Deux aspects de la géométrie du revêtement universel d'une variété kählérienne compacte

Benoît CLAUDON

Institut Élie Cartan, Nancy

Nancy, 6 décembre 2007

Plan :

Cas des courbes

C	$g(C)$	$\widetilde{C}$	$\gamma d(C)$
$\mathbb{P}^1$	0	$\mathbb{P}^1$	0
E elliptique	1	$\mathbb{C}$	1
C hyperbolique	$g \geq 2$	$\mathbb{D}$	1

Tab.: Cas des courbes

Cas des surfaces

$\kappa(S)$	$q(S)$	Structure de S	$\gamma d(S)$
$-\infty$	0	rationnelle	0
$-\infty$	>0	réglée sur une courbe de genre $g \geq 1$	1
0	0	Enriques-$K3$	0
0	1,2	bielliptique ou tore	2
1	$\neq 1 + p_g(S)$	proprement elliptique	0,1
1	$= 1 + p_g(S)$	proprement elliptique	0,1 ou 2
2	≥ 0	type général	0,1 ou 2

Tab.: Cas des surfaces

Γ-réduction en dimension 3 I

Théorème (énoncé conditionnel)

Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3. La Γ-réduction de X est alors donnée, à revêtement étale fini et transformation birationnelle près, par la liste suivante :

1. *si $\gamma d(X) \leq 1$, on a : $\gamma_X \cong \alpha s_X$.*
2. *si $\gamma d(X) = 2$ et si γ_X n'est pas de type général au sens des multiplicités classiques, on a également $\gamma_X \cong \alpha s_X$*
   (si la base $\Gamma(X)$ de la Γ-réduction n'est pas une surface rationnelle, la conclusion $\gamma_X \cong \alpha s_X$ est vérifiée inconditionnellement).

Γ-réduction en dimension 3 II

Théorème (suite)

3 *si* $\gamma d(X) = 2$ *et si* γ_X *est de type général (au sens classique et a fortiori au sens des multiplicités inf), alors :*

(i) *si* $\kappa(X) = 3$*, il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* X *telle que les fibres de* γ_X *sont des courbes de genre majoré par* $C\mathrm{Vol}(X)$ *;*

(ii) *si* $\kappa(X) = 2$*,* $\gamma_X \cong J_X$ *;*

(iii) *si* $\kappa(X) = 2$ *et si* X *n'est pas projective,* $\gamma_X \cong J_X \cong a_X$ *;*

(iv) *si* $\kappa(X) < 2$*, alors* $\kappa(X) = -\infty$ *et* $\gamma_X \cong r_X$ *(en particulier* X *est uniréglée) ;*

4 *si* $\gamma d(X) = 3$ *(dans ce cas* $\gamma_X = id_X$*), alors* $\kappa(X) \geq 0$ *et* $J_X : X \longrightarrow J(X)$ *est une submersion en tores sur* $J(X)$ *de type général et de type* π_1*-général.*

Plan :

Invariance pour les familles non de type général

Théorème

Soit $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille de variétés kählériennes compactes de dimension 3 dont la fibre centrale $X = \mathcal{X}_0$ vérifie :

$$\kappa(X) \leq 2.$$

La Γ-dimension est alors constante au cours de la déformation :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X).$$

Cas des familles de type général

Théorème (énoncé conditionnel)

Soit $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective de type général (de dimension relative 3) dont la fibre centrale $X = \mathcal{X}_0$ vérifie :

$$\gamma d(X) = 3.$$

Les fibres voisines sont alors également de type π_1-général :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X) = 3$$

(quitte à restreindre le disque $\mathbb{D}$).

Plan :

1. Γ-réduction des variétés kählériennes
2. Déformation et Γ-dimension
3. Formes pluricanoniques L^2 et Γ-réduction
4. Invariance des plurigenres L^2

Extension pour les fibrés *grands*

Proposition

Soit X une variété projective de revêtement universel $\widetilde{X}$ et soit Z la fibre générale de l'application $\gamma_{\widetilde{X}}$. Soit également (L,h) un fibré en droites sur X muni d'une métrique singulière dont la courbure vérifie :

$$i\Theta_h(L) \geq \epsilon\omega \quad (\epsilon > 0).$$

Alors toute section $s \in H^0(Z, (K_Z + \tilde{L}_{|Z}) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h}))$ s'étend à $\widetilde{X}$:

$$\exists\, \sigma \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} + \tilde{L}), \quad \sigma_{|Z} = s.$$

La section σ est de plus L^2 par rapport à $\tilde{h}$:

$$\sigma \in H^0(\widetilde{X}, (K_{\widetilde{X}} + \tilde{L}) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h})).$$

Cas $m = 1$: l'exemple de Green-Lazarsfeld

Soit $C \longrightarrow E$ un revêtement double d'une courbe elliptique par une courbe C de genre au moins 2. On désigne par $\imath$ l'involution échangeant les deux feuillets. Soit X une désingularisation du quotient :

$$Y = C \times C \times C / \imath \times \imath \times \imath.$$

Cette variété est bien de type général, son application d'Albanese

$$\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X) = E \times E \times E$$

est surjective et génériquement finie et on a également :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 0.$$

Tout ceci implique :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) = 0.$$

Plan :

Intégrabilité des formes pluricanoniques

Lemme

Soit s une section de $mK_{\tilde{X}}$ telle que :

$$\int_{\tilde{X}} (s \wedge \overline{s})^{1/m} < +\infty.$$

Elle est alors L^2 pour toute métrique périodique $\tilde{\omega}$.
Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de (X, ω) telle que :

$$\int_{\tilde{X}} |s|^2 \, dV_{\tilde{\omega}} \leq C \int_{\tilde{X}} (s \wedge \overline{s})^{1/m}.$$

Questions et prolongements

1. Etude du sous-espace :

$$E_m = \left\{ s \middle| \int_{\widetilde{X}} (s \wedge \bar{s})^{1/m} < +\infty \right\} \subset H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}),$$

2. Si $G = \pi_1(X)$, les nombres $\dim_G(E_m) \leq h^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}})$ constituent-ils de nouveaux invariants de X ? En quoi sont-ils reliés aux invariants classiques ?
3. Version numérique de l'invariance des plurigenres (cas non de type général) ? Intégralité des plurigenres L^2 ?