_l}{\lambda_l} - \frac{u_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right) \cdot \xi_l := \alpha_0 \cdot \lambda(\xi) + \sum_{l=1}^{n-2} \lambda_l \alpha_l \cdot \xi_l, \quad (1.30)$$

on peut réécrire l'opérateur  $T$  en faisant apparaître des convolutions :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int \frac{du}{\prod_{l=1}^{n-1} |\lambda_l|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} L(k, j, u) \quad (1.31)$$

$$\left[ \widehat{\Psi}_{\lambda_{n-1}2^k \alpha_0, \lambda_{n-1}2^k} e^{-i(\lambda(\xi) - \lambda_{n-1} \xi_{n-1}) \lambda_{n-1}^{-1}}(\xi_{n-1}) \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{\Phi}_{\lambda_l 2^k \alpha_l, \lambda_l 2^k}((\xi - a_k^j)_l) \widehat{f_l}(\xi_l) \right] d\xi.$$

En intégrant selon la variable  $\xi_{n-1}$ , on trouve :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} \frac{L(k, j, u) du}{\prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[ \widehat{\Psi}_{\lambda_{n-1}2^k \alpha_0, \lambda_{n-1}2^k}(y) f_{n-1}(x - y) \int_{\mathbb{R}^{d(n-2)}} \prod_{l=1}^{n-2} e^{-i\lambda_l \xi_l \lambda_{n-1}^{-1} y + ix \xi_l} [(e^{i(a_k^j)_l \cdot} \widehat{\Phi}_{\lambda_l 2^k \alpha_l, \lambda_l 2^k}) * f_l](\xi_l) d\xi dy \right].$$

On a donc l'écriture suivante de  $T$  en notant  $\tau_h$  les opérateurs de translation :

$$T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} \frac{L(k, j, u) du}{\prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N}$$

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{\alpha_0} \Psi)_{\lambda_{n-1}2^k}(y) f_{n-1}(x - y) \prod_{l=1}^{n-2} [(e^{i(a_k^j)_l \cdot} (\tau_{\alpha_l} \Phi)_{\lambda_l 2^k}) * f_l](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right] \quad (1.32)$$

Nous allons réécrire cette décomposition en utilisant les opérateurs "élémentaires" étudiés

<sup>5</sup>Le signe  $\cdot$  représente le produit scalaire, mais on utilise la même notation pour le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ . Ici  $u$  et  $\xi$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^{d(n-1)}$  tandis que les composantes  $(\xi_j, u_j, \alpha_j)_{1 \leq j \leq n-1}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ .

dans les paragraphes précédents. On reprend l'écriture fréquentielle de  $T$  :

$$\begin{aligned}
 T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)} \times \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \frac{L(k, j, u)}{\prod_{l=1}^{n-1} |\lambda_l|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{\alpha_0} \Psi)_{2^k}(y) e^{i\xi_{n-1}(x-y)} \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1} \right) \\
 &\quad \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{f_l}(\xi_l) \widehat{\tau_{\alpha_l} \Phi}(\mu_l 2^k \xi_l + j_l) e^{i\xi_l(x - \mu_l y)} dy du \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{2d(n-1)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \frac{L(k, j, u)}{\prod_{l=1}^{n-1} |\lambda_l|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N} e^{ix \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})} \widehat{\tau_{\alpha_0} \Psi}(2^k(-\sum_j \mu_j \xi_j)) \\
 &\quad \widehat{f_{n-1}}(\xi_{n-1}) \prod_{l=1}^{n-2} \widehat{f_l}(\xi_l) \widehat{\tau_{\alpha_l} \Phi}(\mu_l 2^k \xi_l + j_l) dud\xi.
 \end{aligned}$$

De ce fait à  $k$  et  $j$  fixés :

$$\xi_{n-1} \in B\left(-\sum_{l=1}^{n-2} \mu_l \xi_l, 2^{-k}\right) \quad \text{et} \quad |\mu_l 2^k \xi_l + j_l| \lesssim 1,$$

on obtient donc :

$$|2^k \xi_{n-1} + j_{n-1}| \lesssim 2^{-k}.$$

Par conséquent on peut tronquer  $f_{n-1}$  en fréquence sur une boule centrée en  $j_{n-1}$  de rayon équivalent à  $2^{-k}$ <sup>6</sup>. D'où :

$$\begin{aligned}
 T(f_1, \dots, f_{n-1})(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d(n-1)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \frac{L(k, j, u)}{\prod_{l=1}^{n-1} |\lambda_l|^d (1 + \|u/\lambda\|^2)^N} \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{2^k}(y) \left[ (e^{ij_{n-1} 2^{-k}} \cdot \tilde{\Phi}_{2^k}) * f_{n-1} \right] (x - y) \prod_{l=1}^{n-2} [(e^{ij_l(\mu_l 2^k)^{-1}} \cdot \Phi_{\mu_l 2^k}) * f_l](x - \mu_l y) dy du.
 \end{aligned}$$

Ici  $\tilde{\Phi}$  est une fonction régulière à spectre dans une boule centrée en 0 de rayon borné par une constante numérique. Ainsi pour  $j$  et  $u$  fixés, on retrouve exactement un opérateur  $T_{\rho, \mu, L}$  avec  $\rho = (1, \dots, 1)$  et  $\mu = (1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$  modulé par le paramètre  $j$ . On rappelle que les vecteurs  $\alpha_j$  sont donnés en fonction de  $u$  par (1.30) :

$$\frac{u_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \alpha_0 \quad \left( \frac{u_l}{\lambda_l} - \frac{u_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right) := \alpha_l.$$

Les estimations sur ces opérateurs "élémentaires" sont donc bornées par  $(1 + \|u/\lambda\|)^K \|L(\cdot, j, u)\|_\infty$  pour  $K$  un entier assez grand. Par le changement de variable sur  $u$  pour  $N$  assez grand, l'intégrale en  $u$  est donc absolument convergente et ce de manière indépendante de tout paramètre. Pour conserver cette uniformité en  $\lambda$  et espérer obtenir des bornes uniformes de continuité sur l'opérateur  $T$ , on remarque qu'une condition nécessaire est que les coefficients  $L(k, j, u)$  soient bornés uniformément en  $j$  et  $u$ . Ces coefficients sont définis par

<sup>6</sup>En fait cette troncature provient de la structure de l'espace  $J$ , on l'avait "oubliée" temporairement en caractérisant  $J$  par les  $n - 2$  dernières coordonnées mais on aurait pu la mettre dès le début de la décomposition.

(1.27) et (1.28). Ainsi pour obtenir des estimations uniformes selon la dégénérescence de  $\lambda$ , nous devons déformer la métrique de la manière suivante :

$$d_V(\xi, \eta) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| |\lambda_i|.$$

On demande alors la condition de singularité sur le symbole suivante :

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq \prod_{i=1}^n \left( \frac{|\lambda_i|}{d_V(\xi, V)} \right)^{\alpha_i}. \quad (1.33)$$

Sous cette condition  $L \in L^\infty(\mathbb{Z}, J, \mathbb{R}^{d(n-1)})$  et donc pour  $j$  fixé les opérateurs élémentaires sont bornés de manière indépendante par rapport à tout autre paramètre. Cette renormalisation (1.33) est la formulation duale de [30] et en est une version équivalente pour le cadre bilinéaire. La décomposition effectuée dans le cadre général ( $n$  quelconque) permet de généraliser cette condition, formulée par (1.33), lorsque le sous espace de singularité  $V$  est un hyperplan de  $\Gamma$ . Il reste la sommation en  $j$  à étudier. Mais aujourd'hui aucune méthode ne permet d'étudier la sommation sur le paramètre  $j$  excepté pour  $n = 3$  et  $d = 1$  (voir théorème 0.0.1).

Nous allons finir ce paragraphe en motivant le troisième chapitre par l'apparition d'une propriété géométrique de ces opérateurs. La décomposition de l'opérateur  $T$  fait appel à des opérateurs "élémentaires"  $T_L$  définis à l'aide de coefficients  $L(k, j)$  bornés de la manière suivante (on oublie le paramètre  $u$ ) :

$$T_L(f_1, \dots, f_{n-1})(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} L(k, j) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l * f_l)](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy.$$

Ici essentiellement,  $\Psi$  est une fonction à spectre dans une couronne centrée en 0 et les fonctions  $\Phi^l$  sont des fonctions à spectre borné, qui vérifie la propriété :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{j \in \mathbb{R}^d} |\widehat{\Phi}^l(\xi - j)|^2 = 1. \quad (1.34)$$

Le terme générique a pour spectre (en utilisant la formulation fréquentielle (1.31)) :

$$sp_x \left[ \int \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l * f_l)](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right] \subset \oplus_{l=1}^{n-1} B((a_k^j)_l, C(|\lambda_l|2^k)^{-1}),$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $n$  et  $d$ . En réutilisant la définition des points  $a_k^j$ , on trouve :

$$sp_x \left[ \int \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l * f_l)](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right] \subset \oplus_{l=1}^{n-1} B\left(\frac{2^{-k} j_l}{|\lambda_l|}, \frac{2^{-k} C}{|\lambda_l|}\right).$$

De ce fait, à l'échelle  $2^{-k}$  fixée, les spectres forment un recouvrement borné pour  $j \in J$  (la borne de ce recouvrement ne dépend que de  $n$  et  $d$  au travers de la constante  $C$ ).

Nous allons profiter de cette propriété spectrale pour estimer la norme dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Si on souhaite majorer :

$$\left\| \sum_k \sum_{j \in J} L(k, j) \int \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l) * f_l](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right\|_{2, dx}^2,$$

il apparaît tout d'abord le terme diagonal :

$$\sum_k \left\| \sum_{j \in J} L(k, j) \int \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l) * f_l](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right\|_{2, dx}^2.$$

D'après la remarque précédente par orthogonalité, en utilisant la propriété (1.34) , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^d} L(k, j) \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l) * f_l](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right\|_{2, dx}^2 \\ & \lesssim \|L\|_\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} [(e^{i(a_k^j)_l} \cdot \Phi_{\lambda_l 2^k}^l) * f_l](x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right\|_{2, dx}^2 \\ & \lesssim \|L\|_\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{\lambda_{n-1}2^k}(y) \prod_{l=1}^{n-1} f_l(x - \lambda_l \lambda_{n-1}^{-1} y) dy \right\|_{2, dx}^2. \end{aligned}$$

Cette estimation est intéressante car elle fait apparaître une condition géométrique que l'on étudiera par la suite : le support du dernier terme (à estimer en norme  $L^2$ ) est supporté dans la somme ensembliste des supports des fonctions  $f_1, \dots, f_{n-1}$ . Cette propriété est vérifiée aussi pour les transformées de Hilbert multilinéaires et les opérateurs maximaux multilinéaires. Elle apporte un point de vue plus géométrique sur ces opérateurs, que l'on essaiera de mieux comprendre dans le troisième chapitre.

**Conclusion :** En utilisant l'analyse temps-fréquence "classique", nous avons obtenu des estimations uniformes de continuité pour les paraproducts multilinéaires. La décomposition en opérateurs "élémentaires" permet d'obtenir les estimations de continuité sur les opérateurs dont le symbole est singulier en un point. Dans le cas de symbole plus singulier, ces estimations permettent de prévoir comment modifier la métrique pour compenser la dégénérescence de l'espace de singularité afin d'obtenir des estimations uniformes mais ne permettent pas d'obtenir des continuités sur les espaces de Lebesgue. De plus nous avons fait apparaître une condition géométrique sur ces opérateurs, qui motive une autre approche dont on étudiera quelques aspects dans le chapitre 3.





# Chapitre 2

## Estimations locales pour des opérateurs bilinéaires et Applications au calcul pseudo-différentiel bilinéaire réel.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Une estimation locale à "haute" fréquence.</b>	<b>68</b>
2.1.1	Discrétisation.	75
2.1.2	Etude des opérateurs $T_{S,0}$ et $T_{S,1}$ .	77
2.1.3	Démonstration du théorème 2.1.11.	86
2.1.4	Un cas particulier.	88
2.1.5	Généralisation des symboles.	91
<b>2.2</b>	<b>Calcul pseudo-différentiel bilinéaire.</b>	<b>99</b>
2.2.1	Définition des classes de symbole.	99
2.2.2	Action des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires sur les espaces de Sobolev.	100
2.2.3	Calcul fonctionnel sur les opérateurs bilinéaires.	109
	Étude de l'action de la dualité.	109
	Étude de la composition des opérateurs pseudo-différentiels.	112
<b>2.3</b>	<b>Continuité des opérateurs bilinéaires sur les espaces à poids.</b>	<b>116</b>

---

Nous allons dans ce chapitre présenter des résultats de continuité pour des opérateurs bilinéaires pseudo-différentiels réels. Un opérateur bilinéaire est décrit par son symbole  $\sigma(x, \alpha, \beta)$ . On ajoute le qualificatif "réel" pour signifier que les variables  $x, \alpha, \beta$  sont réelles<sup>1</sup>. L'opérateur  $T$  associé est défini de manière formelle par :

$$T(f, g)(x) := \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

---

<sup>1</sup>Le problème pour des variables vectorielles reste partiellement ouvert et sera étudié dans la section 4.1. Les techniques que nous allons utiliser ici ne s'étendent pas toujours et certaines réponses restent donc inconnues.

Les premiers résultats donnés par R.Coifman et Y.Meyer sont les suivants ([3]) :

**Théorème 2.0.4.** *Supposons que  $\sigma$  ne dépende pas de  $x$ , soit de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  et contrôlé de la manière suivante :*

$$\forall l, n \geq 0 \quad |\partial_\alpha^l \partial_\beta^n \sigma(\alpha, \beta)| \lesssim (|\alpha| + |\beta|)^{-l-n}.$$

Alors l'opérateur  $T$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  pour  $1 < p, q \leq \infty$  des coefficients vérifiant :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

Pour des symboles dépendant de la variable spatiale  $x$ , on a la version non homogène suivante :

**Théorème 2.0.5.** *Supposons que  $\sigma$  soit de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  et vérifie les estimations suivantes :*

$$\forall k, l, n \geq 0 \quad |\partial_x^k \partial_\alpha^l \partial_\beta^n \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\alpha| + |\beta|)^{-l-n}.$$

Alors l'opérateur  $T$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  pour  $1 < p, q \leq \infty$  des coefficients vérifiant :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

Ici nous souhaitons généraliser ces deux résultats dans le cas de symboles plus singuliers. Dans les deux théorèmes précédents, le symbole et ses dérivées sont contrôlés par la distance du point  $(\alpha, \beta)$  à l'origine dans le plan fréquentiel. Nous allons nous intéresser au cas où le contrôle est estimé par la distance à une droite et non plus à un point. Le théorème 2.0.4 est généralisé sous ces hypothèses dans les articles [6], [5] et [28] par le théorème suivant :

**Théorème 2.0.6.** *Soit  $\Delta$  une droite non dégénérée de l'espace fréquentiel :*

$$\Delta := \{(\alpha, \beta), \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = 0\}$$

avec des réels  $\lambda_i$  non nuls et non égaux. Supposons que  $\sigma$  ne dépende pas de  $x$  et soit de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)$ , contrôlé de la manière suivante :

$$\forall l, n \geq 0 \quad |\partial_\alpha^l \partial_\beta^n \sigma(\alpha, \beta)| \lesssim |\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta|^{-l-n} = d((\alpha, \beta), \Delta)^{-l-n}.$$

Alors l'opérateur  $T$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  pour  $1 < p, q \leq \infty$  des coefficients vérifiant :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{2}{3}.$$

Nous allons dans la première section obtenir une version localisée plus précise du théorème précédent. En accord avec le principe d'incertitude d'Heisenberg, nous montrerons le résultat suivant :

**Théorème 2.0.7.** Soit  $\Delta$  une droite non dégénérée de l'espace fréquentiel :

$$\Delta := \{(\alpha, \beta), \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = 0\}$$

avec des réels  $\lambda_i$  non nuls et non égaux. Soit  $\sigma$  une fonction bornée de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $p, q, r$  des exposants tels que  $1 < p, q \leq \infty$ ,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < r < \infty.$$

Pour tout  $\delta > 1$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  telle que pour tout intervalle  $I$ , pour tout symbole  $\sigma$  supporté dans  $\{(\alpha, \beta), d((\alpha, \beta), \Delta) \geq |I|^{-1}\}$  et vérifiant la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \quad \forall n, l \geq 0 \quad |\partial_\alpha^n \partial_\beta^l \sigma(\alpha, \beta)| \lesssim d((\alpha, \beta), \Delta)^{-l-n}$$

on ait l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right). \quad (2.1)$$

L'exposant  $\delta > 0$  nous permet d'obtenir une décroissance supplémentaire que celle attendue simplement par une estimation ponctuelle du noyau bilinéaire de l'opérateur. Celle-ci prend en compte les conditions fréquentielles supposées sur le symbole  $\sigma$ . Nous appelons l'inégalité (2.1) une estimation "hors-diagonale", étant donné qu'elle permet de mesurer une décroissance de  $T(f, g)(x)$  en fonction des deux distances  $d(x, \text{supp}(f))$  et  $d(x, \text{supp}(g))$ . D'un point de vue fréquentiel, nous l'appelons aussi une estimation à "haute fréquence", parce que l'on considère des symboles supportés loin de l'axe de singularité. Ici le terme "fréquence" fait référence à la distance entre le point  $(\alpha, \beta)$  et l'axe de singularité de  $\sigma$ <sup>2</sup>.

Cette décroissance "hors-diagonale" (ou à "haute fréquence") nous permettra dans la deuxième section d'obtenir la généralisation du théorème 2.0.6 aux symboles dépendant de la variable spatiale  $x$  :

**Théorème 2.0.8.** Soit  $\Delta$  une droite non dégénérée de l'espace fréquentiel :

$$\Delta := \{(\alpha, \beta), \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = 0\}$$

avec des réels  $\lambda_i$  non nuls et non égaux. Supposons que  $\sigma$  soit de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  et contrôlé de la manière suivante :

$$\forall k, l, n \geq 0 \quad |\partial_x^k \partial_\alpha^l \partial_\beta^n \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta|)^{-l-n}.$$

Alors l'opérateur  $T$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  pour  $1 < p, q \leq \infty$  des coefficients vérifiant :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2}.$$

<sup>2</sup>Ce point de vue sera détaillé dans la sous-section 2.1.4.

Après avoir montré ce résultat sur les symboles "d'ordre 0". Nous étendrons les continuités aux cas des espaces de Sobolev et nous traiterons le cas des symboles d'ordre positif. Puis nous établirons quelques résultats de calcul symbolique sur ces classes d'opérateurs bilinéaires. Dans la dernière section, nous utiliserons l'estimation locale pour obtenir des continuités globales de ces opérateurs pseudo-différentiels sur des espaces  $L^p$  à poids.

**Remarque 2.0.9.** *Ici nous traitons le cas bilinéaire. En suivant l'article [28], on peut obtenir des résultats similaires pour des opérateurs multilinéaires sous certaines conditions. Nous ne rentrons pas dans les détails ici.*

## 2.1 Une estimation locale à "haute" fréquence.

Dans cette section, nous allons utiliser les outils de l'analyse temps-fréquence pour montrer une estimation locale, qui implique en particulier le théorème 2.0.6. Par souci de simplicité nous allons traiter le cas particulier où la droite  $\Delta$  a pour équation  $\alpha - \beta = 0$ . Ceci n'est pas une limitation : toutes les estimations qui suivent se généralisent avec des constantes qui dépendent des deux paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Le fait important est de choisir une droite  $\Delta$  non dégénérée c'est à dire avec les paramètres  $\lambda_i$  non nuls et non égaux.

On souhaite étudier des estimations locales de la transformée de Hilbert bilinéaire :

$$H(f, g)(x) := v.p. \int f(x - t)g(x + t) \frac{dt}{t}.$$

Dans le cas linéaire, il n'est pas possible d'avoir une estimation "raisonnable" sur les quantités  $\|H^1(f)\|_{r,I}$  où  $I$  est un intervalle,  $r > 1$  et  $H^1$  est la transformée linéaire de Hilbert. On arrive cependant à obtenir des estimations locales à l'aide de la fonction maximale de Fefferman-Stein  $M^\sharp$ , on sait alors que pour tout exposant  $r > 1$  (voir théorème 7.4.9 de [17]) :

$$M^\sharp(H^1(f)) \lesssim M_{HL}(|f|^r)^{1/r}.$$

Il n'existe pas de version bilinéaire de l'opérateur  $M^\sharp$  adaptée au problème. Par conséquent, il semble vain de rechercher une estimation locale précise de l'opérateur bilinéaire  $H(f, g)$ . Nous obtiendrons une estimation locale en tronquant le symbole. Dans le cas linéaire, cela donne le résultat suivant :

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $T$  un multiplicateur de Fourier linéaire sur  $\mathbb{R}$  dont le symbole  $\sigma$  vérifie :*

$$\forall n \geq 0 \quad |D^n \sigma(\xi)| \lesssim |\xi|^{-n} \mathbf{1}_{|\xi| \geq l^{-1}}.$$

*Alors pour tout exposant  $p \in ]1, \infty[$  et  $N \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C = C(p)$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  de longueur  $|I| = l$ ,*

$$\|T(f)\|_{p,I} \lesssim \sum_{i \geq 0} 2^{-Ni} \|f\|_{p,2^i I}.$$

**Démonstration :** On décompose  $f$  par :

$$f := f \mathbf{1}_{4I} + f \mathbf{1}_{(4I)^c} := f^0 + f^\infty.$$

Le symbole vérifie les conditions de Hörmander donc on sait que l'opérateur  $T$  associé est continu sur  $L^p$  d'où :

$$\|T(f^0)\|_{p,I} \leq \|T(f^0)\|_{p,\mathbb{R}} \lesssim \|f^0\|_p \lesssim \|f\|_{4I}.$$

Pour le terme  $f^\infty$ , on étudie  $K$  le noyau de  $T$ . Le noyau  $K$  est donné par :

$$K(x, y) = \widehat{\sigma}(x - y).$$

Alors pour  $M$  assez grand, il est clair que :

$$|(x - y)^M K(x, y)| \lesssim \int |D^{(M)}\sigma(\xi)| d\xi \lesssim l^{M-1}. \quad (2.2)$$

Par conséquent on obtient :

$$|T(f^\infty)(x)| \lesssim \int |K(x, y)| |f^\infty(y)| dy \lesssim l^{-1} \int |f^\infty(y)| \left(\frac{l}{|x - y|}\right)^M dy.$$

Ainsi par définition de  $f^\infty$ , on découpe l'intégrale selon les couronnes dyadiques de  $I$  :

$$\forall i \geq 0 \quad C_i := \left\{ x, 2^i \leq 1 + \frac{d(x, I)}{|I|} < 2^{i+1} \right\}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |T(f^\infty)(x)| &\lesssim |I|^{-1} \sum_{i \geq 1} \int_{C_i} |f(y)| \left(\frac{l}{|x - y|}\right)^M dy \\ &\lesssim |I|^{-1} \sum_{i \geq 1} \left(\int_{C_i} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{C_i} \left(\frac{l}{|x - y|}\right)^{Mp'} dy\right)^{1/p'} \\ &\lesssim |I|^{-1} \sum_{i \geq 1} \|f(y)\|_{p, 2^i I} \left(\int_{C_i} 2^{-iMp'} dy\right)^{1/p'} \\ &\lesssim |I|^{-1} \sum_{i \geq 1} \|f(y)\|_{p, 2^i I} 2^{-iM} (2^i |I|)^{1/p'}. \end{aligned}$$

En intégrant pour  $x \in I$ , on obtient :

$$\|T(f^\infty)\|_{p,I} \lesssim \sum_{i \geq 1} \|f(y)\|_{p, 2^i I} 2^{-iM+i/p'}.$$

Ainsi pour  $M$  assez grand, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Nous allons généraliser ce résultat dans le cas bilinéaire. Pour simplifier, nous prendrons la droite de singularité  $\Delta$  égale à  $\{(\alpha, \beta), \alpha - \beta = 0\}$ , le cas général sera laissé au lecteur. Réenonçons le résultat que nous voulons démontrer.

**Théorème 2.1.2.** *Soit  $\sigma$  une fonction bornée de  $\mathbb{R}^2$ , on construit alors l'opérateur bilinéaire  $T$  par :*

$$T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.3)$$

Soit  $1 < p, q, r \leq \infty$  des exposants tels que :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < r < \infty.$$

Pour tout  $\delta \geq 1$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  telle que pour tout intervalle  $I$ , pour tout symbole  $\sigma$  supporté sur  $\{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \geq |I|^{-1}\}$  et vérifiant la condition de singularité suivante :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n, l \geq 0 \quad |\partial_\alpha^n \partial_\beta^l \sigma(\alpha, \beta)| \lesssim |\beta - \alpha|^{-l-n}, \quad (2.4)$$

on ait l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right). \quad (2.5)$$

En particulier :

$$\left( |I|^{-1} \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \inf_I M_{HL} (|f|^p)^{1/p} \inf_I M_{HL} (|g|^q)^{1/q}.$$

On note  $M_{HL}$  ici la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Ce théorème est un peu plus fort que la version bilinéaire du théorème 2.0.6 comme le montre le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.3.** *Le théorème précédent implique le théorème 2.0.6 dans le cas bilinéaire.*

**Démonstration :** L'idée consiste à approcher le symbole  $\sigma(\alpha, \beta)$  de l'opérateur  $T$  par les symboles

$$\sigma_\epsilon(\alpha, \beta) = \sigma(\alpha, \beta)[1 - \phi((\alpha - \beta)\epsilon^{-1})],$$

où  $\phi$  est une fonction égale à 1 sur  $[-1, 1]$  et supportée sur  $[-2, 2]$ . La plage d'exposant  $(p, q, r)$  est la même dans les deux théorèmes. On applique donc le théorème précédent à ces symboles  $m_\epsilon$  et  $I_\epsilon = \epsilon^{-1}[-1, 1]$ . Les bornes obtenues sont indépendantes de  $\epsilon$ . On obtient alors la majoration suivante :

$$\|T_\epsilon(f, g)\|_{r, I_\epsilon} \lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_p \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_q \right) \lesssim \|f\|_p \|g\|_q,$$

où  $T_\epsilon$  est l'opérateur construit avec le symbole  $m_\epsilon$ . Alors pour  $f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ , on vérifie que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$T_\epsilon(f, g)(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} T(f, g)(x).$$

La convergence est immédiate par l'écriture (2.3) étant donné que tous les symboles sont bornés. De ce fait, par le lemme de Fatou, on obtient :

$$\forall f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}) \quad \|T(f, g)\|_{r, \mathbb{R}} \lesssim \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon(f, g)\|_{r, I_\epsilon} \lesssim \|f\|_p \|g\|_q.$$

On obtient donc l'estimation de continuité pour toutes fonctions  $f, g$  de la classe de Schwartz, ce qui permet de l'étendre par densité sur les espaces de Lebesgue.  $\square$

En suivant la démonstration des articles [14] et [21] on obtient le résultat suivant pour les opérateurs maximaux :

**Théorème 2.1.4.** *Soit  $1 < p, q, r \leq \infty$  des exposants tels que*

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < r < \infty.$$

*Pour tout  $\delta \geq 1$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  telle que pour tout  $L > 0$ , pour tout symbole  $\sigma$  supporté sur  $\{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \geq L^{-1}\}$  vérifiant :*

$$\forall(\alpha, \beta) \quad \forall n, l \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^l \sigma(\alpha, \beta) \right| \lesssim |\beta - \alpha|^{-l-n}$$

*et pour toute fonction  $\phi$  fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  à support compact et égale à 1 autour de 0, l'opérateur maximal*

$$T_{max}(f, g)(x) := \sup_{r>0} \left| \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(\alpha, \beta) \left[ 1 - \phi(r(\alpha - \beta)) \right] d\alpha d\beta \right| \quad (2.6)$$

*vérifie pour tout  $I$  intervalle de longueur  $L$  l'estimation locale :*

$$\left( \int_I |T_{max}(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right).$$

*En particulier :*

$$\left( |I|^{-1} \int_I |T_{max}(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \inf_I M_{HL} (|f|^p)^{1/p} \inf_I M_{HL} (|g|^q)^{1/q} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

*Il en est de même pour l'opérateur maximal bilinéaire (à l'échelle  $L$ ) :*

$$M^L(f, g)(x) := \sup_{0 < r \lesssim L} \frac{1}{r} \int_{|t| \leq r} |f(x-t)g(x+t)| dt.$$

*Il en est aussi de même pour des opérateurs maximaux associés à un noyau de Calderón-Zygmund : soit  $K$  un noyau sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions de Hörmander à tout ordre alors l'opérateur maximal*

$$T_{max}^L(f, g)(x) := \sup_{0 < \epsilon < r < L} \left| \int_{\epsilon \leq |y| \leq r} f(x-y)g(x+y)K(y)dy \right| \quad (2.7)$$

*vérifie les mêmes estimations locales.*

Nous ne détaillerons pas ce résultat pour les opérateurs maximaux, mais nous expliquerons au fur et à mesure les modifications à apporter. Avant de commencer la preuve du théorème 2.1.2, nous allons donner une application de cette estimation locale. La théorie "temps-fréquence" que nous allons utiliser ne permet pas d'étudier le comportement pour  $r = \infty$ . L'estimation locale permet d'obtenir un renseignement pour ce cas limite :

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $f, g$  des fonctions de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et  $1 < r < \infty$ . Alors pour  $\sigma$  une fonction vérifiant les mêmes propriétés que précédemment, les opérateurs*



maximaux  $U = T_{max}$  ou  $T_{max}^L$  (définis dans le théorème précédent) vérifient l'estimation de moyenne suivante :

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|I|} \int_I |U(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Ici  $I$  représente un intervalle dont la longueur tend vers l'infini. Cette estimation est uniforme et ne dépend plus du support de  $\sigma$  et de l'échelle  $L$ .

**Remarque 2.1.6.** Cette proposition est triviale pour l'opérateur  $M^L$ , puisque l'on a l'estimation

$$\|M^L(f, g)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

**Démonstration :** On découpe l'ensemble  $I$  par des intervalles de longueur  $L$ . Soit  $I_i := [iL, (i + 1)L[$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors pour  $|I|$  plus grand que  $L$ , on obtient :

$$\int_I |T_{max}(f, g)|^r \lesssim \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ I_i \cap I \neq \emptyset}} \int_{I_i} |T_{max}(f, g)|^r.$$

Or le nombre d'indice  $i$  intervenant dans la somme est borné par  $|I|/L$  et en utilisant l'estimation locale on obtient :

$$\begin{aligned} \int_I |T_{max}(f, g)|^r &\lesssim \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ I_i \cap I \neq \emptyset}} \frac{L}{|I_i|} \int_{I_i} |T_{max}(f, g)|^r \\ &\lesssim \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ I_i \cap I \neq \emptyset}} L \|f\|_\infty^r \|g\|_\infty^r \\ &\lesssim |I| \|f\|_\infty^r \|g\|_\infty^r. \end{aligned}$$

On obtient donc ainsi l'estimation :

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I |T_{max}(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

de manière uniforme en  $L$  pour  $|I|$  assez grand. On en déduit donc la proposition.  $\square$

Ce résultat permet de traiter le cas des symboles "à comportement régulier" près de l'axe de singularité. Nous avons le résultat suivant :

**Proposition 2.1.7.** Soit  $\sigma$  une fonction bornée sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall \alpha \neq \beta \quad \forall n, l \geq 0 \quad |\partial_\alpha^n \partial_\beta^l \sigma(\alpha, \beta)| \lesssim |\beta - \alpha|^{-l-n}.$$

On construit alors l'opérateur  $T$  par la relation (2.3). On note  $T_\epsilon$  l'opérateur suivant :

$$T_\epsilon(f, g)(x) := \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(\alpha, \beta) \left[ 1 - \phi(\epsilon^{-1}(\alpha - \beta)) \right] d\alpha d\beta,$$

avec  $\phi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  à support compact et égale à 1 autour de 0. Soit  $f, g$  des fonctions de  $L^1 \cap L^\infty$  telles que  $T_\epsilon(f, g)$  converge uniformément vers  $T(f, g)$  "à l'infini". C'est à dire qu'il existe un ensemble  $E$  tel que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon(f, g) - T(f, g)\|_{\infty, E^c} = 0 \quad \text{et} \quad T(f, g) \in L^r(E).$$

Alors dans ce cas  $T(f, g)$  vérifie la propriété de moyenne :

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|I|} \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

On a la même proposition en choisissant  $T$  donné par :

$$T(f, g)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(x + y)K(y)dy$$

et

$$T_\epsilon(f, g)(x) = \int_{\epsilon \leq |y| \leq \epsilon^{-1}} f(x - y)g(x + y)K(y)dy$$

avec  $K$  un noyau sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions de Hörmander à tout ordre.

**Démonstration :** On estime la norme sur  $I$  de la manière suivante :

$$\int_I |T(f, g)|^r \lesssim \int_{I \cap E^c} |T(f, g) - T_\epsilon(f, g)|^r + \int_I |T_\epsilon(f, g)|^r + \int_E |T(f, g)|^r.$$

Or par hypothèse la dernière intégrale est finie et ne dépend pas de  $I$  donc :

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|I|} \int_E |T(f, g)|^r \right)^{1/r} = 0. \tag{2.8}$$

Pour le premier terme, on utilise la convergence uniforme, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que :

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|I|} \int_{I \cap E^c} |T(f, g) - T_\epsilon(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \|T_\epsilon(f, g) - T(f, g)\|_{\infty, E^c} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \tag{2.9}$$

Le paramètre  $\epsilon$  est fixé. Le deuxième terme est donc étudié par la proposition précédente. On obtient bien l'inégalité voulue.  $\square$

Dans l'exemple suivant (et tous les cas semblables) nous allons montrer que si une des deux fonctions  $f$  ou  $g$  est à support compact alors les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées.

**Exemple 2.1.8.** *Etudions par exemple le cas de la transformée de Hilbert bilinéaire :*

$$H(f, g)(x) := v.p. \int f(x - y)g(x + y) \frac{dy}{y}.$$

*Supposons donc que  $f$  est à support dans  $S$  un compact. On choisit alors  $E = S + B(0, 1)$  qui est un ensemble borné. La fonction  $g$  est dans  $L^\infty$ ,  $f$  est à support compact et  $f \in L^\infty$  donc  $f \in L^r$  pour  $1 < r < \infty$ . En utilisant le résultat de continuité pour  $H$  de  $L^r \times L^\infty$  dans  $L^r$  (pour  $r \geq 1$ ), on obtient la deuxième hypothèse :  $H(f, g) \in L^r(\mathbb{R}) \subset L^r(E)$ . Il nous reste à montrer la convergence uniforme. Or par définition :*

$$H(f, g)(x) - H_\epsilon(f, g)(x) := v.p. \int_{|t| \leq \epsilon} f(x - t)g(x + t) \frac{dt}{t}.$$

Or pour  $x \in E^c$  et  $\epsilon < 1$ , étant donné que  $f$  est supporté sur  $S$ , l'intégrale ci dessus est nulle. Par conséquent, on a "plus" que la convergence uniforme :

$$\forall x \in E^c, \forall \epsilon < 1 \quad H(f, g)(x) = H_\epsilon(f, g)(x).$$

Les deux hypothèses de la proposition précédente sont donc vérifiées, on en déduit :

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|I|} \int_I |H(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

En fait le théorème précédent nous montre que l'on a le résultat suivant :

$$\forall t \gg 1, \quad \limsup_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \sup_{t^{-1} < s \leq t} \left| \int_{|y| \leq s} f(x-y)g(x+y) \frac{dy}{y} \right|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

L'estimation est uniforme en  $t$ , mais on ne peut intervertir l'uniformité et la "limite supérieure". Un résultat tel que :

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \sup_{0 < s < \infty} \left| \int_{|y| \leq s} f(x-y)g(x+y) \frac{dy}{y} \right|^r \right)^{1/r} \lesssim \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

est faux. Si  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$  et  $g = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$  alors pour  $H$  la transformée de Hilbert bilinéaire  $H(f, g)(x) \simeq \log(|x|)$  qui ne vérifie pas cette propriété de moyenne. Le problème de l'interversion réside dans le fait que pour  $f$  et  $g$  des fonctions de  $L^\infty$ , il est "très rare" que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \int_{|y| \geq R} f(x-y)g(x+y) \frac{dy}{y} \right\|_\infty = 0. \tag{2.10}$$

Bien souvent, on n'a même pas de convergence simple car  $H(f, g)$ . L'intégrale

$$v.p. \int f(x-y)g(x+y) \frac{dy}{y}$$

ne converge pas nécessairement pour tout point  $x$ . L'exemple précédent est un cas où en aucun point il y a convergence. On ne peut donc pas appliquer la proposition ci-dessus. Ce problème n'est pas lié au cadre bilinéaire. Nous avons montré l'estimation locale linéaire dans le théorème 2.1.1 et cet exemple, que nous venons de développer, fonctionne de manière identique avec la transformée linéaire de Hilbert.

Nous allons consacrer la section suivante à la démonstration du théorème 2.1.2. Le cadre bilinéaire présente une subtilité supplémentaire par rapport au cadre linéaire, le théorème 2.1.1 étant une conséquence "presque immédiate" du résultat de continuité sur l'espace  $\mathbb{R}$  entier. Dans le cas bilinéaire si le symbole  $m$  dépend uniquement de la variable  $\alpha - \beta$ , alors la preuve du théorème 2.1.1 se généralise au cas bilinéaire pour montrer le théorème 2.1.2 avec un exposant  $\delta$  aussi grand que l'on veut. Ce cas particulier sera traité dans le dernier paragraphe de cette section. La difficulté provient de l'étude d'un symbole général qui dépend des deux variables  $\alpha$  et  $\beta$ . La démonstration de ce théorème reprend exactement les idées de celle du théorème 2.0.6 (dans le cas  $n = 3$ ). Nous allons donc reprendre les techniques simplifiées de [31].

### 2.1.1 Discrétisation.

On commence par décomposer le symbole  $\sigma$ . On discrétise le plan fréquentiel par des cubes de Whitney pour la droite de singularité d'équation :

$$\alpha - \beta = 0.$$

Puis on discrétise selon la variable spatiale tout en respectant le principe d'incertitude de Heisenberg. Les détails de la réduction sont rédigés dans [6] et [5].

**Définition 2.1.9.** *On commence par définir les tri-feuilles. Un pavé est un produit cartésien de deux intervalles de mesure finie. Une tri-feuille  $s$  est un pavé  $I_s \times \omega_s$  et trois sous-pavés  $s_i = I_{s_i} \times \omega_{s_i} \subset s$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , tels que :*

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad I_{s_i} = I_s \quad (2.11)$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad |I_s| = |\omega_{s_i}|^{-1} \quad (2.12)$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad |\omega_{s_i}| \geq C^{-1}|\omega_s|, \quad (2.13)$$

où  $C$  est une constante universelle. Une collection de tri-feuilles  $\mathcal{S}$  est un ensemble de tri-feuilles telles que :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathcal{S}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad i \neq j &\implies \omega_{s_i} \neq \omega_{s_j}, \\ \{I_s, s \in \mathcal{S}\} &\text{ est une grille,} \\ \mathcal{J} := \{\omega_s, s \in \mathcal{S}\} \cup_{i=1}^3 \{\omega_{s_i}, s \in \mathcal{S}\} &\text{ est une grille,} \\ \omega_{s_i} \not\subset \varpi \in \mathcal{J} &\implies \forall j \in \{1, 2, 3\}, \omega_{s_j} \subset \varpi. \end{aligned}$$

La notion de grille correspond aux propriétés de la grille dyadique : un ensemble d'intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\{I\}_{I \in \mathcal{I}}$  est appelée une grille si de manière universelle, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ 2^{k-1} \leq |I| \leq 2^{k+1}}} \mathbf{1}_I \lesssim \mathbf{1}_{\mathbb{R}}.$$

Il est clair qu'un sous ensemble d'une collection de tri-feuilles est aussi une collection de tri-feuilles. On définit maintenant les fonctions de troncature sur ces feuilles :

**Définition 2.1.10.** *Soit  $\phi$  une fonction normalisée dans  $L^2(\mathbb{R})$ , dont le spectre est inclus dans  $[-1/2, 1/2]$ , on définit alors pour  $s$  une tri-feuille :*

$$\forall j \in \{1, 2, 3\} \quad \phi_{s_j}(x) := |I_s|^{-1/2} \phi \left( \frac{x - c(I_s)}{|I_s|} \right) e^{2\pi i c(\omega_{s_j})x},$$

où  $c(I)$  représente le centre d'un intervalle  $I$ .

Les fonctions  $\phi_{s_j}$  sont donc des fonctions normalisées dans  $L^2(\mathbb{R})$  à décroissance rapide autour de  $I_s$  et à spectre exactement localisé dans  $\omega_{s_j}$ .

Dans ce cas, on peut décomposer l'opérateur  $T$  (pour  $N$  assez grand) :

$$T(f, g)(x) := \sum_{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3} (1 + |u|^2)^{-N} \sum_{s \in \mathcal{S}_u} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s(u) \langle (\tau_{u_1} \phi)_{s_1}, f \rangle \langle (\tau_{u_2} \phi)_{s_2}, g \rangle (\tau_{u_3} \phi)_{s_3}(x), \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{S}_u$  est une collection de tri-feuilles dépendant du paramètre  $u$  et où les réels  $(\epsilon_s(u))_{s \in \mathcal{S}_u}$  sont des coefficients bornés. Les collections de tri-feuilles  $\mathcal{S}_u$  et les coefficients  $\epsilon_s(u)$  sont bornées de manière uniforme par rapport à  $u$ . Les constantes dépendent uniquement des constantes du symbole. On utilise maintenant le fait que le symbole de l'opérateur  $T$  est supporté dans  $\{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \geq |I|^{-1}\}$  : les sommes intérieures ne portent que sur les termes dont :

$$|\omega_s| \gtrsim |I|^{-1} \text{ c'est à dire } |I_s| \lesssim |I|. \quad (2.15)$$

Avec cette décomposition, montrée dans [6] et [5], le théorème 2.1.2 est une conséquence du résultat suivant <sup>3</sup> :

**Théorème 2.1.11.** *Soit  $\mathcal{S}$  une collection de tri-feuille vérifiant la condition (2.15),  $(\epsilon_s)_{s \in \mathcal{S}}$  une suite de coefficients bornés et  $\phi^i$  des fonctions régulières à spectre dans  $[-1/2, 1/2]$ . Alors on note l'opérateur :*

$$T_{\mathcal{S}}(f, g)(x) := \sum_{s \in \mathcal{S}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \langle \phi_{s_1}^1, f \rangle \langle \phi_{s_2}^2, g \rangle \phi_{s_3}^3(x).$$

Pour les exposants  $(p, q, r)$  vérifiant les conditions du théorème 2.1.2 et pour tout  $\delta \geq 1$ , on a

$$\left( \int_I |T_{\mathcal{S}}(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f \mathbf{1}_{2^k I}\|_p \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g \mathbf{1}_{2^k I}\|_q \right).$$

De plus toutes les bornes sont contrôlées pour  $M$  assez grand par  $c_M(\phi^1)c_M(\phi^2)c_M(\phi^3)$ .

Ainsi en choisissant  $N$  assez grand dans (2.14), on obtient le théorème 2.1.2. Il nous suffit donc de démontrer le théorème précédent. Pour cela nous allons décomposer  $T_{\mathcal{S}}$  par rapport à l'intervalle d'étude  $I$  en utilisant (2.15). Si on pose

$$T_{\mathcal{S},0}^{k_1,k_2}(f, g)(x) := \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ I_s \subset 2I}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \langle \phi_{s_1}^1, f \mathbf{1}_{C_{k_1}} \rangle \langle \phi_{s_2}^2, g \mathbf{1}_{C_{k_2}} \rangle \phi_{s_3}^3(x),$$

$$T_{\mathcal{S},1}^{k_1,k_2,l}(f, g)(x) := \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ I_s \not\subset 2I \\ 2^l |I| \leq |I_s| < 2^{l+1} |I|}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \langle \phi_{s_1}^1, f \mathbf{1}_{C_{k_1}} \rangle \langle \phi_{s_2}^2, g \mathbf{1}_{C_{k_2}} \rangle \phi_{s_3}^3(x),$$

on a alors

$$T_{\mathcal{S}}(f, g) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} T_{\mathcal{S},0}^{k_1,k_2}(f, g) + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} T_{\mathcal{S},1}^{k_1,k_2,l}(f, g). \quad (2.16)$$

On a noté  $C_i$  la couronne centrée en  $I$  définie par :

$$C_i := \left\{ x, 2^i \leq 1 + \frac{d(x, I)}{|I|} < 2^{i+1} \right\} \quad (2.17)$$

---

<sup>3</sup>Pour l'étude des opérateurs maximaux, la réduction est techniquement un peu plus compliquée. Elle est rédigée dans [14] (théorème 4.4) et de même la condition très importante (2.15) est vérifiée pour les opérateurs maximaux décrits dans le théorème 2.1.4.

et  $C_0$  est donc l'intervalle double  $2I$ . La décomposition (2.16) est due à (2.15) : cette condition permet d'éliminer les termes correspondants à  $|I_s| \geq |I|$  (c'est à dire  $l \geq 0$ ), qui ne peuvent être étudiés de la même façon car alors on localiserait en espace et en fréquence simultanément de manière plus précise que celle autorisée par le principe d'incertitude de Heisenberg.

Dans la prochaine sous section, nous allons montrer le résultat suivant :

**Théorème 2.1.12.** *Les opérateurs  $T_{S,i}^j$  sont continus sur  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(I)$  avec  $(p, q, r)$  les exposants du théorème 2.1.2. De plus pour tout  $\delta \geq 1$  les bornes de continuité  $C(T_{S,i}^j)$  vérifient :*

$$\begin{aligned} C(T_{S,0}^{k_1,k_2}) &\lesssim c_M(\phi^1)c_M(\phi^2)c_M(\phi^3)2^{-\delta(k_1+k_2)} \\ C(T_{S,1}^{k_1,k_2,l}) &\lesssim c_M(\phi^1)c_M(\phi^2)c_M(\phi^3)2^{-\delta(|l|+k_1+k_2)}. \end{aligned}$$

Puis nous en déduisons le théorème 2.1.11.

### 2.1.2 Etude des opérateurs $T_{S,0}$ et $T_{S,1}$ .

Avant de démontrer le résultat essentiel de l'analyse temps-fréquence, nous allons redéfinir tous les objets :

**Définition 2.1.13.** *Nous avons introduit la notion de tri-feuilles. Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $t \in \mathcal{S}$  une tri-feuille, un  $j$ -arbre  $\mathbf{T}$  de sommet  $t$  est une collection de tri-feuilles telle que :*

$$\forall s \in \mathbf{T} \quad I_s \subset I_t \text{ et } \omega_{t_j} \subset \omega_{s_j}.$$

On note alors  $I_{\mathbf{T}} := I_t$  l'intervalle en espace du  $j$ -arbre  $\mathbf{T}$ . Une collection  $\mathbf{T}$  de tri-feuilles est appelée un arbre s'il existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\mathbf{T}$  soit un  $j$ -arbre. Pour tout  $j$ -arbre  $\mathbf{T}$ , on définit "l'énergie" de la fonction  $f_j$  sur cet arbre par :

$$size_j(\mathbf{T}) := \left( \frac{1}{|I_t|} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f_j, \phi_{s_j}^j \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

Cette quantité correspond à la norme dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la fonction  $f_j$  localisée en espace et en fréquence sur l'arbre  $\mathbf{T}$ . Pour  $\mathcal{Q}$  une collection de tri-feuilles, on définit l'énergie totale par :

$$size_j^*(\mathcal{Q}) = \sup_{\substack{\mathbf{T} \subset \mathcal{Q} \\ \mathbf{T} = k\text{-arbre} \\ k \neq j}} size_k(\mathbf{T}).$$

Les quantités précédentes dépendent des fonctions  $f_j$ , mais cette dépendance est oubliée dans la notation. Ces objets étant introduits, nous allons reprendre les techniques de [31] et nous allons montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.1.14.** *Soit  $\mathcal{Q}$  une collection de tri-feuilles. Alors pour tout  $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$  avec*

$$\sum_i \theta_i = 1,$$

on a l'estimation suivante :

$$\left| \sum_{s \in \mathcal{Q}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{i=1}^3 \langle f_i, \phi_{s_i}^i \rangle \right| \lesssim \prod_{i=1}^3 (\text{size}_j^*(\mathcal{Q}))^{\theta_i} \|f_i\|_2^{1-\theta_i}.$$

**Démonstration :** On rappelle les différents résultats montrés dans [30] et [31] : pour tout arbre  $\mathbf{T}$ ,

$$\left| \sum_{s \in \mathbf{T}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{i=1}^3 \langle f_i, \phi_{s_i}^i \rangle \right| \leq |I_{\mathbf{T}}| \prod_{i=1}^3 \text{size}_i^*(\mathbf{T}).$$

On a l'algorithme de sélection d'arbres suivant <sup>4</sup> :

**Théorème 2.1.15.** Soit  $\mathcal{S}$  une collection de tri-feuilles et  $k \in \{1, 2, 3\}$  un indice. Si

$$\text{size}_k^*(\mathcal{S}) \leq 2^n \|f_k\|_2,$$

alors  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  avec  $\mathcal{S}_1$  la réunion d'arbre  $(\mathbf{T}_i)_i$  telle que :

$$\sum_i |I_{\mathbf{T}_i}| \lesssim 2^{-2n} \quad \text{et} \quad \text{size}_k^*(\mathcal{S}_2) \leq 2^{n-1} \|f_k\|_2.$$

Ainsi en réitérant ce procédé sur  $n$  et sur les indices  $k$ , on obtient la décomposition suivante :

**Proposition 2.1.16.** Pour  $\mathcal{Q}$  une collection de tri-feuilles, il existe des ensembles  $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\mathbf{T}_i)_{i \in J_n}$  des arbres (des  $k$ -arbres pour un indice  $k \in \{1, 2, 3\}$  quelconque) tels que :

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_n$$

avec

$$\forall j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{size}_j^*(\mathcal{Q}_n) \leq 2^n \|f_j\|_2$$

$$\mathcal{Q}_n = \bigcup_{j \in J_n} \mathbf{T}_j \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J_n} |I_{\mathbf{T}_j}| \leq 2^{-2n}.$$

Ainsi fixons une collection  $\mathcal{Q}$  et étudions la somme :

$$(*) := \left| \sum_{s \in \mathcal{Q}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{i=1}^3 \langle f_i, \phi_{s_i}^i \rangle \right|.$$

Par les deux propositions précédentes, on a la décomposition suivante :

$$(*) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j \in J_n} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_j} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{i=1}^3 \langle f_i, \phi_{s_i}^i \rangle \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j \in J_n} |I_{\mathbf{T}_j}| \prod_{i=1}^3 \text{size}_i^*(\mathbf{T}_j)$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j \in J_n} |I_{\mathbf{T}_j}| \right) \prod_{i=1}^3 \text{size}_i^*(\mathcal{Q}_n) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \prod_{i=1}^3 \min(\{\|f_i\|_2 2^n, \text{size}_i^*(\mathcal{Q})\}).$$

<sup>4</sup>Dans le cas des opérateurs maximaux pour le théorème 2.1.4, il faut utiliser le lemme 6.3 de [14]. Dans cette version "maximale", il apparaît un poids supplémentaire mais qui ne joue pas un rôle important dans la suite de l'argument.

La somme en  $n$  porte sur des termes symétriques en  $i$ . Supposons donc que

$$\frac{\|f_1\|_2}{size_1^*(\mathcal{Q})} \leq \frac{\|f_2\|_2}{size_2^*(\mathcal{Q})} \leq \frac{\|f_3\|_2}{size_3^*(\mathcal{Q})}. \quad (2.18)$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} (*) &\lesssim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \min [2^n \|f_1\|_2 size_2^*(\mathcal{Q}) size_3^*(\mathcal{Q}), \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 size_3^*(\mathcal{Q}), 2^{-n} \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \|f_3\|_2] \\ &\lesssim (\|f_1\|_2 \|f_2\|_2 size_3^*(\mathcal{Q})) \log \left( 1 + \frac{\|f_3\|_2 size_2^*(\mathcal{Q})}{\|f_2\|_2 size_3^*(\mathcal{Q})} \right). \end{aligned}$$

Comme les indices 1, 2 et 3 vérifient l'hypothèse (2.18), on en déduit que pour tout  $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$  avec

$$\sum_i \theta_i = 1,$$

et  $\kappa$  tel que  $0 < \kappa \leq 1 - \theta_3$  on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} (*) &\lesssim (\|f_1\|_2 \|f_2\|_2 size_3^*(\mathcal{Q})) \left( \frac{\|f_3\|_2 size_2^*(\mathcal{Q})}{\|f_2\|_2 size_3^*(\mathcal{Q})} \right)^\kappa \\ &\lesssim \left( \frac{\|f_1\|_2}{size_1^*(\mathcal{Q})} \right)^{\theta_1} \|f_1\|_2^{1-\theta_1} size_1^*(\mathcal{Q})^{\theta_1} \|f_2\|_2^{1-\kappa} size_2^*(\mathcal{Q})^\kappa \|f_3\|_2^\kappa size_3^*(\mathcal{Q})^{1-\kappa} \\ &\lesssim \|f_1\|_2^{1-\theta_1} size_1^*(\mathcal{Q})^{\theta_1} \left( \frac{\|f_2\|_2}{size_2^*(\mathcal{Q})} \right)^{\theta_1} \|f_2\|_2^{1-\kappa} size_2^*(\mathcal{Q})^\kappa \|f_3\|_2^\kappa size_3^*(\mathcal{Q})^{1-\kappa} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^3 (size_i^*(\mathcal{Q}))^{\theta_i} \|f_i\|_2^{1-\theta_i}. \end{aligned}$$

Les estimations ne dépendent que du paramètre  $\kappa$  qui est fixé par les trois exposants  $\theta_i$ . C'est bien l'estimation souhaitée.  $\square$

Pour démontrer le théorème 2.1.12, rappelons la définition suivante :

**Définition 2.1.17.** Soit  $\Lambda$  une forme  $n$ -linéaire définie sur des espaces fonctionnels de  $\otimes_{\beta=1}^n L_{loc}^1(X_\beta, d\mu_\beta)$ . Pour  $(p_\beta)_{1 \leq \beta \leq n}$  des exposants de  $\mathbb{R}^*$ , on dit que  $\Lambda$  est de type restreint  $(p_1, \dots, p_n)$  s'il existe une constante  $C$  telle que pour toute famille  $(E_\beta)_{\beta \in \{1, \dots, n\}} \subset X_1 \times \dots \times X_n$  de mesure finie, il existe pour chaque  $\beta$  un ensemble substantiel  $E'_\beta$  de  $E_\beta$  (c'est à dire de mesure  $|E'_\beta| \geq |E_\beta|/2$ ) tel que :

$$\forall f_\beta \in F(E'_\beta) \quad |\Lambda(f_1, \dots, f_n)| \leq C \prod_{\beta=1}^n |E_\beta|^{1/p_\beta} \quad (2.19)$$

avec  $E'_\beta = E_\beta$  si  $p_\beta > 0$ . Ici pour  $(X, d\mu)$  un ensemble mesuré et  $E$  un ensemble mesurable de  $X$ , on note l'espace fonctionnel

$$F(E) := \{f \in L^1(X, d\mu), \quad |f| \leq \mathbf{1}_E\}.$$

La meilleure constante  $C$  dans (2.19) s'appelle la borne de type restreint et on la note  $C(\Lambda)$ .



Pour  $i, j$  des indices, on note  $\Lambda_i^j$  la 3-forme linéaire suivante :

$$\Lambda_i^j(f, g, h) := \langle T_{S,i}^j(f, g), \mathbf{1}_I h \rangle,$$

où les  $T_{S,i}^j$  sont les opérateurs apparaissant dans (2.16).

Par interpolation réelle (lemmes 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 de [30]), il nous suffit de démontrer le résultat (qui est plus fort) suivant :

**Théorème 2.1.18.** *Soit  $p_1, p_2, p_3$  des réels non nuls tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$$

*et tels qu'il existe un unique indice  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  avec  $-1/2 < p_\alpha^{-1} < 0$  et  $1/2 < p_\beta^{-1} < 1$  pour  $\beta \neq \alpha$ . Alors les formes  $\Lambda_i^j$  sont de type restreint sur  $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R}) \times L^{p_3}(I)$  et sur  $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R}) \times L^{p_3}(\mathbb{R})$ . De plus pour de tels exposants, les bornes de type restreint vérifient :*

$$C(\Lambda_1^{k_1, k_2, l}) \lesssim 2^{-\delta(|l| + k_1 + k_2)} \quad \text{et} \quad C(\Lambda_0^{k_1, k_2}) \lesssim 2^{-\delta(k_1 + k_2)},$$

où  $\delta$  est un paramètre aussi grand que l'on veut et où les constantes implicites dépendent des  $c_M(\Phi^i)$  pour  $M$  assez grand et de  $\delta$ .

**Démonstration :** Les exposants  $(p_\beta)_{1 \leq \beta \leq 3}$  et l'indice  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  sont fixés pour toute la démonstration. Les deux types restreints sur  $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R}) \times L^{p_3}(I)$  et  $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R}) \times L^{p_3}(\mathbb{R})$  se démontrent exactement de la même manière, nous allons donc uniquement démontrer le premier.

Il nous faut montrer que la forme  $\Lambda_i^j$  est de type restreint pour ces exposants : c'est à dire que pour toute famille  $(E_\beta)_{\beta \in \{1, 2, 3\}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I$  de mesure finie, il existe un ensemble substantiel  $E'_\alpha \subset E_\alpha$  de mesure  $|E'_\alpha| \geq |E_\alpha|/2$  tel que :

$$\forall f \in F(E'_1), g \in F(E'_2), h \in F(E'_3) \quad |\Lambda_i^j(f, g, h)| \lesssim C(\Lambda_i^j) |E_1|^{1/p_1} |E_2|^{1/p_2} |E_3|^{1/p_3}. \quad (2.20)$$

Ici on note  $E'_\beta = E_\beta$  pour  $\beta \neq \alpha$ .

On commence par définir l'ensemble substantiel. Soit

$$U := \bigcup_{i=1}^3 \{x \in \mathbb{R}, M(\mathbf{1}_{E_i})(x) > |E_i|/C|E_\alpha|\}.$$

Par le théorème de Hardy-Littlewood, pour une constante numérique  $C$ , on a bien

$$|U| \leq |E_\alpha|/2.$$

On pose donc  $E'_\alpha = E_\alpha - U$ . On fixe donc maintenant des fonctions  $f_\beta \in F(E'_\beta)$ . Il nous faut montrer l'estimation (2.20). La démonstration est divisée en trois étapes : une première étape où nous allons obtenir une estimation pour des collections de feuilles quelconques ; une deuxième étape où nous utiliserons la spécificité des collections pour les  $\Lambda_i^j$  ; et une troisième étape pour conclure.

**Première étape :** Une estimation générale.

Soit  $\mathcal{P}$  une collection quelconque de tri-feuilles et pour  $k \geq 0$ , on note  $\mathcal{P}_k$  la collection suivante de tri-feuilles :

$$\mathcal{P}_k := \left\{ s \in \mathcal{P}, \quad 2^k \leq 1 + \frac{d(I_s, U^c)}{|I_s|} < 2^{k+1} \right\}.$$

Fixons  $k \geq 0$  et appliquons la proposition 2.1.14 à la collection  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_k$ . Alors pour tout choix d'exposants  $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$  avec

$$\sum_i \theta_i = 1,$$

on a l'estimation suivante :

$$\forall f_\beta \in F(E'_\beta), \quad P_k := \left| \sum_{s \in \mathcal{P}_k} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{\beta=1}^3 \langle f_\beta, \phi_{s_\beta}^\beta \rangle \right| \lesssim \prod_{\beta=1}^3 (size_\beta^*(\mathcal{P}_k))^{\theta_\beta} \|f_\beta\|_2^{1-\theta_\beta}.$$

Il nous reste donc à estimer les quantités  $size_\beta^*(\mathcal{P}_k)$ . Pour cela nous rappelons le lemme 7.8 de [30]<sup>5</sup> :

**Lemme 2.1.19.** *Pour tout entier  $N$  assez grand, il existe une constante  $C = C(N)$  telle que pour toute collection  $\mathcal{Q}$  de tri-feuilles, pour tout  $\beta \in \{1, 2, 3\}$ , on ait :*

$$size_\beta^*(\mathcal{Q}) \lesssim \sup_{s \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|I_s|} \int \left( 1 + \frac{d(x, I_s)}{|I_s|} \right)^{-N} |f_\beta(x)| dx.$$

Par conséquent, pour  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_k$ , par définition de  $U$  et de  $E'_\alpha$ , on a :

$$\forall \beta \neq \alpha \quad size_\beta^*(\mathcal{P}_k) \lesssim 2^k \frac{|E_\beta|}{|E_\alpha|} \quad \text{et} \quad size_\alpha^*(\mathcal{P}_k) \lesssim 2^{-Mk}. \quad (2.21)$$

Ainsi avec  $\|f_\beta\|_2 \leq |E_\beta|^{1/2}$ , on obtient pour  $M$  assez grand et  $0 < \epsilon < 1$  :

$$\begin{aligned} P_k &\lesssim \prod_{\beta \neq \alpha} \left( 2^k \frac{|E_\beta|}{|E_\alpha|} \right)^{\theta_\beta(1-\epsilon)} |E_\beta|^{(1-\theta_\beta)/2} 2^{Mk\theta_\alpha(1-\epsilon)} |E_\alpha|^{(1-\theta_\alpha)/2} \prod_{\beta=1}^3 (size_\beta^*(\mathcal{P}_k))^{\theta_\beta \epsilon} \\ &\lesssim 2^{-k} \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha - 1)/2 + \epsilon(1-\theta_\alpha)} \right] (size_1^*(\mathcal{P}_k))^{\theta_1} (size_2^*(\mathcal{P}_k))^{\theta_2} (size_3^*(\mathcal{P}_k))^{\theta_3} \epsilon. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par définition de la quantité  $size_\beta^*$ , étant donné que  $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}$ , on a :

$$\forall \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad size_\beta^*(\mathcal{P}_k) \leq size_\beta^*(\mathcal{P}).$$

<sup>5</sup>Pour la démonstration du théorème 2.1.4 avec des opérateurs maximaux, il faut utiliser le résultat correspondant (plus délicat à montrer dans sa version "maximale") : proposition 6.2 de [14].)

On peut alors sommer sur  $k \geq 0$  et pour des fonctions  $f_\beta \in F(E'_\beta)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 P &:= \left| \sum_{s \in \mathcal{P}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \prod_{\beta=1}^3 \langle f_\beta, \phi_{s_\beta}^\beta \rangle \right| \leq \sum_{k \geq 0} P_k \\
 &\leq \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha - 1)/2 + \epsilon(1 - \theta_\alpha)} \right] (size_1^*(\mathcal{P})^{\theta_1} size_2^*(\mathcal{P})^{\theta_2} size_3^*(\mathcal{P})^{\theta_3})^\epsilon \\
 &\lesssim \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha - 1)/2 + \epsilon(1 - \theta_\alpha)} \right] (size_1^*(\mathcal{P})^{\theta_1} size_2^*(\mathcal{P})^{\theta_2} size_3^*(\mathcal{P})^{\theta_3})^\epsilon. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Nous allons dans la prochaine étape utiliser une autre estimation de la quantité  $size_\beta^*$  en fonction des formes  $\Lambda_i^j$ .

**Deuxième étape :** Utilisation des spécificités des formes  $\Lambda_i^j$ .

Premier cas : les formes  $\Lambda_1^j$ .

Dans le cas  $\Lambda_1^{k_1, k_2, l}$ , on redécompose par :

$$\Lambda_1^{k_1, k_2, l} \leq \sum_{\substack{I_0 \notin 2I \\ 2^{l-1}|I| \leq |I_0| \leq 2^{l+1}|I|}} \Lambda_1^{k_1, k_2, l}(I_0)$$

avec

$$\Lambda_1^{k_1, k_2, l}(I_0)(f, g, h) := \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ I_s = I_0}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \langle f \mathbf{1}_{C_{k_1}}, \phi_{s_1}^1 \rangle \langle g \mathbf{1}_{C_{k_2}}, \phi_{s_2}^2 \rangle \langle h, \phi_{s_3}^3 \rangle.$$

Fixons l'intervalle  $I_0$ . La collection de tri-feuilles associée à  $\Lambda_1^{k_1, k_2, l}(I_0)$  est donc

$$\mathcal{P} := \{s \in \mathcal{S}, \quad I_s = I_0\}$$

Pour  $s \in \mathcal{P}$ , alors  $h$  étant supportée sur  $I$ ,

$$\frac{1}{|I_s|} \int \chi_{I_s}^N |h \mathbf{1}_I| \lesssim \frac{1}{|I_s|} \int_I \left(1 + \frac{d(x, I_s)}{|I_s|}\right)^{-N} dx \leq \frac{|I|}{|I_0|} (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N}$$

et donc on trouve :

$$size_3^*(\mathcal{P}) \lesssim 2^{-l} (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N}.$$

Pour  $f$  et  $g$ , on raisonne de la même façon :

$$\frac{1}{|I_s|} \int \chi_{I_s}^N |f \mathbf{1}_{C_{k_1}}| \leq \frac{1}{|I_0|} \int_{C_{k_1}} \left(1 + \frac{d(x, I_0)}{|I_0|}\right)^{-N} dx \leq 2^{k_1 - l} (1 + d(C_{k_1}, I_0)/|I_0|)^{-N}$$

et donc on trouve :

$$size_1^*(\mathcal{P}) \lesssim 2^{k_1 - l} (1 + d(C_{k_1}, I_0)/|I_0|)^{-N}.$$

De même

$$size_2^*(\mathcal{P}) \lesssim 2^{k_2 - l} (1 + d(C_{k_2}, I_0)/|I_0|)^{-N}.$$

Par conséquent avec  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ , on obtient :

$$\text{size}_1^*(\mathcal{P})^{\theta_1} \text{size}_2^*(\mathcal{P})^{\theta_2} \text{size}_3^*(\mathcal{P})^{\theta_3} \lesssim 2^{\theta_1 k_1 + \theta_2 k_2 - l} A, \quad (2.24)$$

où

$$A := (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N\theta_3} (1 + d(C_{k_1}, I_0)/|I_0|)^{-N\theta_1} (1 + d(C_{k_2}, I_0)/|I_0|)^{-N\theta_2}.$$

On a quatre estimations différentes de  $A$ .

Tout d'abord pour garder l'information sur la position de  $I_0$ , on note que :

$$A \leq (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N\theta_3}. \quad (2.25)$$

En utilisant  $d(I, I_0) + d(C_{k_1}, I_0) \geq d(I, C_{k_1}) \gtrsim 2^{k_1}|I| \simeq 2^{k_1-l}|I_0|$ , on a :

$$A \lesssim (1 + 2^{k_1-l})^{-N \min\{\theta_1, \theta_3\}} \lesssim 2^{-k_1 N \min\{\theta_1, \theta_3\}}. \quad (2.26)$$

Pour la dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que  $2^l \leq 1$ . De même, on obtient :

$$A \lesssim 2^{-k_2 N \min\{\theta_2, \theta_3\}}. \quad (2.27)$$

Comme  $I_0 \not\subseteq 2I$  et  $2^l \leq 1$  alors  $d(I_0, I) \geq |I|$  d'où

$$(1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N} \lesssim \left( \frac{|I_0|}{|I|} \right)^N.$$

Par conséquent, on obtient

$$A \lesssim \left( \frac{|I_0|}{|I|} \right)^{N\theta_3} \lesssim 2^{lN\theta_3}. \quad (2.28)$$

En prenant la moyenne géométrique sur (2.25), (2.26), (2.27) et (2.28) (quitte à changer  $N$  qui est pris de toutes façons assez grand), on obtient :

$$A \lesssim 2^{-(k_1+k_2+|l|)N} (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N}.$$

En utilisant (2.23) et (2.21), on obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_1^{k_1, k_2, l}(f, g, h) \right| &\lesssim \sum_{I_0} \left| \Lambda_1^{k_1, k_2, l}(I_0)(f, g, h) \right| \\ &\lesssim \sum_{I_0} \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha-1)/2 + \epsilon(1-\theta_\alpha)} \right] 2^{-N\epsilon(k_1+k_2+|l|)} (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N\epsilon}. \end{aligned}$$

La série est sommable en  $I_0$  car la taille étant fixée par  $l$ , les intervalles  $I_0$  sont disjoints d'où pour  $N$  assez grand :

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_1^{k_1, k_2, l}(f, g, h) \right| &\lesssim \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha-1)/2 + \epsilon(1-\theta_\alpha)} \right] 2^{-(k_1+k_2+|l|)N\epsilon} \\ &\quad \sum_{\substack{I_0 \\ |I_0| \simeq 2^l |I|}} (1 + d(I, I_0)/|I_0|)^{-N\epsilon} \\ &\lesssim \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha-1)/2 + \epsilon(1-\theta_\alpha)} \right] 2^{-N\epsilon(k_1+k_2+|l|)}. \end{aligned}$$

Notons cette borne obtenue :

$$\tilde{C}(\Lambda_1^{k_1, k_2, l}) := 2^{-N\epsilon(k_1+k_2+l)}. \quad (2.29)$$

Second cas : les formes  $\Lambda_0^j$ .

Le principe est exactement le même. Cette fois ci on s'intéresse à

$$\Lambda_0^{k_1, k_2}(f, g, h) := \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ I_s \subset 2I}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s \langle f \mathbf{1}_{C_{k_1}}, \phi_{s_1}^1 \rangle \langle g \mathbf{1}_{C_{k_2}}, \phi_{s_2}^2 \rangle \langle h, \phi_{s_3}^3 \rangle.$$

On choisit donc

$$\mathcal{P} := \{s \in \mathcal{S}, I_s \subset 2I\}.$$

Pour  $s \in \mathcal{P}$ , alors

$$\frac{1}{|I_s|} \int_I \left(1 + \frac{d(x, I_s)}{|I_s|}\right)^{-N} dx \leq 1$$

et donc on trouve avec le lemme 2.1.19 :

$$size_3^*(\mathcal{P}) \lesssim 1.$$

Pour  $f$  et  $g$ , on raisonne de la même façon :

$$\frac{1}{|I_s|} \int_{C_{k_1}} \left(1 + \frac{d(x, I_s)}{|I_s|}\right)^{-N} dx \lesssim (1 + d(C_{k_1}, I)/|I|)^{-(N-1)}$$

et donc on trouve :

$$size_1^*(\mathcal{P}) \lesssim 2^{-k_1(N-1)}.$$

De même, on a

$$size_2^*(\mathcal{P}) \lesssim 2^{-k_2(N-1)}.$$

Par conséquent, on obtient pour tout  $N$  assez grand :

$$size_1^*(\mathcal{P})^{\theta_1} size_2^*(\mathcal{P})^{\theta_2} size_3^*(\mathcal{P})^{\theta_3} \leq 2^{-(k_1+k_2)N}.$$

D'où l'estimation suivante obtenue par (2.23) :

$$\Lambda_0^{k_1, k_2} \lesssim \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2-\epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha-1)/2+\epsilon(1-\theta_\alpha)} \right] 2^{-N(k_1+k_2)}.$$

De même notons la borne obtenue

$$\tilde{C}(\Lambda_0^{k_1, k_2}) := 2^{-N(k_1+k_2)}. \quad (2.30)$$

**Troisième étape** : Fin de la démonstration.

Pour la forme  $\Lambda_i^j$  on a trouvé une borne  $C = \tilde{C}(\Lambda_i^j)$  telle que pour toutes fonctions  $f \in F(E'_1), g \in F(E'_2)$  et  $h \in F(E'_3)$  on ait :

$$|\Lambda_i^j(f, g, h)| \lesssim \tilde{C}(\Lambda_i^j) \left[ \prod_{\beta \neq \alpha} |E_\beta|^{(1+\theta_\beta)/2-\epsilon\theta_\beta} |E_\alpha|^{(\theta_\alpha-1)/2+\epsilon(1-\theta_\alpha)} \right].$$

Soient  $(p_\beta)_\beta$  des exposants répondants aux hypothèses du théorème. Il nous faut montrer qu'il existe des paramètres  $\theta_k, \epsilon$  tels que :

$$\forall \beta \neq \alpha \quad (1 + \theta_\beta)/2 - \epsilon\theta_\beta = \frac{1}{p_\beta} \quad \text{et} \quad (\theta_\alpha - 1)/2 + \epsilon(1 - \theta_\alpha) = \frac{1}{p_\alpha}.$$

Soit  $\gamma > 0$  tel que :

$$\forall \beta \neq \alpha \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p_\beta} \right| < \frac{1}{2 + \gamma}.$$

Un tel  $\gamma$  existe car par hypothèse  $1 < p_\beta < 2$  pour  $\beta \neq \alpha$ . On commence par choisir  $\theta_\alpha \in ]0, 1[$  tel que :

$$1 > \theta_\alpha > \max\{\theta_\alpha^0 := \frac{p_\alpha + (2 + \gamma)}{p_\alpha}, 0\} \text{ et } \min\{\frac{-1}{2 + \gamma} = \frac{1}{p_\alpha(1 - \theta_\alpha^0)}, \frac{1}{p_\alpha}\} > \frac{1}{p_\alpha(1 - \theta_\alpha)} > \frac{-1}{2}.$$

Ce choix est possible car  $p_\alpha < 0$  vérifie l'hypothèse :

$$\frac{1}{p_\alpha} > -\frac{1}{2}.$$

Ainsi on trouve  $\epsilon$  par la relation le liant à  $\theta_\alpha$  et  $p_\alpha$ , d'où :

$$\epsilon := \frac{1}{2} + \frac{1}{p_\alpha(1 - \theta_\alpha)} \in ]0, \frac{1}{2}[ \subset ]0, 1[.$$

On choisit  $\theta_\beta$  pour  $\beta \neq \alpha$  par :

$$\theta_\beta := \frac{\frac{1}{p_\beta} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \epsilon}.$$

Il nous faut vérifier que  $0 < \theta_\beta < 1$ . Puisque  $1 < p_\beta < 2$  et  $0 < \epsilon < 1/2$ , il vient  $0 < \theta_\beta$  et de plus :

$$0 < \theta_\beta = \frac{\frac{1}{p_\beta} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \epsilon} < \frac{\frac{1}{2 + \gamma}}{\frac{1}{2 + \gamma}} = 1.$$

Ainsi on a donc résolu le système sur les exposants et avec ce choix de paramètres, on obtient l'estimation suivante :

$$\Lambda_i^j(f, g, h) \lesssim \tilde{C}(\Lambda_i^j) \prod_{\beta=1}^3 |E_i|^{1/p_\beta}.$$

Par conséquent  $\Lambda_i^j$  est bien de type restreint et nous avons l'estimation suivante sur la borne de continuité  $C(\Lambda_i^j)$  :

$$C(\Lambda_i^j) \lesssim \tilde{C}(\Lambda_i^j).$$

De plus le paramètre  $N$  dans (2.29) et (2.30) est aussi grand que l'on souhaite, on obtient donc les estimations désirées sur ces bornes  $C(\Lambda_i^j)$ .  $\square$

Nous avons donc montré le théorème 2.1.18. Les résultats d'interpolation détaillés dans [30] pour les formes multilinéaires de type restreint, nous permettent d'en déduire le théorème 2.1.12. Nous allons dans le prochain paragraphe montrer le théorème 2.1.11 (qui est une réduction du théorème 2.1.2).

### 2.1.3 Démonstration du théorème 2.1.11.

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le théorème 2.1.11 (et le théorème 2.1.2 en découle) :

**Démonstration :** D'après le théorème 2.1.12 sur les opérateurs  $T_{S,0}$  et  $T_{S,1}$  et la discrétisation (2.16) : pour toutes fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , on a si  $r \geq 1$

$$\|T_S(f, g)\|_{r,I} \lesssim \sum_{k_1, k_2 \geq 0} C(\Lambda_0^{k_1, k_2}) \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} C(\Lambda_1^{k_1, k_2, l}) \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_q \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_r,$$

et si  $r < 1$

$$\|T_S(f, g)\|_{r,I}^r \lesssim \sum_{k_1, k_2 \geq 0} C(\Lambda_0^{k_1, k_2})^r \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^r \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^r + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} C(\Lambda_1^{k_1, k_2, l})^r \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^r \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^r.$$

On rappelle que l'on a noté  $C_k$  la couronne autour de l'intervalle  $I$  de rayon  $2^k|I|$  d'où  $C_k \subset 2^{k+1}I$  et  $|C_k| \simeq 2^k|I|$ .

**Le cas  $r \geq 1$ .**

Avec l'estimation de la borne  $C(\Lambda_0^{k_1, k_2})$ , on obtient pour tout  $\delta' \geq 1$

$$\begin{aligned} \|T_S(f, g)\|_{r,I} &\lesssim \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-\delta'(k_1+k_2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} 2^{-\delta'(k_1+k_2+|l|)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q \\ &\lesssim \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-\delta'(k_1+k_2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q \\ &\lesssim \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-k_1/p' - k_2/q' - (\delta-1)(k_1+k_2)} \left( \frac{1}{2^{k_1}} \int_{2^{k_1}I} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \frac{1}{2^{k_2}} \int_{2^{k_2}I} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

On a noté  $p'$  et  $q'$  les exposants conjugués de  $p$  et  $q$ . Ainsi on obtient bien la conclusion attendue avec par exemple

$$\delta' = \delta + 1.$$

**Le cas  $r \leq 1$ .**

On obtient alors pour tout  $\delta' \geq 1$

$$\begin{aligned} \|T_S(f, g)\|_{r,I} &\lesssim \left( \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-r\delta'(k_1+k_2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^r \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^r + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} 2^{-r\delta'(k_1+k_2+|l|)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^r \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^r \right)^{1/r} \\ &\lesssim \left( \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-r\delta'(k_1+k_2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^r \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^r \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et  $\rho > 0$  tel que  $p^{-1} + \rho, q^{-1} + \rho < 1$ , il vient :

$$\begin{aligned}
A &\lesssim \left[ \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1 q(1/p' - \rho)} \right]^{1/q} \left[ \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2 p(1/q' - \rho)} \right]^{1/p} \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1 p(\delta' - 1/p' + \rho)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^p \right)^{1/p} \\
&\quad \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2 q(\delta' + \rho - 1/q')} \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^q \right)^{1/q} \\
&\lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1 p(\delta' - 2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2 q(\delta' - 2)} \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q^q \right)^{1/q} \\
&\lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(\delta' - 2)} \|f \mathbf{1}_{C_{k_1}}\|_p \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(\delta' - 2)} \|g \mathbf{1}_{C_{k_2}}\|_q \right),
\end{aligned}$$

ce qui correspond de nouveau à l'inégalité attendue avec  $\delta' = \delta + 2$ .

### Conclusion.

Dans les deux cas pour tout  $\delta \geq 1$ , on a une estimation du type :

$$\left( \int_I |T_S(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(\delta + 1/p)} \|f \mathbf{1}_{C_k}\|_p \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(\delta + 1/q)} \|g \mathbf{1}_{C_k}\|_q \right),$$

ce qui est bien le résultat souhaité dans le théorème.  $\square$

En utilisant la définition 2.1.17 du "type restreint", on montre le résultat suivant (un peu plus fort) :

**Théorème 2.1.20.** *Soit  $T$  l'opérateur donné par le théorème 2.0.7. Soit  $(p, q, r)$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité et*

$$1 < p, q \leq \infty \quad 2/3 < r < \infty.$$

Alors pour tout  $\delta \geq 1$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  (indépendante de l'intervalle  $I$ ) telle que pour tout ensemble  $E_3$  de mesure finie, il existe un ensemble substantiel  $E'_3$  de  $E_3$  (c'est à dire de mesure  $|E'_3| \geq |E_3|/2$ ) tel que pour toutes fonctions  $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ ,  $g \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$  et  $h \in F(E'_3)$

$$|\langle T(f, g), h \mathbf{1}_I \rangle| \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p + \delta)} \|f \mathbf{1}_{2^k I}\|_p \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q + \delta)} \|g \mathbf{1}_{2^k I}\|_q \right) |E_3|^{1/r'}.$$

**Démonstration :** Notons la forme trilinéaire suivante.

$$\Lambda(f, g, h) := \langle T(f, g), h \mathbf{1}_I \rangle.$$

Dans la sous section 2.1.1 nous avons vu que l'étude de  $\Lambda$  était réduite à l'étude du modèle simplifié suivant

$$\Lambda(f, g, h) = \sum_{s \in \mathcal{S}} |I_s|^{-1/2} \epsilon_s(u) \langle \phi_{s_1}, f \rangle \langle \phi_{s_2}, g \rangle \langle \phi_{s_3}, h \rangle,$$



où  $\mathcal{S}$  est une collection de multi-feuille quelconque. Nous avons ensuite décomposé cette somme selon (2.16) par :

$$\Lambda(f, g, h) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} \Lambda_0^{k_1, k_2}(f, g, h) + \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ l \leq 0}} \Lambda_1^{k_1, k_2, l}(f, g, h).$$

Dans le théorème 2.1.18, nous avons montré que les formes trilinéaires  $\Lambda_i^j$  sont de type restreint pour  $(1/p, 1/q, 1/r')$  et nous avons une estimation des bornes. La construction de l'ensemble substantiel ne dépend pas de la forme  $\Lambda_i^j$ , on en déduit donc que la forme  $\Lambda$  (ci-dessus) est encore de type restreint. Pour tous ensembles  $E_1, E_2, E_3$  de mesure finie, il existe donc un sous ensemble substantiel  $E'_3$  de  $E_3$  tel que pour toutes fonctions  $f \in F(E_1), g \in F(E_2)$  et  $h \in F(E_3)$  on ait :

$$|\Lambda(f, g, h)| \lesssim |E_3|^{1/r'} \left[ \sum_{k_1, k_2 \geq 0} 2^{-\delta'(k_1+k_2)} |E_1 \cap C_{k_1}|^{1/p} |E_2 \cap C_{k_2}|^{1/q} \right].$$

En utilisant les sommations faites dans la sous section 2.1.3 et l'interpolation sur les formes trilinéaires de type restreint (on interpole uniquement sur les exposants  $p$  et  $q$  pour  $r$  fixé), on obtient alors le résultat annoncé.  $\square$

Ces résultats finissent l'analyse des opérateurs bilinéaires par des méthodes "temps-fréquence". Il semble que ces méthodes aient atteint leurs limites et laissent des questions ouvertes : peut-on généraliser le résultat pour des exposants  $1/2 < r \leq 2/3$ ? Qu'en est-il pour des variables multi-dimensionnelles et non plus réelles? Cette estimation obtenue joue le rôle d'estimations "hors-diagonales" de l'opérateur  $T$ . Dans le cas linéaire, nous avons vu comment obtenir facilement le théorème 2.1.1 à partir de l'estimation (2.2) sur le noyau. Dans le cas bilinéaire une telle décroissance ponctuelle sur le noyau ne semble pas "accessible" et l'estimation "hors-diagonale" précédente va nous permettre de contourner cette difficulté. Nous allons donc dans la prochaine section démontrer le théorème 2.0.8 à partir de cette estimation. Auparavant dans le paragraphe suivant nous allons étudier un cas particulier qui explique l'appellation "estimation à haute-fréquence".

### 2.1.4 Un cas particulier.

Dans ce paragraphe, nous allons nous centrer sur une version du théorème 2.1.2 dans un cas particulier :

**Théorème 2.1.21.** *Pour tout exposant  $p, q, r$  vérifiant les conditions précédentes et pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$  telle que pour tout intervalle  $I$ , pour tout symbole  $m(\xi)$  "linéaire" de classe  $C^\infty$  tel que :*

$$\forall \xi \neq 0 \quad \forall l \geq 0 \quad |\partial_\xi^l m(\xi)| \lesssim |\xi|^{-l} \mathbf{1}_{|\xi| \geq |I|^{-1}} \tag{2.31}$$

on ait l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right).$$

Ici  $T$  est l'opérateur associé au symbole bilinéaire  $\sigma(\alpha, \beta) = m(\alpha - \beta)$ .

On suppose donc que le symbole ne dépend que de la variable  $\alpha - \beta$ . Cette variable correspond à la distance dans le plan fréquentiel du point  $(\alpha, \beta)$  à la droite de singularité. Dans la démonstration suivante, nous allons voir que cette variable se traite exactement comme la variable fréquentielle du cadre linéaire. Ce résultat s'applique par exemple aux troncations "douces" de la transformée bilinéaire de Hilbert avec un symbole

$$\sigma(\alpha, \beta) = \text{sign}(\alpha - \beta) [1 - \phi(\alpha - \beta)],$$

où  $\phi$  est une fonction régulière et est égale à 1 près de 0. Ce cas particulier d'opérateur présente une invariance par modulation est a été étudié récemment dans [2] pour montrer une version bilinéaire du "théorème T(1)" sur ces opérateurs. Le résultat que nous allons montrer ici a déjà été démontré dans [2], mais nous allons proposer ici une méthode plus simple, basée sur la démonstration de notre théorème 2.1.1 dans le cadre linéaire.

**Démonstration :** L'opérateur  $T$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$T(f, g)(x) = \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) m(\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.32)$$

En espace, on obtient donc

$$T(f, g) := x \rightarrow v.p. \int f(y)g(2x - y)K(x - y)dy = v.p. \int f(x + t)g(x - t)K(t)dt,^6$$

où  $K$  est le noyau défini par :

$$K(t) := \widehat{m}(-t).$$

Nous allons traiter de manière différente le cas  $|t|$  petit et le cas  $|t|$  grand. Soit  $\phi \in C^\infty$  supportée sur  $[-2, 2]$  et égale à 1 sur  $[-1, 1]$ . On décompose le noyau  $K$  selon :

$$K(t) := K(t)[1 - \phi(t/|I|)] + K(t)\phi(t/|I|) := K_1(t) + K_2(t).$$

**Etude de  $K_1$ .**

Nous allons commencer par l'étude de  $K_1$ . Par la régularité de  $m$ , on obtient (pour tout  $N$ ) :

$$\partial_\xi^N m(\xi) \in L_\xi^1 \implies t^N K(t) = \widehat{\partial_\xi^N \sigma(\xi)}(-t) \in L^\infty$$

et on a :

$$\|t^N K(t)\|_\infty \lesssim \int |\xi|^{-N} \mathbf{1}_{|\xi| \geq |I|^{-1}} \lesssim |I|^{N-1}.$$

On obtient donc l'estimation uniforme en  $t$

$$|K(t)| \lesssim |I|^{-1} (|I||t|^{-1})^N.$$

Par conséquent, étant donné que la fonction  $1 - \phi(t/|I|)$  localise sur  $|t| \geq |I|$ , on obtient l'estimation suivante :

$$|K_1(t)| \leq |K(t)[1 - \phi(t/|I|)]| \lesssim \frac{|I|^{-1}}{1 + \frac{|t|^N}{|I|^N}}.$$

---

<sup>6</sup>Dans le cas général de la droite  $\Delta$  d'équation  $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = 0$ , on construit le symbole  $m(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta)$  et alors l'opérateur  $T$  devient  $T(f, g)(x) = \int f(x - \lambda_1 t)g(x - \lambda_2 t)K(t)dt$ .

On obtient donc l'estimation pour  $T_1$  l'opérateur associé au noyau  $K_1$  :

$$|T_1(f, g)(x)| \lesssim |I|^{-1} \int |f(x+t)g(x-t)| \frac{dt}{1 + \frac{|t|^N}{|I|^N}}.$$

On décompose ainsi selon les couronnes  $C_k$  (définies par (2.17)) autour de  $I$  :

$$|T_1(f, g)(x)| \lesssim |I|^{-1} \sum_{k \geq 0} \int_{C_k} |f(x+t)g(x-t)| 2^{-Nk} dt.$$

Par l'inégalité de Minkowski et l'inégalité de Hölder, il vient :

$$\|T_1(f, g)\|_{r, I} \lesssim |I|^{-1} \sum_{k \geq 0} \|f\|_{p, C_k} \|g\|_{q, C_k} 2^{-Nk} 2^k |I| \lesssim \sum_{k \geq 0} \|f\|_{p, C_k} \|g\|_{q, C_k} 2^{-(N-1)k}.$$

Ici l'utilisation de l'inégalité de Minkowski nécessite  $r \geq 1$ . Dans le cas où  $2/3 < r < 1$ , on utilise alors :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{C_k} |f(x+t)g(x-t)| dt \right\|_{r, I} &\lesssim |I|^{1/r-1} \int_{I \times C_k} |f(x+t)g(x-t)| dt dx \\ &\lesssim |I|^{1/r-1} \|f\|_{1, C_k} \|g\|_{1, C_k} \\ &\lesssim |I|^{1/r-1} (2^k |I|)^{1-1/p+1-1/q} \|f\|_{p, C_k} \|g\|_{q, C_k} \\ &\lesssim |I| 2^{k(2-1/r)} \|f\|_{p, C_k} \|g\|_{q, C_k} \end{aligned}$$

pour conclure. Il nous reste le cas délicat de  $T_2$  à traiter.

**Etude de  $K_2$ .**

L'opérateur  $T_2$  est défini de la manière suivante :

$$T_2(f, g)(x) := \int f(y)g(2x-y)K(x-y)\phi(y-x)dy = \int f(x+t)g(x-t)K(t)\phi(t/|I|)dt.$$

La fonction  $\phi$  est supportée sur la boule  $[-2, 2]$ , par conséquent étant donné que l'on estime  $T_2$  sur l'intervalle  $I$ , on peut tronquer les fonctions  $f$  et  $g$  sur  $3I$  et obtenir :

$$\forall x \in I \quad T_2(f, g)(x) := T_2(f \mathbf{1}_{3I}, g \mathbf{1}_{3I})(x).$$

Or l'opérateur  $T_2$  est associé au symbole bilinéaire

$$\sigma_2(\alpha, \beta) = K(\cdot) \widehat{\phi(|I|^{-1} \cdot)}(\alpha - \beta).$$

C'est à dire en calculant la convolution :

$$\sigma_2(\alpha, \beta) = \int m(\eta) |I| \widehat{\phi}(|I|(\alpha - \beta - \eta)) d\eta.$$

On estime donc la régularité du symbole  $\sigma_2$  (pour  $N$  assez grand) :

$$\begin{aligned} |\partial_\alpha^n \partial_\beta^p \sigma_2(\alpha, \beta)| &\lesssim \int |I| (|\alpha - \beta - \eta|)^{-n-p} (1 + |I||\eta|)^{-N} \mathbf{1}_{|\alpha - \beta - \eta| \geq |I|^{-1}} d\eta \\ &\lesssim \int |I|^{1+n+p} (1 + |I||\alpha - \beta - \eta|)^{-n-p} (1 + |I||\eta|)^{-N} d\eta \\ &\lesssim |I|^{n+p} (1 + |I||\alpha - \beta|)^{-n-p} \int |I| (1 + |I||\eta|)^{-N+n+p} d\eta \\ &\lesssim |I|^{n+p} (1 + |I||\alpha - \beta|)^{-n-p} \lesssim (|\alpha - \beta|)^{-n-p}. \end{aligned}$$

Par conséquent le symbole bilinéaire vérifie les estimations de régularité du théorème 2.0.6. Ainsi en appliquant celui ci à l'opérateur  $T_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|T_2(f, g)\|_{r,I} &= \|T_2(f\mathbf{1}_{3I}, f\mathbf{1}_{3I})\|_{r,I} \lesssim \|T_2(f\mathbf{1}_{3I}, f\mathbf{1}_{3I})\|_{r,\mathbb{R}} \\ &\lesssim \|f\mathbf{1}_{3I}\|_{p,\mathbb{R}} \|g\mathbf{1}_{3I}\|_{q,\mathbb{R}} \lesssim \|f\|_{p,3I} \|g\|_{q,3I} \end{aligned}$$

On obtient pour ce terme aussi l'inégalité demandée par le théorème.  $\square$

**Remarque 2.1.22.** *Nous verrons dans la section 2.3 l'intérêt de pouvoir choisir dans ce cas particulier un exposant  $\delta$  aussi grand que l'on veut.*

Nous avons fini cette section par l'étude d'un cas particulier qui montre que l'analogie de la variable fréquentielle dans la théorie linéaire est la variable  $\alpha - \beta$ , qui correspond à la distance du point  $(\alpha, \beta)$  à la droite de singularité. Nous allons dans le paragraphe suivant étudier les mêmes estimations "hors-diagonales" sous différentes conditions de régularité du symbole avant de généraliser dans le prochain chapitre les résultats de continuité globales pour des opérateurs bilinéaires issus de symboles dépendant de la variable  $x$ .

### 2.1.5 Généralisation des symboles.

Dans ce paragraphe, nous allons affaiblir les hypothèses sur le symbole. Commençons par étudier de nouveaux symboles, que l'analyse de Littlewood-Paley suffit à étudier.

**Théorème 2.1.23.** *Soit  $m$  une fonction bornée de  $\mathbb{R}^2$ , et  $T$  l'opérateur bilinéaire défini par :*

$$T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.33)$$

Soient  $1 < p, q \leq \infty$  des exposants tels que :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.$$

Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$ , telle que pour tout intervalle  $I$ , si le symbole  $m$  est supporté par  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha|, |\beta|\} \geq |I|^{-1}\}$  et vérifie la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \quad \forall n, l \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^l m(\alpha, \beta) \right| \lesssim |\alpha|^{-n} |\beta|^{-l} \quad (2.34)$$

alors on a l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p,2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q,2^k I} \right).$$

**Démonstration :** Pour montrer ce résultat, on décompose le symbole à l'aide d'une partition de l'unité. Soit  $\Psi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  dont le spectre est inclus dans une couronne autour de 0 telle que :

$$\forall \eta \neq 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^n \eta) \right|^2 = 1.$$

Alors on décompose le symbole  $m$  avec la partition suivante :

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^k \alpha) \widehat{\Psi}(2^l \beta) \right|^2 = 1.$$

On obtient donc :

$$T(f, g)(x) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \left| \widehat{\Psi}(2^k \alpha) \widehat{\Psi}(2^l \beta) \right|^2 m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Notons les symboles intermédiaires :

$$\sigma_{k,l}(\alpha, \beta) := \overline{\widehat{\Psi}(\alpha) \widehat{\Psi}(\beta)} m(2^{-k} \alpha, 2^{-l} \beta).$$

On a alors la réécriture suivante :

$$T(f, g)(x) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{\Psi}_{2^k} * f(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l} * g(\beta) \sigma_{k,l}(2^k \alpha, 2^l \beta) d\alpha d\beta.$$

Or d'après les propriétés de régularité du symbole  $m$ , pour tout  $k, l$  le symbole  $\sigma_{k,l}$  vérifie

$$\forall n, m \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^m \sigma_{k,l}(\alpha, \beta) \right| \lesssim \mathbf{1}_{|\alpha| \simeq |\beta| \simeq 1}$$

et est non nul seulement si  $2^k, 2^l \leq |I|$ . De ce fait par intégration par parties, on obtient l'existence de coefficients  $m(k, l, a, b)$  bornés tels que :

$$\sigma_{k,l}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(a\alpha+b\beta)} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} dadb$$

avec  $M$  un entier aussi grand que l'on veut. On obtient donc la formulation suivante :

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} e^{i(2^k a \alpha + 2^l b \beta)} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} \widehat{\Psi}_{2^k} * f(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l} * g(\beta) d\alpha d\beta dadb.$$

En utilisant la notation  $\Psi^a$  pour la fonction translatée de  $\Psi$  par le réel  $a$ , on obtient :

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} \widehat{\Psi}_{2^k}^a * f(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l}^b * g(\beta) d\alpha d\beta dadb.$$

C'est à dire :

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} [\Psi_{2^k}^a * f(x)] [\Psi_{2^l}^b * g(x)] dadb.$$

Nous allons séparer l'étude en deux cas. Notons

$$T^1(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{2^k \simeq 2^l} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} [\Psi_{2^k}^a * f(x)] [\Psi_{2^l}^b * g(x)] dadb$$

et

$$T^2(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{2^k << 2^l} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} [\Psi_{2^k}^a * f(x)] [\Psi_{2^l}^b * g(x)] dadb.$$

Par symétrie sur le rôle de  $k$  et  $l$ , l'étude de  $T$  est réduite à l'étude de  $T^1$  et  $T^2$ .

1-) Cas où  $2^k \simeq 2^l$ .

Sous cette condition on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les indices  $k$  et  $l$ , pour obtenir (en notant  $S_\zeta$  la fonctionnelle quadratique de Littlewood-Paley associée à une fonction  $\zeta$  d'intégrale nulle) :

$$|T^1(f, g)(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |a| + |b|)^M} S_{\Psi^a}(f)(x) S_{\Psi^b}(g)(x) dadb.$$

Si  $r \geq 1$ , par les inégalités de Minkowski et de Hölder on a :

$$\|T^1(f, g)\|_{r, I} \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |a| + |b|)^M} \|S_{\Psi^a}(f)\|_{p, I} \|S_{\Psi^b}(g)\|_{q, I} dadb.$$

Si  $r < 1$ , nous devons utiliser le lemme 1.1.4 pour avoir un contrôle ponctuel sur les fonctionnelles quadratiques de Littlewood-Paley. Il nous faut donc estimer les normes localisées des fonctionnelles quadratiques. Nous avons vu que les indices  $k$  et  $l$  doivent vérifier  $2^k, 2^l \leq |I|$ . De ce fait dans les fonctionnelles quadratiques, on peut insérer une fonction plateau. Soit  $\zeta$  une fonction régulière à spectre borné telle que  $\widehat{\zeta}$  soit égale à 1 sur la boule unité. Dans ce cas, on peut substituer à  $f$  et  $g$  les fonctions suivantes :

$$f - \zeta_{|I|} * f \quad \text{et} \quad g - \zeta_{|I|} * g.$$

On étudie simplement le terme avec  $f$ , le terme avec  $g$  est identique. Il nous faut estimer :

$$\|S_{\Psi^a}(f - \zeta_{|I|} * f)\|_{p, I}.$$

De la même manière que pour l'étude faite des opérateurs lineaires (théorème 2.1.1), on obtient que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $N$  assez grand tel que :

$$\|S_{\Psi^a}(f - \zeta_{|I|} * f)\|_{p, I} \lesssim (1 + |a|)^N \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I}.$$

En insérant cette estimation pour  $f$  et pour  $g$  et en choisissant alors  $M$  assez grand, on a :

$$\begin{aligned} \|T^1(f, g)\|_{r, I} &\lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1 + |a|)^N (1 + |b|)^N}{(1 + |a| + |b|)^M} \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right) dadb \\ &\lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, le cas de la sommation où  $2^k \simeq 2^l$  s'estime bien de la manière voulue.

2-) Cas où  $2^k \ll 2^l$ .

Rappelons le terme à estimer :

$$T^2(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k < l} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} [\Psi_{2^k}^a * f(x)] [\Psi_{2^l}^b * g(x)] dadb.$$

Nous allons utiliser la dualité. Pour  $k, l$  fixés, le terme a un spectre contenu dans une couronne centrée en 0 et de rayon équivalent à  $2^{-k}$ . Ainsi, il existe une fonction  $\zeta$  régulière à spectre dans une couronne autour de 0 telle que :

$$\langle T^2(f, g), h \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k < l \in \mathbb{Z}} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} [\Psi_{2^k}^a * f(x)] [\Psi_{2^l}^b * g(x)] [\zeta_{2^k} * h(x)] dadbdx.$$

Or pour  $k$  fixé, l'opérateur linéaire

$$L_{k,a,b}(g) := \sum_{l, 2^k < 2^l} m(k, l, a, b) [\Psi_{2^l}^b * g]$$

est un multiplicateur de Fourier. En estimant ce multiplicateur dans l'espace fréquentiel (de manière identique à celle du théorème 2.1.1), on peut borner cet opérateur par :

$$|L_{k,a,b}(g)(x)| \lesssim \int |g(x - y)| (1 + |b|)^N (|I| + |y|)^{-N} dy := (1 + |b|)^N L(g)(x), \quad (2.35)$$

et ce pour  $N$  un exposant aussi grand que l'on veut. Cet opérateur de convolution vérifie bien les estimations hors diagonales que l'on attend. De ce fait on obtient maintenant la majoration (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{aligned} |\langle T^2(f, g), h \rangle| &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{L(g)(x)}{(1 + |a| + |b|)^{M-N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Psi_{2^k}^a * f(x)| |\zeta_{2^k} * h(x)| dadbdx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{L(g)(x)}{(1 + |a| + |b|)^{M-N}} S_{\Psi^a}(f)(x) S_{\zeta}(h)(x) dadbdx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{L(g)(x)}{(1 + |a|)^{M-N-1}} S_{\Psi^a}(f)(x) S_{\zeta}(h)(x) dadx. \end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction  $h$  normalisée dans  $L^{r'}(I)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle T^2(f, g), h \rangle| &\lesssim \sum_{k \geq 0} \int_{C_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{L(g)(x)}{(1 + |a|)^{M-N-2}} S_{\Psi^a}(f)(x) S_{\zeta}(h)(x) dadx \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|L(g)\|_{q, C_k}}{(1 + |a|)^{M-N-2}} \|S_{\Psi^a}(f)\|_{p, C_k} \|S_{\zeta}(h)\|_{r', C_k} da \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|L(g)\|_{q, C_k}}{(1 + |a|)^{M-N-2}} \|S_{\Psi^a}(f)\|_{p, C_k} (2^k)^{-N-1} da \end{aligned}$$

Ici on a utilisé les décroissances "hors-diagonales" des fonctionnelles quadratiques (étudiées dans le premier point). En utilisant les estimations hors diagonales de l'opérateur de convolution  $L$  :

$$\|L(g)\|_{q, C_k} \lesssim \sum_{j \geq 0} 2^{-jN/2} \|g\|_{q, 2^{j+k}I}$$

et (en utilisant la même remarque que dans le premier point pour les fonctionnelles quadratiques)

$$\|S_{\Psi^a}(f)\|_{p, C_k} \lesssim (1 + |a|)^N \sum_{j \geq 0} 2^{-jN/2} \|f\|_{p, 2^{j+k}I},$$

on obtient pour  $M$  assez grand :

$$\begin{aligned}
 |\langle T^2(f, g), h \rangle| &\lesssim \sum_{j, l \geq 0} \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |a|)^{M-2N-2}} 2^{-lN/2} \|g\|_{q, 2^{l+k}I} 2^{-jN/2} \|f\|_{p, 2^{j+k}I} (2^k)^{-N-1} da \\
 &\lesssim \sum_{j, l \geq 0} \sum_{k \geq 0} 2^{-(l+k)N/2} \|g\|_{q, 2^{l+k}I} 2^{-(j+k)N/2} \|f\|_{p, 2^{j+k}I} 2^{-k} \\
 &\lesssim \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-jN/2} \|f\|_{p, 2^jI} \right) \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN/2} \|g\|_{q, 2^iI} \right) :
 \end{aligned}$$

Ainsi par dualité, on a donc bien montré l'estimation hors diagonale souhaitée pour ce deuxième et dernier cas.  $\square$

Pour les opérateurs bilinéaires les variables  $\alpha, \beta$  et  $\alpha + \beta$  jouent le même rôle par dualité. On a donc aussi le résultat suivant :

**Théorème 2.1.24.** *Soit  $m$  une fonction bornée de  $\mathbb{R}^2$  et  $T$  l'opérateur bilinéaire défini par :*

$$T(f, g)(x) := \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.36)$$

Soient  $1 < p, q \leq \infty$  des exposants tels que :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.$$

Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C = C(p, q, r, \delta)$ , telle que pour tout intervalle  $I$ , si le symbole  $m$  est supporté par  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha + \beta|, |\beta|\} \geq |I|^{-1}\}$  et vérifie la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \forall n, l \geq 0 \quad |\partial_\alpha^n (\partial_\beta - \partial_\alpha)^l m(\alpha, \beta)| \lesssim |\alpha + \beta|^{-n} |\beta|^{-l} \quad (2.37)$$

alors on a l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^kI} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^kI} \right).$$

Par symétrie, il en est de même si le symbole  $m$  est supporté sur  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha|\} \geq |I|^{-1}\}$  et vérifie la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \forall n, l \geq 0 \quad |(\partial_\alpha - \partial_\beta)^n \partial_\beta^l m(\alpha, \beta)| \lesssim |\alpha|^{-n} |\alpha + \beta|^{-l}. \quad (2.38)$$

**Démonstration :** La démonstration est très semblable à la précédente, on va la reprendre. On décompose le symbole à l'aide d'une partition de l'unité. Soit  $\Psi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  dont le spectre est inclus dans une couronne autour de 0 telle que :

$$\forall \eta \neq 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^n \eta) \right|^2 = 1.$$

Alors on décompose le symbole  $m$  avec la partition suivante :

$$\sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\Psi}(2^k(\alpha + \beta)) \widehat{\Psi}(2^l \beta) \right|^2 = 1.$$



On obtient donc :

$$T(f, g)(x) := \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \left| \widehat{\Psi}(2^k(\alpha + \beta)) \widehat{\Psi}(2^l\beta) \right|^2 m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Notons les symboles intermediaires :

$$\sigma_{k,l}(\eta, \xi) := \overline{\widehat{\Psi}(\eta) \widehat{\Psi}(\xi)} m(2^{-k}\eta - 2^{-l}\xi, 2^{-l}\xi).$$

On a alors la réécriture suivante :

$$T(f, g)(x) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{\Psi}_{2^k}(\alpha + \beta) \widehat{f}(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l} * g(\beta) \sigma_{k,l}(2^k(\alpha + \beta), 2^l\beta) d\alpha d\beta.$$

Or d'après les propriétés de régularité du symbole  $m$ , pour tout  $k, l$  le symbole  $\sigma_{k,l}$  vérifie

$$\begin{aligned} \forall n, m \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^m \sigma_{k,l}(2^k(\alpha + \beta), 2^l\beta) \right| &\lesssim |\alpha + \beta|^{-n} |\beta|^{-m} \mathbf{1}_{\substack{|\alpha+\beta| \simeq 2^{-k} \\ |\beta| \simeq 2^{-l}}} \\ &\lesssim 2^{kn} 2^{lm} \mathbf{1}_{\substack{|\alpha+\beta| \simeq 2^{-k} \\ |\beta| \simeq 2^{-l}}} \end{aligned}$$

et est non nul seulement si  $2^k, 2^l \leq |I|$ . De ce fait par intégration par parties, on obtient l'existence de coefficients  $m(k, l, a, b)$  bornés tels que :

$$\sigma_{k,l}(2^k(\alpha + \beta), 2^l\beta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(a\alpha+b\beta)} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |2^{-k}a| + |2^{-l}b|)^M} 2^{-k} 2^{-l} da db$$

avec  $M$  un entier aussi grand que l'on veut. On obtient donc la formulation suivante :

$$\begin{aligned} T(f, g)(x) = & \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} e^{i(a\alpha+b\beta)} \frac{m(k, l, a, b)}{(1 + |2^{-k}a| + |2^{-l}b|)^M} \widehat{\Psi}_{2^k}(\alpha + \beta) \widehat{f}(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l} * g(\beta) \frac{d\alpha d\beta}{2^k 2^l} da db. \end{aligned}$$

Par changement de variable, on obtient :

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \frac{\tilde{m}(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} \widehat{f}(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l}^b * g(\beta) e^{i2^k a \alpha} \widehat{\Psi}_{2^k}(\alpha + \beta) d\alpha d\beta da db.$$

On utilise la transformation de fourier inverse pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{\Psi}_{2^l}^b * g(\beta) e^{i2^k a \alpha} \widehat{\Psi}_{2^k}(\alpha + \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} e^{-i\alpha y} f(y) e^{-i\beta z} \Psi_{2^l}^b * g(z) e^{i2^k a \alpha} e^{-i(\alpha+\beta)w} \Psi_{2^k}(w) d\alpha d\beta dy dz dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha(x-y+2^k a-w)} e^{i\beta(x-z-w)} f(y) \Psi_{2^l}^b * g(z) \Psi_{2^k}(w) d\alpha d\beta dy dz dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z + 2^k a) \Psi_{2^l}^b * g(z) \Psi_{2^k}(x - z) dz. \end{aligned}$$

Cette manipulation est bien justifiée par la théorie des distributions. On obtient alors :

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{m}(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} f(z + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](z) \Psi_{2^k}(x - z) dz dadb.$$

On utilise la dualité :

$$\langle T(f, g), h \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{m}(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} f(x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dadb dx.$$

De la même manière que dans la démonstration précédente, nous allons séparer l'étude en deux cas.

1-) Cas où  $2^k \simeq 2^l$ . De même que précédemment, en étudiant le spectre en  $x$ , étant donné que  $2^k, 2^l \lesssim |I|$ , on peut tronquer  $f$  spectralement sur une boule de rayon  $|I|^{-1}$ . Il existe une fonction  $\zeta$  régulière à spectre bornée telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dx = \int_{\mathbb{R}} [(\delta_0 - \zeta_{|I|}) * f](x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dx.$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les indices  $k \simeq l$ , on obtient :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k \simeq l \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{m}(k, l, a, b)}{(1 + |a| + |b|)^M} f(x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dadb dx \right| \lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |a| + |b|)^M} |[(\delta_0 - \zeta_{|I|}) * f](x + 2^k a)| S_{\Psi^b}(g)(x) S_{\Psi}(h)(x) dadb dx.$$

On étudie comme précédemment en remarquant que l'on peut substituer  $g$  par la fonction  $g - \zeta_{|I|} * g$  et de même pour  $h$ . Alors on a les estimations hors-diagonales pour les fonctionnelles quadratiques et le terme en  $f$  se traite exactement de la même manière. Par conséquent, en réutilisant les arguments du théorème précédent, on obtient les décroissances hors-diagonales voulues dans ce cas.

2-) Cas où  $2^k \ll 2^l$ .

Par symétrie, ce cas suffit. En étudiant la variable  $x$ , on peut restreindre spectralement la fonction  $f$  sur une couronne de rayon équivalent à  $2^{-l}$ . De ce fait il existe une fonction  $\zeta$  à spectre dans une couronne telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dx = \int_{\mathbb{R}} [\zeta_{2^l} * f](x + 2^k a) [\Psi_{2^l}^b * g](x) [\Psi_{2^k} * h](x) dx.$$

On raisonne alors exactement de la même manière que précédemment, en considérant d'abord la somme sur  $k$ . Celle-ci fait apparaître un opérateur sur  $h$  qui possède de bonnes estimations hors-diagonales. Ensuite on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $l$  pour faire apparaître les deux fonctionnelles quadratiques sur  $f$  et  $g$ . En réutilisant les mêmes arguments que précédemment on obtient les décroissances "hors-diagonales" voulues.  $\square$

En fait un calcul direct nous montre que les opérateurs décrits dans les théorèmes 2.1.23 et 2.1.24 sont les adjoints des uns par rapport aux autres. Ceci explique pourquoi la démonstration fait apparaître les mêmes arguments en utilisant la dualité. Cette correspondance par dualité sera étudiée plus en détails dans la sous-section 2.2.3.

Ce résultat étant démontré, nous allons pouvoir le combiner avec le premier théorème :

**Théorème 2.1.25.** Soit  $m$  une fonction bornée de  $\mathbb{R}^2$  et  $T$  l'opérateur bilinéaire défini par :

$$T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.39)$$

Pour des exposants  $1 < p, q \leq \infty$  tels que :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < \frac{3}{2}$$

il existe deux constantes  $C = C(p, q, r)$  et  $\delta = \delta(p, q, r) > 0$  telles que pour tout intervalle  $I$ , si  $m$  est supporté par  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|\} \geq |I|^{-1}\}$  et vérifie la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n, l \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n \partial_\beta^l m(\alpha, \beta) \right| \lesssim \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}^{-n} \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\}^{-l} \quad (2.40)$$

alors on a l'estimation locale

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \leq C \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right).$$

Il en est de même pour des symboles  $m$  supportés par  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha + \beta|, |\beta|, |\alpha - \beta|\} \geq |I|^{-1}\}$  et vérifiant la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \forall n, l \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^n (\partial_\beta - \partial_\alpha)^l m(\alpha, \beta) \right| \lesssim \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|\}^{-n} \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\}^{-l},$$

et des symboles  $m$  supportés par  $\{(\alpha, \beta), \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha|, |\alpha - \beta|\} \geq |I|^{-1}\}$ , vérifiant la condition de singularité suivante :

$$\forall(\alpha, \beta) \forall n, l \geq 0 \quad \left| (\partial_\alpha - \partial_\beta)^n \partial_\beta^l m(\alpha, \beta) \right| \lesssim \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}^{-n} \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|\}^{-l}.$$

**Démonstration :** Ce théorème regroupe les cas précédents. Nous allons le démontrer dans le premier cas, les autres étant similaires. On utilise donc une partition de l'unité afin de restreindre le symbole sur les régions  $\{|\alpha| \simeq |\beta|\}$ ,  $\{|\alpha| \ll |\beta|\}$  et  $\{|\alpha| \gg |\beta|\}$ . Dans la première région les minima  $\min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}$  et  $\min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\}$  (permettant de contrôler les décroissances du symbole) sont équivalents à  $|\alpha - \beta|$ . Par conséquent, la restriction à cette région est étudiée par le théorème 2.1.2. Dans les deux autres régions, les minima sont respectivement équivalents à  $|\alpha|$  et  $|\beta|$ , par conséquent les deux restrictions obtenues sont étudiées par le théorème précédent.  $\square$

**Remarque 2.1.26.** Ce résultat est intéressant car il permet d'obtenir une classe de symboles plus riche. Nous verrons dans la prochaine section comment la composition et la dualité agissent sur ces classes.

Dans la prochaine section, nous allons nous intéresser aux symboles dépendant de la variable spatiale  $x$ . En utilisant les estimations "hors-diagonales" nous obtiendrons des continuités globales de ces opérateurs sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Par la suite nous donnerons quelques résultats de calcul symbolique bilinéaire.

## 2.2 Calcul pseudo-différentiel bilinéaire.

### 2.2.1 Définition des classes de symbole.

Nous allons définir les classes de symboles :

**Définition 2.2.1.** *On rappelle les classes des symboles linéaires "classiques" : pour  $m \in \mathbb{R}$ , on note la classe des symboles linéaire d'ordre  $m$  :*

$$S^m := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2), |\partial_x^\gamma \partial_\alpha^n \sigma(x, \alpha)| \lesssim (1 + |\alpha|)^{m-n} \right\}.$$

De même pour  $m_1, m_2$  deux réels, on définit la classe de symboles bilinéaires d'ordre  $(m_1, m_2)$  :

$$BS^{m_1, m_2} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), |\partial_x^\gamma \partial_\alpha^n \partial_\beta^p \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\alpha|)^{m_1} (1 + |\beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\})^{-n} (1 + \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\})^{-p} \right\}.$$

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on définit la classe :

$$BS_\theta^{m_1, m_2} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), |\partial_x^\gamma \partial_\alpha^n \partial_\beta^p \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\alpha|)^{m_1} (1 + |\beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\alpha|, |\beta - \tan(\theta)\alpha|\})^{-n} (1 + \min\{|\beta|, |\beta - \tan(\theta)\alpha|\})^{-p} \right\}.$$

On définit de la même manière les classes  $BS_1^{m_1, m_2}$ ,  $BS_{1, \theta}^{m_1, m_2}$ ,  $BS_2^{m_1, m_2}$  et  $BS_{2, \theta}^{m_1, m_2}$  avec

$$BS_1^{m_1, m_2} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), |\partial_x^\gamma \partial_\alpha^n \partial_{\beta-\alpha}^p \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\alpha + \beta|)^{m_1} (1 + |\beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|\})^{-n} (1 + \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\})^{-p} \right\}$$

et

$$BS_2^{m_1, m_2} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), |\partial_x^\gamma \partial_{\alpha-\beta}^n \partial_\beta^p \sigma(x, \alpha, \beta)| \lesssim (1 + |\alpha|)^{m_1} (1 + |\alpha + \beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\})^{-n} (1 + \min\{|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|\})^{-p} \right\}.$$

Ce qui est important dans la définition de ces classes, c'est la décroissance supplémentaire qui est gagnée par chaque dérivation. Le poids initial (sans les dérivations) a été choisi pour obtenir les résultats de calcul symbolique que nous démontrerons ensuite, mais ne joue "aucun" rôle pour les continuités des opérateurs associés.

**Remarque 2.2.2.** *Pour  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[-\{0\}$  alors on a la correspondance suivante :  $\sigma(x, \alpha, \beta) \in BS^{m_1, m_2}$  est équivalent à  $\sigma(x, \tan(\theta)\alpha, \beta) \in BS_\theta^{m_1, m_2}$ . De même pour les autres classes bilinéaires.*

A un symbole  $\sigma$ , on associe l'opérateur bilinéaire suivant :

$$T_\sigma(f, g)(x) := \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.41)$$

Cette définition formelle a un sens pour  $f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$  si le symbole  $\sigma$  est à croissance polynomiale selon les variables fréquentielles. En termes de variables spatiales, l'opérateur  $T$  s'écrit :

$$T_\sigma(f, g)(x) = v.p. \int f(y)g(z)K(x, x - y, x - z)dydz,$$

où  $K$  est le noyau défini par l'intégrale oscillante :

$$K(x, y, z) := \int e^{-i(y\alpha+z\beta)}\sigma(x, \alpha, \beta)d\alpha d\beta.$$

L'étude du calcul pseudo-différentiel bilinéaire a commencé dans [3]. En reprenant les notations de [3], notre classe de symbole  $BS_\theta^{m,m}$  correspond à la classe  $BS_{1,0,\theta}^{2m}$ . Nous allons dans la prochaine section étudier l'action de ces opérateurs bilinéaires sur les espaces de Sobolev. Ensuite nous établirons quelques "règles" de calcul symbolique pour l'action de la composition et de la dualité.

### 2.2.2 Action des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires sur les espaces de Sobolev.

Dans cette sous-section, nous allons démontrer des résultats positifs de continuité pour les opérateurs associés à des symboles  $\sigma$  dépendant de la variable spatiale  $x$ . On fixe la droite de singularité par l'équation  $\alpha - \tan(\theta)\beta = 0$ . Dans les démonstrations, on fixera  $\theta = +\pi/4$  pour simplifier. Ce qui est important c'est de considérer le cas  $\theta \neq -\pi/4$ , ainsi la "quantité singulière" considérée dans le symbole  $\alpha - \tan(\theta)\beta$  n'est pas égale à la variable dans l'exponentielle complexe de (2.41) :  $\alpha + \beta$ . <sup>(7)</sup>

Commençons par démontrer le résultat suivant :

**Théorème 2.2.3.** *Soit  $\sigma \in BS^{0,0}$ , alors l'opérateur bilinéaire  $T_\sigma$  (défini sur  $\mathbf{S}(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}(\mathbb{R})$ ) associé est continu de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  pour des exposants  $1 < p, q \leq \infty$  vérifiant la condition d'homogénéité :*

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2}.$$

**Démonstration :**

La démonstration est un peu technique. Nous allons la rédiger pour  $r \geq 1$  (hypothèse qui permet quelques simplifications), puis nous expliquerons dans la remarque 2.2.5 les modifications à apporter pour  $r < 1$ . Nous allons décomposer le symbole  $\sigma$ . Soit  $\Phi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\Phi$  soit égale à 1 sur  $B(0, 1)$  et à support dans  $B(0, 2)$ . Soit  $\zeta$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\zeta$  soit à support dans  $[-2, 2]$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \zeta^2(x + j) = 1.$$

---

<sup>7</sup>Le cas dégénéré  $\theta = -\pi/4$  est étudié dans [3]

Ainsi on écrit :

$$\begin{aligned}\sigma(x, \alpha, \beta) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma(x, \alpha, \beta) \zeta^2(x+j) [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)] \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma(x, \alpha, \beta) \zeta^2(x+j) \text{Reste}(\alpha, \beta) \\ &:= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j^\infty(x, \alpha, \beta) + \sigma_j^0(x, \alpha, \beta).\end{aligned}$$

Ici on a noté le symbole

$$\text{Reste}(\alpha, \beta) := 1 - [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)].$$

Il nous faut étudier ces deux termes.

1-) Le cas des symboles  $\sigma_j^\infty$ .

L'opérateur associé à ces symboles est donné par

$$T_j^\infty(f, g)(x) = \zeta^2(x+j) \int_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)] d\alpha d\beta,$$

que l'on réécrit de la manière suivante :

$$T_j^\infty(f, g)(x) = U_{j,x}(f, g)(x),$$

avec  $U$  défini par

$$U_{j,y}(f, g)(x) :=$$

$$\zeta(x+j) \zeta(y+j) \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(y, \alpha, \beta) [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)] d\alpha d\beta.$$

En utilisant le théorème d'injection de Sobolev  $W^{1,r} \hookrightarrow L^\infty$  car  $r \geq 1$ , on obtient :

$$|T_j^\infty(f, g)(x)| \leq \|U_{j,\cdot}(f, g)(x)\|_\infty \lesssim \sum_{k \leq 1} \|\partial_y^k U_{j,\cdot}(f, g)(x)\|_{r, dy}.$$

Or la troncature  $\zeta(y+j)$  implique que  $y \in [j-2, j+2]$ . Par conséquent on obtient la majoration suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |T_j^\infty(f, g)(x)| \lesssim \sum_{k \leq 1} \|\partial_y^k U_{j,\cdot}(f, g)(x)\|_{r, [j-2, j+2], dy}.$$

En réintégrant sur la variable  $x$ , par l'inégalité de Minkowski et le théorème de Fubini on obtient :

$$\|T_j^\infty(f, g)\|_{r, dx} \lesssim \sum_{k \leq 1} \left\| \|\partial_y^k U_{j,\cdot}(f, g)\|_{r, dx} \right\|_{r, [j-2, j+2], dy}.$$

La variable  $y$  vit dans  $[j-2, j+2]$  qui est un ensemble de mesure bornée. Fixons donc  $k \leq 1$  et  $y$ , il nous faut estimer la norme en  $x$ . Grâce à la troncature  $\zeta(x+j)$ , on obtient

$$\|\partial_y^k U_{j,\cdot}(f, g)\|_{r, dx} \lesssim \|V(f, g)\|_{r, [j-2, j+2]},$$

où  $V$  est l'opérateur bilinéaire défini par :

$$V(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \partial_y^k \sigma(y, \alpha, \beta) [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)] d\alpha d\beta.$$

Ainsi  $V$  est un opérateur bilinéaire similaire à ceux étudiés dans les paragraphes précédents, associé au symbole (indépendant de  $x$ )

$$\tau(\alpha, \beta) := \partial_y^k \sigma(y, \alpha, \beta) [1 - \Phi(\alpha - \beta)] [1 - \Phi(\alpha)] [1 - \Phi(\beta)].$$

De par les conditions de régularité sur  $\sigma$ , le symbole  $\tau$  vérifie les conditions suivantes :

$$\forall n, p \geq 0 \quad |\partial_\alpha^n \partial_\beta^p \tau(\alpha, \beta)| \lesssim (\min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\})^{-n} (\min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\})^{-p} \mathbf{1}_{\min\{|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|\} \geq 1}.$$

On peut appliquer l'estimation locale obtenue dans le théorème 2.1.25. Il existe donc  $\delta > 0$  (en fait  $\delta$  peut être choisi aussi grand que l'on veut) tel que :

$$\|V(f, g)\|_{r, [j-2, j+2]} \lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^{k_1} I_j} \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^{k_2} I_j} \right).$$

Ici on note  $I_j$  les intervalles  $I_j := [j-2, j+2]$ . Toutes ces estimations étant indépendantes de  $k \in \{0, 1\}$  et  $y \in [j-2, j+2]$ , on obtient donc :

$$\|T_j^\infty(f, g)\|_{r, dx} \lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^{k_1} I_j} \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^{k_2} I_j} \right). \quad (2.42)$$

Les ensembles  $(I_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  forment un recouvrement borné. Les fonctions  $T_j^\infty(f, g)$  sont supportées sur  $I_j$ , d'où

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j^\infty(f, g)(x) \right\|_r \simeq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|T_j^\infty(f, g)\|_r^r \right)^{1/r}.$$

Par l'inégalité de Hölder et (2.42), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j T_j^\infty(f, g)(x) \right\|_r &\lesssim \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^{k_1} I_j} \right)^r \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^{k_2} I_j} \right)^r \right)^{1/r} \\ &\lesssim \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^{k_1} I_j} \right)^p \right)^{1/p} \left( \sum_j \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^{k_2} I_j} \right)^q \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \left( \sum_j \|f\|_{p, 2^{k_1} I_j}^p \right)^{1/p} \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \left( \sum_j \|g\|_{q, 2^{k_2} I_j}^q \right)^{1/q} \right) \\ &\lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} 2^{k_1/p} \|f\|_p \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} 2^{-k_2/q} \|g\|_q \right) \\ &\lesssim \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

On a utilisé que pour  $k$  fixé les ensembles  $(2^k I_j)_j$  forme un  $2^k$ -recouvrement. Par conséquent, on a bien montré l'estimation voulue pour ce premier terme.

2-) Le cas des symboles  $\sigma_j^0$ .

Dans ce cas, l'opérateur associé à ces symboles est donné par :

$$T_j^0(f, g)(x) := \zeta^2(x + j) \int_{\alpha, \beta} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) \text{Reste}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

on développe  $\text{Reste}(\alpha, \beta)$  en plusieurs termes, qui se traitent de la même façon. Nous allons étudier le cas par exemple où

$$\text{Reste}(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha - \beta) \Phi(\alpha) \Phi(\beta).$$

Nous allons appliquer le même principe que précédemment. Il nous faut contrôler l'opérateur  $V$  défini maintenant par :

$$V(f, g)(x) := \int_{\alpha, \beta} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \partial_y^k \sigma(y, \alpha, \beta) \Phi(\alpha - \beta) \Phi(\alpha) \Phi(\beta) d\alpha d\beta.$$

Les paramètres  $k \in \{0, 1\}$  et  $y \in [j - 2, j + 2]$  sont fixés. Cet opérateur ressemble beaucoup au précédent. La seule différence est que le symbole associé ne vérifie plus la bonne condition de support : il est supporté sur  $\{(\alpha, \beta), \max\{|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|\} \leq 2\}$ , mais vérifie les "bonnes" estimations de régularité. Pour palier à cela, on effectue une translation en fréquence (afin de rétablir la condition de support en s'éloignant de l'axe de singularité) :

$$\begin{aligned} V(f, g)(x) &:= \\ &\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha + 3) \widehat{g}(\beta - 3) \partial_y^k \sigma(y, \alpha + 3, \beta - 3) \Phi(\alpha - \beta + 6) \Phi(\alpha + 3) \Phi(\beta - 3) d\alpha d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{e^{3i \cdot} f}(\alpha) \widehat{e^{-3i \cdot} g}(\beta) \partial_y^k \sigma(y, \alpha + 3, \beta - 3) \Phi(\alpha - \beta + 6) \Phi(\alpha + 3) \Phi(\beta - 3) d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Ainsi  $V$  est un opérateur bilinéaire opérant sur les fonctions  $e^{3i \cdot} f$  et  $e^{-3i \cdot} g$  dont le symbole (indépendant de  $x$ ) est donné par :

$$\tau(\alpha, \beta) := \partial_y^k \sigma(y, \alpha + 3, \beta - 3) \Phi(\alpha - \beta + 6) \Phi(\alpha + 3) \Phi(\beta - 3).$$

Ce symbole  $\tau$  est supporté dans

$$\{(\alpha, \beta), \max\{|\alpha + 3|, |\beta - 3|, |\alpha - \beta + 6|\} \leq 2\} \subset \{(\alpha, \beta), 1 \leq |\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta| \leq 8\}$$

et vérifie les conditions suivantes :  $\forall(\alpha, \beta), \forall n, l \geq 0$

$$\begin{aligned} |\partial_\alpha^n \partial_\beta^l \tau(\alpha, \beta)| &\lesssim \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}^{-n+k} \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\}^{-l+h} \mathbf{1}_{1 \leq |\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta| \leq 8} \\ &\lesssim \mathbf{1}_{\min\{|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|\} \geq 1} \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}^{-n} \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\}^{-l}. \end{aligned}$$

On peut donc de nouveau appliquer le théorème 2.1.25. On obtient alors :

$$\|V(f, g)\|_{r, [j-3, j+3]} \lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|e^{3i \cdot} f\|_{p, [j-2^{k_1}, j+2^{k_1}]} \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|e^{-3i \cdot} g\|_{q, [j-2^{k_2}, j+2^{k_2}]} \right).$$



Les modulations ne jouant aucun rôle sur les normes considérées pour  $f$  et  $g$ , on trouve

$$\|V(f, g)\|_{r, [j-3, j+3]} \lesssim \left( \sum_{k_1 \geq 0} 2^{-k_1(1/p+\delta)} \|f\|_{p, [j-2k_1, j+2k_1]} \right) \left( \sum_{k_2 \geq 0} 2^{-k_2(1/q+\delta)} \|g\|_{q, [j-2k_2, j+2k_2]} \right).$$

La sommation sur le paramètre  $j$  est identique à celle du premier point. On obtient donc bien l'estimation de continuité souhaitée pour ce cas. Tous les termes du symbole  $Reste(\alpha, \beta)$  se traitent exactement de la manière. □

**Remarque 2.2.4.** *Dans la preuve nous avons en fait montré que l'opérateur  $T$  vérifie aussi les mêmes estimations "hors diagonale" à l'échelle 1. Ici on a directement utilisé cette information pour obtenir les continuités globales.*

**Remarque 2.2.5.** *Nous allons ici expliquer comment modifier la preuve précédente dans le cas  $r < 1$ . On reprend les notations de la démonstration. Dans le cas où  $r < 1$ , il nous faut utiliser la forme trilinéaire associée à l'opérateur bilinéaire  $T$  et utiliser la notion de "type restreint" : ces deux arguments permettent de contourner le défaut de l'inégalité triangulaire dans l'espace  $L^r$ . On associe donc la forme trilinéaire  $\Lambda$  définie par :*

$$\Lambda(f, g, h) := \langle T(f, g), h \rangle.$$

*Nous allons montrer qu'elle est de type restreint pour les exposants  $(1/p, 1/q, 1/r')$ , ce qui par interpolation nous donne le résultat souhaité. On a donc*

$$\Lambda(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \sigma(x, \alpha, \beta) \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) h(x) d\alpha d\beta dx.$$

*On applique la même première décomposition de  $\sigma$  nous donnant les formes trilinéaires  $\Lambda_j^\infty$  et  $\Lambda_j^0$ . Étudions le cas des premières formes  $\Lambda_j^\infty$ . Nous allons montrer que chacune de ces formes trilinéaires est de type restreint. On utilise alors la même "astuce", en écrivant*

$$|\Lambda_j^\infty(f, g, h)| \leq \int_{\mathbb{R}} \|U_{j,y}(f, g)(x) \mathbf{1}_{[j-2, j+2]}(y)\|_{\infty, dy} |h(x)| \mathbf{1}_{[j-2, j+2]}(x) dx.$$

*On utilise l'injection de Sobolev  $W^{1,1}([j-2, j+2]) \hookrightarrow L^\infty([j-2, j+2])$  pour obtenir :*

$$|\Lambda_j^\infty(f, g, h)| \lesssim \int_{j-2}^{j+2} \int_{\mathbb{R}} |U_{j,y}(f, g)(x)| |h(x)| dx dy + \int_{j-2}^{j+2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_y U_{j,y}(f, g)(x)| |h(x)| dx dy.$$

*Ainsi pour  $y$  fixé, on retrouve les quantités :*

$$\int_{\mathbb{R}} |U_{j,y}(f, g)(x)| |h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |U_{j,y}(f, g)(x)| |h(x)| \mathbf{1}_{2I_j}(x) dx$$

*qui sont contrôlées par le théorème 2.1.20. On en déduit que les formes  $\Lambda_j^\infty$  sont de type restreint sur  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}) \times L^{r'}(\mathbb{R})$  avec les mêmes bornes que celles qui contrôlaient l'opérateur  $T_j^\infty$ . La manière de construire l'ensemble substantiel (dans la définition du*

type restreint) ne dépend pas de la forme trilinéaire, par conséquent en utilisant la sommation sur  $j$  faite dans la preuve précédente, on obtient le type restreint de

$$\sum_j \Lambda_j^\infty.$$

On produit les mêmes modifications pour les formes  $\Lambda_j^0$ , et on obtient ainsi que  $\Lambda$  est de type restreint  $(1/p, 1/q, 1/r')$ . L'interpolation sur les formes multilinéaires de type restreint permet alors de conclure.

L'étude des symboles d'ordre 0 étant faite, nous allons en déduire le résultat suivant pour des symboles d'ordre  $m_1, m_2 \geq 0$ . On note  $W^{m,p} = W^{m,p}(\mathbb{R})$  les espaces de Sobolev sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle la définition des espaces de Sobolev :

**Définition 2.2.6.** Pour  $m \in \mathbb{R}$  et  $0 < p < \infty$ , on note  $W^{m,p}$  l'espace de Sobolev sur  $\mathbb{R}$  défini de la manière suivante. Pour  $f \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ , on dit que

$$f \in W^{m,p} \iff J_m(f) \in L^p,$$

où l'opérateur  $J_m := (Id - \Delta)^{m/2}$  est défini par transformée de Fourier selon :

$$\widehat{J_m(f)}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{f}(\xi).$$

Pour  $m$  un réel, on note  $m_+$  sa partie positive égale à  $m_+ = (|m| + m)/2$ .

**Théorème 2.2.7.** Soit  $\sigma$  un symbole d'ordre  $(m_1, m_2)$  :  $\sigma \in BS^{m_1, m_2}$ . Alors l'opérateur bilinéaire  $T_\sigma$  (défini par (2.41)) est continu de  $W^{(m_1)_+, p}(\mathbb{R}) \times W^{(m_2)_+, q}(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  avec :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2}$$

et  $1 < p, q < \infty$ .

**Démonstration :**

1-) Le cas  $m_1, m_2$  entiers positifs.

Supposons tout d'abord que  $m_1, m_2$  soient des entiers. On décompose le symbole de la même manière que précédemment. Soit  $\Phi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\Phi$  soit égale à 1 sur  $B(0, 1)$  et à support dans  $B(0, 2)$ . On partitionne le plan fréquentiel avec la partition :

$$1 = \Phi(\alpha - \beta)\Phi(\alpha)\Phi(\beta) + Reste(\alpha, \beta).$$

On définit le premier symbole

$$\sigma_1(x, \alpha, \beta) := \sigma(x, \alpha, \beta)\Phi(\alpha - \beta)\Phi(\alpha)\Phi(\beta)$$

et le second symbole

$$\sigma_2(x, \alpha, \beta) := \sigma(x, \alpha, \beta)Reste(\alpha, \beta).$$

On a donc la décomposition suivante :

$$\sigma(x, \alpha, \beta) = \sigma_1(x, \alpha, \beta) + \sigma_2(x, \alpha, \beta).$$

\* - Le cas de  $\sigma_1$ .

Par définition

$$\sigma_1(x, \alpha, \beta) = \sigma(x, \alpha, \beta)\Phi(\alpha - \beta)\Phi(\alpha)\Phi(\beta),$$

la fonction  $\Phi$  permet de localiser les trois arguments  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  et  $|\alpha - \beta|$ . Le symbole  $\sigma$  étant d'ordre  $(m_1, m_2)$ , la restriction  $\sigma_1$  est un symbole d'ordre  $(0, 0)$ . En appliquant le théorème précédent, on obtient directement :

$$\|T_{\sigma_1}(f, g)\|_r \lesssim \|f\|_p \|g\|_q \lesssim \|f\|_{W^{(m_1)+, p}} \|g\|_{W^{(m_2)+, q}}.$$

Traisons le cas légèrement plus difficile de  $\sigma_2$ .

\* - Le cas de  $\sigma_2$ .

Nous devons maintenant étudier le symbole  $Reste(\alpha, \beta)$ . On peut factoriser tous les termes de  $Reste(\alpha, \beta)$  par au moins un des termes suivants :  $1 - \Phi(\alpha)$ ,  $1 - \Phi(\beta)$  ou  $1 - \Phi(\alpha - \beta)$ . Tous ces termes s'étudiant de la même façon, nous allons seulement rédiger le cas le plus "extrême" où les trois facteurs apparaissent. Prenons donc le cas de

$$Reste(\alpha, \beta) = [1 - \Phi(\alpha)][1 - \Phi(\beta)][1 - \Phi(\alpha - \beta)].$$

Nous devons partitionner le plan fréquentiel de manière régulière afin de pouvoir déterminer les quantités

$$\min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\} \quad \text{et} \quad \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\}.$$

D'après les résultats classiques de partition de l'unité, il existe quatre fonctions régulières  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  telles que  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4 = 1$  sur le support de  $Reste$  et telles que les fonctions vérifient les conditions de support suivantes :

$$\begin{aligned} \text{supp}(\gamma_1) &\subset \{(\alpha, \beta), |\alpha| \lesssim |\alpha - \beta|\} \\ \text{supp}(\gamma_2) &\subset \{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \lesssim |\alpha|\} \\ \text{supp}(\gamma_3) &\subset \{(\alpha, \beta), |\beta| \lesssim |\alpha - \beta|\} \\ \text{supp}(\gamma_4) &\subset \{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \lesssim |\beta|\}. \end{aligned}$$

Ainsi on a la décomposition régulière suivante

$$\mathbf{1}_{Reste \neq 0}(\alpha, \beta) = (\gamma_1(\alpha, \beta) + \gamma_2(\alpha, \beta))(\gamma_3(\alpha, \beta) + \gamma_4(\alpha, \beta))\mathbf{1}_{Reste \neq 0}(\alpha, \beta).$$

On obtient ainsi 4 termes à estimer. Ils s'estiment tous de la même manière, nous allons donc simplement étudier le produit  $\gamma_1\gamma_4$ . On définit alors le symbole suivant :

$$\tau(x, \alpha, \beta) := Reste(\alpha, \beta)\sigma(x, \alpha, \beta) (1 + |\alpha|^2)^{-(m_1)+/2} (1 + |\beta|^2)^{-(m_2)+/2} \gamma_1(\alpha, \beta)\gamma_4(\alpha, \beta).$$

Ce symbole est de classe  $C^\infty$  car le terme  $Reste(\alpha, \beta)$  implique que  $\alpha$  et  $\alpha - \beta$  ne s'annulent pas. Or  $\sigma$  est un symbole d'ordre  $(m_1, m_2)$ , on obtient donc que  $\tau$  est un symbole d'ordre  $(0, 0)$ . On écrit alors :

$$T_{\sigma_2}(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha)\widehat{g}(\beta) (1 + |\alpha|^2)^{(m_1)+/2} (1 + |\beta|^2)^{(m_2)+/2} \tau(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Ainsi,  $\tau$  étant un symbole d'ordre  $(0, 0)$ , en appliquant le théorème précédent on obtient :

$$\|T_{\sigma_2}(f, g)\|_r \lesssim \|(I - \Delta)^{(m_1)+/2} f\|_p \|(I - \Delta)^{(m_2)+/2} g\|_q \lesssim \|f\|_{W^{(m_1)+, p}} \|g\|_{W^{(m_2)+, q}}.$$

Le raisonnement est exactement identique pour tous les termes semblables (issus des différentes partitions), ce qui finit la démonstration de l'estimation de continuité pour  $T_\sigma(f, g)$ . Cette estimation est vraie pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ , on en déduit donc le résultat par densité.

2–) Le cas  $m_1, m_2$  non entiers.

Dans le cas  $m_1, m_2$  réels quelconques, nous allons recourir à l'interpolation pour généraliser le point précédent. On fixe les exposants  $p, q, r$  et on étudie l'opérateur trilineaire suivant :

$$U := (f, g, \sigma) \rightarrow T_\sigma(f, g).$$

Le point précédent montre que l'opérateur  $U$  est continu de  $W^{(m_1)_+, p} \times W^{(m_2)_+, q} \times BS^{m_1, m_2}$  dans  $L^r$ , pour tous entiers  $m_1, m_2$ . Les espaces de Sobolev  $W^{(m_1)_+, p}$  et  $W^{(m_2)_+, q}$  s'interpolent entre eux, c'est à dire que pour tout  $\theta \in ]0, 1[$  (avec les notations de l'interpolation complexe)

$$[W^{(m_1)_+, p}, W^{(m_1+1)_+, p}]_\theta = W^{(m_1+\theta)_+, p} \quad [W^{(m_2)_+, q}, W^{(m_2+1)_+, q}]_\theta = W^{(m_2+\theta)_+, q}$$

étant donné que  $1 < p, q < \infty$ . De même les classes de symboles s'interpolent entre elles :

$$[BS^{m_1, m_2}, BS^{m_1+1, m_2+1}]_\theta = BS^{m_1+\theta, m_2+\theta} \quad [BS^{m_1, m_2}, BS^{m_1+1, m_2}]_\theta = BS^{m_1+\theta, m_2}.$$

Par conséquent, en utilisant l'interpolation bilinéaire <sup>8</sup> sur l'exposant  $m_1$ , on obtient que  $U$  est continu de  $W^{(m_1+\theta)_+, p} \times W^{m_2, q} \times BS^{m_1+\theta, m_2}$  dans  $L^r$  et ce pour tous entiers  $m_1, m_2$  et  $\theta \in ]0, 1[$ . On réitère l'interpolation sur l'exposant  $m_2$  et le résultat général souhaité est donc démontré.  $\square$

**Remarque 2.2.8.** *Il est intéressant de remarquer que pour le cas de symboles d'ordre négatif (même un entier négatif), on a une perte de régularité, mais on ne peut espérer une meilleure continuité. C'est exactement le même problème que pour l'inégalité de Hölder dans les espaces de Sobolev, qui s'écrit :*

$$\|fg\|_{W^{m, r}} \lesssim \|f\|_{W^{m_+, p}} \|g\|_{W^{m_+, q}}.$$

Par exemple pour  $m = -1$  on vérifie que pour tout  $s \in ]1, \infty[$ , il existe une constante  $C_s$  telle que

$$\forall \phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \|\phi_t\|_{W^{-1, s}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} C_s |\phi(0)|,$$

avec  $\phi_t(x) := t^{-1}\phi(x/t)$ . Ainsi si l'estimation

$$\forall f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \|fg\|_{W^{-1, r}} \lesssim \|f\|_{W^{-1, p}} \|g\|_{W^{-1, q}} \tag{2.43}$$

était vérifiée, on aurait alors

$$\limsup_{t \rightarrow 0} t^{-1} \|(\phi^2)_t\|_{W^{-1, r}} = \limsup_{t \rightarrow 0} \|(\phi_t)^2\|_{W^{-1, r}} \lesssim \limsup_{t \rightarrow 0} \|\phi_t\|_{W^{-1, p}} \|\phi_t\|_{W^{-1, q}} \simeq |\phi(0)|^2,$$

ce qui est faux si  $\phi(0) \neq 0$ . Par conséquent l'estimation (2.43) ne peut être vraie.

---

<sup>8</sup>La théorie de l'interpolation multi-linéaire est étudiée dans le chapitre 4 de [27] pour l'interpolation réelle et le théorème 4.4.1 de [4] pour l'interpolation complexe.

Nous allons étendre ces résultats de continuité sur les espaces de Sobolev.

**Théorème 2.2.9.** *Soit  $\sigma \in BS^{m_1, m_2}$  un symbole d'ordre  $(m_1, m_2)$ . Alors pour tous exposants  $p, q \in ]1, \infty[$  vérifiant*

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2},$$

pour tout entier  $n > 0$  :

$$\forall f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \|D^{(n)}T_\sigma(f, g)\|_{L^r} \lesssim \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}} \|D^{(i)}f\|_{W^{(m_1)_+, p}} \|D^{(j)}g\|_{W^{(m_2)_+, q}}. \quad (2.44)$$

On a noté  $D^{(i)}$  l'opérateur de dérivée d'ordre  $i$ . Par conséquent, pour tout  $s \geq 0$ ,  $T_\sigma$  est continu de  $W^{s+(m_1)_+, p} \times W^{s+(m_2)_+, q}$  dans  $W^{s, r}$ .

**Démonstration :** Commençons par montrer (2.44). Les deux fonctions  $f$  et  $g$  sont régulières, par conséquent l'intégrale définissant l'opérateur  $T_\sigma$  converge :

$$T_\sigma(f, g)(x) = \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Dérivons selon la variable  $x$  :

$$\begin{aligned} D^{(1)}T_\sigma(f, g)(x) &= \\ & i \int e^{ix(\alpha+\beta)} \alpha \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta + i \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \beta \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & \quad + \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) [\partial_x \sigma](x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{D^{(1)}f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta + \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{D^{(1)}g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & \quad + \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) [\partial_x \sigma](x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

L'interversion de l'intégrale et de la dérivation est bien justifiée, étant donné que les symboles  $\sigma$  et  $\partial_x \sigma$  sont à croissance polynomiale, et les fonctions  $\widehat{f}, \widehat{g}$  sont à décroissance rapide. De ce fait, on obtient l'égalité suivante :

$$D^{(1)}T_\sigma(f, g) = T_\sigma(D^{(1)}f, g) + T_\sigma(f, D^{(1)}g) + T_{\partial_x \sigma}(f, g).$$

Par récurrence, on montre que l'on obtient la formule suivante à l'ordre  $n$  :

$$D^{(n)}T_\sigma(f, g) = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} T_{\partial_x^k \sigma}(D^{(i)}f, D^{(j)}g).$$

Étant donné que la famille  $(\partial_x^k \sigma)_{0 \leq k \leq n}$  est bornée dans  $BS^{m_1, m_2}$ , en utilisant le théorème précédent, on obtient bien l'inégalité (2.44). Cette inégalité implique une estimation "un peu plus faible" :

$$\forall f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \|D^{(n)}T_\sigma(f, g)\|_r \lesssim \|f\|_{W^{n+(m_1)_+, p}} \|g\|_{W^{n+(m_2)_+, q}}.$$

On peut ainsi étendre par densité, l'opérateur  $T_\sigma$  en un opérateur continu de  $W^{n+(m_1)_+, p} \times W^{n+(m_2)_+, q}$  dans  $W^{n, r}$ . Puis par interpolation, ce résultat de continuité s'étend sur tous les espaces de Sobolev intermédiaires avec  $n$  positif non entier par le même principe que précédemment.  $\square$

**Remarque 2.2.10.** *En changeant la définition de l'opérateur  $T_\sigma$  (2.41), par :*

$$T_\sigma(f, g)(x) = \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \tan(\theta)\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

le théorème précédent s'adapte automatiquement avec une borne de continuité qui dépend de  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[ - \{0, -\pi/4\}$  et diverge pour  $\theta = 0, -\pi/4$  et  $\pm\pi/2$ . Par la correspondance entre les classes de symboles, on généralise donc le résultat avec un symbole  $\sigma \in BS_\theta^{m_1, m_2}$  et  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[ - \{0, -\pi/4\}$ . De même tous ces résultats s'appuient sur l'estimation "hors-diagonale" du théorème 2.1.25, qui autorise aussi les classes de symboles  $BS_{1,\theta}^{m_1, m_2}$  et  $BS_{2,\theta}^{m_1, m_2}$ .

Nous allons maintenant dans la prochaine sous-section étudier l'action de la dualité et de la composition sur les opérateurs pseudo-différentiels.

### 2.2.3 Calcul fonctionnel sur les opérateurs bilinéaires.

#### Étude de l'action de la dualité.

Les opérateurs étudiés précédemment correspondent au cas  $\theta = \pi/4$ . Comme nous l'avons dit, la méthode s'adapte de manière identique pour  $\theta$  quelconque sous la condition  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[ - \{0, -\pi/4\}$ . Ces limitations proviennent de l'application du théorème 2.1.25 (qui utilise les techniques temps-fréquence de la première section). L'introduction de ce déphasage  $\theta$ , permet d'étudier l'action de la transposée sur ces opérateurs bilinéaires.

**Définition 2.2.11.** *Soit  $T$  un opérateur bilinéaire continu de  $\mathbf{S}(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ . On note  $T^{*1}$  et  $T^{*2}$  les deux opérateurs bilinéaires transposés :*

$$\forall f, g, h \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^d) \quad \langle T(f, g), h \rangle = \langle T^{*1}(h, g), f \rangle = \langle T^{*2}(f, h), g \rangle.$$

Commençons par rappeler l'action de la dualité dans le cadre linéaire (voir [1]) :

**Proposition 2.2.12.** *Soit  $\tau \in S^t$  un symbole linéaire, on associe alors l'opérateur pseudo-différentiel linéaire  $\tau(x, D)$  défini par :*

$$\forall f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \tau(x, D)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \tau(x, \xi) d\xi.$$

Dans ce cas cet opérateur admet un adjoint et  $\tau(x, D)^* = \tau^*(x, D)$  avec

$$\tau^*(x, \xi) = (2\pi)^{-1} \iint e^{-iy\eta} \overline{\tau(x - y, \xi - \eta)} dy d\eta.$$

On a alors la formulation asymptotique suivante : pour tout entier  $N$ ,

$$\tau^*(x, \xi) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_\xi^k \partial_x^k \overline{\tau(x, \xi)} \in S^{t_1 - N}.$$

Dans le cadre bilinéaire, on obtient la version suivante :

**Théorème 2.2.13.** *Soient  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ , et  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[-\{0, -\pi/4\}$ . Si  $\sigma \in BS_\theta^{m_1, m_2}$  alors  $T_\sigma^{*1} = T_{\sigma_1^*}$  avec  $\sigma_1^* \in BS_{1, \theta^{*1}}^{m_1, m_2}$  et  $T_\sigma^{*2} = T_{\sigma_2^*}$  avec  $\sigma_2^* \in BS_{2, \theta^{*2}}^{m_1, m_2}$  où les deux angles  $\theta^{*1}$  et  $\theta^{*2}$  sont définis par :*

$$\cot(\theta) + \cot(\theta^{*1}) = -1 \quad \text{et} \quad \tan(\theta) + \tan(\theta^{*2}) = -1,$$

et donc  $\theta^{*1}, \theta^{*2} \in ]-\pi/2, \pi/2[-\{0, -\pi/4\}$ . On a les relations exactes :

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, -\alpha - \eta, \eta)} e^{-i(z-\xi)(x-y)} dy d\alpha \\ \sigma_2^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, \xi, -\alpha - \xi)} e^{-i(\alpha-\eta)(x-y)} dy d\alpha. \end{aligned}$$

De plus on a les formules asymptotiques sur ces nouveaux symboles :

$$\forall N \geq 0, \quad \sigma_1^*(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\alpha^k \overline{\sigma(x, -\xi - \eta, \eta)} \in BS_{1, \theta^{*1}}^{m_1 - N, m_2}$$

et

$$\forall N \geq 0, \quad \sigma_2^*(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\beta^k \overline{\sigma(x, \xi, -\eta - \xi)} \in BS_{2, \theta^{*2}}^{m_1, m_2 - N}.$$

**Démonstration :** La démonstration est en partie faite dans le théorème 4 de [3] pour des symboles généraux. Il est montré que  $T^{*1}$  et  $T^{*2}$  sont associés aux symboles  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  donnés par :

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, -\alpha - \eta, \eta)} e^{-i(\alpha-\xi)(x-y)} dy d\alpha \\ \sigma_2^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, \xi, -\alpha - \xi)} e^{-i(\alpha-\eta)(x-y)} dy d\alpha. \end{aligned}$$

Nous allons étudier le premier symbole  $\sigma_1^*$ , l'étude du deuxième étant identique.

1-) Etude du symbole  $\sigma_1^*$ .

Il nous faut donc montrer que  $\sigma_1^*$  est bien défini dans l'espace  $BS_{1, \theta^{*1}}^{m_1, m_2}$ . La relation formelle donnée auparavant fait intervenir une intégrale oscillante, qui s'analyse grâce au résultat suivant (paragraphe I.8.1 de [1]) :

**Lemme 2.2.14.** *Pour tout exposant  $m \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C = C(m)$  telle que :*

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iy\alpha} a(y, \alpha) dy d\alpha \right| \leq C \|a\|_{\mathbb{A}^m}$$

avec la norme suivante :

$$\|a\|_{\mathbb{A}^m} := \sup_{0 \leq j, l} \sup_{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^2} (1 + |y| + |\alpha|)^{-m} |\partial_y^j \partial_\alpha^l a(y, \alpha)|.$$

On effectue un changement de variable pour obtenir :

$$\sigma_1^*(x, \xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(x - y, \alpha - \xi - \eta, \eta)} e^{i\alpha y} dy d\alpha.$$

De plus il est montré dans [1] que l'on peut dériver formellement les intégrales oscillantes. Ainsi en appliquant le lemme précédent, on a l'estimation suivante :

$$|\partial_x^a \partial_\xi^b \partial_{\eta-\xi}^c \sigma_1^*(x, \xi, \eta)| \lesssim \left\| \partial_x^a \partial_\xi^b \partial_{\eta-\xi}^c \sigma(x-y, \alpha-\xi-\eta, \eta) \right\|_{(y, \alpha), \mathbb{A}^{|m_1|+|m_2|}}.$$

Or d'après les propriétés du symbole  $\sigma$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_x^a \partial_\xi^b \partial_{\eta-\xi}^c \sigma(x-y, \alpha-\xi-\eta, \eta) \right\|_{(y, \alpha), \mathbb{A}^{|m_1|+|m_2|+b+c}} \\ & := \sup_{0 \leq j, l} \sup_{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^2} (1+|y|+|\alpha|)^{-(|m_1|+|m_2|+b+c)} \left| \partial_x^a \partial_\xi^b \partial_{\eta-\xi}^c \partial_y^j \partial_\alpha^l \sigma(x-y, \alpha-\xi-\eta, \eta) \right| \\ & \lesssim \sup_{0 \leq j, l} \sup_{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^2} (1+|y|+|\alpha|)^{-|m_1|-|m_2|-b-c} (1+|\alpha-\xi-\eta|)^{m_1} (1+|\eta|)^{m_2} \\ & \quad (1+\min\{|\alpha-\xi-\eta|, |\eta-\tan(\theta)(\alpha-\xi-\eta)|\})^{-b} (1+\min\{|\eta|, |\eta-\tan(\theta)(\alpha-\xi-\eta)|\})^{-c} \\ & \lesssim (1+|\xi+\eta|)^{m_1} (1+|\eta|)^{m_2} (1+\min\{|\xi+\eta|, |\eta-\tan(\theta)(-\xi-\eta)|\})^{-b} \\ & \quad (1+\min\{|\eta|, |\eta-\tan(\theta)(-\xi-\eta)|\})^{-c} \\ & \lesssim (1+|\xi+\eta|)^{m_1} (1+|\eta|)^{m_2} (1+\min\{|\xi+\eta|, |\eta-\tan(\theta)/(1+\tan(\theta))\xi|\})^{-b} \\ & \quad (1+\min\{|\eta|, |\eta+\tan(\theta)/(1+\tan(\theta))\xi|\})^{-c} \\ & \lesssim (1+|\xi+\eta|)^{m_1} (1+|\eta|)^{m_2} (1+\min\{|\xi+\eta|, |\eta-\tan(\theta^*)\xi|\})^{-b} \\ & \quad (1+\min\{|\eta|, |\eta-\tan(\theta^*)\xi|\})^{-c}. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé l'inégalité de Peetre, à savoir :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1+|a-b|)^s \leq (1+|a|)^{|s|} (1+|b|)^s \quad (2.45)$$

et la définition de l'angle  $\theta^*$ . On obtient donc l'estimation :

$$\begin{aligned} |\partial_x^a \partial_\xi^b \partial_{\eta-\xi}^c \sigma_1^*(x, \xi, \eta)| & \lesssim (1+|\xi+\eta|)^{m_1} (1+|\eta|)^{m_2} \\ & (1+\min\{|\xi+\eta|, |\eta-\tan(\theta^*)\xi|\})^{-b} (1+\min\{|\eta|, |\eta-\tan(\theta^*)\xi|\})^{-c}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Cette estimation nous donne exactement que  $\sigma_1^* \in BS_{1, \theta^*}^{m_1, m_2}$ .

2-) Formule asymptotique.

Pour montrer la formule asymptotique, on utilise exactement la même méthode que pour le cas linéaire : on effectue un développement limité de  $\sigma$ . Par un développement limité avec reste intégral, en reprenant la preuve de [1], on montre que

$$\sigma_1^*(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\alpha^k \overline{\sigma(x, -\xi-\eta, \eta)}$$

correspond à un symbole du même type que le précédent d'ordre  $(m_1 - N, m_2)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Ici on a montré que d'un point de vue fonctionnel, les classes duales de  $BS_\theta^{m_1, m_2}$  correspondent à  $BS_{1, \theta^*}^{m_1, m_2}$  et  $BS_{2, \theta^{*2}}^{m_1, m_2}$ . De même on a la réciproque :

**Théorème 2.2.15.** *Pour  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ , soit  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[-\{0, -\pi/4\}$ , si  $\sigma \in BS_{1, \theta}^{m_1, m_2}$  alors  $T_\sigma^{*1} = T_{\sigma_1^*}$  avec  $\sigma_1^* \in BS_{1, \theta^*}^{m_1, m_2}$  et  $T_\sigma^{*2} = T_{\sigma_2^*}$  avec  $\sigma_2^* \in BS_{1, \theta^{*2}}^{m_1, m_2}$  où les deux angles  $\theta^*$  et  $\theta^{*2}$  sont définis par :*

$$\cot(\theta) + \cot(\theta^*) = -1 \quad \text{et} \quad \tan(\theta) + \tan(\theta^{*2}) = -1,$$



et donc  $\theta^{*1}, \theta^{*2} \in ]-\pi/2, \pi/2[-\{0, -\pi/4\}$ . On a les relations exactes :

$$\begin{aligned}\sigma_1^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, -\alpha - \eta, \eta)} e^{-i(z-\xi)(x-y)} dy d\alpha \\ \sigma_2^*(x, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\sigma(y, \xi, -\alpha - \xi)} e^{-i(\alpha-\eta)(x-y)} dy d\alpha.\end{aligned}$$

De plus on a la formule asymptotique sur ces nouveaux symboles :

$$\forall N \geq 0, \quad \sigma_1^*(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\alpha^k \overline{\sigma(x, -\xi - \eta, \eta)} \in BS_{\theta^{*1}}^{m_1-N, m_2}$$

et

$$\forall N \geq 0, \quad \sigma_2^*(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\beta^k \overline{\sigma(x, \xi, -\eta - \xi)} \in BS_{1, \theta^{*2}}^{m_1, m_2-N}.$$

Et de même pour l'étude des deux espaces duaux associés à un symbole de  $BS_{2, \theta}^{m_1, m_2}$ . Ainsi on a montré la correspondance exacte par dualité entre ces différentes classes de symboles. On peut résumer les théorèmes précédents dans les égalités fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}(BS_{\theta}^{m_1, m_2})^{*1} &= BS_{1, \theta^{*1}}^{m_1, m_2} \\ (BS_{\theta}^{m_1, m_2})^{*2} &= BS_{2, \theta^{*2}}^{m_1, m_2} \\ (BS_{1, \theta}^{m_1, m_2})^{*1} &= BS_{\theta^{*1}}^{m_1, m_2} \\ (BS_{1, \theta}^{m_1, m_2})^{*2} &= BS_{1, \theta^{*2}}^{m_1, m_2} \\ (BS_{2, \theta}^{m_1, m_2})^{*1} &= BS_{2, \theta^{*1}}^{m_1, m_2} \\ (BS_{2, \theta}^{m_1, m_2})^{*2} &= BS_{\theta^{*2}}^{m_1, m_2}.\end{aligned}$$

Après avoir étudié l'action de la dualité, nous allons étudier l'action de la composition sur ces opérateurs bilinéaires.

### Étude de la composition des opérateurs pseudo-différentiels.

On rappelle quelques résultats sur le calcul symbolique linéaire (voir [1]). Soit  $\tau \in S^t$  un symbole linéaire. L'opérateur pseudo-différentiel linéaire  $\tau(x, D)$  associé est défini par :

$$\forall f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad \tau(x, D)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \tau(x, \xi) d\xi.$$

**Proposition 2.2.16.** Soient  $\tau_1 \in S^{t_1}$  et  $\tau_2 \in S^{t_2}$  deux symboles linéaires. Alors l'opérateur composé  $\tau_1(x, D) \circ \tau_2(x, D)$  est l'opérateur  $\sigma(x, D)$  avec le symbole  $\sigma \in S^{t_1+t_2}$  donné par :

$$\sigma(x, \xi) = (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\eta} \tau_1(x, \xi - \eta) \tau_2(x - y, \eta) dy d\eta.$$

On a alors la formulation asymptotique suivante : pour tout entier  $N$ ,

$$\sigma(x, \xi) - \sum_{\alpha=0}^{N-1} \frac{i^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau_1(x, \xi) \partial_x^\alpha \tau_2(x, \xi) \in S^{t_1+t_2-N}$$

Nous allons étudier la composition symbolique entre un opérateur bilinéaire et deux opérateurs linéaires à droite, on obtient alors la version bilinéaire du résultat précédent :

**Théorème 2.2.17.** *Soit  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et  $\sigma$  un symbole bilinéaire de  $BS_\theta^{m_1, m_2}$ . Soient  $\tau_1 \in S^{t_1}$  et  $\tau_2 \in S^{t_2}$  deux symboles linéaires d'ordre  $t_1$  et  $t_2$ . Alors l'opérateur composé*

$$T(f, g) := T_\sigma(\tau_1(x, D)f, \tau_2(x, D)g)$$

correspond à un opérateur  $T_m$  avec  $m$  un symbole bilinéaire de  $BS_\theta^{m_1+t_1, m_2+t_2}$  donné par :

$$m(x, \xi, \eta) := (2\pi)^{-2} \iiint_{\mathbb{R}^4} e^{i(x-y)(\alpha-\xi)+i(x-z)(\beta-\eta)} \sigma(x, \alpha, \beta) \tau_1(y, \xi) \tau_2(z, \eta) d\eta dz d\xi dy.$$

Ce symbole vérifie la formule asymptotique suivante :

$$\forall P, N \geq 0, \quad m(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^P \frac{i^k i^j}{k! j!} \partial_x^k \tau_1(x, \xi) \partial_x^j \tau_2(x, \eta) \partial_\xi^k \partial_\eta^j \sigma(x, \xi, \eta) \in BS_\theta^{m_1+t_1-N, m_2+t_2-P}.$$

**Démonstration :** Par souci de simplification de la preuve (qui est déjà assez technique), nous allons montrer le résultat précédent pour  $\theta = \pi/4$ . Par définition, on a pour  $l \in \{1, 2\}$  :

$$\tau_l(x, D)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \tau_l(x, \xi) d\xi$$

et :

$$T_\sigma(f, g)(x) := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \sigma(x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Par conséquent, en composant on obtient l'expression suivante de  $T$  :

$$\begin{aligned} T(f, g)(x) &:= (2\pi)^{-2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \sigma(x, \alpha, \beta) \left( \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha y} e^{iy\xi} \widehat{f}(\xi) \tau_1(y, \xi) d\xi dy \right) \\ &\quad \left( \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\beta z} e^{iz\eta} \widehat{g}(\eta) \tau_2(z, \eta) d\eta dz \right) d\alpha d\beta \\ &= (2\pi)^{-2} \iint_{\mathbb{R}^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \sigma(x, \alpha, \beta) e^{-i\alpha y} e^{iy\xi} \widehat{f}(\xi) \tau_1(y, \xi) e^{-i\beta z} e^{iz\eta} \widehat{g}(\eta) \\ &\quad \tau_2(z, \eta) d\eta dz d\xi dy d\alpha d\beta \\ &= (2\pi)^{-2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\xi+\eta)} m(x, \xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

avec  $m$  le symbole défini par :

$$m(x, \xi, \eta) := (2\pi)^{-2} \iiint_{\mathbb{R}^4} e^{i(x-y)(\alpha-\xi)+i(x-z)(\beta-\eta)} \sigma(x, \alpha, \beta) \tau_1(y, \xi) \tau_2(z, \eta) d\alpha dz d\beta dy.$$

Il nous reste donc à montrer que cette formule a bien un sens et définit un symbole  $m \in BS^{m_1+t_1, m_2+t_2}$ . Par changement de variables, on réécrit  $m$  sous la forme :

$$m(x, \xi, \eta) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{iy\alpha+iz\beta} \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_1(x - y, \xi) \tau_2(x - z, \eta) d\beta dz d\alpha dy.$$

Cet objet fait apparaître les mêmes intégrales oscillantes que dans le cas linéaire. On utilise le lemme 2.2.14 en regroupant les termes selon :

$$m(x, \xi, \eta) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iy\alpha} \tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha) dy d\alpha$$

avec

$$\lambda_{x,\eta}(\alpha) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iz\beta} \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_2(x - z, \eta) dz d\beta.$$

Il nous faut donc contrôler la fonction  $\lambda$  ainsi que ses dérivées par rapport à  $\alpha$ .

1-) **Estimation de  $\lambda$ .**

Il nous faut étudier les dérivées de  $\lambda_{x,\eta}$ . Or  $\lambda_{x,\eta}$  est définie comme une intégrale oscillante que l'on peut dériver formellement. En utilisant le lemme 2.2.14, on obtient donc la majoration suivante, pour  $a \geq 0$  :

$$|\partial_\alpha^a \lambda_{x,\eta}(\alpha)| \lesssim \|\partial_\alpha^a \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_2(x - z, \eta)\|_{(z,\beta), \mathbb{A}^{|m_2|+|m_1|+a}}.$$

Par définition cette norme correspond à :

$$\begin{aligned} & \|\partial_\alpha^a \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_2(x - z, \eta)\|_{(z,\beta), \mathbb{A}^{|m_2|+|m_1|+a}} = \\ & \sup_{0 \leq j,l} \sup_{(z,\beta) \in \mathbb{R}^2} (1 + |z| + |\beta|)^{-|m_2|-|m_1|-a} |\partial_\alpha^a \partial_z^j \partial_\beta^l \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_2(x - z, \eta)|. \end{aligned}$$

Or par définition des classes de symboles, on a :

$$\begin{aligned} & |\partial_\alpha^a \partial_\beta^l \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta)| \\ & \lesssim (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} (1 + |\eta - \beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta + \beta|\})^{-a} \\ & \qquad (1 + \min\{|\eta - \beta|, |\xi - \alpha - \eta + \beta|\})^{-l} \\ & \lesssim (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} (1 + |\eta - \beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta + \beta|\})^{-a}, \end{aligned}$$

et de même

$$|\partial_z^j \partial_\beta^l \tau_2(x - z, \eta)| \lesssim (1 + |\eta|)^{t_2}.$$

Par conséquent, on obtient l'estimation suivante de la norme :

$$\begin{aligned} & \|\partial_\alpha^a \sigma(x, \xi - \alpha, \eta - \beta) \tau_2(x - z, \eta)\|_{(z,\beta), \mathbb{A}^{|m_2|+|m_1|+a}} \\ & \lesssim \sup_{0 \leq j,l} \sup_{(z,\beta) \in \mathbb{R}^2} (1 + |z| + |\beta|)^{-|m_2|-|m_1|-a} (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} \\ & \qquad (1 + |\eta - \beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta + \beta|\})^{-a} (1 + |\eta|)^{t_2} \\ & \lesssim (1 + |\eta|)^{t_2} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta|\})^{-a} \\ & \qquad (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} (1 + |\eta|)^{m_2}. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé l'inégalité de Peetre (2.45). Ainsi on obtient les estimations :

$$\begin{aligned} & |\partial_\alpha^a \lambda_{x,\eta}(\alpha)| \lesssim \\ & (1 + |\eta|)^{t_2} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta|\})^{-a} (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} (1 + |\eta|)^{m_2}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ayant estimé  $\lambda_{x,\eta}$  et ses dérivées, nous allons pouvoir estimer le nouveau symbole  $m$ .

2-) **Estimation de  $m$ .**

On rappelle que  $m$  est défini par :

$$m(x, \xi, \eta) := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iy\alpha} \tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha) dy d\alpha.$$

Ainsi en utilisant le lemme 2.2.14, on obtient :

$$|m(x, \xi, \eta)| \lesssim \|\tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha)\|_{(y,\alpha), \mathbb{A}^{|m_1|+|m_2|}}.$$

Cette norme est égale à :

$$\|\tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha)\|_{(y,\alpha), \mathbb{A}^{|m_1|+|m_2|}} = \sup_{0 \leq j,l} \sup_{(y,\alpha) \in \mathbb{R}^2} (1 + |y| + |\alpha|)^{-|m_1|-|m_2|} |\partial_y^j \partial_\alpha^l \tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha)|.$$

En utilisant alors l'estimation (2.47) et l'inégalité de Peetre, de la même manière que précédemment, on obtient les estimations :

$$\|\tau_1(x - y, \xi) \lambda_{x,\eta}(\alpha)\|_{(y,\alpha), \mathbb{A}^{|m_1|}} \lesssim (1 + |\xi|)^{t_1} (1 + |\eta|)^{t_2} (1 + |\xi|)^{m_1} (1 + |\eta|)^{m_2}.$$

On obtient ainsi l'estimation désirée :

$$|m(x, \xi, \eta)| \lesssim (1 + |\xi|)^{t_1+m_1} (1 + |\eta|)^{m_2+t_2}$$

Pour estimer les dérivées de  $m$ , on peut dériver formellement les intégrales oscillantes. Dans ce cas par le même raisonnement, il est clair que les dérivées en  $x$  ne jouent aucun rôle. Chaque dérivée de  $m$  en  $\xi$  apporte un poids en  $(1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta + \beta|\})^{-1}$ . Les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont compensées par les normes  $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$  et donc il apparaît au final un poids  $(1 + \min\{|\xi|, |\xi - \eta|\})^{-1}$ . Il en est de même pour les dérivées en  $\eta$ . On obtient donc les estimations suivantes :

$$|\partial_x^a \partial_\xi^b \partial_\eta^c m(x, \xi, \eta)| \lesssim (1 + |\xi|)^{t_1+m_1} (1 + |\eta|)^{m_2+t_2} (1 + \min\{|\xi|, |\xi - \eta|\})^{-b} (1 + \min\{|\eta|, |\xi - \eta|\})^{-c}.$$

C'est exactement l'estimation qui nous assure que  $m \in BS^{m_1+t_1, m_2+t_2}$ .

3-) **Formule asymptotique.**

Pour la formule asymptotique, on utilise un développement limité de chaque symbole. Pour  $\lambda_{x,\eta}$ , en réutilisant les mêmes méthodes que pour le théorème linéaire, on obtient la formule asymptotique :

$$\lambda_{x,\eta}(\alpha) \simeq \sum_k \frac{i^k}{k!} \partial_\eta^k \sigma(x, \xi - \alpha, \eta) \partial_x^k \tau_2(x, \eta).$$

Cette relation signifie que pour tout entier  $N$ ,

$$\gamma_N := \lambda_{x,\eta}(\alpha) - \sum_{k \leq N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_\eta^k \sigma(x, \xi - \alpha, \eta) \partial_x^k \tau_2(x, \eta)$$

est une expression du même type que  $\lambda_{x,\eta}(\alpha)$  et vérifie :

$$\forall p \geq 0, \quad |\partial_\alpha^p \gamma_N| \lesssim (1 + |\eta|)^{t_2-N} (1 + \min\{|\xi - \alpha|, |\xi - \alpha - \eta|\})^{-p} (1 + |\xi - \alpha|)^{m_1} (1 + |\eta|)^{m_2}.$$

De ce fait, en réinsérant cette information dans  $m$ , et en effectuant la même opération sur l'autre couple de variable, on obtient la formulation asymptotique.  $\square$

Nous avons étudié la composition à droite, par dualité on obtient un résultat pour la composition à gauche :

**Théorème 2.2.18.** *Soit  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et  $\sigma$  un symbole bilinéaire de  $BS_{1,\theta}^{m_1,m_2}$ . Soit  $\tau \in S^t$  un symbole classique linéaire d'ordre  $t$ . Alors l'opérateur composé*

$$T(f, g) := \tau(x, D)T_\sigma(f, g)$$

correspond à un opérateur  $T_m$  avec  $m$  un symbole bilinéaire de  $BS_{1,\theta}^{m_1+t, m_2+t}$  donné par :

$$m(x, \xi, \eta) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)(\xi+\eta-\alpha)} \sigma(x, \xi, \eta) \tau(x, \alpha) dz d\alpha.$$

Ce symbole vérifie la formule asymptotique suivante :

$$\forall N \geq 0, \quad m(x, \xi, \eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^k}{k!} \partial_\xi^k \tau(x, \xi + \eta) \partial_x^k \sigma(x, \xi, \eta) \in BS_{1,\theta}^{m_1+t-N, m_2+t-N}.$$

De même pour la classe  $BS_{2,\theta}^{m_1,m_2}$ .

**Démonstration :** identique aux précédentes. On peut aussi la déduire du résultat précédent et du résultat de dualité (Théorème 2.2.13).  $\square$

**Remarque 2.2.19.** *La classe de symboles bilinéaires qui peuvent être composés à gauche est différente de celle des symboles qui peuvent être composés à droite. Il ne semble pas possible d'obtenir une même classe de symbole qui permettent les deux compositions.*

Nous avons présenté quelques résultats commençant ainsi l'étude d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire. Nous avons étudié le cas des opérateurs de la classe  $BS_\theta^{m_1,m_2}$ . De manière semblable au cas linéaire, on peut considérer d'autres classes de symboles : ce sont les  $BS_{\rho,\delta}^{m_1,m_2}$  décrites dans [3] et définies par :

$$BS_{\rho,\delta}^{m_1,m_2} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \left| \partial_x^\gamma \partial_\alpha^n \partial_\beta^p \sigma(x, \alpha, \beta) \right| \lesssim (1 + |\alpha|)^{m_1} (1 + |\beta|)^{m_2} (1 + \min\{|\alpha|, |\alpha - \beta|\})^{-\rho n + \delta \gamma} (1 + \min\{|\beta|, |\alpha - \beta|\})^{-\rho p + \delta \gamma} \right\}.$$

Peut-on obtenir les mêmes résultats de continuité (que ceux démontrés précédemment pour  $\rho = 1$  et  $\delta = 0$ ) pour ces classes de symboles ? Nous n'étudierons pas cette question ici. Dans la section suivante nous allons de nouveau utiliser l'estimation locale obtenue dans la première section pour obtenir des continuités sur les espaces de Lebesgue à poids.

## 2.3 Continuité des opérateurs bilinéaires sur les espaces à poids.

On rappelle que dans le cas linéaire, les propriétés des classes  $A_p$  des poids de Muckenhoupt permettent de montrer la continuité des opérateurs de Calderón-Zygmund

sur les espaces de Lebesgue à poids. Ces résultats sont essentiellement dus à l'étude de la fonction maximale "dièse" de Fefferman-Stein. Nous avons déjà remarqué que malheureusement il n'existait pas de généralisation à cette fonction maximale pour le cadre bilinéaire. Les poids  $A_p$  ne semblent pas adaptés. Nous allons définir une classe de poids adaptée et appliquer l'estimation "hors diagonale" pour obtenir des continuités à poids.

Commençons par définir les classes de poids :

**Définition 2.3.1.** Soit  $\theta > 0$  et  $l > 0$ , on définit la classe de poids  $\mathbb{P}_\theta(l)$  comme l'ensemble des fonctions  $\omega$  mesurables positives telles que pour tout  $I$  intervalle de longueur  $l$  et pour tout entier  $k \geq 0$ , on ait :

$$2^{-k\theta} \sup_{x \in I} \omega(x) \lesssim \inf_{2^k I} \omega(x). \quad (2.48)$$

Un poids  $\omega \in \mathbb{P}_\theta(l)$  est une fonction qui possède un comportement polynomial de degré inférieur à  $\theta$  et est "presque" constante à l'échelle  $l$ . La proposition suivante montre que ces classes ne sont pas vides.

**Proposition 2.3.2.** Pour tout  $\theta > 0$ , soit  $\alpha \in [0, \theta[$  alors les fonctions

$$x \rightarrow (1 + |x|)^\alpha \quad \text{et} \quad x \rightarrow (1 + |x|)^{-\alpha}$$

sont des poids de la classe  $\mathbb{P}_\theta(1)$ .

**Démonstration :**

1-) Soit  $f$  la fonction  $f(x) = (1 + |x|)^\alpha$ . Pour  $I$  un intervalle de longueur 1 :  $I = [z, z+1]$ , on a l'information suivante

$$\sup_{x \in I} f(x) \simeq (1 + |z|)^\alpha.$$

Pour  $J = 2^k I$ . Supposons d'abord que  $2^k \geq |z|$  alors  $0 \in J$  et donc :

$$\inf_J f(x) = 1.$$

Par conséquent, étant donné que  $0 \leq \alpha \leq \theta$ , on a bien :

$$2^{-k\theta} \sup_{x \in I} f(x) \lesssim \frac{(1 + |z|)^\alpha}{(1 + |z|)^\theta} \leq 1 = \inf_J f(x).$$

Dans le cas où  $2^k \leq |z|$  alors la borne inférieure  $J$  est estimée par :

$$\inf_J f(x) = (1 + |z| - 2^k)^\alpha.$$

Dans ce cas aussi il est clair que :

$$2^{-k\theta} \sup_{x \in I} f(x) \lesssim \frac{2^{k\theta}}{(1 + |z|)^\alpha} \leq (1 + |z| - 2^k)^\alpha \lesssim \inf_J f(x).$$

Cette dernière inégalité est due au fait que :

$$(1 + |z|)^\alpha \leq (1 + |z| - 2^k)^\alpha (1 + 2^k)^\alpha \lesssim (1 + |z| - 2^k)^\alpha 2^{k\theta}.$$

Ainsi on a bien montré l'estimation (2.48), montrant ainsi que  $f \in \mathbb{P}_\theta(1)$  pour  $\theta \geq \alpha$ .  
2-) Soit  $g$  la fonction  $g(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$ . De même pour  $I$  l'intervalle  $I = [z, z + 1]$ , on a :

$$\sup_{x \in I} g(x) \simeq (1 + |z|)^{-\alpha}.$$

Pour  $J = 2^k I$ , alors  $g$  atteint sa borne inférieure sur une des extrémités de  $J$  :

$$\inf_J f(x) = (1 + |z| + 2^k)^{-\alpha}.$$

Dans ce cas aussi il est clair que :

$$\frac{2^{k\theta}}{(1 + |z|)^\alpha} \leq \frac{1}{(1 + 2^k)^\alpha (1 + |z|)^\alpha} \lesssim \frac{1}{(1 + |z| + 2^k)^\alpha}.$$

On a donc bien montré la condition (2.48) pour la fonction  $g$ . □

Après avoir montré que cette définition des poids est non triviale, nous allons montrer des résultats de continuité sur les espaces de Lebesgue à poids.

Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $T$  un opérateur bilinéaire et  $0 < p, q, r < \infty$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad 1 \leq p, q.$$

*Supposons que  $T$  vérifie une estimation locale à l'échelle  $l$  : c'est à dire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $I$  intervalle de longueur  $l$ , on ait :*

$$\left( \int_I |T(f, g)|^r \right)^{1/r} \lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I} \right). \quad (2.49)$$

*Alors pour  $\omega \in \mathbb{P}_\theta(l)$  avec  $0 \leq \theta < \delta \max\{r, 1\}$ , l'opérateur  $T$  est continu de  $L^p(\omega) \times L^q(\omega)$  dans  $L^r(\omega)$ .*

**Démonstration :** Pour montrer une telle continuité, on décompose l'ensemble  $\mathbb{R}$  en intervalle disjoints  $I_i$  de longueur  $l$  et on a :

$$\|T(f, g)\|_{r, wdx} = \left\| \|T(f, g)\|_{r, wdx, I_i} \right\|_{r, i \in \mathbb{Z}}.$$

Les intervalles  $I_i$  sont définis par  $I_i = [il, (i + 1)l]$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ . Pour  $i \in \mathbb{Z}$  fixé, on utilise alors (2.48) et (2.49) :

$$\begin{aligned} \|T(f, g)\|_{r, wdx, I_i} &\leq \|w\|_{\infty, I_i} \|T(f, g)\|_{r, I_i} \\ &\lesssim \|w\|_{\infty, I_i}^{1/r} \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|f\|_{p, 2^k I_i} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|g\|_{q, 2^k I_i} \right) \\ &\lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} \|w\|_{\infty, I_i}^{1/p} \|f\|_{p, 2^k I_i} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} \|w\|_{\infty, I_i}^{1/q} \|g\|_{q, 2^k I_i} \right) \\ &\lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta)} 2^{k\theta/p} \inf_{2^k I_i} \omega^{1/p} \|f\|_{p, 2^k I_i} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta)} 2^{k\theta/q} \inf_{2^k I_i} \omega^{1/q} \|g\|_{q, 2^k I_i} \right) \\ &\lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p+\delta-\theta/p)} \|f\|_{p, wdx, 2^k I_i} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q+\delta-\theta/q)} \|g\|_{q, wdx, 2^k I_i} \right). \end{aligned}$$

Ainsi en resommant sur les intervalles  $I_i$ , on obtient :

$$\|T(f, g)\|_{r, wdx} \lesssim \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p + \delta - \theta/p)} \|f\|_{p, wdx, 2^k I_i} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q + \delta - \theta/q)} \|g\|_{q, wdx, 2^k I_i} \right) \right\|_{r, i \in \mathbb{Z}}.$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder et en utilisant l'inégalité de Minkowski pour  $1 \leq p, q$ , on a alors :

$$\|T(f, g)\|_{r, wdx} \lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p + \delta - \theta/p)} \left\| \|f\|_{p, wdx, 2^k I_i} \right\|_{p, i \in \mathbb{Z}} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q + \delta - \theta/q)} \left\| \|g\|_{q, wdx, 2^k I_i} \right\|_{q, i \in \mathbb{Z}} \right).$$

En utilisant le fait que les intervalles  $(2^k I_i)_i$  forment un  $2^k$ -recouvrement, on obtient :

$$\begin{aligned} \|T(f, g)\|_{r, wdx} &\lesssim \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/p + \delta - \theta/p)} 2^{k/p} \|f\|_{p, wdx} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1/q + \delta - \theta/q)} 2^{k/q} \|g\|_{q, wdx} \right) \\ &\lesssim \|f\|_{p, wdx} \|g\|_{q, wdx} \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(\delta - \theta/p)} \right) \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(\delta - \theta/q)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi étant donné que les exposants  $p, q$  sont supérieurs à 1, on a

$$\max \left\{ \frac{\theta}{p}, \frac{\theta}{q} \right\} \leq \begin{cases} \frac{\theta}{r} < \delta & \text{si } r \geq 1 \\ \theta < \delta & \text{si } r \leq 1 \end{cases}.$$

De ce fait les deux séries convergent et on obtient bien l'inégalité de continuité.  $\square$

**Remarque 2.3.4.** *Plus l'exposant  $\delta$  peut être choisi grand, plus la classe de poids est grande. Dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires étudié dans les sections précédentes, cet exposant  $\delta$  pouvait être choisi aussi grand que possible.*





# Chapitre 3

## Un point de vue plus géométrique.

### Sommaire

---

3.1	Des estimations géométriques particulières. . . . .	122
3.2	Des considérations générales. . . . .	130
3.3	Le cas de la concentration minimale. . . . .	136

---

Nous allons aborder l'étude des opérateurs multilinéaires par un point de vue plus géométrique, en estimant l'action de ces opérateurs sur les fonctions indicatrices. En utilisant la théorie sur l'interpolation réelle multilinéaire, des estimations de continuité sur les fonctions indicatrices pour une famille d'exposants suffisent pour en déduire des continuités fortes de l'opérateur  $T$  sur les espaces de Lebesgue.

Nous allons nous concentrer sur le cas bilinéaire unidimensionnel ( $d = 1$  et  $n = 3$ ), bien que certains résultats restent valables pour  $d > 1$  et  $n > 3$ . Rappelons qu'on cherche à établir la continuité de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  avec la relation d'homogénéité :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \tag{3.1}$$

et  $r > 1/2$ .

En utilisant le lemme de Fatou, l'étude sur les fonctions indicatrices se réduit à l'étude sur les fonctions indicatrices d'ensembles réguliers définis par :

**Définition 3.0.5.** *Un ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  est dit régulier s'il existe une partition finie de  $E$  en intervalles  $E_i$ .*

Nous allons tout d'abord commencer par l'étude de l'action des opérateurs sur les fonctions indicatrices d'intervalles. Puis nous essaierons d'étendre les inégalités de continuité aux fonctions indicatrices d'ensembles réguliers.

Nous tenons à préciser que cette partie de la thèse n'est pas complète dans le sens où nous n'obtenons pas de résultat final satisfaisant. Comme nous allons le voir, ces arguments géométriques permettent d'obtenir des estimations de continuité pour  $r > 1/2$  dans certains cas particuliers. Nous pensons qu'il faudrait incorporer des informations plus géométriques à l'analyse temps-fréquence étudiée dans le chapitre précédent dans le but d'améliorer les résultats actuels.

### 3.1 Des estimations géométriques particulières.

Nous allons tout d'abord mesurer l'action de la transformée de Hilbert bilinéaire et de l'opérateur maximal bilinéaire sur des fonctions indicatrices :

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles disjoints alors pour tout exposant  $1 \leq r < p, q < \infty$  tel que :*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

on a l'estimation

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_r \lesssim \frac{|E|^{\frac{r+1}{p}} |F|^{\frac{r+1}{q}}}{d(E, F)}.$$

La transformée de Hilbert bilinéaire et la fonction maximale bilinéaire sont toutes les deux bornées par cet opérateur, donc vérifient aussi cette estimation.

**Démonstration :** On décompose

$$t = \frac{1}{2} [(x+t) - (x-t)].$$

Par conséquent dans l'intégrale la variable  $t$  vérifie  $|t| \geq d(E, F)$ . On obtient donc l'estimation :

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_r \lesssim \frac{1}{d(E, F)} \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) dt \right\|_r.$$

Le résultat souhaité vient de l'inégalité de Young sur la convolution :

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) dt \right\|_r \lesssim |E|^{(r+1)/p} |F|^{(r+1)/q}.$$

On a donc bien montré l'estimation. □

**Proposition 3.1.2.** *Si  $E$  et  $F$  sont des intervalles, on a une meilleure estimation :*

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 \simeq \min\{|E|, |F|\} \log \left( 1 + \frac{\max\{|E|, |F|\}}{d(E, F) + \min\{|E|, |F|\}} \right).$$

**Démonstration :** Par changement de variable, on a :

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 = \iint \mathbf{1}_E(u) \mathbf{1}_F(v) \frac{dudv}{|u-v|}.$$

1-) L'inégalité  $\lesssim$  dans l'équivalence.

Si  $E$  et  $F$  sont des intervalles, supposons par symétrie que  $|E| \leq |F|$ . Traitons le cas où  $d(E, F) \geq |E|$ . Alors pour  $u$  fixé dans  $E$  on a (en utilisant que les intervalles sont disjoints) :

$$\int_{v \in F} \frac{dv}{|u-v|} \leq \int_{d(E, F)}^{d(E, F) + |F| + |E|} \frac{dt}{t} = \log \left( 1 + \frac{|E| + |F|}{d(E, F)} \right).$$

On intègre cette estimation en  $u$  sur  $E$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 &\lesssim |E| \log \left( 1 + \frac{2|F|}{d(E, F)} \right) \\ &\lesssim \min\{|E|, |F|\} \log \left( 1 + \frac{\max\{|E|, |F|\}}{d(E, F)} \right) \\ &\lesssim \min\{|E|, |F|\} \log \left( 1 + \frac{\max\{|E|, |F|\}}{d(E, F) + |E|} \right). \end{aligned}$$

On a utilisé à la dernière ligne le fait que  $d(E, F) \geq |E|$ . Il nous reste le cas où  $d(E, F) \leq |E|$ . Dans ce cas, pour  $u$  fixé dans  $E$  on a :

$$\int_{v \in F} \frac{dv}{|u-v|} = \int_{d(E, F) + d(u, E^c)}^{d(E, F) + |F| + d(u, E^c)} \frac{dt}{t} = \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + d(u, E^c)} \right).$$

On intègre cette estimation en  $u$  sur  $E$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 &= \int_0^{|E|} \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + x} \right) dx \quad (3.2) \\ &= \left[ (d(E, F) + x + |F|) (\log(d(E, F) + x + |F|) - 1) - (d(E, F) + x) (\log(d(E, F) + x) - 1) \right]_0^{|E|} \\ &= \left[ (d(E, F) + |E| + |F|) (\log(d(E, F) + |E| + |F|) - 1) - (d(E, F) + |F|) (\log(d(E, F) + |F|) - 1) \right] \\ &\quad - \left[ (d(E, F) + |E|) (\log(d(E, F) + |E|) - 1) - (d(E, F)) (\log(d(E, F)) - 1) \right] \\ &= |E| \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + |E|} \right) + |F| \log \left( 1 + \frac{|E|}{d(E, F) + |F|} \right) \dots \\ &\quad + d(E, F) \log \left( \frac{d(E, F) [d(E, F) + |E| + |F|]}{[d(E, F) + |E|] [d(E, F) + |F|]} \right). \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à ce que l'on veut. On majore le deuxième terme (en utilisant que  $|F| \geq |E|$  selon :

$$\begin{aligned} |F| \log \left( 1 + \frac{|E|}{d(E, F) + |F|} \right) &\leq \frac{|E||F|}{d(E, F) + |F|} \\ &\lesssim |E| \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + |F|} \right) \lesssim |E| \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + |E|} \right). \end{aligned}$$

Le troisième terme est négatif étant donné que :

$$\left( \frac{d(E, F) [d(E, F) + |E| + |F|]}{[d(E, F) + |E|] [d(E, F) + |F|]} \right) \leq 1.$$

Par conséquent dans le cas  $d(E, F) \leq |E|$ , on a bien estimé les trois termes par l'expression voulue. Nous allons montrer maintenant l'autre sens dans l'équivalence.

2-) L'inégalité  $\gtrsim$  dans l'équivalence.

On reprend l'égalité (3.2), le calcul étant valide dans le cas général.

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 = \int_0^{|E|} \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + x} \right) dx$$

On obtient alors en minorant sur l'intervalle d'intégration :

$$\left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_1 \geq |E| \log \left( 1 + \frac{|F|}{d(E, F) + |E|} \right).$$

On a donc bien montré les deux sens de l'équivalence.  $\square$

Nous allons maintenant mesurer la norme dans les espaces  $L^p$  pour deux intervalles :

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $E$  et  $F$  deux intervalles disjoints alors pour tout exposant  $0 < p < \infty$  avec  $p \neq 1$  :*

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{t} \right\|_p &= \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_p \\ &\gtrsim \min\{|E|, |F|\}^{1/p} \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{t} \right\|_p &= \left\| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+t) \mathbf{1}_F(x-t) \frac{dt}{|t|} \right\|_p \lesssim \min\{|E|, |F|\}^{1/p} \times \\ &\left[ \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right)^{1-1/p} \mathbf{1}_{p>1} + \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\max\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right)^{1-1/p} \mathbf{1}_{p<1} \right]. \end{aligned}$$

**Démonstration :** La première égalité vient du fait que  $E$  et  $F$  sont des intervalles disjoints donc ils sont séparés par un point : dans l'intégration le paramètre  $t$  est de signe constant. Le problème est invariant par translation et symétrie, on va donc se placer dans la situation de la figure suivante avec  $|E| \leq |F|$  :

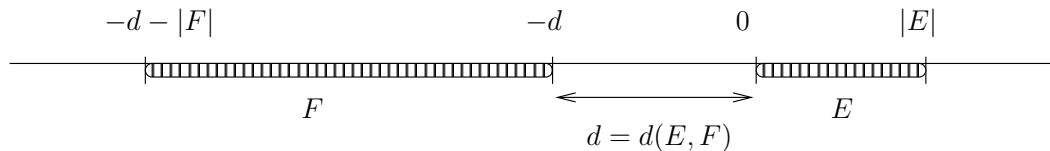


FIG. 3.1 – Les intervalles  $E$  et  $F$ .

En intégrant le paramètre  $t$ , le calcul explicite de la transformée de Hilbert bilinéaire nous donne :

$$\left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right| = \left| \log \left( \frac{\min(x, -d-x)}{\max(x - |E|, -|F| - d - x)} \right) \right| \mathbf{1}_{[-|F|-d, |E|-d]}(2x). \quad (3.3)$$

Il y a donc trois intervalles à distinguer :

1-) Le cas :  $-|F| - d \leq 2x \leq |E| - |F| - d$ . Dans ces conditions, (3.3) devient :

$$\left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right| = \log \left( \frac{-x}{x + d + |F|} \right).$$

Par changement de variable :  $u = -x/(x + d + |F|)$ , il vient :

$$\int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx = \int_{(|F|+d-|E|)/(|E|+|F|+d)}^1 |\log(u)|^p \frac{d + |F|}{(u + 1)^2} du.$$

Or la fonction  $\log(u)^p/(u+1)^2$  est intégrable sur  $[0, 1]$ . En utilisant un encadrement du  $\log$ , il existe des constantes telles que pour tout  $0 < x < 1$  :

$$c(1-x)^{p+1} \leq \int_x^1 |\log(u)|^p \frac{du}{(u+1)^2} \leq C(1-x)^{p+1}.$$

On obtient donc l'équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx &\simeq (d+|F|) \left( 1 - \frac{|F|+d-|E|}{|E|+|F|+d} \right)^{p+1} \\ &\simeq (d+|F|) \left( \frac{2|E|}{|E|+|F|+d} \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

On a supposé que  $|E| \leq |F|$ , donc on trouve :

$$\int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx \simeq |E| \left( \frac{|E|}{|F|+d} \right)^p. \quad (3.4)$$

2-) Le cas :  $|E| - |F| - d \leq 2x \leq -d$ . La relation (3.3) devient :

$$\left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right| = \log \left( \frac{x}{x-|E|} \right).$$

Par changement de variable :  $u = x/(x-|E|)$ , il vient :

$$\int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx = \int_{d/(d+2|E|)}^{-(|E|-|F|-d)/(|E|+|F|+d)} |\log(u)|^p \frac{|E|}{(u-1)^2} du.$$

Si  $p > 1$ , il existe un encadrement :

$$\forall x \in ]0, 1], \quad c(1-x)^{p-1} \leq \int_x^1 |\log(u)|^p \frac{du}{(1-u)^2} \leq C(1-x)^{p-1}.$$

On obtient donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx &\lesssim |E| \left( 1 - \frac{d}{2|E|+d} \right)^{p-1} \\ &\lesssim |E| \left( \frac{|E|}{|E|+d} \right)^{p-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si  $p < 1$ , on utilise l'estimation suivante :

$$\forall x \in ]0, 1], \quad c(1-x)^{p-1} \leq \int_0^x |\log(u)|^p \frac{du}{(1-u)^2} \leq C(1-x)^{p-1}$$

pour obtenir alors

$$\begin{aligned} \int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx &\lesssim |E| \left( 1 + \frac{|E|-|F|-d}{|E|+|F|+d} \right)^{p-1} \\ &\lesssim |E| \left( \frac{|E|}{|F|+d} \right)^{p-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3-) Le cas :  $-d \leq 2x \leq |E| - d$ . Dans ces conditions, (3.3) devient :

$$\left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right| = \log \left( \frac{x+d}{|E|-x} \right).$$

Par changement de variable :  $u = (x+d)/(|E|-x)$ , il vient :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx = \int_{d/(2|E|+d)}^1 |\log(u)|^p \frac{d+|E|}{(u+1)^2} du.$$

On obtient alors :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx \simeq (d+|E|) \left( 1 - \frac{d}{2|E|+d} \right)^{p+1}.$$

D'où l'équivalent :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx \simeq |E| \left( \frac{|E|}{|E|+d} \right)^p. \quad (3.7)$$

4-) Fin de la démonstration. En alliant les résultats (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7), on obtient bien :

$$|E| \left( \frac{|E|}{|E|+d} \right)^p \lesssim \int \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx$$

et

$$\int \left| \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right|^p dx \lesssim |E| \left[ \left( \frac{|E|}{|F|+d} \right)^{p-1} + \left( \frac{|E|}{|E|+d} \right)^{p-1} \right].$$

On a travaillé avec l'hypothèse  $|E| \leq |F|$ . Par conséquent, si  $p > 1$  le deuxième terme est dominant et si  $p < 1$  le premier terme est dominant, ce qui correspond bien à ce que l'on voulait montrer.  $\square$

Nous allons faire un travail similaire pour l'opérateur maximal bilinéaire  $T_*$  défini par :

$$T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x) := \sup_r \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) dt. \quad (3.8)$$

Pour déterminer sur quel rayon  $r(x)$  la borne supérieure est atteinte, on va utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3.1.4.** *Soit  $J$  un intervalle. Alors la borne supérieure*

$$\sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_J(t) dt$$

*est "presque atteinte" en  $r_0 = \sup\{|y|, y \in J\}$  dans le sens où :*

$$\sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_J(t) dt \leq 2 \frac{1}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \mathbf{1}_J(t) dt = \frac{|J|}{r_0}. \quad (3.9)$$

**Démonstration :** Nous allons séparer l'argument en plusieurs cas.

1-) Pour  $r > r_0$ .

Soit  $r > r_0$ , alors  $J$  étant inclus dans  $[-r_0, r_0]$ , il est clair que :

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_J(t) dt = \frac{r_0}{r} \frac{1}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \mathbf{1}_J(t) dt < \frac{1}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \mathbf{1}_J(t) dt.$$

Par conséquent la borne supérieure ne peut pas être atteinte pour des  $r > r_0$ .

2-) Pour  $r < r_0$ .

Soit  $r < r_0$ .  $J$  étant un intervalle,  $I = J \cap [-r, r]$  est de mesure strictement plus petite que  $J$ . On a alors :

$$\frac{1}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \mathbf{1}_J(t) = \frac{1}{2r_0} (|I| + |J \cap [-r, r]^c|).$$

Supposons que  $0 < |I| \leq r$  alors par définition de  $r_0$   $J \cap [-r, r]^c$  et connexité de  $J$ , il est clair que  $J \cap [-r, r]^c$  contient au moins un des deux intervalles  $[r, r_0]$  ou  $[-r_0, r]$ . De ce fait :

$$|J \cap [-r, r]^c| \geq (r_0 - r).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \mathbf{1}_J(t) &\geq \frac{1}{2r_0} (|I| + (r_0 - r)) \\ &\geq \frac{|I|}{2r} + |I| \left( \frac{1}{2r_0} - \frac{1}{2r} \right) + \frac{r_0 - r}{2r_0} \\ &\geq \frac{|I|}{2r} + \frac{(r_0 - r)(r - |I|)}{2rr_0} > \frac{|I|}{2r}. \end{aligned}$$

Par conséquent sous l'hypothèse  $|I| < r$  la borne supérieure ne peut pas être atteinte en  $r < r_0$ . Il nous reste donc le cas de  $r < r_0$  avec l'hypothèse  $|I| \geq r$ . Or  $J$  étant un intervalle, si  $|J \cap [-r, r]| \geq r$ , nécessairement  $0 \in \bar{J}$ . De ce fait, pour tout  $0 < r \leq r_0$  :

$$1/2 \leq \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_J(t) dt \leq 1. \quad (3.10)$$

Dans ce dernier cas, la borne supérieure est atteinte pour tout rayon  $r \leq \min\{|a|, |b|\}$ , où  $a$  et  $b$  sont les deux bornes de  $J$  et est égale à 1. Le rayon  $r_0$  vérifiant (3.10), l'inégalité (3.9) est bien vérifiée.  $\square$

**Proposition 3.1.5.** Soient  $E$  et  $F$  deux intervalles disjoints. Alors pour tout exposant  $0 < p < \infty$  avec  $p \neq 1$  :

$$\begin{aligned} \min\{|E|, |F|\}^{1/p} \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right) &\lesssim \|T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_p \lesssim \min\{|E|, |F|\}^{1/p} .. \\ .. \left[ \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\max\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right)^{1-1/p} \mathbf{1}_{p \leq 1} + \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right)^{1-1/p} \mathbf{1}_{p \geq 1} \right]. \end{aligned}$$



**Démonstration :** Par symétrie, on se place dans le cadre de la figure 3.1 avec  $|E| \leq |F|$  et  $d = d(E, F)$ .

1-) Le cas :  $-|F| - d \leq 2x \leq |E| - |F| - d$ . Dans ces conditions, les deux indicatrices obligent  $t$  à vivre dans l'intervalle :

$$-x - d - |F| \leq t \leq x \leq 0.$$

Par conséquent la borne supérieure en  $r$  est "presque" atteinte pour  $r(x) = \max\{|-x - d - |F||, |x|\} = |F| + d + x$  d'après le lemme précédent, on obtient donc :

$$\int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq \int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} \left( \frac{2x + d + |F|}{x + d + |F|} \right)^p dx.$$

On effectue le changement de variable  $u = \frac{2x+d+|F|}{x+d+|F|}$ , pour trouver :

$$\int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq \int_0^{|E|/(|E|+|F|+d)} \frac{(|F| + d)u^p}{(2 - u)^2} du.$$

La seconde borne de l'intégrale étant comprise entre 0 et 1/2 puisque  $|F| \geq |E|$ , l'intégrale converge sans problème et on a l'équivalent :

$$\int_{-(|F|+d)/2}^{(|E|-|F|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq (|F| + d) \left( \frac{|E|}{|E| + |F| + d} \right)^{p+1} \simeq |E| \left( \frac{|E|}{|F| + d} \right)^p. \quad (3.11)$$

2-) Le cas :  $|E| - |F| - d \leq 2x \leq -d$ . Dans cet intervalle, le produit des indicatrices est égal à :

$$\mathbf{1}_E(x - t)\mathbf{1}_F(x + t) = \mathbf{1}_{[x-|E|, x]}(t).$$

Par conséquent, la borne supérieure est "presque" atteinte pour  $r(x) = |E| - x$  étant donné que  $x$  est négatif. On a donc l'équivalent suivant :

$$\int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq \int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} \left( \frac{|E|}{|E| - x} \right)^p dx.$$

Ici on peut calculer directement l'intégrale, on trouve :

$$\int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq |E|^p \left| (|E| + |F| + d)^{1-p} - (2|E| + d)^{1-p} \right|.$$

On obtient selon le signe de  $p - 1$ , l'inégalité suivante :

$$\int_{(|E|-|F|-d)/2}^{-d/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \lesssim |E| \left[ \left( \frac{|E|}{|E| + |F| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p < 1} + \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p > 1} \right]. \quad (3.12)$$

3-) Le cas :  $-d \leq 2x \leq |E| - d$ . Le produit des indicatrices devient alors :

$$\mathbf{1}_E(x - t)\mathbf{1}_F(x + t) = \mathbf{1}_{[x-|E|, -d-x]}(t).$$

Par conséquent la borne supérieure est presque atteinte pour  $r(x) = |E| - x$  car  $-d - x \leq 0$ . On obtient donc l'équivalent suivant :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq \int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} \left( \frac{|E| - 2x - d}{|E| - x} \right)^p dx.$$

Par changement de variable :  $u = (|E| - 2x - d)/(|E| - x)$ , il vient :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq \int_0^{(|E|/(|E|+d/2))} \frac{(d + |E|)u^p}{(2 - u)^2} du.$$

La seconde borne de l'intégrale étant inférieure à 1, l'intégrale converge bien et on obtient :

$$\int_{-d/2}^{(|E|-d)/2} T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \simeq (d + |E|) \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^{p+1} \simeq |E| \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^p. \quad (3.13)$$

4-) Fin de la démonstration. En alliant les résultats (3.11), (3.12) et (3.13), on obtient :

$$\int T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)(x)^p dx \lesssim |E| \left[ \left( \frac{|E|}{|F| + d} \right)^p + \left( \frac{|E|}{|F| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p < 1} + \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p > 1} + \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^p \right].$$

On a travaillé avec l'hypothèse  $|E| \leq |F|$ . Par conséquent, le premier terme est toujours inférieur au dernier terme qui est toujours inférieur au second terme. On a donc bien les inégalités suivantes :

$$|E| \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^p \lesssim \|T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_p^p \lesssim |E| \left[ \left( \frac{|E|}{|F| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p < 1} + \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^{p-1} \mathbf{1}_{p > 1} \right].$$

□

**Remarque 3.1.6.** *En utilisant la même démonstration on obtient le résultat suivant pour  $p = 1$  :*

$$\begin{aligned} \|T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_1 &\simeq \min\{|E|, |F|\} \left[ \left( \frac{\min\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right) + \log \left( 1 + \frac{||E| - |F||}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right) \right] \\ &\simeq \min\{|E|, |F|\} \log \left( 1 + \frac{\max\{|E|, |F|\}}{\min\{|E|, |F|\} + d(E, F)} \right). \end{aligned}$$

*Le terme logarithmique provient de l'intégrale pour le cas 2-) de la démonstration précédente.*

**Remarque 3.1.7.** *Il est intéressant de remarquer que les deux opérateurs (la transformée de Hilbert bilinéaire et l'opérateur maximal bilinéaire) vérifient exactement le*

même encadrement (pour  $p \neq 1$ ). En comparant les détails des deux démonstrations, on peut montrer la comparaison suivante :

$$\forall p > 0, \quad \|T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_p \lesssim \left\| \int \mathbf{1}_E(x-t) \mathbf{1}_F(x+t) \frac{dt}{t} \right\|_p.$$

Cette inégalité est une conséquence des calculs détaillés dans les deux preuves précédentes et de l'inégalité

$$\forall u \in ]-1, 0], \quad |u| \leq |\log(1+u)|.$$

Dans les deux encadrements des propositions 3.1.3 et 3.1.5, nous n'avons pas d'estimations équivalentes. Le problème réside dans l'étude du point 2-), qui fait apparaître la différence

$$|E|^p \left| (|E| + |F| + d)^{1-p} - (2|E| + d)^{1-p} \right|.$$

Cette différence est majorée par les autres termes ; c'est la minoration qui pose problème sans hypothèses supplémentaires. On avait supposé  $|F| \geq |E|$ . On obtient une meilleure minoration de la différence si par exemple :

$$|F| \geq (1 + \epsilon)|E| + \epsilon d,$$

car alors on trouve :

$$|E|^p \left| (|E| + |F| + d)^{1-p} - (2|E| + d)^{1-p} \right| \geq \epsilon |E|^p (2|E| + d)^{1-p} \gtrsim \epsilon |E| \left( \frac{|E|}{|E| + d} \right)^{p-1}.$$

Après avoir étudié de manière précise l'action de ces deux opérateurs bilinéaires sur les fonctions indicatrices d'intervalles, nous allons utiliser ces estimations pour obtenir des résultats de continuité pour des fonctions indicatrices d'ensembles plus généraux.

## 3.2 Des considérations générales.

Il y a tout d'abord une définition importante :

**Définition 3.2.1.** Soit  $T$  un opérateur sous-bilinéaire (c'est à dire sous-linéaire en les deux variables). On dira que  $T$  "localise spatialement", si pour tout exposant  $1 \leq r < p, q < \infty$  tel que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

il existe des constantes  $A_{p,q,r}, b$  et  $c$  telles que pour tout boréliens  $E, F$  de  $\mathbb{R}$ , on ait :

$$d(E, F) > 0 \implies \|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \leq A_{p,q,r} \frac{|E|^{\frac{r+1}{p}} |F|^{\frac{r+1}{q}}}{d(E,F)} \quad (3.14)$$

$$T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \text{ est supporté dans } bE + cF. \quad (3.15)$$

Les deux constantes  $b$  et  $c$  permettent de faire apparaître des déphasages. Pour simplifier les raisonnements, nous considérerons dans toute la suite le cas  $b = c = 1$ . Toutes les fonctions maximales considérées ainsi que les transformées de Hilbert bilinéaires vérifient ces deux hypothèses comme le montre la proposition 3.1.1. De plus nous avons vu dans

le premier chapitre que l'hypothèse (3.15) apparaissait dans l'étude des opérateurs multilinéaires (voir page 62).

En nous basant uniquement sur ces deux conditions (3.14) et (3.15), nous allons essayer de donner des résultats de continuité sur l'opérateur.

**Définition 3.2.2.** Soient  $E$  et  $F$  deux boréliens de  $\mathbb{R}$ , nous dirons que  $E$  et  $F$  sont séparés par un point  $x_0$  si  $E$  et  $F$  vérifie l'une des deux condition suivantes :

$$\sup_{e \in E} e \leq x_0 \leq \inf_{f \in F} f \quad \text{ou} \quad \sup_{f \in F} f \leq x_0 \leq \inf_{e \in E} e.$$

Avec ces deux définitions, on a alors le premier résultat suivant :

**Théorème 3.2.3.** Soit  $(p, q, r)$  des exposants vérifiant la relation d'homogénéité et les restrictions :  $1 < p, q < \infty$  et  $1/2 < r < \infty$ . Soit  $T$  un opérateur qui "localise spatialement". Pour  $E$  et  $F$  deux boréliens de  $\mathbb{R}$  séparés par un point  $x_0$ , on a l'estimation de continuité suivante :

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q}.$$

**Démonstration :**

Nous allons "découper" les ensembles  $E$  et  $F$  en "morceaux" par rapport au point central  $x_0$ . Soit  $F_j = F \cap C(x_0, 2^j)$  et  $E_i = E \cap C(x_0, 2^i)$  pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ , (on note  $C(x_0, t)$  la couronne centrée en  $x_0$  et de rayons  $t/2$  et  $t$ ). Ainsi étant donné que  $x_0$  est au plus un point "extrême" de  $E$  et  $F$ , on a partitionné  $E$  et  $F$  :

$$E = \bigsqcup_i E_i \quad F = \bigsqcup_j F_j.$$

Par sous-bilinéarité, on a la décomposition suivante :

$$|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)| \leq \sum_{i,j} |T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})|,$$

car les couronnes  $C(x_0, 2^i)$  forment un recouvrement. De part la condition de support (3.15) et l'hypothèse de séparation, on a la localisation :

$$\text{supp}(T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})) \subset E_i + F_j \subset C(x_0, 2^i + 2^j).$$

Par conséquent, nous allons regrouper les termes sur des supports essentiellement disjoints. Soit  $k$  un entier :

$$\begin{aligned} A_k &:= \{(i, j) \mid 10^{-1}2^k \leq 2^i, 2^j \leq 2^k\} \\ B_k &:= \{(i, j) \mid 2^i \leq 10^{-1}2^k \leq 2^{k-1} \leq 2^j \leq 2^k\} \\ C_k &:= \{(i, j) \mid 2^j \leq 10^{-1}2^k \leq 2^{k-1} \leq 2^i \leq 2^k\}. \end{aligned}$$

On décompose alors de la manière suivante :

$$|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| + \left| \sum_i T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right| + \left| \sum_j T \left( \sum_{(i,j) \in C_k} \mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j} \right) \right|.$$

Nous devons estimer les trois termes. Or les deux derniers termes sont symétriques, nous allons donc étudier simplement les deux premiers termes.

1—) Le terme avec  $A_k$  et  $r \leq 1$ .

Dans ce cas, soit  $(i, j) \in A_k$  l'hypothèse (3.15) de support nous donne que  $\sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})$  est supporté dans  $B(x_0, 2^k)$ . En utilisant l'inégalité de Hölder, l'hypothèse (3.14) et  $r \leq 1$  on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right\|_r^r \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right\|_1^r 2^{kr(1/r-1)} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{(i,j) \in A_k} \frac{|E_i| |F_j|}{d(E_i, F_j)} \right)^r 2^{k(1-r)}. \end{aligned}$$

Or en utilisant le fait que les ensembles  $E$  et  $F$  sont séparés par le point  $x_0$ , il vient que :

$$d(E_i, F_j) = d(x_0, E_i) + d(x_0, F_j) \geq 2^{i-1} + 2^{j-1} \gtrsim 2^k.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(1-2r)} \left( \sum_{(i,j) \in A_k} |E_i| |F_j| \right)^r.$$

On utilise l'inégalité d'Hölder, et le fait que l'indice  $k$  fixe, modulo un nombre fini, les indices  $i$  et  $j$ , pour obtenir :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r \lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |E_k|^p 2^{k(1/p-1)p} \right)^{r/p} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |F_k|^q 2^{k(1/q-1)q} \right)^{r/q}.$$

On utilise alors l'information  $|E_k|, |F_k| \leq 2^k$  et la condition  $1 < p, q < \infty$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r \\ &\lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min(|E|, 2^k)^p 2^{k(1/p-1)p} \right)^{r/p} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min(|F|, 2^k)^q 2^{k(1/q-1)q} \right)^{r/q} \\ &\lesssim \left( \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \leq |E|}} 2^k + |E|^p \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \geq |E|}} 2^{k(1-p)} \right)^{r/p} \left( \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \leq |F|}} 2^k + |F|^q \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \geq |F|}} 2^{k(1-q)} \right)^{r/q} \\ &\lesssim (|E| + |E|)^{r/p} (|F| + |F|)^{r/q} \lesssim |E|^{r/p} |F|^{r/q}. \end{aligned}$$

Par conséquent le premier terme est bien estimé par ce que l'on voulait dans le cas  $r \leq 1$ .  
2-) Le terme avec  $A_k$  et  $r \geq 1$ .

Dans ce cas en utilisant l'inégalité de Minkowski :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{(i,j) \in A_k} \|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r.$$

En utilisant l'hypothèse que  $T$  "localise spatialement", on a l'estimation :

$$\|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r \lesssim \frac{|E_i|^{\frac{1+r}{p}} |F_j|^{\frac{r+1}{q}}}{d(E_i, F_j)}.$$

On obtient donc en utilisant encore  $d(E_i, F_j) \gtrsim 2^k$  l'estimation

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{(i,j) \in A_k} \frac{|E_i|^{\frac{1+r}{p}} |F_j|^{\frac{r+1}{q}}}{2^k}.$$

De même que précédemment, l'indice  $k$  fixe un nombre fini d'indices  $i$  et  $j$  et on trouve donc :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|E_k|^{\frac{1+r}{p}} |F_k|^{\frac{r+1}{q}}}{2^k}.$$

On utilise alors l'information  $|E_k|, |F_k| \leq 2^k$  et l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in A_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r \\ & \lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |E_k|^{\frac{1+r}{r}} 2^{-k} \right)^{r/p} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |F_k|^{\frac{1+r}{r}} 2^{-k} \right)^{r/q} \\ & \lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min\{|E|, 2^k\}^{\frac{1+r}{r}} 2^{-k} \right)^{r/p} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min\{|F|, 2^k\}^{\frac{1+r}{r}} 2^{-k} \right)^{r/q} \\ & \lesssim \left( \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \leq |E|}} 2^{k/r} + |E|^{\frac{1+r}{r}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \geq |E|}} 2^{-k} \right)^{r/p} \left( \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \leq |F|}} 2^{k/r} + |F|^{\frac{1+r}{r}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \geq |F|}} 2^{-k} \right)^{r/q} \\ & \lesssim (|E|^{1/r} + |E|^{1/r})^{r/p} (|F|^{1/r} + |F|^{1/r})^{r/q} \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q}. \end{aligned}$$

Par conséquent dans le cas  $r \geq 1$ , le premier terme est bien estimé par ce que l'on voulait.

3-) Le terme avec  $B_k$  et  $r \leq 1$ .

Soit  $(i, j) \in B_k$  alors  $T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})$  est supporté dans  $C(x_0, 2^i) + C(x_0, 2^j) \subset C'(x_0, 2^k)$ . Ici  $C'$  représente une autre couronne centrée en  $x_0$ . Par conséquent, les termes sont disjoints en espace :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right\|_r.$$

On applique la même estimation :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right\|_1^r 2^{kr(1/r-1)} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right\|_1^r 2^{k(1-r)} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{(i,j) \in B_k} \frac{|E_i||F_j|}{d(E_i, F_j)} \right)^r 2^{k(1-r)}. \end{aligned}$$

Or par choix des couronnes, on a :

$$d(E_i, F_j) = d(x_0, E_i) + d(x_0, F_j) \geq 2^{i-1} + 2^{j-1} \gtrsim 2^k.$$

D'où par le même principe :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{(i,j) \in B_k} T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \right| \right\|_r^r \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{(i,j) \in B_k} |E_i||F_j| \right)^r 2^{k(1-2r)}.$$

On finit exactement de la même manière en utilisant que l'indice  $k$  fixe les indices  $i$  et  $j$ , et donc on obtient :

$$\sum_{(i,j) \in B_k} |E_i||F_j| \lesssim \min(|E|, 2^k)(|F|, 2^k).$$

Ensuite les mêmes estimations s'appliquent, on obtient l'inégalité souhaitée. Le terme avec  $C_k$  se traite exactement de la même manière par symétrie.

4-) Le terme avec  $B_k$  et  $r \geq 1$ .

De même que précédemment, pour  $(i, j) \in B_k$  la fonction  $T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})$  est supporté dans  $C'(x_0, 2^k)$ . Par conséquent, les termes sont disjoints en espace :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_i T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right| \right\|_r^r \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_i T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right\|_r^r.$$

On applique la même estimation que pour le point 2-) et en utilisant que l'indice  $k$  fixe l'indice  $i$  :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_i T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right| \right\|_r^r &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_i \left\| T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right\|_r \right)^r \\ &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{|E_k|^{\frac{1+r}{p}} \left( \sum_{j, (k,j) \in B_k} |F_j| \right)^{\frac{r+1}{q}}}{2^k} \right)^r \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_i T \left( \mathbf{1}_{E_i}, \sum_{(i,j) \in B_k} \mathbf{1}_{F_j} \right) \right| \right\|_r^r &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{|E_k|^{\frac{1+r}{p}} \min\{|F|, 2^k\}^{\frac{r+1}{q}}}{2^k} \right)^r \\ &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\min\{|E|, 2^k\}^{\frac{1+r}{p}} \min\{|F|, 2^k\}^{\frac{r+1}{q}}}{2^k} \right)^r \\ &\lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\min\{|E|, 2^k\}^{1+r}}{2^{kr}} \right)^{r/p} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\min\{|F|, 2^k\}^{r+1}}{2^{kr}} \right)^{r/q}. \end{aligned}$$

En séparant les indices  $k$ , le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par :

$$\left( \sum_{2^k \leq |E|} 2^k + |E|^{1+r} \sum_{2^k \geq |E|} 2^{-kr} \right)^{r/p} \left( \sum_{2^k \leq |F|} 2^k + |F|^{1+r} \sum_{2^k \geq |F|} 2^{-kr} \right)^{r/q} \lesssim |E|^{r/p} |F|^{r/q}.$$

On obtient ainsi l'inégalité souhaitée. Le terme avec  $C_k$  se traite exactement de la même manière par symétrie.  $\square$

**Remarque 3.2.4.** On remarque dans la démonstration que l'hypothèse importante pour faire converger les différentes séries est la condition  $p, q > 1$ , ce qui entraîne la condition  $1/2 < r$ . De plus, on peut dans cette démonstration alléger l'hypothèse (3.14), en ne la supposant que dans le cadre  $d(E, F) \gtrsim |E| + |F|$ .

Maintenant que nous avons traité ce cas particulier. Nous allons essayer d'étendre ce résultat de continuité.

Dans les hypothèses, la condition de support (3.15) fait intervenir (si on oublie les constantes  $b$  et  $c$ ) la somme ensembliste de Minkowski  $E + F$ . On introduit donc la notion de concentration :

**Définition 3.2.5.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles de  $\mathbb{R}$ , on note  $c(E, F)$  la concentration de  $E$  et  $F$ , définie par :

$$c(E, F) := \frac{|E| + |F|}{|E + F|}.$$

On a noté  $E + F = \{e + f, (e, f) \in E \times F\}$ .

Rappelons le théorème de Brunn-Minkowski :

**Proposition 3.2.6.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles de  $\mathbb{R}$ , alors la concentration  $c(E, F) \in [0, 1]$ . De plus le cas d'égalité  $c(E, F) = 1$  correspond exactement au cas où  $F$  est l'image de  $E$  par une transformation affine.

**Proposition 3.2.7.** Si  $T$  est un opérateur qui localise spatialement et est continu de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  pour tout exposant  $(p, q, r)$  vérifiant la condition d'homogénéité (3.1) et  $1 < p, q, r < \infty$ , alors pour tout exposant  $(p, q, r)$  vérifiant la condition d'homogénéité et  $1/2 < r \leq 1 < p, q < \infty$ , il existe une constante  $C(p, q, r)$  et  $\epsilon' > 0$  tel que pour tout ensemble  $E$  et  $F$  de concentration  $c(E, F) = \lambda$ , on ait :

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \leq C(p, q, r) \lambda^{1-1/r-\epsilon'} |E|^{1/p} |F|^{1/q}.$$



**Démonstration :** On remarque juste que  $T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)$  est supporté dans la somme  $E + F$ . D'où

$$T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) = T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\mathbf{1}_{E+F}.$$

Par symétrie, on peut supposer que  $|F| \geq |E|$ . On utilise l'inégalité de Hölder avec les exposants  $(1 + \epsilon)$  et  $(1 + \epsilon)'$ ,

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \leq \|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_{1+\epsilon} |E + F|^{1/r-1/(1+\epsilon)}.$$

On utilise la continuité de  $T$  sur  $L^{1+\epsilon}$  et la définition de la concentration, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r &\leq C'(p, q, r) |E|^{1/p} |F|^{1/(1+\epsilon)-1/p} \left( \frac{|E| + |F|}{\lambda} \right)^{1/r-1/(1+\epsilon)} \\ &\lesssim \lambda^{-1/r+1/(1+\epsilon)} |E|^{1/p} |F|^{1/r-1/p} \\ &= C(p, q, r) \lambda^{1-1/r-\epsilon'} |E|^{1/p} |F|^{1/q}. \end{aligned}$$

On a choisit  $\epsilon > 0$  tel que  $1 + \epsilon < p$  et  $\epsilon' = 1 - 1/(1 + \epsilon)$ .  $\square$

**Remarque 3.2.8.** Cette proposition nous montre que l'opérateur bilinéaire  $T$  est continu sur les couples  $(E, F)$  lorsque la concentration est bornée inférieurement. Moralement il nous reste donc à traiter le cas le plus difficile où la concentration est minimale c'est à dire :  $c(E, F) \rightarrow 0$ .

### 3.3 Le cas de la concentration minimale.

Rappelons qu'un ensemble régulier de  $\mathbb{R}$  est une réunion fini d'intervalles.

Étant donné la définition de la concentration, un couple est de concentration minimale si l'on maximise la mesure de la somme  $|E + F|$ , sous contrainte de la conservation de la mesure des composantes connexes de  $E$  et  $F$ . Ceci revient à supposer disjoints tous les ensembles  $(E_i + F_j)_{i,j}$  d'où la définition suivante :

**Définition 3.3.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles réguliers de  $\mathbb{R}$ . On dit que le couple  $(E, F)$  est de concentration minimale, si en notant  $(E_i)_i$  et  $(F_j)_j$  les composantes connexes de  $E$  et  $F$ , on a la propriété suivante :

$$(E_i + F_j)_{i,j} \text{ sont deux à deux disjoints.}$$

Dans le cas, où  $(E, F)$  est de concentration minimale, l'intersection  $E \cap F$  a la particularité suivante :

**Proposition 3.3.2.** Si  $(E, F)$  est de concentration minimale, alors  $E \cap F$  est un intervalle.

**Démonstration :** Soit  $x < y$  deux points de  $E \cap F$ , il nous faut montrer que le segment  $[x, y] \subset E \cap F$ . Il existe des indices  $i_x, i_y, j_x$  et  $j_y$  tels que :

$$x \in E_{i_x} \cap F_{j_x} \quad y \in E_{i_y} \cap F_{j_y}.$$

Ainsi le point  $x + y$  appartient à deux sommes :

$$x + y \in (E_{i_x} + F_{j_y}) \cap (E_{i_y} + F_{j_x}).$$

Or  $(E, F)$  est de concentration minimale donc :  $i_x = i_y := i$  et  $j_x = j_y := j$ . Par conséquent  $E_i$  étant connexe, on vient d'obtenir que  $x, y \in E_i$  donc  $[x, y] \subset E_i$ , et de même  $[x, y] \subset F_j$  d'où  $[x, y] \subset E \cap F$ .  $\square$

Une réponse "générale" du problème suivante serait très intéressante :

**Problème 3.3.3.** *Soit  $T$  un opérateur qui localise spatialement. Quelles hypothèses devons nous ajouter pour assurer que pour un exposant  $1/2 < r < \infty$ , il existe une constante  $C = C_{p,q,r}$  telle que pour tout couple  $(E, F)$  de concentration minimale, on ait :*

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \leq C_p |E|^{1/p} |F|^{1/q} \quad (3.16)$$

avec  $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$  et  $p, q > 1$  ?

Nous allons apporter quelques résultats partiels.

**Proposition 3.3.4.** *Pour résoudre le problème, on peut supposer que  $E$  et  $F$  sont d'intersection vide pourvu que  $\|T(\mathbf{1}_J, \mathbf{1}_J)\|_r \lesssim |J|^{1/r}$  pour tout intervalle  $J$ .*

**Démonstration :** Supposons le problème résolu dans le cas  $E \cap F = \emptyset$  et montrons le dans le cas général. Soit  $(E, F)$  de concentration minimale. Notons  $I := E \cap F$ , on a alors par bilinéarité la décomposition suivante :

$$|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)| \leq |T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_I)| + |T(\mathbf{1}_{E \cap I^c}, \mathbf{1}_I)| + |T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_{F \cap I^c})| + |T(\mathbf{1}_{E \cap I^c}, \mathbf{1}_{F \cap I^c})|. \quad (3.17)$$

**Le premier terme :** D'après la proposition précédente :  $I$  est un intervalle, donc on sait le traiter par hypothèse.

**Les deux termes centraux :** Le deuxième et le troisième terme font apparaître l'intervalle  $I$  et une partie qui lui est disjointe : on est exactement dans le cas du théorème 3.2.3, donc on sait les estimer.

**Le dernier terme :** Le dernier terme est le plus difficile à étudier :  $I$  étant un intervalle de  $E$ , il existe un unique indice  $i_0$  tel que  $E_{i_0} \cap I \neq \emptyset$  et dans ce cas  $I \subset E_{i_0}$ . De même pour  $F$ , il existe un unique indice  $j_0$  tel que  $F_{j_0} \cap I \neq \emptyset$ . Notons  $\tilde{E} = \cup_{i \neq i_0} E_i$  et  $\tilde{F} = \cup_{j \neq j_0} F_j$ . Alors, par bilinéarité, on a la décomposition suivante :

$$|T(\mathbf{1}_{E \cap I^c}, \mathbf{1}_{F \cap I^c})| \leq |T(\mathbf{1}_{E_{i_0} \cap I^c}, \mathbf{1}_{F_{j_0} \cap I^c})| + |T(\mathbf{1}_{E_{i_0} \cap I^c}, \mathbf{1}_{\tilde{F}})| + |T(\mathbf{1}_{\tilde{E}}, \mathbf{1}_{F_{j_0} \cap I^c})| + |T(\mathbf{1}_{\tilde{E}}, \mathbf{1}_{\tilde{F}})|.$$

Les trois premiers termes sont contrôlés par le théorème 3.2.3 étant donné que  $E_{i_0} \cap I^c$  et  $F_{j_0} \cap I^c$  sont au plus la réunion de deux intervalles chacun. Il nous reste le dernier terme : les ensembles  $\tilde{E}$  et  $\tilde{F}$  sont bien disjoints, leurs composantes connexes sont les ensembles  $(E_i)_{i \neq i_0}$  et  $(F_j)_{j \neq j_0}$  : par conséquent ils sont bien de concentration minimale. On s'est donc ramené au cas ou  $E \cap F = \emptyset$ .  $\square$

**Remarque 3.3.5.** *Dans la proposition précédente, il est demandé l'estimation  $\|T(\mathbf{1}_J, \mathbf{1}_J)\|_r \lesssim |J|^{1/r}$  pour tout intervalle  $J$ . Par exemple cette hypothèse est vérifiée pour les opérateurs de la proposition 3.2.7 (car pour  $J$  un intervalle, le couple  $(J, J)$  est de concentration égale à 1).*

Nous allons donner une réponse au problème 3.3.3 pour les exposants  $r > 2$  :

**Théorème 3.3.6.** *Soit  $|H|$  l'opérateur défini par :*

$$|H|(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(x+t) \frac{dt}{|t|}.$$

Alors il existe une constante  $C = C_{p,q,r}$  telle que pour tout couple  $(E, F)$  de concentration minimale et d'intersection vide, on ait :

$$\| |H|(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_r \leq C_p |E|^{1/p} |F|^{1/q}.$$

avec  $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$  et  $2 < p, q, r < \infty$ .

**Démonstration :** On note  $(E_i)_i$  et  $(F_j)_j$  les différentes composantes connexes de  $E$  et  $F$ . Par définition les ensembles  $E_i + F_j$  sont disjoints deux à deux. D'où d'après la condition de support (3.15) vérifiée par  $|H|$ , on a :

$$\| |H|(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_r^r \leq \sum_{i,j} \| |H|(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \|_r^r.$$

Ici, on utilise que les espaces normes  $\| \cdot \|_r^r$  sont exactement additives pour des fonctions à supports disjoints. En utilisant les propositions 3.1.3 et 3.1.5, on obtient :

$$\| |H|(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \|_r^r \lesssim \min\{|E_i|, |F_j|\} \left( \frac{\min\{|E_i|, |F_j|\}}{\min\{|E_i|, |F_j|\} + d(E_i, F_j)} \right)^{(r-1)} \lesssim \| T_*(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j}) \|_{r-1}^{r-1},$$

où  $T_*$  est défini par (3.8). Par conséquent les supports étant disjoints aussi pour  $T_*$ , on obtient :

$$\| |H|(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_r^r \lesssim \| T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_{r-1}^{r-1}.$$

De plus  $r > 2$ , on sait donc que l'opérateur  $T_*$  est continu sur  $L^{r-1}$  (voir proposition 4.2.1). On choisit les exposants  $a = (r-1)p/r$ ,  $b = (r-1)q/r$ , ainsi  $(r-1)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$ , d'où :

$$\| T_*(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_{r-1}^{r-1} \lesssim |E|^{(r-1)/a} |F|^{(r-1)/b} = |E|^{r/p} |F|^{r/q}.$$

On obtient bien l'inégalité voulue :

$$\| |H|(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F) \|_r^r \lesssim |E|^{r/p} |F|^{r/q}.$$

□

**Corollaire 3.3.7.** *Soit  $T$  un opérateur borné par l'opérateur  $|H|$  et  $2 < p, q, r < \infty$  des exposants. Supposons que pour tout intervalle  $J$ , l'opérateur  $T$  vérifie*

$$\| T(\mathbf{1}_J, \mathbf{1}_J) \|_r \lesssim |J|^{1/r},$$

alors d'après la proposition 3.3.4 et le théorème 3.3.6 l'opérateur  $T$  est solution du problème 3.3.3. C'est en particulier le cas de la transformée de Hilbert bilinéaire.

Dans le cas d'un exposant  $r < 2$ , on ne peut plus se ramener à l'opérateur maximal bilinéaire avec les propositions 3.1.3 et 3.1.5. Pour répondre au problème 3.3.3 et obtenir l'estimation demandée (3.16) en ne connaissant que les propriétés de "localisation spatiale" de l'opérateur  $T$ , on a besoin d'estimer les distances entre les différentes composantes connexes des ensembles  $E$  et  $F$ . Notons  $(E_i)_i$  et  $(F_j)_j$  les différentes composantes connexes de  $E$  et  $F$ . Celles-ci sont indexées de manière croissante par rapport à l'ordre sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 3.3.8.** *Si  $E$  et  $F$  sont de concentration minimale, nous avons les deux inégalités suivantes :*

$$\forall j \neq j' \quad d(F_{j'}, F_j) \geq (1 + |j' - j|) \sup_i |E_i|, \quad (3.18)$$

$$\forall i \neq i' \quad d(E_{i'}, E_i) \geq (1 + |i' - i|) \sup_j |F_j|. \quad (3.19)$$

**Démonstration :** Les deux inégalités étant symétriques, nous allons seulement démontrer la première. Soit  $k$  un indice, il suffit seulement de montrer :

$$d(F_{j+1}, F_j) \geq |E_k|,$$

car (3.18) en découle par inégalité triangulaire. Par définition de la propriété de concentration minimale, on a  $F_j + E_k \cap F_{j+1} + E_k = \emptyset$  par conséquent, tous les ensembles étant des intervalles, on obtient (sachant que l'on a numéroté les composantes connexes par ordre croissant) :

$$\sup(F_j + E_k) = \sup(F_j) + \sup(E_k) \leq \inf(F_{j+1} + E_k) = \inf(F_{j+1}) + \inf(E_k).$$

Par conséquent, on a bien l'estimation souhaitée :

$$d(F_{j+1}, F_j) = \inf(F_{j+1}) - \sup(F_j) \geq \sup(E_k) - \inf(E_k) = |E_k|.$$

□

**Remarque 3.3.9.** *Pour répondre au problème 3.3.3, il nous faudrait une meilleure estimation sur les distances  $d(E_i, F_j)$ . Une estimation plus précise sur chaque distance  $d(E_i, F_j)$  semble impossible sans hypothèses supplémentaires. Pour obtenir des renseignements plus fins, il faut probablement faire appel à des estimations faisant intervenir l'ensemble des distances  $(d(E_i, F_j))_{i,j}$ . Nous allons voir un cas particulier de concentration minimale où nous avons des croissances exponentielles et non plus simplement linéaires.*

**Proposition 3.3.10.** *(Un cas particulier de concentration minimale). Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles disjoints de  $\mathbb{R}$ , chacun étant la réunion disjointe d'intervalles :*

$$E = \sqcup E_i, \quad F = \sqcup F_j,$$

*placés de la manière suivante :  $E_0, F_0$  sont fixés,  $F_0$  à droite de  $E_0$  et  $\inf(E_0) = 0$ . On place ensuite par récurrence  $E_i$  à droite de  $E_{i-1} + F_{i-1}$  puis  $F_i$  à droite de  $E_i + F_{i-1}$ . Alors  $(E, F)$  est de concentration minimale et dans ce cas, nous avons l'estimation suivante : il existe une constante  $C > 1$  telle que*

$$d(E_i, F_j) \geq C^{i-j} |F_j| \quad \forall j < i.$$

*Ici  $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in ]1, 2[$ . De plus, les composantes  $E_i$  et  $F_j$  s'intercalent les unes après les autres.*

**Démonstration :** On prend les notations suivantes :

$$x_i = \inf(E_i) \quad X_i = \inf(F_i) \quad l_i = |E_i| \quad L_i = |F_i|.$$

Ainsi par construction, on a les relations de récurrence suivantes :

$$x_0 = 0 \quad x_i \geq (x_{i-1} + l_{i-1}) + (X_{i-1} + L_{i-1}) \quad (3.20)$$

$$X_0 \geq l_0 \quad X_i \geq (x_i + l_i) + (X_{i-1} + L_{i-1}). \quad (3.21)$$

On se fixe  $j$ , et on va raisonner par récurrence sur  $i \geq j + 1$ . On note  $u_i = d(E_i, F_j) = x_i - (X_j + L_j)$ , on veut donc montrer :

$$u_i \geq C^{i-j-1} l_j.$$

a-) Pour  $i = j + 1$ , on a donc en utilisant les formules de recurrence :  $u_{j+1} = x_{j+1} - (X_j + L_j) \geq x_j + l_j \geq l_j$ .

b-) Pour  $i = j + 2$ , on a de même,

$$\begin{aligned} u_{j+2} &= x_{j+2} - (X_j + L_j) \geq x_{j+1} + l_{j+1} + (X_{j+1} + L_{j+1}) - (X_j + L_j) \\ &\geq u_{j+1} + X_{j+1} \geq l_j + X_{j+1} \geq 2l_j \geq Cl_j. \end{aligned}$$

c-) Supposons que  $u_{i-2}, u_{i-1}$  vérifient l'hypothèse de récurrence. Alors on a par les mêmes relations

$$\begin{aligned} u_i &= x_i - (X_j + L_j) \geq x_{i-1} + l_{i-1} + (X_{i-1} + L_{i-1}) - (X_j + L_j) \\ &\geq u_{i-1} + X_{i-1} \geq u_{i-1} + x_{i-1} \geq u_{i-1} + x_{i-2} \geq u_{i-1} + u_{i-2}. \end{aligned}$$

D'où par récurrence :

$$u_i \geq l_j (C^{i-2-j} + C^{i-3-j}) \geq l_j C^{i-j-1} (C^{-1} + C^{-2}).$$

Choisissons  $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ , de sorte  $C^2 = 1 + C$ , ainsi on a  $C^{-1} + C^{-2} = 1$  et donc l'hypothèse de récurrence est bien "héréditaire".  $\square$

Revenons au cas général. Nous allons montrer que dès que l'on a une certaine croissance (qui comprend le cas précédent), alors le problème 3.3.3 est résolu :

**Proposition 3.3.11.** *Soit  $(E, F)$  de concentration minimale et d'intersection vide. Supposons que les composantes  $E_i$  et  $F_j$  s'intercalent entre elles et qu'il existe une fonction  $\lambda$  telle que :*

$$d(E_i, F_j) \geq \lambda(i-j)|F_j| \quad \forall |i-j| \geq 3,$$

avec  $\lambda^\alpha \in l^1$  pour tout  $\alpha > 0$ . Alors le problème 3.3.3 est résolu dans ce cas, sans hypothèse supplémentaire sur  $T$  : si  $T$  localise spatialement pour  $1/2 \leq r$  et  $1 < p, q < \infty$  vérifiant la condition d'homogénéité, on a bien l'estimation :

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q}.$$

**Démonstration :** Tout d'abord pour faire agir notre opérateur  $T$  sur les composantes connexes, on utilise que  $(E, F)$  est de concentration minimale donc les ensembles  $E_i + F_j$  sont disjoints deux à deux. Par hypothèse  $T(E_i, F_j)$  est supporté dans  $E_i + F_j$ , par conséquent :

$$\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r^r \lesssim \sum_{i,j} \|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r^r.$$

Pour les termes  $j \leq i \leq j + 3$ , on n'a pas d'information sur les distances  $d(E_i, F_j)$ , mais  $E$  et  $F$  étant disjoints les deux intervalles  $E_i$  et  $F_j$  sont séparés par un point. On peut donc appliquer la proposition 3.2.3 pour obtenir :

$$\|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r \lesssim |E_i|^{1/p} |F_j|^{1/q}.$$

Par l'inégalité de Hölder et la condition d'homogénéité sur les exposants, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{|i-j| \leq 2} \|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r^r &\lesssim \sum_{|i-j| \leq 2} |F_j|^{r/q} |E_i|^{r/p} \\ &\lesssim |E|^{r/p} |F|^{r/q}. \end{aligned}$$

Ce terme est donc bien contrôlé par ce que l'on souhaite. Il nous reste à estimer la somme pour  $|i - j| \geq 3$ . Nous allons devoir séparer le cas  $r \leq 1$  et  $r \geq 1$ .

1-) Si  $r \leq 1$ .

Alors, pour deux intervalles  $I$  et  $J$  disjoints, on a l'estimation suivante :

$$\|T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)\|_1 \lesssim \frac{|I||J|}{d(I, J)}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que  $T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)$  est supporté dans  $I + J$ , on trouve :

$$\|T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)\|_r \lesssim |I + J|^{1/r-1} \|T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)\|_1 \lesssim \frac{|I||J||I + J|^{1/r-1}}{d(I, J)}.$$

Dans le cas où  $I$  et  $J$  sont des intervalles, on a  $|I + J| = |I| + |J|$ , d'où l'estimation suivante :

$$\|T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)\|_r \lesssim \frac{|I||J|(|I| + |J|)^{1/r-1}}{d(I, J)}.$$

Par symétrie, on ne regarde que la somme pour  $i \geq j + 2$  et on l'estime de la manière suivante. Nous allons découper les intervalles  $E_i$  et  $F_j$  par leurs sous cubes de Whitney : pour l'intervalle  $E_i$ , on note

$$\forall n \geq 0, \quad E_i^n = \{x \in E_i, 2^{-n-1}|E_i| < d(x, E_i^c) \leq 2^{-n}|E_i|\}.$$

Ainsi  $E_i^n$  est la réunion de deux sous-intervalles de  $E_i$ , de mesure  $2^{-n-1}|E_i|$ . On fait de même pour les intervalles  $F_j$ . Quitte à distinguer les 2 composantes connexes de  $E_i^n$  et  $F_j^m$ , on peut supposer que ce sont des intervalles. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq j+2} \|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r^r &\leq \sum_{\substack{i \geq j+2 \\ n, m \geq 0}} \|T(\mathbf{1}_{E_i^n}, \mathbf{1}_{F_j^m})\|_r^r \\ &\lesssim \sum_{\substack{i \geq j+2 \\ n, m \geq 0}} \frac{|F_j^m|^r |E_i^n|^r (|F_j^m| + |E_i^n|)^{1-r}}{d(F_j^m, E_i^n)^r}. \end{aligned}$$

Or, on peut estimer la distance par :

$$d(E_i^n, F_j^m) \geq d(E_i, F_j) + |E_i^n| \geq \lambda(i-j)|F_j| + |E_i^n|.$$

On obtient donc :

$$\sum_{i \geq j+2} \|T(E_i, F_j)\|_r^r \lesssim \sum_{\substack{i \geq j+2 \\ n, m \geq 0}} \frac{1}{2^{mr}} \left( \frac{|F_j| |E_i^n|}{\lambda(i-j)|F_j| + |E_i^n|} \right)^r (|F_j^m| + |E_i^n|)^{1-r}.$$

En utilisant l'inégalité  $\frac{xy}{x+y} \leq x^{r/q} y^{r/p}$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq j} \|T(E_i, F_j)\|_r^r \\ & \lesssim \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \geq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^r 2^{mr}} (\lambda(i-j)|F_j|)^{r/q} |E_i^n|^{r(1-1/q)} |E_i^n|^{1-r} + \dots \\ & \quad \dots \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \leq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^r 2^{mr}} (\lambda(i-j)|F_j|)^{r(1-1/p)} |E_i^n|^{r/p} |F_j^m|^{1-r} \\ & \lesssim \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \geq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r(1-1/p)} 2^{mp}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} + \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \leq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r/p} 2^{mp}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} \\ & \lesssim \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \geq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r(1-1/p)} 2^{mp} 2^{np/q}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} + \sum_{\substack{i \geq j+2, n, m \\ |E_i^n| \leq |F_j^m|}} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r/p} 2^{mp} 2^{np/q}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} \\ & \lesssim \sum_{i \geq j+2} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r(1-1/p)}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} + \sum_{i \geq j+2} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r/q}} |F_j|^{r/q} |E_i^n|^{r/p} \\ & \lesssim |F|^{p/r} |E|^{p/q}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de l'inégalité de Young sur la convolution et du fait que  $\lambda^\alpha$  est toujours intégrable pour  $\alpha > 0$ . On a bien démontré l'inégalité souhaitée.

2-) Si  $r \geq 1$ .

Alors, pour deux intervalles  $I$  et  $J$  disjoints, on a l'estimation suivante :

$$\|T(\mathbf{1}_I, \mathbf{1}_J)\|_r \lesssim \frac{|I|^{\frac{1+r}{p}} |J|^{\frac{1+r}{q}}}{d(I, J)}.$$

De même que précédemment, on ne regarde par symétrie que la somme pour  $i \geq j+2$  et on l'estime en réutilisant les ensembles  $E_i^n$  et  $F_j^m$ . On a alors par inégalité de Minkowski :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq j+2} \|T(\mathbf{1}_{E_i}, \mathbf{1}_{F_j})\|_r^r & \leq \sum_{i \geq j+2} \left( \sum_{n, m \geq 0} \|T(\mathbf{1}_{E_i^n}, \mathbf{1}_{F_j^m})\|_r \right)^r \\ & \lesssim \sum_{i \geq j+2} \left( \sum_{n, m \geq 0} \frac{|F_j^m|^{(1+r)/q} |E_i^n|^{(1+r)/p}}{d(F_j^m, E_i^n)} \right)^r. \end{aligned}$$

Or, on peut toujours estimer la distance par :

$$d(E_i^n, F_j^m) \geq d(E_i, F_j) + |E_i^n| \geq \lambda(i-j)|F_j| + |E_i^n|.$$

On obtient donc :

$$\sum_{i \geq j+2} \|T(E_i, F_j)\|_r^r \lesssim \sum_{i \geq j+2} \left( \sum_{n, m \geq 0} 2^{-m(1+r)/q} \frac{|F_j|^{(1+r)/q} |E_i^n|^{(1+r)/p}}{\lambda(i-j)|F_j| + |E_i^n|} \right)^r.$$

En utilisant l'inégalité  $\frac{xy}{x+y} \leq x^{r/q} y^{r/p}$ , l'estimation devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq j} \|T(E_i, F_j)\|_r^r &\lesssim \sum_{i \geq j+2} \left( \sum_{n, m \geq 0} 2^{-m(1+r)/q} \frac{|F_j|^{(1+r)/q} |E_i^n|^{(1+r)/p}}{\lambda(i-j)|F_j| + |E_i^n|} (\lambda(i-j)|F_j|)^{r/p} |E_i^n|^{r/q} \right)^r \\ &\lesssim \sum_{i \geq j+2} \left( \sum_{n, m \geq 0} |E_i^n|^{1/p} |F_j|^{1/q} 2^{-m(1+r)/q} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r/q}} \right)^r \\ &\lesssim \sum_{i \geq j+2} |E_i|^{r/p} |F_j|^{r/q} \frac{1}{\lambda(i-j)^{r^2/q}} \lesssim |F|^{p/r} |E|^{p/q}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de l'inégalité de Young sur la convolution et du fait que  $\lambda^\alpha$  est toujours intégrable pour  $\alpha > 0$ . On a bien démontré l'inégalité souhaitée dans le cas  $r \geq 1$ .  $\square$

**Remarque 3.3.12.** *Dans cette démonstration, aucune continuité n'était supposée connue ; on utilise simplement le fait que  $T$  "localise spatialement".*

**Remarque 3.3.13.** *On suppose à priori une croissance exponentielle de la distance, alors que l'on a su montrer dans le cas général qu'une croissance linéaire. Par conséquent on est assez "loin" de pouvoir traiter tous les cas ainsi. La façon d'obtenir la croissance linéaire ne tient pas compte de toutes les informations dues au critère de concentration minimale. Il serait donc intéressant de trouver des estimations sur ces distances plus fines, ce qui semble être un problème difficile. Tout du moins peut-on espérer obtenir des informations plus fines "en moyenne" sur les distances et non pas sur toutes les distances ? Un autre moyen d'aborder le problème serait d'utiliser les deux propositions 3.2.3 et 3.2.7 pour construire un algorithme afin de faire croître la concentration étape par étape en contrôlant les autres termes. De plus, en ce qui concerne les transformées de Hilbert bilinéaires ou l'opérateur maximal bilinéaire, le noyau dégénère quand la distance entre les deux ensembles, sur lesquels on les teste, se rapproche de 0. De ce fait, on peut se demander si étant donné la mesure des composantes connexes  $|E_i|$  et  $|F_j|$  fixées, la norme  $\|T(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F)\|_r$  ne serait-elle pas maximisée pour le cas de la concentration maximale, c'est à dire le cas où  $E \cup F$  est un intervalle ?*

**Conclusion :** A partir de simples remarques géométriques, nous avons essayé de développer quelques arguments permettant d'estimer l'action de ces opérateurs bilinéaires sur les fonctions indicatrices d'ensembles. Il semble intéressant d'essayer de combiner le point de vue géométrique avec celui de l'analyse temps-fréquence.





# Chapitre 4

## Résultats divers.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Vers des variables multi-dimensionnelles ...</b>	<b>145</b>
4.1.1	Le cas $(u, v)$ colinéaires.	146
4.1.2	Le cas $(u, v)$ non colinéaires.	150
<b>4.2</b>	<b>Remarques sur les fonctions maximales bilinéaires.</b>	<b>157</b>
<b>4.3</b>	<b>Action sur <math>L^1 \times L^\infty</math>.</b>	<b>161</b>

---

Dans ce chapitre nous allons présenter différents résultats concernant les opérateurs multilinéaires. Nous allons aborder plusieurs directions (indépendantes les unes des autres). Ce sont des arguments simples qui nous donnent des renseignements complémentaires de ceux obtenus dans les parties précédentes mais qui n'ont pas toujours abouti à un résultat général positif.

Nous allons tout d'abord étudier le cas des transformées de Hilbert bilinéaires à variables multidimensionnelles. Nous montrerons alors que le cas multidimensionnel est plus difficile que le cas unidimensionnel et que l'on ne peut espérer obtenir les mêmes résultats. Ensuite dans la deuxième section, nous étudierons de manière plus précise les opérateurs linéarisés obtenus à partir des opérateurs maximaux bilinéaires. Nous finirons par donner quelques conditions pour obtenir des continuités pour des opérateurs bilinéaires singuliers sur les espaces limites  $L^1 \times L^\infty$ .

### 4.1 Vers des variables multi-dimensionnelles ...

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la généralisation des résultats de continuité pour la transformée de Hilbert bilinéaire à variables multidimensionnelles. Dans  $\mathbb{R}^d$ , la transformée bilinéaire directionnelle donnée par deux vecteurs non nuls  $(u, v)$  est définie de la façon suivante :

$$H_{(u,v)}(f, g)(x) := v.p. \int f(x - tu)g(x - tv) \frac{dt}{t}.$$

Il y a deux cas distincts selon que les 2 vecteurs  $u$  et  $v$  sont libres ou non. Rappelons le théorème sur la transformée de Hilbert bilinéaire pour des variables unidimensionnelles (voir théorème 0.0.1) :

**Théorème 4.1.1.** Soit  $\lambda$  un déphasage  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  alors la transformée d'Hilbert définie par :

$$H_\lambda(f, g)(x) := v.p. \int f(x-t)g(x-\lambda t) \frac{dt}{t}$$

est continue de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  avec les exposants vérifiant la condition d'homogénéité et les restrictions  $2/3 < r < \infty$ ,  $1 < p, q < \infty$ . Les bornes de continuité de  $H_\lambda$  sont bornées uniformément en  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  si  $2 < p, q, r' < \infty$  ([18]). Sans autre hypothèse que  $2/3 < r < \infty$ , les bornes de continuité de  $H_\lambda$  sont bornées uniformément en  $\lambda$  pour  $|\lambda - 1| \leq \epsilon$  ([26]).

**Remarque 4.1.2.** L'étude de l'uniformité de la borne de continuité n'est pas entièrement résolue. Le théorème précédent affirme que la borne de continuité pour  $H_\lambda$  de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  est uniforme en  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  si  $0 < p^{-1}, q^{-1}, r'^{-1} < 1/2$  (voir [18]). Si  $2/3 < r < 1$  (i.e.  $-1/2 < r'^{-1} < 0$ ) et  $1/2 < p^{-1}, q^{-1} < 1$  la borne de continuité est bornée uniformément en  $\lambda$  tant que  $|\lambda - 1| \geq \epsilon$ , et cette condition est optimale pour ces exposants (voir [26]). Par interpolation entre ces deux cas, on obtient le résultat suivant (voir [26]) : si les exposants  $p, q, r$  vérifient  $2/3 < r < \infty$ ,  $1 < p, q < \infty$  et

$$\forall a, b \in \left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r'} \right\} \quad |a - b| < \frac{1}{2}$$

alors les bornes de continuité pour  $H_\lambda$  de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  sont bornées uniformément en  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . La question qui reste ouverte est la suivante : si  $1 < p, q, r' < \infty$  a-t-on des estimations uniformes pour  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  ? Pour répondre à cette question, il nous faut pouvoir obtenir des estimations de continuité pour ces exposants sans avoir recours à l'interpolation avec des exposants plus petits que 1. L'utilisation d'exposants inférieurs à 1 interdit l'uniformité des bornes pour  $\lambda \rightarrow 1$ .

Nous allons tout d'abord étudier le cas où  $(u, v)$  est liée, qui se ramène au cas unidimensionnel. Ensuite nous examinerons les difficultés nouvelles qui apparaissent lorsque  $(u, v)$  est libre.

#### 4.1.1 Le cas $(u, v)$ colinéaires.

Si les deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont égaux, on retrouve la transformée de Hilbert linéaire appliquée au produit  $fg$  :

**Proposition 4.1.3.** Soit  $u$  un vecteur non nul. Pour des exposants  $1 < p < \infty$ ,  $1 < q, r \leq \infty$  vérifiant la condition d'homogénéité

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \tag{4.1}$$

l'opérateur  $H_{u,u}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$ . De plus la plage d'exposant est optimale.

**Démonstration :** En notant  $H_u^1$  la transformée de Hilbert (linéaire) de direction  $u$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on trouve :

$$H_{u,u}(f, g) = H_u^1(fg).$$

Or  $H_u^1$  est continue de  $L^p(\mathbb{R}^d)$  sur lui même (voir [17], page 270), uniquement pour  $1 < p < \infty$ . La démonstration se finit en utilisant l'inégalité de Hölder.  $\square$

Étudions le cas plus intéressant, où les deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires, mais non égaux. En séparant les coordonnées, on se ramène directement au cas de la dimension 1, et on peut obtenir les continuités  $L^p(\mathbb{R}^d)$  (avec les mêmes exposants que dans le cas  $d = 1$ ) :

**Proposition 4.1.4.** *Soit  $(u, v)$  un couple de vecteurs non nuls et colinéaires,  $u \neq v$  alors l'opérateur  $H_{u,v}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$  pour des exposants  $(p, q, r)$  vérifiant les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.1.1. De plus la borne de continuité est bornée uniformément en  $(u, v)$  si  $2 < p, q, r < \infty$ . Si  $2/3 < r \leq 2$ , les bornes de continuité sont bornées uniformément en  $(u, v)$  pour  $\|u\|/\|v\| - 1 \geq \epsilon$ .*

**Démonstration :** On écrit  $v = \lambda u$  avec  $\lambda$  un paramètre réel  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ . Soit  $(u, u_1, \dots, u_{d-1})$  une base de  $\mathbb{R}^d$  contenant le vecteur  $u$ , on définit l'application  $A$  comme étant le changement de base sur  $\mathbb{R}^d$  (en notant  $(e_i)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ ) :

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ e_1 & \rightarrow & u \\ e_i & \rightarrow & u_{i-1}, \quad i \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi par composition il vient :

$$H_{u,v}(f, g) \circ A(x) = v.p. \int f \circ A(x_1 - t, \bar{x}) g \circ A(x_1 - \lambda t, \bar{x}) \frac{dt}{t}.$$

On a noté  $\bar{x} := (x_2, \dots, x_d)$ . On retrouve la transformée bilinéaire de Hilbert unidimensionnelle  $H_\lambda$  avec :

$$H_{u,v}(f, g) \circ A(x) = H_\lambda(f \circ A(\cdot, \bar{x}), g \circ A(\cdot, \bar{x}))(x_1).$$

D'où en utilisant le théorème 4.1.1 et le changement de variable  $A$ , il vient (en notant  $|A|$  le déterminant de l'application linéaire  $A$ ) :

$$\begin{aligned} \|H_{u,v}(f, g)\|_r &= \|H_{u,v}(f, g) \circ A\|_{r, dx} |A|^{1/r} \\ &= \left\| \|H_\lambda(f \circ A(\cdot, \bar{x}), g \circ A(\cdot, \bar{x}))(x_1)\|_{r, dx_1} \right\|_{r, d\bar{x}} |A|^{1/r} \\ &\lesssim \left\| \|f \circ A(x_1, \bar{x})\|_{p, dx_1} \|g \circ A(x_1, \bar{x})\|_{q, dx_1} \right\|_{r, d\bar{x}} |A|^{1/r} \\ &\lesssim \|f \circ A(x)\|_{p, dx} \|g \circ A(x)\|_{q, dx} |A|^{1/p+1/q} \lesssim \|f\|_{p, dx} \|g\|_{q, dx}. \end{aligned}$$

On obtient bien la continuité de l'opérateur  $H_{u,v}$ . La borne ne dépend que du paramètre  $\lambda$  qui correspond au rapport  $\|u\|/\|v\|$ .  $\square$

On peut généraliser ce résultat de continuité en utilisant la méthode des rotations, pour l'étude d'opérateurs du type :

$$T_\Omega(f, g)(x) := v.p. \int \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^d} f(x-y)g(x-\lambda y)dy.$$

**Proposition 4.1.5.** *Soit  $\Omega$  un noyau impair, de classe  $L^1$  sur la sphère  $S^d$  ou une mesure impaire finie sur la sphère. Pour  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ , les opérateurs  $T_\Omega$  sont continus de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$  pour des exposants  $(p, q, r)$  vérifiant la condition d'homogénéité (4.1) et la restriction  $1 \leq p, q < \infty$ ,  $2/3 < r < \infty$ .*

**Démonstration :** On remarque qu'en considérant pour  $\Omega$  une différence de dirac :

$$\Omega = \delta_{u/\|u\|} - \delta_{-u/\|u\|}$$

pour  $u$  un vecteur non nul, alors l'opérateur  $T_\Omega$  correspond à la transformée  $H_{u,\lambda u}$ . La démonstration consiste donc à décomposer le noyau  $\Omega$  selon ces combinaisons linéaires. En utilisant la méthode des rotations ([17] page 271), on peut alors décomposer sous la forme suivante :

$$T_\Omega(f, g)(x) = v.p. \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} \Omega(\theta) \int f(x - t\theta)g(x - \lambda t\theta) \frac{dt}{t}.$$

On utilise alors le théorème précédent qui permet de borner chaque terme sous l'intégrale, uniformément en  $\theta$ . Par conséquent, étant donné que  $\Omega$  est supposée d'intégrale finie, on en déduit le résultat par l'inégalité de Minkowski pour  $r \geq 1$ . Le cas  $r < 1$  est plus délicat, on a besoin de faire appel à une notion de dualité sur  $L^r$  pour  $r < 1$ . Tous les arguments sont traités dans l'article [28] et on les rappelle rapidement. Pour montrer le théorème 4.1.1, on montre que la transformée bilinéaire  $H_\lambda$  est de "type faible restreint"  $(p, q, r)$  (théorème 3.5 de [28]) c'est à dire que pour tout ensemble  $E, F$  et  $G$  de mesure finie, il existe un ensemble substantiel  $G' \subset G$  ( $|G'| \geq |G|/2$ ) tel que pour toutes fonctions  $f, g, h$  bornées par :

$$|f| \leq \mathbf{1}_E, \quad |g| \leq \mathbf{1}_F, \quad |h| \leq \mathbf{1}_{G'},$$

on ait l'estimation suivante :

$$\left| \int H_\lambda(f, g)h \right| \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q} |G|^{1-1/r}.$$

Ici l'exposant  $1 - 1/r$  est négatif car  $r < 1$ . La construction de l'ensemble  $G'$  dépend uniquement des ensembles  $E, F$  et  $G$ . Par conséquent ce résultat est "linéaire" dans le sens suivant :  $H_\lambda$  vérifie ce critère, par conséquent on en déduit le même résultat pour  $H_{(\theta, \lambda\theta)}$  et ce de manière uniforme en  $\theta \in S^d$ . Par moyenne en  $\theta$ ,  $T_\Omega$  vérifie aussi le même résultat. On obtient donc que  $T_\Omega$  est de "type faible restreint"  $(p, q, r)$  pour tout les exposants  $2/3 < r \leq 1 < p, q < \infty$ . On applique alors un résultat de "dualité" et d'interpolation réelle (lemme 3.11 de [28]) pour obtenir que  $T_\Omega$  est de type fort pour les mêmes exposants : c'est à dire que  $T_\Omega$  est continu.  $\square$

**Remarque 4.1.6.** *Dans le cas d'un noyau  $\Omega$  impair, aucune régularité n'est demandée. On utilise simplement la propriété de symétrie. Dans le cas d'un noyau non impair, nous avons le résultat suivant :*

**Théorème 4.1.7.** *Soit  $\Omega$  une fonction d'intégrale nulle sur la sphère telle que la transformée de Fourier  $W_\Omega$  du noyau <sup>1</sup>*

$$W_\Omega(\xi) = \left[ v.p. \frac{\widehat{\Omega(y/|y|)}}{|y|^d} \right](\xi) = \int_{S^d} \Omega(\theta) \left( -\log(|\xi \cdot \theta|) - i \frac{\pi}{2} \text{sign}(\xi \cdot \theta) \right) d\theta$$

<sup>1</sup>Cette égalité est montré dans [17], prop 4.2.3.

vérifie les estimations de Hörmander suivantes (pour  $N$  assez grand) :

$$\forall \alpha \in \{1, \dots, N\}^d \quad |\partial_\xi^\alpha W_\Omega(\xi)| \lesssim |\xi|^{-|\alpha|}.$$

Alors pour  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ , l'opérateur bilinéaire  $T_\Omega$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$  pour  $p, q, r$  des exposants vérifiant :

$$0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{3}{2} \quad 1 < p, q \leq \infty.$$

Plus généralement, soit  $K$  un noyau de Calderón-Zygmund sur  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\widehat{K}$  vérifie les conditions de Hörmander précédentes, alors l'opérateur bilinéaire :

$$T(f, g)(x) := v.p. \int f(x - y)g(x - \lambda y)K(y)dy$$

vérifie les mêmes continuités.

**Démonstration :** Le cas des opérateurs  $T_\Omega$  est un cas particulier. Nous discuterons donc le cas général avec un noyau  $K$ . L'opérateur  $T$  s'écrit dans le domaine fréquentiel de la manière suivante :

$$T(f, g)(x) = \int_{\alpha, \beta} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \widehat{K}(\alpha + \lambda\beta) d\alpha d\beta.$$

Le symbole  $\widehat{K}$  est singulier sur le sous espace  $\Delta$

$$\Delta = \{(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^d)^2, \alpha = -\lambda\beta\}.$$

C'est ce que nous appelons une  $\mathbb{R}^d$ -droite. Dans ce cas, la théorie de l'analyse temps-fréquence s'adapte "automatiquement" et on a les mêmes résultats que pour des variables unidimensionnelles. On décompose selon le principe d'incertitude d'Heisenberg dans l'espace temps-fréquence en "tri-feuilles". On obtient alors une décomposition en collection de tri-feuilles multidimensionnelles. L'étude de ces collections est faite dans [36]. Ce qui est important, c'est que l'espace de singularité soit de dimension 1, en tant que  $\mathbb{R}^d$ -sous espace (et donc de dimension  $d$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).  $\square$

**Remarque 4.1.8.** La différence essentielle entre ces opérateurs  $T$  et les transformées bilinéaires de Hilbert  $(H_{u,v})$  réside dans la dimension de l'espace de singularité. On réécrit sous forme fréquentielle les deux opérateurs :

$$\begin{aligned} T(f, g)(x) &= \int_{\alpha, \beta} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \widehat{K}(\alpha + \lambda\beta) d\alpha d\beta \\ H_{u,v}(f, g)(x) &= \int_{\alpha, \beta} e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) \text{sign}(\langle \alpha, u \rangle + \langle \beta, v \rangle) d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Ainsi les deux espaces de singularité du symbole sont :

$$\begin{aligned} \Delta(T) &:= \{(\alpha, \beta), \alpha = -\lambda\beta\} \\ \Delta(H_{u,v}) &:= \{(\alpha, \beta), \langle \alpha, u \rangle + \langle \beta, v \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

On remarque alors que  $\Delta(T)$  est un  $\mathbb{R}^d$ -sous espace de dimension 1 et donc un espace de dimension  $d$  sur  $\mathbb{R}$ , tandis que  $\Delta(H_{u,v})$  n'est pas un  $\mathbb{R}^d$ -sous espace et est un espace de dimension  $2d - 1$  sur  $\mathbb{R}$ . C'est à dire que l'analyse temps-fréquence de  $T$  ne fait pas intervenir toutes les coordonnées simultanément : les  $d$  coordonnées s'étudient de manière séparée et ne se "mélangent" pas entre elles. Pour l'étude de  $H_{u,v}$  l'espace est de dimension plus importante et ne permet pas de séparer les coordonnées. Elles se mélangent entre elles par les deux produits scalaires  $\langle \alpha, u \rangle$  et  $\langle \beta, v \rangle$ . Ce mélange des coordonnées ne peut être étudié par les outils que l'on connaît aujourd'hui. Nous tenterons d'expliquer un peu plus cette difficulté dans le paragraphe suivant.

**Exemple 4.1.9.** : une version bidimensionnelle de la transformée de Hilbert bilinéaire. Avec les notations de l'analyse complexe, on définit la transformée de Beurling bilinéaire :

$$\forall f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{C}) \quad \mathcal{B}e(f, g)(z) := v.p. \int_{\mathbb{C}} f(z - \omega)g(z + \omega) \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Ainsi cet opérateur bilinéaire  $\mathcal{B}e$  est continu de  $L^p(\mathbb{C}) \times L^q(\mathbb{C})$  dans  $L^r(\mathbb{C})$  pour  $p, q, r$  des exposants vérifiant les conditions du théorème 4.1.1.

#### 4.1.2 Le cas $(u, v)$ non colinéaires.

Nous allons nous ramener au cas du couple  $(e_1, e_2)$ . Notons  $(R_{p,q,r})$  la conjecture suivante :

**Conjecture 4.1.10.** En notant  $e_1$  et  $e_2$  les deux premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ ,  $H_{e_1, e_2}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$ .

Nous avons le résultat suivant :

**Proposition 4.1.11.** On supposant la conjecture  $(R_{p,q,r})$  démontrée pour des exposants  $p, q, r$  vérifiant la relation d'homogénéité. Alors pour tout couple  $(u, v)$  de vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^d$ , l'opérateur  $H_{u,v}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$  pour les mêmes exposants. De plus la borne de continuité est indépendante du couple  $(u, v)$ .

**Démonstration :** 1-) Le cas où  $(u, v)$  est libre.

On veut étudier

$$H_{u,v}(f, g)(x) := v.p. \int f(x - tu)g(x - tv) \frac{dt}{t}.$$

Nous allons effectuer un changement de coordonnées pour se ramener à l'opérateur  $H_{e_1, e_2}$ . Soit  $(u, v, u_3, \dots, u_d)$  une base de  $\mathbb{R}^d$  contenant les vecteurs  $u, v$ . On définit l'application  $A$  comme étant le changement de base sur  $\mathbb{R}^d$  (en notant  $(e_i)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ ) :

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ e_1 & \rightarrow & u \\ e_2 & \rightarrow & v \\ e_i & \rightarrow & u_i, \quad i \geq 3 \end{cases}$$

Ainsi par composition il vient :

$$H_{u,v}(f, g) \circ A(x) = v.p. \int f \circ A(x_1 - t, x_2, \dots)g \circ A(x_1, x_2 - t, x_3, \dots) \frac{dt}{t}.$$

D'où la relation :

$$H_{u,v}(f, g) \circ A(x) = H_{e_1, e_2}(f \circ A, g \circ A).$$

En utilisant le résultat  $(R_{p,q,r})$  supposé vrai et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} \|H_{u,v}(f, g)\|_r &= |A|^{1/r} \|H_{u,v}(f, g) \circ A\|_r = |A|^{1/r} \|H_{e_1, e_2}(f \circ A, g \circ A)\|_r \\ &\lesssim C(r) |A|^{1/p} \|f \circ A\|_p |A|^{1/q} \|g \circ A\|_q \lesssim C(p) \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Où  $C(r)$  est la constante de continuité de  $H_{e_1, e_2}$  et  $|A|$  est le déterminant de l'application  $A$ . Donc, nous avons prouvé que  $H_{u,v}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^d)$ , et la constante de continuité est indépendante du couple  $(u, v)$ .

2—) Le cas où  $(u, v)$  est liée.

Soit  $(u, v)$  un couple de vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . Alors en perturbant, il existe  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  un couple de vecteurs libres de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \rightarrow (u, v)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Par exemple, on construit  $u_\epsilon = u$  et  $v_\epsilon = v + \epsilon u^\perp$  avec  $u^\perp$  un vecteur orthogonal à  $u$ . Pour  $f$  et  $g$  des fonctions de la classe de Schwartz, nous avons la convergence presque partout :

$$H_{u_\epsilon, v_\epsilon}(f, g) \rightarrow H_{u,v}(f, g). \quad (4.2)$$

Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont non nuls, donc les vecteurs  $u_\epsilon$  et  $v_\epsilon$  le sont aussi pour  $\epsilon$  assez petit. Pour  $\epsilon$  proche de 0 tel que  $\|u_\epsilon\| \geq \|u\|/2$ , pour  $x$  fixé (en utilisant le théorème de la moyenne) :

$$\begin{aligned} |H_{u_\epsilon, v_\epsilon}(f, g) - H_{u,v}(f, g)| &\lesssim \int |f(x - tu_\epsilon) - f(x - tu)| |g(x - tv)| \frac{dt}{|t|} \\ &\quad + \int |g(x - tv_\epsilon) - g(x - tv)| |f(x - tu_\epsilon)| \frac{dt}{|t|} \\ &\lesssim \|u - u_\epsilon\| \int_0^1 \int |\nabla f(x - tsu + (1-s)tu_\epsilon)| |g(x - tv)| dt ds \\ &\quad + \|v - v_\epsilon\| \int_0^1 \int |\nabla g(x - tsv + (1-s)tv_\epsilon)| |f(x - tu_\epsilon)| dt ds \\ &\lesssim \|u - u_\epsilon\| C_{\|v\|} \|\nabla f\|_\infty \|(1+|z|)^{d+1} g(z)\|_\infty \\ &\quad + \|v - v_\epsilon\| C_{\|u\|} \|\nabla g\|_\infty \|(1+|z|)^{d+1} f(z)\|_\infty. \end{aligned}$$

Les constantes  $C_{\|u\|}$  et  $C_{\|v\|}$  proviennent du changement de variable et utilisent que  $u$  et  $v$  sont non nuls. On a donc bien montré la convergence (4.2) pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Donc par le lemme de Fatou (vérifié dans les espaces de Lebesgue pour tout exposant) :

$$\|H_{u,v}(f, g)\|_r \lesssim \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|H_{u_\epsilon, v_\epsilon}(f, g)\|_r.$$

Or par le premier point de la démonstration, on a une estimation uniforme en  $\epsilon$  :

$$\|H_{u_\epsilon, v_\epsilon}(f, g)\|_r \lesssim C(p, q, r) \|f\|_p \|g\|_q.$$

On en déduit donc :

$$\|H_{u,v}(f, g)\|_r \lesssim C(p, q, r) \|f\|_p \|g\|_q,$$

et ce pour un ensemble dense de fonctions  $f$  et  $g$ . On étend par densité en fixant une des deux fonctions.  $\square$



**Corollaire 4.1.12.** Soient  $0 < p, q, r \leq \infty$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité. La conjecture  $(R_{p,q,r})$  est fautive dès que  $r = \infty$ ,  $r \leq 1$ ,  $p = \infty$  ou  $q = \infty$ . De plus si pour  $1 < p, q, r < \infty$  la conjecture est vraie alors on peut compléter le théorème 4.1.1 : les transformées de Hilbert bilinéaires unidimensionnelles  $H_\lambda$  sont continues de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^r(\mathbb{R})$  et leurs bornes de continuité sont uniformément bornées pour  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

**Démonstration :** En choisissant alors  $v = u$  un vecteur non nul, on retrouve le cas de la proposition 4.1.3. Par conséquent, la conjecture  $(R_{p,q,r})$  est fautive dès que  $r = \infty$  ou  $r \leq 1$ . De plus en faisant tendre un des vecteurs  $u$  et  $v$  vers le vecteur nul, on a :

$$H_{u,v}(f, g) \rightarrow H_u(f)g \text{ ou } fH_v(g).$$

Cette convergence est montrée pour des fonctions de la classe de Schwartz dans la démonstration précédente (ce qui est important c'est qu'un vecteur reste "loin" de 0). Par conséquent, les transformées de Hilbert linéaires  $H_u^1$  et  $H_v^1$  n'étant pas continues sur  $L^\infty$ , les exposants  $p$  et  $q$  ne peuvent pas être infinis. On peut donc conclure que la conjecture  $(R_{p,q,r})$  ne peut être vraie que sous la condition  $1 < p, q, r < \infty$ . Dans ce cas, nous n'avons aucun résultats positifs ou négatifs.  $\square$

La proposition 4.1.11 nous montre que l'on peut restreindre l'étude au seul opérateur  $H_{e_1, e_2}$ . De plus un argument similaire à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 4.1.4, nous permet de nous limiter à l'opérateur modèle suivant défini sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$H_{mod}(f, g)(x, y) \rightarrow v.p. \int f(x+t, y)g(x, y+t) \frac{dt}{t},$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  et  $x, y$  sont maintenant deux variables réelles. La conjecture  $(R_{p,q,r})$  est équivalente à celle ci :

**Conjecture 4.1.13.** L'opérateur modèle  $H_{mod}$  est continu de  $L^p(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^2)$ .

Nous nous contentons d'une discussion sur le modèle de Walsh correspondant, qui permet une parfaite localisation en temps-fréquence. Le modèle de Walsh associé à l'opérateur  $H_{mod}$  peut être décrit de la manière suivante. Pour  $P := I \times Q := [2^k n, 2^k(n+1)] \times [2^{-k} l, 2^{-k}(l+1)]$  une feuille unitaire (c'est à dire le produit de deux intervalles dyadiques formant un rectangle d'aire égale à 1), on associe la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\Phi_P(y) = 2^{k/2} \omega_l(2^k y - n)$ , où  $\omega_l$  est la  $l$ -ième fonction de Walsh. Ainsi la fonction  $\Phi_P$  est supportée exactement dans  $I$ , et est normalisée dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On définit alors le modèle de Walsh associé à  $H_{mod}$  :

$$H_{mod,W}(f, g)(x, y) := \sum_{\vec{P} \in \Omega} \frac{1}{|I_{P_1}|^{1/2}} \frac{1}{|I_{P_2}|^{1/2}} \langle f, \Phi_{P_1} \otimes \Phi_{P_2} \rangle \langle g, \Phi_{P_3} \otimes \Phi_{P_4} \rangle \Phi_{P_5}(x) \Phi_{P_6}(y),$$

où  $\Omega$  est l'ensemble suivant :

$$\Omega := \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = (P_1, \dots, P_6) \quad \text{6-uplet de feuilles unitaires telles que :} \\ I_{P_1} = I_{P_3} = I_{P_5} = I, \quad I_{P_2} = I_{P_4} = I_{P_6} = J, \quad |I| = |J| \\ 0 \in Q_{P_1} + Q_{P_3} + Q_{P_5}, \quad 0 \in Q_{P_2} + Q_{P_4} + Q_{P_6} \\ \text{et } 0 \text{ extrémité gauche de } Q_{P_4} - Q_{P_1} \end{array} \right\}.$$

On s'aperçoit que l'action singulière du noyau (le terme  $\frac{dt}{t}$  du modèle continu) sur les deux fonctions  $f$  et  $g$  est décrite par la condition "0 extrémité gauche de  $Q_{P_4} - Q_{P_1}$ ". Le problème réside dans la compréhension de cette singularité sur les feuilles  $P_5$  et  $P_6$ . Les deux coordonnées se mélangent et on ne peut plus isoler "proprement" l'action du noyau sur les deux dernières feuilles. Ici il y a trois contraintes fréquentielles pour 6 intervalles, par conséquent à taille fixée, il y a trois degrés de liberté. Ce nombre est strictement plus grand que la dimension des variables : 2. C'est pourquoi nous ne pouvons pas appliquer l'analyse temps-fréquence. Récemment E.Terwilleger a généralisé cette méthode pour des variables multidimensionnelles dans  $\mathbb{R}^2$  (et même  $\mathbb{R}^d$ ) sous la condition suivante : tous les cubes fréquentiels sont déterminés de manière presque uniques (le nombre de solutions est borné) par la donnée d'un cube parmi  $\{Q_{P_1}, Q_{P_3}, Q_{P_5}\}$  et d'un cube parmi  $\{Q_{P_2}, Q_{P_4}, Q_{P_6}\}$  [36]. Cette notion de "rang" de la grille fréquentielle était déjà étudiée dans [30].

la présence de degrés de liberté supplémentaires apparaît déjà dans l'étude de l'opérateur bilinéaire  $(f, g) \rightarrow H^1(fg)$ , où  $H^1$  est la transformée de Hilbert linéaire. Le modèle de Walsh associé à cet opérateur est le suivant :

$$H^1(fg)(x) \simeq \sum_{\vec{P} \in \tilde{\Omega}} \frac{1}{|I_P|^{1/2}} \langle f, \Phi_{P_1} \rangle \langle g, \Phi_{P_2} \rangle \Phi_{P_3}(x),$$

où  $\tilde{\Omega}$  est l'ensemble suivant :

$$\tilde{\Omega} := \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = (P_1, P_2, P_3) \quad \text{3-uplet de feuilles unitaires telles que :} \\ I_{P_1} = I_{P_2} = I_{P_3} = I \\ 0 \in Q_{P_1} + Q_{P_2} + Q_{P_3} \\ \text{et 0 extrémité gauche de } Q_{P_3} \end{array} \right\}.$$

Dans ce cas, si l'intervalle  $Q_{P_1}$  est fixé alors  $Q_{P_2}$  et  $Q_{P_3}$  sont fixés. Mais si  $Q_{P_3}$  est fixé (ce qui est toujours le cas), alors  $Q_{P_1}$  et  $Q_{P_2}$  ont un degré de liberté. On ne sait donc pas étudier l'opérateur  $(f, g) \rightarrow H^1(fg)$  par l'analyse temps-fréquence. La théorie de Littlewood-Paley et l'inégalité de Hölder suffisent dans ce cas. Il semblerait donc qu'il faille comprendre l'inégalité de Hölder d'un point de vue fréquentiel et étudier la fonctionnelle quadratique de Littlewood-Paley d'un produit de deux fonctions. La similarité entre ce phénomène et le problème décrit précédemment pour l'opérateur  $H_{mod,W}$  va être illustrée dans la démonstration suivante.

**Proposition 4.1.14.** *Soient  $f = f_1 \otimes f_2$  et  $g = g_1 \otimes g_2$  deux fonctions, produit tensoriel. Alors pour des exposants  $p, q, r$  vérifiant la condition d'homogénéité, la restriction  $1 < r < \infty$  et  $1 < p, q < \infty$  on a l'estimation attendue :*

$$\|H_{mod}(f, g)\|_r \lesssim \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Démonstration :** Par la décomposition tensorielle de  $f$  et  $g$ , on obtient :

$$H_{mod}(f, g)(x, y) = f_2(y)g_1(x) \left( v.p. \int f_1(x - t)g_2(y - t) \frac{dt}{t} \right).$$

D'où la relation :

$$\|H_{mod}(f, g)\|_{r,dx dy} \leq \|f_2\|_{p,dy} \|g_1\|_{q,dx} \left\| \left\| \int f_1(x - t)g_2(y - t) \frac{dt}{t} \right\|_{q,dy} \right\|_{p,dx}.$$

1-) Le cas  $p = q$ .

Effectuons le changement de variable  $y = x + z$ , il vient :

$$v.p. \int f_1(x-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} = v.p. \int f_1(x-t)g_2(x+z-t)\frac{dt}{t}$$

A  $z$  fixé, on reconnaît alors la transformée de Hilbert linéaire appliquée à la fonction  $f_1(\cdot + z)g_2(\cdot)$ , d'où :

$$\begin{aligned} \left\| \left\| v.p. \int f_1(y+z-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} \right\|_{p,dydz} \right\| &= \left\| \left\| v.p. \int f_1(y+z-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} \right\|_{p,dy} \right\|_{p,dz} \\ &\leq \left\| \left\| f_1(y+z)g_2(y) \right\|_{p,dy} \right\|_{p,dz} \\ &\leq \|f_1\|_p \|g_2\|_q. \end{aligned}$$

On obtient bien ainsi l'inégalité souhaitée.

$$\|H_{mod}(f, g)\|_{r,dxdy} \lesssim \|f_2\|_{p,dy} \|g_1\|_{q,dx} \|f_1\|_p \|g_2\|_q \lesssim \|f\|_p \|g\|_q.$$

Cet argument élémentaire de changement de variable permet de traiter le cas  $p = q$ , mais ne permet pas de traiter les autres cas.

2-) Le cas général  $1 < p, q < \infty$ .

Il nous faut montrer l'estimation :

$$\left\| \left\| v.p. \int f_1(x-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} \right\|_{q,dy} \right\|_{p,dx} \lesssim \|f_1\|_p \|g_2\|_q.$$

On va faire apparaître de nouveau la transformée de Hilbert linéaire  $H^1$  appliquée à un produit en écrivant :

$$\begin{aligned} \left\| \left\| v.p. \int f_1(x-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} \right\|_{q,dy} \right\|_{p,dx} &= \left\| \left\| v.p. \int f_1(x-t)g_2(x+z-t)\frac{dt}{t} \right\|_{q,dz} \right\|_{p,dx} \\ &= \left\| \left\| H^1(f_1(\cdot)g_2(\cdot + z))(x) \right\|_{q,dz} \right\|_{p,dx}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de continuité pour des opérateurs à valeurs vectorielles (Corollaire 4.6.3 de [17]), on obtient la majoration suivante :

$$\left\| \left\| v.p. \int f_1(x-t)g_2(y-t)\frac{dt}{t} \right\|_{q,dy} \right\|_{p,dx} \lesssim \left\| \left\| f_1(x)g_2(x+z) \right\|_{q,dz} \right\|_{p,dx} \lesssim \|f_1\|_p \|g_2\|_q,$$

ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.  $\square$

Ici le changement de variable fait apparaître la transformée linéaire d'un produit de deux fonctions ce qui rejoint la discussion précédente. Cette "astuce" de changement de variable peut être évitée dans certains cas, en utilisant l'opérateur de Carleson  $\mathcal{C}$  :

**Remarque 4.1.15.** *On a l'estimation suivante :*

$$\left\| \left\| v.p. \int f_1(x-t)g_2(y-t) \frac{dt}{t} \right\|_{2,dy} \right\|_{p,dx} \lesssim \|f_1\|_p \|g_2\|_2, \quad (4.3)$$

ce qui permet de montrer la proposition précédente dans le cas  $q = 2$ . Nous allons montrer un résultat plus fort à l'aide de l'opérateur de Carleson  $\mathcal{C}$ , qui "nous" rapproche d'un résultat de continuité de l'opérateur  $H_{mod}$ .

**Proposition 4.1.16.** *Soit  $p, r$  des exposants vérifiant la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$$

avec  $1 < p < \infty$ . On a alors l'estimation suivante :

$$\forall f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^2), \quad \left\| \left\| v.p. \int f(x-t)g(x, y-t) \frac{dt}{t} \right\|_{2,dy} \right\|_{r,dx} \lesssim \|f\|_{p,dx} \|g\|_{2,dxdy}.$$

**Démonstration :** Nous allons montrer cette estimation sans faire appel au changement de variable. Pour cela, on utilise l'égalité de Plancherel, en notant  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| v.p. \int f(x-t)g(x, y-t) \frac{dt}{t} \right\|_{2,dy} &= \left\| \mathcal{F}_{y \rightarrow \xi} v.p. \int f(x-t)g(x, y-t) \frac{dt}{t} \right\|_{2,d\xi} \\ &= \left\| \left( v.p. \int f(x-t) e^{it\xi} \frac{dt}{t} \right) \widehat{g(x, \cdot)}(\xi) \right\|_{2,d\xi} \\ &\lesssim \|\widehat{g(x, \cdot)}\|_2 \left\| v.p. \int f(x-t) e^{i(x-t)\xi} \frac{dt}{t} \right\|_{\infty,d\xi} \\ &\lesssim \|g(x, \cdot)\|_2 \mathcal{C}(f_1)(x). \end{aligned}$$

On a noté ici  $\mathcal{C}$  l'opérateur de Carleson défini par :

$$\mathcal{C}(f)(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| v.p. \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi z} f(z) \frac{dz}{x-z} \right|.$$

L'interversion de la transformée de Fourier et de l'intégrale en  $t$  est justifiée dans le cas de fonctions de la classe de Schwartz, ce qui suffit par densité. On estime cette inégalité en norme  $L^r$  sur  $x$ . En utilisant la continuité de  $\mathcal{C}$  (voir théorème 10.6.1 de [17]) et l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité voulue (4.3) :

$$\left\| \left\| v.p. \int f(x-t)g(x, y-t) \frac{dt}{t} \right\|_{2,dy} \right\|_{r,dx} \lesssim \|g\|_{2,dxdy} \|\mathcal{C}(f)\|_{p,dx} \lesssim \|f\|_{p,dx} \|g\|_{2,dxdy}.$$

□

**Conclusion :** Nous avons vu que la conjecture  $(R_{p,q,r})$  ne peut être vraie que sous la contrainte  $1 < p, q, r < \infty$  et par conséquent les transformées de Hilbert bilinéaires multidimensionnelles ne peuvent être continues de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  que sous cette condition.

Cette observation diffère des résultats connus pour le cas de variables unidimensionnelles. Sous l'hypothèse  $1 < p, q, r < \infty$ , la proposition 4.1.14 montre que l'opérateur  $H_{mod}$  est continu des espaces  $(L^p(\mathbb{R}) \boxtimes L^p(\mathbb{R})) \times (L^q(\mathbb{R}) \boxtimes L^q(\mathbb{R}))$  dans  $L^r(\mathbb{R}^2)$ , où  $\boxtimes$  désigne le produit tensoriel d'espaces de Banach. Malheureusement nous n'avons pas de résultats positifs (ou négatifs) de continuité pour  $H_{mod}$  sur les espaces de Lebesgue. La présentation de ce problème a fait apparaître la nécessité de comprendre l'inégalité de Hölder d'un point de vue fréquentiel.

## 4.2 Remarques sur les fonctions maximales bilinéaires.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'opérateur bilinéaire maximal et à ses adjoints sur  $\mathbb{R}$ . L'opérateur maximal bilinéaire  $T_*$  est défini par :

$$T_*(f, g) : x \rightarrow \sup_{a>0} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(x-t)g(x+t)| dt.$$

Celui-ci n'étant pas bilinéaire, on l'approche par des opérateurs bilinéaires :  $T_\rho$ . Soit  $\rho$  une fonction strictement positive mesurable, on définit :

$$T_\rho(f, g)(x) := \frac{1}{\rho_x} \int_{-\rho_x}^{\rho_x} f(x-t)g(x+t) dt.$$

L'opérateur  $T_*$  est la limite simple d'opérateurs  $T_\rho$ . Par conséquent, en obtenant une continuité des opérateurs  $T_\rho$  uniformément en  $\rho$ , on obtient la continuité de  $T_*$ .

**Proposition 4.2.1.** *Les opérateurs  $T_*$  et  $T_\rho$  sont continus de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  pour des exposants  $p, q, r$  vérifiant la condition d'homogénéité*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (4.4)$$

et la restriction :

$$1 < p, q, r \leq \infty.$$

Les bornes de continuité sont indépendantes de la fonction  $\rho$ .

La démonstration est évidente et laissée au lecteur.

**Remarque 4.2.2.** *M. Lacey a adapté l'analyse temps fréquence aux fonctions maximales et a obtenu la continuité de  $T_*$  jusque  $r > 2/3$  dans [21]. On "estime" que l'opérateur  $T_*$  devrait être continu jusque  $r > 1/2$ .*

Pour exemple nous allons étudier le cas où l'on ajoute des hypothèses de régularité (semblables à celles que l'on suppose pour les opérateurs de Calderón-Zygmund) sur la fonction  $\rho$ . L'hypothèse que nous faisons est la suivante. Notons  $\Omega_n = \{x, 2^{n-1} < \rho(x) \leq 2^n\}$ , on demande la condition suivante :

$$(\Omega_n + B(0, 2^n))_n \text{ forment un recouvrement borné de } \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Par exemple, si  $\rho$  est une fonction qui vérifie la condition suivante pour un certain  $0 < \alpha < 1$  :

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C|x - y|^\alpha \inf\{\rho(x), \rho(y)\}^{1-\alpha} \quad (4.6)$$

alors la condition (4.5) est vérifiée. En effet pour  $\alpha < 1$ , supposons que  $\Omega_n + B(0, 2^n)$  rencontre  $\Omega_p + B(0, 2^p)$  avec  $p > n + 2$ , alors il existe  $x \in \Omega_n$  et  $y \in \Omega_p$  tel que :

$$|x - y| \leq 2^{p+1}.$$

Par l'hypothèse de régularité (4.6), on obtient :

$$2^{p-2} \leq 2^{p-1} - 2^{n+1} = |\rho(x) - \rho(y)| \leq C2^{(p+1)\alpha+n(1-\alpha)}.$$

Donc on obtient :

$$p \geq n \geq p - \frac{2 + \alpha + \log(C)}{1 - \alpha}.$$

Par conséquent, le nombre de  $n$  possible est borné par le rapport  $1 + \frac{2 + \alpha + \log(C)}{1 - \alpha} = \frac{3 + \log(C)}{1 - \alpha}$ . Pour le cas  $\alpha = 1$ , on a un résultat un peu plus faible : si  $\rho$  est  $L$ -lipschitz avec  $L$  assez petit alors  $\rho$  vérifie la condition (4.5) : avec les mêmes notations, on obtient :

$$2^{p-2} \leq 2^{p-1} - 2^{n+1} \leq |\rho(x) - \rho(y)| \leq L|x - y| \leq L2^{p+1}.$$

Cette inégalité est impossible pour  $L < 1/8$ . Par conséquent pour  $L < 1/8$ , l'ensemble  $\Omega_n + B(0, 2^n)$  peut rencontrer  $\Omega_p + B(0, 2^p)$  seulement si  $|n - p| \leq 3$ . On a donc bien un recouvrement borné.

Malheureusement comme le montre le calcul dans le cas de deux intervalles (voir le lemme 3.1.4) la fonction  $\rho$  est en fait une distance par rapport à certains points. Donc dans le cas général  $\rho$  est 1-lipschitz, ce qui ne permet pas de conclure.

Notons  $U_g$  et  $U_d$  les deux opérateurs adjoints de  $T_\rho$  (on oublie la dépendance en  $\rho$ ) par rapport à  $f$  et à  $g$ .

$$U_g(h, g) : y \rightarrow \int_{|u-y| \leq \rho_u} g(y+u)h(u) \frac{du}{\rho_u}$$

$$U_d(f, h) : y \rightarrow \int_{|u-y| \leq \rho_u} f(2u-y)h(u) \frac{du}{\rho_u}.$$

**Théorème 4.2.3.** *Si la fonction  $\rho$  vérifie la condition (4.5) alors les trois opérateurs  $T_\rho$ ,  $U_g$  et  $U_d$  sont continus de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  pour des exposants  $p, q, r$  vérifiant la condition d'homogénéité (4.4) et la restriction :*

$$1/2 \leq r < \infty \quad 1 \leq p, q < \infty.$$

**Démonstration :** Les deux opérateurs  $U_d$  et  $U_g$  se traitent exactement de la même manière par symétrie. Nous allons nous intéresser donc uniquement à  $U_d$ . On va découper l'espace selon les ensembles  $\Omega_n := \{u, 2^{n-1} < \rho_u \leq 2^n\}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On obtient alors :

$$\|U_d(f, h)\|_{1/2}^{1/2} \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \int_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f(2u-y)h(u) \frac{du}{2^n} \right\|_{1/2}^{1/2}. \quad (4.7)$$

Pour tout  $n$ , on décompose les fonctions  $f$  et  $h$  à l'échelle  $2^n$  selon les intervalles  $I_i^n = [i2^n, (i+1)2^n]$  : on note :

$$f_{i,n} = f \mathbf{1}_{I_i^n} \quad h_{j,n} = h \mathbf{1}_{I_j^n}.$$

On obtient alors la majoration suivante :

$$\|U_d(f, h)\|_{1/2}^{1/2} \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i,j} \left\| \int_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f_{i,n}(2u-y)h_{j,n}(u) \frac{du}{2^n} \right\|_{1/2}^{1/2}.$$

Par condition de support, on voit que le terme est non nul seulement dans le cas où :

$$|i - j| \leq 2,$$

On a donc une estimation du type :

$$\|U_d(f, h)\|_{1/2}^{1/2} \lesssim \sum_{-2 \leq k \leq 2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\| \int_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f_{i,n}(2u-y) h_{i+k,n}(u) \frac{du}{2^n} \right\|_{1/2}^{1/2}.$$

On utilise l'inégalité de Hölder pour obtenir la majoration

$$\left\| \int_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f_{i,n}(2u-y) h_{i+k,n}(u) \frac{du}{2^n} \right\|_{1/2}^{1/2} \leq \left( \iint_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f_{i,n}(2u-y) h_{i+k,n}(u) \frac{dudy}{2^n} \right)^{1/2} 2^{n/2}.$$

On obtient donc :

$$\|U_d(f, h)\|_{1/2}^{1/2} \lesssim \sum_{k=-2}^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \iint_{\substack{|u-y| \leq 2^n \\ u \in \Omega_n}} f_{i,n}(2u-y) h_{i+k,n}(u) dudy \right)^{1/2}.$$

On finit les estimations par l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|U_d(f, h)\|_{1/2}^{1/2} &\lesssim \sum_{k=-2}^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\|f_{i,n} \mathbf{1}_{\Omega_n+B(0,2^n)}\|_1 \|h_{i+k,n} \mathbf{1}_{\Omega_n}\|_1)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=-2}^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_i \|f_{i,n} \mathbf{1}_{\Omega_n+B(0,2^n)}\|_1 \right)^{1/2} \left( \sum_i \|h_{i+k,n} \mathbf{1}_{\Omega_n}\|_1 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=-2}^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\|f \mathbf{1}_{\Omega_n+B(0,2^n)}\|_1)^{1/2} (\|h \mathbf{1}_{\Omega_n}\|_1)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=-2}^2 \|f\|_1^{1/2} \|h\|_1^{1/2} \lesssim \|f\|_1^{1/2} \|h\|_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé que pour  $n$  fixé, les intervalles  $(I_j^n)_j$  sont disjoints en  $j$ , puis après on a utilisé la condition (4.5) pour sommer en  $n$ . Par conséquent, l'opérateur  $U_d$  est continu de  $L^1 \times L^1$  dans  $L^{1/2}$ . En utilisant la proposition et la dualité, on obtient que  $U_d$  est continu de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  pour  $r > 1$ . On en déduit le résultat final pour  $U_d$  (et donc  $U_g$ ) par interpolation. Pour l'opérateur  $T_\rho$  le même principe s'applique : on décompose selon  $n$ , puis on décompose les deux fonctions  $f$  et  $g$ . Les mêmes estimations permettent de conclure.  $\square$

**Remarque 4.2.4.** La condition (4.5) est utilisée à la fin pour compenser la perte d'information due à la majoration dans (4.7). Cette estimation est importante car elle permet après de décomposer les fonctions à l'échelle du paramètre  $\rho_u$ . Cette méthode certes limitée par la condition (4.5) a l'avantage de pouvoir s'étendre automatiquement pour les fonctions maximales  $n$ -linéaires dans  $\mathbb{R}^d$  pour  $n$  et  $d$  quelconques. Par exemple pour  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une collection de matrices  $d \times d$  inversibles, on peut considérer la fonction maximale suivante :

$$\forall f_i \in \mathbf{S}(R^d), \quad M_{A_i}(f_1, \dots, f_n)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \left| \prod_{i=1}^n f_i(x - A_i z) \right| dz.$$



Nous avons remarqué dans le cas du calcul exact avec deux intervalles (proposition 3.1.5), que le cas intéressant fait appel à des fonctions  $\rho$  vérifiant la propriété suivante : il existe un ensemble  $A$  tel que : “ $\rho(x) = d(x, A)$ ”. Cette propriété était localisée sur le support de l’opérateur. Nous allons donc supposer que la fonction  $\rho$  vérifie alors la propriété suivante :

$$\exists A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \text{ discret}, \quad \rho(x) := d(x, A)\mathbf{1}_B(x). \quad (4.8)$$

D’après la proposition 3.1.5 (où nous avons exactement calculé la fonction  $\rho$  adaptée au cas où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions indicatrices d’intervalles) et le lemme général 3.1.4, une étude complète sur ce “type” de fonctions  $\rho$  serait suffisante pour en déduire des continuités sur l’opérateur maximal  $T_*$ . Malheureusement, nous n’avons pas de résultat positif sans hypothèses supplémentaires. Nous avons le résultat partiel suivant :

**Théorème 4.2.5.** *Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles vérifiant (4.8). S’il existe un exposant  $\alpha < 1$  tel que :*

$$\int_{B+B(0, \|\rho\|_\infty)} d(x, A)^{-\alpha} dx := I < \infty,$$

alors pour tous exposants  $p, q, r$  vérifiant la condition d’homogénéité

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

et la restriction

$$\alpha^{-1} < r^{-1} \leq \alpha^{-1} + 1 \quad 0 < p, q,$$

il existe une constante  $C = C(p, q, r, \alpha)$  telle que pour toutes fonctions  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  :

$$\|T_\rho(f, g)\|_r, \|U_d(f, g)\|_r, \|U_g(f, g)\|_r \leq CI^{1/\alpha} \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Remarque 4.2.6.** *Ce résultat permet d’obtenir des résultats de continuité pour des exposants  $1/2 < r < 1$ , mais la borne dépend de l’intégrale  $I$ .*

**Démonstration :** La démonstration est la même pour les trois opérateurs. Nous allons donc traiter uniquement le cas de  $U_d$ . On a :

$$|U_d(f, g)(x)| = \left| \int_{|u-x| \leq \rho_u} f(2u-x)h(u) \frac{du}{\rho_u} \right| \leq \int_{|u-x| \leq d(u, A)} |f(2u-x)h(u)| \frac{du}{d(u, A)}.$$

On note de la même manière que précédemment  $\Omega_n = \{z, 2^{n-1} \leq r_z \leq 2^n\}$ . Notons alors la fonction  $\phi$  définie par :

$$\phi(z) := \sum_n 2^{-n} \mathbf{1}_{\Omega_n + B(0, 2^n)}(z).$$

Alors on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |U_d(f, g)(x)| &\leq \sum_n \int_{\substack{u \in \Omega_n \\ |u-x| \leq d(u, A)}} |f(2u-x)h(u)| \frac{du}{d(u, A)} \\ &\leq \sum_n \int_{\substack{u \in \Omega_n \\ |u-x| \leq 2^n}} |f(2u-x)h(u)| \frac{du}{2^n} \\ &\leq \sum_n 2^{-n} \mathbf{1}_{\Omega_n + B(0, 2^n)}(x) \int_{\mathbb{R}} |f(2u-x)h(u)| du \\ &\leq \phi(x) \int_{\mathbb{R}} |f(2u-x)h(u)| du. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Estimons la fonction  $\phi$  :

$$\phi(x) := \sum_n 2^{-n} \mathbf{1}_{\Omega_n + B(0, 2^n)}(x).$$

Pour  $x$  fixé, soit  $n$  un entier concerné dans la sommation. Alors il existe  $z \in \Omega_n$  tel que  $|x - z| \leq 2^n$ . C'est à dire qu'il existe  $z \in B$  tel que :

$$\rho_z = \rho(z) = d(z, A) \leq 2^n \quad \text{et} \quad |x - z| \leq 2^n.$$

On en déduit donc que  $d(x, A) \leq 2^{n+1}$ . Par conséquent, on obtient :

$$\phi(x) \leq \sum_n 2^{-n} \mathbf{1}_{d(x, A) \leq 2^{n+1}} \lesssim \frac{1}{d(x, A)}.$$

D'après l'hypothèse du théorème, on en déduit donc que  $\phi \in L^\alpha$ . Par l'inégalité de Hölder, on obtient donc avec (4.9)

$$\|U_d(f, g)\|_r \leq \|\phi\|_\alpha \left\| \int_{\mathbb{R}} |f(2u - x)h(u)| du \right\|_s \lesssim \|d(\cdot, A)\|_\alpha \left\| \int_{\mathbb{R}} |f(2u - x)h(u)| du \right\|_s,$$

avec l'exposant  $s$  vérifiant  $r^{-1} = \alpha^{-1} + s^{-1}$  et donc  $1 \leq s \leq \infty$ . En utilisant l'inégalité de Young sur la convolution, on obtient l'inégalité souhaitée

$$\|U_d(f, g)\|_r \lesssim I^{1/\alpha} \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Remarque 4.2.7.** Dans le cas de la proposition 3.1.5, l'ensemble  $A$  était un ensemble de 2 points. Dans le cas général, si  $A$  est un ensemble discret de  $N$  points, l'intégrale  $I$  ne peut être bornée que par :

$$I \lesssim N^{1-\alpha}.$$

**Conclusion :** Nous avons trouvé quelques conditions de "régularité" sur  $\rho$  pour assurer des continuités pour les opérateurs  $T_\rho$  et ses adjoints. Ces méthodes élémentaires se généralisent pour des variables multidimensionnelles mais ne permettent pas d'en déduire des informations sur l'opérateur maximal  $T_*$ . Nous allons maintenant apporter quelques précisions sur les continuités des opérateurs bilinéaires sur l'espace "limite"  $L^1 \times L^\infty$ .

### 4.3 Action sur $L^1 \times L^\infty$ .

Dans cette section nous allons essayer de comprendre un peu mieux le comportement des opérateurs bilinéaires sur  $L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})$ . Tous les théorèmes énoncés auparavant supposent la condition  $1 < p, q$  sur les deux exposants. Les techniques fréquentielles employées dégénèrent lorsque l'un d'entre eux tend vers l'exposant 1. On considère  $K$  un noyau de Calderón-Zygmund et on étudie l'opérateur  $T_{K, \mu}$  défini par :

$$T_{K, \mu}(f, g) := x \rightarrow v.p. \int K(y) f(x - y) g(x - \mu y) dy,$$

ou l'opérateur maximal bilinéaire  $T_{*,\mu}$  défini par :

$$T_{*,\mu}(f, g) := x \rightarrow \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |f(x-y)g(x-\mu y)| dy.$$

Si on suppose suffisamment de régularité sur le noyau  $K$ , alors  $T_{K,\mu}$  est un cas particulier d'opérateur étudié dans les deux premiers chapitres et le théorème 4.1.7 de ce chapitre s'applique. Ici, on suppose juste la régularité minimale sur  $K$ , imposée par l'hypothèse d'être un noyau de Calderón-Zygmund, c'est-à-dire qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour  $|h| \leq \frac{1}{2}|x-y|$  :

$$|K(x, y)| \leq |x-y|^{-1} \quad \text{et}$$

$$|K(x, y) - K(x+h, y)| + |K(x, y) - K(x, y+h)| \lesssim \frac{h^\epsilon}{|x-y|^{1+\epsilon}}.$$

Toute cette partie se généralise au cas de variables multidimensionnelles et nous allons simplement la traiter pour des variables réelles.

**Définition 4.3.1.** On définit l'espace  $L_N^{1,\infty}$ , l'espace "L<sup>1</sup>" faible normé, comme étant l'ensemble des fonctions  $f$  telle que :

$$\|f\|_{1,\infty,*} := \inf \left\{ \sum \|f_i\|_{1,\infty}, f = \sum f_i \text{ p.p.} \right\} < \infty.$$

Cet espace a déjà été étudié dans [13]. On a alors deux résultats sur cet espace :

**Proposition 4.3.2.** L'espace  $L_N^{1,\infty}$  est un espace de Banach, et vérifie  $(L_N^{1,\infty})^* = (L^{1,\infty})^*$ . De plus le sous espace  $L^{1,\infty}$  est dense dans  $L_N^{1,\infty}$ .

**Démonstration :** La propriété sur l'espace dual est claire par construction. Il nous reste à montrer la complétude. On prend donc une suite  $f_n \in L_N^{1,\infty}$  qui converge absolument. A chaque fonction  $f_n$ , on a une suite  $f_n^i$  de  $L^{1,\infty}$ , telle que  $f_n = \sum f_n^i$  et :

$$\|f_n\|_{1,\infty,*} = \sum_i \|f_n^i\|_{1,\infty}.$$

Ainsi, on se ramène après réarrangement à étudier simplement la convergence d'une suite absolument sommable dans  $L^{1,\infty}$ . Soit  $f_n$  une suite absolument sommable dans  $L^{1,\infty}$ . On veut montrer que la série converge dans l'espace  $L^{1,\infty,*}$ . Regardons l'ensemble où il n'y a pas de convergence :

$$E := \{x, (f_n(x))_n \text{ ne converge pas}\} = \bigcup_{p \geq 0} \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n_1, n_2 \geq N} \{|f_{n_1} - f_{n_2}| \geq 2^{-p}\}.$$

Alors par définition de la norme  $L^{1,\infty}$ .

$$|\{|f_{n_1} - f_{n_2}| \geq 2^{-p}\}| \leq 2^p [\|f_{n_1}\|_{1,\infty} + \|f_{n_2}\|_{1,\infty}].$$

D'où :

$$\left| \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n_1, n_2 \geq N} \{|f_{n_1} - f_{n_2}| \geq 2^{-p}\} \right| \leq \liminf 2^{p+1} \sum_{n \geq N} \|f_n\|_{1,\infty} = 0.$$

Par conséquent, on a bien,  $|E| = 0$ . Soit  $f$  la limite presque partout ainsi définie. Alors  $f = \sum f_n$  presque partout et :

$$\|f - f_n\|_{1,\infty,*} \leq \sum_{p \geq n+1} \|f_p\|_{1,\infty} \rightarrow 0.$$

Par conséquent : toute famille absolument sommable est convergente. L'espace est donc bien complet pour cette norme.  $\square$

Le lemme suivant nous permet d'effectuer les opérations classiques avec cette nouvelle norme :

**Lemme 4.3.3.** *Pour  $f$  une fonction, on a l'équivalence  $f \in L_N^{1,\infty} \Leftrightarrow |f| \in L_N^{1,\infty}$  avec égalité des normes. De plus si  $0 \leq f \leq g$  alors  $g \in L_N^{1,\infty} \Rightarrow f \in L_N^{1,\infty}$ , et l'on a :*

$$\|g\|_{1,\infty,*} \leq \|f\|_{1,\infty,*}.$$

On dispose du lemme de Fatou généralisé dans l'espace  $L_N^{1,\infty}$  : si  $f_n$  est une suite alors :

$$\|\liminf f_n\|_{1,\infty,*} \leq \liminf \|f_n\|_{1,\infty,*}.$$

**Démonstration :** Toutes ces propriétés découlent directement de la formulation suivante, démontrée dans l'article [13]. On a l'expression exacte de la norme :

$$\|f\|_{1,\infty,*} = \limsup_{b/a \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)} \int_{a \leq |f| \leq b} |f|.$$

$\square$

Soit  $\epsilon > 0$ , on définit l'opérateur tronqué suivant :

$$T_\epsilon(f, g)(x) := \int K(y) f(x-y) g(x-\mu y) \mathbf{1}_{|y| \geq \epsilon} dy.$$

**Théorème 4.3.4.** *L'opérateur  $T_\epsilon$  est continu uniformément en  $\epsilon$  et en  $\mu$  de l'espace  $L^1 \times L^\infty$  dans l'espace  $L_N^{1,\infty}$ , de même pour  $T_*$  l'opérateur maximal bilinéaire.*

**Démonstration :** Par changement de variable, on obtient :

$$T_\epsilon(f, g)(x) = \int K(x-y) f(y) g(x-\mu(x-y)) \mathbf{1}_{|x-y| \geq \epsilon} dy.$$

Notons  $F(y, x) = f(y) g(x-\mu(x-y))$ . Comme  $f \in L^1$  et  $g \in L^\infty$ , il vient  $F \in L_y^1(L_x^\infty)$  avec

$$\|F\|_{L^1(L^\infty)} = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Le théorème d'identification de  $L^1(L^\infty)$  par le produit tensoriel  $L^1 \boxtimes L^\infty$  (voir [16]), nous permet de décomposer  $F$  sous la forme suivante :

$$F(y, x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) g_i(x),$$

avec  $\sum \|f_i\|_1 \|g_i\|_\infty \leq 2\|F\|_{L^1(L^\infty)}$ . Alors on a la décomposition suivante :

$$T_\epsilon(f, g)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} K_\epsilon * f_i(x) g_i(x). \quad (4.10)$$

On a noté  $K_\epsilon$  la troncature de  $K$ . Pour justifier l'interversion de la série et de l'intégrale, on applique le théorème de Fubini :

$$\iint \sum_i |K(x-y) f_i(y) g_i(x)| \mathbf{1}_{|x-y| \geq \epsilon} dy dx \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_i \|f_i\|_1 \|g_i\|_\infty < \infty.$$

L'interversion étant justifiée, on utilise la nouvelle norme pour arriver à l'estimation suivante :

$$\|T_\epsilon(f, g)\|_{1, \infty, *} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|K_\epsilon * f_i\|_{1, \infty} \|g_i\|_\infty.$$

On utilise le fait que  $K$  est un noyau de Calderón-Zygmund donc la convolution par les noyaux  $K_\epsilon$  est bornée de  $L^1$  dans  $L^{1, \infty}$  uniformément en  $\epsilon$ , et la propriété sur la décomposition tensorielle, pour obtenir la continuité de l'opérateur  $T_\epsilon$  :

$$\|T_\epsilon(f, g)\|_{1, \infty, *} \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_1 \|g_i\|_\infty \lesssim \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

La borne de continuité est uniforme en  $\epsilon$ . □

**Proposition 4.3.5.** *Les opérateurs  $T_{K, \mu}$  et  $T_{*, \mu}$  sont continus de  $L^1 \times L^\infty$  dans  $L_N^{1, \infty}$  de manière uniforme en  $\mu$ .*

**Démonstration :**  $T_K$  est l'opérateur correspondant à  $T_K(f, g)(x) = v.p. \int K(y) f(x-y) g(x-\mu y) dy$ . Pour  $f \in L^1$ ,  $g \in L^\infty$ ,  $T(f, g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon(f, g)$ , pour presque tout  $x$  : c'est une propriété des opérateurs à noyaux standards. On applique le lemme de Fatou généralisé :

$$\|T_K(f, g)\|_{1, \infty, *} \leq \left\| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon(f, g) \right\|_{1, \infty, *} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon(f, g)\|_{1, \infty, *}.$$

Les opérateurs  $T_\epsilon$  étant bornés de manière uniforme, on obtient ainsi la continuité de  $T_K$ . La démonstration est identique pour  $T_{*, \mu}$ . □

Par changement de variable, on a :

$$v.p. \int K(y) f(x-y) g(x-\mu y) dy = v.p. \int \frac{1}{\mu} K(y/\mu) f(x-\mu^{-1}y) g(x-y) dy.$$

Le noyau  $\mu^{-1}K(\mu^{-1}y)$  est borné en tant que noyau de Calderón-Zygmund, par les mêmes constantes que celle de  $K$ , de ce fait, par symétrie, on peut appliquer le même raisonnement que précédemment avec  $g \in L^1$  et  $f \in L^\infty$ . On a donc le résultat suivant :

**Théorème 4.3.6.** *Par symétrie l'opérateur  $T_{K, \mu}K$  est continu sur l'espace  $L^1 \times L^\infty$  et  $L^\infty \times L^1$  à valeurs dans  $L_N^{1, \infty}$ . Par interpolation, il est aussi continu sur les espaces  $L^p \times L^q$  dans  $L_N^{1, \infty}$ , où  $1 < p, q < \infty$  sont des exposants conjugués. De plus la borne est uniforme selon le paramètre  $\mu$ . Il en est de même pour  $T_{*, \mu}$ .*

Si l'on voulait utiliser cette méthode pour montrer des continuités sur les espaces de Lebesgue. Il nous faudrait pouvoir interpoler les espaces  $L_N^{1,\infty}$  et  $(L_N^{1,\infty})^*$  avec les espaces de Lebesgue. On sait que cet espace dual  $(L^{1,\infty})^*$  est non vide, mais on ne sait pas l'interpoler avec les espaces de Lebesgue.

Cet argument basé sur une décomposition tensorielle de l'espace  $L^1(L^\infty)$  fonctionne pour des variables multidimensionnelles et se généralise à des opérateurs plus généraux, où l'on remplace le paramètre  $\mu$  par un paramètre variable : soit  $v$  une application quelconque, alors les opérateurs bilinéaires suivants :

$$T_\epsilon(f, g)(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} K(y) f(x - y) g(x - v(y)) dy$$

sont continus de  $L^1 \times L^\infty$  dans  $L_N^{1,\infty}$  et ce de manière uniforme en  $\epsilon > 0$ .

L'espace  $L_N^{1,\infty}$  apparaît naturellement par cette méthode. Il correspond à l'espace vectoriel engendré par l'image  $T(L^1)$  où  $T$  est l'opérateur linéaire associé au noyau  $K$ . La transformée de Hilbert linéaire envoie  $L^1$  dans  $L^{1,\infty}$ , mais envoie aussi  $H^1$  dans  $L^1$ . On peut réappliquer la même méthode avec pour objectif l'espace  $L^1$  à l'arrivée. C'est l'objet du résultat suivant :

**Proposition 4.3.7.** *Soit  $U, V$  deux fermés tels que 0 soit à gauche (ou à droite) de  $U - V := \{u - v, u \in U, v \in V\}$ . Alors pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  à spectre dans  $U$  et  $V$  respectivement, on a la majoration suivante :*

$$\left\| v.p. \int f(x+t)g(x-t) \frac{dt}{t} \right\|_1 \lesssim \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

**Démonstration :** La démonstration suit le même principe. On note

$$T(f, g)(x) := v.p. \int f(x+t)g(x-t) \frac{dt}{t} = v.p. \int f(z)g(2x-z) \frac{dz}{x-z}.$$

Notons  $F(y, z) = f(z)g(2y - z)$ . Le spectre d'un produit de fonctions est contenu dans la somme des spectres d'où :

$$sp_z F(y, \cdot) \subset sp(f) - sp(g) \subset U - V.$$

Par hypothèse sur les ensembles  $U$  et  $V$ , en notant  $H^1$  la transformée de Hilbert linéaire, on obtient que :

$$H^1(F(y, \cdot))(z) = C_\pm F(y, z) = C_\pm f(z)g(2y - z).$$

La constante  $C_\pm$  dépend de la position de  $U - V$  par rapport à 0. Par conséquent  $H^1(F(y, \cdot))(z) \in L_z^1(L_y^\infty)$ , et :

$$\|H^1(F)\|_{L^1(L^\infty)} = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Le théorème d'identification de  $L^1(L^\infty)$  par  $L^1 \boxtimes L^\infty$  (voir [16]), nous permet de décomposer  $H^1(F)$  sous la forme suivante :

$$H^1(F(y, \cdot))(z) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(z) g_i(y),$$

avec  $\sum \|h_i\|_1 \|g_i\|_\infty \leq 2\|F\|_{L^1(L^\infty)}$ . Choisissons  $f_i = -H^1(h_i)$ , on a alors :

$$F(y, z) = \sum_i f_i(z)g_i(y).$$

On a obtenu la décomposition suivante :

$$T(f, g)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} H^1(f_i)(x)g_i(x) = \sum_i h_i(x)g_i(x), \quad (4.11)$$

et donc

$$\|T(f, g)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|_1 \|g_i\|_\infty \lesssim \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

□

**Remarque 4.3.8.** *Ce résultat est très limité à la transformée de Hilbert bilinéaire, car on utilise que la transformée de Hilbert linéaire  $H^1$  est un opérateur inversible. Cependant on a vu dans le chapitre 3 que l'étude de la transformée de Hilbert bilinéaire nous permet d'obtenir des renseignements pour les autres opérateurs  $T_K$  (avec  $K$  un noyau de Calderón-Zygmund) dans le cas de concentration minimale, par des arguments géométriques.*

**Conclusion :** Nous avons ainsi commencé l'étude de la continuité des opérateurs bilinéaires sur l'espace "limite"  $L^1 \times L^\infty$ . Cette étude incomplète permet de révéler avec des arguments élémentaires quelques aspects de ce problème.

**Deuxième partie**  
**Espaces de Hardy abstraits.**





# Chapitre 5

## Espaces de Hardy abstraits.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Definitions . . . . .</b>	<b>172</b>
<b>5.2</b>	<b>Comparison with other Hardy spaces. . . . .</b>	<b>173</b>
5.2.1	The space of Coifman-Weiss. . . . .	173
5.2.2	Hardy spaces for Schrödinger operators with potentials. . . . .	174
5.2.3	Hardy spaces associated to divergence form elliptic operators. . . . .	175
5.2.4	Hardy spaces associated to a general semi-group. . . . .	176
<b>5.3</b>	<b>Continuity theorem on the Hardy space. . . . .</b>	<b>177</b>
<b>5.4</b>	<b>Interpolation theorem between <math>L^2(X)</math> and <math>H_{ato}^1</math>. . . . .</b>	<b>181</b>
<b>5.5</b>	<b>Continuity results in weighted spaces. . . . .</b>	<b>189</b>
<b>5.6</b>	<b>Embedding of <math>H_{\epsilon, mol}^1</math> into <math>L^1</math>. . . . .</b>	<b>192</b>
<b>5.7</b>	<b>An application for the <math>L^p</math> maximal regularity. . . . .</b>	<b>195</b>
<b>5.8</b>	<b>Study of the duality in Hardy spaces. . . . .</b>	<b>210</b>

---

# Abstract Hardy Spaces

Frédéric Bernicot<sup>1</sup> and Jiman Zhao<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Paris-Sud, Orsay et CNRS 8628, 91405 Orsay Cedex, France

*E-mail address* : frederic.bernicot@math.u-psud.fr

<sup>2</sup> School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University

Beijing 100875, P.R. China

*E-mail address* : jzhao@pku.org.cn

## Abstract

The aim of this paper is to propose an abstract construction of spaces which will have the same properties as the (already known) Hardy spaces  $H^1$ . We construct these spaces through an atomic (or molecular) decomposition. We will prove some results about continuity from these spaces into  $L^1$  and some results about interpolation between these spaces and the Lebesgue spaces. We will see that our Hardy spaces are well adapted for the interpolation theory. Then we will apply this abstract theory to show a well-known result : the  $L^p$  maximal regularity. [math.u-psud.fr/](http://math.u-psud.fr/)

**Key words** : Hardy spaces, maximal regularity, atomic decomposition, interpolation

The theory of real Hardy spaces started in the 60's, and in the 70's the atomic Hardy space appeared. Let us recall its definition first (see [52]).

Let  $(X, d, \mu)$  be a space of homogeneous type. Let  $\epsilon > 0$  be a fixed parameter. A function  $m \in L^1_{loc}(X)$  is called an  $\epsilon$ -molecule associated to a ball  $Q$  if  $\int_X m(x)d\mu(x) = 0$ , for all  $i \geq 0$

$$\left( \int_{2^{i+1}Q \setminus 2^iQ} |m|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \mu(2^{i+1}Q)^{-1/2} 2^{-\epsilon i} \text{ and } \left( \int_Q |m|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \mu(Q)^{-1/2}$$

We call  $m$  an atom if in addition we have  $\text{supp}(m) \subset Q$ . So an atom is exactly an  $\infty$ -molecule. Then a function  $f$  belongs to  $H^1_{CW}$  if there exists a decomposition

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i \quad \mu - a.e.,$$

where  $m_i$  are  $\epsilon$ -molecules and  $\lambda_i$  are coefficients which satisfy

$$\sum_i |\lambda_i| < \infty.$$

It was proved in [77] that the whole space  $H^1_{CW}$  does not depend on  $\epsilon$ , as in fact one obtains the same space replacing  $\epsilon$ -molecules by atoms or  $\epsilon'$ -molecules with  $\epsilon' > 0$ .

In the Euclidean case ( $X = \mathbb{R}^n$  with the Lebesgue measure) this space has many different

characterizations, thanks to [77]

$$f \in H_{CW}^1 \iff f \in \mathcal{H}^1 := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n); \nabla(\sqrt{-\Delta})^{-1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \right\} \quad (5.1)$$

$$\iff x \mapsto \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ |x-y| \leq t}} \left| e^{-t\sqrt{-\Delta}}(f)(y) \right| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad (5.2)$$

$$\iff x \mapsto \left( \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ |x-y| \leq t}} \left| t \nabla e^{-t\sqrt{-\Delta}}(f)(y) \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (5.3)$$

where  $\nabla(\sqrt{-\Delta})^{-1}$  is the Riesz transform. The space  $\mathcal{H}^1$  defined by (5.1) was the original Hardy space of E.M. Stein (see [76]) and [77] provided the equivalence with the definition using maximal function and area function. The link with  $H_{CW}^1$  (due to R. Coifman one year later in [63]) can be understood from the celebrated theorem of C. Fefferman which says (in vague terms)

$$h \in (\mathcal{H}^1)^* \iff \|h\|_{BMO} := \left( \sup_{Q \text{ ball}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| f - \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty.$$

Here  $BMO$  is the space of John-Nirenberg. In fact it is relatively easy to show that

$$h \in (H_{CW}^1)^* \iff \|h\|_{BMO} < \infty,$$

hence the identification between  $\mathcal{H}^1$  and  $H_{CW}^1$ .

The space  $H_{CW}^1$  is a good substitute of  $L^1(X)$  for many reasons. For instance, Calderón-Zygmund operators map  $H_{CW}^1$  to  $L^1$  whereas they do not map  $L^1$  to  $L^1$ . In addition,  $H_{CW}^1$  (and its dual) interpolates with Lebesgue spaces  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . That is why  $H_{CW}^1$  is a good space to prolonge the scale of Lebesgue spaces  $(L^p)_{1 < p < \infty}$  for  $p$  tends to 1 and its dual  $BMO$  for  $p$  tends to  $\infty$ .

However, there are situations where  $H_{CW}^1$  is not the right substitute to  $L^1$  and there has been recently a number of works with goal to define an adapted Hardy space [39, 40, 45, 60, 57, 59, 61, 58, 62, 70]. For example  $H_{CW}^1$  is not well adapted to operators such as the Riesz transform on Riemannian manifolds (or on graphs) or the maximal regularity operator [39, 40, 42, 70, 74]. That is why in [57, 70] the authors define a new space  $H_L^1$  by the  $L^1$  norm of the previous maximal functions (in (5.2) and (5.3)) with another operator  $L$  instead of the Laplacian  $\Delta$ . With this new definition, they show that under some conditions on  $L$ , the space  $H_L^1$  has an equivalent definition to a molecular decomposition. They have studied the intermediate spaces between  $H_L^1$  and the Lebesgue spaces and also the dual space  $(H_L^1)^*$ .

Our aim here is to construct abstract Hardy spaces by a molecular decomposition and we want to use the weakest assumptions to obtain good properties for these spaces. Mainly, we want to have a criterion for the continuity of an operator from the Hardy space into  $L^1$  and to have an interpolation result between the Hardy space and Lebesgue spaces. Then we will apply these abstract results to a particular case and we will reobtain the known results about  $L^p$  maximal regularity. We will finish this paper by the study of the dual space.

## 5.1 Definitions

Let  $(X, d, \mu)$  be a space of homogeneous type. So  $d$  is a quasi-distance on the space  $X$  and  $\mu$  a Borel measure which satisfies the doubling property :

$$\exists A > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in X, \forall r > 0, \forall t \geq 1, \quad \frac{\mu(B(x, tr))}{\mu(B(x, r))} \leq At^\delta, \quad (5.4)$$

where  $B(x, r)$  is the open ball with center  $x \in X$  and radius  $r > 0$ . We call  $\delta$  the homogeneous dimension of  $X$ . For  $Q$  a ball, and  $i \geq 0$ , we write  $S_i(Q)$  the scaled corona around the ball  $Q$  :

$$S_i(Q) := \left\{ x, 2^i \leq 1 + \frac{d(x, c(Q))}{r_Q} < 2^{i+1} \right\},$$

where  $r_Q$  is the radius of the ball  $Q$  and  $c(Q)$  its center. Note that  $S_0(Q)$  corresponds to the ball  $Q$  and  $S_i(Q) \subset 2^{i+1}Q$  for  $i \geq 1$ , where  $\lambda Q$  is as usual the ball with center  $c(Q)$  and radius  $\lambda r_Q$ .

Let us denote by  $\mathcal{Q}$  the collection of all balls :

$$\mathcal{Q} := \{B(x, r), x \in X, r > 0\}.$$

Let  $\mathbb{B} := (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  be a collection of  $L^2(X, \mathbb{R})$ -bounded linear operator<sup>1</sup>, indexed by the collection  $\mathcal{Q}$ . We assume that these operators  $B_Q$  are uniformly bounded on  $L^2$  : there exists a constant  $0 < A' < \infty$  so that :

$$\forall f \in L^2, \forall Q \text{ ball}, \quad \|B_Q(f)\|_2 \leq A' \|f\|_2. \quad (5.5)$$

In the rest of the paper, we allow the constants to depend on  $A, A'$  and  $\delta$ .

Now, we define *atom* and *molecule* by using the collection  $\mathbb{B}$  :

**Definition 5.1.1.** *Let  $\epsilon > 0$  be a fixed parameter. A function  $m \in L^1_{loc}(X)$  is called an  $\epsilon$ -molecule associated to a ball  $Q$  if there exists a real function  $f_Q$  such that*

$$m = B_Q(f_Q),$$

with

$$\forall i \geq 0, \quad \|f_Q\|_{2, S_i(Q)} \leq (\mu(2^i Q))^{-1/2} 2^{-\epsilon i}.$$

We call  $m = B_Q(f_Q)$  an atom if in addition we have  $\text{supp}(f_Q) \subset Q$ . So an atom is exactly an  $\infty$ -molecule.

The functions  $f_Q$  in this definition are normalized in  $L^1(X)$ . It is easy to show that

$$\|f_Q\|_1 \lesssim 1 \quad \text{and} \quad \|f_Q\|_2 \lesssim \mu(Q)^{-1/2}.$$

So by the  $L^2$ -boundedness of the operator  $B_Q$ , we have that each molecule belongs to the space  $L^2(X)$ , however the molecule are not (for the moment) bounded in the space  $L^1(X)$ . In Section 5.6, we will put some other conditions on the operators  $B_Q$  which will guarantee that the molecules will be uniformly bounded in the space  $L^1(X)$ . But for the moment, we want to work with the most general case. Now we are able to define our abstract Hardy spaces :

<sup>1</sup>Here we are working with real valued function and we will use "real" duality. We have the same results with complex duality and complex valued functions.

**Definition 5.1.2.** A measurable function  $h$  belongs to the molecular Hardy space  $H_{\epsilon, \text{mol}}^1$  if there exists a decomposition :

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i \quad \mu - a.e.,$$

where for all  $i$ ,  $m_i$  is an  $\epsilon$ -molecule and  $\lambda_i$  are real numbers satisfying

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| < \infty.$$

We define the norm :

$$\|h\|_{H_{\epsilon, \text{mol}}^1} := \inf_{h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i} \sum_i |\lambda_i|.$$

Similarly we define the atomic space  $H_{\text{ato}}^1$  replacing  $\epsilon$ -molecules by atoms.

Let us make some remarks.

**Remark 5.1.3.** 1-) First we only ask that the decomposition

$$h(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i(x)$$

is well defined for almost every  $x \in X$ . So the assumption is very weak and it is possible that the measurable function  $h$  does not belong to  $L_{\text{loc}}^1(X)$ . It is not clear whether these abstract spaces are Banach spaces. The problem is that we do not know whether the decompositions for  $h$  converge absolutely. See Section 5.6 for a condition insuring this. However we do not need the property of completeness for the moment.

2-) We have the following continuous inclusion :

$$\forall 0 < \epsilon < \epsilon', \quad H_{\text{ato}}^1 \hookrightarrow H_{\epsilon', \text{mol}}^1 \hookrightarrow H_{\epsilon, \text{mol}}^1. \quad (5.6)$$

In fact the space  $H_{\text{ato}}^1$  corresponds to the space  $H_{\infty, \text{mol}}^1$ . For  $0 < \epsilon < \epsilon' < \infty$  the space  $H_{\epsilon', \text{mol}}^1$  is dense in  $H_{\epsilon, \text{mol}}^1$ . In the general case, it seems to be very difficult to study the dependence of the space  $H_{\epsilon, \text{mol}}^1$  with the parameter  $\epsilon$  and we will not study this question here.

3-) We have seen that each molecule is an  $L^2$  function. So it is obvious that  $L^2(X) \cap H_{\epsilon, \text{mol}}^1$  is dense in  $H_{\epsilon, \text{mol}}^1$  and that  $L^2(X) \cap H_{\text{ato}}^1$  is dense in  $H_{\text{ato}}^1$ .

## 5.2 Comparison with other Hardy spaces.

### 5.2.1 The space of Coifman-Weiss.

Due to its atomic definition, the Hardy space  $H_{CW}^1(\mathbb{R}^n)$  of Coifman-Weiss is obtained by choosing the operator  $B_Q$  as follows :

$$B_Q(f)(x) = f(x) \mathbf{1}_Q(x) - |Q|^{-1} \left( \int_Q f \right) \mathbf{1}_Q(x).$$

Our atoms are the same as the ones defined in [77]. However, our molecule is different from the one in [77]. In fact, because the  $B_Q$  has the property that  $\text{supp } B_Q(f) \subset Q$  for any  $f$ , atoms and  $\epsilon$ -molecules are the same with our definition. Hence, for  $B_Q$  with this specific property, our atomic and molecular spaces are the same.

### 5.2.2 Hardy spaces for Schrödinger operators with potentials.

Let  $X = \mathbb{R}^n$  and  $V$  a nonnegative function on  $X$ . We consider the Schrödinger operator

$$L(f)(x) := -\Delta f(x) + V(x)f(x).$$

**First case :**  $V$  is compactly supported and  $V \in L^p(\mathbb{R}^n)$  with  $2p > n \geq 3$  (we refer to [62] for the details).

By this assumption, it is well known that  $-L$  generates a  $L^2$ -bounded semi-group  $(K_t)_{t>0}$ , which satisfies some gaussian estimates for the kernel. J. Dziubanski and J. Zienkiewicz define one kind of Hardy space  $H_L^1$  by a maximal operator. A function  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  belongs to  $H_L^1$  if

$$\|f\|_{H_L^1} := \left\| \sup_{t>0} |K_t f(x)| \right\|_1 < \infty.$$

Using the properties of semi-group, the authors introduce

$$\omega(x) := \lim_{s \rightarrow \infty} K_s \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}(x)$$

and prove that the limit exists and that there is a constant  $c > 0$  such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad c \leq \omega(x) \leq 1. \quad (5.7)$$

With this function, they obtain an atomic decomposition of their Hardy space  $H_L^1$  with the following definition of atoms : a function  $b$  is a  $H_L^1$ -atom if there exists a ball  $Q$  such that  $b$  is supported in  $Q$  and satisfies

$$\|b\|_2 \leq |Q|^{-1/2} \quad \text{and} \quad \int_Q b(x)\omega(x)dx = 0.$$

So we can identify their space  $H_L^1$  with our atomic space  $H_{ato}^1$  by choosing our operators  $B_Q$  as

$$B_Q(f)(x) := f(x)\mathbf{1}_Q(x) - \left( \frac{1}{\omega(Q)} \int f(x)\omega(x)dx \right) \mathbf{1}_Q(x).$$

Then due to (5.7), the two definitions of atoms are equivalent and so

$$H_L^1 = H_{ato}^1.$$

**Second case :**  $V$  is a nonnegative polynomial (we refer to [60, 59] for the details).

In this case, it is well known that  $-L$  generates a  $L^2$ -bounded semigroup  $(T_t)_{t>0}$ , which satisfies some gaussian estimates. J. Dziubanski defines a Hardy space in the same way as above : a function  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  belongs to  $H_L^1$  if

$$\|f\|_{H_L^1} := \left\| \sup_{t>0} |T_t f(x)| \right\|_1 < \infty.$$

Let

$$m(x, V) := \sum_{\beta} |D^{\beta} V(x)|^{1/(|\beta|+2)}$$

which is bounded below by a constant  $c > 0$ . In [59] the author shows an atomic decomposition of this space with the following definition : a function  $b$  is an  $H_L^1$ -atom if there exists a ball  $Q = B(y_0, r)$  with

$$\text{supp}(b) \subset Q, \quad \|b\|_2 \leq |Q|^{-1/2}, \quad r \leq m(y_0, V)^{-1}$$

and if  $r \leq \frac{1}{4}m(y_0, V)^{-1}$  then

$$\int_Q b(x)dx = 0.$$

This definition of atoms is a particular case of ours if we define the operator  $B_Q$  for  $Q = B(y_0, r)$  a ball by :

$$B_Q(f)(x) := \begin{cases} f(x)\mathbf{1}_Q(x) & \text{if } \frac{1}{4}m(y_0, V)^{-1} < r \leq m(y_0, V)^{-1} \\ f(x)\mathbf{1}_Q(x) - \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy\right) \mathbf{1}_Q(x) & \text{if } r \leq \frac{1}{4}m(y_0, V)^{-1} \\ 0 & \text{if } r > m(y_0, V)^{-1}. \end{cases}$$

With this choice we have

$$H_L^1 = H_{ato}^1.$$

It is shown in [61] that one can take  $w$  as a reverse Hölder weight with exponent  $n/2$  to obtain the same results with the measure  $\omega(x)dx$  instead of the Lebesgue measure.

### 5.2.3 Hardy spaces associated to divergence form elliptic operators.

Let  $X = \mathbb{R}^n$  and  $A$  be an  $n \times n$  matrix-valued function satisfying the ellipticity condition : there exist two constants  $\Lambda \geq \lambda > 0$  such that

$$\forall \xi, \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda|\xi|^2 \leq \text{Re} (A\xi \cdot \bar{\xi}) \quad \text{and} \quad |A\xi \cdot \bar{\zeta}| \leq \Lambda|\xi||\zeta|.$$

We define the second order divergence form operator

$$L(f) := -\text{div}(A\nabla f).$$

In [70] S. Hofmann and S. Mayboroda define a Hardy space  $H_L^1$  associated to this operator and give several characterizations. For  $f \in L^1$  we have the equivalence of the following norms :

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_L^1} &:= \|f\|_1 + \left\| \left( \iint_{\substack{t>0, y \in \mathbb{R}^n \\ |x-y| \leq t}} |t^2 L e^{-t^2 L} f(y)|^2 \frac{dt dy}{t^{n+1}} \right)^{1/2} \right\|_1 \\ &\simeq \|f\|_1 + \left\| \sup_{\substack{t>0, y \in \mathbb{R}^n \\ |x-y| \leq t}} \left( \frac{1}{t^n} \int_{B(y,t)} |e^{-t^2 L} f(z)|^2 dz \right)^{1/2} \right\|_1. \end{aligned}$$

In addition, they prove a molecular decomposition with the following definition : let  $\epsilon > 0$  and  $M > n/4$  be fixed, a function  $m \in L^2$  is a  $H_L^1$ -molecule if there exists a ball  $Q \subset \mathbb{R}^n$  such that :

$$\forall i \geq 0, \quad \|m\|_{2, S_i(Q)} \leq 2^{-i\epsilon} |2^{i+1}Q|^{-1/2} \tag{5.8}$$

$$\forall i \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, M\}, \quad \left\| (r_Q^{-2} L^{-1})^k m \right\|_{2, S_i(Q)} \leq 2^{-i\epsilon} |2^{i+1}Q|^{-1/2}. \tag{5.9}$$



We don't know how to realize these molecules with our definition. However with

$$B_Q(f) := (r_Q^2 L)^M e^{-r_Q^2 L}(f) \text{ or } B_Q(f) := (Id - (Id + r_Q^2 L)^{-1})^M (f),$$

our  $\epsilon$ -molecules are  $H_L^1$ -molecules. So we have the inclusion

$$H_{\epsilon, mol}^1 \hookrightarrow H_L^1.$$

### 5.2.4 Hardy spaces associated to a general semi-group.

Let  $X = \mathbb{R}^n$ . In [57], X.T. Duong and L. Yan have study the space  $H_L^1$  with a more general operator  $L$ . They assume that there exists  $\omega \in (0, \pi/2)$  such that  $L$  generates a holomorphic semi-group  $e^{-zL}$  with  $0 \leq |Arg(z)| < \pi/2 - \omega$ , which has a  $H_\infty$  calculus on  $L^2(\mathbb{R}^n)$  and gaussian estimates for its kernel. Then they define a Hardy space  $H_L^1$  by : for all functions  $f \in L^1$

$$f \in H_L^1 \iff \left\| \left( \iint_{\substack{t>0, y \in \mathbb{R}^n \\ |x-y| \leq t}} |t^2 L e^{-t^2 L} f(y)|^2 \frac{t dy}{t^{n+1}} \right)^{1/2} \right\|_1.$$

They obtained a molecular decomposition using tent spaces (Proposition 4.2 of [57]) : a function  $m$  is called a  $H_L^1$ -molecule associated to a ball  $Q \subset \mathbb{R}^n$  if

$$m(x) = \int_0^\infty t^2 L e^{-t^2 L} [a(t, \cdot)](x) \frac{dt}{t}$$

with  $a(t, x)$  satisfying

$$\text{supp}(a) \subset \{(x, t) \in X \times (0, \infty), x \in Q, 0 < t \leq r_Q\} \quad \text{and} \quad \|a\|_{2, \frac{dx dt}{t}} \leq |Q|^{-1/2}.$$

This definition of molecules is probably less restrictive than ours. So with the choice

$$B_Q(f) := (r_Q^2 L) e^{-r_Q^2 L}(f) \text{ or } B_Q(f) := f - e^{-r_Q^2 L}(f),$$

we only know the inclusion

$$H_{\epsilon, mol}^1 \hookrightarrow H_L^1.$$

**Conclusion :** We have seen that our abstract construction permits to realize some already known Hardy spaces. It seems that our Hardy space is sometimes too small to be identified with a Hardy space which would be defined by an area functional. We will see in Section 5.4 that it is not so small because it has good properties for the interpolation with Lebesgue spaces. However, we think that this smallness is the main difficulty (which we will explain in Section 5.8) for the identification of the dual spaces  $(H_{\epsilon, mol}^1)^*$  and  $(H_{ato}^1)^*$ .

### 5.3 Continuity theorem on the Hardy space.

It is well known that a Calderón-Zygmund operator is continuous from the Coifman-Weiss space  $H_{CW}^1$  to  $L^1$ . We propose some general conditions which guarantee the continuity from our Hardy spaces into  $L^1(X)$ . We have the two following results :

**Theorem 5.3.1.** *Let  $T$  be a  $L^2$ -bounded sublinear operator satisfying the following "off-diagonal" estimates : for all ball  $Q$ , for all  $j \geq 2$  there exist some coefficients  $\alpha_j(Q)$  such that for all  $L^2$ -functions  $f$  supported in  $Q$*

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (5.10)$$

If the coefficients  $\alpha_j$  satisfy

$$\Lambda := \sup_{Q \text{ ball}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty, \quad (5.11)$$

then there exists a constant  $C$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap H_{ato}^1 \quad \|T(f)\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H_{ato}^1}.$$

So if  $T$  is linear then it has a unique extension, which is continuous from  $H_{ato}^1$  into  $L^1(X)$ .

**Theorem 5.3.2.** *Let  $T$  be a  $L^2(X)$ -bounded sublinear operator satisfying the following "off-diagonal" estimates : for all ball  $Q$ , for all  $k \geq 0, j \geq 2$ , there exist some coefficients  $\alpha_{j,k}(Q)$  such that for every  $L^2$ -function  $f$  supported in  $S_k(Q)$*

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^kQ)} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_{j,k}(Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{S_k(Q)} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

If the coefficients  $\alpha_{j,k}$  satisfy

$$\Lambda := \sup_{k \geq 0} \sup_{Q \text{ ball}} \left[ \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k}(Q) \right] < \infty, \quad (5.13)$$

then for all  $\epsilon > 0$  there exists a constant  $C = C(\epsilon)$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap H_{\epsilon, mol}^1 \quad \|T(f)\|_1 \leq C \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1}.$$

So if  $T$  is linear then it has a unique extension, which is continuous from  $H_{\epsilon, mol}^1$  to  $L^1(X)$ .

**Remark 5.3.1.** 1-) It is possible that a particular corona  $S_k(Q)$  is empty. So we have normalized by  $\mu(2^{k+1}Q)$ .

2-) One can weaken even more (5.10) and (5.12). For example (5.10) can be replaced by

$$\int_{X \setminus 4Q} |T(B_Q(f))| d\mu \lesssim \mu(Q)^{1/2} \left( \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

in which case the proof is almost tautological. Also let us explain why we choose a condition like (5.10). Our Hardy spaces depend both on  $\epsilon$  and on the collection  $\mathbb{B} = (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$ , so write them (just in this remark)  $H_{\epsilon, \text{mol}, \mathbb{B}}^1$  and  $H_{\text{ato}, \mathbb{B}}^1$ . Take a  $L^2$ -bounded operator  $T$ . Assume that for  $\epsilon' > 0$  it satisfies the condition (5.10) with some coefficients  $\alpha_j(Q)$  satisfying :

$$\Lambda := \sup_{Q \text{ ball}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) 2^{j\epsilon'} < \infty. \tag{5.14}$$

Then it is easy to show that for  $m = B_Q(f_Q)$  an atom (of  $H_{\text{ato}, \mathbb{B}}^1$ ) associated to the ball  $Q$ , the function  $T(B_Q(f_Q))$  is an  $\epsilon'$ -molecule of  $H_{\epsilon', T\mathbb{B}}^1$  (associated to  $Q$ ). Here we write  $T\mathbb{B} := (TB_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  the new collection of  $L^2$ -bounded operators. So we claim that  $T$  is also continuous from  $H_{\text{ato}, \mathbb{B}}^1$  in  $H_{\epsilon', \text{mol}, T\mathbb{B}}^1$ . We have an analogous result with (5.12) and the molecular spaces. Also the assumptions (5.10) and (5.12) naturally appear when we want to work with these Hardy spaces.

3-) Notice that when  $\epsilon = \infty$ , Theorem 5.3.2 becomes Theorem 5.3.1. So it suffices to prove the last one.

**Proof of Theorem 5.3.2 :** First we show the following estimate : there exists a constant  $C = C(\epsilon)$  such that for all  $\epsilon$ -molecule  $m$  :

$$\|T(m)\|_{L^1} \leq C (\Lambda + \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}). \tag{5.15}$$

Using definition we know that there exists a ball  $Q$  and a function  $f_Q$  such that

$$m = B_Q(f_Q).$$

By decomposing the space  $X$  into the scaled corona around  $Q$  and by the linearity of  $B_Q$ , we have :

$$m = B_Q f_Q = \sum_{k \geq 0} B_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q).$$

Using the sublinearity of  $T$ , we obtain that

$$|T(m)| \leq \sum_{k \geq 0} |TB_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q)|.$$

By decomposing the integral with the coronas  $(S_j(2^k Q))_{j \geq 0}$  which is a partition of  $X$ , we have :

$$\begin{aligned} \|T(m)\|_{L^1} &\leq \sum_{k \geq 0} \|TB_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q)\|_1 \\ &\leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j \geq 0}} \int_{S_j(2^k Q)} |T(B_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q))| d\mu \\ &\leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j \geq 0}} \mu(2^{k+j+1}Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^k Q)} |T(B_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q))| d\mu \right) \\ &\leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j \geq 0}} \mu(2^{k+j+1}Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^k Q)} |T(B_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q))|^2 d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Using the "off-diagonal" estimates (5.12) on  $T$  and the doubling condition for the measure  $\mu$  (for the terms  $j \leq 1$ ), we get

$$\begin{aligned} \|T(m)\|_{L^1} &\leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j \geq 2}} \mu(2^{k+1}Q) \frac{\mu(2^{k+j+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k}(Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\quad + \sum_{k \geq 0, j \leq 1} A 2^{j\delta} \mu(2^{k+1}Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_X |T(B_Q(\mathbf{1}_{S_k(Q)} f_Q))|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k \geq 0, j \geq 2} \mu(2^{k+1}Q) \frac{\mu(2^{k+j+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k}(Q) \mu(2^{k+1}Q)^{-1/2} \|f_Q\|_{2, S_k(Q)} \\ &\quad + \sum_{k \geq 0, j \leq 1} A 2^{j\delta} \mu(2^{k+1}Q)^{1/2} \|TB_Q\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|f_Q\|_{2, S_k(Q)}. \end{aligned}$$

Then we use (5.5) to estimate  $\|TB_Q\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ , and with the  $L^2$ -decay on  $f_Q$ , we have :

$$\begin{aligned} \|T(m)\|_{L^1} &\leq \sum_{k \geq 0, j \geq 2} \mu(2^{k+1}Q) \frac{\mu(2^{k+j+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k}(Q) \mu(2^{k+1}Q)^{-1/2} \mu(2^{k+1}Q)^{-1/2} 2^{-\epsilon k} \\ &\quad + A' \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \sum_{k \geq 0, j \leq 1} 2^{-\epsilon k + j\delta} \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{-\epsilon k} \left[ \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{k+j+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k}(Q) + 2^{\delta+1} \right] \lesssim \Lambda + \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}. \end{aligned}$$

So we have proved the result for all  $\epsilon$ -molecules.

Next, we introduce the space

$$S := \left\{ f; f = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i, (m_i)_i \text{ } \epsilon\text{-molecules, } \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1} \geq 10^{-1} \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right) \right\},$$

which is a subspace of  $H_{\epsilon, mol}^1$ .

We have that  $T$  is continuous from  $S$  into  $L^1$  : in fact if  $f \in S$ , there exists a finite decomposition

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i \quad \text{with} \quad \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1} \geq 10^{-1} \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right),$$

by the sublinearity of  $T$  and (5.15), we have :

$$\|T(f)\|_{L^1} \lesssim \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \lesssim \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1}.$$

We conclude the proof by involving the next lemma. □

**Lemma 5.3.2.** *The set  $S$  is dense in  $H_{\epsilon, mol}^1$ .*

**Proof :** Let  $f \in H_{\epsilon, mol}^1$  be a non zero function. Then there exists an infinite decomposition with  $\epsilon$ -molecules :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i m_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (1 + 10^{-1}) \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1}.$$

Let  $f_N$  be the partial sums, defined by :

$$f_N := \sum_{i=1}^N \lambda_i m_i.$$

Assume that  $f_N$  is not contained in  $S$ , then

$$\|f_N\|_{H_{\epsilon, mol}^1} \leq 10^{-1} \sum_{i=1}^N |\lambda_i|.$$

However  $f_N$  converges to  $f$  for the  $H_{\epsilon, mol}^1$ -norm, so for  $N$  large enough we can deduce from this inequality that

$$\|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1} \leq 2\|f_N\|_{H_{\epsilon, mol}^1} \leq \frac{1}{5} \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \leq \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq \frac{1}{2} \|f\|_{H_{\epsilon, mol}^1}.$$

This last inequality is not possible so we conclude that for  $N$  large enough,  $f_N$  is an element of  $S$ . We have proved that  $S$  is dense in  $H_{\epsilon, mol}^1$ .  $\square$

**Remark 5.3.3.** *The same lemma holds replacing  $H_{\epsilon, mol}^1$  by  $H_{ato}^1$ .*

**Remark 5.3.4.** *In order to verify the assumption (5.13), with the doubling property of  $\mu$  it is sufficient to check the stronger condition :*

$$\sup_{k \geq 0} \sup_{Q \text{ ball}} \left[ \sum_{j \geq 2} 2^{j\delta} \alpha_{j,k}(Q) \right] < \infty. \quad (5.16)$$

**Example 5.3.5.** *Theorem 5.3.2 (resp. Theorem 5.3.1) applies to  $T = Id$  if (5.12) (resp. (5.10)) holds. In this case, (5.12) becomes a condition on  $B_Q$  which implies  $H_{\epsilon, mol}^1 \hookrightarrow L^1$  (see Section 5.6).*

**Example 5.3.6.** *In the case of Coifman-Weiss Hardy space  $H_{CW}^1$ , this result generalizes the Calderón-Zygmund conditions. We choose*

$$B_Q(f)(x) = f(x) \mathbf{1}_Q(x) - \left( \mu(Q)^{-1} \int_Q f d\mu \right) \mathbf{1}_Q.$$

*Let  $T$  be a  $L^2$  bounded operator. If we assume that the kernel  $K(x, y)$  of  $T$  satisfies the Calderón-Zygmund assumptions : there exists  $h > 0$  such that for all  $x \neq y$  and  $y' \in B(y, d(x, y)/2)$ ,*

$$|K(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, d(x, y)))},$$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \lesssim \frac{d(y, y')^h}{\mu(B(x, d(x, y)))d(x, y)^h},$$

*then it is easy to prove that  $T$  satisfies the assumptions in Theorem 5.3.1. So  $T$  is continuous from  $H_{CW}^1 = H_{ato}^1$  into  $L^1$ , which is the classical result.*

So here we have obtained simple conditions for a  $L^2$ -bounded operator to have the  $H^1 - L^1$  continuity. These conditions generalize the "Calderón-Zygmund" conditions in the classical case. In next section, we are interested in interpolation results.

### 5.4 Interpolation theorem between $L^2(X)$ and $H_{ato}^1$ .

The goal of this section is to find some general conditions on  $B_Q$  operators which give us an interpolation result like : if  $T$ , an  $L^2$ -bounded operator, is continuous from  $H^1$  to  $L^1$  then  $T$  is  $L^p$ -bounded for all (or some) exponents  $p \in ]1, 2]$ . We will use real  $L^2$ -duality defined by :

$$\forall f, g \in L^2(X), \quad \langle f, g \rangle := \int f(x)g(x)d\mu(x).$$

Associated to this duality, we denote the adjoint operation by  $*$ .

**Definition 5.4.1.** We set  $A_Q$  be the operator  $^2 Id - B_Q$ . For  $\sigma \in [1, \infty]$  we define the maximal operator :

$$\forall x \in X, \quad M_\sigma(f)(x) := \sup_{\substack{Q^{ball} \\ x \in Q}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |A_Q^*(f)|^\sigma d\mu \right)^{1/\sigma} \tag{5.17}$$

and a sharp maximal function adapted with our operators : for  $s > 0$ ,

$$\forall x \in X, \quad M_s^\sharp(f)(x) := \sup_{\substack{Q^{ball} \\ x \in Q}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |B_Q^*(f)(z)|^s d\mu(z) \right)^{1/s}.$$

The standard maximal "Hardy-Littlewood" operator is defined by : for  $s > 0$ ,

$$\forall x \in X, \quad M_{HL,s}(f)(x) := \sup_{\substack{Q^{ball} \\ x \in Q}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(z)|^s d\mu(z) \right)^{1/s}.$$

For convenience, we recall the definition of a linearizable operator (see Definition V.1.20 of [65]) :

**Definition 5.4.2.** An operator  $T$  on  $L^2(X)$  is said to be linearizable if there exists a Banach space  $\mathcal{B}$  and a linear operator  $U$  defined from  $L^2(X)$  into  $L^2(X, \mathcal{B})$  so that :

$$\forall f \in L^2(X), \quad |T(f)(x)| = \|U(f)(x, \cdot)\|_{\mathcal{B}}, \quad \mu - a.e. .$$

Examples of linearizable operators are given by maximal operators or quadratic functionals for  $T$ . Linearizable operators are sublinear. Our main result is :

**Theorem 5.4.1.** Let  $\sigma \in [2, \infty]$ . Assume that for all balls  $Q$  and all functions  $h \in L^2(X)$ , we have

$$\left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |A_Q^*(h)|^\sigma d\mu \right)^{1/\sigma} \leq \inf_{x \in Q} M_{HL,2}(h)(x).$$

---

<sup>2</sup>Here we can choose  $A_Q(f) = f\mathbf{1}_Q - B_Q(f)$  too.

Let  $T$  be a  $L^2(X)$ -bounded linearizable operator. If  $T$  is continuous from  $H_{ato}^1$  into  $L^1(X)$  then for all  $p \in ]\sigma', 2]$  there exists a constant  $C = C(p)$  such that :

$$\forall f \in L^2(X) \cap L^p(X), \quad \|T(f)\|_p \leq C\|f\|_p.$$

In addition we have the following estimate :

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^\theta \left[ \|T\|_{H_{ato}^1 \rightarrow L^1}^{1-\theta} + \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1-\theta} \mathbf{1}_{\mu(X) < \infty} \right]$$

where  $\theta$  is given by :

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1}.$$

The implicit constant depends on  $A, A', \delta, p$ .

Here the quantity  $\mathbf{1}_{\mu(X) < \infty}$  means 1 if  $\mu(X) < \infty$  and 0 if  $\mu(X) = \infty$  and  $\sigma'$  is the conjugate exponent of  $\sigma$ . We need some preparation before proving this result.

By Definition 5.4.2, the operator  $T$  is associated to a linear operator  $U$  from  $L^2(X)$  into  $L^2(X, \mathcal{B})$ . We fix a measurable function  $\phi$

$$\phi : X \rightarrow \{\lambda \in \mathcal{B}^*, \|\lambda\|_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$$

and we consider the linear operator  $V$  on  $L^2(X)$  defined by :

$$\forall f \in L^2(X), \quad V(f) : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathcal{B}\langle U(f)(x), \phi(x) \rangle_{\mathcal{B}^*} \end{cases} . \quad (5.18)$$

So  $V$  is  $L^2(X)$ -bounded because

$$\begin{aligned} \|V(f)\|_2 &\leq \|\mathcal{B}\langle U(f)(x), \phi(x) \rangle_{\mathcal{B}^*}\|_2 \leq \| \|U(f)(x)\|_{\mathcal{B}} \|\phi(x)\|_{\mathcal{B}^*} \|_2 \\ &\leq \| \|U(f)(x)\|_{\mathcal{B}} \|_2 = \|T(f)\|_2. \end{aligned}$$

By the same argument we can prove that  $V$  is bounded from  $H_{ato}^1$  to  $L^1$  because we have :

$$\forall f \in H_{ato}^1(X), \quad \|V(f)\|_1 \leq \|T(f)\|_1.$$

By duality we know that  $V^*$  is continuous from  $L^\infty$  into  $(H_{ato}^1)^*$ . So we have the following two lemmas :

**Lemma 5.4.3.** *Let  $C_1 := \|T\|_{H_{ato}^1 \rightarrow L^1}$ . Then :*

$$\forall f \in L^\infty \cap L^2 \quad \left\| M_2^\sharp(V^*f) \right\|_\infty \leq C_1 \|f\|_\infty.$$

**Proof :** Fix a function  $f \in L^2 \cap L^\infty$ . By the  $L^2$ -boundedness of  $V$  we have that  $V^*(f) \in L^2$ . Fix a ball  $Q$ . Using the  $L^2$ -boundedness of  $B_Q$  we conclude that  $B_Q^*(V^*f)$  exists and belongs to  $L^2(X)$ . Let  $h$  be supported in  $Q$  and normalized by  $\|h\|_2 = 1$ , construct  $\phi_Q := \mu(Q)^{-1/2}h$ . Then it is easy to see that  $m = B_Q(\phi_Q)$  is an atom. With the continuity of  $V$  from  $H_{ato}^1$  to  $L^1$ , we obtain :

$$\left| \int V(m)f d\mu \right| \leq \|V\|_{H_{ato}^1 \rightarrow L^1} \|f\|_\infty \leq C_1 \|f\|_\infty.$$

In addition, since  $m$  and  $f$  are  $L^2$ -functions, we have :

$$\begin{aligned} \int V(m)f d\mu &= \int mV^*(f)d\mu = \int \mu(Q)^{-1/2} B_Q(h)V^*(f)d\mu \\ &= \mu(Q)^{-1/2} \int hB_Q^*V^*(f)d\mu. \end{aligned}$$

In consequence, we get

$$\forall h \in L^2(Q), \|h\|_{2,Q} = 1, \quad \left| \int hB_Q^*V^*(f)d\mu \right| \leq C_1\mu(Q)^{1/2}\|f\|_\infty.$$

Hence,  $B_Q^*V^*(f) \in L^2(Q)$  and

$$\|B_Q^*V^*(f)\|_{2,Q} \leq C_1\mu(Q)^{1/2}\|f\|_\infty,$$

therefore we can finish the proof. □

**Lemma 5.4.4.** *For all  $1 \leq s \leq 2$ , there exists a constant  $C_2 = C_2(s) \lesssim \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$  such that :*

$$\forall f \in L^2 \quad \|M_s^\sharp(V^*f)\|_{2,\infty} \leq C_2\|f\|_2.$$

**Proof :** Let  $x \in X$  and  $Q$  be a ball such that  $x \in Q$ . We have :

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |B_Q^*(V^*f)(z)|^s d\mu(z) \right)^{1/s} \\ &\leq \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |(V^*f)(z)|^s d\mu(z) \right)^{1/s} + \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |A_Q^*(V^*f)(z)|^\sigma d\mu(z) \right)^{1/\sigma} \\ &\leq M_{HL,s}(V^*f)(x) + M_\sigma(V^*f)(x). \end{aligned}$$

Here we use the fact that  $s \leq 2 \leq \sigma$ . Taking the supremum over all balls  $Q \ni x$ , we get :

$$M_s^\sharp(V^*f) \leq M_{HL,s}(V^*f) + M_\sigma(V^*f).$$

In addition for  $s \leq 2$ ,  $M_{HL,s}$  is of weak type  $(2, 2)$ . By the assumptions  $V^*$  is  $L^2$ -bounded and  $M_\sigma$  is of weak type  $(2, 2)$  (bounded by  $M_{HL,2}$ ). So we conclude that  $M_s^\sharp \circ V^*$  is of weak type  $(2, 2)$ . □

Let the parameter  $s = 2$ . From the two previous lemmas (Lemmas 5.4.3 and 5.4.4) and Marcinkiewicz's theorem for real interpolation, we obtain that  $M_2^\sharp \circ V^*$  is bounded in the whole space  $L^r(X)$  for  $2 < r < \infty$ . If  $p \in ]1, 2[$  is an exponent and  $q \in ]2, \infty[$  its conjuguate exponent, then there exists also a constant  $C_3 := C_3(p, C_1, C_2)$  such that

$$\forall f \in L^q \cap L^2 \quad \left\| M_2^\sharp(V^*f) \right\|_q \leq C_3\|f\|_q, \tag{5.19}$$

and  $C_3$  is bounded by :

$$\begin{aligned} C_3 &\lesssim \left\| M_2^\sharp \circ V^* \right\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^\theta \left\| M_2^\sharp \circ V^* \right\|_{(H_{ato}^1)^* \rightarrow L^\infty}^{1-\theta} \\ &\lesssim \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^\theta \|T\|_{H_{ato}^1 \rightarrow L^1}^{1-\theta}, \end{aligned}$$



because  $\theta$  satisfies

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{\theta}{2}.$$

We now begin the proof of Theorem 5.4.1.

**Proof :** We develop the proof in two steps.

1-) End of the proof for the operator  $V$ .

We are going to obtain the result as a consequence of Theorem 3.1 in [44]. With its notations, take  $F = |h|^2$  and for all balls  $Q$

$$G_Q = 2|B_Q^* h|^2 \text{ and } H_Q = 2|A_Q^* h|^2,$$

where  $h = V^*(f)$  and  $f \in L^2$ . Then for all  $x \in Q$ , we have  $F(x) \leq G_Q(x) + H_Q(x)$ . For all balls  $Q \ni x$ , we have

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q G_Q d\mu \leq 2M_2^\sharp(h)(x)^2 := G(x).$$

By assumption, for all balls  $Q \ni x$  and  $\bar{x} \in Q$ , we have

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |H_Q|^{\sigma/2} d\mu \right)^{2/\sigma} &\leq 2^{2/\sigma} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |A_Q^*(h)|^\sigma d\mu \right)^{2/\sigma} \leq 2^{2/\sigma} M_\sigma(h)(\bar{x})^2 \\ &\leq 2^{2/\sigma} M_{HL,2}(h)(\bar{x})^2 = 2^{2/\sigma} M_{HL,1}(F)(\bar{x}). \end{aligned}$$

Also by Theorem 3.1 of [44] (which applies because  $h = V^*(f) \in L^2$  so  $F \in L^1$ ), for  $1 < r < \sigma/2$  we have :

$$\|F\|_r \leq \|M_{HL,1}(F)\|_r \lesssim \|M_2^\sharp(h)^2\|_r = \|M_2^\sharp(h)\|_{2r}^2. \quad (5.20)$$

By using (5.19) and  $h = V^*(f)$ , we obtain for  $2 < 2r < \infty$  :

$$\|M_2^\sharp(h)\|_{2r} \lesssim \|f\|_{2r}. \quad (5.21)$$

Then the two previous estimates ((5.20) and (5.21)) give

$$\|V^*(f)\|_{2r} \lesssim \|f\|_{2r}.$$

We have obtained also that for all exponents  $q$  with  $2 < q < \sigma$ , there exists a constant  $C = C(q)$  such that :

$$\forall f \in L^2 \cap L^q, \quad \|V^*(f)\|_q \leq C\|f\|_q.$$

Thus by duality we can obtain that  $V$  is bounded on  $L^p$  for all exponents  $p \in ]\sigma', 2[$ .

2-) End of the proof for the operator  $T$ .

We recall the definition of the operator  $V$  (5.18). Let  $\phi$  be a measurable function

$$\phi := X \rightarrow \{\lambda \in \mathcal{B}^*, \|\lambda\|_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$$

and the operator  $V$  is defined by :

$$\forall f \in L^2(X), \quad V(f) := \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathcal{B}\langle U(f)(x), \phi(x) \rangle_{\mathcal{B}^*} \end{cases}. \quad (5.22)$$

We have obtained that  $V$  is  $L^p(X)$ -bounded and the continuity bound is uniform with respect to the function  $\phi$ . There exists a constant  $C_4$  such that for all functions  $\phi$  and for all functions  $f \in L^p(X) \cap L^2(X)$  we have

$$\|V(f)\|_p \leq C_4 \|f\|_p. \quad (5.23)$$

Using the Hahn-Banach theorem, we have that

$$\forall b \in \mathcal{B}, \exists b^* \in \mathcal{B}^* \quad \frac{1}{4} \|b\|_{\mathcal{B}} \leq_{\mathcal{B}} \langle b, b^* \rangle_{\mathcal{B}^*} \quad \text{and} \quad \|b^*\|_{\mathcal{B}^*} \leq 1.$$

In addition, we can choose  $b^*$  such that the function  $b \rightarrow b^*$  is measurable<sup>3</sup>. Let  $f$  be a function in  $L^2$ . By choosing a good measurable function  $\phi$  we can have also

$$V(f)(x) \geq \frac{1}{4} \|U(f)(x)\|_{\mathcal{B}} := \frac{1}{4} |T(f)(x)|.$$

Hence by (5.23), we obtained that

$$\|T(f)\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

This estimate is uniform for all  $f \in L^p(X) \cap L^2(X)$ .  $\square$

There is an interesting particular case when  $T = Id$ , which gives us the following corollary :

**Corollary 5.4.5.** *Assume that  $M_\sigma$  is bounded by  $M_{HL,2}$  for some  $\sigma \in ]2, \infty]$  and that  $H_{ato}^1$  is continuously contained in  $L^1(X)$  (see Section 5.6). Then for all  $q \in ]2, \infty[$  there exists a constant  $C = C(q)$  such that*

$$\forall f \in L^q \cap L^2, \quad \|M_2^\sharp(f)\|_q \leq C \|f\|_q.$$

*In addition if  $1 \leq s \leq 2 < q < \sigma$  then we have the other inequality :*

$$\forall f \in L^q \cap L^2, \quad C^{-1} \|f\|_q \leq \|M_s^\sharp(f)\|_q \leq C \|f\|_q.$$

**Proof :** With these assumptions, we can apply the previous theorem with  $T = Id$ . The first claim is obvious with (5.19), here we have just used the imbedding  $H_{ato}^1 \hookrightarrow L^1$ . The second claim is a consequence of (5.20) with the control  $|f| \leq M_{HL,s}(f)$ . To prove this, we use the assumption that  $M_\sigma$  is bounded by  $M_{HL,2}$ . In the proof of Theorem 5.4.1, we have used  $s = 2$  however we can use the same arguments with  $s \in [1, 2]$ .  $\square$

We have a second corollary (independent of Corollary 5.4.5) :

**Corollary 5.4.6.** *Assume that for  $\sigma \in ]2, \infty]$  the maximal operator  $M_\sigma$  is bounded by  $M_{HL,2}$ . Then we have the following inequality : for all  $q \in ]2, \sigma[$  there exists a constant  $c_q$  such that for all functions  $f \in L^2 \cap (H_{ato}^1)^*$  we have*

$$\|f\|_q \leq c_q \|f\|_2^\theta \left[ \|f\|_{(H_{ato}^1)^*}^{1-\theta} + \|f\|_2^{1-\theta} \mathbf{1}_{\mu(X) < \infty} \right], \quad (5.24)$$

where  $\theta$  is given by

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2}.$$

---

<sup>3</sup>In fact let  $b_0 \in \mathcal{B}$  be a point then there exists  $b_0^* \in \mathcal{B}^*$  so that  $\|b_0^*\|_{\mathcal{B}^*} = 1$  and  $\langle b_0, b_0^* \rangle = \|b_0\|_{\mathcal{B}}$ . Now it is easy to show that for all  $b \in \mathcal{B}$  if  $\|b - b_0\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{4} \|b_0\|_{\mathcal{B}}$  then  $\langle b, b_0^* \rangle \geq \frac{3}{5} \|b\|_{\mathcal{B}}$ . By this observation, it is easy to construct a piecewise defined function  $F$  from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{B}^*$  so that for all  $b \in \mathcal{B}$  we have  $\langle b, F(b) \rangle \geq \frac{1}{4} \|b\|_{\mathcal{B}}$ .

**Proof :** In fact we can prove this result directly by using the maximal operator  $M_2^\#$  and the previous arguments. Here we will prove this as an application of the previous theorem. So we take  $E$  a set of  $X$  satisfying  $0 < \mu(E) < \infty$ , and we write  $\phi := \mathbf{1}_E$ . We define also the operator  $T$  as :

$$T(h) := \langle h, f \rangle \phi.$$

The assumption " $f \in L^2$ " guarantees that  $T$  is  $L^2(X)$ -bounded. And by the fact that  $f \in (H_{ato}^1)^*$ , we obtain that  $T$  is continuous from  $H_{ato}^1$  to  $L^1(X)$ . So we can apply the previous theorem and we conclude that  $T$  is  $L^p(X)$  bounded for all  $p \in ]\sigma', 2[$ , and we have the following estimate :

$$\|T(h)\|_p \lesssim \|h\|_p \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^\theta \left[ \|T\|_{H_{ato}^1 \rightarrow L^1}^{1-\theta} + \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1-\theta} \mathbf{1}_{\mu(X) < \infty} \right].$$

By the definition of  $T$  and the duality result about Lebesgue spaces, we deduce that (with  $p$  equals to the conjuguate exponent of  $q$ ) :

$$\|f\|_q \simeq \|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim \|f\|_2^\theta \left[ \|f\|_{(H_{ato}^1)^*}^{1-\theta} + \|f\|_2^{1-\theta} \mathbf{1}_{\mu(X) < \infty} \right].$$

□

The parameter  $\sigma$  plays an important role in Theorem 5.4.1. It permits to understand which Lebesgue spaces  $L^p(X)$  can be obtained by interpolation between the Hardy space  $H_{ato}^1$  and  $L^2(X)$ . We now see that the range for  $p$  is optimal in an example, the case of Riesz transforms.

**Example 5.4.7.** *The Riesz transforms.*

Let

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

be a bounded  $n \times n$  matrix valued function satisfying the ellipticity condition : there exist two constants  $\Lambda \geq \lambda > 0$  such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi, \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda |\xi|^2 \leq \text{Re} (A(x)\xi \cdot \bar{\xi}) \quad \text{and} \quad |A(x)\xi \cdot \bar{\zeta}| \leq \Lambda |\xi| |\zeta|.$$

We define the second order divergence form operator as

$$L(f) := -\text{div}(A\nabla f).$$

Associated to this operator we have the Riesz transform  $\nabla L^{-1/2}$  defined by

$$\nabla L^{-1/2}(f) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t} \nabla e^{-tL}(f) \frac{dt}{t}.$$

From [40], we know that the interval of  $p \in [1, 2]$  such that the heat semigroup  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  and the Riesz transform  $\nabla L^{-1/2}$  are  $L^p$ -bounded have the same interior. We shall denote the critical exponent  $p_L$ . Moreover we know that for  $p \in [1, 2]$

$$\nabla L^{-1/2} \text{ is } L^p\text{-bounded} \iff p_L < p \leq 2.$$

It is shown in [39] that  $1 \leq p_L < \frac{2n}{n+2}$  and in [40] that it could be that  $p_L > 1$ . In that case Riesz transform can not be continuous from  $H_{CW}^1$  into  $L^1$  (else by interpolation  $p_L = 1$ ).

So this is an example where the Coifman-Weiss's Hardy space is not well adapted to the operator. That's why another Hardy space would be interesting.

We have seen in Subsection 5.2.3 that we can compare the Hardy space  $H_L^1$  of [70] with ours. By choosing

$$B_Q(f) := (r_Q^2 L)^M e^{-r_Q^2 L}(f) \text{ or } B_Q(f) := (Id - (Id + r_Q^2 L)^{-1})^M (f),$$

with  $M$  a large enough integer ( $M > n/4$ ), we have the inclusion

$$\forall \epsilon > 0, \quad H_{\epsilon, mol}^1 \hookrightarrow H_L^1. \quad (5.25)$$

A "weak" version of Lemma 2.5 in [70] asserts that for every  $q$ ,  $2 \leq q < (p_L)'$ , for arbitrary closed sets  $E, F \subset \mathbb{R}^n$

$$\forall t > 0, \forall f \in L^2(E), \quad \|(tL^*)^M e^{-tL^*}(f)\|_{q,F} \lesssim t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} e^{-cd(E,F)^2/t} \|f\|_{2,E}.$$

By taking  $t = r_Q^2$ ,  $q = \sigma < (p_L)'$ , it is easy to check that for all balls  $Q$ , for all  $h \in L^2$

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| (r_Q^2 L^*)^M e^{-r_Q^2 L^*}(h)(x) \right|^\sigma dx \right)^{1/\sigma} \lesssim \inf_{z \in Q} M_{HL,2}(h)(z).$$

This gives us that the maximal operator  $M_\sigma$  (defined by (5.17)) satisfies :

$$\forall h \in L^2, \quad M_\sigma(h) \lesssim M_{HL,2}(h).$$

We already know that  $\nabla L^{-1/2}$  is  $L^2$ -bounded ([43]). For  $\epsilon > 0$ , Theorem 3.4 of [70] and (5.25) prove that this operator is continuous from  $H_{\epsilon, mol}^1$  into  $L^1$ . We can also apply our Theorem 5.4.1 to deduce that the Riesz transform is  $L^p$ -bounded for all  $p \in ]\sigma', 2]$  with all  $\sigma' \in [2, p_L'$ . So the Riesz transform is  $L^p$  bounded for all exponents  $p \in ]p_L, 2]$ . As we know the Riesz transform is not  $L^p$ -bounded for  $p \leq p_L$  so our range of exponent is optimal.

From the point of view of "  $L^p$ -theory" (we temporary forget the Hardy spaces), we have the following result (using Theorem 5.3.2 and Theorem 5.4.1) :

**Theorem 5.4.2.** *Suppose  $1 \leq p_0 < 2$ . Let  $T$  be a  $L^2$ -bounded linearizable operator such that for all balls  $Q$  and for all functions  $f$  supported in  $Q$*

$$\forall j \geq 2 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

and

$$\forall j \geq 0 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |f - B_Q(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^{p_0} d\mu \right)^{1/p_0},$$

where the coefficients  $\alpha_j(Q)$  satisfy

$$\sup_{Q \text{ ball}} \sum_{j \geq 0} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty.$$

Then for all exponents  $p \in ]p_0, 2]$ , there exists a constant  $C$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap L^p, \quad \|T(f)\|_p \leq C \|f\|_p.$$

**Proof :** We are going to show that with these assumptions the maximal operator  $M_{(p_0)'}$  (defined by (5.17)) is bounded by  $M_{HL,2}$ . Then the theorem is a consequence of Theorem 5.3.2 and Theorem 5.4.1. To prove this, let  $f \in L^2 \cap L^1$  be a function and  $\sigma = (p_0)'$ . For all balls  $Q$  containing the point  $x_0$ , we can estimate the  $L^\sigma$ -norm by duality :

$$\begin{aligned}
 M_\sigma(f)(x_0) &= \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{p_0} \leq 1}} \mu(Q)^{-1/\sigma} \int (f - B_Q^*(f)) g d\mu \\
 &= \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{p_0} \leq 1}} \mu(Q)^{-1/\sigma} \int f (g - B_Q(g)) d\mu \\
 &\leq \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{p_0} \leq 1}} \mu(Q)^{-1/\sigma} \sum_{j \geq 0} \int_{S_j(Q)} |f (g - B_Q(g))| d\mu \\
 &\leq \sup_{x_0 \in Q} \mu(Q)^{-1/\sigma} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{p_0} \leq 1}} \sum_{j \geq 0} \|f\|_{2,S_j(Q)} \|g - B_Q(g)\|_{2,S_j(Q)} \\
 &\leq \sup_{x_0 \in Q} \mu(Q)^{-1/\sigma} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{p_0} \leq 1}} \sum_{j \geq 0} \|f\|_{2,S_j(Q)} \alpha_j(Q) \mu(2^{j+1}Q)^{1/2} \mu(Q)^{-1/p_0} \|g\|_{p_0} \\
 &\leq \sup_{x_0 \in Q} \sum_{j \geq 0} \|f\|_{2,S_j(Q)} \mu(2^{j+1}Q)^{-1/2} \alpha_j(Q) \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \\
 &\leq M_{HL,2}(f)(x_0) \sup_{x_0 \in Q} \sum_{j \geq 0} \alpha_j(Q) \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \\
 &\lesssim M_{HL,2}(f)(x_0).
 \end{aligned}$$

□

Let us compare with the S.Blunck and P.Kunstmann's result (see Theorem 1.1 of [47]). We describe an improved version, due to P. Auscher (Theorem 1.1 of [40]) :

**Theorem 5.4.3.** *Let  $1 \leq p_0 < 2$ . Let  $\tilde{B}_Q$  be some uniformly  $L^2(X)$ -bounded operators. Let  $T$  be a  $L^2$ -bounded sublinear operator such that for all balls  $Q$  and for all functions  $f$  supported in  $Q$*

$$\forall j \geq 2 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |T(\tilde{B}_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu \right)$$

and

$$\forall j \geq 0 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |f - \tilde{B}_Q(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^{p_0} d\mu \right)^{1/p_0}.$$

If the coefficients  $\alpha_j(Q)$  satisfy

$$\sup_Q \sum_{j \geq 0} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty,$$

then there exists a constant  $C$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap L^{p_0}, \quad \|T(f)\|_{L^{p_0, \infty}} \leq C \|f\|_{p_0}.$$

So by real interpolation, for all  $p \in ]p_0, 2[$ , there exists a constant  $C$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap L^p, \quad \|T(f)\|_p \leq C \|f\|_p.$$

**Remark 5.4.8.** The first " $L^1 - L^2$ " condition of Theorem 5.4.3 is stronger than the first " $L^2 - L^2$ " condition of Theorem 5.4.2. So Theorem 5.4.2 has weaker conditions as far as the continuity on  $L^p$  with any  $p \in ]p_0, 2[$  is concerned. However the assumptions in Theorem 5.4.3 imply the weak type  $(p_0, p_0)$  by a variant of the Calderón-Zygmund decomposition, which does not seem to work under the assumptions of Theorem 5.4.2. Also Theorem 5.4.3 can be applied to sublinear operators, not only to linearizable operators.

## 5.5 Continuity results in weighted spaces.

We have used the sharp maximal function  $M_s^\sharp$  in previous sections. Like in the Euclidean case, we can use it to get continuity in weighted space.

We have the following result :

**Theorem 5.5.1.** Let  $T$  be a linear operator as in Theorem 5.3.1, then for  $1 \leq s \leq 2$ , we have

$$M_s^\sharp(T^*(f)) \lesssim M_{HL,2}(f).$$

**Proof :** Let  $f$  be a function in  $L^2$ . Let us fix  $x_0$  a point and write  $s'$  the conjuguate exponent of  $s$ . By using the assumption (5.10) of Theorem 5.3.1 :

$$\begin{aligned} M_s^\sharp(T^* f)(x_0) &= \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{s'} \leq 1}} |Q|^{-1/s} \int B_Q^*(T^* f) g d\mu \\ &= \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{s'} \leq 1}} |Q|^{-1/s} \int f T(B_Q(g)) d\mu \\ &\leq \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{s'} \leq 1}} \sum_{i \geq 0} \mu(Q)^{-1/s} \int_{S_i(Q)} |f T(B_Q(g))| \\ &\leq \sup_{x_0 \in Q} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{s'} \leq 1}} \sum_{i \geq 0} \mu(Q)^{-1/s} \|f\|_{2, S_i(Q)} \|T(B_Q(g))\|_{2, S_i(Q)}. \end{aligned}$$

For  $x_0 \in Q$ , we have the following estimates :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 0} \mu(Q)^{-1/s} \|f\|_{2,S_i(Q)} \|T(B_Q(g))\|_{2,S_i(Q)} \\ & \leq \mu(Q)^{-1/s} \left[ \sum_{i \leq 2} \|f\|_{2,S_i(Q)} \|g\|_2 + \sum_{i \geq 3} \|f\|_{2,S_i(Q)} \alpha_i(Q) \left( \frac{\mu(2^{i+1}Q)}{\mu(Q)} \right)^{1/2} \|g\|_2 \right] \\ & \lesssim \mu(Q)^{1/2} \|g\|_{s'} \left[ \sum_{i \leq 2} \|f\|_{2,S_i(Q)} + \sum_{i \geq 3} \|f\|_{2,S_i(Q)} \alpha_i(Q) \left( \frac{\mu(2^{i+1}Q)}{\mu(Q)} \right)^{1/2} \right] \\ & \lesssim M_{HL,2}(f)(x_0) \left[ 1 + \sum_{i \geq 3} \alpha_i(Q) \mu(2^{i+1}Q) \mu(Q)^{-1} \right] \\ & \lesssim M_{HL,2}(f)(x_0). \end{aligned}$$

So we obtain :

$$M_s^\sharp(T^* f)(x_0) \lesssim M_{HL,2}(f)(x_0).$$

□

We recall the definition of Muckenhoupt’s weights and Reverse Hölder classes :

**Definition 5.5.1.** A nonnegative function  $\omega$  on  $X$  belongs to the class  $\mathbb{A}_p$  for  $1 \leq p < \infty$  if

$$\sup_{Q \text{ ball}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \right) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega^{-1/(p-1)} d\mu \right)^{p-1} < \infty.$$

A nonnegative function  $\omega$  on  $X$  belongs to the class  $RH_q$  for  $1 < q < \infty$ , if there is a constant  $C$  such that for every ball  $Q \subset X$

$$\left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega^q d\mu \right)^{1/q} \leq C \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \right).$$

We have the well-known following properties (chapter 9 of [66] for the Euclidean case) :

**Proposition 5.5.2.** For  $1 < s < \infty$  the maximal operator  $M_{HL,s}$  is bounded on  $L^p(\omega)$  for all  $s < p < \infty$  and  $\omega \in \mathbb{A}_{p/s}$ . For  $1 \leq p < \infty$ , let  $\omega$  be an  $\mathbb{A}_p$ -weight then there exists some constants  $C, \epsilon > 0$  such that for all balls  $Q$  and all mesurable subsets  $A \subset Q$ , we have :

$$\frac{\omega(A)}{\omega(Q)} \leq C \left( \frac{\mu(A)}{\mu(Q)} \right)^\epsilon. \tag{5.26}$$

If  $\omega$  is as  $\mathbb{A}_p$  weight, then  $\omega^{1-p'} = \omega^{-1/(p-1)}$  is an  $\mathbb{A}_{p'}$  weight. In addition we have the following equivalence :

$$\omega \in \mathbb{A}_p \iff \omega^{1-p'} \in \mathbb{A}_{p'}.$$

With these definitions we have the following result :

**Theorem 5.5.2.** Let  $T$  be a linearizable operator which satisfies the assumption of Theorem 5.3.1. We assume that for  $\sigma \in ]2, \infty]$  the maximal operator  $M_\sigma$  is bounded by  $M_{HL,2}$ . Let  $p \in ]\sigma', 2[$  be an exponent and  $\omega$  a weight so that  $\omega \in \mathbb{A}_{p/\sigma'} \cap RH_{(\frac{2}{p})}$ . Then the operator  $T$  is "bounded" on  $L^p(\omega)$  : there exists a constant  $C$  such that :

$$\forall f \in L^2 \cap L^p(\omega), \quad \|T(f)\|_{p,\omega d\mu} \leq C \|f\|_{p,\omega d\mu}.$$

For the weight  $\omega$ , we define the associated measure (written by the same symbol)  $\omega$  by  $d\omega := \omega d\mu$ . Concerning the condition  $\omega \in \mathbb{A}_{p/2} \cap RH_{(\frac{\sigma'}{p})'}$ , we recall (Lemma 4.4 of [44]) that for  $\sigma' < p < 2$

$$\omega \in \mathbb{A}_{p/\sigma'} \cap RH_{(\frac{2}{p})'} \iff \omega^{1-p'} \in \mathbb{A}_{p'/2} \cap RH_{(\frac{\sigma'}{p'})'}. \quad (5.27)$$

In the following proof, we will use this equivalence.

**Proof :** We use the notations of Theorem 5.4.1. Let  $f \in L^2 \cap L^q(\omega^{1-q})$ . With  $h = V^*(f)$ , we write  $F = |h|^2$ .

First we recall the fact that  $V^*$  is the adjoint of  $V$  related to the measure  $\mu$ . So we have that

$$V \text{ is } L^p(\omega)\text{-bounded} \iff V^* \text{ is } L^q(\omega^{1-q})\text{-bounded,}$$

where  $q = p'$  is the conjuguate exponent of  $p$ . We use Theorem 3.1 of [44]. We have seen that we can apply it. With  $r := q/2 \in ]1, \sigma/2[$  and  $\omega^{1-2r} = \omega^{1-p'} \in RH_{(\frac{\sigma'}{p'})'}$ , we obtain the weighted version of (5.20) :

$$\|F\|_{r, \omega^{1-2r}} \leq \|M_{HL,1}(F)\|_{r, \omega^{1-2r}} \lesssim \|M_2^\sharp(h)^2\|_{q, \omega^{1-2r}} = \|M_2^\sharp(h)\|_{2r, \omega^{1-2r}}^2. \quad (5.28)$$

By using Theorem 5.5.1 and  $h = V^*(f)$ , we obtain for  $2 < q = 2r < \infty$  :

$$\|M_2^\sharp(h)\|_{2r, \omega^{1-2r}} \lesssim \|M_{HL,2}(f)\|_{2r, \omega^{1-2r}}.$$

The weight  $\omega^{1-q}$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{q/2}$ , so with Proposition 5.5.2 we get

$$\|M_{HL,2}(f)\|_{q, \omega^{1-q}} \lesssim \|f\|_{q, \omega^{1-2q}}.$$

Then the three previous estimates give

$$\|V^*(f)\|_{q, \omega^{1-q}} \lesssim \|f\|_{q, \omega^{1-q}}.$$

We obtain also that there exists a constant  $C$  such that :

$$\forall f \in L^2 \cap L^q(\omega^{1-q}), \quad \|V^*(f)\|_{q, \omega^{1-q}} \leq C \|f\|_{q, \omega^{1-q}}.$$

Thus by duality we can obtain that  $V$  is bounded on  $L^p(\omega)$ .  $\square$

We use the following notation of [44] :

**Definition 5.5.3.** For  $\omega$  a nonnegative function on  $X$  and  $0 < p_0 < q_0 \leq \infty$  two exponents, we introduce the set

$$\mathcal{W}_\omega(p_0, q_0) := \left\{ p \in ]p_0, q_0[, \omega \in \mathbb{A}_{p/p_0} \cap RH_{(q_0/p)'} \right\}.$$

Then we have the "weighted" version of Theorem 5.4.2 :

**Theorem 5.5.3.** Let  $1 \leq p_0 < 2$ . Let  $T$  be a  $L^2$ -bounded linearizable operator such that for all balls  $Q$  and for all functions  $f$  supported in  $Q$

$$\forall j \geq 2 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$$



and

$$\forall j \geq 0 \quad \left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{S_j(Q)} |f - B_Q(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j(Q) \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^{p_0} d\mu \right)^{1/p_0},$$

where coefficients  $\alpha_j(Q)$  satisfy

$$\sup_{Q \text{ ball}} \sum_{j \geq 0} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty.$$

Let  $\omega$  be a nonnegative function. Then for all exponents  $p \in \mathcal{W}_\omega(p_0, 2)$ , there exists a constant  $C$  such that

$$\forall f \in L^2 \cap L^p(\omega), \quad \|T(f)\|_{p, \omega d\mu} \leq C \|f\|_{p, \omega d\mu}.$$

**Proof :** We have proved in Theorem 5.4.2, that under these assumptions the maximal operator  $M_{(p_0)'}$  is bounded by the operator of Hardy-Littlewood  $M_{HL,2}$ . Then the desired result is a consequence of Theorem 5.5.2 with  $\sigma = (p_0)'$ .

**Remark 5.5.4.** Like the comparison between Theorem 5.4.2 and Theorem 5.4.3, we can compare Theorem 5.5.3 with Theorem 8.8 of [44] : 5.5.3 needs simpler and weaker assumptions as far as the continuity on  $L^p$  with any  $p \in \mathcal{W}_\omega(p_0, 2)$  is concerned.

## 5.6 Embedding of $H_{\epsilon, mol}^1$ into $L^1$ .

Here we discuss conditions on  $\mathbb{B} = (B_Q)_Q$  insuring the embedding of Hardy spaces into  $L^1(X)$ . We assume throughout this section that they satisfy some decay estimates : for  $M''$  a large enough exponent, there exists a constant  $C$  such that

$$\forall i \geq 0, \forall k \geq 0, \forall f \in L^2, \text{ supp}(f) \subset 2^i Q \quad \|B_Q(f)\|_{2, S_k(2^i Q)} \leq C 2^{-M''k} \|f\|_{2, 2^i Q}. \quad (5.29)$$

In the sequel, all results about the atomic space  $H_{ato}^1$  only need (5.29) with  $i = 0$ . If we want to work with the molecular space  $H_{\epsilon, mol}^1$ , then we need (5.29) for all  $i \geq 0$ . We have the following imbedding :

**Proposition 5.6.1.** *We have the following inclusions :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad H_{ato}^1 \hookrightarrow H_{\epsilon, mol}^1 \hookrightarrow L^1(X).$$

**Proof :** We claim that all  $\epsilon$ -molecules (and atoms) are bounded in  $L^1(X)$ . In fact, using (5.29)

$$\begin{aligned} \|B_Q(f_Q)\|_1 &\leq \sum_{i \geq 0} \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_i(Q)})\|_1 \leq \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_i(Q)})\|_{1, S_k(2^i Q)} \\ &\lesssim \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mu(2^{i+k}Q)^{1/2} \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_i(Q)})\|_{2, S_k(2^i Q)} \\ &\lesssim \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mu(2^{i+k}Q)^{1/2} 2^{-kM''} \|f_Q\|_{2, S_i(Q)} \\ &\lesssim \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mu(2^{i+k}Q)^{1/2} 2^{-M''k} \mu(2^i Q)^{-1/2} 2^{-\epsilon i} \\ &\lesssim \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} 2^{k\delta/2} 2^{-M''k} 2^{-\epsilon i} \lesssim 1. \end{aligned}$$

Here we use the estimates for  $f_Q$ , the doubling property of  $\mu$  and the fact that  $M''$  is large enough ( $M'' > \delta/2$  works). So we obtain that all  $\epsilon$ -molecules are bounded in  $L^1(X)$ , and we can deduce the imbedding using Lemma 5.3.2.  $\square$

We recall that with this inclusion, in the study of the interpolation problem, we have obtained a more precise result (Corollary 5.4.5).

**Corollary 5.6.2.** *The spaces  $H_{ato}^1$  and  $H_{\epsilon, mol}^1$  are Banach spaces.*

**Proof :** It is obvious that these spaces are vectorial normed spaces. We must verify the completeness. The proof is easy by using the following well-known condition : for  $\epsilon > 0$ ,  $H_{\epsilon, mol}^1$  is a Banach space if for all sequences  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of  $H_{\epsilon, mol}^1$  satisfying

$$\sum_{i \geq 0} \|h_i\|_{H_{\epsilon, mol}^1} < \infty,$$

the series  $\sum h_i$  converges in the Hardy space  $H_{\epsilon, mol}^1$ . This is true because each molecular decomposition is absolutely convergent in  $L^1$ -sense so we can define the series  $\sum_i h_i$  as a measurable function in  $L^1$  and it is easy to prove the convergence for the  $H_{\epsilon, mol}^1$  norm.  $\square$

We have another corollary :

**Corollary 5.6.3.** *We also have the inclusions :*

$$L^\infty(X) \subset (H_{\epsilon, mol}^1)^* \subset (H_{ato}^1)^*.$$

Now we want to compare our abstract Hardy spaces  $H_{ato}^1$  and  $H_{\epsilon, mol}^1$  with the classical Hardy space  $H_{CW}^1$  of Coifman-Weiss. To do this we must define for a ball  $Q$  the function  $A_Q^*(\mathbf{1}_X)$ . Let  $m := B_Q(f_Q)$  an  $\epsilon$ -molecule of  $H_{\epsilon, mol}^1$ . We have seen that the integral

$$\int_X A_Q(f_Q)(x) d\mu(x)$$

converges in  $L^1$  sense (due to the decay of  $f_Q$  and the "off-diagonal" decay of  $A_Q$ ). Also we get

$$\forall f \in L^1(X), \quad \left| \int_X A_Q(f)(x) d\mu(x) \right| \lesssim \sup_{i \geq 0} \|f\|_{2, S_i(Q)} (\mu(2^i Q))^{1/2} 2^{\epsilon i}.$$

We can also consider the linear functional  $f \rightarrow \int_X A_Q(f)(x) d\mu(x)$ , which will be denoted  $A_Q^*(\mathbf{1}_X)$ , defined on the space

$$Mol_{\epsilon, Q} := \left\{ f \in L^1(X), \|f\|_{Mol_{\epsilon, Q}} := \sup_{i \geq 0} \|f\|_{2, S_i(Q)} (\mu(2^i Q))^{1/2} 2^{\epsilon i} < \infty \right\}.$$

With these preparations we have the following comparison between Hardy spaces :

**Proposition 5.6.4.** *Let  $\epsilon \in ]0, \infty]$ . The inclusion  $H_{\epsilon, mol}^1 \subset H_{CW}^1$  is equivalent to the fact that for all  $Q \in \mathcal{Q}$ ,  $(A_Q)^*(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_X$  in  $(Mol_{\epsilon, Q})^*$ . In this case for all  $\epsilon' \geq \epsilon$  we have the inclusions  $H_{ato}^1 \subset H_{\epsilon', mol}^1 \subset H_{\epsilon, mol}^1 \subset H_{CW}^1$ .*

**Proof :**

1-) Proof of the sufficiency.

Let  $m := B_Q(f_Q)$  an  $\epsilon$ -molecule of  $H_{\epsilon, mol}^1$ . First we want to prove that the integral of  $m$  is equal to 0. To show this we use the definition  $B_Q = Id - A_Q$ . By definition we have

$$\int_X A_Q(f_Q)(x)d\mu(x) = \langle A_Q(f_Q), \mathbf{1}_X \rangle = \langle f_Q, A_Q^*(\mathbf{1}_X) \rangle.$$

So by the assumption, we have

$$\int_X A_Q(f_Q)d\mu = \int_X f_Q d\mu.$$

So we have shown that  $\int B_Q(f_Q)d\mu = 0$ .

Now we will prove that the molecule  $m$  satisfies the good decay around the ball  $Q$  and so is an  $H_{CW}^1$  molecule associated to the ball  $Q$ . With the previous "off-diagonal" decay of  $B_Q$ , the uniform  $L^2$ -boundedness of  $B_Q$  and the assumptions over  $f_Q$ , we have that for all  $j \geq 0$  with  $M''$  large enough :

$$\begin{aligned} \|B_Q(f_Q)\|_{2, S_j(Q)} &\leq \sum_{i \geq 0} \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_i(Q)})\|_{2, S_j(Q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^j \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_k(Q)})\|_{2, S_j(Q)} + \sum_{k=j}^{\infty} \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_k(Q)})\|_{2, X} \\ &\leq \sum_{k=0}^j \|B_Q(f_Q \mathbf{1}_{S_k(Q)})\|_{2, S_{j-k}(2^k Q)} + \sum_{k=j}^{\infty} \|f_Q\|_{2, S_k(Q)} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^j 2^{-M''(j-k)} \|f_Q\|_{2, S_k(Q)} + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(Q)^{-1/2} 2^{-k\epsilon} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^j 2^{-M''(j-k)} \mu(Q)^{-1/2} 2^{-k\epsilon} + \mu(Q)^{-1/2} 2^{-j\epsilon} \\ &\lesssim \mu(Q)^{-1/2} 2^{-j\epsilon}. \end{aligned}$$

So we have proved that  $m$  satisfies the decay of a classical molecule in the space  $H_{CW}^1$ .

So  $m \in H_{CW}^1$  and then  $H_{\epsilon, mol}^1 \subset H_{CW}^1$  follows from Lemma 5.3.2.

2-) Proof of the necessity.

We assume that  $H_{\epsilon, mol}^1$  is included in  $H_{CW}^1$ . Let  $Q$  be a ball. So for each  $\epsilon$ -molecule  $m = B_Q(f_Q)$  we have that

$$\int B_Q(f_Q)d\mu = \int f_Q d\mu(Q) - \int A_Q(f_Q)d\mu = 0.$$

We can compute the difference of the two integrals, because we have seen that they converge in  $L^1$  sense. So by definition we have that for all  $f \in Mol_{\epsilon, Q}$

$$\int f_Q d\mu = \langle A_Q^*(\mathbf{1}_X), f \rangle,$$

which means that  $A_Q^*(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_X$  in  $(Mol_{\epsilon, Q})^*$ . □

**Remark 5.6.5.** Under the assumption of the previous proposition and Theorem 5.4.1, it is interesting to note that the space  $H_{ato}^1$  is smaller than the Hardy space  $H_{CW}^1$  and it is big enough in  $L^1(X)$  to get the  $L^p(X)$  spaces by interpolation with  $L^2(X)$ .

**Remark 5.6.6.** In [57] (see Subsection 5.2.4) the authors study whether their space  $BMO_L$  satisfies  $BMO \subset BMO_L$ . In Proposition 6.7 of [57], they prove that the inclusion  $BMO \subset BMO_L$  is equivalent to the fact that for all  $r > 0$ ,  $e^{-rL}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ . By Theorem 3.1 of [57], we know that  $(H_L^1)^* = BMO_{L^*}$ . Also we have that

$$H_L^1 \subset H_{CW}^1 \iff \forall r > 0, e^{-rL^*}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}.$$

We recall (Subsection 5.2.4) that with the choice

$$B_Q(f) := f - e^{-r_Q^2 L}(f)$$

we have the inclusion

$$\forall \epsilon > 0, H_{\epsilon, mol}^1 \subset H_L^1.$$

The previous proposition shows that we have :

$$H_{\epsilon, mol}^1 \subset H_{CW}^1 \iff \forall r > 0, e^{-rL^*}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} \iff H_L^1 \subset H_{CW}^1.$$

## 5.7 An application for the $L^p$ maximal regularity.

In this part, we apply the previous general theory to reobtain the  $L^p$  maximal regularity for Cauchy Problem. First we recall the subject of  $L^p$  maximal regularity.

Let  $(Y, d_Y, \nu)$  a space of homogeneous type. Let  $A$  the infinitesimal generator of an analytic semigroup of operators on  $L^p(Y)$  and  $J = (0, l]$ ,  $l > 0$  or  $J = (0, +\infty)$  (in the second case, one has to assume that  $A$  generates a bounded analytic semigroup).

Consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t), & t \in J, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

where  $f : J \rightarrow X$  is given. If  $e^{tA}$  is the semigroup generated by  $A$ ,  $u$  is formally given by

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

For fixed  $q \in (1, +\infty)$ , one says that there is maximal  $L^q$  regularity for the problem if for every  $f \in L^q(J, L^p(Y))$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  (or  $Au$ ) belongs to  $L^q(J, L^p(Y))$ . For the maximal  $L^q$  regularity, we refer to [49], [54], [53], [56], [69], [72] etc.

We now define an operator  $T$  :

**Definition 5.7.1.** With  $A$  the generator, we define the operator :

$$Tf(t, x) = \int_0^t [Ae^{(t-s)A} f(s, \cdot)](x) ds.$$

Let  $p, q \in ]1, \infty[$  be two exponents. We know that the maximal  $L^q$  regularity on  $L^p(Y)$  is equivalent to the fact that  $T$  is bounded on  $L^p(J \times Y)$ . That is why we study this operator.

We need some conditions on our semi-group  $e^{tA}$ .

**Definition 5.7.2.** Let  $\mathcal{T} := (T_t)_{t \in J}$  be a collection of  $L^2$ -bounded operators. We will say that  $\mathcal{T}$  satisfies off-diagonal  $L^2 - L^2$  estimates at "low scale" if there exists a function  $\gamma$  satisfying

$$\forall p \geq 0, \quad \sup_{u \geq 1} \gamma(u)u^p < \infty, \tag{5.30}$$

such that for all balls  $B \subset Y$  of radius  $r$ , for all functions  $f$  supported in  $B$  if  $u \leq 2^{j+1}r$  then

$$\left( \frac{1}{\nu(2^{j+1}B)} \int_{S_j(B)} |T_{u^2}(f)|^2 d\nu \right)^{1/2} \leq \frac{\nu(B)}{\nu(2^{j+1}B)} \gamma\left(\frac{2^{j+1}r}{u}\right) \left( \frac{1}{\nu(B)} \int_B |f|^2 d\nu \right)^{1/2}. \tag{5.31}$$

We also write  $\mathcal{T} \in \mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2)$ .

We will say that  $\mathcal{T}$  satisfies off-diagonal  $L^2 - L^2$  estimates at "high scale" if for all balls  $B \subset Y$  of radius  $r$ , for all functions  $f$  supported in  $B$

$$u \geq 2^{j+1}r \implies \left( \frac{1}{\nu(2^{j+1}B)} \int_{S_j(B)} |T_{u^2}(f)|^2 d\nu \right)^{1/2} \leq \frac{\nu(B)}{\nu(\frac{u}{r}B)} \left( \frac{1}{\nu(B)} \int_B |f|^2 d\nu \right)^{1/2}. \tag{5.32}$$

We write also  $\mathcal{T} \in \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$ .

In these two cases, the "scale" corresponds to the ratio between the parameter  $u$  and the size  $2^j r$  of the corona  $S_j(B)$ , where we estimate the operator  $T_{u^2}$ .

Let  $q_0 \in [2, \infty]$  be a fixed exponent, we say that  $\mathcal{T}$  satisfies weak off-diagonal  $L^2 - L^{q_0}$  estimates if there exist coefficients  $(\beta_j)_{j \geq 0}$  satisfying

$$\sum_{j \geq 0} 2^j \beta_j < \infty \tag{5.33}$$

such that for all balls  $B$  and for all functions  $f \in L^2(X)$  we have

$$\left( \frac{1}{\nu(B)} \int_B |T_{r_Q^2}(f)|^{q_0} d\nu \right)^{1/q_0} \leq \sum_{j \geq 0} \beta_j \left( \frac{1}{\nu(2^j B)} \int_{2^j B} |f|^2 d\nu \right)^{1/2}. \tag{5.34}$$

We also write  $\mathcal{T} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0})$ .

**Remark 5.7.3.** 1-) It is easy to check that if a collection  $\mathcal{T} \in \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$  then  $\mathcal{T}^* := (T_t^*)_{t > 0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^2)$  with some coefficients  $\beta_j$  satisfying

$$\forall j \geq 0, \quad \beta_j \leq \gamma(2^j).$$

2-) All these conditions are satisfied with  $q_0 = \infty$  if the kernel  $K_t$  of the operator  $T_t$  admits some gaussian estimates like

$$|K_t(x, y)| \lesssim \frac{1}{\nu(B(x, t^{1/2}))} e^{-d(x,y)^2/t}.$$

The main result of this section is the following one :

**Theorem 5.7.1.** *Let  $A$  be a generator of a semi group  $\mathcal{T} := (e^{tA})_{t>0}$  such that  $\mathcal{T}, (tAe^{tA})_{t>0}$  and  $(t^2A^2e^{tA})_{t>0}$  belong to  $\mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2) \cap \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$ . Then there exists a collection  $\mathbb{B} = (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  of  $L^2(J \times Y)$ -bounded operators such that for all  $\epsilon > 0$  the operator  $T$  is continuous from  $H_{\epsilon, mol}^1(J \times Y)$  to  $L^1(J \times Y)$ .*

*In addition if  $\mathcal{T}^* := (e^{tA^*})_{t>0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0})$  for a  $q_0 \in [2, \infty]$  then the maximal operator  $M_{q_0}$  (defined by (5.17)) is bounded by the Hardy-Littlewood maximal operator  $M_{HL,2}$ .*

We separate the proof in several steps. First we are going to describe the choice of the collection  $\mathbb{B}$ . Then we will check that the assumption (5.5) and the one about  $M_{q_0}$  are satisfied. To finish the proof, we will show the  $H_{\epsilon, mol}^1 - L^1$  boundedness of  $T$  in Theorem 5.7.4.

Equip  $X = J \times Y$  with the parabolic quasi-distance  $d$  and the measure  $\mu$  defined by :

$$d\left((t_1, y_1), (t_2, y_2)\right) = \max \left\{ d_Y(y_1, y_2), \sqrt{|t_1 - t_2|} \right\} \quad \text{and} \quad d\mu = dt \otimes d\nu.$$

If we write  $\delta$  for the homogeneous dimension of the space  $(Y, d_Y, \nu)$ , then the space  $X$  is of homogeneous type with homogeneous dimension  $\delta + 2$ . We explain how to choose the collection  $(B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  in this special case. We choose  $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^+)$  such that  $\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t) dt = 1$  and  $\varphi(t) := 0$  for all  $t < 0$  ( $\varphi$  does not need to be continuous at 0).<sup>4</sup> For each cube  $Q$  of  $X$ , we write  $r_Q$  its radius and we define the  $B_Q$  operator as :

$$B_Q = B_{r_Q^2} \quad \text{with} \quad B_r(f) := f - A_r(f),$$

where the operator  $A_r$  is defined by :

$$A_r(f)(t, x) := \int_{\sigma=0}^{+\infty} \varphi_r(t - \sigma) e^{rA}(f(\sigma, \cdot))(x) d\sigma. \quad (5.35)$$

Here we write  $\varphi_r$  as the  $L^1$  normalized function  $\varphi_r(t) := r^{-1}\varphi(t/r)$ . In fact, the integral for  $\sigma \in [0, \infty[$  is reduced to  $[0, t]$ , due to the fact that  $\varphi$  is supported in  $\mathbb{R}^+$ .

Now we prove that these operators  $B_Q$  satisfy the "good" conditions. First we have the assumption (5.5) :

**Proposition 5.7.4.** *There is a constant  $0 < A' < \infty$  so that for all  $r > 0$  the operator  $A_r$  is  $L^2(X)$  bounded and we have :*

$$\|A_r\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq A'.$$

---

<sup>4</sup>In fact we shall use only the fast decay of  $\varphi$  and we will never consider regularity about it. In addition, we have added a condition for the support. This is a "physical" argument : this condition permits to define  $A_Q(f)(t, x)$  by (5.35) with only  $(f(\sigma, y))_{\sigma \leq t}$ , which corresponds to the "past informations" about  $f$ . However to compute the different arguments in all the sequel, we do not need this assumption.

**Proof :** By definition the semi-group  $e^{rA}$  is  $L^2$ -bounded so we have the following estimates :

$$\begin{aligned} \|A_r(f)\|_2 &\leq \left\| \int_{\sigma=0}^{+\infty} \int_{y \in Y} |\varphi_r(t-\sigma)| \|e^{rA}(f(\sigma, \cdot))\|_{2,d\nu} d\sigma \right\|_{2,dt} \\ &\lesssim \left\| \int_{\sigma=0}^{+\infty} |\varphi_r(t-\sigma)| \|f(\sigma, \cdot)\|_{2,d\nu} d\sigma \right\|_{2,dt} \\ &\lesssim \left\| \int_{\sigma=0}^{+\infty} |\varphi_r(\sigma)| \|f(t-\sigma, \cdot)\|_{2,d\nu} d\sigma \right\|_{2,dt} \\ &\lesssim \|\varphi_r\|_1 \|f\|_{2,d\mu} \lesssim \|f\|_{2,d\mu}. \end{aligned}$$

So we have proved that  $A_r$  is  $L^2$ -bounded and its boundedness is uniform for  $r > 0$ .  $\square$

**Theorem 5.7.2.** *Define the maximal operator*

$$M_{q_0}(f)(\sigma, x) := \sup_{\substack{Q \text{ ball} \\ (\sigma, x) \in Q}} \left( \frac{1}{\mu(B)} \int_B |A_Q^*(f)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0}.$$

If  $(e^{tA^*})_{t>0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0})$  then  $M_{q_0}$  is bounded by the Hardy-Littlewood maximal operator  $M_{HL,2}$  on  $X$ .

**Proof :** Let  $Q$  be a ball containing the point  $(\sigma, x) \in X$  and  $r_Q$  be its radius. For  $f, g \in L^2(X)$  we have :

$$\begin{aligned} \langle A_Q(f), g \rangle &:= \int_{(t,x) \in X} \int_{\sigma=0}^{+\infty} \varphi_{r_Q^2}(t-\sigma) e^{r_Q^2 A}(f(\sigma, \cdot))(x) g(t, x) d\sigma dt d\nu(x) \\ &= \int_{(t,x) \in X} \int_{\sigma=0}^{+\infty} \varphi_{r_Q^2}(t-\sigma) f(\sigma, x) \left[ \left( e^{r_Q^2 A} \right)^* g(t, \cdot) \right](x) d\sigma dt d\nu(x). \end{aligned}$$

So we conclude that :

$$A_Q^*(g)(\sigma, x) := \int_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi_{r_Q^2}(t-\sigma) \left[ \left( e^{r_Q^2 A} \right)^* g(t, \cdot) \right](x) dt. \quad (5.36)$$

By using the Minkowski inequality, we also have that

$$\left( \int_Q |A_Q^*(g)|^{q_0} d\mu \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \int_{t \in \mathbb{R}^+} \left\| \varphi_{r_Q^2}(t-\sigma) \left[ \left( e^{r_Q^2 A} \right)^* g(t, \cdot) \right](x) \right\|_{q_0, d\nu(x) d\sigma} dt.$$

By definition of the parabolic quasi-distance, we can write

$$Q = I \times B$$

with  $I$  an interval of length  $r_Q^2$  and  $B$  a ball of  $Y$  of radius  $r_Q$ . Then we have :

$$\begin{aligned} \left( \int_Q |A_Q^*(f)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} &\leq \\ &\int_{t \in \mathbb{R}^+} \left\| \varphi_{r_Q^2}(t-\sigma) \mathbf{1}_I(\sigma) \right\|_{q_0, d\sigma} \left\| \mathbf{1}_B(x) \left( e^{r_Q^2 A} \right)^* g(t, \cdot)(x) \right\|_{q_0, d\nu(x)} dt. \end{aligned}$$

With the assumption (5.34), we obtain

$$\left( \int_Q |A_Q^*(f)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \leq \sum_{j \geq 0} \int_{t \in \mathbb{R}^+} \left\| \varphi_{r_Q^2}(t - \sigma) \mathbf{1}_I(\sigma) \right\|_{q_0, d\sigma} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \|g(t, x) \mathbf{1}_{2^j B}(x)\|_{2, d\nu(x)} dt.$$

Now we decompose the integration over  $t$  by :

$$\left( \int_Q |A_Q^*(f)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \leq \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \int_{t \in S_k(I)} \left\| \varphi_{r_Q^2}(t - \sigma) \mathbf{1}_I(\sigma) \right\|_{q_0, d\sigma} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \|g(t, x) \mathbf{1}_{2^j B}(x)\|_{2, d\nu(x)} dt.$$

With the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} & \left( \int_Q |A_Q^*(f)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \\ & \lesssim \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} r_Q^{-2} (1 + 2^k)^{-l} r_Q^{2/q_0} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} (2^k r_Q^2)^{1/2} \|g(t, x) \mathbf{1}_{2^k I \times 2^j B}(t, x)\|_{2, dt d\nu(x)} \\ & \lesssim \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} r_Q^{-1+2/q_0} (1 + 2^k)^{-l+1/2} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \|g(t, x) \mathbf{1}_{2^k I \times 2^j B}(t, x)\|_{2, dt d\nu(x)}. \end{aligned}$$

Here  $l$  is an integer as large as we want, due to the fast decay of  $\varphi$ . Using the maximal Hardy-Littlewood operator, we have

$$\|g(t, x) \mathbf{1}_{2^k I \times 2^j B}(t, x)\|_{2, dt d\nu(x)} \leq \mu(\max\{2^j, 2^{k/2}\}Q)^{1/2} \inf_Q M_{HL,2}(g).$$

So we obtain

$$\left\| \int_Q |A_Q^*(g)|^{q_0} d\mu \right\|_{q_0} \leq \left[ \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} r_Q^{-1+2/q_0} (1 + 2^k)^{-l+1/2} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \mu(\max\{2^j, 2^{k/2}\}Q)^{1/2} \right] \inf_Q M_{HL,2}(g).$$

We now estimate the sum over the parameters  $j$  and  $k$ . We have the two following cases. Write

$$S_1 := \sum_{j \geq k/2 \geq 0} r_Q^{-1+2/q_0} (1 + 2^k)^{-l+1/2} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \mu(2^j Q)^{1/2}$$

and

$$S_2 := \sum_{k/2 \geq j \geq 0} r_Q^{-1+2/q_0} (1 + 2^k)^{-l+1/2} \beta_j \frac{\nu(B)^{1/q_0}}{\nu(2^j B)^{1/2}} \mu(2^{k/2} Q)^{1/2}.$$



We must estimate these two sums. For the first, we use that  $\mu(Q) = |I|\nu(B) = r_Q^2\nu(B)$  to have

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{j \geq k/2 \geq 0} 2^j (1+2^k)^{-l+1/2} \beta_j \frac{\mu(Q)^{1/q_0}}{\mu(2^j Q)^{1/2}} \mu(2^j Q)^{1/2} \\ &\leq \mu(Q)^{1/q_0} \sum_{j \geq k/2 \geq 0} 2^j (1+2^k)^{-l+1/2} \beta_j \\ &\leq \mu(Q)^{1/q_0} \sum_{j \geq 0} 2^j \beta_j \lesssim \mu(Q)^{1/q_0}. \end{aligned}$$

In the last inequality, we have used the assumption (5.33) about the coefficients  $(\beta_j)_j$ . For the second sum, we have (with the doubling property of  $\mu$  and  $l$  large enough)

$$\begin{aligned} S_2 &\leq r_Q^{2/q_0} \nu(B)^{1/q_0} \sum_{k/2 \geq j \geq 0} r_Q^{-1} (1+2^k)^{-l+1/2} \beta_j \left( \frac{\mu(2^{k/2} Q)}{\nu(2^j B)} \right)^{1/2} \\ &\lesssim \mu(Q)^{1/q_0} \sum_{k/2 \geq j \geq 0} r_Q^{-1} (1+2^k)^{-l+1/2} \beta_j \left( \frac{\mu(2^j Q)}{\nu(2^j B)} \right)^{1/2} 2^{(k/2-j)(\delta+2)/2} \\ &\lesssim \mu(Q)^{1/q_0} \sum_{k/2 \geq j \geq 0} (1+2^k)^{-l+1/2} \beta_j 2^{j(k/2-j)(\delta+2)/2} \\ &\lesssim \mu(Q)^{1/q_0} \sum_{j \geq 0} (1+2^j)^{-l+4+\delta/2} \beta_j 2^{-j(\delta/2+1)} \lesssim \mu(Q)^{1/q_0}. \end{aligned}$$

So we have proved that there exists a constant  $C$  (independent on  $g$  and  $Q$ ) such that :

$$\left( \int_Q |A_Q^*(g)|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \leq C \mu(Q)^{1/q_0} \inf_Q M_{HL,2}(g).$$

We can also conclude that

$$M_{q_0}(f) \lesssim M_{HL,2}(g).$$

□

The assumption on  $M_{q_0}$  satisfied :  $M_{q_0}$  is bounded by  $M_{HL,2}$ . To apply the previous abstract result about interpolation, we must now show that our operator  $T$  is continuous from our Hardy spaces into  $L^1$  and prove the  $L^2$ -boundedness of  $T$ .

**Theorem 5.7.3.**  *$T$  is  $L^2(X)$ -bounded.*

This fact was proved in [56] because it is equivalent to the  $L^2$ -maximal regularity on  $L^2(Y)$ .

Now we want to apply the general Theorem 5.3.2. We have the following result :

**Theorem 5.7.4.** *Assume that  $(e^{tA})_{t>0}$ ,  $(tAe^{tA})_{t>0}$  and  $(t^2 A^2 e^{tA})_{t>0}$  belong to  $\mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2) \cap \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$ . Then there exist coefficients  $\alpha_{j,k}$  such that for all balls  $Q \subset X$ , for all  $k \geq 0, j \geq 2$  and for all functions  $f$  supported in  $S_k(Q)$*

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^k Q)} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_{j,k} \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{S_k(Q)} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

In addition the coefficients  $\alpha_{j,k}$  (independent in  $Q$ ) satisfy

$$\Lambda := \sup_Q \sup_{k \geq 0} \left[ \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k} \right] < \infty. \quad (5.38)$$

With Theorem 5.3.2, these estimates imply the  $H_{\epsilon, \text{mol}}^1 - L^1$  boundedness of  $T$  for all  $\epsilon > 0$ .

**Proof :** We write  $r = r_Q$  and  $(t_0, x_0)$  the radius and the center of the ball  $Q$  so we have defined  $B_Q$  as  $B_{r^2}$ . The function  $f$  is fixed. The parameter  $j$  and  $k$  are fixed too. We write  $Q$  as the product  $Q = I \times B$  with  $I$  an interval of length  $r_Q^2$  and  $B$  a ball of  $Y$  of radius  $r_Q$ . We have

$$\begin{aligned} TB_{r^2}(f)(t, x) &= T(f)(t, x) - TA_{r^2}(f)(t, x) \\ &= \int_0^t [Ae^{(t-s)A} f(s, \cdot)](x) ds - \int_0^t [Ae^{(t-s)A} A_{r^2} f(s, \cdot)](x) ds, \end{aligned}$$

where

$$[Ae^{(t-s)A} A_{r^2} f(s, \cdot)](x) = Ae^{(t-s)A} \left[ \int_{\sigma=0}^{+\infty} \varphi_{r^2}(s - \sigma) e^{r^2 A} f(\sigma, \cdot) d\sigma \right](x).$$

So we obtain

$$\begin{aligned} T(B_{r^2} f)(t, x) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{r^2}(s - \sigma) \left[ \mathbf{1}_{0 < \sigma \leq t} Ae^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x) - \mathbf{1}_{0 < s \leq t} Ae^{(t-s+r^2)A} f(\sigma, \cdot)(x) \right] d\sigma ds. \end{aligned} \quad (5.39)$$

We have three time-parameters  $\sigma, t$  and  $s$ . As in the case of Calderón-Zygmund operators, the difference between the two brackets is very important. This will allow us to obtain the necessary decay for the coefficients  $\alpha_{j,k}$ . We decompose into two domains :

$$D_1 := \{(\sigma, t, s), 0 \leq \sigma \leq t \leq s\} \quad \text{and} \quad D_2 := \{(\sigma, t, s), 0 \leq s, \sigma \leq t\}.$$

For  $i \in \{1, 2\}$  we set  $D_i(t) := \{(\sigma, s); (\sigma, t, s) \in D_i\}$  and

$$\begin{aligned} U_i(f)(t, x) &:= \\ &= \iint_{D_i(t)} \varphi_{r^2}(s - \sigma) \left[ \mathbf{1}_{0 < \sigma \leq t} Ae^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x) - \mathbf{1}_{0 < s \leq t} Ae^{(t-s+r^2)A} f(\sigma, \cdot)(x) \right] d\sigma ds. \end{aligned}$$

As  $\varphi$  is supported in  $\mathbb{R}^+$ , we have decomposed

$$T(B_{r^2} f)(t, x) = \sum_{i=1}^2 U_i(f)(t, x). \quad (5.40)$$

If we do not want to use the condition of the support, there is a third term which is estimated as the first one. We begin the study when one of the two terms, in the square brackets, vanishes. For convenience, the radius  $r$  is fixed for all the proof and we set

$$\chi_N(y) := \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{|y|}{r^2} \right)^{-N}.$$

1-) First case :  $(\sigma, s) \in D_1(t)$ .

Here we have the following expression :

$$U_1(f)(t, x) = - \int_t^\infty \int_0^t \varphi_{r^2}(s - \sigma) A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x) d\sigma ds.$$

There is no "cancellation" so we can directly estimate it by using the fast decay of  $\varphi$ . For  $N$  a large enough integer

$$|U_1(f)(t, x)| \lesssim r^2 \int_0^t \chi_N(t - \sigma) |A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x)| d\sigma.$$

By definition of the parabolic quasi-distance,

$$(t, x) \in S_j(2^k Q) \iff \begin{cases} d_Y(x, x_0) \simeq 2^{k+j}r \\ |t - t_0| \leq (2^{k+j+1}r)^2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} d_Y(x, x_0) \lesssim 2^{k+j}r \\ |t - t_0| \simeq (2^{k+j+1}r)^2 \end{cases} .$$

So, as  $f$  is supported in  $2^k Q$ , we have

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^k Q)} |U_1(f)(t, x)|^2 d\nu(x) dt \right)^{1/2} \lesssim I + II \tag{5.41}$$

with

$$I := \left( \frac{r^4}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{2^{2(j+k)}I} \left( \int_{2^{2k}I} \chi_N(t - \sigma) \|A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)\|_{2, S_j(2^k B)} d\sigma \right)^2 dt \right)^{1/2}$$

and

$$II := \left( \frac{r^4}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_{2^j}(2^{2k}I)} \left( \int_{2^{2k}I} \frac{\|A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^{k+j+1}B}}{2^{2N(k+j)}} d\sigma \right)^2 dt \right)^{1/2} .$$

\* Study of  $I$ .

By using off-diagonal estimates  $L^2 - L^2$  (5.31), we know that

$$\frac{1}{\nu(2^{j+k+1}B)^{1/2}} \|A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)\|_{2, S_j(2^k B)} \leq \frac{\nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)|t - \sigma|} \gamma \left( \frac{2^{j+k}r}{\sqrt{|t - \sigma|}} \right) \left( \frac{1}{\nu(2^{k+1}B)} \int_{2^{k+1}B} |f(\sigma, \cdot)|^2 d\nu \right)^{1/2} .$$

That is why, by using Cauchy-Schwarz inequality and the equality

$$\mu(2^{j+k+1}Q) = \nu(2^{j+k+1}B)2^{2(j+k)}r^2,$$

we estimate  $I$  by the product

$$\left( \frac{1}{2^{2(k+j)}} \int_{2^{2k+2j}I} \int_{2^{2k}I} \chi_{2N}(t - \sigma) \left( \frac{\nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)|t - \sigma|} \right)^2 \gamma \left( \frac{2^{j+k}r}{\sqrt{|t - \sigma|}} \right)^2 d\sigma dt \right)^{1/2} 2^k r \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} .$$

Then we get

$$\begin{aligned}
I &\lesssim \frac{\nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} \left[ \frac{1}{|2^{2k+2j}I|} \int_{2^{2k+2j}I} \int_{2^{2k}I} \chi_{2^N}(t-\sigma) \frac{2^{2k}r^4}{|t-\sigma|^2} \right. \\
&\quad \left. \gamma \left( \frac{2^{j+k}r}{\sqrt{|t-\sigma|}} \right)^2 d\sigma dt \right]^{1/2} \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\lesssim \frac{2^k \nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} \left( \int_0^{2^{2(j+k)}} (1+v)^{-2N} \frac{1}{v^2} \gamma \left( \frac{2^{j+k}}{\sqrt{v}} \right)^2 dv \right)^{1/2} \\
&\quad \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\lesssim \frac{2^k \nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} 2^{-j-k} \left( \int_1^\infty (1+2^{k+j}v^{-2})^{-2N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \\
&\quad \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

\* Study of  $II$ .

In this case, we have  $t \in S_{2^j}(2^{2k}I)$  and  $\sigma \in 2^{2k}I$ , so

$$|t - \sigma| \simeq 2^{2(j+k)}r^2.$$

By using off-diagonal estimates (5.32), we know that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu(2^{j+k+1}B)^{1/2}} \|Ae^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^{k+j+1}B} &\lesssim \\
&\frac{1}{2^{2(j+k)}r^2} \left( \frac{1}{\nu(2^{k+1}B)} \int_{2^{k+1}B} |f(\sigma, \cdot)|^2 dv \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

So we obtain that

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \left( \frac{1}{2^{2(j+k)}r^2} \int_{t \in S_{2^j}(2^{2k}I)} \int_{2^{2k}I} 2^{-4N(k+j)} \frac{2^{2k}r^2}{2^{4(j+k)}r^4} d\sigma dt \right)^{1/2} \\
&\quad \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\lesssim 2^{-4j} 2^{-2Nk+j} \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

We have also the following estimate

$$\begin{aligned}
I + II &\lesssim \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{2^{k+1}Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\quad \left[ 2^{-4j} 2^{-N(k+j)} + \frac{\nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} 2^{-j-k} \left( \int_1^\infty (1+2^{k+j}v^{-2})^{-2N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \right].
\end{aligned}$$

With (5.41), here we can choose

$$\alpha_{j,k} = \left[ 2^{-N(k+j)} + \frac{\nu(2^{k+1}B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} 2^{-j-k} \left( \int_1^\infty (1 + 2^j v^{-2})^{-N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \right]$$

for  $N$  a large enough integer.

2-) Last case for  $(\sigma, s) \in D_2(t) : 0 \leq s, \sigma \leq t$ .

The relation (5.39) gives us that :

$$U_2(f)(t, x) = \int_0^t \int_0^t \varphi_{r^2}(s - \sigma) \left[ Ae^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x) - Ae^{(t-s+r^2)A} f(\sigma, \cdot)(x) \right] d\sigma ds.$$

Here we use the time regularity. We have :

$$\begin{aligned} \left| Ae^{(t-\sigma)A} f(\sigma, \cdot)(x) - Ae^{(t-s+r^2)A} f(\sigma, \cdot)(x) \right| &= \left| \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \frac{\partial Ae^{zA} f(\sigma, \cdot)(x)}{\partial z} dz \right| \\ &= \left| \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} A^2 e^{zA} f(\sigma, \cdot)(x) dz \right|. \end{aligned}$$

Then we repeat the same arguments as before :

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^kQ)} |U_2(f)(t, x)|^2 d\nu(x) dt \right)^{1/2} \lesssim I + II \tag{5.42}$$

with

$$I := \left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{2^{2k+2j}I} \left( \int_{2^{2k}I} \int_0^t \chi_N(s - \sigma) \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \|A^2 e^{zA} f(\sigma, \cdot)\|_{2, S_j(2^k B)} dz ds d\sigma \right)^2 dt \right)^{1/2}$$

and

$$II := \left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{t \in S_{2^j}(2^{2k}I)} \left( \int_{2^{2k}I} \int_0^t \chi_N(s - \sigma) \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \|A^2 e^{zA} f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^{k+j}B} dz ds d\sigma \right)^2 dt \right)^{1/2}.$$

\* Study of  $I$ .

By using off-diagonal estimates (5.31), we know that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(2^{j+k+1}B)^{1/2}} \|A^2 e^{zA} f(\sigma, \cdot)\|_{2, S_j(2^k B)} &\leq \\ &\frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1}B) z^2} \gamma \left( \frac{2^{j+k} r}{\sqrt{z}} \right) \left( \frac{1}{\nu(2^k B)} \int_{2^k B} |f(\sigma, \cdot)|^2 d\nu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

So we obtain

$$I \lesssim \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1} B)} \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{2^{2(k+j)} r^2} \int_{2^{2k+2j} I} \int_{2^{2k} I} \left( \int_0^t \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{|s-\sigma|}{r^2} \right)^{-N} \left| \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \frac{2^k r}{z^2} \gamma \left( \frac{2^{j+k} r}{\sqrt{z}} \right) dz \right| ds \right)^2 d\sigma dt \right]^{1/2}.$$

We use the inequality

$$\begin{aligned} \left| \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \frac{1}{z^2} \gamma \left( \frac{2^{j+k} r}{\sqrt{z}} \right) dz \right| &\leq \|\gamma\|_\infty \left| \frac{1}{t-s+r^2} - \frac{1}{t-\sigma} \right| = \|\gamma\|_\infty \frac{|s-\sigma+r^2|}{|t-\sigma| |r^2+t-s|} \\ &\lesssim \|\gamma\|_\infty \frac{1 + \frac{|s-\sigma|}{r^2}}{2^{2(j+k)} r^2 \left( 1 + \frac{|t-s|}{r^2} \right)} \lesssim \|\gamma\|_\infty \frac{\left( 1 + \frac{|s-\sigma|}{r^2} \right)^2}{2^{4(j+k)} r^2}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

to have

$$\begin{aligned} I &\lesssim \frac{\|\gamma\|_\infty \nu(2^k B) 2^k}{\nu(2^{k+j+1} B) 2^{4(k+j)} r} \left( \frac{1}{|2^{2k+2j} I|} \int_{2^{2k+2j} I} 2^{2k} r^2 dt \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\lesssim \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1} B)} 2^{-4j} \|\gamma\|_\infty \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Here we can choose

$$\alpha_{j,k} = \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1} B)} 2^{-4j} \|\gamma\|_\infty \simeq \frac{\mu(2^k Q)}{\mu(2^{k+j+1} Q)} 2^{-2j} \|\gamma\|_\infty.$$

\* Study of  $II$ .

In this case, we have  $|t-\sigma| \simeq 2^{2(k+j)} r^2$ . By using off-diagonal estimates (5.32), we know that for  $z \geq r^2$

$$\frac{1}{\nu(2^{j+k+1} Q)^{1/2}} \|A^2 e^{zA} f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^{k+j} B} \leq \frac{1}{z^2} \frac{\nu(2^k B)}{\nu(\frac{z^{1/2}}{r} B)} \left( \frac{1}{\nu(2^k B)} \int_{2^k B} |f(\sigma, \cdot)|^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

So we obtain

$$\begin{aligned} II &\lesssim 2^{-j} \left( \int_{2^{2k+2j} I} \int_{2^{2k} I} \left( \int_0^t \chi_N(s-\sigma) \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \frac{1}{z^2} \frac{\nu(2^k B)}{\nu(\frac{z^{1/2}}{r} B)} dz ds \right)^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \\ &\quad \dots \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

We use the inequality (based on the doubling property of  $\nu$ ) that for all  $z \in [t-\sigma, t-s+r^2]$

we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu\left(\frac{z^{1/2}}{r}B\right)} &\lesssim \frac{1}{\nu\left(\frac{|t-\sigma|^{1/2}}{r}B\right)} \left(1 + \frac{|t-\sigma|^{1/2}}{z^{1/2}}\right)^\delta \lesssim \frac{1}{\nu\left(\frac{|t-\sigma|^{1/2}}{r}B\right)} \left(1 + \frac{|t-\sigma|^{1/2}}{(t-s+r^2)^{1/2}}\right)^\delta \\ &\lesssim \frac{1}{\nu\left(\frac{|t-\sigma|^{1/2}}{r}B\right)} \left(1 + \frac{1 + \frac{|t-\sigma|^{1/2}}{r}}{1 + \frac{|t-s|^{1/2}}{r}}\right)^\delta \\ &\lesssim \frac{1}{\nu\left(\frac{|t-\sigma|^{1/2}}{r}B\right)} \left(1 + \frac{|s-\sigma|^{1/2}}{r}\right)^\delta. \end{aligned}$$

So as  $N$  is an integer as large as we want, we can estimate

$$\begin{aligned} II \lesssim \frac{\nu(2^k B)}{2^j \nu(2^{j+k+1} B)} \left( \int_{2^{2k+2j} I} \int_{2^{2k} I} \left( \int_0^t \chi_N(s-\sigma) \int_{t-s+r^2}^{t-\sigma} \frac{1}{z^2} dz ds \right)^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \\ \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Then we use (5.43) (with  $\gamma$  equal to to the constant function) to finally obtain (with an other exponent  $N$ )

$$\begin{aligned} II \lesssim \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{j+k+1} B) 2^j 2^{4(j+k)} r^2} \left( \int_{2^{2k+2j} I} \int_{2^{2k} I} \left( \int_0^t \chi_N(s-\sigma) ds \right)^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \\ \dots \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ \lesssim \frac{\nu(2^k B) 2^{2k} r^2}{\nu(2^{j+k+1} B) 2^{4(j+k)} r^2} \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ \lesssim \frac{\mu(2^k Q)}{\mu(2^{j+k+1} Q) 2^{2j+2k}} \left( \frac{1}{\mu(2^k Q)} \int_{2^k Q} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

So here we can choose

$$\alpha_{j,k} = \frac{\mu(2^k Q)}{\mu(2^{j+k+1} Q) 2^{2j+2k}}.$$

3-) End of the proof.

With the decomposition (5.40), we have proved in the two previous points that we have the estimate (5.37) with the coefficients  $\alpha_{j,k}$  satisfying

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} \lesssim 2^{-N(k+j)} + \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1} B)} 2^{-j} \left( \int_1^\infty (1 + 2^j v^{-2})^{-2N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \\ + \frac{\mu(2^k Q)}{\mu(2^{j+k+1} Q) 2^{2j}} (1 + \|\gamma\|_\infty). \end{aligned}$$

We are going to check that (5.38) is satisfied. So we must bound the quantity

$$\lambda_{k,Q} := \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1} Q)}{\mu(2^{k+1} Q)} \alpha_{j,k}$$

by a constant (independent on  $k$  and  $Q$ ). The coefficient  $\alpha_{j,k}$  is estimated by three terms. By using the doubling property for  $\mu$ , with  $N$  large enough we can sum the first term  $2^{-N(k+j)}$ . For the second term with  $N \geq 2$ , we use (5.30) to have

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{k+j+1}B)} 2^{-j} \left( \int_1^\infty (1 + 2^j v^{-2})^{-2N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \\ \lesssim \sum_{j \geq 2} 2^j \left( \int_1^\infty (1 + 2^j v^{-2})^{-2N} \gamma(v)^2 v dv \right)^{1/2} \\ \lesssim \left( \int_1^\infty v^{2N+1} \gamma(v)^2 dv \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

For the third term of  $\alpha_{j,k}$ , we have

$$\sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \frac{\mu(2^k Q)}{\mu(2^{j+k}Q) 2^{2j}} (1 + \|\gamma\|_\infty) \lesssim \sum_{j \geq 2} 2^{-2j} < \infty.$$

We have the good property due to the additional factor  $2^{-2j}$ , which is obtained by the time-regularity of the semi-group in the case 2–). So the assumption (5.38) is satisfied.  $\square$

We have the same result for the adjoint operator  $T^*$  :

**Theorem 5.7.5.** *Assume that  $(e^{tA^*})_{t>0}$ ,  $(tA^* e^{tA^*})_{t>0}$  and  $(t^2 A^{2*} e^{tA^*})_{t>0}$  belong to  $\mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2) \cap \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$ . Then there exists coefficients  $\alpha_{j,k}$  satisfying*

$$\Lambda := \sup_{k \geq 0} \left[ \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1}Q)}{\mu(2^{k+1}Q)} \alpha_{j,k} \right] < \infty, \quad (5.44)$$

such that for all balls  $Q \subset X$ , for all  $k \geq 0, j \geq 2$ , for all functions  $f$  supported in  $S_k(Q)$

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+k+1}Q)} \int_{S_j(2^k Q)} |T^*(B_Q^*(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_{j,k}(Q) \left( \frac{1}{\mu(2^{k+1}Q)} \int_{S_k(Q)} |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

These estimates show with Theorem 5.3.2 that  $T^*$  is  $H_{\epsilon, mol}^1 - L^1$  bounded for every  $\epsilon > 0$ , with the Hardy space  $H_{\epsilon, mol}^1 := H_{\epsilon, mol, (B_Q^*)_{Q \in \mathcal{Q}}}^1$  (which is the Hardy space constructed by the dual operators  $B_Q^*$ ).

**Proof :** The adjoint operator  $T^*$  is given by :

$$T^* f(t, x) = \int_{s=t}^Z \left[ A^* (e^{(s-t)A})^* f(s, \cdot) \right] (x) ds.$$

The parameter  $Z$  depends on the time interval  $J$ , it is defined by :

$$Z := \begin{cases} \infty & \text{if } J = (0, \infty) \\ l & \text{if } J = (0, l) \end{cases}.$$

The argument of the previous theorem can be repeated and we omit details.  $\square$

So now we can apply our general result to obtain the following result :



**Theorem 5.7.6.** *Let  $A$  be a generator of a semi-group such that  $(e^{tA})_{t>0}, (tAe^{tA})_{t>0}$  and  $(t^2A^2e^{tA})_{t>0}$  belong to  $\mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2) \cap \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$  and  $(e^{tA^*})_{t>0}$  belongs to  $\mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{p_0})$  for a  $p_0 \in ]1, 2[$ . Then for all  $p \in ]p_0, 2]$  the operator  $T$  is  $L^p(X)$ -bounded and so we have the maximal regularity on  $L^p(Y)$ .*

*In addition if we know that  $(e^{tA^*})_{t>0}, (tA^*e^{tA^*})_{t>0}$  and  $(t^2A^{2*}e^{tA^*})_{t>0}$  belong to  $\mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2) \cap \mathcal{O}_{high}(L^2 - L^2)$  and  $(e^{tA})_{t>0}$  belongs to  $\mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0})$  for a  $q_0 \in ]2, \infty]$  then for all  $p \in [2, q_0[$  the operator  $T$  is  $L^p(X)$ -bounded and so we have the maximal regularity on  $L^p(Y)$ .*

**Proof :** We use Theorem 5.4.1 for the operator  $T$  and  $T^*$  whose hypotheses are satisfied thanks to Theorem 5.7.4, 5.7.5 and 5.7.2. Then we conclude by duality for  $p \geq 2$ .  $\square$

**Remark 5.7.5.** *We recall the result of S. Blunck and P.C. Kunstmann (Theorem 1.1 of [46]). Assume that the semi-group  $e^{tA}$  satisfies for  $p_0 < 2 < q_0$  the following  $L^{p_0} - L^{q_0}$  off-diagonal estimates*

$$\left( \frac{1}{\nu(B)} \int_B |e^{r^2_{\mathbb{Q}}A}(f)|^{q_0} d\nu \right)^{1/q_0} \leq \sum_{j \geq 0} \beta_j \left( \frac{1}{\nu(2^{j+1}B)} \int_{S_j(B)} |f|^{p_0} d\nu \right)^{1/p_0} \tag{5.45}$$

with coefficients  $\beta_j$  satisfying

$$\sum_{j \geq 0} \beta_j \left( \frac{\nu(2^{j+1}B)}{\nu(B)} \right)^{1/p_0} 2^{j(\delta-1)} < \infty. \tag{5.46}$$

(We recall that  $\delta$  is the homogeneous dimension of the space  $Y$ .) Then  $A$  has maximal regularity on  $L^r$  for all  $r \in (p_0, q_0)$ .

With our previous theorem, to get maximal regularity for all  $r \in (p_0, q_0)$ , we need to ask some  $L^2 - L^2$  off-diagonal estimates and the two following conditions

$$(e^{tA^*})_{t>0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{p_0}) \quad \text{and} \quad (e^{tA})_{t>0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0}).$$

The second condition  $(e^{tA})_{t>0} \in \mathcal{O}_{weak}(L^2 - L^{q_0})$  implies that we have (5.45) with  $\beta_j$  satisfying

$$\sum_{j \geq 0} \beta_j 2^j < \infty,$$

which is a weaker condition than (5.46) for  $\delta \geq 2$ . So this use of Hardy spaces, adapted to the maximal regularity operator, permits us to show some  $L^r$  maximal regularity if we assume some "strong"  $L^2 - L^2$  off-diagonal estimates for the operators  $e^{tA}, A^tA, A^2e^{tA}$  and theirs duals and some "weak" off-diagonal estimates  $L^2 - L^{q_0}$  and  $L^{p_0} - L^2$  for the operators  $e^{tA}$  and  $e^{tA^*}$ .

To finish we will show some results on the Hardy space in this case. First we have the off-diagonal decay (5.29) and so we are in the particular case of the section 5.6.

**Proposition 5.7.6.** *Assume that  $(e^{tA})_{t>0} \in \mathcal{O}_{low}(L^2 - L^2)$ . For  $B_Q$  defined above, we have that for all balls  $Q \subset X$*

$$\forall i \geq 0, \forall k \geq 0, \forall f \in L^2(2^kQ), \quad \|B_Q(f)\|_{2, S_i(2^kQ)} \leq C2^{-M''i} \|f\|_{2, 2^kQ} \tag{5.47}$$

with an exponent  $M''$  as large as we want.

**Proof :** By definition we have just to prove the decay for the  $A_Q$  operator. Let  $r$  be the radius of  $Q$ . As previous, we write  $Q = I \times B$  where  $I$  is an intervall of length  $r^2$  and  $B$  is a ball in  $Y$ . By definition, we remember that

$$A_Q(f)(t, x) := \int_{\sigma=0}^{+\infty} \left[ \varphi_{r^2}(t - \sigma) e^{r^2 A} f(\sigma, \cdot) \right] (x) d\sigma.$$

For  $i \leq 1$ , we use just the  $L^2$ -boundedness of  $A_Q$  to prove (5.47). Then for  $i \geq 2$  and  $(\sigma, y) \in 2^k Q$  if  $(t, x) \in S_i(2^k Q)$  we have that  $d((x, t), (\sigma, y)) \simeq 2^{k+i} r$  and by using the definition of the parabolic metric, we conclude that either  $x \in S_i(2^k B)$  either  $t \in S_{2i}(2^{2k} I)$ . We will study the two cases :

First for  $x \in S_i(2^k B)$ , by the off-diagonal estimate (5.31) we have the estimate : for all  $\sigma > 0$

$$\left\| e^{r^2 A}(f(\sigma, \cdot)) \right\|_{2, S_i(2^k B)} \lesssim \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{i+k} B)} \gamma(2^{i+k}) \left( \frac{\nu(2^{i+k} B)}{\nu(2^k B)} \right)^{1/2} \|f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^k B}.$$

So by the Minkowski inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|A_Q(f)(t, \cdot)\|_{2, S_i(2^k B)} &\lesssim \int_{\sigma=0}^{+\infty} \left( 1 + \frac{|t - \sigma|}{r^2} \right)^{-N} \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{i+k} B)} \gamma(2^{i+k}) \left( \frac{\nu(2^{i+k} B)}{\nu(2^k B)} \right)^{1/2} \|f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^k B} \frac{d\sigma}{r^2} \\ &\lesssim \left( \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{i+k} B)} \right)^{1/2} \gamma(2^{i+k}) \|f\|_{2, 2^k Q} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Then we integrate for  $t \in 2^{2(i+k)} I$  to have

$$\|A_Q(f)\|_{2, 2^{2(i+k)} I \times S_i(2^k B)} \lesssim \left( \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{i+k} B)} \right)^{1/2} 2^{i+k} \gamma(2^{i+k}) \|f\|_{2, 2^k Q}.$$

For the second case, we have  $|t - \sigma| \simeq 2^{2(i+k)} r^2$ . By using the  $L^2$ -boundedness of the semi-group

$$\left\| e^{r^2 A}(f(\sigma, \cdot)) \right\|_{2, 2^{i+k} B} \lesssim \|f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^k B}.$$

So by the Minkowski inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|A_Q(f)(t, \cdot)\|_{2, 2^{k+i} B} &\lesssim \int_{\sigma \in 2^k I} \left( 1 + 2^{2(k+i)} \right)^{-N} \|f(\sigma, \cdot)\|_{2, 2^k B} \frac{d\sigma}{r^2} \\ &\lesssim 2^{-2(k+i)(N-1)} \|f\|_{2, 2^k Q} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

So we can conclude that

$$\|A_Q(f)\|_{2, S_{2i}(2^{2k} I) \times 2^{i+k} B} \lesssim 2^{-(N-2)(k+i)} \|f\|_{2, 2^k Q}.$$

With this two case, we can conclude (for  $N$  any large enough integer)

$$\|A_Q(f)\|_{2, S_i(2^k Q)} \lesssim \left( 2^{-(N-2)i} + \left( \frac{\nu(2^k B)}{\nu(2^{i+k} B)} \right)^{1/2} 2^{i+k} \gamma(2^{i+k}) \right) \|f\|_{2, 2^k Q}$$

which with the decay of  $\gamma$  permits to prove the result. □

With these decay, we have shown that the Hardy spaces  $H_{ato}^1$  and  $H_{\epsilon,mol}^1$  are included into the space  $L^1(X)$ . In fact we can improve this result, by comparing it with the classical Hardy space of Coifman-Weiss on  $X$ .

**Proposition 5.7.7.** *Let  $\epsilon > 0$ . The inclusion  $H_{ato}^1 \subset H_{\epsilon,mol}^1 \subset H_{CW}^1(X)$  is equivalent to the fact for all  $r > 0$ ,  $(e^{rA})^*(\mathbf{1}_Y) = \mathbf{1}_Y$  (in the sense of Proposition 5.6.4).*

**Proof :** We use the notations of Proposition 5.6.4. By using this Proposition, we know that  $H_{\epsilon,mol}^1 \subset H_{CW}^1(X)$  is equivalent to the fact that for all balls  $Q \subset X$ ,  $A^*(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_X$  in the sense of  $(Mol_{\epsilon,Q})^*$ . Let  $Q = B((t_Q, c_Q), r_Q)$  be fixed. By (5.36) we know that

$$A_Q^*(g)(\sigma, x) := \int_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi_{r_Q^2}(t - \sigma) \left[ \left( e^{r_Q^2 A} \right)^* g(t, \cdot) \right] (x) dt.$$

As  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$ , we formally obtain

$$A_Q^*(\mathbf{1}_X)(\sigma, x) = (e^{r_Q^2 A})^*(\mathbf{1}_Y)(x).$$

This equality can be rigorously verified by defining  $(e^{r_Q^2 A})^*(\mathbf{1}_Y)(x)$  as the continuous linear form on the space

$$Mol_{\epsilon,r_Q}(Y) := \left\{ f \in L^1(Y), \|f\|_{Mol_{\epsilon,r_Q}(Y)} < \infty \right\},$$

where

$$\|f\|_{Mol_{\epsilon,r_Q}(Y)} := \sup_{i \geq 0} \|f\|_{2,S_i(Q_Y)} \left( \nu(2^i Q_Y) \right)^{1/2} 2^{\epsilon i}.$$

Here we write

$$Q_Y = B(c_Q, r_Q) = \{y \in Y, d_Y(x, c_Q) \leq r_Q\}$$

the ball in  $Y$ . Then the equivalence is a consequence of Proposition 5.6.4. □

In the paper [41] (which corresponds to the appendix : the chapter 6), the authors have shown that with  $A$  equals to the laplacian on  $X$  a complete Riemannian manifold with doubling and Poincaré inequality, the operator  $T$  is bounded on  $H_{CW}^1$  (not just bounded into  $L^1(X)$ ). This is a better result than the one here because Proposition 5.7.7 applies (see [41]) so

$$H_{ato}^1 \subset H_{\epsilon,mol}^1 \subset H_{CW}^1 \subset L^1.$$

But the  $H_{CW}^1$ -boundedness is using stronger hypotheses than ours in a specific situation.

## 5.8 Study of the duality in Hardy spaces.

In this section, we study the dual space of our Hardy spaces. In the Euclidean case the dual space of  $H_{CW}^1$  is  $BMO$ . The other Hardy spaces, discussed in Section 5.2, have duals charaterized by a space of BMO-type ([57, 70]). In our situation, it is not so easy, and we obtain partial answers. So first, we give the definition of the  $Bmo_\infty$  space :

**Definition 5.8.1.** A function  $f \in L^2(X)$  belongs to the space  $Bmo_\infty$  if

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{Q \text{ ball}} \left( \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |B_Q^*(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} = \|M_2^\sharp(f)\|_\infty < \infty.$$

We define  $BMO_\infty$  as the completion of  $Bmo_\infty$  with this pseudo-norm.

We note  $BMO_\infty$  because the norm is a norm of type  $BMO$  and we put the index  $\infty$  to note that this space is the closure of  $L^2$ . So it could be thought as the space of  $BMO$ -functions with some decay at "infinity".

We have the following inclusion :

**Proposition 5.8.2.** The space  $(H_{ato}^1)^* \cap L^2$  is included into  $Bmo_\infty$  and

$$\forall f \in (H_{ato}^1)^* \cap L^2, \quad \|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{(H_{ato}^1)^*}.$$

We have the same result for the molecular Hardy space  $(H_{\epsilon, mol}^1)^*$ .

The proof is the same as in Lemma 5.4.3.

To characterize the dual space, we should show the other inclusion and we would like to forget the " $L^2$ -condition". We give two results in this direction.

**Proposition 5.8.3.** The space  $Bmo_\infty$  is included into  $(H_{ato}^1)^* \cap L^2$  and :

$$\forall \phi \in Bmo_\infty, \quad \|\phi\|_{(H_{ato}^1)^*} \lesssim \|\phi\|_{BMO}.$$

By density, we get that  $BMO_\infty \hookrightarrow (H_{ato}^1)^*$ .

**Proof :** Let  $\phi \in Bmo_\infty$  be a function, then  $\phi \in L^2$ . Let  $m = B_Q(f_Q) \in L^2$  be an atom, then we must estimate the quantity :

$$\langle \phi, m \rangle = \int \phi(z) B_Q(f_Q)(z) d\mu(z) = \int_Q B_Q^*(\phi)(z) f_Q(z) d\mu(z).$$

Then we get :

$$|\langle \phi, m \rangle| \leq \|B_Q^*(\phi)\|_{2,Q} \|f_Q\|_Q \leq \|B_Q^*(\phi)\|_{2,Q} \mu(Q)^{-1/2}.$$

Using the  $BMO$ -norm, we have

$$|\langle \phi, m \rangle| \leq \|\phi\|_{BMO}.$$

So we have shown that  $\phi$  can be extended in a continuous linear form on all atoms. By using Lemma 5.3.2, this proves that  $\phi$  is a continuous linear form on  $H_{ato}^1$ .  $\square$

So for the atomic case, we need no other condition to have the two inclusions. For the dual space of molecular space, it seems necessary to have other conditions. Here is an example.

**Proposition 5.8.4.** *For a ball  $Q$ , we write  $r_Q$  for the radius. Assume that the operators  $A_Q$  depend only on the radius  $r_Q$  that is  $A_Q = A_{r_Q}$  and  $B_Q = B_{r_Q}$ . In this case for all  $\epsilon > 0$ ,  $Bmo_\infty$  is included into  $(H^1_{\epsilon,mol})^* \cap L^2$  and :*

$$\forall \phi \in Bmo_\infty, \quad \|\phi\|_{(H^1_{\epsilon,mol})^*} \lesssim \|\phi\|_{BMO}.$$

Therefore by density, we have  $BMO_\infty \hookrightarrow (H^1_{\epsilon,mol})^*$ .

**Proof :** Let  $m = B_Q(f_Q)$  be an  $\epsilon$ -molecule. Breaking the integral with the corona  $S_i(Q)$ , we have :

$$\begin{aligned} |\langle \phi, m \rangle| &\leq \sum_{i \geq 0} \int_{S_i(Q)} B_Q^*(\phi)(z) f_Q(z) d\mu(z) \leq \sum_{i \geq 0} \|B_Q^*(\phi)\|_{2,S_i(Q)} \|f_Q\|_{2,S_i(Q)} \\ &\leq \sum_{i \geq 0} \|B_Q^*(\phi)\|_{2,S_i(Q)} \mu(2^{i+1}Q)^{-1/2} 2^{-\epsilon i}. \end{aligned}$$

We want to cover  $2^{i+1}Q$  by a union of balls  $(\tilde{Q}_k)_{1 \leq k \leq \kappa}$  with

$$\forall k, \quad C^{-1}r_Q \leq r_{\tilde{Q}_k} \leq r_Q \text{ and } \sum_{k=1}^{\kappa} \mathbf{1}_{2^{-M}\tilde{Q}_k} \leq 1$$

where  $M$  and  $C$  are integers which are large enough and depend only on the space  $X$ . Let us explain how we can do this. Choose  $(B(x_i, \frac{1}{3}r_Q))_i$  a maximal collection of disjoint balls. Then we put in the collection  $(\tilde{Q}_k)_k$  all the balls  $B(x_i, \frac{1}{10}r_Q)$  such that

$$B(x_i, r_Q) \cap 2^{i+1}Q \neq \emptyset.$$

By maximality, it is easy to see that the collection  $(\tilde{Q}_k)$  covers the whole set  $2^{i+1}Q$ . By disjointness, we have that

$$\sum_{k=1}^{\kappa} \mathbf{1}_{\frac{1}{3}\tilde{Q}_k} \leq 1.$$

So we can deduce that :

$$\|B_Q^*(\phi)\|_{2,S_i(Q)}^2 = \|B_{r_Q}^*(\phi)\|_{2,S_i(Q)}^2 \lesssim \sum_{k=1}^{\kappa} \|B_{r_Q}^*(\phi)\|_{2,\tilde{Q}_k}^2 \lesssim \sum_{k=1}^{\kappa} \|B_{r_Q}^*(\phi)\|_{2,\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k}^2.$$

Here we use :  $r_Q \geq r_{\tilde{Q}_k}$ . In addition the radius of the ball  $\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k$  is now equal to the radius  $r_Q$ , also

$$\|B_{r_Q}^*(\phi)\|_{2,\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k}^2 = \left\| B_{\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k}^*(\phi) \right\|_{2,\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k}^2 \lesssim \mu\left(\frac{r_Q}{r_{\tilde{Q}_k}}\tilde{Q}_k\right) \|\phi\|_{BMO}^2.$$

By using the doubling property of the measure and the fact that  $r_Q \simeq r_{\tilde{Q}_k}$ , we get

$$\begin{aligned} \|B_Q^*(\phi)\|_{2,S_i(Q)}^2 &\lesssim \sum_{k=1}^{\kappa} \|\phi\|_{BMO}^2 \mu(\tilde{Q}_k) \lesssim \|\phi\|_{BMO}^2 \sum_{k=1}^{\kappa} \mu(3^{-1}\tilde{Q}_k) \\ &\lesssim \|\phi\|_{BMO}^2 \mu(2^{i+1}Q). \end{aligned}$$

Therefore we have the estimate

$$|\langle \phi, m \rangle| \lesssim \sum_{i \geq 0} \|\phi\|_{BMO} 2^{-\epsilon i} \lesssim \|\phi\|_{BMO}.$$

Thus we have shown that  $\phi$  is linearly continuous on all the  $\epsilon$ -molecule. With the help of Lemma 5.3.2, we can extend it to a continuously linear form on the whole molecular space.  $\square$

**Remark 5.8.5.** Assume that  $A_Q$  is defined by the help of a semi-group  $A_Q = A_{r_Q} = e^{-r_Q L}$  for a generator  $L$ . Then the previous condition is satisfied and with some good conditions about  $L$ , we can characterize the dual space  $(H_{\epsilon, mol}^1)^* \cap L^2$  as  $Bmo_\infty$ . It is interesting to notice that this space does not depend on  $\epsilon$ .

Here we have not found a general answer for the dual space  $(H_{ato}^1)^*$ . We have only the result  $Bmo_\infty = L^2 \cap (H_{ato}^1)^*$ . Now to have a complete result for the duality, we must forget the " $L^2$  condition". In such an abstract case, it seems very difficult to do this. The difficulty is to have a representation of a linearly continuous form of  $H_{ato}^1$ . Let  $l$  belongs to  $(H_{ato}^1)^*$ , by the definition of atom we have that the operator  $B_Q$  is continuous from  $L^2(Q)$  into  $H_{ato}^1$ . So we can compute  $l \circ B_Q$ , which is continuous from  $L^2(Q)$  into  $\mathbb{R}$ . By the Riesz representation theorem, we know that there exists  $h_Q \in L^2(Q)$  such that for all  $f \in L^2(Q)$

$$l \circ B_Q(f) := \int_Q h_Q(x) f(x) d\mu(x).$$

Now to have a good representation of  $l$ , we "need to invert" the operator  $B_Q$  to have formally <sup>5</sup> : for all atom  $g$  associated to the ball  $Q$

$$l(g) = \int_Q h_Q(x) B_Q^{-1} g(x) d\mu(x) = \int_Q B_Q^{-1*} h_Q(x) g(x) d\mu(x).$$

Then we need to define a "good" function  $\phi$  (which does not depend on  $Q$ ) such that for each ball  $Q$  and for each atom  $g$  associated to  $Q$  we have

$$l(g) = \int_Q B_Q^{-1*} h_Q(x) g(x) d\mu(x) = \int_X \phi(x) g(x) d\mu(x).$$

So there are two questions to solve and we do not know how to do this ; other informations on the collection of operators  $\mathbb{B} = (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  seem to be necessary, but we do not know at this time which ones.

We have seen that the space  $(H_{ato}^1)^*$  is probably too big to be identify with a BMO-space. However we are going to show that the subspace  $L^2 \cap (H_{ato}^1)^*$  is dense in the whole space  $(H_{ato}^1)^*$  for a weak topology. Let us study the topology of  $Bmo_\infty$  in  $(H_{ato}^1)^*$  for the weak \* topology. We recall that  $S$  is the set of functions  $f \in H_{ato}^1$  so that there exists a finite decomposition into atoms  $(m_i)$  satisfying :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i \quad \text{with} \quad \|f\|_{H_{ato}^1} \geq 10^{-1} \left( \sum_i |\lambda_i| \right).$$

By Lemma 5.3.2, we know that  $S$  is dense in  $H_{ato}^1$ .

---

<sup>5</sup>Here if we do not want to invert, we need a decomposition of identity with the  $B_Q$  operators. That is why, in [57, 70] the authors use a Calderón reproducing formula to identify their dual space.

**Proposition 5.8.6.** *If the space  $Bmo_\infty$  is dense in  $L^2(X)$  (for the strong topology) then  $Bmo_\infty$  is dense in  $(H_{ato}^1)^*$  for the weak \* topology of  $S^*$ .*

**Proof :** We claim that the space  $Bmo_\infty$  is total, that is :

$$\{f \in S; \forall \phi \in Bmo_\infty, \langle f, \phi \rangle = 0\} = \{0\}. \quad (5.48)$$

To prove this, let  $f \in S$  be a function in the left set. Then  $f$  has a finite atomic decomposition so it is an  $L^2$ -function, and we have

$$\forall \phi \in Bmo_\infty \subset L^2, \quad L^2 \langle f, \phi \rangle_{L^2} = 0.$$

As  $Bmo_\infty$  is assumed to be dense in  $L^2$  and  $f$  belongs to  $L^2$ , we can deduce that  $f = 0$ , which proves (5.48).

Now we use this point to prove our theorem. Assume that the result of the theorem is false. By the definition of the weak \* topology, if  $Bmo_\infty$  is not dense in  $S^*$  for the weak \* topology, there exists a finite collection  $s_1, \dots, s_p \in S - \{0\}$  and real numbers  $a_i < b_i$  such that :

$$Bmo_\infty \cap \{f \in S^*, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle s_j, f \rangle \in ]a_j, b_j[ \} = \emptyset.$$

So we have the equality

$$Bmo_\infty = \bigcup_{j=1}^p \{f \in Bmo_\infty, \langle s_j, f \rangle \notin ]a_j, b_j[ \}.$$

Here we have written the topological space  $Bmo_\infty$  as a finite union of closed subsets. By connexity we know that there exists one index  $j$  such that

$$Bmo_\infty = \{f \in Bmo_\infty, \langle s_j, f \rangle \notin ]a_j, b_j[ \}.$$

By homogeneity we can conclude that

$$Bmo_\infty = \{f \in Bmo_\infty, \langle s_j, f \rangle = 0\}.$$

This equality with (5.48), gives that  $s_j = 0$ , which is not possible. So the assumption is false and we have proved that  $Bmo_\infty$  is dense in  $S^*$  for the weak \* topology of  $S^*$ .

The proof is finished by noticing that the space  $S^*$  and  $(H_{ato}^1)^*$  are the same.  $\square$

We can have a more precise theorem in the case of the section 5.6 :

**Proposition 5.8.7.** *Assume that the assumptions (5.29) of the section 5.6 are satisfied. The space  $L^\infty \cap L^2$  is dense in  $(H_{ato}^1)^*$  for the weak \* topology of  $(H_{ato}^1)^*$ . For  $\epsilon > 0$ ,  $L^\infty \cap L^2$  is dense in  $(H_{\epsilon, mol}^1)^*$  for the weak \* topology.*

**Proof :** The proof is the same as the one of Proposition 5.8.6. We will deal with the case  $\epsilon \in ]0, \infty]$  and we will prove the two claims. The fact that the space  $L^\infty$  is total, means that :

$$\{f \in H_{\epsilon, mol}^1, \forall \phi \in L^\infty \cap L^2 \subset (H_{\epsilon, mol}^1)^*, \langle f, \phi \rangle = 0\} = \{0\}. \quad (5.49)$$

This fact is obvious because the function  $f \in L^1$  (due to Proposition 5.6.1). Now assume that the result of the theorem is false. By the definition of the weak \* topology, if  $L^\infty$  is

not dense in  $(H_{\epsilon, mol}^1)^*$  for the weak \* topology, there exists a finite collection of elements  $s_1, \dots, s_p \in H_{\epsilon, mol}^1 - \{0\}$  and real numbers  $a_i < b_i$  so that :

$$L^\infty \cap \{f \in (H_{\epsilon, mol}^1)^*, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle s_j, f \rangle \in ]a_j, b_j[ \} = \emptyset.$$

So we have the equality :

$$L^\infty = \bigcup_{j=1}^p \{f \in L^\infty, \langle s_j, f \rangle \notin ]a_j, b_j[ \}.$$

Then we can finish the proof by using the same argument as for Proposition 5.8.6.  $\square$

In fact to have a complete representation theorem for the dual space, we probably need to make some new assumptions. In [57, 58, 70], the authors characterize the dual space by a BMO-space, by using an equivalent definition of their Hardy spaces with tent spaces. Using molecular decomposition in tent spaces, they obtain some molecular decomposition of their Hardy spaces. Without other assumptions, our molecular decomposition is strictly more restrictive than theirs. So in the general case, we think that the dual space of our Hardy spaces is bigger than a BMO-space. We have seen that our Hardy spaces are "big" enough to obtain a good interpolation result with the scale of Lebesgue spaces, but they seem to be too "small" to have a fine dual space.





# Chapitre 6

## Annexe : "Maximal regularity and Hardy spaces".

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	218
6.2	Main result on manifolds . . . . .	219
6.3	Parabolic $H_r^1(X)$ and $H_z^1(X)$ . . . . .	221
6.4	Boundedness of $T$ . . . . .	228
6.5	Boundedness of $T^*$ . . . . .	234
6.6	Maximal $L^q$ regularity on $L^p$ . . . . .	237
6.7	Sublaplacians of connected Lie groups of polynomial growth	238
6.8	Second order operators . . . . .	239

---

# Maximal regularity and Hardy spaces

Pascal Auscher, Frédéric Bernicot and Jiman Zhao

Université de Paris-Sud, Orsay et CNRS 8628, 91405 Orsay Cedex, France

*E-mail address* : pascal.auscher@math.u-psud.fr

Université de Paris-Sud, Orsay et CNRS 8628, 91405 Orsay Cedex, France

*E-mail address* : frederic.bernicot@math.u-psud.fr

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University

Beijing 100875, P.R. China

*E-mail address* : jzhao@pku.org.cn

October 1st, 2007

## Abstract

In this paper, we consider the Cauchy problem for  $u' - Au = f$  with  $A$  the Laplacian operator on some Riemannian manifolds or a sublaplacian on some Lie groups or some second order elliptic operators on a domain. We show the boundedness of the operator of maximal regularity  $f \mapsto Au$  and its adjoint on appropriate Hardy spaces which we define and study for this purpose. As a consequence we reobtain the maximal  $L^q$  regularity on  $L^p$  spaces for  $1 < p, q < \infty$ .

**Key words** : maximal regularity, Laplace-Beltrami operator, heat kernel, Hardy spaces, atomic decomposition. **AMS2000 Classification** : 34G10, 35K90, 42B30, 42B20, 47D06

## 6.1 Introduction

Let  $B$  be a Banach space,  $A$  the infinitesimal generator of a bounded analytic semigroup of operators on  $B$  and  $I = (0, +\infty)$  ( $I$  bounded is also of interest). We shall consider the problem

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t), & t \in I, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

where  $f : I \rightarrow B$  is given. If  $T_t$  is the semigroup generated by  $A$ , then  $u$  is given by

$$u(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

For fixed  $q \in (1, +\infty)$ , one says that there is maximal  $L^q$  regularity if for every  $f \in L^q(I, B)$ ,  $u'$  and  $Au$  belongs to  $L^q(I, B)$  with

$$\|u'\|_{L^q(I, B)} + \|Au\|_{L^q(I, X)} \leq C \|f\|_{L^q(I, B)}. \quad (6.2)$$

When  $B$  is an  $L^p$  space ( $1 < p < \infty$ ) we refer to [49], [54], [56], [69], [72] etc. When  $B$  is an UMD space, [81] gives a necessary and sufficient condition for maximal  $L^q$  regularity in terms of a notion called R-boundedness. An excellent survey is [71].

Let us come back to  $B = L^p(\Omega, d\mu)$ . A classical method to prove maximal regularity (already in [56]) relies on singular integral theory. It is well-known that maximal  $L^q$

regularity for one  $q \in (1, +\infty)$  implies the same for all  $q \in (1, +\infty)$ . Hence, it is enough to prove (6.2) for  $q = p$ , that is the boundedness of the map of maximal regularity  $f \mapsto Au$  on  $L^p(I \times \Omega, dt d\mu)$ . Seen as a singular integral on  $I \times \Omega$  equipped with a parabolic distance and product measure  $dt d\mu$ , one proves this map and its adjoint have weak type (1,1) and applies interpolation. This method has been refined so as to relax hypotheses as much as possible on  $\Omega$  and  $A$ . Completing a theorem in [69], this method has been successful for all  $1 < p < \infty$  in [54] with  $\Omega$  a (subset of a) space of homogeneous type and pointwise Gaussian upper bounds for the kernel of the semigroup and even generalized to a restricted range of  $p$  in [46] under weaker generalized Gaussian estimates.

There exists a criterion for  $L^1$  maximal regularity on  $L^1$  (see [68]) but when  $A$  is a second order differential operator it does not apply. Of course, seen from the point of view of singular integrals, the map  $f \mapsto Au$  is naturally not bounded on  $L^1(I \times \Omega)$  and one should replace  $L^1(I \times \Omega)$  by a Hardy space and prove boundedness into  $L^1(I \times \Omega)$ . (The notion of  $H^p$ -maximal regularity introduced in [48] is a different problem.) When  $A$  is the Laplacian on  $\mathbb{R}^n$ , kernel representation suggests to use a parabolic Hardy space of Coifman-Weiss type on  $I \times \mathbb{R}^n$ . Indeed, this is done implicitly in [78, Appendix] given  $H^1 - BMO$  duality, where the authors prove boundedness from  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  to parabolic  $BMO$  of a dual problem. They also do this for some time dependent generalization of (6.1) with the Laplacian on  $\mathbb{R}^n$ .

In the abstract setting of [54] and [46], it is not clear which Hardy space is appropriate<sup>1</sup>. Here, we restrict ourselves to the Laplace-Beltrami operator  $\Delta$  on some manifolds  $M$  or a sublaplacian on some Lie groups, or second order operators on  $\mathbb{R}^n$  with bounded measurable coefficients with additional assumptions. We prove that the operator of maximal regularity is not just bounded from a Hardy space into  $L^1$  but into itself. We prove a similar phenomenon for the dual operator but with two different Hardy spaces as source and target. The Hardy spaces on which we prove boundedness are of course of parabolic type. Interpolation applies to reobtain maximal  $L^q$  regularity on  $L^p$  for  $1 < p, q < \infty$ .

The plan of the article is as follows. We give next the notation and then state the main result in the setting of a Riemannian manifold. We define and study the parabolic Hardy spaces in Section 3. Then the proof of the main result on manifolds is presented in Section 4 and 5. The consequence for the maximal  $L^q$  regularity is in Section 6. We give in Section 7 the needed ingredients to prove the analogous results in a connected Lie group with polynomial growth. We also present the analogous results for a class of second order operators on domains of  $\mathbb{R}^n$  in Section 8.

## 6.2 Main result on manifolds

Let  $M$  be a complete non-compact connected Riemannian manifold,  $\mu$  the Riemannian measure. Denote by  $\|\cdot\|_p$  the norm in  $L^p(M, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Denote by  $\nabla$  the Riemannian gradient,  $|\cdot|$  the length in the tangent space,  $\Delta$  the (negative) Laplace-Beltrami operator corresponding to  $\nabla$  and  $d$  the geodesic distance. For all  $x \in M$ , all

<sup>1</sup>This will be done in a subsequent paper by the last two authors.

$r > 0$ ,  $B(x, r)$  stands for the open geodesic ball with center  $x$  and radius  $r$ , and its measure is denoted  $V(x, r)$ .

Say that  $M$  satisfies the doubling property if and only if there exists  $C > 0$  such that for all  $r > 0$  and  $x \in M$ ,

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r). \tag{D}$$

A straightforward consequence of (D) is that there exist  $C, \delta > 0$  such that for all  $x \in M$ , all  $r > 0$  and all  $\theta > 1$ ,

$$V(x, \theta r) \leq C\theta^\delta V(x, r). \tag{D'}$$

The hypothesis (D) exactly means that  $M$ , equipped with its geodesic distance and its Riemannian measure, is a space of homogeneous type in the sense of Coifman and Weiss.

Say that  $M$  satisfies the (scaled) Poincaré inequalities if there exists  $C > 0$  such that for every ball  $B = B(x, r)$  and every  $f$  with  $f, \nabla f$  locally square integrable,

$$\int_B |f - f_B|^2 d\mu \leq Cr^2 \int_B |\nabla f|^2 d\mu, \tag{P}$$

where  $f_B$  denotes the mean of  $f$  on  $B$ .

The assumptions of (D) and (P) guarantee the needed properties on the heat kernel (size and regularity) in the sequel.

Consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), & t > 0, \\ u(0, x) = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Now define

$$Tf(t, x) = \int_0^t [\Delta e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot)](x) ds. \tag{6.4}$$

By [56], we know that  $T$  is bounded from  $L^2(X)$  to  $L^2(X)$ , where  $X = \mathbb{R}_+^* \times M$  and product measure  $dt d\mu$ . Its adjoint is given by

$$T^*f(t, x) = \int_t^\infty [\Delta e^{(s-t)\Delta} f(s, \cdot)](x) ds. \tag{6.5}$$

We introduce in the next section two Hardy spaces of parabolic type on  $X$  with  $H_z^1(X) \subset H_r^1(X) \subset L^1(X)$ . Our main result is the following.

**Theorem 6.2.1.** *Assume that  $M$  satisfies (D) and (P). Then  $T$  is  $H_z^1(X)$ -bounded and  $T^*$  is bounded from  $H_r^1(X)$  to  $H_z^1(X)$ .*

**Corollary 6.2.1.** *With the hypotheses above, one has*

$$\|u'\|_{H_z^1(X)} + \|\Delta u\|_{H_z^1(X)} \leq C\|f\|_{H_z^1(X)}.$$

**Proof :** If  $f \in H_z^1(X) \cap L^2(X)$ , we have  $\Delta u = Tf$  and  $u' = f + \Delta u$  by uniqueness of the Cauchy problem. Thus this estimate holds for those  $f$ 's and we conclude by density in  $H_z^1(X)$  (See Section 6.3.  $\square$ )

We shall also show that a better result cannot hold even in the simplest situation  $X = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$  :  $T$  is not bounded from  $H_r^1(X)$  to  $L^1(X)$  and  $T^*$  is not bounded on  $L^1(X)$ .

### 6.3 Parabolic $H_r^1(X)$ and $H_z^1(X)$

In this section we study the parabolic Hardy spaces  $H_r^1(X)$  and  $H_z^1(X)$ , following the ideas of [50] and [45] in an elliptic context.

We assume that  $(E, d, \mu)$  is a space of homogeneous type. Let  $N$  be the product space  $\mathbb{R} \times E$  endowed with the measure  $\nu$ , product of the Lebesgue measure with  $\mu$ , and with the quasi-distance  $\tilde{d}$  defined by

$$\tilde{d}(t, x; s, y)^2 = \sup(d(x, y)^2, |t - s|), \quad (t, x), (s, y) \in N.$$

Suppose  $Q = \{(t, x) \in N : \tilde{d}(t, x; s, y) < r\}$  is the ball in  $N$  centered at  $(s, y)$  with radius  $r$  then the relation between the volumes of  $Q$  and  $B(y, r)$  is that  $\nu(Q) \sim r^2 V(y, r)$ , where  $V(y, r) = \mu(B(y, r))$ . One then easily checks that  $(N, \tilde{d}, \nu)$  is a space of homogeneous type and

$$\nu(\theta Q) \leq C\theta^{\delta+2}\nu(Q) \quad (6.6)$$

for all balls  $Q$  and all  $\theta > 1$  where  $\delta$  is the doubling exponent for  $E$  as in (D'). Thus, one can consider the Hardy space  $H^1(N) = H_{CW}^1(N)$  of [52]. Let us review some definitions and facts.

**Definition 6.3.1.** *A classical  $(1, \infty)$ -atom on  $N$  is a measurable function  $a$  supported on a ball  $Q \subseteq N$  that satisfies*

- (1)  $\int_N a d\nu = 0$ ,
- (2)  $\|a\|_{L^\infty(N)} \leq \nu(Q)^{-1}$ .

**Definition 6.3.2.** *An  $(1, 2)$ -atom on  $N$  is a measurable function  $a$  supported on a ball  $Q \subseteq N$  that satisfies*

- (1)  $\int_N a d\nu = 0$ ,
- (2)  $\|a\|_{L^2(N)} \leq \nu(Q)^{-\frac{1}{2}}$ .

An  $L^1(N)$  function  $f$  belongs to  $H^1(N)$  if it can be written as  $\sum \lambda_Q a_Q$  where  $\sum |\lambda_Q| < \infty$  and  $a_Q$  are  $(1, 2)$ -atoms. The norm is given by the infimum of such  $\sum |\lambda_Q|$  taken over all possible decompositions called atomic decompositions. One obtains the same space with an equivalent norm by replacing  $(1, 2)$ -atoms by  $(1, \infty)$ -atoms.

We now introduce two Hardy spaces on  $X = \mathbb{R}_+^* \times E$ .

**Definition 6.3.3.** *Set  $H_r^1(X) = \{f \in L^1(X) : \exists F \in H^1(N), F|_X = f\}$ . The norm of an element in this space is the quotient norm : the infimum of the  $H^1(N)$  norms of all possible extensions to  $N$ .*

**Definition 6.3.4.** *Set  $H_z^1(X) = \{f|_X : f \in H^1(N), f = 0 \text{ on } \mathbb{R}_- \times E\}$ . The norm of an element in this space is the norm of its zero extension in  $H^1(N)$ .*

It is clear that  $H_z^1(X) \subset H_r^1(X)$ , but the converse is not true as shown by the following example.

**Example 6.3.5.** *Let*

$$f(t, x) = \begin{cases} 1, & (t, x) \in (0, 1) \times B(0, 1), \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

*then  $f$  is the restriction to  $X$  of*

$$F(t, x) = \begin{cases} 1, & (t, x) \in (0, 1) \times B(0, 1), \\ -1, & (t, x) \in (-1, 0) \times B(0, 1), \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

*It is clear that  $F$  is a  $(1, \infty)$ -atom on  $N$ , so  $f \in H_r^1(X)$ , but  $f \notin H_z^1(X)$  because  $f$  does not have vanishing moment.*

**Definition 6.3.6.** *Let  $a$  be a measurable function supported in a ball  $Q \subset X$ , and satisfying  $\|a\|_{L^2(N)} \leq \nu(Q)^{-\frac{1}{2}}$ .*

- (1)  *$a$  is a type (a) atom if, moreover,  $4Q \subseteq X$  and  $\int_X a d\nu = 0$ .*  
 (2)  *$a$  is a type (b) atom if, moreover,  $2Q \subseteq X$  and  $4Q \not\subseteq X$  ( $a$  does not necessarily have vanishing moment).*

We have an atomic characterization of  $H_r^1(X)$ . The proof, analogous to the one in [50], is included for completeness.

**Theorem 6.3.1.** *Let  $f$  be an integrable function on  $X$ . The followings are equivalent :*

- (1)  *$f \in H_r^1(X)$  ;*  
 (2)  *$f$  has an atomic decomposition*

$$f = \sum_{\text{type (a) atoms}} \lambda_Q a_Q + \sum_{\text{type (b) atoms}} \mu_Q b_Q \quad (6.7)$$

*with*

$$\sum_{\text{type (a) atoms}} |\lambda_Q| + \sum_{\text{type (b) atoms}} |\mu_Q| < \infty. \quad (6.8)$$

*Further, the norm on  $H_r^1(X)$  is equivalent to the infimum of (6.8) taken over all decompositions (6.7).*

**Proof :** (2) $\Rightarrow$ (1). Let  $f$  satisfy (6.7) and (6.8). As  $a_Q$  is a type (a) atom, then  $A_Q$  defined by

$$A_Q(t, x) = \begin{cases} a_Q(t, x), & (t, x) \in X, \\ 0, & (t, x) \notin X, \end{cases}$$

is a (1,2)-atom of  $H^1(N)$ . By definition we conclude that  $a_Q \in H_r^1(X)$ .

As  $b_Q$  is a type (b) atom, then define

$$B_{\tilde{Q}}(t, x) = \begin{cases} b_Q(t, x), & (t, x) \in Q, \\ -b_Q(-t, x), & (t, x) \in Q_-, \end{cases}$$

where  $Q_-$  is the reflection of  $Q$  across  $\{0\} \times M$  given by  $(t, x) \mapsto (-t, x)$ , and  $\tilde{Q}$  is the smallest ball such that  $Q \cup Q_- \subseteq \tilde{Q}$ . If  $Q$  is centered at  $(s, y)$  with radius  $r$ , one can see that  $\tilde{Q}$  is contained in the ball centered at  $(0, y)$  with radius  $5r$ .

Then we have

$$\begin{aligned} \int_N B_{\tilde{Q}} d\nu &= \iint_X B_{\tilde{Q}}(t, x) dt d\mu(x) + \iint_{\mathbb{R}_- \times M} B_{\tilde{Q}}(t, x) dt d\mu(x) \\ &= \iint_Q b_Q(t, x) dt d\mu(x) - \iint_Q b_Q(t, x) dt d\mu(x) = 0, \end{aligned}$$

and

$$\|B_{\tilde{Q}}\|_{L^2(N)} \leq \|b_Q\|_{L^2(N)} + \|-b_Q\|_{L^2(N)} \leq \nu(Q)^{-\frac{1}{2}} + \nu(Q_-)^{-\frac{1}{2}} \leq c\nu(\tilde{Q})^{-\frac{1}{2}}.$$

This means that  $c^{-1}B_{\tilde{Q}}$  is an  $(1, 2)$ -atom for  $H^1(N)$ . Now let

$$F = \sum_{\text{type (a) atoms}} \lambda_Q A_Q + \sum_{\text{type (b) atoms}} \mu_Q B_{\tilde{Q}},$$

then  $F \in H^1(N)$  and  $F|_X = f$ , therefore  $f \in H_r^1(X)$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2). If  $f \in H_r^1(X)$ , then there exists  $F \in H^1(N)$  such that  $F|_X = f$ . So  $F$  has an atomic decomposition  $\sum \lambda_Q A_Q$  [52]. It suffices therefore to concentrate on the restriction of one single atom  $A_Q$ . Restricting  $A_Q$  to  $X$ , then we consider only those balls  $Q$  which intersect  $X$  and we have the following situations :

If  $4Q \subseteq X$ , then  $a_Q = A_Q$  is a type (a)-atom.

If  $4Q \not\subseteq X$ , but  $2Q \subseteq X$ , then  $b_Q = A_Q$  is a type (b)-atom.

If  $2Q \not\subseteq X$ , then we can decompose  $A_Q|_X$  into type (b)-atoms as follows. By scaling it is enough to consider an atom denoted by  $A$ , with  $\|A\|_{L^2(N)} \leq 1$  and such that  $A|_X$  is supported in a region  $R = \{(t, x) \in X : 0 < t < 1, d(y, x) < 1\}$  for a fixed  $y$ .

Now using Whitney decomposition on  $X$  with respect to  $\mathbb{R} \times E$  (see [64]), one can find a family of balls  $Q_j \subset X$  with  $R \subseteq \cup Q_j$  and  $\sum \nu(Q_j) \leq c\nu(R)$  for some constant  $c > 0$  depending on the metric and the doubling property of  $\nu$ . Write

$$A = \sum_j \chi_{Q_j} A = \sum_j \frac{\|\chi_{Q_j} A\|_2}{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}}{\|\chi_{Q_j} A\|_2} \chi_{Q_j} A = \sum \lambda_{Q_j} a_{Q_j},$$

where the indices  $j$  are those for which  $\chi_{Q_j} A$  are not identically 0 and

$$\lambda_{Q_j} = \frac{\|\chi_{Q_j} A\|_2}{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}}, \quad a_{Q_j} = \frac{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}}{\|\chi_{Q_j} A\|_2} \chi_{Q_j} A.$$

Then we have  $\text{supp } a_{Q_j} \subseteq Q_j$  and

$$\|a_{Q_j}\|_{L^2(N)} \leq \frac{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}}{\|\chi_{Q_j} A\|_2} \cdot \|\chi_{Q_j} A\|_2 \leq \nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}.$$



It follows that  $a_{Q_j}$  is a type  $(b)$ -atom and

$$\sum |\lambda_{Q_j}| = \sum_j \frac{\|\chi_{Q_j} A\|_2}{\nu(Q_j)^{-\frac{1}{2}}} \leq \left( \sum_j \|\chi_{Q_j} A\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_j \nu(Q_j) \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|A\|_{L^2(N)} \nu(R)^{\frac{1}{2}}.$$

So this atomic decomposition converges in  $H_r^1(X)$ .  $\square$

For the space  $H_z^1(X)$ , we also have a characterization as follows.

**Theorem 6.3.2.** *Let  $f$  be an integrable function on  $X$ . The followings are equivalent :*

- (1)  $f \in H_z^1(X)$  ;
- (2)  $f$  has an atomic decomposition  $f = \sum_{Q \subset X} \lambda_Q a_Q$  with  $\sum |\lambda_Q| < +\infty$ , where  $a_Q$  are  $(1,2)$ -atoms with support entirely contained in  $X$ .

**Proof :** (2)  $\Rightarrow$  (1) is obvious and we turn to (1)  $\Rightarrow$  (2). Let  $f \in H_z^1(X)$ . Then there exists a function  $F \in H^1(N)$  such that

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & (t, x) \in X, \\ 0, & (t, x) \notin X. \end{cases}$$

Set  $f_e(t, x) = F(t, x) + F(-t, x)$  with  $(t, x) \in N$  then  $f_e$  is even in the  $t$  variable,  $f_e \in H^1(N)$ ,  $f_e|_X = f$ . Pick an atomic decomposition  $f_e = \sum_Q \lambda_Q A_Q$ , where  $A_Q$  are  $(1,2)$ -atoms for  $H^1(N)$ . One can rewrite  $f_e$  as follows :

$$f_e(t, x) = \frac{f_e(t, x) + f_e(-t, x)}{2} = \sum_Q \lambda_Q \frac{A_Q(t, x) + A_Q(-t, x)}{2} = \sum_Q \lambda_Q \tilde{A}_Q(t, x),$$

where  $\tilde{A}_Q(t, x) = \frac{A_Q(t, x) + A_Q(-t, x)}{2}$ .

1° If  $\text{supp } A_Q \subseteq X$ , then  $\tilde{A}_Q|_X = \frac{A_Q}{2}$ , and we define

$$a_Q(t, x) = \frac{A_Q(t, x)}{2}, \quad (t, x) \in X.$$

2° If  $\text{supp } A_Q \subseteq \mathbb{R}_- \times M$ ,  $\tilde{A}_Q|_X(t, x) = \frac{A_Q(-t, x)}{2}$ , and we define

$$a_Q(t, x) = \frac{A_Q(-t, x)}{2}, \quad (t, x) \in X.$$

3° If neither case occurs, then let  $Q_0 = (\text{supp } A_Q) \setminus X$ , and the "reflection" of  $Q_0$  is defined by  $Q_r = \{(t, x) \in X : (-t, x) \in Q_0\}$ . Define  $a_Q = \tilde{A}_Q|_X$ . Clearly, if  $Q$  is centered at  $(s, y)$  has radius  $r$ , we have  $|s| \leq r^2$  and  $\text{supp } a_Q \subset Q|_X \cup Q_r$ . Hence  $\text{supp } a_Q$  is contained in the ball  $\tilde{Q}$  centered at  $(r^2, y)$  with radius  $r$  which is contained in  $X$ . Next,

$$\|a_Q\|_{L^2(N)} \leq \nu(Q)^{-\frac{1}{2}} = \nu(\tilde{Q})^{-\frac{1}{2}}.$$

Finally

$$\begin{aligned} \int_X a_Q d\nu &= \frac{1}{2} \iint_{Q \cap X} A_Q(t, x) dt d\mu(x) + \frac{1}{2} \iint_{Q_r} A_Q(-t, x) dt d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \iint_{Q \cap X} A_Q(t, x) dt d\mu(x) + \frac{1}{2} \iint_{Q \setminus X} A_Q(t, x) dt d\mu(x) \\ &= \iint_Q A_Q(t, x) dt d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Thus  $a_Q$  are  $(1, 2)$ -atoms with  $\text{supp } a_Q \subset X$ . So

$$f = f_e|_X = \sum_Q \lambda_Q \tilde{A}_Q|_X = \sum_Q \lambda_Q a_Q.$$

This completes the proof of the theorem.  $\square$

Let us make some further remarks. If one uses the reflection  $(t, x) \mapsto (-t, x)$  in  $N$ , then we say that a function on  $N$  is odd (resp. even) if it is changed to its opposite (resp. itself)

**Proposition 6.3.7.**  $H_r^1(X)$  coincides with the space of restrictions to  $X$  of odd functions in  $H^1(N)$ . Similarly,  $H_z^1(X)$  coincides with the space of restrictions to  $X$  of even functions in  $H^1(N)$ .

**Proof :** The argument is as in [50] and is skipped.  $\square$

**Remark 6.3.8.** Density of  $H_z^1(X) \cap L^2(X)$  (resp.  $H_r^1(X) \cap L^2(X)$ ) in  $H_z^1(X)$  (resp.  $H_r^1(X)$ ) follows from the atomic decomposition.

Since  $(X, \tilde{d}, \nu)$  is also a space of homogeneous type, let  $H^1(X) = H_{CW}^1(X)$  be the Hardy space of Coifman and Weiss as defined in [52]. Each  $f \in H^1(X)$  can be written as follows :

$$f = \sum_Q \lambda_Q a_Q,$$

where  $\text{supp } a_Q \subset Q \cap X$ ,  $Q$  is a ball centered in  $X$ ,  $\int_{Q \cap X} a_Q d\nu = 0$ , and  $\|a_Q\|_{L^2(N)} \leq \nu(Q \cap X)^{-\frac{1}{2}}$  and where  $\sum |\lambda_Q| < \infty$ . Observe that since  $Q$  is centered in  $X$ , one has  $\nu(Q) \lesssim \nu(Q \cap X)$  with implicit constant independent of  $Q$ .

**Proposition 6.3.9.**  $H^1(X) = H_z^1(X)$ .

**Proof :** That  $H_z^1(X) \subseteq H^1(X)$  is obvious. To prove the converse inclusion let  $a$  be an atom in  $H^1(X)$  : there exists a ball  $Q$  in  $N$  centered at a point in  $X$  such that  $\text{supp } a \subseteq Q \cap X$ . If  $Q \subset X$ , then  $a \in H_z^1(X)$ . Otherwise, let  $(s, y)$  be the center of  $Q$  and  $r$  its radius and observe that  $0 < s$ . Let  $\tilde{Q}$  be the ball centered at  $(r^2, y)$  with radius  $r$ . Then

$$\nu(\tilde{Q}) \sim r^2 V(y, r) = \frac{r^2}{s + r^2} (s + r^2) V(y, r) \leq 2\nu(Q \cap X).$$

Clearly  $\text{supp } a \subseteq \tilde{Q}$  and  $a$  is up to a fixed multiplicative constant, an  $(1, 2)$ -atom supported inside  $X$ . This proves that  $a \in H_z^1(X)$  and completes the proof of the proposition.  $\square$

**Remark 6.3.10.** *One obtains all the above atomic decompositions replacing atoms with  $L^2$  estimates by atoms with  $L^\infty$  estimates. This will be used in the sequel.*

We finish with the notion of molecules.

**Definition 6.3.11.** *Let  $Q$  be a ball contained in  $X$ .*

*A function  $m$  is called a molecule associated to  $Q$  if there exists  $\alpha > 0$  such that*

$$(1) \int_Q m d\nu = 0,$$

$$(2) \text{ for all } j \geq 1, \|m\|_{L^2(B_j(Q))} \leq 2^{-j\alpha} \nu(2^{j+1}Q \cap X)^{-\frac{1}{2}},$$

where

$$B_j(Q) = \begin{cases} 4Q \cap X, & j = 1, \\ (2^{j+1}Q \setminus 2^jQ) \cap X, & j \geq 2. \end{cases}$$

*A function  $m$  is called a type (a) molecule associated to  $Q$  if  $4Q \subseteq X$  and there exists  $\alpha > 0$  such that (1) and (2) hold.*

*A function  $m$  is called a type (b) molecule associated to  $Q$  if  $2Q \subseteq X$ ,  $4Q \not\subseteq X$  and there exists  $\alpha > 0$  such that (2) holds.*

**Proposition 6.3.12.** *Molecules form a bounded set in  $H_z^1(X)$ . Molecules of type (a) and (b) form a bounded set in  $H_r^1(X)$ .*

Proofs are somewhat classical but we include them for convenience.

**Proof :** Let us begin with the case of  $H_z^1(X)$ . Let  $m$  be a molecule associated to a cube  $Q$ . By Proposition 6.3.9, it suffices to show that  $m$  belongs to  $H^1(X)$  with norm independent of  $Q$ . Set  $\chi_A$  the indicator of a set  $A$  and  $m_{B_j(Q)}$  the mean value of  $m$  over  $B_j(Q) : \frac{1}{\nu(B_j(Q))} \int_{B_j(Q)} m d\nu$ . Write

$$m = \sum_{j=1}^{\infty} m \chi_{B_j(Q)} = \sum_{j=1}^{\infty} (m - m_{B_j(Q)}) \chi_{B_j(Q)} + \sum_{j=1}^{\infty} m_{B_j(Q)} \chi_{B_j(Q)}.$$

Using (2) in Definition 6.3.11, we obtain that

$$\int_{2^{j+1}Q \cap X} |(m - m_{B_j(Q)}) \chi_{B_j(Q)}|^2 d\nu \leq 4 \int_{B_j(Q)} |m|^2 d\nu \lesssim \frac{1}{4^{j\alpha}} \cdot \frac{1}{\nu(2^{j+1}Q \cap X)},$$

where we have used the doubling property  $\nu(2^{j+1}Q) \sim \nu(2^jQ)$  and also the fact that  $\nu(Q \cap X) \sim \nu(Q)$  for all balls centered at a point in  $X$ .

Set

$$\lambda_j = \frac{1}{2^{j\alpha}}, \quad a_j = \lambda_j^{-1} (m - m_{B_j(Q)}) \chi_{B_j(Q)}.$$

We have  $\int_{2^{j+1}Q \cap X} a_j d\nu = 0$ ,  $\text{supp } a_j \subset 2^{j+1}Q \cap X$ , and  $\|a_j\|_{L^2(2^{j+1}Q \cap X)} \leq C \nu(2^{j+1}Q \cap X)^{-\frac{1}{2}}$ , with  $C$  independent of  $j$  and  $Q$ . So  $a_j \in H^1(X)$  and  $\|a_j\|_{H^1(X)}$  is bounded. Since  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \leq C(\alpha) < \infty$ ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (m - m_{B_j(Q)}) \chi_{B_j(Q)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \in H^1(X).$$

For the second term, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} m_{B_j(Q)} \chi_{B_j(Q)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j(Q)} m d\nu \frac{\chi_{B_j(Q)}}{\nu(B_j(Q))} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \left( \int_{2^{j+1}Q \cap X} m d\nu - \int_{2^j Q \cap X} m d\nu \right) \frac{\chi_{B_j(Q)}}{\nu(B_j(Q))} + \left( \int_{4Q \cap X} m d\nu \right) \frac{\chi_{B_1(Q)}}{\nu(B_1(Q))} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \left( \int_{2^j Q \cap X} m d\nu \right) \left[ \frac{\chi_{B_{j-1}(Q)}}{\nu(B_{j-1}(Q))} - \frac{\chi_{B_j(Q)}}{\nu(B_j(Q))} \right]. \end{aligned}$$

Set

$$\mu_j = \int_{2^j Q \cap X} m d\nu, \quad b_j = \frac{\chi_{B_{j-1}(Q)}}{\nu(B_{j-1}(Q))} - \frac{\chi_{B_j(Q)}}{\nu(B_j(Q))}.$$

Then by (1) in Definition 6.3.11,

$$\mu_j = \int_{2^j Q \cap X} m d\nu = - \left( \int_X m d\nu - \int_{2^j Q \cap X} m d\nu \right) = - \sum_{i \geq j} \int_{B_i(Q)} m d\nu,$$

so

$$|\mu_j| \leq \sum_{i \geq j} \int_{B_i(Q)} |m| d\nu \lesssim \sum_{i \geq j} 2^{-i\alpha} \sim 2^{-j\alpha},$$

thus

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j| \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha} < +\infty.$$

On the other hand,  $\text{supp } b_j \subseteq 2^{j+1}Q \cap X$ ,

$$\int_{2^{j+1}Q \cap X} b_j d\nu = 0,$$

and

$$\int_{2^{j+1}Q \cap X} |b_j|^2 d\nu \leq \frac{C^2}{\nu(2^{j+1}Q \cap X)},$$

for some  $C > 0$  independent of  $j$  and  $Q$ . To prove the last inequality, we remark that  $\nu(B_j(Q))$  is comparable to  $\nu(2^{j+1}Q \cap X)$  for all  $j \geq 1$ . This is obvious for  $j = 1$  and we turn to  $j \geq 2$ . As  $B_j(Q)$  is contained in  $2^{j+1}Q \cap X$ , we obtain one inequality. Next, write  $Q = I(t_0, r^2) \times B(x_0, r) = I \times B$  and remark that  $B_j(Q)$  contains the set  $[t_0 + (2^j r)^2, t_0 + (2^{j+1} r)^2) \times (2^{j+1} B)$ . Hence

$$\nu(B_j(Q)) \geq (2^j r)^2 \mu(2^{j+1} B) \sim \nu(2^{j+1} Q) \sim \nu(2^{j+1} Q \cap X)$$

where the last equivalence comes from the fact that  $2^{j+1}Q$  is centered in  $X$ .

Thus  $C^{-1}b_j$  are atoms for  $H^1(X)$ , and therefore  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j b_j \in H^1(X)$ .

Clearly the same argument applies for type (a) molecules so they belong to  $H_z^1(X) \subset H_r^1(X)$ . It remains to consider a type (b) molecule  $m$  associated to a cube  $Q$ . According to Proposition 6.3.7, the odd extension  $m_{odd}$  is, up to a constant that depends only on  $N$ , a molecule for  $H^1(N)$  associated to a cube  $\tilde{Q}$  of size comparable to  $Q$  (since  $4Q \not\subset X$ ), containing  $Q$  and its reflection across  $\{0\} \times E$ . The same argument as above shows that  $m_{odd}$  belongs to  $H^1(N)$ . Thus  $m \in H_r^1(X)$  and the control of its norm follows from an examination of the argument.  $\square$

### 6.4 Boundedness of $T$

Let us come back to the situation where  $M$  is a Riemannian manifold and  $X = \mathbb{R}_+^* \times M$ . Before proving the regularity of the operator  $T$ , that is its boundedness on  $H_z^1(X)$ , let us first give some lemmas about the heat kernel  $p_t(x, y)$ . Indeed, using the definition of  $T$ , we can write

$$Tf(t, x) = \int_0^t \Delta e^{(t-s)\Delta} f(s, x) ds = \iint_X p'_{t-s}(x, y) \chi_{\{t>s\}} f(s, y) ds d\mu(y),$$

where  $p'_t(x, y)$  stands for  $\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y)$ . The last equality is a formal one as the integral may not converge.

**Lemma 6.4.1.** ([75], Proposition 3.3) *If  $M$  satisfies the doubling property (D) and the Poincaré inequality (P), then the heat kernel satisfies the Gaussian upper estimate :*

$$p_t(x, y) \leq \frac{C_1}{V(x, \sqrt{t})} \cdot e^{-c_1 \frac{d(x,y)^2}{t}} \tag{G}$$

for all  $t > 0$  and  $x, y \in M$ .

There is also a lower estimate but we do not need it.

**Lemma 6.4.2.** ([54], Lemma 2.5) *If the heat kernel satisfies (G), then the time derivatives of  $p_t$  satisfy :*

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} p_t(x, y) \right| \lesssim \frac{1}{t^k V(x, \sqrt{t})} e^{-\frac{C d(x,y)^2}{t}}, \tag{6.9}$$

for all  $t > 0$ ,  $x, y \in M$  and all integer  $k \geq 1$ .

**Lemma 6.4.3.** *If (D) and (P) hold, for all  $t > 0$ ,  $x, y, x_0 \in M$ , if  $d(y, x_0) \leq \sqrt{t}$ , then*

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) - \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, x_0) \right| \lesssim \frac{1}{t V(x, \sqrt{t})} \left( \frac{d(y, x_0)}{\sqrt{t}} \right)^\gamma e^{-\frac{C d(x,y)^2}{t}},$$

where  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $C > 0$  are independent of  $x, y, x_0, t$ .

**Proof :** As  $\frac{\partial p_t}{\partial t}(x, y)$  is a solution of heat equation, it follows from Harnack inequality (see [75], Proposition 3.2) and an argument as in [74]. This is where we use (indirectly) the assumption on Poincaré's inequality.  $\square$

**Lemma 6.4.4.** *Assume (D) and (G). One has for all  $y \in M$  and  $s > 0$ .*

$$\int_M |\nabla_x p_s(x, y)| d\mu(x) \lesssim \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

**Proof :** It is proved in [53, Lemma 2.3] that there is  $\gamma > 0$  such that

$$\int_M |\nabla_x p_s(x, y)|^2 e^{\gamma \frac{d^2(x, y)}{s}} d\mu(x) \lesssim \frac{1}{sV(y, \sqrt{s})},$$

for all  $y \in M$  and  $s > 0$ . It suffices to use Cauchy-Schwarz inequality.  $\square$

Now we can prove the first part of Theorem 6.2.1, namely that  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  to itself. By Proposition 6.3.9, we prove that  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  to  $H^1(X)$ . To this end we check that  $T$  maps atoms to molecules defined as above.

Suppose  $a \in H_z^1(X)$  is an  $(1, \infty)$ -atom : there is a ball  $Q = \{(t, x) \in X : \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) < r\}$  contained in  $X$  such that  $\text{supp } a \subset Q$ ,  $\|a\|_\infty \leq \nu(Q)^{-1}$  and  $\int_Q a d\nu = 0$ . Since  $T$  is bounded from  $L^2(X)$  to  $L^2(X)$ ,

$$\left( \int_{4Q \cap X} |Ta|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \int_X |a|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\nu(Q)^{-\frac{1}{2}} \leq c\nu(4Q \cap X)^{-\frac{1}{2}}.$$

Thus  $c^{-1}Ta$  satisfies (2) with  $j = 1$  in Definition 6.3.11.

Now to prove that  $Ta$  satisfies (2) with  $j \geq 2$  in Definition 6.3.11, up to some multiplicative constant, it suffices to prove that there exists  $\alpha > 0$  such that for every  $j \geq 2$  and  $(t, x) \in B_j(Q)$ ,

$$|Ta(t, x)| \lesssim 2^{-j\alpha} \nu(2^{j+1}Q \cap X)^{-1}.$$

Observe that  $Ta(t, x) = 0$  if  $t \leq t_0 - r^2$ . Hence we assume  $t > t_0 - r^2$  in the sequel.

If  $(t, x) \in B_j(Q)$ , then  $2^j r \leq \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) \leq 2^{j+1} r$ , and we have the following two cases :

Case I :  $2^j r \leq d(x, x_0) \leq 2^{j+1} r, |t - t_0| \leq (2^{j+1} r)^2.$

Case II :  $d(x, x_0) \leq 2^{j+1} r, (2^j r)^2 \leq |t - t_0| \leq (2^{j+1} r)^2.$

Case I :

1° If  $2^j r \leq d(x, x_0) \leq 2^{j+1} r, |t - t_0| \leq (2r)^2$ , then we have that  $2^{j-2} r \leq d(x, y) \leq$

$2^{j+2}r$ , whenever  $(s, y) \in Q$ . We have

$$\begin{aligned}
 |Ta(t, x)| &= \left| \int_0^t \int_{d(y, x_0) \leq r} p'_{t-s}(x, y) a(s, y) ds d\mu(y) \right| \\
 &\leq \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) < r} \frac{1}{(t-s)V(x, \sqrt{t-s})} e^{-\frac{Cd(x,y)^2}{t-s}} |a(s, y)| ds d\mu(y) \\
 &\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{t-t_0-r^2}^{t-t_0+r^2} \frac{1}{sV(x, \sqrt{s})} e^{-\frac{C(2^j r)^2}{s}} ds \\
 &\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{\frac{4^j}{5}}^{+\infty} \frac{1}{uV(x, \frac{2^j r}{\sqrt{u}})} e^{-Cu} du \\
 &\lesssim \frac{2^{j(\delta+2)}}{\nu(2^{j+1}Q)} \int_{\frac{4^j}{5}}^{+\infty} \frac{V(x_0, r)}{uV(x, \frac{2^j r}{\sqrt{u}})} e^{-Cu} du \\
 &\lesssim \frac{2^{j(\delta+2)}}{\nu(2^{j+1}Q)} \int_{\frac{4^j}{5}}^{+\infty} \frac{1}{u} \left( \frac{\sqrt{u}}{2^j} \right)^\delta e^{-Cu} du \\
 &\lesssim \frac{1}{\nu(2^{j+1}Q)} e^{-C'4^j} \lesssim \frac{1}{\nu(2^{j+1}Q \cap X)} e^{-C''4^j}.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

The first inequality is obtained by Lemma 6.4.2, the second inequality follows from the size condition of  $a$ , the third one is by changing variable :  $u = \frac{(2^j r)^2}{s}$ , the fourth is by using doubling property of  $\nu$  (6.6) and the fifth one is by the doubling property of  $\mu$  :

$$V(x_0, r) \lesssim V(x, r) \left( 1 + \frac{d(x_0, x)}{r} \right)^\delta \lesssim V\left(x, \frac{2^j r}{\sqrt{5u}}\right) \left( 1 + \frac{2^j r}{r} \right)^\delta \left( \frac{\sqrt{u}}{2^j} \right)^\delta.$$

2°. If  $2^j r \leq d(x, x_0) \leq 2^{j+1}r$  and  $(2r)^2 \leq |t - t_0| \leq (2^{j+1}r)^2$ , then  $d(x, y) \sim 2^j r$  and  $t - s \sim t - t_0$  when  $(s, y) \in Q$ . In this case, using  $\iint a(s, y) ds d\mu(y) = 0$ , write  $Ta(t, x) = I_1 + I_2$  where

$$I_1 = \int_0^t \int_{d(y, x_0) < r} (p'_{t-s}(x, y) - p'_{t-s}(x, x_0)) a(s, y) ds d\mu(y),$$

and

$$I_2 = \int_0^t \int_{d(y, x_0) < r} (p'_{t-s}(x, x_0) - p'_{t-t_0-r^2}(x, x_0)) a(s, y) ds d\mu(y).$$

For  $I_1$ , we have the following estimate :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \iint_Q |p'_{t-s}(x, y) - p'_{t-s}(x, x_0)| |a(s, y)| ds d\mu(y) \\
&\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \iint_Q \frac{1}{(t-s)V(x, \sqrt{t-s})} \left( \frac{d(y, x_0)}{\sqrt{t-s}} \right)^\gamma e^{-\frac{Cd(x, y)^2}{t-s}} ds d\mu(y) \\
&\lesssim \left( \frac{r}{\sqrt{t-t_0}} \right)^\gamma \frac{1}{|t-t_0|V(x, \sqrt{|t-t_0|})} e^{-\frac{C(2^j r)^2}{t-t_0}} \\
&\lesssim \frac{1}{2^j r \nu(2^{j+1}Q)} \left( \frac{2^j r}{\sqrt{t-t_0}} \right)^\gamma \frac{(2^j r)^2 V(x_0, 2^j r)}{|t-t_0|V(x, \sqrt{|t-t_0|})} e^{-\frac{C(2^j r)^2}{t-t_0}} \\
&\lesssim \frac{1}{2^j r \nu(2^{j+1}Q)} \\
&\lesssim \frac{1}{2^j r \nu(2^{j+1}Q \cap X)}.
\end{aligned}$$

The second inequality is obtained by Lemma 6.4.3, and the fifth inequality is by doubling property  $V(x_0, 2^j r) \lesssim V(x, 2^{j+1}r) \lesssim \left(\frac{2^j r}{\sqrt{t-t_0}}\right)^\delta V(x, \sqrt{t-t_0})$ , and that the function  $u \rightarrow u^\beta e^{-Cu}$  is bounded on  $\mathbb{R}_+$ .

Similarly, for  $I_2$ , we have

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left| \int_{s=t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) < r} \int_{w=s}^{t_0+r^2} p''_{t-w}(x, x_0) dw a(s, y) ds d\mu(y) \right| \\
&\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{s=t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{w=s}^{t_0+r^2} |p''_{t-w}(x, x_0)| dw ds \\
&\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{w=t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{s=t_0-r^2}^w \frac{1}{(t-w)^2 V(x, \sqrt{t-w})} e^{-\frac{Cd(x, x_0)^2}{(t-w)}} dw ds \\
&\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} (w-t_0+r^2) \frac{1}{(t-w)^2 V(x, \sqrt{t-w})} e^{-C\frac{(2^j r)^2}{t-w}} dw \\
&\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_0^{2r^2} w dw \frac{1}{(t-t_0)^2 V(x, \sqrt{t-t_0})} e^{-C\frac{4^j r^2}{t-t_0}} \\
&\lesssim \frac{r^2 V(x_0, r)}{\nu(Q)} \cdot \frac{1}{(2^j r)^2 V(x_0, 2^j r)} \cdot \frac{r^2 (2^j r)^2 V(x, 2^j r)}{(t-t_0)^2 V(x, \sqrt{t-t_0})} e^{-C\frac{4^j r^2}{t-t_0}} \\
&\lesssim \frac{1}{4^j \nu(2^{j+1}Q)} \lesssim \frac{1}{4^j \nu(2^{j+1}Q \cap X)},
\end{aligned}$$

where the third inequality is obtained by Lemma 6.4.2, the fifth inequality by substitution and the fact  $t-w \sim t-t_0$ , the sixth inequality by  $V(x, 2^j r) \sim V(x_0, 2^j r)$ , the seventh by  $r^2 V(x_0, r) \sim \nu(Q)$ , and that the function  $u \rightarrow u^\beta e^{-Cu}$  is bounded on  $\mathbb{R}_+$ .



Case II :  $(2^j r)^2 \leq |t - t_0| \leq (2^{j+1} r)^2, d(x, x_0) \leq 2^{j+1} r$ . Then we have  $t - s \sim t - t_0$ . Write again  $Ta = I_1 + I_2$ , where  $I_1$  and  $I_2$  are as in Case I. Thus

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\nu(Q)} \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y,x_0)<r} \left(\frac{r}{\sqrt{t-s}}\right)^\gamma \frac{1}{(t-s)V(x, \sqrt{t-s})} e^{-\frac{Cd(x,y)^2}{t-s}} ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y,x_0)<r} \left(\frac{r}{\sqrt{t-s}}\right)^\gamma \frac{1}{(t-s)V(x, \sqrt{t-s})} ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{2^{j\gamma}} \frac{1}{(2^j r)^2 V(x, 2^j r)} \lesssim \frac{1}{2^{j\gamma} \nu(2^{j+1} Q)} \lesssim \frac{1}{2^{j\gamma} \nu(2^{j+1} Q \cap X)}, \end{aligned}$$

where the first inequality follows from Lemma 6.4.3, the third inequality follows from the fact that  $t - s \sim (2^j r)^2$ , the fourth from  $V(x, 2^j r) \sim V(x_0, 2^j r)$ .

For  $I_2$ , we have

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{s=t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y,x_0)<r} \int_{\theta=s}^{t_0+r^2} |p''_{t-\theta}(x, x_0)| d\theta |a(s, y)| ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y,x_0)<r} \int_s^{t_0+r^2} \frac{1}{(t-\theta)^2 V(x, \sqrt{t-\theta})} d\theta ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{r^2}{(2^j r)^4 V(x_0, 2^j r)} \lesssim \frac{1}{4^j \nu(2^{j+1} Q)} \lesssim \frac{1}{4^j \nu(2^{j+1} Q \cap X)}, \end{aligned}$$

where the second inequality is obtained by Lemma 6.4.2, the third one by  $t - \theta \sim (2^j r)^2$  and  $V(x, 2^j r) \sim V(x_0, 2^j r)$ .

Thus we proved that  $Ta$  satisfies (3) with  $\alpha = \gamma$  in Definition 6.3.11.

We claim that  $\int_X Ta d\nu = 0$ . Assuming this claim for a moment, we conclude from Proposition 6.3.12 that  $Ta \in H^1(X)$ . Thus  $T$  maps atoms to molecules and as usual we obtain that  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  into  $H^1(X)$  as desired.  $\square$

**Lemma 6.4.5.**  $\int_X Ta d\nu = 0$  when  $a \in H_z^1(X)$  is an  $(1, \infty)$ -atom.

**Proof :** We give two proofs, each having advantages. The first one is as follows. Let  $u$  be the solution (since  $a \in L^2(X)$ ) of (6.3) with data  $a$ . Then  $Ta = \Delta u = u' - a$ . Furthermore  $a \in L^1(X)$  and  $Ta, u' \in L^1(X)$  as we just showed. Fix  $h$  a bounded function with compact support on  $M$ . Then integrate the equation against  $h$  on  $X$ . Note that  $u \in C([0, \infty), L^2(M))$  with  $u(0, \cdot) = 0$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot) = 0$  in  $L^2(M)$  (since  $a$  is 0 for  $t$  larger than some  $\tau$ , hence  $u(t, \cdot) = e^{(t-\tau)\Delta} u(\tau, \cdot)$  for  $t > \tau$ ) and  $u' \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(M))$ . Integrating by parts, one finds

$$\iint_X u'(t, x) h(x) dt d\mu(x) = \int_0^\infty \langle u'(t, \cdot), h \rangle dt = 0$$

and

$$\iint_X Ta(t, x) h(x) dt d\mu(x) = - \iint_X a(t, x) h(x) dt d\mu(x).$$

Since  $a$  and  $Ta$  both belong to  $L^1(X)$ , letting  $h$  converge to 1 everywhere with  $\|h\|_\infty = 1$  implies

$$\iint_X Ta(t, x) dt d\mu(x) = - \iint_X a(t, x) dt d\mu(x) = 0.$$

The second argument is more precise : by the previous calculations, we know that

$$\iint_X |Ta(t, x)| dt d\mu(x) \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha} < +\infty,$$

thus  $Ta \in L^1(X)$  and, therefore, for a.e.  $t > 0$ ,  $Ta(t, \cdot) \in L^1(M)$ . It is enough to show that for such  $t$ 's,  $\int_M Ta(t, x) d\mu(x) = 0$ .

Now let  $\varphi \in C_0^\infty([0, +\infty))$ , with  $\varphi = 1$  on  $[0, 1]$ ,  $\varphi = 0$  on  $[2, +\infty)$  and  $0 \leq \varphi \leq 1$ . Fix  $x_0 \in M$  and set  $\varphi_R(x) = \varphi(R^{-1}\eta(x))$  for  $R > 0$  where  $\eta \in C^\infty(M \setminus \{x_0\})$  with  $\eta(x) \sim d(x_0, x)$  and  $\nabla\eta$  bounded. Recall that  $Ta = \Delta u$  where  $u(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} a(s) ds$ . Hence

$$\int_M Ta(t, x)\varphi_R(x)d\mu(x) = - \int_M \nabla u(t, x) \cdot \nabla\varphi_R(x)d\mu(x). \tag{6.11}$$

Since  $\|\nabla\varphi_R\|_\infty \leq \frac{C}{R}$ , we obtain

$$\left| \int_M Ta(t, x)\varphi_R(x)d\mu(x) \right| \lesssim \frac{1}{R} \int_M |\nabla u(t, x)| d\mu(x). \tag{6.12}$$

It follows immediately from Lemma 6.4.4 that

$$\|\nabla e^{s\Delta} g\|_{L^1(M)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{s}} \|g\|_{L^1(M)},$$

for all  $g \in L^1(M)$  and  $s > 0$ , therefore

$$\int_M |\nabla u(t, x)| d\mu(x) \leq \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|a(s, \cdot)\|_{L^1(M)} ds \leq 2C\sqrt{t} \|a\|_\infty r^{-2}, \tag{6.13}$$

where the ball supporting  $a$  has radius  $r$ . Thus by (6.11), (6.12), (6.13), we have

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_M Ta(t, x)\varphi_R(x)d\mu(x) \right| = 0.$$

Hence, as  $t > 0$  is such that  $Ta(t, \cdot) \in L^1(M)$ , dominated convergence yields

$$\int_M Ta(t, x)d\mu(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_M Ta(t, x)\varphi_R(x)d\mu(x) = 0.$$

□

**Remark 6.4.6.** *The second argument shows that for almost all  $t > 0$ ,  $Ta(t, \cdot)$  is in  $L^1(M)$  and has a vanishing integral. Actually, an examination of the proof (left to the reader) shows that for almost all  $t > 0$ ,  $Ta(t, \cdot)$  is up to a constant depending on  $t, t_0, r$  a molecule in  $M$ , hence belongs to  $H_{CW}^1(M)$ . Calling  $c_{t_0,r}(t)$  its norm in this space, one can check that  $\int_0^\infty c_{t_0,r}(t) dt \lesssim 1$  uniformly with respect to  $t_0, r$ , that is uniformly with respect to the atom  $a$ . Thus, the maximal regularity map  $T$  extends boundedly from  $H_z^1(X)$  into  $L^1(\mathbb{R}_+^*, H^1(M))$ . It is easy to show that  $H_z^1(\mathbb{R}_+^* \times M)$  and  $L^1(\mathbb{R}_+^*, H^1(M))$  are not comparable spaces. This extra regularity of the map  $T$  is thus not shared by the map  $f \mapsto u'$ .*

We conclude this section by observing that the source space  $H_z^1(X)$  is best possible.

**Proposition 6.4.7.** *If  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $T$  is not bounded from  $H_r^1(X)$  to  $L^1(X)$ .*

**Proof :** Let  $f(t, x) = 1$  if  $0 < t < 1$  and  $|x| \leq 1$ , and 0 otherwise. We have seen that  $f \in H_r^1$ . We claim that  $Tf \notin L^1(X)$ . Note that  $X = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ .

Recall that if  $p_t(z)$  denotes the heat kernel, then the time derivative is given by

$$p'_t(z) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left( \frac{|z|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) e^{-\frac{|z|^2}{4t}},$$

hence

$$\frac{|z|^2}{4t} \leq \frac{n}{4} \implies p'_t(z) \leq -\frac{ne^{-n/4}}{4t(4\pi t)^{n/2}}.$$

Thus, if  $|x| \leq \frac{1}{2}(nt)^{1/2}$ ,  $|y| \leq 1$ ,  $t \geq \sup(4/n, 2) = \tau$  and  $0 < s < 1$  we have

$$p'_{t-s}(x - y) \leq -\frac{ne^{-n/4}}{4t(4\pi t)^{n/2}}.$$

It follows that there is a constant  $c_n > 0$  such that

$$\begin{aligned} \iint |Tf(t, x)| dt d\mu(x) &\geq \int_\tau^\infty \int_{|x| \leq \frac{1}{2}(nt)^{1/2}} \left| \int_{|y| \leq 1} \int_0^1 p'_{t-s}(x - y) ds d\mu(y) \right| dt d\mu(x) \\ &\geq c_n \int_\tau^\infty \frac{dt}{t} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

□

## 6.5 Boundedness of $T^*$

In this section, we study the boundedness of  $T^*$  given by (6.5). If we let

$$v(t, x) = \int_t^{+\infty} [e^{(s-t)\Delta} f(s, \cdot)](x) ds, t > 0,$$

then  $\Delta v = T^*f$  and satisfies :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \Delta v(t, x) = -f(t, x).$$

We now prove the part of Theorem 6.2.1 concerning the boundedness of  $T^*$ .

**Proof :** As before, it is enough to prove the boundedness from  $H_r^1(X)$  into  $H^1(X)$ . For that purpose, we check that  $H_r^1$ -atoms are mapped to molecules of Definition 6.3.11. There are two kinds of atoms in  $H_r^1(X)$  : type (a) atoms and type (b) atoms.

Suppose  $a$  is a type (a) atom, with  $\text{supp } a \subseteq Q = \{(t, x) : \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) < r\}$  and  $4Q \subseteq X$ . To see that  $T^*a$  is a molecule we prove (1) and (2) in Definition 6.3.11. We begin with (2). First, since  $T$  is  $L^2(X)$ -bounded, so is  $T^*$  and

$$\|T^*a\|_{L^2(4Q \cap X)} \lesssim \nu(Q \cap X)^{-\frac{1}{2}} \lesssim \nu(4Q \cap X)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.14)$$

Next, we show that there exists  $\alpha > 0$  such that for each  $j \geq 2$  and  $(t, x) \in B_j(Q)$ ,

$$|T^*a(t, x)| \lesssim 2^{-j\alpha} \nu(2^{j+1}Q \cap X)^{-1}. \quad (6.15)$$

We observe that  $T^*a(t, x) = 0$  if  $t > t_0 + r^2$ . Hence we assume  $t \leq t_0 + r^2$ . For  $(t, x) \in B_j(Q)$ , we have that  $2^j r \leq \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) \leq 2^{j+1}r$ . So we distinguish in addition two cases :

Case I :  $2^j r \leq d(x, x_0) \leq 2^{j+1}r, |t - t_0| \leq (2^{j+1}r)^2$  .

Case II :  $(2^j r)^2 \leq |t - t_0| \leq (2^{j+1}r)^2, d(x, x_0) \leq 2^j r$  .

Case I :  $2^j r \leq d(x, x_0) \leq 2^{j+1}r$  and  $|t - t_0| \leq (2^{j+1}r)^2$ . If, in addition  $|t - t_0| \leq r^2$  then

$$\begin{aligned} |T^*a(t, x)| &= \left| \int_t^{+\infty} \int_{d(y, x_0) < r^2} p'_{s-t}(x, y) a(s, y) ds d\mu(y) \right| \\ &\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_t^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r^2} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{Cd(y, x)^2}{s-t}} ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_t^{t_0+r^2} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{C4^j r^2}{s-t}} ds \lesssim e^{-C4^j} \frac{1}{\nu(2^j Q \cap X)}, \end{aligned}$$

where we used Lemma 6.4.2 and that  $a$  is supported in  $Q$ . The last inequality is obtained repeating the proof of (6.10).

If  $t \leq t_0 - r^2$ , then

$$\begin{aligned} |T^*a(t, x)| &\leq \frac{1}{r^2} \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{C4^j r^2}{s-t}} ds \\ &\leq \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{\frac{4^j r^2}{t_0+r^2-t}}^{\frac{4^j r^2}{t_0-r^2-t}} \frac{e^{-Cu} du}{uV(x, \frac{2^j r}{\sqrt{u}})} \\ &\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_{\frac{4^j}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-Cu} du}{uV(x, \frac{2^j r}{\sqrt{u}})} \\ &\lesssim e^{-c4^j} \frac{1}{\nu(2^{j+1}Q \cap X)}, \end{aligned}$$

where the second inequality is obtained by substitution, the third from the fact that  $t_0 - t + r^2 \geq r^2$ , and the last one repeating the proof of (6.10).

Case II :  $(2^j r)^2 \leq |t - t_0| \leq (2^{j+1} r)^2, d(x, x_0) \leq 2^j r$ . In this case, using the vanishing moment condition of  $a$ , we can write  $T^*a(t, x)$  as follows :

$$\begin{aligned} T^*a(t, x) &= \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} p'_{s-t}(x, y) a(s, y) ds d\mu(y) \\ &= \int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} (p'_{s-t}(x, y) - p'_{s-t}(x, x_0)) a(s, y) ds d\mu(y) + \\ &\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} (p'_{s-t}(x, x_0) - p'_{r^2+t_0-t}(x, x_0)) a(s, y) ds d\mu(y) = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Following the proof of (6.10), we have the estimation of  $J_1$  :

$$|J_1| \lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_t^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{Cd(y, x)^2}{s-t}} ds d\mu(y) \lesssim \frac{1}{2^{j\alpha} \nu(2^{j+1}Q \cap X)},$$

For  $J_2$ , we have the estimation :

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \int_t^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} \int_{\theta=s}^{t_0+r^2} |p''_{\theta-t}(x, x_0)| |d\theta| |a(s, y)| ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_{s=t_0-r^2}^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} \int_{\theta=s}^{t_0+r^2} \frac{d\theta ds dy}{(\theta-t)^2 V(x, \sqrt{\theta-t})} \lesssim \frac{1}{4^j} \cdot \frac{1}{\nu(2^j Q \cap X)}, \end{aligned}$$

where we use Lemma 6.4.2 and the fact that  $\theta - t \sim (2^j r)^2$  to get the last inequality.

Now the argument to show  $\int_X T^*a(t, x) dt d\mu(x) = 0$  is the same as in Lemma 6.4.5. This proves that  $T^*a$  is a molecule.

Now we prove that for type  $(b)$ -atoms  $b$ ,  $T^*b$  is a molecule. Suppose that  $b$  is a type  $(b)$  atom, supported in  $Q = \{(t, x) \in X, \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) < r\}$  with  $2Q \subseteq X$  but  $4Q \not\subseteq X$ , and  $\|b\|_\infty \leq \frac{1}{\nu(Q)}$ .

As for type (a) atoms, we have

$$\|T^*b\|_{L^2(4Q \cap X)} \lesssim \nu(Q)^{-\frac{1}{2}} \lesssim \nu(4Q \cap X)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.16}$$

Next, we establish that for all  $j \geq 2$  and  $(t, x) \in B_j(Q)$ ,

$$|T^*b(t, x)| \lesssim \nu(2^jQ \cap X)^{-\frac{1}{2}} e^{-C4^j}. \tag{6.17}$$

Fix  $j \geq 2$  and suppose  $(t, x) \in B_j(Q)$ . Observe that  $T^*b(t, x) = 0$  if  $t > t_0 + r^2$ . As  $t_0 \geq (4r)^2$ , this implies that  $|t - t_0| \leq (4r^2)$ . Thus the condition  $2^j r \leq \tilde{d}(t, x; t_0, x_0) \leq 2^{j+1} r$  implies  $d(x, x_0) \sim 2^j r$  for  $j \geq 3$  (we skip the details for  $j = 2$  which are not difficult). Like the proof of (6.10), we have [

$$\begin{aligned} |T^*b(t, x)| &\leq \int_t^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} |p'_{s-t}(x, y)| |a(s, y)| ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{\nu(Q)} \int_t^{t_0+r^2} \int_{d(y, x_0) \leq r} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{Cd(x,y)^2}{s-t}} ds d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{V(x_0, r)}{\nu(Q)} \int_t^{t_0+r^2} \frac{1}{(s-t)V(x, \sqrt{s-t})} e^{-\frac{C4^j}{s-t}} ds \\ &\lesssim e^{-C4^j} \frac{1}{\nu(2^jQ)}. \end{aligned}$$

The second argument in the proof of Lemma 6.4.5 implies that  $\iint_X T^*b(t, x) dt d\mu(x) = 0$ . Hence,  $T^*$  is a molecule. The theorem is proved.  $\square$

**Remark 6.5.1.** *As for  $T$ , one can check that the proof yields that  $T^*$  is bounded from  $H_r^1(X)$  into  $L^1(\mathbb{R}_+, H^1(M))$ .*

**Remark 6.5.2.** *If  $X = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ ,  $T^*$  is not bounded on  $L^1(X)$ . Indeed, this would mean that  $\iint_X 1_{s>t} |p'_{s-t}(x - y)| ds dy$  is bounded uniformly with respect to  $(t, x) \in X$ . But this integral equals  $c \int_0^\infty \frac{dt}{t} = \infty$  as  $c = \int_{\mathbb{R}^n} |p'_1(x)| dx > 0$ .*

## 6.6 Maximal $L^q$ regularity on $L^p$

The well-known maximal  $L^q$  regularity of the Cauchy problem in our setting (see [56]) states as follows

**Theorem 6.6.1.** *There is maximal  $L^q$  regularity property for the Cauchy problem (6.3) :*

$$\|u'\|_{L^q(\mathbb{R}_+, Y)} + \|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}_+, Y)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}_+, Y)},$$

where  $Y = L^p(M)$ ,  $1 < p, q < \infty$ .

Let us see a proof as a corollary of Theorem 6.2.1.

**Proof :** It suffices to prove that  $T$  is  $L^p(X)$ -bounded, with  $1 < p < \infty$ . To see this, we construct an operator  $\tilde{T}$  as follows :

$$\begin{cases} \tilde{T}f(t, x) = T(\chi_X f)(t, x), & t > 0, \\ \tilde{T}f(t, x) = 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Then by Theorem 6.2.1, we know that  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  to  $H_z^1(X)$ , therefore  $\tilde{T}$  is bounded from  $H^1(N)$  to  $H^1(N)$ . On the other hand  $T$  is  $L^2(X)$ -bounded, so  $\tilde{T}$  is  $L^2(N)$ -bounded too. Then using the interpolation theorem in [52], we obtain that  $\tilde{T}$  is  $L^p(N)$ -bounded, where  $1 < p \leq 2$ . Therefore  $T$  is  $L^p(X)$ -bounded,  $1 < p \leq 2$ .

Similarly, we can repeat the argument for the operator  $\tilde{T}^*$  defined by

$$\begin{cases} \tilde{T}^*f(t, x) = T^*(\chi_X f)(t, x), & t > 0, \\ \tilde{T}^*f(t, x) = 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

and obtain that  $T^*$  is  $L^p(X)$ -bounded,  $1 < p \leq 2$ .

By duality, we obtain that  $T$  is  $L^p(X)$ -bounded,  $2 < p < \infty$ . □

## 6.7 Sublaplacians of connected Lie groups of polynomial growth

First let us recall some properties of connected Lie groups of polynomial growth. For further informations, see [80], [38], and the references given therein.

Let  $G$  be a connected Lie group, and let us fix a left-invariant Haar measure  $d\mu(x)$  on  $G$ . If  $A$  is a measurable subset of  $G$ , we will denote the measure of  $A$  by  $|A|$ .

We assume that  $G$  has polynomial volume growth, that is if  $U$  is a compact neighbourhood of the identity element  $e$  of  $G$ , then there is a constant  $C > 0$  such that  $|U^k| \leq Ck^C, k \in \mathbb{Z}_+$ . Then  $G$  is unimodular. Furthermore, there exists  $D \in \mathbb{N}$ , which does not depend on  $U$ , such that

$$|U^k| \sim k^D \quad \text{for } k \rightarrow \infty. \quad (6.18)$$

For example every connected nilpotent Lie group has polynomial volume growth.

Let  $X_1, \dots, X_n$  be left-invariant vector fields on  $G$  which satisfy the Hörmander's condition, i.e. they generate, together with their successive Lie brackets  $[X_{i_1}, [\dots, X_{i_\alpha}] \dots]$ , the Lie algebra of  $G$ .

Associated with  $X_1, \dots, X_n$ , in a canonical way, there is a control distance  $d$ , which is left-invariant and compatible with the topology on  $G$ . For any  $x \in G$  we put  $|x| = d(e, x)$ . The properties of  $d$  imply that

$$|xy| \leq |x| + |y|, \quad (6.19)$$

for any  $x, y \in G$ .

Furthermore, for any  $r > 0$  we put  $V(r) = |B(e, r)|$ , where  $B(e, r) = \{x \in G : |x| < r\}$ . Then by (6.18), we have

$$V(r) \sim r^D, \quad \text{for } r \rightarrow \infty.$$

On the other hand, there exists  $d \in \mathbb{N}$ , such that

$$V(r) \sim r^d, \quad \text{for } r \rightarrow 0.$$

Using these facts, by direct calculation, we have the "doubling property" :  $V(sr) \lesssim s^{\max\{d, D\}} V(r)$ , where  $s > 1$ .

On connected Lie groups of polynomial growth, associated with the sublaplacian  $\Delta = -\sum X_j^2$  and corresponding heat kernel, Poincaré inequalities also hold (see [79], [75]). The heat kernel satisfies the gaussian upper estimate (G) (see [80], Theorem VIII.2.9). In this setting, the Harnack inequality holds too, see [38], Theorem 3.1. Gaussian estimates (6.9) of time derivatives of the heat kernel are obtained in [80], Theorem VIII.2.4. Next, as Harnack inequality holds, Lemma 6.4.3 is valid.

Eventually Lemma 6.4.4 is easy. The simple proof is a consequence of the following gaussian estimates of first order space derivatives of the heat kernel.

**Lemma 6.7.1.** ([80], Theorem VIII.2.7) *If  $G$  is a connected Lie group with polynomial growth, then for  $i \in \{1, \dots, n\}$ , we have*

$$|X_i p_t(x)| \lesssim t^{-1/2} V(\sqrt{t})^{-1} e^{-c \frac{d(x, e)^2}{t}},$$

for all  $t > 0$  and  $x \in G$ .

So far we have recovered all the basic tools used in Section 4. The "parabolic" Hardy spaces on  $N = \mathbb{R} \times G$  and the  $z$  and  $r$  Hardy spaces on  $X = \mathbb{R}_+^* \times G$  can be defined analogously and the results are the same for  $T$  and  $T^*$  :

**Theorem 6.7.1.** *Let  $G$  be a connected Lie group with polynomial growth. Then  $T$  is bounded on  $H_z^1(X)$  and  $T^*$  is bounded from  $H_r^1(X)$  to  $H_z^1(X)$ .*

The proof is the same as before. Details are left to the reader.

## 6.8 Second order operators

Let  $A \in L^\infty(\mathbb{R}^n, M_n(\mathbb{C}))$ . Assume that  $A$  is uniformly elliptic, which means that there exists  $\delta > 0$  such that, for almost all  $x \in \mathbb{R}^n$  and all  $\xi \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\operatorname{Re} A(x) \xi \cdot \bar{\xi} \geq \delta |\xi|^2.$$

Let  $\Omega$  be an open subset of  $\mathbb{R}^n$ . If  $V(\Omega)$  is a closed subset of  $W^{1,2}(\Omega)$  containing  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , there is a unique operator  $L$  which is the maximal accretive operator associated with the accretive sesquilinear form

$$Q(f, g) = \int_{\Omega} A(x) \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx$$



for all  $(f, g) \in V \times V$ . We are interested in the Dirichlet boundary condition ( $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ ) and the Neumann boundary condition ( $V = W^{1,2}(\Omega)$ ).

Say that  $L$  satisfies (G) is the following three conditions hold :

The kernel of  $e^{-tL}$ , denoted by  $K_t(x, y)$ , is a measurable function on  $\Omega \times \Omega$  and there exist  $C_G, \alpha > 0$  such that, for all  $0 < t < +\infty$  and almost every  $x, y \in \Omega$ ,

$$|K_t(x, y)| \leq \frac{C_G}{t^{n/2}} e^{-\alpha \frac{|x-y|^2}{t}}. \quad (6.20)$$

For all  $y \in \Omega$  and all  $0 < t < +\infty$ , the function  $x \mapsto K_t(x, y)$  is Hölder continuous in  $\Omega$  and there exist  $C_H, \mu > 0$  such that, for all  $0 < t < +\infty$  and all  $x, x', y \in \Omega$ ,

$$|K_t(x, y) - K_t(x', y)| \leq \frac{C_H}{t^{n/2}} \frac{|x - x'|^\mu}{t^{\mu/2}}. \quad (6.21)$$

For all  $x \in \Omega$  and all  $0 < t < +\infty$ , the function  $y \mapsto K_t(x, y)$  is Hölder continuous in  $\Omega$  and there exist  $C_H, \mu > 0$  such that, for all  $0 < t < +\infty$  and all  $y, y', x \in \Omega$ ,

$$|K_t(x, y) - K_t(x, y')| \leq \frac{C_H}{t^{n/2}} \frac{|y - y'|^\mu}{t^{\mu/2}}. \quad (6.22)$$

We assume from now on that  $\Omega$  is a strongly Lipschitz domain (see [45] for a definition). Hence  $\Omega$  equipped with Euclidean distance and Lebesgue measure is a space of homogeneous type. We set  $N = \mathbb{R} \times \Omega$ ,  $X = \mathbb{R}_+^* \times \Omega$  and we can define the parabolic Hardy spaces  $H^1(N)$ ,  $H_r^1(X)$  and  $H_z^1(X) = H^1(X)$  following Section 6.3. Note that the subscripts  $r$  and  $z$  are with respect to extension with respect to the variable  $t$  across  $t = 0$ , the spatial variable remaining in  $\Omega$ .

Consider the Cauchy problem associated to  $-L$  on  $X$  and call again  $T$  the map of maximal regularity and  $T^*$  its adjoint in  $L^2(X)$ . The result is as follows.

**Theorem 6.8.1.** *Suppose  $\Omega$  is a strongly Lipschitz domain and that  $L$  satisfies condition (G).*

1. *In the case of Dirichlet boundary condition,  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  into  $H_r^1(X)$  and  $T^*$  from  $H_r^1(X)$  into  $H_r^1(X)$ .*
2. *In the case of Neumann boundary condition,  $T$  is bounded from  $H_z^1(X)$  into  $H_z^1(X)$  and  $T^*$  from  $H_r^1(X)$  into  $H_z^1(X)$ .*

For example, this theorem applies when  $A$  has real-valued entries.

Let us sketch the proof as it is essentially similar to the ones in the case of manifolds.

First, the four lemmas on  $p_t(x, y)$  have analogs for  $K_t(x, y)$ . The upper bound in (G) correspond to the Gaussian upper bound of Lemma 6.4.1. By analyticity of the semigroup generated by  $-L$ , it easily implies Lemma 6.4.2 and Lemma 6.4.3. Finally, the estimate on the gradient of Lemma 6.4.4 is a consequence of [45, Proposition A.4].

This yields that the action of  $T$  and  $T^*$  on appropriate atoms are functions with same estimates as molecules.

For both boundary conditions the source spaces are the same. What changes are the target spaces, let us explain why. In the case of Neumann boundary conditions, one

has  $\int_{\Omega} \partial_t K_t(x, y) dx = 0$  so one expects  $Ta$  and  $T^*a$  to have mean value zero. Indeed, this is obtained by mimicking the second argument for Lemma 6.4.5. In the case of Dirichlet boundary condition, the first argument for Lemma 6.4.5 applies. When the corresponding atom has mean value zero, then the same is true for its image under  $T$  or  $T^*$ . One concludes with Proposition 6.3.12.

Further details are left to the reader

**Remark 6.8.1.** *One can also consider elliptic operators on manifolds with  $(D)$  and  $(P)$  or sublaplacians on connected Lie groups of polynomial growth with coefficients and appropriate estimates. The results are the same.*

**Remark 6.8.2.** *All results have local analogs under local doubling, local Poincaré and local Gaussian bounds in which  $t$  is restricted to a finite interval  $(0, \tau)$ . In this case,  $\mathbb{R}_+^*$  and  $\mathbb{R}$  are replaced in  $X$  and  $N$  by  $(0, \tau)$  and  $(-\tau, \tau)$  and the Hardy spaces by their local analogs in the sense of Goldberg (where one relaxes the mean value zero property for atoms or molecules associated to large balls). This is left to the interested reader.*

**Acknowledgements :** The third author would like to express her thanks to professor Lizhong Peng and professor Heping Liu for their encouragements, and thanks Department of Mathematics, Paris-Sud University for its hospitality. The authors thank Thierry Coulhon for indicating useful bibliographical references.



# Bibliographie

## Contribution à l'étude des opérateurs multilinéaires.

- [1] S. ALINHAC and P. GÉRARD. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels, CNRS Editions, 1991.
- [2] A. BENYI, C. DEMETER, A.R. NAHMOD, C. THIELE, R.H. TORRES, and P. VILLAROYA. Modulation invariant bilinear T(1)-Theorem. *submitted*, June 2007.
- [3] A. BENYI, A.R. NAHMOD, and R.H. TORRES. Sobolev space estimates and symbolic calculus for bilinear pseudodifferential operators. *Jour. of Geo. Anal.* 16 no.3, pages 431–453, 2006.
- [4] J. BERGH and J. LÖFSTRÖM. *Interpolation Spaces : An Introduction*. Springer, 1976.
- [5] D. BILYK and L. GRAFAKOS. A new way of looking at distributional estimates; applications for the bilinear Hilbert transform. *Proc. 7th Int. Conf. on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations [El Escorial, 2004]*, *Collectanea Mathematica*, pages 141–169, 2006.
- [6] D. BILYK and L. GRAFAKOS. Distributional estimates for the bilinear hilbert. *Journal of Geometric Analysis*, to appear.
- [7] N. BURQ, P. GERARD, and N. TZVETKOV. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Sci. Eco. Nor. Sup.* 38, pages 255–301, 2005.
- [8] A.P. CALDERÓN and A. ZYGMUND. On singular integrals. *Amer. Jour. Math.* 78, pages 289–309, 1956.
- [9] R. COIFMAN and Y. MEYER. *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. SMF. Astérisque 57, 1978.
- [10] R.R. COIFMAN and Y. MEYER. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* 212, pages 315–331, 1975.
- [11] R.R. COIFMAN and Y. MEYER. Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. *Ann. Inst. Grenoble* 28, pages 177–202, 1978.
- [12] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA, and T. TAO. Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative. *Siam J. Math.* 33, pages 649–669, 2001.

- [13] M. CWIKEL and C. FEFFERMAN. The canonical seminorm on weak  $L^1$ . *Studia Math.* 78, pages 275–278, 1980.
- [14] C. DEMETER, T. TAO, and C. THIELE. Maximal multilinear operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [15] C. FEFFERMAN. Pointwise convergence of Fourier series. *Ann. Math.*, 98, pages 551–571, 1973.
- [16] D. FREMLIN. Tensor Products of Banach Lattices. *Math. Annalen*, 211, pages 87–110, 1974.
- [17] L. GRAFAKOS. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Education, 2004.
- [18] L. GRAFAKOS and X. LI. Uniform bounds for the bilinear Hilbert transforms I. *Ann. of Math.* 159 no.3, pages 889–933, 2004.
- [19] L. GRAFAKOS and R. TORRES. Multilinear Calderón-Zygmund theory. *Adv. in Math.* 165, pages 124–164, 2002.
- [20] C. KENIG and E.M. STEIN. Multilinear estimates and fractional integration. *Math. Res. Lett.* 6 no.1, pages 1–15, 1999.
- [21] M. LACEY. The bilinear maximal functions map into  $L^p$  for  $2/3 < p \leq 1$ . *Ann. of Math*, 151, pages 35–57, 2000.
- [22] M. LACEY and C. THIELE.  $L^p$  estimates on the Bilinear Hilbert Transform. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 94, pages 33–35, 1997.
- [23] M. LACEY and C. THIELE.  $L^p$  estimates on the bilinear Hilbert transform for  $2 < p < \infty$ . *Ann. Math.* 146, pages 693–724, 1997.
- [24] M. LACEY and C. THIELE. On the Calderón conjectures for the bilinear Hilbert transform. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 95, pages 4828–4830, 1998.
- [25] M. LACEY and C. THIELE. On Calderón’s conjecture. *Ann. Math.* 149, pages 475–496, 1999.
- [26] X. LI. Uniform Bounds for the Bilinear Hilbert Transforms, II. *Rev. Mat. Ibero. Vol 22 no.3*, pages 1069–1126, 2006.
- [27] J.L. LIONS and J. PEETRE. Sur une classe d’espaces d’interpolation. *IHES Publ. Math.* 19, pages 5–68, 1964.
- [28] C. MUSCALU, T. TAO, and C. THIELE. Multi-linear operators given by singular multipliers. *Journ. Amer. Math. Soc* 15, pages 469–496, 2002.
- [29] C. MUSCALU, T. TAO, and C. THIELE. Uniform estimates on paraproducts. *Journ. Anal. Math* 87, pages 369–384, 2002.
- [30] C. MUSCALU, T. TAO, and C. THIELE. Uniforms estimates on multi-linear operators with modulation symmetry. *Journ. Anal. Math* 88, pages 255–309, 2002.
- [31] C. MUSCALU, T. TAO, and C. THIELE.  $L^p$  estimates for the biest II : The Fourier case. *Math. Annalen* 329, pages 427–461, 2004.

- [32] E.M. STEIN. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz. *Trans. Amer. Math. Soc.* 88, pages 430–466, 1958.
- [33] E.M. STEIN. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Univ. Press, 1970.
- [34] E.M. STEIN. *Harmonic analysis : Real variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press, 1993.
- [35] E.M. STEIN and G. WEISS. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, 1971.
- [36] E. TERWILLEGER. Boundedness for a bilinear model sum operator on  $\mathbb{R}^n$ . *preprint*, to appear.
- [37] A. UCHIYAMA. *Hardy Spaces on the Euclidean Space.* Springer, 2001.

## Espaces de Hardy abstraits.

- [38] G. K. ALEXOPOULOS. Sub-Laplacians with drift on Lie groups of polynomial volume growth. *Mem. Amer. Math. Soc.* 155 no.739, 2002.
- [39] P. AUSCHER. On  $L^p$  estimates for square roots of second order elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$ . *Publ. Mat.* 48, pages 159–186, 2004.
- [40] P. AUSCHER. On necessary and sufficient conditions for  $L^p$  estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$  and related estimates. *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, Vol 186 no.871, 2007.
- [41] P. AUSCHER, F. BERNICOT, and J. ZHAO. Maximal  $H^1$  regularity of the Cauchy Problem. *Submitted*, 2007.
- [42] P. AUSCHER, T. COULHON, X.T. DUONG, and S. HOFMANN. Riesz transform on manifolds and the heat kernel regularity. *Ann. Sci. EC. Nor. Sup. (4)*, 2005.
- [43] P. AUSCHER, S. HOFMANN, M. LACEY, A. McINTOSH, and P. TCHAMITCHIAN. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on  $R^n$ . *Ann. of Math. (2)* 156, pages 633–654, 2002.
- [44] P. AUSCHER and J.M. MARTELL. Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I : General operator theory and weights. *Adv. in Math.* 212, pages 225–276, 2007.
- [45] P. AUSCHER and E. RUSS. Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of  $\mathbb{R}^n$ . *J. Func. Anal.* 201 no.1, pages 148–184, 2003.
- [46] S. BLUNCK and P. KUNSTMANN. Weighted norm estimates and maximal regularity. *Adv. in Diff. Equa. Vol 7-12*, pages 1513–1532, 2002.
- [47] S. BLUNCK and P. KUNSTMANN. Calderón-Zygmund theory for non-integral operators and the  $H^\infty$ -calculus. *Rev. Mat. Iber.* 19 no.3, pages 919–942, 2003.

- [48] S. BU and C. Le MERDY.  $H^p$ -maximal regularity and operator valued multipliers on Hardy spaces. *preprint*, 2006.
- [49] P. CANNARSA and V. VESPRI. On maximal  $L^p$  regularity for the abstract Cauchy problem. *Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 5 no.1*, pages 165–175, 1986.
- [50] D.C. CHANG, S.G. KRANTZ, and E.M. STEIN.  $H^p$  theory on a smooth domain in  $\mathbb{R}^n$  and elliptic boundary value problems. *J. Funct. Anal. 114 no.2*, pages 286–347, 1993.
- [51] M. CHRIST. A  $T(b)$ -theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Coll. Math., 61*, pages 601–628, 1990.
- [52] R. COIFMAN and G. WEISS. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc. 83*, pages 569–645, 1977.
- [53] T. COULHON and X.T. DUONG. Riesz transforms for  $1 \leq p \leq 2$ . *Trans. Amer. Math. Soc. 351, no.2*, pages 1151–1169, 1999.
- [54] T. COULHON and X.T. DUONG. Maximal regularity and kernel bounds : observations on a theorem by Hieber and Prüss. *Adv. Differential Equations 5 no.1-3*, pages 343–368, 2000.
- [55] T. COULHON and D. LAMBERTON. Régularité  $L^p$  pour les équations d'évolution. *Publ. Math. Univ. Paris VII, 26, Univ. Paris VII, Paris*, pages 155–165, 1986.
- [56] L. de SIMON. Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine. *ARend. Sem. Mat. Univ. Padova 34*, pages 205–223, 1964.
- [57] X.T. DUONG and L. YAN. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. *Journ. Amer. Math. Soc. 18, no.4*, pages 943–973, 2005.
- [58] X.T. DUONG and L. YAN. New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, Interplation and Applications. *Comm. on Pures and Appl. Math. 58, no.10*, pages 1375–1420, 2005.
- [59] J. DZIUBAŃSKI. Atomic decomposition of  $H^p$  spaces associated with some Schrödinger operators. *Indiana Univ. Math. J. 47*, pages 75–98, 1998.
- [60] J. DZIUBAŃSKI. Spectral multipliers for Hardy spaces associated with Schrödinger operators with polynomial potentials. *Bull. Lon. Math. Soc. 32*, pages 571–581, 2000.
- [61] J. DZIUBAŃSKI. Note on  $H^1$  spaces related to degenerate Schrödinger operators. *Ill. Jour. Math. 49, no.4*, 2005.
- [62] J. DZIUBAŃSKI and J. ZIENKIEWICZ. Hardy spaces  $H^1$  for Schrödinger operators with compactly supported potentials. *Annali di Math. 184*, pages 315–326, 2005.
- [63] C. FEFFERMAN and E.M. STEIN.  $H^p$  spaces of several variables. *Acta Math. 129*, pages 137–193, 1971.

- [64] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN. Hardy spaces on homogeneous groups. *Mathematical Notes*, 28. Princeton University Press, Princeton, 1982.
- [65] J. GARCIA-CUERVA and J.L. RUBIO de FRANCIA. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. North-Holland mathematics studies, Amsterdam, 1985.
- [66] L. GRAFAKOS. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Education, 2004.
- [67] A. GRIGOR'YAN. The heat equation on noncompact Riemannian manifolds. (russian). *Mat. Sb.* 182 no.1, pages 55–87, 1991.
- [68] S. GUERRE-DELABRIÈRE.  $L^p$ -regularity of the Cauchy problem and the geometry of Banach spaces. *Illinois J. Math.* 39 no.4, pages 556–566, 1995.
- [69] M. HIEBER and J. PRÜSS. Heat kernels and maximal  $L^p$ - $L^q$  estimates for parabolic evolution equations. *Comm. Partial Differential Equations* 22 nO.9-10, pages 1647–1669, 1997.
- [70] S. HOFMANN and S. MAYBORODA. Hardy and BMO spaces associated to divergence form elliptic operators. *preprint*, 2007.
- [71] P. KUNSTMANN and L. WEIS. Maximal  $L^p$ -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and  $H^\infty$ -functional calculus. *Lecture Notes in Math.* 1855, pages 65–311, 2004.
- [72] D. LAMBERTON. Équations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces  $L^p$ . *Jour. Funct. Anal.* 72 no.2, pages 252–262, 1987.
- [73] J.M. MARTELL. Desigualdades con pesos en el Analysis de Fourier : de los espacios de tipo homogéneo a las medidas no doblantes. *Ph.D. Thesis*, Universidad Autónoma de Madrid, 2001.
- [74] E. RUSS.  $H^1 - L^1$  boundedness of Riesz transforms on Riemannian manifolds and on graphs. *Pot. Anal.* 14, pages 301–330, 2001.
- [75] L. SALOFF-COSTE. Parabolic Harnack inequality for divergence-form second-order differential operators. *Potential Anal.* 4 no.4, pages 429–467, 1995.
- [76] E.M. STEIN. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press, 1970.
- [77] E.M. STEIN. *Harmonic analysis : Real variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Univ. Press, 1993.
- [78] D.W. STROOCK and S.R.S. VARADHAN. *Multidimensional processes*. Springer-Verlag, 1979.
- [79] N.Th. VAROPOULOS. Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 304 no.17, pages 519–521, 1987.
- [80] N.Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, and T. COULHON. Analysis and geometry on groups. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 100, 1992.



- [81] L. WEISS. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal  $L^p$ -regularity. *Math. Ann.* 319, pages 735–758, 2001.



## Résumé :

Les travaux présentés dans cette thèse concernent deux problèmes indépendants, dont chacun fait appel à des outils et des idées de nature différente.

La première partie est constituée de 4 chapitres, on y étudie principalement les continuités de certains opérateurs bilinéaires sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Le premier chapitre traite des paraproduits classiques. Nous proposons ici une preuve originale (basée sur une analyse temps-fréquence) permettant de retrouver les continuités des paraproduits, vus comme opérateurs bilinéaires, sur les espaces de Lebesgue. Nous nous intéressons tout particulièrement à obtenir des estimations uniformes selon le déphasage. Puis nous étendons ces résultats de continuité à des opérateurs bilinéaires, en les décomposant à l'aide des paraproduits. Les opérateurs étudiés par cette méthode correspondent à ceux dont le symbole, défini sur le plan fréquentiel, est singulier en un point.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons une analyse temps-fréquence plus fine pour étudier des opérateurs bilinéaires plus singuliers que les précédents. Nous supposons maintenant que le symbole est singulier sur toute une droite du plan fréquentiel. Ces opérateurs (dont le prototype est la transformée de Hilbert bilinéaire) possèdent une invariance par modulation et leur étude est plus complexe que la précédente. Nous commençons alors par montrer une estimation locale pour ces opérateurs, en supposant une invariance par translation supplémentaire. Cette estimation locale permet de jouer le rôle d'estimations ponctuelles sur le noyau de l'opérateur. Nous utiliserons cette idée pour étendre les résultats de continuité aux opérateurs plus généraux n'ayant plus cette invariance par translation. Nous définirons alors des classes de symboles bilinéaires et commencerons à étudier les bases d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire en décrivant l'action de la dualité et de la composition sur ces différents opérateurs.

Nous finirons cette première partie par deux chapitres qui posent et laissent des questions ouvertes. Le premier est basé sur quelques remarques géométriques au sujet de ces opérateurs bilinéaires. Puis nous développerons quelques résultats divers dans plusieurs directions.

La seconde partie est constituée d'un chapitre et d'une annexe. Nous nous intéressons au développement d'une théorie "abstraite" sur les espaces de Hardy. De nombreux espaces de Hardy sont déjà connus et ont été étudiés. Nous décrivons ici une manière formelle d'obtenir des espaces de Hardy  $H^1$ . Puis nous essayons d'obtenir les conditions les plus larges pour conserver les propriétés essentielles de ces espaces : un critère simple pour obtenir la continuité  $H^1 - L^1$  d'un opérateur et l'étude des espaces intermédiaires obtenus par interpolation entre  $H^1$  et les espaces de Lebesgue. Nous finissons le chapitre en donnant un exemple d'application. Nous retrouvons alors des résultats de régularité maximale sur les espaces de Lebesgue pour le problème de Cauchy associé à une équation d'évolution.

L'annexe est un travail supplémentaire qui complète l'étude du problème de régularité maximale sur les espaces de Hardy.