



**HAL**  
open science

# Modélisations polynomiales des signaux ECG. Application à la compression.

Daniel Tchiotso

► **To cite this version:**

Daniel Tchiotso. Modélisations polynomiales des signaux ECG. Application à la compression.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2007. Français. NNT: . tel-00197549

**HAL Id: tel-00197549**

**<https://theses.hal.science/tel-00197549>**

Submitted on 14 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

*Présentée pour l'obtention du titre de*

**Docteur de l'Institut Polytechnique de Lorraine**

Spécialité : Automatique et Traitement du Signal

*par*

**Daniel TCHIOTSOP**

# MODELISATIONS POLYNOMIALES DES SIGNAUX ECG. APPLICATIONS A LA COMPRESSION

*Soutenue publiquement le 15 novembre 2007 devant le jury :*

- Président : **Pr. René HUSSON**, CRAN – CNRS UMR 7039 INPL de Nancy
- Rapporteurs : **Pr. Georges DELAUNAY**, CReSTIC – URCA EA 3804, Université  
de Reims Champagne - Ardenne  
**Pr. Régine BOUQUIN JEANNES**, LTSI – INERM UMR 642  
Université de Renne 1
- Examineur : **M. Christian HEINRICH**, LSIIT – CNRS UMR 7005 Université  
Louis Pasteur de Strasbourg
- Directeur de thèse : **Pr. Didier WOLF**, CRAN – CNRS UMR 7039 INPL de Nancy
- Codirecteur de thèse : **Mme Valérie LOUIS-DORR**, CRAN – CNRS UMR 7039 INPL de  
Nancy

## Remerciements

Au moment où j'achève ce travail de thèse, je pense à tous ceux qui m'ont soutenu et je tiens à remercier les personnes qui m'ont accompagné.

J'adresse mes grands remerciements au Professeur Didier WOLF pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche et pour m'avoir fait profiter de son expérience de recherche à travers la direction de cette thèse. Je lui exprime aussi ma reconnaissance pour sa patience et sa compréhension. En effet, mon statut particulier d'enseignant d'IUT au Cameroun où je résidais en permanence, et mes responsabilités de chef de famille ont exigé un encadrement spécifique pour le bon déroulement de cette thèse.

Mme Valérie LOUIS-DORR a co-dirigé ce travail. Sa sollicitude a été permanente. Ses conseils et sa rigueur scientifique m'ont beaucoup guidé. Elle a déployé beaucoup d'énergie communicative en ma faveur. J'en suis conscient et je voudrais qu'elle trouve ici l'expression de ma gratitude pour tout ce qu'elle a fait pour moi.

Le Professeur René HUSSON m'a fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury, ses observations ont été d'un grand apport dans la confection du document final. Je lui en suis très reconnaissant. Je ne saurais oublier ses efforts pour améliorer ma condition financière pendant mes séjours au CRAN en France.

Je remercie les deux rapporteurs le Professeur Régine LE BOUQUIN JEANNES du Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image (LTSI-INSERM UMR 642 Rennes1) et le Professeur Georges DELAUNAY (CReSTIC – URCA EA 3804 Reims), pour avoir accepté de rapporter sur ce travail et pour la promptitude avec laquelle ils ont remis leurs rapports. Les rapporteurs ont fait des remarques pertinentes qui m'ont permis d'améliorer, d'enrichir et de préciser certains aspects du manuscrit. Ils m'ont par ailleurs réorienté sur les perspectives de mon travail.

Je remercie également Monsieur Christian HEINRICH (LSIIT CNRS UMR 7005 Strasbourg) qui a accepté d'examiner ce travail.

Je remercie l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD) et le projet COMETES (COordination et Modernisation des Etablissement Technologiques d'Enseignement Supérieur) qui ont financé mes deux séjours en France en 2003 et en 2005 respectivement. L'Université de Dschang (UDs) a apporté une contribution financière significative pour mon voyage en France en vue de la soutenance. J'exprime à cet effet ma reconnaissance aux autorités de l'UDs et en particulier à Monsieur Le Recteur de l'UDs, le

Professeur Anaclet FOMOTHE et Monsieur Le Directeur de l'IUT FOTSO Victor de Bandjoun, le Professeur Médard FOGUE.

Les moments que j'ai passés au CRAN ont été non seulement d'une excellence scientifique, mais aussi d'un réel épanouissement humain. J'ai rencontré au CRAN, des personnes sympathiques qui m'ont bien accueilli, m'ont soutenu et encouragé durant mes séjours. Je vais remercier particulièrement mon grand ami Christian DAUL, Christine PIERSON, Carole PARANT, Pierre TRICOT, Edouard YVROUD, Marjorie SCHWARTZ, Juan Manuel LOPEZ, Radu RANTA, Pierre ROUILLON, Jean-Marie MUNIER, Mathieu CAPAROS et tous les autres.

Mes premiers pas dans la recherche ont été sous la tutelle du Pr. Martin KOM à l'ENSP de Yaoundé dans le cadre mon mémoire de DEA. Monsieur KOM m'a ensuite présenté aux responsables du CRAN. Je saisis cette occasion pour lui renouveler ma reconnaissance. Mes remerciements vont également au Dr Bertin Alain TIEDEU qui m'a assisté à mes débuts. Je pense particulièrement au regretté Dr François KENFACK. J'exprime aussi mes remerciements au Dr Godpromesse KENNE, au Pr. Armand NZEUKOU et au Pr. René TCHINDA qui n'ont cessé de m'encourager. Mes collègues de l'IUT-FV de Bandjoun me sont précieux puisqu'ils m'ont généreusement et honorablement suppléé sur le plan professionnel pendant mes périodes d'absence. Je ne saurais les citer tous ici.

Mes parents et mes amis m'ont toujours soutenu dans mes études. Je les en remercie. J'ai une pensée spéciale pour mon regretté papa MANFOR Sakio, qui a su m'inculquer dès le plus jeune âge, l'amour de la connaissance et la curiosité scientifique. Pendant toutes ces années au cours desquelles j'ai préparé ma thèse, mon épouse Flore Désirée et mes enfants n'ont pas profité de l'affection que devait leur accorder l'époux ou le papa que je suis ; en même temps que je leur demande de m'en excuser, je les invite à trouver en ce travail non seulement un motif de consolation, mais aussi une raison de fierté. Je voudrais aussi remercier ma maman TANDIA Pauline, ma regrettée grand-mère MAPA Régine, mon cousin DJEUTSOP Peter, mes tantes MAFFO Marthe et MAFOUO MARGUERITE, mes sœurs MABO Valentine et MAGUITO Adéline, M. TOUSSE Daniel Demofil, mes frères et mes cousins, mes beaux-parents Mr et Mmes SEGNING Jean, mes beaux frères FOUODJI Ronsard, PENKA Remy, SOUFO Bertrand, TATSITSA Anicet et leurs épouses, Mr et Mme LADO Paul, mes deux homonymes, Mme MANFOUO Elise, la famille SAAH Jean Marie à Bondy, la famille MO TATCHOUO, mes amis TANTSI Jean-Bosco et NZOFOU Adolphe, mes amis de la NEB, mes amis de l'UDs et ceux de la HELP association, toutes ces personnes qui ont directement ou indirectement contribué à ma réussite.

# Table des matières

Remerciements .....	i
Table des matières .....	iii
Liste des figures .....	vi
Liste des tableaux .....	viii
Liste des abréviations .....	ix
Résumé .....	xi
Abstract.....	xii
INTRODUCTION GENERALE .....	1
Chapitre I : COMPRESSION DU SIGNAL ECG PAR DECOMPOSITIONS POLYNOMIALES : PROBLEMATIQUE ET ETAT L'ART .....	4
I-1 INTRODUCTION .....	4
I-2 PROBLEMATIQUE DE LA COMPRESSION DE L'ECG .....	6
I-3 ETUDE ET ANALYSE DES SIGNAUX ECG .....	8
I-3-1 Origines physiologiques .....	8
I-3-2 Les dérivations .....	11
I-3-3 Caractéristiques du signal ECG normal .....	14
I-4 OPERATIONS DE TRAITEMENT DU SIGNAL ECG.....	18
I-4-1 Détection des ondes .....	18
I-4-2 Classification des ondes.....	20
I-4-3 Filtrage .....	21
I-4-4 Extraction de l'ECG du fœtus.....	23
I-4-5 Interprétation automatique du signal ECG .....	23
I-5 ETAT DE L'ART SUR LA COMPRESSION DU SIGNAL ECG.....	26
I-5-1 Méthodes temporelles de compression de l'ECG.....	26
I-5-1-1 Principes .....	26
I-5-1-2 Méthode AZTEC.....	28
I-5-1-3 L'algorithme CORTES.....	29
I-5-1-4 Les techniques FAN et SAPA .....	30
I-5-1-5 Utilisations des fonctions Splines pour la compression du signal ECG.....	31
I-5-1-6 Compression des signaux ECG avec des polynômes quadratiques.....	33
I-5-2 Compression de l'ECG par transformation du signal.....	34
I-5-2-1 Transformation de Karhunen-Loève .....	34
I-5-2-2 Transformations sinusoïdales.....	37
I-5-2-3 Transformations quasi spectrales.....	38
I-5-2-4 Transformations en ondelettes.....	40
I-5-2-5 Compression du signal ECG par transformations polynomiales.....	44
I-6 CONCLUSION .....	39
Chapitre II : ELEMENTS DE LA THEORIE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX .....	50
II-1 INTRODUCTION .....	50
II-2 CONCEPTS DES POLYNOMES ORTHOGONAUX.....	44
II-2-1 Orthogonalité des fonctions.....	44
II-2-2 Familles de polynômes orthogonaux.....	50
II-3 PROPRIETES COMMUNES AUX POLYNOMES ORTHOGONAUX .....	54
II-3-1 Equations différentielles .....	54
II-3-2 Relations de récurrence et formule de Darboux-Christoffel .....	55
II-3-3 Propriétés des zéros et de la parité de la fonction poids.....	56
II-3-4 Dérivées des polynômes orthogonaux.....	56

II-4 DEVELOPPEMENT EN SERIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX.....	57
II-4-1 Notions de séries de Fourier dans les espaces de Hilbert.....	56
II-4-2 Cas des polynômes orthogonaux.....	58
II-5 CARACTERISTIQUES DE QUELQUES POLYNOMES ORTHOGONAUX A VARIABLE CONTINUE.....	61
II-5-1 Caractéristiques des polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha,\beta)}(t)$ .....	61
II-5-2 Caractéristiques des polynômes de Laguerre.....	65
II-5-3 Principales caractéristiques des polynômes d’Hermite.....	66
II-6 CONCLUSION.....	67
Chapitre III : STRATEGIES DE MODELISATIONS POLYNOMIALES DES SIGNAUX ECG.....	70
III-1 INTRODUCTION.....	70
III-2 SIMULATION MATHEMATIQUE D’UN SIGNAL ECG THEORIQUE.....	71
III-2-1 Modèle et expression mathématique du motif.....	71
III-2-2 Valeurs numériques des amplitudes et intervalles.....	73
III-2-3 Signal fantôme bruité.....	73
III-3 SEGMENTATION DU SIGNAL ECG.....	74
III-3-1 Nécessité et principes.....	74
III-3-2 Quelques détecteurs de complexes QRS.....	75
III-3-3 Un cas de segmentation optimale.....	79
III-4 CALCUL DES COEFFICIENTS DE DECOMPOSITION.....	81
III-4-1 Expressions des coefficients avec les polynômes de Jacobi, les polynômes de Laguerre et les polynômes d’Hermite.....	81
III-4-2 Intégrations numériques : les quadratures de Gauss.....	84
II-4-2-1 Définition et principes.....	84
III-4-2-2 Les Quadratures de Gauss.....	85
III-4-3 Evaluation des polynômes orthogonaux aux nœuds d’intégration et aux abscisses lors de la reconstruction du signal.....	87
III-4-3-1 Les Approximants de Padé.....	87
III-4-3-2 Calculs directs : Méthode de Horner et approximations asymptotiques.....	89
III-5 EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS POLYNOMIALES.....	90
III-5-1 Transformation de Legendre (LeT).....	90
III-5-2 Transformation de Tchebychev (TcT).....	92
III-5-3 Transformations de Laguerre (LaT).....	95
III-5-4 Transformation d’Hermite ( HeT ).....	97
III-6 CONCLUSION.....	98
Chapitre IV : POLYNOMES ORTHOGONAUX ET LEUR UTILISATION POUR COMPRESSION DES SIGNAUX ECG.....	101
IV-1 INTRODUCTION.....	101
IV-2 EVALUATION DE LA COMPRESSION.....	102
IV-2-1 Taux de compression.....	102
IV-2-2 Mesure de la fidélité de la reconstruction.....	102
IV-2-3 La complexité d’un algorithme.....	104
IV-3 COMPRESSION DES SIGNAUX ECG AVEC LES TRANSFORMATIONS DE JACOBI.....	105

IV-3-1 Quelques polynômes Jacobi.....	105
IV-3-2 Compression du signal ECG simulé.....	106
IV-3-2-1 Représentations polynomiales des segments du signal.....	106
IV-3-2-2 Résultats de compression.....	109
IV-3-2-3 Réduction des effets de bords.....	111
IV-4-3 Compression des signaux ECG réels.....	121
IV-4 ASSOCIATION LaT-HeT POUR LA COMPRESSION DE L'ECG.....	122
IV-4-1 Principes.....	122
IV-4-2 Résultats de compression par LaT-HeT.....	126
IV-5 CONCLUSION.....	131
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	133
A) CONCLUSION GENERALE.....	133
B) PERSPECTIVES.....	134
Bibliographie.....	136
Annexes.....	146
A – Algorithme de quelques détecteurs de complexes QRS.....	146
B – Polynômes orthogonaux à variable discrète.....	151
C – Paramètres pour les transformations de Legendre.....	155
D – Communication présentée à la conférence IEEE EMBC07.....	158

## Liste des figures

Figure 1-1 : Appareil circulatoire de l'homme .....	5
Figure 1-2 : Le vecteur cardiaque. ....	8
Figure 1-3 : Circuits de conduction des excitations électriques dans le cœur .....	9
Figure 1-4 : Ondes caractéristiques d'un signal ECG normal .....	10
Figure 1-5 : Dérivations standards DI, DII, et DIII.....	12
Figure 1-6 : Connexion des électrodes pour les dérivations unipolaires.....	12
Figure 1-7 : Dérivations précordiales .....	12
Figure 1-8 : Schéma bloc d'un enregistreur d'ECG actuel .....	14
Figure 1-9 : (a) Vecteurs d'activation ventriculaire et (b) système hexaxial de Bailey.....	16
Figure 1-10 : Aspect des complexes QRS dans les dérivations précordiales.....	18
Figure 1-11 : Encombrement spectral l'ECG et de certaines ondes caractéristiques .....	21
Figure 1-12 : Effets du filtrage sur le signal ECG.....	22
Figure 1-13 : Paramètres d'intérêt pour la description d'un battement cardiaque.....	24
Figure 1-14 : Paramètres calculés dans le module d'interprétation automatique de l'ECG HP .....	25
Figure 1-15 : Principe de l'algorithme AZTEC .....	28
Figure 1-16 : Fonctionnement des algorithmes TP et CORTES.....	29
Figure 1-17: Principes des algorithmes SAPA.....	30
Figure 1-18 : Séquences d'interpolation d'un signal avec des polynômes quadratiques.....	34
Figure 1-19 : Quelques fonctions de Walsh.....	39
Figure 1-20 : Résultats de la compression avec les transformations de Walsh.....	40
Figure 1-21 : Principes de compression des signaux avec la DWT.....	42
Figure 1-22 : Procédés de transformation des signaux utilisés pour la compression de l'ECG ..	46
Figure 2-1 : Courbes pour quelques polynômes de Legendre.....	62
Figure 2-2 : Allures des polynômes de Tchebycheff .....	64
Figure 2-3 : Allures des polynômes de Laguerre. ....	66
Figure 2-4 : Polynômes et fonctions d'Hermite.....	67
Figure 3-1 : Diagramme bloc du processus complet de décomposition et de synthèse du signal ECG avec les polynômes orthogonaux .....	71
Figure 3-2 : Motif principal du signal ECG simulé .....	72
Figure 3-3 : Version bruitée du signal simulé .....	74
Figure 3-4 : Effets de la transformation en ondelettes sur les singularités d'un signal .....	76
Figure 3-5 : Décomposition en ondelettes du signal fantôme simulé pour détection des QRS	77
Figure 3-6 : Modèle simplifié du signal ECG pour servant à déterminer théoriquement le choix de la segmentation ;.....	80
Figure 3-7 : Courbes enveloppes des coefficients de Fourier pour la DLT .....	81
Figure 3-8 : Répétitions symétriques du motif $g(t)$ .....	83
Figure 3-9 : Modèles de Legendre des segments P-P et R-R de l'ECG.....	91
Figure 3-10 : Modèles de Legendre pour le segment S-S et pour un segment centré sur le complexe QRS.....	92
Figure 3-11 : Transformations de Tchebycheff du motif $g(t)$ (P-P et R-R).....	94
Figure 3-12 : Modèles de Tchebycheff du segment S-S et d'un cycle cardiaque centré sur le complexe QRS.....	95
Figure 3-13: Exemples de reconstruction des segments du signal ECG à l'aide des séries de Laguerre dans le cas le prolongement des segments est réalisé par insertion des échantillons à valeur constante nulle.....	96
Figure 3-14 : Modélisation de Laguerre des segments du signal en utilisant des répétitions périodiques de la fenêtre en traitement. ....	98

Figure 3-15 : Transformations et reconstructions des fenêtres de signal ECG à l'aide des polynômes d'Hermite. ....	98
Figure 4-1 : Allures de quelques polynômes de Jacobi. ....	106
Figure 4-2 : Représentations du segment P-P du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi. ....	107
Figure 4-3 : Représentations du segment P-P du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi : $J_{5_n}(x)$ , $J_{6_n}(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff. ....	107
Figure 4-4 : A Représentations du segment R-R du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi. ....	108
Figure 4-5 : Représentations du segment R-R du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi : $J_{5_n}(x)$ , $J_{6_n}(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff. ....	108
Figure 4-6 : Représentations d'un segment centré sur le complexe QRS avec les polynômes de Jacobi $J_{1_n}(x)$ , $J_{2_n}(x)$ , $J_{3_n}(x)$ , et $J_{4_n}(x)$ . ....	109
Figure 4-7 : Représentations d'un segments du signal centré sur le QRS avec les polynômes : $J_{5_n}(x)$ , $J_{6_n}(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff. ....	109
Figure 4-8 : Reconstruction du segment T-T bruité à travers les transformations de Jacobi TJ1, TJ2, LeT et TcT. ....	109
Figure 4-9 : Résultats de la compression par transformations de Jacobi : variation du PRD en fonction du taux de compression. ....	110
Figure 4-10 : Autres Résultats de la compression. ....	110
Figure 4-11 : Procédé de réduction des effets de Gibbs sur le signal reconstruit. ....	112
Figure 4-12 : Exemples de signaux compressés et reconstruit avec TJ1 et TJ2. ....	114
Figure 4-13 : Exemples de signaux compressés et reconstruit avec <i>LeT</i> et <i>TcT</i> . ....	114
Figure 4-14 : Cas difficiles de reconstruction des signaux avec les transformations de Jacobi. ....	119
Figure 4-15 : Reconstruction des signaux bruités et de signaux pathologiques avec les transformations de Jacobi. ....	120
Figure 4-16 : Evolution du PRD en fonction du CR quand la taille des segments varie. ....	121
Figure 4-17 : Modélisations des portions de l'ECG par la LaT et la HeT. ....	122
Figure 4-18 : Illustration de l'association de la HeT et de la LaT pour modéliser une fenêtre de signal correspondant à un cycle cardiaque. ....	124
Figure 4-19 : Diagramme bloc de l'algorithme complet de la compression de l'ECG avec la combinaison des transformations LaT et HeT. ....	125
Figure 4-20 : Exemples de compression d'un segment de signal réel. ....	126
Figure 4-21 : Variations des PRD en fonction du taux de compression (CR). ....	126
Figure 4-22 : Effets des paramètres $\sigma_L$ et $\sigma_H$ sur les variations du PRD en fonction du taux de Compression. ....	127
Figure 4-23 : Graphique en 3 dimensions de l'évolution du PRD en fonction de 2 variables : le taux de compression ( $\tau_C$ ) et le facteur d'échelle ( $\sigma_L$ ou $\sigma_H$ ) Allures de quelques polynômes de Jacobi. ....	127
Figure 4-24 : Autres exemples de compression des signaux ECG réels avec HeT-LaT. ....	129
Figure 4-25 : Erreurs de reconstruction après compression avec HeT-LaT. ....	130
Figure P-1 : Courbes des fonctions de Laguerre à support borné $l_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0.25$ . ....	135
Figure A-1 : Exemples d'encadrement des QRS à travers l'algorithme de TOMPKINS. ....	150

## Liste des tableaux

Tableau 1-1 : Critères de normalité du signal ECG .....	15
Tableau 1-2 : Résultats de compression par DWT .....	43
Tableau 1-3 : Quelques résultats sur la compression de l'ECG .....	37
Tableau 2-1 : Caractéristiques principales des polynômes de Jacobi.....	63
Tableau 3-1 : Résultats de l'algorithme de Li sur la base des données .....	78
Tableau 4-1 : Paramètres de la relation de récurrence pour les polynômes .....	107
Tableau 4-2 : Résultats de compression des signaux ECG réels de [MIT 92] avec les transformations de Jacobi .....	115
Tableau 4-3 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92] avec $\tau_c = 3,48$ .....	116
Tableau 4-4 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92] avec $\tau_c = 9,30$ .....	117
Tableau 4-5 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92] $\tau_c = 20,93$ .....	118
Tableau 4-6 : Statistiques de la compression du signal 112 .....	121
Tableau 4-7 : Résultats de compression avec <i>DLT</i> .....	128
Tableau 4-8 : Résultats de compression avec HeT-LaT .....	128
Tableau B-1 : Caractéristiques principales des polynômes de Hann et de Tchebychev.....	152
Tableau B-2 : Caractéristiques des polynômes de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier ..	154
Tableau C-1 : Zéros de quelques polynômes de Legendre et Nombres de Christoffel pour $P_{44}$ .....	156
Tableau C-2 : Coefficients des séries de Legendre $C_{n,p}$ pour différentes segmentations.....	157

## Liste des abréviations

**ÂQRS** : Axe moyen de **QRS**

**aVR, aVL, aVF** : Dérivations unipolaires

**AZTEC** : Amplitude **Z**one **T**ime **E**poche **C**oding

**CCSP** : Cardinality **C**onstrained **S**hortest **P**arth

**CORTES** : **C**oordinate **R**eduction **T**ime **E**ncoding **S**ystem

**CNRS** : Centre National de **R**echerche **S**cientifique

**CR** : Compression **R**atio

**CRAN** : Centre de **R**echerche en **A**utomatique de **N**ancy

**CReSTIC** : Centre de **R**echerche en **S**ciences et **T**echnologies de l'Information et de la **C**ommunication

**DI, DII, DIII** : Dérivations Standard (d'EINTHOVEN) de l'ECG

**DCT** : **D**iscrete **C**osine **T**ransform

**Dev. Std** : **D**éviati**o**n **S**tandard

**DFT** : **D**iscrete **F**ourier **T**ransform

**DLT** : **D**iscrete **L**egendre **T**ransform

**DWT** : **D**iscrete **W**avelet **T**ransform

**ECG** : **E**lectro**C**ardio**G**ramme

**EEG** : **E**lectro **E**ncéphalo**G**ramme

**EMG** : **E**lectro**M**yo**G**ramme

**ENSEM** : **E**cole **N**ationale **S**upérieure d'**E**lectricité et de **M**écanique

**ENSP** : **E**cole **N**ationale **S**upérieure **P**olytechnique (Yaoundé Cameroun)

**Er.Max** : **E**rreur **M**aximale

**Er.Moy** : **E**rreur **M**oyenne

**ErQ.MN** : **E**rreur **Q**uadratique **M**oyenne **N**ormalisée

**EZW** : **E**Embedded **Z**erotree **W**avelet

**FAN** : **A**lgorithme de compression de l'ECG (**E**ventail)

**FECG** : **F**etal **E**CG

**FFT** : **F**ast **F**ourier **T**ransform

**FWhT** : **F**ast **W**alsh **T**ransform

**GSM** : **G**lobal **S**ystem of **M**obile communication

**HP**: **H**ewlet **P**akard

**HeT** : **H**ermite **T**ransform

**INPL**: Institut National Polytechnique de Lorraine

**INSERM** : Institut National de la Santé Et de la Recherche Médicale

**IPS** : Ingénierie Pour la Santé

**IRM**: Imagerie à Résonance Magnétique

**IT** : Identity Transform

**IUT/FV** : Institut Universitaire de Technologie FOTSO Victor

**KLT** : Karhunen-Loève Transform

**LaT** : Laguerre Transform

**LeT** : Legendre Transform

**LSIT** : Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection.

**LTSI**: Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image

**MECG** : Mother ECG

**MPRD** : Modified PRD

**OMS** : Organisation Mondiale de la Santé

**OWZC**: Optimal Wavelet Zone Compression

**PRD** : Percent Root mean square Difference

**QRS** (Complexe): régions du signal ECG constituées des ondes **Q**, **R** et **S**

**QT** : Segment allant du début de l'onde **Q** à la fin de l'onde **T**

**RLC** : Run Length Code

**SA** (nœud) : Sino Auriculaire

**SAPA**: Scan Along Polygonal Approximation

**SOM** : Self Organizing Map (Algorithme de classification Automatique)

**SPIHT** : Set Partitioning In Hierarchical Trees

**ST** : Segment allant de la fin l'onde **S** au début de l'onde **T**

**STFT** : Short Term Fourier Transform

**TcT**: Transformation de Tchebycheff

**TJ1, TJ2, ... TJ6** : Transformations de Jacobi avec les polynômes  $J_1, J_2, \dots, J_6$

**TP** : Turning Point

**UDs** : Université de Dschang

**UMR** : Unité Mixte de Recherche

**VCG** : VectoCardioGraphie

**VQ** : Vector Quantization Framework

**WhT** : Walsh Transform

**WT** : Wavelet Transform

**WT-VQ : Wavelet Transform-Vector Quantization**

**WVD : Wigner-Ville Distribution**

## Résumé

La compression des signaux ECG trouve encore plus d'importance avec le développement de la télémédecine. En effet, la compression permet de réduire considérablement les coûts de la transmission des informations médicales à travers les canaux de télécommunication. Notre objectif dans ce travail de thèse est d'élaborer des nouvelles méthodes de compression des signaux ECG à base des polynômes orthogonaux. Pour commencer, nous avons étudié les caractéristiques des signaux ECG, ainsi que différentes opérations de traitements souvent appliquées à ce signal. Nous avons aussi décrit de façon exhaustive et comparative, les algorithmes existants de compression des signaux ECG, en insistant sur ceux à base des approximations et interpolations polynomiales. Nous avons abordé par la suite, les fondements théoriques des polynômes orthogonaux, en étudiant successivement leur nature mathématique, les nombreuses et intéressantes propriétés qu'ils disposent et aussi les caractéristiques de quelques uns de ces polynômes. La modélisation polynomiale du signal ECG consiste d'abord à segmenter ce signal en cycles cardiaques après détection des complexes QRS, ensuite, on devra décomposer dans des bases polynomiales, les fenêtres de signaux obtenues après la segmentation. Les coefficients produits par la décomposition sont utilisés pour synthétiser les segments de signaux dans la phase de reconstruction. La compression revient à utiliser un petit nombre de coefficients pour représenter un segment de signal constitué d'un grand nombre d'échantillons. Nos expérimentations ont établi que les polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermite ne conduisaient pas à une bonne reconstruction du signal ECG. Par contre, les polynômes de Legendre et les polynômes de Tchebychev ont donné des résultats intéressants. En conséquence, nous concevons notre premier algorithme de compression de l'ECG en utilisant les polynômes de Jacobi. Lorsqu'on optimise cet algorithme en supprimant les effets de bords, il dévient universel et n'est plus dédié à la compression des seuls signaux ECG. Bien qu'individuellement, ni les polynômes de Laguerre, ni les fonctions d'Hermite ne permettent une bonne modélisation des segments du signal ECG, nous avons imaginé l'association des deux systèmes de fonctions pour représenter un cycle cardiaque. Le segment de l'ECG correspondant à un cycle cardiaque est scindé en deux parties dans ce cas: la ligne isoélectrique qu'on décompose en séries de polynômes de Laguerre et les ondes P-QRS-T modélisées par les fonctions d'Hermite. On obtient un second algorithme de compression des signaux ECG robuste et performant.

Mots clés : *ECG, Compression, Polynômes orthogonaux, Quadratures de Gauss, Effets de Gibbs.*

# Abstract

Developing new ECG data compression methods has become more important with the implementation of telemedicine. In fact, compression schemes could considerably reduce the cost of medical data transmission through modern telecommunication networks. Our aim in this thesis is to elaborate compression algorithms for ECG data, using orthogonal polynomials. To start, we studied ECG physiological origin, analysed this signal patterns, including characteristic waves and some signal processing procedures generally applied ECG. We also made an exhaustive review of ECG data compression algorithms, putting special emphasis on methods based on polynomial approximations or polynomials interpolations. We next dealt with the theory of orthogonal polynomials. We tackled on the mathematical construction and studied various and interesting properties of orthogonal polynomials. The modelling of ECG signals with orthogonal polynomials includes two stages: Firstly, ECG signal should be divided into blocks after QRS detection. These blocks must match with cardiac cycles. The second stage is the decomposition of blocks into polynomial bases. Decomposition let to coefficients which will be used to synthesize reconstructed signal. Compression is the fact of using a small number of coefficients to represent a block made of large number of signal samples. We realised ECG signals decompositions into some orthogonal polynomials bases: Laguerre polynomials and Hermite polynomials did not bring out good signal reconstruction. Interesting results were recorded with Legendre polynomials and Tchebychev polynomials. Consequently, our first algorithm for ECG data compression was designed using Jacobi polynomials. This algorithm could be optimized by suppression of boundary effects, it then becomes universal and could be used to compress other types of signal such as audio and image signals. Although Laguerre polynomials and Hermite functions could not individually let to good signal reconstruction, we imagined an association of both systems of functions to realize ECG compression. For that matter, every block of ECG signal that matches with a cardiac cycle is split in two parts. The first part consisting of the baseline section of ECG is decomposed in a series of Laguerre polynomials. The second part made of P-QRS-T waves is modelled with Hermite functions. This second algorithm for ECG data compression is robust and very competitive.

Keywords: *ECG, Compression, Orthogonal Polynomials, Gauss Quadratures, Gibbs Effects.*

# INTRODUCTION GENERALE

Le signal est défini comme le support d'une information, l'information étant généralement une grandeur physique analogique. Avec l'accroissement de la puissance des calculateurs, on procède de plus en plus au traitement numérique des signaux. Les signaux numériques résultent donc de la discrétisation des signaux analogiques. L'échantillonnage d'un signal analogique suivi de la conversion analogique numérique produit une grande quantité de données. Il se pose alors non seulement le problème de mémoire pour le stockage de ces données, mais aussi celui du temps pour les traiter par le calculateur. La théorie de la compression des données propose des solutions à ces problèmes en cherchant à réduire les redondances contenues dans les signaux. Les techniques de compression sont d'usage courant en traitement d'image, en traitement des signaux audio, des signaux vidéo et des signaux biomédicaux. L'ECG est un signal de nature électrophysiologique dont le tracé matérialise les activités électriques du cœur. Depuis quatre décennies, la compression des signaux ECG a fait l'objet des nombreux de travaux de recherche. La compression des signaux ECG trouve aujourd'hui un nouvel intérêt à cause de la télémédecine. En effet, il faut minimiser la durée et les coûts de transmission des signaux à travers les canaux de télécommunication.

Les polynômes orthogonaux sont très appréciés en physique théorique et particulièrement en mécanique quantique [Nikiforov 83]. Ces polynômes ne sont pas assez utilisés en traitement du signal, sans doute à cause de la lourdeur et de la complexité des formules mathématiques qu'ils engendrent. Toutefois, dans la recherche d'un compromis entre complexité et efficacité des algorithmes de compression de l'ECG, nous nous sommes intéressés à la modélisation de ces signaux avec les polynômes orthogonaux. C'est le thème central de ce mémoire de thèse qui se subdivise en quatre chapitres.

L'objectif du premier chapitre est de réaliser la revue de la littérature sur les méthodes de compression du signal ECG. Nous allons commencer par justifier la nécessité de développer de nouveaux algorithmes de compression de l'ECG. Une description des signaux ECG suivra : partant des leurs origines anatomiques et physiologiques, nous présenterons les caractéristiques et les paramètres de ces signaux. Nous aborderons aussi les différents traitements généralement opérés sur l'ECG, notamment le filtrage, la détection et la classification des ondes caractéristiques ainsi que les méthodes d'analyse et d'interprétation automatiques. Une étude exhaustive sur les techniques de compression des signaux ECG sera présentée à la fin de ce chapitre 1. Une attention particulière sera accordée aux méthodes de

compression de l'ECG par approximations, par interpolations et par transformations polynomiales.

Le second chapitre est centré sur l'étude des polynômes orthogonaux. Ces polynômes sont des solutions polynomiales des équations différentielles de type hypergéométrique. En analyse fonctionnelle, on construit des polynômes orthogonaux par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmitt. Nous allons présenter les propriétés et les caractéristiques principales des polynômes orthogonaux. Sous certaines conditions, une famille de polynômes orthogonaux constitue une base d'un espace de Hilbert. Une fonction de carrée intégrable au sens de Lebesgue peut donc être décomposée dans cette base. Ce résultat autorise le développement en séries d'un signal à énergie finie suivant une classe de polynômes orthogonaux.

Au niveau du chapitre 3, le processus de modélisation polynomiale des signaux ECG est élaboré. Ce processus commence par la segmentation d'un signal en fenêtres. Les durées de ces fenêtres devront coïncider avec celles des cycles cardiaques. La détection des complexes QRS est de première importance pour réaliser de telles segmentations. Afin de comparer et d'apprécier les performances des différentes modélisations polynomiales, nous pensons à la simulation d'un signal ECG étalon. Le fait qu'on dispose de l'expression mathématique de ce signal fantôme permet le calcul théorique des coefficients pour différentes familles de polynômes orthogonaux. Nous allons confectionner l'outillage d'analyse numérique nécessaire pour effectuer ces calculs sur ordinateur. Des exemples de synthèse du signal original à partir des coefficients de Fourier seront illustrés.

Le dernier chapitre du mémoire exploite les résultats des modélisations polynomiales pour réaliser la compression. L'idée est de sélectionner seulement un petit nombre de coefficients pour reconstruire le signal. La qualité du signal reconstruit est évaluée selon des critères théoriques qui mesurent les écarts d'énergie ou les écarts d'amplitude entre le signal original et le signal reconstruit. En plus du signal simulé, nos algorithmes de compression, élaborés à base des polynômes de Jacobi d'une part et de la combinaison des polynômes de Laguerre avec les fonctions d'Hermite d'autre part, seront testés sur de nombreux signaux réels. Ce quatrième chapitre se termine sur un ensemble de propositions qui visent dans un premier temps à améliorer les résultats obtenus et par la suite à ouvrir des perspectives pour la continuation de ce travail.

A decorative scroll graphic with a black outline and rounded corners. It features a vertical strip on the left side and a circular element on the top right. The text is centered within the scroll.

**Chapitre I :**

**COMPRESSION DU SIGNAL  
ECG PAR DECOMPOSITIONS  
POLYNOMIALES :  
PROBLEMATIQUE ET ETAT  
L'ART.**

# **Chapitre I :**

## **COMPRESSION DU SIGNAL ECG PAR DECOMPOSITIONS POLYNOMIALES : PROBLEMATIQUE ET ETAT L'ART.**

*Si j'ai pu voir si loin, c'est parce que  
je me suis tenu sur les épaules de géants.*

*Isaac NEWTON*

### **I-1 INTRODUCTION**

L'électrocardiographie est aujourd'hui l'une des techniques de diagnostic médical les plus répandues. Elle consiste en l'enregistrement des signaux ECG (électrocardiogrammes) traduisant les activités électriques du cœur. Le cœur joue au sein de l'organisme humain un rôle vital et de première importance. Le corps humain est en effet constitué d'un ensemble d'appareils (digestif, respiratoire, génital, urinaire et circulatoire) qui réalisent des fonctions de nutrition et de perpétuation de l'espèce. A ces fonctions, sont opposées celles accomplies par les muscles, le squelette et les sens qui mettent l'homme en relation avec le milieu extérieur. La coordination et le contrôle des activités des différents appareils sont assurés par deux systèmes régulateurs : le système nerveux et le système endocrinien. Chaque appareil est un groupe d'organes, un organe étant constitué par l'association de différents types de cellules. Le tissu est un ensemble de cellules de même type. La cellule est l'être vivant le plus simple qui puise son énergie et élimine ses déchets dans le milieu liquidien constituant son environnement immédiat. Le plasma sanguin constitue pour les cellules humaines un environnement physique et chimique stable. L'appareil circulatoire se charge d'irriguer les cellules avec du sang purifié et enrichi d'éléments nutritifs et de récupérer le sang souillé par les déchets pour traitements.

Le cœur est au centre de l'appareil circulatoire (figure 1-1). Il y joue le rôle d'une pompe qui aspire le sang des veines et le propulse dans les artères. Le pompage du sang est réalisé à travers les contractions du muscle du cœur : le myocarde. Les contractions du myocarde sont provoquées par des excitations électriques dont le signal ECG révèle les caractéristiques. L'électrocardiographie exploite le principe des mesures électrophysiologiques qui s'appuient sur le fait que toutes les cellules excitables du corps humain (nerveuses et musculaires) sont le siège des variations locales des potentiels appelés

potentiels d'action, qui à leur tour sont à l'origine des potentiels propagés. L'espace intercellulaire du corps humain étant une solution ionique conductrice, on peut mesurer à distance les variations de potentiels générés par les mouvements locaux de charges. Le signal ECG est recueilli en plaçant des électrodes au niveau de la surface du corps. L'appareil de mesure et d'enregistrement apporte au signal le conditionnement nécessaire. Plusieurs traitements supplémentaires parmi lesquels la compression peuvent être appliqués au signal ECG après enregistrement

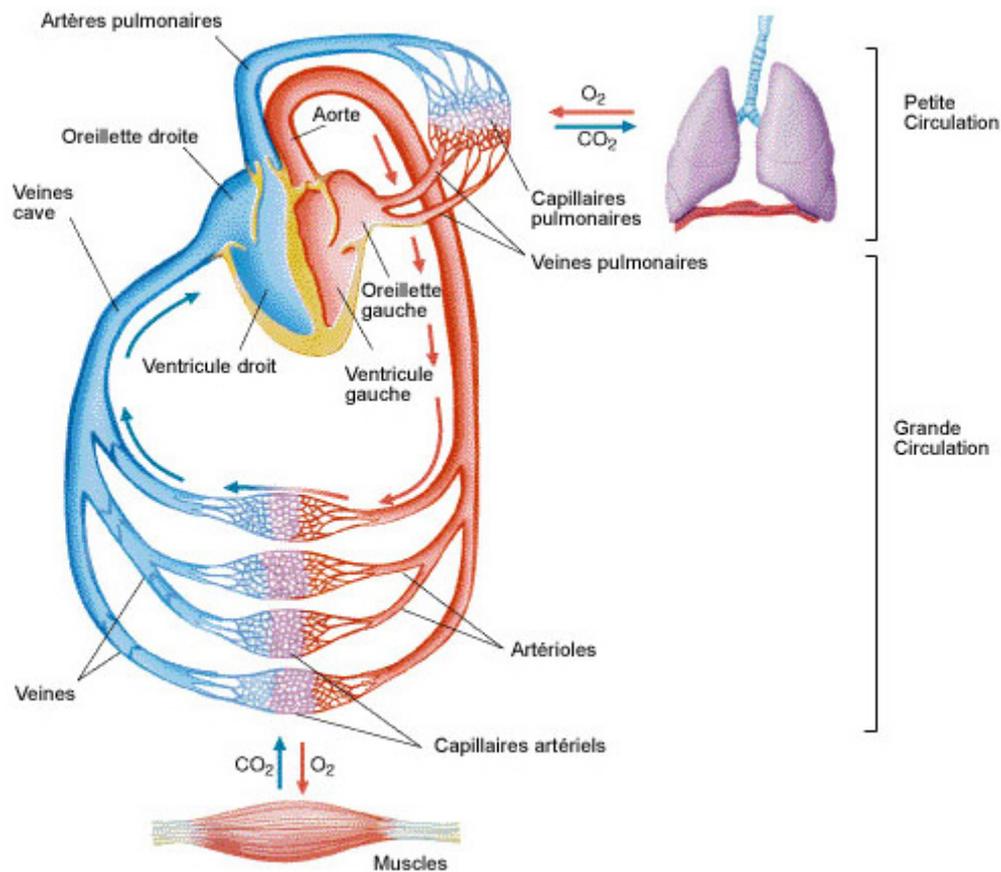


Figure 1-1 : Appareil circulatoire de l'homme [Dubois 04]

L'objectif de ce chapitre est de passer en revue les algorithmes de compression de l'ECG, en particulier ceux à base des approximations polynomiales, d'interpolations ou des transformations polynomiales. Nous commençons par présenter la problématique de la compression de l'ECG. Nous proposons de rappeler après cette problématique quelques notions fondamentales d'électrocardiographie : étude de l'origine physiologique, de la nature et des caractéristiques de ce signal. Nous rappellerons aussi très brièvement la technique d'enregistrement de l'ECG. La connaissance de ces notions préliminaires est nécessaire pour comprendre l'utilité des traitements apportés au signal ECG. Nous allons aussi étudier le fonctionnement de ces traitements : filtrage, détection et classification des ondes,

compression, analyse et interprétation automatiques. Nous terminerons le chapitre par l'état de l'art sur la compression des signaux ECG par modélisations polynomiales.

## **I-2 PROBLEMATIQUE DE LA COMPRESSION DE L'ECG**

La compression de l'ECG a fait particulièrement l'objet de nombreux travaux de recherche depuis quatre décennies. L'objectif de ces travaux a évolué au cours du temps. Les premiers algorithmes qui parurent, dans les années 60, visaient à réduire le coût de la transmission du signal ECG à travers les lignes téléphoniques [Gardenhire 65]. Les cardiologues étaient peu nombreux à cette époque et il fallait donner la possibilité aux généralistes d'enregistrer les signaux ECG des patients, les transmettre aux spécialistes et recevoir en retour les prescriptions de ces spécialistes. Le déficit en cardiologues reste une réalité pour de nombreux pays sous développés. La télémédecine s'installe et gagne de plus en plus de terrain avec l'arrivée des nouvelles techniques de communications (Internet et téléphonie mobile). La compression des signaux ECG en vue de la transmission sur des voies de télécommunications numériques est toujours d'actualité. Au début des années 70, plus de 70 millions d'ECG étaient enregistrés aux Etats-Unis et plus de 160 millions dans le monde [Ahmed 75]. En 1976, l'institut américain de la médecine de l'armée de l'air disposait de plus de 800 000 ECG dans son centre d'électrocardiographie, avec une croissance de plus de 100 nouveaux enregistrements au quotidien [Womble 77]. En conséquence, les études pour la compression de l'ECG au cours des années 70 et 80 avaient pour but principal la réduction de la quantité des données afin d'accroître la capacité de stockage des signaux en mémoire.

Les années 90 ont vu l'arrivée des mémoires de masse de très forte capacité. Parallèlement, les systèmes holter pour l'enregistrement ambulatoire de l'ECG sur 24 heures ont été de plus en plus miniaturisés et entièrement numérisés. Ils sont équipés de mémoires statiques moins encombrantes et plus fiables que les anciennes bandes magnétiques [Lu 00]. La capacité limitée des mémoires statiques à semi-conducteurs rend la compression du signal ECG incontournable dans les systèmes holter miniaturisés équipés de ce genre de mémoires. En télé cardiologie, Rollins *et al* ont montré la possibilité de concevoir un enregistreur électrocardiographique portable dont l'entretien est ramené essentiellement au simple changement de la batterie [Rollins 00]. Cette catégorie d'enregistreur autorise l'acquisition des signaux pour la surveillance de l'activité cardiaque pendant quelques semaines et il devient impératif d'effectuer la compression des signaux enregistrés pendant de si longues

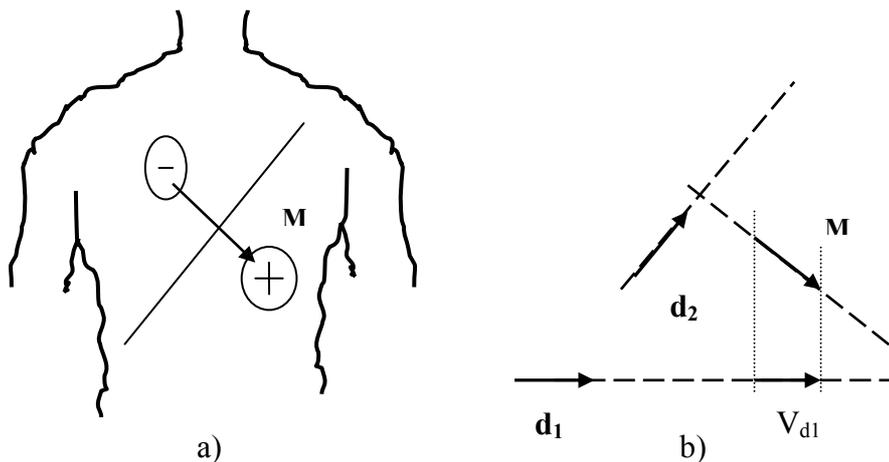
périodes puisque la quantité des données produites est énorme. R.S.H. Istepanian et A.A. Petrosian ont aussi montré la nécessité de la compression du signal ECG en télé cardiologie portable à travers le système GSM [Istepanian 00]. L'organisation mondiale de la santé (OMS) encourage et fait la promotion de la télémédecine. Dans la médecine moderne, on devra déplacer beaucoup plus les informations médicales et non pas le patient. Il est pourtant établi que les accidents cardiovasculaires constituent la deuxième cause de transport médicalisé après les accidents (accidents de la route et accidents de travail) [Medilec 06]. En cardiologie, la téléconsultation et le télédiagnostic devront permettre l'enregistrement et la transmission des 12 dérivations du signal ECG sur site ou pendant le transport. Ces signaux sont reçus, visualisés et analysés par l'expert avant l'arrivée du patient à l'hôpital. On peut dès lors, organiser en avance les soins, préparer aussi la salle de chirurgie si besoin, et même autoriser des soins pré hospitaliers. En plus du gain en temps que cela apporte, des gains financiers sont autant importants : on diminue des hospitalisations non justifiées, on peut utiliser le personnel médical non spécifique, on achemine directement le patient à l'endroit le plus indiqué et des examens médicaux redondants sont diminués. En contre partie, la transmission des informations et des signaux a un coût non négligeable. Ce coût pourrait annuler tous les avantages énoncés ci avant s'il est très élevé. La compression des signaux ECG permet donc de réaliser des économies en coût de transmission des données en télémédecine. Dans cette optique, Kumar *et al* ont mené des études intenses en reconsidérant, dans un premier temps, les méthodes temporelles de compression de l'ECG (AZTEC, FAN, SAPA) et en y apportant par la suite des modifications substantielles afin d'obtenir de nouveaux algorithmes adaptés aux spécificités de la télémédecine [Kumar 06].

La compression du signal ECG demeure donc une urgence scientifique puisqu'on en a besoin, aussi bien pour la réduction du temps et du coût de transmission des signaux à travers les systèmes de télécommunication numériques en télémédecine que pour le stockage des données en vue de l'analyse ultérieure. On distingue deux grandes catégories d'algorithmes de compression du signal ECG: les méthodes directes qui interviennent sur le signal dans le domaine temporel et les méthodes par transformation qui ramènent les signaux dans un domaine transformé après décomposition dans une base de fonctions. Les polynômes orthogonaux de par leurs natures non stationnaires constituent des bases de fonctions pour la décomposition des signaux ECG. Nous proposons dans cette thèse l'élaboration des algorithmes de compression de l'ECG à l'aide de ces polynômes orthogonaux. Les résultats produits seront comparés avec ceux des méthodes les plus récentes.

# I-3 ETUDE ET ANALYSE DES SIGNAUX ECG

## I-3-1 Origines physiologiques

Les potentiels électriques prennent leur origine dans les fibres du muscle cardiaque. La génération et la propagation de l'excitation dans les différentes parties du cœur peuvent être étudiées non seulement par la mesure des potentiels électriques des cellules ou la mesure des potentiels électriques à la surface du cœur, mais aussi par l'enregistrement de l'activité cardiaque au niveau de la peau. En effet, avec le développement de différence de potentiel entre les zones excitées et non excitées du cœur, les forces électriques différentielles se propagent dans le corps entier. Des tracés reflétant les oscillations de ces potentiels peuvent donc être enregistrés en appliquant des électrodes à certains points du corps. En modèle simplifié, le cœur qui est la source des signaux est un générateur représenté par un dipôle électrique localisé dans le thorax.

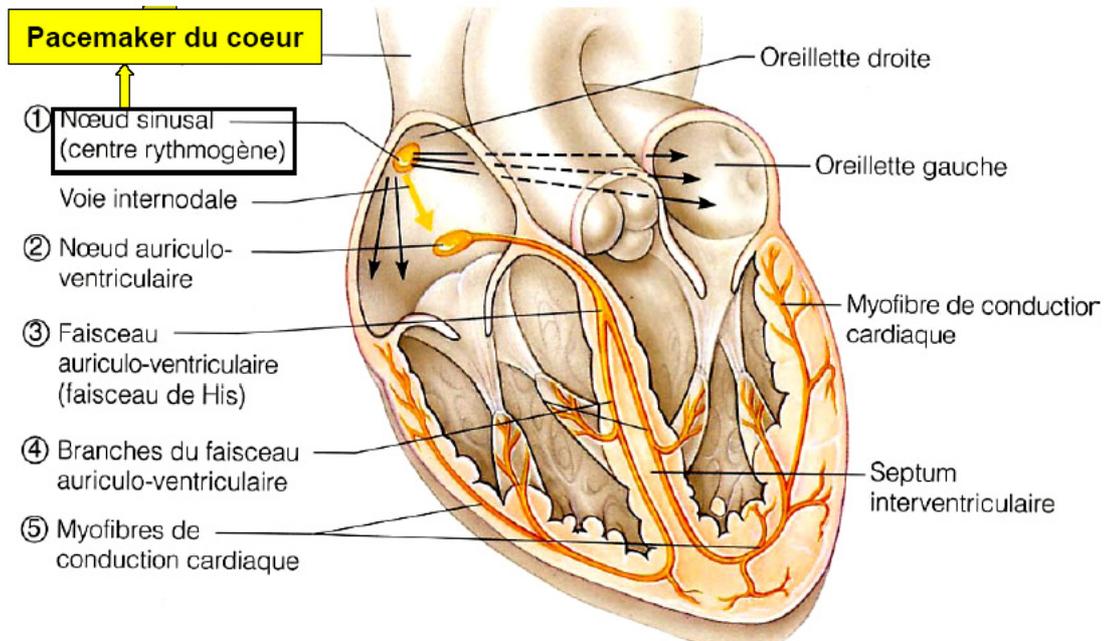


**Figure 1-2 : Le vecteur cardiaque.**

- Le dipôle résulte des charges positives et négatives séparées les unes des autres ; le vecteur moment est représenté par  $\mathbf{M}$ .*
- La tension mesurée dans une dérivation représentée par le vecteur  $\mathbf{d}_1$  est tout simplement le produit scalaire  $V_{d1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_1$  ; c'est le module de la projection de  $\mathbf{M}$  dans la direction  $\mathbf{d}_1$*

En électrocardiographie, on ne s'intéresse pas aux lignes de champ de ce dipôle, mais on utilise plutôt le dipôle moment qu'on appelle vecteur cardiaque. C'est un vecteur dirigé des charges négatives vers les charges positives et dont le module est proportionnel à la quantité de charges multipliée par la distance de séparation des 2 types de charges [Neumann 92]; il est représenté par  $\mathbf{M}$  sur la figure 1-2. Au cours d'un cycle cardiaque, l'amplitude et la direction de ce vecteur varient. La différence de potentiel mesurée par 2 électrodes représente le module de la projection du vecteur cardiaque sur la droite qui relie ces deux électrodes.

Par convention, une impulsion électrique qui se propage vers l'électrode est représentée sur l'enregistrement de l'électrocardiogramme par une déflexion qui se dirige vers le haut du tracé. Si, au contraire, l'activité électrique fuit l'électrode, une déflexion orientée vers le bas du tracé est observée



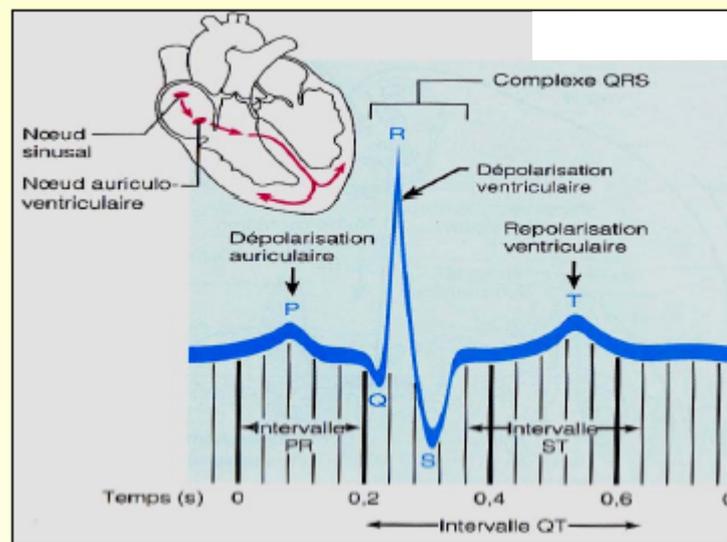
**Figure 1-3 : Circuits de conduction des excitations électriques dans le cœur [Coeur2 06]**

La figure 1-3 montre les trajets empruntés par les impulsions électriques dans le cœur. La formation des déflexions enregistrées est intimement liée à l'activation et à la repolarisation subséquentes des oreillettes et des ventricules. L'activité électrique peut être décrite par les étapes suivantes :

- 1°) Formation de l'impulsion de stimulation dans le nœud sino-auriculaire (nœud SA).
- 2°) Activation des oreillettes, l'électrocardiogramme enregistre une petite onde, dite l'onde P
- 3°) Activation du nœud auriculo-ventriculaire et du faisceau de His ; l'électrocardiogramme revient à la ligne isoélectrique.
- 4°) Activation des ventricules (excitation des branches suivie de celle des parois internes) ; l'électrocardiogramme enregistre plusieurs déflexions formant le complexe QRS.
- 5°) Lorsque toutes les parties du myocarde sont activées, l'électrocardiogramme enregistre de nouveau une ligne isoélectrique : le segment ST.

- 6°) Lors de la repolarisation ventriculaire, l'électrocardiogramme enregistre une onde T
- 7°) Pendant la repolarisation tardive de quelques régions du myocarde, l'électrocardiogramme pourrait enregistrer une petite onde U.

L'ECG normal est donc caractérisé par 3 ondes principales: P, QRS et T (figure 1-4). L'onde P représente la dépolarisation auriculaire. Le complexe QRS caractérise la dépolarisation des ventricules. L'onde T traduit la repolarisation ventriculaire. Les manifestations de la repolarisation auriculaire sont masquées par le complexe QRS. Les



segments P-Q et S-T sont normalement au potentiel zéro.

Figure 1-4 : Ondes caractéristiques d'un signal ECG normal [Coeur2 06].

La durée de P-Q correspond au temps de conduction que prend l'excitation pour aller des oreillettes aux ventricules alors que S-T traduit la diastole électrique. Une petite onde U est parfois enregistrée après l'onde T, on estime qu'elle est due à une lente repolarisation des muscles papillaires ventriculaires. L'intervalle QT est la durée totale de la systole électrique ventriculaire qui coïncide presque avec la systole mécanique. La durée de la systole électrique ( $T_{se}$ ) dépend de celle du cycle cardiaque (C), la durée d'un cycle cardiaque étant déterminée par l'intervalle (R-R) ou (P-P). Cette dépendance est représentée par les formules empiriques ci-après [Babsky 75] :

$$T_{se} = 8.22\sqrt[3]{C} \quad (\text{Formule de Fridericia})$$

avec C en centaine de secondes.

$$T_{se} = 0.37\sqrt{C} \quad \text{Formule de Bazett avec C en secondes.}$$

Les complexes QRS présentent des morphologies variées selon les dérivations ou l'arythmie. On utilise des lettres majuscules (Q, R, S) pour désigner les grandes déflexions et des lettres minuscules (q, r, s) pour les petites déflexions.

### **I-3-2 Les dérivations**

Les potentiels électriques générés par le cœur se propagent dans tout l'organisme et apparaissent à la surface du corps. On mesure la différence de potentiel (d.d.p.) en deux points de la surface du corps à l'aide d'une paire d'électrodes. En plaçant plusieurs paires d'électrodes à différentes positions, on obtient des résultats différents puisque le champ électrique du cœur est spatio-dépendant. Si on mesure le vecteur cardiaque dans une seule direction, on ne sera pas en mesure de le caractériser entièrement. Il est donc important d'avoir un standard de positionnement des électrodes (dérivations) pour l'évaluation clinique du signal ECG. En pratique, douze dérivations sont utilisées dans les plans frontal et transversal pour explorer l'activité électrique du cœur. On distingue :

- Trois dérivations bipolaires ou dérivations standard, DI, DII, DIII obtenues par permutation des électrodes placées sur le bras droit, le bras gauche et la jambe gauche. La jambe droite est reliée à la masse. Les vecteurs obtenus forment un triangle équilatéral, appelé triangle d'Einthoven (figure 1-5).

- Trois dérivations unipolaires aVR, aVL, aVF qui permettent de mesurer la tension entre un point de référence et le bras droit, le bras gauche et la jambe gauche respectivement. Le point de référence est réalisé par la moyenne des signaux qui apparaissent sur les 2 autres membres qui ne sont pas en observation. A cet effet, on utilise des résistances de valeur élevée, supérieure à 5M $\Omega$ . La figure 1-6 montre les connexions des électrodes ainsi que les directions selon lesquelles le vecteur cardiaque est mesuré, tant pour les dérivations unipolaires que pour les dérivations standard.

- Six dérivations précordiales pour lesquelles les électrodes sont fixées dans le plan horizontal. Ces électrodes permettent d'enregistrer les vecteurs électriques qui partent du cœur dans leurs directions respectives comme l'indique la figure 1-7. La référence pour ces électrodes peut être réalisée par le principe du pont terminal de Wilson.

Pour certains diagnostics, les cardiologues recourent aux dérivations spéciales : c'est le cas de la dérivation de Frank ou dérivation XYZ qui consiste à représenter intégralement l'information recueillie dans trois plans perpendiculaires (frontal, horizontal et sagittal). On visualise le déplacement dans le temps du vecteur électrique cardiaque : c'est la

vectocardiographie (VCG). La vectocardiographie permet d'approcher beaucoup plus finement l'origine géographique des troubles que l'examen des douze tracés différents de l'électrocardiographie classique ne peut que constater. L'ECG œsophagien et l'ECG auriculaire pour lesquels l'électrode est introduite dans l'œsophage et placée près du cœur sont parfois exigés. L'ECG du faisceau de His permet d'étudier en détails la conduction auriculo-ventriculaire : on obtient l'ECG hautes fréquences.

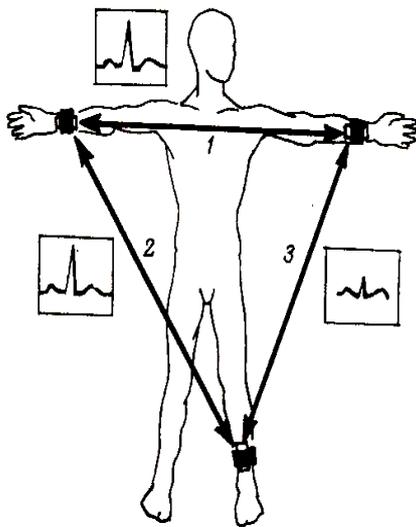


Figure 1-5 : Dérivations standards DI, DII, et DIII.

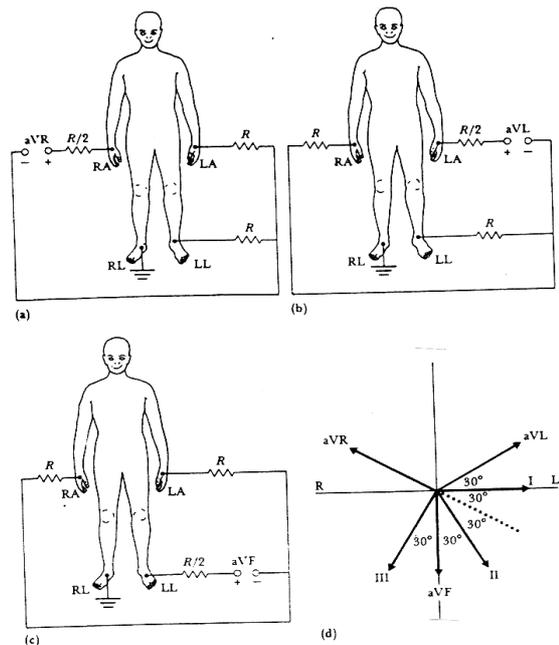


Figure 1-6 : Connexion des électrodes pour les dérivations unipolaires. (a) : *aVR*, (b) : *aVL* et (c) : *aVF* ; (d) : Diagramme vectoriel montrant les directions des dérivations standard et unipolaires dans le plan frontal.

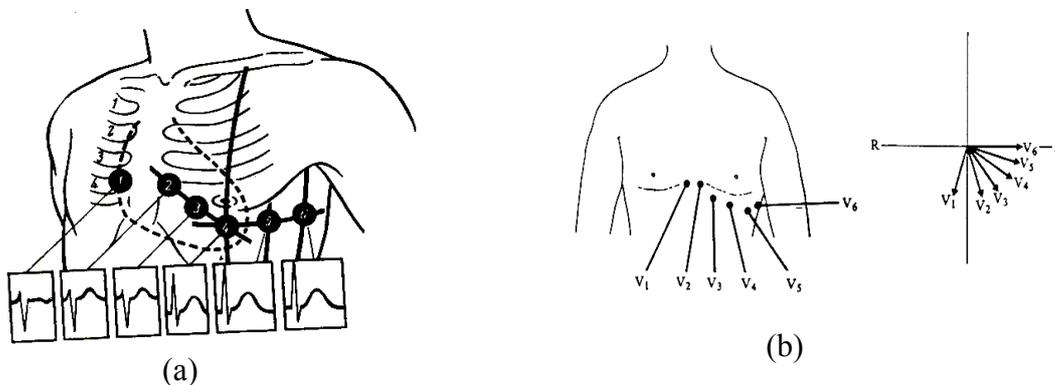


Figure 1-7 : Dérivations précordiales [Babsky 75] (a) : positions des électrodes et formes des signaux obtenus ; (b) : directions des vecteurs dans le plan transversal

La figure 1-8 présente le schéma fonctionnel d'un enregistreur d'électrocardiogramme. On y distingue :

- Le circuit de protection qui limite l'amplitude des signaux captés afin de prévenir le système de surtensions nuisibles.
- Le sélecteur de dérivation qui détermine quelle paire d'électrodes est nécessaire pour un enregistrement donné et connecte cette paire d'électrodes au reste du circuit. Ce bloc est contrôlé soit par l'opérateur, soit par le microprocesseur du système. En mode automatique, chaque dérivation est enregistrée pendant dix secondes.
- L'auto calibreur qui délivre un signal de  $1\text{ mV}$  momentanément introduit dans l'électrocardiogramme pour chaque canal enregistré.
- Le préamplificateur est le premier étage d'amplification. Cet étage doit avoir une impédance d'entrée très élevée et un fort taux de réjection en mode commun.
- Le circuit d'isolation qui empêche le passage du courant du secteur
- Le circuit de contrôle de la jambe droite donnant un point de référence au patient. Ce point est normalement le potentiel de masse.
- L'amplificateur qui apporte un gain en puissance suffisant pour que le signal puisse être correctement enregistré et tracé.
- La mémoire dont dispose la plupart des enregistreurs actuels permet de sauvegarder des séquences du signal ECG avant qu'il ne soit imprimé. Plusieurs informations sur le dossier médical du patient introduites à travers le clavier y sont stockées.
- Le microprocesseur coordonne l'ensemble des opérations de l'enregistrement. Dans certaines machines, le microprocesseur réalise des analyses préliminaires du signal tel que le calcul du rythme cardiaque et la reconnaissance de certaines arythmies. Un clavier et un afficheur alphanumérique permettent à l'opérateur de communiquer avec ce microprocesseur.
- L'imprimante donne une copie matérielle de l'ECG. Il imprime aussi l'identification du patient, les informations cliniques introduites par l'opérateur et les résultats de l'analyse automatique du signal.

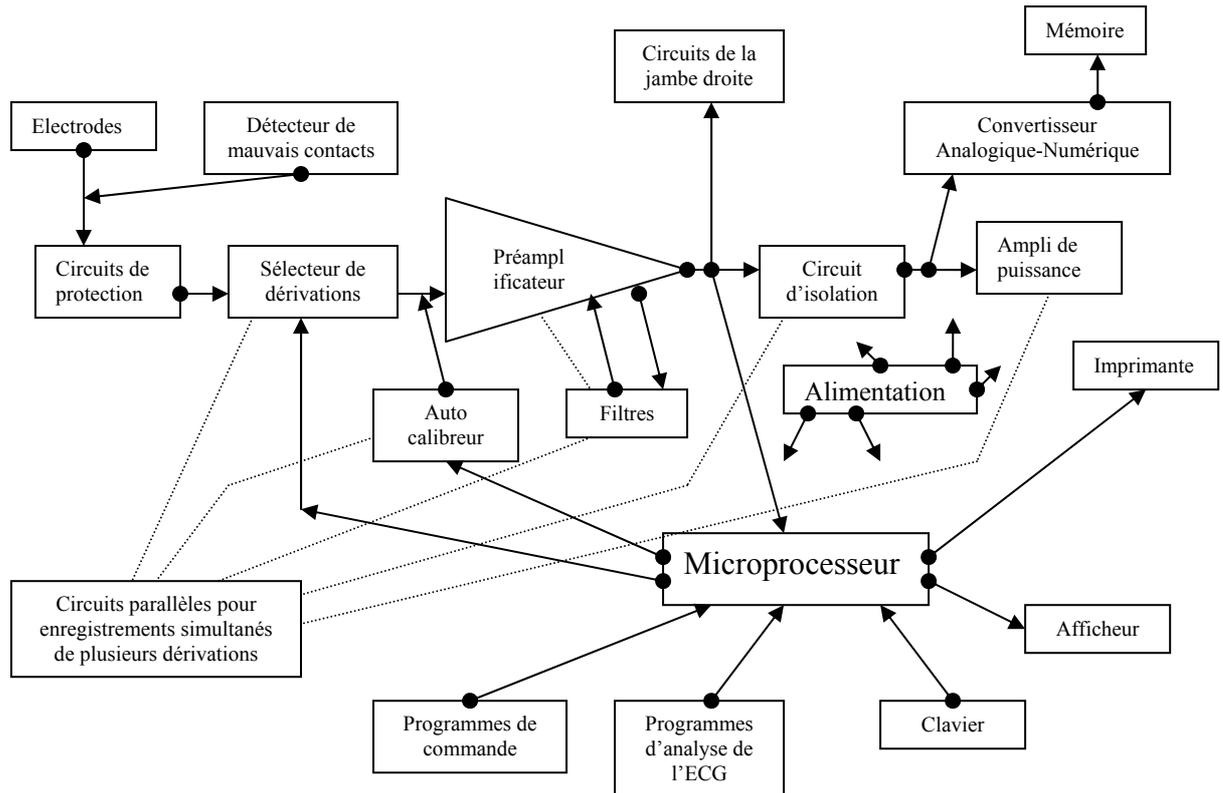


Figure 1-8 : Schéma bloc d'un enregistreur d'ECG actuel

### I-3-3 Caractéristiques du signal ECG normal

La figure 1-4 montre la morphologie du signal ECG normal sur un cycle cardiaque. Les valeurs normales des durées des intervalles et des amplitudes des ondes sont celles des adultes d'âge moyen. Ces valeurs sont données à titre indicatif car il existe un chevauchement parfois important entre les valeurs normales et pathologiques. Une présentation détaillée des caractéristiques de l'ECG normal, leur interprétation physiologique ainsi que plusieurs méthodes de calcul de l'axe électrique du complexe QRS sont données dans [Brohet 98] et [Dubois 04]. Des facteurs individuels tels que l'âge, le sexe, la race, la morphologie et la position du cœur influencent énormément les valeurs normales. Le tableau 1-1 récapitule les critères essentiels de normalité de l'ECG [Kom 01].

**Tableau 1-1 : Critères de normalité du signal ECG [Kom 01]**

<b>Onde P</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Chaque onde P doit précéder un complexe QRS</li> <li>▫ Forme identique à l'intérieur d'une même dérivation</li> <li>▫ Positive en dérivation DI, DII, DIII, et V6</li> <li>▫ Moins de 0.12 s en largeur dans la dérivation DIII</li> <li>▫ Biphasique avec une composante dominante positive ou monophasique avec une déflexion positive en V1</li> </ul>
<b>Intervalle PR</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Consistant en largeur</li> <li>▫ La longueur est supérieure à 0.12 s et inférieure à 0.24 s</li> </ul>
<b>Complexes QRS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Moins de 0.12 s en largeur</li> <li>▫ La plus grande déflexion en dérivation standard excède 5 mm de hauteur</li> <li>▫ L'axe moyen en dérivation standard entre -30° et +90°</li> <li>▫ Un patron rS, Q ou Qr en V1</li> <li>▫ Un patron qRs en V5-6.</li> </ul>
<b>Onde Q</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Petite et étroite, Q en DI, DII, aVF et V3-6, avec une hauteur moins que 25% de l'onde R du même complexe et d'une largeur moins de 0.04 s</li> </ul>
<b>Segment ST</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Normalement isoélectrique</li> <li>▫ La déflexion, si elle existe, ne doit pas dépasser 1mm en DI, DII, DIII et aVF</li> <li>▫ L'élévation, si elle existe, ne doit pas excéder 2 mm en les mêmes dérivations</li> <li>▫ Elévations jusqu'à 4 mm possibles dans les dérivations V1-V3.</li> </ul>
<b>Onde T</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Positive en DI, DII et V6</li> <li>▫ Normalement positive mais occasionnellement négative en DIII et aVF</li> <li>▫ Doit être au moins 2 mm en hauteur en dérivation où elle est plus grande.</li> </ul>
<b>Onde U</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Pas nécessairement présente, mais, si elle existe, elle devra : <ul style="list-style-type: none"> <li>● être plus grande en V2-4</li> <li>● positive en V1-2 et en dérivation avec l'onde T positive</li> <li>● normalement moins que 25% en hauteur par rapport à l'onde T qui précède, mais peut atteindre 2 mm en V2-4</li> </ul> </li> </ul>
<b>Intervalle QT</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Les valeurs de normalité sont établies au tableau 1-2 en fonction de la fréquence de battements.</li> <li>▫ On peut utiliser la formule de Bazett : <math display="block">QT_{\text{corrigé}} = \frac{QT_{\text{mesuré}}}{\sqrt{RR}}, \text{ on normalement } QT_{\text{corrigé}} \leq 0.44 \text{ s}</math> </li> </ul>

Les ondes P sont mieux visibles dans les dérivations DII et V1. L'intervalle PQ ou PR représente le temps de propagation de l'influx électrique dans les oreillettes, le nœud auriculo-ventriculaire, le faisceau de His et ses branches, le réseau de Purkinje jusqu'au début de l'activation ventriculaire.

On mesure la durée du complexe QRS dans la dérivation où ce complexe paraît le plus large. Une mesure plus fiable s'obtient en superposant les 12 dérivations enregistrées simultanément et en recherchant le début et la fin globale du QRS. Lorsque cette durée est supérieure à 0.12

seconde, elle traduit un trouble majeur de conduction intraventriculaire. L'amplitude des composantes du QRS varie en fonction de l'âge, du sexe, de la race, du poids, de la morphologie du thorax et de la position du cœur dans le thorax. Les valeurs normales d'amplitudes sont consignées dans des tables. Ces tables sont incorporées dans des programmes d'analyse automatique de l'ECG. On détermine la morphologie du QRS dans les différentes dérivations en analysant l'orientation spatiale des 4 vecteurs de la figure 1-9 (a). Le vecteur 1 est celui de l'activation septale, il produit normalement une onde q initiale dans les dérivations DI, DII, DIII, aVL, V5, et V6 ; et une onde r initiale dans les précordiales V1 à V4. On observe en aVF une onde r ou q selon que le vecteur septal est dirigé en haut ou en bas. Le vecteur 2 correspond au début de la dépolarisation ventriculaire ; il produit une onde R dans les dérivations DII, DIII, V3 et V4. Le vecteur 3 issu de la dépolarisation ventriculaire gauche est responsable de l'onde R dans les dérivations DI, DII, DIII, aVL, aVF, V5 et parfois V4 et V6. Il déclenche l'onde S dans les dérivations aVR, V1, V2, V3 et V4. Le vecteur 4 des forces terminales explique l'onde S dans les dérivations DI, aVL, V5 et V6. La figure 1-10 est une illustration des morphologies du complexe QRS dans les dérivations précordiales.

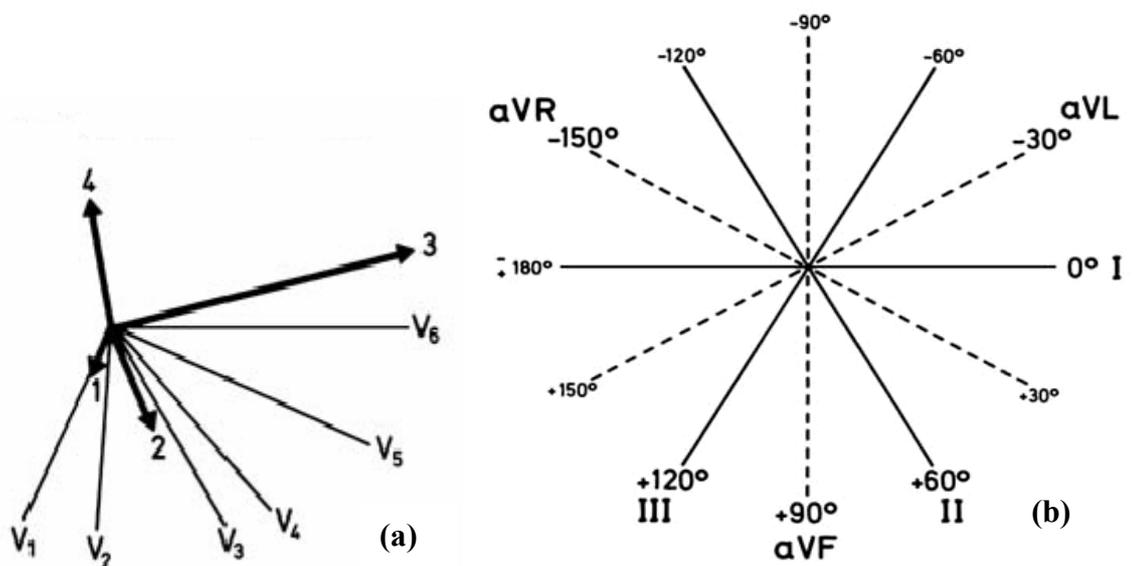


Figure 1-9 : (a) Vecteurs d'activation ventriculaire et (b) système hexaxial de Bailey.

L'axe moyen du QRS dans le plan frontal se calcule visuellement à partir du système hexaxial de Bailey qui regroupe les 6 dérivations périphériques (Figure 1-9 (b)) de la manière suivante :

- Rechercher dans les 6 dérivation périphériques celle où le complexe QRS a un aspect isodiphasique, c'est-à-dire un complexe formé d'une onde positive et d'une onde négative d'amplitudes ou de surfaces à peu près égales de sorte que leur somme algébrique soit proche de zéro. L'axe moyen de QRS ( $\hat{A}QRS$ ) est dès lors à peu près perpendiculaire à l'axe de cette dérivation. Ceci signifie que l' $\hat{A}QRS$  se dirige dans une des 2 positions qui sont à un angle droit avec cette dérivation. L'examen des autres dérivation périphériques permettra de déterminer précisément la position de  $\hat{A}QRS$ .
- En l'absence d'une dérivation porteuse d'un complexe isodiphasique, on recherchera deux dérivation contiguës, c'est-à-dire distantes d'un angle de  $30^\circ$ , où le complexe QRS a à peu près la même amplitude ou la même surface positive. L' $\hat{A}QRS$  se trouve alors approximativement situé à mi-distance entre les axes de ces deux dérivation.
- Si aucune dérivation ne montre un complexe QRS isodiphasique et que l'on n'observe pas non plus deux dérivation contiguës avec une onde R équivalente, on se bornera alors à rechercher la dérivation avec l'onde R ayant la plus grande amplitude ou surface : l' $\hat{A}QRS$  est en dernière approximation à peu près dirigé vers l'axe de cette dérivation.

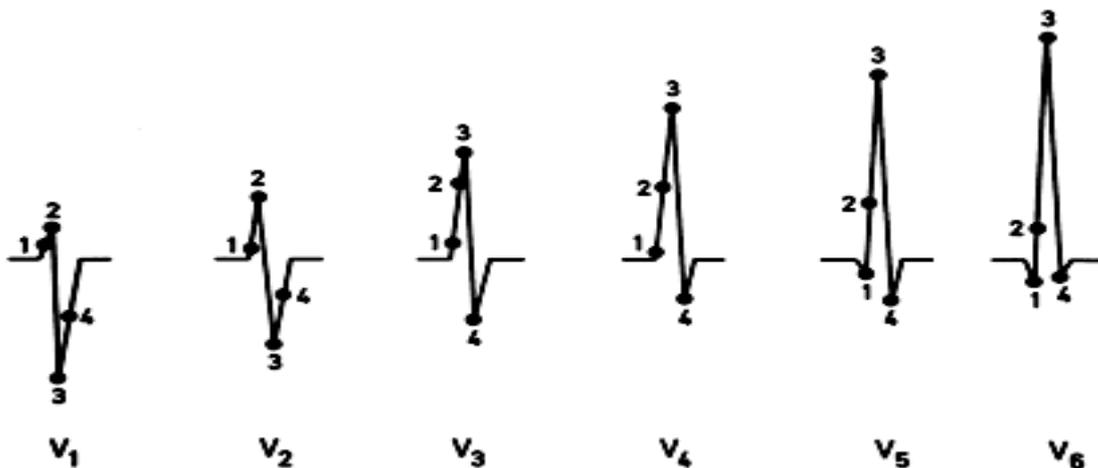


Figure 1-10 : Aspect des complexes QRS dans les dérivation précordiales [Brohet 98]

L' $\hat{A}QRS$  est situé chez l'adulte entre  $-30^\circ$  et  $+105^\circ$ . Entre  $0^\circ$  et  $+90^\circ$ , on considère que l'axe moyen de QRS est strictement normal. Quand l' $\hat{A}QRS$  est entre  $+30^\circ$  et  $-30^\circ$ , le cœur est en position horizontale; entre  $+75^\circ$  et  $+105^\circ$ , le cœur est en position verticale. Si l' $\hat{A}QRS$  est entre  $-30^\circ$  et  $-90^\circ$ , on parle d'une déviation axiale supérieure gauche. Entre  $+105^\circ$  et  $+180^\circ$ , il s'agit d'une déviation axiale inférieure droite. Lorsque l' $\hat{A}QRS$  est situé dans la zone comprise entre  $-90^\circ$  et  $-180^\circ$ , on parle d'une déviation axiale "extrême" ou "déviation axiale supérieure

droite". L'ÂQRS fournit des indications concernant l'orientation du vecteur principal de l'activation cardiaque dans le plan frontal qui est influencée dans une certaine mesure par la position du coeur dans le thorax. L'axe est également influencé par l'âge et tend à se déplacer vers la position horizontale à mesure du vieillissement. La déviation de l'ÂQRS fait également partie des critères d'anomalies cardiaques. Les causes les plus fréquentes de déviation axiale supérieure gauche sont le bloc fasciculaire antérieur gauche, l'infarctus myocardique inférieur, certaines formes de pré excitation ventriculaire, l'hyperkaliémie. Parmi les causes de déviation axiale droite, on trouve le bloc fasciculaire postérieur gauche, l'hypertrophie ou dilatation ventriculaire droite, l'infarctus myocardique antérolatéral ou latéral étendu [Brohet 98]. Le complexe QRS représente dans le domaine fréquentiel, des manifestations hautes fréquences dans le signal ECG. Son spectre se situe entre 25 et 60 Hz. Le segment ST est normalement isoélectrique. Un segment ST normal peut cependant être légèrement décalé vers le haut au repos ou vers le bas à l'effort. Le segment ST est, avec l'onde T, la partie du tracé la plus sensible aux influences extérieures reflétant des phénomènes physiologiques et pathologiques. On s'intéresse beaucoup à la dispersion de l'intervalle QT qui pourrait refléter une inhomogénéité de la phase de repolarisation au sein du myocarde ventriculaire. L'onde U n'est visible presque uniquement que dans les dérivations précordiales. Sa signification exacte est encore discutée.

## **I-4 OPERATIONS DE TRAITEMENT DU SIGNAL ECG**

Le signal ECG récolté par des électrodes subit dans un premier temps un conditionnement électrique de mise en forme au sein de l'enregistreur. Par la suite d'autres traitements essentiellement logiciels peuvent lui être appliqués en vue de faciliter le stockage, de débarrasser le signal des bruits et perturbations, de l'analyser ou de contribuer au diagnostic automatique.

### **I-4-1 Détection des ondes**

La détection des complexes QRS est d'une importance capitale dans l'analyse automatique du signal ECG. Lorsque les complexes QRS sont identifiés et leurs positions repérées, il devient facile d'évaluer d'autres paramètres du signal tels que la durée du cycle cardiaque, la durée du segment ST...etc. La détection automatique des complexes QRS est une

tâche difficile parce que la morphologie de ces complexes varie d'un individu à l'autre, et même chez le même sujet, elle varie d'un cycle à l'autre. En plus, d'autres ondes du signal telles que les ondes P et T, et même des perturbations d'origines diverses, ont des caractéristiques semblables à celles des complexes QRS. La plupart des algorithmes de détection procèdent en deux étapes: une première étape au cours de laquelle le signal passe par un filtre passe bande qui élimine le bruit et les ondes P et T; le signal subit après une transformation non linéaire, par exemple la dérivation pour identifier les fortes pentes autour de l'onde R, et l'élévation au carré pour quantifier l'énergie des QRS. La deuxième étape consiste en une prise de décision selon des critères de seuillage. Une étude comparative d'une douzaine de tels algorithmes est présentée dans [Henry 93]. Elle mesure leurs performances en termes de non détection, fausse alarme, retard de détection et nombre d'opérations mathématiques. Pan et Tomkins ont mis au point l'un des algorithmes les plus populaires à base de ce principe [Pan 85]. Ces techniques souffrent de deux problèmes majeurs : le premier est que la bande passante du complexe QRS diffère d'un individu à l'autre, et même chez le même sujet d'un cycle à l'autre. La deuxième difficulté est le choix du seuil de décision. Le seuil est généralement fixé empiriquement, des conditions additionnelles doivent être prises en compte avant la décision finale. Les détails sur quelques détecteurs des complexes QRS sont présentés en annexe A.

Une méthode de détection utilisant le filtrage numérique adaptatif est proposée dans [Hamilton 88]. Le filtrage adaptatif s'auto ajuste afin de compenser les variations de formes et les conditions de perturbations accentuées. Un modèle de filtrage adaptatif à base des réseaux de neurones, généralement utilisé en reconnaissance de forme, est utilisé pour la détection des complexes QRS dans [Xue 92].

Les algorithmes récents de détection des complexes QRS exploitent la théorie des ondelettes, [Li 93], [Li 95], [Bahoura 97] et [Kadambe 99]. Ces algorithmes reposent sur les travaux de S. MALLAT, [Mallat 91], [Mallat 92a] et [Mallat 92b] où il est démontré que lorsqu'une ondelette mère utilisée pour la décomposition d'un signal est assez régulière, les passages par zéro obtenus sur les détails correspondent aux extrema locaux du signal original. Ces algorithmes détectent, en plus des QRS, les ondes P et T avec une précision acceptable.

L'association de la transformée en ondelettes aux techniques des réseaux de neurones a abouti à la détection des potentiels tardifs avec une fiabilité de plus de 78% [Lu 01]. Les potentiels tardifs sont de très faible amplitude et de hautes fréquences. Ils apparaissent à la fin des complexes QRS et sont étroitement associés à la tachycardie ventriculaire. La faible

amplitude de ces potentiels (0-1 $\mu$ V) et leur large bande passante de 40-250Hz rendent difficile leur séparation du reste du signal et même du bruit [Lander 93].

## I-4-2 Classification des ondes

L'analyse du rythme et le diagnostic automatique des troubles rythmiques représentent un domaine particulier complémentaire de l'analyse du contour des ondes. La classification des complexes QRS et le dénombrement des différents types de morphologie sur un signal ECG restent une préoccupation en électrocardiographie. Les algorithmes de classification des complexes QRS procèdent d'abord à la détection ; des modèles mathématiques de ces complexes QRS sont ensuite élaborés ; cette modélisation permet de définir la mesure de similarité entre deux complexes. Dans [Morlet 83], le modèle de QRS est un vecteur de  $3N$  composantes et la mesure de similarité entre deux complexes  $i$  et  $j$  est une distance associée au produit scalaire défini par :

$$D(i, j) = \sum_{k=1}^{3N} \delta_k^{ij}$$

avec

$$\begin{cases} \delta_k^{ij} = 0, si & |x_k^i - x_k^j| \leq t_k \\ \delta_k^{ij} = 1, si & |x_k^i - x_k^j| > t_k \end{cases} \quad (1-1)$$

$x_k^i$  est la  $k^{ieme}$  composante du vecteur représentatif du complexe  $i$

$t_k$  est un seuil de tolérance lié au paramètre d'indice  $k$ .

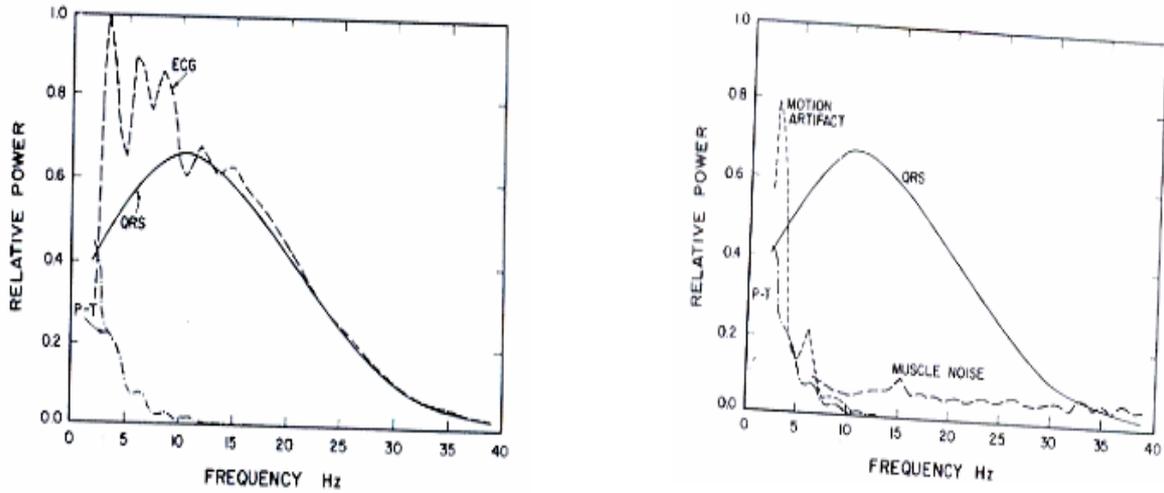
Les trois premières fonctions d'Hermite sont utilisées pour la modélisation dans [Sörnmo 81]. Les courbes de ces fonctions présentent des allures semblables à celles des complexes QRS monophasiques, biphasiques et triphasiques respectivement. On construit ainsi une base morphologique pour un espace de dimension 3 (espace des formes de QRS). Chaque complexe QRS est décomposé dans cette base. La mesure de dissimilarité entre 2 complexes est l'écart d'énergie normalisée de ces complexes. Les QRS sont ainsi regroupés en classes. D'autres modèles des complexes QRS sont construits avec une base des six premières fonctions d'Hermite dans [Laguna 96]. Un algorithme adaptatif de classification est appliqué à cette modélisation. Une autre modélisation des paramètres des complexes QRS à l'aide des fonctions d'Hermite est proposée dans [Lagerholm 00] ; cette fois la classification est réalisée par l'algorithme d'entraînement, les réseaux SOM (Self Organizing Map) qui s'auto organisent en fonction de la structure naturelle des données en classification. Senhadji et al

proposent une reconnaissance des morphologies des complexes QRS à travers la décomposition dans des bases d'ondelettes [Senhadji 95]. Une tentative de classification des ondes P du signal à partir des dérivations XYZ de Frank est proposée dans [Carson 01] : après détection des complexes QRS, des fenêtres de signal de durée 400 ms, précédant le début des QRS, sont retenues. Elles sont supposées contenir les ondes P. La classification utilise trois méthodes indépendantes ; le discriminant linéaire de Fisher, le spectre de la transformée de Fourier discrète et la durée de l'onde P. La classification des ondes P normales et anormales est utile pour établir des diagnostics sur les défauts de conduction des oreillettes.

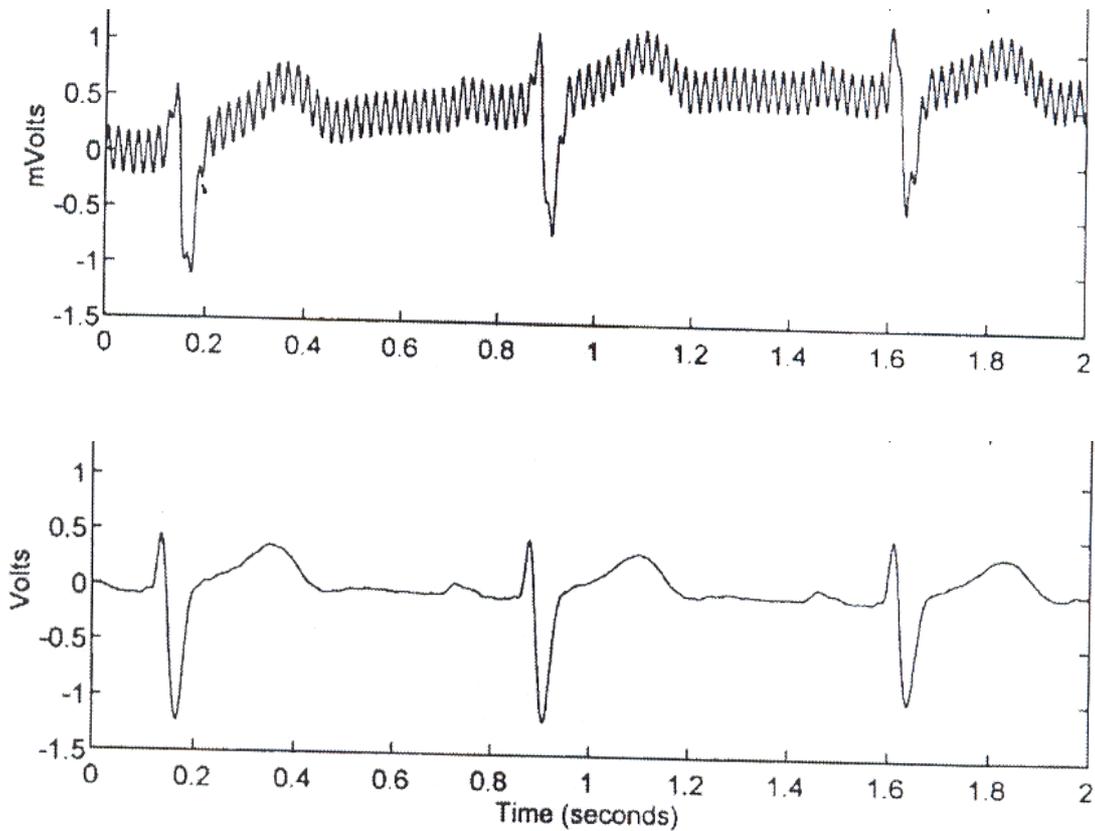
### I-4-3 Filtrage

Le signal ECG couvre la plage de fréquence 0,05-80 Hz [Stanley 87], la bande passante des circuits de l'enregistreur doit être juste légèrement supérieure à celle du signal pour qu'on obtienne un rapport signal sur bruit optimal. Le dernier étage de l'enregistreur incorpore un filtre passe bande qui isole le signal ECG selon ces caractéristiques fréquentielles. L'enregistreur comporte en plus un filtre réjecteur à 50 Hz dont le rôle est d'éliminer les interférences du secteur. D'autres opérations de filtrage visent à minimiser les effets des artefacts par parasitage, dus aux mauvais contacts temporaires d'électrodes ou des câbles, aux mouvements musculaires, à la respiration ou au support magnétique dans les cas holter [Leclercq 80]. La figure 1-11 établit l'encombrement spectral du signal ECG, du complexe QRS et des ondes P et T ; les spectres des bruits musculaires et des artefacts de mouvement y sont aussi estimés [Thakor 84]. La figure 1-12 est une illustration de l'effet du filtrage sur un ECG corrompu par des bruits.

Les résultats produits par les filtres analogiques ne sont pas suffisants. De nombreux travaux sont encore consacrés à la recherche des algorithmes destinés à la purification du signal ECG numérisé [Lander 93], [Jané 91], [Almenar 99], [Wachowiak 00], [Cherkassky 01] et [Augustyniak 03]. Les algorithmes récents de filtrage sont à base de la transformation en ondelettes [Senhadji 93]. Le filtrage se présente aussi comme une étape préliminaire incontournable pour la plupart des algorithmes de détection de complexes QRS [Henry 93], [Halmiton 88], [Xue 92]. Il en est de même pour la reconnaissance des potentiels tardifs [Jané 91], [Lu 01].



**Figure 1-11 : Encombrement spectral l'ECG et de certaines ondes caractéristiques**  
 A gauche : spectres de l'ECG, des complexes QRS, des ondes P et T.  
 A droite : spectres des QRS, des ondes P et T, ainsi que des artéfacts musculaires et de mouvement  
 [Thakor 84]



**Figure 1-12 : Effets du filtrage sur le signal ECG.**  
 (a) : Signal ECG bruité enregistré ; (b) : Même signal après filtrage.

#### **I-4-4 Extraction de l'ECG du fœtus**

L'ECG du fœtus donne d'importantes indications sur la santé et la souffrance foetales. L'analyse de l'ECG du fœtus est devenue une routine médicale en période de grossesse [De Lathauwer 00]. Une technique non agressive d'obtention de l'ECG du fœtus consiste à l'extraire de l'ECG de la mère, enregistré au niveau de l'abdomen. La difficulté dans ce procédé réside dans le fait que l'ECG du fœtus est non seulement noyé dans celui de la mère, mais aussi dans des bruits d'origines diverses (artefacts musculaires et respiratoires, interférences du secteur). De nombreux algorithmes permettant l'extraction de l'ECG du fœtus de celui de la maman ont été proposés. On distingue ceux basés sur une comparaison des caractéristiques des signaux ECG maternels recueillis aussi bien à l'abdomen qu'au niveau du thorax. En effet, l'ECG de la mère est supposé être très peu influencé par celui du fœtus lorsque recueilli au niveau de la poitrine. Des algorithmes basés sur les propriétés d'intercorrélacion et d'autocorrélacion de deux signaux sont développés dans [Bemmel 68] et [Abound 92]. Un algorithme reposant sur le filtrage adaptatif est décrit dans [Farrara 82]. D'autres algorithmes s'appuient sur l'ECG maternel abdominal uniquement [Senhandji 95]. De Lathauwer *et al* proposent une technique d'extraction par source séparée, on extrait le sous-espace FEKG (Fœtus EKG) de l'espace MEKG, l'espace MEKG (Mother EKG) étant ici le vectocardiogramme de la mère [De Lathauwer 00]. Un algorithme basé sur la décomposition en ondelettes, très proche de celui utilisé pour la détection des complexes QRS dans [Li 95], est développé par Khamene *et al*. Cet algorithme aboutit à de très bons résultats aussi bien en utilisant seul l'ECG maternel de l'abdomen, qu'en l'associant à celui de la poitrine [Khamene 00].

#### **I-4-5 Interprétation automatique du signal ECG**

Les premières initiatives d'interprétation automatique de l'ECG datent des années 1960 [Pipberger 62], [Klingeman 67]. Depuis lors, le développement des systèmes experts pour le diagnostic automatique de l'ECG n'a cessé de croître. La plupart d'enregistreurs ECG actuels intègrent un module d'analyse automatique du signal. En effet, le temps accordé au cardiologue pour prélever la multitude de mesures sur les 12 dérivationes et évaluer les caractéristiques du signal est limité ; en plus, il n'est pas possible d'établir mentalement toutes les corrélacions entre ces mesures. L'utilité des mesures automatiques et la nécessité des outils logiciels de classification et d'aide au diagnostic ne sont plus à démontrer. L'analyse de

l'électrocardiogramme comprend la mesure des amplitudes et durées ainsi que l'examen de la morphologie de l'onde P, du complexe QRS, de l'onde T, de l'intervalle PR, du segment ST, de l'intervalle QT (Figure 1-13). Le filtrage et l'extraction des ondes étudiés plus haut sont donc des étapes préliminaires dans les algorithmes d'analyse automatique de l'ECG. Le calcul des durées des segments et des ondes caractéristiques exige la localisation précise des débuts et fins de chaque onde, et cela sur chacune des 12 dérivations. Des algorithmes efficaces à cet effet sont présentés dans [Laguna 90], [Laguna 92] et [Daskalov 99]. En plus des valeurs des amplitudes et durées, la détermination des polarités des ondes et l'évaluation de leurs énergies sont mises à contribution.

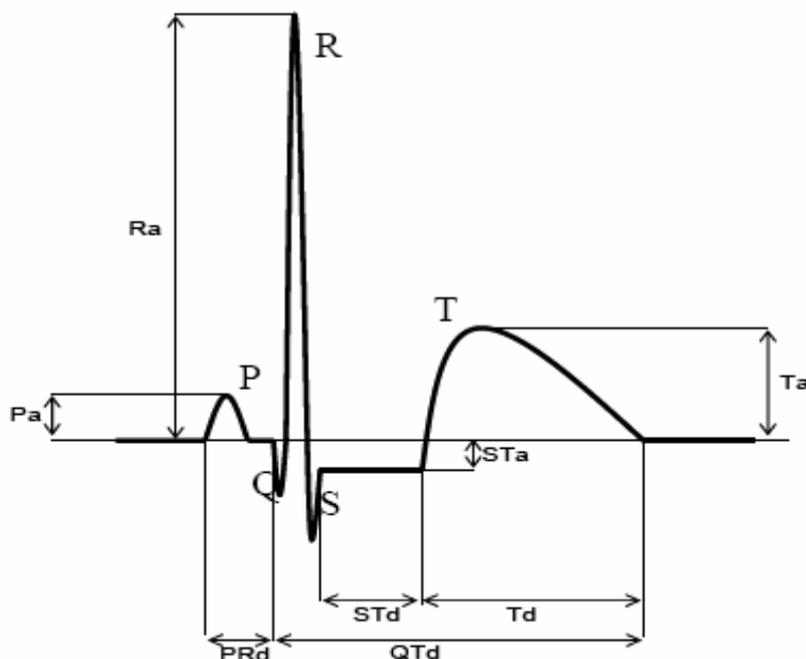


Figure1-13 : Paramètres d'intérêt pour la description d'un battement cardiaque.

La figure 1-14 est un exemple qui montre les paramètres évalués sur un cycle cardiaque dans le module d'interprétation automatique de l'ECG de Hewlett Packard (HP), publié avec autorisation dans [Celler 96].

Le diagnostic automatique en soi est un programme qui imite le raisonnement du cardiologue pour pronostiquer sur des pathologies [Micheal 94]. Le rythme cardiaque par exemple est évalué en calculant la moyenne des durées des intervalles RR. Les troubles de conduction sont établis à travers les mesures automatiques des intervalles PQ. Un intervalle PQ anormalement long traduit un long temps pris par l'impulsion électrique pour passer des oreillettes aux ventricules. L'occurrence des extrasystoles et les sites de déclenchements additionnels peuvent être révélés automatiquement. La forme du complexe QRS indique si une excitation additionnelle est générée par les nœuds sinuso-auriculaires, les nœuds auriculo-ventriculaires,

les fibres de Purkinje du ventricule gauche ou les fibres de Purkinje du ventricule droit. Les hypertrophies ventriculaires sont dues à un volume excessif de sang dans les ventricules (surcharge ventriculaire). Dans ces cas, les parois des muscles cardiaques sont comprimées et amincies ; cela entraîne l'augmentation de la résistance électrique. Les mesures des durées des complexes QRS ainsi que l'analyse de leurs morphologies permettent alors d'identifier automatiquement les hypertrophies ventriculaires. L'analyse des ondes T et des segments ST permet de pronostiquer sur des pathologies telles que : l'ischémie et l'infarctus du myocarde, les anomalies électrolytiques (hyperkaliémie, hypokaliémie, hypercalcémie, hypocalcémie, hypermagnésémie et hypomagnésémie), les problèmes endocriniens, métaboliques et neurologiques (hypothyroïdie et hyperthyroïdie, hypothermie, intoxication à l'oxyde de carbone, atteintes du système nerveux central, effets médicamenteux).

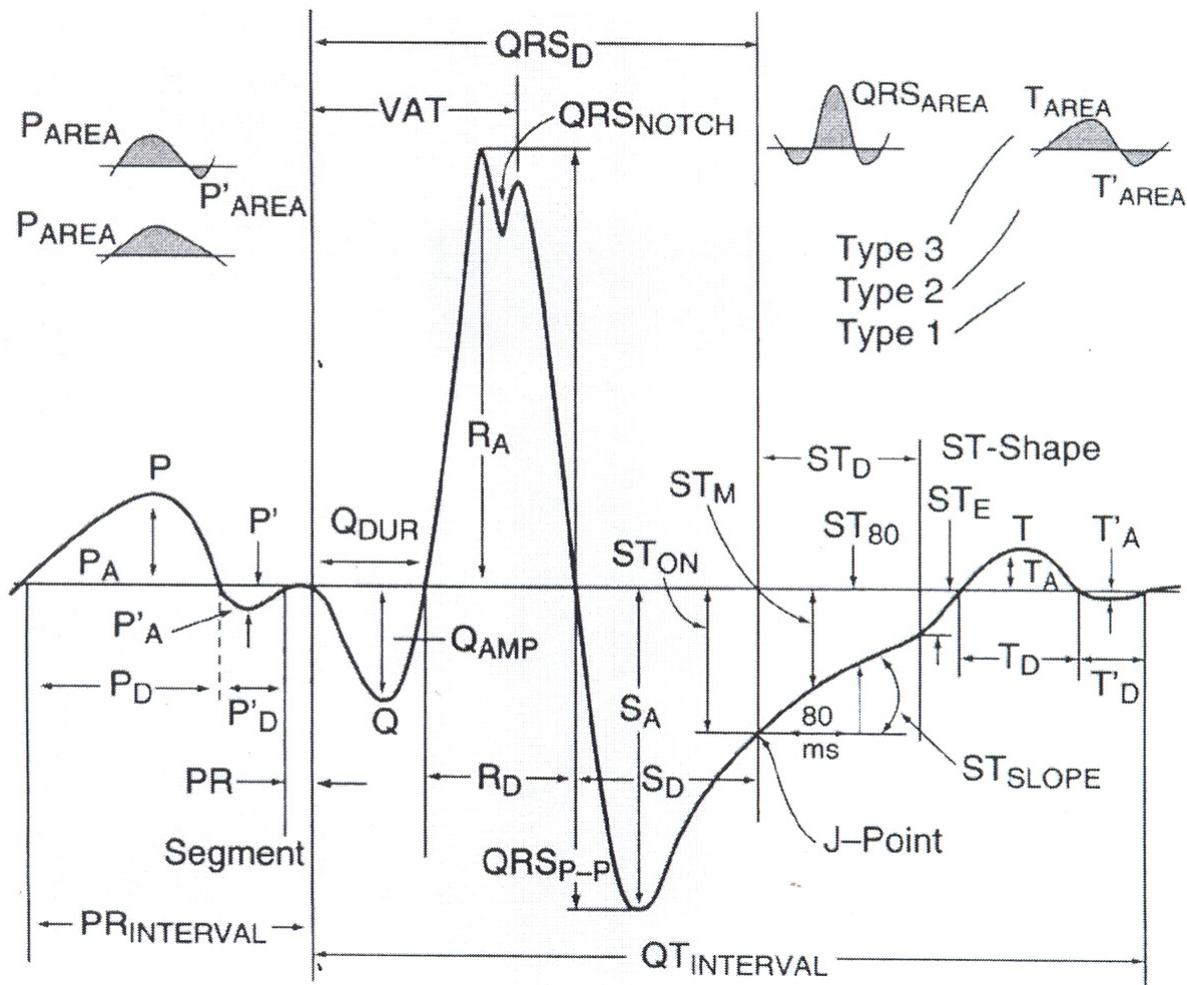


Figure 1-14 : Paramètres calculés dans le module d'interprétation automatique de l'ECG HP [Celler 96]

Une méthode d'analyse des signaux ECG est proposée dans [Koski 95] ; elle associe un algorithme de reconnaissance des formes à une syntaxe spécifique. L'interprétation s'appuie sur une machine à variables d'état dont les attributs sont les amplitudes et durées des ondes et intervalles. L'analyse des signaux et les diagnostics automatiques à l'aide de logique floue sont développés dans [Mehta 96], [Kundu 98] et [Grauel 98]. De nouvelles approches consistent en la mise au point des systèmes intelligents évolutifs dans lesquels la base des connaissances et l'arborescence des diagnostics grandissent au fur et à mesure que de nouvelles situations sont examinées ; les réseaux de neurones sont utilisés dans ces cas [Hu 97], [Stampkopoulos 98] et [Dubois 04].

## **I-5 ETAT DE L'ART SUR LA COMPRESSION DU SIGNAL ECG**

### **I-5-1 Méthodes temporelles de compression de l'ECG**

#### **I-5-1-1 Principes**

Les méthodes directes considèrent le signal ECG comme une succession de segments ou de courbes. La recherche des pentes, des débuts et des fins de ces segments, relève des estimateurs, de l'extrapolation et de l'interpolation. D'autres points caractéristiques des signaux tels que les extrema et les points d'inflexion doivent aussi être déterminés. Une étude exhaustive et comparative des méthodes directes de compression de l'ECG a été effectuée par Jallaledinne *et al* dans [Jallaledinne 90], où les plus citées telles que AZTEC, CORTES, FAN, TURNING POINT et SAPA sont analysées. Les méthodes directes ont l'avantage d'utiliser des algorithmes rapides, se prêtant mieux aux implémentations temps réel. Toutefois, elles introduisent beaucoup de distorsions ce qui exige en outre un filtrage passe-bas après reconstruction. Des algorithmes d'optimisation des méthodes directes de compression de l'ECG sont proposés dans [Haugland 97] et [Nygaard 01]. Une application plus récente de ces méthodes avec la prise en compte des redondances inter cycles cardiaques est présentée par Boucheham *et al* [Boucheham 04].

Le principe consiste à représenter des portions du signal ECG par des segments de droite. Seuls les paramètres de ces segments sont conservés et enregistrés. Ces paramètres doivent servir plus tard à régénérer le signal original. L'estimation polynomiale de l'échantillon  $y_n$  repose sur la formule d'interpolation de Newton. On peut écrire :

$$\hat{y}_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1} \dots + \Delta^m y_{n-1} \quad (1-2)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur des différences finies, définies de la manière suivante :

- différences d'ordre 1

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_n = y_n - y_{n-1} \quad (1-3)$$

- différences d'ordre 2 ;

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 ; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \dots \quad (1-4)$$

- et par récurrence, différences d'ordre  $n+1$

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 ; \quad \Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1 \dots \quad (1-5)$$

En effectuant des substitutions successives, on obtient :

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 - y_0, \quad \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \quad (1-6)$$

$$\text{Et } \Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k y_{n-k} \quad (1-7)$$

Et de façon analogue, on peut écrire

$$y_1 = y_0 - \Delta y_0, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_0 \quad (1-8)$$

Et par récurrence,

$$y_n = \sum_{k=0}^n c_n^k \Delta y_0 \quad (1-9)$$

$m$  est le degré du polynôme estimateur dans (1-2) ;  $m$  est rarement supérieur à 1 dans les algorithmes de compression de l'ECG.

Pour  $m = 0$ , on a  $\hat{y} = y_{n-1}$ , l'ensemble du signal estimé est constitué des segments horizontaux appelés plateaux. Deux échantillons sont logés dans le même plateau si l'écart entre leurs valeurs est inférieur à un seuil prédéfini. Lors de la compression, les paramètres de ces lignes horizontales (amplitude et durée) sont considérés en lieu et place du signal original. La reconstruction du signal revient à produire des segments horizontaux entre les points caractérisés par les paramètres stockés.

Pour  $m = 1$ , on a :

$$\hat{y}_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1} = 2y_{n-1} - y_{n-2} \quad (1-10)$$

La valeur estimée est un point situé sur une droite passant par les deux échantillons précédents. Les algorithmes utilisant ce prédicteur commence par tracer une droite entre les deux premiers échantillons du signal, une bande de largeur  $\varepsilon$ , centrée sur cette droite est considérée :  $\varepsilon/2$  est ici le seuil de tolérance accepté. Si l'échantillon

actuel tombe dans cette bande, il est ignoré. Dans le cas contraire, il est sauvegardé et une nouvelle droite est générée à partir de  $y_n$  et de l'échantillon précédent.

Les interpolateurs linéaires utilisent les échantillons futurs et passés pour décider si l'échantillon actuel est redondant. Par exemple, l'interpolateur d'ordre un, produit :

$$\hat{y} = \frac{(y_{n+1} + y_{n-1})}{2} \quad (1-11)$$

### I-5-1-2 Méthode AZTEC

L'un des premiers algorithmes de compression du signal ECG par approximations linéaires fût présenté par COX et al [COX 68] et baptisé AZTEC (Amplitude Zone Time Epoch Coding). AZTEC recherche des segments horizontaux dont la longueur est supérieure à 2 échantillons et représente les points contenus entre deux plateaux par des pentes .

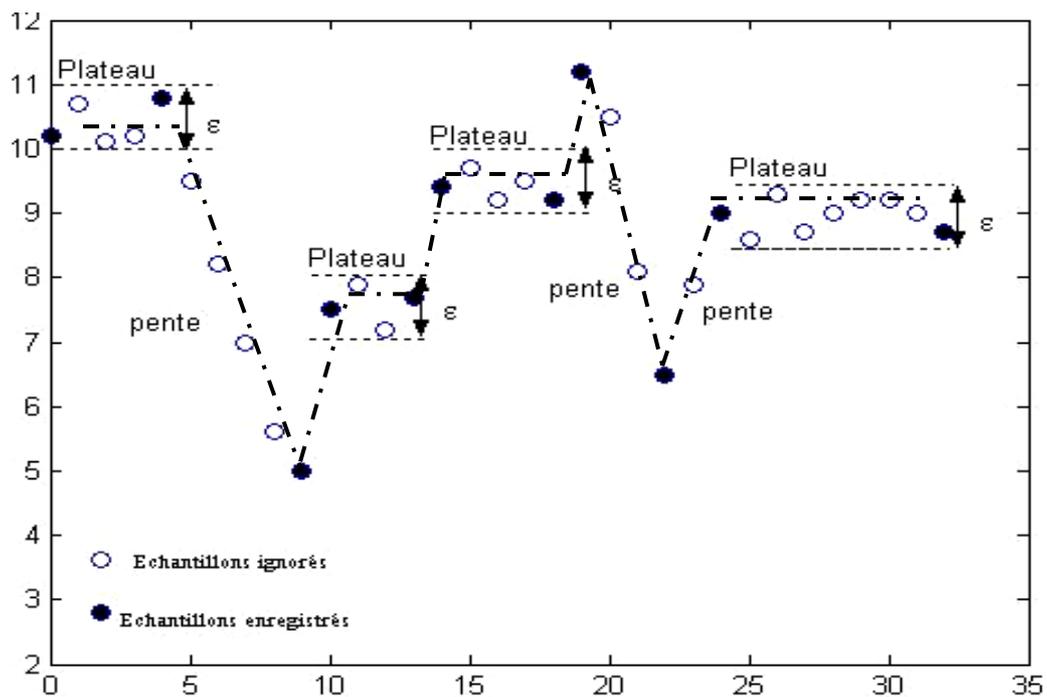


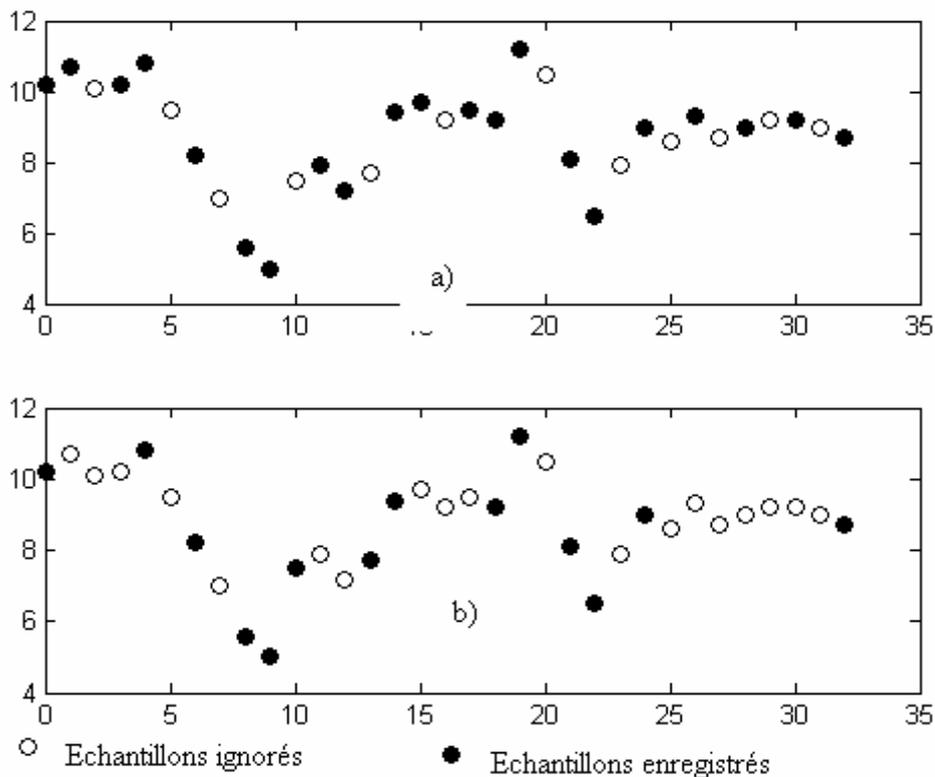
Figure 1-15 : Principe de l'algorithme AZTEC

On calcule la différence d'amplitude entre le point courant et le premier point du segment en construction. Cette différence est comparée à un seuil de décision. Si la différence dépasse le seuil, le premier point du segment ainsi que sa longueur sont enregistrés et le point courant devient le nouveau point de référence. Lorsque la longueur du segment ne dépasse pas deux échantillons, une pente est générée. La pente est interrompue et enregistrée (amplitude du dernier point et nombre de points)

lorsqu'elle change ou à la rencontre d'une ligne horizontale. Un bit supplémentaire de codage permet de faire la différence entre les plateaux horizontaux et les pentes. La figure 1-15 montre le fonctionnement de l'algorithme AZTEC.

Furth et Perez ont proposé une variante de l'algorithme AZTEC où le seuil de décision est rendu adaptatif. A cet effet, on calcule des paramètres statistiques du signal afin de réévaluer chaque valeur du seuil qui décroît normalement à l'approche des complexes QRS et croît ensuite après ces complexes QRS ; les statistiques du signal (valeur moyenne, écart type et moment d'ordre 3) sont exploitées pour calculer automatiquement le seuil [Furth 88]. D'autres modifications sont apportées à l'algorithme AZTEC par Mammen et Ramamurth. Ces auteurs appliquent AZTEC simultanément sur plusieurs dérivations de l'ECG. Lorsque le seuil est dépassé dans une dérivation, deux informations sont enregistrées : la durée des lignes et un vecteur contenant la valeur moyenne des échantillons de chaque voie [Mammen 90]

### I-5-1-3 L'algorithme CORTES



**Figure 1-16 : Fonctionnement des algorithmes TP et CORTES**  
 (a) : TP (Turning Point) ; (b) : CORTES

L'algorithme CORTES (Coordinate Reduction Time Encoding System) est une combinaison de la technique AZTEC avec la méthode Turning Point (TP). AZTEC est

appliqué aux régions du signal correspondant à la ligne isoélectrique et TP est utilisé sur les complexes QRS et les ondes environnantes. L'algorithme TP enregistre un échantillon sur deux. Son principe est décrit dans [Abenstein 82]. La figure 1-16 (a) donne une explication de son fonctionnement. Après compression par la méthode CORTES, la reconstruction du signal est réalisée par le tracé des plateaux discontinus AZTEC dans un premier temps. Les plateaux sont reliés entre eux par interpolation linéaire des paires TP (figure 1-16(b)).

### I-5-1-4 Les techniques FAN et SAPA

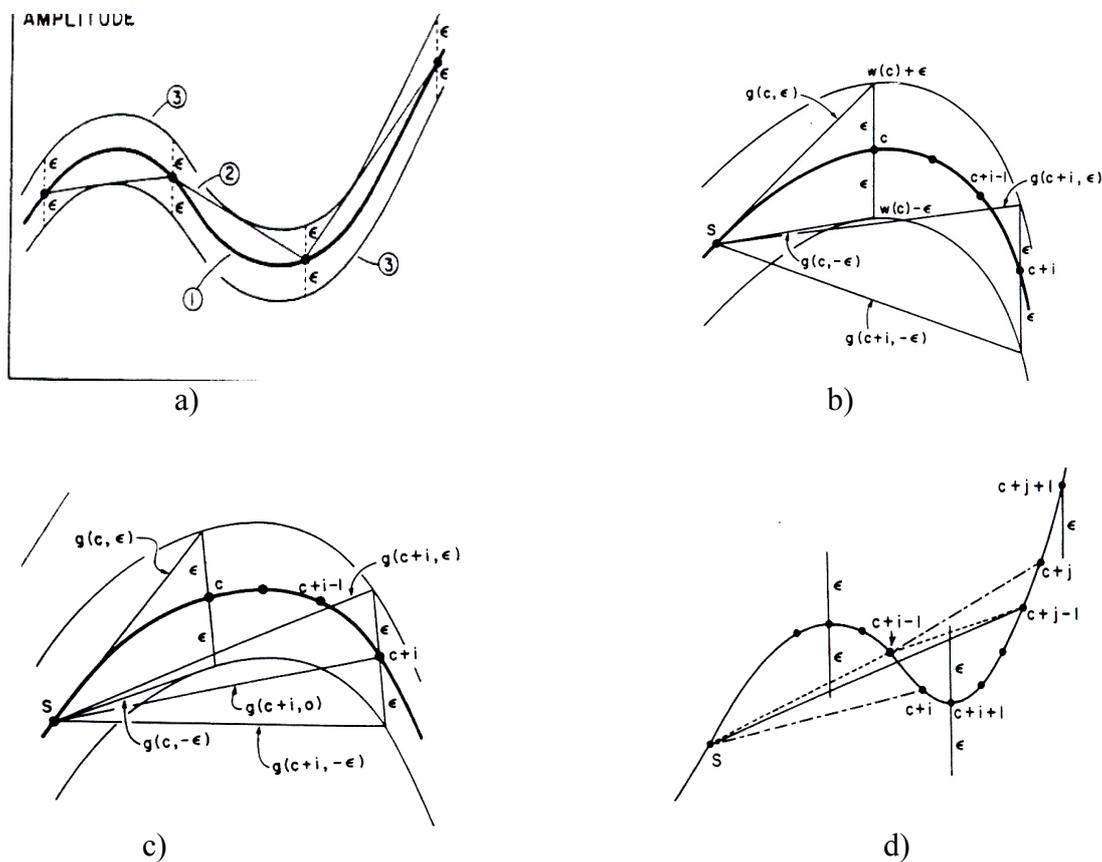


Figure 1-17: Principes des algorithmes SAPA [Ishijima 83]

a) Principe général, b) SAPA 1, c) SAPA 2, d) SAPA 3.

L'algorithme FAN (éventail) utilise un interpolateur d'ordre 1 avec deux degrés de liberté. A chaque pas, deux droites sont calculées partant du dernier point enregistré : la droite supérieure qui passe au-dessus du point courant et la droite inférieure qui passe en dessous. La distance entre chacune des droites et l'échantillon courant est égale au seuil de tolérance

prédéfini. Si l'échantillon qui suit le point courant se trouve encadré par ces droites, il devient le nouveau point courant et de nouvelles droites inférieure et supérieure sont générées. Le processus est répété jusqu'à ce qu'un point suivant tombe hors de l'éventail formé par les deux droites. Lors de la reconstruction du signal, les échantillons enregistrés consécutifs sont reliés par des droites.

L'algorithme SAPA (Scan Along Polygonal Approximation) consiste en la représentation du signal ECG par une succession des segments polygonaux. L'écart entre les segments (signal approché) et le signal original doit toujours être inférieur à un seuil prédéfini. Des trois algorithmes présentés dans [Ishijima 83], SAPA-2 donne les meilleurs résultats. La différence entre FAN et SAPA-2 réside dans le fait qu'en plus des deux pentes inférieures tracées dans FAN, une troisième droite est tracée entre le point suivant et le dernier échantillon enregistré. L'écart entre cette autre droite et le signal original doit être inférieur à un seuil de tolérance afin que le point courant soit considéré comme permanent. Les principes de SAPA, SAPA-1 et SAPA-2 et SAPA-3 sont donnés sur la figure 1-17.

### **I-5-1-5 Utilisations des fonctions Splines pour la compression du signal ECG**

Les fonctions Splines sont des tronçons de polynômes définis sur de sous intervalles et raccordés par des conditions de continuités. Par leur nature segmentée, les fonctions Splines permettent une interpolation efficace des caractéristiques locales d'un signal. Ceci comble certaines lacunes des polynômes d'interpolation de Lagrange qui donnent un résultat exact en tout point du support de façon globale. Une fonction Spline d'ordre  $m$  est formée de polynômes successifs de degré  $m$ . Elle est définie sur un intervalle  $[a, b]$ , ayant comme nœuds la suite :  $\mathbf{t} = \{t_0, t_1 \dots t_n\}$ , avec  $t_0 = a$  et  $t_n = b$ . Les polynômes  $p_{im}$  sont donc de la forme :

$$p_{im}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{im}x^m \quad \text{pour } t_i < x < t_{i+1} \quad (1-12)$$

Les polynômes  $p_{im}(x)$  se raccordent jusqu'à la dérivée  $(m-1)^{\text{ième}}$  aux instants  $t_0, t_1 \dots t_n$ . En d'autres termes,  $p_{im}^{(k)}(t_i) = p_{i+1}^{(k)}(t_i)$  (1-13)

Les fonctions Spline d'ordre  $\mathbf{m}$ , définies sur l'intervalle  $[a, b]$ , forment un espace vectoriel de dimension  $\mathbf{m+n}$ , noté  $\mathcal{S}_{m,t}$ .

Avec les équations (1-12), on dispose de  $n(m+1)$  inconnues  $a_{im}$  alors que les relations (1-13) forment un système de  $m(n-1)$  équations. On établit les autres équations des coefficients à

partir de la condition de proximité du signal à approcher et d'autres conditions complémentaires. Nous allons limiter l'étude au cas des très populaires Splines cubiques ( $m=3$ ) qui ont été adoptées dans les calculs scientifiques [Greville 67] et [Recipes 92].

$$\text{On peut donc écrire : } p_{i3}(x) = p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3 \quad (1-14)$$

L'idée de réaliser la compression du signal ECG avec les fonctions Splines cubiques consiste à construire l'ensemble des nœuds  $\mathbf{t} = \{t_0, \dots, t_n\}$  ayant un petit nombre d'éléments. Les positions  $t_i$  et l'ensemble des valeurs du signal à ces positions  $\mathbf{y} = \{y_0, \dots, y_n\}$  seront enregistrés. Lors de la reconstruction du signal, les  $y_i$  successifs sont interconnectés par interpolation de Splines. L'étape de création des nœuds  $t_i$  est donc la plus délicate dans ce processus. Dans la majorité des algorithmes, on choisit des instants caractéristiques du signal tels que les pics, les vallées, les passages par zéro, les points d'inflexion ou les points de grande courbure pour construire l'ensemble  $\mathbf{t}$ . Plusieurs techniques sont utilisées pour détecter ces points caractéristiques du signal : on peut réaliser la comparaison des valeurs des échantillons successifs pour déceler les minima, les maxima et les passages par zéro. L'autre méthode est de procéder avec la dérivée première du signal puisque cette dérivée s'annule aux extremums. L'équivalent de la dérivée pour les signaux échantillonnés étant les différences d'ordre un, de faibles valeurs de ces différences d'ordre un traduisent les minima et les maxima. De même, les faibles valeurs des différences d'ordre deux sont caractéristiques des points d'inflexion alors que de grandes valeurs des différences d'ordre deux traduisent les zones du signal de grande courbure. Imai et al ont proposé un algorithme de compression de l'ECG avec les fonctions Splines, dans lequel l'extraction des paramètres du signal pour constituer les nœuds  $t_i$  est basée sur les différences d'ordre 2 [Imai 85]. Les points caractéristiques retenus dans cet algorithme sont les minima, les maxima et les instants de large courbure du signal. Les B-Splines sont d'utilisation beaucoup plus facile que les Splines naturelles. En effet, les B-splines sont à support compact puisqu'elles sont nulles en dehors de l'intervalle de définition. Une B-splines  $B_{i,m,t}(x)$  d'ordre  $m > 0$ , ayant pour nœuds  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}$  peut être définie à l'aide de la relation de récurrence suivante [GREEN 05] :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i,1,t}(x) = 1 \quad \text{si } t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ B_{i,1,t}(x) = 0 \quad \text{ailleurs et} \\ B_{i,q,t}(x) = \frac{t_{i+q} - x}{t_{i+q} - t_{i+1}} B_{i+1,q-1,t}(x) + \frac{x - t_i}{t_{i+q-1} - t_i} B_{i,r-1,t}(x) \quad \text{avec } q = 2, 3 \dots m \end{array} \right. \quad (1-15)$$

Les termes  $\frac{t_{i+q} - x}{t_{i+q} - t_{i+1}}$  et  $\frac{x - t_i}{t_{i+q-1} - t_i}$  sont interpolés comme nuls lorsque  $t_{i+q} - t_{i+1} = 0$  et  $t_{i+q-1} - t_i = 0$  respectivement.

Il est clair que  $B_{i,q,t}(x) = 0$  si  $x \notin [t_i, t_{i+m}]$ . D'après le théorème de Shoenberg [Greville 67], on peut construire une base de  $S_{m,t}$  de telle sorte que toute fonction  $f(x) \in S_{m,t}$  soit représentée de façon unique sous la forme ;

$$f(x) = \sum_{i=-m+1}^m a_i B_{i,m,t}(x) \quad (1-16)$$

Le problème de compression d'un signal dépend du nombre et des positions de noeuds retenus pour représenter le signal. Pour utiliser les B-Splines en compression de l'ECG, Karczewicz *et al* proposent la sélection des nœuds par un processus d'optimisation. A cet effet, les ondes R sont d'abord détectées et le signal est segmenté en intervalle R-R. Une fois que les nœuds représentatifs sont déterminés pour une fenêtre R-R, ceux de la fenêtre suivante sont déduits selon la similitude qui existe entre ces 2 fenêtres de signal. Lorsqu'il n'y a pas de corrélation entre la fenêtre courante et la fenêtre précédente, l'algorithme de détermination des nœuds est appliqué, et la fenêtre courante devient une nouvelle fenêtre de référence [Karczewicz 97]. Ces auteurs envisagent d'ailleurs, la création d'un dictionnaire de fenêtres de référence, dans lequel chaque intervalle R-R du signal pourrait y retrouver un représentant.

### **I-5-1-6 Compression des signaux ECG avec des polynômes quadratiques**

La majorité des méthodes directes de compression du signal ECG reposent sur des approximations linéaires. Les morphologies des signaux ECG présentent pourtant beaucoup plus d'allures curvilignes que rectilignes. Fort de ce constat, Nygaard *et al* ont eu l'idée de proposer un algorithme de compression pour lequel les fonctions d'interpolation sont des polynômes de second degré [Nygaard 99]. Comme dans le cas des fonctions Splines, il faut résoudre deux problèmes simultanément : le premier problème consiste à construire un vecteur de nœuds  $\mathbf{t} = \{t_0 \dots t_n\}$  avec le minimum d'éléments permettant de réaliser la meilleure approximation du signal sur un intervalle de temps. En deuxième lieu, il faut déterminer, de façon optimale, les coefficients des monômes des polynômes quadratiques ; en d'autres termes, étant donné que sur un intervalle  $[t_i, t_j]$ , le signal ECG aura pour expression (1-17) :

$$s_{ij}(x) = a_{0ij} + a_{1ij}x + a_{2ij}x^2, \quad (1-17)$$

on devra déterminer les valeurs optimales de  $a_{0ij}$ ,  $a_{1ij}$  et  $a_{2ij}$ . On est confronté à deux problèmes d'optimisation. Pour les résoudre, Nygaard *et al* s'appuient sur la théorie des graphes. En définissant un graphe  $G(\mathbf{V}, \mathbf{A})$  dont  $\mathbf{V} = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  est l'ensemble des sommets alors que l'ensemble des arrêtes  $\mathbf{A}$  est constitué de couples  $[t_i, t_j] \in \mathbf{V}$ , avec  $i < j$ . La longueur de l'arrête  $[t_i, t_j]$  est définie comme l'erreur de reconstruction en éliminant tous les nœuds situés entre  $t_i$  et  $t_j$  [Nygaard 99]. Le problème se ramène donc à celui de trouver le plus court chemin pour aller de  $t_i$  à  $t_j$ , avec des contraintes. La principale contrainte est ici l'erreur maximale admissible. Un algorithme de programmation proposé dans [Haugland 97] et baptisé CCSP (Cardinality Constrained Shortest Parth) est utilisé pour la résolution. Cet algorithme a d'ailleurs été très sollicité dans l'optimisation des méthodes directes de compression du signal ECG [Haugland 96], [Haugland 97], [Herber 96], [Nygaard 01]. La figure 1-18 illustre une courte séquence d'interpolation d'un signal avec les polynômes quadratiques.

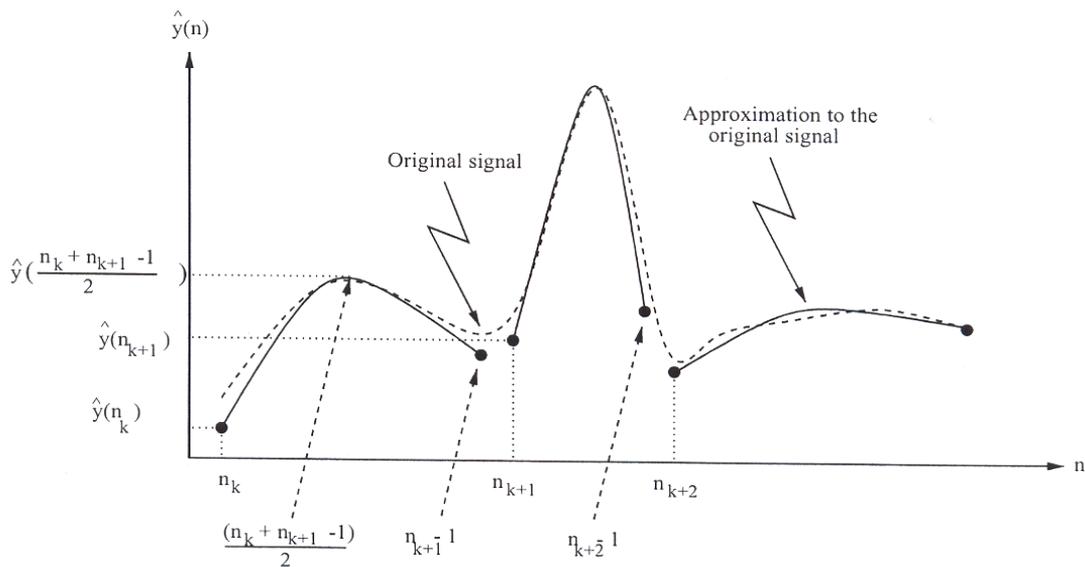


Figure 1-18 : Séquences d'interpolation d'un signal avec des polynômes quadratiques [Nygaard 99]

## I-5-2 Compression de l'ECG par transformation du signal

Les méthodes par transformation ramènent les échantillons corrélés du signal ECG dans un espace où les données sont moins corrélés, ceci à travers la décomposition dans une base de fonctions orthogonales adéquates.

### I-5-2-1 Transformation de Karhunen-Loève (KLT)

La transformation de Karhunen-Loève utilise une approche de compression par minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Etant donné un ensemble  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , des vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  ( $N$  très grand), on désire réaliser la compression de l'un de ces vecteurs  $X_j$ ,  $j$  étant choisi au hasard dans l'espace de probabilité  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  où la même probabilité  $1/n$  est attribuée à chaque  $j$ . On suppose  $X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$  pour des raisons de simplicité. Selon un schéma de compression linéaire, on veut réduire la grande dimension  $N$  à une beaucoup plus petite  $q$ . Les vecteurs compressés  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  doivent donc appartenir à un espace de dimension  $q$  et noté  $V_q$ . Les erreurs provoquées par la compression sont mesurées par la différence d'énergie car  $\mathbb{R}^N$  a une structure euclidienne. Les  $Y_j$  sont des projections de  $X_j$  sur  $V_q$ . Si on reste dans la situation d'équiprobabilité où tous les  $X_j$  ont la même probabilité  $1/n$ , cela conduit, pour un  $q$  donné, à rechercher l'espace  $V_q$  qui offre le meilleur support pour le nuage de vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , c'est-à-dire l'espace  $V_q$  pour lequel l'erreur quadratique moyenne  $\sum_{j=1}^n \|X_j - Y_j\|^2$  est minimale. On démontre que les espaces  $V_q$  sont emboîtés avec  $V_0 = \{0\}$ ,  $V_1$  l'axe d'inertie et ainsi de suite jusqu'à  $V_N = \mathbb{R}^N$  [Meyer 00]. La base de Karhunen-Loève consiste en une nouvelle base  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , telle que pour tout  $q \leq N$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_q$  forme une base de  $V_q$ . La KLT est le procédé le plus efficace de compression avec l'erreur quadratique moyenne minimale. Toutefois, on ne saurait utiliser la transformation de Karhunen-Loève si l'on ignore le modèle stochastique du signal que l'on veut compresser.

Nasir AHMED *et al* publièrent en 1975 un article qui est resté très célèbre sur la compression de l'ECG à travers la KLT. En considérant  $\{X\}$  l'ensemble des vecteurs issus de l'échantillonnage d'un électrocardiogramme, un élément  $X$  de  $\{X\}$  peut être représenté sous la forme (1-18) :

$$X = \sum_{j=1}^N y_j \phi_j = \Phi Y \quad (1-18)$$

où  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$  est une matrice carrée d'ordre  $N$ . La base  $\{\phi\}$  est choisie orthonormée. Il s'ensuit que :

$$y_i = \phi_i^T X \quad i = 1, 2 \dots N \quad (1-19)$$

On ordonne les coefficients  $y_i$  par ordre décroissant. Par seuillage, on ne retient que  $M$  des  $N$  composantes de  $Y$  pour estimer  $X$ , on introduit une erreur dont la valeur quadratique moyenne est donnée ci-après :

$$\bar{e}^2(M) = \sum_{j=M+1}^N \phi_j^T \Sigma_X \phi_j \quad (1-20)$$

où  $\Sigma_X = E(XX^T)$  est la matrice de covariance de  $\{X\}$ . Le choix de  $\Phi$  est optimal lorsque les  $\phi_j$  sont les vecteurs propres de la matrice de covariance  $\Sigma_X$ . L'erreur quadratique moyenne est alors :

$$\bar{e}^2(M)_{opt} = \sum_{j=M+1}^N \lambda_j \quad (1-21)$$

où  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de  $\Sigma_X$ . La représentation de l'équation (1-20) en terme de valeurs propres de la matrice de covariance  $\Sigma_X$  est la version discrète du développement en séries de Karhunen-Loève. La transformation orthogonale correspondante est l'équation (1-21). Face à l'énorme charge de calcul liée à la KLT, Ahmed *et al* préconisent une transformation non optimale dans laquelle les coefficients sont partiellement corrélés. L'algorithme est appliqué sur de nombreux signaux ECG normaux et pathologiques, tous échantillonnés à 400 Hz. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec d'autres transformations : la transformation en cosinus discrète (DCT), la transformation de Haar (HaT), la transformation identité (IT). Pour le même taux de compression, la KLT conduit à une erreur quadratique moyenne nettement inférieure à celles produites par les autres transformations [Ahmed 75].

Deux applications de la KLT en traitement des vectocardiogrammes (VCG) sont proposées dans [Womble 77]. La première réduit les effets de la respiration et de l'orientation géométrique du cœur du malade au moment de l'enregistrement du signal. La deuxième application traduit le développement du VCG en série de Karhunen-Loève. Les auteurs montrent que la charge de calcul diminue considérablement si l'on résout le problème du calcul des vecteurs propres et des valeurs propres des grandes matrices, hors ligne et une fois pour toutes. On aboutit à des taux de compression de l'ordre de 12 : 1. Bien que seuls les signaux VCG aient été utilisés, on obtiendrait les mêmes résultats sans modification de l'algorithme avec d'autres signaux ECG. Il suffira simplement de scinder de façon appropriée les électrodes pour l'enregistrement des 12 dérivations de l'ECG en

groupes de 3 électrodes, chaque groupe devant ensuite effectuer l'enregistrement comme s'il s'agissait du VCG.

Dans [Ahmed 75], le modèle stochastique du signal est élaboré à partir d'un ensemble de 300 signaux ECG dont une moitié était des signaux pathologiques et l'autre moitié était constituée des signaux normaux. Dans [Womble 77], une statistique des signaux est construite sur les enregistrements d'ECG de 900 patients. Une autre application de la KLT pour la compression de l'ECG avec en plus, le filtrage des bruits qui contaminent les signaux, est présentée dans [Olmos 99]. Comme il n'existe pas d'algorithme rapide pour la KLT, on lui préfère souvent d'autres transformations, comme les transformations spectrales ou les transformations en ondelettes.

### I-5-2-2 Transformations sinusoidales

La transformation de Fourier et d'autres transformations qui s'en déduisent telles que la transformation en sinus et la transformation en cosinus sont très utilisées en analyse et filtrage du signal. Ces transformations possèdent des algorithmes rapides à l'exemple de la FFT (Fast Fourier Transform) et ses variantes. La variable dans l'espace transformé est la fréquence, ce qui permet d'utiliser ces décompositions pour observer la répartition fréquentielle du signal. La prépondérance des composantes basses fréquence dans le signal ECG se traduit au niveau de la transformation par la concentration de la quasi-totalité de l'énergie du signal dans les premières harmoniques. Il est donc possible de mettre à zéro une proportion importante des coefficients de Fourier et donc de coder le signal ECG à moindre coût.

AL NASHASH propose une méthode basée sur l'estimation adaptative des coefficients de Fourier à l'aide d'un algorithme des moindres carrés. Partant du constat que le signal ECG est pseudo-périodique, on peut calculer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  de la série ci-après (1-22) :

$$S_m = \sum_{n=1}^M a_n \cos(2\pi \frac{nm}{T_0}) + \sum_{n=1}^M b_n \sin(2\pi \frac{nm}{T_0}) \quad (1-22)$$

où :  $m$  est l'indexation discrète du temps  
 $n$  est l'indice des coefficients  
 $T_0$  la durée fixée du cycle cardiaque

La série (1-22) n'est autre chose que l'approximation du développement en séries de Fourier d'un signal périodique. Les coefficients sont estimés sur des fenêtres de taille fixe,

centrées sur le complexe QRS contenant 300 échantillons chacune. On obtient un taux de compression de 16 :1 pour un PRD de 3% [Nashash 94]. SHANKARA Reddy propose le calcul des coefficients significatifs de transformation avec la FFT. Chaque cycle cardiaque est scindé en deux parties : le complexe QRS et le reliquat. On enregistre les premières harmoniques de chaque partie. L'algorithme prévoit aussi l'enregistrement de la taille de la fenêtre lorsqu'elle n'est pas constante [Shankara 86]. Feng ZOU et Richard GALLAGHER associent la transformation en cosinus discrète (DCT) à la transformation en ondelettes (DWT) pour réaliser la compression des signaux ECG [Zou 94], les coefficients de la DCT étant déterminés par :

$$C(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2n+1}{2N} m\pi\right) \quad (1-23)$$

avec  $m = 0, 1, \dots, N-1$

L'expression (1-23) est aussi utilisée dans [Madhukar 93] pour la compression des signaux ECG avec extraction des paramètres. Nous avons déjà signalé l'utilisation de la DCT en comparaison avec la KLT dans [Ahmed 75]. De même, les résultats de la transformation de Legendre discrète (DLT) sont comparés avec ceux de la DCT dans [Philips 92].

### **I-5-2-3 Transformations quasi spectrales**

Les transformations de Walsh et de Haar sont parfois utilisées pour la compression de l'ECG. Ces transformations ne sont pas optimales au sens de la concentration de l'énergie du signal dans une faible proportion de coefficients. Elles disposent par contre d'un grand avantage qui est l'extrême simplicité des calculs. L'utilisation des fonctions de Walsh comme base orthogonale de décomposition pour la compression de l'ECG est présentée dans [Kuklinski 83]. En rappel, les fonctions de Walsh tout comme celles de Haar ne prennent que les valeurs +1 et -1 (figure 1-19). Il est donc possible que la transformation de Walsh (WhT) représente un signal ECG échantillonné par additions et soustractions des échantillons selon une suite particulière.

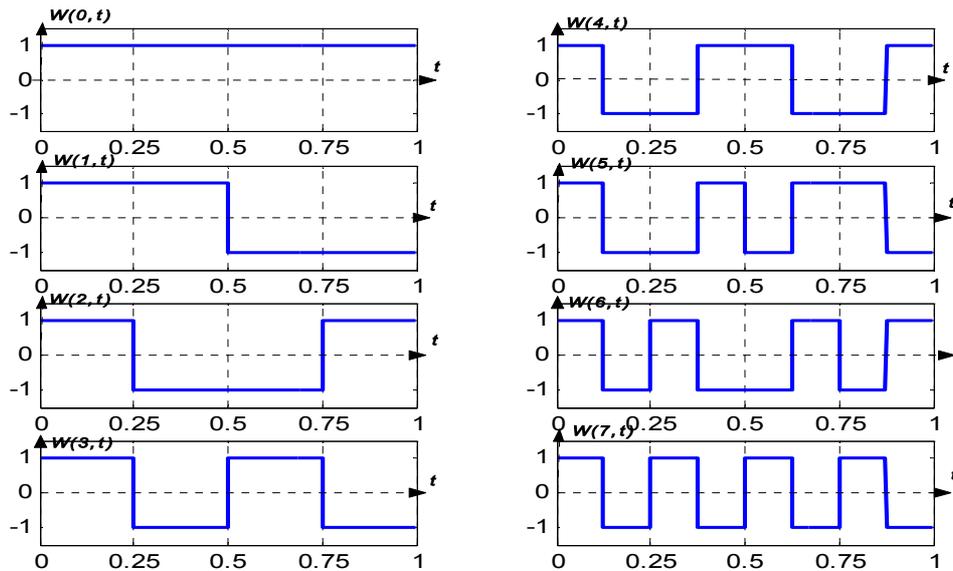


Figure 1-19 : Quelques fonctions de Walsh

Les coefficients de la WhT sont déterminés par :

$$C(m) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)Wal(m, n) \quad (1-24)$$

avec  $m = 0, 1, \dots, N-1$

$N$  : est le nombre d'échantillons contenus dans le signal

$s(n)$  : sont les valeurs des échantillons du signal

La transformation inverse est donnée par :

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} C(m)Wal(n, m) \quad (1-25)$$

Présentée sous cette forme, la WhT exige  $N^2$  opérations. Il existe des algorithmes rapides pour la transformation de Walsh (FWhT : Fast Walsh Transform). Un exemple d'algorithme de type FWhT est développé dans [Kuklinski 83].

Kuklinski applique cette méthode sur des fenêtres de 512 échantillons de signaux ECG. Les échantillons sont codés sur 12 bits et la fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz. Deux stratégies de compression sont mises en place. La première consiste à utiliser la quantification scalaire pour coder les 512 coefficients obtenus avec un nombre de bits inférieur à 12 (entre 3 et 11 bits) ; la deuxième stratégie revient à utiliser un petit nombre de coefficients pour reconstituer le signal, en mettant à zéro tous les coefficients inférieurs à un seuil prédéterminé. Les fonctions de Walsh étant par nature discontinues, l'introduction des bruits hautes fréquences est évidente. C'est pour cela qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie du 9<sup>ème</sup> ordre est prévu pour lisser le signal reconstitué. Le réseau de courbes de la figure 1-20 matérialise les résultats produits [Kuklinski 83] :

chaque courbe caractérise une erreur quadratique moyenne normalisée en fonction d'une part des variations du rapport de compression qui est :

$$\text{Rapport de compression} = \left( \frac{512}{\text{nbre de coeff pour reconstruction}} \right) \quad (1-26)$$

et d'autre part du nombre de bits utilisés pour coder les coefficients. Les zones de coude sur ces courbes correspondent aux optimums.

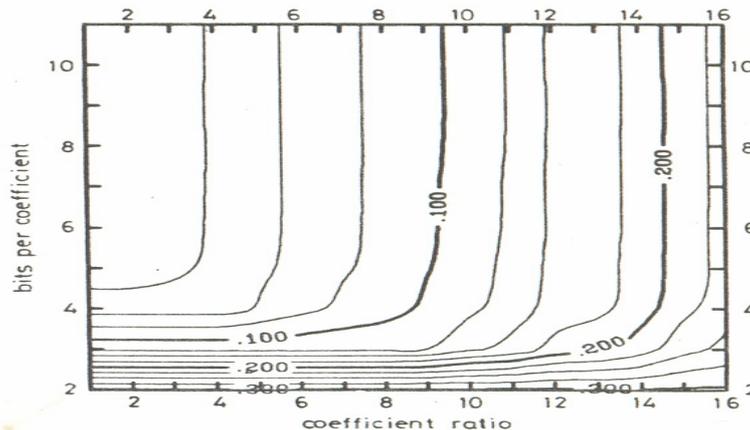


Figure 1-20 : Résultats de compression des signaux ECG avec la transformation de Walsh [Kuklinski 83].

#### I-5-2-4 Transformations en ondelettes

La transformation de Fourier permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Elle est idéale pour des signaux stationnaires. On peut aussi l'appliquer aux signaux non stationnaires si l'on s'intéresse seulement aux composantes fréquentielles que contiennent ces signaux, sans se soucier à quels instants apparaissent ces composantes spectrales. Pour certains signaux non stationnaires comme les signaux bioélectriques (ECG, EEG, EMG ...etc.), la nécessité d'une localisation temporelle des composantes fréquentielles a provoqué l'invention d'autres transformations pour la représentation temps - fréquence. C'est le cas de la transformation de Fourier à court terme de Gabor (STFT : Short Term Fourier Transform), de la distribution de Wigner-Ville (WVD) et de la transformation en ondelettes (WT). Ces transformations se heurtent au principe d'incertitude de Heisenberg. Ce principe, défini à l'origine en mécanique quantique, stipule qu'on ne peut pas déterminer simultanément et avec exactitude la vitesse et la position d'une particule en mouvement. Transposé en traitement de signal, le principe d'Heisenberg indique qu'on ne peut pas déterminer exactement quelle composante fréquentielle apparaît sur un signal à un instant donné. Les transformations citées ci-dessus tentent seulement d'identifier dans un signal les bandes de fréquences qui existent

sur un intervalle de temps donné. On se retrouve donc face à un problème de résolution qui a été examiné pour la première fois par Gabor à travers la STFT [Gabor 46]. La WT apporte des améliorations substantielles à de tels processus. Nous n'allons pas rentrer dans les fondements théoriques et mathématiques de la construction des ondelettes et de l'analyse multirésolution. Le lecteur pourra consulter [Daubechies 88], [Waku 93], [Cohen 95] et [Chaplais 99] pour plus de détails. Nous donnons ci-après quelques résultats essentiels en théorie des ondelettes.

La transformation en ondelettes continues (WT) d'un signal  $x(t)$  est donnée par :

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) x(t) dt \quad (1-27)$$

où  $\psi$  est l'ondelette mère analysante,  $a$  est un facteur d'échelle de dilatation temporelle et  $b$  est un facteur de translation dans le temps.

Lorsque  $a$  et  $b$  prennent des valeurs discrètes avec  $a = 2^i$  et  $b = m2^i$ , on obtient la transformation en ondelettes discrète (DWT) :

$$W(i, m) = 2^{-i/2} \sum_n x(n) \psi\left(\frac{n}{2^i} - m\right) \quad (1-28)$$

L'analyse multirésolution interprète la transformation en ondelettes comme une décomposition dans les espaces successifs d'approximations et de détails. L'approximation, ou tendance, à l'échelle  $j$  est :

$$x_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \quad (1-29)$$

avec  $a_{j,k} = \langle x, \varphi_{j,k} \rangle$ ,  $\varphi(t)$  est la fonction échelle et les  $\varphi_{j,k}(t)$  engendrent les espaces d'approximation emboîtés.

La fluctuation, ou détail, à l'échelle  $j$  s'écrit :

$$d_j(t) = x_{j-1} - x_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1-30)$$

avec  $d_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$ ,  $\psi(t)$  reste toujours l'ondelette mère et les  $\psi_{j,k}(t)$  engendrent les espaces de détails.

Des filtres numériques de réponses impulsionnelles  $h(n)$  et  $g(n)$  sont associés à l'analyse multirésolution par :

$$h(n) = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle \quad \text{et} \quad g(n) = \langle \psi, \varphi_{-1,n} \rangle \quad (1-31)$$

On démontre que

$$g(n) = (-1)^n h(1-n) \quad (1-32)$$

Le filtre  $h$  est un filtre passe bas alors que  $g$  est un filtre passe haut. Il est développé dans [Mallat 89], un algorithme récursif de calcul des coefficients d'approximation  $a_{j,n}$  et des coefficients de détails  $d_{j,n}$  à partir de ces filtres. Cet algorithme donne lieu aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= \sum_l \tilde{h}(2n-l)a_{j-1,l} \\ d_{j,n} &= \sum_l \tilde{g}(2n-l)a_{j-1,l} \end{aligned} \quad (1-33)$$

$\tilde{h}(n)$  et  $\tilde{g}(n)$  sont les filtres symétriques respectifs de  $h(n)$  et  $g(n)$  :  $\tilde{h}(n) = h(-n)$

L'algorithme de reconstruction donne :

$$a_{j-1,n} = \sum_k a_{j,k} h(n-2k) + \sum_k d_{j,k} g(n-2k) \quad (1-34)$$

Le calcul de la transformée en ondelettes en multirésolution n'a donc besoin que des filtres.

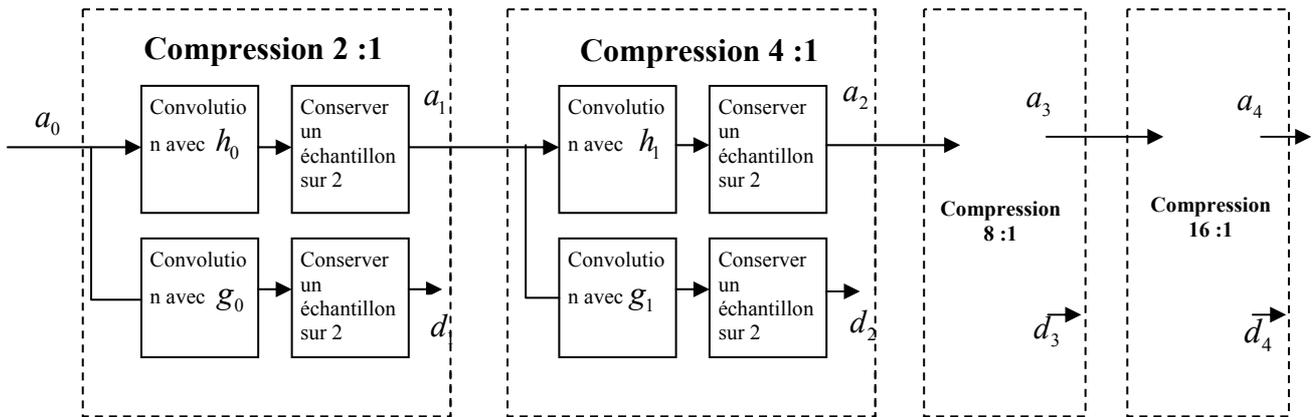


Figure1-21 : Principe de compression des signaux ECG avec la DWT [Thakor 93]

L'une des premières utilisations de la transformée en ondelettes pour la compression des signaux ECG est réalisée dans [Crowe 92]. On y utilise une des bases d'ondelettes construites dans [Daubechies 88] pour décomposer des fenêtres de 1026 échantillons de signal. La décomposition produit 1024 coefficients après 10 étages de filtrage. A la reconstruction, on ignore les coefficients inférieurs à un seuil donné. Les auteurs constatent que les coefficients prépondérants décrivent les complexes QRS et que ces complexes sont bien reconstruits même à de forts taux de compression. Thakor *et al* [Thakor 93] exploitent l'analyse multirésolution pour décomposer le signal ECG en

approximations et détails. A chaque niveau de résolution, on réalise la convolution des échantillons avec des filtres dont les coefficients avaient été déterminés dans [Mallat 89]. Le diagramme synoptique de cet algorithme est montré sur la figure 1-21 [Thakor 93]. On obtient les résultats du tableau 1-2.

**Tableau 1-2 : Résultats de compression par DWT [Thakor 93]**

<b>Taux de compression</b>	<b>PRD (%)</b>
2 :1	2.2
4 :1	3.3
8 :1	5.9

F. ZOU et R. Gallager ont expérimenté une combinaison WT-DCT pour compresser les signaux ECG. Ils envisagent deux procédés. Le premier consiste en les étapes suivantes [Zou 94] :

- Effectuer le développement en DWT du signal et retenir les coefficients prépondérants ;
- Réaliser la DWT inverse à partir des coefficients retenus ;
- Soustraire le résultat du signal original ;
- Développer la différence en DCT et conserver les coefficients prépondérants.

La deuxième approche repose sur le principe de l'énergie maximale. En effet, si la DCT et la DWT sont normalisées, les coefficients du même ordre de grandeur doivent contenir la même quantité d'énergie. Pour avoir une grande quantité d'énergie dans un petit nombre de coefficients, on doit retenir les composantes de grande énergie aussi bien en DWT qu'en DCT. La procédure est donc résumée comme suit :

- Réaliser la DWT et la DCT pour le même signal ;
- Comparer les coefficients de la DWT et ceux de la DCT et retenir les coefficients de grandes valeurs ;
- Réaliser les DWT et DCT inverses à partir des coefficients enregistrés et soustraire la somme du signal original ;
- Reprendre les trois étapes précédentes jusqu'à l'obtention du nombre prédéterminé de coefficients.

L'ondelette  $D_4$  de I. Debauchies est utilisée, c'est la même ondelette mère utilisée dans [Crowe 92]. Après l'essai des deux procédures sur un signal ECG échantillonné à 360 Hz issu de la base des données [MIT 92], 91 coefficients sur 512 sont conservés dans la première approche avec 56 coefficients pour la DWT et 35 pour la DCT. Le PRD est de

5,06 %. La DWT seule donne un PRD de 5,04 % et la DCT seule produit un PRD de 5,69 %. Selon les auteurs, la qualité visuelle du signal reconstitué est nettement supérieure à celle obtenue dans les cas où une seule transformation est utilisée. La seconde approche aboutit à un PRD de 4.2 % et la qualité visuelle est encore améliorée.

La WT en deux dimensions est très utilisée en codage d'images et certains algorithmes conçus initialement pour le traitement des images ont été réadaptés à la problématique mono dimensionnelle pour la compression de l'ECG ; c'est le cas de EZW (Embedded Zerotree Wavelet) dans [Hilton 97], de SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) dans [Lu 00] et [Miaou 05], et enfin de VQ (Vector Quantization Framework) dans [Miaou 02] et [Miaou 05]. Certains auteurs ont utilisé des algorithmes en 2 dimensions sans modifications : à cet effet, c'est le signal ECG qui doit être transformé par segmentation pour construire une matrice. La première dimension de cette matrice, les lignes de la matrice, correspond aux échantillons qui réalisent les cycles cardiaques alors que la seconde traduit les paramètres inter cycles cardiaques. Des traitements supplémentaires sont apportés aux éléments de la matrice pour uniformiser la durée des cycles cardiaques qui n'est pas toujours constante et normaliser l'amplitude maximale du signal. Dans cette optique, la transformée en cosinus discrète en 2D (2D DCT) est exploitée pour la compression du signal ECG dans [Lee 99]. La version JPEG2000 de la norme JPEG est basée sur la WT ; elle a été testée avec succès pour la compression du signal ECG en 2D [Bilgin 04]. Les résultats obtenus avec JPEG2000 sont comparés avec ceux de EZW produits dans [Hilton 97] et ceux de SPIHT réalisés dans [Lu 00]. Moazami-Goudarzi *et al* proposent, quant à eux, l'algorithme SPIHT en 2D avec la transformation multi-ondelettes pour la compression de l'ECG [Moazami 04].

#### **I-4-2-5 Compression du signal ECG par transformations polynomiales**

Fort du constat que toutes les méthodes de traitement polynomial des signaux réalisent l'approximation du signal sur de très courtes durées et utilisent des polynômes de degré très faible (le plus haut degré des polynômes est généralement inférieur à 5), W. PHILIPS et G. DE JOGHE ont eu l'idée de modéliser un long intervalle du signal avec des polynômes de degrés beaucoup plus élevés. Ces auteurs préconisent la décomposition d'un signal dans une base orthogonale de fonctions polynomiales. Les polynômes de Legendre discrets ont été choisis à cet effet [Philips 92]. On construit les polynômes de Legendre discrets  $Q_n^L(x)$  à partir des polynômes de Legendre ordinaires  $P_n(x)$  par :

$$Q_n^L(x) = \frac{2}{L} \left( \sqrt{\frac{(2n+1)}{2}} P_n \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) + \xi_n^L(x) \right) \quad (1-35)$$

Pour  $0 \leq x \leq L$  et avec  $\xi_n^L(x)$  qui converge uniformément vers 0 pour tout  $n$  lorsque  $L$  tend vers l'infini. Les polynômes  $P_n(x)$  sont définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Pour un  $L$  donné, l'ensemble des polynômes  $Q_n^L(x)$  forme un espace de Hilbert complet et on a :

$$\sum_{x=0}^{x=L} Q_m^L(x) Q_n^L(x) = \delta_{mn} \quad (1-36)$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker. On peut constater que les polynômes de Legendre discrets dépendent du nombre d'échantillons  $L$  que contient le signal.

Les polynômes  $Q_n^L(x)$  sont générés par récurrence de la manière suivante :

$$Q_0^L(x) = 1, \quad Q_1^L(x) = 1 - \frac{2x}{L} \quad \text{et} \quad (1-37)$$

$$Q_j^L(x) = \left[ (2j-1)(L-2x)Q_{j-1}^L(x) - (j-1)(L+j)Q_{j-2}^L(x) \right] / [j(L-j+1)]$$

Soit  $s$  une portion de signal contenant  $L+1$  échantillons, le polynôme  $\tilde{s}$  de degré  $N \leq L$  qui minimise l'erreur quadratique est donné par :

$$\tilde{s}_n^L(x) = \sum_{n=0}^N A_n Q_n^L(x) \quad (1-38)$$

$$\text{avec } A_n = \sum_{x=0}^L s(x) Q_n^L(x)$$

La relation (1-39) définit l'erreur quadratique.

$$\left( e_N^L \right)^2 = \frac{\|s(x) - \tilde{s}(x)\|^2}{L+1} = \frac{1}{L+1} \sum_{x=0}^L (s(x) - \tilde{s}(x))^2 \quad (1-39)$$

Pour remplacer le signal  $s(x)$  par un polynôme  $\tilde{s}(x)$ , il suffit de calculer les coefficients  $A_n$  permettant de déterminer ce polynôme approximant. On ne saurait appliquer la transformation de Legendre discrète (DLT) à un signal ECG entier enregistré sur un patient ; on doit d'abord procéder à une segmentation du signal en fenêtres. Dans [Philips 92], il est démontré que les intervalles R-R du signal ECG, correspondant aux cycles cardiaques réalisent la segmentation optimale. Le signal ECG sur cet intervalle épouse les courbes des polynômes de Legendre sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Les segments R-R ont été aussi retenus dans [Philips 93] et [Colomer 97] comme fenêtres de segmentation avant la transformation DLT. Nous reviendrons sur la justification théorique du choix des intervalles R-R en DLT au niveau du chapitre III. Après

segmentation, le signal est échantillonné à nouveau de manière à ce que toutes les fenêtres présentent le même nombre d'échantillons  $L$ . Ceci évite de construire pour chaque fenêtre les polynômes de Legendre à utiliser.  $L$  est choisi égal au nombre d'échantillons que contient la plus grande des fenêtres du signal original. Après décomposition, un grand nombre d'échantillons est désormais représenté par un petit nombre de coefficients. On a ainsi réalisé la compression. Les coefficients obtenus sur différentes fenêtres du signal sont assez semblables, le signal ECG étant pseudo-périodique. Des codages entropiques appliqués à ces coefficients permettent d'accroître l'efficacité de la compression. La compression est complétée par un judicieux codage *Run Length Code (RLC)* dans [Philips 92] et [Philips 93]. Ces travaux ont été repris dans [Colomer 97] où après la DLT, une première phase de compression consistait à ne conserver que les coefficients dont la valeur est supérieure à un seuil réglable, le *codage de Huffman* est ensuite appliqué aux coefficients retenus. Les résultats de la compression de l'ECG par la DLT sont comparés à ceux de la méthode par « approximation des splines » proposée dans [Karczewicz 97].

Le diagramme de la figure 1-22 récapitule les différentes techniques de transformations des signaux utilisées pour la compression de l'ECG.

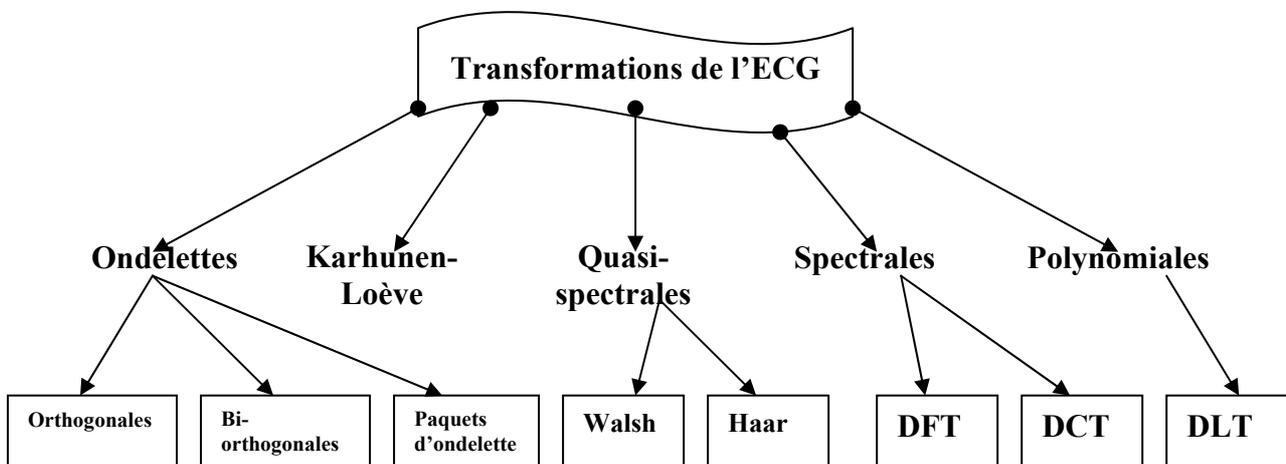


Figure 1-22 : Procédés de transformation des signaux utilisés pour la compression de l'ECG

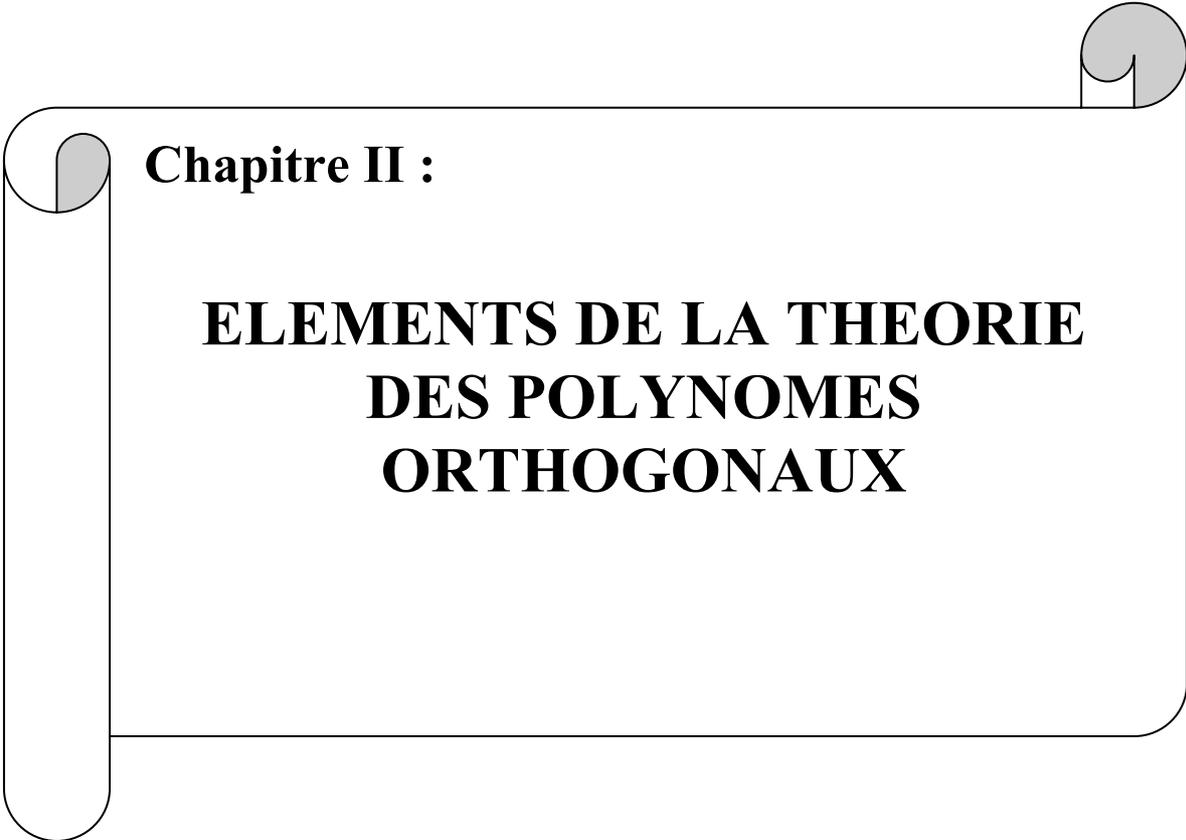
**Tableau 1-3 : Quelques résultats sur la compression de l'ECG**

<b>Algorithmes</b>	<b>Origine des signaux</b>	<b>Caractéristiques des signaux</b>	<b>Taux compression</b>	<b>PRD (%)</b>	<b>Observations</b>
AZTEC [Cox 68]		Echant. : <b>500 Hz</b> Codage: <b>12 Bits/Ech.</b>	10.0	28.0	P et T mal reconstruits
TP [Muller 78]		Echant. : <b>500 Hz</b> Codage: <b>12 Bits/Ech</b>	2.0	5.3	Très sensible à la fréquence d'échant.
CORTES [Abenstein 82]		Echant. : <b>200 Hz</b> Codage: <b>12 Bits/Ech</b>	4.8	7.0	Sensible à la fréquence d'échantillonnage
DCT, KLT, HaT [Ahmed 75]		Echant. : <b>500 Hz</b> Codage: <b>12 Bits/Ech</b>	3.0		KLT: connaissance de la statistique du signal
Descript. Fourier [Reddy 86]		Echant. : <b>250 Hz</b> Codage: <b>12 Bits/Ech</b>	7.4	7.0	Détection des complexes QRS
CWT [Crowe 92]		Echant. : <b>500 Hz</b> Codage:	9.9		Segmentation du signal en blocs de 1026 échantillons
DLT [Philips 92]		Echant. : <b>500 Hz</b> Codage: <b>10 Bits/Ech</b>	11.7-17.0		Segmentation du signal et re-échantillonnage
DWT [Thakor 93]		Echant. : <b>300 Hz</b> Codage:	16.0	15.0	Segmentation en fenêtres de 512 échantillons
DWT-EZW [Hilton 97]	MIT-BIH Arythmia DB	Echant. : <b>250/500 Hz</b> Codage: <b>12/11 Bits</b>	16.0	8.6	Segments de 1024 échantillons
2D – DCT [Lee 99]	MIT-BIH Arythmia DB	Echant. : <b>360 Hz</b> Codage: <b>11 Bits/Ech</b>	12.0	4.6- 14.1	Matrices de 8*8, 16*16, 32*32 et 64*64
DWT- SPIHT [Lu 00]	MIT-BIH Arythmia DB	Echant. : <b>360 Hz</b> Codage: <b>11 Bits/Ech</b>	20.0	7.52	
DWT-VQ [Miaou 02]	MIT-BIH Arythmia DB	Echant. : <b>360 Hz</b> Codage: <b>11 Bits/Ech</b>		7.3	Taux de compression exprimé en Bits/échantillon

## I-6 CONCLUSION

Le signal ECG est d'origine bioélectrique et caractérise les excitations électriques du muscle cardiaque. Ce signal constitue un marqueur indépendant d'affection myocardique et peut refléter des atteintes anatomiques, métaboliques et hémodynamiques. Il procure une information qui s'avère souvent essentielle pour le diagnostic et le traitement de diverses anomalies cardiaques ; l'ECG est par exemple sans égal pour le diagnostic des arythmies. De nouvelles techniques médicales sont de plus en plus introduites en cardiologie ; c'est le cas de l'échocardiographie et de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) qui montrent directement la morphologie et la dynamique des structures anatomiques. Toutefois, l'électrocardiogramme est le premier et parfois le seul témoin des modifications se produisant

à l'étage moléculaire et cellulaire. Il constitue par conséquent un outil de diagnostic essentiel. L'enregistrement, le stockage et la transmission des signaux ECG sont des processus complexes auxquels s'ajoutent naturellement des phénomènes aléatoires. C'est pour cela que de nombreuses méthodes de traitement du signal ont été élaborées spécifiquement pour l'ECG. Nous avons parcouru, ne serait-ce que sommairement ces méthodes de traitement du signal ECG dans les paragraphes qui précèdent, en insistant sur les techniques de compression, et particulièrement, les algorithmes de compression par approximations, interpolations et transformations polynomiales. Le tableau 1-3 présente quelques résultats essentiels recensés dans la littérature sur la compression de l'ECG. Les méthodes directes de compression de l'ECG sont rapides. Toutefois, ces méthodes temporelles introduisent de fortes distorsions sur le signal reconstruit. Les méthodes de compression par transformation sont d'ordre général, même avec la transformation en ondelettes, il n'existe pas une ondelette mère appropriée et recommandée pour la compression des signaux ECG. Dans la recherche d'un organisme efficace et spécifique pour la compression des électrocardiogrammes, nous allons dans la suite de ce mémoire, étudier de façon plus approfondie, les possibilités de modélisations polynomiales de l'ECG. Le second chapitre qui suit, est destiné à la présentation des fondements mathématiques des polynômes orthogonaux.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges curving upwards. The text is centered within the scroll's frame.

**Chapitre II :**

**ELEMENTS DE LA THEORIE  
DES POLYNOMES  
ORTHOGONAUX**

# Chapitre II :

## ELEMENTS DE LA THEORIE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX

*Rien n'est aussi pratique qu'une bonne théorie*

*K. LIVIN*

### II-1 INTRODUCTION

Dans ses fondements théoriques, le traitement du signal s'appuie sur plusieurs branches de la physique et des mathématiques. Un signal est représenté par une fonction mathématique d'une ou de plusieurs variables. Il est par exemple une fonction de la variable temps dans le domaine temporel et une fonction de la variable fréquence dans le domaine spectral. L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques qui étudie les espaces des fonctions. De nombreuses théories élaborées en analyse fonctionnelle sont exploitées dans le cadre du traitement de signal. Les signaux déterministes par exemple sont manipulés dans l'espace des fonctions continues, les espaces de Lebesgue permettent de traiter des signaux ayant un nombre fini des points de discontinuités. L'espace de Sobolev définit le cadre des distributions pour les signaux impulsionnels qu'on ne peut pas représenter par des fonctions. Les systèmes de fonctions orthogonales sont très utilisés en traitement de signal. C'est le cas des fonctions sinusoïdales qui sont à la base de la transformation de Fourier, des fonctions binaires orthogonales (fonctions de Walsh, fonctions de Haar, fonctions de Paley et fonctions d'Adamard) et aussi des bases orthogonales d'ondelettes. Les systèmes de polynômes orthogonaux n'ont pas connu beaucoup d'intérêt en traitement du signal, mais trouvent plus d'applications en physique : les polynômes de Legendre par exemple servent à résoudre l'équation de Laplace dans la sphère alors que les polynômes d'Hermite et les polynômes de Laguerre permettent de déterminer des solutions pour des cas particuliers des équations de Shrödinger.

Nous proposons d'étudier les polynômes orthogonaux dans ce second chapitre du mémoire. Nous estimons qu'il faut bien connaître ces fonctions et leurs propriétés avant d'envisager leur utilisation pour la modélisation et la compression des signaux ECG.

La suite de ce chapitre commence par des explications sur la définition des fonctions orthogonales et des systèmes de polynômes orthogonaux. Nous présentons par la suite, les propriétés communes aux polynômes orthogonaux, et le principe de développement en séries des polynômes orthogonaux. La dernière section du chapitre concerne les caractéristiques

principales de ceux des polynômes orthogonaux qui nous serviront dans les processus de compression de l'ECG.

## II-2 CONCEPTS DES POLYNOMES ORTHOGONAUX

### II-2-1 Orthogonalité des fonctions

Soient deux fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$  définies sur un intervalle réel ou complexe  $[a, b]$ , on définit leur produit scalaire par :

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x) \bar{h}(x) dx \quad (2-1)$$

où  $\bar{h}(x)$  est le conjugué de  $h(x)$

Les fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$  sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. De même, une famille de fonction  $\phi_0(x), \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ; avec  $n$  fini ou infini, constitue une famille orthogonale si :

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \int_a^b \phi_k(x) \bar{\phi}_l(x) dx = 0 \quad \text{si } k \neq l \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (2-2)$$

Par extension, soit  $\mu$  une mesure de Borel (mesure non négative) sur un intervalle réel  $[a, b]$ , on définit le produit scalaire de deux fonction  $g(x)$  et  $h(x)$  suivant la distribution  $d\mu$  par :

$$\langle g, h \rangle_\mu = \int_a^b g(x) h(x) d\mu(x) \quad (2-3)$$

Nous rappelons que l'espace  $L_\mu^2[a, b]$  est constitué des fonctions  $f(x)$  telles que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \quad (2-4)$$

Deux fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$  éléments de  $L_\mu^2[a, b]$  sont orthogonales si leur produit scalaire est nul ( $\langle g, h \rangle_\mu = 0$ ).

Très souvent, la distribution  $d\mu(x)$ , est déterminée à travers une fonction poids  $\omega(x)$  :

$$d\mu(x) = \omega(x) dx \quad (2-5)$$

Une famille de fonctions libre et infinie  $\{f_k\}$  se laisse orthogonaliser en une autre famille  $\{\varphi_k\}$ . La méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est présentée dans [Kibangou 05b] et se résume en les étapes suivantes:

- prendre  $\varphi_1 = f_1$ ,
- faire  $\varphi_2 = f_2 - \lambda_{21}\varphi_1$  ;  $\lambda_{21}$  est choisi de telle sorte que  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ , donc

$$\langle f_2 - \lambda_{21}\varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0, \text{ d'où } \lambda_{21} = \frac{\langle f_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \quad (2-6)$$

- par récurrence, on détermine :

$$\varphi_k = f_k - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl}\varphi_l \quad (2-7)$$

$$\text{avec } \lambda_{kl} = \frac{\langle f_k, \varphi_l \rangle}{\langle \varphi_l, \varphi_l \rangle} \quad (2-8)$$

Avec le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire à partir de toute famille libre de fonctions  $g_0(x), g_1(x), g_2(x) \dots g_n(x)$ , une famille orthogonale de fonctions  $\phi_0(x), \phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$ . On démontre dans [Szegö 75] que :

$$\phi_k(x) = (D_{k-1}D_k)^{-\frac{1}{2}} D_k(x) \text{ pour } k \geq 1 ; \quad (2-9)$$

Les déterminants  $D_k$  sont définis positifs. Leur expression est donnée ci- après :

$$D_k = \begin{vmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \langle g_0, g_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle g_0, g_k \rangle \\ \langle g_1, g_0 \rangle & \langle g_1, g_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle g_1, g_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle g_{k-1}, g_0 \rangle & \langle g_{k-1}, g_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle g_{k-1}, g_k \rangle \\ g_0(x) & g_1(x) & \dots & \dots & \dots & g_k(x) \end{vmatrix} \quad (2-10)$$

avec  $D_{-1} = 1$  et  $D_0(x) = g_0(x)$

## II-2-2 Familles de polynômes orthogonaux

Considérons une fois de plus l'espace  $L^2_\mu[a, b]$  des fonctions telles que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\mu < \infty$$

où  $\mu$  une mesure de Borel (non négative) sur l'intervalle  $[a, b]$  telle que  $\mu[a, b] < \infty$ .

$d\mu$  est une distribution et, si les moments  $C_k = \int_a^b x^k d\mu(x)$  existent, alors l'orthogonalisation de la famille des polynômes :  $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$  par le procédé de Schmidt conduit à la famille de polynômes :

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_k(x), \dots$$

déterminée de façon univoque par les conditions suivantes [Walter 01]:

- $p_k(x)$  est un polynôme de degré  $k$  dont le coefficient du monôme  $x^k$  est positif
- le système  $\{p_k(x)\}$  est orthogonal :  $\int_a^b p_k(x)p_l(x)d\mu(x) = 0$  si  $k \neq l$  (2-11)

L'existence des moments traduit le fait que les monômes  $x^k$  appartiennent à  $L^1_\mu[a, b]$ . Cette définition des polynômes orthogonaux reste valable si la distribution est du type  $\omega(x)dx$ . Dans ce cas,  $\omega(x)$  est une fonction non négative et mesurable au sens de Lebesgue : c'est la fonction poids. Avec une distribution de type  $\omega(x)dx$ , le système  $\{\omega(x)^{1/2} p_k(x)\}$  est orthonormé. On détermine les expressions analytiques des polynômes orthogonaux  $p_k(x)$  avec les équations (2-10), qui deviennent :

$$p_k(x) = (D_{k-1}D_k)^{-1/2} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \dots & \dots & c_{2k-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & \dots & x^k \end{vmatrix} \quad (2-12)$$

Par exemple, on construit les polynômes orthogonaux classiques par l'orthogonalisation de la famille des polynômes :  $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$  dans les conditions suivantes :

- Polynômes de Jacobi  $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$  :  
 $a = -1, b = 1, \omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  avec  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$ .
- Polynômes de Laguerre  $L_k^\alpha(x)$  :  
 $a = 0, b = +\infty, \omega(x) = e^{-x} x^\alpha$ , avec  $\alpha > -1$ .
- Polynômes d'Hermite  $H_k(x)$ .  
on a  $a = -\infty, b = +\infty$ , et  $\omega(x) = e^{-x^2}$

## II-3 PROPRIETES COMMUNES AUX POLYNOMES ORTHOGONAUX

### II-3-1 Equations différentielles

Les polynômes orthogonaux sont présentés en analyse mathématique, comme des solutions polynomiales des équations différentielles de la forme (2-13) :

$$\sigma(t)y''(t) + \tau(t)y'(t) + \lambda y(t) = 0 \quad (2-13)$$

où :

$t$  est une variable réelle ou complexe

$\sigma(t)$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

$\tau(t)$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

$\lambda$  est une constante.

La résolution des équations (2-13) est étudiée dans [Nikiforov 83] où on montre que :

Pour  $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$  les solutions sont des polynômes  $y_n(t)$  de degré  $n$  dont

les expressions explicites sont données par la relation (2-14) appelée formule de Rodrigue.

$$y_n(t) = \frac{B_n}{\omega(t)} \frac{d^n [\sigma^n(t)\omega(t)]}{dt^n} \quad (2-14)$$

$B_n$  est une constante de normalisation alors que  $\omega(t)$  vérifie l'équation :

$$(\sigma(t)\omega(t))' = \tau(t)\omega(t) \quad (2-15)$$

Les solutions de (2-15) autorisent 3 formes possibles de la fonction  $\omega$  :

$$\omega(t) = (b-t)^\alpha (z-a)^\beta \quad \text{pour } \sigma(t) = (b-t)(t-a) \quad (2-16)$$

$$\omega(t) = (t-a)^\alpha e^{\beta t} \quad \text{pour } \sigma(t) = t-a$$

$$\omega(t) = e^{\alpha t^2 + \beta t} \quad \text{pour } \sigma(t) = 1$$

$a, b, \alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Un changement linéaire de la variable aboutit aux formes canoniques suivantes:

1) Pour  $a = -1$  et  $b = +1$ ,  $\omega(z) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ ,  $\sigma(t) = 1-t^2$  et  $\tau(t) = -(\alpha + \beta + 2)t + (\beta - \alpha)$ ; l'équation différentielle s'écrit :

$$(1-t^2)y''(t) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t]y'(t) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(t) = 0 \quad (2-17)$$

et les polynômes correspondants sont des polynômes de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$  avec la

constante de normalisation  $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ . Il en découle que :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} \left[ (1-t^2)^n (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \right] \quad (2-18)$$

2) Pour  $\omega(t) = t^\alpha e^{-t}$ ,  $\sigma(t) = t$ , et  $\tau(t) = -t + \alpha + 1$  avec  $B_n = \frac{1}{n!}$ , on obtient les

polynômes de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(t)$  :

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{n!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} (t^{\alpha+n} e^{-t}) \quad (2-19)$$

dont l'équation différentielle s'écrit :

$$t y''(t) + (\alpha + 1 - t) y'(t) + n y(t) = 0 \quad (2-20)$$

3) Pour  $\omega(t) = e^{-t^2}$ ,  $\sigma(t) = 1$  et  $\tau(t) = -2t$  avec  $B_n = (-1)^n$ , les fonctions obtenues s'appellent polynômes d'Hermite définis par :

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad (2-21)$$

Les polynômes d'Hermite sont des solutions de l'équation différentielle (2-22) :

$$y''(t) - 2t y'(t) + 2n y(t) = 0 \quad (2-22)$$

## II-3-2 Relations de récurrence et formule de Darboux-Christoffel

Trois polynômes orthogonaux d'une même famille quelconque, de degrés successifs, sont liés par une relation de récurrence :

$$t p_n(t) = a_n p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + c_n p_{n-1}(t) \quad (2-23)$$

$$\text{Si } p_n(t) = j_n t^n + k_n t^{n-1} + \dots; \quad (2-24)$$

C'est-à-dire que  $j_n$  et  $k_n$  sont respectivement les coefficients de  $t^n$  et  $t^{n-1}$ , on détermine les coefficients de la relation de récurrence par :

$$a_n = \frac{j_n}{j_{n+1}}, \quad b_n = \frac{k_n}{j_n} - \frac{k_{n+1}}{j_{n+1}}, \quad c_n = \frac{j_{n-1}}{j_n} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} \quad (2-25)$$

De la relation de récurrence découle la formule de Darboux-Christoffel qui est très importante en théorie des polynômes orthogonaux :

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(t)p_k(\xi)}{\|p_k\|^2} = \frac{a_n}{\|p_n\|^2} \frac{p_{n+1}(t)p_n(\xi) - p_n(t)p_{n+1}(\xi)}{t - \xi} \quad (2-26)$$

### II-3-3 Propriétés des zéros et de la parité de la fonction poids

Tous les zéros  $t_j$  du polynôme  $p_n(t)$  sont réels, simples et contenus à l'intérieur de l'intervalle  $]a, b[$ . On montre que les zéros du  $p_n(t)$  et  $p_{n+1}(t)$  alternent.

Soit  $\nu$  une constante arbitraire, le polynôme  $p_{n+1}(t) - \nu p_n(t)$  a  $n+1$  zéros distincts. Si  $\nu > 0$  tous ces zéros sont l'intérieur de  $]a, b[$  à l'exception du plus grand qui ne se situe dans  $[a, b]$  que si  $\nu \leq \frac{p_{n+1}(b)}{p_n(b)}$ . Si  $\nu < 0$  tous ces zéros sont l'intérieur de  $]a, b[$  à l'exception du plus

petit qui ne se situe dans  $[a, b]$  que si  $\nu \geq \frac{p_{n+1}(a)}{p_n(a)}$

Si les polynômes  $p_n(t)$  sont orthogonaux sur l'intervalle  $]a, a[$  par rapport à une fonction poids  $\omega(t)$  paire, ils vérifient la relation :

$$p_n(-t) = (-1)^n p_n(t)$$

A cet effet, on déduit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(-t) &= (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(t) \\ H_n(-t) &= (-1)^n H_n(t) \\ H_{2n}(t) &= (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-1/2)}(t^2), \quad H_{2n+1}(t) = (-1)^n 2^{2n+1} n! t L_n^{(1/2)}(t^2) \end{aligned} \quad (2-27)$$

### II-3-4 Dérivées des polynômes orthogonaux

Lors de la résolution de l'équation (2-13), on établit que si  $y_n(t)$  est une solution, alors les dérivées  $y_n^{(m)}(t)$  le sont aussi [Nikiforov 83] et la formule de Rodrigue pour ces dérivées s'écrit :

$$y_n^{(m)}(t) = \frac{A_{mn} B_n}{\sigma^m(t)\omega(t)} \cdot \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} [\sigma^n(t)\omega(t)] \quad (2-28)$$

On montre que

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)} \prod_{k=0}^{m-1} \left( \tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right) \quad (2-29)$$

On en déduit les formules de dérivation pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite :

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \\ \frac{dL_n^\alpha(t)}{dt} &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(t) \\ \frac{dH_n(t)}{dt} &= 2nH_{n-1}(t)\end{aligned}\tag{2-30}$$

Les dérivées  $y'_n(t)$  des polynômes orthogonaux se laissent exprimer par les polynômes  $y_n(t)$  eux-mêmes à travers les relations :

$$\sigma(t)y'_n(t) = \frac{\chi_n}{\tau'_n} \left[ \frac{B_n}{B_{n+1}} y_{n+1}(t) - \tau_n(t) y_n(t) \right]\tag{2-31}$$

dans lesquelles  $\tau_n(t) = \tau(t) + n\sigma'(t)$  et  $\chi_n(t) = \tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''$

En tirant  $y_{n+1}(t)$  de la relation de récurrence (2-23) pour remplacer dans la formule de dérivation (2-31) ci-dessus, on obtient une relation de la forme :

$$\sigma(t)y'_n(t) = (\tilde{a}_n t + \tilde{b}_n) y_n(t) + \tilde{c}_n y_{n-1}(t)\tag{2-32}$$

Les expressions explicites des coefficients  $\tilde{a}_n$ ,  $\tilde{b}_n$  et  $\tilde{c}_n$  pour certains cas de polynômes orthogonaux seront données plus loin dans le tableau 2-1.

## II-4 DEVELOPPEMENT EN SERIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX

### II-4-1 Notions de séries de Fourier dans les espaces de Hilbert

Soit un espace  $E$  de dimension infinie muni d'un produit scalaire. Si l'on considère une famille orthogonale  $\{\varphi_k\}$   $k=1, 2, \dots$ , on peut toujours mettre un élément quelconque  $\mathbf{x}$  de  $E$  sous forme d'une combinaison linéaire des éléments de  $\{\varphi_k\}$  :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k\tag{2-33}$$

La relation (2-33) est le développement de  $\mathbf{x}$  en série de Fourier suivant la famille  $\{\varphi_k\}$ . C'est l'équivalent en géométrie, de la décomposition d'un vecteur en ses coordonnées suivant les

vecteurs de la base. La détermination des coefficients de Fourier  $c_k$  est très simple, en effet, prenons le produit scalaire  $\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle$  :

$$\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} c_l \varphi_l, \varphi_k \right\rangle = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \langle \varphi_l, \varphi_k \rangle = c_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$$

puisque  $\langle \varphi_l, \varphi_k \rangle = 0$  pour  $k \neq l$ , on détermine alors  $c_k$  :

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \quad (2-34)$$

Le polynôme  $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$  qui est une somme partielle de la série de Fourier est appelé polynôme de Fourier de  $\mathbf{x}$ .

Soit  $L_n$ , un sous-espace de  $E$  engendré par les vecteurs  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , la distance  $d_n = \rho(x, L_n)$  avec  $x \in E$  se définit par les égalités suivantes :

$$d_n = \left\| \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| \quad (2-35)$$

$$d_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2$$

$c_k$  sont des coefficients de Fourier suivant  $\{\varphi_k\}$

Comme  $d_n^2 \geq 0$ , on en déduit que  $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$

Le premier membre de cette inégalité est une somme partielle de la série numérique à termes positifs  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ . La majoration reste vraie pour  $n$  quelconque, d'où :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2-36)$$

Nous obtenons l'inégalité de Bessel, qui reste vraie pour toute famille orthogonale dans n'importe quel espace de dimension infinie muni de produit scalaire.

### Définition 2-1: Famille orthogonale totale

Une famille orthogonale  $\{\varphi_k\}$  dans un espace  $H$  est dite totale, si pour tout  $\mathbf{x} \in H$ , on a  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \mathbf{x}$ . Une famille totale est donc une base orthogonale de  $H$ , elle ne peut être transformée en une famille orthogonale plus large par adjonction de nouveaux éléments. Avec une famille orthogonale totale, l'inégalité de Bessel dévient l'égalité de Parseval :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2-37)$$

L'égalité de Parseval permet en théorie du signal d'établir l'équivalence entre la puissance (ou l'énergie) d'un signal dans les domaines temporel et fréquentiel.

### Définition 2-2: Décomposition orthogonale

Un sous-espace  $L$  d'un espace de Hilbert  $H$  se décompose en sommes orthogonales de sous espaces  $L_1, L_2, \dots, L_m$ , que l'on note :

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m \quad \text{si :}$$

- $L_1, \dots, L_m$  sont orthogonaux deux à deux
- Tout élément  $\mathbf{x} \in L$  se laisse mettre sous la forme  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i$  où  $\mathbf{x}_i \in L_i$

Cette décomposition de  $\mathbf{x}$  est unique et le théorème de Pythagore est vérifié :

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}_i\|^2 \quad (2-38)$$

## II-4-2 Cas des polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux constituent des familles libres des espaces  $L^2_\mu[a, b]$  avec  $d\mu = \omega(t)dt$ . Pour qu'une fonction arbitraire quelconque  $g(t)$  puisse être développée en série de Fourier suivant une famille de polynômes orthogonaux  $\{p_k(t)\}$  sur  $[a, b]$ , il faut donc que

$$g(t) \in L^2_\mu[a, b] \quad \text{soit} \quad \int_a^b |g(t)|^2 \omega(t) dt < \infty$$

Si  $g(t)$  satisfait la condition précédente, on dit que c'est une fonction de carré intégrable ; en théorie du signal,  $g(t)$  correspond à un signal à énergie finie.

Lorsque ce premier critère est respecté, il reste à vérifier si les séries de Fourier suivant les familles de polynômes orthogonaux convergent ; il faut donc rechercher les conditions sous lesquelles les polynômes orthogonaux constituent des bases orthogonales de  $L^2_\mu[a, b]$ .

La relation :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ g(t) - \sum_{k=0}^N c_k p_k(t) \right]^2 \omega(t) dt = 0 \quad (2-39)$$

est vérifiée pour  $g(t)$  de carré intégrable lorsque le système  $\{p_k(t)\}$  est complet. Tout système de fonctions complet doit être nécessairement fermé ; cela signifie que :

$$\text{Si } \int_a^b g(t) p_k(t) \omega(t) dt = 0 \text{ alors } g(t) \equiv 0 \text{ pour } t \in ]a, b[ \quad (2-40)$$

La fermeture des systèmes de polynômes orthogonaux est étudiée dans [Szegö 75]. On y démontre que le système des polynômes orthogonaux  $\{p_k(t)\}$  est fermé pour des fonctions continues  $g(t)$  sur  $[a, b]$  si la fonction poids  $\omega(t)$  est continue sur  $]a, b[$  et s'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que :

$$\int_a^b e^{C_0|t|} \omega(t) dt < \infty \quad (2-41)$$

En utilisant les formes explicites de  $\omega(t)$  pour les polynômes orthogonaux classiques, on montre que la condition ci-dessus est vérifiée dans tous les cas. Pour les polynômes de Laguerre, il suffit de prendre  $C_0 < 1$ . Pour les polynômes de Jacobi et les polynômes d'Hermite il faudra  $C_0 > 0$ . Il vient donc que tout système de polynômes orthogonaux classiques est fermé sur l'intervalle  $]a, b[$  pour les fonctions carré intégrables. En rappel,  $[a, b] = [-1, 1]$  pour les polynômes de Jacobi  $P_k^{(\alpha, \beta)}(t)$  avec  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$  ; pour les polynômes de Laguerre  $L_k^\alpha(t)$ ,  $[a, b] = [0, +\infty[$  avec  $\alpha > -1$  alors que pour les polynômes d'Hermite,  $]a, b[ = ]-\infty, +\infty[$ .

**Théorème 2-1 :** La série de Fourier réalise la meilleure approximation d'une fonction de carré intégrable par le développement en séries suivant des polynômes orthogonaux.

**Preuve :** Supposons l'approximation de  $g(t)$  donnée par une série de la forme :

$$g(t) = \sum_{k=0}^N a_k p_k(t) \text{ et calculons l'erreur quadratique moyenne :}$$

$$\begin{aligned} E_N &= \int_a^b \left[ g(t) - \sum_{k=0}^N a_k p_k(t) \right]^2 \omega(t) dt = \\ &= \int_a^b g^2(t) \omega(t) dt - 2 \sum_{k=0}^N a_k \int_a^b g(t) p_k(t) \omega(t) dt + \sum_{k=0}^N a_k^2 \int_a^b p_k^2(t) \omega(t) dt \end{aligned} \quad (2-42)$$

Si nous posons  $d_k^2 = \|p_k(t)\|^2 = \int_a^b p_k^2(t) \omega(t) dt$  et

$$c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b g(t) p_k(t) \omega(t) dt = \frac{\langle g, p_k \rangle}{\|p_k\|^2}$$

Il vient que :  $E_N = \int_a^b p_k^2(t)\omega(t)dt + \sum_{k=0}^N (a_k - c_k)^2 d_k^2 - \sum_{k=0}^N c_k^2 d_k^2$

$E_N$  est minimum lorsque  $a_k - c_k = 0$  pour tout  $k$ . On a alors  $a_k = c_k$  or les  $c_k$  sont les coefficients de Fourier. L'approximation de  $g(t)$  avec une erreur minimale est donc :

$$g(t) = \sum_{k=0}^N c_k p_k(t) \quad (2-43)$$

et le théorème est démontré.

Une conséquence du théorème ci-dessus est l'inégalité de Bessel pour les polynômes orthogonaux. En effet,

$$\min E_N = \int_a^b g^2(t)\omega(t)dt - \sum_{k=0}^N c_k^2 d_k^2$$

Comme les  $c_k$  ne dépendent pas de  $N$  et que  $\min E_N \geq 0$ , on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 d_k^2 \leq \int_a^b g^2(t)\omega(t)dt$$

$$\text{soit } \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|p_k\|^2 \leq \|g(t)\|^2 \quad (2-44)$$

qui est l'inégalité de Bessel.

Si la série de Fourier est convergente en moyenne sur  $]a, b[$ , on obtient l'égalité de Parseval :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|p_k\|^2 = \|g(t)\|^2 \quad (2-45)$$

Des méthodes de calcul des coefficients de Fourier, spécifiques aux polynômes orthogonaux à variable discrète et faisant appel au calcul opérationnel sont présentées dans [Feinsilver 92].

## II-5 CARACTERISTIQUES DE QUELQUES POLYNOMES ORTHOGONAUX A VARIABLE CONTINUE

### II-5-1 Caractéristiques des polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha, \beta)}(t)$

L'équation différentielle qui régit ces polynômes est donnée par la relation (2-17). Les polynômes de Jacobi de degré 0 et de degré 1 sont respectivement :

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(t) = 1 \text{ et } P_1^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2}t + \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2-46)$$

Les coefficients de la relation de récurrence (2-23) sont :

$$a_n = \frac{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$$

$$b_n = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$$

$$c_n = \frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1)}$$
(2-47)

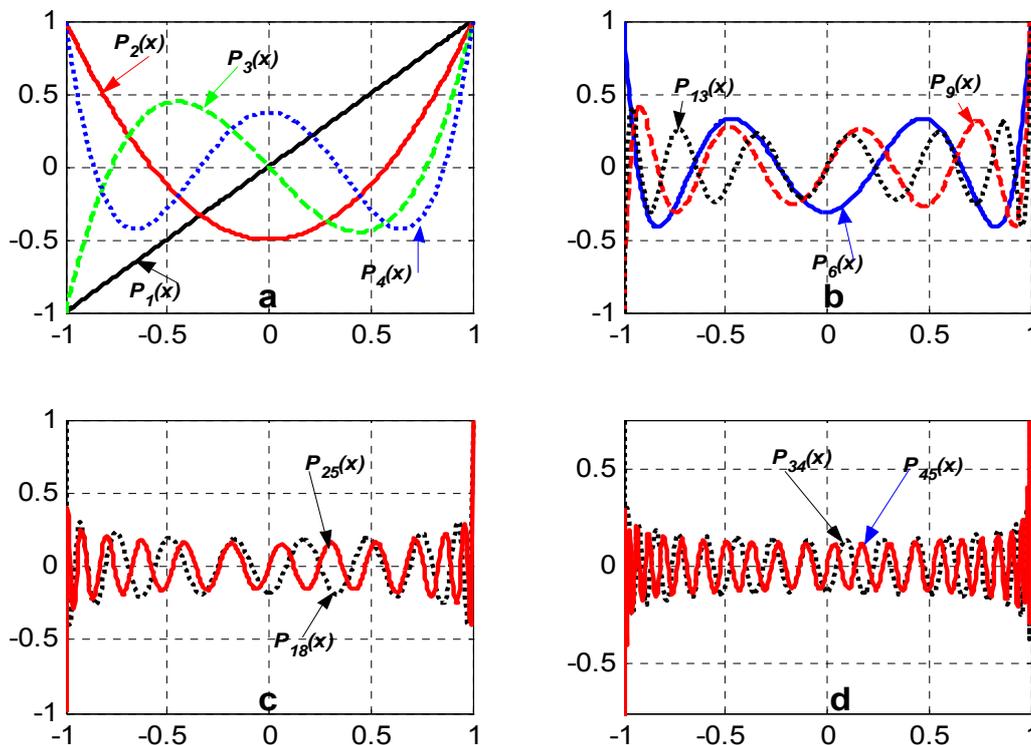
L'expression de la norme est :

$$\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 = \frac{2^{(\alpha+\beta+1)} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! (2n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$$
(2-48)

où  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma

Des cas particuliers des polynômes de Jacobi sont :

- Les polynômes de Legendre  $P_n(t) = P_n^{(0,0)}(t)$  ; les courbes des polynômes de Legendre pour quelques valeurs de  $n$  sont montrées sur la figure 2-1. De nombreuses applications des polynômes de Legendre sont présentées dans [Hwang 87], [Laroche 06] et [Dude 06]

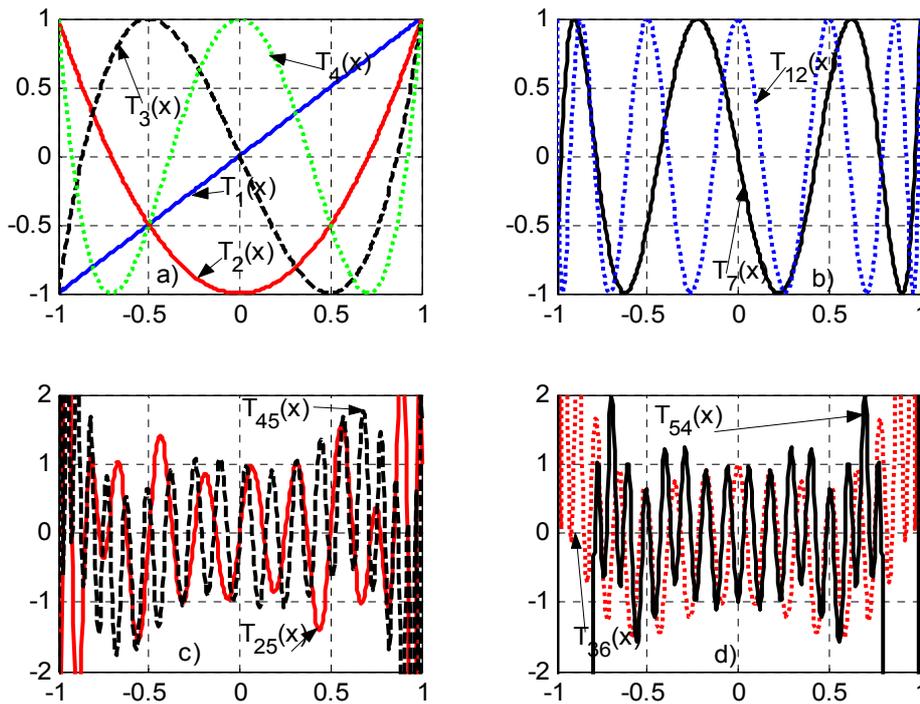


**Figure 2-1 : Courbes pour quelques polynômes de Legendre**

a) : Polynômes de faibles degrés ; b) polynômes de degré 8, 9 15 ; c) et d) : Polynômes de degré relativement élevés. On constate que plus le degré est élevé, moins les amplitudes des oscillations sont grandes.

**Tableau 2-1 : Caractéristiques principales des polynômes de Jacobi**

$y_n(t)$	<b>Cas général</b> $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ ( $\alpha > -1, \beta > -1$ )	<b>Polynômes de Legendre</b> $P_n(t) = P_n^{(0,0)}(t)$	<b>Polynômes de Tchebychev 1</b> $T_n(t) =$ $= \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(t)$
$\omega(t)$	$(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$	1	$\sqrt{1-t^2}$
$\sigma(t)$	$1-t^2$	$1-t^2$	$1-t^2$
$\tau(t)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t$	$-2t$	$-t$
$\lambda_n$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$n(n + 1)$	$n^2$
$j_n$	$\frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$	$2^n$
$k_n$	$\frac{(\alpha - \beta)\Gamma(2n + \alpha + \beta)}{2^n (n-1)! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	0	0
$\ y_n(t)\ ^2$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! (2n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{2}{2n + 1}$	$\pi$ si $n = 0$ $\pi/2$ si $n \neq 0$
$a_n$	$\frac{2(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}$	$\frac{n+1}{2n+1}$	$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$
$b_n$	$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}$	0	
$c_n$	$\frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{n}{2n+1}$	
$\tilde{a}_n$	$-n$	$-n$	
$\tilde{b}_n$	$\frac{n(\alpha - \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 2)}$	0	
$\tilde{c}_n$	$\frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{2t + \alpha + \beta}$	$\frac{n^2}{t}$	



**Figure 2-2 : Allures des polynômes de Tchebycheff**

a) : Polynômes de faibles degrés ; b) polynômes de degré 8, 9 15 ; c) et d) : Polynômes de degré relativement élevés. On constate aussi que les polynômes de degrés élevés ont de faibles amplitudes d'oscillations.

- Les polynômes de Tchebychev de 1<sup>ère</sup> espèce :

$$T_n(t) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2, -1/2)}(t) = \cos n\theta \quad (2-49)$$

avec  $\theta = \cos(\arccos(t))$ , et la notation  $(1/2)_n$  signifie :

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}+1\right) \left(\frac{1}{2}+2\right) \dots \left(\frac{1}{2}+n-1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma(n)} \quad (2-50)$$

- Les polynômes de Tchebychev de 2<sup>e</sup> espèce :

$$U_n(t) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(0.5, 0.5)}(t) = \frac{(n+1)! \sin(2n+1)\theta}{(3/2)_n \sin \theta} \quad (2-51)$$

La figure 2-2 présente les allures de quelques polynômes de Tchebychev. Les polynômes de Tchebychev sont très utilisés pour l'approximation des fonctions [Bakhvalov 76], [Azoulay 84]. Le tableau 2-1 récapitule les caractéristiques essentielles des polynômes de Jacobi en général et celles des polynômes de Legendre et de Tchebychev en particulier.

- Les polynômes de Gegenbauer

$$G_n(t) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} P_n^{(\lambda-0.5, \lambda-0.5)}(t) \quad (2-52)$$

- L'approximation asymptotique des polynômes de Jacobi pour  $n \rightarrow \infty$  est donnée par la relation (2-53) :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \frac{\cos\{[n + (\alpha + \beta + 1)/2]\theta - (2\alpha + 1)\pi/4\}}{\sqrt{\pi n} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}} \quad (2-53)$$

avec  $0 < \theta < \pi$

## II-5-2 : Caractéristiques des polynômes de Laguerre

- Equation différentielle est déterminée par la relation (2-20).
- La relation de récurrence s'écrit :

$$tL_n^{(\alpha)}(t) = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(t) + (2n+1+\alpha)L_n^{(\alpha)}(t) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(t)$$

avec :  $L_0^{(\alpha)}(t) = 1$  et  $L_1^{(\alpha)}(t) = -t + \alpha + 1$  (2-54)

- Facteur de normalisation

$$\|L_n^\alpha(t)\|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \quad (2-55)$$

- Les coefficients de la relation de dérivation (2-32) sont :

$$\tilde{a}_n = 0, \quad \tilde{b}_n = n, \quad \tilde{c}_n = -(n+\alpha) \quad (2-56)$$

- Représentation asymptotique des polynômes de Laguerre lorsque  $n \rightarrow \infty$

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{t/2} t^{-(\alpha/2)-(1/4)} n^{\alpha/2-1/4} \cos\left[2\sqrt{nt} - (2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right] \quad (2-57)$$

La figure 2-3 présente les tracés de quelques polynômes de Laguerre. Les polynômes de Laguerre sont beaucoup utilisés pour le filtrage et l'identification des systèmes [Mäkilä 91], [Wahlberg 91], [Lam 94] et [Mandyam 97].

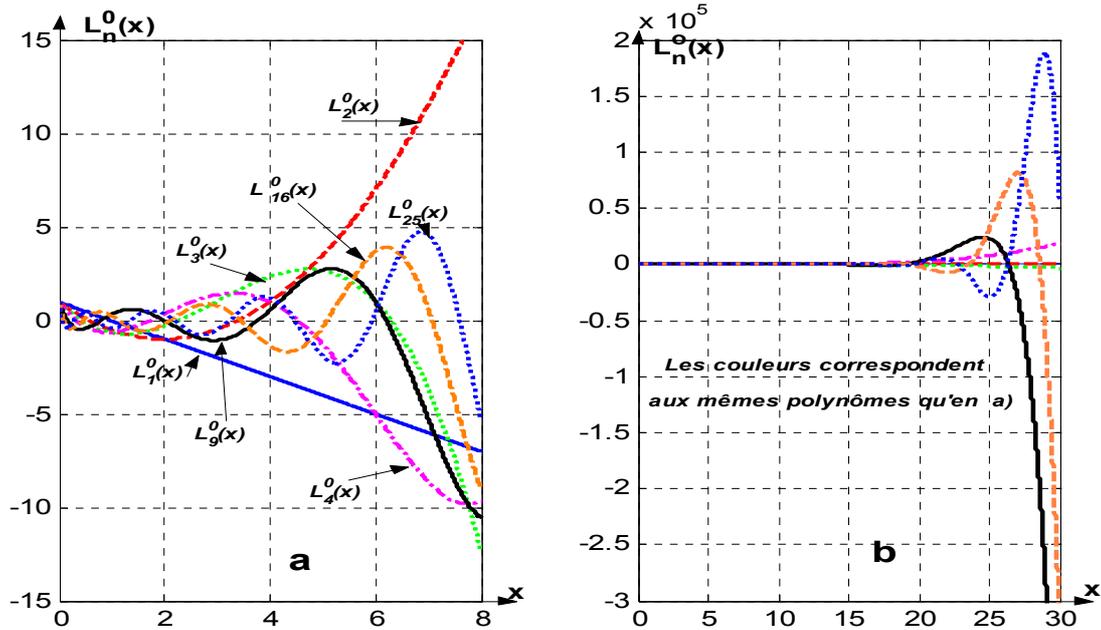


Figure 2-3 : Allures des polynômes de Laguerre.

(a) : Courbes sur un intervalle réduit  $[0, 8]$  ; (b) : mêmes courbes sur l'intervalle  $[0, 30]$ . Ces polynômes sont très oscillatoires au voisinage de 0 et divergent rapidement lorsqu'on s'éloigne de 0.

## II-5-3 Principales caractéristiques des polynômes d'Hermite

- L'équation différentielle pour les polynômes d'Hermite est fournie par l'équation (2-22).

- La relation de récurrence

$$tH_n(t) = \frac{1}{2}H_{n+1}(t) + nH_{n-1}(t)$$

avec  $H_0(t) = 1$  et  $H_1(t) = 2t$  (2-58)

- Facteur de normalisation

$$\|H_n(t)\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (2-59)$$

- Coefficients de la relation de dérivation (2-32) :

$$\tilde{a}_n = 0, \quad \tilde{b}_n = 0, \quad \tilde{c}_n = 2n \quad (2-60)$$

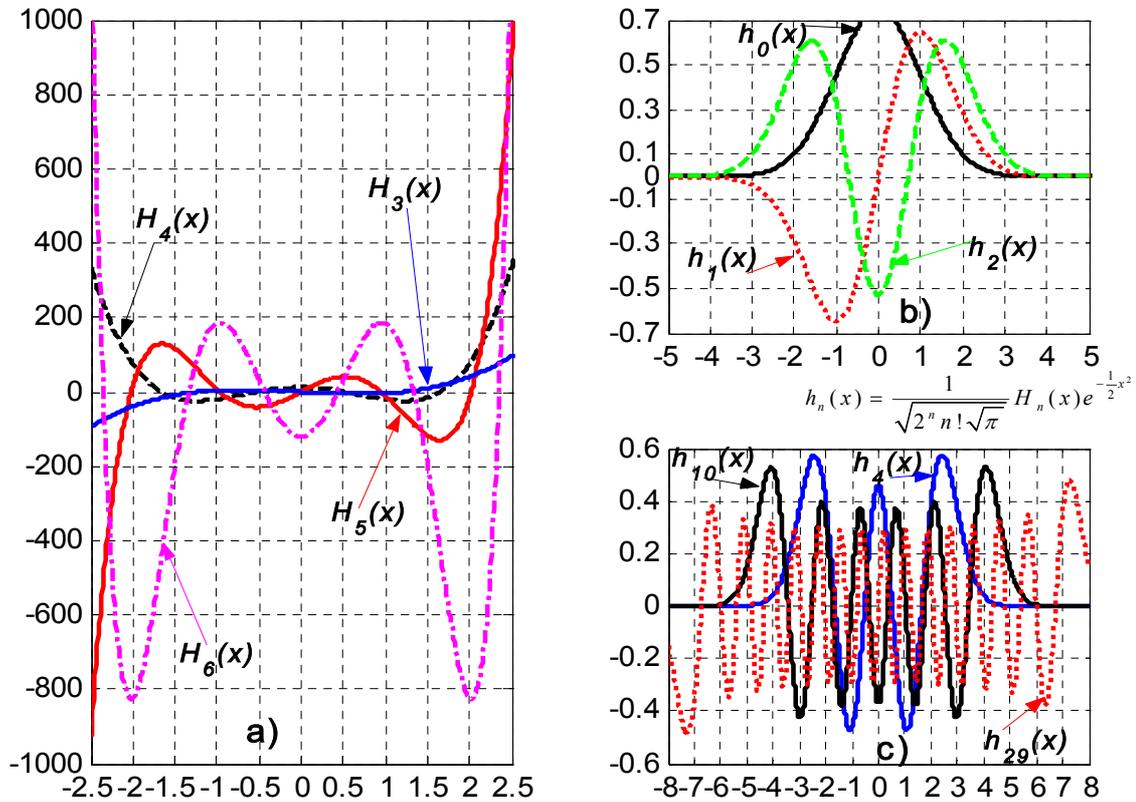
- Représentation asymptotique des polynômes d'Hermite pour  $n \rightarrow \infty$

$$H_n(t) = \sqrt{2} \left( \frac{2n}{e} \right)^{n/2} e^{t^2/2} \left[ \cos\left(\sqrt{2nt} - \frac{\pi n}{2}\right) \right] \quad (2-61)$$

- Dans la pratique, les fonctions d'Hermite sont plus utilisées que les polynômes. Ces fonctions sont déterminées par :

$$h_n(t) = \frac{H_n(t)e^{-t^2/2}}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \quad (2-62)$$

Le système de fonctions d'Hermite constitue une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . La figure 2-4 montre des allures de quelques polynômes et fonctions d'Hermite.



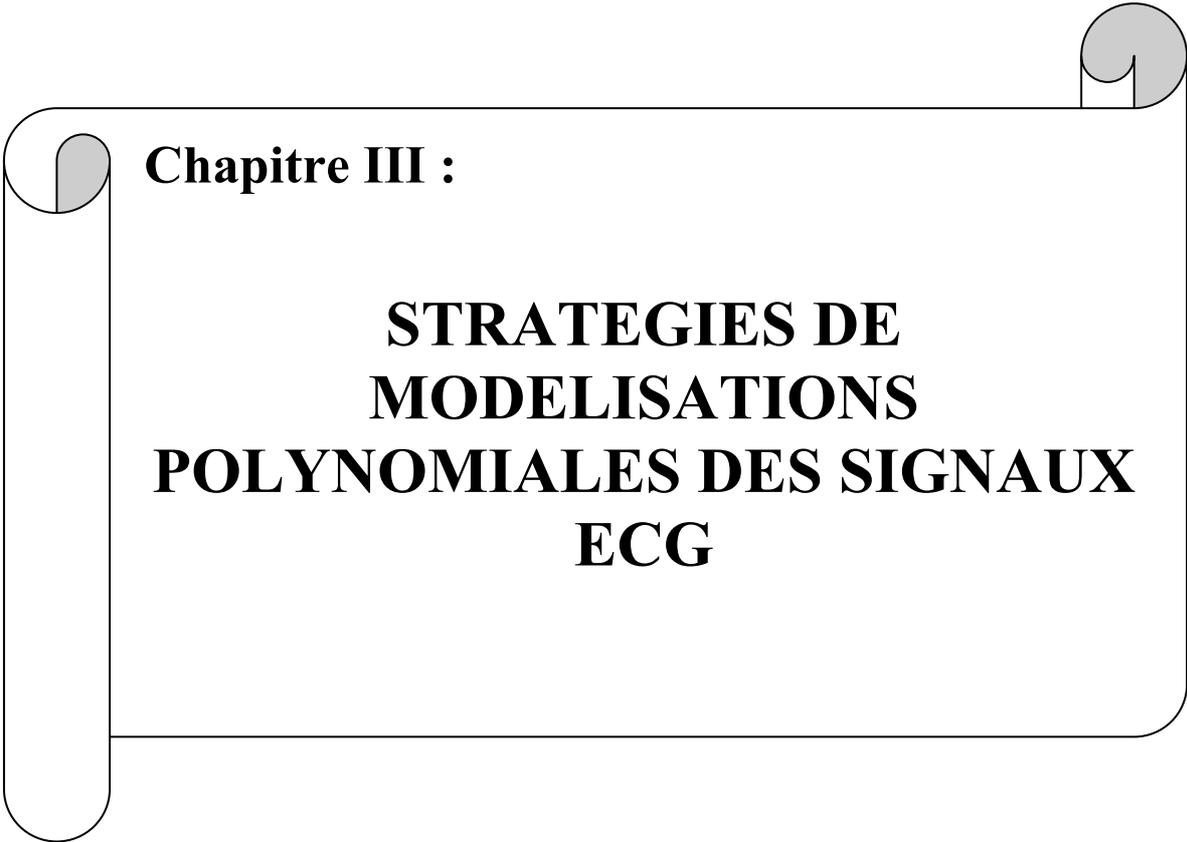
**Figure 2-4 : Polynômes et fonctions d'Hermite.**

(a) : Quelques polynômes d'Hermite ; (b) et (c) : Fonctions d'Hermite. Les polynômes d'Hermite sont oscillatoires seulement autour de 0. Les Fonctions d'Hermite sont à supports bornés.

## II-6 CONCLUSION

Les systèmes de fonctions orthogonales trouvent beaucoup d'applications aussi bien en sciences fondamentales que dans le développement des modules techniques. L'analyse fonctionnelle conçoit des cadres théoriques pour la manipulation de ces outils mathématiques. Nous venons de recenser les principaux résultats qui caractérisent les polynômes orthogonaux. Nous n'avons pas voulu rentrer dans les détails de certaines démonstrations assez abstraites. Au contraire, nous avons insisté sur les aspects applicatifs des polynômes orthogonaux. C'est ainsi qu'après avoir identifié les fonctions qui forment les familles de polynômes orthogonaux, nous avons présenté directement leurs propriétés communes et leurs

caractéristiques essentielles, et ressorti des courbes illustratives pour quelques uns de ces polynômes. Les fonctions à variable discrète sont mieux indiquées pour traiter les signaux échantillonnés ou numériques. On a pu élaborer des polynômes orthogonaux à variable discrète, jouissant des mêmes propriétés que les polynômes à variable continue que nous avons étudiés le long de ce chapitre. Nous donnons, en annexe B, une synthèse sur les différentes classes des polynômes orthogonaux à variable discrète avec leurs principales caractéristiques. Pour ce qui est de la suite du mémoire, nous allons utiliser les polynômes orthogonaux et exploiter au maximum leurs propriétés et leurs caractéristiques pour construire des algorithmes de modélisation et d'interpolation du signal ECG en vue de la compression.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges curving upwards. The text is centered within the scroll's body.

**Chapitre III :**

**STRATEGIES DE  
MODELISATIONS  
POLYNOMIALES DES SIGNAUX  
ECG**

# **Chapitre III :**

## **STRATEGIES DE MODELISATIONS POLYNOMIALES DES SIGNAUX ECG**

*Celui qui ferme sa porte aux erreurs la ferme aussi aux vérités*

R. TAGORE

### **III-1 INTRODUCTION**

Dans toutes les sciences appliquées, on est souvent amené à décrire un système par un modèle mathématique qui permet de réaliser sa simulation afin de mieux le comprendre et prédire son comportement. On remplace ainsi grâce à la simulation de nombreuses et coûteuses expérimentations sur site. La modélisation peut être menée par une analyse détaillée des propriétés du système en appliquant les lois qui caractérisent les différents phénomènes interagissant. On obtient dans ce cas le modèle de connaissance qui est toujours incomplet. La modélisation peut aussi être menée à partir d'une analyse expérimentale des données d'entrée/sortie en vue de reproduire le comportement externe du système. On a dans ce cas un modèle de représentation ou modèle « boîte noire » [Kibangou 05 a].

En traitement du signal, la modélisation permet surtout de réaliser une classification des signaux observés à l'aide des paramètres du modèle. Pour le cas du signal ECG, la modélisation avec les fonctions d'Hermite est très utilisée dans la littérature en vue de la classification des complexes QRS [Sörnmo 81], [Laguna 96] et [Lagerholm 00]. On rencontre aussi des modèles de Markov destinés à faciliter l'interprétation automatique de l'ECG [Koski 96]. Nous proposons, dans ce chapitre 3, des stratégies pour la construction des modèles polynomiaux du signal ECG. L'idée consiste à décomposer le signal dans des bases polynomiales orthogonales et d'utiliser les coefficients obtenus après décomposition pour le caractériser. Les polynômes orthogonaux étudiés au chapitre précédent seront utilisés à cet effet. Le développement en séries du signal ECG suivant des classes de polynômes orthogonaux n'est pas sans problèmes. En effet, des difficultés pratiques d'analyse numérique surgissent et se traduisent par de nombreuses erreurs d'arrondi qui s'accumulent lors de la génération numérique des formules des polynômes, au cours de l'évaluation des fonctions aux instants discrets et pendant les calculs d'intégrations numériques.

Le schéma bloc de la figure 3-1 montre le principe général de décomposition et de synthèse de l'ECG avec les polynômes orthogonaux. Dans la phase de décomposition, le signal ECG est d'abord divisé en blocs (segmentation), chaque bloc est ensuite transposé dans le domaine de définition  $[a, b]$  du système de polynômes orthogonaux choisi pour le traitement. La transformation polynomiale consiste à déterminer les coefficients polynomiaux pour chaque segment de signal.

Pour la suite du chapitre, nous allons commencer par construire un signal « fantôme » constitué uniquement des segments de droite, mais assez proche des signaux ECG réels. Ce signal simulé nous servira pour l'évaluation théorique des performances de différentes transformations polynomiales. Nous étudierons par la suite la segmentation du signal. Les calculs des coefficients font appel à de nombreuses intégrations, nous allons en conséquence analyser les principes des algorithmes usuels d'intégrations numériques et particulièrement ceux utilisant les quadratures de Gauss qui sont les plus appropriés pour notre étude. On se penchera aussi sur les méthodes d'évaluation des polynômes aux abscisses. Le chapitre se termine avec quelques résultats de transformations polynomiales.

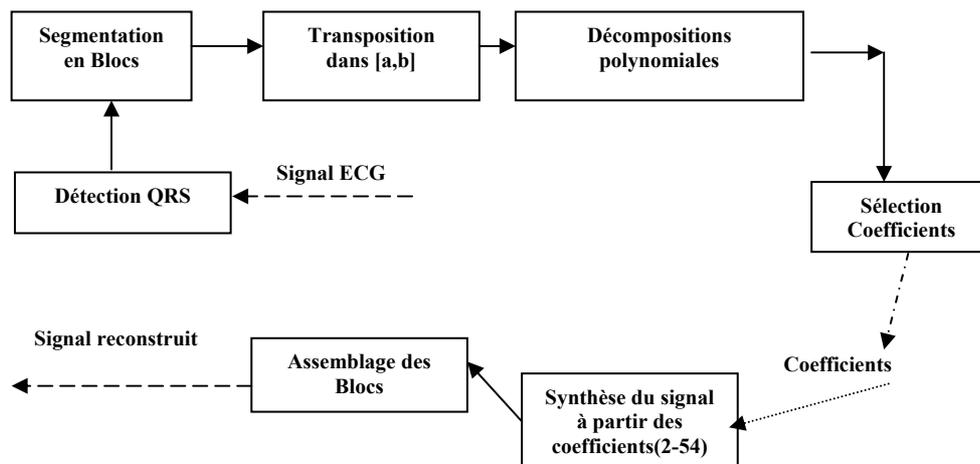


Figure 3-1 : Diagramme bloc du processus complet de décomposition et de synthèse du signal ECG avec les polynômes orthogonaux

## III-2 SIMULATION MATHÉMATIQUE D'UN SIGNAL ECG THÉORIQUE

### III-2-1 Modèle et expression mathématique du motif

Nous avons construit un signal fantôme, à l'image du signal ECG. Ce signal fantôme est constitué uniquement de segments de droite. On peut déterminer son expression

mathématique, il sera donc utilisé pour prévoir théoriquement les performances des différents algorithmes.

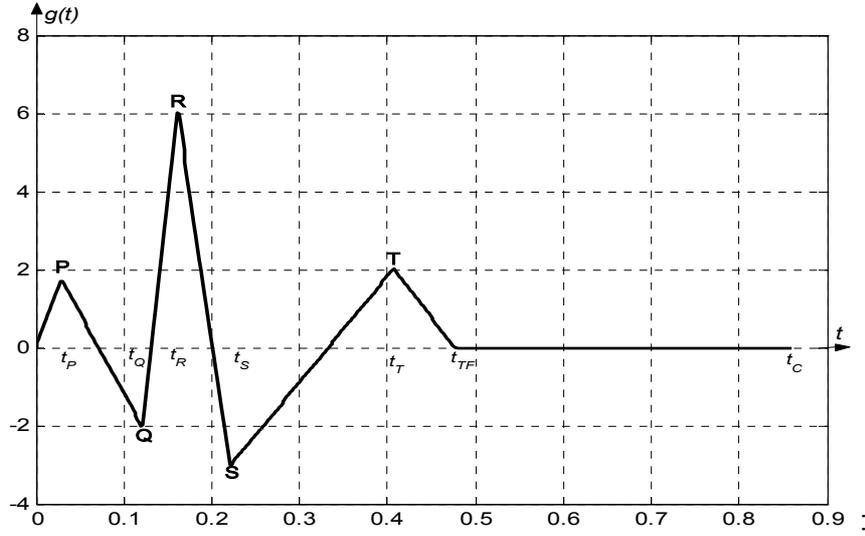


Figure 3-2 : Motif principal du signal ECG simulé

Nous représentons sur la figure 3-2 le motif principal  $g(t)$  de ce signal test.  $g(t)$  coïncide avec un cycle cardiaque et peut être exprimé par :

$$g(t) = \begin{cases} \lambda_P t + \gamma_P & \text{si } 0 \leq t \leq t_P \\ \lambda_{PQ} t + \gamma_{PQ} & \text{si } t_P < t \leq t_Q \\ \lambda_{QR} t + \gamma_{QR} & \text{si } t_Q < t \leq t_R \\ \lambda_{RS} t + \gamma_{RS} & \text{si } t_R < t \leq t_S \\ \lambda_{ST} t + \gamma_{ST} & \text{si } t_S < t \leq t_T \\ \lambda_{TF} t + \gamma_{TF} & \text{si } t_T < t \leq t_{TF} \\ a & \text{si } t_{TF} < t \leq t_C \end{cases} \quad (3-1)$$

$\lambda_X$  sont les pentes des segments,  $\gamma_X$  et  $a$  sont des constantes réelles ;  $X \in \{P, PQ, QR, RS, ST, TF\}$ . Lorsqu'on considère  $u(t)$  qui est la fonction échelon unitaire, on peut réécrire  $g(t)$  sous la forme de l'équation (3-2) ci-après :

$$g(t) = (\lambda_P t + \gamma_P)u(t) - (\lambda_P t + \gamma_P)u(t - t_P) + (\lambda_{PQ} t + \gamma_{PQ})u(t - t_P) - (\lambda_{PQ} t + \gamma_{PQ})u(t - t_Q) + \\ + (\lambda_{QR} t + \gamma_{QR})u(t - t_Q) - (\lambda_{QR} t + \gamma_{QR})u(t - t_R) + (\lambda_{RS} t + \gamma_{RS})u(t - t_R) - (\lambda_{RS} t + \gamma_{RS})u(t - t_S) + \\ + (\lambda_{ST} t + \gamma_{ST})u(t - t_S) - (\lambda_{ST} t + \gamma_{ST})u(t - t_T) + (\lambda_{TF} t + \gamma_{TF})u(t - t_T) - (\lambda_{TF} t + \gamma_{TF})u(t - t_{TF}) + \\ + a(u(t - t_{TF}) - u(t - t_C)) \quad (3-2)$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
g(t) = & (\lambda_P t + \gamma_P)u(t) + [(\lambda_{PQ} - \lambda_P)t + (\gamma_{PQ} - \gamma_P)]u(t - t_P) + [(\lambda_{QR} - \lambda_{PQ})t + (\gamma_{QR} - \gamma_{PQ})]u(t - t_Q) + \\
& + [(\lambda_{RS} - \lambda_{QR})t + (\gamma_{RS} - \gamma_{QR})]u(t - t_R) + [(\lambda_{ST} - \lambda_{RS})t + (\gamma_{ST} - \gamma_{RS})]u(t - t_S) + \\
& + [(\lambda_{TF} - \lambda_{ST})t + (\gamma_{TF} - \gamma_{ST})]u(t - t_T) + [-\lambda_{TF}t + (a - \gamma_{TF})]u(t - t_F) - a(u(t - t_C))
\end{aligned} \tag{3-3}$$

Le signal fantôme ECG  $s(t)$  est une répétition périodique des translations de  $g(t)$ . On peut donc dans le cas de  $N$  répétitions de  $g(t)$ , soit  $N+1$  cycles cardiaques, poser :

$$s(t) = \sum_{k=0}^N g(t - kt_C) \tag{3-4}$$

### III-2-2 Valeurs numériques des amplitudes et intervalles

Pour ce qui est de la réalisation numérique de  $s(t)$ , nous avons considéré un rythme cardiaque de l'ordre de 70 battements par minute, ce qui conduit à  $t_C = 0.860 s$ . La fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz, 2 échantillons consécutifs sont donc distants de 0.002 seconde. Les critères de normalité du tableau 1-1 sont utilisés pour dimensionner les intervalles et les ondes de la manière suivante :

$$\begin{cases} t_P = 0.028 s \\ g(t_P) = 1.7 mV \end{cases} \quad \begin{cases} t_Q = 0.120 s \\ g(t_Q) = -2 mV \end{cases} \quad \begin{cases} t_R = 0.160 s \\ g(t_R) = 6 mV \end{cases} \quad \begin{cases} t_S = 0.220 s \\ g(t_S) = -3 mV \end{cases} \\
\begin{cases} t_T = 0.406 s \\ g(t_T) = 2 mV \end{cases} \quad \begin{cases} t_{TF} = 0.476 s \\ g(t_{TF}) = a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_C = 0.860 s \\ g(t_C) = a = 0 \end{cases}
\end{cases} \tag{3-5}$$

Avec ces valeurs, le calcul des paramètres  $\lambda$  et  $\gamma$  revient à résoudre un ensemble de systèmes de 2 équations à 2 inconnues. On obtient :

$$\begin{cases} \lambda_P = 60.7143 \\ \gamma_P = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{PQ} = -41.1111 \\ \gamma_{PQ} = 2.9333 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{QR} = 210.5263 \\ \gamma_{QR} = -27.6842 \end{cases}
\end{cases} \tag{3-6}$$

$$\begin{cases} \lambda_{RS} = -155.1724 \\ \gamma_{RS} = 31.1379 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{ST} = 27.1739 \\ \gamma_{ST} = -9.0326 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{TF} = -29.4117 \\ \gamma_{TF} = 14.0000 \end{cases}$$

### III-2-3 Signal fantôme bruité

On ne saurait apprécier correctement les performances des différents algorithmes en utilisant le seul signal fantôme simulé. On doit pouvoir caractériser les comportements de ces algorithmes en présence des bruits. Nous avons établi au chapitre 1 les sources des bruits qui

s'ajoutent à l'ECG réel : interférences de la tension secteur, artefacts des mouvements musculaires et respiratoires. Dans le domaine fréquentiel, l'encombrement spectral des bruits est parfois confondu à celui des ondes de l'ECG (voir figure 1-11). Nous avons simulé les bruits en ajoutant au signal fantôme une composante à 50 Hz et d'amplitude 0.4 mV, des composantes à 150 Hz, 250 Hz et 500 Hz toutes avec une amplitude de même valeur 0.1 mV. La figure 3-3 montre la version bruitée du signal fantôme.

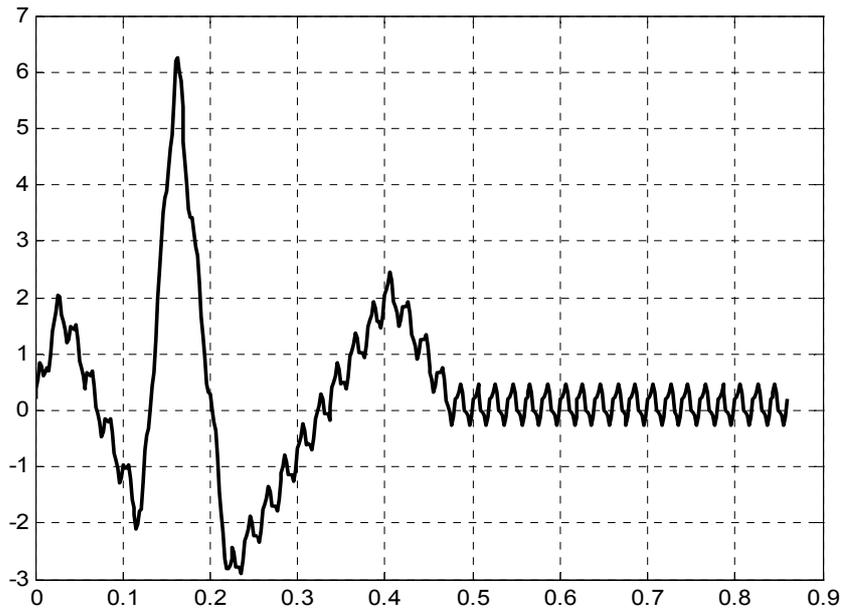


Figure 3-3 : Version bruitée du signal simulé

## III-3 SEGMENTATION DU SIGNAL ECG

### III-3-1 Nécessité et principes

L'enregistrement classique du signal ECG dure environ 10 secondes pour chaque dérivation. Dans le cas de l'enregistrement ambulatoire avec le système Holter, l'enregistrement est de longue durée (24 heures). Dans le cadre de la surveillance à distance du dysfonctionnement ponctuel du système cardiaque, on enregistre l'ECG pendant des semaines et même des mois. La quantité de données produites par ces enregistrements est énorme et la durée du signal obtenu est très grande par rapport à celle d'un cycle cardiaque. Pour qu'un signal soit développable en séries suivant une classe de polynômes orthogonaux, il doit être à énergie finie. L'un des buts de la segmentation du signal ECG est de le fractionner en tronçons de petites durées ; ces tronçons sont à énergie finie.

Le signal ECG est pseudopériodique : les cycles cardiaques sont répétitifs, la morphologie du signal est assez semblable d'un cycle à l'autre. Les durées des cycles sont sensiblement égales. On est donc amené intuitivement à faire coïncider les tronçons du signal segmenté avec les cycles cardiaques. Cette façon de segmenter le signal se justifie aussi logiquement puisqu'elle permet de comparer les phénomènes survenant dans différents cycles cardiaques afin de distinguer les cycles normaux de ceux pathologiques. D'un point de vue physiologique, un cycle cardiaque est un processus complet et indépendant des autres cycles ; il est donc de bon sens que la segmentation puisse permettre de distinguer ces cycles cardiaques les uns des autres, sans interférences.

Bien qu'il soit clair que la segmentation devra donner lieu à des fenêtres de signal ECG de durées égales à celles des cycles cardiaques, les positions des débuts et fins de ces fenêtres restent à déterminer. En effet, chacun des intervalles P-P, Q-Q, R-R, S-S, T-T, ...etc., a une durée égale à celle du cycle cardiaque. Nous reviendrons sur la problématique du choix optimal des début et fin de fenêtre à la section III-3-3. Mais, d'ores et déjà, il est évident qu'il faut localiser au préalable les positions d'une ou de plusieurs ondes caractéristiques du signal avant la segmentation en cycles cardiaques. La détection des complexes QRS est d'usage courant et nous avons réalisé une étude bibliographique à ce sujet dans le chapitre I. L'extraction des ondes P ou T est très délicate. La probabilité de fausses détections ou de non détection de ces ondes est très élevée. Même s'il existe quelques algorithmes plus ou moins robustes de détection des ondes P et T, ils ne fonctionnent pas en temps réel [Li 95], [Kadambe 99]. On ne saurait donc exploiter la détection des ondes P ou T pour identifier les cycles cardiaques. On peut donc se limiter à la détection des complexes QRS et estimer les positions des autres ondes à l'aide formules empiriques et des paramètres statistiques du signal ECG (voir tableau 1-1).

### **III-3-2 Quelques détecteurs de complexes QRS**

Un grand nombre de procédures de détection de complexes QRS existent dans la littérature, et il serait difficile d'en faire une liste exhaustive ou encore de les tester toutes. Nous avons réalisé une étude comparative des détecteurs courants de QRS en annexe A. Nous allons insister dans ce paragraphe sur l'analyse des algorithmes les plus récents qui sont essentiellement à base de la transformation en ondelettes. Nous avons rappelé les mécanismes de la transformation en ondelettes (WT) au chapitre I. La première tentative de détection des QRS par la WT a été l'œuvre de Li et Zheng [Li 93]. Ces auteurs utilisent une ondelette mère

spline quadratique à support compact. Cette ondelette (3-7) dont la transformée de Fourier est donnée par l'équation (3-8) est la dérivée d'une fonction analytique  $\theta(x)$ .

$$\Psi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3-7)$$

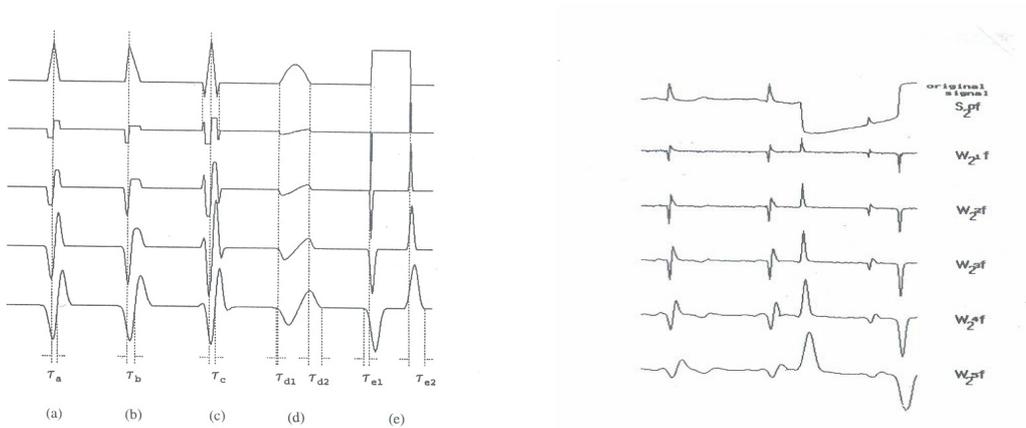
La transformée de Fourier de  $\Psi(x)$  est :

$$\hat{\Psi}(\omega) = j\omega \left( \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right)^4 \quad (3-8)$$

Celles des filtres associés (voir chapitre I) sont :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{j\omega/2} (\cos(\omega/2))^3 \\ G(\omega) &= 4je^{j\omega/2} (\sin(\omega/2)) \end{aligned} \quad (3-9)$$

L'algorithme de Li repose sur une théorie élaborée par S. Mallat qui établit une relation entre la décomposition en ondelettes et les singularités d'un signal [Mallat 92]. En effet, lorsque le niveau de détail est assez faible et que l'ondelette mère  $\Psi(x)$  est la dérivée première d'une fonction régulière, les maxima de détails indiquent les portions de variations brusques du signal. Lorsque cette théorie est appliquée à l'ECG, les positions des ondes R du signal se traduisent par les passages à zéro entre un maximum et un minimum lors de la décomposition comme indiqué sur la figure 3-4 [Li 93], [Li 95].



**Figure 3-4 : Effets de la transformation en ondelettes sur les singularités d'un signal [Li 95]**  
*A gauche, cas des motifs simulés et à droite effets sur un signal ECG réel*

Nous avons réalisé la WT du signal ECG fantôme simulé en utilisant les ondelettes Db3 et Db7 construites dans [Daubechies 88]. L'ondelette Db7 est assez régulière et permet

de bien repérer les QRS à l'aide d'un seuillage approprié au niveau de  $d_3$  (voir Figure 3-5).

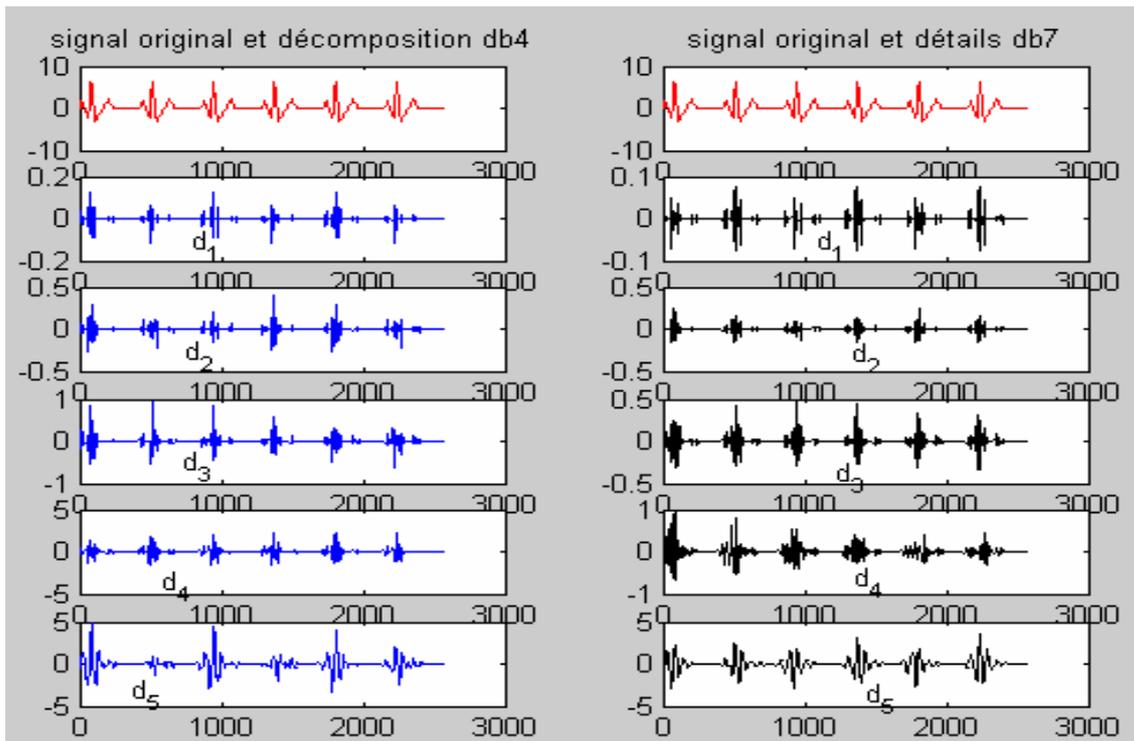


Figure 3-5 : Décomposition en ondelettes du signal fantôme simulé en vue de la détection des QRS

La décomposition en ondelettes d'un signal ECG réel avec l'ondelette (3-7) montre la présence des bruits hautes fréquences pour  $j = 1, 2$ . Les détails aux niveaux de décomposition  $j = 4, 5$  caractérisent les ondes T et P (bruits basses fréquences). L'information du complexe QRS se manifeste intensément au niveau de décomposition  $j = 3$  [Kadambe 99]. Pour que l'algorithme soit robuste, on doit aussi prendre en considération des règles édictées dans [Halmiton 86]. C'est ainsi que :

- Les événements qui suivent immédiatement la détection du complexe QRS sont ignorés pour une durée donnée.
- On doit faire un retour en arrière pour réévaluer les événements rejetés si un complexe QRS n'est pas détecté après une certaine durée.
- Faire varier le seuil de détection en fonction de l'amplitude maximale du signal en traitement.

Quelques-uns des résultats que produit cet algorithme sont regroupés dans le tableau 3-1.

Dans le tableau 3-1, FD traduit les Fausses Détections, c'est-à-dire les situations où l'algorithme détecte un QRS lorsqu'il n'y en a pas. ND signifie Non Détection, et ErD est le

**Tableau 3-1 : Résultats de l'algorithme de Li sur la base des données [MIT 92]**

<b>Signaux</b>	<b>Nbre Cycles</b>	<b>FD</b>	<b>ND</b>	<b>ErD</b>	<b>%ErD</b>
100	2273	0	0	0	0
101	1865	1	0	1	0
102	2187	0	0	0	0,11
103	2084	0	0	0	0
104	2230	8	2	10	0,45
105	2572	15	13	28	1,09
106	2027	2	3	5	0,25
107	2137	0	0	0	0
108	1763	13	15	28	1,59
109	2532	0	0	0	0
110	2124	1	1	2	0,09
111	2539	2	1	3	0,12
113	1795	2	0	2	0,11
114	1879	3	0	3	0,16
115	1953	0	0	0	0
116	2412	0	1	1	0,04
117	1535	1	0	1	0,04
118	2275	1	0	1	0,04
119	1987	1	0	1	0,04
121	1863	2	1	3	0,16
122	2476	0	0	0	0
123	1518	0	0	0	0
124	1619	0	0	0	0
200	2601	0	1	1	0,04
201	1963	1	12	13	0,66
202	2136	0	1	1	0,05
203	2982	2	24	26	0,87
205	2656	0	1	1	0,04
207	1862	2	3	5	0,27
208	2956	0	4	4	0,14
209	3004	0	0	0	0
210	2647	3	3	6	0,23
212	2748	0	0	0	0
213	3251	0	0	0	0
217	2208	1	1	2	0,09
219	2154	0	0	0	0
220	2048	0	0	0	0
221	2427	0	7	7	0,29
222	2484	1	9	10	0,4
223	2605	0	2	2	0,08
228	2053	3	7	10	0,49
230	2256	0	0	0	0
231	1886	0	0	0	0
232	1780	0	0	0	0
233	3079	0	0	0	0
234	2753	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>116137</b>	<b>65</b>	<b>112</b>	<b>177</b>	<b>0,15</b>

total des erreurs de détection ( $ErD = FD+ND$ ) et  $\%ErD = \frac{ErD}{\text{Nbre total de cycles}}$ . Pour un total de 116137 cycles cardiaques, on dénombre 65 FD, 112 ND, soit 177 erreurs de détection. Parmi les signaux traités énumérés dans le tableau 3-1, le signal référencé 105 est le plus bruité. Le signal 108 contient des ondes P inhabituellement grandes, le signal 203 a un grand nombre de complexes QRS avec des arythmies ventriculaires multifformes. Le signal 222 contient de très grandes ondes qui ne sont pas des QRS. La plupart des erreurs de détection proviennent de ces cinq signaux. Ces résultats sont meilleurs que ceux produits par les détecteurs de QRS usuels. D. Henry *et al* ont mené une étude comparative de ces détecteurs de QRS en utilisant des signaux endocavitaires. On distingue deux grandes catégories d'algorithmes : ceux basés sur un calcul de la dérivée première ou seconde et ceux intégrant un ou plusieurs filtres. Les performances de ces algorithmes sont rassemblées dans des tableaux dans [Henry 93]. Une autre analyse comparative des détecteurs de QRS est réalisée dans [Friesen 90]. Cette fois, les performances des algorithmes sont mesurées en termes de sensibilité en présence des bruits. Dans nos algorithmes de modélisations polynomiales, nous utiliserons le programme « qrsdet2 » qui accompagne la base de données [Mit 92]. Cette application a été développée par Patrick S. HAMILTON selon l'algorithme présenté dans [Hamilton 86].

### III-3-3 Un cas de segmentation optimale

Nous voulons déterminer lequel des intervalles R-R, P-P, Q-Q, S-S, T-T ou du cycle cardiaque centré sur le complexe QRS serait le mieux adapté pour réaliser les décompositions polynomiales. Une étude théorique en vue du choix optimal du type de fenêtre de segmentation a été menée dans [Philips 92], dans le cadre de la compression des signaux ECG avec les polynômes de Legendre discrets. On part d'un modèle simplifié du signal ECG constitué des répétitions périodiques d'une impulsion triangulaire. Ces impulsions représentent des complexes QRS monophasiques. Pour les cas des complexes QRS biphasiques ou triphasiques, on pourrait utiliser un modèle multi triangulaire. Les autres ondes du signal sont ignorées par ce modèle (voir Figure 3-6). Les coefficients de Fourier avec les polynômes de Legendre sont donnés par :

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 s(t) P_n(t) dt \quad (3-10)$$

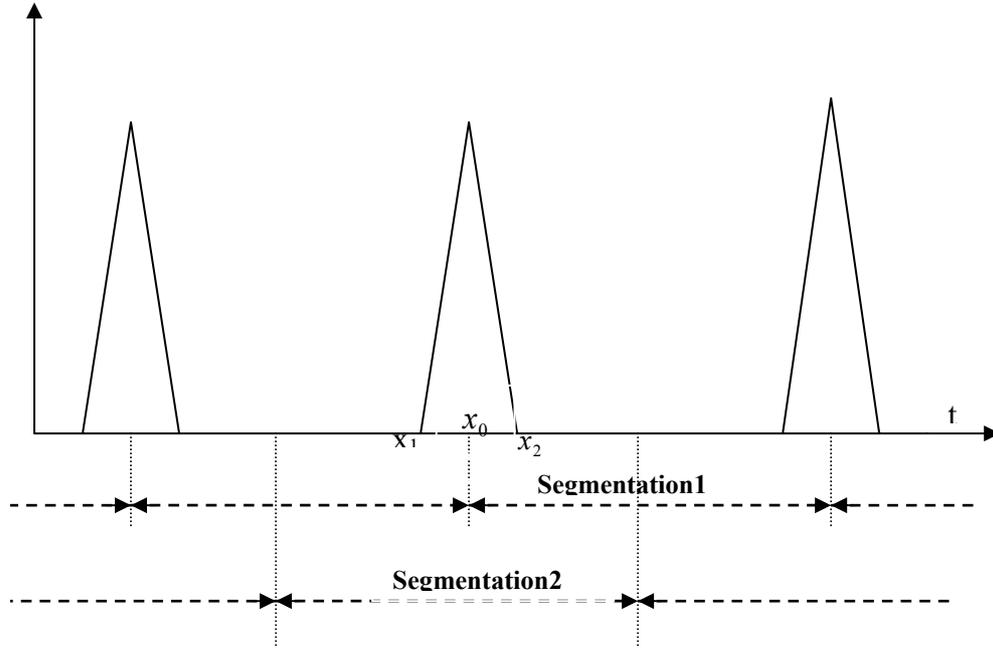


Figure 3-6 : Modèle simplifié du signal ECG servant à déterminer théoriquement le choix de la segmentation. [Philips 92]  
 $(\delta_1 = x_0 - x_1 \text{ et } \delta_2 = x_2 - x_0)$ .

Deux types de segmentation sont considérés sur la figure 3-6 : le premier type, « Segmentation1 », correspond à la division du signal en intervalles R-R alors que le second, « Segmentation2 », est la segmentation du signal ECG en cycles cardiaques centrés sur les complexes QRS. Après des calculs assez laborieux, Philips *et al* déterminent les coefficients  $A_n^{(1)}$  dans le cas « Segmentation1 » et  $A_n^{(2)}$  pour la situation « Segmentation2 ». Ces coefficients sont donnés par :

$$A_n^{(1)} \approx -\frac{2^{5/4}}{\sqrt{\pi n^2}} \left( \frac{1}{\delta_1^{1/4}} \cos\left( \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{(-1)^n}{\delta_2^{1/4}} \cos\left( \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (3-11)$$

avec  $\cos \alpha_i = 1 - \delta_i$  ;  $\delta_1 = x_0 - x_1$  et  $\delta_2 = x_2 - x_0$  sur la figure 3-6

$$A_n^{(2)} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin \theta_0)^{3/2}}{n^2} \left[ \frac{1}{\delta_1} \cos\left( \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta_1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) \cos\left( \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta_0 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\delta_2} \cos\left( \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3-12)$$

avec  $\theta_i = \arccos(t_i)$  et  $(\delta_1 = x_0 - x_1 \text{ et } \delta_2 = x_2 - x_0)$

Le tracé des courbes enveloppes des coefficients  $A_n^{(1)}$  et  $A_n^{(2)}$  sur la figure 3-7 montre que l'enveloppe de  $A_n^{(1)}$  décroît très rapidement, ce qui signifie qu'avec la situation « Segmentation 1 » l'essentiel de l'énergie du signal est contenue dans un petit nombre de

coefficients, correspondant aux polynômes de faibles degrés [Philips 92]. Ce résultat justifie le choix des intervalles R-R pour la compression des signaux ECG en utilisant la DLT dans [Philips 92], [Philips 93] et [Colomer 97].

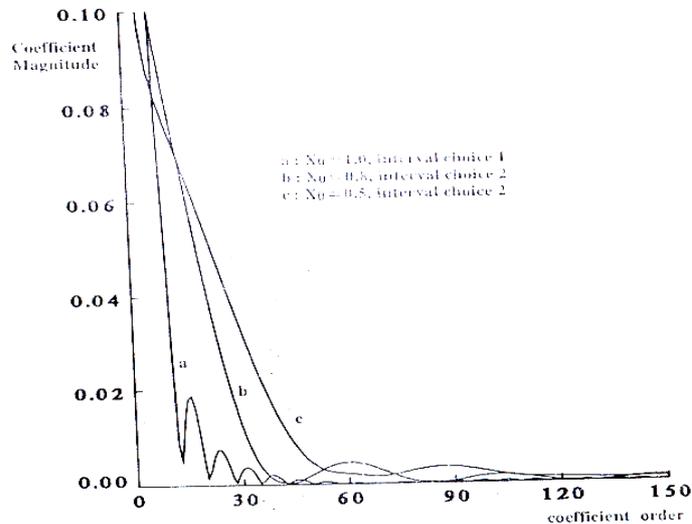


Figure 3-7 : Courbes enveloppes des coefficients de Fourier pour la DLT [Philips 92].

a)  $A_n^{(1)}$  segmentation 1, b) et c)  $A_n^{(2)}$  segmentation 2 pour 2 valeurs différentes de  $x_0$ .

Dans des exemples de transformations polynomiales que nous allons entreprendre un peu plus tard dans ce chapitre, nous envisagerons, pour chaque classe de polynômes, plusieurs possibilités de segmentation, afin de dégager la mieux adaptée.

## III-4 CALCUL DES COEFFICIENTS DE DECOMPOSITION

### III-4-1 Expressions des coefficients avec les polynômes de Jacobi, les polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermité

Nous allons déterminer les expressions des coefficients pour différentes familles de polynômes orthogonaux. A cet effet, nous utiliserons le motif  $g(t)$  du signal ECG fantôme. Nous indiquerons, dans chaque cas, les possibilités de transposition des segments du signal dans le domaine de définition  $[a, b]$  des polynômes. On va exploiter les expressions de  $\|y_n\|^2$  données dans le tableau 2-1.

### Calcul des coefficients de Jacobi

Les polynômes  $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$  sont définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$  ; on devra par conséquent construire un opérateur linéaire isomorphe entre les intervalles  $[0, t_c]$  et  $[-1, 1]$ . Ceci revient à un changement linéaire de la variable d'intégration  $t$  en  $x$  par :

$$x = -1 + 2\frac{t}{t_c} \quad (3-13)$$

On peut dès lors calculer les coefficients pour les polynômes de Jacobi avec l'expression (3-14) :

$$\begin{aligned} C_{n,J} &= \frac{\int_{-1}^1 g(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2} \\ &= \frac{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{(\alpha+\beta+1)}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int_{-1}^1 g(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \end{aligned} \quad (3-14)$$

### Calcul des coefficients de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont définis sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  qui est aussi le domaine d'intégration pour le calcul des coefficients de Fourier. Il faut donc trouver un moyen pour faire coïncider l'intervalle de définition du motif  $g(t)$  à  $[0, +\infty[$ . Trois possibilités sont envisageables :

- Prolonger la durée du signal par insertion des valeurs nulles au delà de  $t_c$  ;
- Procéder à plusieurs répétitions périodiques de  $g(t)$  ;
- Réaliser des répétitions symétriques de  $g(t)$ .

Lorsqu'on envisage le prolongement par insertion d'une suite de valeurs nulles à la fin du motif, les coefficients sont donnés par :

$$C_{n,L}^{(1)} = \frac{\int_0^\infty g(t) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt}{\|L_n^\alpha\|^2} = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{t_c} g(t) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt \quad (3-15)$$

Lorsqu'on réalise  $N$  répétitions périodiques de  $g(t)$ , on obtient un signal  $\theta(t)$  tel que :

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^N g(t - kt_c) \quad (3-16)$$

et on en déduit les coefficients pour les polynômes de Laguerre dans ce cas:

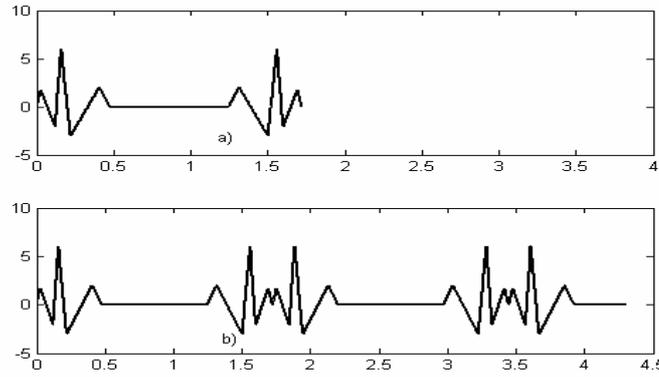
$$\begin{aligned}
C_{n,L}^{(2)} &= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} \theta(t) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt \\
&= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{(N+1)t_c} \theta(t) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt \\
&= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^N \int_k^{(k+1)t_c} g(t-kt_c) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt
\end{aligned} \tag{3-17}$$

Pour le cas des répétitions symétriques de  $g(t)$ , nous étudions avant toute chose le signal obtenu après une seule répétition. Il est montré sur la figure 3-8 (a) et se définit par :

$$v(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_c \\ g(t_c - t)[u(t - t_c) - u(t - 2t_c)] & \text{pour } t_c < t \leq 2t_c \end{cases} \tag{3-18}$$

Il en découle l'expression générale du signal montré sur la figure 3-8 (b) que :

$$q(t) = \begin{cases} g(t - 2kt_c) & \text{pour } 2kt_c < t \leq (2k+1)t_c \\ g((2k+1)t_c - t)[u(t - (2k+1)t_c) - u(t - (2k+2)t_c)] & \text{pour } (2k+1)t_c < t \leq (2k+2)t_c \end{cases} \tag{3-19}$$



**Figure 3-8 : Répétitions symétriques du motif  $g(t)$ .**  
*a) : une répétition symétrique, b) : 5 cycles cardiaques avec 4 répétitions symétriques.*

On détermine alors les coefficients de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
C_{n,L}^{(3)} &= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} \int_{(2k-1)t_c}^{2kt_c} g((2k-1)t_c - t)[u(t - (2k-1)t_c) - u(t - (2k)t_c)] L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt \right. \\
&+ \left. \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \int_{2kt_c}^{(2k+1)t_c} g(t - 2kt_c) L_n^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt \right\} \tag{3-20}
\end{aligned}$$

### Calcul des coefficients d'Hermite

L'étude de la modélisation par les polynômes d'Hermite est semblable à celle des polynômes de Laguerre. L'intervalle d'intégration est cette fois :  $[a, b] = ]-\infty, +\infty[$ . Les définitions des signaux  $\theta(t)$ ,  $v(t)$ , et  $q(t)$  restent valables pour les calculs.

En reprenant les trois situations précédentes, on obtient les résultats ci-après :

- Cas de prolongement par insertion des zéros

$$C_{n,H}^{(1)} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_0^{t_c} g(t) H_n(t) e^{-t^2} dt \quad (3-21)$$

- Cas de  $N$  répétitions périodiques à gauche et à droite de  $g(t)$

$$C_{n,H}^{(2)} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \sum_{k=-N+1}^N \int_{kt_c}^{(k+1)t_c} g(t - kt_c) H_n(t) e^{-t^2} dt \quad (3-22)$$

- Situation des répétitions symétriques de part et d'autre de  $g(t)$

$$C_{n,H}^{(3)} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \int_{(2k-1)t_c}^{2kt_c} g((2k-1)t_c - t) [u(t - (2k-1)t_c) - u(t - (2k)t_c)] H_n(t) e^{-t^2} dt + \sum_{k=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \int_{2kt_c}^{(2k+1)t_c} g(t - 2kt_c) H_n(t) e^{-t^2} dt \right\} \quad (3-23)$$

Il est clair que le calcul des coefficients pour les polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermite dépendent de la manière dont on fait coïncider le segment du signal aux intervalles  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, +\infty[$  respectivement.

## III-4-2 Intégrations numériques : les quadratures de Gauss

### II-4-2-1 : Définition et principes

L'obtention des valeurs numériques des coefficients nécessite le calcul numérique d'au moins une intégrale. Il existe de nombreuses méthodes permettant de réaliser cette tâche. Soit une intégrale définie  $I$  à calculer :

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (3-24)$$

Etant donné qu'on ne saurait évaluer la fonction  $f(x)$  en une infinité de points, l'intégration numérique va consister à remplacer l'intégrale (3-24) par une somme discrète sur un nombre fini de points :

$$I_N = \sum_{k=1}^N D_k f(x_k) \quad (3-25)$$

L'évaluation numérique est correcte si  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = I$ . En conséquence, la qualité d'une méthode numérique d'intégration est évaluée par la manière dont la convergence vers le résultat s'effectue. Les méthodes courantes d'intégration numérique sont dues essentiellement

aux travaux de Roger COTES, collaborateur de NEWTON, qui s'est intéressé aux méthodes de calcul numérique et exact pour l'intégration. Les plus simples de ces méthodes sont celles où les abscisses sont choisies régulièrement espacées. Dans ces cas, on a :

$$x_k = x_0 + kh \quad (3-26)$$

avec  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ , et  $h = \frac{b-a}{N}$  est appelé le pas d'intégration.

Généralement, on utilise la notation simplifiée :  $f_k = f(x_k)$ . Ces méthodes sont étudiées dans [Dias 01] : ce sont la formule des rectangles, la formule des trapèzes, la méthode de Simpson et la méthode de Romberg.

### III-4-2-2 Les Quadratures de Gauss.

Avec les méthodes précédentes, on établit qu'un choix heureux des points d'intégration élève le degré des polynômes vérifiant exactement les quadratures de Newton-Côtes. Les méthodes de Gauss concernent l'utilisation des abscisses non régulièrement espacées. Elles résultent du problème d'optimisation suivant : pour un nombre de points  $M$  donné, construire la formule de quadrature exacte pour tout polynôme de degré  $M-1$ , telle que :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx S_M(f) = \sum_{j=1}^M D_j f(x_j) \quad (3-27)$$

On démontre que si  $\omega(x)$  est la fonction poids d'un système de polynômes orthogonaux  $\{y_n\}$ , la formule (3-27) prend la forme (3-28) [Bakhalov 83], [Szegö 75]:

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=1}^M G_j f(x_j) \quad (3-28)$$

où les nœuds  $x_j$  sont les zéros de  $y_M(x)$ . Les coefficients  $G_j$  sont appelés nombre de Christoffel. La formule (3-28) est exacte pour les polynômes jusqu'au degré  $2M-1$ . Pour  $\omega(x)$  paire par rapport à  $\frac{a+b}{2}$ , les zéros des polynômes orthogonaux qui sont en même temps les nœuds des formules de quadratures de Gauss sont symétriques par rapport au milieu du segment ; les nombres de Christoffel vérifient dans ce cas la relation de parité :

$$G_j = G_{M+1-j} \quad (3-29)$$

Cela réduit de moitié le tableau des formules de Gauss.

L'algorithme de détermination des nœuds exploite au mieux la propriété d'alternance des zéros des polynômes orthogonaux pour faciliter leur localisation.

**Théorème 3-2** [Szegö 75] :

1) Les nombres de Christoffel sont tous positifs et on a :

$$\sum_{j=1}^M G_j = \int_a^b \omega(x) dx = \mu(b) - \mu(a) \quad (3-30)$$

avec  $d\mu = \omega(x)dx$

2) Les représentations suivantes sont établies :

$$\bullet G_j = \int_a^b \left[ \frac{y_M(x)}{y_M'(x_j)(x-x_j)} \right]^2 \omega(x) dx = \frac{1}{y_M'(x_j)y_{M-1}(x_j)} \int_a^b \frac{y_M(x)y_{M-1}(x)}{x-x_j} \omega(x) dx \quad (3-31)$$

$$\bullet G_j = \frac{j_{M+1}}{j_M} \cdot \frac{-\|y_M\|^2}{y_{M+1}(x_j)y_M'(x_j)} = \frac{j_M}{j_{M-1}} \cdot \frac{\|y_{M-1}\|^2}{y_{M-1}(x_j)y_M'(x_j)} \quad (3-32)$$

$j_M$  est ici le coefficient du monôme de plus haut degré de  $y_M(x)$  défini dans le tableau 2-1 et dans l'équation (2-24).

$$\bullet \frac{1}{G_j} = \{y_0(x_j)\}^2 + \{y_1(x_j)\}^2 + \dots + \{y_M(x_j)\}^2$$

$$= \sum_{n=0}^M \{y_n(x_j)\}^2 = K_M(x_j, x_j) \quad (3-33)$$

Le théorème 3-2 est démontré dans [Szegö 75] pages 48-49. On évalue l'erreur de calcul de l'intégrale avec les quadratures de Gauss par la majoration (3-34) [Dude 05] :

$$R_M \leq \max_{[a,b]} f^{(2M)}(x) \int_a^b \frac{y_M^2(x)}{2M!} \omega(x) dx \quad (3-34)$$

Pour le calcul du coefficient de décomposition  $C_{n,x}$ , il suffira de considérer par exemple dans (3-13) que :  $f(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)g(x)$ . (3-35)

On obtient les expressions explicites des nombres de Christoffel pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite à partir de la relation (3-32) du **théorème 3-2**. Ainsi,

• Pour les polynômes de Jacobi :

$$G_{j,J} = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(M+\alpha+1)\Gamma(M+\beta+1)}{\Gamma(M+1)\Gamma(M+\alpha+\beta+1)} (1-x_j^2)^{-1} \{P_M^{(\alpha,\beta)}(x_j)\}^{-2} \quad (3-36)$$

• Pour les polynômes de Laguerre :

$$G_{j,L} = \frac{\Gamma(M + \alpha + 1)}{\Gamma(M + 1)} x_j^{-1} \{L_M^{\alpha'}(x_j)\}^{-2} \quad (3-37)$$

- Pour les polynômes d'Hermite :

$$G_{j,H} = \sqrt{\pi} 2^{M+1} M! \{H_M'(x_j)\}^{-2} \quad (3-38)$$

Un algorithme rapide d'intégration à l'aide des quadratures de Gauss est développé dans [Dutt 96]. La méthode de Gauss est incontestablement la plus appropriée pour le calcul des coefficients de décomposition suivant les polynômes orthogonaux. En effet, elle utilise un petit nombre d'abscisses, elle est exacte pour des polynômes de degrés beaucoup plus élevés. En comparaison, la formule des rectangles est exacte pour les polynômes de degré 0, celle des trapèzes est exacte pour les polynômes de degré 1, la méthode de Simpson a deux versions dont l'une est établie avec les polynômes de degré 2 et l'autre est exacte avec les polynômes de degré 3. La méthode de Gauss quant à elle est exacte pour les polynômes jusqu'au degré  $2M-1$ ,  $M$  étant le degré du polynôme utilisé pour déterminer les nœuds d'intégration (les nœuds d'intégration sont les racines de  $y_M(x)$ ). La formule de quadratures de Gauss hérite de nombreuses propriétés intéressantes des polynômes orthogonaux.

### **III-4-3 Evaluation des polynômes orthogonaux aux nœuds d'intégration et aux abscisses lors de la reconstruction du signal**

Les équations (3-14), (3-15), (3-21) et (3-28) révèlent que le calcul des coefficients avec les quadratures de Gauss exige l'évaluation des  $y_n(x_j)$ . La reconstruction du signal après décomposition à l'aide de la formule (2-43) exige aussi qu'on détermine les valeurs des différents polynômes à tous les instants. Nous envisageons maintenant les possibilités de réalisation de ce genre de calculs.

#### **III-4-3-1 Les Approximants de Padé.**

Les approximants de Padé constituent une généralisation de la notion du développement limité ou développement polynomial de Taylor. En effet, dans le cas des fonctions usuelles telles que  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\exp(x)$ , ...etc., le polynôme de Taylor donne une approximation de plus en plus fine d'une fonction lorsque le degré du polynôme augmente, mais surtout dans un domaine limité. Lorsqu'on désire généraliser la notion du développement de Taylor, on remplace le polynôme d'approximation  $P(x)$  par une fraction  $R(x)$ . C'est ainsi qu'est définie la notion d'approximant de Padé [Gouy 02] :

**Définition 3-11 :** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  définie sur un intervalle contenant 0 . On dit que  $R = P/Q$  est un  $[p/q]$  approximant de Padé de  $f$  si :

$$\begin{aligned} \deg P \leq p, \quad \deg Q \leq q, \quad Q(0) = 1, \\ f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = O(x^{p+q}) \end{aligned} \quad (3-39)$$

Si  $p = q$  , l'approximant est dit diagonal.

L'approximation de Padé consiste donc à remplacer une fonction  $f(x)$  par une fraction :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^p a_k x^k}{1 + \sum_{k=1}^q b_k x^k} \quad (3-40)$$

qui soit égale aux valeurs de la fonction  $f$  et à ses dérivées en un point  $x_0$  . C'est en quelque sorte un cas particulier d'approximants optimaux d'une série de fonction. Pour ce qui nous intéresse,  $f(x)$  sera un polynôme  $y_n(x)$  d'un système de polynômes orthogonaux. Posons :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \quad (3-41)$$

si on prend  $x_0 = 0$  pour simplifier, on aura :

$$\begin{aligned} R(0) &= f(0) \\ \left. \frac{d^m R(x)}{dx^m} \right|_{x=0} &= \left. \frac{d^m y_n(x)}{dx^m} \right|_{x=0} \end{aligned} \quad (3-42)$$

Pour une approximation rationnelle diagonale ( $p = q$ ), on obtient les relations suivantes [Recipes 92] :

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ \sum_{l=0}^q b_l c_{q-l+k} = -c_{q+k} & k = 1, 2, \dots, q \\ \sum_{l=1}^k b_l c_{k-l} = a_k & k = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (3-43)$$

La résolution des systèmes (3-43) détermine les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  . Une approche tutoriale d'explication des approximants de Padé avec de nombreux exemples pratiques de calcul est présentée dans [Gouy 02]. Des théories fondamentales sont développées dans [Fischler 02] et [Kuijlaars 03]. André DRAUX propose des algorithmes de calculs des

approximants de Padé, spécifiques aux polynômes orthogonaux, suivant un chemin quelconque dans une table qui les contient, les relations de récurrence vérifiées par les numérateurs et les dénominateurs étant les mêmes [Draux 87].

### III-4-3-2 Calculs directs : Méthode de Horner et approximations asymptotiques

Lorsqu'on écrit :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n, \quad (3-44)$$

l'évaluation du polynôme sous cette forme implique  $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

multiplications et  $n$  additions. L'algorithme de Horner consiste à mettre le polynôme sous la forme :

$$y_n(x) = c_0 + x \{ c_1 + x [ c_2 + \dots + x ( c_{n-2} + x ( c_{n-1} + c_n x ) ) \dots ] \}. \quad (3-45)$$

L'évaluation du polynôme ne nécessitera plus que  $n$  multiplications et  $n$  additions. Cette méthode est donc beaucoup plus performante. L'un de ses grands avantages réside dans le fait que l'algorithme d'implémentation est simple et récursif.

Les résultats partiels de l'algorithme de Horner permettent aussi d'évaluer très facilement la dérivée de  $y_n(x)$  [Lipschutz 84]. Nous devons connaître les valeurs de ces dérivées aux nœuds  $x_j$  dans le calcul des coefficients de Christoffel (3-36), (3-37), (3-38). Pour utiliser la méthode de Horner, on doit disposer d'un vecteur des coefficients  $c_k$  (3-44). La façon la plus naturelle de créer ce tableau de coefficients est d'exploiter les relations de récurrence (2-23). L'on ne saurait oublier de signaler que le calcul sur ordinateur des relations de récurrences introduit des erreurs d'arrondi qui s'accumulent au fur et à mesure que le degré du polynôme augmente et modifient considérablement les valeurs exactes des coefficients  $c_k$ . Pour contourner cette difficulté, on devra évaluer les polynômes orthogonaux à l'aide des approximations asymptotiques (2-53), (2-57) et (2-61), à partir d'un certain degré des polynômes. Ces approximations asymptotiques sont d'une bonne précision dès que le degré du polynôme est supérieur à 40 [Philips 92], [Philips 93].

A l'issue des paragraphes précédents, nous disposons de bons outils pour calculer les coefficients de décomposition d'un signal quelconque dans différentes bases de polynômes orthogonaux. Nous allons utiliser ces outils pour décomposer le signal fantôme simulé afin d'évaluer les performances de chaque famille de polynômes orthogonaux.

## III-5 EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS POLYNOMIALES

### III-5-1 Transformation de Legendre (LeT)

Les polynômes de Legendre sont une classe particulière des polynômes de Jacobi  $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$ . Les 5 premiers polynômes de Legendre sont :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1; & P_1(x) &= x; & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned} \quad (3-46)$$

L'équation (3-47) établit la relation de récurrence qui génère les polynômes de Legendre.

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0 \quad (3-47)$$

Après le changement de variable (3-13), le signal  $g(t)$  est ramené sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et peut dès lors être développé en séries de polynômes de Legendre (3-48) :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,p} P_n(x) \quad (3-48)$$

En considérant l'équation (3-14) dans le cas  $\alpha = \beta = 0$ , on obtient les coefficients

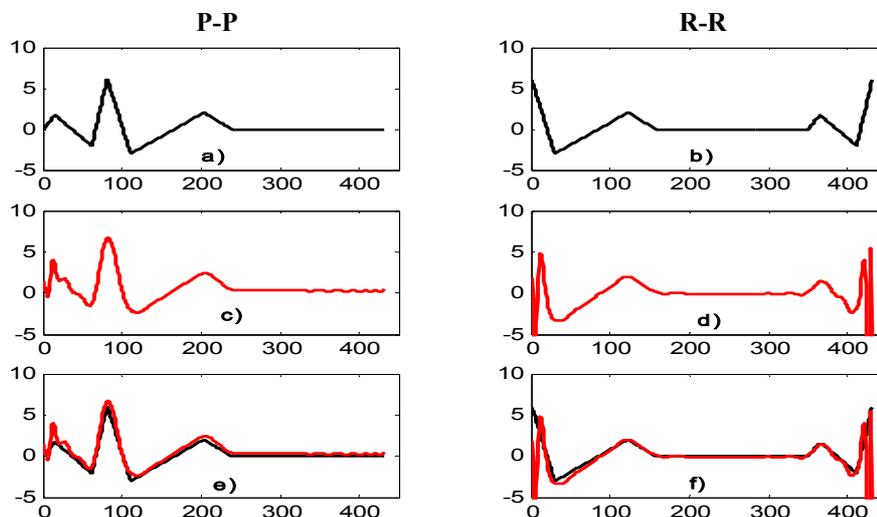
$$C_{n,p}(x) = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx \quad (3-49)$$

$$\text{car } \|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (3-50)$$

Pour décomposer le signal fantôme simulé, nous avons généré les polynômes de Legendre avec la formule (3-47). Les nœuds d'intégration et les nombres de Christoffel ont été calculés à l'aide du polynôme de degré 44 ( $P_{44}(x)$ ) ; les valeurs de ces nœuds sont affichées dans le tableau de l'annexe C. On constate sur le même tableau que les polynômes comportent des racines complexes à partir du polynôme  $P_{46}(x)$ . Cela se justifie car les erreurs d'arrondi s'accumulent aussi bien lors de la génération des polynômes que pendant le calcul numérique de ces racines. En déterminant les nœuds d'intégration avec  $P_{44}$ , les formules de quadratures de Gauss élaborées sont exactes lorsque la fonction à intégrer est un polynôme et ce jusqu'au degré 87. Nous avons utilisé seulement les 43 premiers polynômes de Legendre ( $P_0$  à  $P_{42}$ ) pour réaliser la décomposition. Quatre situations de segmentations sont considérées :

- Le segment de signal coïncide avec  $g(t)$  tel que défini par (3- 1) et (3- 2). Le cycle cardiaque correspondant va du début de l'onde P à la fin de la ligne isoélectrique. Sur la figure (3-9 (a), (c), et (e)), on montre les courbes du signal original non bruité, du modèle reconstruit et la superposition des deux signaux.
- La segmentation en intervalles R-R est montrée sur la figure 3-9 (b). Le signal reconstruit avec les séries de Legendre est présenté sur la figure 3-9 (d).
- Le cas où les cycles cardiaques obtenus après segmentation sont des intervalles S-S est illustré sur la figure 3-10 (a), avec en dessous le modèle reconstruit. Cette fois, c'est un signal bruité qui est décomposé dans la base des polynômes de Legendre.
- La dernière expérience (figure 3-10 (b)) concerne une segmentation qui élabore des intervalles du signal centrés sur le complexe QRS (comme « Segmentation2 » de la figure 3-6). La modélisation correspondante est montrée sur la figure 3-10 (d).

Les coefficients  $C_{n,p}$  des séries de Legendre pour les 4 expériences sont rassemblés dans le tableau C-1 de l'annexe.

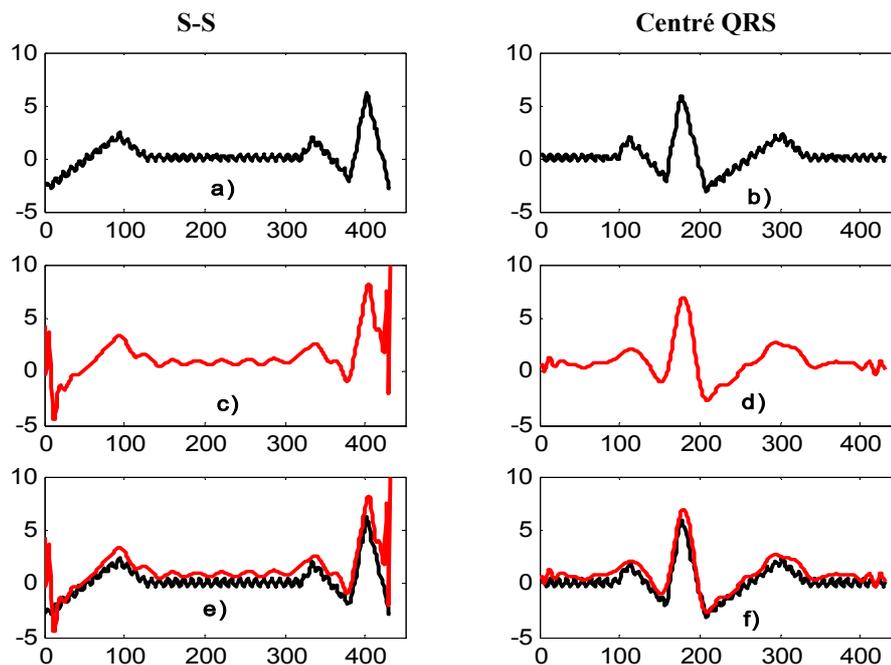


**Figure 3-9 : Modèles de Legendre des segments P-P et R-R de l'ECG.**

*a) et b) segments originaux ; c) et d) modélisations ; e) et f) superposition des modèles aux originaux.*

Un constat général se dégage de ces différentes modélisations de Legendre : les phénomènes de Gibbs sont présents aux extrémités des modèles reconstruits. Ces phénomènes sont d'autant plus accentués qu'il y a présence de hautes fréquences aux frontières du segment original. On peut expliquer cela par une caractéristique des polynômes de Legendre qui, aux

abscisses  $x = -1$  et  $x = 1$ , ne prennent que les valeurs  $\pm 1$  ; ( $P_n(1) = 1$  et  $P_n(-1) = (-1)^n$ ). La situation des segments du signal centrés sur le QRS donne le meilleur résultat. Pour décomposer un signal ECG réel en séries de polynômes de Legendre, on devra donc segmenter le signal de telle sorte que les fenêtres de signal obtenues commencent et se terminent avec la ligne isoélectrique. Ce résultat est en opposition avec la théorie élaborée par Philips *et al*, théorie que nous avons résumée à la section (III-3-3). On remarque aussi que la transformation de Legendre a un effet de filtrage sur le signal bruité.



**Figure 3-10 : Modèles de Legendre pour le segment S-S et pour un segment centré sur le complexe QRS**  
*(Le segment centré sur le QRS correspond à la situation segmentation 2 de la figure 3-6). Le signal bruité est utilisé. a) et b) segments originaux ; c) et d) modélisations ; e) et f) superposition des modèles aux originaux*

### III-5-2 Transformation de Tchebychev (TcT)

Les polynômes de Tchebychev constituent eux aussi une classe particulière de polynômes de Jacobi pour lesquels la fonction poids est :

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3-51)$$

Ils jouissent de propriétés encore plus intéressantes. C'est à ce titre que les polynômes de Tchebychev sont les plus utilisés dans la résolution des problèmes d'interpolation et d'approximation en analyse numérique [Bakhalov 83], [Recipices 92]. Les 5 premiers polynômes de Tchebychev sont :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1; & T_1(x) &= x; & T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x; & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^3 + 1 \end{aligned} \quad (3-52)$$

La relation de récurrence pour générer ces polynômes est la suivante :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3-53)$$

Les polynômes de Tchebychev sont liés aux fonctions trigonométriques par la formule suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)) \quad (3-54)$$

D'autres expressions explicites des polynômes de Tchebychev sont données dans [Azoulay 84] par :

$$T_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^k \quad (3-55)$$

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \quad (3-56)$$

Tout comme précédemment, le signal  $g(t)$  dévient  $g(x)$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et son développement en série de polynômes de Tchebychev donne :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,T} T_n(x) \quad (3-57)$$

et comme 
$$\|T_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \\ \pi & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (3-58)$$

On détermine les coefficients  $C_{n,T}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_{0,T} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ C_{n,T} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{si } n \geq 1 \end{aligned} \quad (3-59)$$

Par le changement de variable  $\theta = \arccos(x)$ , la série (3-57) prend la forme :

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,T} \cos(n\theta) \quad (3-60)$$

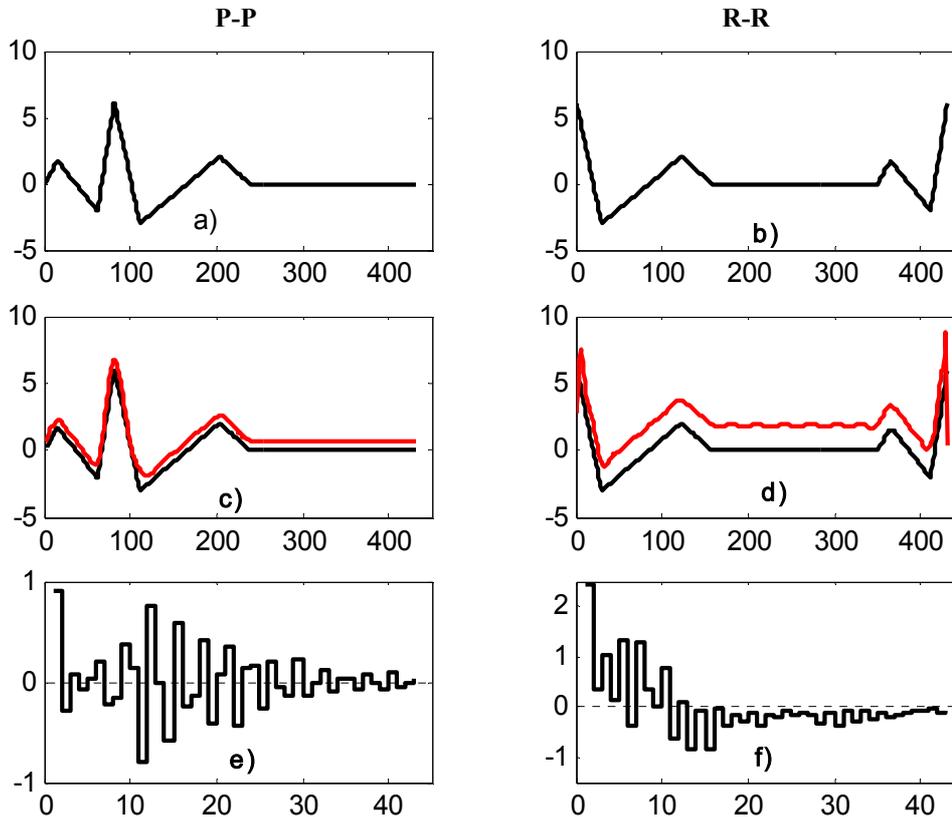
On détermine très facilement les zéros des polynômes de Tchebychev ; en effet,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x_j)) = 0 \Rightarrow n \arccos(x_j) = \frac{(2j+1)\pi}{2}$$

$$\text{d'où } x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right) \quad \text{avec } j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3-61)$$

On dit que les polynômes  $\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$  s'écartent de zéro le moins possible. En d'autres termes, si  $z_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ , de coefficient de la plus haute puissance de  $x$  égal à 1, alors

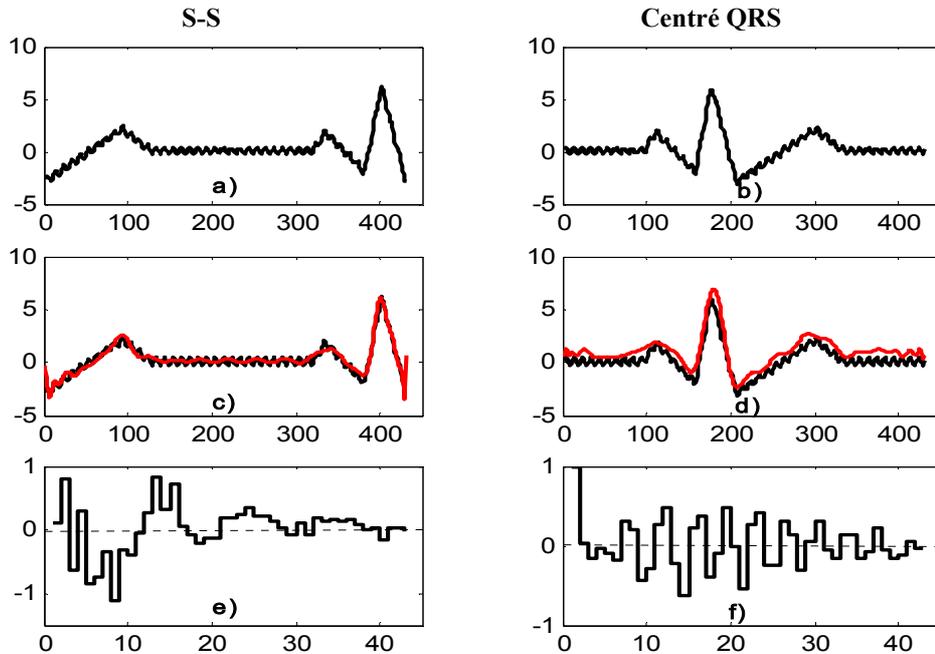
$$\max_{[-1, 1]} |z_n(x)| \geq \max_{[-1, 1]} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n} \quad (3-62)$$



**Figure 3-11 : Transformations de Tchebycheff du motif  $g(t)$  (segment P-P) et de l'intervalle R-R.**  
*a et b) : segments originaux ; c,d) : superposition des segments reconstruits sur les originaux ; e,f) : spectres des valeurs des coefficients.*

Pour des exemples de modélisations, nous avons calculé les nœuds d'intégration directement avec l'expression (3-61). Il n'y a plus d'inquiétude en ce qui concerne les erreurs d'arrondi en ce qui concerne la détermination de ces nœuds. On peut donc utiliser les racines d'un polynôme de degré aussi élevé qu'on le désire pour déterminer les abscisses des quadratures de Gauss. Nous avons utilisé les zéros de  $T_{44}$  dans le souci d'établir des comparaisons entre les performances de la **TcT** et celles de la **LeT**. Les quatre situations de segmentation considérées précédemment sont retenues. La figure (3-11) et la figure (3-12) illustrent les résultats obtenus. Nous avons aussi représenté sur ces figures les différents spectres de coefficients produits par la **TcT**.

Les résultats sont meilleurs que ceux de la **LeT** : les effets de Gibbs sont moins visibles. Mis à part l'intervalle R-R, les autres possibilités de segmentations permettent de réaliser une bonne reconstruction du signal. Lorsqu'on analyse les courbes des spectres des coefficients, il est évident que pour des segments de signal bien modélisés par la **TcT**, les coefficients sont de très faibles valeurs ( $\max |C_{n,T}| \leq 1$ ) et que l'essentiel de l'énergie du signal



**Figure 3-12 : Modèles de Tchebycheff du segment S-S et d'un cycle cardiaque centré sur le complexe QRS du signal simulé et bruité.**

*a et b) : segments originaux ; c,d) : superposition des segments reconstruits sur les originaux ; e,f) : spectres des valeurs des coefficients.*

est concentré dans un petit nombre de coefficients. Ce dernier résultat est un grand atout pour réaliser la compression d'un signal

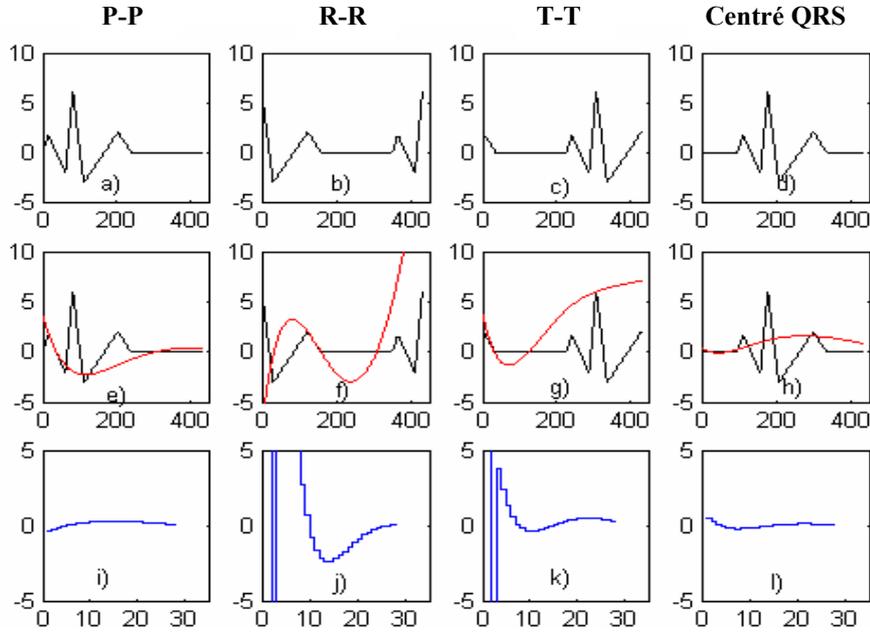
### III-5-3 Transformations de Laguerre (LaT)

Les caractéristiques des polynômes de Laguerre ont été étudiées à la section (II-5-2). Les stratégies de calcul des coefficients pour ces polynômes sont présentées à la sous section (III-3-2-2). Nous allons nous intéresser ici au cas particulier où  $\alpha = 0$ , qui servira pour l'expérimentation. Les polynômes de Laguerre  $L_n^0(x) = L_n(x)$  sont définis par :

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad \text{et} \quad \omega(x) = e^{-x} \quad (3-63)$$

Les 5 premiers polynômes de Laguerre sont :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= -x+1, & L_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\
L_3(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 & L_4(x) &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 4x + 1
\end{aligned}
\tag{3-64}$$



**Figure 3-13: Exemples de reconstruction des segments du signal ECG à l'aide des séries de Laguerre dans le cas où le prolongement des segments est réalisé par insertion des échantillons à valeur constante nulle.** *a,b,c,d* : segments originaux, *e,f,g,h* : superposition des signaux reconstruits sur les originaux, *i,j,k,l* : spectres des coefficients.

La relation de récurrence pour les polynômes  $L_n(x)$  est :

$$nL_n(x) + (x + 2n - 1)L_{n-1}(x) - (n - 1)L_{n-2}(x) = 0 \tag{3-65}$$

$$\|L_n(x)\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x)^2 dx = (n!)^2 \tag{3-66}$$

On développe un signal  $g(x)$  en séries de polynômes de Laguerre sous la forme :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,L} L_n(x) \tag{3-67}$$

$$\text{avec } C_{n,L} = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} g(x) L_n(x) e^{-x} dx \tag{3-68}$$

Pour la mise en œuvre de la **LaT**, nous avons considéré les 28 premiers polynômes de Laguerre. Les nœuds des quadratures de Gauss sont déterminés par les racines de  $L_{30}(x)$ . Nous avons considéré 2 cas de prolongements des segments. La première situation de

prolongement consiste en l'insertion des valeurs nulles à la suite du segment alors que la deuxième situation revient à une répétition périodique du segment en traitement. Dans ce second cas, on extrait la première période du signal reconstruit qu'on compare au segment original.

Nous montrons sur la figure (3-13) et sur la figure (3-14) les résultats produits par la **LaT**. Le constat évident est que la transformation de Laguerre réalise un bon filtrage passe bas. Les combinaisons des polynômes de Laguerre ne parviennent pas à suivre les variations brusques du signal. C'est ainsi que les complexes QRS, les ondes P et T qui sont les régions de manifestation des hautes fréquences sont mal modélisés par la **LaT**

### III-5-4 Transformation d'Hermite ( HeT )

Les polynômes d'Hermite sont définis par la formule (2-21) :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

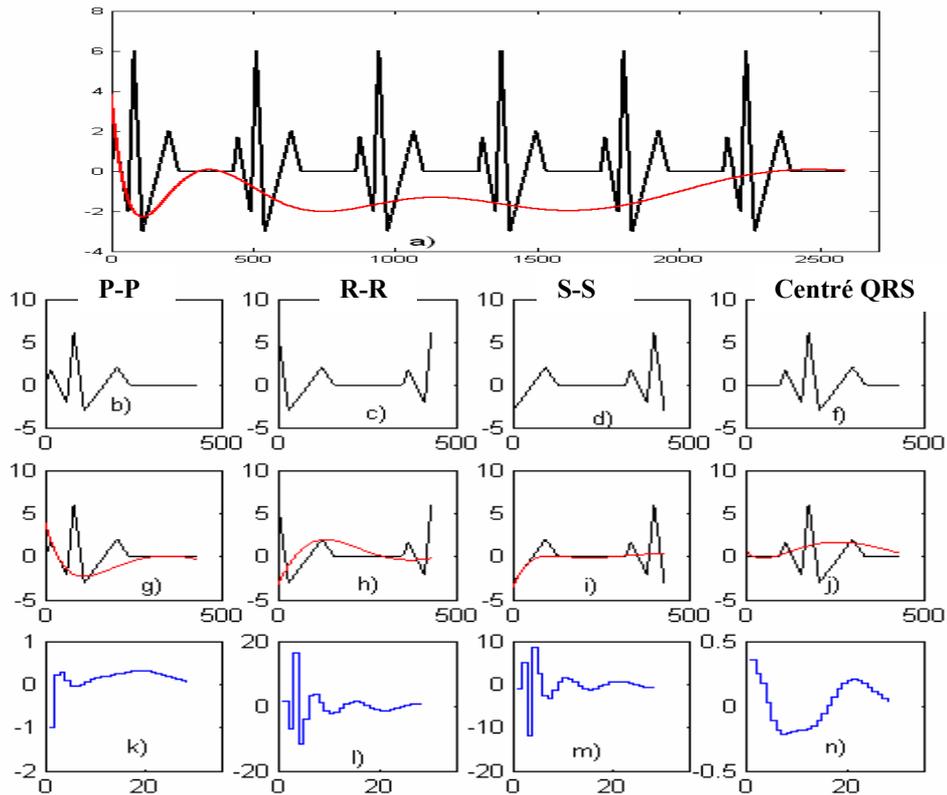
La relation de récurrence est donnée en (2-58) et les 5 premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & H_1(x) &= 2x & H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x & H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned} \quad (3-69)$$

On calcule  $\|H_n(x)\|^2$  à l'aide de la relation (2-59). Nous avons développé la méthode de calcul des coefficients avec les polynômes d'Hermite en III-3-2-3.

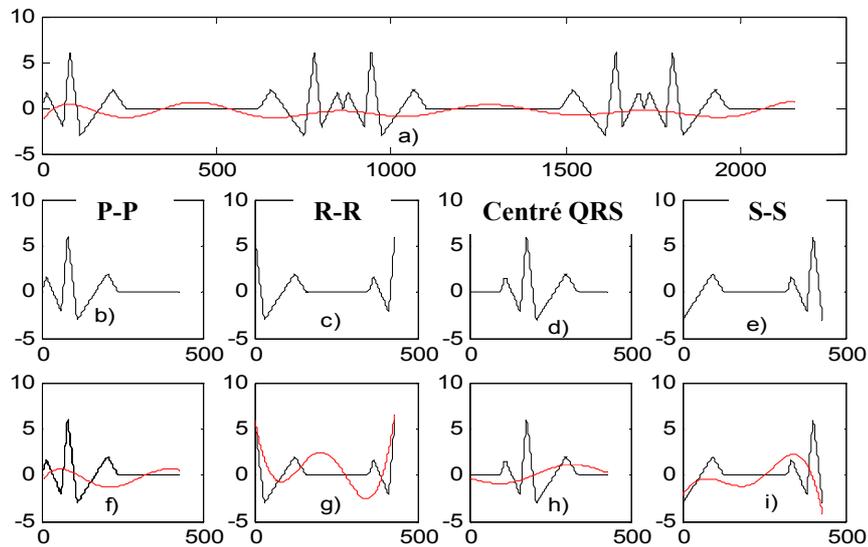
La reconstruction des différents segments du signal ECG simulé à partir des 46 premiers polynômes d'Hermite est illustrée sur la figure (3-15). Des répétitions symétriques sont utilisées pour réaliser les prolongements des segments.

Bien qu'on ait utilisé également des polynômes de degrés suffisamment élevés, les résultats obtenus sont comparables à ceux de la **LaT**. Ces résultats traduisent l'inaptitude des polynômes d'Hermite à modéliser les portions hautes fréquences du signal ECG. Ces résultats étaient d'ailleurs prévisibles car la 3<sup>ème</sup> équation des relations (2-27) établit un lien étroit entre les polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermite.



**Figure 3-14 : Modélisation de Laguerre des segments du signal en utilisant des répétitions périodiques de la fenêtre en traitement.**

*a) : 6 cycles cardiaques dont 5 répétitions périodiques, b,c,d,f) : segments originaux, g,h,i,j) : superposition des segments reconstruits sur les originaux, k,l,m,n) : spectre des coefficients de Fourier.*

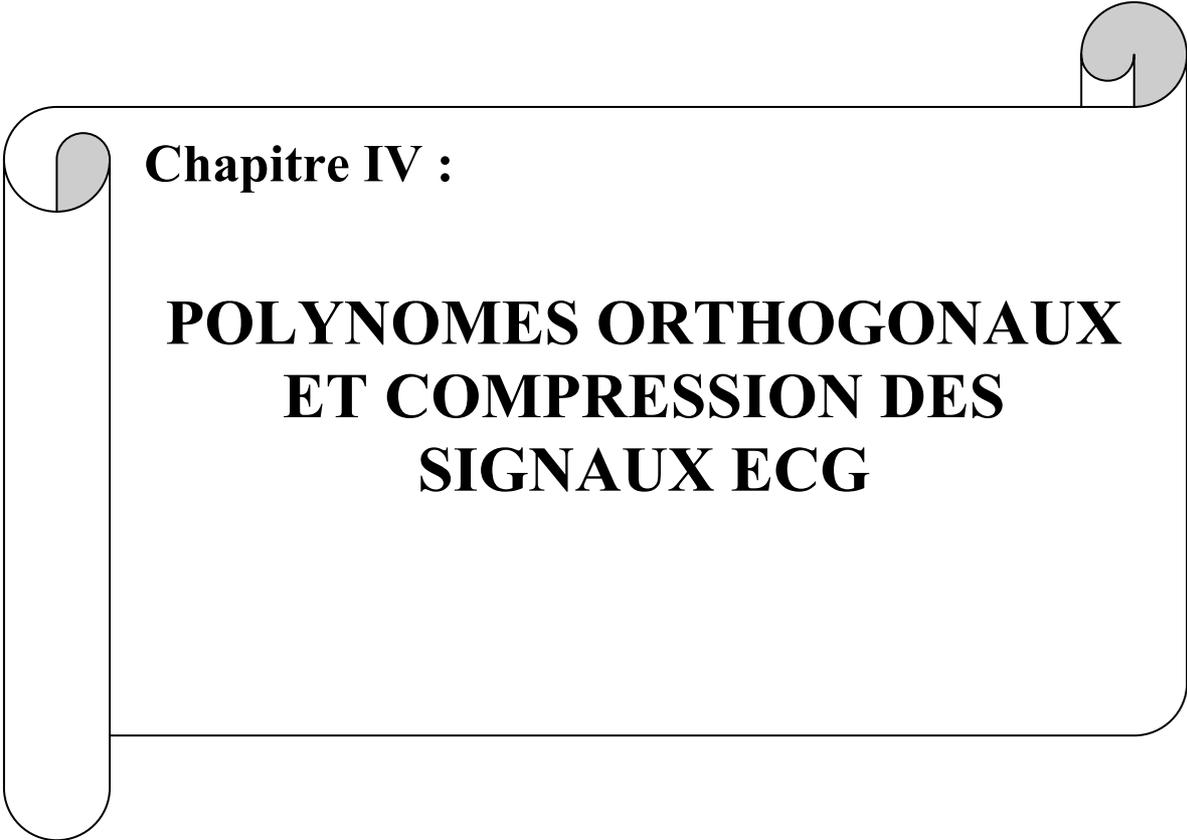


**Figure 3-15 : Transformations et reconstructions des fenêtres de signal ECG à l'aide des polynômes d'Hermite.**

*a) : 5 cycles cardiaques dont 4 répétitions symétriques, b,c,d,e) : segments originaux, f,g,h,i) : superpositions des segments reconstruits sur les originaux.*

## III-6 CONCLUSION

Il était question dans ce chapitre de concevoir la méthodologie de modélisation des signaux ECG à l'aide des polynômes orthogonaux. Nous avons montré qu'il fallait commencer par réaliser la segmentation du signal petits tronçons. Les segments de signaux obtenus sont à énergie finie et devraient coïncider avec les cycles cardiaques. Une étape préalable et indispensable pour une bonne segmentation des signaux ECG est alors la détection des complexes QRS. Les fenêtres de signaux seront transposées dans les domaines de définition des polynômes orthogonaux. Il faut aussi déterminer les outils appropriés pour les calculs numériques. A cet effet, après avoir établi les formules des coefficients de décomposition pour différentes familles de polynômes orthogonaux, nous avons proposé les quadratures de Gauss pour les intégrations numériques. Nous avons ainsi réuni tout l'outillage nécessaire pour décomposer un signal ECG dans une base de polynômes orthogonaux. Des exemples et des illustrations de quelques transformations polynomiales (**LeT**, **TcT**, **LaT** et **HeT**) sont présentés. Il nous reste à interpréter les résultats obtenus et les exploiter au mieux à des fins de compression dans le prochain chapitre.



**Chapitre IV :**

**POLYNOMES ORTHOGONAUX  
ET COMPRESSION DES  
SIGNAUX ECG**

# **Chapitre IV :**

## **POLYNOMES ORTHOGONAUX ET COMPRESSION DES SIGNAUX ECG**

*Il n'est pas nécessaire d'espérer pour  
entreprendre, ni de réussir pour persévérer*

**Guillaume d'Orange**

### **IV-1 INTRODUCTION**

La problématique de la compression des signaux ECG a été abordée au chapitre 1 de ce mémoire. Nous y avons souligné l'importance de la compression sur le double plan de diminution de la mémoire de stockage des signaux lors de l'archivage et de la réduction des coûts de transmission de ces signaux à travers les canaux de télécommunication numériques en télémédecine. En théorie de l'information, les techniques de compression des données sont classées en deux grandes familles : les méthodes conservatives (Lossless compression) et les méthodes non conservatives (Lossy compression). La compression non conservative des données autorise une certaine perte de précision en échange d'une compression considérablement accrue. Elle trouve son efficacité lorsqu'on l'applique aux images et sons numérisés. En effet, de par leur nature, les représentations numériques d'un phénomène analogique ne sont pas parfaites ; l'idée que l'entrée et la sortie puissent être légèrement différentes est donc admise. La compression conservative regroupe les techniques devant donner avec garantie, une copie exacte des données après un cycle de compression - expansion. Elle est appliquée aux bases de données, tableurs ou fichiers de traitement de textes, applications pour lesquelles la perte d'un seul bit peut être fatale.

Revenant au cas spécifique de l'ECG qui est un signal de nature analogique, les techniques non conservatives sont les plus utilisées pour réaliser la compression. Nous avons présenté au chapitre 1 une vaste bibliographie traitant des algorithmes de compression des signaux ECG. L'abondance de cette littérature pose évidemment un problème de leur classement et évaluation. On peut tout de même distinguer deux grandes catégories d'algorithmes de compression des signaux ECG : les méthodes temporelles et les méthodes par transformations.

Nous proposons dans ce chapitre, deux nouvelles approches de compression des signaux ECG par décompositions polynomiales. Avant de revenir sur les structures de ces deux nouveaux algorithmes de compression des électrocardiogrammes, nous allons

commencer par établir les critères d'évaluation de l'efficacité d'un algorithme de compression du signal ECG. A partir des résultats obtenus au chapitre III sur les modélisations polynomiales, nous allons développer un premier algorithme basé essentiellement sur les transformations de Jacobi. Nous envisagerons par la suite la possibilité d'associer les polynômes de Laguerre aux fonctions d'Hermite pour effectuer la modélisation et la compression des segments des signaux coïncidant avec les cycles cardiaques. Après la présentation et l'analyse des résultats obtenus, nous allons établir des comparaisons avec d'autres méthodes de compression de l'ECG par transformation.

## **IV-2 EVALUATION DE LA COMPRESSION**

Trois critères sont généralement retenus pour l'évaluation des algorithmes de compression : le taux de compression, la distorsion et la charge de calcul induite par la méthode.

### **IV-2-1 Taux de compression**

Le taux de compression est une comparaison du volume de données compressées et celui des données initiales. Quantitativement, on le représente par le rapport entre le nombre de bits utilisés pour représenter le signal original et le nombre de bits nécessaires pour représenter le signal comprimé.

$$\tau_c = \frac{\text{Nbre de bits signal original}}{\text{Nbre de bits signal compressé}} \quad (4-1)$$

On définit l'entropie d'un symbole en théorie de l'information comme le logarithme base 2 de la probabilité d'apparition de ce symbole. L'entropie sert à mesurer la qualité et la quantité d'information. L'entropie est beaucoup plus utilisée pour l'évaluation des techniques de compression conservatives.

### **IV-2-2 Mesure de la fidélité de la reconstruction**

Le premier critère d'évaluation du signal ECG reconstruit après compression est l'inspection visuelle. Le cardiologue qui est le principal utilisateur des électrocardiogrammes n'a que ses yeux pour apprécier le signal lors d'un diagnostic. Cette validation visuelle du signal compressé et reconstruit est donc soumise à beaucoup de subjectivité. Il existe tout de même des formules théoriques de calcul des distorsions du signal reconstruit.

- Le PRD (Percent Root square Difference)

Le PRD est la méthode la plus utilisée. Il traduit en quelque sorte le pourcentage de l'erreur relative normalisée en énergie. Le PRD s'exprime par :

$$PRD = 100 * \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2}} \% \quad (4-2)$$

où :

$N$  : est le nombre des échantillons que contient le signal

$x_i$  : sont les échantillons du signal original

$\hat{x}_i$  : sont les échantillons reconstruits après décompression.

Il est établi dans [Valesco 05] que le PRD est fortement influencé par les valeurs moyennes des échantillons du signal. Il est donc conseillé de supprimer ces valeurs moyennes dans le calcul du PRD, ce qui donne le PRD modifié (MPRD) :

$$MPRD = 100 * \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \% \quad (4-3)$$

$\bar{x}$  : est la valeur moyenne des échantillons du signal original

Nous conservons ces notations pour les formules statistiques qui suivent et qu'on utilise assez régulièrement pour caractériser les distorsions du signal reconstruit par rapport au signal original.

- La moyenne des erreurs (Er.Moy)

C'est l'erreur moyenne entre les amplitudes du signal original et celles du signal reconstruit.

$$Er.Moy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i| \quad (4-4)$$

- L'erreur maximale (Er.Max)

Cette erreur est caractéristique de la norme cubique. Elle donne l'information sur la déviation maximale d'amplitude.

$$Er.Max = \max_{i=1 \text{ à } N} |x_i - \hat{x}_i| \quad (4-5)$$

- L'erreur quadratique moyenne (ErQ.Moy)

C'est l'erreur moyenne en énergie. Elle est caractéristique de la norme sphérique dans  $l^2(\mathbb{Z})$ . On la définit par :

$$ErQ.Moy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2 \quad (4-6)$$

- La déviation standard (Dev.Std)

Elle renseigne sur la dispersion des erreurs par rapport à l'erreur quadratique moyenne.

On a :

$$Dev.Std = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2 - \left[ \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i) \right]^2} \quad (4-7)$$

- L'erreur quadratique moyenne normalisée (ErQ.MN)

$$ErQ.MN = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (4-8)$$

Le PRD, l'erreur quadratique moyenne (ErQ.Moy) et l'erreur quadratique moyenne normalisée sont des critères d'appréciation fondées sur les différences d'énergie. Nous utiliserons le PRD dans cette catégorie. Parmi les critères à base de déviations d'amplitude, nous appliquerons aussi bien l'erreur moyenne (Er.Moy) que l'erreur maximale (Er.Max) pour l'évaluation théorique de la qualité du signal reconstruit après compression.

### IV-2-3 La complexité d'un algorithme

La complexité d'un algorithme se mesure par le temps nécessaire pour son exécution. Les machines ayant des architectures différentes et par conséquent des vitesses d'exécution différentes, on préfère exprimer la charge de calcul par une quantité absolue qui est le nombre d'opérations mathématiques. Ceci permet d'établir une différence entre les algorithmes rapides et les algorithmes lents, entre les algorithmes fonctionnant en temps réel et ceux ne pouvant pas le faire. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, les méthodes temporelles de compression des signaux sont plus rapides que celles s'appuyant sur les transformations.

## IV-3 COMPRESSION DES SIGNAUX ECG AVEC LES TRANSFORMATIONS DE JACOBI

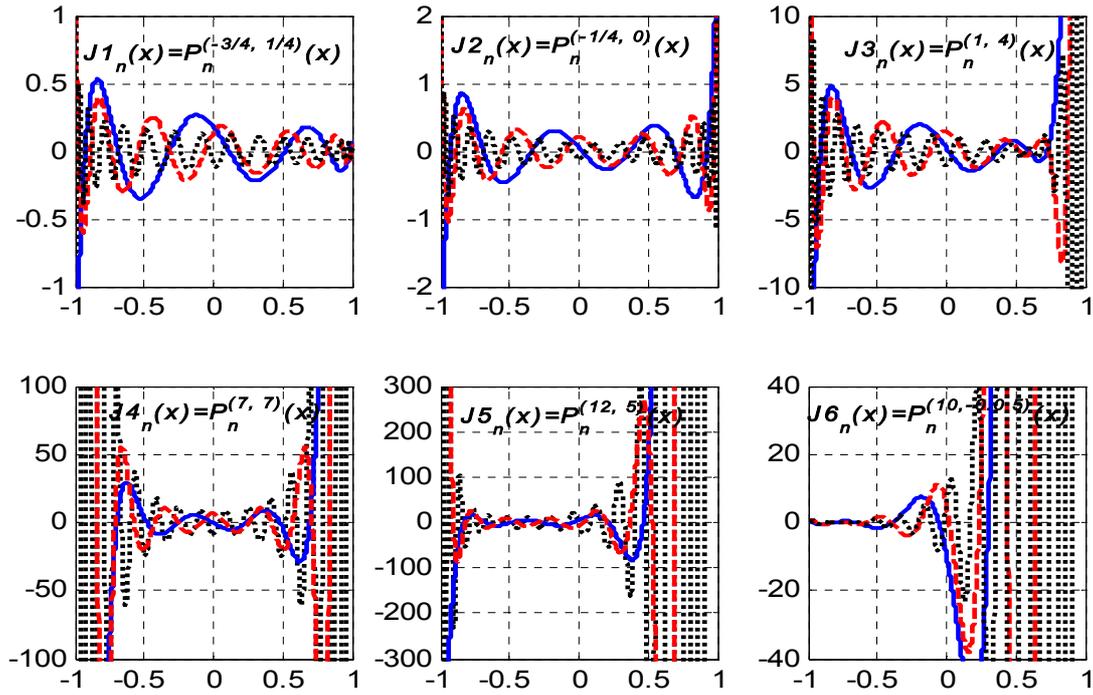
Les résultats des modélisations polynomiales des signaux ECG obtenus au chapitre 3 montrent que les polynômes de Legendre et les polynômes de Tchebychev sont les meilleures bases de décomposition parmi les différents systèmes de polynômes orthogonaux testés. Les polynômes de Legendre et de Tchebychev sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) : \alpha = \beta = 0$  pour les polynômes de Legendre et  $\alpha = \beta = -1/2$  pour les polynômes de Tchebychev. Nous tenons à généraliser ces processus de modélisation à d'autres polynômes de Jacobi à des fins de compression.

### IV-3-1 Quelques polynômes Jacobi

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent prendre toute valeur réelle supérieure à -1. Il existe donc une infinité de familles de polynômes de Jacobi. Face à l'impossibilité de tester toutes ces familles, nous en avons sélectionné quelques-unes pour réaliser la compression des signaux ECG. Ces choix sont basés sur des critères simples : les polynômes de Legendre et de Tchebychev étant des cas ultrasphériques ( $\alpha = \beta$ ), nous avons mis en priorité les situations  $\alpha \neq \beta$  sauf pour  $J4_n(x)$  et les cas où les deux paramètres sont de signe contraire sauf pour  $J3$  et  $J5$ . Nous avons envisagé également les situations où l'un des paramètres est très grand devant l'autre en valeur absolue. Nous adoptons pour la suite du mémoire les notations simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned}
 J1_n(x) &= P_n^{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}(x), & J2_n(x) &= P_n^{(-\frac{1}{4}, 0)}(x), & J3_n(x) &= P_n^{(1,4)}(x), \\
 J4_n(x) &= P_n^{(7,7)}(x), & J5_n(x) &= P_n^{(12,5)}(x), & J6_n(x) &= P_n^{(10, -\frac{1}{20})}(x)
 \end{aligned}
 \tag{4-9}$$

Les courbes de quelques uns de ces polynômes sont tracées sur la figure 4-1. On y trouve les polynômes de degré 7 en traits continus, les polynômes de degré 12 en traits interrompus et les polynômes de degré 24 qui sont des courbes en pointillés. Sur cette figure, les amplitudes astronomiques aux extrémités, pour certains cas, ont été tronquées afin de mieux faire ressortir les parties oscillatoires des polynômes.



**Figure 4-1 : Allures de quelques polynômes de Jacobi.**

Les courbes en trait continu correspondent à  $P_7^{(\alpha, \beta)}(x)$  ; celles en traits interrompus sont pour  $P_{12}^{(\alpha, \beta)}(x)$  et enfin les courbes en pointillés représentent  $P_{24}^{(\alpha, \beta)}(x)$  pour les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour générer les polynômes de Jacobi, nous utilisons les relations de récurrence (2-23) qu'on peut mettre sous la forme :

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{x - b_n}{a_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{c_n}{a_n} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (4-10)$$

Pour  $\alpha = -3/4$ , et  $\beta = 1/4$

On peut écrire :

$$J1_{n+1}(x) = (A_{1,n}x + B_{1,n})J1_n(x) + C_{1,n}J1_{n-1}(x) \quad (4-11)$$

et d'une manière générale, on a :

$$Ji_{n+1}(x) = (A_{i,n}x + B_{i,n})Ji_n(x) + C_{i,n}Ji_{n-1}(x) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6.$$

Les coefficients  $A_{i,n}$ ,  $B_{i,n}$ , et  $C_{i,n}$  calculés sont rassemblés dans le tableau 4-1.

## IV-3-2 Compression du signal ECG simulé

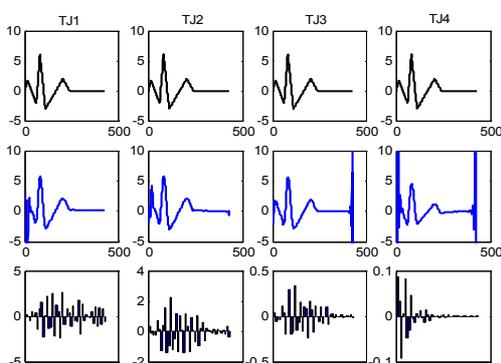
### IV-4-2-1 Représentations polynomiales des segments du signal

Nous représentons plusieurs types de fenêtres de signal à l'aide de 43 polynômes de Jacobi. Chacune de ces fenêtres de signal a une durée égale à celle d'un cycle cardiaque. Le

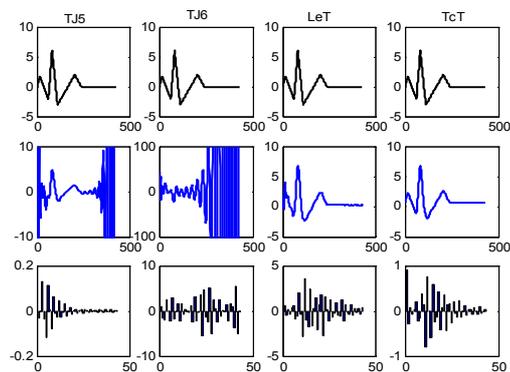
but d'une telle expérience est d'identifier la forme de segmentation appropriée pour chaque famille de polynômes de Jacobi utilisée en vue de la compression. La figure 4-2 montre les représentations de l'intervalle P-P du signal par les polynômes de Jacobi  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$ ,  $J_3(x)$  et  $J_4(x)$  alors que les représentations de la même fenêtre avec les polynômes  $J_5(x)$ ,  $J_6(x)$ ,  $P_n(x)$  et  $T_n(x)$  sont présentées sur la figure 4-3. Sur ces figures, les signaux originaux sont tracés en premières lignes, les modélisations polynomiales sont au milieu et le spectre des coefficients obtenus après décomposition (coefficients qui servent à synthétiser la modélisation) est aussi montré, dans chaque cas, en dessous.

**Tableau 4-1 : Paramètres de la relation de récurrence pour les polynômes  $J_1(x)$  à  $J_6(x)$**

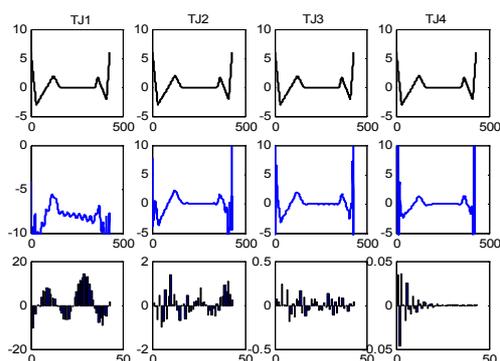
$(\alpha, \beta)$	$y_n(x)$	$A_{i,n}$	$B_{i,n}$	$C_{i,n}$	$\ y_n(x)\ ^2$
$(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$	$J_1(x)$	$\frac{(4n+1)(4n+3)}{4(n+1)(2n+1)}$	$\frac{4n+1}{2(4n-1)(n+1)(2n+1)}$	$-\frac{(4n-3)(4n+1)(4n-3)}{8(n+1)(4n-1)(2n+1)}$	$\frac{\sqrt{2}\Gamma(n+\frac{1}{4})\Gamma(n+\frac{5}{4})}{n!(2n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}$
$(\frac{1}{4}, 0)$	$J_2(x)$	$\frac{(8n+7)(8n+3)}{8(n+1)(4n+3)}$	$\frac{8n+3}{8(8n-1)(n+1)(4n+3)}$	$-\frac{n(4n-1)(8n+7)}{(n+1)(8n-1)(4n+3)}$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}}{(2n+\frac{3}{2})}$
$(1, 4)$	$J_3(x)$	$\frac{(2n+7)(2n+6)}{2(n+1)(n+6)}$	$\frac{15(2n+6)}{2(2n+5)(n+1)(n+6)}$	$-\frac{(n+4)(2n+7)}{(2n+5)(n+6)}$	$\frac{2^6\Gamma(n+2)\Gamma(n+5)}{n!(2n+6)\Gamma(n+6)}$
$(7, 7)$	$J_4(x)$	$\frac{(n+8)(2n+15)}{(n+1)(n+15)}$	0	$-\frac{(n+7)(n+8)}{(n+1)(n+15)}$	$\frac{2^{15}\Gamma(n+7)\Gamma(n+7)}{n!(2n+15)\Gamma(n+15)}$
$(12, 5)$	$J_5(x)$	$\frac{(n+9)(2n+19)}{(n+1)(n+18)}$	$\frac{119(n+9)}{(2n+17)(n+1)(n+18)}$	$-\frac{(n+12)(n+5)(2n+19)}{(n+1)(n+18)(2n+18)}$	$\frac{2^{17}\Gamma(n+13)\Gamma(n+6)}{n!(n+9)\Gamma(n+18)}$
$(10, \frac{1}{20})$	$J_6(x)$	$\frac{(40n+239)(40n+219)}{40(n+1)(20n+219)}$	$\frac{39999(40n+219)}{40(20n+219)(n+1)}$	$-\frac{(n+10)(20n-1)(40n+239)}{(n+1)(40n+199)(20n+219)}$	$\frac{2^{19}\Gamma(n+11)\Gamma(n+\frac{19}{20})}{n!(2n+10.95)\Gamma(n+10.95)}$



**Figure 4-2 : Représentations du segment P-P du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$ ,  $J_3(x)$ , et  $J_4(x)$**

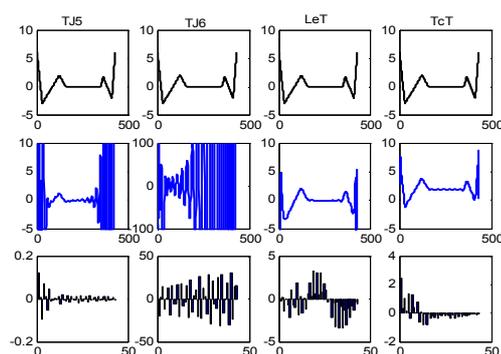


**Figure 4-3 : Représentations du segment P-P du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi :  $J_5(x)$ ,  $J_6(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff.**



**Figure 4-4 : Représentations du segment R-R du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi**

$J1_n(x)$ ,  $J2_n(x)$ ,  $J3_n(x)$ , et  $J4_n(x)$



**Figure 4-5 : Représentations du segment R-R du signal ECG simulé avec les polynômes de Jacobi :  $J5_n(x)$ ,  $J6_n(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff**

On constate la présence des effets de bords qui sont particulièrement accentués dans les modélisations avec les polynômes  $J5_n(x)$  et  $J6_n(x)$ . Les figures 4-4 et 4-5 présentent dans la même logique les modélisations de l'intervalle R-R du signal ECG simulé avec les 8 classes de polynômes de Jacobi utilisées ci-dessus. Les modélisations du cycle cardiaque centré sur le complexe QRS sont montrées sur les figures 4-6 et 4-7. Les reconstructions du segment T-T auquel on a ajouté des bruits sont illustrées sur la figure 4-8. On remarque l'effet de filtrage passe bas au cours des différentes transformations de Jacobi. En prenant individuellement chacune des 8 familles de polynômes de Jacobi, la segmentation du signal en intervalles centrés sur les QRS produit la meilleure modélisation d'après l'évaluation par l'inspection visuelle : c'est la fenêtre sur laquelle les effets des bords sont minimaux. En revanche, les spectres des coefficients montrent que l'énergie du signal est éparpillée sur un grand nombre de coefficients dans ces cas ; c'est dire que cette façon de segmenter le signal ne permet pas d'avoir de forts taux de compression à travers les modélisations polynomiales.

Dans le même ordre d'idée, les transformations TJ4 (transformation de Jacobi avec les polynômes  $J4_n(x)$ ) et TcT (transformation de Tchebychev) produiraient de très forts taux de compression avec la segmentation du signal en intervalles R-R puisque c'est dans ces situations que l'énergie du signal est concentrée dans un très petit nombre de coefficients.

## IV-4-2-2 Résultats de compression

Les algorithmes de compression sont appliqués sur des fenêtres des signaux résultant de la segmentation en cycles centrés sur les complexes QRS.

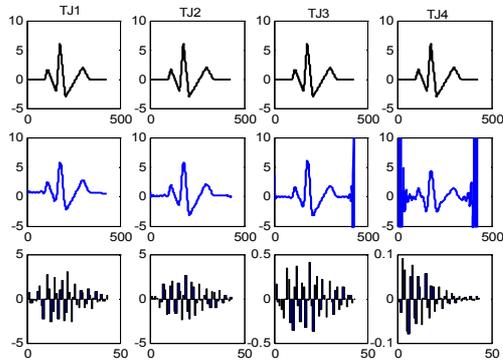


Figure 4-6 : Représentations d'un segment centré sur le complexe QRS avec les polynômes de Jacobi

$J_{1_n}(x)$ ,  $J_{2_n}(x)$ ,  $J_{3_n}(x)$ , et  $J_{4_n}(x)$

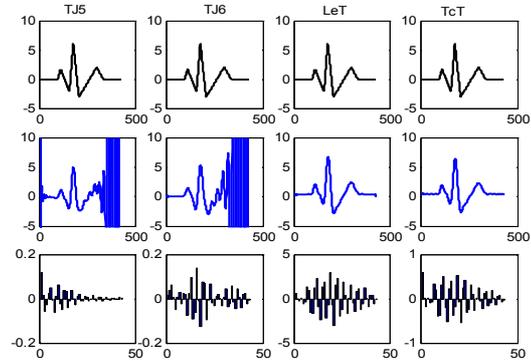


Figure 4-7 : Représentations d'un segments du signal centré sur le QRS avec les polynômes :  $J_{5_n}(x)$ ,  $J_{6_n}(x)$ , les polynômes de Legendre et ceux de Tchebycheff.

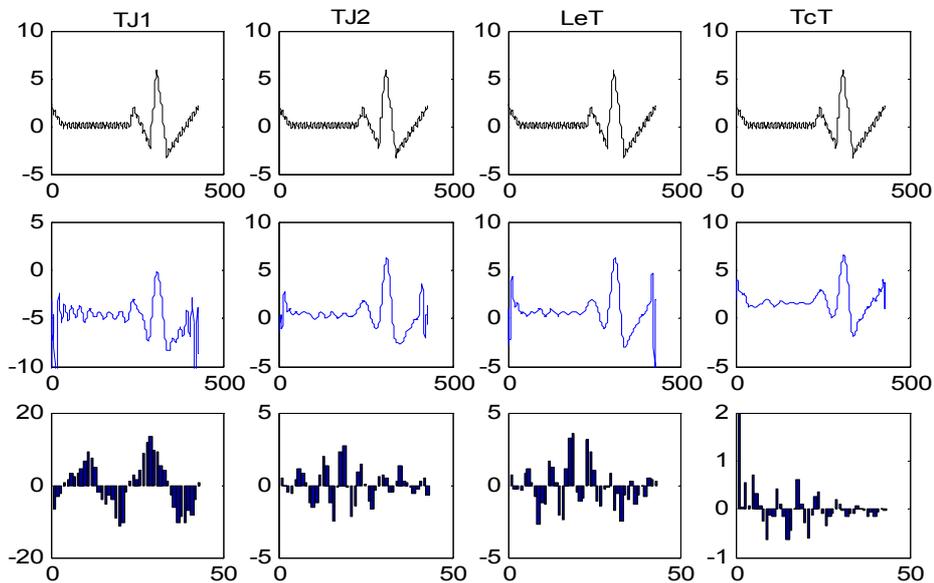


Figure 4-8 : Reconstruction du segment T-T bruité à travers les transformations de Jacobi TJ1, TJ2, LeT et TcT

La compression consiste à éliminer les coefficients de faibles valeurs absolues par le principe de seuillage. En procédant de cette façon, on reconstruit le signal avec les seuls

coefficients de valeurs assez significatives, ce qui suppose que les coefficients de grandes valeurs sont aussi ceux qui contiennent une grande quantité d'énergie du signal.

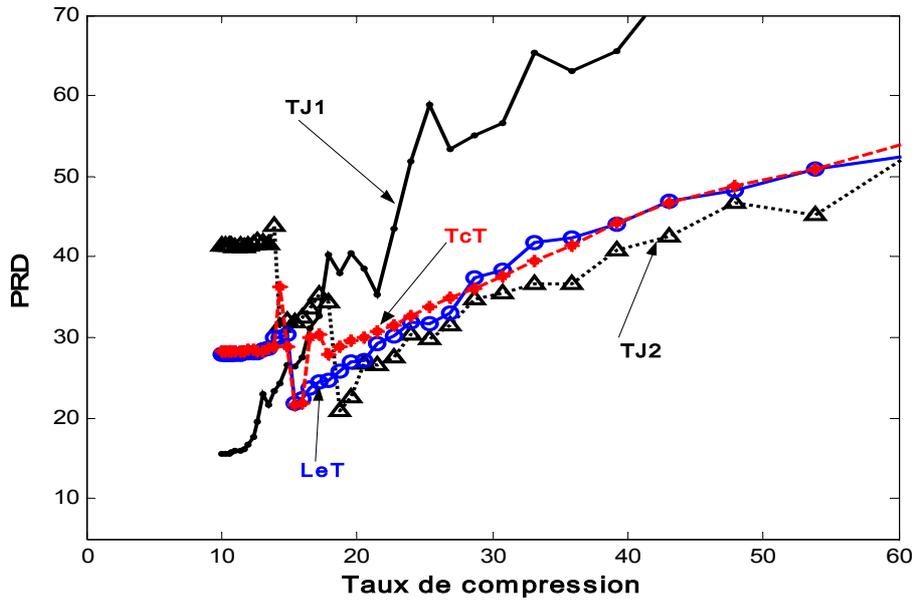


Figure 4-9 : Résultats de la compression par transformations de Jacobi : variation du PRD en fonction du taux de compression.

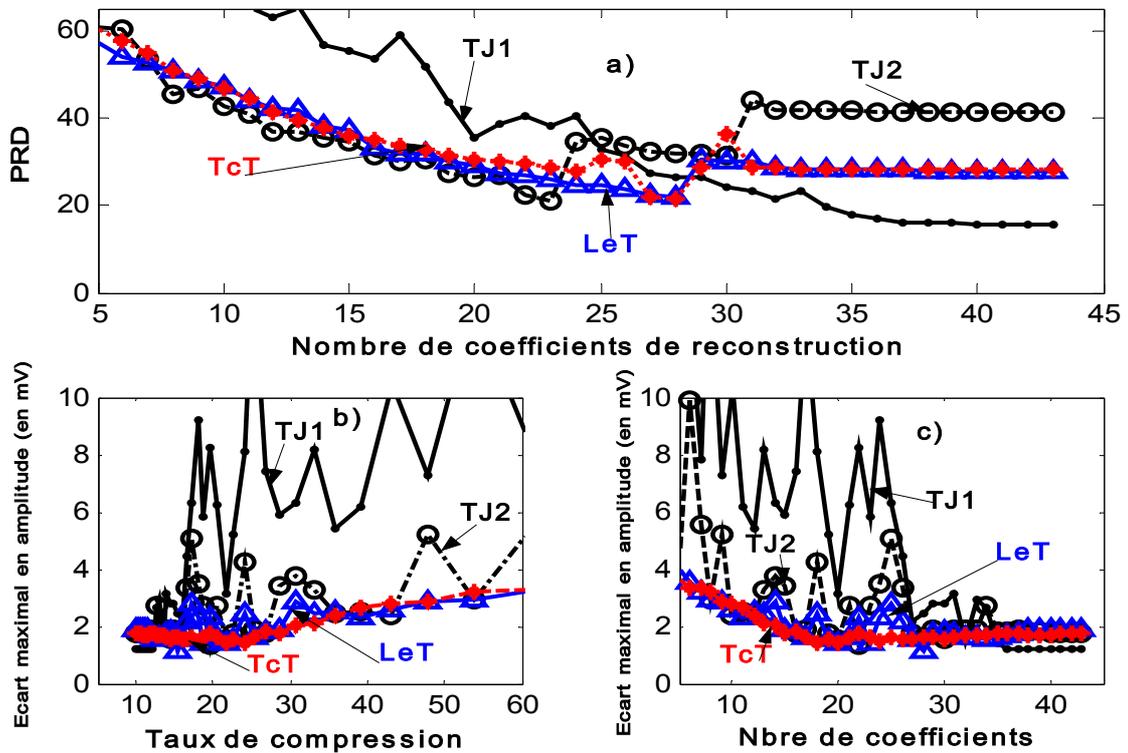


Figure 4-10 : Autres Résultats de la compression  
*a) variation du PRD en fonction du nombre de coefficients, b) et c) variation de l'écart maximal d'amplitude en fonction du taux de compression et du nombre de coefficients.*

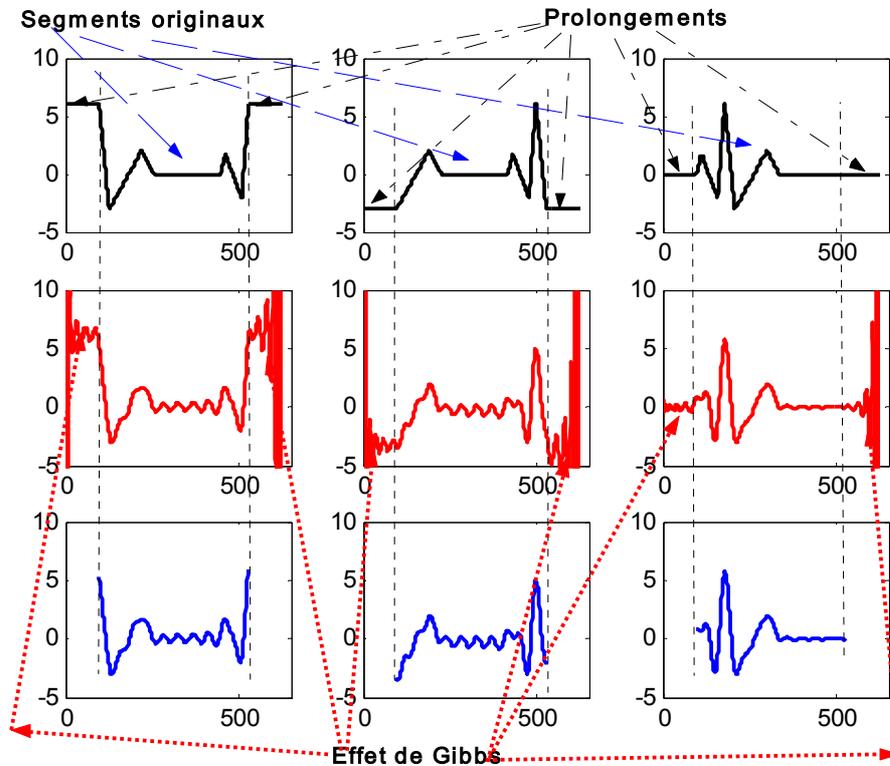
Si l'ordinateur représente les coefficients et les échantillons du signal dans le même format, c'est-à-dire qu'il utilise le même nombre de bits par échantillon que le même nombre de bits par coefficient, le taux de compression revient simplement au rapport du nombre d'échantillons contenus dans le signal sur le nombre de coefficients utilisés pour représenter ce signal. Nous avons appliqué la compression aux modélisations qui produisent moins d'effets de Gibbs, à savoir TJ1 (transformation de Jacobi avec les polynômes  $J_{1_n}(x)$ ), TJ2 (transformation de Jacobi avec les polynômes  $J_{2_n}(x)$ ), LeT (transformation de Legendre) et TcT (transformation de Tchebychev). La figure 4-9 montre les courbes de variation du PRD en fonction du taux de compression. On constate des valeurs très grandes du PRD. Le phénomène s'explique aisément puisqu'il persiste toujours un grand écart entre la valeur moyenne du signal original et celle du signal reconstruit même lorsque la morphologie du signal reconstruit se confond avec celle du signal original. Les grandes valeurs du PRD sont aussi dues aux effets de Gibbs.

En éliminant les coefficients les uns après les autres, nous avons réalisé le graphique de la figure 4-10 (a) qui matérialise la variation du PRD en fonction du nombre de coefficients utilisés pour la reconstruction. Il se dégage de ce graphique qu'au delà de 30 coefficients l'augmentation du nombre de coefficients de reconstruction n'améliore pas le PRD. Il est montré aussi sur la même figure en (b) et (c), les variations de l'écart maximal en amplitude entre les échantillons du signal original et ceux du signal compressé. Ces variations sont dans un premier temps en fonction du taux de compression et ensuite en fonction du nombre de coefficients utilisés pour la reconstruction.

### **IV-4-2-3 Réduction des effets de bords**

Les effets de Gibbs constituent un sérieux handicap pour les modélisations polynomiales du signal ECG et par conséquent pour la compression par transformations polynomiales. Nous avons élaboré une stratégie permettant de les rendre moins perturbants. Notre démarche, bien que naïve, est assez efficace. Elle consiste à ajouter de petits segments de signal à valeurs constantes aux extrémités des fenêtres de signaux obtenues après la segmentation avant de réaliser la décomposition polynomiale. L'objectif est de faire manifester les effets de bord sur ces prolongements qu'on devra ignorer après la reconstruction. L'illustration de cette méthode est donnée sur la figure 4-11 où les polynômes  $J_{3_n}(x)$  sont utilisés pour modéliser les segments R-R, T-T et P-P du signal

ECG simulé. On a ajouté des prolongements de 100 échantillons à valeur constante sur chacune des deux extrémités des fenêtres et les effets de Gibbs sont rendus quasi-inexistants sur les modélisations finales.



**Figure 4-11 : Procédé de réduction des effets de Gibbs sur le signal reconstruit.**

Les signaux de la première ligne sont des fenêtres R-R, S-S et P-P respectivement auxquels on a ajouté des extensions (segments horizontaux). Sur la 2<sup>ème</sup> ligne sont montrés les signaux obtenus après décomposition et reconstruction avec les polynômes  $J_3(x)$ . les segments originaux extraits sont présentés sur la dernière ligne.

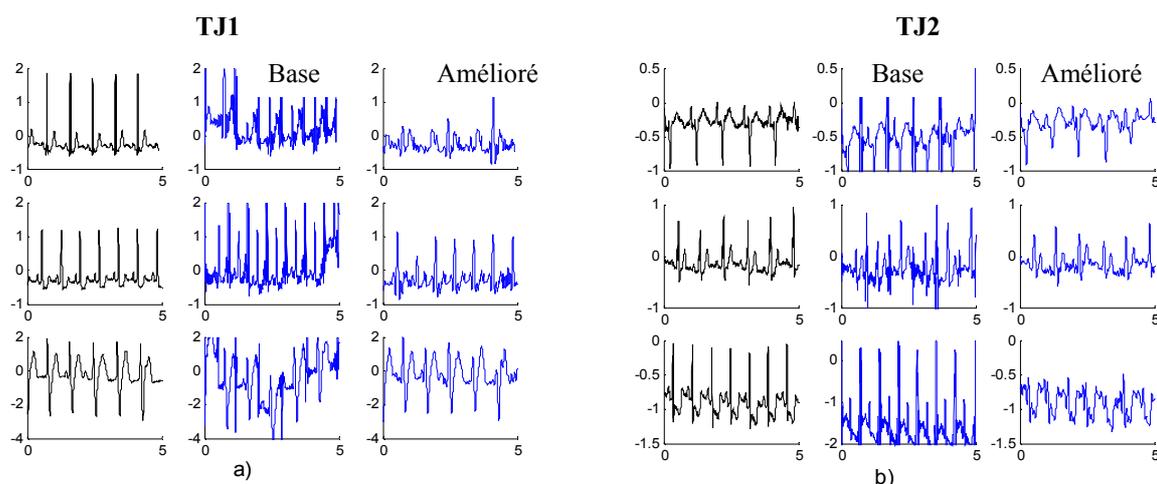
L'intérêt de réduire les effets de bord est évident. Les avantages sont nombreux. Non seulement le PRD est très amélioré mais surtout il n'y a plus de souci pour déterminer la meilleure segmentation devant réaliser les modélisations polynomiales : le choix du type de segmentation dépendait de l'ampleur des effets de bords produits sur les fenêtres lors de la reconstruction, or ce phénomène n'existe plus. On peut alors se passer de l'étape de détection des complexes QRS et réaliser une segmentation aveugle donnant lieu aux fenêtres d'une même durée. En se passant de l'étape de détection des complexes QRS, on améliore la vitesse d'exécution des algorithmes. On peut aussi accroître considérablement le taux de compression en utilisant des fenêtres de signal comportant plusieurs cycles cardiaques. De ce fait, la compression par transformations de Jacobi ne se limite plus aux

seuls signaux ECG étant donné qu'on peut aussi l'utiliser sur d'autres types de signaux tels que le son et les images.

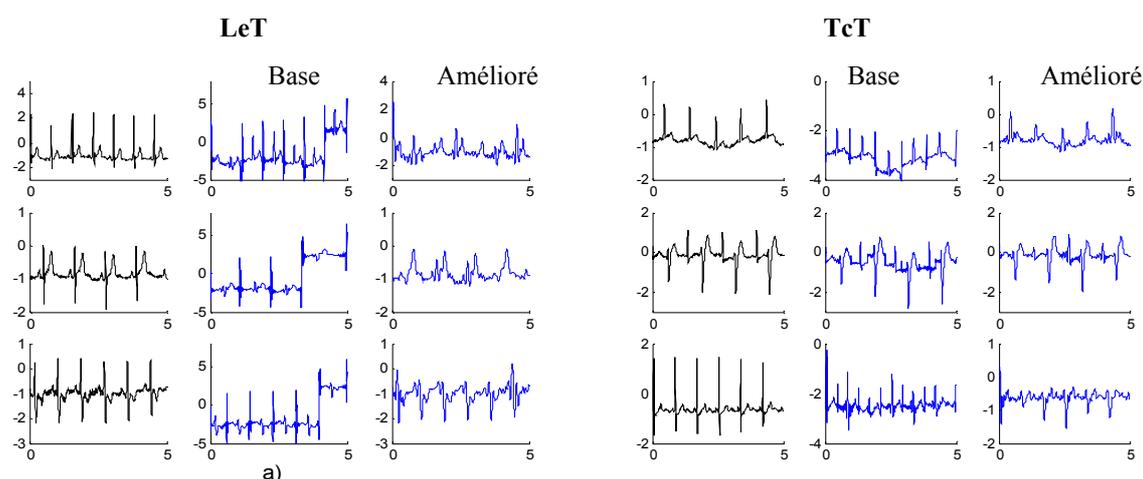
### **IV-4-3 Application à la compression des signaux ECG réels**

Nous exploitons des signaux ECG réels issus de la base des données [Mit 92]. Cette base de données est une référence internationale dans le domaine de traitement des signaux ECG. Les données de cette base sont aussi disponibles sur Internet à travers le site Web [Physionet 07]. Pour chaque transformation de Jacobi, nous avons développé deux algorithmes : un premier qui décompose dans la base polynomiale et le reconstruit avec les coefficients de Fourier retenus aussi naturellement que nous l'avons fait jusqu'à présent et le second algorithme qui inclut des procédures d'optimisation visant à améliorer le PRD, ceci à travers la réduction des effets de bords et en rétablissant la valeur moyenne du signal reconstruit. Sur les figures 4-12 et 4-13, chaque transformation de Jacobi est appliquée sur trois signaux ECG réels différents. On réalise la compression au même taux de compression avec les deux algorithmes : algorithme simple et algorithme amélioré. La reconstruction naturelle produit de très mauvais résultats : le PRD est très grand dans ce cas et de larges impulsions de grandes amplitudes se retrouvent au milieu des intervalles R-R du signal reconstruit. Ces impulsions traduisent les effets de Gibbs puisque la segmentation utilisée est celle qui donne des fenêtres de signal centrées sur le QRS. Les lieux de manifestations des impulsions sont les extrémités des segments. En superposant le signal reconstruit au signal original, on remarque des décalages importants des valeurs moyennes des deux signaux, ce qui justifie partiellement les valeurs de PRD élevées avec l'algorithme simple. Sur les figures 4-12 et 4-13, chaque ligne correspond au même signal : à gauche, on a le signal original, au centre, le signal reconstruit simplement et à droite, le signal reconstruit avec l'algorithme amélioré.

La réduction des effets de bord utilise la méthode proposée plus haut, à savoir l'ajout de petits prolongements aux segments du signal, prolongements qui sont ignorés après reconstruction. La composante continue du signal compressé est matérialisée lors de la reconstruction par les coefficients des polynômes de degré 0 et de degré 1. Nous avons donc affaibli les valeurs absolues de ces coefficients dans la phase de synthèse du signal compressé à partir des polynômes de Jacobi et les coefficients de Fourier retenus. Les performances des transformations de Jacobi améliorées en terme de diminution des PRD sont formidables. Le tableau 4-2 regroupe les principaux résultats. Un cas intéressant est la compression du signal de référence 121 par la TcT : le PRD passe de 220.05 % à moins de 10 %.



**Figure 4-12 : Exemples de signaux compressés et reconstruits avec TJ1 et TJ2.**  
*a) : TJ1 avec les signaux 103, 105 et 107 ; b) : TJ2 avec les signaux 108, 111 et 112.*



**Figure 4-13 : Exemples de signaux compressés et reconstruits avec LeT et TcT.**  
*a) : LeT avec les signaux 116, 117, 118 ; b) : TcT avec les signaux 121, 200 et 220.*

En dépit de la bonne reconstruction des signaux à l'inspection visuelle, les PRD théoriques restent à des valeurs relativement élevées. Il est vrai qu'un faible PRD ne garantit pas toujours la bonne reconstruction du signal aux yeux des cardiologues [Valesco 05], [Al Shrouf 03]. On remarque que, lorsqu'on minimise l'écart des valeurs moyennes entre le signal original et le signal compressé, on atténue aussi considérablement les amplitudes des complexes QRS du signal compressé. On constate aussi que, lorsque la durée d'un complexe QRS est trop brève, les modélisations du signal avec les polynômes de Jacobi ignorent ce complexe QRS. Il y a donc effet de filtrage passe-bas.

**Tableau 4-2 : Résultats de compression des signaux ECG réels de [MIT 92] avec les transformations de Jacobi**

Référence du signal	Transformations de Jacobi	Taux de Compression	PRD ( % )	
			Algo simple	Algo amélioré
103	TJ1	7.83	148.38	50.34
105	TJ1	7.08	142.45	31.52
107	TJ1	8.18	127.59	22.69
108	TJ2	9.43	64.91	15.51
111	TJ2	8.18	58.26	33.63
112	TJ2	7.08	68.39	10.59
116	LeT	8.18	122.61	33.26
117	LeT	11.57	188.10	13.91
118	LeT	8.18	144.03	16.43
121	TcT	9.43	220.05	9.99
200	TcT	7.08	69.49	29.88
220	TcT	8.16	203.25	36.04

Nous avons testé les quatre algorithmes à base des transformations de Jacobi étudiés plus haut en utilisant une quarantaine de signaux ECG issus de la base des données [Mit 92]. Pour ces tests, nous avons procédé à une segmentation aveugle des signaux : étant donné que les positionnements des ondes dans les segments ne constituent plus une préoccupation, nous ne réalisons plus la détection des complexes QRS.

Une durée constante est imposée à tous les segments d'un signal. C'est ainsi que, pour le traitement des signaux présentés dans le tableau 4-3, chaque segment contient exactement 150 échantillons, ce qui correspond à une durée de 0,42 seconde. Pour la compression des signaux des tableaux 4-4 et 4-5, les fenêtres de segmentation des signaux contiennent respectivement 400 échantillons (durée = 1,12 seconde) et 900 échantillons (durée = 2,52 secondes).

On observe des PRD relativement élevés dans l'ensemble. Nous avons expliqué ce phénomène plus haut en parlant de l'atténuation des amplitudes des QRS. De l'analyse globale des résultats présentés dans ces trois tableaux, il ressort que, pour un signal ECG donné, les quatre transformations de Jacobi produisent des résultats très proches en termes de PRD. Les petites valeurs d'écart types traduisent d'ailleurs le fait que les dispersions des PRD autour des valeurs moyennes sont moindres. La TcT apparaît légèrement plus performante pour l'ensemble des signaux traités alors que la TJ1 est la moins efficace.

**Tableau 4-3 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92] avec  $\tau_C = 3,48$**

*Taille des segments : 150 échantillons soit une durée de 0,42 s ; Taux de compression : 3,48*

Réf. Signaux	PRD				Moyenne PRD	Variance PRD
	TJ1	TJ2	LeT	TcT		
100	22,20	15,48	16,70	16,11	17,62	3,09
101	35,74	32,26	35,16	30,29	33,36	2,55
102	31,13	31,33	31,68	30	31,03	0,72
103	52,02	47,71	49,11	49,7	49,63	1,79
104	28,95	30,32	29,04	27,47	28,94	1,16
105	29,12	26,17	26,28	25,8	26,84	1,53
106	48,73	53,28	53,72	52,59	52,08	2,28
107	23,17	21,94	19,34	14,99	19,86	3,61
108	20,47	11,80	10,64	9,61	13,13	4,97
109	17,35	10,49	10,11	8,21	11,54	3,99
111	34,98	33,39	31,74	30,76	32,71	1,85
112	16,18	10,27	10,08	9,57	11,52	3,11
113	51,86	46,26	45,37	42,93	46,60	3,77
115	38,24	38,67	41,18	39,51	39,40	1,29
116	31,30	26,86	27,07	26,57	27,95	2,24
117	19,53	13,3	13,23	12,22	14,57	3,34
118	19,12	13,59	13,36	12,88	14,73	2,93
119	21,69	17,64	17,9	15,78	18,25	2,47
121	16,25	6,64	6,83	6,56	9,07	4,78
122	20,9	16,69	17,44	17,23	18,06	1,91
123	24,70	19,75	19,53	18,24	20,55	2,84
124	22,20	15,48	16,69	16,11	17,62	3,09
200	34,30	33,07	31,88	29,75	32,25	1,93
201	37,57	35,25	35,55	35,53	35,97	1,07
202	41,06	36,82	37,14	36,67	37,92	2,10
203	33,09	33,15	32,51	30,95	32,42	1,02
205	29,34	29,53	28,71	27,48	28,76	0,92
207	22,34	22,41	22,57	20,42	21,93	1,01
208	28,37	27,06	27,2	25,57	27,05	1,14
209	65,61	63,94	64,95	63,6	64,52	0,92
210	36,19	33,82	34,25	32,07	34,08	1,69
212	46,82	40,8	45,18	43,14	43,98	2,60
213	46,04	45,21	45,71	43,97	45,23	0,90
214	28,46	30,2	29,79	29,95	29,6	0,77
215	59,55	56,79	56,81	55,17	57,08	1,81
217	19,98	23,53	21,31	17,7	20,63	2,44
219	29,48	28,47	29,29	26,9	28,53	1,17
220	37,53	34,31	35,2	33,74	35,19	1,66

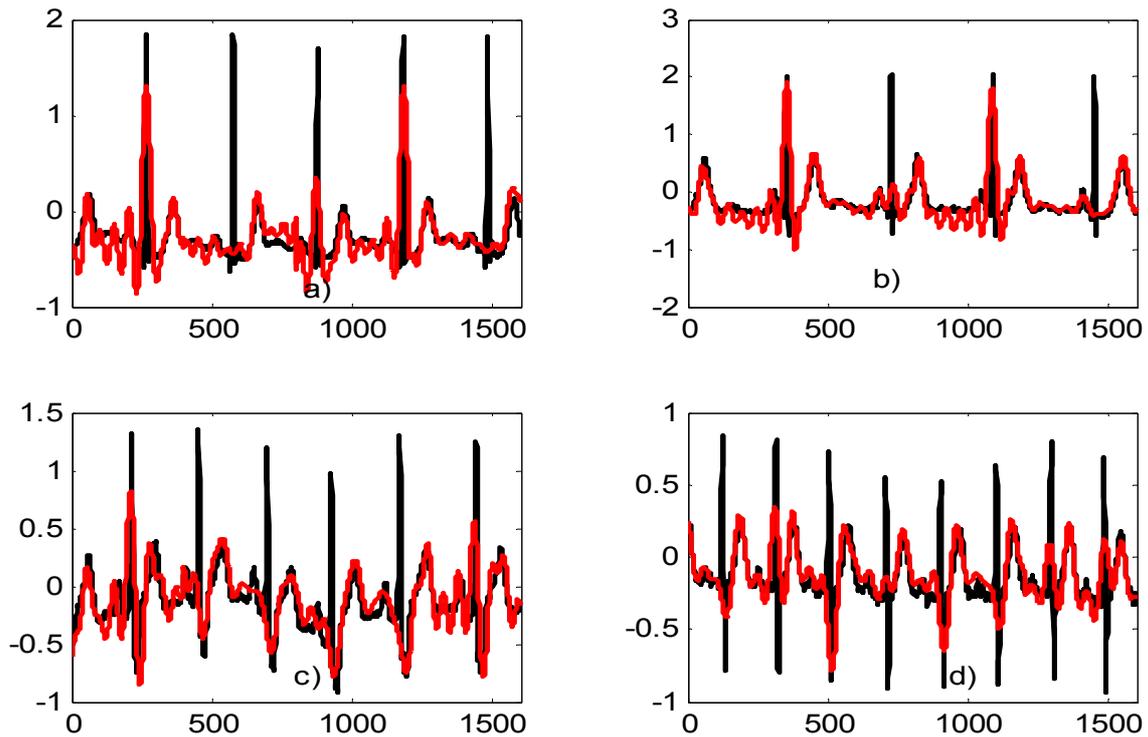
**Tableau 4-4 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92]  $\tau_C = 9,30$**

*Taille des segments : 400 échantillons soit une durée de 1,12 s ; Taux de compression : 9,30*

Réf. Signaux	PRD				Moyenne PRD	Ecart type
	TJ1	TJ2	LeT	TcT		
100	31,45	24,77	23,15	20,74	25,02	4,59
101	41,09	35	35,49	35,77	36,83	2,85
102	30,61	32,71	35,16	31,26	32,43	2,01
103	60,44	57,98	54,12	55,2	56,93	2,84
104	33,69	37,33	36,12	36,26	35,85	1,53
105	39,25	40,67	41,76	39,62	40,32	1,13
106	53,68	68,45	67,55	63,19	63,21	6,76
107	24,2	25,7	24,91	23,3	24,52	1,02
108	24,17	15,29	17,89	17,59	18,73	3,80
109	25,44	21,44	22,45	21,91	22,81	1,80
111	41,34	35,83	36,71	34,66	37,13	2,92
112	22,12	11,52	10,28	10,07	13,49	5,78
113	53,54	49,98	40,66	39,48	45,91	6,92
115	46,1	41,53	40,81	41,37	42,45	2,45
116	39,11	36,85	34,73	31,77	35,61	3,12
117	25,09	27,36	15,59	14,55	20,64	6,52
118	29,48	22,82	21,33	20,66	23,57	4,04
119	22,85	23,05	23,36	21,07	22,58	1,02
121	20,6	12,62	12,55	11,63	14,35	4,19
122	27,36	23,87	24,88	23,72	24,95	1,68
123	28,01	26,86	23,01	21,33	24,80	3,15
124	32,56	24,77	23,15	20,74	25,30	5,11
200	39,57	41,62	42,17	43,46	41,70	1,61
201	48,15	47,03	52,48	53,93	50,39	3,32
202	47,89	50,9	56,79	53,53	52,27	3,78
203	42,62	44,45	48,71	45,51	45,32	2,55
205	34,6	32,88	32,09	30,42	32,49	1,73
207	33,03	34,13	34,16	27,9	32,30	2,98
208	36,16	37,22	35,34	29,72	34,61	3,34
209	79,27	77,6	82,01	73,51	78,09	3,55
210	46,82	50,08	48,63	47,45	48,24	1,43
212	58,06	58,5	58,38	57,93	58,21	0,26
213	57,46	55,23	48,21	48,72	52,40	4,64
214	32,59	40,02	42,07	39,25	38,48	4,10
215	66,85	64,25	61,23	58,58	62,72	3,59
217	29,57	30,49	30,07	30,27	30,1	0,39
219	37,38	34,41	34,56	34,65	35,25	1,42
220	43,3	44,4	32,69	37,71	39,52	5,41

**Tableau 4-5 : Statistiques de la compression des signaux de [MIT 92]  $\tau_c = 20,93$**   
*Taille des segments : 900 échantillons soit une durée de 2,52 s ; Taux de compression 20,93*

Réf. Signaux	PRD				Moyenne PRD	Ecart type
	TJ1	TJ2	LeT	TcT		
100	45,71	29,08	31,47	33,43	34,92	7,40
101	62,15	61,63	46,34	44,12	53,56	9,66
102	58,89	47,54	44,94	42,3	48,41	7,30
103	45,37	51,15	57,62	43,52	49,41	6,36
104	59,35	52,45	50,1	46,59	52,12	5,38
105	60,69	57,55	54,47	54,21	56,73	3,04
106	84,41	79,08	74,45	57,56	73,87	11,61
107	52,25	52,79	54,44	50,94	52,60	1,44
108	37,32	27,38	28,36	27,2	30,06	4,86
109	45,67	35,45	44,79	37,34	40,81	5,17
111	51,73	59,85	53,07	48,15	53,2	4,89
112	30,61	15,61	13,48	13,71	18,35	8,22
113	50,79	51,43	67,39	65,71	58,83	8,94
115	57,42	51,6	35,98	41,78	46,69	9,62
116	45,01	43,15	49,17	44,84	45,54	2,55
117	32,97	17,15	17,72	22,06	22,47	7,33
118	40,59	33,61	34,15	31,09	34,86	4,04
119	40,18	36,06	36,08	26,9	34,80	5,61
121	32,92	18,38	19,67	17,79	22,19	7,19
122	49,6	36,6	29,55	31,9	36,912	8,95
123	38,05	26,33	27,94	33,5	31,45	5,36
124	45,71	29,08	31,47	33,44	34,92	7,40
200	57,22	60,03	56,17	50,55	55,99	3,97
201	77,25	52,01	54,81	87,22	67,82	17,17
202	63,48	87,56	83,3	70,95	76,32	11,08
203	69	77,01	69,32	62,83	69,54	5,80
205	42,45	40,08	37,41	31,18	37,78	4,85
207	50,1	40,38	33,46	32,11	39,01	8,23
208	52,23	47,32	49,04	41,32	47,47	4,58
209	90,44	94,11	74,48	73,3	83,08	10,73
210	78,67	64,18	69,51	67,12	69,87	6,25
212	77,38	83,31	67,06	65,14	73,22	8,60
213	73,43	64,66	65,86	61,36	66,32	5,10
214	52,04	69,67	68,2	59,95	62,46	8,16
215	80,14	72,9	71,09	66,93	72,76	5,51
216	63,66	64,08	70,19	61,28	64,80	3,79
219	47,1	51,67	54,8	51,46	51,25	3,16
220	49,38	41,18	36,46	31,59	39,65	7,57



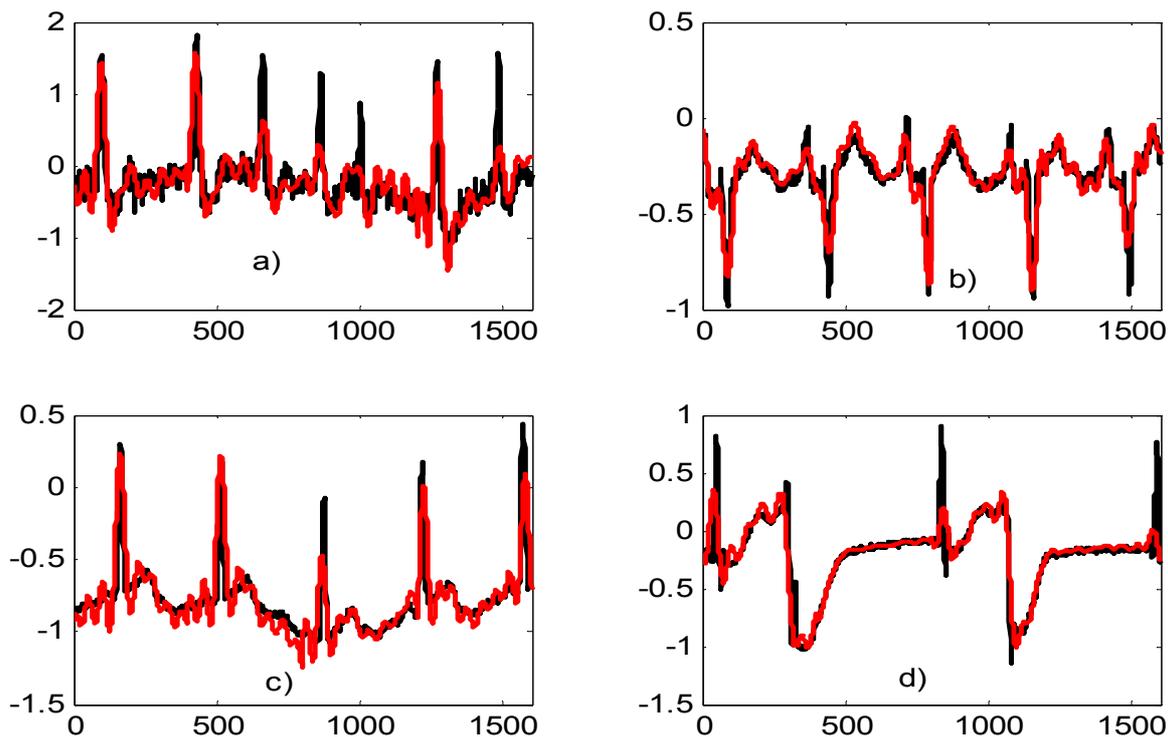
**Figure 4-14 : Cas difficiles de reconstruction des signaux avec les transformations de Jacobi.**

Les signaux originaux sont en noir et les signaux reconstruits sont en rouge. Le taux de compression est fixé à 9,30 dans les 4 situations

- a) Signal 103 reconstruit avec la TJ1 (PRD : 60,44)
- b) Signal 106 reconstruit avec la TJ2 (PRD : 68,85)
- c) Signal 212 reconstruit avec la LeT (PRD : 58,38)
- d) Signal 215 reconstruit avec le TcT (PRD : 58,58)

Au-delà de ces constats que nous venons de mentionner, il existe des cas difficiles, c'est-à-dire des signaux pour lesquels le PRD reste anormalement grand en toute circonstance. C'est le cas des signaux référencés 103, 106, 209, 210, 212, 213 et 215. Ces signaux caractérisent des cas de rythme cardiaque élevé (fréquence cardiaque supérieure à 75 battements par minute). Une illustration des cas difficiles est donnée en figure 4-14. Les cas difficiles sont aussi des signaux ECG dans lesquels les complexes QRS sont constitués d'impulsions très brèves ; or, nous savons que les transformations de Jacobi agissent en filtres passe-bas, en conséquence ces brèves impulsions caractéristiques des hautes fréquences sont rejetées lors de la reconstruction.

Face aux bruits et aux pathologies, les performances de la compression par les transformations de Jacobi sont plutôt satisfaisantes. Les bruits sont filtrés après la compression alors que les pathologies n'affectent pas la qualité du signal reconstruit. Des exemples de compression utilisant des signaux bruités et des signaux pathologiques sont présentés sur la figure 4-15.



**Figure 4-15 : Reconstruction de signaux bruités et de signaux pathologiques avec les transformations de Jacobi.**

*Les signaux originaux sont en noir et les signaux reconstruits sont en rouge. Le taux de compression est fixé à 9,30 dans les 4 situations*

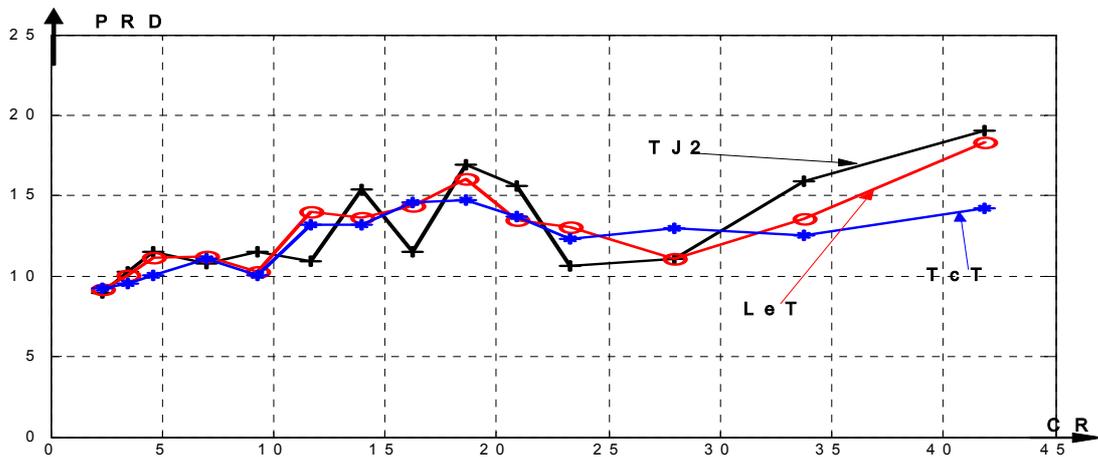
- a) Signal 203 très bruité reconstruit avec la TJ1 (PRD : 42,62)*
- b) Signal 108 pathologique et un peu bruité reconstruit avec la TJ2 (PRD : 15,29)*
- c) Signal 121 un peu bruité reconstruit avec la LeT (PRD : 12,55)*
- d) Signal 207 pathologique reconstruit avec le TcT (PRD : 27,90)*

Lors des nombreux tests effectués pour l'analyse statistique, le nombre de coefficients de Jacobi est maintenu constant (nous utilisons 43 polynômes), c'est en variant les tailles des fenêtres de segmentation qu'on fait varier les taux de compression. Les taux de compression sont fixés à 3,48 :1 ; 9,30 : 1 et 20,93 :1 pour les résultats des tableaux 4-3, 4-4 et 4-5 respectivement. Les données se trouvant dans les trois tableaux précédents montrent que le PRD varie très peu lorsque le taux de compression augmente. On peut ainsi obtenir de très forts taux de compression avec des valeurs relativement faibles de PRD. Le tableau 4-6 nous montre la quasi constance des valeurs du PRD pour de grandes variations du taux de compression dans le cas du signal 112. Lorsqu'on scrute l'évolution du PRD dans ce tableau 4-6, on s'aperçoit d'un taux de compression de l'ordre de 27,90 :1 avec des PRD de 11,10 % en TJ2 et 11,05 % en LeT ; ou encore un PRD de 12,57 pour un taux de compression de 33,72 :1 avec la TcT. La figure 4-16 trace l'évolution du PRD lorsqu'on fait varier la taille des fenêtres de segmentation.

**Tableau 4-6 : Statistiques de la compression du signal 112**

Chaque colonne de ce tableau commence avec le taux de compression, en dessous est donné le nombre d'échantillons considéré dans les fenêtres de segmentation, suivis des PRD pour différentes transformations, la colonne termine avec la moyenne et l'écart type de ces PRD.

	Taux-Comp	2,32	3,48	4,65	6,97	9,3	11,63	13,95	16,27	18,6	20,93	23,25	27,9	33,72	41,86
	Nbre échant	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200	1450	1800
PRD	TJ1	14,75	16,18	19,49	21,42	22,12	23,42	26,9	27,86	24,61	30,61	21,38	28,23	33,64	31,52
	TJ2	8,95	10,27	11,54	10,77	11,52	10,96	15,37	11,48	16,89	15,61	10,66	11,10	15,88	19,07
	LeT	9,16	10,08	11,14	11,25	10,28	14,01	13,62	14,38	16,08	13,48	13,06	11,05	13,54	18,32
	TcT	9,26	9,57	10,02	11,11	10,07	13,23	13,21	14,56	14,71	13,71	12,34	13,00	12,57	14,25
Moyenne PRD		10,53	11,53	13,05	13,64	13,50	15,41	17,28	17,07	18,07	18,35	14,36	15,85	18,91	20,79
Ecart type PRD		2,82	3,12	4,34	5,19	5,78	5,50	6,48	7,33	4,45	8,23	4,79	8,31	9,92	7,46



**Figure 4-16 : Evolution du PRD en fonction du CR lorsque qu'on varie la taille de segmentation.**

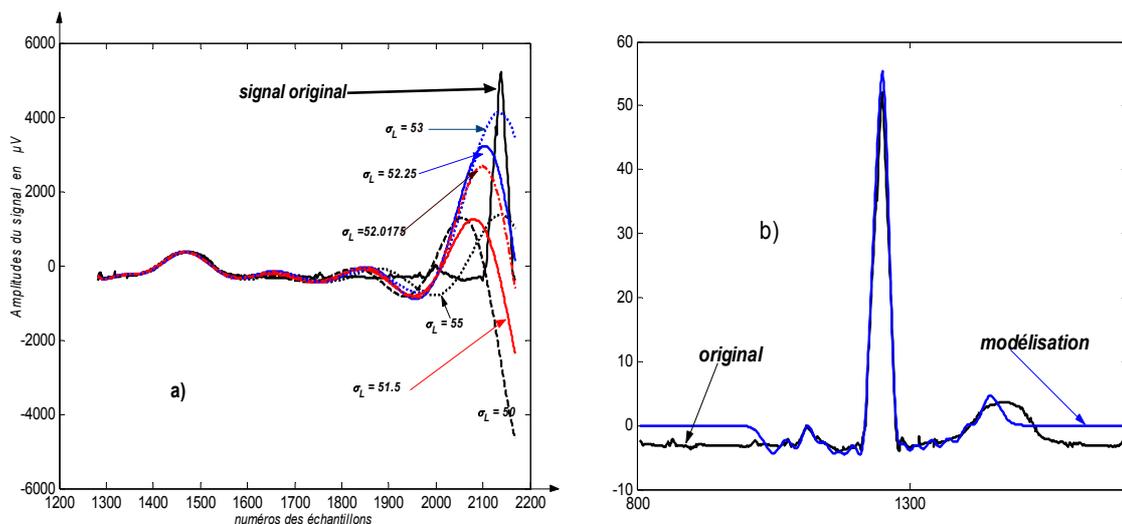
Les données sont celles du tableau 4-6 lorsqu'on traite le signal référence 112 de [Mit 92]. Les tailles des segments sont données dans la deuxième ligne de ce tableau en termes du nombre d'échantillons contenus dans les segments.

La valeur du PRD est très influencée par l'amplitude et la composante continue du signal original. Il est reconnu dans [Al Shrouf 03] et [Velasco 05] qu'une petite valeur de PRD ne garantit pas forcément une bonne reconstruction du signal. Cette assertion est confirmée lorsqu'on regarde de près les signaux de la figure 4-18. Par l'inspection visuelle, la reconstruction du signal en (d) sur cette figure est plus fidèle que celle en (c) ; et pourtant le PRD en (d) est de 27,90 % contre 12,55 % en (c) !

# IV-4 ASSOCIATION LaT-HeT POUR LA COMPRESSION DE L'ECG

## IV-4-1 Principes

Nous avons établi au chapitre 3 que la transformation de Laguerre ne modélise pas correctement les segments du signal ECG. Il en est de même de la transformation d'Hermite. On vérifie quand même l'aptitude de la LaT à représenter correctement la ligne isoélectrique surtout lorsque cette ligne isoélectrique se trouve au début du segment. Sous un autre angle, les 3 premières fonctions d'Hermite ressemblent suffisamment à certaines morphologies des complexes QRS et elles ont été souvent utilisées pour la modélisation de ces complexes dans [Sörmo 81], [Laguna 96] et [Lagerholm 00]. Ces modélisations ne permettent pas une reconstruction acceptable du signal à cause des déformations très importantes en durée, en translation et en amplitude qu'elles induisent.



**Figure 4-17 : Modélisations des portions de l'ECG par la LaT et la HeT.**

- a) Modélisations du segment S-S d'un signal ECG par les polynômes de Laguerre avec variation du paramètre  $\sigma_L$
- b) Modélisation d'une fenêtre de signal centrée sur le complexe QRS avec les fonctions d'Hermite dans le cas ( $\sigma_H = 23.5$ ).

Partant de ces observations, nous avons pensé à un algorithme de compression de l'ECG dans lequel la fenêtre du signal correspondant à un cycle cardiaque est scindée en deux : la ligne isoélectrique qui sera modélisée par la LaT, le complexe QRS et les ondes environnantes qui seront reconstruits avec la HeT. Nous utilisons jusqu'à 46 fonctions d'Hermite. Nous avons introduit à cet effet des paramètres de contraction  $\mu_L$  pour la LaT et  $\mu_H$  pour la HeT

avec  $0 < \mu_L < 1$  et  $0 < \mu_H < 1$ . Nous procédons aussi aux répétitions symétriques de chacune des portions puisque les domaines d'intégration pour le calcul des coefficients est  $[0, +\infty[$  pour la *LaT* et  $]-\infty, +\infty[$  pour la *HeT*. Les paramètres  $\mu_L$  et  $\mu_H$  sont des facteurs d'échelle qui ramènent la portion initiale du signal en traitement au voisinage de zéro où les polynômes de Laguerre et d'Hermite montrent beaucoup d'oscillations. La figure 4-17 (a) est une illustration de l'aptitude de la LaT à bien modéliser l'intervalle S-P du signal ECG. Cette figure confirme en même temps que cette transformation n'est pas indiquée pour représenter les complexes QRS. Le paramètre  $\sigma_L = 1/\mu_L$  est utilisé sur cette figure. Le paramètre  $\sigma_L$  facilite le réglage de l'algorithme. Sur la figure 4-17 (a) par exemple, on fait varier  $\sigma_L$  varie entre 51 et 53. Il serait plus pénible d'utiliser  $\mu_L$  qui dans ce cas est tel que :  $0.0188 < \mu_L < 0.0196$ . Le paramètre  $\sigma_L$  admet donc une large plage de variation et est indiqué pour le réglage. La figure 4-17 (b) montre quant à elle la modélisation d'une fenêtre de signal centrée sur le QRS avec les fonctions d'Hermite : le complexe QRS est bien reconstruit alors que le reste de la fenêtre ne l'est pas.

Pour déterminer les coefficients de décomposition d'un signal  $s(t)$ , non seulement on a introduit les paramètres de contraction, mais on a aussi procédé aux répétitions symétriques des segments de signal en traitement. L'intervalle T-P doit connaître des répétitions à droite alors que l'ensemble des ondes P-QRS-T connaît des répétitions symétriques aussi bien à gauche qu'à droite.

- Pour la transformation de Laguerre, on a :

$$C_{n,L}(\mu_L) = \frac{1}{\|L_n(\xi)\|^2} \int_0^{+\infty} s(\xi)L(\xi)e^{-\xi} d\xi \approx \frac{\mu_L}{\|L_n(\xi)\|^2} \int_0^{\theta_L} s(\mu_L\xi)L(\mu_L\xi)e^{-\mu_L\xi} d\xi \quad (4-13)$$

avec  $\theta_L + (k+1)t_L$

$\mu_L$  est le facteur d'échelle

$t_L$  est la durée du segment T-P.

$k$  est le nombre de répétitions du segment T-P effectuées.

- Pour la décomposition dans la base des fonctions d'Hermite

$$C_{n,H}(\mu_H) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi)h_n(\xi)d\xi \approx \mu_H \int_{-\theta_H}^{+\theta_H} s(\mu_H\xi)h_n(\mu_H\xi)d\xi \quad (4-14)$$

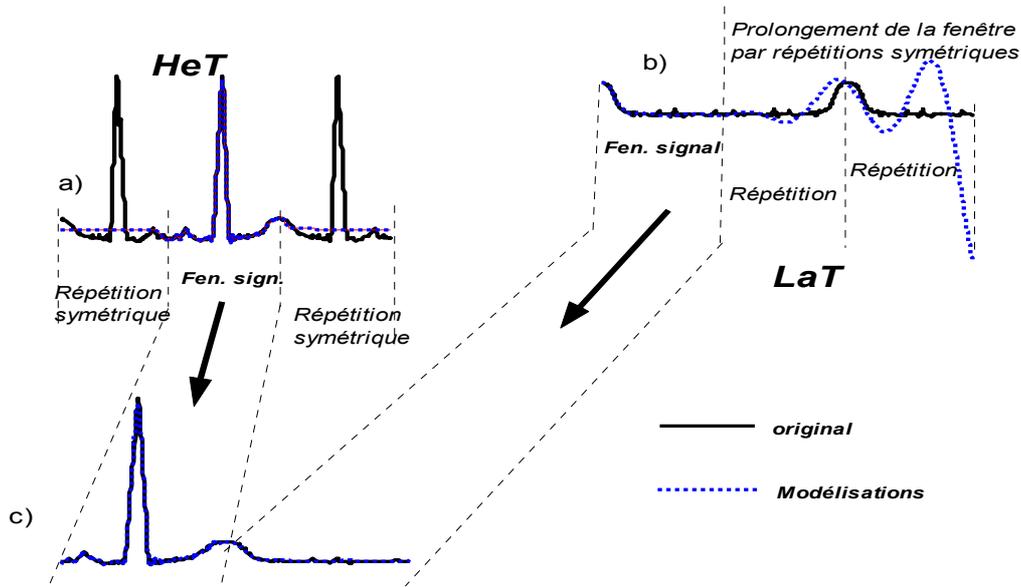
Sachant que  $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ , on obtient :

$$C_{n,H}(\mu_H) = \frac{\mu_H}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \int_{-\theta_H}^{+\theta_H} s(\mu_H \xi) H_n(\mu_H \xi) e^{-\frac{1}{2}(\mu_H \xi)^2} d\xi \quad (4-15)$$

avec  $2\theta_H = (2k+1)t_H$

$t_H$  : est la durée du segment P-QRS-T

$k$  : est le nombre de répétitions de ce segment sur chaque côté de la fenêtre originale.



**Figure 4-18 : Illustration de l'association de la HeT et de la LaT pour modéliser une fenêtre de signal correspondant à un cycle cardiaque.**

- Modélisation d'un segment formé des ondes P-QRS-T ayant connu une répétition symétrique à gauche et une répétition aussi à droite par la HeT.
- Modélisation de l'intervalle T-P ayant connu deux répétitions symétriques à droite.
- Cycle cardiaque modélisé et recombéné

Une illustration du principe de modélisation d'une fenêtre du signal ECG coïncidant avec le cycle cardiaque par la combinaison *HeT-LaT* est présentée sur la figure 4-18. La durée de l'intervalle P-QRS-T est triplée à cause d'une répétition symétrique à gauche et une autre à droite. Le segment T-P connaît quant à lui deux répétitions uniquement à droite. Les segments originaux sont extraits après reconstruction et recombéné. Pour la compression d'un signal ECG quelconque, le processus complet de l'algorithme est montré sur la figure 4-19. Une attention particulière est accordée à la première et à la dernière fenêtre du signal. En effet, selon la nature de ces fenêtres extrêmes, elles peuvent être modélisées par l'une, l'autre ou les deux transformations. En exemple, si la portion du signal précédant le premier complexe QRS est assez longue, on crée une fenêtre spéciale ne comportant pas de complexe QRS et qui est modélisée uniquement par la LaT.

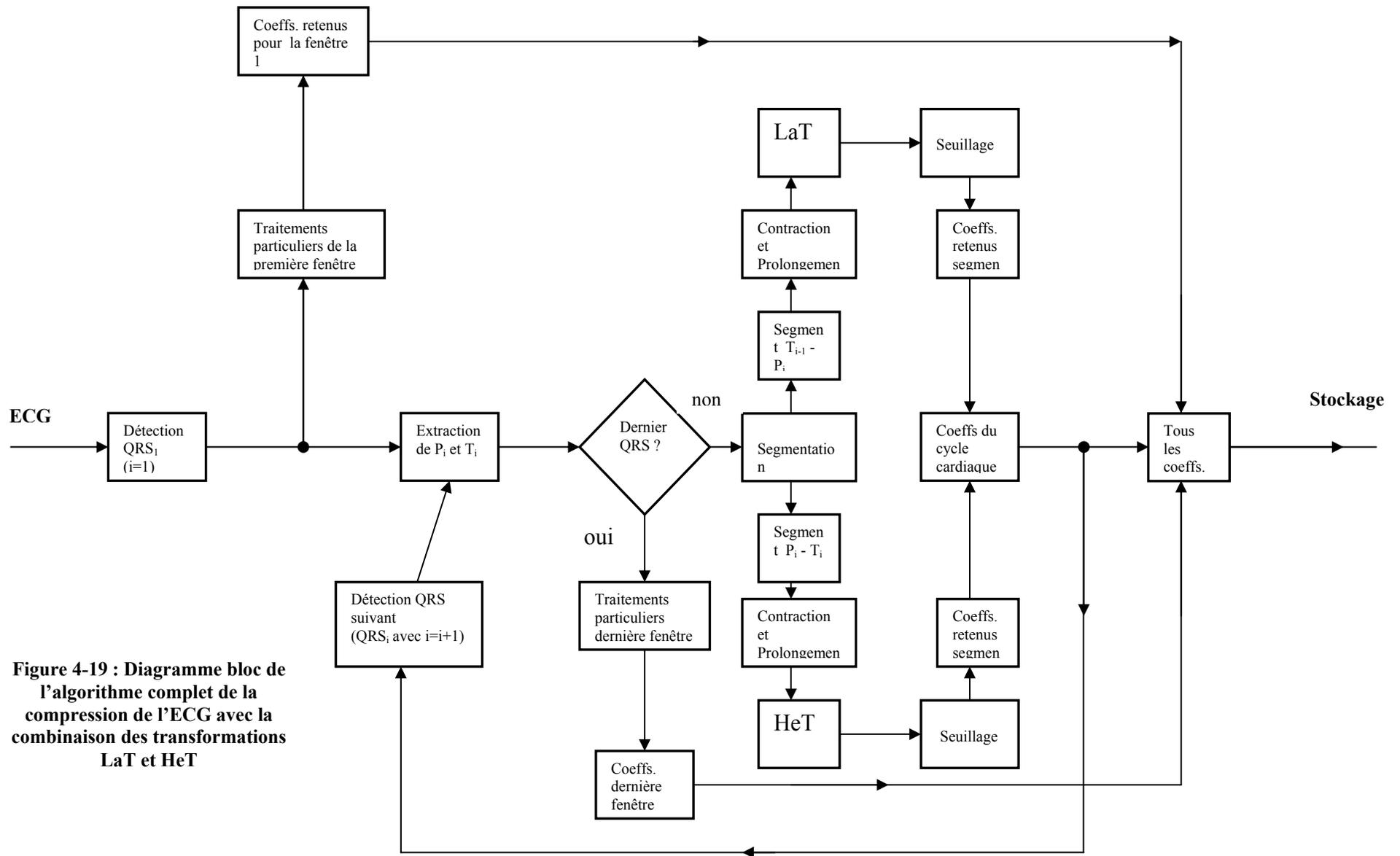
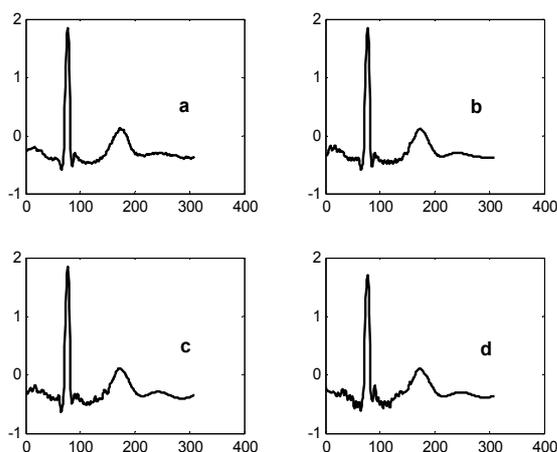


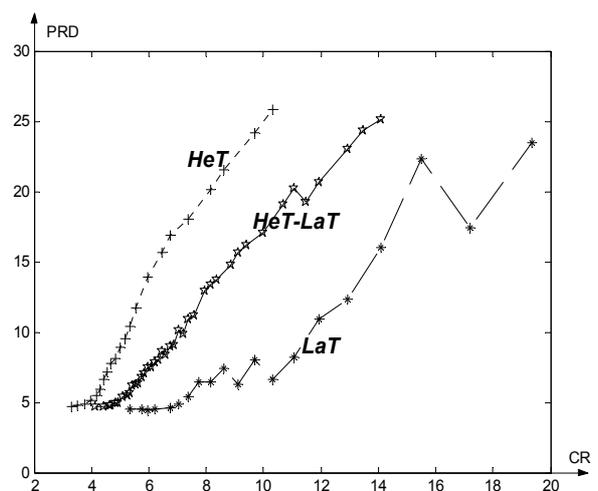
Figure 4-19 : Diagramme bloc de l'algorithme complet de la compression de l'ECG avec la combinaison des transformations LaT et HeT

## IV-4-2 Résultats de compression par LaT-HeT

L'algorithme que nous avons élaboré a été testé sur des signaux réels issus de la base de données [Mit 92]. Sur la figure 4-20, une fenêtre d'un signal réel est présentée. Des versions de la même fenêtre, correspondant à des taux de compression différents sont montrées sur la même figure. Les résultats de la compression sont les suivants :  $\tau_c = 4,13$  et  $PRD = 4,66$  pour le cas b) ;  $\tau_c = 5,85$  et  $PRD = 6,72$  pour la situation c) et enfin  $\tau_c = 8,65$  et  $PRD = 13,25$  dans le cas d). On constate des ondulations hautes fréquences autour du complexe QRS. Ces portions étant modélisées par la *HeT*, la présence des composantes hautes fréquences traduit un phénomène contraire à celui observé avec la *LaT* ; à savoir que la *HeT* avec les fonctions d'Hermite n'est pas appropriée pour la modélisation des signaux à variations lentes. Dans le but d'évaluer la contribution de chacun de ces transformateurs (*HeT* et *LaT*) aussi bien sur le PRD que le taux de compression global du cycle cardiaque, nous avons relevé les performances de chaque transformation au cours de nombreux tests de compression. Les résultats de ces expériences sont représentés graphiquement sur la figure 4-21. Le PRD croît beaucoup plus rapidement quand le  $\tau_c$  augmente dans le cas de la *HeT* que dans celui de la *LaT*. C'est dire que le complexe QRS et les ondes environnantes sont plus difficiles à modéliser que la ligne isoélectrique. Le PRD d'une fenêtre est aussi lié à la durée de celle-ci et croît avec cette durée. Il faut un grand nombre de fonctions d'Hermite pour bien modéliser les complexes QRS alors que la ligne isoélectrique peut être générée avec un nombre relativement petit de polynômes de Laguerre.

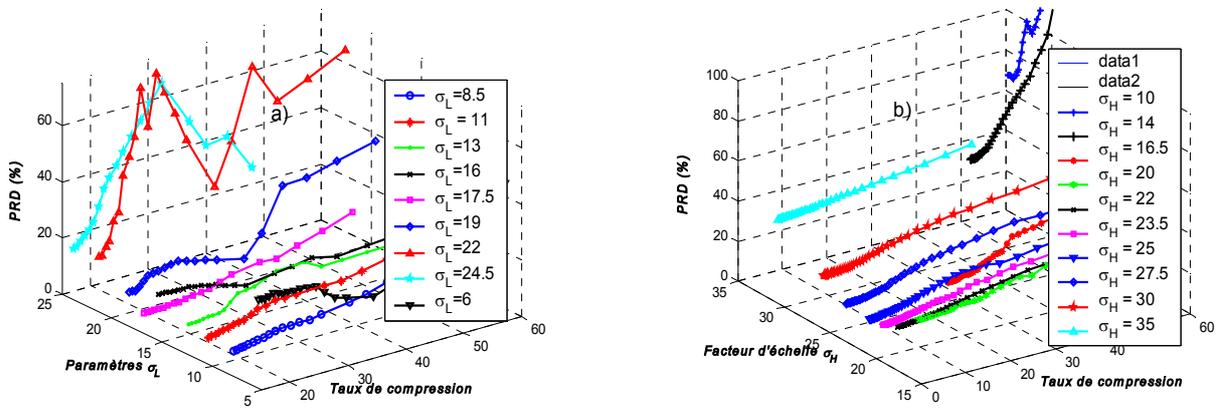


**Figure 4-20 : Exemples de compression d'un segment de signal réel.**  
a) Original b)  $\tau_c = 4.13$  et  $PRD = 4.66$  ; c)  $\tau_c = 5.85$ ,  $PRD = 6.72$  ; d)  $\tau_c = 8.65$ ,  $PRD = 13.25$ .



**Figure 4-21 : Variations des PRD en fonction du taux de compression (CR)**

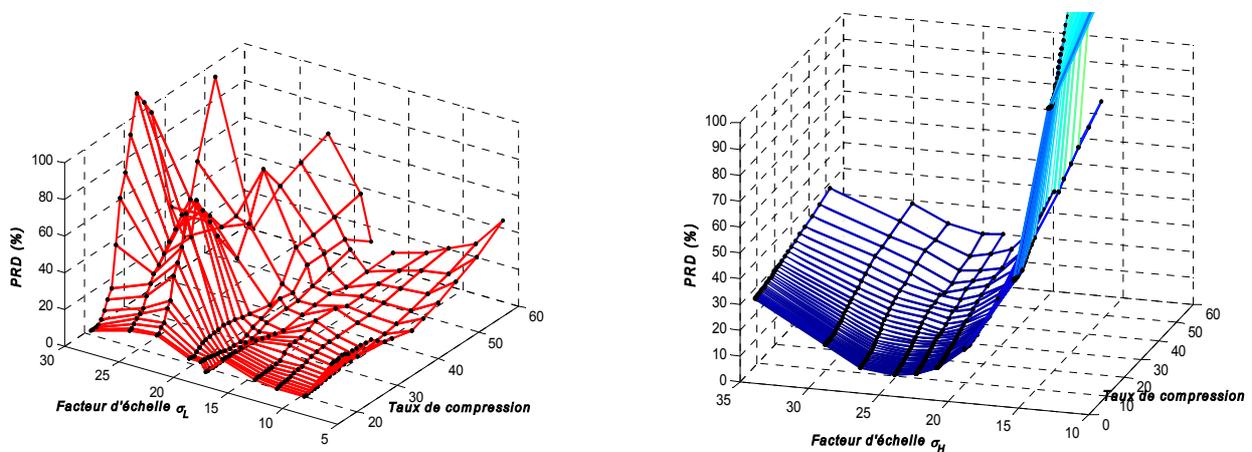
Sur la figure 4-22, on représente les variations du PRD en fonction des paramètres de réglage  $\sigma_L$  et  $\sigma_H$ . Les graphiques en 3 dimensions des variations du PRD en fonction du taux de compression et du facteur d'échelle sont montrés sur la figure 4-23.



**Figure 4-22 : Effets des paramètres  $\sigma_L$  et  $\sigma_H$  sur les variations du PRD en fonction du taux de compression**

a) Variation des PRD en fonction de  $\sigma_L$  et du taux de compression en LaT

b) Variations des PRD en fonction de  $\sigma_H$  et du taux de compression en HeT



**Figure 4-23 : Graphique en 3 dimensions de l'évolution du PRD en fonction de 2 variables : le taux de compression ( $\tau_C$ ) et le facteur d'échelle ( $\sigma_L$  ou  $\sigma_H$ )**

A gauche, PRD en fonction de  $\tau_C$  et  $\sigma_L$  lors de la compression des intervalles TP avec la LaT et à droite PRD en fonction de  $\tau_C$  et  $\sigma_H$  lors de la compression des ondes P-QRS-T avec la HeT

La figure 4-24 présente la compression des signaux réels : le premier est un signal normal et le second est un signal pathologique. Le cas a) est la référence 103 de [MIT 92] qui avait été utilisé dans [Colomer 97] pour tester la DLT. Les tableaux 4-7 et 4-8 permettent d'établir une comparaison des résultats entre notre algorithme et celui fondé sur la DLT. Cette

comparaison ne prend pas en considération le *codage de Huffman* qui était associé à la DLT. Pour de faibles  $\tau_c$ , ce nouvel algorithme donne de très bons résultats : en exemple, le  $\tau_c$  de 4,44 conduit à un PRD de 4,94% alors qu'avec la DLT, un  $\tau_c$  de 4,37 provoque un PRD de 9,33% (presque le double !). Il est vrai que le PRD croît plus vite en fonction du  $\tau_c$  avec notre méthode puisqu'il faut beaucoup de fonctions d'Hermite pour bien modéliser le complexe QRS et les ondes environnantes, toutefois notre algorithme reste nettement plus performant que la DLT même au delà de la gamme de taux de compression permettant une reconstruction du signal exploitable cliniquement. Or, la DLT est déjà l'un des meilleurs algorithmes de compression par transformation adaptés à l'ECG d'après les études comparatives réalisées dans [Philips 92], [Philips 93], [Colomer 97]. Les résultats de l'algorithme de compression des signaux ECG par la transformation en ondelettes discrètes (voir figure 1-21) élaboré dans [Thakor 93] sont présentés dans le tableau 4-1 en *page Xxx*. En plaçant en regard les tableaux 1-2 et 4-8, il est clair que notre algorithme produit aussi de meilleurs résultats que la compression des signaux ECG par décomposition dans des bases d'ondelettes. Dans l'optique d'associer la DWT à la DCT en vue de réaliser la compression de l'ECG [Zou 94], 91 coefficients sur 512 sont conservés pour représenter les segments de l'ECG. Parmi les 91 coefficients, 56 sont ceux de la DWT et 35 sont pour la DCT. On obtient un PRD de 5.06 %. La DWT seule donne un PRD de 5.04 % pour un taux de compression  $\tau_c = 5,63$ . Ce résultat est du même ordre de grandeur que celui de notre algorithme où on obtient un PRD de 4,94 % pour un taux de compression  $\tau_c = 4,44$ .

**Tableau 4-7 : Résultats avec DLT [Colomer 97]**

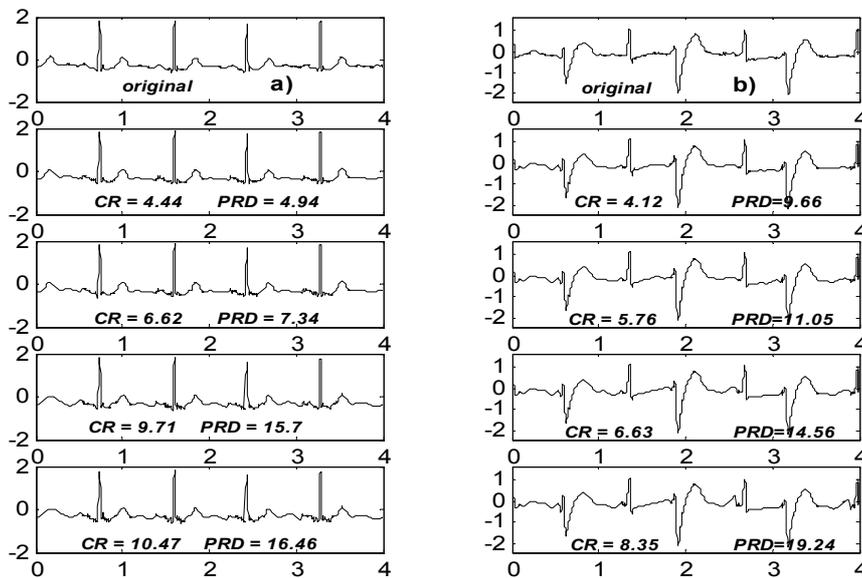
<b>% Energie</b>	<b>CR</b>	<b>PRD</b>
99.7 %	4.37	9.33
99.5 %	5.68	10.1
99.3 %	6.5	10.9
99.1 %	7.15	11.7
98 %	9.62	15
97 %	11.26	17.8

**Tableau 4-8 : Résultats avec HeT-LaT**

<b>Facteur de seuil</b>	<b>CR</b>	<b>PRD</b>
0	4.44	4.94
0.03	5.71	6.78
0.045	6.62	7.34
0.055	7.12	9.68
0.075	8.37	12.36
0.09	9.71	15.70
0.105	10.47	16.46
0.125	11.14	17.45

Les travaux récents portant sur la compression de l'ECG avec la transformation en ondelettes ne se préoccupent plus du processus en tant que tel. Ces travaux se penchent davantage sur les techniques de codage sans perte qui sont associés aux coefficients

d'ondelettes afin d'accroître l'efficacité et les performances de la compression. On a utilisé par exemple le codage EZW (Embedded Zerotree Wavelets) dans [Hilton 97], SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) dans [Lu 00] et WT-VQ (Wavelet Transform – Vector Quantization) dans [Miaou 02] et [Miaou 05]. Nous ne pouvons pas comparer nos résultats à ceux de ces méthodes puisque notre étude est encore limitée au stade des décompositions polynomiales. Nous envisageons, en perspective, d'intégrer des techniques de codages entropiques à notre algorithme pour réduire le nombre de bits nécessaires pour représenter les coefficients des polynômes, on pourra, à ce moment là, comparer ses performances avec celles des méthodes récentes à base des ondelettes. De nombreux algorithmes de codage sans pertes accompagnés de codes source pour implémentation avec le langage C sont disponibles dans [Nelson 93]. On devra surtout envisager la possibilité d'élaborer des codages entropiques spécifiques aux transformations polynomiales.



**Figure 4-24 : Autres exemples de compression des signaux ECG réels avec HeT-LaT ;**  
a) Signal 103 avec  $\sigma_H = 45$  et  $\sigma_L = 23.4$  ; b) : Signal 200 avec  $\sigma_H = 7.31$  et  $\sigma_L = 25.8$

L'évaluation des erreurs de reconstruction en termes de déviations d'amplitude est un autre moyen théorique couramment utilisé pour apprécier la qualité d'un processus de modélisation. Ces erreurs expriment les écarts entre les valeurs instantanées des signaux original et reconstruit sous la forme :  $er(t_i) = |s(t_i) - \hat{s}(t_i)|$

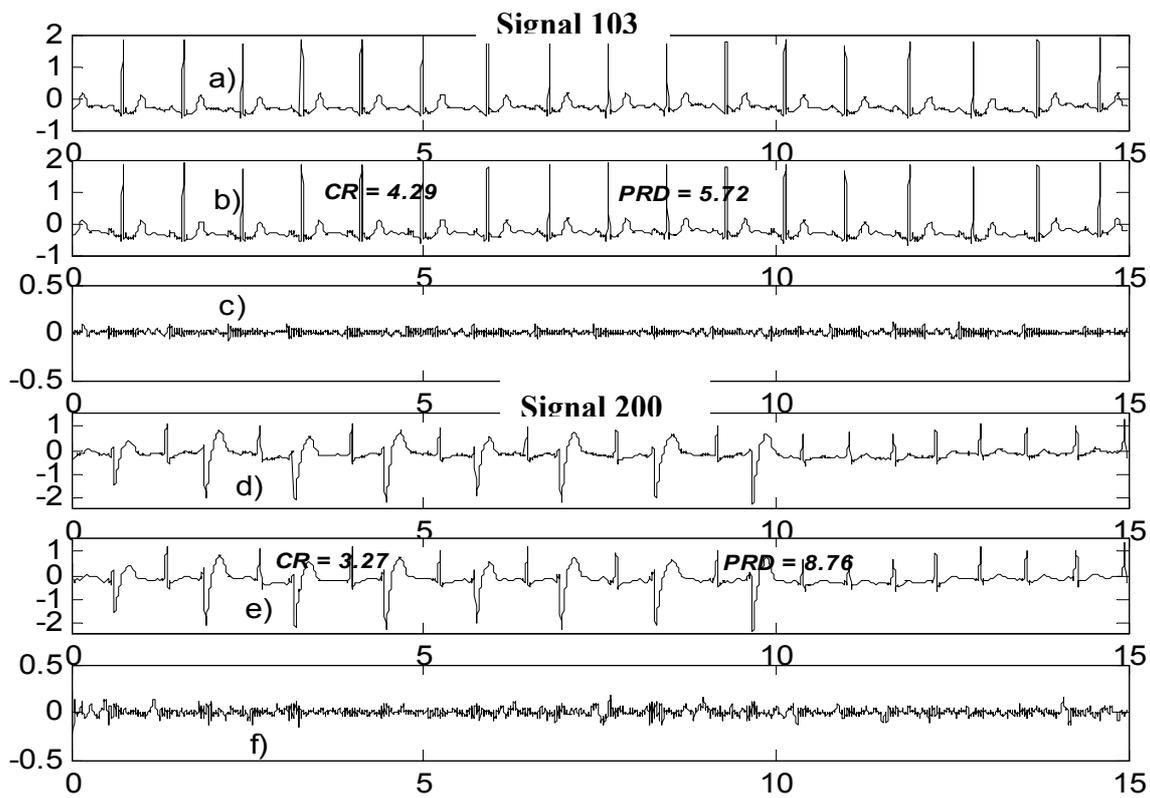
Sur le plan pratique, le tracé de  $er(t_i)$  donne une idée précise sur les déformations locales du signal après compression, ce qui est très important pour la caractérisation des erreurs de diagnostic dues à la compression. La figure 4-27 montre les signaux  $s(t_i)$ ,  $\hat{s}(t_i)$  et

$er(t_i)$  pour les données [Mit 92], références 103 et 200, sur une durée de 15 secondes. Les taux de compression respectifs sont de 4,29 et 3,27. Les axes d'amplitude sont gradués en millivolts sur cette figure. Pour les signaux sus mentionnés, on obtient des valeurs des erreurs moyennes ( $Er.Moy$ ) respectives de 0,93  $\mu V$  et 1,50  $\mu V$  alors que les valeurs maximales sont :

$$\max_i(|er(t_i)|) = 0,110 \text{ mV} \quad \text{pour le signal MIT data base n}^\circ : 103$$

$$\max_i(|er(t_i)|) = 0,228 \text{ mV} \quad \text{pour le signal MIT data base n}^\circ : 200$$

Ces valeurs expriment à quel point la reconstruction du signal ECG par une combinaison HeT-LaT est fidèle. On remarque aussi à partir de la figure 4-25 que l'algorithme que nous proposons supporte très bien les variations de rythme de l'ECG ainsi que le changement de la morphologie du signal au cours d'un enregistrement.

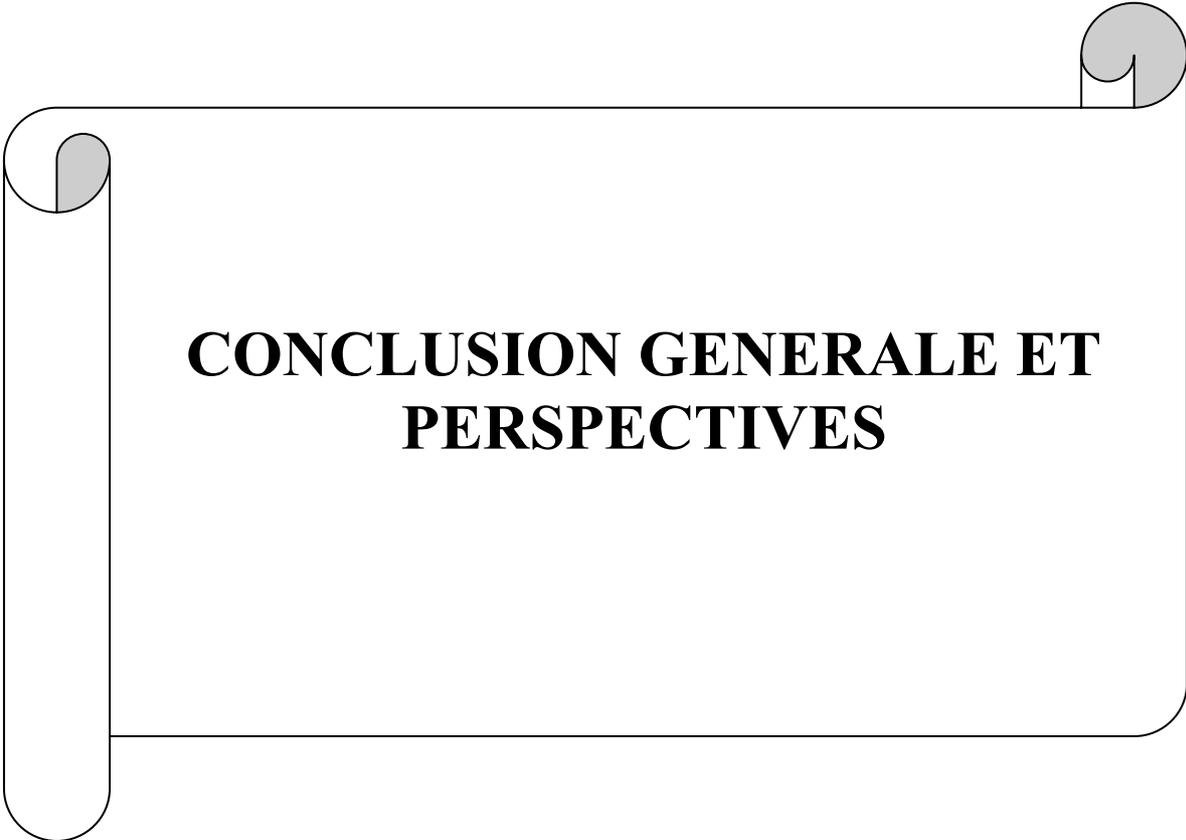


**Figure 4-25 : Erreurs de reconstruction après compression avec HeT-LaT**

*a) et d) : Originaux ; b) et e) : Signaux reconstruits ; c) et f) : erreurs de reconstruction.*

## IV-5 CONCLUSION

Arrivés au terme de ce dernier chapitre de thèse, nous avons pu développer deux algorithmes de compression des signaux ECG à travers les transformations polynomiales. Le premier algorithme résulte de l'application directe de la méthodologie des transformations polynomiales présentée au chapitre III, en utilisant les polynômes de Jacobi. Pour accroître les performances de cet algorithme, nous y avons inclus une procédure pour la réduction des effets de bords. Ceci permet non seulement de pouvoir augmenter considérablement le taux de compression, sans variation significative du PRD, mais aussi d'utiliser cet algorithme pour la compression des signaux autres l'ECG. Le second algorithme associe la transformation de Laguerre aux fonctions d'Hermite afin de compenser les insuffisances individuelles de chacune de ces deux catégories de fonction. Ce deuxième algorithme donne lieu à la reconstruction quasi parfaite des segments du signal ECG correspondant aux cycles cardiaques. Il existe des possibilités d'améliorer davantage les résultats obtenus dans les deux cas. Bien que ce travail ne soit pas celui d'un pionnier, il fait partie des premières tentatives de compression des signaux ECG avec les polynômes orthogonaux au regard de la littérature quasi-inexistante dans le domaine. Il va de soi que notre travail comporte des lacunes et ne répond pas à toutes les questions susceptibles d'être posées à ce sujet. C'est à ce titre que nous proposons après la conclusion générale, un ensemble de suggestions qui visent non seulement à apporter des améliorations futures, mais aussi à indiquer des pistes à explorer pour aboutir aux solutions de certains problèmes non résolus dans le mémoire.



**CONCLUSION GENERALE ET  
PERSPECTIVES**

# CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

## A) CONCLUSION GENERALE

Nous avons décrit le signal ECG au chapitre 1, c'est un signal de nature électrophysiologique qui procure une information essentielle dans le diagnostic des anomalies cardiaques. L'enregistrement, le stockage et la transmission des signaux ECG sont des processus complexes. Nous avons analysé les méthodes de traitement de l'ECG parmi lesquelles la compression. La compression des signaux ECG se justifie par la nécessité de réduire les coûts de stockage et de transmission de ces signaux à travers les canaux de communication modernes. Une revue de la littérature sur les méthodes de compression de l'ECG a été menée, en insistant particulièrement sur les techniques par approximations et transformations polynomiales.

Les aspects théoriques et fondamentaux des polynômes orthogonaux ont été abordés au niveau du deuxième chapitre. Ces polynômes orthogonaux constituent le principal outil mathématique que nous utilisons pour les modélisations et la compression des signaux ECG. Il était donc de première importance de bien comprendre ces fonctions et d'étudier avec minutie leurs propriétés. Nous avons surtout établi les conditions sous lesquelles les différentes familles de polynômes orthogonaux constituent des bases dans les espaces de Hilbert. Dans ces cas, on peut décomposer un signal à énergie finie dans ces bases polynomiales (développement en séries).

Nous avons présenté la méthodologie de modélisation des signaux ECG via les polynômes orthogonaux au chapitre 3. Elle se résume aux étapes suivantes :

- Segmentation du signal en fenêtres coïncidant avec les cycles cardiaques.
- Transposition des segments dans les domaines de définition des polynômes.
- Calcul des coefficients de décomposition.

Dans le processus de segmentation, la détection des complexes QRS est une étape préliminaire incontournable. Nous avons aussi étudié la méthode d'intégration numérique par les quadratures de Gauss. Cette méthode est la plus appropriée pour le calcul des coefficients de décomposition avec les polynômes orthogonaux. Quelques exemples de modélisations polynomiales ont été expérimentés. Il a été établi à l'issue de ces expériences que les polynômes de Legendre, les polynômes de Tchebycheff, et d'une manière générale les polynômes de Jacobi permettent de réaliser une bonne modélisation des signaux ECG. Par contre, les polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermite ne conduisent pas à une bonne

reconstruction des signaux ECG. Ces deux classes de polynômes agissent en filtres passe-bas ; en conséquence, les complexes QRS et d'autres ondes qui caractérisent les manifestations hautes fréquences dans l'ECG sont ignorés lors de la reconstruction.

A partir des résultats précédents, nous avons construit deux nouveaux algorithmes de compression de l'ECG. Le premier algorithme s'appuie sur les polynômes de Jacobi alors que le second exploite une combinaison de polynômes de Laguerre et des fonctions d'Hermite. La synthèse des signaux ECG à l'aide des polynômes de Jacobi donne lieu aux effets de Gibbs très perturbants. Nous avons incorporé dans notre algorithme une procédure qui élimine ces effets de bord. Les résultats obtenus avec nos deux algorithmes de compression sont très prometteurs. Nous envisageons en perspective des possibilités pour améliorer ces résultats.

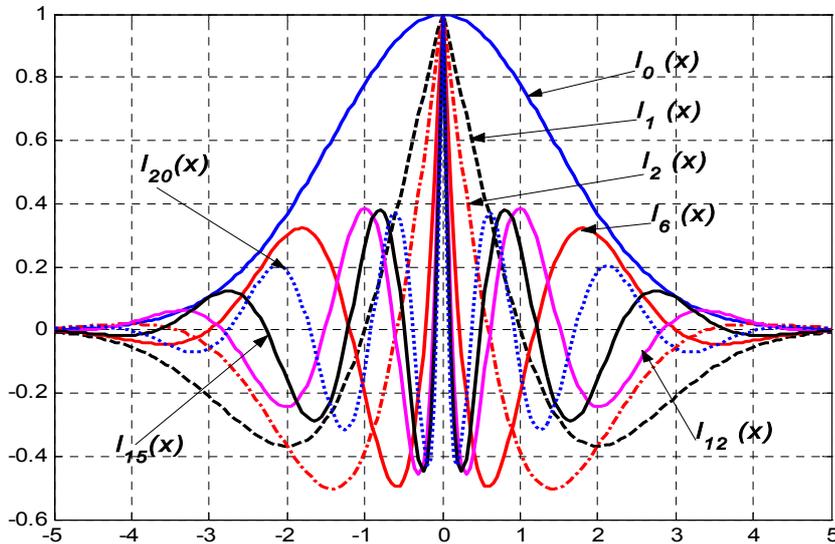
## B) PERSPECTIVES

Il se dégage des courbes de la figure 4-23 que la variation du PRD en fonction du taux de compression affiche souvent des minima locaux pour la LaT; c'était déjà une situation semblable avec les transformations de Jacobi (figures 4-9 et 4-10). Ce phénomène ne se présente pas avec la HeT, car le PRD est lié à la définition de la norme sphérique dans  $L^2[a, b]$  or, l'ensemble des fonctions d'Hermite constitue une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les polynômes de Jacobi et de Laguerre, bien qu'étant des bases orthogonales respectives de  $L^2[-1, 1]$  et de  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , ne constituent pas des bases orthonormées pour ces espaces de fonctions. Le principe de seuillage n'est donc pas optimal en ce qui concerne la sélection des coefficients pour reconstruire les signaux après décomposition par ces polynômes. En perspective, on pourra envisager le choix de ces coefficients à travers un algorithme d'optimisation dans lequel le taux de compression est la fonction objectif, le PRD minimal imposé ainsi que la déviation maximale d'amplitude étant des contraintes. Les fenêtres des signaux ECG sont assez semblables les unes aux autres, les coefficients obtenus après transformation de ces fenêtres sont donc fortement corrélés. Un codage entropique des coefficients devra contribuer à améliorer efficacement les performances de nos algorithmes dans le cadre d'une implémentation pratique. On pourra aussi penser à la conception de la version discrète et rapide de ces algorithmes pour des utilisations en temps réel.

La compression de l'ECG par la combinaison LaT-HeT exige qu'on génère deux familles de polynômes. Dans l'objectif d'alléger cet algorithme, nous pensons qu'il est possible d'utiliser une seule famille de polynômes. Nous proposons la construction des

fonctions de Laguerre à support borné, à l'image des fonctions d'Hermite. Nous les définissons de la façon suivante :

$$I_n^{(\alpha)}(x) = |x|^\alpha e^{-\beta|x|} L_n^{(\alpha)}(|x|) \quad (4-49)$$



**Figure P-1 :** Courbes des fonctions de Laguerre à support borné  $I_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0.25$

La figure P-1 ci-dessus montre les allures de quelques unes de ces fonctions avec les paramètres  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0.25$ . L'orthogonalité de ces fonctions se démontre très facilement en utilisant la propriété de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre. Cette façon de construire ces fonctions de Laguerre reste empirique. Il faut encore élaborer une théorie mathématique qui les caractérise et fait ressortir leurs propriétés. Ce n'est qu'après cela qu'on pourra les utiliser de façon convaincante pour décomposer les signaux ECG.

L'interprétation physique de la nature des coefficients après décomposition d'un signal dans des bases polynomiales est une préoccupation de première importance. Nous avons considéré tout au long de ce mémoire que ces coefficients détiennent individuellement une quantité de l'énergie du signal. Il reste tout de même à déterminer la relation exacte qui lie l'énergie contenue dans un coefficient et la valeur de ce coefficient ainsi que le degré du polynôme correspondant. L'analyse spectrale des polynômes orthogonaux à travers leurs transformations de Fourier ainsi que celles de leurs fonctions poids pourrait servir de guide. L'interprétation physique des coefficients des polynômes orthogonaux pourrait aussi permettre d'établir des corrélations entre ces coefficients et certaines pathologies cardiaques, ce qui constitue une issue pour de nouvelles méthodes de classification automatique des signaux ECG.

## Bibliographie

- [Abenstein 82] J. P. ABENSTEIN, W. J. TOMPKINS “A New data Reduction Algorithm for Real Time ECG Analysis” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME-29, NO 1 Jan. 1982, pp. 43-48
- [Abound 92] S. ABOUND, A. ALALUF, S.ELNAV ET D.SADEH. “Real Time Abdominal Fetal ECG Recording Using Hardware Correlator”, *Comput. Biol. Med.* Vol. 22, pp.332-335, 1992.
- [Ahmed 75] N. AHMED, P. J. MILNE, S. G. HARRIS, “Electrocardiographic Data Compression Via Orthogonal Transforms”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. BME-22, n° 6, November 1975, pp. 484-487.
- [Almenar 99] V. ALMENAR, A. ALBIOL, “A new Adaptive Scheme for ECG enhancement”; *Signal Processing*, No 75, 1999, pp. 253-263 Elsevier..
- [Al Shrouf 03] A. AL SHROUF, M. ABO-ZAHHAD et S. M. AHMED “A Novel Compression Algorithm for Electrocardiogram Signals Based on the Linear Prediction of the Wavelet Coefficients”, *Digital Signal Processing*, N°13, 2003 pp. 604-622
- [Augustyniak 03] P. AUGUSTYNIAK “ Time-Frequency and Discrimination of Noise in the Electrocardiogram”, *Physiological Measurement Institute of Physics Publishing*, N°24, 2003 PP. 753-767
- [Azoulay 84] E. AZOULAY, J. AVIGNANT « mathématiques Analyse Tome 3 » Ed. Mac GRAW Hill, 1984.
- [Babsky 75] E. BABSKY, B. KHODORON. G. KOSITSKY ET A ZUBKOV. “Human Physiology” *Mir Puplicher Moscow 1975*.
- [Bahoura 97 ] M. BAHOURA, M. HASSANI, M. HUBIN, “DSP Implementation of Wavelet Transform for Real Time ECG Wave Forms Detection and Heart Rate Analysis”; *Comp. Meth. And Prog. in Biomed.* N° 52, 1997, pp. 35-44
- [Bakhvalov 76] N. BAKHVALOV “Méthodes Numériques” ;  
Edition MIR 1976.
- [Bemmel 68] J.H.V. BEMMEL “Detection of Weak Fetal Electrocardiogram by Autocorrelation and Cross-correlation of envelopes”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME-15 pp. 17-23 Jan. 1968.
- [Bilgin 04] A. BILGIN, M. W. MARCELLIN, M. I. ALTBATCH; “Wavelet Compression of ECG Signals by JPEG2000”; *Proceedings of data compression conference (DCC'04); 1068-0314/04\$ 20.00 2004 IEEE computer society*.
- [Bourreau 02] E. BOURREAU, “Polynômes Orthogonaux Simultanés et Systèmes Dynamiques Infinis”, *Thèse de Doctorat en Mathématiques appliquées. Universités des Sciences et Technologies de Lille*, 10 Mai 2002.

**[Boucheham 04]** B. BOUCHEHAM, Y FERDI and M.C. BATOUCHE : “Incorporation of Long Term Redundancy in ECG Time Domain Compression Methods Through Curve Simplification and Block Sorting”; *International Journal of signal Processing*, Vol. 1, N° 2, 2004, ISSN: 1304-4494, pp. 147 – 152.

**[Brohet 98]** C. BROHET « Electrocardiogramme 12 dérivations » *Edition Masson Paris* 1998

**[Cardenas 99]** J. L. CARDENAS-BARRERA et J.V. LORENZO- GINORI “Mean Shape Vector Quantizer for ECG Signal Compression” *IEEE Trans. Biomed., Eng.* Vol. 46 N°1, Jan. 1999.

**[Carlson 01]** J. CARLSON, R. JOHANSSON et B. OLSSON “Classification of electrocardiographic P-wave morphology” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 48 N°4 April 2001 pp. 401-405

**[Celler 96]** B. CELLER, “Physiological Monitoring” in Health Informatics in Australia” visible sur: <http://www.infocom.cqu.edu.au/HNI/Booksonline/chapter17.pdf>

**[Chaplais 99]** CHAPLAIS “Wavelet from Mallat’s Book”, site internet <http://cas.ensmp.fr/~chaplais/wavetour-presentation>

**[Chen 98]** J.CHEN et S. ITOH “ A Wavelet Transform–based ECG Compression Method Guaranteeing Desired Signal Quality” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 45 N° 12, Dec. 1998.

**[Cherkassy 01]** V. CHERKASSKY et S. KILTS «Myopotential Denoising of ECG Signals Using Wavelet Thresholding Methods” *Neural network* 14, 2001, pp. 1129-1137

**[Coeur2 06]** “Physiologie du Coeur (Chap. 19) » cours disponible sur le site : <http://ici.cegep-ste-foy.qc.ca/profs/cheber/coeur2.pdf.pdf>

**[Cohen 95]** A. COHEN, R. D. RYAN, «Wavelet and Multi-Scale Signal Processing” CHAPMAN & HALL 1995

**[Colomer 97]** A. A. COLOMER, “Adaptive ECG Data Compression Using Discrete Legendre Transform”, *Digital Signal Processing*, N° 7, 1997, pp. 222-228.

**[Cox 68]** J. R. COX, F. M. NOLLE, H. A. FOZZARD ET G.C. OLIVIER “AZTEC a Preprocessing Program for Real time ECG Rhythm Analysis” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME-15, pp. 128-129, April 1968.

**[Crowe 92]** J. A. CROWE, N. M. GIBSON, M. S. WOOLFSON AND M. G.SOMEKH, “Wavelet Transform as a Potential Tool for ECG Analysis and Compression”, *Journal of Biomedical Engineering*, Vol. 14, May 1992, pp. 268-272

**[Daskalov 99]** I. K. DASKALOV ET I. I. CHRISTOV, “Electrocardiogram Signal Preprocessing for Automatic Detection of QRS Boundaries” *Med. Eng. & Phys.* 21, 1999 pp. 37-44, ELSEVIER.

- [Daubechies 88]** I. DAUBECHIES, “Orthonormal Bases Of Compactly Supported Wavelets”, *Communication on Pure and Applied Mathematics* Vol. XLI, pp. 909-996, 1988.
- [De Lathauwer 00]** L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR et J. VANDE WALLE, « Fetal Electrocardiogram Extraction by Blind Source Subspace Separation », *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 47, N°5, May 2000 pp. 567-572.
- [Dias 01]** F. DIAS « Analyse Numérique », Polycopié Cours Université de Paris VII, Denis-Diderot, Fev 2001,  
visible sur le site : <http://www.cmla.ens-cachan.fr/utilisateurs/jmg/magi/lecture.pdf>
- [Draux 87]** A. DRAUX, P. VAN INGELANT, « Polynômes Orthogonaux et Approximants de Padé – Logiciels », *Editions Technip*, 1987.
- [Dubois 04]** R. DUBOIS, « Application des nouvelles méthodes d'apprentissage à la détection précoce d'anomalie en électrocardiographie », *Thèse de doctorat de l'université de Paris VI, spécialité Electronique*, Janvier 2004
- [Dude 06]** DUDE « polynômes orthogonaux », Article visible sur le site Internet :  
[http:// www.inflyos.net/dudepolorth.pdf](http://www.inflyos.net/dudepolorth.pdf)
- [Fayolle 06]** J. FOYOLLE, « Compression des Données sans pertes et Combinatoire Analytique », *Thèse de Doctorat, Université de Paris VII*, Mars 2006
- [Feinsilver 92]** P. FEINSILVER, R. SCHOTT “Orthogonal Polynomial Expansions via Fourier Transform”, Rapport de recherche, INRIA-LORRAINE, Sept 1992.
- [Ferrara 82]** E.R. FERRARA, B.WIDRON “Fetal ECG Electrocardiogram Enhancement by Time-Sequenced Adaptive Filtering”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol 29, pp. 458-460, 1982.
- [Fischler 02]** S. FISCHLER et T. RIVOAL , «Approximants de Padé et Séries Hypergéométriques Equilibrées », Article visible sur le site :  
<http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles/fisridef.pdf>
- [Fraden 80]** J. FRADEN et M. R. NEUMAN « QRS wave detection » *Med. & Biol. Eng. & Comp.* N° 18, March 1980, pp. 125-132.
- [Furth 88]** B. FURHT et A. PEREZ “An adaptive Real-Time ECG Compression Algorithms with Variable Threshold”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 35, pp. 489-494 June 1988
- [Gabor 46]** D. GABOR, “Theory of Communication” *Int. J. Elec. Eng.* Vol. 93 (3) pp. 429-457 1946
- [Gardenhire 65]** L.W. Gardenhire “Data compression for Biomedical Telemetry”, dans *Biomedical telemetry*, C.A. Caceres Ed. New york academy, 1965 Chap.11.
- [Gouy 02]** M. GOUY, G. HUVENT, et A. LANDUREAU « Approximant de Pade » Rapport de Recherche IREM de Lille, Juin 2002.

**[Grauel 98]** A. GRAUEL, L. A. LUDWIG et G. KIENE “ECG diagnostics by Fuzzy Decision Making” *Intern.. Journ. of Uncertainty Fuzziness and Knowledge Based systems, World Scientific* Vol. 6 N°2 1998.

**[Green 05]** R. A. GREEN, A. HAQ, “B Spline Enhanced time Spectrum Analysis” *Signal Processing*, 85, pp. 681-692, Elsevier 2005

**[Greville 67]** T.M. E. GREVILLE, “Spline Functions, Interpolation and Numerical Quadrature” *In Mathematical Methods for Digital Computer*, John Wiley & sons’ 1967 pp. 156-168

**[Hamilton 86]** P.S. HAMILTON et W. J. TOMKINS, “Quantitative Investigation of QRS Detection Rules Using the MIT / BIH arrhythmia data base” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME 33, No12 Dec. 1986 pp. 1157-1165.

**[Haugland 96]** D. HAUGLAND, J. G. HEBER, J. H. HUSΦY, “Compressing Data by Shortest Path Methods Operational Research”, *Proceedings, 1996, Springer, Berlin-Germany*

**[Haugland 97]** D. HAUGLAND, J.G. HEBER, J.H. HUSΦY; "Optimisation algorithm for ECG data compression.", *Med. Biol. Eng. Comput.* July 1997, 35 (4). Aussi disponible sur le site:www .ii.uib.no ~dag/publications/paper/spath.pdf

**[Heber 96]** J.G. HEBER, D. HAUGLAND et J. HUSΦY, “An Efficient Implementation of an Optional Time Domain ECG Coder” *Proceedings, IEEE EMBS 96* paper 543 4 Amsterdam Holland 1996.

**[Henry 93]** D. HENRY, L CLAUDON, M.ROBERT, C.Y. LEE « Détection des Complexes QRS: Une Etude Comparative et un Nouvel Algorithme Basé sur le Test du Khi 2 » *Innovation et Technologie en Biologie et Médecine*, Vol.14, N° 6, pp. 671-680, 1993

**[Hilton 97]** M. I. Hilton, “Wavelet and Wavelet Packet Compression of Electrocardiograms”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 44, N° 4, May 1997, pp. 394-402.

**[Horspool 95]** R.N; HORSPOOL et W.Y.WINDERLS, “ECG Compression Using Ziv-Lempel Techniques”, *Computer and Biomedical Research* N° 28, pp.67-86, 1995

**[Hu 97]** Y. H.HU , S. PALREDDY ET W. J. TOMPKINS “A Patient – Adaptable ECG Beat Classifier Using a Mixture of Experts Approach” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 44, N°9, Sept 99, pp. 891-900.

**[Hwang 87]** C. Hwang et K-K. SHYU “Analysis and identification of discrete time systems via discrete Legendre Orthogonal Polynomials”, *Int. J. Systems SCI*, Vol. 18, No 8, pp. 1411-1423, 1987.

**[Imai 85]** H. IMAI, N. KIMURA et Y. YOSHIDA « An Efficient Encoding Method for Electrocardiography Using Spline Functions », *Syst. computer Japan* Vol. 16, NO 3 pp. 85-94 1985.

- [Ishijimia 83]** M. ISHIJIMIA, S-B. SHIN, G.H. HOSTETTER ET J.SKLANSKY “Scan-Along Polygonal Approximation Data Compressing of Electrocardiograms”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol BME-30, NO 11 Nov.1983 pp. 723-729
- [Istepanian 00]** R.S.H. ISTEPANIAN, A.A. PETROSIAN, “Optimal Zonal Wavelet-Based ECG Data Compression for a Mobile Telecardiology System” ; *IEEE Trans. on Information Technology in Biomedicine*, Vol. 4, N° 3, sept. 2000, pp. 200 – 211.
- [Jalaleddine 90]** S. M. S. JALALEDDINE, C. G. HUTCHENS, R. D. STATTAN, W. A. COBERLY, “ECG Data Compression Techniques-A Unified Approach”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 37, N° 4, April 1990 pp. 329-343.
- [Jane 91]** R. JANE, H. RIX, P CAMINAL ET P LAGUNA « Alignments Methods for Averring of High Resolution Cardiac Signal: A comparative Study of Performance”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 38 N°6 June 1991 pp. 571-579
- [Jane 93]** R. JANE., S. OSMOS , P. LAGUNA, P. CAMINAL , « Adaptive Hermite Models for ECG Data Compression and Evaluation with Automatic Wave Detection », *Proc. Computers in Cardiology*, pp. 389-392, 1993.
- [Kadambe 99]** S. KABAMBE, R. MURRAY et G. F. BOUDREAUX BARTELS, “Wavelet transform based QRS complex detector”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 48, No 7 July 1999 pp. 838-848
- [Karczewicz 97]** M. KARCZEWICZ, M. GABBOUJ, “ ECG Data Compression by Spline Approximation”, *Signal Processing*, N° 59, 1997, pp. 43-59.
- [Khamene 00]** A. KHAMENE, S. NEGAHDARIPOUR, “A New Method for Extraction of Fetal ECG from the Composite Abdominal Signal”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 47,N0 4, April 2000, pp. 507-516.
- [Kibangou 05a]** A. KIBANGOU « Modèles de Volterra à Complexité Réduite: Estimation Paramétrique et Application à l’Egalisation des Canaux de Communication », *Thèse de Doctorat en Automatique, Traitement du Signal et des Images, Université de Nice – Sophia Antipohis*
- [Kibandjou 05 b]** A. KIBANGOU, G.FLAVIER, M.M.HASSANI « Selection of Generalized Orthonormal Bases for Second Order Volterra Filters”, *Signal Processing*, N°85, 2005, pp. 2371-2385.
- [Klingeman 67]** J. KLINGEMAN et H.V. PIPBERGER. « Computer Classifications of Electrocardiograms ». *Computer and Biomedical Research* 1, pp. 1-17 (1967)
- [Kom 01]** M. KOM « Electrocardiographie haute amplification » *Thèse de doctorat d’Etat, Université de Ydé I ; spécialité Physique Appliquée*, Mai 2001.
- [Koski 95]** A. KOSKI, M. JUHOLA, M. MERISTE, “Syntactic Recognition of ECG Signals by Attributed Finite Automat”, *Pattern, Recognition*, Vol. 28, N°12, pp.1927-1940, 1995 ELSEVIER Science.

**[Koski 96]** A. KOSKI , “Modelling ECG Signals with Hidden Markov Models”, *Artificial Intelligence in Medicine* No 8, 1996 pp. 453-471

**[Kuijlaars 03]** A. KUIJLAARS, W. V. ASSCHE, H. STAHL et F. WIELONSKY  
« Asymptotique des Approximantes de Padé Quadratiques de la Fonction Exponentielle et Problèmes de RIEMANN – HILBERT » Académie des Sciences, Editions scientifiques et médicales, ELSEVIER SAS 2003

**[Kuklinski 83]** W. S. KUKLINSKI, “Fast Walsh Transform Data-Compression Algorithm: ECG Applications”, *Medical and Biological Engineering and Computing*, N° 21, July 1983, pp. 465-472.

**[Kumar 06]** V. KUMAR, S.C. SAXENA, V.K. GIRI “Direct Data compression of ECG Signal for Telemedicine”, *International Journal of System Science*, Vol. 37, N°1 January 2006, pp. 45-63.

**[Kundu 98]** M. KUNDU, M. NASIPURI, D.K. BASU, “A knowledge Based Approach to ECG Interpretation Using Fuzzy Logic”, *IEEE Trans. on Syst. Man. Cybernetics : Part-B : Cybernetics*, Vol. 28, N°2. 1998.

**[Lagerholm 00]** M. LAGERHOLM, C. PETERSON, G. BRACCIN, L. EDENBRANDT, L. SÖRNMO; “Clustering ECG Complexes Using Hermite Functions and Self – Organizing Maps”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol 47, N° 7, July 2000. pp. 838 – 847

**[Laguna 90]** P. LAGUNA, N.V. THAKOR, P. CAMINAL, H. R. YOON “New Algorithms for QT Interval Analysis in 24 Hours Holter ECG: Performance and Applications”, *Med. & Biol. Eng. & comput.*, 28 1990, pp 67-73.

**[Laguna 92]** P. LAGUNA, D. VIGO, R.JANE, P. CAMINAL, « Automatic Wave Onset and Offset Determination in ECG Signals, Validation with the CSE database”, *Communication in IEEE conference 0276-6547/92\$3.00 1992*

**[Laguna 96]** P. LAGUNA , R. JANE, S.OLMOS, N.V. THAKOR, H. RIX, P. CAMINAL. “Adaptive Estimation of QRS Complex Wave Features of ECG Signal by the Hermite Model”; *Medical and Biological Engineering and computing*, Jan. 1996, pp.58 – 68

**[Lam 94]** J. LAM, “Analysis of Laguerre formula for approximating delay systems”, *IEEE Trans. On Automatic control*, Vol 39, N° 7, July 1994

**[Lander 93]** P. LANDER, D.L. JONES, E.J. BERBAJ et R. LAZZARA « Time-Frequency Structure of the High Resolution ECG”, *Journal of Electrocardiology*, Vol. 27 supplement, 1993

**[Laroche 06]** F. LAROCHE « Polynômes et Fonctions de Legendre », Promenade mathématiques, disponible sur : <http://promenadesmaths.free.fr>

**[Leclercq 80]** J.F. LECLERCQ. et P. COUMEL « L’Enregistrement Holter en Rythmologie », *Documentation médicale des laboratoires LABAZ* 1980.

**[Lee 99]** H. LEE, K. M. BUCKLEY, “ECG Data Compression Using Cut and Align Beats Approach and 2-D transforms”, *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, Vol.46, N° 5, May 1999, pp. 556-564.

**[Li 93]** C. LI, C. ZHENG, « QRS Detection by Wavelet Transform ». *IEEE Communication*, 0-7803 – 1377 – 1 / 93 \$3.00 c1993

**[Li 95]** C. Li., C. ZHENG, C. TAI; “Detection of QRS Characteristic Points Using Wavelet Transform”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 42, N° 1 Jan. 1995, pp. 21-28.

**[Lipschutz 84]** S. LIPSCHUTZ et A. POE « Programmation fortran théorie et applications » Série Schaum, Mc GRAW HILL 1984.

**[Lu 00]** Z. LU, D. Y. KIM, W. P. PEARLMAN, “Wavelet Compression of ECG Signals by the Set Partitioning in Hierarchical Trees Algorithm”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 47, N° 7, July 2000, pp. 849-855.

**[Madhukar 92]** B; MADHUKR et I.S.N. MURTY, “ECG Data Compression by Modelling”, *Computer and Biomedical Research* N° 26 , 1996, pp. 310-317

**[Mäkilä 91]** P.M. MÄKILÄ « Laguerre Methods and  $H^\infty$  Identification of Continuous-Time Systems”, *International Journal of control*. Vol. 53, N°3 1991 pp. 689-707.

**[Mallat 89]** S. MALLAT, “A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation”, *IEEE Trans. Pattern. Anal. Machine Intel*, Vol.11 pp. 674-693, 1989.

**[Mallat 91]** S. MALLAT, “Zero – Crossings of a Wavelet Transform”, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.37, N° 4, pp. 1019-1033 July 1991

**[Mallat 92 a]** S. MALLAT, W. L. HWANG; “Singularity Detection and Processing With Wavelets”, *IEEE Trans. on Inf. Theory*, Vol. 38, N° 2 , March 92, pp.617-643.

**[Mallat 92 b]** S. MALLAT, S. ZHONG; “Characterization of Signals from Multiscale Edges”. *IEEE Trans. Patt. Analy. Mach. Int.*, Vol. 14, N°7, July 1992 pp.710-732

**[Mammen 90]** MAMMEN, RAMAMURTHI, “Vector Quantization for compression of multichannel ECG”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 37, N° 4, 1993

**[Mandyam 97]** G. MANDYAM, N.AHMED ET N. MAGOTRA “Application to Discrete Laguerre Transform to Speech Coding”, *Proceedings IEEE 29<sup>th</sup> Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers*.

**[Marcellan 96]** F. MARCELLAN, T. E. PERZ, M. A. PINAR « Laguerre –Sobolev orthogonal polynomials », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 71, 1996, pp. 245-265.

**[Medilec 06]** “ECG sur votre PDA avec MEDILEC”, dans *Soins infirmiers et informatique*, article visible sur le site: <http://www.sixi.be> , paru le 18 Janvier 2006

[Mehta 96] S. S. MEHTA, S. C. Saxena, et H.K. VERNA. "Computer Aided Interpretation of ECG for Diagnostics", *Inter. Journ. of Syst. Science*, Vol. 27 N°1, pp. 43-58, 1996.

[Meyer 00] Y. MEYER "Wavelets and Functions with Bounded Variation from Image Processing to Pure Mathematics", *Proceedings, School on Mathematical Problems in Image Processing*, 4-22 September 2000, The Abdu Salam International Centre for Theoretical Physics.

[Miaou 02] S.-G. MIAOU, H.-L. YEN, C.-L. YIN, "Wavelet-Based ECG Compression Using Dynamic Vector Quantization with Trees Codevectors in Single Codebook", *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, Vol. 49, N°7 July 2002 pp. 671-680.

[Miaou 05] S-G. MIAOU, S-S. CHAO ; «Wavelet-Based Lossy to Lossless Compression in a Unified Vector Quantization Framework»; *Communication: IEEE trans. On Biomedical Engineering*; Vol. 52, N° 3, march 2005 ; pp. 539 – 543.

[Michael 94] C. MICHAEL, S. PASCAL, D KOUTSOURIS, N UZUNOGU « Etude d'un Système d'Apprentissage de l'Interprétation de l'ECG ». *Innov. Tech. Bol. Med.* Vol.15, N°5, 1994, pp. 604 – 612.

[Mit 92] "MIT BIH Arrhythmia Database", CD ROM, The *Harvard-Massachusetts Institute of Technology*, Division of Health Sciences and Technology, 1992.

[Moazami 04] M. MOAZAMI-GOURDARZI, A. TAHERI, M. POOYAN; "Efficient Method for ECG Compression Using Two Dimensional Multiwavelet Transform"; *International Journal of signal processing*, vol. 1 , N° 3 2004 ISSN: 1304-4494. pp. 226 – 232.

[Nashash 94] H. A. M. AL-NASHASH, "ECG Data Compression Using Adaptive Fourier Coefficients estimation", *Medical Engineering and Physics*, Vol. 16, January 1994, p. 62-66.

[Nelson 93] M. Nelson « La Compression des Données »  
Dunod 1993

[Neuman 92] M.R. NEUMAN; "Biopotential amplifiers" dans "Medical instrumentation. Application and design". 2nd edition, 1992, Houghton MIFFLIN Company; Boston Toronto; pp. 288-300.

[Nikiforov 83] A. NIKIFOROV, V. OUVAROV, "Fonctions Spéciales de la Physique Mathématique", *Editions Mir-Moscou*, 1983.

[Nygaard 99] R. NYGAARD, D. HAUGLAND, J. H. HUSΦY "Signal Compression by Second Order Polynomials and Piecewise non Interpolating Approximation", *Rapport Interne de Recherche, Departement of Electrical and Computing Engineering 2557 Ullandhang 4091 Stavanger, Norway.*

[Nygaard 01] R. NYGAARD, G. MELNIKOV, A. K. KATSAGELOS, "A Rate Distorsion Optimal ECG Coding Algorithm", *IEEE Transaction On Biomedical Engineering*. Vol 48, N° 1, Jan. 2001, pp. 28-40.

**[Olmos 99]** S. Olmos, J. GARCIA, R. JANE, P. LAGUNA; “ECG Compression Plus Noise Filtering with Truncated Orthogonal expansions”, *Signal Processing*, No 79, 1999 pp. 97-115

**[Pan 85]** J. PAN et W. J. TOMKINS “A Real Time QRS Detection Algorithm”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME-32, pp. 220-236 May 1985.

**[Philips 92]** W. PHILIPS, G. DE JONGHE; « Data Compression of ECG's by High-Degree Polynomial Approximation », *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 39, N° 4, April 1992, pp. 330-337.

**[Philips 93]** W. PHILIPS, « ECG Data Compression with Time-Warped Polynomials », *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 40, N° 11, November 1993, pp. 1095-1101.

**[Philips 97]** W. PHILIPS “A fast algorithm for Orthogonalizing Polynomials on Arbitrarily Shaped Region”, *Multidimensional systems and Signal processing*, 8, pp. 409-421, 1997

**[Piperger 62]** H.V. PIPERGER, FW STALLAM, “Use of Computer in Electrocardiogram Interpretation” *American heart Journal*, N°64, pp. 285-286, 1962.

**[Physionet 05]** <http://www.physionet.org/>

**[Recipes 92]** Cambridge University Press *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, (ISBN 0-521-43108-5), 1988-1992

**[Rollins 00]** D. L. ROLLINS, C. R. KILLINGSWORTH, G. P. WALCOTT, R. K. JUSTICE, R. E. IDEKER, “A Telemetry System for the Study of Spontaneous Cardiac Arrhythmias”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 47, July 2000, pp. 887-892.

**[Senhadji 95]** L. SENHADJI, G. CARRAULT, J. J. BELLANGER et G. PASSARIELLO. « Comparing Wavelet Transforms for Recognizing Cardiac Patterns », *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 0739- 51 75/95 pp. 167-173 March 95

**[Shankara 86 ]** R. SHANKARA et MURTHY “ECG Data Compression Using Fourier descriptors” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 33 N° 4, 1986.

**[Sörnmo 81]** L. SÖRNMO, P.O. BÖRJESSON, M.E. NYGARDS, O. PAHLM. “A method for evaluation of QRS Shape Feature Using a Mathematical Model for ECG”; *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME – 28, N° 10 Oct. 1981 pp. 713 – 717

**[Stamkopoulos 98]** T. STAMKOPOULOS, K. DIAMANTARAS, N. MAGLAVERAS, M. STRINTZIS “ECG analysis Using Nonlinear PCA Neural Networks for Ischemia Detection” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol 46, NO 11, Nov. 1998, pp. 3058-3067.

**[Stanley 87]** A. STANLEY, M.D. RUBIN “The Principles of Biomedical Instrumentation, A Beginners guide”, Year Book Medical Publisher, Inc Chicago-London 1987

**[Szegö 75]** G. SZEGÖ “Orthogonal polynomials”, *American Mathematical Society*, Vol. 23, fourth edition 1975.

**[Thakor 84]** N.V. THAKOR, J.G. WEBSTER, W.J. TOMPKINS “Estimation of QRS Complex Power Spectra for Design of QRS Filter”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol BME -31, N°11 Nov. 1984 pp. 702-706.

**[Thakor 93]** N. V. THAKOR, Y. SUN, H. RIX, P; CAMINAL , “Multiwave: A Wavelet-Based ECG Data Compression Algorithm”, *IEICE Transactions on Information & system*, Vol. E76-D, N° 12, December 1993, pp. 1462-1469.

**[Trenoguine 85]** V. TRENOGUINE « Analyse Fonctionnelle », Edition MIR 1985

**[Velasco 05]** M. B-VELASCO, F. C. ROLDON, I.G. LLORENTE, J.B-VELASCO, A-APARICO,L-FERRERAS; “On the use of PR and CR parameters for ECG compression”, *Medical Engineering and physics*, No 27, 2005, pp. 798-802

**[Wachowiak 00]** M.P. WACHOWIAK, G.S. RASH, P.M. QUESADA et A. H. DESOKY ; “Wavelet Noise Removal of Biomechanical Signals: A Comparative Study”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 47, N° 3, March 2000.

**[Waku 93 ]** J. K. WAKU “Ondelettes et Applications en Imagerie et en Calcul de Surfaces », *Thèse de Doctorat, Université Joseph FOURIER – GRE NOBLE*, 1993.

**[Wahlberg 91]** B. WAHLBERG “System Identification Using Laguerre Models”, *IEEE Trans. on automatic control*, Vol. 36, N°5 May 1991 pp. 1517-1521

**[Walter 01]** G. G. WALTER, X. SHEN “Wavelets and Other Orthogonal Systems”, *CHAPMAN & HALL/CRS 2<sup>nd</sup> edition 2001*.

**[Womble 77 ]** M. E. WOMBLE, J. S. HALLIDAY, S. K. MITTER, M. C. LANCASTER, J. H. TRIEBWASSER, “Data Compression for Storing and Transmitting ECG’s / VCG’s”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 65, N° 5, May 1977, pp. 703-706 .

**[Wu 01]** S. WU, Y. QIAN, Z. GAO et G. LIN, « A Novel Beat to Beat Detection of Ventricular Late Potentials”, *Communication IEEE Trans. on Biomed. Eng.* Vol. 48, N°8 Aug. 2001, pp. 931-935.

**[Xue 92]** Q.XUE, Y.H. HU, W.J. TOMPKINS “ Neural-Network-Based Adaptive Matched Filtering for QRS Detection”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. 39, N°4 April 1992 pp. 317-329.

**[Zou 94]** F. ZOU, R. R. GALLAGHER, “ECG Data Compression with Wavelet and Discrete Cosine Transforms”, *ISA* , 1994 – paper #94-084, pp. 57-62.

# Annexes

## Annexe A

### A - Algorithmes de Quelques détecteurs de complexes QRS

$X(n)$  désigne l'échantillon N°  $n$  de la portion du signal  $X$  en traitement.  $\text{Length}(X)$  est la taille de  $X$ ,  $c$ 'est donc le nombre d'échantillons contenus dans cette portion du signal

#### A-1 Algorithme de FRADEN et NEUMAN [Fraden 80]

**Principe** : Le signal est recentré, un seuil est calculé, les données sont ensuite rectifiées et dérivées. La détection est effective quand un point de la dérivée dépasse un certain seuil [8].

#### **Algorithmique** :

Début

$X(n) = X(1), X(2), \dots, X(\text{length}(X))$

pour  $n = 1 : \text{length}(X) - 1$

$AT = 0.4 * \max[X(n)]$  ; %calcul du seuil d'amplitude AT

fin pour

% rectifions la matrice X

pour  $n = 1 : \text{length}(X) - 1$

si  $X(n) \geq 0$ ,

$Y0(n) = X(n)$

fin si

fin pour

pour  $n = 1 : \text{length}(X) - 1$

si  $X(n) < 0$ ,

$Y0(n) = -X(n)$  ;

fin si

fin pour

% filtrage de la matrice

pour  $n = 1 : \text{length}(X) - 1$ ,

si  $Y0(n) \geq AT$ ,

$Y1(n) = Y0(n)$

fin si

fin pour

```

pour n = 1 : length (X) - 1,
    si Y0(n) < AT,
        Y1(n) = AT ;
    fin si
fin pour
% la matrice dérivée première est calculée pour chaque point de Y1
pour n = 2 : length(X)-2
    Y2(n) = Y1(n+1) - Y1(n-1)
fin pour
% un QRS est détecté si
pour i = 2 : length(X)-2
    si Y2(i) > 0.7
    finsi
afficher ('QRS détecté')
fin pour
fin

```

## A-2 Algorithme de MENARD

**Principe** : On calcule la dérivée du signal selon une formule spécifique, on élabore un seuil à partir de la dérivée obtenue, le premier point dépassant ce seuil indique le début d'un complexe.

### **Algorithmique** :

Début

```

pour n = 4 : length(X) - 4,
    Y(n) = -2*X(n-2) - X(n-1) + X(n+1) + 2*X(n+2)
fin pour
% Elaboration du seuil ST :
pour n = 4 : length(X) - 4,
    ST = 0.70*max[Y(n)]
fin pour
% QRS détecté lorsque :
pour i = 4 : length(X) - 4,
    si Y(i) > ST
    finsi
fin pour

```

```

    afficher ('QRS détecté')
  fin pour
fin

```

### A-3 Algorithme de HOLSINGER

**Principe** : On cherche un point de la dérivée dépassant un seuil donné et il y a détection si un des trois points suivants dépasse le même seuil.

**Algorithmique** :

```

Début
pour n = 3 : length (X)-3
    Y(n) = X(n+1) - X(n-1) ; % calcul de la dérivée première
fin pour
% recherche du premier point :
pour n = 3 : length (X)-3
    Y(i) > 0.45
% recherche d'un autre point :
    si Y(i+1) , Y(i+2) , Y(i+3) > 0.45
    fin si
    Afficher ('QRS détecté')
fin pour
fin

```

### A-4 Algorithme de AHLSTROM et TOMPKINS

**Principe** : On calcule la valeur absolue de la dérivée, puis on la lisse, on y ajoute la dérivée seconde, on calcule deux seuils. On recherche alors un point dépassant le premier seuil, et il y a détection si les six points suivants atteignent ou dépassent le second seuil.

**Algorithmique** :

```

début
%calcul de la dérivée première :
pour n = 5 : length(X)-5
    Y0(n) = abs[X(n+1) - X(n-1)]
fin pour
%lissage de la dérivée première :

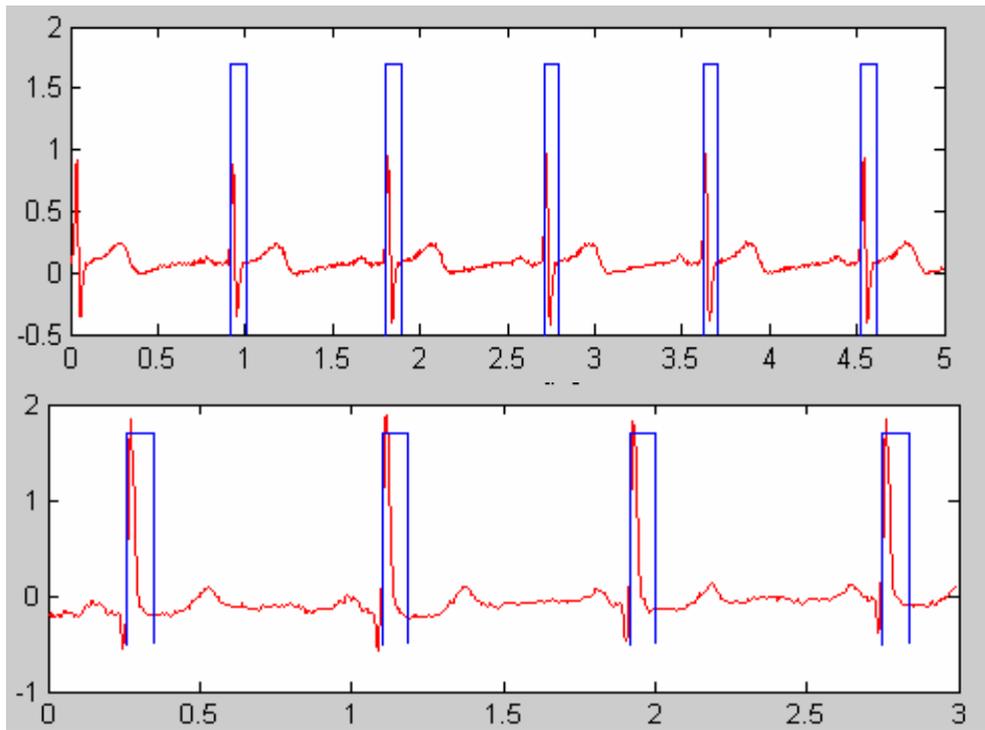
```

```

pour n = 5 :length(X)-5
    Y1(n) = [Y0(n-1) + 2*Y0(n) + Y0(n+1)]/4
fin pour
    %calcul de la dérivée seconde pour chaque point de X :
pour n = 5 :length(X)-5
    Y2(n) = abs[X(n+2) - 2*X(n) + X(n-2 )]
fin pour
pour n = 5 :length(X)-5
    Y3(n) = Y1(n) + Y2(n)
fin pour
    %calcul de seuils
pour n = 5 :length(X)-5
    PT = 0.8*max[Y3(n)]           % seuil primaire
    ST = 0.1*max[Y3(n)]         % seuil secondaire
fin pour
pour i = 5 :length(X)-5,
    si Y3(i) >= PT &
        Y3(i+1) &
        Y3(i+2) &
        ...
        ...
        ...
        Y3(i+6) >= ST
    fin si
    Afficher ('QRS détecté')
fin pour
fin

```

La figure A-1 montre deux exemples d'encadrement des complexes QRS que nous avons réalisé en utilisant l'algorithme de Ahlstrom et Tompkins.



**Figure A-1 : Exemples d'encadrement des QRS à travers l'algorithme de TOMPKINS.**

# Annexe B

## B - Polynômes orthogonaux à variable discrète

### B-1 Généralités

L'utilisation des fonctions à variable continue n'est pas souvent indiquée pour manipuler les signaux échantillonnés ou numériques. On a pu élaborer des polynômes orthogonaux à variable discrète, jouissant des mêmes propriétés que leurs homologues continus.

L'orthogonalité des polynômes orthogonaux à variable discrète est exprimée par la formule (B-1) :

$$\sum_i y_m(t_i) y_n(t_i) \omega(t_i) = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (\text{B-1})$$

Ces polynômes conservent toutes les propriétés montrées dans le cas des polynômes orthogonaux à variable continue. Ils vérifient en particulier la relation de récurrence :

$$t_i y_n(t_i) = a_n y_{n+1}(t_i) + b_n y_n(t_i) + c_n y_{n-1}(t_i) \quad (\text{B-2})$$

Si  $p_n(x) = j_n t^n + k_n t^{n-1} + \dots$ ; on détermine les coefficients de la relation de récurrence par :

$$a_n = \frac{j_n}{j_{n+1}}, \quad b_n = \frac{k_n}{j_n} - \frac{k_{n+1}}{j_{n+1}}, \quad c_n = \frac{j_{n-1}}{j_n} \cdot \frac{\|y_n\|^2}{\|y_{n-1}\|^2} \quad (\text{B-3})$$

$j_n$  et  $k_n$  sont respectivement les coefficients des monômes  $t^n$  et  $t^{n-1}$ , pour un polynôme de degré n.

$$\|y_n\|^2 = \sum_i y_n^2(t_i) \omega(t_i) \quad (\text{B-4})$$

### B-2 Polynômes de Tchebychev et polynômes de Hann

Tchebychev a étudié un cas de polynômes orthogonaux à variable discrète  $t_n(x)$  associé à la  $d\mu(x)$  où  $\mu(x)$  est un train d'impulsions à saut unité aux instants  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . N est ici un entier naturel. On a :

$$t_n(x) = n! \Delta^n C_x^n C_{x-N}^n \quad (\text{B-5})$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \quad \text{avec } \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

pour une valeur n fixée, on a une remarquable formule :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-n} t_n(Nx) = P_n(2x-1) \quad (\text{B-6})$$

$P_n(x)$  est ici le polynôme de Legendre de degré n.

Les polynômes de Tchebychev  $t_n(x)$  sont en fait un cas particulier des polynômes de Hann

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x). \text{ On a : } t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x)$$

Les caractéristiques principales des polynômes de Hann et des polynômes de Tchebychev sont rassemblées dans le tableau B-1.

**Tableau B-1 : Caractéristiques principales des polynômes de Hann et de Tchebychev**

$y_n(x)$	$h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$t_n(x)$
$]a, b[$	$(0, N)$	$(0, N)$
$\omega(x)$	1) $\frac{\Gamma(\beta + 1 + x)\Gamma(N + \alpha - x)}{\Gamma(1 + x)\Gamma(N - x)}$ ( $\alpha > -1, \beta > -1$ ) 2) $\frac{1}{\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - \alpha - N + x)\Gamma(N - x)}$ ( $\alpha < 1 - N, \beta < 1 - N$ )	1
$\sigma(x)$	$x(N + \alpha - x)$	$x(N - x)$
$\tau(x)$	$-(\alpha + \beta + 2)x + (\beta + 1)(N - 1)$	$-2x + N - 1$
$\lambda_n$	$n(\alpha + \beta + n + 1)$	$n(n + 1)$
$B_n$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$
$j_n$	$\frac{1}{n!}(\alpha + \beta + n + 1)_n$	$\frac{1}{n!}(n + 1)_n$
$k_n$	$-\frac{1}{(n-1)!} \left[ (\beta + 1)(N - 1) + \frac{n-1}{2}(\alpha - \beta + 2N - 2) \right] (\alpha + \beta + n + 1)_{n-1}$	$-\frac{N-1}{(n-1)!} (n)_n$
$\ y_n(x)\ ^2$	1) $\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)_N}{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(N - n - 1)!}$ , ( $\alpha > -1, \beta > -1$ ) 2) $\frac{(-\alpha - \beta - n - N)_n}{(-\alpha - \beta - 2n - 1)n!(N - n - 1)!\Gamma(-\alpha - n)\Gamma(-\beta - n)}$ , $\alpha < 1 - N, \beta < 1 - N$	$\frac{(n + 1)!}{(2n + 1)(N - n - 1)!}$
$a_n$	$\frac{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$	$\frac{n + 1}{2(2n + 1)}$
$b_n$	$\frac{(\beta + 1)(\alpha + \beta)(N - 1) + n(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha - \beta + 2N - 2)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$	$\frac{1}{2}(N - 1)$
$c_n$	$\frac{(n + \alpha)(n + \beta)(N - n)(N - n + \alpha + \beta)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1)}$	$\frac{n(N^2 - n^2)}{2(2n + 1)}$

### B-3 Les polynômes de Meixner, Krawtchouk et de Charlier

La formule de Rodrigue pour l'équation aux différences admet comme solutions dans ces trois cas :

$$\begin{aligned}
 * \quad \omega(t) &= C \frac{\mu^t \Gamma(\gamma + t)}{\Gamma(t + 1)} \\
 * \quad \omega(t) &= C \frac{\mu^t}{\Gamma(t + 1) \Gamma(\gamma + 1 - t)} \\
 * \quad \omega(t) &= \frac{\mu^t}{\Gamma(t + 1)}
 \end{aligned} \tag{B-7}$$

où  $\mu$  et  $\gamma$  sont des constantes.

Dans le premier cas, on satisfait les conditions aux limites et s'assure que  $\omega(t)$  est positif en posant :

$$\begin{aligned}
 ]a, b[ &= ]0, +\infty[ \\
 0 < \mu < 1, \quad \gamma > 0, \quad \text{et } C &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} ; \text{ on obtient alors} \\
 \omega(t) &= \frac{\mu^t (\gamma)_t}{\Gamma(t + 1)} \quad \text{avec } (\gamma)_t = \frac{\Gamma(\gamma + t)}{\Gamma(\gamma)}
 \end{aligned} \tag{B-8}$$

Les polynômes correspondants sont les polynômes de Meixner  $m_n^{(\gamma, \mu)}(t)$

Dans le second cas, on choisit :

$$\begin{aligned}
 ]a, b[ &= [0, N + 1[ \\
 \gamma &= N, \quad \mu = \frac{p}{q} \quad (p > 0, q > 0, p + q = 1) \quad \text{et } C = q^N N!
 \end{aligned}$$

$$\text{On aboutit à la fonction poids } \omega(t_i) = C_N^i p^i q^{N-i} \quad \text{avec } C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!} \tag{B-9}$$

$\omega(t_i)$  n'est autre que la distribution binomiale très utilisée en calcul de probabilité. Les polynômes qui correspondent à ces conditions sont des polynômes de Krawtchouk  $k_n^{(p)}(t)$

Dans le dernier cas, lorsqu'on pose :  $]a, b[ = [0, +\infty[$ ,  $C = e^{-\mu}$ , la fonction poids qu'on obtient est la distribution de Poisson :

$$\omega(t_i) = \frac{e^{-\mu} \mu^{t_i}}{i!} \quad \text{avec } \mu > 0 \tag{B-10}$$

Les polynômes orthogonaux correspondants sont les polynômes de Charlier  $c_n^{(\mu)}(t_i)$

Les caractéristiques principales des polynômes de Meixner, de Krawtchouk et Charlier sont indiquées dans le tableau B-2.

Nombreux autres cas de polynômes orthogonaux d'une variable discrète sont étudiés dans [Szegő 75].

**Tableau B-2 : Caractéristiques des polynômes de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier**

$y_n(x)$	<b>Meixner</b>	<b>Krawtchouk</b>	<b>Charlier</b>
	$m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	$k_n^{(p)}(x)$	$c_n^{(\mu)}(x)$
$]a, b[$	$(0, \infty)$	$(0, N + 1)$	$(0, \infty)$
$\omega(x)$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(1 + x) \Gamma(\gamma)}$ , ( $\gamma > 0, 0 < \mu < 1$ )	$\frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(1 + x) \Gamma(N + 1 - x)}$ ( $p > 0, q > 0, p + q = 1$ )	$\frac{e^{-\mu} \mu^x}{\Gamma(1 + x)}$ , ( $\mu < 0$ )
$\sigma(x)$	$x$	$x$	$x$
$\tau(x)$	$\gamma\mu - x(1 - \mu)$	$(1/q)(Np - x)$	$\mu - x$
$\lambda_n$	$n(1 - \mu)$	$\frac{n}{q}$	$n$
$B_n$	$1/\mu^n$	$((-1)^n q^n)/n!$	$1/\mu^n$
$j_n$	$\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^n$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(-\mu)^n}$
$k_n$	$n\left(\gamma + \frac{n-1}{2} \frac{\mu+1}{\mu}\right) \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}$	$-\frac{Np + (n-1)\left(\frac{1}{2} - p\right)}{(n-1)!}$	$\frac{n\left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{\mu-1}{\mu}\right)}{(-\mu)^{n-1}}$
$\ y_n\ ^2$	$\frac{n!(\gamma)_n}{\mu^n (1 - \mu)^\gamma}$	$\frac{N!}{n!(N-n)!} (pq)^n$	$\frac{n!}{\mu^n}$
$a_n$	$\frac{\mu}{\mu - 1}$	$n+1$	$-\mu$
$b_n$	$\frac{n + \mu(n + \gamma)}{1 - \mu}$	$n + p(N - 2n)$	$n + \mu$
$c_n$	$\frac{n(n-1 + \gamma)}{\mu - 1}$	$pq(N - n + 1)$	$-n$

# Annexe C

## C - Paramètres pour transformations de Legendre

Tableau C-1 : Zéros de quelques polynômes de Legendre et Nombres de Christoffel pour  $P_{44}$

$j$	$P_{44}$		$P_{46}$	$P_{50}$
	$x_j$	$G_{j,P}$	$x_j$	$x_j$
1	-0.9982	-0.0024	-1.0005	-1.0107
2	-0.9933	0.0018	-0.9892 + 0.0069i	-0.9987 + 0.0210i
3	-0.9797	-0.0207	-0.9892 - 0.0069i	-0.9987 - 0.0210i
4	-0.9667	0.0095	-0.9580 + 0.0089i	-0.9654 + 0.0340i
5	-0.9428	0.0497	-0.9580 - 0.0089i	-0.9654 - 0.0340i
6	-0.9200	0.0199	-0.9184	-0.9168 + 0.0327i
7	-0.8875	0.0421	-0.9021	-0.9168 - 0.0327i
8	-0.8548	0.0328	-0.8646	-0.8647
9	-0.8145	0.0443	-0.8306	-0.8563
10	-0.7727	0.0431	-0.7908	-0.8301
11	-0.7252	0.0497	-0.7474	-0.7787
12	-0.6754	0.0515	-0.7012	-0.7482
13	-0.6214	0.0556	-0.6512	-0.6998
14	-0.5647	0.0582	-0.5987	-0.6569
15	-0.5050	0.0610	-0.5432	-0.6072
16	-0.4429	0.0633	-0.4853	-0.5574
17	-0.3786	0.0653	-0.4251	-0.5043
18	-0.3124	0.0671	-0.3631	-0.4499
19	-0.2446	0.0684	-0.2993	-0.3934
20	-0.1756	0.0695	-0.2343	-0.3355
21	-0.1057	0.0702	-0.1681	-0.2763
22	-0.0353	0.0705	-0.1012	-0.2160
23	0.0353	0.0705	-0.0338	-0.1549
24	0.1057	0.0702	0.0338	-0.0932
25	0.1756	0.0695	0.1012	-0.0311
26	0.2446	0.0684	0.1681	0.0311
27	0.3124	0.0671	0.2343	0.0932
28	0.3786	0.0653	0.2993	0.1549
29	0.4429	0.0633	0.3631	0.2160
30	0.5050	0.0610	0.4251	0.2763
31	0.5647	0.0582	0.4853	0.3355

32	0.6214	0.0556	0.5432	0.3934
33	0.6754	0.0515	0.5987	0.4498
34	0.7252	0.0496	0.6512	0.5043
35	0.7727	0.0432	0.7012	0.5574
36	0.8145	0.0441	0.7475	0.6072
37	0.8548	0.0331	0.7907	0.6568
38	0.8875	0.0415	0.8306	0.7000
39	0.9200	0.0210	0.8647	0.7478
40	0.9428	0.0766	0.9018	0.7790
41	0.9667	0.0100	0.9191	0.8306
42	0.9797	-0.04597	0.9580 - 0.0082i	0.8525
43	0.9933	0.0025	0.9580 + 0.0082i	0.8686
44	0.9982	-0.0015	0.9891 - 0.0064i	0.9167 - 0.0321i
45			0.9891 + 0.0064i	0.9167 + 0.0321i
46			1.0004	0.9653 - 0.0337i
47				0.9653 + 0.0337i
48				0.9986 - 0.0208i
49				0.9986 + 0.0208i
50				1.0106

Le tableau C-2 montre les coefficients  $C_{n,p}$  des séries de Legendre pour 4 types de segmentations en utilisant le signal ECG fantôme que nous avons simulé.

**Tableau C-2 : Coefficients des séries de Legendre  $C_{n,p}$  pour différentes segmentations**

$n$	$g(t) : \text{P-P}$	Segment R-R	Intervalle S-S	Centré sur QRS
0	0.5915	-0.2715	1.0046	0.6133
1	-0.4430	0.1443	1.4343	-0.0088
2	0.1702	-1.4286	0.6225	-0.2616
3	-0.4082	-0.0321	2.0960	0.0985
4	0.3580	-0.7378	-0.2955	-0.5586
5	0.6145	-2.1448	0.1702	-0.3915
6	-0.9533	0.9879	0.7739	1.3209
7	-0.6169	-0.6535	-2.5392	0.9534
8	1.9627	-1.0019	-0.0828	-1.5099
9	-0.3306	1.8330	-2.3211	-1.6881
10	-2.8369	-1.9064	-1.0511	1.1923
11	3.5459	0.2252	-0.1401	2.3018
12	-1.0184	-1.6893	1.7444	-0.9562

13	-1.1710	0.0825	1.3736	-2.4207
14	2.4373	-1.2220	2.2375	1.3198
15	-1.6565	0.5920	0.9575	1.8290
16	0.2439	1.8859	-1.3221	-2.2012
17	1.4141	0.2141	-0.6503	-0.6596
18	-2.1107	3.2616	-2.5194	2.9702
19	0.6674	0.6230	-0.8185	-0.6416
20	1.7722	3.0007	-1.4944	-3.0179
21	-2.7050	0.4687	0.3936	1.5875
22	1.5170	3.0831	-1.0844	2.2806
23	0.1825	0.8257	0.8788	-1.9574
24	-1.1007	1.7044	-0.1365	-1.2291
25	1.2288	0.9650	0.5860	1.8911
26	-0.7284	-0.3592	0.6842	0.3899
27	-0.2571	-0.1032	-0.2743	-1.6991
28	0.9248	-2.1828	0.3144	0.0922
29	-0.5014	-0.4796	-1.2358	1.5704
30	-0.5658	-3.2165	0.6618	-0.4348
31	1.2006	-0.4034	-1.0513	-1.4440
32	-1.1000	-3.3760	1.8368	0.8395
33	0.6729	-0.8736	-0.3892	1.1425
34	-0.1517	-3.3228	1.7955	-1.2103
35	-0.3922	-1.3657	0.0602	-0.6109
36	0.6669	-3.0041	1.1074	1.2734
37	-0.5102	-1.1124	1.0664	0.0100
38	0.2304	-2.2319	1.3202	-0.9310
39	-0.1629	-0.7469	2.0177	0.4237
40	0.2581	-1.3485	1.2886	0.4206
41	-0.3315	-0.4008	1.5925	-0.5945
42	0.3604	-0.5682	0.2431	-0.0831

*Annexe D*

**D – Communication présentée à la conférence IEEE  
EMBC 07**

