

Quelques problèmes d'homogénéisation à faible et fort contraste

D. Manceau

06 Décembre 2007

Problème :

Déterminer la loi de comportement d'un composite fortement hétérogène.

→ On obtient, en gommant les hétérogénéités, un matériau homogénéisé (ou effectif) de loi de comportement équivalente.

Procédé :

On considère le composite à l'échelle microscopique (microstructure) puis on étudie son comportement asymptotique lorsque la taille ε des hétérogénéités tend vers 0.

- A_ε : loi de comportement du composite à l'échelle microscopique,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: ouvert borné régulier,
- f : terme de source.

Soit u_ε la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P(A_\varepsilon))$$

Problème : Est-ce que u_ε vérifie $u_\varepsilon \rightharpoonup u_*$ où u_* est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_* \nabla u_*) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P(A_*))$$

A_* : loi de comportement homogénéisée.

Si $A_\varepsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$, i.e. $A_\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ et $A_\varepsilon(x)^{-1}\xi \cdot \xi \geq \beta^{-1}|\xi|^2$, on a l'existence de A_* par H -convergence.

Homogénéisation à faible contraste

Homogénéisation à faible contraste

→ **Présence d'un faible contraste dans le matériau initial :**

Homogénéisation à faible contraste

→ **Présence d'un faible contraste dans le matériau initial :**

- perturbation par un petit paramètre,
- mélange des deux phases faiblement contrastées
(Tartar 1991 - homogénéisation en petites amplitudes).

i.e. Loi de comportement $A_\varepsilon := A_\varepsilon(\delta) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ où δ petit paramètre.

⇒ Développement asymptotique de A_* en fonction de δ .

Homogénéisation à faible contraste

→ **Présence d'un faible contraste dans le matériau initial :**

- perturbation par un petit paramètre,
- mélange des deux phases faiblement contrastées
(Tartar 1991 - homogénéisation en petites amplitudes).

i.e. Loi de comportement $A_\varepsilon := A_\varepsilon(\delta) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ où δ petit paramètre.

⇒ Développement asymptotique de A_* en fonction de δ .

Homogénéisation à fort contraste

Homogénéisation à faible contraste

→ **Présence d'un faible contraste dans le matériau initial :**

- perturbation par un petit paramètre,
- mélange des deux phases faiblement contrastées
(Tartar 1991 - homogénéisation en petites amplitudes).

i.e. Loi de comportement $A_\varepsilon := A_\varepsilon(\delta) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ où δ petit paramètre.

⇒ Développement asymptotique de A_* en fonction de δ .

Homogénéisation à fort contraste

→ **Problèmes dégénérés :**

Homogénéisation à faible contraste

→ **Présence d'un faible contraste dans le matériau initial :**

- perturbation par un petit paramètre,
- mélange des deux phases faiblement contrastées (Tartar 1991 - homogénéisation en petites amplitudes).

i.e. Loi de comportement $A_\varepsilon := A_\varepsilon(\delta) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ où δ petit paramètre.

⇒ Développement asymptotique de A_* en fonction de δ .

Homogénéisation à fort contraste

→ **Problèmes dégénérés :**

- présence d'une phase fortement conductrice (cas d'une suite A_ε non uniformément bornée),
- présence d'une phase faiblement conductrice (cas d'une suite A_ε non équi-coercive).

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)
- 2 Homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste (avec M. Briane, soumis)

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)
- 2 Homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste (avec M. Briane, soumis)
- 3 Homogénéisation de matériaux fibrés non périodiques à faible contraste (accepté et à paraître dans M2AN)

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)
- 2 Homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste (avec M. Briane, soumis)
- 3 Homogénéisation de matériaux fibrés non périodiques à faible contraste (accepté et à paraître dans M2AN)

- Charges en mouvement dans un conducteur
- Application d'un champ magnétique h faible \perp au conducteur

\Rightarrow Champ électrique transverse \perp au courant.

- Charges en mouvement dans un conducteur
- Application d'un champ magnétique h faible \perp au conducteur

\Rightarrow Champ électrique transverse \perp au courant.

Conséquence : en dimension 2 pour un conducteur de résistivité symétrique $\rho = \sigma^{-1}$ (inverse de la conductivité σ), l'effet Hall induit une résistivité perturbée

$$\rho(h) = \rho + rhJ + o(h),$$

où J est la matrice de rotation de 90° .

- Charges en mouvement dans un conducteur
- Application d'un champ magnétique h faible \perp au conducteur

\Rightarrow Champ électrique transverse \perp au courant.

Conséquence : en dimension 2 pour un conducteur de résistivité symétrique $\rho = \sigma^{-1}$ (inverse de la conductivité σ), l'effet Hall induit une résistivité perturbée

$$\rho(h) = \rho + rhJ + o(h),$$

où J est la matrice de rotation de 90° .

Définition

La quantité r est appelée le *coefficient de Hall* du conducteur.

- Charges en mouvement dans un conducteur
- Application d'un champ magnétique h faible \perp au conducteur

\Rightarrow Champ électrique transverse \perp au courant.

Conséquence : en dimension 2 pour un conducteur de résistivité symétrique $\rho = \sigma^{-1}$ (inverse de la conductivité σ), l'effet Hall induit une résistivité perturbée

$$\rho(h) = \rho + rhJ + o(h),$$

où J est la matrice de rotation de 90° .

Définition

La quantité r est appelée le **coefficient de Hall** du conducteur.

Soit $\sigma^\varepsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ symétriques. Le champ h induit une résistivité perturbée

$$\rho^\varepsilon(h) = (\sigma^\varepsilon(h))^{-1} = \rho^\varepsilon + r_\varepsilon hJ + o(h) \quad \text{où} \quad \rho^\varepsilon := (\sigma^\varepsilon)^{-1}.$$

Problème : Déterminer le coefficient de Hall effectif associé.

On suppose $|\sigma^\varepsilon(h) - \sigma^\varepsilon(k)| \leq c|h - k|$.

D'après Colombini & Spagnolo (1977), il existe $\sigma^*(h) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$\sigma^\varepsilon(h) \xrightarrow{H} \sigma^*(h) := \sigma^* + h \sigma^*_1 + o(h) \quad \text{où} \quad \sigma^* = \sigma^*(0).$$

On suppose $|\sigma^\varepsilon(h) - \sigma^\varepsilon(k)| \leq c|h - k|$.

D'après Colombini & Spagnolo (1977), il existe $\sigma^*(h) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$\sigma^\varepsilon(h) \xrightarrow{H} \sigma^*(h) := \sigma^* + h \sigma^*_1 + o(h) \quad \text{où} \quad \sigma^* = \sigma^*(0).$$

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

On a

$$\rho^*(h) := (\sigma^*(h))^{-1} = \rho^*(0) + r_* h J + o(h),$$

où le coefficient de Hall effectif r_* est donné par

$$\det(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon) r_\varepsilon \longrightarrow \det(\sigma^*) r_* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec $P^\varepsilon := DU^\varepsilon$ le correcteur associé à σ^ε défini par

$$\begin{cases} \operatorname{Div}(\sigma^\varepsilon DU^\varepsilon) &= \operatorname{Div}(\sigma^*) & \text{dans } \Omega, \\ U^\varepsilon(x) &= x & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On suppose $|\sigma^\varepsilon(h) - \sigma^\varepsilon(k)| \leq c|h - k|$.

D'après Colombini & Spagnolo (1977), il existe $\sigma^*(h) \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$\sigma^\varepsilon(h) \xrightarrow{H} \sigma^*(h) := \sigma^* + h \sigma^*_1 + o(h) \quad \text{où} \quad \sigma^* = \sigma^*(0).$$

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

$$\rho^*(h) := (\sigma^*(h))^{-1} = \rho^*(0) + r_* h J + o(h),$$

où le coefficient de Hall effectif r_* est donné par

$$\det(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon) r_\varepsilon \longrightarrow \det(\sigma^*) r_* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec $P^\varepsilon := DU^\varepsilon$ le correcteur associé à σ^ε .

Remarque

Généralisation du résultat de Bergman (1983) pour le cas périodique.

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

Supposons que r_1, r_2 sont deux fonctions continues telles que $r_1 \leq r_\epsilon \leq r_2$ p.p. dans Ω . Alors $r_1 \leq r_* \leq r_2$ p.p. dans Ω .

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

Supposons que r_1, r_2 sont deux fonctions continues telles que $r_1 \leq r_\epsilon \leq r_2$ p.p. dans Ω . Alors $r_1 \leq r_* \leq r_2$ p.p. dans Ω .

Remarque

En 3d, Briane et Milton ont montré que ce résultat est faux en général.

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

Supposons que r_1, r_2 sont deux fonctions continues telles que $r_1 \leq r_\varepsilon \leq r_2$ p.p. dans Ω . Alors $r_1 \leq r_* \leq r_2$ p.p. dans Ω .

Remarque

En $3d$, Briane et Milton ont montré que ce résultat est faux en général.

La preuve repose sur la combinaison suivante :

- toute H -limite comme $\sigma_*(h)$ s'écrit comme limite simple de H -limites périodiques (Raitums 2001),
- d'après Alessandrini & Nesi (2001), en $2d$ le déterminant d'un correcteur périodique est strictement positif p.p. dans \mathbb{R}^2 .

On a

$$\sigma^\varepsilon(h, x) = \sigma\left(h, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{avec } \sigma(h, \cdot) \text{ } Y\text{-périodique,}$$

alors $\sigma^\varepsilon(h)$ H -converge vers $\sigma^*(h)$ donnée par

$$\sigma^*(h) = \int_Y \sigma(h, y) DW(h, y) dy,$$

où $W \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)^2$ est solution de

$$\begin{cases} \operatorname{Div}(\sigma(h, y) DW(h, y)) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ y \mapsto W(h, y) - y & Y\text{-périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Alors $DW(0, \frac{x}{\varepsilon})$ est le correcteur associé à $\sigma^\varepsilon(0)$ et donc

$$\det(\sigma^\varepsilon(0) DW(0, \frac{x}{\varepsilon})) r_\varepsilon \longrightarrow \det(\sigma^*(0)) r_* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Or, par périodicité, on a la convergence $L^1(\Omega)$ faible

$$\det(\sigma^\varepsilon(0)DW(0, \frac{x}{\varepsilon})) r_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y r(y) \det(\sigma(0, y)DW(0, y)) dy,$$

donc

$$\det(\sigma^*(0)) r_* = \int_Y r(y) \det(\sigma(0, y)DW(0, y)) dy.$$

Continuité de $r_1, r_2 \Rightarrow$ on peut supposer r_1, r_2 constantes.

On a $\sigma > 0$ et, d'après Alessandrini-Nesi (2001), $\det(DW) > 0$ donc

$$\begin{aligned} \det(\sigma^*(0)) r_* &\leq r_2 \int_Y \det(\sigma(0, y)DW(0, y)) dy \\ &= \det(\sigma^*(0)) r_2, \end{aligned}$$

car \det est quasi-affine et $\sigma(0, y)DW(0, y)$ à divergence nulle. \square

Formules explicites

11/34

→ Milton (1988) : composites isotropes à deux phases.

Formules explicites

→ Milton (1988) : composites isotropes à deux phases.

→ Briane, Milton & D.M. : composites anisotropes à deux phases interchangeables.

Formules explicites

→ Milton (1988) : composites isotropes à deux phases.

→ Briane, Milton & D.M. : composites anisotropes à deux phases interchangeables.

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ définies positives.

Définition

Un composite est dit à phases A, B *interchangeables* si $\chi_\varepsilon A + (1 - \chi_\varepsilon)B$ et $\chi_\varepsilon B + (1 - \chi_\varepsilon)A$ H -convergent vers la même limite.

Formules explicites

→ Milton (1988) : composites isotropes à deux phases.

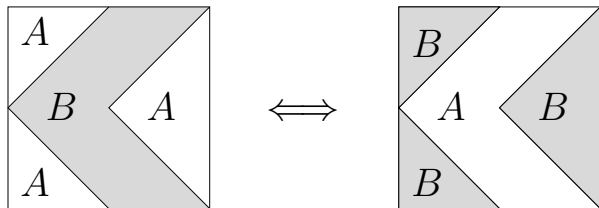
→ Briane, Milton & D.M. : composites anisotropes à deux phases interchangeables.

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ définies positives.

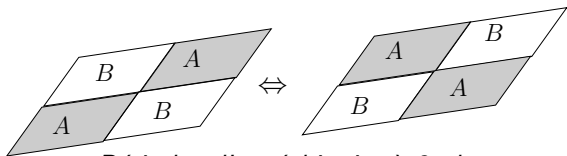
Définition

Un composite est dit à phases A, B *interchangeables* si $\chi_\varepsilon A + (1 - \chi_\varepsilon)B$ et $\chi_\varepsilon B + (1 - \chi_\varepsilon)A$ H -convergent vers la même limite.

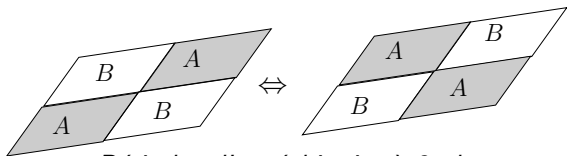
Exemple :



Matériau périodique à 2 phases avec une structure en chevrons.



Périodes d'un échiquier à 2 phases.



Périodes d'un échiquier à 2 phases.

Théorème (Briane, Milton, D.M.)

On considère un matériau à deux phases interchangeables ayant pour conductivité

$$\sigma^\varepsilon := \chi_\varepsilon \sigma + (1 - \chi_\varepsilon) \lambda \sigma, \quad \text{où } \sigma \in \mathbb{R}_s^{2 \times 2}, \sigma > 0 \text{ et } \lambda > 0,$$

et pour coefficient de Hall $r_\varepsilon := r_1 \chi_\varepsilon + r_2 (1 - \chi_\varepsilon)$, avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Alors le coefficient de Hall homogénéisé r_ est donné par*

$$r_* = \frac{\lambda r_2 + r_1}{1 + \lambda},$$

qui illustre la propriété de positivité.

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)
- 2 Homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste (avec M. Briane, soumis)
- 3 Homogénéisation de matériaux fibrés non périodiques à faible contraste (accepté et à paraître dans M2AN)

On considère Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 tel que $|\partial\Omega| = 0$.
 Soit A_ε une suite de $M(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon; \Omega)$.

Définition

- ① On dit que A_ε $H(\mathcal{M}(\Omega)^2)$ -converge vers A_* dans $M(\alpha, \beta; \Omega)$ si, pour toute $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution u_ε de $P(A_\varepsilon)$ vérifie les convergences

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_* \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A_* \nabla u_* \quad \mathcal{M}(\Omega)^2 \text{ faible}^*,$$
 où u_* est la solution de $P(A_*)$.
- ② On dit que A_ε $H(L^2(\Omega)^2)$ -converge vers A_* dans $M(\alpha, \beta; \Omega)$ si pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, la solution u_ε de $P(A_\varepsilon)$ vérifie les convergences

$$u_\varepsilon \rightarrow u_* \quad L^2(\Omega) \text{ fort} \quad \text{et} \quad A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A_* \nabla u_* \quad L^2(\Omega)^2 \text{ faible},$$
 où u_* est la solution de $P(A_*)$.

On obtient tout d'abord un raffinement d'un résultat de compacité de Briane & Casado-Díaz (2006) :

On obtient tout d'abord un raffinement d'un résultat de compacité de Briane & Casado-Díaz (2006) :

Théorème (Briane, D.M.)

Soit $A_\varepsilon = A_\varepsilon^s + a_\varepsilon J$ une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ pour laquelle il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} |A_\varepsilon^s| \rightharpoonup a \quad \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ faible } *. \quad (1)$$

On obtient tout d'abord un raffinement d'un résultat de compacité de Briane & Casado-Díaz (2006) :

Théorème (Briane, D.M.)

Soit $A_\varepsilon = A_\varepsilon^s + a_\varepsilon J$ une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ pour laquelle il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} |A_\varepsilon^s| \rightharpoonup a \quad \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ faible } *. \quad (1)$$

Alors, à une sous-suite près, $A_\varepsilon \xrightarrow{H(\mathcal{M}(\Omega)^2)} A_*$, où $A_* \in M(\alpha, \beta; \Omega)$, avec $\beta = 2 \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Théorème (Briane, D.M.)

Soit A_ε une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ telle que la convergence (1) a lieu.

Théorème (Briane, D.M.)

Soit A_ε une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ telle que la convergence (1) a lieu. S'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} A_\varepsilon^s \leq C_0 A_\varepsilon A_\varepsilon^T \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (2)$$

Théorème (Briane, D.M.)

Soit A_ε une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ telle que la convergence (1) a lieu. S'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} A_\varepsilon^s \leq C_0 A_\varepsilon A_\varepsilon^T \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (2)$$

alors on a

$$\frac{A_\varepsilon^T}{\det(A_\varepsilon)} \xrightarrow{H(L^2(\Omega)^2)} \frac{A_*^T}{\det(A_*)}.$$

Théorème (Briane, D.M.)

Soit A_ε une suite de $M(\alpha, \beta_\varepsilon; \Omega)$ avec $\beta_\varepsilon \geq \alpha$ telle que la convergence (1) a lieu. S'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} A_\varepsilon^s \leq C_0 A_\varepsilon A_\varepsilon^T \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (2)$$

alors on a

$$\frac{A_\varepsilon^T}{\det(A_\varepsilon)} \xrightarrow{H(L^2(\Omega)^2)} \frac{A_*^T}{\det(A_*)}.$$

Remarque

La condition (2) a lieu si A_ε est symétrique ou encore si $A_\varepsilon := c_\varepsilon I + a_\varepsilon J$.

Corollaire (Briane, D.M.)

Soit B_ε une suite de $M(\alpha_\varepsilon, \beta; \Omega)$ avec $\alpha_\varepsilon \leq \beta$.

Corollaire (Briane, D.M.)

Soit B_ε une suite de $M(\alpha_\varepsilon, \beta; \Omega)$ avec $\alpha_\varepsilon \leq \beta$.

Supposons qu'il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$|(B_\varepsilon^s)^{-1}| \rightharpoonup a \quad \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ faible } *,$$

Corollaire (Briane, D.M.)

Soit B_ε une suite de $M(\alpha_\varepsilon, \beta; \Omega)$ avec $\alpha_\varepsilon \leq \beta$.

Supposons qu'il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$|(B_\varepsilon^s)^{-1}| \rightharpoonup a \quad \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ faible } *,$$

et une constante $C_0 > 0$ telle que

$$B_\varepsilon^T B_\varepsilon \leq C_0 B_\varepsilon^s \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Corollaire (Briane, D.M.)

Soit B_ε une suite de $M(\alpha_\varepsilon, \beta; \Omega)$ avec $\alpha_\varepsilon \leq \beta$.

Supposons qu'il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$|(B_\varepsilon^s)^{-1}| \rightharpoonup a \quad \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ faible } *,$$

et une constante $C_0 > 0$ telle que

$$B_\varepsilon^T B_\varepsilon \leq C_0 B_\varepsilon^s \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Alors, à une sous-suite près, on a

$$B_\varepsilon \xrightarrow{H(L^2(\Omega)^2)} B_*,$$

où $B_* \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ avec $\alpha := (2\|a\|_{L^\infty(\Omega)})^{-1}$.

On pose

$$A_\varepsilon := \frac{B_\varepsilon^T}{\det(B_\varepsilon)} = JB_\varepsilon^{-1}J^{-1}.$$

On a

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi = B_\varepsilon^{-1} J \xi \cdot J \xi \geq \beta^{-1} |\xi|^2,$$

et

$$|(B_\varepsilon^s)^{-1}| = \frac{\det(A_\varepsilon)}{\det(A_\varepsilon^s)} |A_\varepsilon^s| \longrightarrow a \quad \mathcal{M}(\Omega) \text{ faible } *.$$

D'après le Théorème du cas non uniformément borné, on a

$$A_\varepsilon \xrightarrow{H(\mathcal{M}(\Omega)^2)} A_* \in M(\beta^{-1}, \alpha^{-1}; \Omega),$$

avec $\alpha := (2\|a\|_{L^\infty(\Omega)})^{-1}$ et

$$B_\varepsilon = \frac{A_\varepsilon^T}{\det(A_\varepsilon)} \xrightarrow{H(L^2(\Omega)^2)} \frac{A_*^T}{\det(A_*)} \in M(\alpha, \beta; \Omega). \quad \square$$

Cas périodique

19/34

On considère une suite $A_\varepsilon(x) := A_\varepsilon^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $A_\varepsilon^\#$ Y -périodique non uniformément bornée.

Cas périodique

19/34

On considère une suite $A_\varepsilon(x) := A_\varepsilon^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $A_\varepsilon^\#$ Y -périodique non uniformément bornée.

Alors la convergence (3) est équivalente à

$$\int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\#}{\det(A_\varepsilon^\#)^s} |(A_\varepsilon^\#)^s| dy \leq c,$$

Cas périodique

On considère une suite $A_\varepsilon(x) := A_\varepsilon^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $A_\varepsilon^\#$ Y -périodique non uniformément bornée.

Alors la convergence (3) est équivalente à

$$\int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\#}{\det(A_\varepsilon^\#)^s} |(A_\varepsilon^\#)^s| dy \leq c,$$

et peut-être remplacée par la condition moins restrictive

$$\varepsilon^2 \int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\#}{\det(A_\varepsilon^\#)^s} |(A_\varepsilon^\#)^s| dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Cas périodique

On considère une suite $A_\varepsilon(x) := A_\varepsilon^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $A_\varepsilon^\#$ Y -périodique non uniformément bornée.

Alors la convergence (3) est équivalente à

$$\int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\#}{\det(A_\varepsilon^\#)^s} |(A_\varepsilon^\#)^s| dy \leq c,$$

et peut-être remplacée par la condition moins restrictive

$$\varepsilon^2 \int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\#}{\det(A_\varepsilon^\#)^s} |(A_\varepsilon^\#)^s| dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, soit A_ε^* la H -limite constante (connue explicitement) de la suite oscillante $A_\varepsilon^\#(\frac{x}{\delta})$ lorsque δ tend vers 0.

Si la suite A_ε^* converge vers A_* dans $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alors A_ε " H -converge" vers A_* .

Plan

- 1 Homogénéisation en faible champ magnétique de l'effet Hall bidimensionnel (avec M. Briane et G. Milton, accepté et à paraître dans J. Math. Ana. App.)
- 2 Homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste (avec M. Briane, soumis)
- 3 Homogénéisation de matériaux fibrés non périodiques à faible contraste (accepté et à paraître dans M2AN)

Modélisation des fibres cardiaques

21/34

→ Cylindres orientés baignant dans un milieu isotrope (collagène) avec une variation continue de l'orientation des fibres.

Modélisation des fibres cardiaques

21/34

→ Cylindres orientés baignant dans un milieu isotrope (collagène) avec une variation continue de l'orientation des fibres.

Modèle de Peskin (1989) :

$$\sigma = \sigma_m + T (\tau \otimes \tau), \quad (3)$$

avec σ_m le tenseur isotrope des contraintes du milieu, T la tension des fibres et τ la direction des fibres.

Analogie en conduction :

$$A = \alpha I_3 + \beta (\tau \otimes \tau). \quad (4)$$

Modélisation des fibres cardiaques

21/34

→ Cylindres orientés baignant dans un milieu isotrope (collagène) avec une variation continue de l'orientation des fibres.

Modèle de Peskin (1989) :

$$\sigma = \sigma_m + T (\tau \otimes \tau), \quad (3)$$

avec σ_m le tenseur isotrope des contraintes du milieu, T la tension des fibres et τ la direction des fibres.

Analogie en conduction :

$$A = \alpha I_3 + \beta (\tau \otimes \tau). \quad (4)$$

Défauts du modèle (3) :

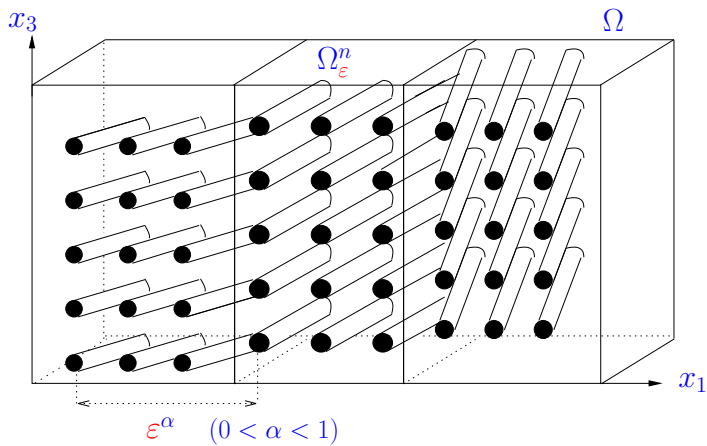
- fibres sans dimension,
- interaction fibres/milieu négligée.

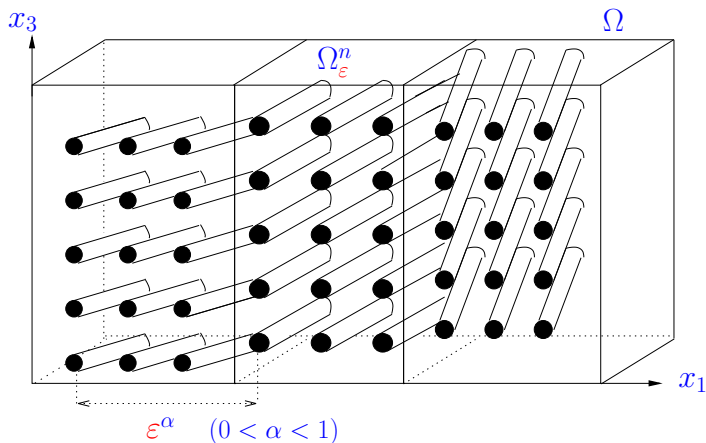
→ Homogénéisation d'une microstructure fibrée non-périodique (Briane 1991).

→ Homogénéisation d'une microstructure fibrée non-périodique (Briane 1991).

2 modèles considérés :

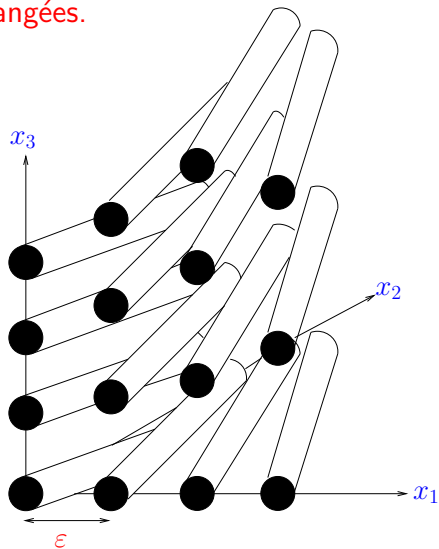
- modèle I : microstructure constituée de couches de fibres périodiques,
- modèle II : microstructure constituée de rangées de fibres périodiques.

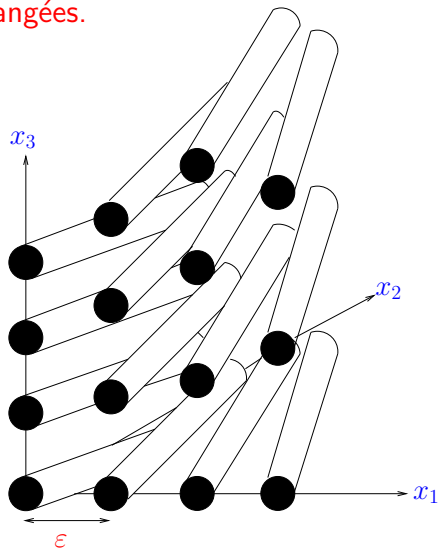




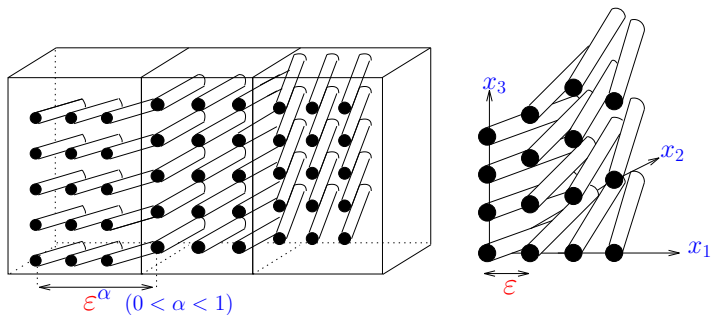
Réseau de fibres d'orientation localement constante

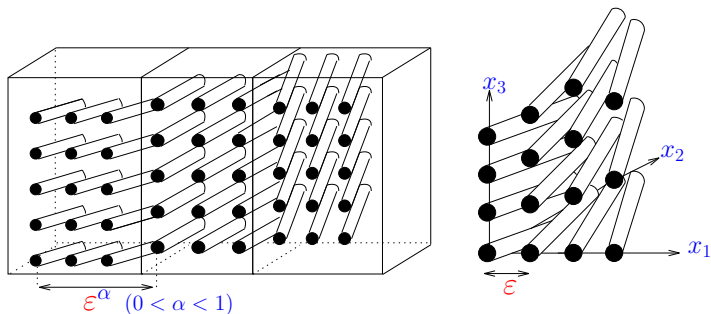
→ contradiction avec la représentation des fibres cardiaques.





Approche plus réaliste de la modélisation des fibres cardiaques (variation continue de l'orientation des fibres).





Problème :

Lois de comportement effectives non suffisamment explicites pour être comparées entre elles ou avec (3) (cas de l'élasticité) et (4) (cas de la conduction).

Homogénéisation à faible contraste

26/34

→ Concept dû à Tartar (1991) basé sur la théorie des H -mesures.

Homogénéisation à faible contraste

26/34

→ Concept dû à Tartar (1991) basé sur la théorie des H -mesures.

Définition

Soit U^ε une suite de $L^2(\mathbb{R}^N)^p$ convergeant vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)^p$ faible. Alors, à une sous-suite près, il existe une famille $\mu := (\mu_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$ telles que

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in C_0(\mathbb{R}^N), \forall \psi \in C(S^{N-1}),$$
$$\langle \mu_{ij}, \phi_1 \bar{\phi}_2 \otimes \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\phi_1 U_i^\varepsilon) \overline{\mathcal{F}(\phi_2 U_j^\varepsilon)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi.$$

La mesure matricielle μ est appelée la H -mesure associée à la suite U^ε .

→ Concept dû à Tartar (1991) basé sur la théorie des H -mesures.

Définition

Soit U^ε une suite de $L^2(\mathbb{R}^N)^p$ convergeant vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)^p$ faible. Alors, à une sous-suite près, il existe une famille $\mu := (\mu_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$ telles que

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in C_0(\mathbb{R}^N), \forall \psi \in C(S^{N-1}),$$
$$\langle \mu_{ij}, \phi_1 \bar{\phi}_2 \otimes \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\phi_1 U_i^\varepsilon) \overline{\mathcal{F}(\phi_2 U_j^\varepsilon)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi.$$

La mesure matricielle μ est appelée la H -mesure associée à la suite U^ε .

Remarque

La H -mesure μ mesure le défaut de compacité L^2 de la suite U^ε .

On pose :

$$A_{\varepsilon}^I := (a(1 - \chi_{\varepsilon}^I) + b\chi_{\varepsilon}^I) I_3 \quad \text{et} \quad A_{\varepsilon}^{II} := (a(1 - \chi_{\varepsilon}^{II}) + b\chi_{\varepsilon}^{II}) I_3,$$

où χ_{ε}^I et χ_{ε}^{II} sont les fonctions caractéristiques des modèles I et II .

On pose :

$$A_{\varepsilon}^I := (a(1 - \chi_{\varepsilon}^I) + b\chi_{\varepsilon}^I) I_3 \quad \text{et} \quad A_{\varepsilon}^{II} := (a(1 - \chi_{\varepsilon}^{II}) + b\chi_{\varepsilon}^{II}) I_3,$$

où χ_{ε}^I et χ_{ε}^{II} sont les fonctions caractéristiques des modèles I et II .

Théorème (D.M.)

Si $b = a + c\delta$ avec $c \in \mathbb{R}$, pour δ suffisamment petit, on a

$$A_{\varepsilon}^I(\delta) \xrightarrow{H} A_*^I(\delta) \quad \text{et} \quad A_{\varepsilon}^{II}(\delta) \xrightarrow{H} A_*^{II}(\delta),$$

On pose :

$$A_\varepsilon^I := (a(1 - \chi_\varepsilon^I) + b\chi_\varepsilon^I)I_3 \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^{II} := (a(1 - \chi_\varepsilon^{II}) + b\chi_\varepsilon^{II})I_3,$$

où χ_ε^I et χ_ε^{II} sont les fonctions caractéristiques des modèles I et II .

Théorème (D.M.)

Si $b = a + c\delta$ avec $c \in \mathbb{R}$, pour δ suffisamment petit, on a

$$A_\varepsilon^I(\delta) \xrightarrow{H} A_*^I(\delta) \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^{II}(\delta) \xrightarrow{H} A_*^{II}(\delta),$$

où $A_*^I(\delta)$ vérifie

$$A_*^I(\delta, x) = c_1(\delta)I_3 + c_2(\delta)(\tau(x) \otimes \tau(x)) + o(\delta^2),$$

On pose :

$$A_\varepsilon^I := (a(1 - \chi_\varepsilon^I) + b\chi_\varepsilon^I)I_3 \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^{II} := (a(1 - \chi_\varepsilon^{II}) + b\chi_\varepsilon^{II})I_3,$$

où χ_ε^I et χ_ε^{II} sont les fonctions caractéristiques des modèles I et II .

Théorème (D.M.)

Si $b = a + c\delta$ avec $c \in \mathbb{R}$, pour δ suffisamment petit, on a

$$A_\varepsilon^I(\delta) \xrightarrow{H} A_*^I(\delta) \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^{II}(\delta) \xrightarrow{H} A_*^{II}(\delta),$$

où $A_*^I(\delta)$ vérifie

$$A_*^I(\delta, x) = c_1(\delta)I_3 + c_2(\delta)(\tau(x) \otimes \tau(x)) + o(\delta^2),$$

et $A_*^{II}(\delta)$ admet pour décomposition orthogonale sur l'espace $\{\alpha I_3 + \beta(\tau \otimes \tau) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$A_*^{II}(\delta, x) = A_*^I(\delta, x) \oplus D^{II}(\delta, x) + o(\delta^2),$$

avec $D^{II}(\delta, x) = 0$ si $\gamma'(x) = 0$ (γ est l'angle des fibres).

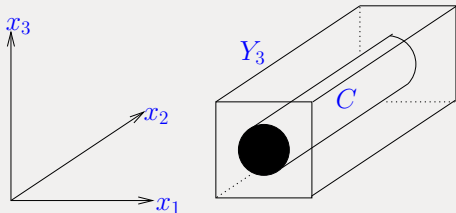
D'après Briane (1991), on a

$$A_*^I(x) = R(x)^T B_* R(x) \quad \text{avec} \quad R(x)^T e_2 = \tau(x),$$

où B_* est la H -limite constante de la suite

$$B_\varepsilon(x) := (a(1 - \chi_C^\#) + b\chi_C^\#) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) I_3,$$

avec $\chi_C^\#$ la fonction caractéristique du matériau $Y_3 :=]0, 1]^3$ périodique donné par



Soit $\chi_\varepsilon(x) := \chi_C^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ et θ la limite $L^\infty(\Omega)$ faible * de χ_ε .
D'après un résultat de Tartar (1991), on a

$$B_*(\delta) = (a + c\theta\delta)I_3 - \frac{c^2\delta^2}{a} M' + o(\delta^2),$$

où

$$\langle M'_{ij}, \phi \rangle = \langle \nu, \phi(x) \xi_i \xi_j \rangle \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

avec ν la H -mesure (mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$) associée à la suite $(\theta - \chi^\varepsilon)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Périodicité} \\ + \\ \text{Symétrie} \end{array} \right\} \Rightarrow M' = (I_3 - e_2 \otimes e_2) \frac{\text{tr}(M')}{2} = \frac{\theta(1-\theta)}{2} (I_3 - e_2 \otimes e_2),$$

d'où, puisque $A'_*(x) = R(x)^T B_* R(x)$ avec $R(x)^T e_2 = \tau(x)$,

$$A'_*(\delta, x) = (a + c\theta\delta)I_3 - \frac{c^2\delta^2}{2a} \theta(1-\theta)(I_3 - \tau(x) \otimes \tau(x)) + o(\delta^2). \quad \square$$

On pose

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\delta) := \mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{B}_\varepsilon + \delta^2 \mathbf{C}_\varepsilon + o(\delta^2),$$

où

- $\mathbf{A}_0 \in L^\infty(\Omega; \mathbf{M}_4^N)$ est coercive et continue,
- $\mathbf{B}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{B}_0$ $L^\infty(\Omega; \mathbf{M}_4^N)$ faible $*$,
- $\mathbf{C}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{C}_0$ $L^\infty(\Omega; \mathbf{M}_4^N)$ faible $*$.

On désigne par μ la H -mesure associée à la suite $(\mathbf{B}_\varepsilon - \mathbf{B}_0)$.

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}_0 isotrope de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 .

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}_0 isotrope de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 . Alors, à une sous-suite près, on a, pour δ suffisamment petit,

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\delta) \xrightarrow{H} \mathbf{A}_*(\delta) = \mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{B}_0 + \delta^2 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{M}) + o(\delta^2),$$

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}_0 isotrope de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 . Alors, à une sous-suite près, on a, pour δ suffisamment petit,

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\delta) \xrightarrow{H} \mathbf{A}_*(\delta) = \mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{B}_0 + \delta^2 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{M}) + o(\delta^2),$$

où, pour toute $\phi \in C_c(\Omega)$, les coefficients de \mathbf{M} sont donnés par

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ijkl}(x) \phi(x) dx &= \sum_{m,p,q=1}^N \left\langle \mu_{ijpq,qmkl}, \frac{\xi_m \xi_p \phi}{\mu_0} \right\rangle \\ &- \sum_{m,n,p,q=1}^N \left\langle \mu_{ijpq,mnkl}, \frac{\mu_0 + \lambda_0}{\mu_0(2\mu_0 + \lambda_0)} \xi_m \xi_n \xi_p \xi_q \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}_0 isotrope de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 . Alors, à une sous-suite près, on a, pour δ suffisamment petit,

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\delta) \xrightarrow{H} \mathbf{A}_*(\delta) = \mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{B}_0 + \delta^2 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{M}) + o(\delta^2),$$

où, pour toute $\phi \in C_c(\Omega)$, les coefficients de \mathbf{M} sont donnés par

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ijkl}(x) \phi(x) \, dx &= \sum_{m,p,q=1}^N \left\langle \mu_{ijpq,qmkl}, \frac{\xi_m \xi_p \phi}{\mu_0} \right\rangle \\ &\quad - \sum_{m,n,p,q=1}^N \left\langle \mu_{ijpq,mnkl}, \frac{\mu_0 + \lambda_0}{\mu_0(2\mu_0 + \lambda_0)} \xi_m \xi_n \xi_p \xi_q \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Remarque

Cas complètement isotrope : Tartar (1991).

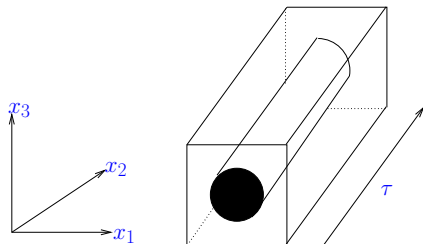
Réseau périodique de fibres d'orientation τ constante.

Réseau périodique de fibres d'orientation τ constante.

Soit χ la fonction caractéristique du réseau Y_3 -périodique de fibres de rayon $r > 0$ centrées dans Y_3 et d'orientation τ .

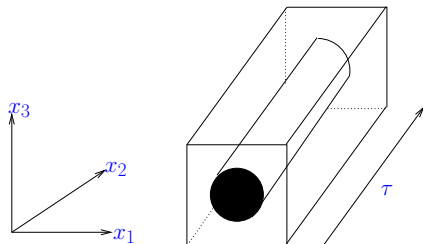
Réseau périodique de fibres d'orientation τ constante.

Soit χ la fonction caractéristique du réseau Y_3 -périodique de fibres de rayon $r > 0$ centrées dans Y_3 et d'orientation τ .



Réseau périodique de fibres d'orientation τ constante.

Soit χ la fonction caractéristique du réseau Y_3 -périodique de fibres de rayon $r > 0$ centrées dans Y_3 et d'orientation τ .



On note $\chi_\varepsilon(x) := \chi(\frac{x}{\varepsilon})$ et

$$\mathbf{A}_\varepsilon^{III} := (1 - \chi_\varepsilon)\mathbf{A}^1 + \chi_\varepsilon\mathbf{A}^2,$$

où $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2 \in \mathbf{M}_3^4$.

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}^1 isotrope et \mathbf{A}^2 donné pour toute $e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ par

$$\mathbf{A}^2(\delta)e := \mathbf{A}^1 e + \delta(e\tau \cdot \tau)(\tau \otimes \tau).$$

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}^1 isotrope et \mathbf{A}^2 donné pour toute $e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ par

$$\mathbf{A}^2(\delta)e := \mathbf{A}^1 e + \delta(e\tau \cdot \tau)(\tau \otimes \tau).$$

Alors, pour δ suffisamment petit, $\mathbf{A}_\varepsilon^{III}(\delta) \xrightarrow{H} \mathbf{A}_*^{III}(\delta)$ qui vérifie pour toute $e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$

$$\mathbf{A}_*^{III}(\delta)e = \mathbf{A}^1 e + c(\delta, \mu)(\tau \otimes \tau) + o(\delta^2),$$

où μ est la H -mesure associée à la suite $(\theta - \chi_\varepsilon)$ et $c(\delta, \mu)$ est donnée par

$$c(\delta, \mu) = \theta(e\tau \cdot \tau)\delta - \kappa(\mu, \tau) \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1(2\mu_1 + \lambda_1)} (e\tau \cdot \tau)\delta^2.$$

Théorème (D.M.)

On suppose \mathbf{A}^1 isotrope et \mathbf{A}^2 donné pour toute $e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ par

$$\mathbf{A}^2(\delta)e := \mathbf{A}^1 e + \delta(e\tau \cdot \tau)(\tau \otimes \tau).$$

Alors, pour δ suffisamment petit, $\mathbf{A}_\varepsilon^{III}(\delta) \xrightarrow{H} \mathbf{A}_*^{III}(\delta)$ qui vérifie pour toute $e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$

$$\mathbf{A}_*^{III}(\delta)e = \mathbf{A}^1 e + c(\delta, \mu)(\tau \otimes \tau) + o(\delta^2),$$

où μ est la H -mesure associée à la suite $(\theta - \chi_\varepsilon)$ et $c(\delta, \mu)$ est donnée par

$$c(\delta, \mu) = \theta(e\tau \cdot \tau)\delta - \kappa(\mu, \tau) \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1(2\mu_1 + \lambda_1)} (e\tau \cdot \tau)\delta^2.$$

Remarque

La démonstration est basée sur la formule d'homogénéisation à faible contraste en élasticité et le résultat du modèle I simplifié en conduction.

Cas de la conduction.

Cas de la conduction.

- Les modèles / par couches et // par rangées coïncident lorsque l'orientation des fibres est localement constante,
- Le modèle / valide le modèle (4) (analogue en conduction du modèle de Peskin).

Cas de la conduction.

- Les modèles / par couches et // par rangées coïncident lorsque l'orientation des fibres est localement constante,
- Le modèle / valide le modèle (4) (analogue en conduction du modèle de Peskin).

Cas de l'élasticité.

Cas de la conduction.

- Les modèles I par couches et II par rangées coïncident lorsque l'orientation des fibres est localement constante,
- Le modèle I valide le modèle (4) (analogue en conduction du modèle de Peskin).

Cas de l'élasticité.

- Les modèles I par couches et II par rangées coïncident lorsque l'orientation des fibres est localement constante,
- Les modèles I et II ne valident pas le modèle de Peskin,
- Le modèle III périodique avec perturbation anisotrope permet de valider, par homogénéisation, le modèle de Peskin.

Dualité à fort contraste en élasticité :

Dualité à fort contraste en élasticité :

Extension de résultats de

- Helsing, Milton et Movchan (1997) pour des compliances particulières,
- Francfort et Suquet (2001) en élasticité incompressible.

→ Résultats possibles de compacité du cas non équi-coercif.

Dualité à fort contraste en élasticité :

Extension de résultats de

- Helsing, Milton et Movchan (1997) pour des compliances particulières,
- Francfort et Suquet (2001) en élasticité incompressible.

→ Résultats possibles de compacité du cas non équi-coercif.

Homogénéisation à fort contraste du modèle // :

Dualité à fort contraste en élasticité :

Extension de résultats de

- Helsing, Milton et Movchan (1997) pour des compliances particulières,
- Francfort et Suquet (2001) en élasticité incompressible.

→ Résultats possibles de compacité du cas non équi-coercif.

Homogénéisation à fort contraste du modèle II :

Cas de fibres baignant dans un milieu mou.

→ Problème homogénéisé couplé avec un couplage dépendant de la dérivée de l'angle des fibres (contrairement au modèle I)